ROYAUME DU MAROC

--*-*-*

HAUT COMMISSARIAT AU PLAN

--*-*-*-*-*-*

INSTITUT NATIONAL
DE STATISTIQUE ET D'ECONOMIE APPLIQUEE

INSEA

Projet de Fin d'Etudes

*****

Calcul de la Funding Value Adjustment et Prise en compte des CSA non standards

Préparé par: ***M. ZAARI JABRI Montacir***

Sous la direction de: ***M. QALLI Yassine (INSEA)***
Mme. BADRAOUI Safae (SGATS)
M. JALLOULI Hatem (SGCIB)
M. GARAPON Charles-Henri (SGCIB)

Soutenu publiquement comme exigence partielle en vue de l'obtention du

Diplôme d'Ingénieur d'Etat

Filière : Actuariat-Finance

Devant le jury composé de :

- ***M. QALLI Yassine*** (INSEA)
- ***M. / Mme Prénom et Nom*** (INSEA)
- ***Mme. BADRAOUI Safae*** (SGATS)

Dédicaces

A ma Maman…

Remerciements

Je tiens à exprimer ma gratitude envers mes maîtres de stage Mme **Safae BADRAOUI**, **Mr Hatem JALLOULI** et **Mr Charles-Henri GARAPON** qui ont si merveilleusement dirigé ce travail, pour le temps qu'ils m'ont généreusement consacré pour veiller au bon déroulement de ce projet et la diversité des savoirs auxquels ils m'ont fait part.

Mes remerciements s'adressent également à **Mr Brahim SENTISSI** pour l'ensemble des connaissances qu'il m a communiqué ainsi qu'à toute l'équipe SG ATS pour le professionnalisme et les encouragements qu'ils m'ont accueilli avec.

Je remercie particulièrement **Mr Yassine EL QALLI** de m'avoir encadré, conseillé et suivi tout au long de ce travail.

A l'issue des trois agréables années passées au sein de l'Institut National de Statistique et d'Economie Appliquée (INSEA), j'adresse mes remerciements à l'ensemble du corps professoral et administratif pour l'inestimable qualité de l'enseignement qui m'a été dispensé.

Résumé

Le but de ce travail est d'étudier la FVA avec la prise en compte des CSA non-standard et de quelques conditions de collatéralisation.

Pour ce faire on explique la FVA, sa raison économique et sa formulation mathématique notamment quand certains aspects de CSA sont pris en compte.

Ensuite on présente la modélisation des taux nécessaire au pricing et à l'évaluation des éléments intervenants dans le calcul de la FVA. On explicite aussi la méthode Monte-Carlo utilisée et les étapes de son fonctionnement.

Finalement on implémente un *pricer* complet sous C# qui nous effectue les différents calculs nécessaires avant d'en faire un *pricer* FVA.

Mots clés : FVA, CSA, Collatéral, Monte-Carlo, Funding, Modèle de taux, Xva, Swap de taux, Libor, Taux négatifs, coût de financement.

Abstract

The aim of this work is to study the Xva analysis within the impact of non-conventional collateral terms on FVA.

For this purpose, we will detail the economic aspect of the FVA, its mathematical formulation and try to quantify the impact of CSA and collateral terms on its calculation.

Then, we present interest rate modeling and introduce interest rate derivatives pricing. We also show how to evaluate and age the market observables included in the FVA computation. We explain the Monte-Carlo scheme and steps driven to get an FVA simulation.

Finally, the implementation of simulation and evaluation is done under a C# framework and giving a FVA *pricer*.

Key words: FVA, CSA, Collateral, Monte-Carlo, Funding, Interest Rate Models, Xva, IR Swap, Ois-Libor Discounting, Negative Rates, Funding cost.

Liste des abréviations

XVA: X Valuation Adjustment.

FVA: Funding Valuation Adjustment.

CSA: Credit Support Annex.

HW1: Hull-White à un facteur.

OIS: OverNight Indexed Swap.

EONIA: Euro OverNight Index Average.

LIBOR: London Interbank Offered Rate.

FX: Foreign Exchange rate.

Table des figures

Liste des tableaux

Table des matières

Introduction

Dans le monde des produits dérivés les faits économiques et financiers font que les références et les fondamentaux sont souvent remis en cause et donnent lieu à beaucoup de débats concernant la valorisation de ces produits dans les marchés OTC.

La valorisation des produits dérivés a connu de réels changements ces dernières années avec l'introduction d'ajustements aux prix de ces produits. Des ajustements principalement liés à la prise en compte du risque de contrepartie et aussi le coup de financement. Le calcul systématique de ces ajustements est devenu la norme : pour une banque ou un acteur dans le marché, il s'agit d'une part d'intégrer dans la valorisation de ses dérivés l'espérance des pertes futures en cas de défaut de l'une de ses contreparties (cf. CVA). Un autre ajustement de même importance est aussi souvent pris en compte : la FVA. Il s'agit du montant des coûts ou gains de financement liés à une collatéralisation imparfaite ou une absence totale de collatéral.

Ces ajustements sont calculés pour différentes raisons : au front office afin de valoriser de manière adéquate les positions en portefeuille et pour évaluer le prix de chaque dérivé à traiter. Mais également pour la publication des comptes de la banque nécessitant une juste valorisation de son portefeuille de dérivés. Et à titre réglementaire, pour le calcul des fonds propres (cf. CVA réglementaire).

L'ajustement du coût de financement se matérialise dans la FVA qui a émergé en repensant la valorisation d'un dérivé sous un contrat CSA. Contrairement à la CVA, aucun cadre réglementaire n'existe pour la FVA.

Cadre du Stage

Organisme d'accueil

Le stage s'est déroulé au sein de la Société Générale Africa Technologies & Services (SG ATS), qui est une filiale du groupe Société Générale (SocGen). Elle regroupe les services Recherche & Développement des activités de marché de la Banque de Financement et d'Investissement (SG CIB). Basée à Casablanca, Société Générale Africa Technologies & Services a ouvert ses portes début 2014.

Le groupe Société Générale

Le groupe Société Générale, est l'un des principales banques de France. Faisant partie du CAC40, elle est la sixième capitalisation boursière française. Les principaux domaines d'activité de ce groupe sont : la banque, les assurances, le conseil et le financement. La Société Générale Corporate & Investment Banking SGCIB est la banque de financement et d'investissement du groupe SG, elle est présente dans 33 pays et 11000 personnes y travaillent.

L'engagement, la responsabilité, l'esprit d'équipe et l'innovation sont les valeurs partagées par tous ses collaborateurs.

DEVELOPPONS ENSEMBLE
L'ESPRIT D'EQUIPE
SOCIETE GENERALE

Société Générale est l'un des tout premiers groupes européens de services financiers. S'appuyant sur un modèle diversifié de banque universelle, le Groupe allie solidité financière et stratégie de croissance durable avec l'ambition d'être la banque relationnelle, référence sur ses marchés, proche de ses clients, choisie pour la qualité et l'engagement de ses équipes.

Acteur de l'économie réelle depuis 150 ans, Société Générale emploie plus de 148 000 collaborateurs, présents dans 76 pays, et accompagne au quotidien 32 millions de clients dans le monde entier en offrant une large palette de conseils et solutions financières sur mesure aux particuliers, entreprises et investisseurs institutionnels, qui s'appuie sur trois pôles métiers complémentaires :

- **La banque de détail en France** avec les enseignes Société Générale, Crédit du Nord et Boursorama qui offrent des gammes complètes de services financiers avec une offre multi-canal à la pointe de l'innovation digitale.

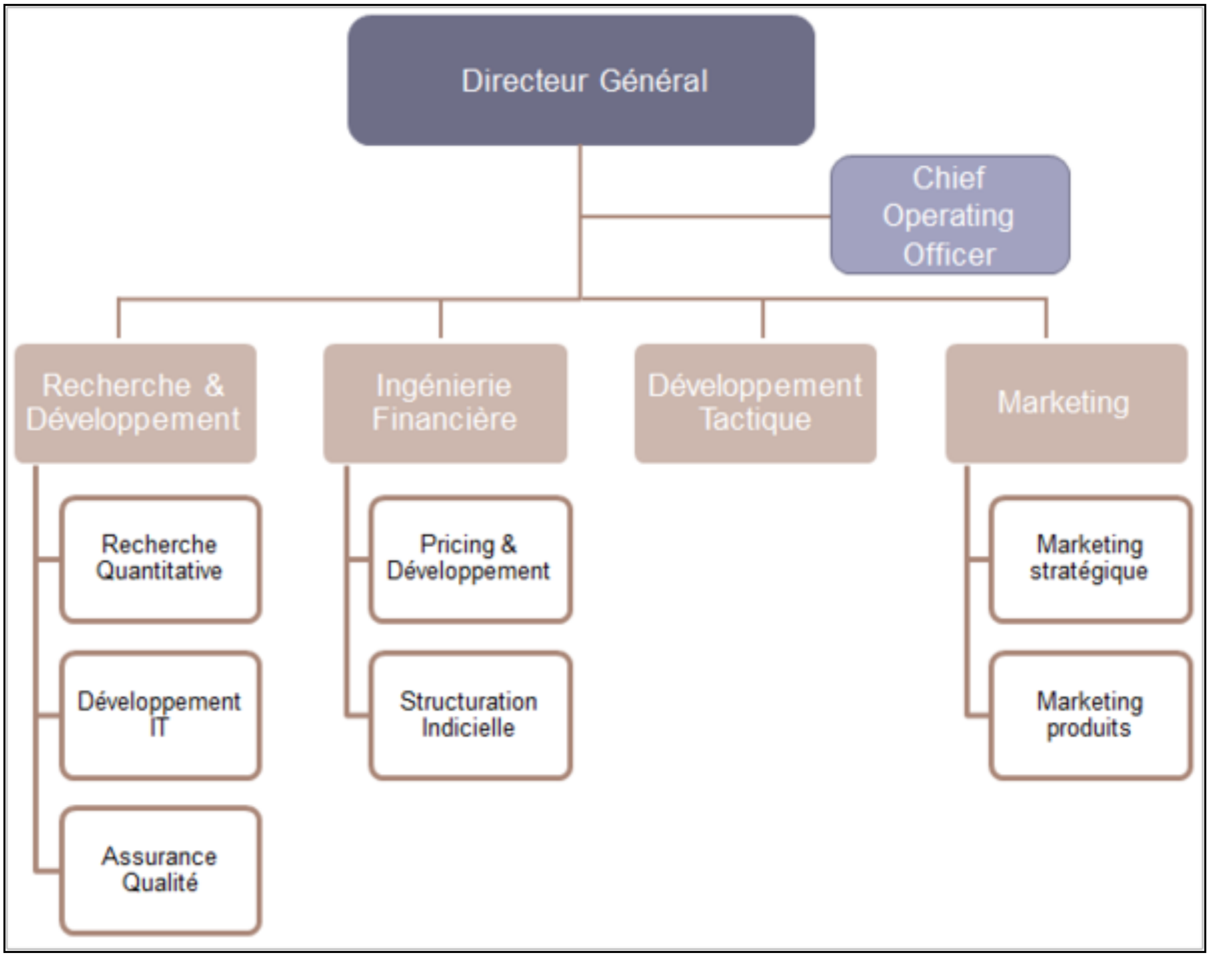
- **La banque de détail à l'international**, services financiers et assurances avec des réseaux présents dans les zones géographiques en développement et des métiers spécialisés leaders dans leurs marchés.

- **La banque de financement et d'investissement**, banque privée, gestion d'actifs et métier titres avec leurs expertises reconnues, positions internationales clés et solutions intégrées.

Société Générale Africa Technologies & Services

- Le groupe Société Générale, à travers sa banque de financement et d'investissement, a créé au Maroc, cette filiale de recherche et développement pour ses activités de marchés, cette filiale ayant obtenu le statut Casablanca Finance City (CFC).
- SG ATS, basée à Casablanca et dirigée par Mme. Widad Azzam Lahlou, Directeur Général, est constituée d'une équipe d'ingénieurs. Son rôle est de développer pour la banque de financement et d'investissement des logiciels et librairies de formation de prix de produits financiers, ainsi que des outils de gestion des risques, sur l'ensemble des classes d'actifs et des produits de marché. Cette nouvelle équipe vient compléter le dispositif de recherche et développement, dont l'organigramme ci-dessous, pour les activités de marchés de Société Générale, composé d'équipes basées à Paris, Londres, New-York et Hong-Kong afin de concevoir et développer de nouveaux outils toujours plus performants.

Figure 12: l'organigramme de l'entreprise



- **Le pôle Recherche & Développement :** Développement et exploitation optimale des noyaux de calcul.
- **Le pôle Ingénierie Financière** : la structuration des indices propriétaire + élaboration des stratégies d'investissement au profit des clients SGI
- **Le pôle Développement Tactique.**
- **Le pôle Marketing.**

Enjeux du stage : Le stage a pour but d'intégrer les équipes R&D de Quants et plus précisément l'équipe Credit-Xva, d'apprendre le métier de la recherche quantitative et se familiariser avec les analyses Xva. La compréhension et l'étude de la Funding Valuation Adjustment, ses fondements réels et théoriques et l'apprentissage des méthodes de calcul et d'implémentation de celle-ci mais aussi les thématiques connexes à la FVA, à savoir les modèles de taux, les principes mathématiques et économiques en finance et les enjeux de financement.

Difficultés rencontrées : Intégrer une équipe et se familiariser avec le contexte du travail au sein d'une équipe R&D a été une étape à réaliser pendant le stage ; Les outils de programmation et d'implémentation des calculs m'ont été complètement nouveaux. L'apprentissage et la familiarisation a été rapide avec l'aide et l'encadrement de l'équipe. ; La documentation Taux, Xva, Credit etc. est abondante, bien fournie et nécessite plusieurs lectures et recherches parallèles.

Encadrement général :

J'ai pu bénéficier tout au long du stage de l'encadrement et la formation du Manager Quant, des référents de l'équipe Credit-Xva et des collègues stagiaires et collaborateurs ATS. La disponibilité à tout moment, les explications techniques et générales, l'aide à la programmation sur machine et la sympathie ont été les points les plus important que j'ai connu avec les cadres ATS.

Deux contraintes majeures :

- La confidentialité des informations et du cadre du stage font que certains éléments, parfois importants, sont omis du présent rapport.
- La contrainte du temps fait que la rédaction du présent a été faite au milieu de la durée du stage. Certains points de l'étude n'ont donc pas encore été traités ou présentés dans ce rapport.

1 Chapitre 1 : Marché OTC, ISDA et CSA

2 Cadre général des marchés de gré-à-gré OTC

Un marché réglementé est un lieu d'échange sur lequel les négociations obéissent à un certain nombre de règles dont le respect est contrôlé par un régulateur Cette réglementation concerne notamment:

- Les conditions d'accès au marché et d'admission à la cotation ;
- L'organisation des transactions;
- Les conditions de suspensions des négociations,
- Les modalités d'enregistrement et de publicité des négociations.

Ce système est géré par une entreprise de marché qui assure la rencontre de multiples intérêts acheteurs et vendeurs sur des instruments financiers admis à la négociation. Elle doit publier en continu les prix à l'achat et à la vente, ainsi que le nombre d'instruments financiers et rendre public les prix et les volumes des transactions exécutées. Elle doit également mettre en place des contrôles visant à garantir le bon fonctionnement des marchés et veiller à ce que les membres respectent les règles. L'entreprise de marché organise le marché en conformité avec la règlementation des autorités de contrôle (l'Autorité des Marchés Financiers (AMF) en France ou La Bourse des Valeurs de Casablanca (BVC) au Maroc).

Les marchés de gré à gré sont les marchés dans lesquels s’échangent les produits financiers directement entre les investisseurs, les agents financiers et les banques etc. Par opposition à une place de marché organisée qui est centralisée et réglementée. Nommés marchés OTC « over the counter » ou « de gré à gré » en français pour désigner ces transactions de titres financiers par accords communs directs et à l’amiable.

2.1 Rôle de la International Swaps and Derivatives Association (ISDA)

L'ISDA (*International Swaps and Derivatives Association*) est l'institution professionnelle qui regroupe les principaux intervenants sur les marchés financiers OTC. Son le rôle est de fournir un cadre juridique institutionnel standard pour les intervenants sur ces marchés. L'ISDA veille à établir des références et des standards pour les contrats des produits financiers en circulation dans le marché. Son importance est cruciale, d'autant plus que les marchés OTC sont peu réglementés. Les contrats références sont des documents contractuels connus sous le nom d'ISDA *Master Agreement*, ou simplement de *Master Agreement*.

2.2 Le Master Agreement

Créé par l'ISDA en 1992 et amélioré en 2002 pour inclure davantage de détails et de spécifications, c'est le contrat référence de l'ISDA pour toute transaction de produits dérivés dans le marché de gré à gré. Ce document bilatéral détaille les termes, les conditions et l'ensemble des aspects techniques de la transaction. Il précise la méthodologie de valorisation du produit dérivé en question, la date de tombée de ces flux, les détails de l'appel de marge etc. Pour lever toute ambigüité sur cet accord, le *Master Agreement* spécifie les questions délicates de l'accord : celles du *netting*[1], du *collatéral*[2], de la définition du défaut et d'autres événements d'importance[3].

2.3 Le Credit Support Annex (CSA)

A côté du *Master Agreement*, il est possible de rattacher un CSA (*Credit Support Annex*) qui permettra aux parties du contrat de gérer leurs risques de crédit réciproques[4] en mettant du collatéral de côté. Le CSA est au cœur de toute transaction avec collatéral,

[1] C'est le processus qui permet de régler en somme algébrique, lorsque c'est possible, les positions des parties sur l'ensemble de leur portefeuille.
[2] Actif, souvent du *cash*, émis comme garantie pour une transaction
[3] Force majeure par exemple
[4] Risques accrus depuis la crise de 2008, ce qui a augmenté l'importance des CSA

et c’est lui qui gouverne le fonctionnement et les termes de l’échange du collatéral en précisant entre autres :

- Les méthodes de valorisation des positions,
- Les montants de collatéral à poster ainsi que leur fréquence,
- Les règles et dates de transfert du collatéral,
- Les collatéraux éligibles[1] et la règle de substitution[2],
- Intérêts payés sur le collatéral,
- Possibilité ou non de réutilisation du collatéral[3],
- Les événements qui peuvent amener un changement des conditions du collatéral.

Les principaux paramètres qui permettent de distinguer les différents CSA sont surtout le seuil (*threshold*) à partir duquel on commence à poster/recevoir du collatéral, la marge initiale de collatéral et le *minimum transfert Amount*.

Outre ces spécifications, un CSA en général doit bien préciser l’ensemble des paramètres de collatéralisation et ceux-ci sont déterminés par la qualité de crédit de chaque partie.

2.3.1 L’usage de collatéral CSA dans les dérivés OTC

Figure 56: Evolution du collatéral (estimé et observe) en Md$

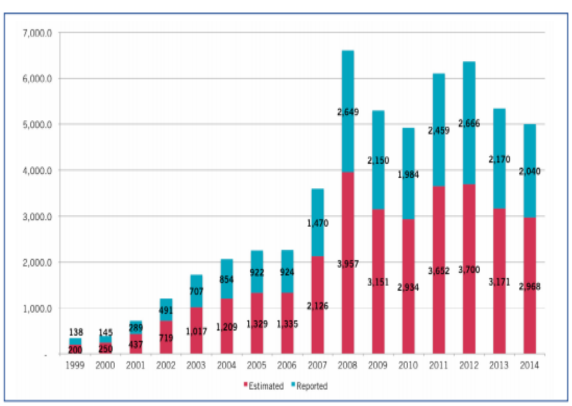
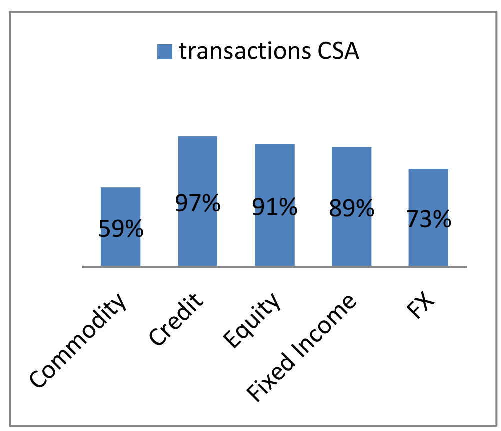


Figure 34: Pourcentage des transactions CSA



Source : ISDA Margin survey 201533

---

1 Les CSA précisent, par exemple, les devises acceptées comme collatéral.
2 La règle selon laquelle un collatéral dans un actif peut être substitué par un autre type d’actif.
3 Option appelée Ré-allocation

L'usage du collatéral comme outil de gestion de risque a fortement évolué, surtout pendant et depuis la crise de 2008. Il concerne en premier lieu les dérivés de crédit en raison de la forte volatilité de ces transactions

Figure 7 Collatéral émis 2014

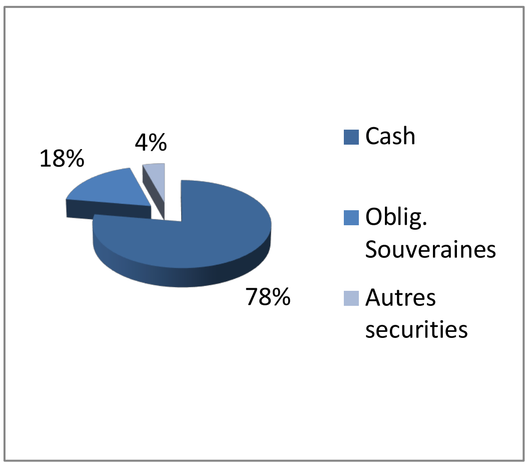
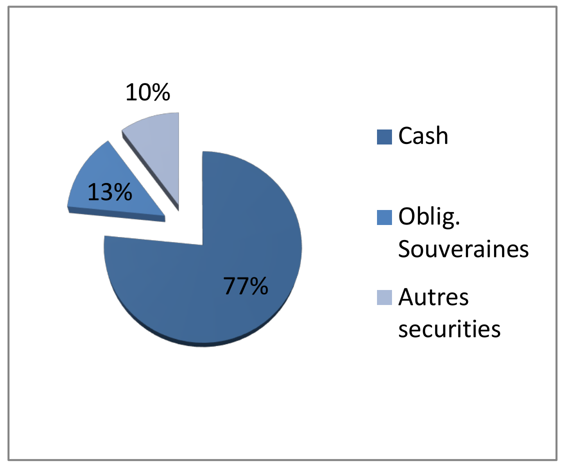


Figure 5: Collatéral reçu 2014



Source: ISDA Margin Survey 2015

Les dérivés de crédit sont les produits les plus collatéralisés (97% des transactions de crédit sont des transactions sous CSA) dans le marché OTC. Le collatéral utilisé dans les transactions avec CSA est souvent du Cash, et peu en Obligations souveraines ou Bon de Trésor de certains pays.

2.3.2 Les types de CSA

On peut classer les CSA en trois types selon le sens et la structure du contrat CSA :

- CSA bilatéral : c'est le cas le plus fréquent pour deux contreparties ayant des caractéristiques proches. Un exemple est l'ensemble des transactions interbancaires où deux banques s'exigent mutuellement du collatéral et donc un CSA bilatéral mais pas forcément avec les mêmes conditions [1]de part et d'autre.

- CSA unilatéral: Une seule partie par exemple une entité souveraine (Etat) imposera un collatéral à sa contrepartie dans un sens unique, et ce pour les raisons de différence de qualité de crédit et pouvoir de négociation.
- Sans collatéralisation : Pour certaines raisons dont l'incapacité de gérer la fréquente émission de collatéral et les coûts de gestion qui en découlent, les deux contreparties vont donc s'engager dans une transaction sans CSA (exemples : les entreprises non bancaires pour des raisons de trésorerie).

2.3.3 Les paramètres liés au collatéral sous un CSA

Le collatéral est déterminé par un bon nombre de paramètres et certains sont plus important que d'autres en terme de valorisation. L'accent doit en effet être mis sur :

- La nature du collatéral (*cash*, action, obligation ou autres *securities*).
- Les optionalités dans l'émission et la substitution du collatéral (option de devise dans laquelle est libellé le cash par exemple).
- Les règles de valorisation (base d'actualisation[2] par exemple) ainsi que la fréquence de celle-ci.

Ce sont en particulier ces paramètres qui impacteront la valorisation du portefeuille de dérivés et dont on tiendra compte dans la suite du présent travail.

3 Nécessité des ajustements Xva

L'introduction de ces « valeurs d'ajustement » à eu lieu depuis la flambée des événements de défauts[3] (risque de crédit ou de contrepartie). Un grand nombre de

[1] Par exemple un *threshold* ne sera pas le même pour les deux parties, et sera lié à la qualité de crédit de celles-ci.
[2] La courbe de *discount* est souvent l'EONIA ou l'OIS (OverNight Index Swap).
[3] Faillite de la Banque Lehman Brothers et autres en 2008.

banques et d'institutions financières de volume important et à risque de défaut mineur[1] se sont retrouvées en situation de crise ou de faillite. Ce qui a poussé la plupart des intervenants sur le marché à réviser leurs considérations et conventions de valorisation pour commencer à prendre en compte le risque de crédit comme composante essentielle dans la valorisation des produits dérivés, d'où la CVA.

Par ailleurs, les règles d'évaluation avaient comme convention d'actualiser les *cash-flows* suivant la courbe de taux LIBOR, et ce parce que le LIBOR constituait un proxy du taux sans risque, ce qui n'est plus le cas depuis quelques temps. En effet, avant la crise les banques empruntaient auprès du marché à un taux BOR majoré d'un *spread* (plus ou moins petit ou raisonnable) qui est un *spread* spécifique à chaque banque et fonction de sa santé financière et sa qualité de crédit. Ce *spread* étant petit et donc négligeable vu la confiance qui règne dans le marché, est négligé dans la valorisation et donc le LIBOR pris comme référence d'actualisation.

Deux aspects sont à distinguer :

- Le *spread* de *funding* ou d'emprunt qui est spécifique à chaque banque et traduit la vision de marché par rapport à sa qualité de crédit et son image.
- Le spread BOR-OIS qui lui, traduit le sentiment de marché par rapport au prêts long-terme (3 mois) par rapport aux prêts court-terme (1 jour). Si ce *spread* augmente, cela se traduit par un manque de confiance généralisé de la place financière : « les acteurs préfèrent avoir l'argent aujourd'hui plutôt que demain… »

L'approximation de considérer que les banques pouvaient se financer « facilement » auprès du marché à un coût négligeable était devenu fausse. Ce qui amena le débat de la *Funding value adjustment*.

Les autres ajustements Xva s'inscrivent aussi dans le même contexte de changement de conventions dans la valorisation. En général on préfère souvent garder

[1] Probabilité de défaut de l'ordre de 10^{-3}.

celle-ci en lui apportant des ajustements, au lieu de reconsidérer toute l'évaluation financière dans ses fondements.

Davantage d'informations sur le LIBOR et le taux sans risques sont reportées en Annexe.

Chapitre 2 : Introduction aux Xva

CVA

Xva ou X *value adjustment* est un terme qui désigne la valeur d'ajustement relative à X dans un portefeuille donné. X prend par exemple les lettre {C, F, D} pour désigner une CVA, FVA ou Dva, pour dire : *Credit value adjustment*, *Funding value adjustment* et *Debt value adjustment*. C'est la valeur d'ajustement relative au risque de crédit, au coût de financement et du risque d'endettement.

1 La valorisation d'un portefeuille de dérivés

La valorisation des produits dérivés repose essentiellement sur l'Absence d'Opportunité d'Arbitrage (AOA).

$$\boxed{\begin{cases} Z\acute{e}ro\ risque \\ Gain\ certain \end{cases} \equiv Arbitrage}$$

1.1 Absence d'opportunité d'arbitrage

On se donne :

- Un espace probabilisé et filtré $\left[\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{Q}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}\right]$
- Un marché $\sum_t$ défini par l'ensemble des actifs dans ce marché :

$\sum_t = \left\{(S_t^i) \middle| i = 1,2 \ldots, n \ ; \ t \geq 0\right\}$ où (S_t^i) représente le prix de l'actif i à l'instant t.

- On désigne l'information du marché par la filtration générée par l'ensemble des prix et on la note $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$.
- Une stratégie financière, ou portefeuille est un processus réel φ_t :

$$\varphi_t = \left(\varphi_t^i \middle| i = 1,2 \ldots, n\right)$$

où φ_t^i un réel représentant la part investie dans l'actif i à l'instant t.

Une stratégie autofinancée est une stratégie dont la variation de la valeur ne dépend que de la variation des éléments du portefeuille :

$$\boxed{dV_t(\varphi) = \sum_{i=1}^{n} \varphi_t^i * dS_t^i}$$

i.e. « pas d'apport extérieur de *cash* ou de titres »

- La valeur d'une stratégie, qu'on note $V_t(\varphi)$, est alors l'opérateur V :

$$V.\varphi_t = \sum_{i=1}^{n} \varphi_t^i * S_t^i$$

- Une stratégie d'arbitrage est donc équivalente à la proposition suivante :

$$\begin{cases} {}^{1}V_0(\varphi) = 0 \\ {}^{2}\mathbb{P}(V_t(\varphi) \geq 0) = 1 \\ \exists\ \omega \epsilon \Omega, {}^{3}\mathbb{P}(V_t(\varphi, \omega) > 0) > 0 \end{cases}$$

Où Ω est notre espace de possibilités et ω un état

[1] Une mise initiale nulle
[2] Zéro chance de perdre
[3] Une chance de gagner

Une des implications de l'absence d'opportunité d'arbitrage est que dans un marché complet, i.e. où tout actif ou dérivé est réplicable par une stratégie, est que les prix actualisés S_t^i sont des martingales.

- Une martingale est un processus ne permettant pas une asymétrie de l'information :

S_t^i est une $\mathcal{F}$-martingale sous une probabilité $\mathbb{P}$ quand $\mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left(S_t^i \middle| \mathcal{F}_s\right) = S_s^i$ où $\mathbb{E}^{\mathbb{P}}$ est l'espérance sous la probabilité $\mathbb{P}$.

1.2 La probabilité risque-neutre

La probabilité risque-neutre est la mesure de probabilité sous laquelle le marché est neutre par rapport au risque :

Si :

- ${S^0}_t$ est l'actif sans risque du marché et qu'il croît au taux continu r_t.
- $\mathcal{D}f_{(t,T,r)}$[1] $= e^{-\int_t^T r_s ds}$ est le processus d'actualisation.
- $\tilde{S}_t$ est le processus actualisé de S_t, i.e. $\tilde{S}_t = \mathcal{D}f_t . S_t$

Alors, la probabilité risque-neutre $\mathbb{Q}$ est la probabilité sous laquelle les prix actualisés $\tilde{S}_t$ sont des martingales.

Dans la suite, sauf mention contraire, l'espérance est prise sous cette probabilité.

[1] Valeur d'un zéro coupon quand le taux est déterministe

1.3 Valorisation d'un produit dérivé

Si on admet qu'un marché est complet[1] et que tout dérivé est réplicable par une stratégie autofinançant puis par identification d'une équation aux dérivées partielles, on trouve (El Karoui, 2013-2014) (Jeanblanc, Yor, & Chesney, 2009) (Jeanblanc, Yor, & Chesney, 2009) que le la valeur d'un dérivé D sur S_t de maturité T et de *payoff*[2] $h((S_t)_{t\geq 0})$ à un instant *t* est :

$$\boxed{V_t^D(T,S) = \mathbb{E}\left[e^{-\int_t^T r_s ds} * h(S) \middle| \mathcal{F}_t\right]}$$

Cette formulation se généralise pour un portefeuille de plusieurs dérivés.

2 Définition de quelques Xva : CVA et FVA

En général les Xva sont définies par la différence entre deux valorisations :

- Une valorisation conventionnelle ou *benchmark*, généralement simplifiée.
- Une valorisation réelle ou non conventionnelle qui tient compte d'une composante X qui peut être un risque « de crédit », un coût « de financement ».

$$\overbrace{V^{X,réelle}}^{valeur\ réelle} = \overbrace{V^{benchmark}}^{valeur\ benchmark} + \overbrace{Xva}^{ajustement}$$

2.1 Définition de la CVA

La CVA est la valeur d'ajustement relative au risque de crédit ou défaut de la contrepartie.

On se doit alors de préciser la définition d'un événement de défaut[3] et on considère les éléments :

[1] Définition en annexe
[2] Si le produit verse des coupons, il faudra les inclure.
[3] Importance du CSA

- Le temps de défaut τ qui représente l'instant auquel la contrepartie fait faillite.
- Le collatéral, si le portefeuille est collatéralisé, dont on désigne la valeur à un instant donné par C_t.
- La *recovery*[1] R ou taux de recouvrement est le pourcentage de valeur du portefeuille récupéré en cas de défaut de la contrepartie.
- La perte ou *loss* $\mathcal{L}$ en cas de défaut avant maturité T est donc

$$\boxed{\mathcal{L} = -(1-R)(V_\tau^{benchmark} - C_\tau)^+ 1_{\{\tau \leq T\}}}$$

La CVA est donc la valeur de cette perte à l'instant initial :

$$\boxed{Cva = \mathbb{E}\left[\mathcal{D}f_{(0,\tau,r)}\mathcal{L}\right]}$$

Qu'on écrit

$$\boxed{Cva = -\mathbb{E}\left[\mathcal{D}f_{(0,\tau,r)}(1-R)(V_\tau^{benchmark} - C_\tau)1_{\{\tau \leq T\}}\right]}$$

2.2 Définition de la FVA

La FVA pour un portefeuille donné, se définit comme la différence entre deux valorisations :

- Une valorisation *benchmark* qui consiste à actualiser les flux du portefeuille sur une courbe de taux OIS par exemple.
- Une valorisation qui prend en compte le financement réel du portefeuille, i.e. les *spreads* de prêt et emprunt de la banque ainsi que le collatéral émis en tant que garantie contre le défaut.

$$\boxed{V^{F,réel} = V^{benchmark} + Fva}$$

[1] Donné par les agences de notation et dépend du degré de sécurité du titre ou portefeuille.

3 Dérivation de la FVA

Pour trouver une formule de la FVA on procède par réplication d'un dérivé (ou portefeuille de dérivés) dans un marché supposé complet.

La réplication désigne le fait de construire une stratégie auto-finançante qui a la même valeur que notre portefeuille et en déduire la valeur initiale de celui-ci par AOA.

L'application de l'AOA dans la valorisation est valable quand on considère les processus de gains cumulés, car l'AOA est utilisé en construisant un portefeuille autofinançant.

3.1 Notations

On note :

d, e sont respectivement les devises locale et étrangère

$r_t^{i,ois}$: Le taux instantané OIS. $\{i = d, e\}$

r_t^{lib} : Le taux instantané LIBOR

s_t^{ref} : Le spread ou écart de taux instantané d'une référence ref par rapport à l'OIS

f_t^{bank} : Le spread de financement instantané par rapport à l'OIS

T : La maturité du portefeuille.

$\{T_1, .., T_N\}$: Une partition discrète de l'intervalle de temps avec les dates d'appel de collatéral.

3.2 Réplication de portefeuille

On considère une configuration de marché (complet) où on a les instruments suivants :

Les différents instruments de couverture notés H_t dont les prix actualisés $\breve{H}_t$ sont des martingales.

Les prêt-emprunts non garantis, qui évoluent donc au taux OIS plus le *spread* de financement.

Le collatéral C_t, représenté par un panier d'instruments de collatéralisation (C_t^i). C_t est supposé vérifier la propriété d'autofinancement[1] pour dire que seule la variation des collatéraux (C_t^i) affecte la variation de C_t.

Pour répliquer un portefeuille de valeur V_t on supposera donc qu'on couvre le portefeuille par des instruments de couverture H_t (typiquement les sous-jacents des dérivés) qu'on financera par des emprunts ainsi que le collatéral qui rémunère un certain taux r_t^{coll}[2].

On note $\phi_t^{T_i}$ la valeur du coupon payé à la date T_i.

On aura donc la valeur V_t de notre portefeuille composée comme suit :

Equation 1

$$\boxed{\begin{aligned} V_t &= H_t + (V_t - H_t - C_t) + C_t \\ &= H_t + U_t + C_t \end{aligned}}$$

En notant U_t le cash financé au taux référence plus le *spread* de financement de la banque.

[1] Ce qui est vrai entre deux dates d'appel de marge. Au moment d'émission du collatéral, ceci est faux car le collatéral est réajusté par injection/soutirage de cash.
[2] Cf. Piterbarg 2010

On dérive cette valeur pour avoir :

Equation 2

$$dV_t = dH_t + (V_t - H_t - C_t)\left(r_t^{ois} + f_t^{bank}\right)dt + dC_t - \sum_{i=1}^{N} \phi^{T_i}\delta_t(T_i)$$

Ou sous forme actualisée avec la prise en compte de la propriété d'autofinancement :

Equation 3

$$d\tilde{V}_t = d\tilde{H}_t + d\tilde{C}_t - \sum_{i=1}^{N} \tilde{\phi}_t^{T_i}\delta_t(T_i)$$

3.3 Le collatéral

Dans un *Credit Support Annex*, on définit l'ensemble des conditions sur le collatéral, dont le taux de rémunération. Ceci va naturellement impacter le financement du portefeuille et donc la FVA. Le CSA précise également un ensemble de devises éligibles en tant que collatéral, il convient donc de différencier le collatéral selon la devise dans laquelle il est posté (ou reçu).

Le collatéral est en général un pourcentage de la valeur du portefeuille au-delà du seuil ou *threshold* :

Dans un cas unilatéral : $\boldsymbol{C_t = \alpha * \max(V_t - seuil, 0)}$

Généralement on écrit[1] : $\boldsymbol{C_t = \alpha^B * \max(V_t - seuil^B, 0) + \alpha^C * \min(V_t - seuil^C, 0)}$

On considère :

[1] B désigne la banque et C désigne la contrepartie ou le client.

- C_t^c le collatéral dans la devise c dans laquelle on exprime la valeur du collatéral[1], et qui évolue au taux $r_t^{coll,c}$:

$$dC_t^c = r_t^{coll,c} C_t^c dt$$

- $X_t^{c/d}$ le taux FX instantané entre c et d qu'on suppose suivre une diffusion[2] :

$$dX_t^{c/d} = X_t^{c/d}\left[\left(r_t^d - r_t^c + b_t^{c/d}\right)dt + \sigma_t^X dW_t^d\right]$$

Avec :

$(b_t^{c/d})_{t\geq 0}$: Le cross-currency basis instantanée. C'est un spread constaté ou « calibré » sur le marché à partir des Cross Currency basis Swaps (swaps de taux de change).

$(\sigma_t^X)_{t\geq 0}$: Le processus de diffusion tel que $M_t = \left(\int_0^t \sigma_u^X C_u^d dW_u^d\right)_{t\geq 0}$ soit une martingale.

(W_t^d) Un mouvement Brownien sous la probabilité Q.

En utilisation le lemme d'Itô (Voir Annexe) on trouve la dérivation de C_t^d :

Equation 4

$$\boxed{dC_t^d = \left(r_t^d + r_t^{coll,c} - r_t^c + b_t^{c/d}\right)C_t^d dt + dM_t^d}$$

3.4 Formulation de la FVA

On prend deux conventions d'actualisation pour le portefeuille et le collatéral pour trouver la FVA avant de l'exprimer en formule générale

[1] A distinguer devise de valorisation et devise dans laquelle on poste/reçoit le collatéral.
[2] Modèle Garman.

On note : $\boldsymbol{C_t^d} \equiv \boldsymbol{C_t}$

i. Un portefeuille entièrement collatéralisé de valeur notée O_t avec un taux de rémunération du collatéral égal au taux OIS.

Equation 5

$$\begin{cases} r_t^{coll,e} = r_t^{ois} \\ C_t = O_t \end{cases}$$

Quand l'OIS est pris comme *benchmark*, l'équation (4) devient :

Equation 6

$$dC_t^d = \left(r_t + b_t^{c/d}\right) C_t^d dt + dM_t$$

Et on a aussi en combinant (4) :

$$dO_t = dH'_t + (O_t - H'_t - C_t^d)(r_t + f_t^{bank})dt + dC_t - \sum_{i=1}^{N} \phi^{T_i}\delta_t(T_i)$$

$$= dH'_t + (O_t - H'_t - O_t)(r_t + f_t^{bank})dt + \left(r_t + b_t^{c/d}\right)O_t dt + dM_t - \sum_{i=1}^{N} \phi^{T_i}\delta_t(T_i)$$

$$= dH'_t - H'_t(r_t + f_t^{bank})dt + \left(r_t + b_t^{c/d}\right)O_t dt + dM_t - \sum_{i=1}^{N} \phi^{T_i}\delta_t(T_i)$$

Ce qu'on réécrit sous forme actualisée :

Equation 7

$$d\tilde{O}_t = d\tilde{H}'_t - \left(f_t - b_t^{c/d}\right)\tilde{O}_t dt + d\tilde{M}_t - \sum_{i=1}^{N} \phi^{T_i}\delta_t(T_i)$$

Puis la différence entre (3) et (7) donne :

$$d\breve{V}_t - d\tilde{O}_t = d\breve{H}_t - d\breve{H'}_t + d\check{C}_t + \left(f_t - b_t^{c/d}\right)\tilde{O}_t dt - d\breve{M}_t$$

Qu'on intègre jusqu'à maturité en constatant que $V_T = O_T$, l'espérance $\mathbb{E}\left[\breve{M}_T - \breve{M}_0\right]$ des martingales est nulle et la valeur FVA est égale à $O_0 - V_0$:

$$0 - (V_0 - O_0) = 0 - \widehat{Fva} = \int_0^T d\breve{H}_t - d\breve{H'}_t + d\check{C}_t + \left(f_t - b_t^{c/d}\right)\tilde{O}_t dt - d\breve{M}_t$$

$$Fva = \mathbb{E}\left[\widehat{Fva}\right] = \mathbb{E}\left[-\int_0^T d\check{C}_t + \left(f_t - b_t^{c/d}\right)\tilde{O}_t dt\right]$$

Qu'on peut développer en :

Equation 8

$$Fva = -\mathbb{E}\left[\int_0^T \mathcal{D}f_{0,T,r+f}\left(f_t - b_t^{c/d}\right)(O_t - C_t)dt + \int_0^T \mathcal{D}f_{0,T,r+f}\left(dC_t - \left(r_t + b_t^{c/d}\right)C_t dt\right)\right]$$

ii. On note L_t la valeur du portefeuille est financée au taux LIBOR, ce qui revient à dire que les prêts et emprunts non garantis sont au taux LIBOR. Dans ce cas on peut répliquer le portefeuille en considérant une collatéralisation totale et taux de collatéral égal au taux LIBOR.

Avec le même cheminement que précédemment on retrouve :

Equation 9

$$FVA = -\mathbb{E}\left[\int_0^T \mathcal{D}f_{0,T,r+f}\left(f_t - s_t^{libor}\right)(L_t - C_t)dt + \int_0^T \mathcal{D}f_{0,T,r+f}\left(dC_t - r_t^{libor} C_t dt\right)\right]$$

iii. Dans un cas général on peut écrire :

Equation 10

$$Fva = -\mathbb{E}\left[\int_0^T \mathcal{D}f_{0,T,r+f}\left(f_t - s_t^{benchmark}\right)\left(V_t^{benchmark} - C_t\right)dt + \int_0^T \mathcal{D}f_{0,T,r+f}\left(dC_t - r_t^{benchmark}C_t dt\right)\right]$$

On voit donc la FVA faisant intervenir un terme d'exposition, le financement réel, et un autre terme correspondant au mouvement du collatéral.

* En pratique, quand le portefeuille est collatéralisé on utilise OIS comme taux *benchmark* et le LIBOR quand il ne l'est pas.

3.5 Remarques sur la formulation FVA

Compte tenu de la formulation précédente, la dérivation de la FVA établie tient bien compte des coûts de financement de la transaction à travers la réplication multi courbes faisant intervenir différentes sources de cash, chacune évoluant à son propre taux (y compris le collatéral).

Cette formulation présente une intrication avec le risque de crédit. En effet, pour être plus rigoureux on aurait dû inclure les coûts de financement effectifs du portefeuille, c'est-à-dire tant que le portefeuille est en vie. Quitte à conditionner par un événement de défaut, le calcul deviendra plus compliqué. Ce qu'on néglige dans ce travail en raison de simplicité mais qu'on prend en compte en pratique.

Chapitre 3 : Impact des CSA non standards sur la FVA

En particulier celui du *floor* à zéro.

Dans cette partie, on reprendra les notations ainsi que les résultats de la partie précédente concernant la quantification de la FVA.

On traitera en particulier le cas d'un CSA où le collatéral est rémunéré à un taux positif ou nul (*floor* à 0), ensuite le cas d'un collatéral *cash* en devises différentes et avec optionalité dans le choix de ces devises et finalement un cas où de collatéral action ou obligation selon la possibilité technique qu'on aura.

1 Les CSA standards

Dans la partie précédente, on a vu un calcul de FVA reposant sur des conditions standard de collatéralisation. En effet, un ISDA *Standard Credit Support Annex* (SCSA) a pour but de limiter les optionalités que peuvent offrir les CSA. En particulier l'adoption de l'actualisation suivant le taux OIS (EONIA) ainsi que l'alignement aux pratiques de la CCP (*Central Clearing Counterparty*[1]) en matière de collatéral dans le but de créer un environnement homogène pour les intervenants dans le marché de gré à gré. La description d'un CSA Standard peut être synthétisée dans les points suivants :

- Collatéral en *cash* uniquement,
- Seules les devises aux courbes OIS les plus liquides sont éligibles,
- Aucun Seuil et aucun Montant Minimum de Transfert.

[1] Définition des CCP en annexe

1.1 Exemples de CSA non standards

Comme convenu, on traitera dans la suite de ce travail les cas non standards de collatéralisation qui se prêteront à une formulation en terme d'évolution du collatéral et réplication du portefeuille en jeu. On veillera dans un premier temps à préciser en détail les cas considérés.

- Collatéral en cash avec rémunération floorée à zéro

On va supposer dans ce premier cas que le CSA indique que le collatéral (*cash* posté dans une certaine devise) est rémunéré au taux OIS, relatif à la même devise, tant que ce que ce dernier est positif, et nul sinon.

L'idée derrière l'hypothèse de ce cas *floor* à zéro est d'éviter les taux négatif (phénomène contre-intuitif apparu dans des circonstances particulières[1]).

- Collatéral en *cash* avec optionalité dans le choix de la devise

Ce deuxième cas traite la situation où deux parties entrent dans une transaction collatéralisée avec la considération qu'à chaque date de règlement de collatéral, une des deux parties a le choix (droit et non obligation) de recevoir ou poster du collatéral dans l'une des deux devises différentes. Et cela selon une règle de décision bien déterminée.

- Collatéral en actions avec et sans Réallocation

Ce cas est une situation relativement rare à trouver dans la réalité des transactions OTC collatéralisées. Cependant l'analyse de cette configuration est bien intéressante d'un point de vue théorique. En effet, par opposition au *cash*, le collatéral est posté en titre (Actions ou obligations) avec possibilité ou non de réutilisation (Réallocation). C'est-à-dire que s'il y a option de réallocation, l'actif reçu en tant que collatéral peut être placé dans une opération tierce (*Treasury Desk*). Les règles de gestion et d'échange de ce collatéral restent quant à elles difficiles à spécifier.

[1] Voir Annexe

2 Dérivation de la FVA pour les cas non standards

Dans cette section on reprendra les résultats de la partie 2.4.4 et réutiliser la formule général de l'équation (10) pour la FVA. Le but étant de retrouver une version spécifique de la FVA selon les cas considérés ci-dessus.

$$\boxed{Fva = -\mathbb{E}\left[\int_0^T \mathcal{DF}_{0,T,r+f}\left(f_t - s_t^{benchmk}\right)\left(V_t^{benchmk} - C_t\right)dt + \int_0^T \mathcal{DF}_{0,T,r+f}\left(dC_t - r_t^{benchmk}C_t dt\right)\right]}$$

Et on omettra la mention *benchmark* pour simplifier.

2.1 Notations et hypothèses

On reprendra les notations ci-dessus pour l'évaluation de la FVA à savoir :

$\mathrm{d,e}$: les devises locale et étrangère, respectivement

$r_t^{i,ois}$: Le taux instantané OIS. $\{i = d, e\}$

r_t^{lib} : Le taux instantané LIBOR

s_t^{ref} : Le spread ou écart de taux instantané d'une référence ref par rapport à l'OIS

f_t^{bank} : Le spread de financement instantané par rapport à l'OIS

T : La maturité du portefeuille.

$\{T_1, .., T_N\}$: Une partition discrète de l'intervalle de temps avec les dates d'appel de marge.

C_t^c Le collatéral dans la devise c qui évolue au taux $r_t^{coll,c}$.

$X_t^{c/d}$ Le taux FX instantané entre c et d qu'on suppose suivre une diffusion log normale.

$\mathbb{Q}^{fund,T}$: La probabilité T-*forward* neutre de financement[1].

$E^{fund,T}$: L'espérance sous la probabilité T-*forward* neutre de financement.

$Y^+ := \max(Y,0)$ et $Y^- := \min(Y,0)$ et donc $Y = Y^+ + Y^-$.

2.2 Cas 1 : CSA *floor*

Comme on l'a précisé dans ce qui a précédé, le cas CSA *floor* est une situation où on a :

$$\boxed{dC_t^c = (r_t^{ois,c})^+ C_t^c dt}$$

Et l'équation (4) devient :

$$\boxed{dC_t^d = \left(r_t^{ois,d} + (r_t^{ois,c})^+ - r_t^{ois,c} + b_t^{c/d}\right) C_t^d dt + dM_t^d}$$

C'est-à-dire :

$$\boxed{\begin{aligned} dC_t^d - \left(r_t^{ois,d} + b_t^{c/d}\right) C_t^d dt &= ((r_t^{ois,c})^+ - r_t^{ois,c}) C_t^d dt + dM_t^d \\ dC_t^d - \left(r_t^{ois,d} + b_t^{c/d}\right) C_t^d dt &= -(r_t^{ois,c})^- C_t^d dt + dM_t^d \end{aligned}}$$

Où M_t^d est la martingale sous la probabilité risque neutre domestique. Celle-ci n'apparaîtra donc pas donc la FVA qui est sous forme d'espérance.

On réécrira :

$$\boxed{dC_t - \left(r_t^{ois,d} + b_t^{c/d}\right) C_t dt = -(r_t^{ois,c})^- C_t dt + dM_t}$$

Ici le *floor* à zéro est appliqué au taux contractuel $r_t^{ois,c}$.

La FVA de l'équation (10) devient :

[1] L'intérêt est de faire apparaitre des martingales dans les calculs et d'utiliser des quantités observables (zéro-coupons). Voir Annexe pour le changement de probabilité.

$$
\begin{aligned}
Fva &= -\mathbb{E}\left[\int_0^T \mathcal{D}f_{0,t,r+f}(f_t - s_t)(V_t - C_t)dt + \int_0^T \mathcal{D}f_{0,T,r+f}(dC_t - r_t C_t dt)\right] \\
&= -\mathbb{E}\left[\int_0^T \mathcal{D}f_{0,t,r+f}(f_t - s_t)(V_t - C_t)dt + \int_0^T \mathcal{D}f_{0,T,r+f}\left(-\left(r_t^{ois,c}\right)^- C_t dt + dM_t\right)\right] \\
&= -\mathbb{E}\left[\int_0^T \mathcal{D}f_{0,t,r+f}(f_t - s_t)(V_t - C_t)dt - \int_0^T \mathcal{D}f\left(r_t^{ois,c}\right)^- C_t dt\right] \\
&= -\mathbb{E}\left[\int_0^T \mathcal{D}f_{0,t,r+f}\left((f_t - s_t)(V_t - C_t) - \left(r_t^{ois,c}\right)^- C_t\right)dt\right] \\
&= -\mathbb{E}\left[\sum_{i=0}^N \int_{T_i}^{T_{i+1}} \mathcal{D}f_{0,t,r+f}\left((f_t - s_t)(V_t - C_t) - \left(r_t^{ois,c}\right)^- C_t\right)dt\right] \\
&\approx -\mathbb{E}\left[\sum_{i=0}^N \mathcal{D}f_{0,T_i,r+f}(V_{T_i} - C_{T_i})\int_{T_i}^{T_{i+1}}(f_t - s_t)dt - C_{T_i}\int_{T_i}^{T_{i+1}}\left(r_t^{ois,c}\right)^- dt\right]^{1}
\end{aligned}
$$

$$
= -\mathbb{E}\left[\sum_{i=0}^N \mathcal{D}f_{0,T_i,r+f}\overbrace{(V_{T_i} - C_{T_i})}^{Exposition}\underbrace{\mathbb{E}\left[\int_{T_i}^{T_{i+1}}(f_t - s_t)dt\middle|\mathcal{F}_{T_i}\right]}_{int\acute{e}grale\ de\ financement} - \overbrace{C_{T_i}}^{Collat\acute{e}ral}\underbrace{\mathbb{E}\left[\int_{T_i}^{T_{i+1}}\left(r_t^{ois,c}\right)^- dt\middle|\mathcal{F}_{T_i}\right]}_{int\acute{e}grale\ OIS\ floor\ z\acute{e}ro}\right]
$$

$$
= -\mathbb{E}^{fund,T}\left[\sum_{i=0}^N \underbrace{RF_{T_i}}_{rebasing\ factor} E_{T_i}F_{T_i,T_{i+1}} - C_{T_i}R_{T_i,T_{i+1}}\right]^{2}
$$

C'est cette dernière expression discrète approchée de la FVA que l'on va essayer d'implémenter, par simulation des trajectoires et calcul de l'espérance en dessus.

3 Modélisation

Le calcul de la FVA sera effectué par simulation de Monte-Carlo et diffusion des trajectoires nécessaires. L'objet de ce travail sera traité dans une implémentation sous C#, qui présente une multitude d'avantages qu'on exposera d'abord avant de détailler l'environnement numérique. On va ici établir le calcul de la FVA, en précisant au passage les algorithmes utilisés.

En effet la formule suivante, par exemple, nécessite un nombre d'outils mathématiques pour avoir des résultats numériques :

[1] Une approximation basée sur la généralisation de la méthode des rectangles pour l'intégrale de Riemann et Stieltjes. Voir Annexe

[2] Le Rebasing Factor est une notation pour désigner le facteur d'actualisation sous la probabilité forward.(Voir Annexe)

$$\boxed{Fva = -\mathbb{E}^{fund,T}\left[\sum_{i=0}^{N} RF_{T_i}E_{T_i}F_{T_i,T_{i+1}} - C_{T_i}R_{T_i,T_{i+1}}\right]}$$

On aura à implémenter un générateur de nombres aléatoires pour calculer cette espérance et générer les trajectoires des taux courts. Ce qui nécessitera de spécifier des modèles de taux et de change et un évaluateur de produit ou du portefeuille.

3.1 Modèles de taux et de FX

Dans notre implémentation du calcul de la FVA développé précédemment, on aura besoin de générer les trajectoires des composantes exposées dans les calculs. Pour cette raison on aura besoin de modèles stochastiques pour les taux d'intérêt et pour les taux de change.

3.1.1 Modèle Hull-White à un facteur

Le modèle de Hull-White à un facteur est une extension du modèle de Vasicek qui est un modèle gaussien introduisant un effet de retour à la moyenne [1]dans l'équation de diffusion.

Le modèle de Hull-White à un facteur est un modèle plus général permettant la dépendance en temps des paramètres du modèle de taux. Dans un HW1 le taux d'intérêt court suit l'EDS :

$$\boxed{dr_t = (\theta(t) - kr_t)dt + \sigma(t)dW_t^d}$$

C'est le modèle qu'on utilisera pour les taux dans notre calcul de FVA.

3.1.2 Modèle Garman de FX

Le modèle de Garman est un modèle log-normal servant à modéliser le processus du spot FX (taux de change entre deux devises). Ce modèle est exactement identique au modèle de Black-Scholes pour les spots actions avec un drift dépendant de deux taux dans les deux devises de change.

[1] Voir annexe

Si on note e comme foreign et d comme domestic pour les deux devises, le taux $FX^{d/e}$qui permet de passer de la devise locale d à la devise f suit la diffusion :

$$\boxed{\frac{dFX^{d/e}}{FX^{d/e}} = (r^d{}_t - r^e{}_t)dt + \sigma^{FX}(t)dW_t^d}$$

Dans le marché les taux FX et les actions sont les instruments les plus volatiles. Dans leur modélisation, la volatilité est proportionnelle à la valeur du spot ce qui explique en partie la forte volatilité de ces instruments.

3.2 Simulation Monte-Carlo et Diffusion des trajectoires

Les méthodes de Monte-Carlo sont des méthodes de simulation mathématiques largement utilisées dans différents contextes, le calcul d'aires ou de volumes par exemple, ou d'autres usages scientifiques et autres problèmes dont le dénominateur commun est le calcul d'intégrales. Ces méthodes se prêtent très bien à la modélisation en finance pour son efficacité et sa simplicité, permettant de modéliser des éléments financiers relativement complexe.

La base de ces techniques de simulation repose sur la loi forte des grands nombres pour estimer un espérance mathématique. Elle dit que la moyenne converge presque sûrement vers l'espérance mathématique. Ce qui signifie que si $X_1, X_2, \dots, X_n$ est une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi et intégrables. Alors :

$$\boxed{\lim_{n \sim \infty} \frac{1}{n} \sum X_i = \mathbb{E}[X]}$$

Et plus généralement si g est une fonction réelle :

$$\boxed{\lim_{n \sim \infty} \frac{1}{n} \sum g(X_i) = \mathbb{E}[g(X)]}$$

D'autre part, pour quantifier la qualité ou l'erreur de l'approximation numérique on utilise le théorème central limite qui dit que si $g(X)$ est de variance finie alors :

$$\boxed{\sqrt{n}\left[\frac{1}{n}\sum g(X_i) - \mathbb{E}[g(X)]\right] \overset{loi}{\backsim} \mathcal{N}(0, var[g(X)])}$$

Un intervalle de confiance de la simulation à α% est :

$$\boxed{\left[\frac{1}{n}\sum g(X_i) \mp \phi^{-1}(1 - {}^{\alpha}/_{2})\frac{var[g(X)]}{\sqrt{n}}\right]^{1}}$$

Ce qui signifie que le résultat de la simulation est sensible à la variance et le nombre de scénarios de la simulation. Ce sont deux variables importantes qu'on pourra stresser dans la suite pour tester la convergence[2].

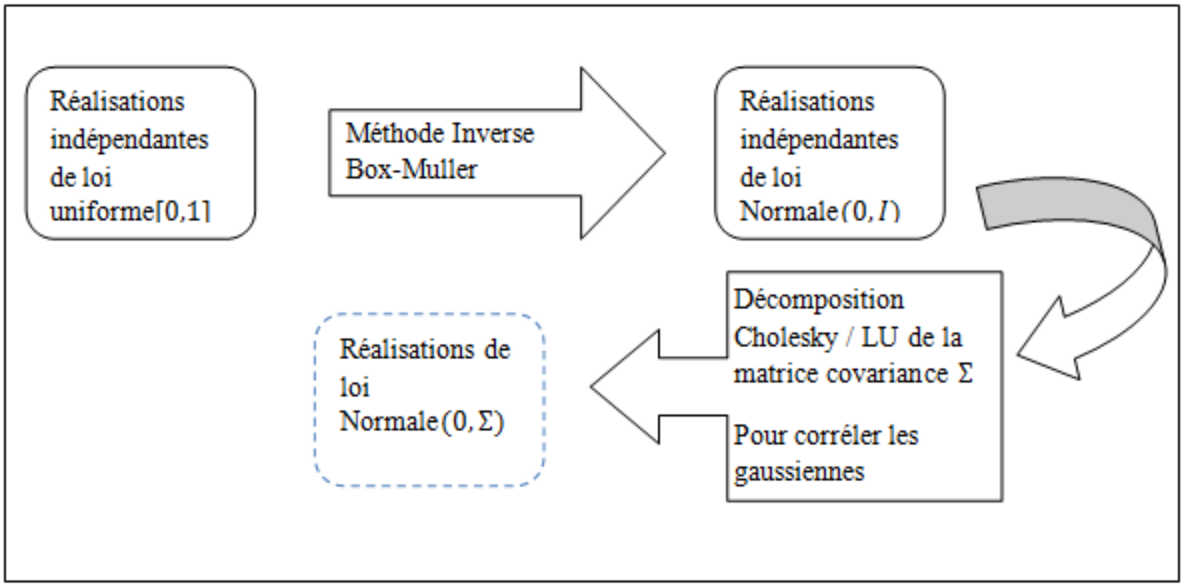
3.2.1 Principe de la méthode MonteCarlo

De manière générale, la simulation de variables aléatoires repose sur la simulation de variables uniformément distribuées sur $[0,1]$ pour en déduire des réalisations d'une variable X par des méthodes, d'inversion ou Box-Muller par exemple. Dans notre cas de calcul de FVA, les processus qu'on considère sont des browniens et on sera donc intéressés par la simulation de réalisations de variables gaussiennes.

La plupart des environnements de développement offrent des générateurs de nombres aléatoires uniformes par différents algorithmes. Il suffira d'écrire la transformation en gaussiennes.

[1] ϕ la fonction quantile de la loi normale
[2] Convergence en $\sqrt{1/n}$

Figure 89 Illustration résumée de la simulation Monte-Carlo



Les gaussiennes obtenues ensuite sont i.i.d et l'on doit procéder par une décomposition de Cholesky ou LU pour les corréler.

3.2.2 EDS et Diffusion de processus stochastiques

La plupart des modèles stochastiques en finance sont caractérisées par une équation différentielle stochastique (EDS) qui gère l'évolution de l'élément modélisé avec un mouvement Brownien. L'EDS d'un processus $(X_t)_{t\geq 0}$désigne en général l'équation suivante:

$$\boxed{dX_t = \underbrace{\mu(t, X_t)}_{drift}\, dt + \underbrace{\sigma(t, X_t)}_{vol}\, dW_t}$$

Une EDS fait donc intervenir un drift et un brownien et des paramètres de tendance (drift) et de volatilité (diffusion) spécifiques à chaque modèle.
Pour simuler une diffusion on pourra discrétiser une EDS selon un schéma de discrétisation (Euler par exemple) et simuler le brownien de l'EDS.

Une discrétisation consiste à se donner un processus $\left(X_t^{(n)}\right)_{t\geq 0}$ qui approche suffisamment bien $(X_t)_{t\geq 0}$ sur un intervalle $[0, T]$ et qui soit solution de l'EDS.

Une telle solution est caractérisée par une partition $\mathcal{T}_N$ et une maille δ_N

$$\boxed{\begin{aligned}&\mathcal{T}_N := \{t_0 = 0 \leq t_1 \dots \leq t_N = T,\}\\&\delta_N = \max_{i=0\dots N}[t_i - t_{i-1}]\end{aligned}}$$

Un schéma de discrétisation simple est le schéma d'Euler simplifié où on a :

$$\boxed{\Delta_i^t = t_i - t_{i-1}\ ;\ \Delta_i^W = W_i - W_{i-1}}$$

Et le schéma :

$$
\begin{aligned}
X_{t_0}^{(n)} &= X_0\\
X_{t_1}^{(n)} &= X_{t_0}^{(n)} + \mu\left(t_0, X_{t_0}^{(n)}\right).\Delta_1^t + \sigma\left(t_0, X_{t_0}^{(n)}\right).\Delta_1^W\\
X_{t_2}^{(n)} &= X_{t_1}^{(n)} + \mu\left(t_0, X_{t_1}^{(n)}\right).\Delta_2^t + \sigma\left(t_0, X_{t_1}^{(n)}\right).\Delta_2^W\\
\dots &=..\\
X_{t_N}^{(n)} &= X_{t_{N-1}}^{(n)} + \mu\left(t_0, X_{t_{N-1}}^{(n)}\right).\Delta_N^t + \sigma\left(t_0, X_{t_{N-1}}^{(n)}\right).\Delta_N^W
\end{aligned}
$$

Le schéma d'Euler est convergent d'ordre $1/2$ quand le pas tend vers zéro. Les résultats sont donc sensibles au pas qui est une variable à stresser pour tester la convergence.

3.2.3 Simulation avec formule fermée

- Diffusion d'un taux HW1 en utilisant la formule fermée.

On sait que si $(r_t)_{t\geq 0}$ suit une diffusion HW1 alors on a la forme exacte [1]de la solution de l'EDS HW1 comme suit :

$$\boxed{r_t = e^{-k(t-s)}r_s + \int_s^t e^{-k(t-u)}\theta_u du + \int_s^t e^{-k(t-u)}\sigma_u dW_u}$$

$\left(\int_s^t e^{-k(t-u)}\sigma_u dW_u\right)$ est une intégrale de Wiener[2], et sa loi donc est une normale centre de variance $\left(\int_s^t [e^{-k(t-u)}\sigma_u]^2 du\right)$. On peut donc faire la diffusion MonteCarlo avec la génération de gaussienne suivant la formule fermée en dessus avec le calcul des intégrales déterministes.

Table 1 Schéma de diffusion HW1 exact

$$r_0$$

$$r_1 = e^{-k(T_1-0)}r_0 + \int_{T_0}^{T_1} e^{-k(T_1-u)}\theta_u du + \sqrt{\int_{T_0}^{T_1} [e^{-k(T_1-u)}\sigma_u]^2 du} * G^1$$

$$r_2 = e^{-k(T_2-T_1)}r_0 + \int_{T_1}^{T_2} e^{-k(T_2-u)}\theta_u du + \sqrt{\int_{T_0}^{T_2} [e^{-k(T_2-u)}\sigma_u]^2 du} * G^2$$

$$\ldots = \ldots$$

$$r_N = e^{-k(T_N-T_{N-1})}r_0 + \int_{T_{N-1}}^{T_N} e^{-k(T_N-u)}\theta_u du + \sqrt{\int_{T_{N-1}}^{T_N} [e^{-k(T_N-u)}\sigma_u]^2 du} * G^N$$

Où $G^1, G^2, \ldots, G^N$ sont des gaussienne i.i.d de loi $\mathcal{N}(0,1)$

---

[2] Définition en annexe

Ce schéma exact est préféré au schéma discret pour ne pas avoir de sensibilité au pas temporel et éviter le calcul à grille fine.

- Diffusion d'un FX Garman en utilisant la forme exacte

On sait que si $(FX_t)_{t\geq 0}$ suit une diffusion Garman alors on a la forme exacte [1]de la solution de l'EDS log-normale comme suit :

$$\boxed{FX_t = FX_s \exp\left[\int_s^t \left(r_u^d - r_u^f\right) du - \frac{1}{2}\int_s^t \sigma_u^2 du + \int_s^t \sigma_u dW_u\right]}$$

$\left(\int_s^t \sigma_u dW_u\right)$ est une intégrale de Wiener, et sa loi donc est une normale centre de variance $\left(\int_s^t {\sigma_u}^2 du\right)$. On peut donc faire la diffusion MonteCarlo avec la génération de gaussienne suivant la formule fermée avec le calcul des intégrales déterministes.

[1] Calculs en annexe

Table 2 Schéma de diffusion Garman exacte

$$FX_0 = FX_0$$

$$FX_1 = FX_0 \exp\left[\int_0^{T_1} \left(r_u^d - r_u^f\right) du - \frac{1}{2}\int_0^{T_1} \sigma_u^2 du + \sqrt{\left(\int_0^{T_1} {\sigma_u}^2 du\right)} * G^1\right]$$

$$FX_2 = FX_1 \exp\left[\int_{T_1}^{T_2} \left(r_u^d - r_u^f\right) du - \frac{1}{2}\int_{T_1}^{T_2} \sigma_u^2 du + \sqrt{\left(\int_{T_1}^{T_2} {\sigma_u}^2 du\right)} * G^2\right]$$

$$\ldots = \ldots$$

$$FX_N = FX_{N-1} \exp\left[\int_{T_{N-1}}^{T_N} \left(r_u^d - r_u^f\right) du - \frac{1}{2}\int_{T_{N-1}}^{T_N} \sigma_u^2 du + \sqrt{\left(\int_{T_{N-1}}^{T_N} {\sigma_u}^2 du\right)} * G^N\right]$$

Où $G^1, G^2, \ldots, G^N$ sont des gaussienne i.i.d de loi $\mathcal{N}(0,1)$

4 Taux d'intérêt et produits de taux

Les Zéro-coupons représentent l'instrument de base dans le pricing des produits de taux qui sert dans le pricing et la réplication des produits vanille non optionnels. La plupart des produits de taux sont décomposables en fonction de différents zéro-coupons pour différents taux et maturités.

Dans la suite on définira et calculera les zéro-coupons et autres produits de taux, notamment les swaps qui serviront comme portefeuille sur lequel on calculera la FVA.

4.1 Généralités sur les taux d'intérêt

On essaiera de préciser les différentes notions des taux d'intérêt avant de passer aux produits sur taux.

- Le zéro-coupon de maturité T est le prix en $t$de $1UM$ payé en T.
- Le taux actuariel en t de maturité θ est le taux annualisé auquel est prêté l'argent entre les dates t et $t+\theta$:

$$\boxed{Z(t,t+\theta)=\frac{1}{\left(1+\hat{R}(t,\theta)\right)^{\theta}}}$$

- Le taux continu de maturité θ est défini par :

$$\boxed{R(t,\theta)=ln\left[1+\hat{R}(t,\theta)\right]}$$

- Le taux linéaire surtout utilisé pour des maturités de moins d'un an est noté $L(t,\theta)$:

$$\boxed{Z(t,t+\theta)=\frac{1}{(1+\theta L(t,\theta))}}$$

- Le taux court r_t est la limite du taux continu $R(t,\theta)$ quand la maturité tend vers 0
- La courbe des taux est la fonction qui donne les différents taux de la date t en fonction de leur maturité θ, soit$[\theta \to R(t,\theta)]$. La courbe est plate si cette fonction est constante.

4.2 Zéro-Coupon

Un zéro-coupon est une obligation sans coupons à flux unique et unitaire. En d'autres termes, il représente la valeur initiale d'une unité monétaire reçu à une date future T (maturité) étant donné un certain taux.

Si à un temps initial t on veut avoir $1UM$ dans la date T et que le taux d'intérêt est r_t, alors ce produit est un Zéro-coupon, noté $Z(t,T)$ de pay-off $1UM$ et son prix est :

$$\boxed{Z(t,T)=\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[e^{-\int_t^T r_u du}\middle|\mathcal{F}_t\right]}$$

Un zéro coupon forward est la valeur fixée en t, pour le montant à payer en T pour garantir $1UM$ en $T+\theta$, qui par absence d'arbitrage vaut :

$$\boxed{Z_t(T, T+\theta) = \frac{Z(t, T+\theta)}{Z(t, T)}}$$

Le taux forward continu fixé en t pour l'échéance T et à maturité θ :

$$\boxed{R_t(T, T+\theta) = -\frac{1}{\theta} ln[Z_t(T, T+\theta)]}$$

4.3 Produits de taux : exemple d'un Swap de taux

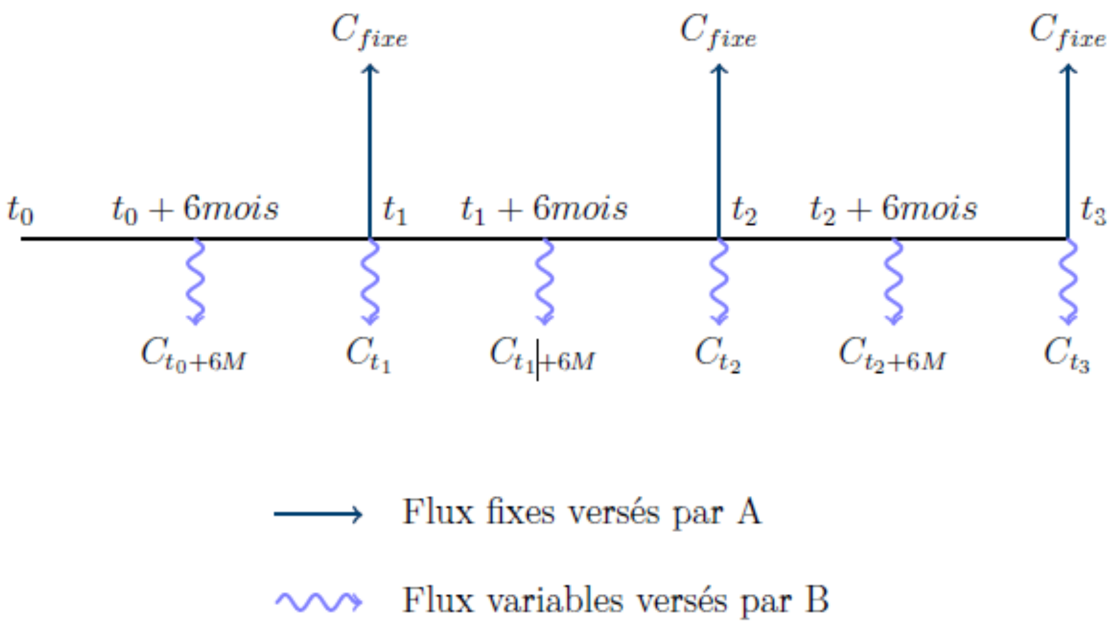
Un swap est un contrat d'échange de flux futurs où une partie reçoit des coupons à taux fixe et verse à l'autre partie des coupons à taux variable sur un nominal constant et déterminé au début du contrat.

L'utilisation[1] des swaps est pertinente dans le but de l'optimisation des conditions de financement ou pour convertir les conditions financières d'une dette. Un exemple d'utilisation d'un swap de taux est celui d'une entreprise qui prévoit des entrées de flux à taux variable qui souhaite, par exemple, fixer ce taux dans le futur pour se protéger du risque de taux et avoir plus de visibilité vis-à-vis de ses engagements…etc.

Le taux variable est en général un taux LIBOR ou EURIBOR et sa duration est égale à la durée séparant deux paiement de la jambe variable.

[1] Annexe

Figure 1011: Représentation des flux d'un Swap de taux



Source: Rapport Othmane Abbadi SG-ATS 2015

Le taux swap R^{swap} est le taux qui annule le prix d'un contrat swap (ou qui égalise la patte fixe avec la patte variabe).

Un swap est donc bien défini par :

- Le facteur d'actualisation, qui dépend du CSA, à chaque date $\mathcal{DF}_{T_i}$,[1]
- La mesure de temps écoulé entre deux dates T_{i-1}et T_i,
- Le taux fixe de swap K : $V_0^{swap}(K) = 0 \;\rightarrow K = \; R^{swap}$,
- Le taux variable $v(T_{i-1}, T_i)$ « LIBOR »,
- Un montant principal,
- Une maturité.

- Une jambe variable qui verse des paiements en $T_j \; j = 1, \dots, M$

[1] Les discount factors sont calculés à partir de la courbe de taux à l'instant initial et ne dépendent pas du taux swappé.

$$J^{variable} = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left(\sum_{j=1}^{M} v(T_{j-1}, T_j)\delta_j \mathcal{DF}_{T_j}\right)$$

- Une jambe fixe qui verse des paiements en T_{ki} ; $i = 1, \dots, N; kN = M$

$$\boxed{J^{fixe} = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left(\sum_{i=1}^{N} K\delta_{ki}\mathcal{DF}_{T_{ki}}\right)}$$

Le taux swap est celui qui égalise les deux jambes sur la durée du swap :

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left(\sum_{j=1}^{M} v(T_{j-1}, T_j)\delta_j \mathcal{DF}_{T_j}\right) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left(\sum_{i=1}^{N} R^{swap}\delta_{ki}\mathcal{DF}_{T_{ki}}\right)$$

$$\rightarrow \qquad R^{swap} = \frac{\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left(\sum_{j=1}^{M} v(T_{j-1}, T_j)\delta_j \mathcal{DF}_{T_j}\right)}{\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left(\sum_{i=1}^{N} \delta_{ki}\mathcal{DF}_{T_{ki}}\right)}$$

4.4 Pricing avec un HW1

L'élément majeur dans le pricing des produits taux est le modèle spécifié pour le taux court, ici on utilisera un Hull-White1 qui a la forme close :

$$\boxed{r_t = e^{-k(t-s)} r_s + \int_s^t e^{-k(t-u)} \theta_u du + \int_s^t e^{-k(t-u)} \sigma_u dW_u \quad ; s \leq t}$$

La forme intégrale du taux HW1 est :

$$\boxed{\int_s^T r_t dt = r_s \frac{1}{k}\left(1 - e^{-k(T-s)}\right) + \int_s^T \left(\frac{1}{k}\left(1 - e^{-k(T-u)}\right)\right) \theta_u du + \int_s^T \left(\frac{1}{k}\left(1 - e^{-k(T-u)}\right)\right) \sigma_u dW_u}$$

Avec les propriétés de l'intégrale de Wiener, $\int_s^T r_t dt$ suit conditionnellement à r_s une loi normale de moyenne $\mathcal{M}_{s,T}$ et de variance $\mathcal{V}_{s,T}$ (calculs renvoyés en annexe). Ce qui permet de faire le calcul et le pricing.

- Prix d'un $Z(t,T)$.

En utilisant la fonction génératrice de la loi normale ainsi que les propriétés calculées pour HW1, on trouve :

$$Z(t,T) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[e^{-\int_t^T r_u du} \middle| \mathcal{F}_t\right] = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[e^{-\mathcal{N}_{t,T}} | \mathcal{F}_t] = e^{-\mathcal{M}_{t,T} + \frac{\mathcal{V}_{t,T}}{2}}$$

$$avec \quad \mathcal{N}_{t,T} \sim Normale(\mathcal{M}_{s,T}, \mathcal{V}_{s,T})$$

Après simplifications $Z(t,T)$ s'écrit :

$$\boxed{Z(t,T) = A(t,T) e^{-r_t B(t,T)}}$$

Avec

$$\begin{cases} A(t,T) = e^{-\int_t^T B(u,T)\,\theta_u du + \frac{1}{2}\int_t^T [B(u,T)\sigma_u]^2 du} \\ B(t,T) = \frac{1}{k}\left(1 - e^{-k(T-t)}\right) \end{cases}$$

- Prix d'un Swap :

Avec un taux fixe de swap déterminé, l'évaluation du swap consiste en l'évaluation des jambes fixe et variable. Le prix est alors, selon le point de vue qu'on prend, la différence entre les valeurs des deux jambes.

$$swap_t = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left(\sum_{i=1}^{N} K\delta_{ki}\mathcal{DF}_{0,T_{ki}} - \sum_{i=1}^{M} v\left(T_{j-1}, T_j\right)\delta_j \mathcal{DF}_{0,T_j}\right)$$

A partir de là, on peut construire des *pricers*, générer des trajectoires et calculer une FVA.

5 Implémentation de la FVA

Dans cette partie on se focalisera sur l'aspect pratique de l'application des méthodes et calculs précédents dans l'implémentation de la FVA. Pour les différents cas auxquels on s'intéresse, on aura à calculer des observables pour en déduire finalement la FVA.

Dans un premier temps on établira le calcul d'une intégrale de taux *flooré* à zéro (positif ou négatif) puisque cette quantité intervient fortement dans les formules à implémenter. Pour cela, on procédera par différentes méthodes et approximations.

Ensuite on pourra organiser les calculs de FVA pour chaque cas et essayer d'arriver à des résultats.

FVA simple

On essaiera dans un premier temps de calculer une FVA simple, c'est-à-dire dans un cas sans collatéral et sans convention CSA particulière. On aura juste une intégrale de *funding* comme composante FVA.

$$\boxed{\begin{gathered} FVA = \mathbb{E}\left[\sum_{i=0}^{N} \mathcal{DF}_{(T_i,T_{i+1},r+f)} V_{T_i} \mathbb{E}\left[\int_{T_i}^{T_{i+1}} f_t - s_t dt \middle| \mathcal{F}_{T_i}\right]\right] \\ FVA = \mathbb{E}\left[\sum_{i=0}^{N} \mathcal{DF}_{(T_i,T_{i+1},r+f)} V_{T_i} F_{T_i,T_{i+1}}\right] \end{gathered}}$$

Pour amener ce calcul on aura besoin de *pricer* notre swap et dégager des trajectoires de prix V_{T_i}, calculer des trajectoires de discount factor $\mathcal{DF}_{(T_i,T_{i+1},r+f)}$ sur un taux référence et un taux de *funding* qui seront diffusés, calculer les intégrales de *funding* $F_{T_i,T_{i+1}}$ et les agréger en espérance sur toute les trajectoires.

Chapitre 4 : Code et Résultats

Avant de présenter les différents éléments de calculs qu'on a pu réaliser jusqu'au moment de rédaction du présent rapport, on s'occupera de présenter l'environnement de développement dans lequel les implémentations ont été effectuées.

1 La POO et C#

La programmation orientée objet est une technique d'organisation du code d'un programme en le groupant en objets, les objets étant des éléments séparés comportant des informations (valeurs de données) et des fonctionnalités. L'approche orientée objet permet de regrouper des éléments particuliers d'informations avec des fonctionnalités ou des actions communes associées à ces informations. La possibilité d'intégrer ainsi toutes ces valeurs et ces fonctions offre divers avantages : par exemple, il est possible de ne suivre qu'une seule variable ou bloc de variables plutôt que plusieurs, de regrouper des fonctionnalités liées entre elles et de structurer les programmes pour qu'ils se rapprochent davantage du fonctionnement humain.

Les éléments courants de la programmation orientée objet sont la définition de classe et d'interfaces, la création de propriétés, méthodes et accesseurs, le contrôle de l'accès aux classes, propriétés et méthodes, la création de classes, propriétés et méthodes statiques, la création de structures d'énumération, l'utilisation de l'héritage. C# est un langage de programmation conçu pour la création d'une large gamme d'applications qui s'exécutent sur le *framework .NET*. C# est simple, puissant, de type sécurisé et orienté objet. Avec ses nombreuses innovations, C# permet le développement rapide d'applications tout en conservant la simplicité et l'élégance des langages de style C.

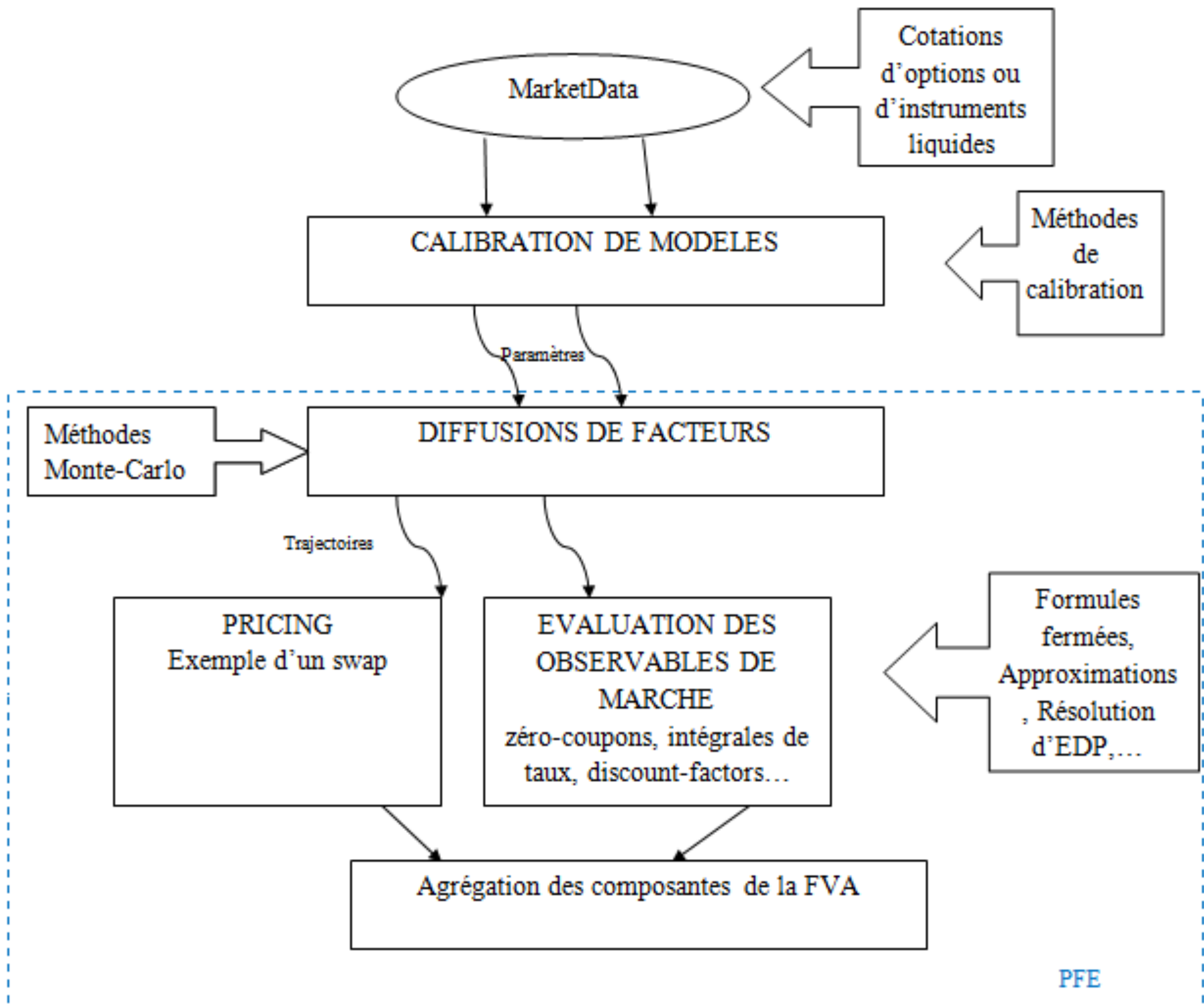
Visual C# correspond à l'implémentation du langage C# par Microsoft. Visual Studio prend en charge Visual C# avec, parmi d'autres outils, un éditeur de code aux fonctionnalités complètes, des modèles de projet, des concepteurs, des Assistant au Codage et un débogueur puissant et simple d'utilisation. La bibliothèque de classes .NET Framework donne accès à de nombreux services de système d'exploitation et d'autres classes utiles, bien conçues qui permettent d'accélérer considérablement le cycle de développement.

2 *Design* et organisation du code

De manière sommaire, le calcul de la FVA se traduit simplement par un schéma d'imbrication d'éléments successifs. A partir des données de marché et de nos hypothèses sur les modèles à utiliser, on calibre les modèles, qui seront diffusés pour donner des trajectoires utilisées par la suite pour le *pricing* et enfin pour l'évaluation des différentes composantes en mettant en œuvre les méthodes développées dans les chapitres précédents.

$$\boxed{FVA = Agrégation\left\{Evaluation\left\{Diffusion\{Calibration\langle MarketData\rangle\}\right\}\right\}}$$

Figure 1213 Schéma global de l'implémentation



3 Tests unitaires

Par définition, un test unitaire est un procédé permettant de s'assurer du fonctionnement correct d'une partie déterminée d'un logiciel ou d'une portion d'un programme (appelée unité ou module).

Dans un test, on cherche toujours à vérifier un comportement. On utilise donc des assertions qui définissent le comportement attendu. En français, une assertion est un énoncé considéré comme vrai. Pour un test unitaire, il s'agit d'une expression qui doit être vraie pour que le test réussisse.

`NUnit` utilise une classe statique **`Assert`** pour les assertions :

Cette classe **`Assert`** va permettre de tester entre autre :

- l'égalité : **`Assert.Equals`**
- le non null : **`Assert.IsNotNull`**
- une condition **`Assert.IsTrue`**

mais aussi, la présence dans une plage de valeur, une égalité approximative, l'égalité des références etc…
Un test comporte toujours des assertions.

Exemple de l'utilisation de tests unitaires

Dans la diffusion de taux court avec le modèle Hull-White, on se propose de valider les trajectoires générées par cette simulation grâce à des tests unitaires.

On peut valider cette simulation en vérifiant, par exemple, l'égalité des moments empiriques contre les moments théoriques qui sont calculables dans un cas gaussien comme le modèle Hull-White à un facteur.

Les moments empiriques, moyenne et variance, peuvent être estimés avec les estimateurs sans biais présentés en annexe et comparés avec les moments théoriques dont les calculs sont aussi développés en annexe.

4 Résultats

On présente dans cette section quelques aspects des résultats de l'implémentation. L'implémentation du projet prend la forme d'une solution C# dont on présentera la description avec le diagramme de classes et le fonctionnement global. On donnera quelques éléments des trajectoires simulées et les tests effectués avant de montrer les calculs d'une FVA simple sur un swap de taux. (Le diagramme des classes est reporté dans l'Annexe)

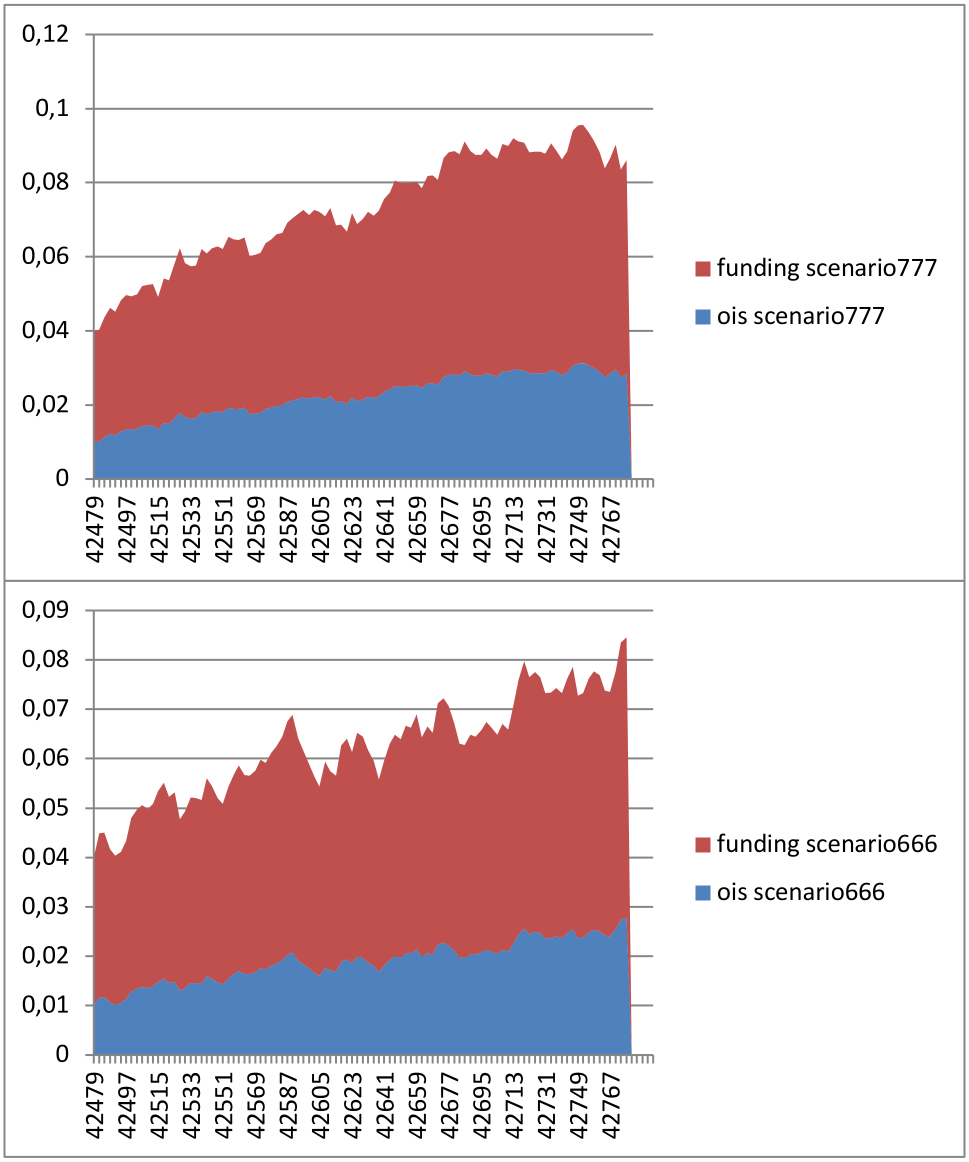
4.1 Diffusion de trajectoires

Après l'organisation du code de génération de trajectoires et l'implémentation des diffusions, on peut les utiliser pour le calcul des expositions et pour simuler les *spreads* de *funding* nécessaires au calcul de FVA.

Ici on présentera quelques aspects des trajectoires obtenues.

4.1.1 Spread de Funding

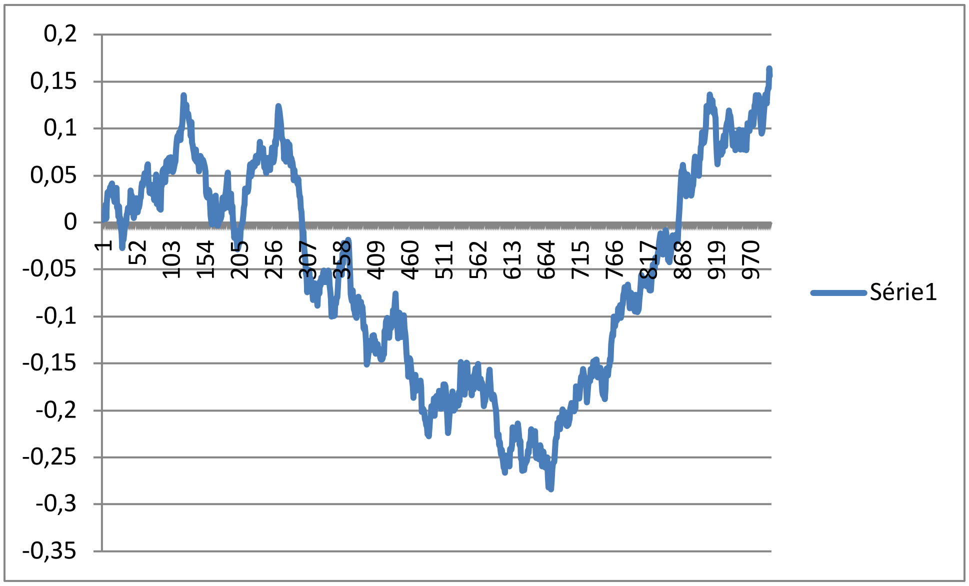
Figure 1415 Illustration du spread de funding sur deux scénarios



On remarque que pour deux scenarios tirés de notre simulation, le *spread* de financement est évident pour une diffusion d'un taux EUR-OIS et un autre EUR-Funding avec des modèles Hull-White qui ont des paramètres différents correspondant à la réalité de chacun. Des niveaux d'équilibre naturellement plus importants pour le *funding* (5% à 6%) par rapport au taux OIS qui est bas (1%).

4.1.2 Taux négatifs

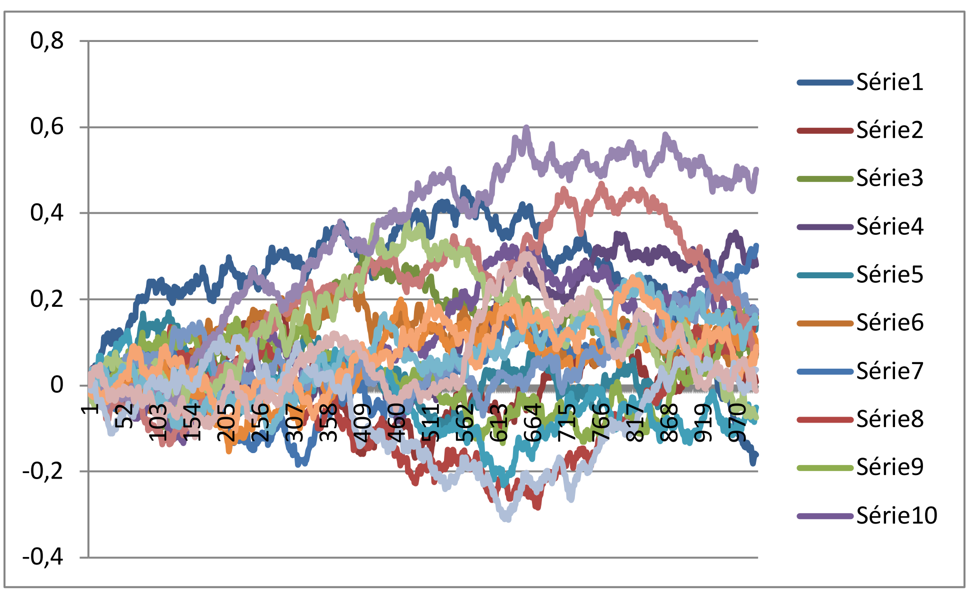
Figure 1617 Une trajectoire simulée de HW1 qui montre les taux négatifs



On remarque que pour une calibration ordinaire du modèle de taux-court Hull-White, mais avec un niveau de taux proche de 0 qui est souvent le cas aujourd'hui (voir Annexe sur les taux négatifs), on s'aperçoit que le modèle effectue des sauts négatifs importants pour certains scenarios. Ce qui répond bien à notre besoin de modélisation.

4.1.3 Trajectoires HW1

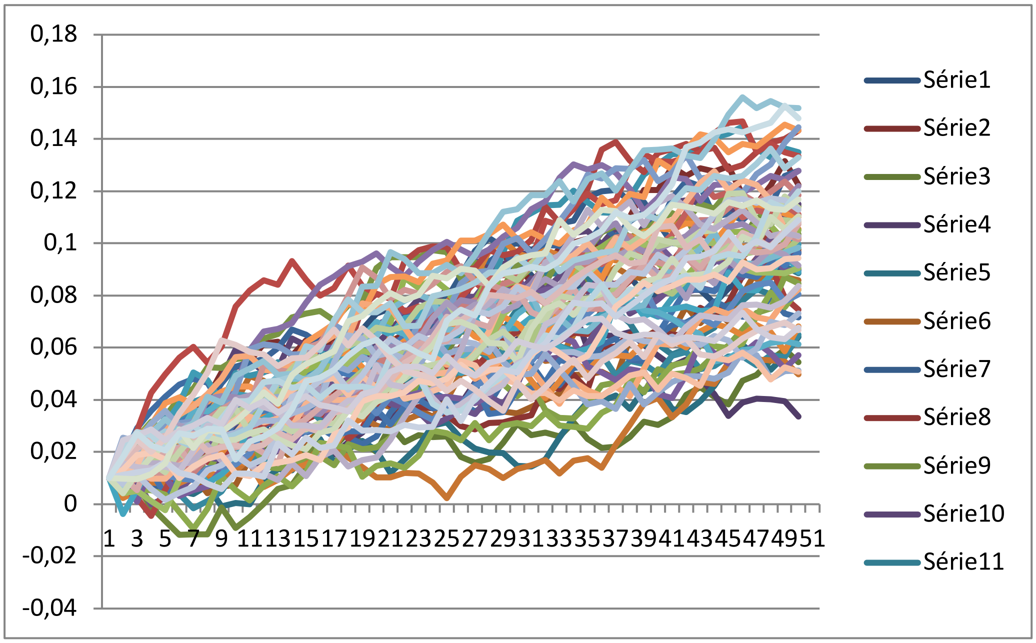
Figure 1819 Tracé d'une vingtaine de trajectoire HW1



Dans cet échantillon de trajectoires on voit que la diffusion est valide et qu'elle représente bien des trajectoires gaussiennes.

4.1.4 Retour à la moyenne

Figure 2021 Simulation de HW1 sans retour à la moyenne



L'une des propriétés des modèles Hull-White est le retour à la moyenne qui, sans elle, on peut avoir des résultats tout-à-fait incorrects du fait de la divergence comme on le voit dans la figure ci-dessus.

4.2 Tests unitaires

A chaque étape de l'implémentation, on a pu tester les différentes parties avec chacune ses propriétés à tester.

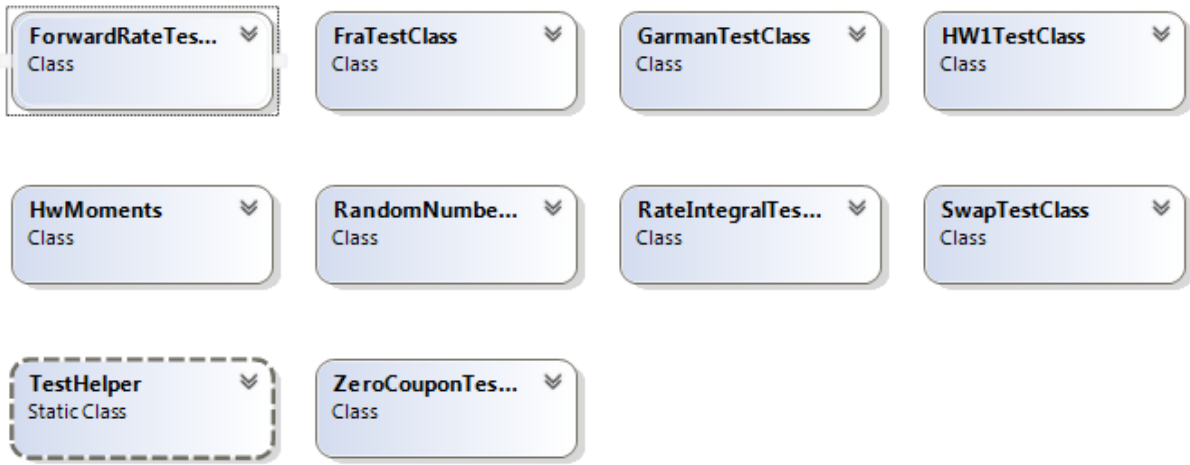


Figure 2223 Les classes de tests implémentées

Les tests unitaires qu'on a effectués ont pour objectifs de :

- Vérifier que les processus simulés ont les bonnes propriétés statistiques,
- Vérifier que le *pricing* est cohérent avec la théorie.
- Vérifier que les appels entre classes s'effectuent de manière correcte.

Pour présenter les tests unitaires effectués, on ne présentera ici qu'un seul exemple de tests.

<u>Test sur la diffusion Hull-White :</u>

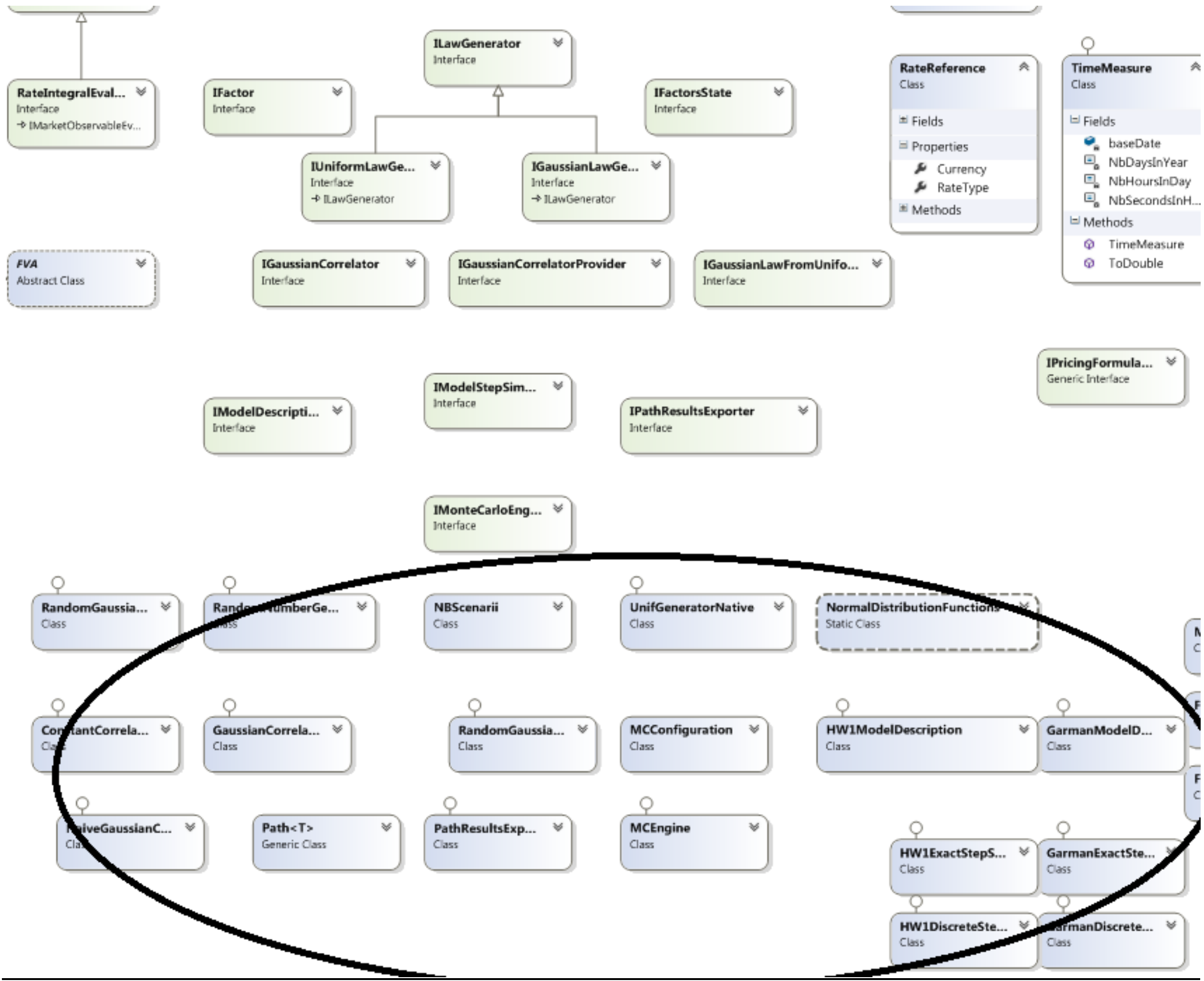


Figure 2425 Unité à tester (HWStepSimulator)

On teste l'égalité des moments théoriques et des moments estimés sur les différentes trajectoires simulées.

Principe du test :

- Générer un bloc de scénarios Hull-White.
- Calculer les estimateurs de moyennes et de variances $\overline{X}$ et $\frac{1}{N}\sum(X_i - \overline{X})^2$.
- Calculer les moyennes et variances théoriques (voir Annexe).
- Comparer à un niveau de tolérance donné. (10^{-3})

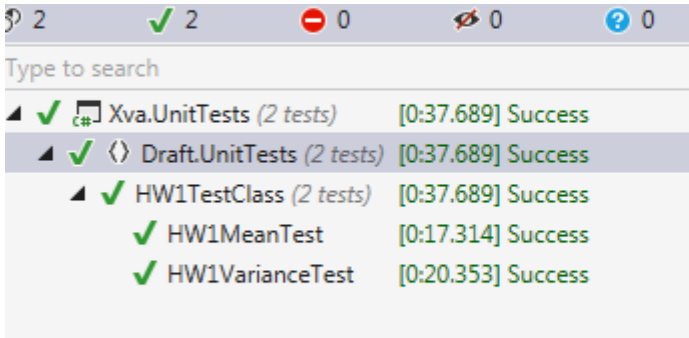


Figure 2627 Procédure de tests validée

On voit que les tests sur la moyenne et la variance sont valides avec une durée d'exécution rapide.

Cela signifie que nos processus simulés convergent bien vers les processus Hull-White gaussiens désirés.

Quand la simulation ne converge pas, on essaie de stresser certains paramètres qui impactent la convergence, on dégrade la configuration du modèle en jouant sur :

- Le nombre de simulations.
- La volatilité.
- Le niveau d'équilibre des taux.
- Le pas temporel de la simulation.

4.3 FVA simple

On évalue une FVA simple avec un benchmark OIS et un *spread* de *funding* stochastique sur un swap de taux Libor.

On implémente la formule citée dans le chapitre précédent :

$$FVA = \mathbb{E}\left[\sum_{i=0}^{N} \mathcal{DF}_{(T_i,T_{i+1},r+f)} V_{T_i} \mathbb{E}\left[\int_{T_i}^{T_{i+1}} f_t - s_t dt \middle| \mathcal{F}_{T_i}\right]\right]$$

$$FVA = \underbrace{\mathbb{E}\left[\overbrace{\sum_{i=0}^{N} \underbrace{\mathcal{DF}_{(T_i,T_{i+1},r+f)} V_{T_i} F_{T_i,T_{i+1}}}_{funding\ cost}}^{agrégation\ sur\ les\ dates}\right]}_{agrégation\ sur\ les\ états\ simulés}$$

Finalement une FVA est, en résumé, un seul chiffre qui récapitule le coût ou l'ajustement dû au *funding* sur toute la vie du produit.

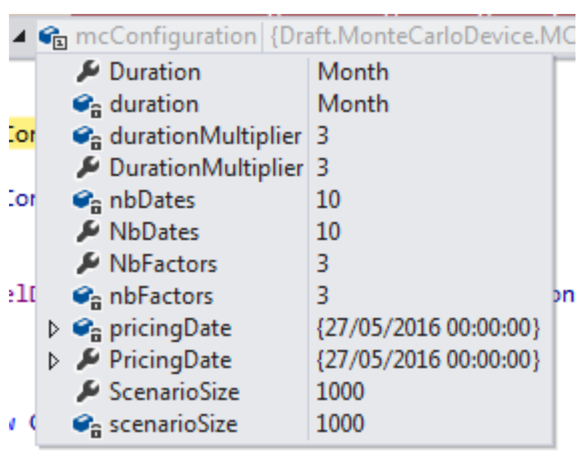
<u>Calcul de la FVA</u>

On présente d'abord les différentes données qu'on utilise dans l'implémentation et ensuite le détail d'un calcul de FVA.

Table 3 Informations du swap

Swap	
Side	Buyer
Notional	10 000.00
Periodicity	3
Duration	Monthly
Strike	0.05
Fixing Date	27/08/2016
Maturity	27/08/2018
Rate Reference	Eur-Libor

Table 4 Configuration Monte-Carlo



mcConfiguration	{Draft.MonteCarloDevice.MC
Duration	Month
duration	Month
durationMultiplier	3
DurationMultiplier	3
nbDates	10
NbDates	10
NbFactors	3
nbFactors	3
pricingDate	{27/05/2016 00:00:00}
PricingDate	{27/05/2016 00:00:00}
ScenarioSize	1000
scenarioSize	1000

Table 5 DF, Intégrales de *spread* et swap valorisés au futur sur un scénario

	discountFactorValues {do	spreadIntegralValues {doub	swapValues {double[9]}
[0]	0.80568592468149669	0.0880246665714648	0.0
[1]	0.81648817107357885	0.083671792685741875	875.76221511310348
[2]	0.83005375283020333	0.081424150516335059	1185.743476383743
[3]	0.84534772435402927	0.068985916819004969	1061.8449429505317
[4]	0.86380183950909661	0.067543967857512655	1013.703614298423
[5]	0.88499614626485734	0.057792117914965996	688.26158999443828
[6]	0.90986586167736427	0.053501546095954984	549.81700404647472
[7]	0.936846076247681	0.037095098705836965	450.60959526614846
[8]	0.96607921610007508	0.019006942087473264	262.74799184454952

On remarque que le vieillissement des observables et du produit sont bien cohérents :

- les *discounts factors* convergent vers 1 à mesure qu'on se rapproche de la date de paiement,
- le swap prend une valeur nulle à la date du début,
- il commence à prendre de la valeur dès la première date.

Table 6 le coût de *funding* sur un scénario donné

Scenario Id	Funding Value/Costs	
scenario0	640.946629	6.41%

Table 7 Illustration graphique de la FVA

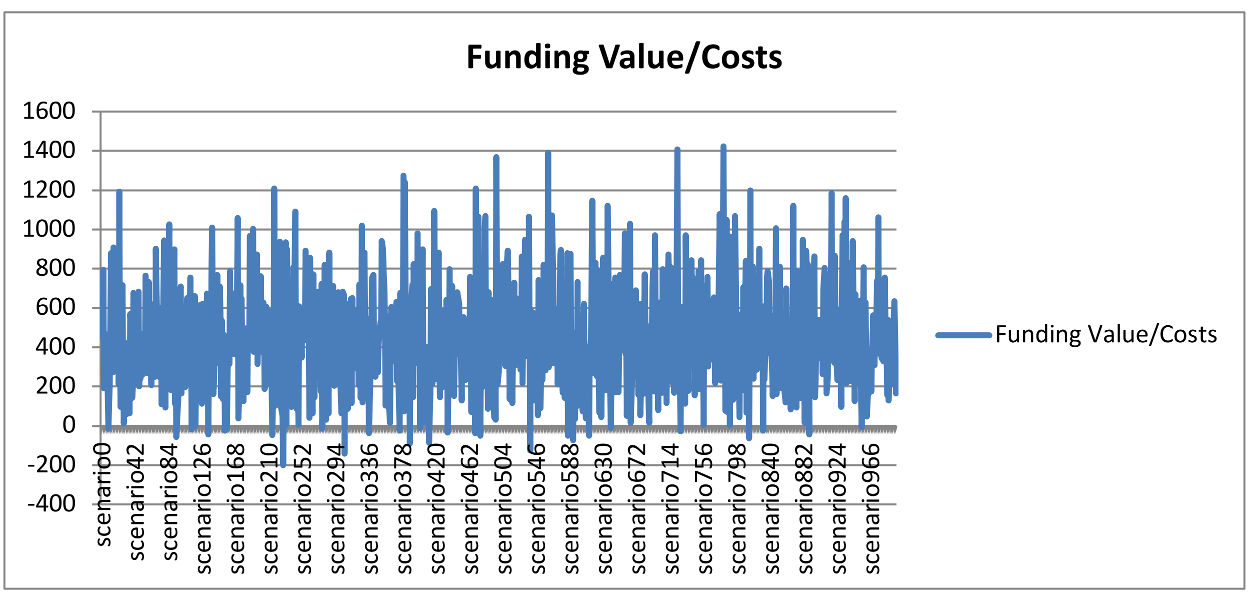


Table 8 FVA agrégée

FVA	FVA%
446.9989	4.47%

On a donc pour le swap considéré, et sur un *funding* stochastique à paramètres constants une FVA de 4.47% qui peut être interprétée comme la partie du produit qu'il faudra financer ou supporter quand la banque se finance au taux de *funding* différent du taux sans risque et qui reflète sa position dans le marché. La FVA peut aussi rendre compte du niveau de confiance que le marché accorde à une certaine banque.

Conclusion

Pour estimer le coût de financement sur un produit dérivé, on a eu recours à la modélisation financière des taux d'intérêt, notamment le modèle Hull-White à un facteur qui rend bien compte des besoins en modélisation de taux dans le calcul de la FVA. On a aussi dû faire le pricing d'un produit dérivé de taux qui est un swap de taux simple à comprendre et à calculer.

En s'appuyant sur les éléments de la documentation citée en bibliographie, on établit une formulation de la FVA avec et sans CSA, et pour des CSA particuliers.

On met cette formulation à l'épreuve d'abord en implémentant la simulation Monte-Carlo, le pricing et en procédant au test des différentes unités de calcul jusqu'à l'obtention d'un *pricer* de FVA.

Les résultats obtenus sont convaincants en termes d'efficacité de calcul mais d'autres résultats sont à réaliser dans la suite du stage pour répondre à la problématique du sujet et fournir des résultats plus interprétables.

Bibliographie

Brigo&Mercurio. (2006). *Interest Rate Models, Theory and Practice.* Springer.

Brigo, D. (2013). *Counterparty Risk FAQ.*

Charpentier, A. (2007). *Méthodes numériques en finance.*

El Karoui, N. (2013-2014). *Couverture des risques dans les marchés financiers.* Ecole Polytechnique, UPMC.

El Qalli, Y. (s.d.). *Modèles mathématiques de la Finance.* INSEA.

Gregory. (2012). *Counterparty Credit Risk and Credit Value Adjustment.* Wiley.

Jallouli, H. (2016). *XVA Calculation under Non-Conventional Collateral Terms [Internal].* SGCIB.

Jallouli, H. (2016). *XVA Derivation under General Collaterization Terms [Internal].* SGCIB.

Jeanblanc, M., Yor, M., & Chesney, M. (2009). *Mathematical Methods for Financial Markets.* Springer.

Piterbarg. (2010). Funding beyond discounting : collateral agreements and derivatives pricing. *ASIARISK*.

Sentissi, B., & Badraoui, S. (2016). *Formation Produits Dérivés [Internal].* SG ATS.

White, J. H. (2014). Collateral and Credit Issues in Derivatives Pricing.

Annexe I

1 Calculs pour un taux court Hull-White1 et FX Garman

1.1 Forme close du taux court HW1 :

$$dr_t = (\theta_t - kr_t)dt + \sigma_t dW_t$$

$$\begin{aligned} &Variation\ de\ la\ constante\ et\ lemme\ d'it\hat{o} \\ d(e^{kt}r_t) &= ke^{kt}r_t dt + e^{kt}dr_t + d < e^{k.}, r_. >_t \\ &= ke^{kt}r_t dt + e^{kt}[(\theta_t - kr_t)dt + \sigma_t dW_t] + 0 \\ &= e^{kt}((\theta_t - kr_t) + kr_t)dt + e^{kt}\sigma dW_t \\ &= e^{kt}\theta_t dt + e^{kt}\sigma_t dW_t \end{aligned}$$

$intégrale\ entre\ 0\ et\ t$:

$$e^{kt}r_t = r_0 + \int_0^t e^{ku}\theta_u du + \int_0^t e^{ku}\sigma_u dW_u$$

$$r_t = r_0 e^{-kt} + \int_0^t e^{-k(t-u)}\theta_u du + \int_0^t e^{-k(t-u)}\sigma_u dW_u$$

Conditionnellement à r_t, r_s est gaussien:

$$r_s \sim Normale(m_{s,t}, v^2{}_{s,t})$$

$$m_{s,t} = r_t e^{-k(s-t)} + \int_t^s e^{-k(u-t)}\theta_u du$$

$$v^2{}_{s,t} = \int_t^s e^{-k(u-t)}\sigma_u{}^2 du$$

1.2 Forme intégrale et loi normale :

$$r_t = e^{-k(t-s)}r_s + \int_s^t e^{-k(t-u)}\theta_u du + \int_s^t e^{-k(t-u)}\sigma_u dW_u$$

$$\int_s^T r_t dt = \int_s^T \left[e^{-k(t-s)}r_s + \int_s^t e^{-k(t-u)}\theta_u du + \int_s^t e^{-k(t-u)}\sigma_u dW_u\right] dt$$

$$= \int_s^T r_s e^{-k(t-s)}\,dt + \int_s^T \underbrace{\left(\int_s^t e^{-k(t-u)}\theta_u du\right)}_{A_u} dt + \int_s^T \left(\int_s^t e^{-k(t-u)}\sigma_u dW_u\right) dt$$

$$s \leq u \leq t \leq T\ ;$$

$$condition\ d'intégrabilité\ \mathcal{L}^2\ ;$$

$$théorème\ de\ \mathcal{F}ubini\ pour\ l'intégrale\ double\ ;$$

$$\int_s^T r_t dt = \int_s^T r_s e^{-k(t-s)}\,dt + \int_s^T \int_s^t e^{-k(t-u)}\,\theta_u du\,dt + \int_s^T \int_s^t e^{-k(t-u)}\,\sigma_u dW_u\,dt$$

$$\int_s^T r_t dt = \int_s^T r_s e^{-k(t-s)}\,dt + \int_s^T \int_u^T e^{-k(t-u)}\,dt\ \ \theta_u du + \int_s^T \int_u^T e^{-k(t-u)} dt\,\sigma_u dW_u$$

$$\int_s^T r_t dt = \int_s^T r_s e^{-k(t-s)}\,dt + \int_s^T \left(\int_u^T e^{-k(t-u)}\,dt\right)\theta_u du + \int_s^T \left(\int_u^T e^{-k(t-u)} dt\right)\sigma_u dW_u$$

$$et \begin{cases} B(u,T) = \int_u^T e^{-k(t-u)}\,dt = \left[-\frac{1}{k}e^{-k(t-u)}\right]_u^T = \frac{1}{k}\left(1-e^{-k(T-u)}\right) \\ \int_s^T r_s e^{-k(t-s)}\,dt = r_s\frac{1}{k}\left(1-e^{-k(T-s)}\right) = r_s B(s,T) \end{cases}$$

$$\int_s^T r_t dt = r_s\frac{1}{k}\left(1-e^{-k(T-s)}\right) + \int_s^T \left(\frac{1}{k}\left(1-e^{-k(T-u)}\right)\right)\theta_u du + \underbrace{\int_s^T \left(\frac{1}{k}\left(1-e^{-k(T-u)}\right)\right)\sigma_u dW_u}_{Wiener\ integral}$$

$$\int_s^T r_u du \sim Normale(\mathcal{M}_t, \mathcal{V}_t)$$

$$\mathcal{M}_{s,T} = \mathbb{E}\left[\int_s^T r_t dt\,\middle|\,r_s\right] = \mathbb{E}\left[\int_s^T r_u du\,\middle|\,\mathcal{F}_s\right]$$

$$\boxed{\mathcal{M}_{s,T} = r_s\frac{1}{k}\left(1-e^{-k(T-s)}\right) + \int_s^T \left(\frac{1}{k}\left(1-e^{-k(T-u)}\right)\right)\theta_u du}$$

$$\mathcal{V}_{s,T} = \mathcal{V}ar\left[\int_s^T r_u du\,\middle|\,\mathcal{F}_s\right] = \mathcal{V}ar\left[\int_s^T \left(\frac{1}{k}\left(1-e^{-k(T-u)}\right)\right)\sigma_u dW_u\,\middle|\,\mathcal{F}_s\right]$$

$$\boxed{\mathcal{V}_{s,T} = \int_s^T \left[\left(\frac{1}{k}\left(1-e^{-k(T-u)}\right)\right)\sigma_u\right]^2 du}$$

1.3 Solution de l'EDS de Garman:

$$\frac{dX_t}{X_t} = \left(r_t^d - r_t^f\right)dt + \sigma_t dW_t \;; \qquad Y_t = f(t, X_t)$$

$$lemme\ d'\mathcal{I}t\hat{o} := \qquad df(t,X_t) = f_t(t,X_t)dt + f_x(t,X_t)dX_t + \frac{1}{2}({\sigma_t}^2 X_t^2) f_{xx}(t,X_t)dt$$

$avec \quad f(t, X_t) = \log(X_t)$

$$df(t,X_t) = 0 + \frac{1}{X_t}dX_t - \frac{1}{2{X_t}^2}(\sigma^2 X_t^2)dt$$

$$df(t,X_t) = \left(r_t^d - r_t^f\right)dt + \sigma dW_t - \frac{1}{2}\sigma^2 dt$$

$$intégrale\ entre\ 0\ et\ t: \qquad X_t = X_0 \exp\left[\int_0^t \left(r_u^d - r_u^f\right)du - \frac{1}{2}\int_0^t \sigma_u^2 du + \int_0^t \sigma_u dW_u\right]$$

$$Définition\ d'un\ ZéroCoupon\ (prix\ à\ s\ d'un\ payoff\ de\ 1\$\ en\ T\ ):$$

$$Z(s,T) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[e^{-\int_s^T r_u du}\middle|\mathcal{F}_s\right]$$

$$Pour\ un\ taux\ court\ qui\ suit\ le\ modèle\ HW1:$$

$$Z(s,T) = Z^{hw1}(s,T) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[e^{-\mathcal{N}_t}\middle|\mathcal{F}_s\right]$$

$$\mathcal{N}_t \sim Normale(\mathcal{M}_{s,T}, \mathcal{V}_{s,T})$$

$$Z(s,T) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[e^{-\int_s^T r_u du}\middle|\mathcal{F}_s\right] = e^{-\mathcal{M}_{s,T} + \frac{\mathcal{V}_{s,T}}{2}}$$

$$Z(s,T) = e^{-\left(r_s\frac{1}{k}\left(1-e^{-k(T-s)}\right) + \int_s^T \left(\frac{1}{k}\left(1-e^{-k(T-u)}\right)\right)\theta_u du\right) + \frac{1}{2}\int_s^T \left[\left(\frac{1}{k}\left(1-e^{-k(T-u)}\right)\right)\sigma_u\right]^2 du}$$

$$Z(s,T) = \underbrace{e^{-\int_s^T \left(\frac{1}{k}\left(1-e^{-k(T-u)}\right)\right)\theta_u du + \frac{1}{2}\int_s^T \left[\left(\frac{1}{k}\left(1-e^{-k(T-u)}\right)\right)\sigma_u\right]^2 du}}_{A(s,T)} e^{-r_s \overbrace{\frac{1}{k}\left(1-e^{-k(T-s)}\right)}^{B(s,T)}}$$

2 Formule de Bachelier

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[(m+\sigma G)^-] &= \int_{\mathbb{R}} (m+\sigma x)\mathbb{I}_{\{m+\sigma x \le 0\}}\phi(x)dx \\ &= \int_{-\infty}^{-\frac{m}{\sigma}} (m+\sigma x)\phi(x)dx \\ &= m\mathcal{N}\left(-\frac{m}{\sigma}\right) - \sigma\phi\left(\frac{m}{\sigma}\right)\end{aligned}$$

3 Calcul d'Itô

3.4.1 Processus d'Itô

Définition 3.4.1

On appelle processus d'Itô un processus $(X_t)_{t\in[0,T]}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ tel que

$$\mathbb{P}-\text{p.s.} \quad \forall\, t \leq T, \qquad X_t = X_0 + \int_0^t K_s ds + \int_0^t H_s dB_s,$$

avec:

- X_0 est $\mathcal{F}_0$ mesurable.
- K et H sont deux processus $\mathcal{F}_t$-adaptés.
- $\int_0^T |K_s| ds < +\infty$ $\mathbb{P}$-p.s. et $\int_0^T |H_s|^2 ds < +\infty$ $\mathbb{P}$-p.s.

(El Qalli)

Théorème 3.4.1

Soit $(X_t)_{t\in[0,T]}$ un processus d'Itô

$$X_t = X_0 + \int_0^t K_s ds + \int_0^t H_s dB_s$$

et F une fonction deux fois continuement différentiable. Alors, nous avons

$$F(X_t) = F(X_0) + \int_0^t F'(X_s) dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t F''(X_s) d\langle X, X\rangle_s$$

où par définition

$$\langle X, X\rangle_t := \int_0^t |H_s|^2 ds.$$

(El Qalli)

4 Approximation et calcul d'intégrales

Dans l'intégrale de Riemann on dit que les intervalles $[T_i, T_{i+1}]$ sont petits et on a :

$$\int_{T_i}^{T_{i+1}} f_t dt \approx f_{T_i} * (T_{i+1} - T_i)$$

Dans l'intégrale de Stieltjes :

$$\int_{\mathrm{T_i}}^{\mathrm{T_{i+1}}} \mathrm{g_t}\, \mathrm{dF_t} \approx \mathrm{g_{T_i}} * (\mathrm{F_{T_{i+1}}} - \mathrm{F_{T_i}})$$

Et en écrivant les deux approximations avec F une primitive de f :

$$\underbrace{\int_{T_i}^{T_{i+1}} g_t f_t dt}_{Riemann} = \underbrace{\int_{T_i}^{T_{i+1}} g_t\, dF_t}_{\text{Stieltjes}}$$

Et l'approximation est bonne quand le pas des intervalles est suffisamment petit.

5 Calcul de $R(t, T)$ d'un taux *flooré*

Que ce soit dans les deux cas de CSA étudiés, on sera amené à calculer une quantité $R_{t,T}$ qui dépend d'un taux court positif (ou négatif).

Le but est de trouver une évaluation de $R_{t,T}$, et pour cela on utilisera trois différentes méthodes dont une est une approximation par des zéro-coupons.

5.1 Calcul de $R(t, T)$ dans un modèle gaussien HW1

Dans un modèle HW1, on peut trouver une formule semi-fermée pour l'intégrale $R(t, T)$:

$$R(t, T) = \mathbb{E}\left[\int_t^T (r_s)^- ds \middle| \mathcal{F}_t\right]$$

$$
\begin{aligned}
&= \mathbb{E}\left[\int_t^T (r_s)^- ds \middle| r_t\right] \\
&= \int_t^T \mathbb{E}[(r_s)^- | r_t] ds \\
&= \int_t^T g(s, r_t) ds
\end{aligned}
$$

En utilisant la formule de Bachelier on a :

$$g(s, r_t) = m_{s,t} \mathcal{N}\left(-\frac{m_{s,t}}{v_{s,t}}\right) - v_{s,t} \phi\left(\frac{m_{s,t}}{v_{s,t}}\right)$$

Et :

$$R(t, T) = \int_t^T \left[m_{s,t} \mathcal{N}\left(-\frac{m_{s,t}}{v_{s,t}}\right) - v_{s,t} \phi\left(\frac{m_{s,t}}{v_{s,t}}\right)\right] ds$$

5.2 Calcul de $\boldsymbol{R(t,T)}$ avec une EDP

Quand le taux court suit une diffusion d'Itô, on a dans un cas général :

$$dr_t = \mu(t, r_t) dt + \sigma(t, r_t) dW_t$$

$$R(t, T) = \mathbb{E}\left[\int_t^T (r_s)^- ds \middle| \mathcal{F}_t\right] = \mathbb{E}\left[\int_t^T (r_s)^- ds \middle| r_t\right] = g_T(t, r_t)$$

La fonction $g_T : (t, r_t) \rightarrow g_T(t, r_t)$ vérifie une EDP linéaire à une dimension :

$$\frac{\partial g_T}{\partial t} + \mu(t, r_t) \frac{\partial g_T}{\partial r} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g_T}{\partial r^2} \sigma^2(t, r_t) = -r^-$$

La résolution nécessitera le recourt aux méthodes numériques de résolution d'EDP.

5.3 Approximation de $\boldsymbol{R(t,T)}$ avec des zéro-coupons

$$R(t, T) = \mathbb{E}\left[\int_t^T (r_s)^- ds \middle| \mathcal{F}_t\right]$$

Par approximation de l'inégalité de Jensen pour l'espérance :

$$R(t,T) \approx \left(\mathbb{E}\left[\int_t^T r_s ds \middle| \mathcal{F}_t\right]\right)^-$$

Et en supposant des taux proches de zéro :

$$R(t,T) \approx \left(1 - \mathbb{E}\left[- \exp\left(\int_t^T r_s ds\right) \middle| \mathcal{F}_t\right]\right)^-$$
$$R(t,T) \approx (1 - ZC_r(t,T))^-$$

Annexe II

Libor, Ois, Eonia..

<u>Libor</u>

« Pour une devise considérée et pour une échéance donnée, le Libor est un indice de taux calculé chaque jour ouvré à 11h (heure de Londres) et publié par l'*ICE Benchmark Administration*, devant en principe refléter le taux moyen auquel un échantillon de seize grandes banques internationales établies à Londres prêtent « en blanc » (c'est-à-dire sans que le prêt soit gagé par des titres) à d'autres grandes banques.

L'échantillon des banques choisies est connu à l'avance et plutôt stable dans le temps. Les taux les plus extrêmes (les quatre plus hauts et les quatre plus bas) relevés sont écartés du calcul en utilisant une moyenne tronquée, afin de protéger l'indice d'éventuelles erreurs ou d'une crise de liquidité qui affecterait telle ou telle banque de l'échantillon. C'est en quelque sorte un baromètre de la stabilité financière et de la santé du système bancaire mondial. »[1]

Les devises concernées sont {USD, GBP, JPY, CHF, EUR}.

<u>OIS</u>

« Il existe des marchés de swaps contre des fixings de taux au jour le jour domestiques réalisés et publiés par une banque centrale ou une autorité indépendante, comme la Fédération Bancaire Européenne. Ils sont connus sous l'appellation d'OIS, de l'anglais OverNight Indexed Swaps. Dans la zone euro, le taux de référence est l'EONIA, aux États-Unis celui des Fed Funds.»

Le taux OIS est utilisé comme référence du taux sans risque.

Taux négatifs

[1] Source : Wikipedia

Un taux d'intérêt négatif : Une personne emprunte 1euro, et en rembourse 0.9. Normalement, c'est le prêteur qui demande rémunération pour le risque qu'il prend et pour compenser l'inflation. En ce moment, c'est l'inverse. Le prêteur paye pour prêter son argent. Tout vient en fait de la Banque centrale. Elle joue le rôle de banquier pour les banques.

Sur les marchés boursiers, tout devait être simple. En baissant les taux d’intérêt à zéro, puis en dessous de zéro, les banques centrales voulaient pousser les banques et les épargnants à investir dans des actifs plus risqués, notamment les actions.

La baisse des taux jusqu’à des niveaux nuls ou négatifs s’interprète, en effet, comme une invitation de la banque centrale à prendre plus de risque.

Un point important est que les taux négatifs, sont souvent des taux référence (OIS), les vrais taux exercés sont des taux référence + spread. Cela signifie que les taux négatifs ne sont pas pratiqués en réalité, mais ils existent néanmoins.

Annexe

Figure 2829 Evolution des taux directeurs souverains (lerevenu.com)

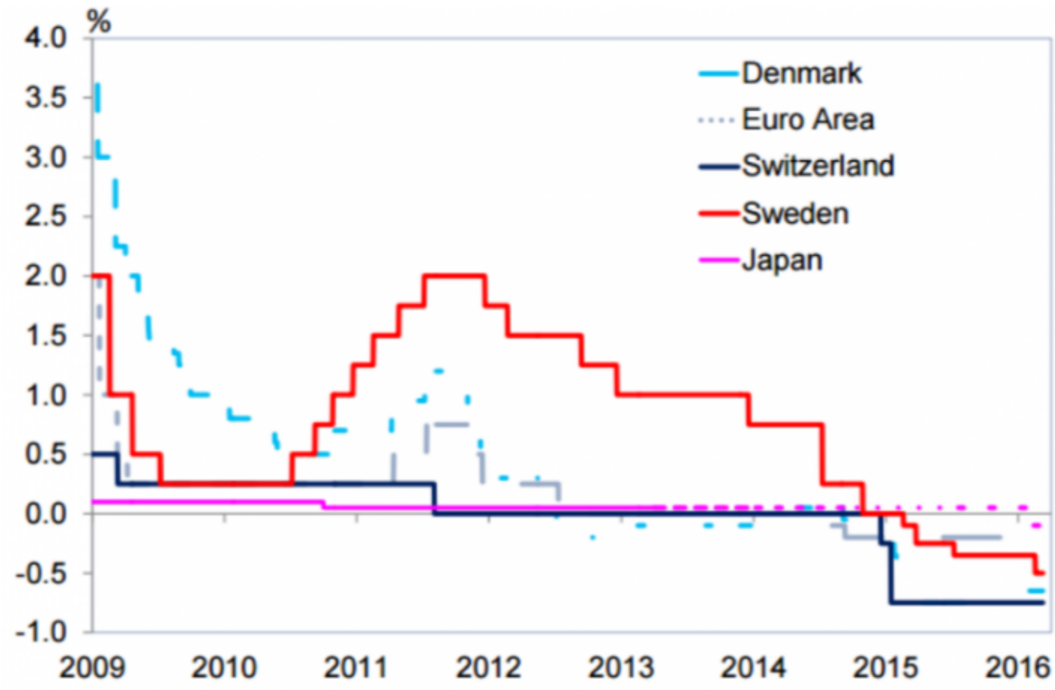
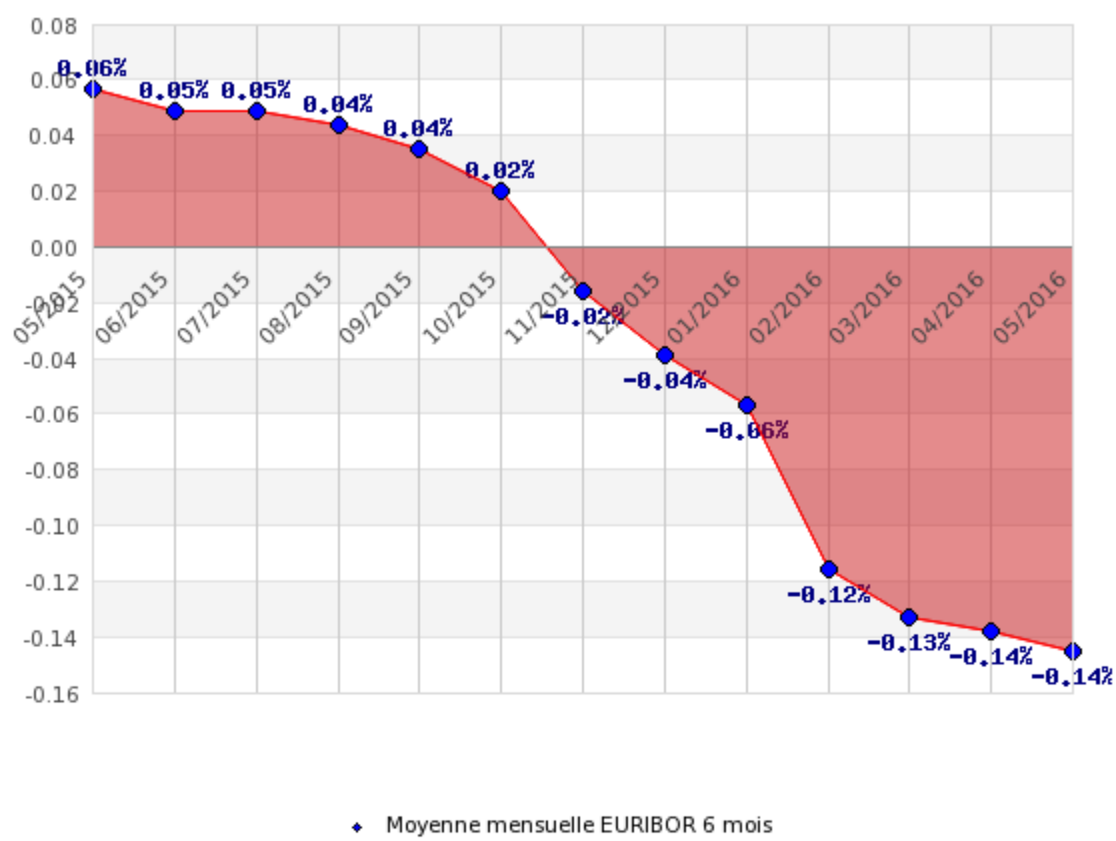


Figure 30 Taux Euribor 6mois exemple de taux de plus en plus négatifs (francetransactions.com)



Modèles de taux et caractéristiques

Ce tableau résume les modèles de taux utilisés en finance et indique (de gauche à droite) :

Le nom du modèle, l'EDS de la dynamique, s'il permet des taux négatifs, la loi du taux court, s'il permet de *pricer* des zéro-coupons explicitement, s'il permet de *pricer* des options explicitement

Table 9 Récapitulatif des modèles de taux

Model	Dynamics	$r > 0$	$r \sim$	AB	AO
V	$dr_t = k[\theta - r_t]dt + \sigma dW_t$	N	$\mathcal{N}$	Y	Y
CIR	$dr_t = k[\theta - r_t]dt + \sigma\sqrt{r_t}dW_t$	Y	$NC\chi^2$	Y	Y
D	$dr_t = a r_t dt + \sigma r_t dW_t$	Y	$L\mathcal{N}$	Y	N
EV	$dr_t = r_t\left[\eta - a \ln r_t\right]dt + \sigma r_t dW_t$	Y	$L\mathcal{N}$	N	N
HW	$dr_t = k[\theta_t - r_t]dt + \sigma dW_t$	N	$\mathcal{N}$	Y	Y
BK	$dr_t = r_t\left[\eta_t - a \ln r_t\right]dt + \sigma r_t dW_t$	Y	$L\mathcal{N}$	N	N
MM	$dr_t = r_t\left[\eta_t - \left(\lambda - \frac{\gamma}{1+\gamma t}\right)\ln r_t\right]dt + \sigma r_t dW_t$	Y	$L\mathcal{N}$	N	N
CIR++	$r_t = x_t + \varphi_t,\ \ dx_t = k[\theta - x_t]dt + \sigma\sqrt{x_t}dW_t$	Y*	$SNC\chi^2$	Y	Y
EEV	$r_t = x_t + \varphi_t,\ dx_t = x_t[\eta - a \ln x_t]dt + \sigma x_t dW_t$	Y*	$SL\mathcal{N}$	N	N

Table 3.1. Summary of instantaneous short rate models.

(Brigo&Mercurio, Interest Rate Models, Theory and Practice, 2006)

Annexe III

Figure 31 Vue d'une sortie de simulation (taux court OIS)

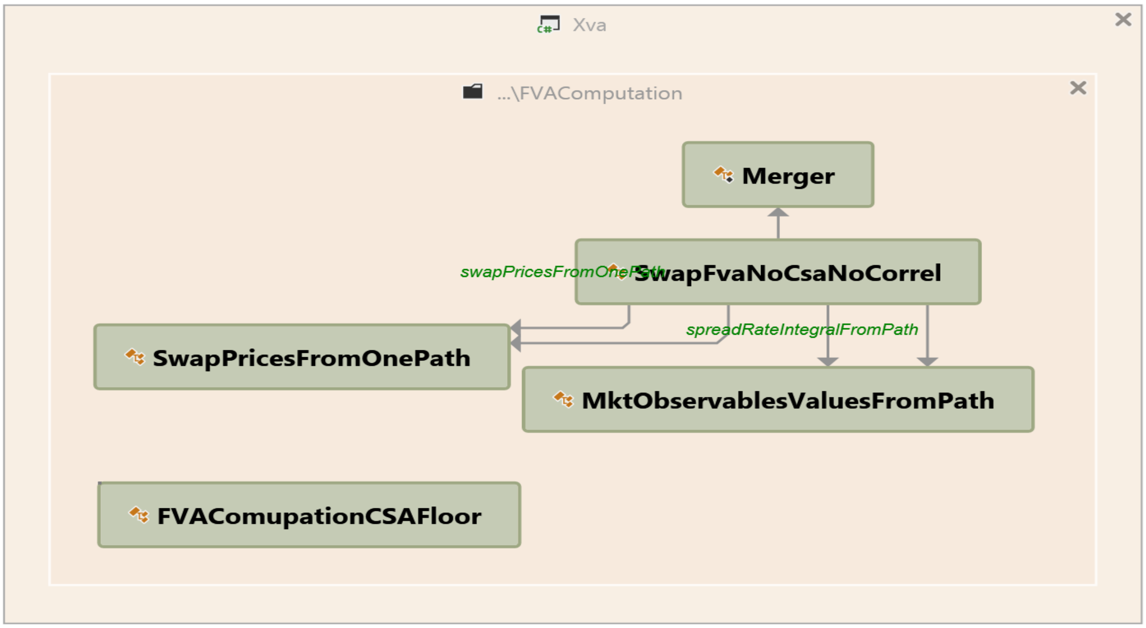
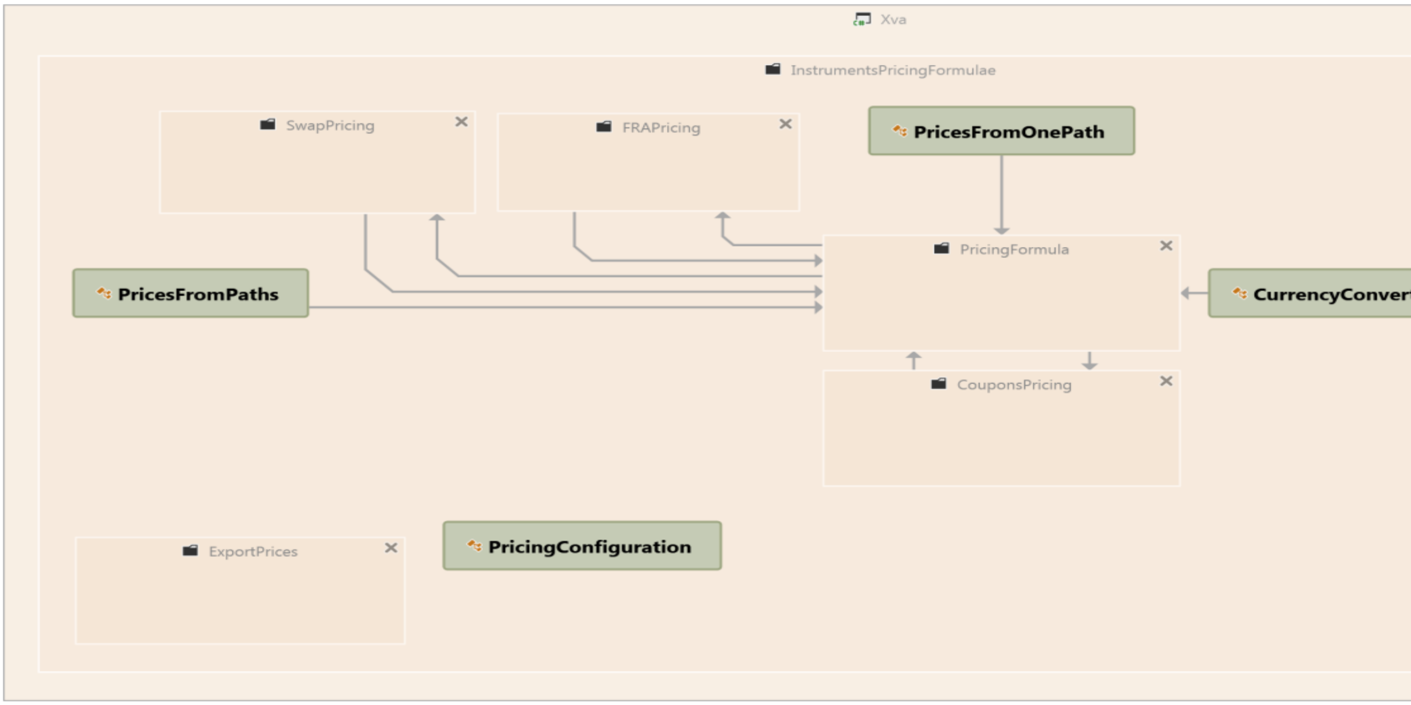
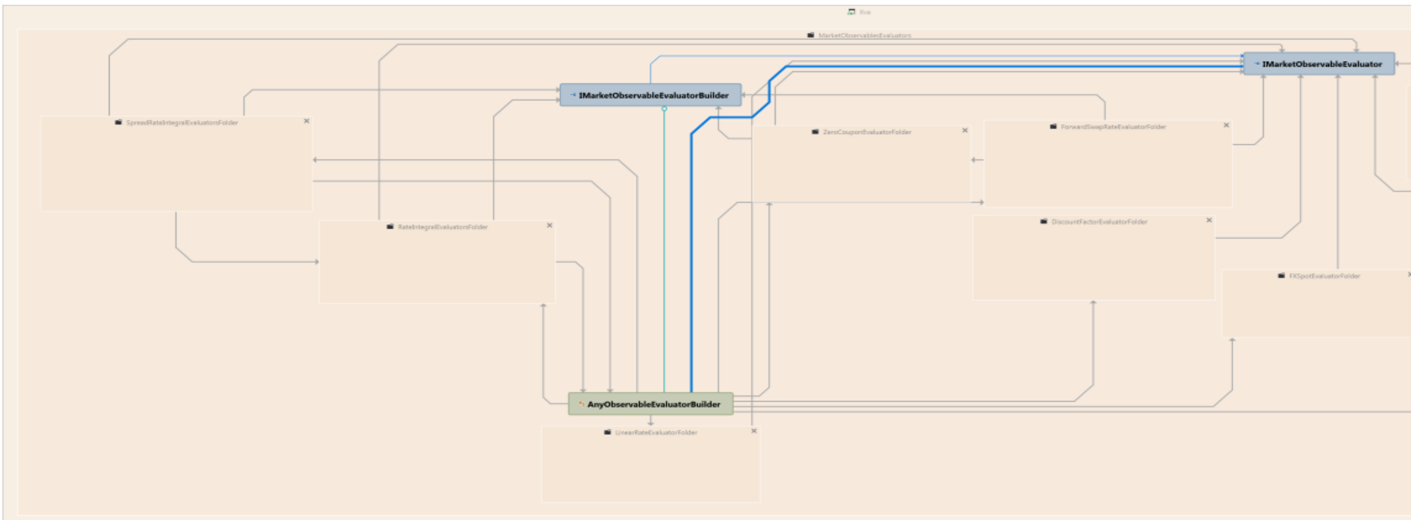


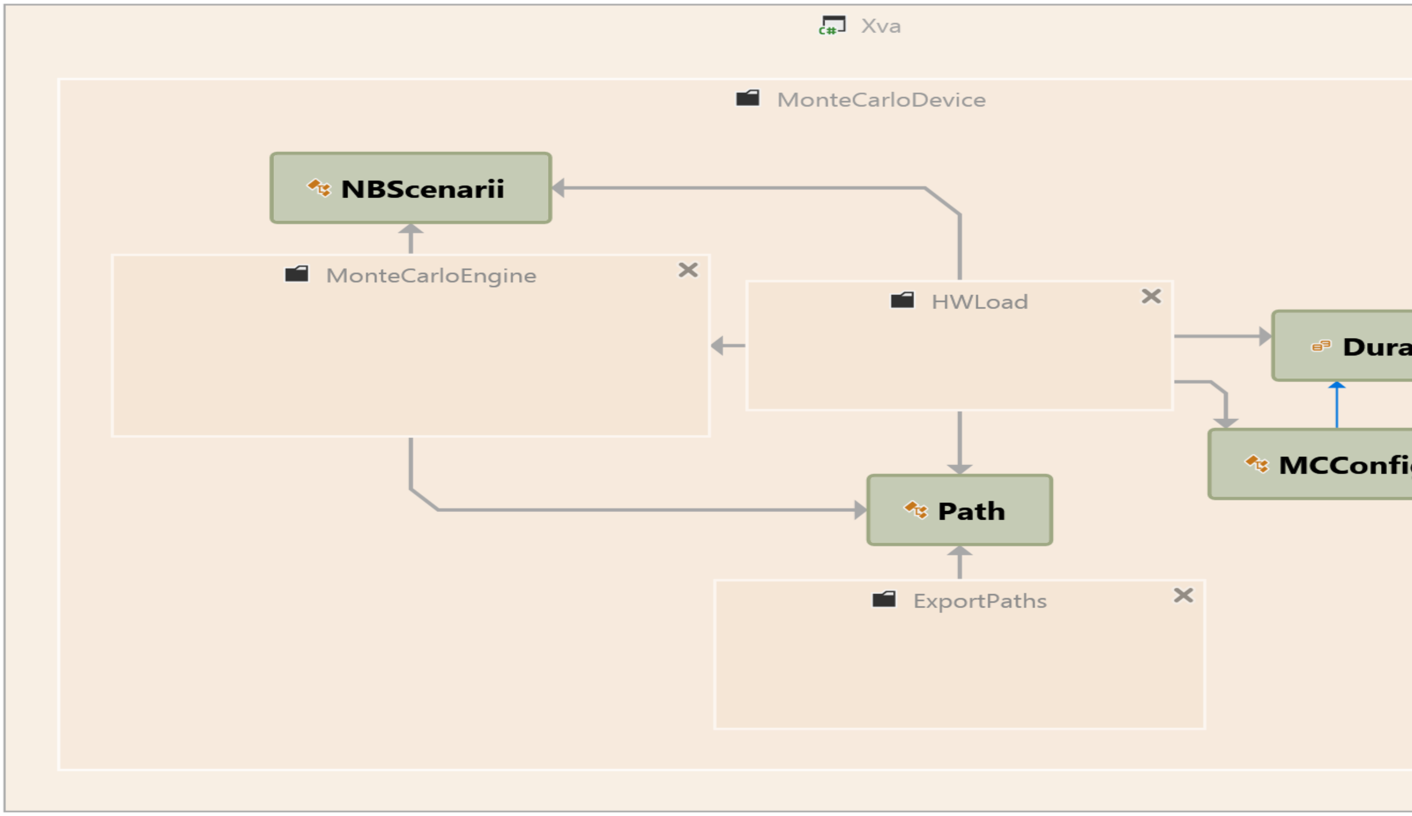
Figure 32 FVA Computation33



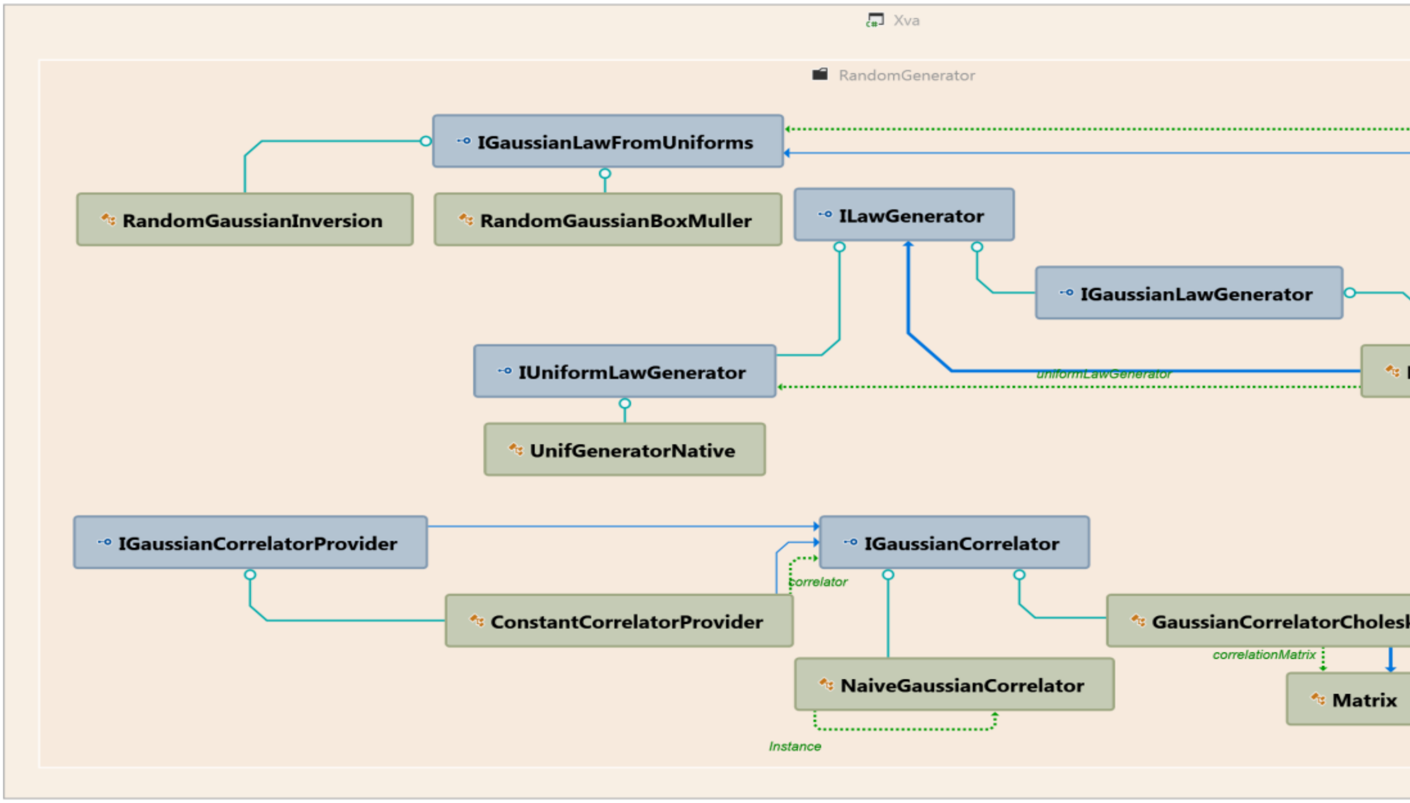
34


Xva
MarketObservablesEvaluators
IMarketObservableEvaluatorBuilder
IMarketObservableEvaluator
SpreadRateIntegralEvaluatorsFolder
RateIntegralEvaluatorsFolder
ZeroCouponEvaluatorFolder
ForwardSwapRateEvaluatorFolder
DiscountFactorEvaluatorFolder
FXSpotEvaluatorFolder
AnyObservableEvaluatorBuilder
LinearRateEvaluatorFolder

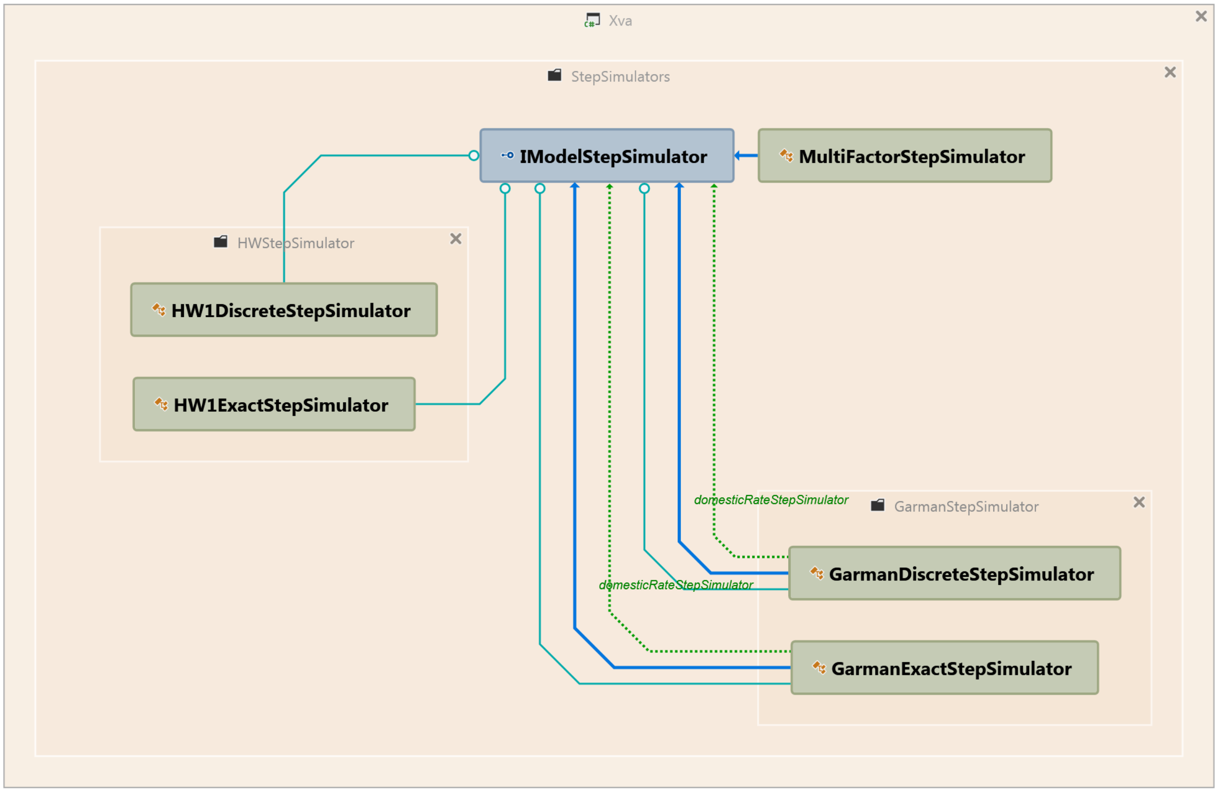
35


Xva
MonteCarloDevice
NBScenarii
MonteCarloEngine
HWLoad
Dura
MCConfi
Path
ExportPaths

20


Xva
RandomGenerator
IGaussianLawFromUniforms
RandomGaussianInversion
RandomGaussianBoxMuller
ILawGenerator
IGaussianLawGenerator
IUniformLawGenerator
uniformLawGenerator
UnifGeneratorNative
IGaussianCorrelatorProvider
IGaussianCorrelator
correlator
ConstantCorrelatorProvider
GaussianCorrelatorCholesl
correlationMatrix
NaiveGaussianCorrelator
Matrix
Instance

36


Xva
StepSimulators
IModelStepSimulator
MultiFactorStepSimulator
HWStepSimulator
HW1DiscreteStepSimulator
HW1ExactStepSimulator
domesticRateStepSimulator
GarmanStepSimulator
GarmanDiscreteStepSimulator
domesticRateStepSimulator
GarmanExactStepSimulator

Annexe IV

Algorithme Inversion

Début

Calculer une approximation de l'inverse $\mathcal{N}^{-1}$ de la loi Normale

Générer N réalisations d'uniformes $U_1, \dots, U_N$

Calculer $\mathcal{N}^{-1}(U_1), \dots, \mathcal{N}^{-1}(U_N)$

Fin

Algorithme Box-Muller

Début

Générer 2 réalisations d'uniformes U_1, U_2

Calculer $\sqrt{-2\ln U_1}\cos U_2$

Calculer $\sqrt{-2\ln U_1}\sin U_2$

Fin

Algorithme Schéma d'Euler pour $(X_t)_{t\geq 0}$

Début

Réel $x\_0 = Valeur\ initiale$

Tableaux de réels μ, σ de taille N

Tableau vide de réels Xde taille N

Calculer le pas $p = Maturité/N$

Générer tableau W de N réalisations de gaussiennes

Pour tout entier i de 1 à N

- $X[i]$

-Calculer $X[i] = X[i-1] + \mu[i] * p + \sigma[i] * (W[i] - W[i-1])$

Fin