ROYAUME DU MAROC

--*-*-*

HAUT COMMISSARIAT AU PLAN

--*-*-*-*-*-*-*

INSTITUT NATIONAL
DE STATISTIQUE ET D'ECONOMIE APPLIQUEE

INSEA

Projet de Fin d'Etudes

*****

Etude d'un modèle de pricing sur les dérivés de taux : Forward Swap Option

Préparé par : ***M. TOUIL Youssef*** **(Actuariat-Finance)**

Sous la direction de : ***M. EL QALLI Yassine*** **(INSEA)**
Mme BENJELLOUN Saoussane **(SGATS)**

Soutenu publiquement comme exigence partielle en vue de l'obtention du

Diplôme d'Ingénieur d'Etat

Filière : ACTUARIAT-FINANCE

Devant le jury composé de :

- ***M. EL QALLI Yassine*** **(INSEA)**
- ***Mme BENJELLOUN Saoussane*** **(SGATS)**
- ***M. OUZINEB Mohamed*** **(INSEA)**

Juin 2018 / PFE N° 22

Résumé

Les banques s'appuient fortement sur l'analyse quantitative et les modèles dans la plupart des aspects de la prise de décision financière. Ces dernières années, les banques ont commencé à appliquer des modèles de produits plus complexes et avec une portée plus ambitieuse.Une telle démarche ne peut avoir lieu que si une gestion active du risque de modèle proportionnée à la complexité du produit en question est introduite.

Le produit «Forward Swap Option» est un produit exotique traité sur le marché gré à gré des taux. La complexité de celui-ci implique l'existence d'un risque associé au modèle auquel nous devons donner une très grande importance. Dans le cadre de ce projet, nous allons essayer d'implémenter sous le langage C#une méthode de validation du modèle du produit «Forward Swap Option», ainsi que des tests unitaires servant à tester les différentes zones du code de calibration et de pricing. Nous testerons en outre les cas extrêmes et les limites de ce modèle. Le pricer utilisé a validé les tests implémentés de non arbitrage,ceux-ci ayant comme objectif de s'assurer que les prix produits par le modèle sont compatibles avec le marché et ne représentent pas d'opportunités d'arbitrage. Des tests de sensibilité et de dégénérescence ont aussi été effectués afin de montrer l'impact des différents paramètres de s'assurer de la cohérence des résultats du pricer avec le modèle théorique. Les résultats et l'analyse de ces tests étaient cohérents et ne présentent aucune défaillance de la part du modèle ou du pricer.

Mots clés : Etude de modèle, les dérivés de taux, Forward Swap Option, les tests unitaires, le risque du modèle et validation du modèle

Abstract

Banks rely heavily on quantitative analysis and models in most aspects of financial decision-making. In recent years, banks have applied models for more complex products with a more ambitious scope. This can only be applied with active model risk management commensurate with the complexity of the product in question.

The product Forward Swap Option is an exotic product treated in the over-the-counter rate market, the complexity of this product leads us to take care of the associated model risk. As part of this project, we will implement in C# a validation method for this model, by adding unit tests to test the different areas of the calibration and pricing code, to test extreme cases and limits of the model. The pricer has validated the non-arbitrage tests which aim to ensure that the prices produced by the model are compatible with the market and do not present arbitrage opportunities. Subsequently, the sensitivity tests and the degenerescence test were also implemented to show the impact of the different parameters and to ensure the consistency of the results of the pricer with the theoretical model. The results and analysis of these tests are consistent and show no model or pricer failure.

Dédicace

A mes très chers parents,

Qui n'ont économisé aucun effort pour que je puisse être ce que je suis.

Qui m'ont toujours aimé et soutenu.

Qu'ils récoltent maintenant le fruit de leurs patience et de leur amour.

A mes soeurs,

A mes frères,

A toute ma famille,

A tous mes ami(e)s,

A toutes les personnes qui m'aiment.

Youssef TOUIL

Remerciements

Au terme de mon projet de fin d'études, ma sincère reconnaissance va à tous ceux qui, de près ou de loin, ont contribué à l'aboutissement et au bon déroulement de ce travail.

Je tiens tout d'abord à adresser mes sincères remerciements à mes encadrants de stage, M^{me} BENJELLOUN Saoussane, analyste quantitatif à Société Générale Africa Technologies & Services (SG ATS), M^{r} GANNOUNE Abdelhadi , analyste quantitatif à Société Générale Africa Technologies & Services (SG ATS), et M^{r} LANCIEN Yann, analyste quantitatif à Société Générale Corporate & Investment Banking (SG CIB), pour leur précieux suivi, leurs remarques pertinentes et leur encouragement tout au long de mon stage.

Je tiens également à exprimer ma gratitude à mon encadrant à l'Institut National de Statistique et d'Economie Appliquée, M^{r} EL QALLI Yassine, pour ses directives précieuses, la qualité de son suivi et l'intérêt qu'il n'a cessé de témoigner à mon stage.

Je ne manquerai d'exprimer mes remerciements à M^{me} HAMDY Zineb, analyste quantitatif à SG ATS, pour son aide précieuse et ses conseils. Je remercie également toute l'équipe SG ATS, d'avoir bien voulu de partager leurs connaissances et leur professionnalisme avec moi.

Je tiens également à remercier M^{r} OUZINEB Mohamed, pour avoir accepté d'évaluer ce modeste travail. Je remercie aussi l'ensemble du corps professoral de l'Institut National de Statistique et d'Economie Appliquée, pour la qualité de son formation.

Abréviations et acronymes

AOA : Absence d'Opportunité d'Arbitrage

LIBOR : London Inter Bank Offered Rate

OIS : Overnight Index Swap

OTC : Over The Counter

CSA : Credit Support Annexe

ZC : Zéro-Coupon

BPV : Basis Points Value

POO : Programmation Orientée Objet

MRM : Model Risk Management

VAR : Value At Risk

Table des figures

1 Société Générale autour du monde 2
2 Organigramme de SGATS 3

1.1 Les étapes principales d'un modèle 5

2.1 Les courbes de taux funding/OIS pour le dollar et le franc suisse 13
2.2 Echéancier de calcul du taux « Forward » 17
2.3 « Swap » de taux entre deux parties 21
2.4 Représentation des flux d'un « Swap » de taux 22
2.5 Valeur intrinsèque et valeur temps 25
2.6 Structure du cube de volatilité 26
2.7 La tranche de volatilité de taux pour une option à la monnaie 27

3.1 Les flux du «Forward Swap Option» dans le temps. 29
3.2 Les paramètres du produit 36
3.3 Prix du call et valeur intrinsèque en fonction du strike 37
3.4 Prix avec une grande corrélation en fonction du choc appliqué à la volatilité du Long Swap Rate 41
3.5 Prix avec une grande corrélation en fonction du choc appliqué à la volatilité du Short Swap Rate 41
3.6 Prix avec une petite corrélation en fonction du choc appliqué à la volatilité du Long Swap Rate 42
3.7 Prix avec une petite corrélation en fonction du choc appliqué à la volatilité du Short Swap Rate 42
3.8 Les fluctuations du prix en fonction du strikes utilisés pour déformer la volatilité 43
3.9 Le prix de l'option en fonction de la corrélation 44
3.10 Décomposition du Forwrad Swap en Long & Short swap 45
3.11 Dégénérescence de Forward Swap Option vers une swaption 45
3.12 Décomposition du Forwrad Swap en Long & Short swap 46
3.13 Workplace : les caractéristiques du produit 50
3.14 Interface de Visual C# qui gère l'exécution des tests unitaires 51

Table des matières

Introduction **1**

Présentation de l'organisme **2**

1 La gestion du risque de modèle **4**
1.1 Introduction 4
1.2 Les orientations de La gestion du risque de modèle 4
1.2.1 Définition d'un modèle 5
1.2.2 Documentation du modèle 5
1.2.3 Validation du modèle 6
1.2.4 Instaurer des politiques claires pour le développement de modèles . 7
1.3 La gestion du risque de modèle pour les produits exotiques 7
1.3.1 Le risque opérationnel 7
1.3.2 Le risque de paramètre 7
1.3.3 Le risque de spécification 8
1.4 Conclusion 8

2 Généralités sur les dérivés de taux **9**
2.1 Deposit 9
2.2 Actualisation et capitalisation 9
2.2.1 Calcul d'intérêts 10
2.2.2 Conventions de décompte des jours 12
2.3 Le risque de crédit et la collatéralization 13
2.3.1 Collatéralization 13
2.3.2 Risque de crédit 14
2.4 Les taux de référence 15
2.4.1 Les taux IBOR 15
2.5 Taux « Forward » 16
2.6 Les produits dérivés de taux 18
2.6.1 Accord à taux future 18
2.6.2 Contrats « Futures » 19
2.6.3 Les « Swaps » 19
2.7 Les options 22
2.7.1 Définitions 22
2.7.2 Moneyness 23
2.7.3 Parité Call-Put 23
2.7.4 Valeur intrinsèque et valeur temps 24
2.8 Le cube de volatilité 26

3 Étude du modèle **28**
3.1 Forward Swap Option 28
3.1.1 Description du produit 28
3.1.2 Valorisation 29
3.2 Imlpémentation des tests unitaires sous C# 32
3.2.1 Visual C# 32

3.2.2 Les tests unitaires 34
3.3 Résultats et analyse des tests unitaires 36
3.3.1 Les tests d'arbitrage 36
3.3.2 Les tests de sensibilité 39
3.3.3 Le test de dégénérescence 45
3.4 Conclusion 46

Conclusion **47**

Bibliographie **48**

Webographie **49**

Annexe **50**

Introduction

La valorisation des instruments financiers devient de plus en plus complexe, nécessitant ainsi des méthodes mathématiques avancées et des outils de résolution d'équations plus performantes. Les modèles de pricing incorpore ces derniers et se dirigent vers la production de prix exacts de ces instruments. L'heuristique étant de pouvoir protéger la banque d'éventuelles pertes et assurer par surcroît un profit important.

Cependant, utiliser un «modèle» laisse entendre la présence inéviatble de ce qu'on peut qualifier de «risque de modèle», qui est le potentiel de conséquences des décisions fondées sur des résultats et des rapports de modèle incorrects ou mal utilisés. Le risque de modèle peut entraîner une perte financière, une mauvaise gestion des affaires, mauvaise prise de décision stratégique, ou impacter négativement la réputation d'une banque. Cela dit, une gestion active du risque de modèle par la banque est indispensable.

La gestion du risque de modèle proposent des orientations sur plusieurs niveaux pour remédier au risque du modèle, à savoir : la documentation du modèle, la validation du modèle et l'instauration des politiques pour le développement de modèles.

Dans une première partie de ce mémoire, nous étalerons le contexte du projet sous lequel nous travaillerons, nous introduirons les notions fondamentales liées à la gestion du risque d'un modèle. Ensuite nous intoduirons des généralités sur les dérivés de taux nécessaires pour l'étude du modèle. Enfin, nous allons étudier le modèle en présentant tout d'abord une description du produit concerné. Puis nous présenterons les résultats et l'analyse des différents tests : les tests de non arbitrage, de sensibilité et le test de dégénérescence.

Présentation de l'organisme

Le groupe Société Générale, est l'un des principales banques de France. Faisant partie du CAC 40, elle est la sixième capitalisation boursière française. Les principaux domaines d'activité de ce groupe sont : la banque, les assurances, le conseil et le financement. La Société Générale Corporat & Investming Banking SGCIB est la banque de financements et d'investissements du groupe Société Générale, elle est présente dans 33 pays et 11000 personnes y travaillent. Trois domaines d'expertise la composent : – Investment banking (Investissements bancaires). – Global finance (Financements). – Global markets (Gestion de placements et de risques).

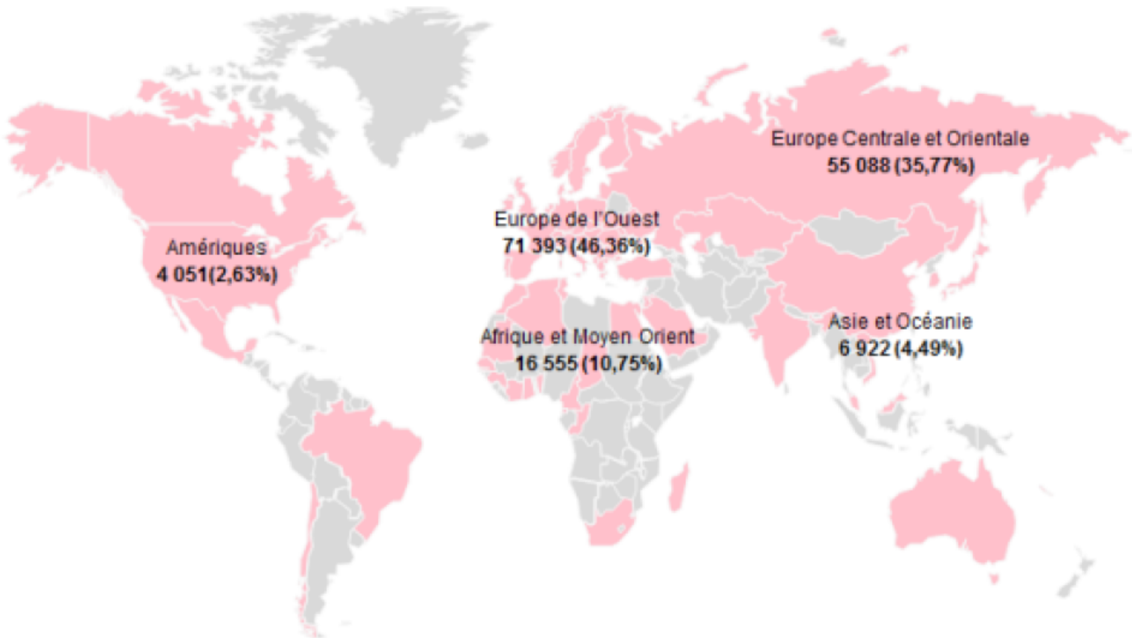

Figure 1 – Société Générale autour du monde

Le groupe Société Générale a été créé en 1864 pour favoriser le développement du commerce et de l'industrie française. Il accompagne aujourd'hui 32 millions de clients dans 77 pays avec 154 000 collaborateurs.

Global Markets est une plate-forme complètement intégrée, multi-actifs et multiproduits qui se concentre sur l'apport des meilleures solutions d'investissement et de couverture de risques pour les gérants d'actifs, les fonds de pension, les banques privées, les banques, les compagnies d'assurance, les fonds de gestion alternative, les family offices, les fonds souverains et les distributeurs des réseaux de proximité dans le monde.

Le pôle R&D (Research & Development) dans le domaine global markets rassemble une centaine d'employés ayant pour mission la conception, le développement, la maintenance et l'amélioration d'une plate-forme de calcul de qualité industrielle et l'exploitation de cette plate-forme (accompagnement des utilisateurs, veille technologique, conseil sur l'architecture du système et la mise en oeuvre effective de la plate-forme), création de librairies financières, de langages mathématiques... C'est de ce pôle R&D qu'est nait la Société Générale Africa Technology & Services SGATS à Casablanca, une structure nouvelle qui a ouvert ses portes en 2014.

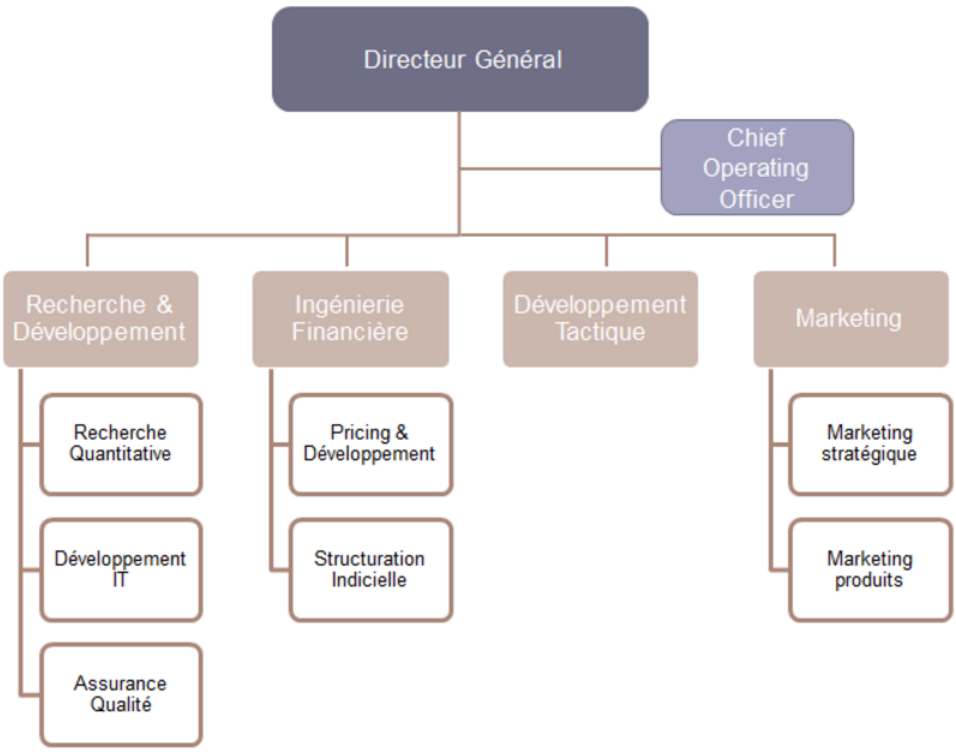

FIGURE 2 – Organigramme de SGATS

Chapitre 1

La gestion du risque de modèle

1.1 Introduction

Les banques s'appuient fortement sur l'analyse quantitative et les modèles dans la plupart des aspects de la prise de décision financière. Ces dernières années, les banques ont appliqué les modèles pour des produits plus complexes et avec une portée plus ambitieuse.

L'utilisation croissante de modèles dans tous les aspects de la banque reflète la mesure dans laquelle les modèles peuvent améliorer les décisions d'affaires, mais les modèles viennent aussi avec des coûts. Il y a le coût direct de consacrer des ressources pour développer et mettre en œuvre des modèles correctement. Il y a aussi les coûts indirects potentiels liés à l'utilisation de modèles, tels que les conséquences négatives possibles (y compris la perte financière) des décisions basées sur des modèles incorrects ou mal utilisés. Ces conséquences devraient être traitées par une gestion active du risque de modèle.

L'utilisation de modèles présente invariablement un risque de modèle, qui est le potentiel de conséquences des décisions fondées sur des résultats et des rapports de modèle incorrects ou mal utilisés. Le risque de modèle peut entraîner une perte financière, une mauvaise gestion des affaires, mauvaise prise de décision stratégique, ou impacter négativement la réputation d'une banque.

1.2 Les orientations de La gestion du risque de modèle

Les modèles sont des représentations simplifiées des relations du monde réel. La simplification est inévitable, en raison de la complexité de ces relations, mais aussi intentionnelle, pour attirer l'attention sur les aspects considérés comme les plus importants pour une application de modèle donnée. La MRM « Model Risk Management » propose plusieurs orientations pour gérer le risque du modèle, elle commence tout d'abord par donner une définition précise d'un modèle.

1.2.1 Définition d'un modèle

Le terme modèle se réfère à une méthode quantitative, une approche qui applique des théories statistiques, économiques, financières ou mathématiques, techniques et hypothèses pour traiter les données d'entrée en estimations quantitatives. Un modèle se compose de trois composants : un composant d'entrée d'information, qui fournit hypothèses et données au modèle ; un composant de traitement, qui transforme les entrées en estimations ; et une composante de reporting, qui traduit les estimations en utile business information.

« Essentially, all models are wrong, but some are usefull » -George E.P.Box

La qualité du modèle peut être mesurée de plusieurs façons : précision, le pouvoir discriminatoire, robustesse, la stabilité et la fiabilité, pour n'en nommer que quelques-uns. Les modèles ne sont jamais parfaits, les indicateurs de qualité et les efforts qui doivent être faits pour améliorer la qualité dépendent de la situation traitée. Par exemple, la précision est pertinente pour les modèles qui prévoient des valeurs futures, tandis que le pouvoir discriminatoire s'applique aux modèles qui classent les risques. Dans toutes situations, il est important de comprendre les capacités et les limites d'un modèle en prenant en considération ces simplifications et ces hypothèses.

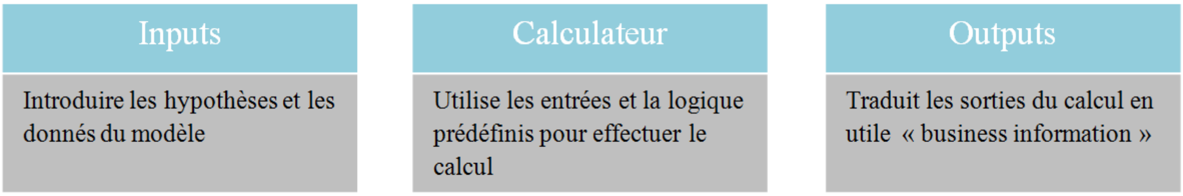

FIGURE 1.1 – Les étapes principales d'un modèle

1.2.2 Documentation du modèle

Tous les modèles utilisés par la banque doivent être correctement documentés, la portée de la documentation requise doit être correctement définie. C'est vrai qu'il il y a une pression des superviseurs derrière, ceci n'empêche pas que la documentation est un levier efficace pour le contrôle du risque du modèle lorsqu'il est bien géré. La documentation d'un modèle devra inclure les élements suivants :

- La source des données : les bases de données utilisées, critères d'extraction utilisés ainsi que le personnel responsable de ces tâches.
- Méthodologie du modèle : description du modèle, besoin et objectifs, utilisations prévues, limitations et hypothèses, détail des données utilisées et justification pour plus de pertinence.
- Calibration du modèle : dans le cas des modèles avec des paramètres calibrés du marché ou bien à partir des données historiques, une description détaillée de cette calibration est nécessaire.
- Plan des tests : une description des tests que le modèle a suivi durant sa construction avec les résultats détaillées.
- Manuel de l'utilisateur : pour les modèles utilisés directement par les clients, nous fournissons des instructions détailleés pour appliquer le modèle, les hypothèses, les limitations et un guide pour interpreter les résultats.

Pour résumer, la documentation des modèles nécessite un effort substantiel de la part de l'entité mais est essentielle pour faciliter la mise à jour, le suivi, la validation et le processus d'audit.

1.2.3 Validation du modèle

La validation du modèle est l'ensemble des processus et des activités destinés à vérifier que les modèles se comportent comme prévu, conformément à ses objectifs de conception et à ses utilisations professionnelles. Une validation efficace aide à s'assurer que les modèles sont solides. Elle identifie également les limites potentielles et évalue leur impact éventuel, ceci en effectuant les tests de résistance du modèle dans diverses conditions, analyse technique approfondie du code utilisé par le client pour calculer et tester aussi la cohérence du modèle théorique avec celui implémenté.

Tous les composants du modèle, y compris les entrées, le processus et les rapports, doivent être soumis à la validation ; ceci s'applique également aux modèles développés en interne et à ceux achetés ou développés par des fournisseurs ou des consultants. La rigueur et la sophistication de la validation devrait être proportionnée à l'utilisation globale des modèles par la banque.

1.2.4 Instaurer des politiques claires pour le développement de modèles

Développer et maintenir une gouvernance, instaurer des politiques pour contrôler la gestion du risque de modèle est fondamentalement important pour son efficacité. Même si le développement, la mise en œuvre, l'utilisation et la validation du modèle sont satisfaisants, une mauvaise gouvernance réduira l'efficacité de la gestion globale du risque de modèle. Une bonne gouvernance fournit un soutien et une structure explicite à la gestion de risque.

1.3 La gestion du risque de modèle pour les produits exotiques

Pour la plupart des produits exotiques [1], on n'a pas forcément de prix de marché. On peut donc avoir des portefeuilles qui sont valorisés en *mark-to-model* (valorisation avec notre propre modèle) et non en *mark-to-market* (prix du marché). Nous voyons donc l'importance du pricing en termes de gestion des risques. Si la valorisation est mauvaise, les VARs produits et les résultats annoncés par la salle de marché n'ont aucun sens. C'est pourquoi les autorités de supervision attachent une grande importance à la gestion du risque de modèle des produits exotiques.

Le risque de modèle est généralement divisé en trois types à savoir : Le risque opérationnel, le risque de paramètre et le risque de spécification.

1.3.1 Le risque opérationnel

C'est le risque provenant d 'erreurs dans le développement des outils de valorisation. Ces erreurs peuvent être des erreurs d'implémentation, des erreurs dans les formules fermées, des erreurs dans l'utilisation de méthodes numériques, etc.

1.3.2 Le risque de paramètre

Les modèles sont alimentés qui peuvent être plus au moins difficiles à estimer. Une mauvaise estimation d'un paramètre peut conduire à une mauvaise valorisation (mispricing) alors même que le modèle est juste. Parfois, certains paramètres ne peuvent être estimés, et on utilise des valeurs à dire d'expert, ce qui peut conduire aussi à une mauvaise valorisation.

1. un produit dérivé complexe mis en place par les institutions financières pour des émetteurs qui ont des besoins de financement spécifique.

L'étude du risque de paramètre consiste donc à souligner l'impact sur le prix d'une variation de chaque des paramètres du modèle (les tests de sensibilité Voir 3.3.2).

1.3.3 Le risque de spécification

Le risque de spécification est le risque auquel s'expose l'utilisateur d'un modèle mal spécifie en ce sens qu'il ne modélise qu'imparfaitement la réalité. Un modèle peut être erroné pour plusieurs raisons : mauvaise spécification des facteurs de risque, dynamique des facteurs de risque improprement spécifiée, relation entre les facteurs de risque incorrectement décrite, etc.

1.4 Conclusion

En établissant un cadre de gestion du risque de modèles, les banques ont plusieurs choix à faire. Ce qui est important est d'obtenir le juste équilibre entre la sophistication et l'encastrement. En termes de meilleure pratique, les institutions financières devraient avoir une documentation complète de leurs modèles, un système performant d'évaluation et de validation des modèles et devraient instaurer des politiques claires pour le développement de modèles. Tout cela pour remédier au risque associé à l'utilisation sophistiquée des modèles, surtout pour les produits financiers complexes. Ce qui compte à la fin, c'est que la stratégie de gestion du risque de modèle adoptée devra protéger l'institution financière contre l'atteinte à la réputation et contre les pertes futures.

Chapitre 2

Généralités sur les dérivés de taux

Dans ce premier chapitre, nous introduirons les notions que nous utiliserons à travers tout le rapport ; notamment les notions relatives au marché financier et aux dérivés sur taux (pour plus de détails sur les formules utilisées dans ce chapitre, se référer à [2])

2.1 Deposit

Les dépôts, « Deposit » ou encore « Money Market » sont des contrats qui permettent de faire un investissement sans risque, où les profits s'accumulent en fonction du temps. Ce sont des prêts ou emprunts avec intérêts. Ces instruments ont une date de début, qui représente la date où le contrat commence, et une maturité qui représente la date de fin du contrat et de remboursement de la somme prêtée avec les intérêts.

Il faut noter que ces instruments ne versent qu'un seul flux, et cela à leur maturité. C'est ce qu'on appelle des instruments zéro-coupon (qui ne contiennent pas de coupons intermédiaires).

Par définition, un zéro-coupon, de maturité T, est un instrument financier qui verse une unité de monnaie à la date T, sans verser de flux intermédiaire avant cette date.

2.2 Actualisation et capitalisation

Le même montant d'argent ne présente pas la même valeur à des dates différentes. La capitalisation et l'actualisation sont les deux opérations financières qui mettent en relation, dans une formule mathématique, les deux valeurs en question.

Supposons que le taux applicable aujourd'hui pour un investissement (capitalisation) d'une année est de 4%. Si nous plaçons 1 unité de monnaie (UM) aujourd'hui, nous pouvons recevoir après une année la somme :

$$1 * (1 + 4\%) = 1.04 \quad UM \tag{2.1}$$

En inversant la formule précédente, nous pouvons obtenir le montant qu'il faut investir aujourd'hui pour obtenir 1 UM dans le futur :

$$\frac{1}{(1 + 4\%)} = 0.9615 \quad UM \tag{2.2}$$

L'actualisation consiste à ramener la valeur d'un flux futur à sa valeur actuelle, et cela à grâce à un facteur d'actualisation. Dans ce cas, le facteur d'actualisation est 0.9615, il est utilisé pour ramener à l'instant présent toute somme perçue dans un an.

Nous noterons par la suite DF_T le facteur d'actualisation (discount factor) utilisé pour actualiser une somme perçue à l'instant T.

2.2.1 Calcul d'intérêts

Pour calculer des d'intérêts, il faut disposer des informations suivantes :

- le capital : l'intérêt est proportionnel au capital et varie selon son importance ;
- le taux d'intérêt qui sera appliqué sur le capital
- la durée de placement

Soit DF_T le facteur d'actualisation à la date T, le taux spot r_T est le taux d'intérêt qui lui est associé. La relation exacte entre le facteur d'actualisation et le taux spot dépend de la méthode utilisée pour calculer les intérêts. Parmi ces méthodes, nous citons :

Intérêts simples

Les intérêts simples sont des intérêts qui ne sont pas réinvestis. Si nous plaçons DF_T aujourd'hui au taux r_T, nous allons obtenir $DF_T(1 + r_T) = 1$.
Nous obtenons la formule de calcul d'intérêts simples suivante :

$$DF_T = \frac{1}{(1 + r_T T)} \tag{2.3}$$

Intérêts composés

Les intérêts composés sont des intérêts réinvestis périodiquement dans le capital investi. Si nous plaçons DF_T aujourd'hui au taux r_T composé annuellement, les intérêts perçus seront réinvestis chaque année. Nous allons obtenir $DF_T(1+r_T)^T$ à T, qui correspond à 1 UM.

Nous pouvons donc écrire DF_T en fonction de T et r_T :

$$DF_T = \frac{1}{(1+r_T)^T} \tag{2.4}$$

Avec T exprimée en années.

Pour généraliser, si les intérêts sont composés m fois par an, la somme obtenue est :

$$DF_T(1+\frac{r_T}{m})^{mT} = 1 \quad UM \tag{2.5}$$

ce qui nous donne la formule suivante :

$$DF_T = \frac{1}{(1+\frac{r_T}{m})^{mT}} \tag{2.6}$$

Intérêts composés

Supposons que nous cherchons à composer les intérêts à chaque instant, il faut donc augmenter m infiniment. Pour avoir une formule valable en temps continu, il suffit de faire tendre m vers l'infini dans la formule suivante :

$$(1+\frac{r_T}{m})^{mT} \tag{2.7}$$

Nous obtenons alors :

$$DF_T = \lim_{m\to+\infty}(1+\frac{r_T}{m})^{mT} \tag{2.8}$$

D'où le discount factor en temps continu :

$$DF_T = e^{-r_T T} \tag{2.9}$$

2.2.2 Conventions de décompte des jours

Le temps est un facteur crucial dans le marché financier puisque toute valorisation fait intervenir la durée de placement. Il est alors important de bien comprendre le principe de décompte des jours et les conventions utilisées dans les marchés de taux. Les conventions (les bases de calcul, ou fractions d'année) sont notées A/B, où A représente le nombre de jours pris en compte par mois, et B le nombre de jours par année, qui représente la période de référence pour la majorité des cas.

Les bases de calcul les plus utilisées sont les suivantes :

- Act/360 : prend en compte le nombre exact de jours constituant le mois, et considère que l'année est constituée de 360 jours.

  Si nous notons t = (j, m, a), T = (J, M, A) et d(t, T) le nombre de jours entre ces deux dates.

  La fraction d'année dans ce cas est :

  $$\frac{d(t,T)}{360}$$

- Act/365 : prend en compte le nombre exact de jours constituant le mois, et considère que l'année est constituée de 365 jours.

  La fraction d'année dans ce cas est :

  $$\frac{d(t,T)}{365}$$

- 30/360 : ne différencie pas entre les mois de l'année ; suppose que tous les mois sont constitués de 30 jours, et les années de 360 jours.

  La fraction d'année dans ce cas est donnée par la formule suivante :

  $$\frac{min(J,30)+max(30-j,0)}{360}+\frac{M-m-1}{12}+A-a$$

- Act/Act : prend en compte le nombre exact de jours, des mois et des années.

Après avoir déterminer la base de calcul, l'intérêt à taux annuel fixe pour une période donnée est calculé comme suit :

$$\text{Intérêts} = \text{Nominal} * \text{Taux fixe} * \text{Base de calcul}$$

2.3 Le risque de crédit et la collatéralization

A tout emprunt est associé un risque de défaut, il est considéré nul lorsque l'emprunteur est l'Etat américain ou l'Etat français, mais peut devenir important lorsqu'il s'agit d'une entreprise proche de la faillite ou d'un pays émergent. Un emprunteur risqué ne peut alors se financer avec un taux sans risque, mais plutôt avec un taux plus élevé pour récompenser la perte potentielle du non remboursement. Actuellement le taux utilisé comme un taux sans risque est le taux OIS (Overnight Indexed Swap), alors que le taux LIBOR est considéré comme le taux funding utilisé pour des transactions risquées.

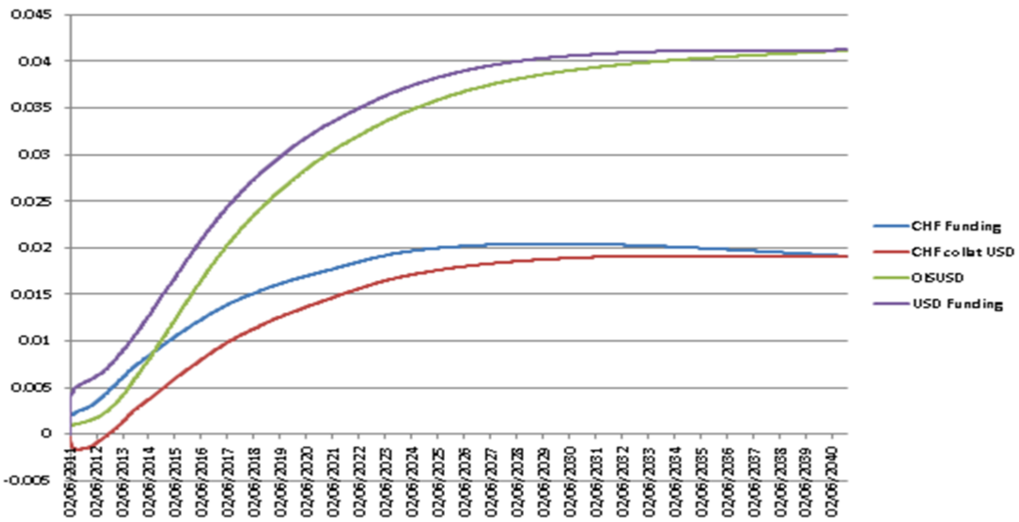

Figure 2.1 – Les courbes de taux funding/OIS pour le dollar et le franc suisse

L'écartement entre le taux LIBOR et le taux OIS montre que les taux LIBOR incorporent un ajustement pour le **risque de crédit** et ne peut plus être utilisé dans l'actualisation des flux non risqués dans l'évaluation des produits dérivés. Son remplaçant, le taux OIS, est utilisé comme le taux sans risque par les vendeurs pour valoriser les produits dérivés adossés à des contrats de collatéraux de type **CSA** (Credit Support Annex).

2.3.1 Collatéralization

On appelle « collatéral » (en anglais « collateral ») l'ensemble des actifs, titres ou liquidités, remis en garantie par la contrepartie débitrice à la contrepartie créditrice afin de couvrir le risque de crédit résultant des transactions financières négociées entre deux parties. En cas de défaillance du débiteur, le créditeur a le droit de conserver les actifs remis en collatéral afin de se dédommager de la perte financière subie.

2.3.2 Risque de crédit

Le risque de crédit est le risque de perte d'un investisseur découlant d'un emprunteur qui ne fait pas les paiements comme promis.

- deux contreparties acceptent d'échanger des flux monétaires dans le futur ;
- l'un d'eux est en défaut et ne respecte pas ses engagements ;
- l'autre doit dérouler sa couverture ou remplacer la transaction ;
- le coût d'une telle perte est égale à la valeur du marché de la transaction à ce moment-là.

2.4 Les taux de référence

Un taux d'intérêt représente le montant qu'un prêteur va gagner suite à un prêt. Ce taux varie selon la capacité de l'emprunteur à rembourser son crédit. Autrement dit, plus le risque de crédit de l'emprunteur augmente, plus le taux augmente.

Il existe différents types de taux d'intérêts, dont les taux d'État et les taux interbancaires. Les taux d'État sont des taux calculés à partir des obligations d'État. Les taux interbancaires, quant à eux, sont des taux auxquels les banques se prêtent. Les taux que nous allons le plus souvent traiter sont des taux interbancaires, qui sont des taux indispensables pour la valorisation de certains instruments financiers, d'où leur appellation de taux de référence. L'un des taux de référence les plus utilisés dans le monde est le taux LIBOR qui sera défini dans la suite.

Une grande partie des taux de référence est calculée sur le marché dit « en blanc ». Ce marché est le marché sur lequel les banques se refinancent quotidiennement entre elles, sans garantie.

2.4.1 Les taux IBOR

Les taux IBOR (Interbank Offered Rate) sont les taux d'intérêt avec lesquels les banques de premier rang (notées AAA) se prêtent entre elles, sans collatéral (sans que le prêt ne soit garanti par des titres de créances ou des valeurs mobilières), dans une devise et pour une échéance donnée. Les maturités traitées ne dépassent généralement pas une année. Parmi les taux IBOR, on cite :

- les taux EURIBOR, qui sont les taux moyens offerts effectivement par une sélection de banques dans la zone Euro pour des maturités allant d'une semaine à une année. La valeur des taux EURIBOR est déterminée par l'offre et la demande ;
- les taux LIBOR, similaire à l'EURIBOR, sont des taux d'intérêt que des banques utilisent pour se prêter entre elles. Les taux LIBOR sont des taux interbancaires de référence sur les marchés hors zone euro, pour plusieurs devises (telles que l'euro, le dollar américain, le yen, la livre Sterling britannique...), et sont calculés et publiés quotidiennement.

En principe, les taux d'État sont considérés comme des taux sans risque, puisque l'État ne présente aucun risque de défaut. Cela dit, pour des raisons économiques, les taux d'État peuvent être artificiellement bas ou artificiellement hauts, chose qui peut fausser la notion du taux sans risque. Les taux LIBOR, quant à eux, s'approchent beaucoup plus de la notion de taux sans risque que les taux d'État, même si les banques de premier rang ne sont pas à l'abri d'une faillite. Les banques de rang AAA ont le plus faible risque de crédit sur le marché. Puisque les taux IBOR sont calculés à partir des prêts sans collatéral entre ces banques, ils peuvent être considérés comme des taux sans risque.

Les taux IBOR servent comme référence pour une multitude d'instruments financiers. Pour pouvoir estimer ces taux, nous allons introduire la notion de taux « Forward ».

2.5 Taux « Forward »

Un taux « Forward » (également appelé taux à terme) est un taux d'emprunt ou de placement, applicable pour des périodes futures. C'est le taux zéro-coupon calculé aujourd'hui (à la date t_0), qui débute en t_1 et qui correspond à la période $t_2 - t_1$, où $t_0 < t_1 < t_2$. En d'autres termes, le taux « Forward » entre t_1 et t_2 est le taux zéro-coupon qui devrait être observé à l'instant t_1 pour une durée $t_2 - t_1$.

La courbe des taux zéro-coupon contient de nombreuses informations sur les taux qui prévaudraient dans le futur. En effet, à partir des taux zéro-coupon de différentes échéances, nous pouvons déduire les taux « Forward ». Les taux « Forward » servent généralement à approcher les taux LIBOR, inconnus pour des dates futures. Chose qui nous permet d'estimer les attentes du marché en matière de taux futurs, et ainsi prendre les décisions adéquates.

Pour montrer la relation entre les taux « Forward » et les taux zéro-coupon ou bien facteurs d'actualisation, nous allons utiliser la figure suivante :

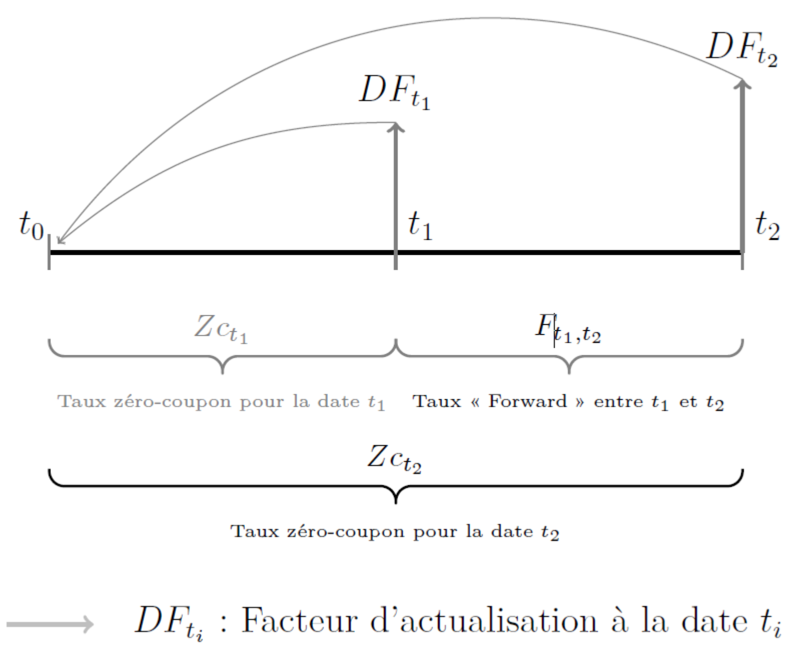

Figure 2.2 – Echéancier de calcul du taux « Forward »

Le taux zéro-coupon ZC_{t_i} permet de rapporter un flux reçu à la date t_i à aujourd'hui, et cela par la formule :

$$\frac{1}{1 + ZC_{t_i}\delta_{i,0}} \tag{2.10}$$

où $\delta_{i,0}$ représente la fraction d'année entre t_i et t_0.

Pour qu'il n'y ait pas d'opportunité d'arbitrage, rapporter le flux reçu en t_2 à t_0 devrait être équivalent à rapporter le flux en t_2 à t_1, puis rapporter ce dernier à t_0. Cela revient à écrire la formule suivante :

$$\frac{1}{1 + ZC_{t_1}\delta_{1,0}} . \frac{1}{1 + F_{t_1,t_2}\delta_{2,1}} = \frac{1}{1 + ZC_{t_2}\delta_{2,0}} \tag{2.11}$$

Nous obtenons donc la formule du taux « Forward » en fonction des taux zéro-coupon et des fractions d'année :

$$F_{t_1,t_2} = \frac{1}{\delta_{2,1}} \left(\frac{1 + ZC_{t_2}\delta_{2,0}}{1 + ZC_{t_1}\delta_{1,0}} - 1 \right) \tag{2.12}$$

Nous pouvons écrire cette formule en fonction des facteurs d'actualisation :

$$F_{t_1,t_2} = \frac{1}{\delta_{2,1}} \left(\frac{DF_{t_1}}{DF_{t_2}} - 1 \right) \tag{2.13}$$

2.6 Les produits dérivés de taux

Un produit dérivé est un instrument financier dont la valeur dépend d'un autre actif financier, appelé sous-jacent. Le sous-jacent peut être un capital, un indice, une action, un taux...

Les produits dérivés permettent de transférer les risques financiers entre les différents agents économiques rapidement. Les banques sont disposées à prendre des risques supplémentaires moyennant un rendement accru de leurs opérations. D'autre part, en transférant sur les banques les risques financiers associés à leur activité industrielle, les grandes entreprises n'ont plus qu'à gérer les risques d'exploitation, qui sont leurs risques spécifiques. En particulier, elles ont besoin d'immobiliser des réserves moins importantes de fonds propres, alors la rentabilité devient ainsi plus importante.

Parmi les produits dérivés de taux, nous citons les « Deposits », les « Swaps » de taux d'intérêt, les « Swaps » de change, les « Forward rate agreement », et les contrats « Futures ».

2.6.1 Accord à taux future

Un accord à taux futur, dit aussi « Forward rate agreement » (FRA), est un contrat à terme sur taux, de gré à gré entre deux parties, qui permet d'échanger deux flux basés sur deux taux d'intérêt différents : un taux fixe nommé « taux FRA », et un taux de référence constaté sur le marché à la maturité du « Forward rate agreement » (un taux LIBOR 6M par exemple).

Le contrat porte sur un montant fictif, appelé notionnel. C'est sur ce montant que seront appliqués les deux taux. Une fois la maturité du « Forward rate agreement » atteinte, seule la différence entre le taux FRA et le taux de référence observé sur le marché est versée par l'une des deux parties.

Le « Forward rate agreement » constitue donc une couverture contre la fluctuation des taux d'intérêt. Prenons l'exemple d'une banque A qui spécule sur la hausse des taux de référence, et qui a déjà emprunté un montant à un taux LIBOR d'une banque B. La banque A essaiera de contracter un contrat « Forward rate agreement » pour se protéger de cette éventuelle hausse : elle cherchera à échanger des flux à taux fixe contre des flux à taux variable avec une tierce partie, et cela pour rembourser la banque B au taux de référence tout en émettant des flux à un taux fixe.

2.6.2 Contrats « Futures »

Un contrat « Futures » ou contrat à terme est un contrat entre deux parties où l'une s'engage à acheter ou à vendre une quantité déterminée d'un actif sous- jacent, à une date et à un prix déterminés à l'avance. Contrairement aux « Forward rate agreements », les « Futures » sont standardisés et négociés sur le marché organisé, et la transaction se fait à travers une entité qui permet de protéger les deux parties du risque de défaut à travers une chambre de compensation.

2.6.3 Les « Swaps »

Un « Swap » est un accord entre deux parties qui permet d'échanger des flux financiers à des dates futures déterminées à l'avance. Un contrat « Swap » doit contenir plusieurs informations spécifiques à l'échange, notamment les dates des flux, les conventions de calcul à utiliser, le montant à échanger...

Il existe différents types de « Swaps », dont on cite :

- les « Swaps » de taux d'intérêt (« Interest rate Swaps ») ;
- les « basis Swaps », qui sont en principe des « Swaps » de taux d'intérêt ;
- les « Swaps » de devises (« Cross Currency Swaps »).

Nous nous intéressons dans notre projet aux « Swaps » de taux.

Les « Swaps » de taux

Un « Swap » de taux est un engagement contractuel entre deux entités qui permet d'échanger, à différents intervalles de temps dans le futur, des flux basés sur un montant notionnel. Cet échange porte sur des flux basés sur deux taux d'intérêt différents : une partie verse des intérêts à taux fixe (valable pour toute la durée du « Swap ») et reçoit des intérêts à taux variable (qui évoluent en fonction de l'indice de référence), sur un montant défini et pendant une durée déterminée. Le taux variable considéré est généralement un taux de référence, notamment le LIBOR. Le nominal étant identique pour les deux emprunts, l'échange portera sur la différence entre les deux taux.

Remarque : un « Swap » de taux peut être un outil pour transformer une dette à taux variable en une dette à taux fixe, et vice-versa.

Un « Swap » de taux est caractérisé par :

- la date de début : la date de signature du contrat ;
- la date de maturité : la date de fin du contrat « Swap » ;
- le taux « Swap » : c'est le taux fixe. Il est choisi de façon à ce que la jambe fixe égalise la jambe variable ;
- le nominal : le montant sur lequel le taux fixe et le taux variable seront appliqués.

Chacune des deux jambes a des caractéristiques bien définies :

La jambe fixe C'est la jambe qui reçoit des flux au taux « Swap » :

– La périodicité des intérêts fixes : c'est la durée entre deux coupons. Cette durée est généralement une année pour la jambe fixe ;
– La devise : c'est la devise dans laquelle les flux de la jambe fixe seront reçus ;
– La base de calcul : c'est la convention de décompte des jours utilisée.

La jambe variable C'est la jambe qui reçoit des flux au taux de référence :

– La périodicité des intérêts variables : c'est la durée entre deux coupons à taux variable. Cette durée est généralement de 3 ou 6 mois ;
– La base de calcul : la convention de décompte des jours utilisée pour cette jambe ;
– Le taux variable : c'est le taux de référence, généralement un taux LIBOR ou bien EURIBOR ;
– La devise : la devise dans laquelle les flux de la jambe sont reçus.

Par convention, être payeur de « Swap» de taux signifie payer à taux fixe et recevoir à taux variable. Être receveur de ≪ Swap ≫ signifie payer à taux variable et recevoir à taux fixe.

Exemple : Considérons un « Swap » de 3 ans entre deux parties A et B, qui débute le 01 juin 2015. La partie A s'engage à payer un taux d'intérêt 5% à la partie B sur un principal de 100 millions d'euros. En contrepartie, B s'engage à verser des intérêts au taux LIBOR 6 mois à la partie A. Les flux de la jambe fixe seront versés chaque année (intérêts composés annuellement) et les flux de la jambe variable seront versés chaque 6 mois :

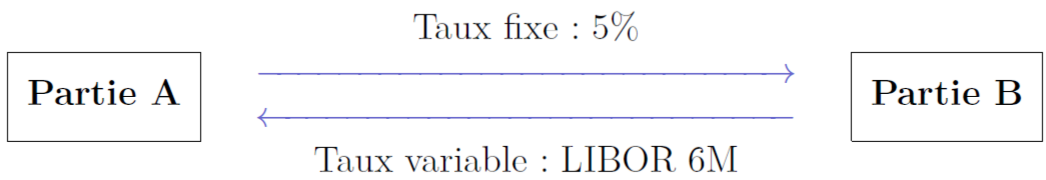

FIGURE 2.3 – « Swap » de taux entre deux parties

Le premier flux aura lieu 6 mois après le 1er juin 2015 : 1er décembre 2015. Ce flux sera calculé à partir du taux LIBOR 6 mois observé le 1er juin 2015 (Si le taux est égal à 4%, le montant versé sera de 2 millions d'euros). Le premier flux de la jambe variable est connu à l'instant de signature du contrat. Un an après, la partie A paie les intérêts fixes ($C_{fixe} = 5\% * 100 = 5$ millions d'euros) et reçoit les intérêts variables au taux LIBOR 6 mois observé le 1er décembre 2015. Au total, la partie A versera chaque année 5 millions d'euro, alors que la partie B versera chaque semestre des intérêts au taux LIBOR 6 mois.

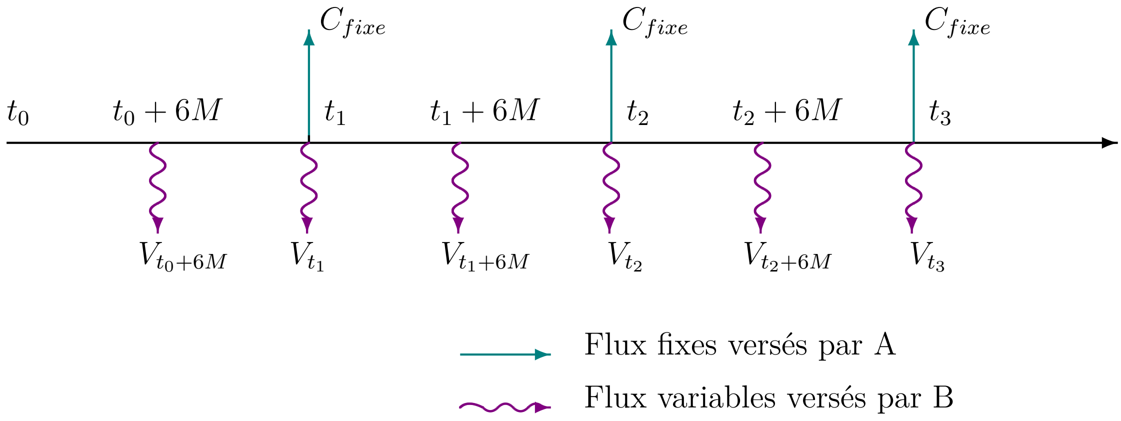

FIGURE 2.4 – Représentation des flux d'un « Swap » de taux

Où V_{t_i} correspond au flux versé par B à l'instant t_i. Ce flux prend en compte le taux LIBOR 6M observé à l'instant $t_i - 6mois$.

2.7 Les options

2.7.1 Définitions

Une option est un produit dérivé pour lequel l'acheteur verse au vendeur une somme d'argent (appelée « prime » de l'option) à une date initiale et reçoit en contrepartie, à une date future, un flux positif ou nul (appelé « Payoff » de l'option) dont le montant dépend de l'évolution d'un actif dit sous-jacent.

Il existe deux catégories d'options : les options d'achat « Calls » et les options de vente « Puts ». Les premières confèrent le droit (mais n'imposent pas l'obligation) d'acheter l'actif sousjacent à un prix K qui s'appelle prix d'exercice ou « Strike » ; K est fixé contractuellement à l'émission de l'option. D'une manière analogue, les options de vente confèrent le droit (mais n'imposent pas l'obligation) de vendre le sous-jacent au prix d'exercice K.

On dit qu'une option est "européenne" lorsqu'elle ne peut être exercée qu'en fin de contrat. Cette date est appelée date d'exercice, maturité, échéance ou date d'expiration de l'option ; elle sera notée T. L'option est dite "américaine" si son détenteur a la possibilité de l'exercer à tout moment dans l'intervalle [0 ; T]. Il ne peut exercer l'option qu'une fois durant cette période.

Le payoff d'une option est égal à :

- pour un Call : $C(S_T) = max(S_T - K, 0) = (S_T - K)^+$
- pour un Put : $P(S_T) = max(K - S_T, 0) = (K - S_T)^+$

Où S_T est le prix de l'actif à la maturité T.

2.7.2 Moneyness

Le call est dit dans la monnaie ou « in the money » lorsque $S_t > K$. Le put, lui, est alors hors de la monnaie ou « out of the money ». Symétriquement, lorsque $S_t < K$, le call est hors de la monnaie et le put est dans la monnaie. En outre, les options (call et put) sont dites à la monnaie ou « at the money » lorsque $S_t = K$.

2.7.3 Parité Call-Put

La parité Call-Put définit une relation entre le prix d'un call et celui d'un put , qui ont tous deux le même prix d'exercice et la même maturité. La formule suppose que les options ne sont pas exercées avant échéance (option européenne).

Elle s'énonce de la manière suivante pour un instant $t \leq T$:

$$C_t - P_t = S_t - \frac{K}{(1+r)^{(T-t)}} \tag{2.14}$$

Ou encore, en utilisant un taux continu :

$$C_t - P_t = S_t - Ke^{-r(T-t)} \tag{2.15}$$

Avec :

- C_t : le prix du call à l'instant t ;
- P_t : le prix du put à l'instant t ;
- r : le taux sans risque.

On démontre cette relation par **l'absence d'opportunité d'arbitrage (AOA)**. Il suffit de comparer deux portefeuilles :

- le premier constitué du call et d'un zéro coupon délivrant K à maturité ;
- le second constitué d'un put et du sous-jacent.

On remarque qu' à maturité, chaque portefeuille délivre $\mathbf{Max}(S_T, K)$. Vu que les portefeuilles ne délivrent pas de flux intermédiaire, en absence d'opportunité d'arbitrage, la valeur des deux portefeuilles est identique à tout instant t. On en déduit la relation de parité call-put.

Absence d'opportunité d'arbitrage :

L'AOA est une hypothèse fondamentale des modèles usuels. Elle stipule qu'il n'existe aucune stratégie financière permettant, pour un coût initial nul, d'acquérir une richesse certaine dans une date future.

Il est clair que les prix de différents produits dérivés ne sont pas quelconques et qu'il existe une forte cohérence entre les prix des options sur un même sous-jacent. Elle est due à ce qu'on peut appeler la **Loi fondamentale de la Finance de marché** :

> *Dans un marché très liquide, où il n'y a ni coûts de transaction, ni limitations sur la gestion (achat-vente) des actifs supports, il n'y a pas d'opportunité d'arbitrage, c'est à dire qu'il n'est pas possible de gagner de l'argent à coup sûr à partir d'un investissement nul.*

En effet, dans les marchés finnanciers, il existe des arbitrageurs, qui sont des intervenants dont l'activité est de détecter les produits financiers dont le prix est décalé par rapport à ce qu'il devrait être, compte-tenu des autres prix du marché et d'en tirer parti pour faire des profits sans prendre de risque. Cela rendre les arbitrages quasiment inexistants, car les arbitragistes profiteraient des incohérences du marché pour prendre des positions et ainsi resserrer les écarts de prix, jusqu'à les rendre cohérents.

2.7.4 Valeur intrinsèque et valeur temps

La valeur intrinsèque (VI) représente le gain qui serait obtenu si l'option était exercée immédiatement. Elle est toujours positive ou nulle. Lorsque l'option est dans la monnaie, sa valeur intrinsèque est positive.

- pour un call : $VI(t) = (S_t - K)^+$
- pour un put : $VI(t) = (K - S_t)^+$

La valeur temps (VT) est la différence entre la prime de l'option et sa valeur intrinsèque. La prime de l'option $\pi(t)$ est donc par définition égale à la somme de sa valeur intrinsèque et de sa valeur temps :

$$\pi(t) = VI(t) + VT(t) \tag{2.16}$$

L'appellation "valeur temps" vient du fait que cette dernière capture dans la prime de l'option les « potentialités d'appréciation » de l'option liées aux possibilités de hausse (pour un call) ou de baisse (pour un put) du sous-jacent entre t et T.

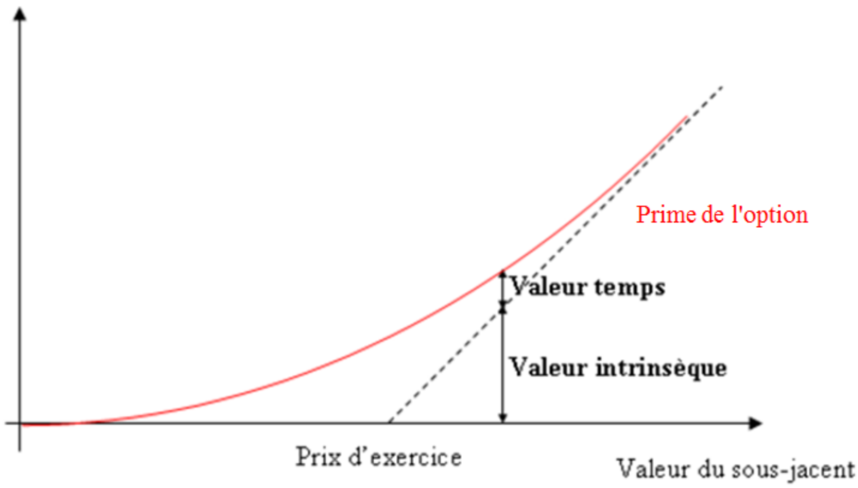

FIGURE 2.5 – Valeur intrinsèque et valeur temps

2.8 Le cube de volatilité

Contrairement à la volatilité des actions qui ne dépend que du strike K (moneyness de l'option (Voir 1.7.2)) et de la maturité T, la volatilité du taux d'intérêt dépend également du tenor [1]. Cette volatilité est donc donnée sous la forme d'un cube construit en trois dimensions à partir des volatilités des produits les plus liquides dans le marché des taux (Cap, Floor et Swaption).

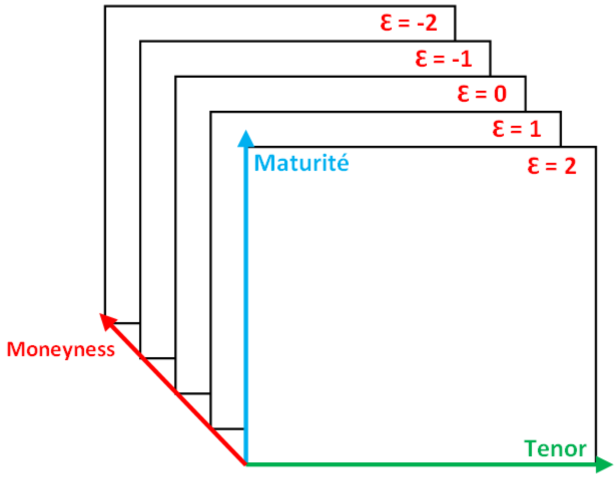

FIGURE 2.6 – Structure du cube de volatilité

Le cube de volatilité enregistre donc les données du marché en terme de volatilité implicite, obtenu en inversant les formules de pricing (modèle de Black pour les taux) en prenant comme entrée les prix du marché.

1. désigne le temps avant l'échéance d'un swap de taux d'intérêt, la durée pendant laquelle ces paiements sont effectués au taux de référence

ATM		Tenors								
		1M	3M	6M	1Y	2Y	3Y	4Y	5Y	7Y
Maturités	1M	1,1335	1,1335	1,1335	1,5974	1,6015	1,8729	2,3513	2,5408	2,9097
	2M	1,2625	1,2625	1,2625	1,5667	1,6176	1,8667	2,2923	2,6197	3,0602
	3M	1,2752	1,2825	1,2752	1,5876	1,6691	1,8851	2,2587	2,6074	3,0684
	6M	1,3863	1,3961	1,6282	1,4963	1,6652	1,8551	2,2497	2,6111	3,1995
	9M	1,4415	1,4416	1,7021	1,6297	1,8144	2,0930	2,3996	2,6887	3,2460
	1Y	1,6869	1,4595	1,9719	1,7031	1,9850	2,2044	2,5021	2,8557	3,4214
	2Y	2,4929	2,5593	2,5181	2,4632	2,6698	2,9347	3,1260	3,3831	3,7993
	3Y	3,4956	3,5223	3,3700	3,2262	3,3319	3,5011	3,6745	3,8642	4,1233
	4Y	4,2220	4,1638	3,9370	3,6976	3,7683	3,8595	4,0081	4,1497	4,3477
	5Y	4,9440	4,7616	4,3986	4,0598	4,0757	4,1603	4,2427	4,3448	4,4706
	7Y	5,1838	5,0213	4,7246	4,3603	4,3849	4,4118	4,4371	4,4669	4,5107
	10Y	5,1781	4,9852	4,7960	4,4000	4,4388	4,4608	4,4748	4,4718	4,4976
	12Y	5,0087	4,8349	4,6699	4,3594	4,3828	4,4234	4,4386	4,4204	4,4091
	15Y	4,8491	4,7620	4,5951	4,2462	4,2781	4,2841	4,2972	4,2856	4,2501

FIGURE 2.7 – La tranche de volatilité de taux pour une option à la monnaie

Les tranches de moneyness sont classées par entiers (-2, -1, 0, 1 et 2) où 0 correspond à une option à la monnaie. On se retrouve très souvent dans le cas d'une moneyness non classée, ce qui explique le fait que la construction du cube de volatilité nécessite des interpolations intelligentes.

Chapitre 3

Étude du modèle

La démarche adoptée pour l'étude du modèle se compose de trois étapes principales, une première étape consistera à comprendre l'aspect mathématique et fonctionnel du modèle, ensuite nous allons nous familiariser avec l'outil informatique utilisé pour l'implémentation du pricer. Les formules du pricer seront identifiées à travers la démarche suivante : effectuer un «debuggage» du pricer afin de faire le lien avec le modèle et retrouver les formules de celui-ci. Une dernière étape consiste à effectuer des tests unitaires pour tester les différentes zones du code de calibration et de pricing.

3.1 Forward Swap Option

3.1.1 Description du produit

Le produit « Forward Swap Option » est un produit exotique échangé sur les marchés de gré à gré « OTC ». Il donne le droit d'entrer à une date T_e dans un swap de taux à un strike K, qui démarre à une date future T_0 et qui se términe à T_n.

Nous utiliserons les notations suivantes :

- t : date d'aujourd'hui i.e date de pricing ;
- T_e : date d'exercice de l'option ;
- $[T_0; T_n]$: période du swap future ;
- K : le strike de l'option

Le swap se compose de deux pattes :

- La patte fixe, avec les périodes $(T_{i-1}, T_i)_{i=1...n}$, elle paye un coupon $\theta_i \times K$ à chaque fin de période T_i, avec $\theta_i = T_i - T_{i-1}$;
- La patte variable, avec les périodes $(T'_{i-1}, T'_i)_{i=1...p}$, elle paye un coupon $\theta_i \times Libor$ à chaque fin de période T'_i, avec $\theta'_i = T'_i - T'_{i-1}$.

Remarque : Généralement les périodes de la jambe fixe et la jambe variable peuvent être décalées. Dans notre cas, pour simplifier, nous prendrons $T_0 = T_0^{'}$ et $T_n = T_p^{'}$. Mais les périodicités de payment des coupons sont souvent différentes (3 mois pour la jambe variable et 6 mois pour la jambe fixe).

On notera pour la suite $L_{T_e,T_{i-1}{'},T_i{'}}$ le LIBOR qui correspond à la période entre $T_{i-1}{'}$ et $T_i{'}$ vu à la date T_e et $P_{t,T}$ l'obligation zéro-coupon ou bien le discount factor utilisé pour actualiser un flux d'une date future T à l'instant t.

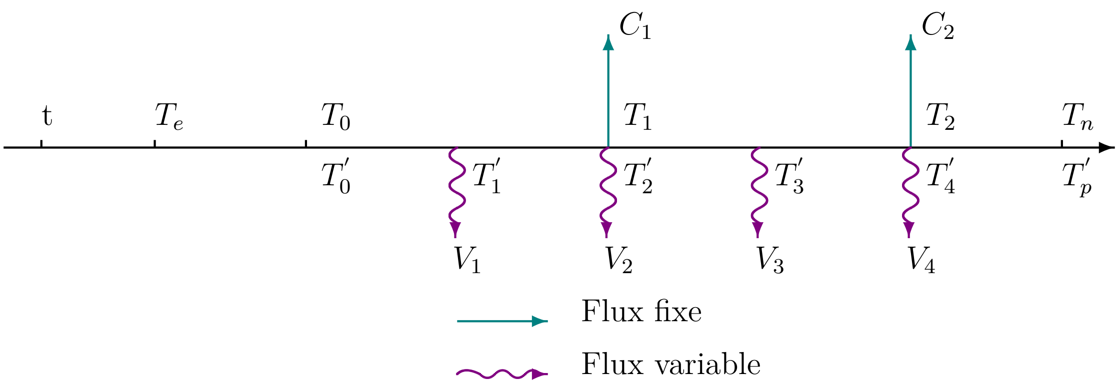

FIGURE 3.1 – Les flux du «Forward Swap Option» dans le temps.

3.1.2 Valorisation

On a $\forall \quad 1 \leq i \leq n \ , 1 \leq j \leq p : \quad C_i = \theta_i \times K \quad \text{et} \quad V_i = \theta_i^{'} \times L_{T_{i-1}{'},T_i{'}}$

Lorsqu'on actualise les flux de chaque jambe à T_e on trouve :

$$\textbf{JambeFixe}(T_e, K) = \sum_{i=1}^{n} P_{T_e,T_i} C_i = K \sum_{i=1}^{n} P_{T_e,T_i} \theta_i$$

$$\textbf{JambeVariable}(T_e) = \sum_{i=1}^{p} P_{T_e,T_i{'}} V_i = \sum_{i=1}^{p} P_{T_e,T_i^{'}} \theta_i^{'} L_{T_e,T_{i-1}{'},T_i{'}}$$

Pour le cas d'un swap payeur i.e. un swap qui permet de payer le taux fixe et recevoir le taux variable, la valeur du « Forward Swap » à l'instant T_e s'écrit :

$$\begin{aligned}
\textbf{FwdSwap}(T_e, K) &= \textbf{JambeVariable}(T_e) - \textbf{JambeFixe}(T_e, K) \\
&= \sum_{i=1}^{p} P_{T_e,T_i^{'}} \theta_i^{'} L_{T_e,T_{i-1}{'},T_i{'}} - K \sum_{i=1}^{n} P_{T_e,T_i} \theta_i \\
&= \left(S_{T_e}^{[T_0,T_n]} - K \right) \times \sum_{i=1}^{n} P_{T_e,T_i} \theta_i
\end{aligned}$$

Ceci en notant $S_{T_e}^{[T_0,T_n]} = \frac{\sum_{i=1}^{p} P_{T_e,T_i'} {\theta_i}' L_{T_e,T_{i-1}',T_i'}}{\sum_{i=1}^{n} P_{T_e,T_i} \theta_i}$, qu'on appelera dans la suite le taux forward swap.

Le payoff de cette option s'écrit :

$$\mathbf{PayOff} = (\mathbf{FwdSwap}(T_e, K))_+$$

On déduit alors le prix du call, comme l'espérance du payoff sous la mesure forward neutre (Voir Annexe) actualisée avec les conventions de CSA de l'option.

$$\boxed{Call_{T_e,T_0,T_n,K}(t) = P_{t,T_e} \times \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^{T_e}} \left[(\mathbf{FwdSwap}(T_e, K))_+ | \mathcal{F}_t \right]}$$

Problématique :

En fait, cette dernière formule n'est pas pratique, car le forward swap n'est pas observé.

Méthode de pricing avec les copules

Cette métode se base principalement sur **la décomposition** du forward swap $\mathbf{FwdSwap}(T_e, K)$ en **Long swap** et **Short swap**. Nous introduisons les éléments suivants :

- **Long swap** :
- la période du Long swap est $[T_e; T_n]$;
- mêmes caractéristiques que forward swap en terme de périodicité fixe/variable, strike et conventions CSA ;
- la sensibilité du Long swap rate à T_e : $BPV_{T_e}^{[T_e,T_n]} = BPV_{T_e}^{long} = \sum_{T_i=T_e}^{T_n} \theta_i P_{T_e,T_i}$;
- le taux Long swap à T_e : $S_{T_e}^{long} = S_{T_e}^{[T_e,T_n]} = \frac{\sum_{T_i'=T_e}^{T_n} P_{T_e,T_i'} {\theta_i}' L_{T_e,T_{i-1}',T_i'}}{\sum_{T_i=T_e}^{T_n} P_{T_e,T_i} \theta_i}$.
- **Short swap** :
- la période du Short swap est $[T_e; T_0]$;
- mêmes caractéristiques que forward swap en terme de périodicité fixe/variable, strike et conventions CSA ;
- la sensibilité du Short swap rate à T_e : $BPV_{T_e}^{[T_e,T_0]} = BPV_{T_e}^{short} = \sum_{T_i=T_e}^{T_0} \theta_i P_{T_e,T_i}$;
- le taux Short swap à T_e : $S_{T_e}^{short} = S_{T_e}^{[T_e,T_0]} = \frac{\sum_{T_i'=T_e}^{T_0} P_{T_e,T_i'} {\theta_i}' L_{T_e,T_{i-1}',T_i'}}{\sum_{T_i=T_e}^{T_0} P_{T_e,T_i} \theta_i}$.

Contrairement au $\mathbf{FwdSwap}(T_e, K)$ les taux $S_{T_e}^{long}$ et $S_{T_e}^{short}$ ainsi que leurs sensibilités sont observés, on peut leur associer des benchmarks à partir des swap liquides cotés sur le marché.

Nous reprenons l'expression de forward swap :

$$\begin{aligned}
\mathbf{FwdSwap}(T_e, K) &= \mathbf{JambeVariable}(T_e) - \mathbf{JambeFixe}(T_e, K) \\
&= \sum_{i=1}^{p} P_{T_e,T_i'} {\theta_i}' L_{T_e,{T_{i-1}}',{T_i}'} - K \sum_{i=1}^{n} P_{T_e,T_i} \theta_i \\
&= \sum_{T_i'=T_e}^{T_n} P_{T_e,T_i'} {\theta_i}' L_{T_e,{T_{i-1}}',{T_i}'} - \sum_{T_i'=T_e}^{T_0} P_{T_e,T_i'} {\theta_i}' L_{T_e,{T_{i-1}}',{T_i}'} - K \left(\sum_{T_i=T_e}^{T_n} P_{T_e,T_i} \theta_i - \sum_{T_i=T_e}^{T_0} P_{T_e,T_i} \theta_i \right) \\
&= \sum_{T_i'=T_e}^{T_n} P_{T_e,T_i'} {\theta_i}' L_{T_e,{T_{i-1}}',{T_i}'} - K \sum_{T_i=T_e}^{T_n} P_{T_e,T_i} \theta_i - \left(\sum_{T_i'=T_e}^{T_0} P_{T_e,T_i'} {\theta_i}' L_{T_e,{T_{i-1}}',{T_i}'} - K \sum_{T_i=T_e}^{T_0} P_{T_e,T_i} \theta_i \right) \\
&= \left(\frac{\sum_{T_i'=T_e}^{T_n} P_{T_e,T_i'} {\theta_i}' L_{T_e,{T_{i-1}}',{T_i}'}}{\sum_{T_i=T_e}^{T_n} P_{T_e,T_i} \theta_i} - K \right) \sum_{T_i=T_e}^{T_n} P_{T_e,T_i} \theta_i \\
&\qquad - \left(\frac{\sum_{T_i'=T_e}^{T_0} P_{T_e,T_i'} {\theta_i}' L_{T_e,{T_{i-1}}',{T_i}'}}{\sum_{T_i=T_e}^{T_0} P_{T_e,T_i} \theta_i} - K \right) \sum_{T_i=T_e}^{T_0} P_{T_e,T_i} \theta_i
\end{aligned}$$

Avec les notations précédentes, on trouve :

$$\boxed{\mathbf{FwdSwap}(T_e, K) = \left(S_{T_e}^{long} - K \right) .BPV_{T_e}^{long} - \left(S_{T_e}^{short} - K \right) .BPV_{T_e}^{short}}$$

Cette dernière formule du forward swap est celle utilisée pour le calcul du PayOff de l'option, ceci en construisant les lois marginaux des taux benchmarks de $S_{T_e}^{long}$ et $S_{T_e}^{short}$ ainsi que leurs sensibilités. Afin de calculer leur loi conjointe à l'aide de la copule gaussienne avec une corrélation déterminée.

3.2 Imlpémentation des tests unitaires sous C#

Pour tester notre modèle ainsi que les différentes zones du code de son pricer, on a eu recours à l'implémentation de tests unitaires en s'appuyant sur la librairie de calcul interne de la Société Générale dédiée au pricing des dérivés de taux. Cette immense librairie contient des millions de lignes de code et des milliers de fonctions prédéfinis, codées en **Visual C#**. Malgré le degré de complexité, ces éléments connaissent une dynamique permanente qui assure la fluidité de l'exécution du code et produisent des résultats de bonne qualité en termes de précision et de temps de calcul.

Le choix du langage **Visual C#** est parfaitement adapté à ce besoin de performance, surtout pour l'implémentation de pricers sophistiqués et puissants. Dans la suite nous présenterons ce langage ainsi que ses caractéristiques d'optimisation. Il nous servira pour l'implémentation des tests unitaires, puis nous introduirons la notion des tests unitaires.

3.2.1 Visual C#

Visual C# est un langage de programmation conçu pour la création d'une large gamme d'applications qui s'exécutent sur le .NET Framework. Il est simple, puissant sécurisé et de type **orienté objet**. Il a été conçu pour générer des applications d'entreprise.

Avec ses nombreuses innovations, C# permet le développement rapide d'applications tout en conservant la simplicité et l'élégance des langages de style C. Visual C# correspond à l'implémentation du langage C# par Microsoft. Visual Studio prend en charge Visual C# avec, parmi d'autres outils, un éditeur de code aux fonctionnalités complètes, des modèles de projet, des concepteurs, des Assistants au codage et un **débogueur** puissant et simple d'utilisation. La bibliothèque de classes .NET Framework donne accès à de nombreux services de système d'exploitation et d'autres classes utiles, bien conçues qui permettent d'accélérer considérablement le cycle de développement.

Programmation orientée objet

La programmation orientée objets (POO) est une technique d'organisation du code d'un programme en le groupant en objets, les objets étant ici des éléments individuels comportant des informations (valeurs de données) et des fonctionnalités. L'approche orientée objet permet de regrouper des éléments particuliers d'informations avec des fonctionnalités ou des actions communes associées à ces informations . La possibilité d'intégrer ainsi toutes ces valeurs et ces fonctions offre divers avantages : par exemple, il est possible de ne suivre qu'une seule variable plutôt que plusieurs d'entre elles, de regrouper des fonctionnalités liées entre elles et de structurer les programmes pour qu'ils se rapprochent davantage du fonctionnement humain. Les tâches courantes de la programmation orientée objet sont :

- la définition des classes ;
- la création de propriétés, méthodes et accesseurs ;
- le contrôle de l'accès aux classes, propriétés, méthodes et accesseurs ;
- la création de propriétés et de méthodes statiques ;
- la création de structures d'énumération ;
- la définition et l'utilisation d'interfaces ;
- l'utilisation de l'héritage, y compris lors de la redéfinition des éléments des classe.

La force de la programmation objet, c'est qu'elle s'appuie sur un modèle calqué sur la réalité physique du monde. Les objets se comportent comme des entités indépendantes, autosuffisantes qui collaborent par échange de messages. Elle encourage d'avantage le travail collaboratif. L'idéal c'est qu'un développeur (de classe) puisse transmettre son code avec une documentation et qu'un autre développeur (utilisateur de ces classes) puisse les utiliser sans avoir à replonger de manière approfondie dans le code de chacune d'entre elles. Ainsi le développeur qui le suit ne réinvente pas la roue. Il utilise l'existant et développe seulement ce qu'il a besoin et qui n'existe pas, ceci est très fréquent dans la production des pricers compliquées et qui fait interviennent des centaines de développeurs.

L'idéal c'est qu'un développeur (de classe) puisse transmettre son code avec une documentation et qu'un autre développeur (utilisateur de ces classes) puisse les utiliser sans avoir à replonger de manière approfondie dans le code de chacune d'entre elles. Ainsi le développeur qui le suit ne réinvente pas la roue. Il utilise l'existant et développe seulement ce qu'il a besoin et qui n'existe pas, ceci est très fréquent dans la production des pricers compliquées qui fait interviennent des centaines de développeurs.

Débogueur

Un débogueur est un logiciel qui aide un développeur à analyser les bogues d'un programme. Pour cela, il permet d'exécuter le programme pas-à-pas, d'afficher la valeur des variables à tout moment, de mettre en place des points d'arrêt sur des conditions ou sur des lignes du programme.

Le programme à débuguer est exécuté à travers le débogueur et s'exécute normalement. Le débogueur offre alors au programmeur la possibilité d'observer et de contrôler l'exécution du programme, en lui permettant par divers moyens de l'observer, de la stopper (mettre en pause l'exécution du programme) et de la changer.

Le débogage represente un outil très performant pour la visualisation de l'éxecution du code, assurer la maintenance du code et la récupération des variables internes du pricer.

Le débogage du pricer nous a permis de mieux comprendre le modèle théorique en suivant les étapes de pricing dans le code, ainsi que l'identification des différentes formules du modèle. Cette étape est indispensable pour l'implémentation des tests unitaires.

3.2.2 Les tests unitaires

Définition

Un test unitaire est une procédure permettant de vérifier le bon fonctionnement d'une partie d'un logiciel ou d'une portion d'un programme. Il vise à s'assurer que des bouts de code fonctionnent comme il faut et que tous les scénarios d'un développement sont couverts par un test. Lorsque les tests couvrent tous les scénarios d'un code, nous pouvons nous assurer que notre code fonctionne. De plus, cela permet de faire des opérations de maintenance sur le code tout en étant certain que ce dernier ne subira pas de régressions (l'apparition de nouveaux dysfonctionnements).

Utilisation

L'objectif du programmeur est de tester un module, indépendamment du reste du programme, ceci afin de s'assurer qu'il répond aux spécifications fonctionnelles (Pour note étude du modèle nous vérifions quelques propriétés et nous testons aussi la cohérence du prix avec le modèle) et qu'il fonctionne correctement en toutes circonstances.

Fonctionnement

Les tests unitaires se décomposent en trois parties selon le schéma « AAA » qui signifie :

- Arranger : définir les objets, les variables nécessaires au bon fonctionnement de notre test, en d'autres termes, il s'agi d'initialiser les objects à passer en paramètres de la méthode à tester.
- Agir : il s'agit d'exécuter la méthode que nous testons.
- Auditer : vérifier finalement que le résultat obtenus est conforme à nos attentes.

Le code suivant illustre le schéma précédent pour tester une fonction prédéfinie *concatene(a,b)* qui retourne la concaténation des deux chaînes de caractères a et b :

Algorithm 1 Test de concaténation

```
//arranger
string a = ”salut les” et string b = ”amis”;
string resultatAttendu = ”salut les amis”;
//agir
string resultatObtenu = concatene(a,b);
//auditer
if (resultatObtenu == resultatAttendu)
    Afficher(”test réussi”)
else
    Afficher(”test échoué”)
```

De même pour nos tests unitaires, cette démarche sera respectée. Dans un premier temps nous allons construire le ”workplace” (un fichier xml contenant tous les caractéristiques du produit (Voir Annexe I)), ensuite dégager théoriquement les résultats attendus pour chaque test. Enfin, comparer les résultats obtenus avec ceux attendus en instaurant une stratégie de validation du test, ceci avec l'environnement structuré fournit par visual C# pour aider au développement des tests unitaires, dans notre cas c'est le fameux framework NUnit (Voir Annexe II).

3.3 Résultats et analyse des tests unitaires

Nous présenterons dans la suite les résultats obtenus lors de l'appel de la fonction de prix du produit Forward Swap Option. Tous ces tests numériques ont été exécutés avec les caractéristiques suivantes :

Product Description	
OptionType	Call
OptionDate	5y
ValueDate	10y
Strike	3%
Underlying	5y
UnderlyingCurrency	USD
DealUnderCSA	TRUE
DealCSACurrency	USD
SwapUnderCSA	TRUE
SwapCSACurrency	USD

FIGURE 3.2 – Les paramètres du produit

- OptionType : spécifie le type d'option call ou put.
- OptionDate : la date d'exercice de l'option.
- ValueDate : la date de début de swap T_0.
- Strike : le taux fixe de swap.
- Underlying : la durée du swap future $[T_0; T_n]$.
- UnderlyingCurrency : la devise dans laquelle le swap sera effectué .
- DealUnderCSA : les flux de l'option sont-ils sécurisés par un contrat CSA.
- DealCSACurrency : la devise des paiements du contrat CSA pour l'option.
- SwapUnderCSA : les flux du swap sont-ils sécurisés par un contrat CSA.
- SwapCSACurrency : la devise des paiements du contrat CSA pour le swap.

3.3.1 Les tests d'arbitrage

Dans cette partie nous vérifions que le modèle adopté ne présente pas d'opportunités d'arbitrage, ceci en faisant les deux tests : Call Price et Parité Call-Put.

Call Price

L'objectif de ce test est de s'assurer de la décroissance de prix du call par rapport au strike, ainsi que la convexité de cette dernière fonction par rapport au strike, ce qu'on peut résumer dans l'assertion suivante :

$$\boxed{\forall K \qquad \frac{\partial Call(K)}{\partial K} < 0 \quad et \quad \frac{\partial^2 Call(K)}{\partial K^2} > 0}$$

Pour effectuer ce test, nous traçons le prix du call issue du pricer pour différentes valeurs du strike, on ajoute aussi les valeurs intrinsèques de l'option pour comparer.

Remarque : Pour obtenir les valeurs intrinsèques de l'option il suffit d'appeler le pricer avec une date de maturité de l'option égale à celle de pricing (Voir 1.6.3).

Sur une plage de strike $[0\%; 7\%]$ et un pas de 0.01%, nous obtenons les résultats suivants :

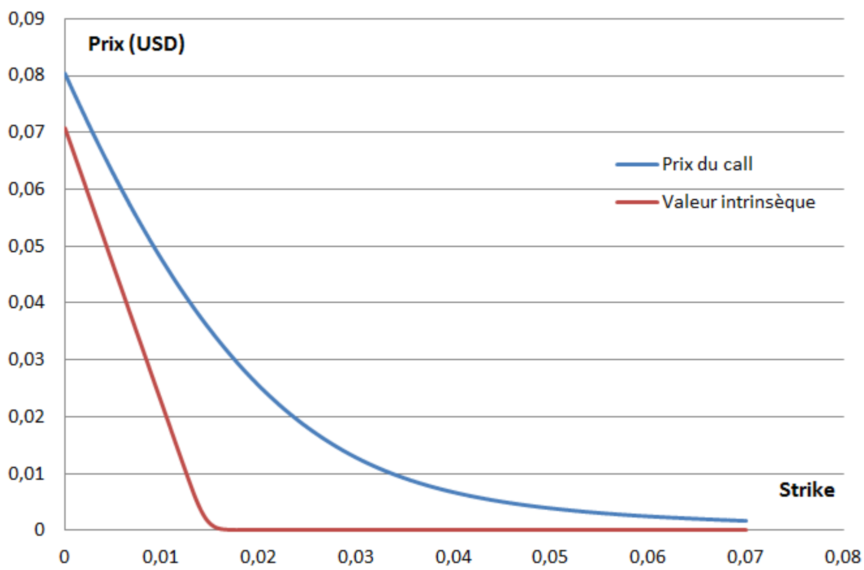

Figure 3.3 – Prix du call et valeur intrinsèque en fonction du strike

Effectivement le prix du call est convexe et décroissant par rapport au strike.

- À gauche, pour des strikes petits, la valeur de l'option est maximale parce qu'elle est «Deep in the money» ($K \ll S_t^{[T_0,T_n]}$). L'éxecution de l'option devient très probable, son prime peut-être donc estimée par la valeur intrinsèque $(S_t^{[T_0,T_n]} - K)^+$, mais avec une addition qui explique la possibiité que $S_t^{[T_0,T_n]}$ peut augmenter de plus dans le temps, alors l'option génèrera plus de profit.

- À droite, pour des strikes grands, l'option ne vaut presque rien parce qu'elle est «Deep out of the money» ($K \gg S_t^{[T_0,T_n]}$). L'éxecution de l'option devient peu probable.

Parité Call-Put

Dans cette partie nous allons vérifier la relation de parité Call-Put. Pour s'assurer que notre modélisation évite des opportunités d'arbitrage, la parité Call-Put doit-être vérifiée avec une grande précision.

La parité Call-Put pour Forward Swap Option s'écrit :

$$\boxed{Call_{T_e,T_0,T_n,K}\left(t\right) - Put_{T_e,T_0,T_n,K}\left(t\right) = Swap_{T_0,T_n,K}\left(t\right)}$$

Avec : $Swap_{T_0,T_n,K}\left(t\right) = \left(S_t^{[T_0,T_n]} - K\right) \times \sum_{i=1}^{n} P_{t,T_i}\theta_i$

Dans le tableau ci-dessous, nous présentons un extrait des résultats obtenus pour différents strikes :

Strike K	$Call\left(K\right) - Put\left(K\right)$	$Swap_{T_0,T_n}\left(K\right)$	Erreur
1%	0,065971977	0,065971977	-5,41234E-16
2%	0,025200299	0,025200299	2,5327E-16
3%	-0,015571379	-0,015571379	-3,1225E-17
4%	-0,056343058	-0,056343058	6,59195E-16
5%	-0,097114736	-0,097114736	1,52656E-16
6%	-0,137886415	-0,137886415	-6,38378E-16
7%	-0,178658093	-0,178658093	-1,249E-15
8%	-0,219429771	-0,219429771	3,60822E-16
9%	-0,26020145	-0,26020145	0
10%	-0,300973128	-0,300973128	0
11%	-0,341744807	-0,341744807	0
12%	-0,382516485	-0,382516485	-6,10623E-16

Table 3.1 – Extrait des résultats du test parité Call-Put

Sur une plage de strike [0% ; 7%], couvert avec 700 points, soit un pas de 0,1%, on observe une erreur absolue maximale de :

$$\underset{1\leq i\leq 700}{max}\{\mid Erreur\left(K_i\right)\mid\} = 5.66 \times 10^{-15}$$

L'erreur maximale est très petite, on peut conclure que la parité Call-Put est vérifiée avec une précision élévée.

3.3.2 Les tests de sensibilité

Les tests de sensibilité ont comme objectif de confirmer la cohérence entre le modèle théorique et le pricer, ceci en étudiant l'impact de modification des différents paramètres du produit dont le pricer devrait être sensible, puis comparer ces résultats avec les résultats obtenus théoriquement. Les tests à faire sont : Parallel Vega Sensitivity, Local Vega Sensitivity et Correlation Sensitivity.

<u>**Parallel Vega Sensitivity**</u>

La décomposition du Forward Swap en Long et Short Swap s'écrit :

$$\textbf{FwdSwap}(T_e, K) = \left(S_{T_e}^{long} - K\right).BPV_{T_e}^{long} - \left(S_{T_e}^{short} - K\right).BPV_{T_e}^{short}$$

A partir de cette expression, la variance du Forward Swap est donnée par :

$$Var\left[\ \textbf{FwdSwap}(Te, K)\right] = \sigma_{long}^2 BPV_{long}^2 + \sigma_{short}^2 BPV_{short}^2 - 2\rho\sigma_{long}\sigma_{short}BPV_{long}BPV_{short} \tag{3.1}$$

Avec :

- σ_{long} : la volatilité du Long Swap Rate $S_{T_e}^{long}$;
- σ_{short} : la volatilité du Long Swap Rate $S_{T_e}^{short}$;
- BPV_{long} : la sensibilité du Long Swap Rate vu à la date de pricing ;
- BPV_{short} : la sensibilité du Short Swap Rate vu à la date de pricing ;
- ρ : la corrélation entre Long et Short Swap Rate.

En différenciant (2.1) on voit que la variance du Forward Swap croît avec σ_{long} :

$$\begin{aligned}\frac{\partial Var\left[\ \textbf{FwdSwap(Te,K)}\right]}{\partial \sigma_{long}} &= 2\sigma_{long}BPV_{long}^2 - 2\rho\sigma_{short}BPV_{long}BPV_{short} \\ &= 2\sigma_{long}\ BPV_{long}^2(1 - \rho\frac{\sigma_{short}BPV_{short}}{\sigma_{long}BPV_{long}}) \\ &= 2\sigma_{short}BPV_{long}BPV_{short}(\frac{\sigma_{long}BPV_{long}}{\sigma_{short}BPV_{short}} - \rho) > 0\end{aligned}$$

Ceci est vrai car on a : $\frac{BPV_{long}}{BPV_{short}} \gg 1$

Remarque : BPV_{long} et BPV_{short} sont des constantes.

D'autre part, lorsqu'on dérive (2.1) par rapport σ_{long} on trouve :

$$\begin{aligned}\frac{\partial Var\,[\ \textbf{FwdSwap(Te,K)}]}{\partial \sigma_{short}} &= 2\sigma_{short} BPV_{short}^2 - 2\rho\sigma_{long} BPV_{long} BPV_{short} \\ &= 2\sigma_{short} BPV_{short}^2 (1 - \rho \frac{\sigma_{long} BPV_{long}}{\sigma_{short} BPV_{short}}) \\ &= 2\sigma_{long} BPV_{long} BPV_{short} (\frac{\sigma_{short} BPV_{short}}{\sigma_{long} BPV_{long}} - \rho)\end{aligned}$$

Avec : $\quad 0 < \frac{BPV_{short}}{BPV_{long}} \ll 1$

Par conséquent, pour une petite corrélation i.e. $\rho \approx 0$:

$$\frac{\partial Var\,[\ \textbf{FwdSwap(Te,K)}]}{\partial \sigma_{short}} \geq 0$$

Et pour une grande corrélation i.e. $\rho \approx 1$:

$$\frac{\partial Var\,[\ \textbf{FwdSwap(Te,K)}]}{\partial \sigma_{short}} \leq 0$$

La variance de Forward Swap croît donc avec σ_{short} lorsque la corrélation est grande et décroît avec σ_{short} lorsque la corrélation est petite.

Pour vérifier ces résultats théoriques nous observons le prix de l'option suite à des variations de σ_{long} et σ_{short}. Une augmentation de la volatilté de Forward Swap provoquera également une augmentation du prix de l'option et vice versa, ceci revient au fait que pour les options, le $Vega = \frac{\partial Prix}{\partial \sigma}$ est toujours positive.

Problématique : Les volatilités σ_{long} et σ_{short} sont récupérées à partir des donées du marché et représentent des variables internes du pricer, elles ne peuvent-être modifiées ou décalées directement.

L'idée est donc de modifier les données du marché utilisées en terme de volatilité des taux, ce qui revient à déformer des points précis du cube de volatilité (Voir) avec un choc déterminé (en utilisant des fonctions prédéfinis dans la librairie du pricer) pour que le pricer récupère des volatilités décalés.

Nous choisissons une corrélation de 90% puis on trace le prix de l'option en terme du choc appliqué à la volatilité initiale du Long Swap Rate : $\sigma_{long} = \mathbf{5{,}302 \quad bp/day}$

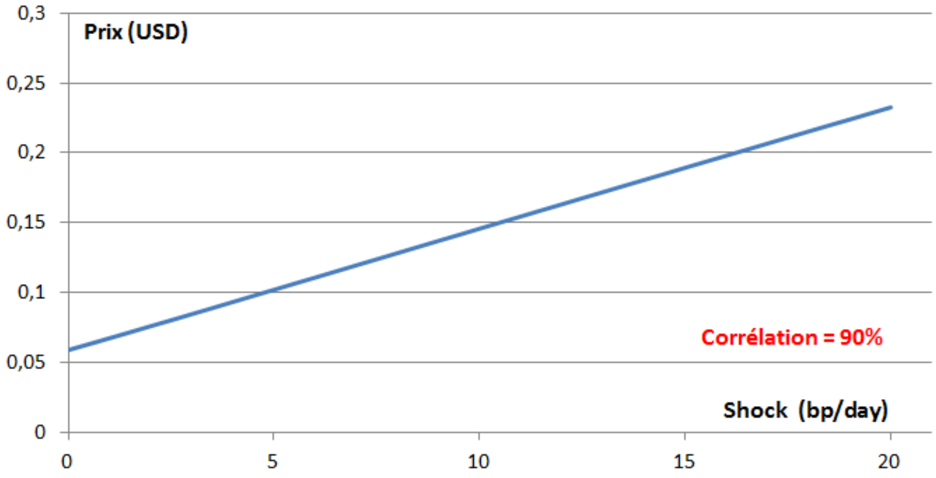

FIGURE 3.4 – Prix avec une grande corrélation en fonction du choc appliqué à la volatilité du Long Swap Rate

Comme prévu, le prix augmente en fonction de volatilité du Long Swap Rate.

On fait du même pour le Short Swap Rate de volatilité initiale : $\sigma_{short} = \mathbf{5{,}515 \quad bp/day}$

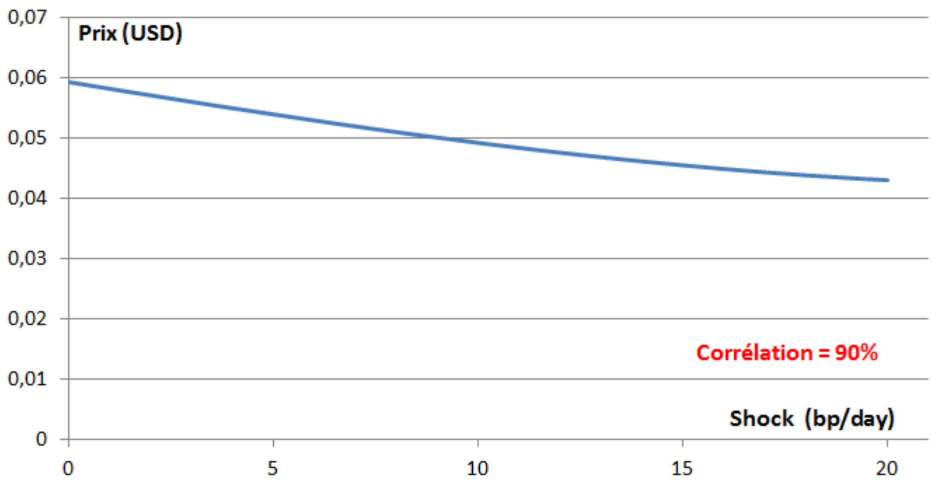

FIGURE 3.5 – Prix avec une grande corrélation en fonction du choc appliqué à la volatilité du Short Swap Rate

On trouve que le prix devient décroissant.

On prend cette fois-ci une corrélation de 20% et on test encore la sensibilité à la volatilité du Long Swap Rate

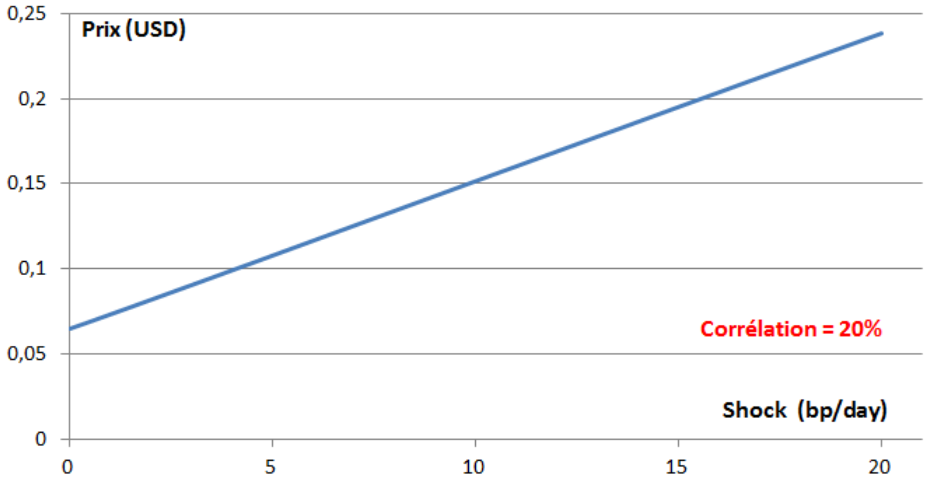

FIGURE 3.6 – Prix avec une petite corrélation en fonction du choc appliqué à la volatilité du Long Swap Rate

Le prix reste croissant puisque la variance du Forawrd Swap est croissante par rapport au σ_{long} indépendamment de la corrélation ρ.

Finalement, avec la même corrélation 20% on observe la sensibilité du prix à la volatilité du Short Swap Rate

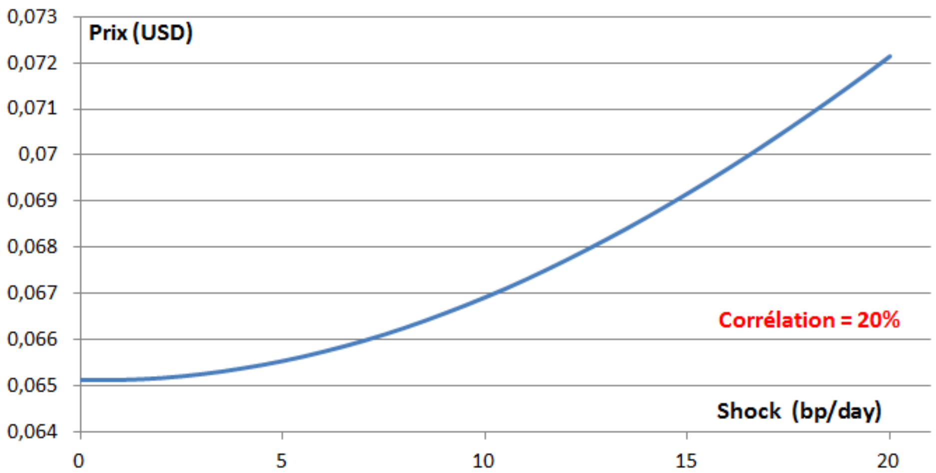

FIGURE 3.7 – Prix avec une petite corrélation en fonction du choc appliqué à la volatilité du Short Swap Rate

Le prix devient croissant pour une petite corrélation. Tous ces résultats sont cohérents, ce qui valide le test Parallel Vega Sensitivity.

Local Vega Sensitivity

Contrairement au test précédant Parallel Vega Senstivity, où on a décaler parallèlement tous les tranches de moneyness. Ce test consiste à choquer le marché par moneyness et observer pour quels valeurs de strike correspondant, nous obtenons plus de sensibilité.

Nous effectuons ce test pour un Forward Swap Option de strike à la monnaie de 3%. On s'attend donc à des fluctuations de prix plus importantes autour de 3%. On choc la volatilité de Long Swap Rate de **5 bp/day** , nous obtenons le graphique suivant :

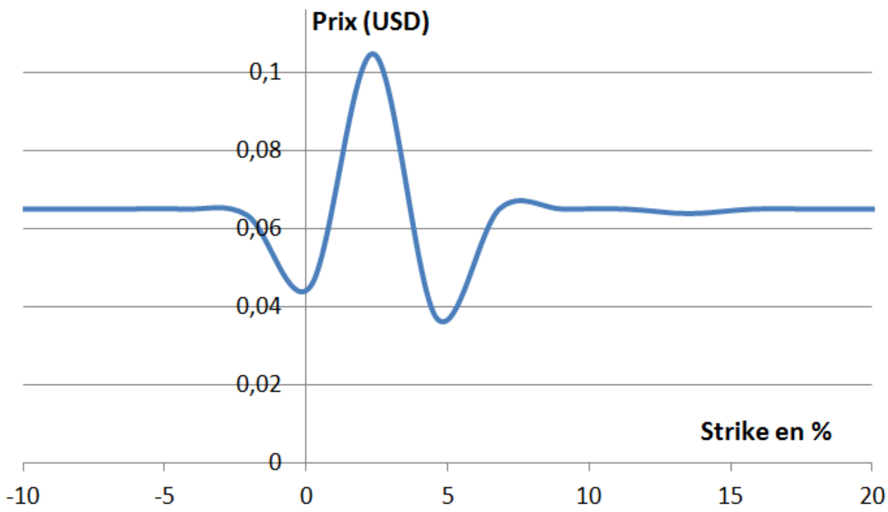

FIGURE 3.8 – Les fluctuations du prix en fonction du strikes utilisés pour déformer la volatilité

Effectivement, on observe plus de sensibilité autour de strike 3%. Nous remarquons que pour des strikes proches du strikes à la monnaie l'effet du choc reste considérable, ceci est causé par les opérations d'interpolations.

Correlation Sensitivity

La corrélation entre le Long et le Short Swap Rate peut être remplacée par la valeur observée sur le marché ou choisi par l'utilisateur du pricer. Elle s'agit d'un paramètre déterminant du pricer, dans ce test nous observons la sensibilité du prix par rapport à ce paramètre.

Nous reprenons l'équation (2.1) et on dérive cette fois par rapport à la corrélation ρ :

$$\frac{\partial Var\left[\ \mathbf{FwdSwap(Te,K)}\right]}{\partial \rho} = -2\sigma_{long}\sigma_{short}BPV_{long}BPV_{short} \leq 0$$

La variance du Forward Swap est décroissante en fonction de la corrélation, alors le prix de l'option le serait aussi. Nous traçons le prix de l'option sur une plage de corrélation de [0% ;100%], nous obtenons le graphe suivant :

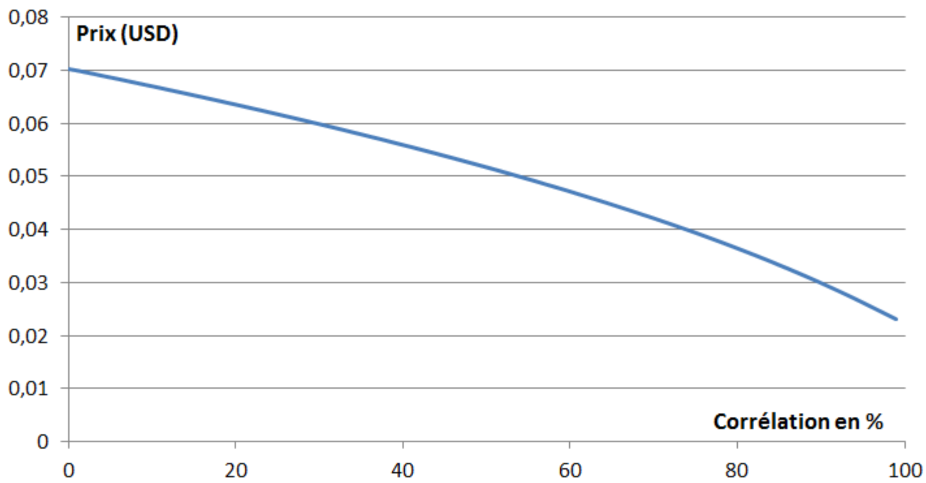

FIGURE 3.9 – Le prix de l'option en fonction de la corrélation

Le pricer confirme ce résultat, le prix de l'option décroît avec la corrélation.

3.3.3 Le test de dégénérescence

En principe deux produits qui apportent les mêmes besoins devraient avoir le même prix, ceci est vrai aussi pour les produits financiers. Le test de dégénérescence a comme objectif de tester cette proposition pour le produit Forward Swap Option.

Nous reprenons la décomposition du Forward Swap :

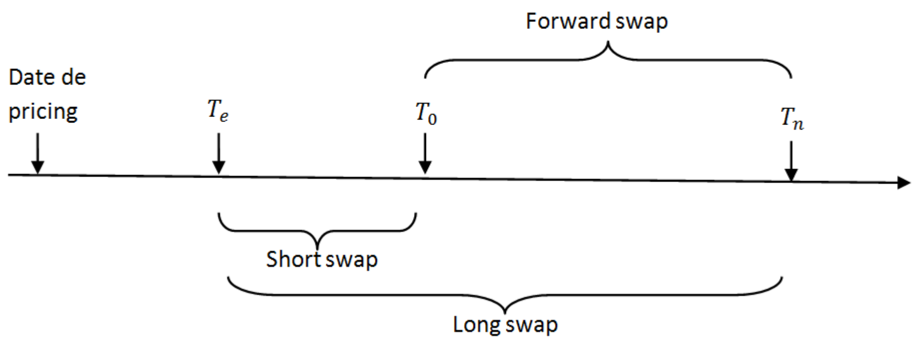

FIGURE 3.10 – Décomposition du Forwrad Swap en Long & Short swap

L'idée du test est d'observer le prix de Forward Swap Option avec une date de début de Swap T_0 qui converge vers la date de l'exercice de l'option T_e, ceci fait le prix doit converger vers le prix d'une swaption de même date d'exercice et un tenor égale à celui du Long Swap. Ce qu'on peut illustrer par la figure suivante :

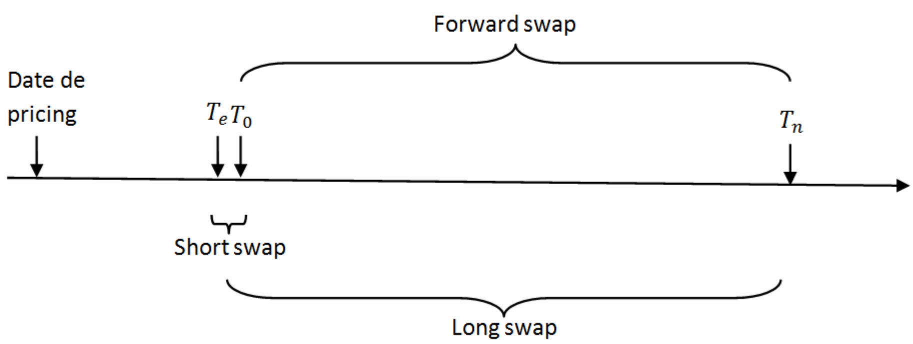

FIGURE 3.11 – Dégénérescence de Forward Swap Option vers une swaption

Mathématiquement, nous essayons de nous assurer de l'hypothèse suivante :

$$\lim_{T_0 \to T_e} \mathbf{FwdSwapOption}(t, K) = \mathbf{Swaption}(t, K)$$

Un produit Forward Swap Option avec $T_0 = T_e$ i.e. qui donne le droit à la maturité d'entrer immédiatement dans un swap qui se termine à T_n, cette description correspond parfaitement à celle d'une swaption de date d'exercice T_e et d'échéance T_n. Ce qui explique qu'avec ces caractéristiques les deux produits devaient avoir le même prix.

Afin de visualiser cette convergence, nous traçons le prix de Forward Swap Option avec des valeurs différentes de T_0 convergeant vers T_e. Nous le comparons avec le prix de swaption de même date d'exercice et de tenor égale à celui de Long Swap.

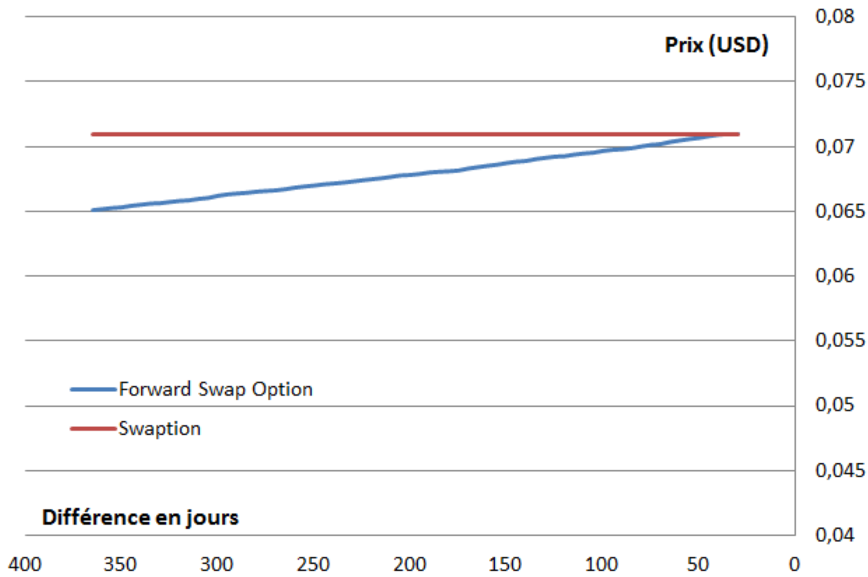

Figure 3.12 – Décomposition du Forwrad Swap en Long & Short swap

Le prix de Forward Swap Option converge vers le prix du swaption lorsque T_0 tend vers T_e (Différence en jours $\rightarrow 0$), ce qui valide le test de dégénérescence.

3.4 Conclusion

Le pricer a validé les tests de non arbitrage. Nous rappelons que ceux-ci ont comme objectif s'assurer que les prix produits par le modèle sont compatibles avec le marché et ne présentent pas d'oportunités d'arbitrage. Les tests de sensibilités et le test de dégénérescence ont quant à eux comme objectif montrer l'impact des différents paramètres et de s'assurer de la cohérence des résultats du pricer avec le modèle théorique. Les résultats et l'analyse de ces tests se sont montrés cohérents et ne présentent aucune défaillance du modèle ou du pricer.

Conclusion

L'objectif de ce projet était de réaliser une étude du modèle associé au produit exotique «Forward Swap Option», une étude qui s'insère dans la gestion du risque de modèle. Cette étude cherchait à instaurer une méthode de validation du modèle à travers l'implémentation de tests unitaires.

Tout d'abord, nous avons introduit les notions fondamentales liées à la gestion du risque d'un modèle. Ensuite nous avons introduit des généralités sur les dérivés de taux nécessaires pour l'étude de celui-ci. Avant de passer à la phase d'étude , une familiarisation avec l'outil informatique existant à été primordial. Nous étions amenés à effectuer plusieurs «débugges» du pricer codé en C#. Ces débugges nous servirons pour identifier les étapes de pricing, survoler la transformation des entrées à chaque étape et comprendre l'interaction entre les différentes interfaces.Ils vont nous aider aussi pour implémenter les tests unitaires. Enfin, nous avons étudié le modèle en présentant tout d'abord une description détaillée du produit concerné et la théorie de sa valorisation. Puis, nous avons implémenté sous C# les tests d'arbitrages, les tests de sensibilité et le test de dégénérescence, nous avons présenté les résultats et l'analyse de ces tests. Tous ces résultas se sont montrés cohérents et n'ont présenté aucune défaillance du modèle ou du pricer.

Bibliographie

[1] Anders B. Trolle, *« The Swaption Cube »*, Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne and Swiss Finance Institute,Princeton-Lausanne workshop, 2011.

[2] John HULL, *« Options, Futures and other derivatives »*, 7^{th} edition, Pearson education international, 2009.

[3] Mohamed Kadda, *L'évaluation en juste valeur économique des produits dérivés*, La revue d'Opus Finance N^o2, 2013.

[4] Nicole El Karoui, *Couverture des risques dans les marchés financiers*, Ecole Polytechnique, CMAP, 2004.

[5] Thierry RONCALLI, *La Gestion des Risques Financiers*, Economica, 2004.

Webographie

[w1] http://africa-technologies services.sgcib.com/

[w2] www.investopedia.com

[w3] https://fr.wikipedia.org/wiki/Débogueur

[w4] https://fr.wikipedia.org/wiki/Visual_C_sharp

[w3] https://openclassrooms.com/courses/les-tests-unitaires

ANNEXE

Annexe I


```xml
<?xml version="1.0" encoding="utf-8"?>
<workplaceWorkbook xmlns="Socgen.Defi.Tau.Rd.WorkplaceWorkbook">
  <name>mxForwardSwapOption</name>
  <shortName>mxForwardSwapOption</shortName>
  <function>mxForwardSwapOption</function>
  <section name="Product" type="Product">
    <field name="OptionType" type="String" defaultValue="Call" defaultValueType="System.String" format="General" />
    <field name="OptionDate" type="Duration" defaultValue="5y" defaultValueType="System.String" format="General" />
    <field name="ValueDate" type="Duration" defaultValue="10y" defaultValueType="System.String" format="General" />
    <field name="Strike" type="Double" defaultValue="0.03" defaultValueType="System.Double" format="General" />
    <field name="Underlying" type="Duration" defaultValue="5y" defaultValueType="System.String" format="General" />
    <field name="UnderlyingCurrency" type="Currency" defaultValue="USD" defaultValueType="System.String" format="General" />
    <field name="DealUnderCSA" type="Boolean" defaultValue="TRUE" defaultValueType="System.Boolean" format="General" />
    <field name="DealCSACurrency" type="Currency" defaultValue="USD" defaultValueType="System.String" format="General" />
    <field name="SwapUnderCSA" type="Boolean" defaultValue="TRUE" defaultValueType="System.Boolean" format="General" />
    <field name="SwapCSACurrency" type="Currency" defaultValue="USD" defaultValueType="System.String" format="General" />
  </section>
  <section name="Model1" type="Model" displayName="ForwardSwapOptionFormula">
    <field name="FwdVolMethod" type="String" defaultValue="projection" defaultValueType="System.String" format="General" />
    <field name="Correl">
      <type>
        <vector defaultLength="1">
          <type>
            <record>
              <field name="A" type="Duration" defaultValue="10y" defaultValueType="System.String" format="@" anonymous="true" />
              <field name="B" type="Double" defaultValue="0.2" defaultValueType="System.Double" format="General" anonymous="true" />
            </record>
          </type>
        </vector>
      </type>
    </field>
  </section>
</workplaceWorkbook>
```


FIGURE 3.13 – Workplace : les caractéristiques du produit

Annexe II

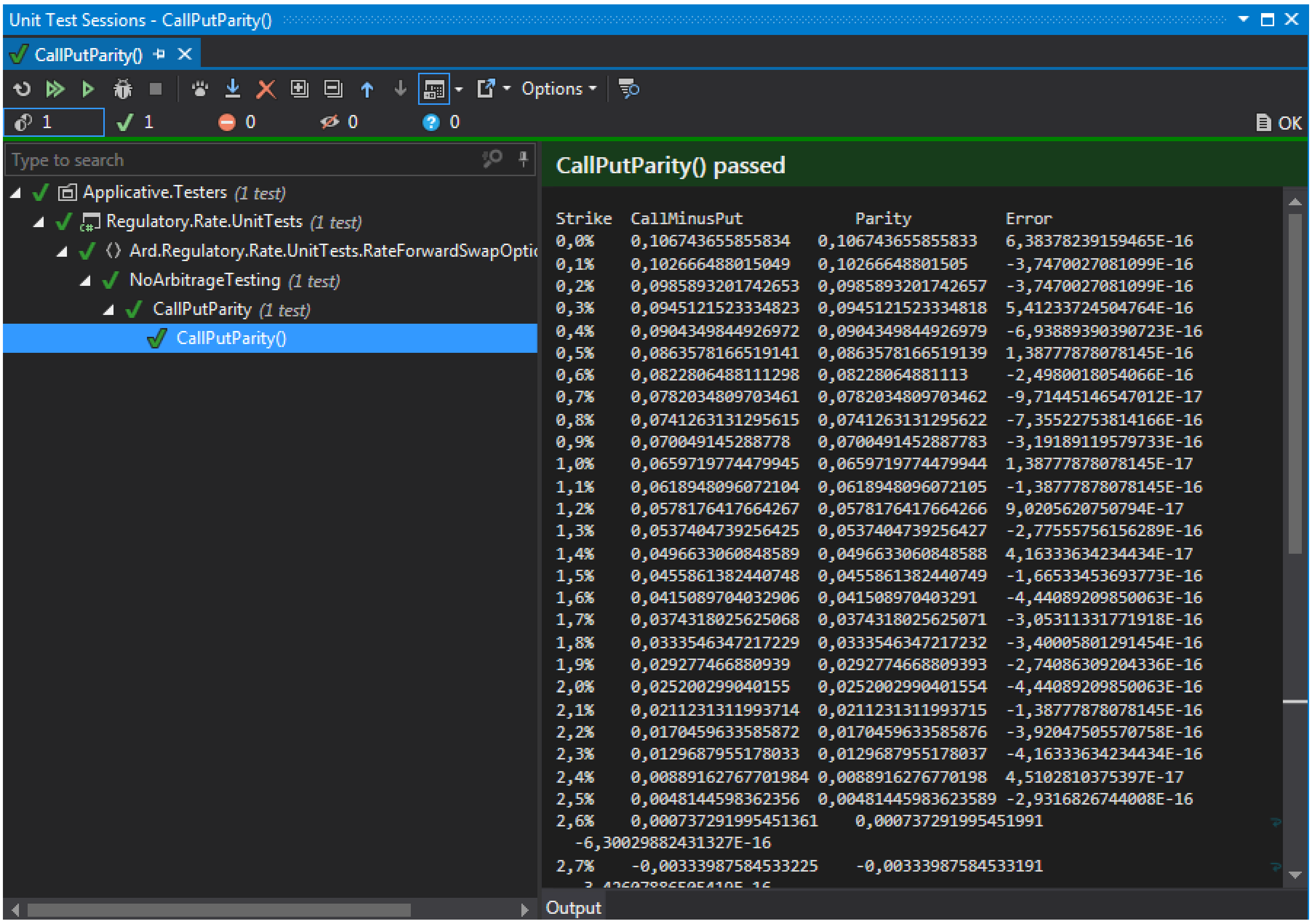

FIGURE 3.14 – Interface de Visual C# qui gère l'exécution des tests unitaires

Quelques définitions mathématiques

Copule une copule est une fonction de répartition notée C définie sur $[0,1]^d$ dont les marges sont uniformes sur $[0,1]$. Elle est caractérisée par :

- $C(u_1, u_2, .., u_d)$ =0 si une des composantes u_i est nulle
- $C(1, .., ..., u_i, ..., 1, 1) = u_i$
- C est d-croissante

Martingale Une martingale X est un type de processus stochastique, tel que son espérance mathématique $\mathbb{E}(X)$ à l'instant t dépend de l'information disponible à une certaine date s, dénotée $\mathcal{F}_s$: $\mathbb{E}(X_t|\mathcal{F}_s) = X_s$ (Avec $s \leq t$) et X un processus adapté à la filtration $\mathcal{F}$.

Valorisation Risque / Forward neutre la valeur d'un actif financier H payé à la date T_e à t est : $H_t = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[e^{-\int_t^T r_s ds} H|\mathcal{F}_t\right]$ Avec $\mathbb{Q}$ la mesure risque neutre i.e. la mesure sous laquelle les prix actualisés sont des martingales.

On note par $\widehat{\mathbb{P}}$ la mesure forward qui vérifie : $\frac{d\widehat{\mathbb{P}}}{d\mathbb{Q}} = e^{-\int_0^T r_s ds} \times \frac{N_T}{N_0}$ Avec ces notations la formule de valorisation forward neutre s'écrit :

$$\widehat{H_t} = \frac{H_t}{N_t} = \frac{1}{N_t}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[e^{-\int_t^T r_s ds} H|\mathcal{F}_t\right] = \mathbb{E}^{\widehat{\mathbb{P}}}\left[\frac{H}{N_T}|\mathcal{F}_t\right]$$