



المندوبية السامية للتخطيط
HAUT-COMMISSARIAT AU PLAN

ROYAUME DU MAROC

*_*_*_*_*_*

HAUT COMMISSARIAT AU PLAN

*_*_*_*_*_*_*_*_*_*

INSTITUT NATIONAL

DE STATISTIQUE ET D'ECONOMIE APPLIQUEE



INSEA

Projet de Fin d'Etudes

Modélisation des matières premières
Cas du Pétrole

Préparé par : M. THIYFA Zakaria

Sous la direction de : M. MARRI Fouad (INSEA)

Et M. Atif EL MOUTAOUKIL (AWB)

Soutenu publiquement comme exigence partielle en vue de l'obtention du

Diplôme d'Ingénieur d'Etat

Filière : ACTUARIAT-FINANCE

Devant le jury composé de :

- M. MARRI Fouad (INSEA)
- M. EL QALLI Yassine (INSEA)
- M. Atif EL MOUTAOUKIL (AWB)

Dédicace

A ma famille qui m'a toujours soutenu

A ceux qui ont toujours cru en moi

Zakaria Thiyya

Remerciement

Je tiens à remercier mon encadrant et professeur M. Fouad MARRI qui a toujours été là pour me guider, me conseiller que cela soit dans mon stage de fin d'étude ou dans mon cursus scolaire. Son écoute et ses explications resteront graver dans la mémoire,

Je tiens particulièrement à remercier l'ensemble des employés d'Attijari Wafabank pole risque de marché et plus particulièrement à mes maitres de stage M. Fouad KHENNACH et Atif El MOUTAOUKIL qui ont toujours été généreux par leurs conseils et qui m'ont aidé tout au long de mes 4 mois de stage.

Quelques jours était plus difficiles que d'autres car on ne s'entendait généralement pas sur une directive, mais je tiens à les remercier car sans eux, ce stage n'aurait pas été ce qu'il a été : le plus enrichissant intellectuellement.

Je tiens également à remercier l'ensemble du corps professoral qui nous a toujours guidés vers la réussite et l'excellence.

Sommaire

Résumé et mots clés	3
Dédicace	4
Remerciement.....	5
Listes des abréviations	8
Table des Illustrations	9
Introduction générale.....	10
CHAPITRE I : Présentation des matières premières.....	12
Introduction.....	13
I- Vue d'ensemble.....	14
I.1 Un peu d'histoire	14
I.2 Quelques chiffres clés.....	14
I.3 Marché pétroliers.....	15
II- L'étude de décomposition des séries.....	17
II.1 Les moyennes mobiles arithmétiques.....	17
II.2 Modèle de Harvey	18
II.3 Le filtre de Hodrick – Prescott	19
CHAPITRE II : Modélisation des commodités avec le Convenience Yield	24
Introduction.....	25
I- Présentation générale des produits à terme	26
I.1 Prix Forward et Futures	26
I.2 Effet Samuelson.....	27
I.3 Volatilité des prix des matières premières.....	28
I.4 Cash & Carry	29
II- Convenience Yield	30
II.1 Définition.....	30
II.2 Convenience yield vs dividende	32
II.3 Backwardation vs Contango	33
III- Modèle à deux facteurs	36
III.1 Modèle de Schwartz-Brennan	36
III.2 Modèle de Gabillon	37
III.3 Equivalence entre le modèle de Schwartz-Brennan et celui de Gabillon	38
Conclusion	45

CHAPITRE III : Modélisation en utilisant les séries temporelles.....	46
Introduction.....	47
I-Modélisation des séries temporelles	48
I.1 Test de Dickey-Fuller :	49
I.2 Méthode de Box & Jenkins :	51
I.3 Modèles Arch/Garch	55
I.4 Modèles avec résidus ARCH/GARCH	58
I.5 Extension des modèles ARCH/GARCH.....	62
II-Application sur le marché pétrolier	65
II.1 Modélisation du cycle.....	69
II.2 Modélisation de la tendance.....	76
Conclusion	81
CHAPITRE IV : Modélisation en utilisant les Structures par terme des prix.....	82
Introduction.....	83
I-Modèles espace-état et filtre de Kalman.....	84
I.1- Modèles Espace-Etat.....	84
I.2- Filtre de Kalman	87
I.3 Limites du modèles.....	95
II-Application en utilisant le Filtre de Kalman	99
II.1 Modèle sans Convenience Yield.....	100
II.2 Modèle avec le Convenience Yield constant.....	106
II.3 Modèle avec le Convenience Yield stochastique.	113
II.4 Comparaison des modèles	120
Conclusion	123
Conclusion générale	124
Bibliographie	126
Annexe I : Modélisation de la tendance.....	127
Annexe II : Résolution analytique du modèle de Schwartz.....	130
Annexe III : Table de Dickey-Fuller	142

Listes des abréviations

WTI: West Texas Intermediate

OPEP : Office pays exportateurs de pétrole

CBOT: Chicago Board of Trade

CME: Chicago Mercantile Exchange

EM: Expectation-Maximization

Table des Illustrations

Tableau 1 : Effet Samuelson	27
Tableau 2 : Caractéristiques des volatilités des prix	28
Tableau 3 : Comparaison des paramètres.....	44
Tableau 4 : Corrélogramme du rendement du WTI	66
Tableau 5 : Décomposition de Hodrick-Prescott.....	68
Tableau 6 : Test de Dickey-Fuller pour le Modèle 3–Cycle-	69
Tableau 7 : Test de Dickey-Fuller pour le Modèle 2 –Cycle-	70
Tableau 8 : Test de Dickey-Fuller pour le Modèle 1 –cycle-.....	71
Tableau 9 : Corrélogramme du Cycle	72
Tableau 10 : Analyse des résidus du cycle.....	73
Tableau 11 : Test ARCH du Cycle	73
Tableau 12 : Modélisation cycle	74
Tableau 13 : Prévision Cycle	75
Tableau 14 : Test de Dickey-Fuller pour le Modèle 3 - D Tendance -.....	76
Tableau 15 : Test de Dickey-Fuller pour le Modèle 2 - D Tendance -.....	77
Tableau 16 : Test de Dickey-Fuller pour le Modèle 1 - D Tendance -.....	78
Tableau 17 : Prévision de le Tendance	79
Tableau 18 : Comparaison entre WTI Observé et Simulé	80
Tableau 19: MPE & RMSE.....	122
Tableau 20 : Corrélogramme – D Tendance -.....	127
Tableau 21 : Analyse des résidus - D Tendance -	128
Tableau 22 : Test Arch - D Tendance	128
Tableau 23 : Modélisation - D Tendance.....	129

Introduction générale

Les prix des matières premières ont augmenté à un rythme sans précédent au cours des dernières années rendant la modélisation sur matières premières de plus en plus populaires dans de nombreux secteurs comme l'énergie, les métaux et les produits agricoles. D'autre part le développement rapide du marché des produits dérivés sur matières premières a aussi induit une recherche vers toujours plus de précision et cohérence dans la modélisation et l'évaluation de produits dérivés. Les points les plus importants dans la modélisation des matières premières sont la bonne représentation du rendement d'opportunité appelé communément «convenience yield », la prise en compte de la saisonnalité et la capture du phénomène de retour à la moyenne pour les prix des matières premières. Il est à noter que la modélisation des prix peut être induite des prix de la courbe des futures.

Dans cet état esprit, nous allons repartir notre projet en quatre chapitres. Le premier chapitre est un chapitre introductif où nous mettrons l'accent sur l'importance du cycle dans la modélisation. Nous verrons par ailleurs quelques méthodes de décomposition des séries.

Le deuxième chapitre présente deux modèles de structure par terme des Commodités, dans l'objectif de les comparer. Les deux constituent une référence dans le domaine des commodités. Le premier modèle développé par Brennan et Schwartz en 1985 représente la version la plus simple de modèle stochastique appliqué aux marchés de commodités. Dans ce cas, l'unique variable d'état déterminant le comportement des prix à terme est le prix au comptant. Le second est celui de Gabillon. Il utilise le prix au comptant et le prix à long terme comme variables d'état pour modéliser la structure par terme des prix du pétrole brut. Le prix à long terme correspond à un prix pour une échéance de livraison très éloignée. Le choix de cette seconde variable d'état distingue ce modèle à deux facteurs de tous les autres ayant été développés dans le domaine des commodités.

Le troisième chapitre quant à lui présente une approche de modélisation du cours de pétroles par analyse de séries chronologique. Une série chronologique (ou série temporelle) est constituée d'un ensemble d'observations ordonnées d'une variable

statistique économique relevées à intervalles réguliers au cours du temps. Ces variables sont sujets à des phénomènes et des variations dans le temps. C'est là où l'analyse d'une série chronologique revêt une importance particulière. Elle nous permet de comprendre les phénomènes qui déterminent ces variations, de dégager un modèle statistique et de prédire ces variations. Dans ce chapitre nous verrons une partie théorique qui rappelle les principaux résultats découverts jusqu'à présent, et une partie pratique où nous appliquerons cette méthode pour prédire le cours du pétrole WTI.

Les modèles de structure par terme des prix des commodités étudiés au chapitre deux sont employés, en dernière partie de ce projet, pour réaliser des études empiriques sur le marché du pétrole brut, à partir de données du NYMEX pour le contrat WTI. Dans le chapitre quatre, l'hypothèse du convenience yield est testée en comparant les performances de modèles simple au modèle de Schwartz. Ces performances sont appréciées en fonction de la capacité d'un modèle à représenter fidèlement la structure par terme des prix observée.

Pour estimer les paramètres du modèle de Schwartz, compte tenu du caractère inobservable des variables d'état, la méthode retenue est : le filtre de Kalman simple. Les raisons justifiant le choix de cette méthode sont au nombre de deux : pour comparer les résultats obtenus sur le marché du pétrole brut et ceux issus de l'application du modèle, Rares sont les études réalisées à partir de modèles de structure par terme des prix ayant conduit à l'estimation des paramètres de ces modèles. On essayera donc de bien expliquer la démarche d'estimation des paramètres et de reproduire les variables cachées.

CHAPITRE I : Présentation des matières premières

Introduction

Dans ce chapitre introductif de notre projet, nous verrons de manière générale le marché des matières premières. Nous donnerons les chiffres clés de la consommation durant ces dernières années.

Dans la deuxième partie, nous verrons l'importance du cycle économique et du cycle d'affaire ainsi que son importance dans la compréhension et la modélisation des matières premières. Nous introduirons les modèles les plus utilisés dans la décomposition de série en tendance et cycle.

I- Vue d'ensemble

I.1 Un peu d'histoire ...

Les matières premières sont un sous-jacent important en finance, cette importance s'est accrue avec l'émergence du processus de globalisation dans le monde. Les marchés des matières premières telles que le pétrole, les métaux précieux et l'agriculture ont une influence très large sur l'économie mondiale. Le premier marché à terme organisé, moderne a commencé en 1710 à la Bourse de Dojima Rice, à Osaka, au Japon. L'échange a été utilisé pendant près de 300 ans jusqu'à la Seconde Guerre mondiale. Il a ensuite été dissous entièrement en 1939, étant absorbé par le riz Agence gouvernement. Au 19ème siècle, un contrat à terme est apparu aux États-Unis. Des produits agricoles comme le maïs et le bétail, ont été échangés par contrat à terme de Chicago et du Midwest. Le Chicago Board of Trade (CBOT) a été fondé en 1848. Le premier contrat était un contrat à terme sur le maïs, écrit le 13 Mars, 1851. Le Chicago Mercantile Exchange (CME) a été créé en 1874, sous le nom de Chicago Product Exchange, puis réorganisé en 1919 où il a pris son nom actuel. Ce marché initialement des matières premières agricoles s'étend progressivement, couvrant d'autres produits comme le charbon, le pétrole, les métaux précieux, etc. Ces produits sont commercialisés dans différentes bourses partout dans le monde. En termes de volume, le pétrole brut et ses dérivés dépasse un tiers du volume traité.

I.2 Quelques chiffres clés

La croissance de la demande d'énergie sera faible dans l'OCDE, avec des taux inférieurs à 2 % par an au début de la période de projection, et inférieurs à 1% par an à la fin. La reprise économique dans les pays en transition induit également une reprise de la demande d'énergie ;

Toutefois, les progrès continus dans l'amélioration de l'intensité énergétique font que la croissance de la consommation d'énergie reste modérée dans cette région. Inversement, les régions en développement connaissent des taux de croissance de la consommation d'énergie très importants, compris entre +3 et +5 % par an. Avec moins de 3 % par an jusqu'en 2010, la région Afrique du Nord - Moyen-Orient est une

exception, de même que l'Asie du Sud-Est, qui repasse en dessous de ce taux après 2020. Inversement, les taux de croissance dépassent 5 % par an en Chine jusqu'à 2010 (contre 4,4 %/an entre 1985 et 1995).

La consommation de la Chine pourrait dépasser celle de l'Europe de l'Ouest en 2010, et celle de l'Amérique du Nord en 2020. En 2030, quatre régions représenteront chacune une consommation comprise entre 1,2 et 1,7 Gtep — niveau actuel de l'Europe de l'Ouest: l'ex-URSS, l'Amérique latine, l'Asie du Sud et l'Asie du Sud-Est. Sur la période retenue, une évolution majeure va se produire dans la structure régionale de la consommation d'énergie

I.3 Marché pétroliers

Le pétrole a aujourd'hui quatre indices de référence : le WTI, le Brent, le brut de Dubaï et le panier de référence de l'OPEP.

Concentrons-nous sur les deux premiers, les plus représentatifs des prix mondiaux et sur la forte disparité de prix qui les anime depuis peu. En effet, le prix du pétrole connaît une forte disparité entre ces deux indices de référence. Traditionnellement très proches, le Brent se négocie ces jours-ci à près de 15 \$ supplémentaires par rapport au WTI. Ceci est d'autant plus difficile à comprendre si l'on sait que le WTI est de meilleure qualité que le Brent, car plus léger.

I.3.1 Différence entre WTI et Brent

Cette différence de qualité explique d'ailleurs pourquoi le WTI se négociait légèrement au-dessus du Brent par le passé. On rappelle souvent les mêmes raisons pour expliquer cette différence à court et moyen terme :

➤ Facteur physique :

La production de Brent, le pétrole de la mer du Nord, est en baisse structurelle.

➤ Facteur géopolitique :

Le Brent est particulièrement sensible aux incidents qui perturbent la production de brut de qualité équivalente, comme le Bonny Light nigérian. Il a dernièrement bénéficié de l'inquiétude concernant la production de pétroles légers extraits en Algérie et en Lybie ainsi que de la possibilité de fermeture du Canal de Suez ou du pipeline qui traverse l'Égypte.

➤ Facteur financier :

La cotation du Brent ne comprend pas de livraison physique et ne subit donc pas les mêmes contraintes que le pétrole américain. Ceci élimine les risques de contango excessif, (un prix pour une livraison lointaine dans le temps est supérieur au prix pour une livraison rapprochée) ce qui incite les investisseurs « long-only » (ne détenant que des positions d'achats) à privilégier les contrats sur le Brent.

Mais la vraie raison n'est pas là : Le faible coût du WTI comparativement au Brent réside dans le fait que le lieu de livraison des contrats de WTI est totalement saturé. Il s'agit de Cushing, Oklahoma, une ville où convergent de très nombreux pipelines. Depuis qu'une jonction avec des pipelines canadiens a été effectuée, les stocks sont considérables. Il n'y a aujourd'hui plus de capacités de stockage supplémentaires à Cushing, et donc, on donne une prime à l'achat pour inciter les investisseurs à acheter ici et permettre ainsi de ne pas stocker le pétrole qui arrive. Le prix du WTI progresse donc moins vite que le prix du Brent.

Cet écart devrait persister au moins quelques temps, jusqu'à ce que de nouveaux pipelines permettent de transporter le WTI vers des marchés où le pétrole se négocie à des prix plus élevés. On attend aussi la construction de nouvelles capacités de stockage à Cushing. Une différence de prix durable pourrait aussi inciter les négociants et transporteurs à acheminer du pétrole de Cushing vers d'autres marchés. Il serait en effet rentable de prendre livraison à Cushing, de charger le pétrole sur camions jusqu'au Golfe du Mexique, avant de tout transférer dans un tanker, direction l'Europe. Le meilleur exemple de cette idée reste le graphique à droite, qui montre que le prix du Brent et du WTI reste beaucoup plus proche sur des échéances longues, ici avril 2015, ce qui semble indiquer un retour à la normale à moyen terme entre le prix du Brent et du WTI.

II- L'étude de décomposition des séries

Si des avancées notables ont été enregistrées dans la connaissance des propriétés des cours mondiaux des matières premières, de nombreuses zones d'ombre demeurent en ce qui concerne la compréhension des économistes sur les raisons des fluctuations des prix des matières premières. Des analyses empiriques ont mis en évidence la présence de plusieurs faits stylisés sur les cours réels des matières premières :

- ils sont dominés par de longues années de "marasme" ponctuées par des phases transitoires à la hausse (Deaton et Laroque, 1992);

- ils ont une forte tendance à suivre des mouvements à la baisse à long terme (Grilli et Yang, 1988);

- les effets de certains chocs sur les cours des matières premières persistent pendant plusieurs années (Cashin, Liang et McDermott, 1999).


- les cours de certaines matières premières "indépendantes" peuvent évoluer ensemble (Pindyck et Rotemberg, 1990).

L'étude des cycles ainsi que de la tendance ont en effet une grande importance dans l'étude des matières premières. A cet effet l'étude de décomposition des séries nous paraît nécessaire.

II.1 Les moyennes mobiles arithmétiques

Depuis longtemps on a considéré les agrégats économiques comme étant stationnaires autour d'une tendance déterministe. C'est ce qui explique le recours aux moyennes mobiles pour filtrer le cycle des séries. Soit Y_t la série d'une donnée macroéconomique.

$$Y_t = T_t + C_t + \varepsilon_t$$


Tendance Cycle Aléa

La moyenne mobile arithmétique permet de conserver les tendances déterministes, réduit au minimum la composante irrégulière et annule les composantes périodiques. Selon que la période est impaire ou paire, la moyenne mobile d'un agrégat Y_t est donnée par :

$$M(Y_t) = \begin{cases} \frac{1}{2m+1} \sum_{i=-m}^m Y_{t-i} & \text{si la période est impaire } (2m+1) \\ \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2m} \sum_{i=-m}^{m-1} Y_{t-i} + \frac{1}{2m} \sum_{i=-m+1}^m Y_{t-i} \right] & \text{si la période est paire } (2m) \end{cases}$$

Il a néanmoins trois principales limites lorsqu'on applique la moyenne mobile arithmétique pour extraire le cycle d'une série :

- L'application des moyennes mobiles suppose connue la durée du cycle qui est constante sur toute la période.
- L'application d'une moyenne mobile à une série non cyclique, un bruit blanc par exemple peut engendrer une cyclicité fictive.

Les développements récents des séries temporelles ont permis de comprendre que les principaux agrégats macroéconomiques ne sont pas toujours représentés comme des séries stationnaires autour d'une tendance déterministe. Du coup, les mesures empiriques des cycles à partir des moyennes mobiles deviennent parfois caduques pour caractériser le cycle des affaires ; Il apparaît nécessaire de prendre en compte le degré de stationnarité des séries et d'étudier la pertinence des chocs.

II.2 Modèle de Harvey

Harvey a proposé une extension des modèles d'Harrison – Stevens permettant de traiter le cas des séries saisonnières; ces modèles ont été appelés « structurels » (notons cependant qu'il n'y a dans ces formulations aucun aspect explicatif comme dans les modèles macroéconomiques usuels).

La formulation de ce modèle est la suivante :

$$\begin{cases} Y_t = \mu_t + \gamma_t + \psi_t + \xi_t & \xi_t \sim N(0, \sigma_\xi^2) \\ \mu_{t+1} = \mu_t + \beta_t + \eta_t & \eta_t \sim N(0, \sigma_\eta^2) \\ \beta_{t+1} = \beta_t + \zeta_t & \zeta_t \sim N(0, \sigma_\zeta^2) \\ \gamma_{t+1} = - \sum_{j=1}^{s-1} \gamma_{t+1-j} + \omega_t & \omega_t \sim N(0, \sigma_\omega^2) \end{cases}$$

Où $\{\xi_t\}$, $\{\eta_t\}$, $\{\zeta_t\}$, $\{\omega_t\}$ sont des bruits blancs normaux indépendants, γ_t s'interprète comme une composante saisonnière. Le modèle peut donc s'écrire sous la forme :

$$Y_t = \underbrace{\frac{L^2}{(1-L)^2} \zeta_t}_{\text{Tendance}} + \underbrace{\frac{L}{S(L)} \omega_t}_{\text{Saisonnalité}} + \underbrace{\frac{L}{1-L} \eta_t}_{\text{Cycle}} + \underbrace{\psi_t + \xi_t}_{\text{Aléa}}$$

Avec $\gamma_t = \frac{1}{S(L)} \omega_t$;

$$\begin{pmatrix} \psi_t \\ \psi_t^* \end{pmatrix} = \rho \begin{pmatrix} \cos \lambda_c & \sin \lambda_c \\ -\sin \lambda_c & \cos \lambda_c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_{t-1} \\ \psi_{t-1}^* \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \chi_t \\ \chi_t^* \end{pmatrix}$$

Avec $\begin{pmatrix} \chi_t \\ \chi_t^* \end{pmatrix} \sim N(0, \sigma_\psi^2 (1 - \rho^2) I_2)$

Où $0 < \rho \leq 1$ est le facteur d'amortissement. La fréquence est $\lambda_c = \frac{2\pi}{c}$, c est la période du cycle. Les conditions initiales sont $\psi_0 \sim N(0, \sigma_\psi^2)$ et $\psi_0^* \sim N(0, \sigma_\psi^2)$ avec $Cov(\psi_0, \psi_0^*)$

II.3 Le filtre de Hodrick - Prescott

Il s'agit de la méthode la plus répandue pour décomposer les séries en composantes tendancielle et cyclique.

Soit la série chronologique y_t , la tendance g_t , le cycle c_t et un échantillon d'observation $t = 1 \dots T$

$$y_t = \underbrace{g_t}_{\text{Tendance}} + \underbrace{c_t}_{\text{Cycle}}$$

On calcule la composante tendancielle en résolvant le problème de minimisation suivant :

$$\min_{g_t, (t=1..T)} \sum_{t=1}^T (y_t - g_t)^2 + \lambda \sum_{t=2}^{T-1} ((g_{t+1} - g_t) - (g_t - g_{t-1}))^2$$

On minimise la somme des écarts carrés de la tendance par rapport à la série originale, et on pénalise les retournements brusques de la tendance. Cette pénalité est captée par la contrainte, multipliée par le multiplicateur de Lagrange λ .

Dans le cadre du filtre de Hodrick-Prescott λ est considéré comme exogène, on le nomme paramètre de lissage. Il est clair que si la valeur de λ augmente, on pénalise davantage les retournements brusques de la tendance.

Dans le cas extrême de $\lambda \rightarrow 0$, il n'y a aucune pénalité, et la façon de minimiser la fonction objective est de choisir $g_t = y_t \forall t$. Dans ce cas, il ne reste plus de composante cyclique.

Dans l'autre cas extrême de $\lambda \rightarrow \infty$, tout ce qui compte c'est de lisser la tendance, et la façon de minimiser la fonction est de choisir $(g_{t+1} - g_t) = (g_t - g_{t-1}) \forall t$, autrement dit de choisir une tendance qui est une ligne droite.

Le choix habituel de λ se fait comme suit :

- $\lambda = 100 * (p^2)$ avec p : nombre de période par année

Exemple :

Pour des données semestrielles : $p = 2$ donc $\lambda = 400$

Pour des données trimestrielles : $p = 4$ donc $\lambda = 1600$

Pour des données mensuelles : $p = 12$ donc $\lambda = 14400$

Pour des données journalières (ouvrable) : $p = 251$ donc $\lambda = 6812100$

A cause de la présence d'observations manquantes, les conditions de premier ordre pour ce problème sont :

- $g_1: -2(y_1 - g_1) + 2\lambda((g_3 - g_2) - (g_2 - g_1)) = 0$;
- $g_2: -2(y_2 - g_2) - 4\lambda((g_3 - g_2) - (g_2 - g_1)) + 2\lambda((g_4 - g_3) - (g_3 - g_2)) = 0$;
- $g_i (i = 3 \dots T - 2): -2(y_i - g_i) + 2\lambda((g_i - g_{i-1}) - (g_{i-1} - g_{i-2})) - 4\lambda((g_{i+1} - g_i) - (g_i - g_{i-1})) + 2\lambda((g_{i+2} - g_{i+1}) - (g_{i+1} - g_i)) = 0$;
- $g_{T-1}: -2(y_{T-1} - g_{T-1}) + 2\lambda((g_{T-1} - g_{T-2}) - (g_{T-2} - g_{T-3})) - 4\lambda((g_T - g_{T-1}) - (g_{T-1} - g_{T-2})) = 0$;

La résolution de ce problème nécessite l'introduction d'une matrice F de sorte que

$$Y = (\lambda F + I_T) * G$$

Avec :

- $Y = [Y_1, Y_2, Y_3, \dots, Y_T]'$ ($T \times 1$)
- $G = [G_1, G_2, G_3, \dots, G_T]'$ ($T \times 1$)
- $I_T = \text{diag}(1, 1, 1, \dots, 1)$ ($T \times T$)

- $F(T \times T)$ est défini comme suit :

$$\begin{array}{cccccc|cccccc}
 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 -2 & 5 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & 0 & & & & & \\
 0 & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & & & & & \\
 & 0 & 1 & -4 & 6 & -4 & 0 & & & & \\
 & & 0 & 1 & -4 & 6 & 0 & 0 & & & \\
 & & & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & & \\
 & & & & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & \\
 & & & & & 0 & 6 & -4 & 1 & 0 & 0 \\
 & & & & & & -4 & 6 & -4 & 1 & 0 \\
 & & & & & & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 5 & -2 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1
 \end{array}$$

La résolution de système conduit à l'inversion de la matrice $\lambda F + I_T$ de sorte qu'en trouve :

- ❖ La composante Tendancielle :

$$G = (\lambda F + I_T)^{-1} * Y$$

- ❖ La composante Cyclique :

$$C = Y - G$$

Conclusion

Dans ce chapitre composé de deux parties, nous nous sommes intéressés aux matières premières de manière générale et nous avons mis l'accent sur le marché pétrolier. Le cycle des affaires étant très important car il constitue un caractère fondamentales des matières premières, nous avons présenté quelques modèles de décomposition de séries. Le filtre de Hodrick-Prescott nous paraît être le plus intéressant, il sera retenu pour les chapitres à suivre.

Nous verrons dans le chapitre suivant les spécificités du marché des matières premières et plus précisément ceux des commodités (matière stockable). Nous définirons le cout de stockage, le convenience yield, et nous verrons la manière dont il est modélisé.

*CHAPITRE II : Modélisation
des commodités avec le
Convenience Yield*

Introduction

Contrairement à d'autres actifs classiques, les matières premières montrent des caractéristiques spécifiques : importance du convenience yield, de la saisonnalité et du retour à la moyenne. Le concept clé est ici convenience yield. Celui-ci dicte la relation entre les prix futurs et les prix au comptant. Il y a beaucoup de modèles sur des produits de base spécifiques qui mettent l'accent sur ces concepts, citons les principaux : Gibson and Schwartz, Brennan, Gabillon. A présent les modèles de Gibson et Schwartz et de Gabillon sont les plus populaires chez les chercheurs et les praticiens du marché, non seulement parce que leur interprétation en terme de rendement de commodité ou de prix à long terme, mais aussi de par leur simplicité et leur clarté.

Dans la première partie nous ferons une introduction générale sur le marché des structures à terme, nous donnerons les définitions clés et les résultats essentiels.

Nous introduirons dans la deuxième partie le convenience yield ainsi que sa formulation mathématique et nous démontrerons l'équivalence entre les deux modèles les plus célèbres de modélisation à savoir celui de Schwartz-Brennan et de Gabillon dans le troisième chapitre.

I- Présentation générale des produits à terme

I.1 Prix Forward et Futures

Un contrat future (ou forward) permet l'achat d'un actif (action, commodité...) à une date future (la maturité du contrat) et à un prix convenu dès la date de signature du contrat (le prix future).

Les contrats futures sont essentiellement utilisés pour se protéger contre les fluctuations des cours d'un actif, en fixant dès aujourd'hui un prix futur.

On distingue :

- *Les contrats forward , contrat de gré à gré individualisés pour lesquels il existe un risque de contrepartie,*
- *Les contrats futures, anonymes et standardisés, pour lesquels une chambre de compensation protège contre le risque de contrepartie.*

La différence fondamentale entre les deux types de contrats est que le détenteur d'un contrat future verra jour par jour son compte être débité ou crédité de la variation quotidienne du prix forward (on dit que le future est « marked to market ») par le biais d'appel à la marge. Par contre le détenteur d'un contrat forward ne réalisera de gains ou de pertes qu'à la maturité du contrat, les variations quotidiennes ne représentant pour lui que des pertes ou des gains latents.

Tous les contrats à terme considérés ici seront désormais des contrats futures, continûment « marked to market »

I.2 Effet Samuelson

La caractéristique la plus importante de la dynamique de la courbe des prix des matières premières réside probablement dans la différence entre le comportement du prix à court terme : prix spot et celui à long terme : prix future. Les premiers connaissent des fluctuations erratiques, de grande ampleur, alors que les seconds sont relativement stables. Ceci se traduit par une structure décroissante des volatilités le long de la courbe des prix, et par une corrélation entre le prix à terme rapproché et les autres prix qui déclinent avec la maturité. Le tableau suivant illustre le phénomène pour le prix du pétrole WTI, sur une période de 10 ans. IL montre que, quelle que soit l'année retenue, les corrélations entre les prix à terme décroissent régulièrement au fur et à mesure que la maturité augmente.

Corrélations	1-2 mois	1-3 mois	1-4 mois	1-5 mois	1-6 mois	1-7 mois
2013	0,99932	0,99672	0,98997	0,97856	0,96479	0,95197
2012	0,99986	0,99956	0,99914	0,99864	0,99812	0,99755
2011	0,99565	0,98540	0,97604	0,96781	0,96100	0,95489
2010	0,99799	0,98415	0,97506	0,96854	0,96281	0,95811
2009	0,99645	0,99195	0,98882	0,98649	0,98467	0,98331
2008	0,99905	0,99800	0,99675	0,99540	0,99400	0,99259
2007	0,99847	0,99519	0,99132	0,98724	0,98310	0,97905
2006	0,99701	0,99447	0,99174	0,98894	0,98592	0,98267
2005	0,99487	0,99108	0,98758	0,98430	0,98123	0,97856
2004	0,94875	0,95109	0,95232	0,95293	0,95330	0,95326
2003	0,65638	0,66894	0,67271	0,67111	0,66656	0,65633

Tableau 1 : Effet Samuelson

Ce phénomène de décroissance de corrélations est souvent qualifié d'« effet Samuelson ». Intuitivement, il est dû au fait qu'un choc affecte d'autant plus intensément un prix à terme que la maturité du contrat considéré est faible. En effet, lorsqu'un contrat à terme parvient à expiration, du fait de la convergence entre le prix au comptant et le prix à terme, le prix de ce contrat réagit beaucoup plus fortement aux chocs informationnels. Ces fluctuations, influençant avant tout la partie à court terme de la courbe, sont dues au marché physique et à des modifications de l'offre et de la demande.

Plusieurs études ont montré que l'effet Samuelson est une fonction de coûts de stockage. Plus précisément, lorsque le coût de stockage est élevé, les chocs se transmettent assez faiblement par le biais des stocks. Par conséquent, la volatilité des prix à terme diminue rapidement avec la maturité. Enfin l'effet Samuelson peut parfois être violé sur les maturités les plus proches lorsque les stocks sont abondants. Dans ce cas en effet, les volatilités des prix à terme peuvent initialement augmenter avec la maturité du contrat, car aucune rupture de stocks n'est envisageable à court terme.

I.3 Volatilité des prix des matières premières

L'objectif de cette partie est de mieux comprendre l'évolution de la volatilité sur le marché du pétrole. Pour ce faire nous avons calculé les volatilités pour chaque maturité variant de 1 à 7 mois, et ceux pour une période s'étalent de 2004 à 2012. Le tableau suivant résume l'information trouvée.

Corrélations	1 mois	2 mois	3 mois	4 mois	5 mois	6 mois	7 mois
2012	7,68059	7,68700	7,67674	7,63454	7,55432	7,45186	7,35140
2011	8,07678	8,01059	7,94832	7,90291	7,84373	7,78073	7,70248
2010	5,18835	5,06330	4,95999	4,88365	4,79340	4,70609	4,62947
2009	13,36145	12,39201	11,86737	11,56814	11,35262	11,18939	11,05702
2008	28,47816	27,86983	27,43164	27,06085	26,72816	26,41664	26,12179
2007	12,86666	12,04137	11,36972	10,82419	10,36300	9,95716	9,59622
2006	5,55706	5,42671	5,29796	5,18688	5,08809	4,98900	4,88598
2005	6,17528	6,00204	6,07292	6,20233	6,35835	6,50450	6,62152
2004	5,80345	5,85676	5,92619	5,94043	5,91914	5,88409	5,82902

Tableau 2 : Caractéristiques des volatilités des prix

D'après le tableau on remarque que de façon générale la volatilité a augmenté ces 8 dernières années. En 2008 la volatilité a atteint son seuil maximal et cela est dû évidemment à la crise économique à savoir celle des subprimes qui a secoué le monde. Elle s'est atténué au fil des années, jusqu'en 2011 où on remarque qu'elle augmente dû à la crise de la dette européenne spécialement celle de la Grèce.

Une observation plus précise de ces résultats indique que cet accroissement de volatilité n'affecte pas certaines maturités plus que d'autre. Par conséquent, il nous est impossible de savoir si cet accroissement de volatilité est plutôt imputable à une hausse

de volatilité sur le marché physique ou, au contraire, à une augmentation indépendante de la volatilité sur le marché à terme.

I.4 Cash & Carry

Prenons le cas d'une commodité stockable, généralement cela concerne toutes les matières premières excepté le cas de l'électricité.

Considérons le cas d'un vendeur d'un contrat future de maturité T . Notons $C_{t,T}$ le coût de stockage associé à la détention d'une unité de matière première entre t et T . L'opération de couverture consistera donc à acheter la matière en t en empruntant $S_t + C_{t,T}$ à la banque, à la stocker jusqu'à T et à la livrer en T au prix $F_{t,T}$. Ainsi la somme touchée en T vaudra $F_{t,T} - (S_t + C_{t,T})e^{r(T-t)}$.

Si cette somme est strictement positive, le vendeur du future aura réalisé un profit sans risque, on parle alors du « **cash & carry** » : On en déduit donc que $F_{t,T} \geq (S_t + C_{t,T})e^{r(T-t)}$.

Envisageons maintenant le cas où $F_{t,T} < (S_t + C_{t,T})e^{r(T-t)}$. L'opération susceptible de créer une situation d'arbitrage serait le « **reverse cash & carry** » : achat d'un future de maturité T , vente de la matière première en t , placement de la somme $S_t + C_{t,T}$ au taux sans risque r , achat physique de la matière première en T au prix $F_{t,T}$.

Cette opération de reverse cash & carry est automatique dans le cas des actifs non physiques grâce à la possibilité de vendre de tels actifs à découvert. La vente (spot) à découvert de matières premières est impossible (on ne peut pas vendre du pétrole qu'on ne détient pas physiquement). L'opération de reverse cash & carry ne peut donc être réalisée que par des détenteurs de stocks physiques de la matière première, par exemple les producteurs.

II- Convenience Yield

II.1 Définition

Les gens peuvent détenir leurs commodités pour des raisons économiques. Dans ce qui suit nous feront abstraction du marché de l'électricité et nous se focaliseront sur les commodités stockable. Nous définirons alors le concept du convenience yield ou le rendement d'opportunité qui est plus ou moins lié à celui du stockage.

*Pour bien cerner les relations existant entre le prix spot et celui à terme : futures dans le marché des matières premières, la théorie de stockage s'intéresse aux raisons expliquant la détention de stocks physiques. L'analyse des opérations d'arbitrage entre le marché physique et le marché à terme permet de comprendre les mécanismes à l'origine de situations de **backwardation** - courbe décroissante des futures par maturité - et de **contango** - courbe croissante des futures par maturité - ; nous développerons par suite ces deux notions.*

D'autre part et d'après ce qui précède à savoir les équations mettant en relation le prix des futures à celui du spot. Si le prix future correspond au prix spot augmenté de coûts de stockage, comment expliquer que parfois, le prix du future est inférieur à celui du spot ? Le concept de convenience yield apporte une réponse à cette question

On distingue alors deux effets majeurs basés sur la théorie de stockage :

- 1- La valeur temporelle ajoutée de la détention des commodités : les agents vont vendre lorsque les prix baissent, et acheter lorsque les prix augmentent.*
- 2- Le cout de stockage : incluant la maintenance de la marchandise, le local et tout ce qui se relatent au cout de production, comme le raffinement.*

Le convenience yield est alors considéré comme l'effet total de ses deux aspects, il reflète généralement la valeur économique de la détention des commodités.

Le convenience yield, ou l'avantage procuré par la détention de matières premières, est grand au moment où les matières premières sont plus consommées. Prenons l'exemple du gaz, il est plus consommé en hiver qu'en été ; Les acteurs économiques n'ont donc pas

intérêt à vendre leurs stocks, pour en tirer profit des différentiels de prix hiver – été, c'est ce que on a appelé le cash & carry.

Ces définitions sont relatives aux aspects économiques, passons maintenant à la formulation mathématique du convenience yield.

Définition :

Notons $F_{t,T}$ le prix futures d'une commodité à l'instant t arrivant à échéance en T . Soit S_t le prix spot à l'instant t , r_t le taux sans risque. Nous définissons alors le convenience yield y_t satisfaisant la condition de non-arbitrage comme suit :

$$F_{t,T} = S_t e^{\int_t^T (r_s - y_s) ds}$$

Ce qui équivaut à :

$$y_s = r_s - \frac{d}{ds} \left(\log \frac{F_{t,s}}{S_t} \right)$$

Avec $t < s < T$.

La définition du convenience yield d'écrite au-dessus suppose que les prix et les futures sont continus, c'est-à-dire qu'ils s'échangent sur le marché de façon continue. Or en réalité les futures ne se tradent que sur des durées bien définies. De ce fait on définit le convenience yield en temps discret :

Soit $t = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = T$. Notons F_{t,t_i} le prix futures à la date t de maturité t_i . Soit S_t le prix spot à la date t . Notons $D(t_i, t_j)$ un facteur de réduction entre t_i et t_j .

Le convenience yield y_s est alors donnée par l'équation suivante :

$$y_s = \frac{1}{t_{i+1} - t_i} \log \left(\frac{F_{t,t_i}}{F_{t,t_{i+1}}} \frac{1}{D(t_i, t_{i+1})} \right); \quad t_i \leq s < t_{i+1}$$
$$D(t_i, t_{i+1}) = e^{-\int_{t_i}^{t_{i+1}} r_s ds}$$

Cette équation vérifie en effet la condition de non-arbitrage

II.2 Convenience yield vs dividende

Le convenience yield ou le rendement d'opportunité est la détention physique d'une matière première qui confère à son bénéficiaire un avantage qui s'apparente au versement des dividendes pour le détenteur d'une action. Cet avantage est d'autant plus important que le niveau de stock est faible, comme nous l'avons vu précédemment.

Il peut être modélisé par un taux (semblable au taux de dividende) Formellement, on peut écrire :

$$F_{t,T} = S_t e^{\int_t^T (r_s - d_s) ds}$$

Où d_t est un taux de dividende global égal à la somme du « taux d'opportunité de détention de la matière première » et du taux de dividende négatif associé au coût de stockage.

La différence avec les dividendes versés au détenteur d'une action est que les dividendes sont déterministes alors que le convenience yield est stochastique car dépendant des conditions de marché, en particulier du niveau de stock.

II.3 Backwardation vs Contango

Reprenons l'expression du convenience yield décrite précédemment :

$$F_{t,T} = S_t e^{\int_t^T (r_s - y_s) ds}$$

Le terme $\int_t^T (r_s - y_s) ds$ peut être positif (respectivement négatif). On nomme ces deux cas de figure : **contango** (respectivement **backwardation**) ;

- Contango ou « report » veut dire que $\int_t^T (r_s - y_s) ds$ est positif : ce cas se produit généralement quand le niveau de stock est élevé, ce qui correspond à un prix spot S_t faible et inférieur à celui du future $F_{t,T}$. La structure de la courbe des futures devient alors une fonction croissante
- Backwardation ou « déport » veut dire que $\int_t^T (r_s - y_s) ds$ est négatif. Dans ce cas le prix future $F_{t,T}$ est inférieur à celui du spot S_t . Cela se produit quand le taux d'intérêt est faible, et le convenience yield est grand. Par exemple lorsque la guerre du Golfe a vu le jour, les niveaux de stock étaient faibles, les producteurs ne veulent pas courir le risque d'épuiser le stock et interrompre leur activité de production. Par ailleurs, ils peuvent avoir intérêt à garder leur stock pour tirer profit d'une éventuelle pénurie qui entraînerait une flambée des prix. Ce phénomène est particulièrement important pour les marchés pétroliers où les situations de backwardation sont très souvent rencontrées. La courbe des futures est alors une fonction décroissante

Ci-dessous deux graphes montrant la forme des courbes de futures en situations de backwardation et celle en contango, ainsi que les stratégies de « cash & carry ».

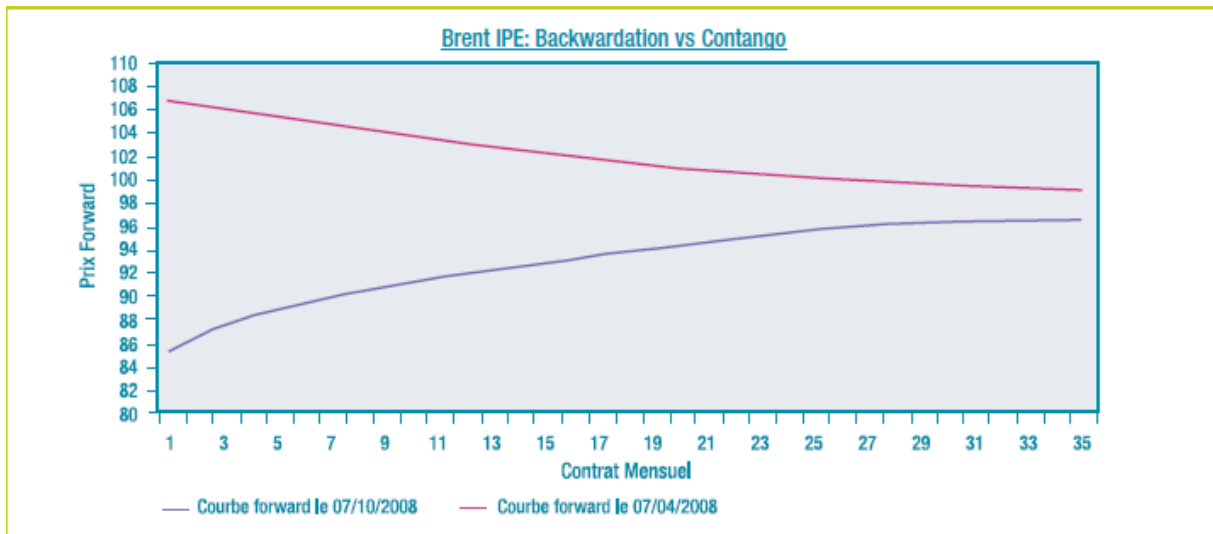


Figure 1 : Backwardation vs Contango

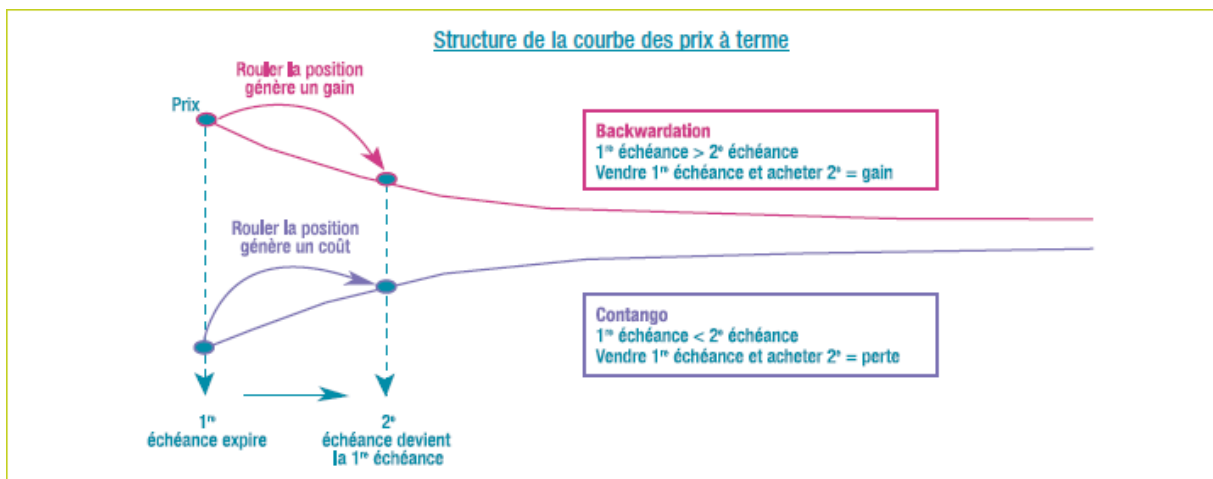


Figure 2 : stratégie de gain et de perte en backwardation et en contango

Le graphe ci-dessous montre la structure des prix par maturité pour le WTI, qui est négocié sur le Nexmex pour une période s'étalant du 22 avril 2013 au 1 mai 2013 et pour des maturités de 1 à 12 mois.

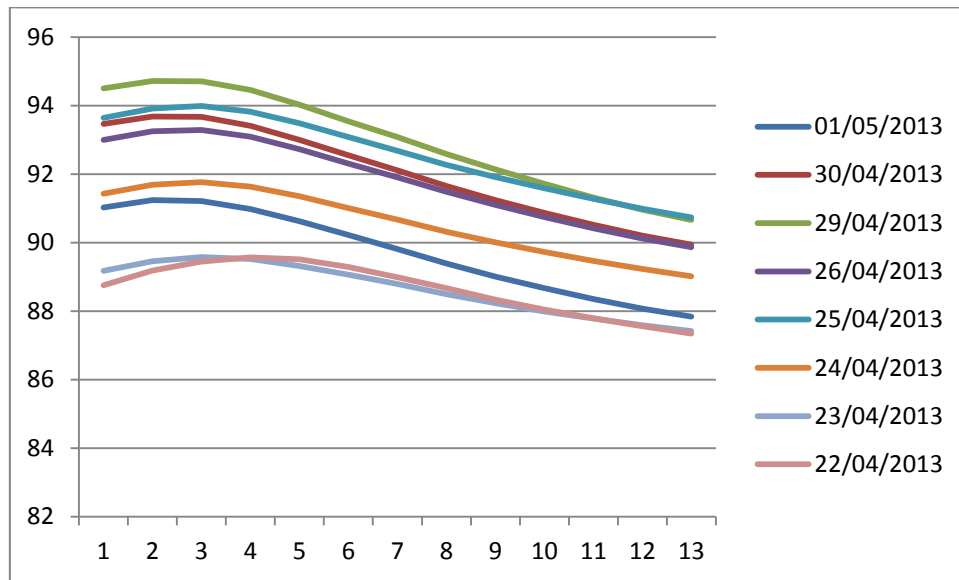


Figure 3 : structure des prix par maturité

Par rapport à d'autres marchés de matières premières, celui de pétrole présente généralement la caractéristique d'être en Backwardation. Cette caractéristique explique que le marché du pétrole ait été intensivement utilisé pour tester la théorie du Backwardation. Or on constate que pour des maturités courtes (inférieure à 3 mois) les prix sont en contango. Cela pourrai s'expliquer par les situations géopolitiques qui règnent sur le monde diplomatique, ou par les résultats de croissance de la chine qui n'étaient pas à la hauteur des attentes.

III- Modèle à deux facteurs

III.1 Modèle de Schwartz-Brennan

Le modèle de Schwartz-Brennan est basé sur un modèle à deux facteurs de diffusions. Le prix spot S_t est supposé suivre un modèle log-normale avec un drift stochastique. Schwartz-Brennan suppose que le convenience yield δ_t , suit un processus de retour à la moyenne. De ce fait les équations s'écrivent sous la probabilité risque-neutre sous forme :

$$\frac{dS}{S} = (r - \delta)dt + \sigma_1 dz_1$$
$$d\delta = (k(\alpha - \delta) - \lambda\sigma_2)dt + \sigma_2 dz_2$$

Avec :

r est le taux d'intérêt sans risque

σ_1 est la volatilité du prix spot

dz_1 est un incrément du mouvement brownien standard associé à S

α est la valeur moyenne à long terme du convenience yield

k est la force de rappel agissant sur le convenience yield

σ_2 est la volatilité du convenience yield

dz_2 est un incrément du mouvement brownien standard associé à δ

z_1 et z_2 sont deux mouvements Brownien, tel que $\text{Corr}(z_1, z_2) = \rho$

III.2 Modèle de Gabillon

Gabillon a créé ce modèle pour pouvoir faire intervenir la tendance ou le prix à long terme. Dans son papier il argumente que l'utilisation d'un modèle à deux facteurs de diffusion est plus profitable pour capturer l'effet à court et à long terme. Il stipule que le prix à long terme pourra influencer sur le convenience yield. Comme pour Schwartz il assume que le prix spot S_t suit un modèle log-normale avec un drift stochastique. Contrairement à Schwartz qui considère que convenience yield suit un processus de retour à la moyenne, Gabillon lui considère que le convenience yield dépend du prix à long terme, qui est lui-même stochastique. Le prix à long terme est noté L qui suit un modèle log-normale.

Les équations s'écrivent alors sous la forme :

$$\frac{dS}{S} = k \ln \frac{L}{S} dt + \sigma_S dz_1$$
$$\frac{dL}{L} = \mu_L dt + \sigma_L dz_2$$

Avec :

k est la force de rappel agissant sur les déviations du prix spot

σ_S est la volatilité des variation de prix spot

dz_1 est un incrément du mouvement brownien standard associé à S

μ_L est la tendance à long terme

σ_L est la volatilité des variation de prix à long terme

dz_2 est un incrément du mouvement brownien standard associé à L

z_1 et z_2 sont deux mouvements Brownien, tel que $\text{Corr}(z_1, z_2) = \rho$

III.3 Equivalence entre le modèle de Schwartz-Brennan et celui de Gabillon

L'idée de cette partie est de pouvoir trouver une équivalence entre les deux modèles. Pour ce faire nous allons essayer de trouver une équivalence entre le modèle de Scwhartz-Brennan et un troisième modèle qui lui-même sera équivalent à celui de Gabillon. Donc par transitivité les deux modèles désirés seront équivalents.

La signification de cette équivalence est de pouvoir trouver une relation proche entre deux des modèles les plus populaires en pricing de produits dérivés stockable. Par conséquent ces deux modèles sont mathématiquement équivalents, ce qui permet aux traders de choisir l'un deux. Le choix d'un des modèle se fait arbitrairement car généralement les agents comprennent mieux le sens économique des paramètres d'un modèle que de l'autre, ce qui leurs garantis une meilleure compréhension et par suite une meilleure utilisation.

Dans son papier Schwartz a introduit le troisième modèle nommé **Short term/Long term** modèle. La définition du modèle est comme suit :

■ **Short term/Long term**

Notons S_t le prix spot d'une commodité à la date t . On définit alors :

$$\log(S_t) = \chi_t + \xi_t$$

χ_t est la variation à court terme du prix au comptant et ξ_t est le niveau d'équilibre à long terme.

Ces deux facteurs ne sont pas directement observables, mais ils sont estimés à partir de prix à terme de différentes maturités. Plus précisément, ce sont les mouvements des prix des contrats ayant une échéance éloignée qui apportent une information sur le niveau d'équilibre à long terme, tandis que c'est les différences entre le prix à court et à long terme qui fournissent l'information relative aux variations à court terme.

Le premier facteur a un comportement de retour vers la valeur moyenne, tandis que le second suit un mouvement brownien géométrique

$$d\chi_t = -\kappa\chi_t dt + \sigma_\chi dz_\chi$$

$$d\xi_t = \mu_\xi dt + \sigma_\xi dz_\xi$$

Avec :

κ est la force de rappel agissant sur les déviations à court terme

σ_χ est la volatilité des variations de prix à court terme

dz_χ est un incrément du mouvement brownien standard associé à χ_t

μ_ξ est la tendance de niveau de prix d'équilibre

σ_ξ est la volatilité des variations de prix d'équilibre

dz_ξ est un incrément du mouvement brownien standard associé à ξ_t

z_χ et z_ξ sont deux mouvements Brownien, tel que $\text{Corr}(z_\chi, z_\xi) = \rho$

➤ Equivalence entre le modèle de Schwartz-Brennan et le Short-term/Long-term modèle

La première étape est de prouver l'équivalence entre le modèle Short-term/Long-term et celui de Schwartz-Brennan. Reprenons le modèle de Schwartz-Brennan défini précédemment.

$$\frac{dS}{S} = (r - \delta)dt + \sigma_1 dz_1$$

$$d\delta = (k(\alpha - \delta) - \lambda\sigma_2)dt + \sigma_2 dz_2$$

Notons $X_t = \log S_t$, la dynamique des prix est alors

$$dX_t = \left(\mu - \delta_t - \frac{1}{2} \sigma_S^2 \right) dt + \sigma_S dz_1$$

En utilisant le changement de variable suivant :

$$\begin{aligned} \chi_t &= \frac{1}{\kappa} (\delta_t - \alpha) \\ \Rightarrow d\delta_t &= (\alpha - \delta_t)dt + \kappa\sigma_\chi dz_\chi \end{aligned}$$

Et le changement de variable suivant

$$\begin{aligned} \xi_t &= \log S - \frac{1}{\kappa} (\delta_t - \alpha) \\ \Rightarrow dX_t &= (\mu_\chi + \alpha - \delta_t)dt + \sigma_\chi dz_\chi + \sigma_\xi dz_\xi \end{aligned}$$

En assumant que $z_\chi = \rho z_\xi + \sqrt{1 - \rho^2} z'_\xi$ tel que z'_ξ est indépendant de z_ξ

$$\Rightarrow d\sigma_\xi dz_\xi + \sigma_\chi dz_\chi = (\sigma_\xi + \rho\sigma_\chi)dz_\xi + \sqrt{1 - \rho^2}\sigma_\chi dz'_\xi$$

On note alors

$$\|\sigma\|_t^2 = \int_0^t ((\sigma_\xi + \rho\sigma_\chi)^2 + (1 - \rho^2)\sigma_\chi^2) ds$$

Puis

$$\|\sigma\|_t = \sigma_1$$

$$z_1(t) = \int_0^t \frac{\sigma_\xi + \rho\sigma_\chi}{\|\sigma\|_t} dz_\xi + \frac{\sqrt{1 - \rho^2}\sigma_\chi}{\|\sigma\|_t} dz'_\xi$$

D'après le théorème de Levy $z_1(t)$ est un mouvement Brownien donc les deux relations suivantes sont équivalentes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \chi_t = \frac{1}{\kappa}(\delta_t - \alpha) \\ = (\alpha - \delta_t)dt + \frac{\sigma_2}{\kappa} dz_2 \\ = -\kappa\chi_t dt + \frac{\sigma_2}{\kappa} dz_2 \end{array} \right.$$

Et

$$\begin{aligned} \xi_t &= \log S - \frac{1}{\kappa}(\delta_t - \alpha) \\ &= \left(\mu - \delta_t - \frac{1}{2}\sigma_1^2 \right) dt + \sigma_1 dz_1 - (\alpha - \delta_t)dt - \frac{\sigma_2}{\kappa} dz_2 \\ &= \left(\mu - \alpha - \frac{1}{2}\sigma_1^2 \right) dt + \sigma_1 dz_1 - \frac{\sigma_2}{\kappa} dz_2 \end{aligned}$$

Nous avons éliminé dans les deux modèles le taux d'intérêt. Sous l'hypothèse de non arbitrage, le terme en drift devrait être égal à $\int_0^t r_s ds$. En comparant ces deux formes avec celles du Short term / Long term modèle, on en déduit que les deux modèles sont équivalents.

➤ Equivalence entre le modèle de Gabillon et le Short-term/Long-term modèle

La deuxième étape consiste à prouver l'équivalence entre le modèle Short-term/Long-term et celui de Gabillon. Reprenons le modèle de Gabillon défini précédemment :

$$\frac{dS}{S} = k \ln \frac{L}{S} dt + \sigma_S dz_1$$

$$\frac{dL}{L} = \mu_L dt + \sigma_L dz_2$$

En s'inspirant de la démarche précédente, on peut de même démontrer l'équivalence entre le modèle de Gabillon et celui de Short-term/Long-term modèle. Pour ce faire on va utiliser le changement de variables suivants :

$$\chi_t = \text{Log } S - \text{Log } L$$

Donc

$$\begin{aligned} \Rightarrow d\chi_t &= d\text{Log } S - d\text{Log } L \\ &= -\kappa \chi_t dt - \sigma_S dW_1 + \sigma_L dW_2 \end{aligned}$$

Et le changement de variable

$$\xi_t = \log L$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow d\xi_t &= d\log L \\ &= \left(\mu_L - \frac{1}{2} \sigma_L^2 \right) dt + \sigma_L dW_2 \end{aligned}$$

➤ Equivalence entre Schwartz-Brennan et Gabillon

Maintenant on va mettre les parties ensemble pour pouvoir trouver l'équivalence entre Schwartz-Brennan et Gabillon. On peut trouver l'équivalence en utilisant les changements de variables suivants :

$$\log S = X_t$$

$$\log L = X_t - \frac{1}{\kappa}(\delta_t - \alpha)$$

Le tableau suivant résume l'équivalence entre les deux modèles ainsi que la signification de chaque paramètre.

Modèle de Gabillon		
Symboles	Description	Equivalent dans le modèle de Schwartz
κ	force de rappel à court terme	κ
σ_S	Volatilité à court terme	$\frac{\sigma_2}{\kappa}$
μ_L	Tendance à long terme	$\mu - \alpha - \frac{1}{2}\sigma_1^2$
σ_L	Volatilité à long terme	$(\sigma_1^2 + \frac{\sigma_2^2}{\kappa^2} - 2\rho\frac{\sigma_1\sigma_2}{\kappa})^{1/2}$
ρ	Corrélation des incréments	$(\rho\sigma_1 - \frac{\sigma_2}{\kappa})(\sigma_1^2 + \frac{\sigma_2^2}{\kappa^2} - 2\rho\frac{\sigma_1\sigma_2}{\kappa})^{1/2}$

Tableau 3 : Comparaison des paramètres

Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté le marché à terme et toutes ses caractéristiques.

Nous avons vu en première partie les notions fondamentales à la compréhension du marché à terme, ainsi que ses spécificités tels que l'effet Samuelson.

Dans la seconde partie, nous nous sommes intéressés à un concept propre aux commodités à savoir le convenience yield, qui est relative aux coûts de stockage et à la détention de la matière première ; Nous avons vu quelques stratégies comme le carry & cash pour la gestion d'un portefeuille.

Dans la troisième partie, nous avons vu qu'il y a équivalence entre les modèles de Schwartz-Brennan et Gabillon. Cette conclusion n'est pas surprenante si l'on considère que dans le modèle de Gibson et Schwartz le convenience yield apparaît comme un terme de dérive stochastique qui n'est pas loin d'un comportement à long terme comme dans le modèle de Gabillon.

*CHAPITRE III : Modélisation
en utilisant les séries
temporelles*

Introduction

Dans ce chapitre nous allons introduire la modélisation en utilisant les séries chronologiques ou temporelles.

Dans la première partie de chapitre, nous allons donner les fondamentaux de la modélisation en utilisant les séries temporelles. En effet nous verrons la méthode de Dickey-Fuller pour rendre une série stationnaire ; Ensuite nous définirons l'une des méthodes les plus célèbres de modélisation à savoir celle de Box & Jenkins. Finalement nous verrons des obstacles dans la modélisation précédente ce qui nous amènera à introduire les modèles ARCH et GARCH dans la modélisation des résidus.

Après une partie théorique, nous verrons dans la deuxième partie, une application aux prix des matières premières et plus précisément au prix du pétrole WTI. Cette modélisation ne pouvant être réalisable par la méthode de Box & Jenkins, nous nous sommes vu obligés de décomposer la série en utilisant le filtre de Hodrick-Prescott et de modéliser chaque composante à part pour ensuite retrouver la série initiale.

I-Modélisation des séries temporelles

Dans cette première partie, nous verrons les étapes d'une modélisation d'une série temporelles. De la stationnarité de la série à la modélisation en utilisant les modèles les plus complexes, nous détaillerons chaque processus de la modélisation.

Nous verrons le test de Dickey-Fuller ainsi que le modèle de Box & Jenkins pour la modélisation de série stationnaire. Finalement nous verrons les modèles avec résidus ARCH-GARCH et leurs extensions. Evidemment nous détaillerons toutes ces étapes en donnant le plus d'explication possible.

Or avant de commencer à modéliser la série, il faut s'assurer que la série est bien stationnaire.

Définition :

Une série stationnaire a fondamentalement trois caractéristiques :

dans le cas d'une série stationnaire y_t ($t=1,2,\dots,T$) :

$$-E(y_t) = \mu \quad \text{Pour tout } t$$

$$-var(y_t) = E(y_t - \mu)^2 = \gamma_0 \quad \text{Pour tout } t$$

$$-cov(y_t, y_{t-j}) = E(y_t - \mu, y_{t-j} - \mu) = \gamma_j \quad j = 1, 2, 3, \dots$$

$$-corr(y_t, y_{t-j}) = \frac{\gamma_j}{\gamma_0} = \rho_j \quad j = 1, 2, 3, \dots$$

Pratiquement pour déterminer si la série est stationnaire ou non, on a recours soit au graphique ou au corrélogramme de la série soit en utilisant des tests ; Le test le plus utilisé est celui à racines unitaires Dickey – Fuller augmenté.

I.1 Test de Dickey-Fuller :

Les trois modèles utilisés pour effectuer le test sont les suivants :

$$\text{Modele 3 : } \Delta X_t = \rho X_{t-1} + \alpha + \beta t + a_t$$

$$\text{Modele 2 : } \Delta X_t = \rho X_{t-1} + \alpha + a_t .$$

$$\text{Modele 1 : } \Delta X_t = \rho X_{t-1} + a_t .$$

$$a_t \text{ i.i.d. } \sim BB(0, \sigma^2)$$

On effectue les tests suivants : (Test de Racine unitaire)

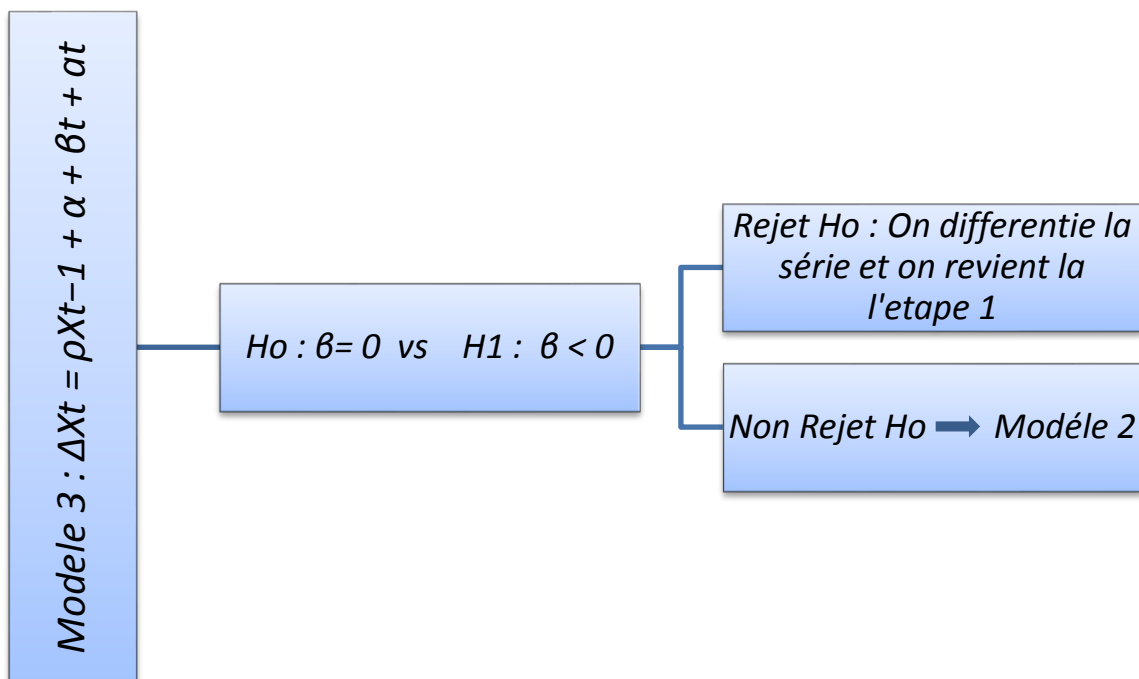
$$H_0 : \rho = 0 \quad \text{vs} \quad H_1 : \rho < 0$$

$$H_0 : \beta = 0 \quad \text{vs} \quad H_1 : \beta < 0$$

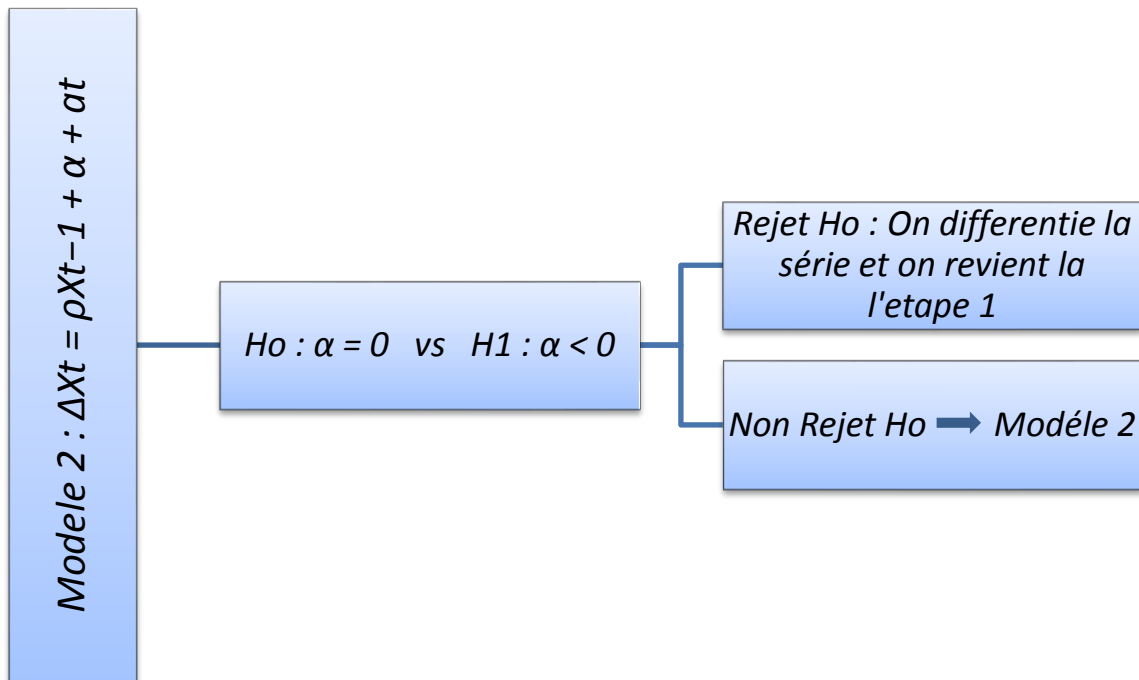
$$H_0 : \alpha = 0 \quad \text{vs} \quad H_1 : \alpha < 0$$

L'algorithme suivant donne la stratégie à suivre pour l'identification de la nature de la série et ainsi pouvoir la rendre stationnaire.

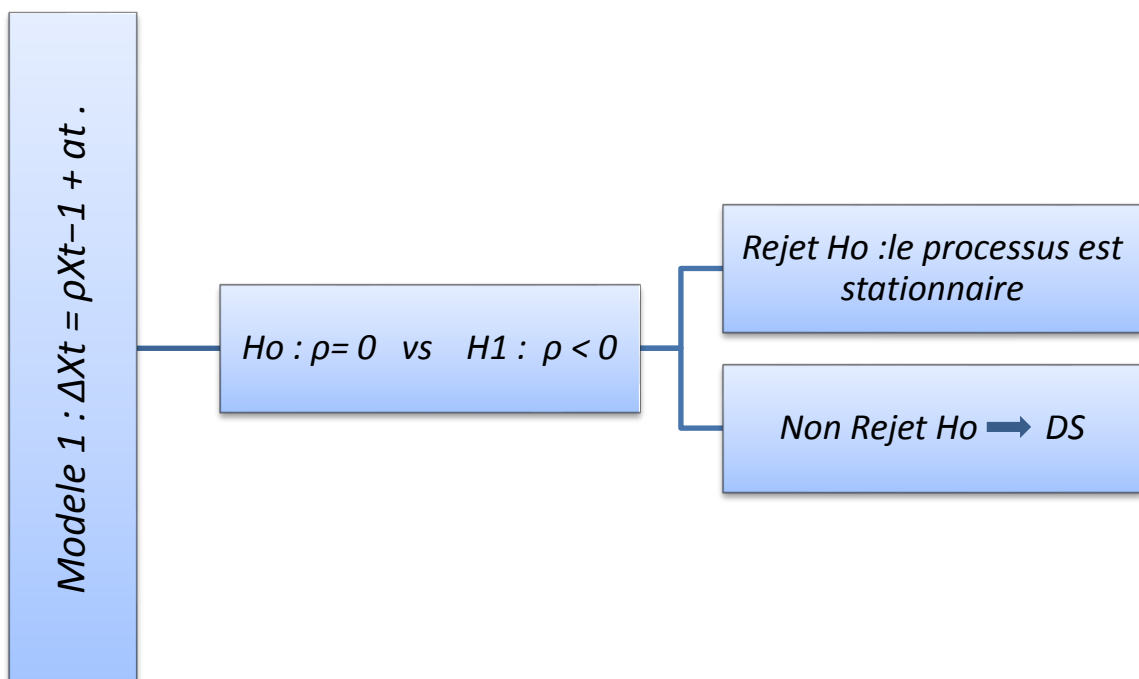
Etape 1 : On test la tendance



Etape 2 : on test la constante



Etape 3 : On test la présence de racine unitaire



Après avoir stationnarité la série, on peut passer à la modélisation en utilisant la méthode de Box & Jenkins.

I.2 Méthode de Box & Jenkins :

Le but de la méthodologie de Box & Jenkins est de pouvoir modéliser une série stationnaire et ainsi pouvoir faire des prévisions. La méthode repose sur 4 étapes :

Etape 1 : Identification

Il s'agit de déterminer les p et les q maximaux pour pouvoir ensuite estimer les équations dans le modèle ARMA (p, q).

Les p et les q sont déterminés à partir du corrélogramme : En effet le p -max (resp. q -max) est l'observation pour laquelle l'autocorrélation partielle PAC (resp. autocorrélation AC) s'annule, ou tend à s'annuler.

L'autocorrélation AC est défini par :

$$AC(k) = \frac{\sum_{j=1}^{T-k} (x_j - \bar{x}_T)(x_{j+k} - \bar{x}_T)}{\sum_{j=1}^T (x_j - \bar{x}_T)^2}$$

L'autocorrélation partielle est défini par :

$$PAC(k) = \frac{\begin{array}{cccccc} 1 & \rho_1 & \rho_2 & \dots & \rho_{k-2} & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 & \dots & \rho_{k-3} & \rho_2 \\ & & & & & \dots \\ \rho_{k-2} & \rho_{k-3} & & \dots & 1 & \rho_{k-1} \\ \rho_{k-1} & \rho_{k-2} & \rho_{k-3} & \dots & \rho_1 & \rho_k \\ & & & & & \dots \\ & & & & & & \dots \\ & & & & & & \dots \end{array}}{\begin{array}{cccccc} 1 & \rho_1 & \rho_2 & \dots & \rho_{k-2} & \rho_{k-1} \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 & \dots & \rho_{k-3} & \rho_{k-2} \\ & & & & & \dots \\ \rho_{k-2} & \rho_{k-3} & & \dots & 1 & \rho_1 \\ \rho_{k-1} & \rho_{k-2} & \rho_{k-3} & \dots & \rho_1 & 1 \end{array}} \quad \forall k \in \mathbf{N}^*$$

Tel que $PAC(1) = AC(1)$

Il existe une méthode autre que graphique pour déterminer p et q , à savoir prendre p (resp. q) tel que le PAC (resp. AC) soit en dehors de l'intervalle $\left[\frac{-1,96}{\sqrt{T}}; \frac{1,96}{\sqrt{T}}\right]$ (T étant le nombre d'observation totale).

Exemple :

Pour $T= 1000$, nous avons le corrélogramme suivant :

Corrélogramme

k	AC	PAC
1	0,691	0,691
2	0,337	-0,271
3	0,16	0,105
4	0,082	-0,028
5	0,046	0,015
6	0,017	0,012

Les p et q possibles sont ceux tels que PAC et AC sont en dehors de $\left[\frac{-1,96}{\sqrt{1000}}; \frac{1,96}{\sqrt{1000}}\right]$ soit $[-0,0196; 0,0196]$. Donc $p = 0,1,2,3,4$; $q = 0,1,2,3,4,5$.

Etape 2 : Estimation

Après avoir déterminé p et q on passe ensuite à l'estimation de l'équation. Evidemment il ne faut oublier aucune combinaison entre les $AR(p)$ et $MA(q)$. Il faut garder les modèles dont les coefficients sont statistiquement valables, c'est-à-dire dont le t - student $> |1,96|$.

Le modèle ARMA (p , q) s'écrit sous la forme :

$$Y_t = \sum_{k=0}^p \varphi_k y_{t-k} + \sum_{l=0}^q \theta_l \varepsilon_{t-l}$$

Avec ε_t i.i.d. $\sim BB(0, \sigma^2)$.

Le vecteur de paramètres θ ($\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_p, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_q, \sigma^2$) est estimé habituellement par la méthode de maximum de vraisemblance.

$$L(\theta) = -\frac{T}{2} \log(2\pi) - \frac{T}{2} \log(\sigma^2) - \sum_{t=1}^T \frac{\varepsilon_t^2}{2\sigma^2}$$

Le t de student est défini pour la variable i ($i \in [1, T]$) par :

$$t_i = \frac{\hat{\theta}_i}{\hat{\sigma}_i}$$

Etape 3 : Validation

Après avoir gardé les équations statistiquement valables, on passe à l'analyse des résidus. On ne gardera que les modèles dont les résidus sont des bruits blancs c.-à-d. dont p -value $> 0,05$.

$$Q = T(T + 2) \sum_{j=1}^k \frac{\hat{\rho}_j^2}{T - j}$$

Avec $Q \sim \chi^2_{k-(p+q)}$. Donc p -value est la probabilité unilatérale à droite de Q .

Néanmoins si plusieurs modèles persistent on gardera le modèle qui a le plus faible AIC (Akaike Citeron).

$$AIC(p, q) = \log(\sigma^2(p, q)) + \frac{2}{T}(p + q)$$

Remarque

Dans le cas où aucun des résidus n'est un bruit blanc, on peut supposer que les résidus suivent un modèle Garch. On détaillera par la suite la démarche à suivre.

Etape 4 : Prévision

Enfin arrive la prévision de notre série chronologique qui sera fonction des observations précédentes.

I.3 Modèles Arch/Garch

Nous avons mentionné auparavant qu'il est possible que les résidus ne soit pas des bruits blancs ; en effet cela est fréquent quand on est en présence de données financières : la volatilité n'est pas constante et elle varie de manière non uniforme i.e période de forte volatilité suivit généralement de période de faible volatilité, ce phénomène est appelé communément le « clustering »

Dans le cas où les résidus ne suivent pas un bruit blanc (p -value $< 0,05$), il est possible de les modéliser avec un modèle ARCH/GARCH (Auto Regressive Conditional Heteroscedastik)/(Generalize ARCH)

- **Modèle ARCH**

Le modèle ARCH(q) s'écrit sous la forme :

$$\varepsilon_t = z_t \sqrt{h_t}$$

avec $z_t \sim N(0, 1)$

et

$$h_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2$$

Le modèle peut s'écrire aussi sous la forme suivante :

$$\varepsilon_t^2 = z_t^2 h_t = z_t^2 \left[\alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 \right]$$

Ce modèle s'apparente à un modèle AR (q) avec comme variable ε_t^2 . On va donc procéder de la même manière qu'avec un modèle AR(q) pour estimer les paramètres et faire des prévisions.

D'autre part la variance conditionnelle est donnée par :

$$\text{var}(y_t | I_{t-1}) = E(\varepsilon_t^2 | I_{t-1}) = h_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2$$

Par exemple pour $q=1$, quand le choc ε_{t-1} est grand (positif ou négatif) \hat{h}_t est élevée. Si effectivement ε_t est obtenu est grand, \hat{h}_{t+1} demeure importante. La variance conditionnelle estimée se stabilise et diminue lorsque l'ampleur des chocs devient petit jusqu'à ce qu'un nouveau et grand choc se présente. Le modèle ARCH(q) permet ainsi de générer des épisodes de volatilité importante (dès que ε_t positifs ou négatifs grand) suivis d'épisodes de volatilité plus faible, exactement le phénomène retrouvé dans les données empiriques.

De même que pour les modèles ARMA, il existe une généralisation du modèle ARCH : le modèle GARCH.

- Modèle GARCH

Le modèle GARCH (p, q) s'écrit sous la forme :

$$\varepsilon_t = z_t \sqrt{h_t}$$

avec $z_t \sim N(0, 1)$

et

$$h_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j h_{t-j}$$

Avec les conditions $\alpha_0 > 0$, $\alpha_i, \beta_j \geq 0$, $\sum_{i=1}^q \alpha_i + \sum_{j=1}^p \beta_j < 1$

Le modèle peut s'écrire aussi sous la forme :

$$\varepsilon_t^2 = z_t^2 h_t = z_t^2 \left[\alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j h_{t-j} \right]$$

Le modèle GARCH peut être représenté comme un modèle ARMA avec les erreurs au carré comme variable explicatives.

Le processus GARCH est stationnaire si et seulement si la somme des coefficients est inférieure à 1. En pratique, il est difficile de respecter ces conditions quand le nombre de retards des résidus au carré précédents et des variances conditionnelles passées est élevé. Par ailleurs, les modèles GARCH d'ordre supérieur apportent peu d'améliorations généralement. Par conséquent, les représentations GARCH(1,1), GARCH(1,2) et GARCH(2,1) sont les plus fréquemment utilisées.

I.4 Modèles avec résidus ARCH/GARCH

Le modèle avec résidus ARCH/GARCH se présente dans le cas où les résidus ne sont pas des bruits blanc ; On a dit précédemment qu'on pouvait les modéliser par un modèle ARCH/GARCH

Ainsi la formulation du modèle avec résidus GARCH (p,q) s'écrit sous la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} Y_t = \beta X_t + \varepsilon_t \\ \varepsilon_t = z_t \sigma_t \\ \sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j \sigma_{t-j}^2 \end{array} \right.$$

Où X_t est un vecteur multi-varié (modèle de régression classique : variables exogènes) ou composé de retard Y_t (modèle ARMA)

Avant de commencer à identifier les paramètres p et q du modèle ARCH, il parait plus judicieux d'effectuer le test ARCH-LM

Test ARCH-LM

Ce test nous permet de trancher quant à la modélisation des résidus par un processus ARCH ; Nous allons tester ici l'hypothèse suivante

$$H_0: \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_q = 0 \text{ (absence d'effet Arch)} \quad \text{vs} \quad H_1: \exists i, t_q \alpha_i \neq 0$$

La procédure pour tester l'effet ARCH se fait de la façon suivante

1. Calcul des résidus/erreurs du modèle de régression : $\hat{\varepsilon}_t$
2. Calcul du carré des erreurs $\hat{\varepsilon}_t^2$
3. A q fixé, on effectue la régression linéaire de $\hat{\varepsilon}_t^2$ sur son passé $\hat{\varepsilon}_{t-1}^2, \dots, \hat{\varepsilon}_{t-q}^2$

$$\hat{\varepsilon}_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i \hat{\varepsilon}_{t-i}^2$$

4. Calcul de la statistique LM, $LM = nR^2$ où n est le nombre d'observations utilisées lors de la régression, et R^2 le coefficient de la régression. Si $LM > \chi_q^2$. On rejette H_0 : l'erreur est alors modélisée par un processus ARCH (q)

Maintenant qu'on est sûr que les résidus suivent un processus ARCH, il est temps de passer à la modélisation des résidus.

Modélisation ARCH/GARCH

Pour modéliser les résidus avec un modèle GARCH, nous allons procéder presque de la même manière que celle utilisée par Box & Jenkins pour la modélisation ARMA.

Etape 1 : Identification

Afin d'identifier les paramètres p et q on va construire le corrélogramme des résidus au carré. La seule différence avec le modèle ARMA est que l'identification du paramètre q (resp. p) se fait en analysant l'autocorrélation partielle (resp. autocorrélation) ;

Etape 2 : Estimation

L'estimation des paramètres se fait en utilisant le maximum de vraisemblance, en prenant en compte la distribution des erreurs

■ Pour une distribution normale

La fonction log-vraisemblance à la date t est donnée par :

$$L_t = -\frac{1}{2} \log(2\pi) - \frac{1}{2} \log(\sigma_t^2) - \frac{1}{2} \frac{\hat{\varepsilon}_t^2}{\sigma_t^2}$$

■ Pour une distribution t-Student

La fonction log-vraisemblance à la date t est donnée par :

$$L_t = -\frac{1}{2} \log \left(\frac{\pi(\gamma - 2) \Gamma \left(\frac{\gamma}{2} \right)^2}{\Gamma \left(\frac{\gamma + 1}{2} \right)^2} \right) - \frac{1}{2} \log(\sigma_t^2) - \frac{(\gamma + 1)}{2} \log \left(1 + \frac{\hat{\varepsilon}_t^2}{\sigma_t^2 (\gamma - 2)} \right)$$

Valable quand le degré de liberté $\gamma > 2$. Quand $\gamma \rightarrow \infty$ on se retrouve avec une distribution gaussienne.

■ Pour une distribution Generalized Error Distribution (GED)

La fonction log-vraisemblance à la date t est donnée par :

$$L_t = -\frac{1}{2} \log \left(\frac{\Gamma\left(\frac{1}{r}\right)^3}{\Gamma\left(\frac{3}{r}\right) \left(\frac{r}{2}\right)^2} \right) - \frac{1}{2} \log(\sigma_t^2) - \left(\frac{\Gamma\left(\frac{3}{r}\right) \hat{\varepsilon}_t^2}{\sigma_t^2 \Gamma\left(\frac{1}{r}\right)} \right)^{r/2}$$

Etape 3 : Validation

Comme pour le modèle ARMA, On ne gardera pour les modèles GARCH que les modèles statistiquement valables c'est-à-dire ceux dont le t - student $> |1,96|$.

Etape 4 : Préviation

La préviation du modèle Y se fait en fonction des observations précédentes et des bruits blancs qui sont modélisés par un processus GARCH.

I.5 Extension des modèles ARCH/GARCH.

La méthodologie ARCH contribue à relâcher l'hypothèse forte de la volatilité constante à travers le temps. Plusieurs variantes du modèle ARCH (q) ont été proposées afin de donner une meilleure description et prévision de la volatilité.

Les premiers regroupent les processus ARCH (q) et GARCH (p, q) décrits précédemment. D'autres variantes comme le modèle GARCH intégré (IGARCH), le modèle GARCH-in-mean (GARCH-M) et le modèle EGARCH s'ajoutent à la liste des modèles.

- **Modèle avec résidus IGARCH :**

Le processus IGARCH permet une précision plus infinie de la volatilité. L'effet d'un choc se répercute sur les prévisions de toutes les valeurs futures.

Le modèle IGARCH (p, q) s'écrit sous la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} Y_t = \beta X_t + \varepsilon_t \\ \varepsilon_t = z_t \sigma_t \\ \sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j \sigma_{t-j}^2 \end{array} \right.$$

Avec les conditions $\alpha_0 > 0, \alpha_i, \beta_j \geq 0$

Le Modèle IGARCH est similaire au modèle GARCH avec une seule spécification est que

$$\sum_{i=1}^q \alpha_i + \sum_{j=1}^p \beta_j = 1$$

- Modèle avec résidus GARCH-M

Quant au modèle GARCH-M, il introduit la volatilité comme une variable explicative. Ils supposent que c'est l'ampleur et non pas le signe des chocs qui détermine la volatilité. Par conséquent, les chocs positifs et négatifs de même taille ont un impact identique sur la variance conditionnelle

Ainsi le modèle GARCH-M s'écrit sous la forme :

$$\begin{cases} Y_t = \beta X_t + \delta \sigma_t^2 + \varepsilon_t \\ \varepsilon_t = z_t \sigma_t \\ \sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j \sigma_{t-j}^2 \end{cases}$$

- Modèle avec résidus EGARCH

Le modèle EGARCH est caractérisé par une spécification asymétrique des perturbations. Il permet à de bonnes nouvelles et de mauvaises nouvelles d'avoir un impact différent sur la volatilité.

Le modèle s'écrit sous la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} Y_t = \beta X_t + \varepsilon_t \\ \varepsilon_t = z_t \sigma_t \\ \log(\sigma_t^2) = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i [\psi z_{t-i} + \theta (|z_{t-i}| - E|z_{t-i}|)] + \sum_{j=1}^p \beta_j \log(\sigma_{t-j}^2) \end{array} \right.$$

II-Application sur le marché pétrolier

Dans la première partie on a vu les fondements essentiels à la modélisation des séries chronologiques à savoir celle de Box & Jenkins. D'autre part on a introduit les modèles ARCH et GARCH pour la modélisation des résidus ;

Dans cette seconde partie nous verrons une application de toutes ces méthodes en vue de modéliser le prix du pétrole et par suite faire des prévisions.

Comme on l'a mentionné précédemment nous allons modéliser le prix du pétrole. Notre base de données est donc celle du WTI échangé sur le NEYMEX. Vu que les méthodes de séries chronologiques requièrent d'avoir une base de données assez large, nos observations s'étalent du 1 Avril 1983 au 15 Février 2013 soit 7475 observations. Ces données sont téléchargeables de la plateforme Bloomberg.

Nous utilisons le logiciel Eviews pour le traitement et l'application du modèle.

Nous utilisons le rendement des prix du pétrole pour la modélisation

$$R_t = \ln(P_t) - \ln(P_{t-1})$$

Tel que P_t est le prix du WTI à l'instant t .

La série étant stationnaire par transformation logarithmique on peut maintenant passer à la modélisation en utilisant Box & Jenkins.

➤ Identification

Dans la première partie, on a expliqué comment on peut déterminer les p et q Maximaux à partir du corrélogramme.

Or on remarque cependant qu'il y a un problème à savoir que les seules p et q possibles sont $p = q = 0$. On ne peut donc pas appliquer la méthode de Box & Jenkins.

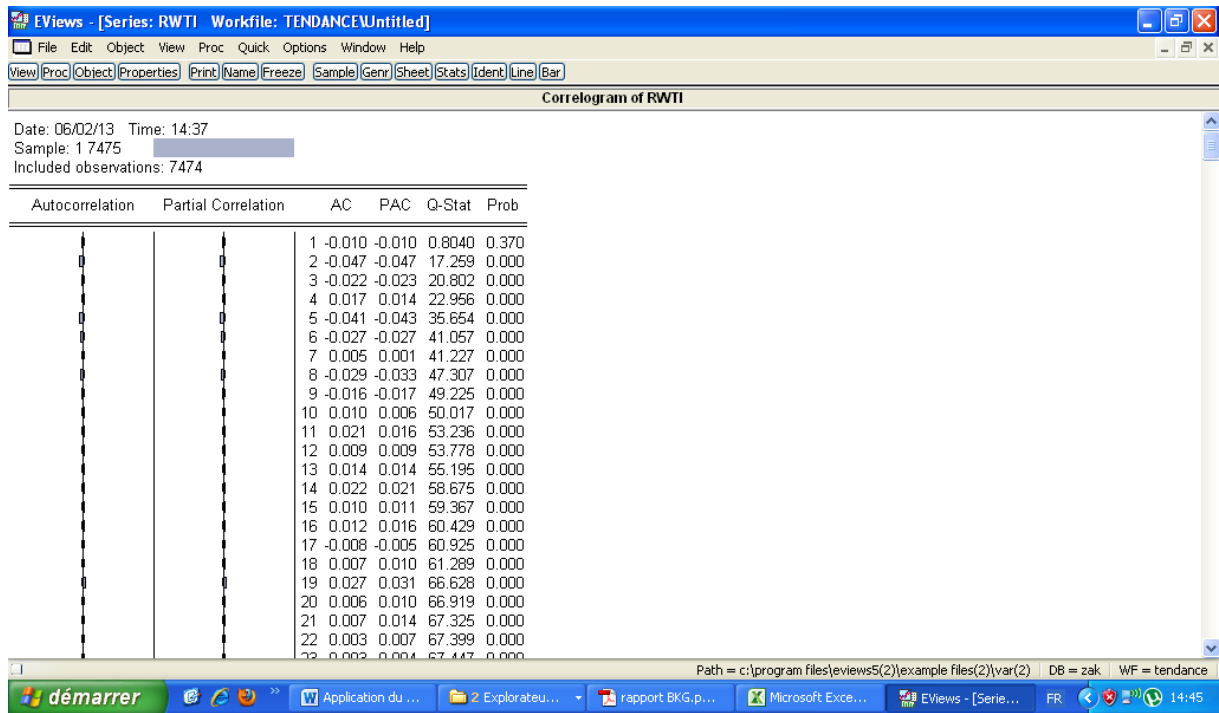


Tableau 4 : Corrélrogramme du rendement du WTI

La solution est alors de décomposer la série et d'en extraire les composantes les plus importantes et de modéliser chaque composante et ensuite de retrouver la série d'origine à savoir le prix du WTI.

Avant d'entamer la procédure de décomposition du filtre de Hodrick-Prescott, il nous paraît judicieux de faire un bref rappel.

Rappel :

La première étape a été de décomposer la série originale en tendance et en cycle en utilisant le filtre de Hodrick-Prescott :

$$y_t = \underbrace{g_t}_{\text{Tendance}} + \underbrace{c_t}_{\text{Cycle}}$$

❖ La composante Tendancielle :

$$G = (\lambda F + I_T)^{-1} * Y$$

❖ La composante Cyclique :

$$C = Y - G$$

La décomposition par construction montre que **les deux composantes sont orthogonales**, donc il n'y a pas de corrélation entre les deux paramètres. Ce qui nous permet de modéliser chaque composante séparément et ensuite de les regrouper pour modéliser la série d'origine.

On utilise le filtre de Hodrick – Prescott pour décomposer la série en tendance et en cycle. La décomposition est faite sur le logarithme des prix et non pas sur le rendement des prix car en utilisant le rendement la tendance s'annule.

Les données étant journalières (5 jours par semaine) Le paramètre $\lambda=681210$

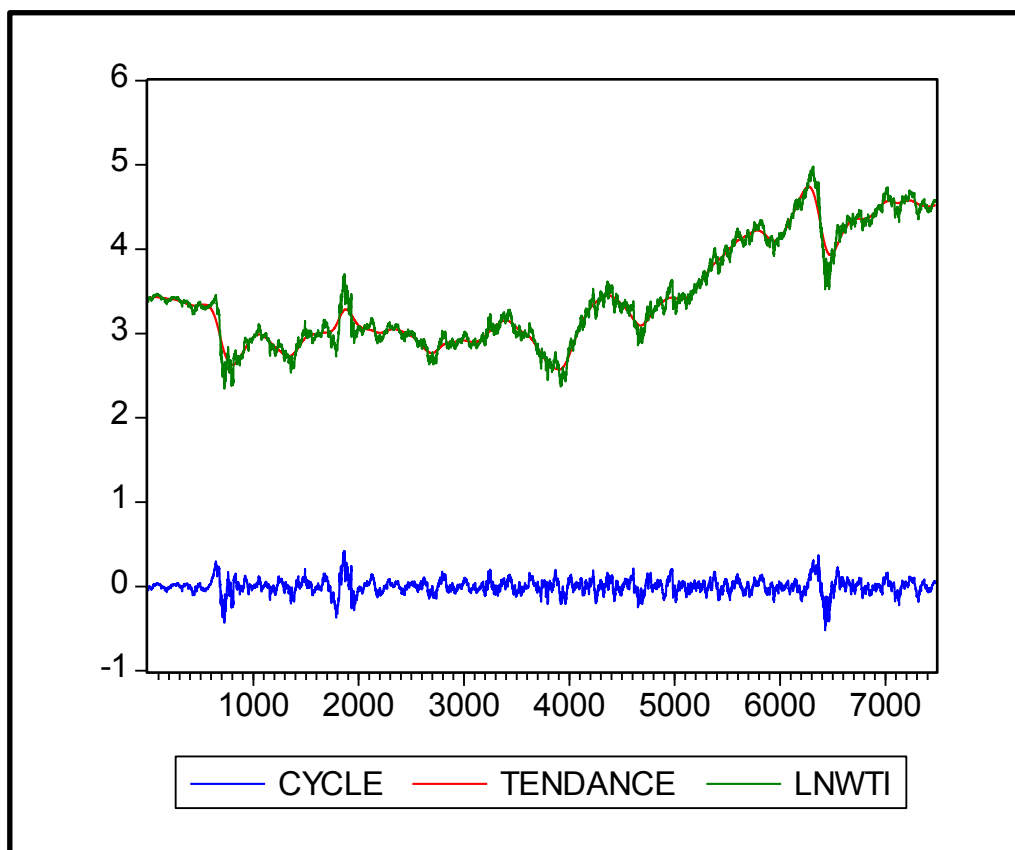


Tableau 5 : Décomposition de Hodrick-Prescott

On remarque que la tendance retrace de manière lisse la courbe d'origine (logarithme du WTI).

Après avoir décomposé la série, on commence par modéliser le cycle par la méthode de Box & Jenkins

Pour mieux apprécier notre modélisation, nous allons effectuer notre étude sur une partie de notre échantillon soit 7470 et ensuite de faire des prévisions sur les 5 jours à suivre et de les comparer avec les données réelles.

II.1 Modélisation du cycle

La première étape de la modélisation est de stationnariser la série. Pour se faire on applique le test de Dickey-Fuller.

■ Test de Dickey – Fuller

On commence par le Modèle 3 (modèle avec tendance et constante)

- Modèle 3 : $\Delta X_t = \rho X_{t-1} + \alpha + \beta t + a_t$

on test la tendance $H_0 : \beta = 0$ vs $H_1 : \beta < 0$

Augmented Dickey-Fuller Test Equation				
Dependent Variable: D(CYCLE)				
Method: Least Squares				
Date: 05/31/13 Time: 10:27				
Sample (adjusted): 2 7475				
Included observations: 7474 after adjustments				
Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
CYCLE(-1)	-0.038574	0.003182	-12.12151	0.0000
C	1.22E-05	0.000549	0.022263	0.9822
@TREND(1)	-3.34E-10	1.27E-07	-0.002624	0.9979
R-squared	0.019288	Mean dependent var		1.12E-05
Adjusted R-squared	0.019025	S.D. dependent var		0.023938
S.E. of regression	0.023709	Akaike info criterion		-4.645523
Sum squared resid	4.199573	Schwarz criterion		-4.642746
Log likelihood	17363.32	F-statistic		73.46547
Durbin-Watson stat	1.998202	Prob(F-statistic)		0.000000

Tableau 6 : Test de Dickey-Fuller pour le Modèle 3–Cycle-

D'après la sortie d'Eviews on remarque que $t\text{-statistic} = -0,002624 < 2,78$ issue de la table de Dickey –Fuller. Donc on accepte $\beta = 0$; On peut passer au modèle 2(avec constante)

- Modele 2 : $\Delta X_t = \rho X_{t-1} + \alpha + at$

On test la constante $H_0 : \alpha = 0$ vs $H_1 : \alpha < 0$

Augmented Dickey-Fuller Test Equation				
Dependent Variable: D(CYCLE)				
Method: Least Squares				
Date: 05/31/13 Time: 10:28				
Sample (adjusted): 2 7475				
Included observations: 7474 after adjustments				
Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
CYCLE(-1)	-0.038574	0.003182	-12.12232	0.0000
C	1.10E-05	0.000274	0.039987	0.9681
R-squared	0.019288	Mean dependent var		1.12E-05
Adjusted R-squared	0.019156	S.D. dependent var		0.023938
S.E. of regression	0.023707	Akaike info criterion		-4.645790
Sum squared resid	4.199573	Schwarz criterion		-4.643939
Log likelihood	17363.32	F-statistic		146.9506
Durbin-Watson stat	1.998202	Prob(F-statistic)		0.000000

Tableau 7 : Test de Dickey-Fuller pour le Modèle 2 –Cycle-

D'après la sortie d'Eviews $t\text{-statistic} = 0,039987 < 2,52$. Donc on accepte $\alpha = 0$;

On passe au modèle 1 (sans tendance ni constante)

- Modele 1 : $\Delta X_t = \rho X_{t-1} + at$

On test $H_0 : \rho = 0$ vs $H_1 : \rho < 0$

Null Hypothesis: CYCLE has a unit root		
Exogenous: None		
Lag Length: 0 (Automatic based on SIC, MAXLAG=35)		
	t-Statistic	Prob.*
Augmented Dickey-Fuller test statistic	-12.12313	0.0000
Test critical values:		
1% level	-2.565271	
5% level	-1.940867	
10% level	-1.616671	

Tableau 8 : Test de Dickey-Fuller pour le Modèle 1 –cycle-

On remarque que $t\text{-statistic} = -12,12 < -1,94$. Donc on Rejette $H_0 \rightarrow$ La série est donc stationnaire.

Après avoir vérifié que la série est bien stationnaire, on passe à la modélisation en utilisant Box & Jenkins.

■ Modélisation Box & Jenkins

La première étape est évidemment celle de l'identification des paramètres p et q .

➤ Identification

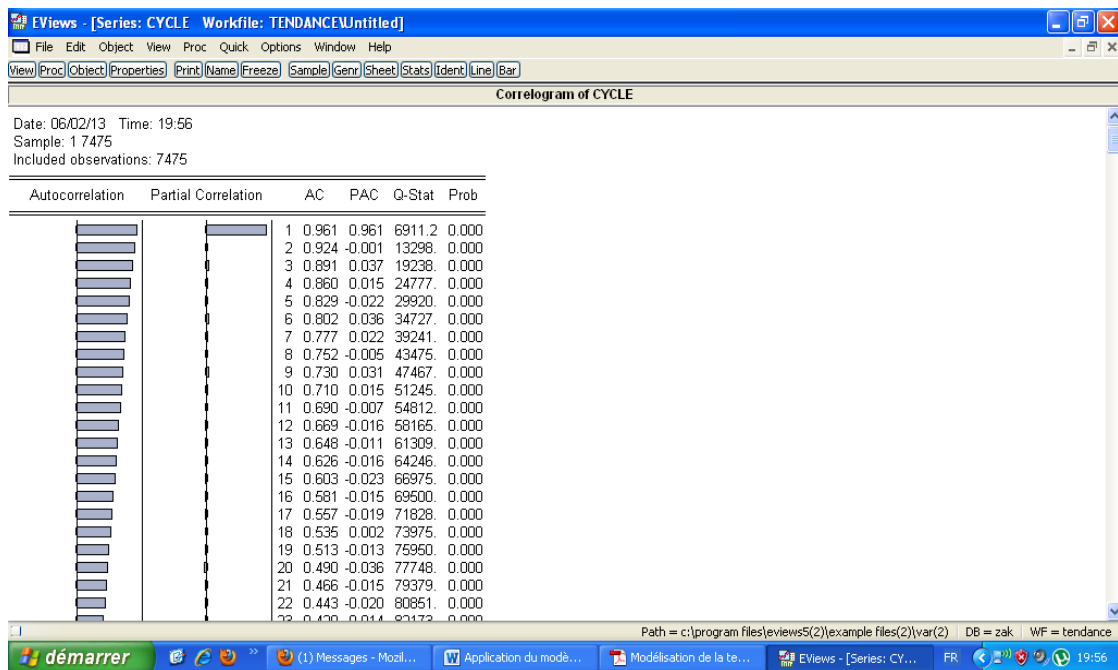


Tableau 9 : Corrélogramme du Cycle

Visiblement d'après le corrélogramme les p et q possibles sont $p = 0, 1$ $q=0, 1, 2, \dots$

➤ Estimation

Afin d'estimer le meilleur modèle, on effectue toutes les combinaisons possibles avec les p et q disponibles. On rejette ceux qui sont statistiquement non valide c'est-à-dire ceux dont la p -value $> 0,05$.

➤ Validation

La validation du modèle pose un problème à savoir qu'aucun modèle ne vérifie que les résidus suivent un bruit blanc (aucune p -value $> 0,05$).

Date: 05/31/13 Time: 11:02
Sample: 2 7470
Included observations: 7469
Q-statistic probabilities adjusted for 1 ARMA term(s)

Autocorrelation	Partial Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob
		1	0.001	0.001	0.0058
		2	-0.036	-0.036	9.6398
		3	-0.012	-0.012	10.667
		4	0.026	0.025	15.697
		5	-0.032	-0.033	23.408
		6	-0.018	-0.017	25.960
		7	0.012	0.011	27.095
		8	-0.021	-0.024	30.393
		9	-0.009	-0.007	31.005
		10	0.017	0.015	33.063

Tableau 10 : Analyse des résidus du cycle

Ce qui nous amène à faire l'hypothèse selon laquelle les résidus peuvent suivre un modèle de type Arch. Pour avoir le cœur net nous effectuons le test Arch-LM. Le test est le suivant

H₀: Absence d'effet Arch vs ***H₁: Existence d'effet Arch***

ARCH Test:

F-statistic	149.7605	Probability	0.000000
Obs*R-squared	423.9941	Probability	0.000000

Tableau 11 : Test ARCH du Cycle

On remarque que $p\text{-value de la } F\text{-statistic} < 0,05$ donc on rejette H_0 ; Les résidus suivent alors un modèle Arch.

Après analyse du AIC et BIC, le modèle adéquat à la modélisation du cycle est un modèle ARMA(1,0) avec résidus E-GARCH(1,1). Rappelons que l'avantage avec le modèle E-GARCH est qu'il n'impose pas que les paramètres soit tous positifs.

Le tableau suivant donne en sortie l'estimation des paramètres du modèle.

Dependent Variable: CYCLE				
Method: ML - ARCH (Marquardt) - Generalized error distribution (GED)				
Date: 05/31/13 Time: 11:13				
Sample (adjusted): 2 7470				
Included observations: 7469 after adjustments				
Convergence achieved after 22 iterations				
Variance backcast: ON				
LOG(GARCH) = C(2) + C(3)*ABS(RESID(-1)/@SQRT(GARCH(-1))) + C(4)*RESID(-1)/@SQRT(GARCH(-1)) + C(5)*LOG(GARCH(-1))				
	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
AR(1)	0.971433	0.002641	367.7989	0.0000
Variance Equation				
C(2)	-0.162144	0.016026	-10.11778	0.0000
C(3)	0.146034	0.010251	14.24645	0.0000
C(4)	-0.014806	0.006048	-2.447973	0.0144
C(5)	0.993311	0.001418	700.4799	0.0000
GED PARAMETER	1.309414	0.023110	56.66062	0.0000
R-squared	0.924231	Mean dependent var		-2.97E-05
Adjusted R-squared	0.924181	S.D. dependent var		0.086202
S.E. of regression	0.023736	Akaike info criterion		-5.086561
Sum squared resid	4.204664	Schwarz criterion		-5.081003
Log likelihood	19001.76	Durbin-Watson stat		2.015670

Tableau 12 : Modélisation cycle

La modélisation du cycle s'écrit finalement sous la forme :

$$\text{Cycle}_t = \alpha_1 * \text{Cycle}_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$\ln(\sigma_t^2) = \beta_1 + \beta_2 * \left| \frac{\varepsilon_{t-1}}{\sigma_{t-1}} \right| + \beta_3 * \frac{\varepsilon_{t-1}}{\sigma_{t-1}} + \beta_4 \ln(\sigma_{t-1}^2)$$

On peut passer maintenant à la prévision du cycle. On effectue des prévisions du cycle sur 5 jours.

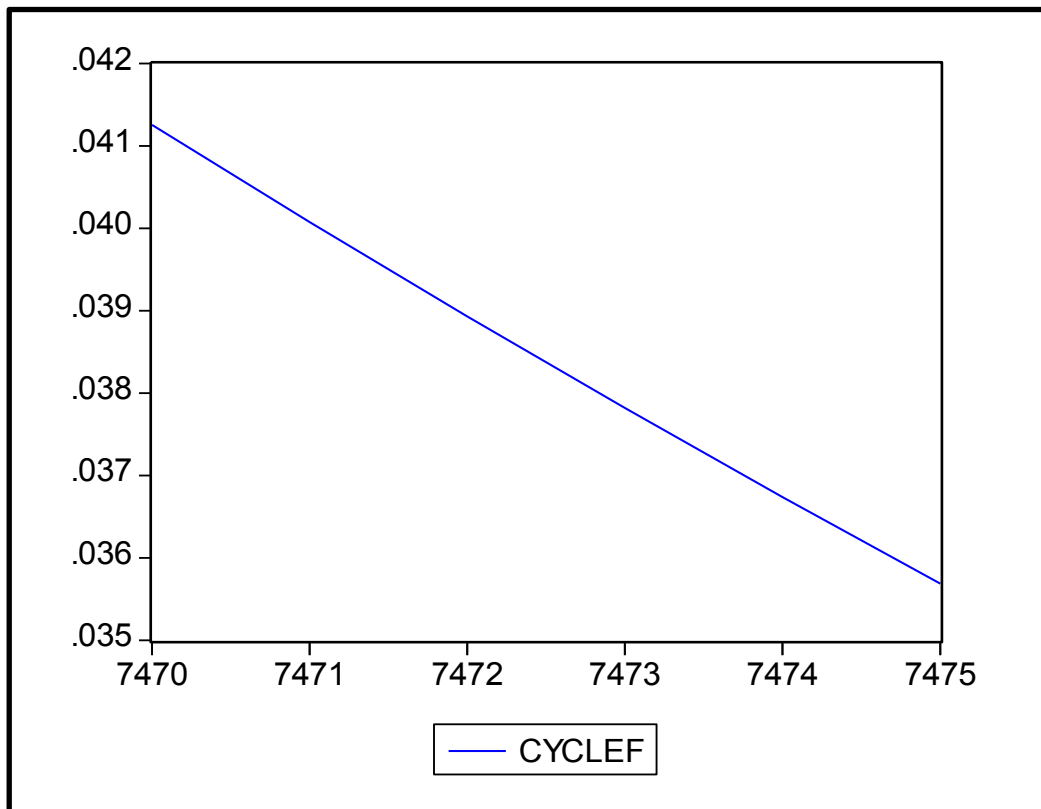


Tableau 13 : Prévision Cycle

D'après le graphe on peut affirmer que le cycle est en période baissière ce qui est normale vu que la consommation du pétrole commence à diminuer après la saison d'hiver.

II.2 Modélisation de la tendance

De la même manière que celle utilisée pour le cycle. On modélise la tendance extraite du filtre de Hodrick-Prescott.

La série originale étant non stationnaire de type DS, nous dérivons la série une première fois. La série n'étant toujours pas stationnaire, on dérive la série une deuxième fois. $Dtendance = (tendance - tendance(-1)) - (tendance(-1) - tendance(-2))$. Nous appliquons maintenant le test de Dickey-Fuller pour tester la stationnarité.

■ Test de Dickey-Fuller

On commence par le Modèle 3 (modèle avec tendance et constante)

- Modèle 3 : $\Delta X_t = \rho X_{t-1} + \alpha + \beta t + a_t$

on teste la tendance $H_0 : \beta = 0$ vs $H_1 : \beta < 0$

Augmented Dickey-Fuller Test Equation				
Dependent Variable: D(DTENDANCE)				
Method: Least Squares				
Date: 06/03/13 Time: 14:04				
Sample (adjusted): 6 7475				
Included observations: 7470 after adjustments				
Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
DTENDANCE(-1)	-2.50E-05	2.53E-06	-9.872108	0.0000
D(DTENDANCE(-1))	1.935684	0.004054	477.5133	0.0000
D(DTENDANCE(-2))	-0.936627	0.004055	-230.9653	0.0000
C	1.12E-12	7.96E-11	0.014109	0.9887
@TREND(1)	3.21E-16	1.84E-14	0.017391	0.9861
R-squared	0.999927	Mean dependent var	5.95E-12	
Adjusted R-squared	0.999927	S.D. dependent var	4.03E-07	
S.E. of regression	3.44E-09	Akaike info criterion	-36.13853	
Sum squared resid	8.82E-14	Schwarz criterion	-36.13390	
Log likelihood	134982.4	F-statistic	25635861	
Durbin-Watson stat	1.997872	Prob(F-statistic)	0.000000	

Tableau 14 : Test de Dickey-Fuller pour le Modèle 3 - D Tendance -

D'après la sortie Eviews on remarque que $t\text{-statistic} = 0,017 < 2,78$ issue de la table de Dickey – Fuller. Donc on accepte $\beta = 0$; On peut passer au modèle 2 (avec constante)

- Modele 2 : $\Delta X_t = \rho X_{t-1} + \alpha + at$

On test la constante $H_0 : \alpha = 0$ vs $H_1 : \alpha < 0$

Augmented Dickey-Fuller Test Equation				
Dependent Variable: D(DTENDANCE)				
Method: Least Squares				
Date: 06/03/13 Time: 14:13				
Sample (adjusted): 6 7475				
Included observations: 7470 after adjustments				
Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
DTENDANCE(-1)	-2.50E-05	2.53E-06	-9.872754	0.0000
D(DTENDANCE(-1))	1.935684	0.004053	477.5454	0.0000
D(DTENDANCE(-2))	-0.936627	0.004055	-230.9808	0.0000
C	2.32E-12	3.98E-11	0.058407	0.9534
R-squared	0.999927	Mean dependent var	5.95E-12	
Adjusted R-squared	0.999927	S.D. dependent var	4.03E-07	
S.E. of regression	3.44E-09	Akaike info criterion	-36.13880	
Sum squared resid	8.82E-14	Schwarz criterion	-36.13510	
Log likelihood	134982.4	F-statistic	34185726	
Durbin-Watson stat	1.997872	Prob(F-statistic)	0.000000	

Tableau 15 : Test de Dickey-Fuller pour le Modèle 2 - D Tendance -

D'après la sortie d'Eviews $t\text{-statistic} = 0,058 < 2,52$. Donc on accepte $\alpha = 0$; On passe au modèle 1 (sans tendance ni constante)

- Modele 1 : $\Delta X_t = \rho X_{t-1} + at$

On test $H_0 : \rho = 0$ vs $H_1 : \rho < 0$

Null Hypothesis: DTENDANCE has a unit root		
Exogenous: None		
Lag Length: 2 (Automatic based on SIC, MAXLAG=35)		
	t-Statistic	Prob.*
Augmented Dickey-Fuller test statistic	-9.873346	0.0000
Test critical values:		
1% level	-2.565272	
5% level	-1.940867	
10% level	-1.616671	

Tableau 16 : Test de Dickey-Fuller pour le Modèle 1 - D Tendance -

On remarque que $t\text{-statistic} = -9,87 < -1,94$. Donc on Rejette $H_0 \rightarrow$ La série est donc stationnaire.

Après avoir vérifié que la série est bien stationnaire on passe à la modélisation en utilisant la méthode de Box & Jenkins.

La résolution est similaire à celle appliquée pour la modélisation du cycle ; les détails du calcul sont présentés en annexe 1.

La modélisation de la tendance est un modèle $ARIMA(3,2,0)$ avec résidus $E\text{-GARCH}(1,0)$.

Le modèle de la dérivée seconde de la tendance s'écrit ainsi sous la forme :

$$Dtendance_t = \alpha_1 * Dtendance_{t-1} + \alpha_2 * Dtendance_{t-2} + \alpha_3 * Dtendance_{t-3} + \varepsilon_t$$

$$\ln(\sigma_t^2) = \beta_1 + \beta_2 * \left| \frac{\varepsilon_{t-1}}{\sigma_{t-1}} \right| + \beta_3 * \frac{\varepsilon_{t-1}}{\sigma_{t-1}}$$

On peut maintenant effectuer des prévisions sur la Tendance. Les prévisions sur calculés sur 5 jours.

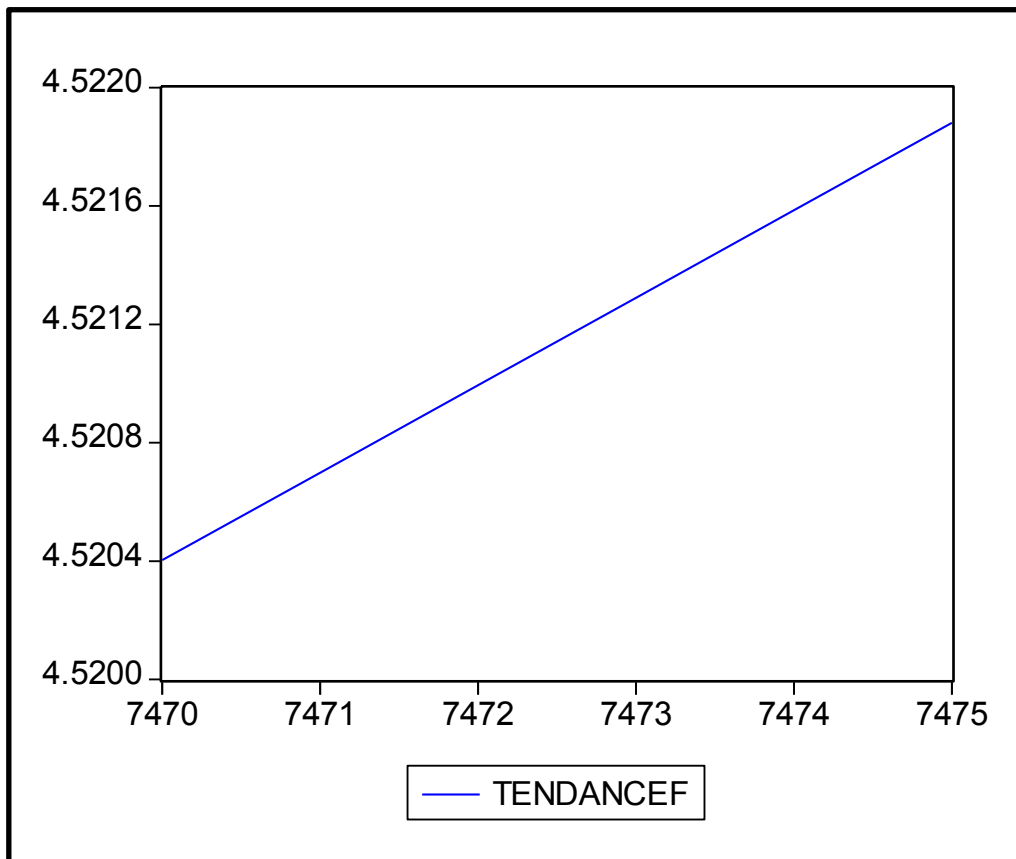


Tableau 17 : Prévision de le Tendance

On remarque que la tendance est haussière sur les 5 jours de prévisions, cela peut s'expliquer par les situations géopolitiques que traverse le monde. De plus la consommation accrue des pays en voie de développement du pétrole augmente l'offre et par conséquent augmente le prix.

Après avoir modélisé les deux composantes du prix du pétrole, à savoir la tendance et le cycle. Rappelons que les deux composantes sont orthogonales donc on peut modéliser chaque composante à part et ensuite de les regrouper. On peut maintenant faire des prévisions sur le prix du pétrole. Le graphique ci-dessous compare le prix du pétrole observé à celui simulé par la modélisation.

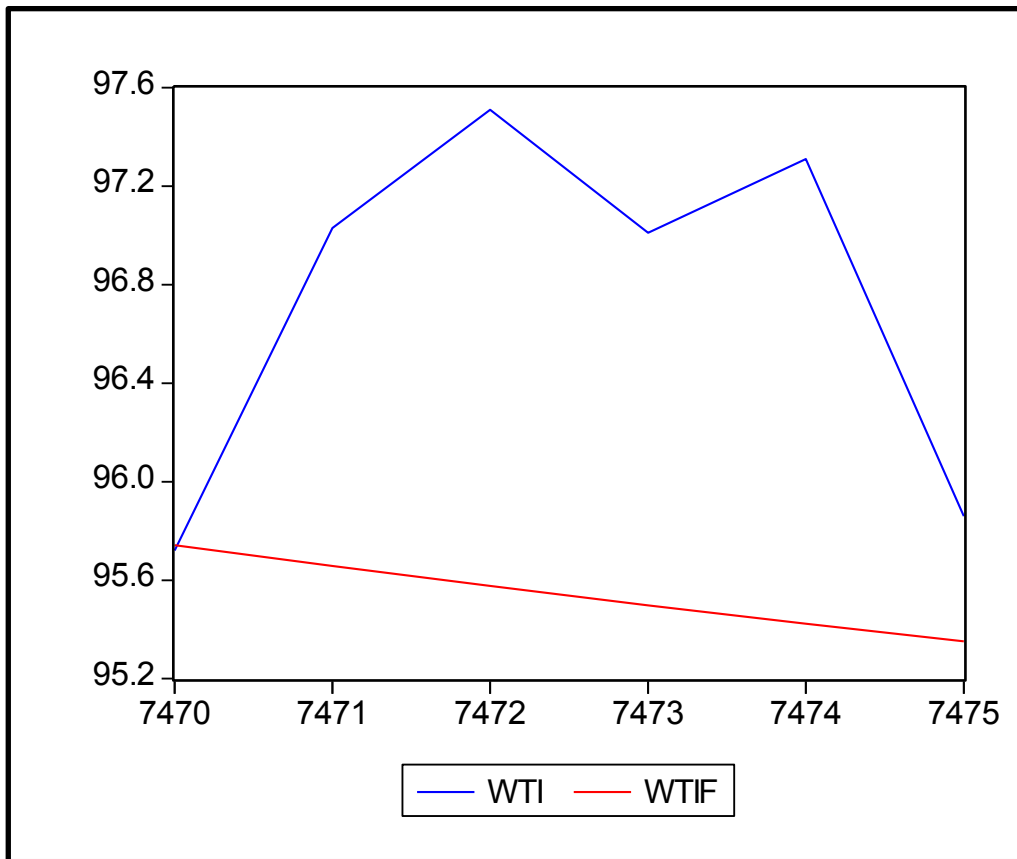


Tableau 18 : Comparaison entre WTI Observé et Simulé

On remarque que le prix est à la hausse ce qui confirme la tendance, mais l'effet cyclique par lequel passe le prix à savoir un cycle baissier fait que le prix va baisser après quelques jours; Notre modélisation n'étant pas parfaite, elle nous donnent juste une idée globale sur le prix d'ici 5 jours et une tendance baissière.

Conclusion

Ce Chapitre a eu pour vocation d'introduire la modélisation en utilisant les séries chronologiques.

Après une première partie théorique où il a été question de donner les méthodes les plus utilisées dans la modélisation à savoir celle des modèles ARMA et plus largement les modèles ARMA avec résidus ARCH-GARCH.

Nous nous sommes intéressés à un cas plus concret où nous avons appliqué toutes ces méthodes. Une modélisation directe du prix du WTI n'étant pas possible, nous avons eu recours au filtre de Hodrick-Prescott pour décomposer la série en tendance et en cycle.

Après avoir modélisé chaque composante à part, nous avons effectué des prévisions sur le cours du pétrole pour une période de 5 jours, qu'on a comparé avec le cours observé. La comparaison montre que malgré une tendance à la hausse des prix, la période sur laquelle l'étude a été faite est caractérisée par un cycle baissier du prix. Notre modélisation a en effet démontré que le cours va baisser sur la période en question.

L'inconvénient avec ce type de modélisation est qu'elle nécessite des ajustements continus des paramètres, de plus ce type de modèle est de type statique. Ce qui nous amène à s'intéresser à d'autres formes de modélisation comme celle de Kalman qu'on présentera dans le prochain chapitre.

*CHAPITRE IV : Modélisation
en utilisant les Structures par
terme des prix*

Introduction

Dans le chapitre précédent nous nous sommes intéressés aux modèles statiques et à la modélisation des matières premières en utilisant les séries chronologiques (ARIMA, ARIMA avec résidus GARCH, ...). L'inconvénient avec ce type de démarche et que d'une part les modèles nécessitent la stationnarité de la série. D'autre part et comme nous l'avons signalé il s'agit d'un modèle statique, donc pour garder un bon modèle il est impératif de faire régulièrement des ajustements. Un autre inconvénient des modèles précédents réside dans le fait que ces modèles prennent comme variable explicative que les observations précédentes, alors qu'en réalité il existe d'autres variables mais qui sont généralement cachées ou non observables. Pour remédier à ces types de problème nous introduisons les modèles dynamiques.

L'émergence des modèles dynamiques à facteurs ou à variables cachées est relativement récente dans la recherche empirique. Les modèles dynamiques à facteurs linéaires ou modèles espace-état en constituent une classe particulière. De nombreuses procédures statistiques fréquemment utilisées dans la branche empirique de la recherche économique peuvent se reformuler dans le cadre des modèles espace-état, notamment les modèles ARIMA.

Ce Chapitre a pour objet, d'une part, de détailler et de rappeler les principaux résultats des modèles espace-état et du filtre de Kalman et, d'autre part, de montrer comment ces techniques statistiques peuvent être utilisées face à diverses problématiques économiques. Dans une première partie, les modèles espace-état sont présentés avec les algorithmes permettant d'en estimer les variables cachées et les paramètres, notamment le filtre de Kalman et l'algorithme dit EM. Dans une seconde partie, Nous verrons une application du filtre de Kalman linéaire pour modéliser le prix spot du pétrole.

I-Modèles espace-état et filtre de Kalman

I.1- Modèles Espace-Etat

I.1.1 Présentation du modèle Espace – Etat.

Les modèles espace-état intègrent la distinction entre les variables observées (le signal) et les variables cachées (l'état interne). Ils sont constitués :

- *D'une ou plusieurs équation(s) de mesure décrivant la manière dont les variables observées sont générées par les variables cachées et les résidus.*
- *D'une ou plusieurs équation(s) d'état décrivant la manière dont les variables cachées sont générées à partir de leurs retards et d'innovations.*

Les modèles espace-état peuvent s'écrire sous une forme dite développée qui implique, sous certaines hypothèses, que la variable de mesure s'écrit sous la forme d'une moyenne mobile. Où réside donc l'intérêt de recourir aux modèles espace-état pour décomposer ou prévoir une série temporelle relativement aux techniques classiques développées par Box et Jenkins ?

D'une part, on s'épargne ici les problèmes de stationnarité et de racine unitaire qui se posent préalablement à l'estimation d'un modèle ARMA. En particulier, les résultats du filtre de Kalman restent valides en présence de séries non-stationnaires. Par ailleurs, ce cadre permet également de relâcher l'hypothèse d'une distribution gaussienne pour les bruits. D'autre part, l'estimation optimale prend en compte l'information disponible à partir de la date initiale $t = 0$, alors que les estimateurs optimaux ARMA prennent en compte l'information à partir de $t = -\infty$. Finalement, les coefficients du modèle peuvent évoluer et ne sont pas obligatoirement considérés comme invariants au cours de la période d'estimation.

*Dans leur version élémentaire, les modèles espace-état reposent sur un certain nombre d'hypothèses principales : les équations de mesure et d'état sont **linéaires** ; les bruits d'observation et d'innovation sont des bruits blancs ; les variables cachées suivent*

à un instant initial donné **une loi gaussienne**. À ces dernières, se sont ajoutées des hypothèses secondaires permettant de déterminer la forme canonique : l'indépendance entre les bruits d'observation et d'innovation et l'indépendance entre la variable cachée initiale et ces bruits. Toutes ces hypothèses sont destinées à simplifier les procédures d'estimation.

I.1.2 Formulation du modèle Espace - Etat

Soit un processus multidimensionnel Y_k observable. On appelle modèle espace-état de ce processus, le système (I) décrit par les équations suivantes :

■ Equation de Mesure

$$Y_k = H_k X_k + V_k$$

Avec :

- Y_k : est appelée observation ou variable de mesure
- X_k : est la variable d'état
- H_k : est la matrice de Mesure
- V_k : est le vecteur d'innovation, $V_k \sim N(0, R_k)$

■ Equation d'Etat ou de transition

$$X_{k+1} = M_k X_k + B_k u_k + G_k W_k$$

Avec :

- X_k : est la variable d'état
- M_k : est la matrice de transition

- u_k : est une variable exogène prédéterminée
- W_k : est le vecteur des erreurs de mesures $W_k \sim N(0, Q_k)$

Le système d'équation (I) est dit **sous forme canonique** si et seulement si :

$$E(W_k Q_s) = E(Q_k X_0) = E(W_k X_0) = 0 \quad \forall k, s = 1 \dots T$$

Le modèle espace-état est alors dit **causal** et **inversible**

Le modèle espace-état est dit **invariant par rapport au temps** si les matrices H_k, M_k, B_k sont indépendantes du temps.

1.1.3 Estimation des variables d'état par le filtre de Kalman

En 1960, Kalman a publié un article intitulé "A new Approach to Linear Filtering and Prediction Problems". Ses recherches le mènent à y décrire un processus qui sera connu comme le filtre de Kalman. Le filtre de Kalman est un ensemble d'équations mathématiques décrites sous forme d'algorithme.

Le but de la prochaine partie est de donner une meilleure compréhension du filtre de Kalman. Tout d'abord, nous proposons un cas simple et pratique d'utilisation, appliqué aux systèmes linéaires. Nous verrons par la suite un cas plus complexe celui du filtre de Kalman étendu (EKF)

Afin de simplifier l'analyse, les paramètres définissant le modèle espace-état vu précédemment sont supposés connus et le modèle est supposé dépourvu de variables exogènes. La question consiste alors à estimer à chaque instant k les variables cachées (le vecteur d'état) X_k conditionnellement aux variables observées Y_k jusqu'à la date T (le vecteur de mesure).

I.2- Filtre de Kalman

Le Filtre de Kalman est très puissant grâce à l'utilisation d'un contrôle en feedback : il estime l'état du système puis améliore son résultat avec les informations bruitées fournies par les capteurs. Pour calculer des estimations filtrées du vecteur d'état, l'algorithme optimal, appelé filtre de Kalman, est utilisé. L'algorithme est structuré en deux étapes reprises d'itération en itération : étape de prédiction et étape de correction. On distingue deux cas : **le cas linéaire et le cas non linéaire ou étendu**.

I.2.1 Modèle linéaire

I.2.1.1 Filtre de Kalman simple

Reprenons le système d'équation défini précédemment pour un modèle Espace-état

$$\begin{cases} Y_k = H_k X_k + V_k & (\text{Eq de mesure}) \\ X_{k+1} = M_k X_k + B_k u_k + G_k W_k & (\text{Eq d'Etat}) \end{cases}$$

Rappelons que Y_k est une variable observée alors que X_k est non observable.

L'état initial X_0 est supposé être Gaussien avec une moyenne X_0 est une matrice de covariance P_0 . Afin d'obtenir l'état optimal du système on doit combiner les observations Z_k avec l'information fournie par le modèle X_k . Pour résoudre ce problème de filtrage on doit déterminer la densité de probabilité conditionnelle de l'état X_k sachant l'historique des mesures pris Y_k, \dots, Y_1 , (on note k/l). Cette **densité de probabilité est Gaussienne** (puisque'on est dans un cas linéaire) et donc complètement caractériser par sa moyenne $X_{k/l}$ et sa matrice de covariance $P_{k/l}$

L'algorithme est le suivant :

Etape 1 : Initialisation de l'état du système et de sa matrice de covariance

$$\begin{aligned} X_{0/0} &= X_0 \\ P_{0/0} &= \text{var}(X_{0/0}) = P_0 \end{aligned}$$

Etape 2 : Calcul de l'estimation $X_{k/k}$ de l'état du système à l'instant k à partir des mesures disponibles à l'instant $k - 1$

$$X_{k/k-1} = E(X_k/\mathfrak{F}_k) = M_k X_{k-1/k-1} + B_k u_k$$

Etape 3 : Mise à jour intermédiaire de la matrice de covariance de l'état en tenant compte de l'évolution prévue par l'équation d'évolution de l'état.

$$P_{k/k-1} = \text{Var}(X_k/\mathfrak{F}_k) = M_k P_{k-1/k-1} M_k' + G_k Q_k G_k'$$

Etape 4 : Calcul de l'erreur

$$\varepsilon_k = Y_k - Y_{k/k-1} = Y_k - H_k X_{k/k-1}$$

Etape 5 : Calcul du Gain

$$K_k = \frac{\text{cov}(X_k, Y_k)}{\text{Var}(Y_k)} = P_{k/k-1} H_k' (H_k P_{k/k-1} H_k' + R_k)^{-1}$$

Etape 6 : Mise à jour de la matrice de covariance de l'état

$$\begin{aligned} P_{k/k} &= \text{Var}(X_k - \hat{X}_{k/k}) = \text{Cov}((X_k - \hat{X}_{k/k}), (X_k - \hat{X}_{k/k})) \\ &= P_{k/k-1} - K_k \text{Cov}(\varepsilon_k, (X_k - \hat{X}_{k/k})) \\ &= P_{k/k-1} - K_k \text{Cov}(\varepsilon_k, X_k) \\ &= (I - K_k H_k) P_{k/k-1} \end{aligned}$$

Etape 7 : Réactualisation de l'estimation d'état

Puisque on a

$$X_{k/k-1} \perp \varepsilon_k$$

On trouve $X_{k/k} = X_{k/k-1} + (X_k / \varepsilon_k) = X_{k/k-1} + K_k \varepsilon_k$

$$X_{k/k} = X_{k/k-1} + K_k (Y_k - Y_{k/k-1})$$

I.2.1.2. Algorithme EM

Dans la partie précédente, les matrices, H_k, M_k, B_k, G_k étaient supposés connus. En pratique, ces matrices sont inconnues et doivent être estimées. L'algorithme EM est couramment utilisé pour déterminer les Estimateurs du Maximum de Vraisemblance (EMV) des paramètres d'un modèle espace-état. Cet algorithme itératif a le mérite d'être simple, même s'il est relativement lent à converger par rapport à des algorithmes plus sophistiqués. Il a été introduit par Dempster et al. (1977) pour estimer le maximum de vraisemblance de modèles stochastiques à variables cachées.

Pour procéder à une estimation par maximum de vraisemblance des paramètres d'un modèle espace-état, il est nécessaire d'avoir l'expression de la fonction de vraisemblance. Pour chaque jeu de paramètres θ la log-vraisemblance associée à un échantillon Y_1, \dots, Y_T d'un modèle espace-état s'exprime à partir des valeurs prévues de l'état $X_{k-1/k}$ et des matrices de covariance associées $P_{k-1/k}$.

Soit $\{\omega, P_\theta, \mathfrak{F}, \theta \in \Theta\}$ un espace de probabilité. La log-vraisemblance pour estimer un paramètre θ étant donnée l'information \mathfrak{F}_k est donnée par :

$$L(Y_1, \dots, Y_T; \theta) = E \left[\frac{dP_\theta}{dP_0} \mid \mathfrak{F}_k \right]$$

Et le maximum de vraisemblance est défini par :

$$\hat{\theta} = \arg \max_{\theta \in \Theta} L(Y_1, \dots, Y_T; \theta)$$

Si P_0 est la mesure de Lebesgue alors on peut écrire la log-vraisemblance en fonction de la densité conditionnelle $f(Y_i/Y_1, \dots, Y_{i-1})$ sous la forme :

$$L(Y_1, \dots, Y_T; \theta) = \prod_{i=1}^T f(Y_i/Y_1, \dots, Y_{i-1})$$

Sous la condition d'une distribution normale - cas linéaire - on trouve que :

$$\begin{aligned} \ln L(Y_1, \dots, Y_T; \theta) &= -\frac{T}{2} \ln(2\pi) - \frac{1}{2} \sum_{k=0}^T \ln(\det(H_k P_{k/k-1} H_k' + R_k)) \\ &\quad - \frac{1}{2} \sum_{k=0}^T \varepsilon_k^2 (H_k P_{k/k-1} H_k' + R_k)^{-1} \end{aligned}$$

L'algorithme EM est alors un algorithme itératif qui génère une séquence d'estimations $(\theta_i)_{i=1,2,\dots}$ à partir d'une condition initiale θ_0 . Chaque itération se décompose en deux étapes qui s'écrivent :

— Étape E : $\ln L(Y_{0:T}; \theta)$ se déduit de $X_{k-1/k}(\theta_i)$ et de $P_{k-1/k}(\theta_i)$ calculés par un filtre de Kalman.

— Étape M: la maximisation de $\ln L(Y_{0:T}; \theta)$ par rapport à θ conduit à P_{i+1} .

La première étape E « Expectation », c'est-à-dire « Espérance » calcule une vraisemblance à partir de la formule précédente sur la vraisemblance d'un modèle espace-état. Ces formules mobilisent en particulier l'application d'un filtre de Kalman pour connaître l'espérance conditionnelle de l'état $X_{k-1/k}$ et de sa covariance $P_{k-1/k}$ à paramètres i et observations $Y_{0:T}$ fixés.

La seconde étape M « Maximisation », consiste à rechercher un jeu de paramètres maximisant la vraisemblance estimée dans l'étape E. Cette maximisation peut-être analytique ou numérique selon la complexité du problème. Après un cycle « Étape E / Étape M », on obtient θ_{i+1} et on peut montrer que $L(Y_k/\theta_{i+1}) > L(Y_k/\theta_i)$. En itérant ces étapes E et M, les paramètres estimés par l'algorithme convergent généralement vers le maximum de vraisemblance.

I.2.2 Modèle non linéaire

I.2.2.2 Filtre de Kalman étendu (EKF)

Dans le cas non-linéaire la densité de probabilité conditionnelle **n'est pas Gaussienne**. Pour comprendre la linéarisation on considère l'exemple simplifié suivant:

$$X_{k+1} = M(X_k, k) + B_k u_k + G_k W_k$$

Avec M la dynamique non linéaire.

On considère que l'équation d'observation est linéaire

$$Y_k = H_k X_k + V_k$$

Supposons qu'il est possible de générer une trajectoire de référence x_k . On peut donc écrire le système :

$$X_{k+1} = (M(X_k, k) - M(x_k, k)) + M(x_k, k) + B_k u_k + G_k W_k$$

Si la distance entre x_k et l'état réel X_k est suffisamment petite alors il est possible de faire une approximation du système linéaire en utilisant le développement de Taylor

$$M(X_k, k) - M(x_k, k) \approx M_k (X_k - x_k)$$

Avec

$$(M_k)_{i,j} = \frac{\partial (M_k(X_k, k))_i}{\partial (x_k)_j}$$

$$X_{k+1} = M_k X_k - M_k x_k + f(x_k, k) + B_k u_k + G_k W_k$$

Ce qui peut s'écrire

$$X_{k+1} = M_k X_k + \bar{u}_k + G_k W_k$$

Avec

$$\bar{u}_k = -M_k X_k + M(x_k, k) + B_k u_k$$

Le choix le plus simple de trajectoire de référence x_k est le suivant

$$x_{k+1} = M(x_k, k) + B_k u_k, \quad x_0 = X_0$$

Le filtre de Kalman étendu :

$$x_{k+1} = M(x_k, k) + B_k u_k, \quad x_k = X_{k/k}$$

Supposons un cas plus général

$$X_{k+1} = f(X_k, u_{k+1}, W_{k+1})$$

Avec une équation d'observation non linéaire :

$$Y_k = h(X_k, V_k)$$

On fait donc une linéarisation des fonctions non linéaires :

$$F_k = \left. \frac{\partial f}{\partial X} \right|_{X_{k-1/k-1}, u_k}$$

Et

$$H_k = \left. \frac{\partial h}{\partial x} \right|_{\hat{x}_{k/k-1}}$$

On donne alors l'algorithme du filtre de Kalman étendu

Etape 1 : Calcul de l'estimation $X_{k/k}$ de l'état du système à l'instant k à partir des mesures disponibles à l'instant $k - 1$

$$X_{k/k-1} = f(X_{k-1/k-1}, u_k, 0)$$

Etape 2 : Mise à jour intermédiaire de la matrice de covariance de l'état en tenant compte de l'évolution prévue par l'équation d'évolution de l'état.

$$P_{k/k-1} = \text{Var}(X_k/\mathfrak{F}_k) = M_k P_{k-1/k-1} M_k' + G_k Q_k G_k'$$

Etape 3 : Calcul de l'erreur

$$\varepsilon_k = Y_k - Y_{k/k-1} = Y_k - H_k X_{k/k-1}$$

Etape 4 : Calcul du Gain

$$K_k = P_{k/k-1} H_k' (H_k P_{k/k-1} H_k' + R_k)^{-1}$$

Etape 5 : Mise à jour de la matrice de covariance de l'état

$$P_{k/k} = (I - K_k H_k) P_{k/k-1}$$

Etape 6 : Réactualisation de l'estimation d'état

$$X_{k/k} = X_{k/k-1} + K_k (Y_k - H_k X_{k/k-1})$$

I.3 Limites du modèles

Les propriétés statistiques de l'estimateur du maximum de vraisemblance ne sont pas abordées ici mais certaines difficultés de la phase d'estimation sont présentées. Trois problèmes sont brièvement étudiés : le choix des conditions initiales, l'importance du ratio signal/bruit et les propriétés de convergence de l'algorithme EM.

■ Conditions Initiales :

La mise en œuvre du filtre de Kalman nécessite généralement de spécifier les conditions initiales du vecteur d'état. En effet, si tous les éléments du vecteur d'état initial X_0 sont exactement connus a priori, alors X_0 a une distribution a priori correcte, c'est-à-dire dont tous les moments sont finis, avec une moyenne connue et une matrice de variance-covariance bornée. Le filtre de Kalman fournit alors la fonction de vraisemblance exacte des observations par la décomposition de l'erreur de prévision. Une telle information a priori est cependant rarement disponible. Dans cette perspective, une première méthode consiste à fixer arbitrairement les valeurs initiales du vecteur d'état X_0 . Le problème est que les estimations vont dépendre de ces valeurs. Il s'agit alors de tester la sensibilité aux conditions initiales et cela d'autant que l'algorithme fournit des maxima locaux.

Des études ont montré qu'avec des valeurs initiales différentes, l'algorithme converge vers la solution optimale. La figure ci-après montre le phénomène en question, l'étude a été réalisée sur un mobile en déplacement. Afin d'en estimer la position on a utilisé un filtre de Kalman.

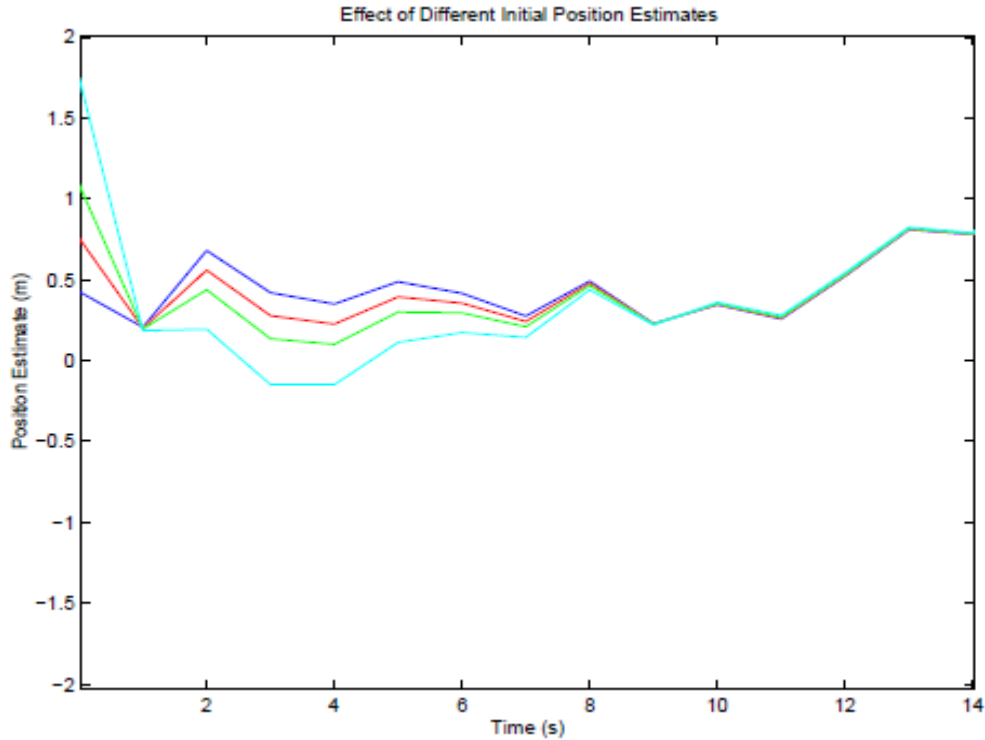


Figure 4 : Effets des conditions initiales

■ Ratio Signal/Bruit

Un deuxième problème concerne le traitement des matrices R et Q , qui représentent respectivement les matrices de variance-covariance du vecteur des innovations et du vecteur des erreurs de mesure. En effet, un élément fondamental dans l'estimation des modèles espace-état est le degré de lissage des variables non observées, qui dépend des deux matrices précédentes). Par exemple, dans le cas univarié, un ratio Q/R élevé (appelé ratio signal/bruit) contribue à accroître le pouvoir explicatif de la variable latente et l'équation de mesure sera donc mieux estimée. À la limite, pour de grandes valeurs de R , la variable non observée absorbe toute la variation des résidus dans l'équation de mesure. Alternativement, si R est une matrice nulle et si M est la matrice identité, les estimations filtrées (respectivement lissées) correspondront à la méthode des moindres carrés récursifs (respectivement des moindres carrés). Il est donc particulièrement important de déterminer ce ratio.

■ Convergence de l'algorithme EM

Un troisième problème est lié aux propriétés de la vraisemblance et à la détermination numérique de la solution. Dans de nombreux cas, la vraisemblance possède malheureusement des maxima locaux dans lesquels l'algorithme peut être piégé. Il est alors préférable de fournir à l'algorithme des paramètres initiaux « relativement proches » du maximum global.

Généralement on utilise la méthode de Newton-Raphson pour calculer le maximum de vraisemblance. Ci-après rappelons brièvement l'algorithme.

La méthode de Newton-Raphson est utilisée pour résoudre les équations de type $f(x) = 0$. Nous prenons une condition initiale x_0 et on commence à itérer de sorte qu'à chaque étape on puisse se rapprocher le plus possible de la solution. Donc le but est de pouvoir écrire x_{n+1} en fonction de x_n .

La séquence x_0, x_1, x_2, \dots générée de la manière décrite ci-dessous doit converger vers la racine exacte.

La tangente de l'équation $y = f(x)$ au point $(x_0, f(x_0))$ est

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

La tangente croise l'abscisse quand $y = 0$ et $x = x_1$, alors

$$-f(x_0) = f'(x_0)(x_1 - x_0)$$

En résolvant l'équation pour x_1 on trouve :

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

Et plus généralement

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

La formule précédente converge, pour une condition initiale x_0 , vers la solution optimale à savoir celle qui résout l'équation $f(x) = 0$.

II-Application en utilisant le Filtre de Kalman

Dans cette partie nous verrons des applications du filtre de Kalman. On prendra le prix future pour pouvoir extraire le prix spot. Comme on l'a vu précédemment les deux sont liés par des relations mathématiques et aussi par des relations économiques ;

On essayera de transformer les modèles sous forme espace-état pour ensuite appliquer le filtre de Kalman. Nous commencerons donc par des modèles simples qu'on développera par la suite.

Or sur le marché il n'y a pas « ou presque » de prix de pétrole liquide ce qui nous amènent à utiliser les prix futures de courte durée, soit d'une période inférieure à 1 mois, comme prix spot. L'idée est donc de pouvoir estimer les prix spot à partir des futures et de les comparer avec les prix futures de courtes durées, ainsi on les aura modélisé

Nous repartirons notre analyse en trois étapes : la première en utilisant une relation directe entre le future et le spot sans convenience yield ; la deuxième partie nous introduirons le convenience yield mais de sorte qu'il soit constant. Finalement, nous utiliserons le modèle de Schwartz-Brennan avec un convenience yield qui suit un processus de retour à la moyenne.

II.1 Modèle sans Convenience Yield.

II.1.1 Formulation du modèle

Soit $F_{t,T}$ le prix du futures à l'instant t à échéance T , S_t le prix spot à l'instant t . r_t le taux d'intérêt sans risque. Ainsi la relation entre prix futures et prix spot s'écrit sous la forme suivante.

$$F_{t,T} = S_t e^{\int_t^T r_s ds}$$

Nous supposons que le **taux d'intérêt sans risque est indépendant du temps**. La relation devient ainsi :

$$F_{t,T} = S_t e^{r\tau}$$

Avec $\tau = T - t$ la maturité du future

Nous allons exprimer le prix future et le prix spot sous forme espace-état. Soit $Y_t = \ln(F_{t,T})$ et $X_t = \ln(S_t)$; l'équation précédente devient sous la forme :

$$Y_t = X_t + r\tau$$

D'autre part soit la dynamique des prix spot :

$$dS = \mu S dt + \sigma_S S dz_1$$

Avec Z_1 un mouvement Brownien

$$dX_t = \left(\mu - \frac{1}{2} \sigma_S^2 \right) dt + \sigma_S dz_1$$

En discrétisant la relation précédente on trouve :

$$X_{t+1} = X_t + \left(\mu - \frac{1}{2} \sigma_S^2 \right) \Delta t + \theta_t \quad \text{Avec } \theta_t \sim N(0, \sigma_S \sqrt{\Delta t})$$

Le modèle espace-état s'écrit ainsi :

$$\begin{cases} Y_t = X_t + r\tau + \varepsilon_t & \text{Avec } \varepsilon_t \sim N(0, q) \\ X_{t+1} = X_t + \left(\mu - \frac{1}{2} \sigma_S^2 \right) \Delta t + \theta_t & \text{Avec } \theta_t \sim N(0, \sigma_S \sqrt{\Delta t}) \end{cases}$$

Remarque :

Dans l'équation précédente on remarque qu'un terme en ε_t s'ajoute au modèle, alors qu'en théorie ce terme n'existe pas. Son introduction est purement illustrative puisque cela nous permet d'écrire notre modèle sous la forme espace-état qu'on a défini précédemment. De plus en utilisant le filtre de Kalman on va pouvoir tester si notre algorithme est efficace et converge vers notre modèle théorique c'est-à-dire que son espérance et sa variance sont nulles.

II.1.2 Application du modèle

➤ Données du modèle

Dans la deuxième partie on a vu que pour résoudre le système d'équation précédent, on utilise le filtre de Kalman.

Nous appliquons alors le filtre de Kalman sur nos données. Puisque le filtre de Kalman prend en compte l'information disponible à partir de la date initiale $t = 0$ et non pas à partir de $t = -\infty$ comme les modèles ARMA. Notre base de données ne sera pas aussi étanche que celle prise dans l'application du modèle ARMA.

Nos données sont celles des futures WTI que mon encadrant à bien voulu les télécharger de la plateforme Bloomberg. Ils s'étalent du 9 avril 2012 au 1 mai 2013, ces futures sont de maturité allant de 1 à 13 mois. Comme nous l'avons signalé auparavant le future de 1 mois est considéré comme le prix spot et le futures 13 mois comme le future de maturité 1 ans. Nous allons extraire le prix spot du futures 13 mois et les comparer avec le future 1 mois.

➤ Résolution du système

Reprenons le système d'équation défini précédemment

$$\begin{cases} Y_t = X_t + r\tau + \varepsilon_t & \text{Avec } \varepsilon_t \sim N(0, q) \\ X_{t+1} = X_t + \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma_S^2\right)\Delta t + \theta_t & \text{Avec } \theta_t \sim N(0, \sigma_S\sqrt{\Delta t}) \end{cases}$$

On est dans le cas du filtre de Kalman simple, c'est-à-dire le cas linéaire. On appliquera le filtre de Kalman sur **Excel** pour mieux apprécier les étapes de l'algorithme.

Avant de commencer l'algorithme, il paraît judicieux de rappeler ce qu'on a de ce qu'on cherche.

Y_t : Prix future WTI de maturité 13 mois

X_t : Prix spot **non observable** : c'est le prix qu'on essaie de modéliser

r : Taux d'intérêt sans risque, on prendra $r = 3\%$

τ : Maturité du future à savoir 12 mois donc $\tau = 1$

Δt : représente le temps entre deux observations par rapport à un an. Puisque nos données sont journalières donc $\Delta t = 1/365$

μ : Drift du prix spot : **variable non observable**

σ_S : Écart type du prix spot : **variable non observable**

q : Écart type du vecteur d'innovation : **variable non observable**

On peut désormais commencer l'application de notre algorithme.

Initialisation :

Comme nous l'avons précisé auparavant l'initialisation des paramètres n'est pas problématique vu qu'au bout du compte les paramètres vont converger vers leurs maximums lors de l'utilisation de l'algorithme EM.

$$X_{0/0} = Y_0 - r\tau$$
$$P_{0/0} = 0$$

Les autres étapes de l'algorithme de Kalman ne seront pas développées par la suite, car ce ne sont que des applications directes des formules.

Pour estimer les paramètres (μ, σ_S, q) nous utilisons l'algorithme EM ; Sous Excel nous utilisons la fonction Solver pour le calcul. Pour ce faire le vecteur d'initialisation est fixé à $(0,01 ; 0,01 ; 0,01)$. La vraisemblance est alors maximisée avec l'algorithme EM et on trouve le résultat ci-dessous.

Paramètres	μ	σ_S	q
Valeur estimée(%)	26	22	0
Log vraisemblance		784,43	

II.1.3 Interprétation des résultats

On remarque que $q = 0$ ce qui correspond à une variance nul de l'erreur des innovations. Comme on l'a mentionné précédemment on a ajouté le terme en ε_t juste pour pouvoir écrire notre modèle sous forme espace-état. En effet ce terme s'annule après application du filtre de Kalman ce qui est conforme à la théorie.

Après avoir estimé les paramètres du modèle, on peut dorénavant passer à la comparaison de la série observé et de la série simulé. Rappelons que la série observée correspond au future de maturité 1 mois et que la série simulée correspond à celle extraire par le filtre de Kalman.

Le graphe ci-dessous résume le résultat obtenu.

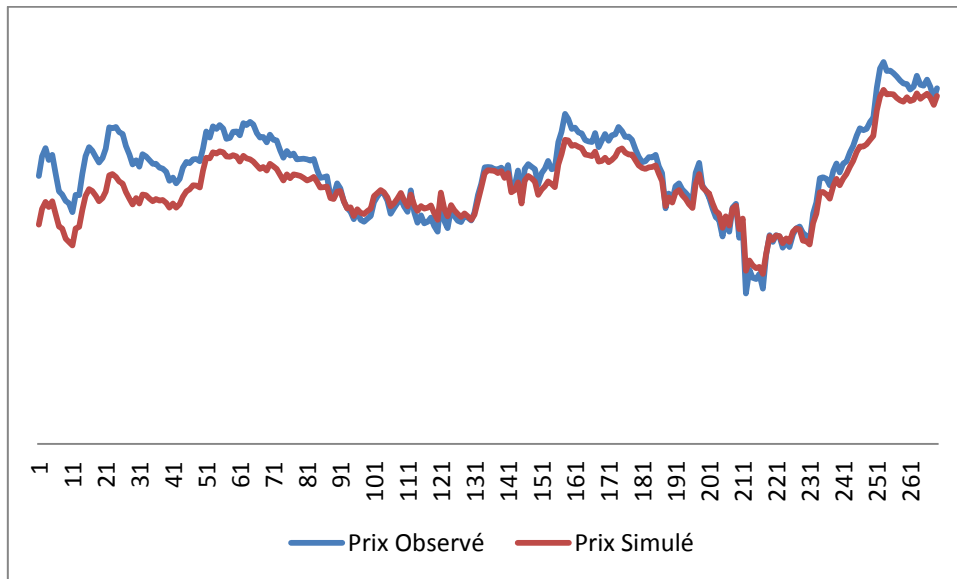


Figure 5 : Sans CY

Dans l'ensemble on remarque que les deux séries se concordent malgré un écart significatif dans les premières valeurs. Cet écart est en effet dû aux valeurs initiales. D'autre part le ratio signal/bruit tend vers l'infini ce qui contribue à accroître le pouvoir explicatif de la variable latente et donc l'équation de mesure sera mieux estimée.

Pour mieux apprécier la qualité de notre modèle, nous allons nous focalisé sur les 20 dernières valeurs.

Le graphe ci-dessous résume le résultat obtenu.

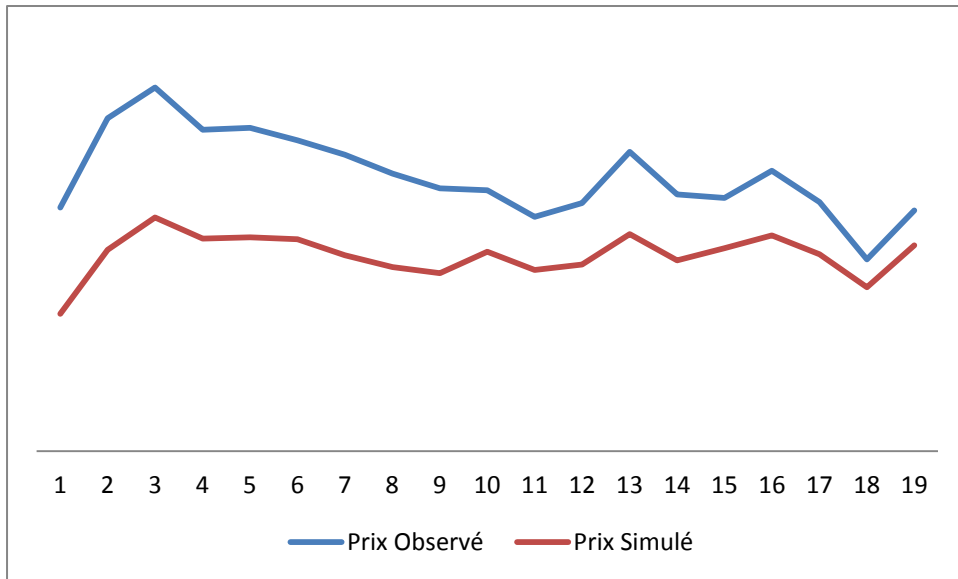


Figure 6 20 dernières

On remarque qu'il y a un écart entre les prix observés et les prix simulés. Cet écart est aux alentours de 0,02 \$, ce qui nous amène à penser qu'il y a un facteur qui influence sur le prix du pétrole. Ce facteur n'est nul que le Convenience Yield introduit dans le deuxième chapitre.

Dans la partie suivante, nous introduirons le Convenience Yield dans nos équations mais comme facteur constant.

II.2 Modèle avec le Convenience Yield constant.

Nous avons vu précédemment qu'il y a un écart entre les valeurs observées et les valeurs prédites, ce qui nous a amené à introduire le convenience yield. Dans cette partie nous supposons que le convenience yield est constant, et nous essaierons de modéliser le prix spot.

II.2.1 Formulation du modèle

Soit $F_{t,T}$ le prix du futures à l'instant t à échéance T , S_t le prix spot à l'instant t . r_t le taux d'intérêt sans risque. Ainsi la relation entre prix futures et prix spot s'écrit sous la forme suivante.

$$F_{t,T} = S_t e^{\int_t^T (r_s - \delta_s) ds}$$

Nous supposons que le **taux d'intérêt sans risque et le convenience yield sont indépendant du temps**. La relation devient ainsi :

$$F_{t,T} = S_t e^{(r-\delta)\tau}$$

Avec $\tau = T - t$ la maturité du future

Nous allons exprimer le prix future et le prix spot sous forme espace-état. Soit $Y_t = \ln(F_{t,T})$ et $X_t = \ln(S_t)$; l'équation précédente devient sous la forme :

$$Y_t = X_t + r\tau - \delta\tau$$

D'autre part soit la dynamique des prix spot incluant le convenience yield :

$$dS = (\mu - \delta)Sdt + \sigma_S S dz_1$$

Avec Z_1 un mouvement Brownien

$$dX_t = \left(\mu - \delta - \frac{1}{2} \sigma_S^2 \right) dt + \sigma_S dz_1$$

En discrétisant la relation précédente on trouve :

$$X_{t+1} = X_t + \left(\mu - \delta - \frac{1}{2} \sigma_S^2 \right) \Delta t + \theta_t \quad \text{Avec } \theta_t \sim N(0, \sigma_S \sqrt{\Delta t})$$

Le modèle espace-état s'écrit ainsi :

$$\begin{cases} Y_t = X_t + (r - \delta)\tau + \varepsilon_t & \text{Avec } \varepsilon_t \sim N(0, q) \\ X_{t+1} = X_t + \left(\mu - \delta - \frac{1}{2} \sigma_S^2 \right) \Delta t + \theta_t & \text{Avec } \theta_t \sim N(0, \sigma_S \sqrt{\Delta t}) \end{cases}$$

Remarque :

Comme dans la partie précédente on remarque qu'un terme en ε_t s'ajoute au modèle, alors qu'en théorie ce terme n'existe pas. Nous rappelons que son introduction est purement illustrative puisque cela nous permet d'écrire notre modèle sous la forme espace-état qu'on a défini précédemment. De plus en utilisant le filtre de Kalman on va pouvoir tester si notre algorithme est efficace et converge vers notre modèle théorique c'est-à-dire tel que son espérance et sa variance sont nulles.

II.2.2 Application du modèle

➤ Données du modèle

Nous avons gardé les mêmes données que celles utilisées dans la partie précédente. Plus tard cela va nous permettre de comparer entre les modèles.

Nos données sont donc celles des futures WTI. Ils s'étalent du 9 avril 2012 au 1 mai 2013, ces futures sont de maturité allant de 1 à 13 mois. Rappelons que le future 1 mois est considéré comme le prix spot et le futures 13 mois comme le future de maturité 1 ans. Nous allons extraire le prix spot du futures 13 mois et les comparer avec le future 1 mois.

➤ Résolution du système

Reprenons le système d'équation défini précédemment

$$\begin{cases} Y_t = X_t + (r - \delta)\tau + \varepsilon_t & \text{Avec } \varepsilon_t \sim N(0, q) \\ X_{t+1} = X_t + \left(\mu - \delta - \frac{1}{2}\sigma_S^2\right)\Delta t + \theta_t & \text{Avec } \theta_t \sim N(0, \sigma_S^2\sqrt{\Delta t}) \end{cases}$$

On est dans le cas du filtre de Kalman simple, c'est-à-dire le cas linéaire. On appliquera le filtre de Kalman sur **Excel** pour mieux apprécier les étapes de l'algorithme.

Avant de commencer L'algorithme, il paraît judicieux de rappeler ce qu'on a de ce qu'on cherche.

Y_t : Prix future WTI de maturité 13 mois

X_t : Prix spot **non observable** : c'est le prix qu'on essaie de modéliser

δ : Le Convenience Yield considéré constant : **variable non observable**

r : Taux d'intérêt sans risque, on prendra **$r = 3\%$**

τ : Maturité du future à savoir 12 mois donc **$\tau = 1$**

Δt : représente le temps entre deux observations par rapport à un an. Puisque nos données sont journalières donc **$\Delta t = 1/365$**

μ : Drift du prix spot : **variable non observable**

σ_S : Écart type du prix spot : **variable non observable**

q : Écart type du vecteur d'innovation : **variable non observable**

On peut désormais commencer l'application de notre algorithme.

Initialisation :

Comme nous l'avons précisé auparavant l'initialisation des paramètres n'est pas problématique vu qu'au bout du compte les paramètres vont converger vers leurs maximums lors de l'utilisation de l'algorithme EM.

$$\delta_0 = \frac{\ln(F_{t,T_2}) - \ln(F_{t,T_1})}{T_2 - T_1}$$

$$X_{0/0} = Y_0 - r\tau + \delta\tau$$

$$P_{0/0} = 0$$

Pour estimer les paramètres $(\delta, \mu, \sigma_S, q)$ nous utilisons l'algorithme EM ; Sous Excel nous utilisons la fonction Solver pour le calcul. Pour ce faire le vecteur d'initialisation est fixé à $(0,03 ; 0,01 ; 0,01 ; 0,01)$. La vraisemblance est alors maximisée avec l'algorithme EM et on trouve le résultat ci-dessous.

Paramètres	δ	μ	σ_S	q
Valeur estimée(%)	2,38	25	22	0
Log vraisemblance	798,27			

II.2.3 Interprétation des résultats

Comme dans partie précédente on remarque que $q = 0$ ce qui correspond à une variance nul de l'erreur des innovations. Comme on l'a mentionné précédemment on a ajouté le terme en ε_t juste pour pouvoir écrire notre modèle sous forme espace-état. En effet ce terme s'annule après application du filtre de Kalman ce qui est conforme à la théorie.

On remarque que la valeur du Convenience Yield δ est de l'ordre de 0,0238 ce qui proche de l'écart entre le prix observé et le prix simulé trouvé dans la partie précédente.

Après avoir estimé les paramètres du modèle, on peut dorénavant passer à la comparaison de la série observée et de la série simulée. Rappelons que la série observée correspond au future de maturité 1 mois et que la série simulée correspond à celle extraire par le filtre de Kalman.

Le graphe ci-dessous résume le résultat obtenu.

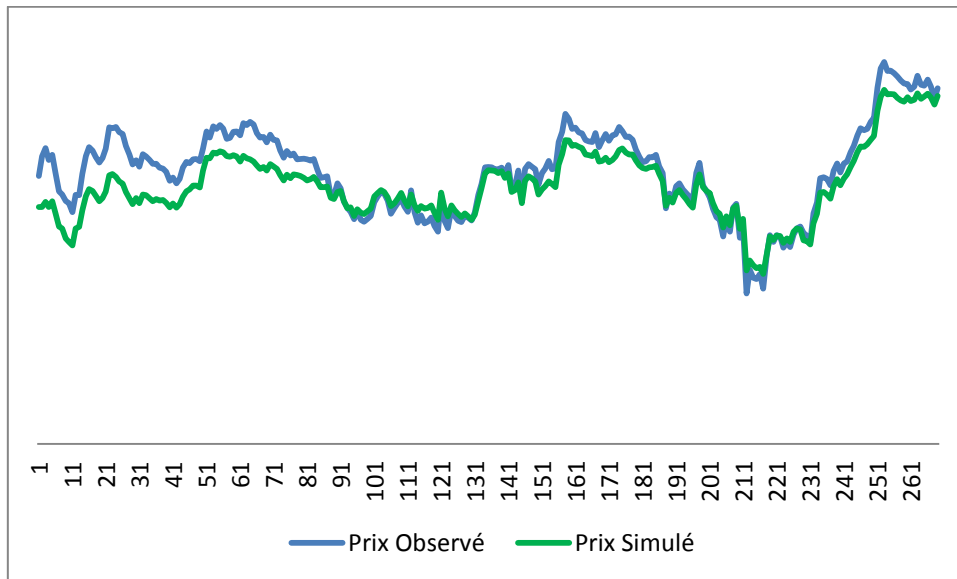
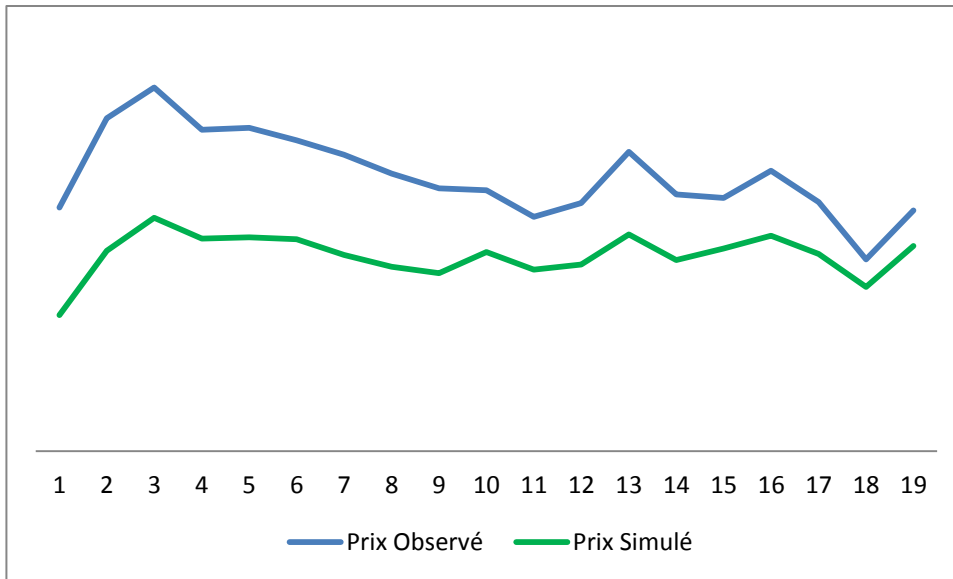


Figure 7 CY constant

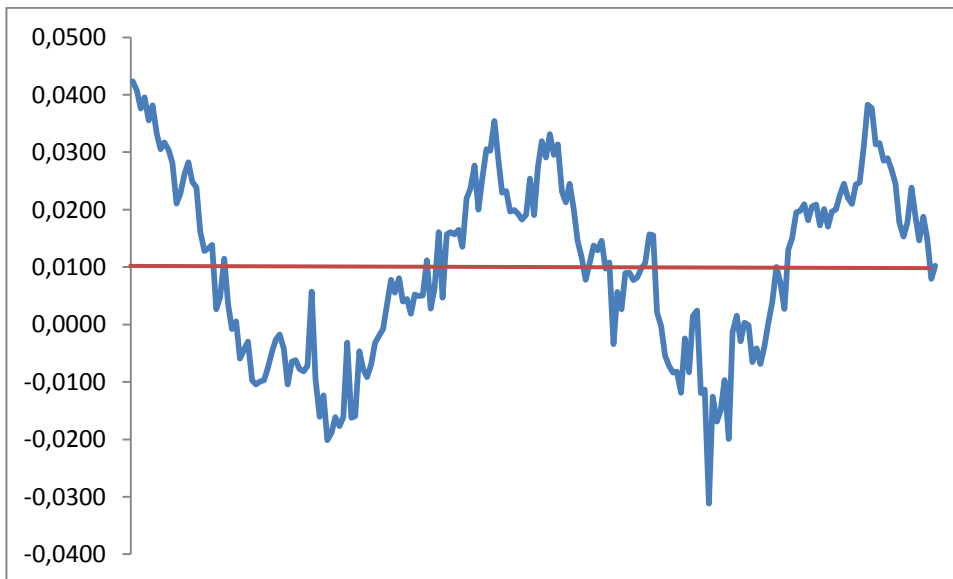
On retrouve presque les mêmes résultats que précédemment. Dans l'ensemble on remarque que les deux séries se concordent malgré un écart significatif dans les premières valeurs. Cet écart est en effet dû aux valeurs initiales. D'autre part le ratio signal/bruit tend vers l'infini ce qui contribue à accroître le pouvoir explicatif de la variable latente et donc l'équation de mesure sera mieux estimée.

Pour mieux apprécier la qualité de notre modèle, nous allons nous focaliser sur les 20 dernières valeurs.

Le graphe ci-dessous résume le résultat obtenu.



On remarque que malgré l'ajout du convenience yield, l'écart entre les prix persiste ; Nous décidons donc de représenter cet écart.



L'écart oscille autour de sa moyenne à savoir 0,01. D'autre part on a défini l'écart comme étant le convenience yield, donc on peut affirmer que le convenience yield suit un processus de retour à la moyenne. Ceci en effet prouve la théorie de Schwartz-Brennan définie dans le deuxième chapitre qui affirme que le convenience yield suit un processus de retour à la moyenne.

Dans la partie suivante nous introduirons alors le modèle de Schwartz-Brennan en prenant le convenience yield sous forme stochastique.

II.3 Modèle avec le Convenience Yield stochastique.

Nous avons vu précédemment que l'écart entre les valeurs observées et les valeurs prédites est de forme sinusoidale et qu'il oscille autour de sa moyenne, ce qui nous a amené à penser que le convenience yield suit un processus de retour à la moyenne. Effectivement cela a été démontré dans la théorie de Schwartz.

Dans le deuxième chapitre nous avons démontré l'équivalence entre le modèle de Schwartz-Brennan et celui de Gabillon. Dans ce chapitre nous retenons le modèle de Schwartz dans la modélisation de prix spot.

II.3.1 Formulation du modèle

Soit $F_{t,T}$ le prix du futures à l'instant t à échéance T , S_t le prix spot à l'instant t . r_t le taux d'intérêt sans risque. Ainsi la relation entre prix futures et prix spot s'écrit sous la forme suivante.

$$F_{t,T} = S_t e^{\int_t^T (r_s - \delta_s) ds}$$

La résolution de l'équation¹ s'écrit sous la forme :

$$F(S, \delta, t, T) = S(t) \times \exp \left[-\delta \frac{1 - e^{-\kappa\tau}}{\kappa} + B(\tau) \right]$$

Avec :

$$B(\tau) = \left[\left(r - \hat{\alpha} + \frac{\sigma_\delta^2}{2\kappa^2} - \frac{\sigma_\delta \sigma_S \rho}{\kappa} \right) \times \tau \right] + \left[\frac{1}{4} \sigma_\delta^2 \times \frac{1 - e^{-2\kappa\tau}}{\kappa^3} \right] \\ + \left[\left(\hat{\alpha}\kappa + \sigma_\delta \sigma_S \rho - \frac{\sigma_\delta^2}{2\kappa} \right) \times \left(\frac{1 - e^{-\kappa\tau}}{\kappa} \right) \right]$$

¹ Voir Annexe 2

$$\hat{\alpha} = \alpha - \frac{\lambda}{\kappa}$$

Nous allons exprimer le prix future et le prix spot sous forme espace-état. Soit $Y_t = \ln(F_{t,T})$ et $G_t = \ln(S_t)$; l'équation précédente devient sous la forme :

$$Y_t = G_t - \delta_t \frac{1 - e^{-\kappa\tau}}{\kappa} + B(\tau)$$

L'équation de Mesure s'écrit sous la forme :

$$Y_t = \left[1 - \frac{1 - e^{-\kappa\tau}}{\kappa} \right] \begin{bmatrix} G_t \\ \delta_t \end{bmatrix} + B(\tau)$$

D'autre part soit le modèle de Schwartz-Brennan s'écrit sous la forme :

$$\begin{cases} dS = (\mu - \delta)Sdt + \sigma_S S dz_S \\ d\delta = \kappa(\alpha - \delta)dt + \sigma_\delta dz_\delta \end{cases}$$

Avec :

$$E[dz_S dz_\delta] = \rho dt$$

Donc en passant au logarithme on trouve :

$$\begin{cases} dG = \left(\mu - \delta - \frac{1}{2}\sigma_S^2 \right) dt + \sigma_S dz_1 \\ d\delta = \kappa(\alpha - \delta)dt + \sigma_\delta dz_\delta \end{cases}$$

Avec :

$$E[dz_S dz_\delta] = \rho dt$$

En discrétisant la relation précédente on trouve :

$$\begin{cases} G_{t+1} = G_t + \left(\mu - \delta_t - \frac{1}{2} \sigma_S^2 \right) \Delta t + \theta_{1t} & \text{Avec } \theta_{1t} \sim N(0, \sigma_S \sqrt{\Delta t}) \\ \delta_{t+1} = \kappa(\alpha - \delta_t) \Delta t + \theta_{2t} & \text{Avec } \theta_{2t} \sim N(0, \sigma_\delta \sqrt{\Delta t}) \end{cases}$$

Avec :

$$E[dz_S dz_\delta] = \rho dt$$

L'équation d'Etat s'écrit alors sous la forme :

$$\begin{bmatrix} G_{t+1} \\ \delta_{t+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\mu - \frac{1}{2} \sigma_S^2) \Delta t \\ \kappa \alpha \Delta t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -\Delta t \\ 0 & 1 - \kappa \Delta t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_t \\ \delta_t \end{bmatrix} + W_t$$

Avec

$$E(W_t) = 0$$

$$Q_t = \text{Var}(W_t) = \begin{bmatrix} \sigma_S^2 \Delta t & \rho \sigma_S \sigma_\delta \Delta t \\ \rho \sigma_S \sigma_\delta \Delta t & \sigma_\delta^2 \Delta t \end{bmatrix}$$

Posons :

$$X_t = \begin{bmatrix} G_t \\ \delta_t \end{bmatrix}$$

Le modèle espace-état s'écrit ainsi :

$$\begin{cases} Y_t = H_t X_t + B(\tau) + \varepsilon_t & \text{Avec } \varepsilon_t \sim N(0, q) \\ X_{t+1} = M_t X_t + N_t + W_t & \text{Avec } W_t \sim N(0, Q_t) \end{cases}$$

Remarque :

Comme précédemment on remarque qu'un terme en ε_t s'ajoute au modèle, alors qu'en théorie ce terme n'existe pas. Nous rappelons que son introduction est purement illustrative puisque cela nous permet d'écrire notre modèle sous la forme espace-état qu'on a défini précédemment. De plus en utilisant le filtre de Kalman on va pouvoir tester si notre algorithme est efficace et converge vers notre modèle théorique c'est-à-dire tel que son espérance et sa variance sont nuls.

II.3.2 Application du modèle

➤ Données du modèle

Nos données sont celles des futures WTI. Ils s'étalent du 9 avril 2012 au 1 mai 2013, ces futures sont de maturité allant de 1 à 13 mois. Rappelons que le future 1 mois est considéré comme le prix spot et le futures 13 mois comme le future de maturité 1 ans.

➤ Résolution du système

Reprenons le système d'équation défini précédemment

$$\begin{cases} Y_t = H_t X_t + B(\tau) + \varepsilon_t & \text{Avec } \varepsilon_t \sim N(0, q) \\ X_{t+1} = M_t X_t + B_t + W_t & \text{Avec } W_t \sim N(0, Q_t) \end{cases}$$

On est dans le cas du filtre de Kalman simple, c'est-à-dire le cas linéaire. On appliquera le filtre de Kalman sur **Excel** pour mieux apprécier les étapes de l'algorithme.

Avant de commencer l'algorithme, il paraît judicieux de rappeler ce qu'on a de ce qu'on cherche.

Y_t : Prix future WTI de maturité 13 mois

G_t : Prix spot **non observable** : c'est le prix qu'on essaie de modéliser

δ_t : Le Convenience Yield considéré constant : **variable non observable**

r : Taux d'intérêt sans risque, on prendra $r = 3\%$

τ : Maturité du future à savoir 12 mois donc $\tau = 1$

Δt : représente le temps entre deux observations par rapport à un an. Puisque nos données sont journalières donc $\Delta t = 1/365$

μ : Drift du prix spot : **variable non observable**

σ_S : Volatilité du prix spot : **variable non observable**

α : Valeur moyenne à long terme du convenience yield : **variable non observable**

k : Force de rappel agissant sur le convenience yield : **variable non observable**

σ_δ : Volatilité du convenience yield : **variable non observable**

Q_t : Ecart type du vecteur d'erreur mesure : **variable non observable**

λ : Prime de risque : **variable non observable**

q : Écart type du vecteur d'innovation : **variable non observable**

Pour estimer les paramètres $(\mu, \sigma_S, \sigma_\delta, \alpha, \kappa, \rho, \lambda, q)$ nous utilisons l'algorithme EM ; Sous Excel nous utilisons la fonction Solver pour le calcul. Pour ce faire le vecteur d'initialisation est fixé à $(0,01 ; 0,01 ; 0,01 ; 0,01 ; 0,01 ; 0,01 ; 0,01 ; 0,01)$. La vraisemblance est alors maximisée avec l'algorithme EM et on trouve le résultat ci-dessous.

Paramètres	μ	σ_S	σ_δ	α	κ	ρ	λ	q
Valeur estimée(%)	71	16	0	0	45316	7,8	0	0
Log vraisemblance	898,17							

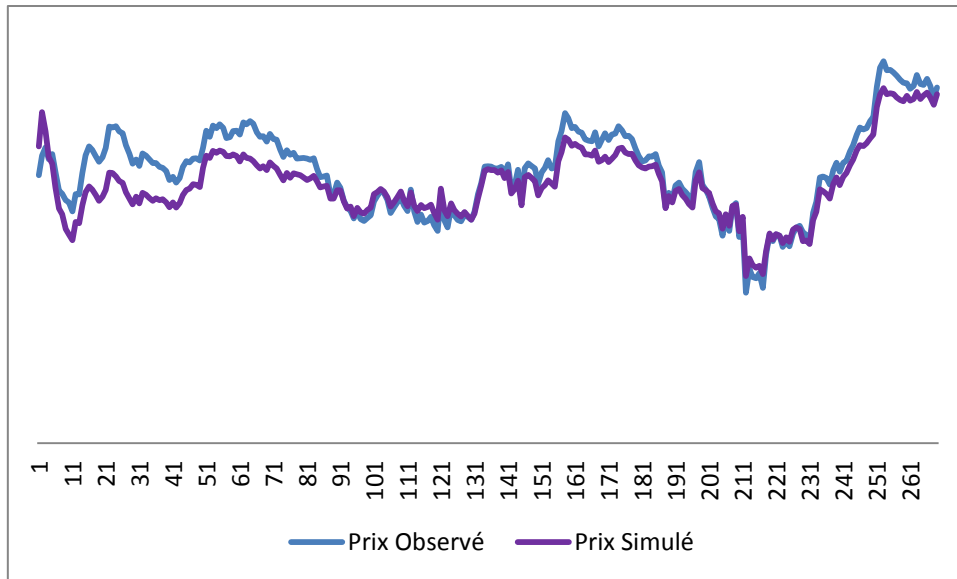
II.3.3 Interprétation des résultats

Comme dans la partie précédente on remarque que $q = 0$ ce qui correspond à une variance nul de l'erreur des innovations.

On remarque que la corrélation entre le prix spot et le convenience yield $\rho = 0,078$; Cela montre que le convenience yield impact le prix spot.

Après avoir estimé les paramètres du modèle, on peut dorénavant passer à la comparaison de la série observé et de la série simulé. Rappelons que la série observée correspond au future de maturité 1 mois et que la série simulée correspond à celle extraire par le filtre de Kalman.

Le graphe ci-dessous résume le résultat obtenu.



On retrouve presque les mêmes résultats que précédemment. Dans l'ensemble on remarque que les deux séries se concordent malgré un écart significatif dans les premières valeurs. Cet écart est en effet dû aux valeurs initiales. D'autre part le ratio signal/bruit tend vers l'infini ce qui contribue à accroître le pouvoir explicatif de la variable latente et donc l'équation de mesure sera mieux estimée.

Après avoir résolu les trois modèles et apprécié les avantages et les inconvénients de chacun, on peut maintenant comparer les modèles entres eux.

II.4 Comparaison des modèles

■ Critère de performance

Pour analyser les performances des modèles de structure par terme des prix des commodités appliqués au marché du pétrole brut, toutes les études réalisées dans cette partie recourent aux deux mêmes critères : les erreurs de prix moyennes (Mean Pricing Errors) et la racine de la moyenne des carrés des erreurs (Root Mean Squared Errors).

La définition des erreurs de prix moyennes (MPE), exprimées en Dollar USD, est la suivante :

$$MPE = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N (\tilde{F}_{t,n} - F_{t,n})$$

Où N est le nombre d'observations, \tilde{F}_t est le prix théorique à l'instant t calculé à partir de chaque modèle, et F_t le prix à terme de maturité t observé. Le MPE mesure le biais d'estimation. Si cette dernière est correcte, le MPE doit être proche de zéro.

En retenant les mêmes notations, la racine de la moyenne des carrés des erreurs (RMSE), exprimée en Dollar USD, est calculée pour chaque maturité de la façon suivante :

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N (\tilde{F}_{t,n} - F_{t,n})^2}$$

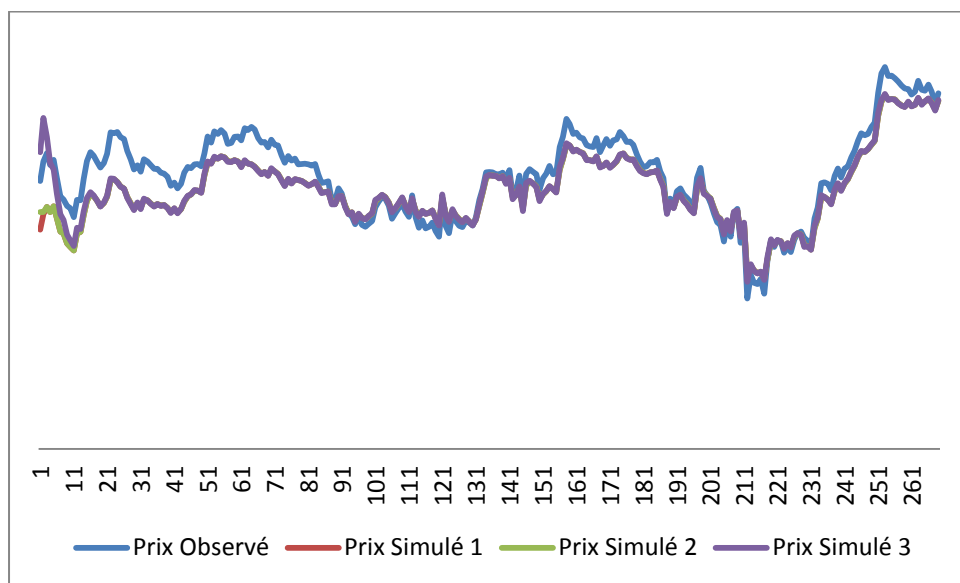
Le RMSE est une variance empirique, calculée en supposant que les estimations sont non biaisées. Ce critère permet de mesurer la qualité des estimations en termes de stabilité. Il est considéré comme le plus représentatif : les erreurs de prix peuvent en effet se compenser de telle sorte que l'erreur de prix moyenne soit faible malgré la présence d'écart importants.

Comme nous l'avons signalé auparavant nous essayons de modéliser le prix spot. Donc pour mesurer la qualité de notre modèle, nous prendrons le future de maturité 1

mois comme étant le prix observé et le prix spot issu du processus de Kalman comme étant le prix estimé.

La période d'étude utilisée pour estimer les paramètres de chaque modèle est la même ce qui va nous permettre de comparer entre le prix observé et les prix simulés à partir de chaque modèle et ainsi étudier la capacité du modèle à représenter les prix observés.

Le graphe ci-dessous compare les trois courbes des prix simulés à celle de la courbe du prix observé



Tel que « Prix Simulé 1 » correspond au prix simulé à partir du modèle 1 « Sans convenience yield », ainsi de suite pour les autres modèles.

On remarque que excepté pour les valeurs initiales, les courbes se superposent presque parfaitement pour les trois modèles. Ci étant dit que le graphe n'est pas un facteur clé pour trancher quant à la performance du modèle ; On compare alors les deux critères de performance : MPE et RMSE

Le Tableau ci-dessous mesure le MPE ainsi que RMSE pour chaque modèle

	Modèle 1	Modèle 2	Modèle 3
MPE (%)	1,905	1,895	1,692
RMSE (%)	2,879	2,860	2,683

Tableau 19: MPE & RMSE

Si l'on se réfère au critère du MPE et du RMSE, le filtre de Kalman appliqué au modèle 3 « convenience yield stochastique » permet de représenter plus précisément le prix spot que ne l'autorise l'application aux autres modèles.

Conclusion

Ce chapitre avait pour vocation la modélisation des prix spot à travers les prix des futures. Le meilleur moyen a été d'utiliser les modèles à variables cachés.

Nous avons alors présenté dans la première partie le modèle Espace-Etat ainsi que sa résolution par le filtre de Kalman comprenant l'algorithme EM.

Dans la deuxième partie, on a vu une application directe du filtre de Kalman. On l'a appliqué pour pouvoir modéliser le prix spot du WTI. Pour ce faire on a utilisé trois modèles : le Modèle 1 « Sans convenience yield » qui nous a donné une bonne modélisation du prix spot malgré un écart ; Cet écart nous a amené à adopter le modèle 2 qui prend en compte le convenience yield constant. Ceci dit dans le deuxième modèle l'écart suit un processus de retour à la moyenne. On s'est rabattu donc sur le modèle 3 à savoir celui de Schwartz-Brennan en prenant un convenience yield stochastique.

Or malgré l'introduction du convenience yield, l'écart entre les prix observés et les prix simulés persiste, mais il est néanmoins inférieur aux autres modèles. La comparaison en utilisant les critères de performance entre les prix simulés issus des trois modèles et celui du prix observé, nous a amené à garder le troisième modèle pour la modélisation.

Conclusion générale

Tout au long de ce projet, on a essayé de mettre l'accent sur les concepts clés et essentiels à la compréhension de la modélisation des matières premières plus particulièrement à la modélisation du marché pétrolier. Pour ce faire nous avons introduit un premier chapitre où il a été question de donner une vision globale sur les matières premières et de montrer l'importance du cycle.

On s'est attaqué dans le deuxième chapitre au marché à terme. Dès lors on a défini deux modèles de modélisation. Le premier modèle considéré celui de Schwartz-Brennan repose sur l'hypothèse selon laquelle le prix au comptant et le convenience yield ont un comportement de retour vers une valeur moyenne. Le second celui de Gabillon introduit une asymétrie dans le comportement du convenience yield. Nous avons démontré qu'il y a en effet équivalence entre les deux modèles. Cela est cohérent si l'on remarque que le convenience yield apparaît comme un terme de dérive stochastique qui n'est pas loin d'un comportement à long terme comme dans le modèle de Gabillon.

Le troisième chapitre était concentré sur la modélisation en utilisant les séries temporelles. Une modélisation directe des prix n'a pas été concluante, on s'est dirigé vers une décomposition de la série en tendance et en cycle. La modélisation ainsi que la prévision de ces deux composantes nous ont renseigné sur le chemin ou la tendance globale que le prix allait prendre.

Etant donné les résultats obtenus dans le second chapitre et l'équivalence entre le modèle de Schwartz-Brennan et celui de Gabillon, seul le modèle de Schwartz-Brennan a été retenu pour la dernière partie de notre projet. En effet trois modèles ont été développés dans ce dernier chapitre. Le premier a été de supposer que le prix futur ne dépend que des flux générés à partir du prix spot. L'écart entre les prix modélisés et ceux observés nous a amené à adopter un deuxième modèle comprenant le convenience yield de telle sorte qu'il représente l'écart entre les prix. Cet écart persiste encore dans le deuxième modèle mais cette fois non pas de manière constante mais de telle façon d'un mouvement oscillant autour de sa moyenne. Le modèle de Schwartz-Brennan a été la solution pour

remédier à ce problème. La performance de ce dernier modèle à été de loin la plus satisfaisante dans la modélisation du prix spot.

D'autre modèle aurait pu être développé pour la modélisation comme celui de la décomposition en série de Fourier. En effet cette méthode peut être utilisées en considérons le prix comme étant un signal. On a signalé plus haut l'importance des cycles dans la modélisation, ils sont comparable à des fonctions périodiques, mais de forme quelconque. On peut considérer ces signaux comme la superposition de fonctions périodiques simples que sont les fonctions sinus et cosinus. Le signal apparait alors comme la somme d'une série trigonométrique appelée série de Fourier. En modélisant chaque composante et en utilisant la transformée inverse on peut modéliser le prix et ainsi faire des prévisions.

Bibliographie

Fouad MARRI, Séries chronologiques, INSEA, 2012.

Jeroen V.K. Rombouts, Econométrie des séries temporelles, 6 Janvier 2010.

Arthur CHARPENTIER, Modèles linéaires multivariés : Introduction aux modèles ARCH et GARCH, 2005.

Zaizhi WANG, Produits Dérivés des Matières Premières: Modélisation et Evaluation, 14 Décembre 2011.

Delphine LAUTIER, La structure par terme des prix des commodités : Analyse théorique et applications au marché pétrolier, Janvier 2000.

Mohamed BERRADA, Filtre de Kalman, 18 Octobre 2006.

Matthieu LEMOINE, Florian PELGRIN, Introduction aux modèles Espace-état et au filtre de Kalman, Juillet 2003.

Tom ARNOLD, Mark BERTUS, Jonathan GODBEY, A Simplified Approach to Understanding the Kalman Filter Technique, 21 Décembre 2007.

Hugh DURRANT-WHYTE, Introduction to Estimation and the Kalman Filter, 2 Juin 2001

Annexe I : Modélisation de la tendance

■ Méthode de Box & Jenkins

Nous allons appliquer la méthode de Box & Jenkins sur la série Dtendance qui est stationnaire.

➤ Identification

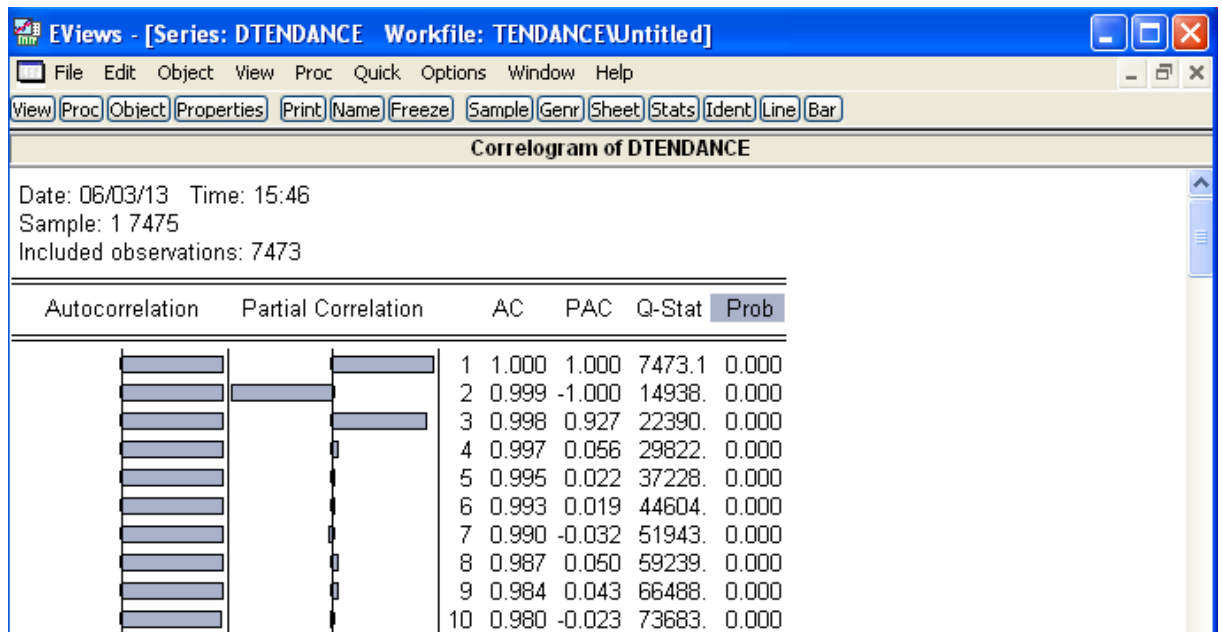


Tableau 20 : Correlogramme – D Tendance -

Visiblement d'après le correlogramme les p et q possibles sont $p = 0, 1, 2, 3$ $q=0, 1, 2, \dots$

➤ Estimation

Afin d'estimer le meilleur modèle, on effectue toutes les combinaisons possibles avec les p et q disponibles. On rejette ceux qui sont statistiquement non valide c'est-à-dire ceux dont la p -value $> 0,05$.

➤ Validation

La validation du modèle pose un problème à savoir qu'aucun modèle ne vérifie que les résidus suivent un bruit blanc (p -value $> 0,05$).

Date: 05/31/13 Time: 09:15
Sample: 6 7470
Included observations: 7465
Q-statistic probabilities adjusted for 3 ARMA term(s)

Autocorrelation	Partial Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob	
		1	0.001	0.001	0.0083	
		2	-0.036	-0.036	9.7026	
		3	-0.012	-0.012	10.807	
		4	0.025	0.024	15.587	0.000
		5	-0.033	-0.034	23.703	0.000
		6	-0.020	-0.018	26.547	0.000
		7	0.011	0.010	27.481	0.000
		8	-0.022	-0.025	31.193	0.000
		9	-0.010	-0.008	31.992	0.000
		10	0.015	0.014	33.718	0.000

Tableau 21 : Analyse des résidus - D Tendence -

Ce qui nous amène à faire l'hypothèse selon laquelle les résidus peuvent suivre un modèle de type Arch. Pour avoir le cœur net nous effectuons le test Arch-LM. Le test est le suivant

H₀: Absence d'effet Arch vs *H₁: Existence d'effet Arch*

ARCH Test:

F-statistic	165.9103	Probability	0.000000
Obs*R-squared	466.8420	Probability	0.000000

Tableau 22 : Test Arch - D Tendence

On remarque que $p\text{-value de la } F\text{-statistic} < 0,05$ donc on rejette H_0 ; Les résidus suivent alors un modèle Arch.

Après analyse du AIC et BIC, le modèle adéquat à la modélisation du cycle est un modèle ARIMA(3,2,0) avec résidus E-GARCH(1,0). Rappelons que l'avantage avec le modèle E-GARCH est qu'il n'impose pas que les paramètres soit tous positifs.

Le tableau suivant donne en sortie l'estimation des paramètres du modèle.

Dependent Variable: TENDANCE-2*TENDANCE(-1)+TENDANCE(-2)				
Method: ML - ARCH (Marquardt) - Generalized error distribution (GED)				
Date: 05/31/13 Time: 09:25				
Sample (adjusted): 6 7470				
Included observations: 7465 after adjustments				
Convergence achieved after 68 iterations				
Variance backcast: ON				
LOG(GARCH) = C(4) + C(5)*ABS(RESID(-1)/@SQRT(GARCH(-1))) + C(6)*RESID(-1)/@SQRT(GARCH(-1))				
	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
AR(1)	1.528023	0.000201	7598.975	0.0000
AR(2)	-0.057740	0.000198	-292.2615	0.0000
AR(3)	-0.470847	3.42E-05	-13774.26	0.0000
Variance Equation				
C(4)	-37.55476	0.015335	-2448.932	0.0000
C(5)	0.993257	0.012797	77.61374	0.0000
C(6)	-0.026199	0.012439	-2.106200	0.0352
GED PARAMETER	2.663296	0.030773	86.54777	0.0000
R-squared	1.000000	Mean dependent var	2.12E-08	
Adjusted R-squared	1.000000	S.D. dependent var	2.03E-05	
S.E. of regression	1.42E-08	Akaike info criterion	-33.88875	
Sum squared resid	1.51E-12	Schwarz criterion	-33.88227	
Log likelihood	126496.8	Durbin-Watson stat	0.072426	

Tableau 23 : Modélisation - D Tendence

Le modèle de la dérivée seconde de la tendance s'écrit ainsi sous la forme :

$$Dtendance_t = \alpha_1 * Dtendance_{t-1} + \alpha_2 * Dtendance_{t-2} + \alpha_3 * Dtendance_{t-3} + \varepsilon_t$$

$$\ln(\sigma_t^2) = \beta_1 + \beta_2 * \left| \frac{\varepsilon_{t-1}}{\sigma_{t-1}} \right| + \beta_3 * \frac{\varepsilon_{t-1}}{\sigma_{t-1}}$$

Annexe II : Résolution analytique du modèle de Schwartz

1- Résolution de l'équation aux dérivées partielles

Le prix à terme F est une fonction du temps t , des variables d'état S et δ , et de l'échéance T du contrat considéré : $F(S, \delta, t, T) = F(S, \delta, \tau)$. Si la fonction associant le prix à terme F aux variables d'état et à la maturité est deux fois continûment dérivable, il est possible de décrire le comportement du prix à terme pour une échéance T à l'aide du lemme d'Itô :

$$\frac{dF}{F} = \frac{1}{F} \left\{ F_t + F_S(dS) + F_\delta(d\delta) + \frac{1}{2} F_{SS}(dS)^2 + \frac{1}{2} F_{\delta\delta}(d\delta)^2 + F_{S\delta}(d\delta dS) \right\}$$

En utilisant les propriétés du calcul stochastique, les termes intermédiaires suivants peuvent être déterminés

$$F_S(dS) = (\mu - \delta)SF_S dt + \sigma_S SF_S dz_S$$

$$F_\delta(d\delta) = \kappa(\alpha - \delta)F_\delta dt + \sigma_\delta F_\delta dz_\delta$$

$$\frac{1}{2} F_{SS}(dS)^2 = \frac{1}{2} \sigma_S^2 S^2 F_{SS} dt$$

$$\frac{1}{2} F_{\delta\delta}(d\delta)^2 = \frac{1}{2} \sigma_\delta^2 F_{\delta\delta} dt$$

$$F_{S\delta}(d\delta dS) = \rho \sigma_S \sigma_\delta SF_{S\delta} dt$$

$$F_t dt = -F_\tau dt$$

En remplaçant ces termes par leur valeur, et en séparant les termes déterministes des termes aléatoires, l'expression du rendement instantanée du prix à terme est obtenue.

L'équation à résoudre est alors la suivante :

$$\frac{1}{2}F_{SS}\sigma_S^2S^2 + F_{\delta\delta}\sigma_\delta^2 + \sigma_S\sigma_\delta SF_{S\delta} + SF_\delta(r - \delta) + F_\delta[\kappa(\alpha - \delta) - \lambda] - F_t = 0$$

Avec $F(S, \delta, T, T) = S(T)$

Pour résoudre cette équation, on cherche à obtenir une solution de type Feynman-Kac. A partir de la dynamique des états, en univers risque-neutre, on peut exprimer le prix à terme $F(S, \delta, t, T)$ comme l'espérance, à la date t et sous la probabilité Q , du prix au comptant en T

$$F(S, \delta, t, T) = E_t^Q[S(T)]$$

Initialement, la dynamique des variables d'état est la suivante dans le modèle de Schwartz :

$$dS = (\mu - \delta)Sdt + \sigma_S S dz_S$$

$$d\delta = \kappa(\alpha - \delta)dt + \sigma_\delta dz_\delta$$

$$E[dz_S dz_\delta] = \rho dt$$

S est le prix spot

δ est le Convenience Yield associé aux stocks

μ est le rendement instantané anticipé pour la variable S

σ_S est la volatilité du prix spot

dZ_S est un incrément du mouvement brownien standard associé à S

α est la valeur moyenne à long terme du convenience yield

k est la force de rappel agissant sur le convenience yield

σ_δ est la volatilité du convenience yield

dZ_δ est un incrément du mouvement brownien standard associé à δ

Z_S et Z_δ sont deux mouvements Brownien, tel que $\text{Corr}(Z_S, Z_\delta) = \rho$

En l'absence d'opportunité d'arbitrage, cette dynamique des états, sous la probabilité risque-neutre Q est la suivante :

$$\begin{aligned}dS &= (r - \delta)Sdt + \sigma_S S dz^*_S \\d\delta &= [k(\alpha - \delta) - \lambda]dt + \sigma_\delta dz^*_\delta \\E[dz^*_S dz^*_\delta] &= \rho dt\end{aligned}$$

Avec

r est le taux d'intérêt à court terme, supposé constant

Z^*_S et Z^*_δ sont deux mouvements Brownien, tel que $\text{Corr}(Z^*_S, Z^*_\delta) = \rho$

On pose $G = \ln S$

La dynamique de G est obtenue en appliquant le lemme d'Itô à cette relation :

$$dG = G_t dt + G_S dS + \frac{1}{2} G_{SS} (dS)^2$$

Avec :

$$G_S = 1/S$$

$$G_{SS} = -1/S^2$$

$$dG = G_S[S(r - \delta)dt + \sigma_S S dz_S^*] + \frac{1}{2} G_{SS}[\sigma_S^2 S^2 dt]$$

$$\Leftrightarrow dG = \left(r - \delta - \frac{1}{2} \sigma_S^2 \right) dt + \sigma_S dz_S^*$$

En intégrant l'équation précédente entre t et T , on obtient

$$G(T) = G(t) - \frac{1}{2} \sigma_S^2 (T - t) + \int_t^T r(v) dv - \int_t^T \delta(v) dv + \sigma_S \int_t^T dz_S^*(y)$$

Dans ce modèle, on fait l'hypothèse que les taux d'intérêt sont constants. On a donc : $r(v) = r$. Par ailleurs, on pose $T - t = \tau$

$$G(T) = G(t) - \frac{1}{2} \sigma_S^2 \tau + r\tau - \int_t^T \delta(v) dv + \sigma_S \int_t^T dz_S^*(y)$$

La solution de type Feynman-Kac conduit à **calculer l'espérance et la variance de $G(T)$** , afin d'en déduire celles de $S(T)$

1.1 Calcul de l'espérance de G

La valeur de l'espérance de G , sous probabilité Q , est la suivante :

$$E_t^Q[G(T)] = G(t) - \frac{1}{2} \tau \sigma_S^2 + r\tau - \int_t^T E_t^Q[\delta(v)] dv \quad (1)$$

Pour résoudre cette équation, il faut connaître la solution de l'équation différentielle stochastique exprimant la dynamique de δ en univers risque-neutre.

$$d\delta = [\kappa(\alpha - \delta) - \lambda]dt + \sigma_\delta dz_\delta^*$$

Soit $\hat{\alpha} = \alpha - \frac{\lambda}{\kappa}$

$$d\delta = \kappa(\hat{\alpha} - \delta)dt + \sigma_\delta dz^*_\delta$$

Sachant que ($d\hat{\alpha} = 0$)

$$d(\delta - \hat{\alpha}) = \kappa(\hat{\alpha} - \delta)dt + \sigma_\delta dz^*_\delta$$

Détermination de la solution sans second membre :

$$d(\delta - \hat{\alpha}) = \kappa(\hat{\alpha} - \delta)dt + \sigma_\delta dz^*_\delta$$

$$\frac{d(\delta - \hat{\alpha})}{\delta - \hat{\alpha}} = -\kappa dt$$

$$\ln(\delta - \hat{\alpha}) = -\kappa t + A \text{ (avec } A \text{ constante)}$$

$$\delta - \hat{\alpha} = Ae^{-\kappa t}$$

Considérons que la constante est une fonction du temps $A \rightarrow A(t)$

$$\delta - \hat{\alpha} = A(t)e^{-\kappa t}$$

$$\frac{d(\delta - \hat{\alpha})}{dt} = A_t e^{-\kappa t} - [A(t)x(\kappa e^{-\kappa t})]$$

Par identification avec l'équation on peut écrire

$$(A_t e^{-\kappa t} - A(t)) x (\kappa e^{-\kappa t}) dt = -\kappa(\delta - \hat{\alpha})dt + \sigma_\delta dz^*_\delta$$

$$A_t e^{-\kappa t} dt = \sigma_\delta dz^*_\delta$$

$$A(t) = B + \int_{t_0}^t \sigma_{\delta} e^{\kappa S} dz^*_{\delta}(S)$$

$$\delta(t) - \hat{\alpha} = A(t)e^{-\kappa t}$$

$$\delta(t) - \hat{\alpha} = \left(\int_{t_0}^t \sigma_{\delta} e^{\kappa S} dz^*_{\delta}(S) + B \right) e^{-\kappa t}$$

$$e^{\kappa t} [\delta(t) - \hat{\alpha}] = \int_{t_0}^t \sigma_{\delta} e^{\kappa S} dz^*_{\delta}(S) + B$$

$$e^{\kappa v} [\delta(v) - \hat{\alpha}] = \int_{t_0}^v \sigma_{\delta} e^{\kappa S} dz^*_{\delta}(S) + B$$

La différence entre ces deux équations permet d'obtenir $\delta(v)$

$$\delta(v) = \hat{\alpha} + [\delta(t) - \hat{\alpha}]e^{-\kappa(v-t)} + e^{-\kappa v} \sigma_{\delta} \int_t^v e^{\kappa S} dz^*_{\delta}(S)$$

$$E_t^Q[\delta(v)] = \hat{\alpha} + [\delta(t) - \hat{\alpha}]e^{-\kappa(v-t)}$$

On réintègre cette solution dans l'équation (1) :

$$E_t^Q[G(T)] = G(t) - \frac{1}{2} \tau \sigma_S^2 + r\tau - \int_t^T E_t^Q[\delta(v)] dv$$

$$E_t^Q[G(T)] = G(t) - \frac{1}{2}\tau\sigma_S^2 + r\tau - \int_t^T (\hat{\alpha} + [\delta(t) - \hat{\alpha}]e^{-\kappa(v-t)})dv$$

$$E_t^Q[G(T)] = G(t) - \frac{1}{2}\tau\sigma_S^2 + r\tau - \hat{\alpha}\tau - [(\delta(t) - \hat{\alpha}) \int_t^T e^{-\kappa(v-t)} dv]$$

En posant $= \frac{1-e^{-\kappa\tau}}{\kappa}$, on obtient :

$$E_t^Q[G(T)] = G(t) + r\tau - \frac{1}{2}\tau\sigma_S^2 - \hat{\alpha}\tau - [(\delta(t) - \hat{\alpha})xH]$$

1.2 Calcul de la variance de G

$$Var[G(T)] = Var \left[\int_t^T \delta(v)dv \right] + \tau\sigma_S^2 - 2cov \left[\int_t^T \delta(v)dv, \sigma_S \int_t^T dz^*_S(y) \right]$$

$$\text{Car } Var[dz] = dt = \tau$$

En remplaçant $\delta(v)$ par la partie aléatoire, on obtient :

$$Var[G(T)] = Var \left[\int_t^T \sigma_\delta e^{-\kappa v} dv \int_t^v e^{\kappa S} dz^*_\delta(S) \right] + \tau\sigma_S^2 - 2cov \left[\int_t^T \sigma_\delta e^{-\kappa v} dv \int_t^v e^{\kappa S} dz^*_\delta(S), \sigma_S \int_t^T dz^*_S(y) \right]$$

⇒ Calcul du premier terme de la variance de G :

$$\text{Var} \left[\int_t^T \sigma_\delta e^{-\kappa v} dv \int_t^v e^{\kappa S} dz^*_\delta(S) \right]$$

$$A = \text{Var} \left[\int_t^T \sigma_\delta e^{-\kappa v} dv \int_t^v e^{\kappa S} dz^*_\delta(S) \right]$$

$$\Rightarrow A = \langle \int_t^T dv_1 \int_t^T dv_2 (\sigma_\delta e^{-\kappa(v_1+v_2)}) x \int_t^{v_1} e^{\kappa S_1} dz^*_\delta(S_1) x \int_t^{v_2} e^{\kappa S_2} dz^*_\delta(S_2) \rangle$$

$$\Rightarrow A = \langle \int_t^T dv_1 \int_t^T dv_2 (\sigma_\delta e^{-\kappa(v_1+v_2)}) \int_t^{\min(v_1, v_2)} e^{2\kappa S} dS \rangle$$

$$\text{Car } \int_t^{v_1} f(S_1) dz(S_1) x \int_t^{v_2} f(S_2) dz(S_2) = \int_t^{\min(v_1, v_2)} f^2(S) dS$$

$$\Rightarrow A = \langle \int_t^T dv_1 \left\{ \left(\int_t^{v_1} \sigma_\delta e^{-\kappa(v_1+v_2)} dv_2 \right) x \frac{1}{2\kappa} x [e^{2\kappa v_2} - e^{2\kappa t}] + \left(\int_{v_1}^T \sigma_\delta e^{-\kappa(v_1+v_2)} dv_2 \right) x \frac{1}{2\kappa} x [e^{2\kappa v_1} - e^{2\kappa t}] \right\} \rangle$$

$$\Rightarrow A = \frac{\sigma_\delta^2}{2\kappa^2} \int_t^T dv_1 \left\{ \left(\int_t^{v_1} e^{\kappa(v_2-v_1)} - e^{\kappa(2t-v_1-v_2)} dv_2 \right) + \left(\int_{v_1}^T e^{\kappa(v_1-v_2)} - e^{\kappa(2t-v_1-v_2)} dv_2 \right) \right\}$$

$$\Rightarrow A = \frac{\sigma_\delta^2}{2\kappa^2} \int_t^T dv_1 \left[1 - e^{\kappa(t-v_1)} + e^{2\kappa t - v_1} - e^{\kappa(t-v_1)} - e^{\kappa(v_1-T)} + 1 - e^{2\kappa(t-v_1)} \right]$$

$$\Rightarrow A = \sigma^2_{\delta} x \left(\frac{\tau}{2\kappa^2} - \frac{1}{2\kappa^2} (e^{-\kappa\tau} - 1) - \frac{1}{2\kappa^2} (1 - e^{-\kappa\tau}) + \frac{1}{2\kappa^2} (e^{-2\kappa\tau} - e^{-\kappa\tau}) \right)$$

$$\Rightarrow A = \frac{\tau\sigma^2_{\delta}}{\kappa^2} - \frac{\sigma^2_{\delta}}{\kappa^2} H - \frac{\sigma^2_{\delta}}{2\kappa^3} (1 - e^{-\kappa\tau} + e^{-2\kappa\tau} - e^{-\kappa\tau})$$

$$A = - \left[(H - \tau) x \frac{\sigma^2_{\delta}}{\kappa^2} \right] - \left[\frac{\sigma^2_{\delta}}{2\kappa} \right] \quad \text{Avec } H = \frac{1 - e^{-\kappa\tau}}{\kappa}$$

Calcul du second terme de la variance de G :

$$\Rightarrow B = \text{cov} \left[\int_t^T \sigma_{\delta} e^{-\kappa v} dv \int_t^v e^{\kappa S} dz^*_{\delta}(S), \sigma_S \int_t^T dz^*_S(y) \right]$$

$$\Rightarrow B = \left\langle \int_t^T dv \left(\sigma_{\delta} \sigma_S e^{-\kappa v} \int_t^v e^{\kappa S} dz^*_{\delta}(S) \right) x \int_t^T dz^*_S(y) \right\rangle$$

$$\Rightarrow B = \sigma_{\delta} \sigma_S \int_t^T dv \left(e^{-\kappa v} \int_t^v e^{\kappa S} dz^*_{\delta}(S) \right) x \int_t^v dz^*_S(S)$$

Avec $E[dz^*_S x dz^*_{\delta}] = \rho dt$

$$B = (\sigma_{\delta} \sigma_S \rho) x \left[\int_t^T dv \left(e^{-\kappa v} \int_t^v e^{\kappa S} dS \right) \right]$$

$$B = \frac{\sigma_{\delta} \sigma_S \rho}{\kappa} x \left[\int_t^T [1 - e^{-\kappa(t-v)}] dv \right]$$

$$B = \frac{\sigma_\delta \sigma_S \rho}{\kappa} x[\tau - H]$$

La variance de $G(t)$ s'écrit donc :

$$\text{Var}[G(T)] = \left(-(H - \tau)x \frac{\sigma_\delta^2}{\kappa^2} - \frac{\sigma_\delta^2 H^2}{\kappa^2} \right) + \tau \sigma_\delta^2 - 2 \left(\frac{\sigma_\delta \sigma_S \rho}{\kappa} x[\tau - H] \right)$$

Si le prix à terme $F(S, \delta, t, T)$ est l'espérance sous la probabilité risque-neutre, de $S(T)$, on peut poser :

$$F(S, \delta, t, T) = E_t[S(T)] = E_t^Q[e^{G(T)}]$$

Donc

$$F(S, \delta, t, T) = E_t^Q[S(T)] = e^{E_t^Q[G(T)] + \frac{1}{2} \text{var}[G(T)]}$$

Le résultat final est obtenu en remplaçant l'espérance et la variance de $G(T)$ par leur valeur :

$$\begin{aligned} \Rightarrow E_t^Q[G(T)] + \frac{1}{2} \text{var}[G(T)] &= \ln S(t) + r\tau - \hat{\alpha}\tau - \frac{1}{2} \tau \sigma_S^2 - H(\delta(t) - \\ &\hat{\alpha}) - \frac{1}{2} \left[(H - \tau) \frac{\sigma_\delta^2}{\kappa^2} \right] - \frac{1}{4} \frac{\sigma_\delta^2 H^2}{\kappa} + \frac{1}{2} \tau \sigma_S^2 - \frac{\sigma_\delta \sigma_S \rho}{\kappa} x[\tau - H] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow E_t^Q[G(T)] + \frac{1}{2} \text{var}[G(T)] &= \ln S(t) + (H - \tau)x \left[\hat{\alpha} - \frac{\sigma_\delta^2}{2\kappa^2} + \frac{\sigma_\delta \sigma_S \rho}{\kappa} \right] - \\ &H\delta(t) - \frac{1}{4} \frac{\sigma_\delta^2 H^2}{\kappa} + r\tau \end{aligned}$$

$$\Rightarrow e^{E_t^Q[G(T)] + \frac{1}{2} \text{var}[G(T)]} = S(t) \times \exp \left[(H - \tau) \times \left[\frac{\hat{\alpha} \kappa^2 - 0,5 \sigma_\delta^2 + \kappa \sigma_\delta \sigma_S \rho}{\kappa^2} \right] - \frac{1}{4} \frac{\sigma_\delta^2 H^2}{\kappa} \right] \times \exp(-H \times \delta(t) \times \exp(r\tau))$$

$$F(S, \delta, t, T) = S(t) \times A(t) \times e^{-H\delta(t)} \times e^{r\tau}$$

Sachant que pour une obligation zéro-coupon de prix $P(T, T) = 1$ à l'échéance on a :

$$P(t, T) = \exp \left(- \int_t^T r(S) dS \right) = \exp(-r\tau)$$

La solution du modèle est :

$$F(S, \delta, t, T) = S(t) \times A(t) \times e^{-H\delta(t)} \times \frac{1}{P(t, T)}$$

Avec : $H = \frac{1 - e^{-\kappa\tau}}{\kappa}$

$$A(\tau) = \exp \left[\frac{(H - \tau) \times [\hat{\alpha} \kappa^2 - 0,5 \sigma_\delta^2 + \kappa \sigma_\delta \sigma_S \rho]}{\kappa^2} - \frac{\sigma_\delta^2 H^2}{4\kappa} \right]$$

$$\hat{\alpha} = \alpha - \frac{\lambda}{\kappa}$$

Cette solution peut également être écrite :

$$F(S, \delta, t, T) = S(t) \times \exp[-H\delta + B(\tau)]$$

Avec :

$$B(\tau) = \left[\left(r - \hat{\alpha} + \frac{\sigma^2_{\delta}}{2\kappa^2} - \frac{\sigma_{\delta}\sigma_S\rho}{\kappa} \right) \times \tau \right] + \left[\frac{1}{4}\sigma^2_{\delta} \times \frac{1 - e^{-2\kappa\tau}}{\kappa^3} \right] \\ + \left[\left(\hat{\alpha}\kappa + \sigma_{\delta}\sigma_S\rho - \frac{\sigma^2_{\delta}}{2\kappa} \right) \times \left(\frac{1 - e^{-\kappa\tau}}{\kappa} \right) \right]$$

Annexe III : Table de Dickey-Fuller

Modele 3 : $\Delta X_t = \rho X_{t-1} + \alpha + \beta t + a_t$

Modèle 3						
	Constante			Trend		
T	1%	5%	10 %	1%	5%	10 %
100	3.78	3.11	2.73	3.53	2.79	2.38
250	3.74	3.09	2.73	3.49	2.79	2.38
500	3.72	3.08	2.72	3.48	2.78	2.38
∞	3.71	3.08	2.72	3.46	2.78	2.38

Modele 2 : $\Delta X_t = \rho X_{t-1} + \alpha + a_t$.

Modèle 2			
Constante			
T	1%	5%	10 %
100	3.22	2.54	2.17
250	3.19	2.53	2.16
500	3.18	2.52	2.16
∞	3.18	2.52	2.16

Modele 1 : $\Delta X_t = \rho X_{t-1} + a_t$.

T	1%	5%	10 %
Modèle 1			
100	-2.60	-1.95	1.61
250	-2.58	1.95	-1.62
500	-2.58	-1.95	-1.62
∞	-2.58	-1.95	-1.62
Modèle 2			
100	-3.51	-2.89	-2.58
250	-3.46	-2.88	-2.57
500	-3.44	-2.87	-2.57
∞	-3.43	-2.86	-2.57
Modèle 3			
100	-4.04	-3.45	-3.15
250	-3.99	-3.43	-3.13
500	-3.98	-3.42	-3.13
∞	-3.96	-3.41	-3.12