



المندوبية السامية للتخطيط
HAUT-COMMISSARIAT AU PLAN

ROYAUME DU MAROC
._._*._*
HAUT COMMISSARIAT AU PLAN
._._*._*._*._*._*

INSTITUT NATIONAL
DE STATISTIQUE ET D'ECONOMIE APPLIQUEE

INSEA



Projet de Fin d'Etudes

Méthodes de provisionnement non-vie : Application sur la BRANCHE INCENDIE

Préparé par : *SABAM Manzourou*
NGOUFO KENNE Lionel

Sous la direction de : *Mr Abdelaziz CHAOUBI (INSEA)*
Mme Alia BENNANI (SAHAM FINANCES)

Soutenu publiquement comme exigence partielle en vue de l'obtention du

Diplôme d'Ingénieur d'Etat

Option : *ACTUARIAT-FINANCE*

Devant le jury composé de :

- *Mr Abdelaziz CHAOUBI (INSEA)*
- *Mr Fouad MARRI (INSEA)*
- *Mme Alia BENNANI (SAHAM FINANCES)*

Remerciements :

Nous tenons à remercier très sincèrement Alia BENNANI, Responsable Actuariat Groupe pour sa disponibilité, son expertise et ses conseils judicieux qu'elle nous a apportés tout au long de notre stage.

Nous tenons à remercier monsieur Dominique HERBRICH Directeur Technique et Réassurance de Saham Finances, pour ses conseils et sa disponibilité à notre égard.

Nous tenons également à remercier monsieur Abdelaziz CHAOUBI, professeur à l'Institut National de Statistique et d'Economie Appliquée pour ses conseils et ses multiples apports et correction pendant le stage.

Nous remercions monsieur Ilassa SAVADOGO, Chargée d'étude Actuarielle de Saham finances pour les soutiens multiformes et l'accompagnement tout au long du stage.

Notre gratitude va aussi à l'égard de tout le personnel de Saham Finances pour nous avoir accueillie et accompagner tout au long de notre stage.

Enfin nous exprimons notre reconnaissance envers tout le personnel administratif et le corps enseignant de l'INSEA pour l'apport technique et tout le savoir-faire qu'ils nous ont transmis pendant notre cursus académique.

Résumé

Les provisions techniques sont les réserves que la compagnie d'assurance constitue pour honorer les engagements contractés envers les assurés. Elles occupent environ 80 % du passif du bilan d'une compagnie d'assurance, ainsi une bonne estimation des provisions est primordiale pour assurer la solvabilité et la pérennité d'une compagnie d'assurance. Notre étude porte sur l'estimation des provisions techniques en assurance incendie. Cette branche d'assurance présente des spécificités particulières (fréquence de sinistre faible, dispersion importante des montants de sinistres, irrégularité dans la cadence de règlement).

Une étude succincte de la base de données montre que les spécificités citées ci-dessus apparaissent à travers la présence de quelques gros sinistres qui rendent la branche très volatile et par conséquent les estimations des provisions sont délicates. Pour remédier à ce problème, nous décidons de séparer les sinistres attritionnels des graves. Pour se faire, nous utilisons une approche graphique et les quantiles. Le triangle obtenu après séparation des sinistres est plus stable et nous appliquons les méthodes de provisionnement déterministes et stochastiques sur ce triangle.

Les méthodes déterministes sont généralement basées sur la cadence de développement des sinistres, elles sont faciles à mettre en œuvre. Nous utilisons la méthode Chain Ladder, Chain Ladder pondérée, de Vyllder, Coût moyen, Taylor inflation pour estimer les provisions. Les provisions obtenues convergent toutes vers celles de Chain Ladder qui est la méthode de référence dans le monde professionnel. Toutefois les modèles déterministes présentent de nombreuses limites notamment le fait de ne pas donner une distribution prédictive des provisions. Pour pallier à ces limites, nous utilisons les modèles stochastiques.

Les modèles stochastiques intègrent un paramètre aléatoire qui capte la dispersion entre le modèle théorique et les règlements observés. A partir de ce paramètre nous obtenons l'écart type des provisions, l'intervalle de confiance et la distribution des provisions. Nous utilisons les modèles de Thomas Mack, la régression log-normale, le GLM et une approche non-paramétrique (le bootstrap).

Nous introduisons aussi la crédibilité afin d'obtenir des « méta-estimateurs » à variance minimale que les estimateurs de base. La crédibilisation des provisions fait intervenir des informations exogènes notamment le S/P du marché de la branche incendie et permet de déterminer une meilleure estimation de la charge ultime des sinistres pour les survenances récentes.

Nous nous sommes aussi orientés vers une approche qui tient compte de la corrélation entre le triangle de règlements et des charges pour pallier au phénomène de cadence de règlement variable entre les survenances.

Enfin une étude comparative des différentes méthodes utilisées nous permet de déterminer les résultats les plus adéquats.

Mots clés :

Assurance Non-vie, Incendie, Méthodes déterministes, Méthodes Stochastiques, la crédibilité.

Table des matières

Résumé	2
Liste des Abréviations	6
Liste des tableaux	7
Liste des Figures.....	9
INTRODUCTION.....	10
CHAPITRE 1 : CADRE DE L'ETUDE.....	11
I-Présentation de SAHAM GROUP	11
II – Branche incendie	14
III - Problématique	15
CHAPITRE 2 : PRESENTATION DU PORTEFEUILLE INCENDIE	16
I- DESCRIPTION DES DONNEES	16
I.1- Chiffre d'affaires	16
I.2- Variables d'intérêt.....	16
I.3- Retraitement de la base de données	17
I.4- Construction du triangle.....	17
I.5- Mise en « as if » des données	18
II- STATISTIQUES DESCRIPTIVES.....	19
III- SEPARATION DES SINISTRES.....	22
III.1- Analyse du triangle	22
III.2- Choix du seuil	24
CHAPITRE 3 : EVALUATION DES PROVISIONS PAR LES METHODES DETERMINISTES... 27	
I- METHODE CHAIN LADDER.....	27
I.1- Présentation du Modèle	27
I.2- Application	28
I.3- Validation des hypothèses	29
II- METHODE CHAIN LADDER PONDEREE.....	29
II.1- Présentation du Modèle	29
II.2- Les Choix standards des pondérations	30
II.3- Résultats obtenus	31
III- METHODE DES MOINDRES CARREES DE VYLDER	32
III.1- Présentation générale du modèle.....	32
III.2- Application.....	33

IV- METHODE DU COUT MOYEN.....	34
IV.1- Présentation du modèle	34
IV.2- Application.....	35
V- METHODE DE TAYLOR.....	35
V.1- Présentation du Modèle.....	35
V.2- Application.....	36
VI- AVANTAGES ET LIMITES DES METHODES DETERMINISTES	37
CHAPITRE 4 : EVALUATION DES PROVISIONS PAR LES METHODES STOCHASTIQUES..	39
I- MODELE DE THOMAS MACK.....	39
I.1- Présentation du Modèle	39
I.2- Erreur de prédiction (mse)	40
I.3- Construction d'un intervalle de confiance	41
I.4 – Résultats obtenus.....	42
I.5- Validation des Hypothèses.....	43
II- METHODE DE REGRESSION LOG-NORMALE	45
II.1- Présentation du modèle.....	45
II.2- Résultats obtenus	46
II.3- Analyse des Résidus et Validations des Modèles.....	47
II.4- Les limites du modèle.....	49
III- MODELE LINEAIRE GENERALISE (GLM).....	49
III.1 Présentation du modèle.....	49
III.2- Modélisation par la loi poisson sur-dispersée	51
III.3- Résultats obtenus.....	51
III.3.1- Analyse des résidus et validation du modèle	53
IV- APPROCHE NON PARAMETRIQUE : LE BOOTSTRAP	55
IV.1- Présentation de la technique de Bootstraping	55
IV.2- Résultats obtenus et intervalle de confiance du modèle	57
CHAPITRE 5 : CREDIBILISATION LINEAIRE DES METHODES DE PROVISIONNEMENT NON VIE.....	58
I-PRINCIPE GENERAL DE LA METHODE.....	58
II- APPROCHE DE LA CREDIBILITE DANS LES METHODES DETERMINISTES	59
II.1 Méthode de Bornhuetter-Ferguson	59
II.1.2- Application	60
II.2 Méthode de Benktander	61
II.2.1 Présentation du modèle.....	61

II.2.1 Application	62
CHAPITRE 6 : APPROCHE PAR LES CHARGES ET LA SYNTHÈSE DES MÉTHODES	63
I- MUNICH CHAIN LADDER	63
I.1- Présentation du modèle.....	63
I.2- Application	64
II- SYNTHÈSE DES MÉTHODES	65
CONCLUSION	67
BIBLIOGRAPHIE:	68
ANNEXES	70

Liste des Abréviations

FCFA : Franc des Communautés Financières d'Afrique

IBNR: Incurred But Not Reported

IBNER: Incurred But Not Enough Reserved

PSAP: Provision pour Sinistre à Payer

CIMA : Conférence Interafricaine des Marchés d'Assurance

FANAF : Fédération des sociétés d'Assurances de droit National Africaines

IPC : Indice des Prix à la Consommation

Liste des tableaux

Tableau 1 : Evolution du chiffre d'affaire de quelques compagnies d'assurance en Côte d'Ivoire.

Tableau 2 : Loss ration du marché de l'assurance non-vie

Tableau 3 : Chiffre d'affaires et nombre de contrat par année de survenance

Tableau 4 : Triangle des règlements ou de liquidation des sinistres

Tableau 5 : L'indice des prix à la consommation en Côte d'Ivoire

Tableau 6 : Répartition des sinistres par section

Tableau 7 : Répartition des sinistres par état du dossier

Tableau 8 : Triangle des règlements cumulés

Tableau 9 : Triangle des coefficients individuels

Tableau 10 : Résultats des quantiles

Tableau 11 : Triangle des coefficients individuels après séparation

Tableau 12 : Répartition du nombre de sinistres après séparation

Tableau 13 : Triangle des règlements complétés

Tableau 14 : Provisions estimées par la méthode de Chain Ladder

Tableau 15 : Facteurs de développement par type de pondération

Tableau 16 : Provisions obtenues par Chain Ladder Pondérée

Tableau 17 : Paramètres estimés par la méthode De Vylder

Tableau 18 : Provisions estimées par la méthode De Vylder

Tableau 19: Provisions estimées par la méthode du coût moyen

Tableau 20 : Provisions en fonction du taux d'inflation futur

Tableau 21 : Tableau récapitulatif des méthodes déterministes

Tableau 22 : Erreur quadratique et intervalle de confiance du modèle de MACK

Tableau 23 : Résultat du test de signe

Tableau 24 : Paramètres estimés du modèle log-Normale

Tableau 25 : Provisions par la méthode log-Normale

Tableau 26 : Résultat du test de Fisher

Tableau 27 : Résultat du test de Kolmogorov Smirnov

Tableau 28 : Paramètres estimés du modèle GLM

Tableau 29 : Synthèse du GLM

Tableau 30 : Intervalle de confiance des provisions

Tableau 31 : Résultat du test de Kolmogorov des résidus glm

Tableau 32: Synthèse des résultats du Bootstrap pour B = 5000 simulations

Tableau 33 : Quantile d'ordre extrême du bootstrap

Tableau 34: Résultat de la méthode de Bornhuetter-Ferguson

Tableau 35 : Provisions obtenues par la méthode de Benktander

Tableau 36 : Synthèse des méthodes

Liste des Figures

Figure 1 : Présence de Saham Finances en Afrique et au Moyen-Orient.

Figure 2 : Evolution des Part du marché de l'assurance non vie en Côte d'Ivoire

Figure 3 : Cycle de vie d'un sinistre

Figure 4 : Répartition du nombre de sinistre et des règlements par état

Figure 5 : Nombres de sinistre cumulé par année de survenance

Figure 6 : Règlement cumulé par année de survenance.

Figure 7 : Distribution des règlements des sinistres.

Figure 8 : Représentation des règlements cumulés pour les trois premières années de développement

Figure 9 : Evolution des coefficients de développement

Figure 10 : Les Résidus du modèle log normale

Figure 11 : Q-Q plot des résidus du modèle log normale.

Figure 12 : Figure 12 : Distribution des résidus

Figure 13 : Q-Q plot des résidus du modèle GLM

Figure 14 : Processus Bootstraping

Figure 15 : Distribution des provisions

INTRODUCTION

La particularité des compagnies d'assurance est le cycle de production inversé. Pour chaque contrat d'assurance souscrit, l'assureur perçoit une prime, en contrepartie il s'engage à payer des indemnités en cas de survenance d'un sinistre. Cela suppose que l'assureur ne peut connaître à l'avance le coût final d'un contrat. Pour faire face à ses engagements l'assureur doit constituer des provisions techniques, qui correspondent aux charges à prévoir face aux sinistres déclarés ou non des contrats d'assurance en cours. Les provisions techniques tiennent donc une place très importante dans le passif des sociétés d'assurance (environ 80% du passif) et assurent la solvabilité de celles-ci.

L'évaluation de ces provisions représente un enjeu majeur pour une compagnie d'assurance. En effet une surévaluation des provisions augmente le niveau de capital requis et sa durée de détention de la compagnie tandis qu'une sous-évaluation des provisions peut mettre l'assureur dans l'incapacité d'honorer ses engagements auprès des assurés. Cette évaluation doit être la plus juste possible pour faire face à toute évolution de la sinistralité, tout en évitant de prendre une marge de risque trop importante. Cette optique de détermination des provisions techniques est une partie intégrante de la future réglementation des compagnies d'assurance en Europe (Solvabilité II), où les provisions techniques sont définies comme étant la meilleure estimation possible des flux futurs de l'assureur (Best Estimate) et d'une marge de risque.

Par ailleurs, l'évaluation des provisions est aussi nécessaire pour suivre l'activité de la compagnie. Elle permet de déterminer entre autres une charge finale prévisible des sinistres par année de survenance et par suite, l'estimation d'un loss ratio (S/P) à l'ultime. Ainsi, la compagnie peut apprécier la rentabilité de ses différentes branches d'activité, calculer des cadences de règlement et de charge,...

Notre objectif est de déterminer les provisions pour sinistres à payer, afin de calculer un S/P à l'ultime de la branche incendie de Saham assurance Côte d'Ivoire.

Afin d'y parvenir nous allons, dans le premier chapitre présenter brièvement le Groupe SAHAM, la branche incendie et l'évolution du marché de l'assurance non-vie en Côte d'Ivoire.

Dans le deuxième chapitre, nous présenterons le portefeuille de la branche incendie, procédons à une analyse précise de la base et séparons les sinistres attritionnels des graves en utilisant une approche par les quantiles.

Le chapitre trois sera consacré à la présentation et l'application des différentes méthodes déterministes : la méthode Chain Ladder, Chain Ladder pondérées, la méthode des coûts moyens, la méthode de séparation de Taylor, la méthode des moindres carrées De Vylder et validité les hypothèses de chacune de ces méthodes.

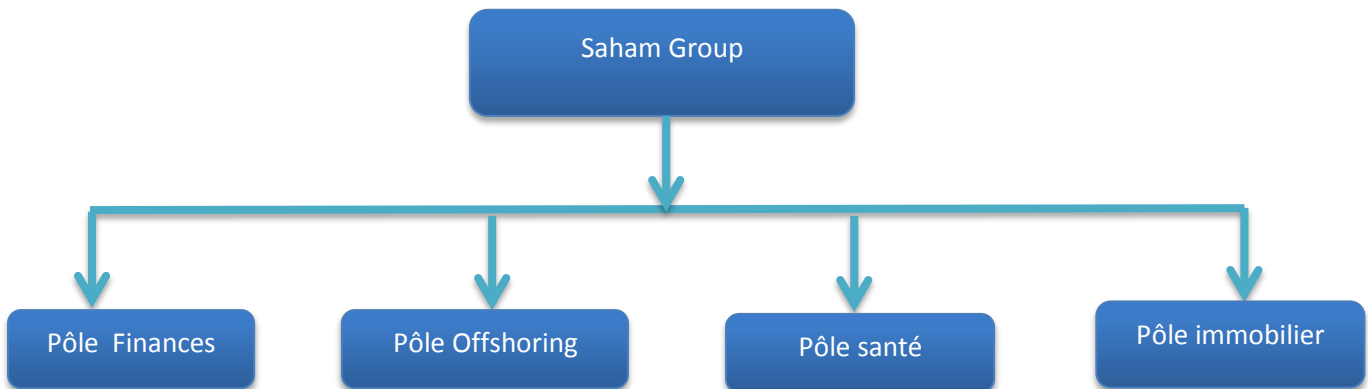
Le chapitre quatre concernera le calcul de l'erreur quadratique, la détermination de l'intervalle de confiance et la distribution des provisions. A cet effet les méthodes paramétriques seront utilisées, le modèle de T. Mack, le modèle de régression log-normale, le modèle linéaire généralisé et les méthodes non-paramétriques avec la simulation Bootstrap. Nous allons également vérifier la validité des hypothèses et faire une comparaison des résultats obtenus.

Le chapitre cinq sera consacré à la théorie de la crédibilité linéaire sur les méthodes déterministes avec la méthode de Bornhuetter-Fergusson et de Benktander. Enfin le chapitre six traitera l'approche par les charges en utilisant la méthode Munich Chain Ladder et une synthèse sur les différentes méthodes appliquées.

CHAPITRE 1 : CADRE DE L'ETUDE

I-Présentation de SAHAM GROUP

Le Groupe Saham est une multinationale panafricaine fondé en 1995 par monsieur Moulay Hafid Elalamy. Depuis sa création, le Groupe intervient régulièrement en tant qu'incubateur dans des domaines à fort potentiel. Le groupe est devenu en effet un acteur de référence dans les métiers de service à forte valeur ajoutée : l'Assurance, l'Assistance, l'Offshoring, la Santé, l'Immobilier. Le groupe est subdivisé en plusieurs pôles :



▪ Pôles Saham Finances

Le pôle Saham Finances où nous avons effectué notre stage est spécialisé en assurance et en assistance. Ce pôle connaît une croissance externe continue depuis sa création, tant sur le plan national qu'international. Suite au rachat du groupe Colina en 2010, de GA Seguros Angola et de LIA Insurance en 2012, Saham Finances est présent dans 22 pays à travers 30 filiales. Saham Finances vise des positions de leadership dans l'ensemble de ces pays. Pour accompagner cette croissance, les filiales de Saham Finances ont été structurées autour de 5 zones géographiques par proximité, langue, contexte réglementaire, etc...

La détermination, l'envie de se surpasser et de créer la valeur sont les facteurs qui contribuent au développement fulgurant du groupe Saham. Ce développement se traduit par sa présence en Afrique et au Moyen-Orient.

CARTE DES IMPLANTATIONS

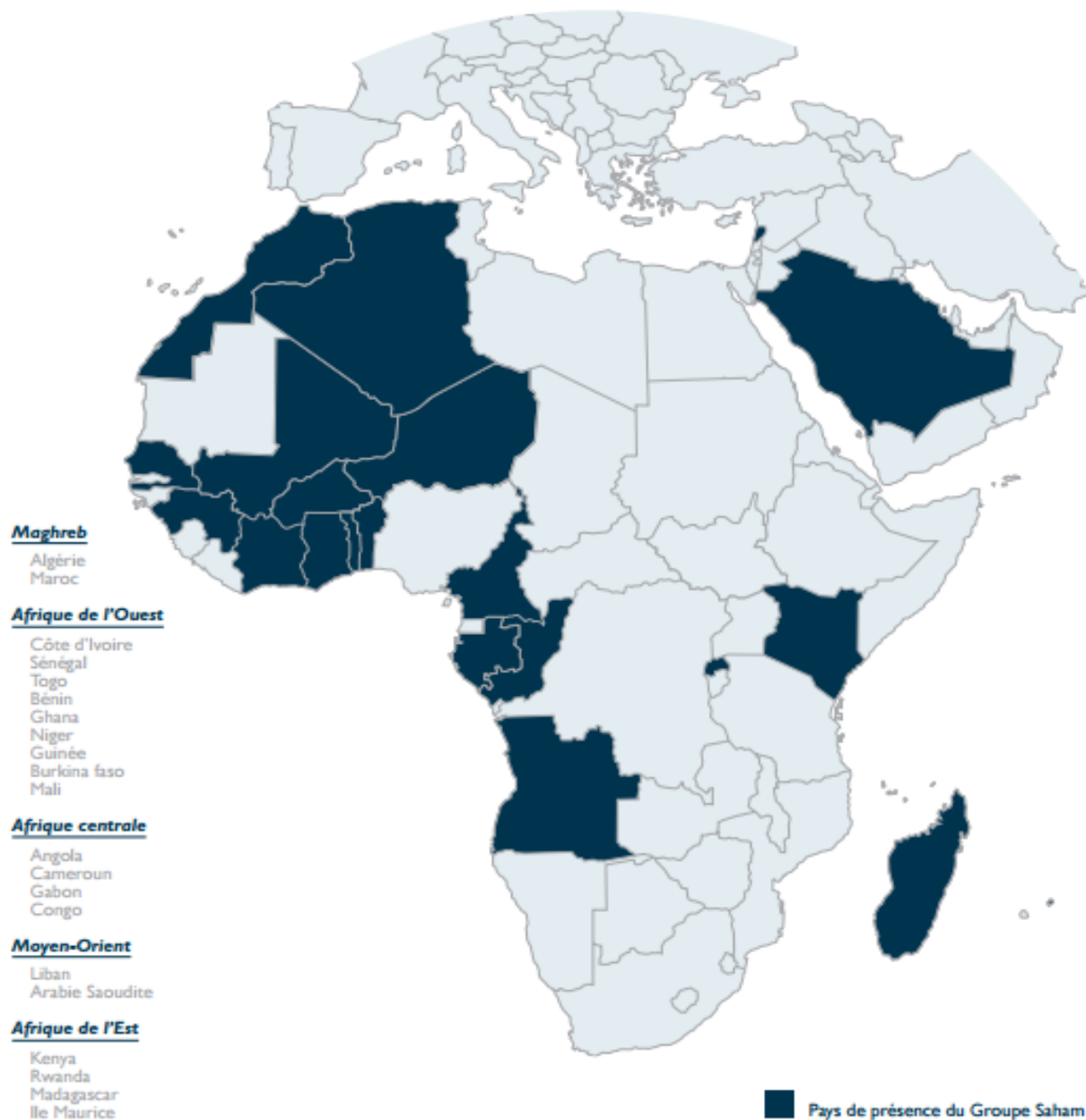


Figure 1 : Présence de Saham Finances en Afrique et au Moyen-Orient.

▪ **Tendance du marché de l'assurance non-vie en Côte d'Ivoire**

Le marché de l'assurance non-vie en Côte d'Ivoire représente 19% du marché de l'assurance non vie dans la zone FANAF. Etant leader dans la zone FANAF, le marché Ivoirien a un potentiel de développement énorme. C'est grâce à ce potentiel que le groupe Saham a racheté en 2010 Colina Côte d'Ivoire et a mis en place une stratégie pour conserver les acquis et développer la filiale Ivoirienne.

Depuis 2011 Saham assurance Côte d'Ivoire occupe la première place sur le marché de l'assurance en Côte d'Ivoire, avec une part de marché qui croît en moyenne de 25,1% de 2011 à 2013 et un chiffre d'affaire de 33,8 MM CFA en 2013 contre 25,4 MM CFA en 2011.

Chiffre d'affaires (en MM CFA)	2013	Var 13-12	2012	Var 12-11	2011	Rang
SAHAM	33,8	20%	28,2	11%	25,4	#1/18
NSIA	16,7	23%	13,6	-12%	15,4	#2
Allianz	15,7	11%	14,2	19%	11,9	#3
LMAI	10,2	1%	10,0	-1%	10,2	#4
AXA	9,9	23%	8,0	19%	6,7	#5

Tableau 1 : Evolution du chiffre d'affaires de quelques compagnies d'assurance en Côte d'Ivoire

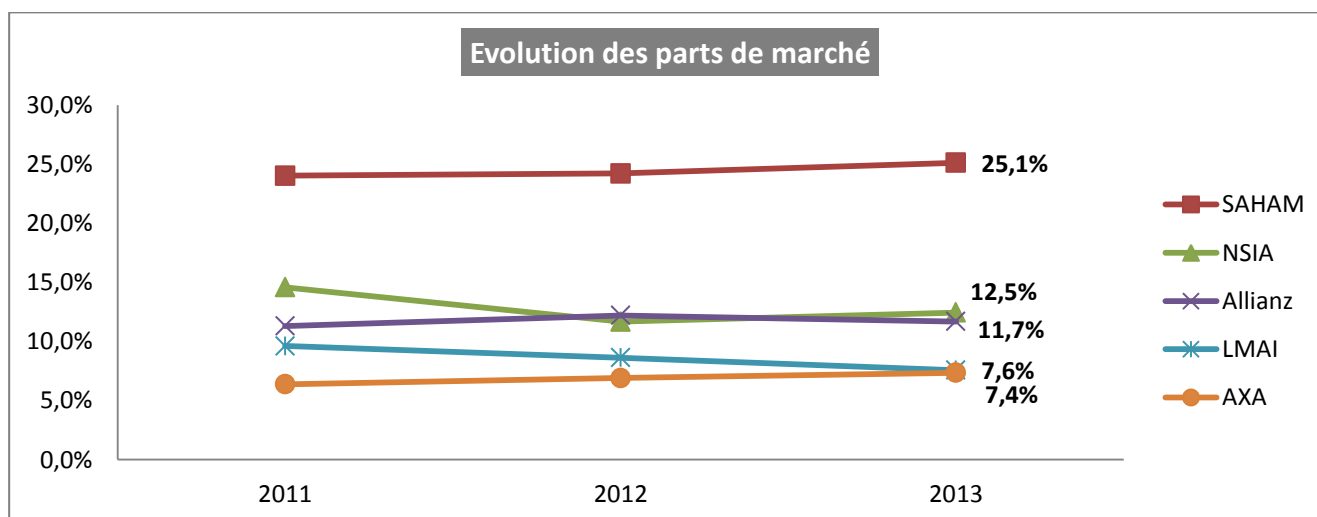


Figure 2 : Evolution des Part du marché de l'assurance non vie en Côte d'Ivoire

Les loss ratio de la non-vie sont ventilées en 5 branches : Dommages corporels, Automobile, IRD, Transport et Responsabilité civile. En 2013 les branches Automobile, Transport, responsabilité civile sont les plus rentables sur le marché. Par contre la branche IRD est déficitaire en 2013 avec un loss ratio de 111,5%. Globalement en 2013 la branche non-vie sur le marché est rentable avec un loss ratio de 62%.

Branches Non Vie 2013	S/P BRUT Marché
Dommages corporels	77,9%
Automobile	29,6%
IRD	111,5%
Transport	15,1%
Responsabilité civile	36,1%
Global	62%

Tableau 2 : Loss ration du marché de l'assurance non-vie

II – Branche incendie

Notre étude porte sur la branche incendie de Saham assurance Côte d'Ivoire. Cette branche est très volatile. Pour mieux appréhender cette volatilité, il est important de comprendre la notion d'incendie, la nature des risques et les garanties souscrites dans cette branche.

Selon ARTICLE 45 du code de la CIMA : « L'assureur contre l'incendie répond de tous dommages matériels causés par conflagration, embrasement ou simple combustion. Toutefois, il ne répond pas, sauf convention contraire, de ceux occasionnés par la seule action de la chaleur ou par le contact direct et immédiat du feu ou d'une substance incandescente s'il n'y a eu ni incendie, ni commencement d'incendie susceptible de dégénérer en incendie véritable ».

Les contrats d'assurance incendie porte sur les biens, des responsabilités et des préjudices qui résultent des dommages causés aux biens. Au sein de Saham assurance cette branche est subdivisée en plusieurs classes de risque : multirisque industriel, multirisque habitation et les risques commerciaux.

- Multirisque industriel : Cette classe regroupe les activités liées à l'industrie, aux textiles, aux bois, peintures, etc...
- Multirisque habitation : Elle concerne les bâtiments résidentiels, les bureaux administratifs, les banques, les salles de spectacle, les formations médicales, les écoles, etc...
- Risques commerciaux : Concerne tous les bâtiments d'activités commerciales tel que les dépôts, les magasins, les boutiques, les pharmacies, les kiosques.

Il garantit l'assuré contre les événements tels que :

- La chute de la foudre
- L'explosion

- Les dommages causés par l'électricité aux biens qui ne sont ni installations, ni appareils électriques.
- Les dommages causés par l'électricité aux installations et appareils électriques eux-mêmes.
- Les dommages causés par la chute ou le choc des appareils de navigation aérienne.
- Les accidents de ménage
- La tempête ...

Dans notre portefeuille le multirisque industriel est séparé en 2 types de risque : Risque très lourds et Risque lourds. La multirisque habitation en 2 types de risque : Risque simples et Risque légers.

III - Problématique

L'évaluation des provisions techniques représentent un enjeu majeur pour une compagnie d'assurance. En effet une sur évaluation des provisions augmente le niveau de capital requis et sa durée de détention de la compagnie tandis qu'une sous-évaluation des provisions peut mettre l'assureur dans l'incapacité d'honorer ses engagements auprès des assurés. L'évaluation de ces provisions doit être la plus juste possible pour faire face à toute évolution de la sinistralité, tout en évitant de prendre une marge de risque trop importante. Cette optique de détermination des provisions techniques est une partie intégrante de la future réglementation des compagnies d'assurance en Europe (Solvabilité II), où les provisions techniques sont définies comme étant la meilleure estimation possible des flux futurs de l'assureur (Best Estimate) et d'une marge de risque.

Par ailleurs, l'évaluation des provisions est aussi nécessaire pour suivre l'activité de la compagnie. Elle permet de déterminer entre autres une charge finale prévisible des sinistres par année de survenance et par suite, l'estimation d'un loss ratio (S/P) à l'ultime. Ainsi, la compagnie peut apprécier la rentabilité de ses différentes branches d'activité, calculer des cadences de règlement et de charge,...

On s'intéresse ici à l'évaluation des provisions de la branche incendie de Saham Côte d'Ivoire. Notre objectif est de déterminer au mieux les provisions pour sinistres à payer de la branche afin de calculer un S/P à l'ultime.

La volatilité intrinsèque de la branche, due à la présence de quelque gros sinistres, couplée à des processus de gestion de règlement et de provisionnement dossier/dossier variables dans le temps, aboutissent à des triangles de sinistres particulièrement instables. Par conséquent, nous ne pouvons pas appliquer les méthodes classiques directement sur les triangles originaux.

Pour cela, nous allons d'abord procéder à une analyse de données précise afin d'isoler ces phénomènes : attritionnels/graves, et comparaison triangle de règlement / charge. Ensuite, nous allons tester différentes méthodes de provisionnement (déterministes et stochastiques) sur les triangles de règlements et de charges pour s'approcher de la meilleure estimation, tout en vérifiant la validité des hypothèses de ces modèles à travers des tests statistiques.

CHAPITRE 2 : PRESENTATION DU PORTEFEUILLE INCENDIE

I- DESCRIPTION DES DONNEES

I.1- Chiffre d'affaires

Nous disposons d'une base de données prime de la branche Incendie de 2005 jusqu'à 2014 contenant les primes émises, le nombre de contrat et les capitaux assurés de la branche par police. Dans la base de données, les primes de 2005 jusqu'à 2009 sont nulles ou négatives. De même on ne pas calculer le nombre de contrat sur les périodes antérieure à 2009 car ils ne sont pas tous saisis dans le système d'information. Ces anomalies sont expliquées par le changement du système d'information (passage à Milliards¹) en 2010 au sein de Saham Côte d'Ivoire. Pour notre étude nous avons extrapolé les primes et les nombres de contrats antérieurs à 2010.

Année d'effet	Chiffre d'affaires	Nombre de contrat
2 005	5 874 854 159	1 822
2 006	4 237 842 957	2 259
2 007	6 856 581 686	2 801
2 008	4 486 552 684	3 474
2 009	5 732 683 720	4 307
2 010	5 874 854 159	5 341
2 011	5 237 842 957	3 397
2 012	7 856 581 686	3 812
2 013	6 486 552 684	4 453
2 014	3 732 683 720	3 918

Tableau 3 : Chiffre d'affaires et nombre de contrat par année d'effet

I.2- Variables d'intérêt

Nous disposons d'une base de données sinistre de la branche incendie de survenance 2005 jusqu'à 2014 composée de plusieurs variables telles que :

- La date de survenance : C'est la date à laquelle le sinistre a eu lieu. Nous notons i l'année de survenance avec $i \in \{2005, \dots, 2014\}$.
- La date de déclaration : C'est la date à laquelle l'assuré déclare le sinistre à l'assureur.
- Evaluation du sinistre : C'est la charge de sinistre dossier/dossier que le gestionnaire de sinistre constitue à partir de l'avis d'un expert. Cette évaluation est égale aux règlements déjà effectués plus les réserves.
- L'état du sinistre : Le sinistre peut être ouvert, remis en cours ou clôturé.
- Le règlement : C'est l'indemnité versée par l'assureur à l'assuré.
- L'année de comptabilisation : Elle représente l'année de comptabilisation du règlement et d'évaluation du sinistre. Nous notons j l'année de comptabilisation (avec $j \in \{2005, \dots, 2014\}$).
- Numéro de sinistre : Il correspond à la référence du sinistre dans la base de données.

¹ Milliards : Est un système d'information propre à Saham

A partir des variables précédentes nous décrivons le cycle de vie d'un sinistre :

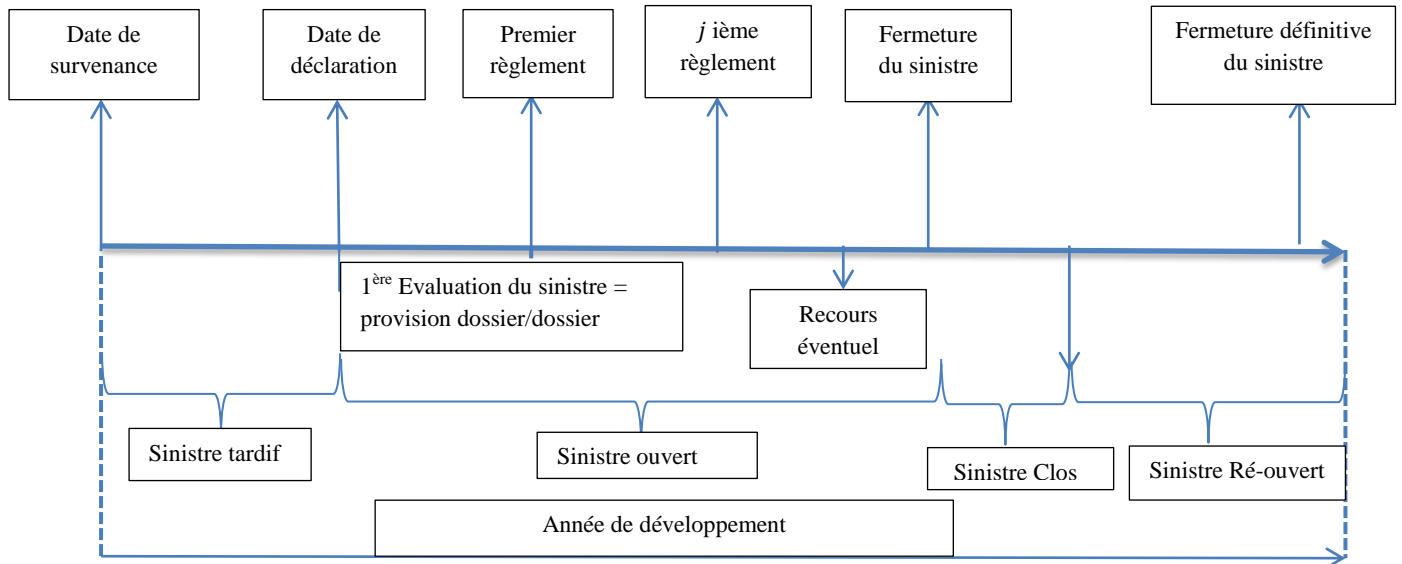


Figure 3 : Cycle de vie d'un sinistre

I.3- Retraitement de la base de données

Nous avons constaté que la base de données fournie contient des sinistres dont les dates de déclaration sont antérieures à la date de survenance, des doublons et des valeurs manquantes. Ces anomalies et/ou erreurs peuvent subvenir lors de la saisie et/ou de l'extraction des données.

Nous retraitions la base de données :

- Les doublons ont été supprimés.
- Pour les sinistres dont l'année de déclaration est antérieure à l'année de survenance nous avons considéré la date de déclaration comme date de survenance.
- Les sinistres clôturés qui n'ont eu aucun règlement ont été supprimés.
- les règlements ont été déflatés par l'indice des prix à la consommation (ce retraitement est expliqué à la section I.5).

I.4- Construction du triangle

Le calcul des provisions pour sinistre à payer se fait à partir d'un triangle de règlement ou de charge. Ce triangle comporte en ligne les années de survenance et en colonne les années de développement des sinistres.

Nous définissons les variables suivantes :

- Y_{ij} : L'ensemble des règlements des sinistres survenus l'année i et réglés l'année j .
- C_{ij} : Les règlements cumulés des sinistres survenus l'année i jusqu'à l'année j .
- C_{in} : La charge finale du sinistre. Elle est estimée par les méthodes que nous allons présenter dans les chapitres 3, 4,5 et 6.

$$C_{ij} = \sum_{k=0}^j Y_{ik}$$

Avec $j \in \{0, \dots, 9\}$

Le tableau ci-dessous présente le triangle des règlements décumulés :

Années de survenance	Années de développement									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2005	$Y_{2005,0}$	$Y_{2005,1}$	$Y_{2005,2}$	$Y_{2005,9}$
2006	$Y_{2006,0}$	$Y_{2006,1}$	$Y_{2006,8}$	
2007		
2008			
2009	...					$Y_{2009,5}$				
2010					
2011				...						
2012							
2013	$Y_{2013,0}$	$Y_{2013,1}$								
2014	$Y_{2014,0}$									

Tableau 4 : Triangle des règlements ou de liquidation des sinistres

La partie supérieure du triangle représente les règlements décumulés. La partie inférieure est celle à estimer, elle constitue les provisions que la compagnie doit mettre de côté pour faire face à ses engagements. En fonction des spécificités de chaque méthode nous utiliserons soit le triangle des règlements décumulés ou le triangle des règlements cumulés.

I.5- Mise en « as if » des données

Le montant des sinistres réglés entre 2005 et 2014 n'étant pas corrigé de l'inflation, Nous utilisons l'indice des prix à la consommation (*IPC*) pour déflater ces montants et avoir un triangle au FCFA constant.

L'IPC est un indicateur qui reflète l'évolution du coût de la vie, nous avons jugé utile de l'utiliser pour déflater les données en FCFA (vision 2014).

Ainsi pour un sinistre survenu l'année i et réglé l'année j ($Y_{i,j}$) nous avons :

$$Y_{i,j}(\text{vision 2014}) = Y_{i,j} * \frac{IPC_{2014}}{IPC_j}$$

Les valeurs de l'IPC utilisées pour déflater nos données sont :

Années	IPC
2 005	90,09
2 006	92,31
2 007	94,06
2 008	100
2 009	100,52
2 010	102,52
2 011	107,28
2 012	108,68
2 013	111,48
2 014	111,99

Tableau 5 : L'indice des prix à la consommation en côte d'Ivoire²

II- STATISTIQUES DESCRIPTIVES

Nous analysons dans ce paragraphe la sinistralité du portefeuille à travers les statistiques descriptives.

▪ Analyse par section

La branche Incendie est décomposée en 5 sections qui représentent les différents niveaux de risque par activité. Les sinistres incendies survenus de 2005 jusqu'à 2014 se répartissent ainsi :

SECTIONS	Nombre de Sinistre	Nombre de contrat	Pourcentage en Nombre	Règlement Total	Pourcentage en Règlement
RISQUES LÉGERS	2 050	7 381	65,80%	12 956 194 079	60,92%
RISQUES TRÈS LOURDS	533	1 496	18,38%	6 080 662 415	28,59%
RISQUES LOURDS	265	2 173	10,00%	2 016 667 519	9,48%
RISQUES SIMPLES	52	3 941	1,66%	32 366 984	0,15%
RISQUES COMMERCIAUX	133	6 249	4,16%	183 175 911	0,86%
Total	3 033	2140	100%	21 269 066 907	100%

Tableau 6 : Répartition du nombre de sinistre par section

² Source : BCEAO (Banque Centrale des Etats de l'Afrique de l'Ouest)

Nous constatons qu'un grand nombre de contrat et de sinistre sont enregistré au niveau de la section risque léger (7381 contrats, 2050 sinistres entre 2005 et 2014 soit 65,80% des sinistres) par rapport aux autres sections et en terme de règlement, cette section représente 60,92% des règlements totaux. Le risque léger représente le portefeuille incendie.

Le nombre de sinistre des autres sections représente 35,2% des sinistres (risques très lourds 18,38%, risques lourds 10%, risques simples 1,66% et risques commerciaux 4,16%) et 39,18% en règlement (risques très lourds 28,59%, risques lourds 9,48%, risques simples 0,15% et risques commerciaux 0,86%). Le nombre de sinistre des sections risques très risques lourds, lourds, risques simples et commerciaux étant faible nous décidons d'étudier le portefeuille sans séparer les sections.

▪ **Analyse par état du sinistre**

Dans le portefeuille un sinistre peut être ouvert, clôturé ou remis en cours, la répartition de l'état des sinistres dans le portefeuille est la suivante :

<i>état du dossier</i>	<i>Nombre de Sinistre</i>	<i>Pourcentage en Nombre</i>	<i>Règlement Total</i>	<i>Pourcentage en Règlement</i>
<i>Clôturé</i>	1278	42,14%	9 090 759 327	43%
<i>Ouvert</i>	1739	57,34%	4 764 504 060	22%
<i>Remis en Cours</i>	16	0,53%	7 413 803 520	35%
Total	3033	100%	21 269 066 907	100%

Tableau 7 : Répartition des sinistres par état du dossier

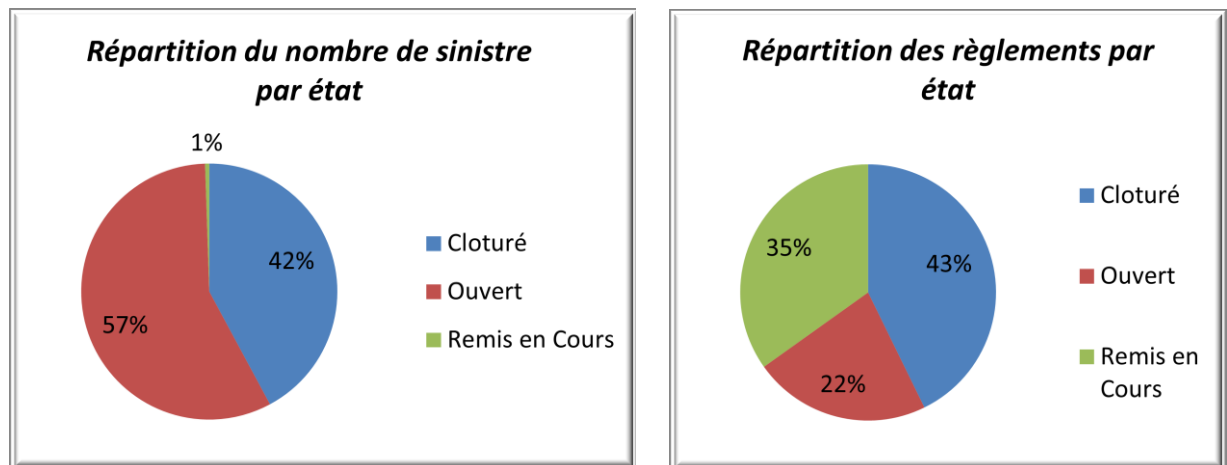


Figure 4 : Répartition du nombre de sinistre et des règlements par état

Nous constatons que les sinistres ouverts représentent 57,34% du portefeuille en nombre et 22% en règlement, les sinistres remis en cours (les sinistres ré-ouverts) représentent seulement 0,53% du portefeuille et 35% en règlement total du portefeuille. Les remis encours ont un poids important en règlement bien qu'ils ne représentent seulement qu'un nombre assez faible. Ceci du fait que, les sinistres remis encours correspondent à des gros sinistres.

Les sinistres clôturés représentent 42% du portefeuille en nombre et 43% en règlement, ils sont donc représentatifs dans le portefeuille. En revanche les sinistres clôturés

sans suite (clos sans aucun règlement en principal et honoraire) ont été supprimés de la base de données lors des retraitements.

Nous décidons donc de garder tous les états de sinistres: ouvert, remis en cours et clos hors sans suite, car ces sinistres contiennent des informations qui seront utiles pour la suite de l'étude.

▪ **Analyse par année de survenance**

Le nombre de sinistres cumulés par année de survenance sont représentés dans le graphe suivant :

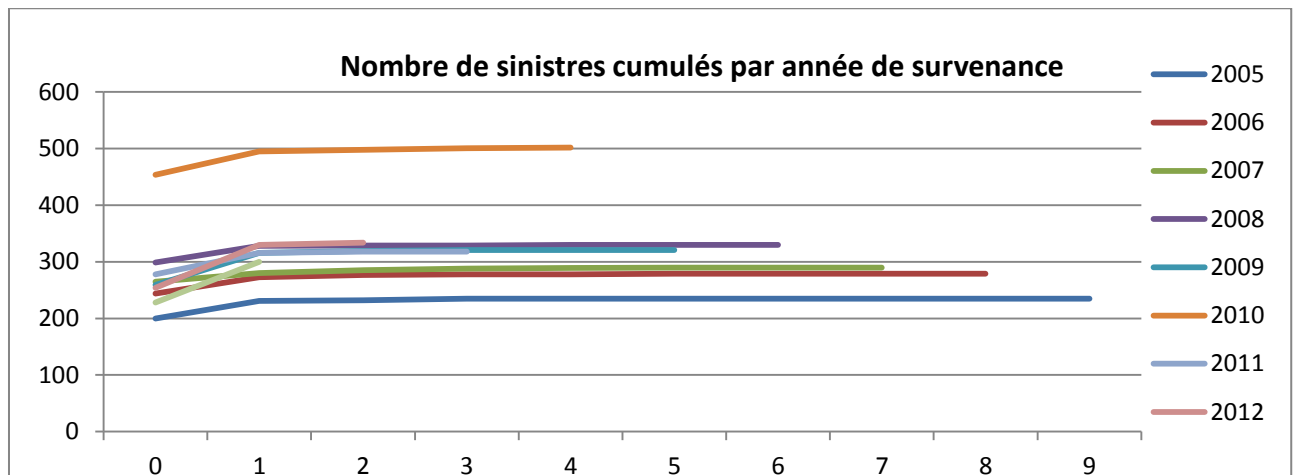


Figure 5 : Nombre de sinistres cumulés par année de survenance

Les règlements cumulés par année de survenance sont représentés dans le graphe suivant :

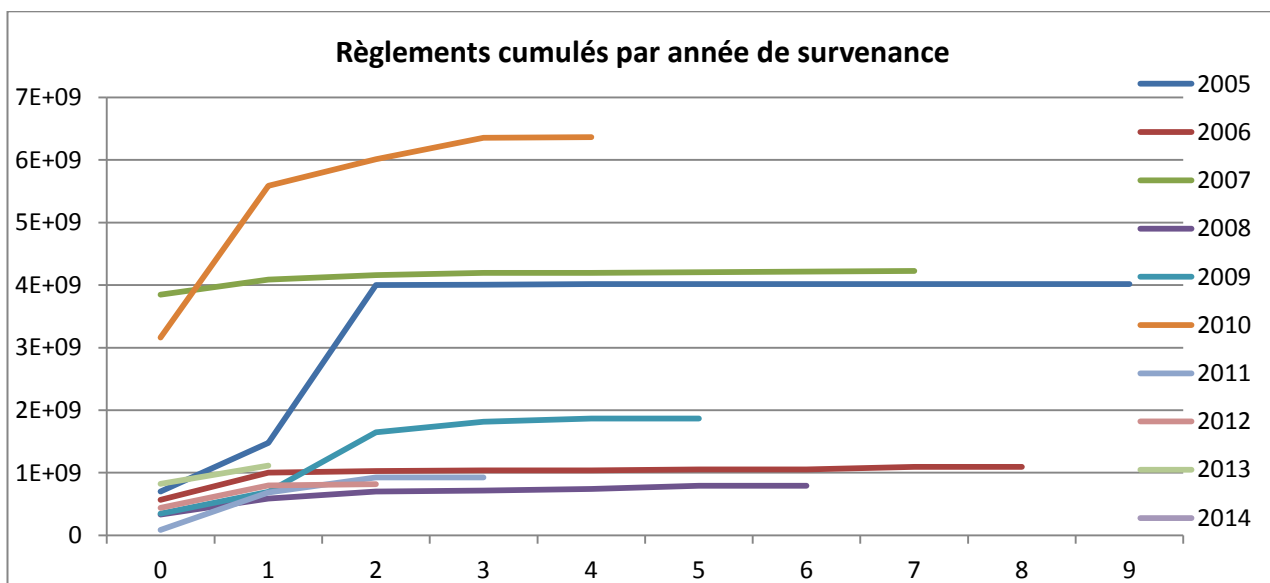


Figure 6 : Règlements cumulés par année de survenance

Nous remarquons la présence de quelque gros sinistres survenus en 2007 et 2010. Nous remarquons également une irrégularité des cadences de règlements selon les années de survenances. Cela reflète des irrégularités dans la gestion des sinistres.

III- SEPARATION DES SINISTRES

III.1- Analyse du triangle

L'analyse du triangle nous permet de détecter entre autres la présence des gros sinistres qui biaisent le triangle et ne permettent pas d'aboutir à des estimations fiables. Il est nécessaire de les isoler et de les traiter séparément du reste des sinistres attritionnels

On définit les coefficients individuels comme suit :

$$\lambda_{ij} = \frac{C_{i,j+1}}{C_{i,j}}$$

Avec $C_{i,j+1}$: Le règlement cumulé de l'année $j + 1$.

$C_{i,j}$: Le règlement cumulé de l'année j .

Année de développement

Année survenance	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2005	699 639 781	1 477 695 831	4 001 552 744	4 008 503 618	4 014 409 577	4 015 390 551	4 015 444 826	4 016 360 053	4 016 453 025	4 016 453 025
2006	569 422 852	1 000 114 882	1 030 033 900	1 037 393 231	1 039 680 745	1 055 374 382	1 055 459 346	1 092 318 595	1 092 318 595	
2007	3 846 000 741	4 090 665 818	4 158 044 897	4 194 611 897	4 198 140 130	4 205 930 974	4 213 818 210	4 228 943 210		
2008	332 751 949	586 606 519	701 877 668	716 678 792	739 640 314	791 123 254	791 123 254			
2009	345 369 503	694 805 644	1 645 318 147	1 816 544 008	1 866 694 773	1 868 178 873				
2010	3 160 335 671	5 588 540 021	6 012 431 333	6 357 088 492	6 363 642 368					
2011	85 313 255	682 198 134	926 817 028	927 582 667						
2012	440 261 630	797 155 436	817 559 835							
2013	822 963 755	1 116 898 982								
2014	46 366 100									

Tableau 8 : Triangle des règlements cumulés

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2005	2,112	2,708	1,002	1,001	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	-
2006	1,756	1,030	1,007	1,002	1,015	1,000	1,035	1,000	-	
2007	1,064	1,016	1,009	1,001	1,002	1,002	1,004	-		
2008	1,763	1,197	1,021	1,032	1,070	1,000	-			
2009	2,012	2,368	1,104	1,028	1,001	-				
2010	1,768	1,076	1,057	1,001	-					
2011	7,996	1,359	1,001	-						
2012	1,811	1,026	-							
2013	1,357	-								
2014	-									
<i>coef var</i> ³	0,882	0,458	0,037	0,015	0,029	0,001	0,019	-	-	-

Tableau 9 : Triangle des coefficients individuels

³ Coef Var = coefficient de variation

Par ailleurs Le triangle des règlements cumulés (tableau 8) présente des irrégularités au niveau de la liquidation des sinistres en 1^{ière} et 2^{ième} de développement. Ces irrégularités sont liées aux problèmes de gestion et à la présence des gros sinistres.

En 2011, 16% des sinistres ont été réglés la première année de développement contre en moyenne 45% pour les autres années de survenances. Ce qui explique le pic 7,996 en 2011 au niveau du triangle des coefficients individuels. Cela reflète un problème de gestion des sinistres.

L’analyse du triangle des coefficients individuels nous permet de mettre en relief ces irrégularités. Nous remarquons l’instabilité des coefficients individuels la première et la deuxième année de développement.

Par ailleurs Les coefficients de variation (Ecart-type/moyenne) calculés par année de développement nous permet de conclure que les montants sont très volatiles la première et la deuxième année de développement (respectivement 0,882 ; 0,458).

Si nous décidons d’appliquer les méthodes de calcul des provisions sur ce triangle nous risquons d’obtenir des résultats aberrants qui ne reflètent pas la réalité. Par conséquent les méthodes ne convergeront pas. Pour y remédier nous décidons de retraiter le triangle en séparant les sinistres attritionnels des graves.

III.2- Choix du seuil

Dans le but de séparer les sinistres attritionnels des graves nous avons besoin de déterminer un seuil à partir duquel un sinistre peut être considéré comme grave.

- **Choix du seuil par Représentation graphique des règlements**

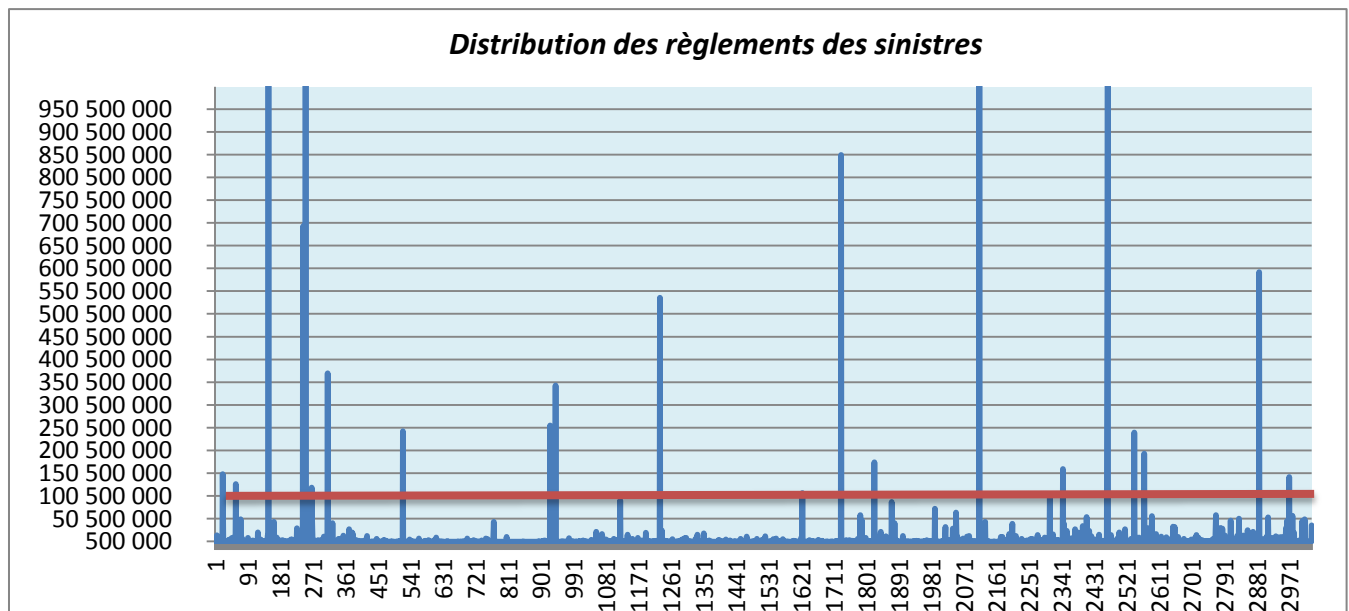


Figure 7 : Distribution de règlements des sinistres.

La figure ci-dessus représente les règlements de tous les sinistres survenus entre 2005 et 2014. Nous constatons la présence de quelques gros sinistres, la majorité des montants de

sinistre réglés sont inférieurs à 100 500 000 FCFA. Pour confirmer notre analyse graphique nous adoptons une approche par les quantiles.

- **Choix du seuil par les quantiles**

Pour un échantillon de taille n ayant la fonction de répartition suivante :

$$F_n(u) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 1_{\{X_i \leq u\}}$$

Le quantile d'ordre p est donné comme suit :

$$\hat{F}^{-1}(p) = ([pn] - pn + 1)X_{([pn])} + (pn - [pn])X_{([pn]+1)}$$

Appliquer à nos données nous obtenons les résultats suivants :

Quantiles	Montant	Nombre de Sinistre > Seuil	Règlement Total > Seuil	Part sur le règlement total
75%	2 094 056	404	20 572 175 564	96,72%
80%	2 905 103	327	20 384 251 720	95,84%
85%	4 940 255	242	20 055 501 436	94,29%
90%	8 077 138	161	19 546 736 771	91,90%
95%	16 685 809	83	18 645 459 358	87,66%
99%	91 810 633	23	16 411 573 326	77,16%
99,5%	240 213 956	13	14 897 275 737	70,04%

Tableau 10 : Résultats des quantiles

La figure 1 montre que la majorité des sinistres ont un règlement inférieur à 100 500 000 FCFA, l'approche par les quantiles le confirme. En effet avec le quantile d'ordre 99% seulement 23 sinistres sont supérieurs au seuil de 91 810 633 FCFA.

Le seuil à retenir doit tenir compte de la stabilité du triangle. Après analyse, nous constatons qu'avec un seuil de 100 millions FCFA le triangle est relativement stable et moins volatile que l'original.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2005	3,65	1,07	1,02	1	1	1	1	1	1	-
2006	1,87	1,09	1,02	1,01	1,04	1	1,1	1	-	
2007	1,73	1,13	1,02	1	1,01	1	1	-		
2008	1,76	1,2	1,02	1,03	1,07	1	-			
2009	2,03	1,21	1,04	1,09	1	-				
2010	1,67	1,24	1,11	1,01	-					
2011	3,18	1,25	1	-						
2012	1,41	1,05	-							
2013	1,6	-								
2014	-									
Coef Var	0,3685	0,0690	0,0348	0,0337	0,0298	0,000	0,0559	-	-	-

Tableau 11 : triangle des coefficients individuels après séparation

Nous constatons que le coefficient de variation de la première année de développement est moins volatile que le triangle non retraité (tableau8) soit 0,3685 après séparation contre 0,882 avant séparation. De plus le coefficient de variation des autres années de développement tend vers 0, ce qui exprime la stabilité du triangle.

Avec le seuil de 100 Millions FCFA, la répartition des nombres des sinistres est comme suit :

	Nombre de Sinistre	Pourcentage
ATTRITIONNEL	3 010	99%
GRAVE	23	0,76%
Total	3 033	100%

Tableau 12 : répartition du nombre de sinistres après séparation

Les sinistres graves représentent seulement 0,76% des sinistres. Nous décidons de les extraire de notre triangle et de les étudier à part.

Bilan :

L'analyse du portefeuille nous a permis de détecter la présence des gros sinistres qui rendent la branche incendie volatile et les cadences des différentes années de survenance qui amplifie la volatilité du triangle. Pour une bonne estimation des provisions nous devons séparer les sinistres attritionnels des graves. Pour cela une analyse graphique et une approche par les quantiles.

Nous retenons un seuil de 100 Millions pour séparer les sinistres. Le choix du seuil peut être plus approfondi par l'utilisation de la théorie des valeurs extrêmes, mais le but de ce mémoire est de proposer des méthodes de calcul des provisions adaptées à la branche incendie.

Ainsi dans la suite de ce mémoire les méthodes déterministes et stochastiques seront appliquées sur le triangle attritionnel.

CHAPITRE 3 : EVALUATION DES PROVISIONS PAR LES METHODES DETERMINISTES

I- METHODE CHAIN LADDER

I.1- Présentation du Modèle

La méthode Chain Ladder est très répandue dans le milieu professionnel grâce à sa simplicité. Elle présente l'avantage de s'appliquer à des triangles de toutes natures (règlements cumulés ou charges). Elle est basée sur les facteurs de développement qui sont supposés constants pour toutes années d'origine.

Hypothèse :

Soient : $i \in \{0, \dots, n - 1\}$ Les années d'origine

$j \in \{0, \dots, n - 1\}$ Les années de développement

$Y_{i,j}$: Les règlements non cumulés

$C_{i,j}$: Les règlements cumulés

Ils $\exists \lambda_j \in \{0, \dots, n-1\}$ tels que $C_{i,j+1} = \lambda_j C_{i,j}$

$$\lambda_j = \frac{C_{1,j+1}}{C_{1,j}} = \frac{C_{1,j+1}}{C_{1,j}} = \frac{C_{1,j+1}}{C_{1,j}} = \dots = \frac{C_{n-j-1,j+1}}{C_{n-j-1,j}}$$

Les facteurs de développement de Chain Ladder sont estimés par :

$$\hat{\lambda}_j = \frac{\sum_{i=0}^{n-j-1} C_{i,j+1}}{\sum_{i=0}^{n-j-1} C_{i,j}}$$

Les charges ultimes sont définies par :

$$\hat{C}_{i,n} = C_{i,n-i} \hat{\lambda}_{n-i} \dots \hat{\lambda}_{n-1} = C_{i,n-i} \prod_{h=n-i}^{j-1} \hat{\lambda}_h$$

Nous déduisons l'estimation de la provision ultime par année de survenance et la provision globale :

$$\hat{R}_i = \hat{C}_{i,n} - C_{i,n-i} \quad (1)$$

$$\hat{R} = \sum_{i=0}^{n-1} \hat{R}_i \quad (2)$$

I.2- Application

Nous estimons la partie inférieure du triangle avec la méthode Chain Ladder. Nous obtenons les résultats suivants :

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2005	80200754	293066782	314654157	321605031	323212988	3241993962	324248237	325163465	325256436	325256436
2006	170810648	319927331	349846349	357205679	359493194	375186830	375271795	412131044	412131044	412131044
2007	289254362	499590406	565479991	578054136	579072428	584437407	584594384	584594384	584668100	584668100
2008	332751949	586606519	701877668	716678792	739640314	791123254	791123254	814395531	814498255	814498225
2009	222976289	453672349	547443410	569505165	619655929	621140029	621228702	639503234	639583874	639583874
2010	35655090	595464244	740472801	823988521	830042397	853795508	853917395	879036872	879147717	879147717
2011	79243919	252365328	316160755	316926394	324840517	334136395	334184096	344014707	344058087	344058087
2012	280995244	395292082	415696481	433099222	443914353	456617737	456682923	470117051	470176332	470176332
2013	213327685	341102341	396913054	413529444	423855889	435985264	436047505	448874607	448931209	448931209
2014	46366100	85520361	99513089	103679111	106268132	109309181	1093785	112540766	112554957	112554957
$\hat{\lambda}_j$	1.84	1.16	1.04	1.02	1.03	1.00	1.03	1.00	1.00	1.00

Tableau 13 : Triangle des règlements complétés

Les coefficients de développement ($\hat{\lambda}_j$) fournis par la méthode Chain Ladder convergent vers 1 à partir de la cinquième année de développement, ces estimations reflètent la stabilité du triangle.

Année de Survenance	Charge Ultime	Provision Ultime
2005	325 256 436	-
2006	412 131 044	-
2007	584 668 100	73 716
2008	814 498 225	23 374 971
2009	639 583 874	18 443 845
2010	879 147 717	49 105 320
2011	344 058 087	27 131 693
2012	470 176 332	54 479 852
2013	448 931 209	107 828 869
2014	112 554 957	66 188 857
Total	5 031 005 981	346 627 122

Tableau 14 : Provisions estimées par la méthode de Chain Ladder

Les résultats obtenus sont présentés dans le tableau ci-dessus. La provision à l'ultime toutes survenance est de 346 627 122 FCFA. Notons que cette méthode repose sur la régularité des règlements non cumulés au fil des années de déroulement ce qui est le cas ici. Ceci grâce aux retraitements effectués dans le chapitre 2. Les résultats obtenus dans cette partie seront utilisés comme référence pour les autres méthodes.

I.3- Validation des hypothèses

L'hypothèse de linéarité de Chain Ladder est vérifiée par la représentation graphique des règlements cumulés par année de développement :

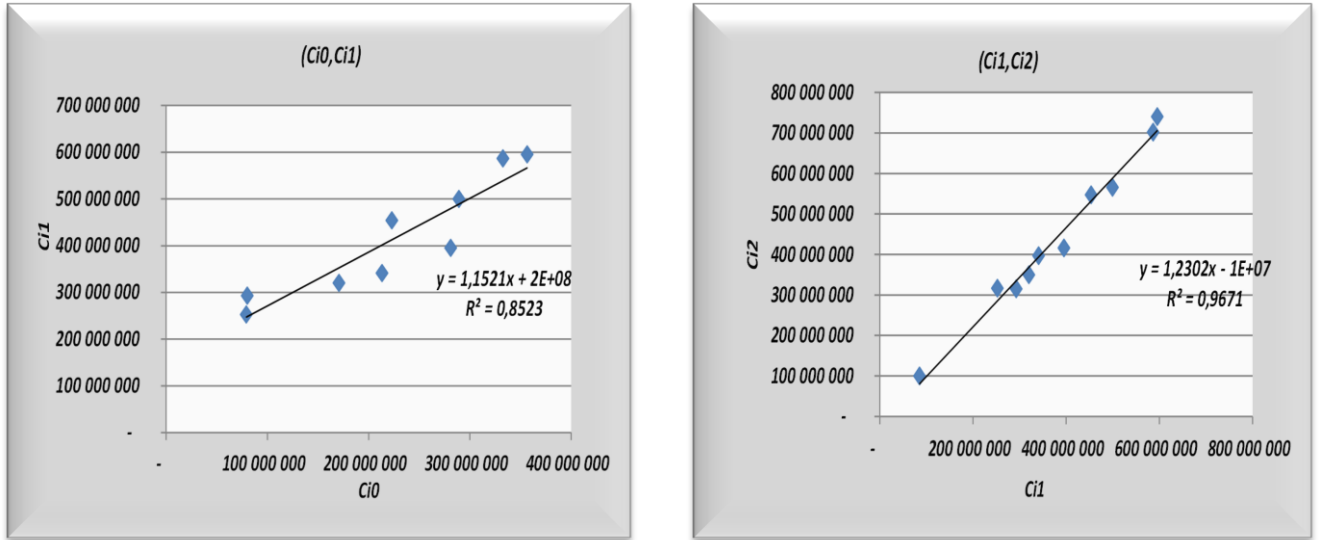


Figure 8 : Représentation des règlements cumulés pour les trois premières années de développement

Le nuage de point ci-dessus montre que les règlements cumulés sont sensiblement alignés. De plus le coefficient de détermination R^2 est significatif. Nous validons donc l'hypothèse de linéarité de Chain Ladder.

II- METHODE CHAIN LADDER PONDEREE

La méthode de Chain Ladder pondérée est une généralisation de la méthode classique. Elle utilise différents facteurs de développement selon la nature du triangle et l'expertise de l'actuaire.

II.1- Présentation du Modèle

Les facteurs de développement (λ_j) sont définis comme des moyennes pondérées des facteurs de développement individuel. L'expression générale de $\hat{\lambda}_j$ est défini par :

$$\hat{\lambda}_j = \frac{\sum_{i=0}^{n-j-1} \omega_{ij} \lambda_{ij}}{\sum_{i=0}^{n-j-1} \lambda_{ij}}, \quad \forall j \in \{0, \dots, n-1\}$$

Où $(\omega_{ij})_{i=0,\dots,n-j-1}$ représentent les pondérations qui sont judicieusement choisies en fonction de l'allure des facteurs individuels $(\lambda_{ij})_{i=0,\dots,n-j-1}$.

II.2- Les Choix standards des pondérations

Le choix des pondérations peut être guidé par plusieurs facteurs selon la nature des données lorsqu'on cherche à calculer la PSAP via les méthodes statistiques. Lors de cet exercice, l'actuaire souhaite donc écarter les sinistres qu'il reconnaît comme « anormaux ». En ce sens, la pondération sert à réduire l'importance de certaines données jugées non représentatives. Ces données proviennent de plusieurs sources: Evènement exceptionnel, Changement du mode de gestion des sinistres, etc...

Classiquement les pondérations choisies sont :

- **La moyenne des facteurs de développement individuels :**

L'estimation du facteur de développement $(\hat{\lambda}_j)_{j=0,\dots,n-1}$ est obtenue en prenant comme pondération $\omega_{ij}=1$; il s'agit en fait d'une moyenne arithmétique des facteurs de développement par année de survenance.

Ainsi :

$$\hat{\lambda}_j = \frac{1}{n-j} \sum_{i=0}^{n-j-1} \lambda_{ij}, \forall j \in \{0, \dots, n-1\}$$

- **La moyenne des k derniers facteurs de développement individuels :**

L'estimation du facteur de développement nécessite une bonne connaissance du portefeuille, le gestionnaire des sinistres peut remarquer une stabilité dans le mode de gestion des sinistres durant les k dernières années et préconise à l'actuaire d'utiliser les k derniers facteurs de développement individuels.

Si l'on choisit $k=3$, La pondération ω_{ij} est une variable binaire de la forme :

$$\omega_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i \in \{n-j-4, \dots, n-j-1\} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

D'où

$$\hat{\lambda}_j = \begin{cases} \frac{1}{3} \sum_{i=n-j-4}^{n-j-1} \lambda_{ij} & \text{si } j = 0, \dots, n-3 \\ \frac{1}{2}(\lambda_{0j} + \lambda_{1j}) & \text{si } j = n-2 \\ \lambda_{0j} & \text{si } j = n-1 \end{cases}$$

▪ **Pondération par année calendaire**

La pondération par année calendaire fait jouer un rôle plus marquée aux années récentes relativement aux plus anciennes. La pondération est $\omega_{ij} = i + j + 1$ (3) ou $\omega_{ij} = (i + j + 1)^2$ (4).

Les coefficients de développement s'écrivent :

$$\hat{\lambda}_j = \frac{\sum_{i=0}^{n-j-1} \omega_{ij} \lambda_{ij}}{\sum_{i=0}^{n-j-1} \lambda_{ij}}, \forall j \in \{0, \dots, n - 1\}$$

II.3- Résultats obtenus

A partir de notre triangle nous estimons les facteurs de développement ou de passage.

	$\hat{\lambda}_0$	$\hat{\lambda}_1$	$\hat{\lambda}_2$	$\hat{\lambda}_3$	$\hat{\lambda}_4$	$\hat{\lambda}_5$	$\hat{\lambda}_6$	$\hat{\lambda}_7$	$\hat{\lambda}_8$	$\hat{\lambda}_9$
Moyenne des facteurs individuels	2,10	1,16	1,03	1,02	1,03	1	1,03	1	1	1
Moyenne des 3 derniers facteurs	2,06	1,18	1,05	1,04	1,03	1	1,03	1	1	1
Pondération par année calendaire(3)	1,91	1,17	1,04	1,03	1,03	1	1,03	1	1	1
Pondération par année calendaire(4)	1,89	1,17	1,04	1,03	1,03	1	1,03	1	1	1

Tableau 15 : Facteurs de développement par type de pondération

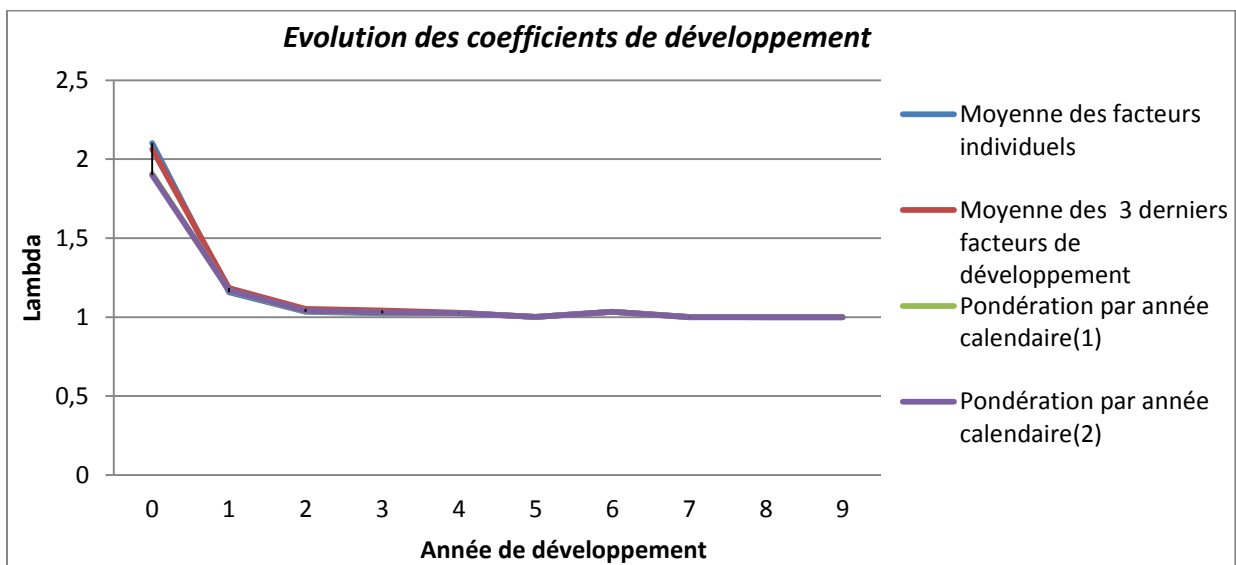


Figure 9 : Evolution des coefficients de développement

Nous constatons, quelque soit la pondération, les coefficients de développement convergent à partir de la quatrième année de développement. Les provisions estimées sont présentées dans le tableau ci-dessous.

Année de Survenance	Provision Ultime			
	Moyenne des facteurs individuels	Moyenne des trois derniers facteurs individuels	Pondération par année calendaire(1)	Pondération par année calendaire(2)
2005	-	-	-	-
2006	-	-	-	-
2007	83 574	83 574	78 658	73 776
2008	26 762 667	26 762 667	26 662 735	26 301 548
2009	21 118 708	21 118 323	21 035 310	20 746 063
2010	50 185 225	51 469 833	50 675 812	50 429 532
2011	27 038 000	33 950 727	28 466 951	29 308 637
2012	51 059 014	68 387 891	54 535 804	56 672 571
2013	101 749 715	128 665 462	109 376 832	111 866 834
2014	80 129 585	85 397 450	70 462 464	70 616 931
Total	358 126 488	415 835 927	361 294 565	366 015 892

Tableau 16 : Provisions obtenues par Chain Ladder Pondérée

Les provisions obtenues avec la moyenne des facteurs individuels, la pondération par année calendaire (3) et la pondération par année calendaire (4) sont proches de celles estimées par la méthode Chain Ladder. Par contre avec la moyenne des trois derniers facteurs individuels les provisions s'écartent un peu de la méthode Chain Ladder.

III- METHODE DES MOINDRES CARREES DE VYLDER

III.1- Présentation générale du modèle

La méthode repose sur la modélisation des règlements décumulés. Elle suppose qu'une proportion r_j de la charge totale p_i est réglée chaque année.

Ainsi les règlements décumulés s'écrivent de la forme suivante :

$$Y_{ij} = r_j * p_i$$

Le triangle des règlements s'écrit :

$r_1 * p_1$	$r_2 * p_1$...	$r_{n-1} * p_1$	$r_n * p_1$
$r_1 * p_2$	$r_2 * p_2$...	$r_{n-1} * p_2$	
...				
$r_1 * p_{n-1}$	$r_2 * p_{n-1}$			
$r_1 * p_n$				

Tableau 14 : triangle des règlements décumulés de De Vylder

Les paramètres r_j et p_i sont obtenus en minimisant la somme des carrés des écarts entre les valeurs observées Y_{ij} et les valeurs estimées $r_j * p_i$:

$$\sum_{i+j \leq n}^n (Y_{ij} - r_j * p_i)^2$$

L'estimation des paramètres r_j et p_i se fait sous la contrainte $\sum_{j=1}^n r_j = 1$. Les estimateurs obtenus sont donc :

$$\hat{p}_i = \frac{\sum_j^n \hat{r}_j * Y_{ij}}{\sum_j^n \hat{r}_j^2} \quad \text{et} \quad \hat{r}_i = \frac{\sum_j^n \hat{p}_j * Y_{ij}}{\sum_j^n \hat{p}_j^2}$$

III.2- Application

Le tableau suivant présente les paramètres r_j et p_i estimés à partir du triangle des règlements décumulés.

Paramètres	Estimations	Paramètres	Estimations
r_0	0,408	p_0	355 257 715
r_1	0,321	p_1	419 440 336
r_2	0,147	p_2	665 058 518
r_3	0,042	p_3	805 153 311
r_4	0,023	p_4	615 052 709
r_5	0,030	p_5	842 497 834
r_6	0,000	p_6	332 463 696
r_7	0,021	p_7	530 296 660
r_8	0,000	p_8	475 129 288
r_9	0,000	p_9	113 722 785

Tableau 17 : Paramètres estimés par la méthode De Vylder

Nous constatons que la majorité des règlements se fait les trois premières années, ceci est aussi confirmé par les coefficients de développement donnés par la méthode Chain Ladder.

Après estimation des paramètres r_j et p_i nous déterminons la charge ultime et la provision par année de survenance.

Année de Survenance	Charge Ultime	Provision Ultime
2005	325 256 436	-
2006	412 131 044	-
2007	584 666 435	72 051
2008	808 130 318	17 007 065
2009	634 201 371	13 061 342
2010	872 856 664	42 814 267
2011	341 344 363	24 417 969
2012	476 957 720	61 261 239
2013	465 599 027	124 496 686
2014	112 704 097	66 337 997
Total	5 033 847 475	349 468 616

Tableau 18 : Provisions estimées par la méthode De Vylder

La provision estimée par la méthode De Vylder est de 349 468 616 FCFA, elle est proche de celle déterminée par la méthode Chain Ladder.

IV- METHODE DU COUT MOYEN

IV.1- Présentation du modèle

La méthode du coût moyen tient compte du nombre de sinistre par année d'origine n_i comme indicateur d'exposition. L'application de cette méthode nécessite :

- Un triangle de nombre de sinistre $(n_{ij})_{i+j \leq n}$
- Un triangle de règlement cumulé $(C_{ij})_{i+j \leq n}$

Ensuite on détermine le triangle de liquidation des coûts moyens $(L'_{ij})_{i+j \leq n}$ défini par :

$$L'_{ij} = \frac{C_{ij}}{n_{ij}}$$

Par la méthode de Chain Ladder on projette la partie inférieure de ces deux triangles $((L'_{ij})_{i,j=0,\dots,n}, (n_{ij})_{i,j=0,\dots,n})$ pour obtenir les ultimes par année de survenance : L'_{in}, n_{in} .

On déduit la charge ultime :

$$\hat{C}_{i,n} = n_{in} L'_{in} \quad \forall i \in \{0, \dots, n-1\}$$

Les provisions sont estimées par l'équation (2).

IV.2- Application

Le tableau ci-dessous présente les provisions déterminées par la méthode :

Années Survenance	Charge Ultime	Provision Ultime
2005	325 256 436	-
2006	412 131 044	-
2007	584 675 227	80 843
2008	813 932 522	22 809 268
2009	639 144 843	18 004 814
2010	877 328 749	47 286 353
2011	343 334 014	26 407 620
2012	465 994 113	50 297 632
2013	441 238 389	100 136 049
2014	112 300 657	65 934 557
Total	5 015 335 995	330 957 136

Tableau 19: Provisions estimées par la méthode du coût moyen

La provision estimée par la méthode du coût moyen est de 349 468 616 FCFA, elle est proche de celle déterminée par la méthode Chain Ladder.

V- METHODE DE TAYLOR

V.1- Présentation du Modèle

Cette méthode a été proposée par TAYLOR (1974). Elle permet le calcul de provision dans un triangle soumis à une inflation inconnue. Cette méthode considère l'inflation comme un facteur endogène au triangle, elle s'applique donc au triangle de règlement non cumulé.

On suppose que le montant des règlements, relatifs aux sinistres survenus l'année i et payés l'année $i + j - 1$ est de la forme suivante :

$$Y_{ij} = r_{ij} \cdot \mu_{i+j-1} \quad \forall i, j$$

Les r_j représentent le vecteur des cadences de règlement non cumulé en monnaie constante et μ_k les coefficients d'actualisation pour l'année calendaire k .

$r_1 \cdot \mu_1$	$r_2 \cdot \mu_2$...	$r_{n-1} \cdot \mu_{-1n}$	$r_n \cdot \mu_n$
$r_1 \cdot \mu_2$	$r_2 \cdot \mu_3$...	$r_{n-1} \cdot \mu_n$	
.	.			
$r_n \cdot \mu_n$	$r_2 \cdot \mu_n$			
$r_n \cdot \mu_n$				

On pose : $\sum_{j=1}^n r_j = 1$

La somme sur la diagonale est :

$$d_n = Y_{1,n} + Y_{2,n-1} + \dots + Y_{n,1} = \mu_n(r_1 + r_2 + \dots + r_k) = \mu_n$$

En considérant la nième colonne, $\gamma_n = Y_{i,n} = r_n \mu_n$ d'où

$$r_n = \frac{\gamma_n}{\mu_n} \text{ et } \mu_{n-1} = \frac{d_{n-1}}{1-r_n}$$

$$r_{n-i+1} = \frac{\gamma_{n-i+1}}{\mu_n + \mu_{n-1} + \dots + \mu_{n-i+1}}$$

$$\mu_{k-i} = \frac{d_{n-i}}{1 - (r_n + r_{n-1} + \dots + r_{n-i+1})}$$

Notons $(\hat{r}_j)_{j=0,\dots,n}$ et $(\hat{\mu}_j)_{j=0,\dots,n}$ les solutions.

On détermine les \hat{Y}_{ij} pour $i + j > n$ à partir des projections de l'inflation future $(\hat{\mu}_k)_{k \geq n+1}$ de manière exogène ou par extrapolation.

V.2- Application

L'estimation des paramètres de la méthode de Taylor suppose une hypothèse sur l'évolution future de l'inflation du triangle. Dans notre triangle l'évolution moyenne de l'inflation par année était de :

$$\left(\frac{\mu_8}{\mu_0}\right)^{\left(\frac{1}{8}\right)} - 1 = 15,23\%$$

Les provisions obtenues dans le cas de Chain Ladder correspondent à une inflation future de de 18%.

Nous effectuons plusieurs scénarios d'évolution de l'inflation, les résultats obtenus sont consignés dans le tableau suivant :

Taux d'inflation endogène futur	14%	15%	16%	17%	18%	25%
Provisions	310 791 654	317 453 946	324 274 296	331 257 133	338 406 997	393 539 444

Tableau 20 : Provisions en fonction du taux d'inflation futur

Les résultats obtenus montrent que les provisions et l'inflation ont une même tendance et l'ordre de grandeur des provisions ne change pas significativement. Le modèle est donc robuste et moins sensible aux fluctuations de l'inflation.

VI- AVANTAGES ET LIMITES DES METHODES DETERMINISTES

Les méthodes déterministes sont simplistes, faciles à mettre en œuvre et servent généralement de Benchmark pour les autres méthodes de provisionnement. Cependant ces méthodes révèlent plusieurs inconvénients qui sont généralement de 3 catégories :

La première catégorie concerne l'utilisation des données agrégées. En effet agrégées les données consistent à regrouper tous les sinistres quelques soit leurs états (ouvert, clôturé ou remis en cours), ce qui constitue une perte d'information. De plus le mode de gestion des sinistres diffère selon le type de sinistre (attritionnel ou grave), il est donc difficile de capter individuellement le développement réel des sinistres par année de survenance. L'utilisation des données agrégées nécessite une bonne séparation des sinistres attritionnels des graves afin d'avoir une stabilité du triangle.

La deuxième catégorie se rapporte à l'estimation des facteurs de développement, plus particulièrement pour les méthodes Chain Ladder. L'estimation suppose que le passé se reproduira de manière exacte dans le futur, autrement dit, quelque soit l'année de survenance il suffit d'appliquer les coefficients de passage pour trouver le montant à régler. Hors ceci n'est pas toujours vérifié car des facteurs comme l'inflation ou un nouveau mode de gestion des sinistres peuvent modifier les coefficients de passage.

La troisième catégorie vient du fait que l'estimation des provisions n'intègre pas de composante aléatoire. Ainsi trouver un intervalle de confiance et une distribution des provisions n'est pas possible.

CHAPITRE 4 : EVALUATION DES PROVISIONS PAR LES METHODES STOCHASTIQUES

Les méthodes déterministes, bien qu'elles sont simples à comprendre et à mettre en œuvre présentent des limites. Pour corriger ces limites, les méthodes stochastiques ont été introduites. Ces dernières présentent l'avantage de fournir la distribution des provisions, de mesurer la volatilité des provisions et de fournir des intervalles de confiance.

I- MODELE DE THOMAS MACK

I.1- Présentation du Modèle

La méthode Chain Ladder Standard vu précédemment ne permet pas de quantifier l'erreur de prédiction lors de l'estimation des provisions. Pour y remédier Thomas Mack introduit en 1993 l'approche Stochastique qui permet de corriger ce défaut. La méthode de Mack repose sur les hypothèses suivantes

Pour $i, j \in \{0, \dots, n-1\}$

(H1): Les règlements cumulés $(C_{i,j})$ sont indépendants par année de survenance

(H1): Il existe des paramètres $(\lambda_j)_{j \geq 0}$ tels que :

$$\mathbb{E}[C_{i,j+1}/C_{i,j}, \dots, C_{i,1}] = \mathbb{E}[C_{i,j+1}/C_{i,j}] = \lambda_j C_{i,j}$$

(H3): Il existe des paramètres $(\sigma_j)_{j \geq 0}$ tels que :

$$\text{Var}[C_{i,j+1}/C_{i,j}, \dots, C_{i,1}] = \text{Var}[C_{i,j+1}/C_{i,j}] = \sigma_j^2 C_{i,j}$$

Ces hypothèses peuvent s'écrire sous la forme suivante :

$$C_{i,j+1} = \lambda_j C_{i,j} + \varepsilon_{i,j} \sqrt{C_{i,j}}$$

Où $(\varepsilon_{i,j})_{i \geq 0}$ sont i.i.d et de variance σ_j^2 .

Cette formule permet d'estimer $(\lambda_j)_{j \geq 0}$ par l'estimateur des moindres carrés.

Sous les hypothèses (H1) et (H2) les estimateurs des moindres carrés sont obtenus par :

$$\hat{\lambda}_j = \frac{\sum_{i=0}^{n-j-1} C_{i,j+1}}{\sum_{i=0}^{n-j-1} C_{i,j}}$$

Ces estimateurs sont sans biais et non corrélés. (Pour la démonstration voir [1])

De même les estimateurs des paramètres σ_j^2 sont estimés par :

$$\widehat{\sigma}_j^2 = \widehat{\mathbb{E}}[\epsilon^2_{i,j}] = \frac{1}{n-j} \sum_{i=1}^{n-j} \left(\frac{C_{i,j+1} - \hat{\lambda}_j C_{i,j}}{\sqrt{C_{i,j}}} \right)^2$$

Les coefficients de développement estimés par la méthode de Mack coïncident avec ceux estimés par la méthode de Chain Ladder. Donc les provisions estimées par les deux méthodes sont égales.

I.2- Erreur de prédiction (mse_p)

L'apport de T. Mack par rapport à Chain Ladder déterministe est la possibilité de quantifier l'erreur de prédiction. L'erreur quadratique moyenne de prévision (mse_p) des provisions représente l'écart moyen entre les valeurs estimées et les valeurs observées réellement.

L'erreur quadratique moyenne par année de survenance se définit par :

$$\begin{aligned} mse_p(\hat{R}_i) &= \mathbb{E}[(\hat{R}_i - R_i)^2 / \mathcal{F}_n] \\ mse_p(\hat{R}_i) &= Var[R_i / \mathcal{F}_n] + Var[(\hat{R}_i - \mathbb{E}(R_i))^2 / \mathcal{F}_n] \end{aligned}$$

Le mse_p se décompose en deux termes :

- Le premier correspond à l'erreur du modèle, il mesure la variabilité du modèle stochastique.
- le second terme est l'erreur d'estimation des paramètres provenant de l'estimation des coefficients réels λ_j par les $\hat{\lambda}_j$.

L'erreur quadratique moyenne du portefeuille se définit par :

$$mse_p(\hat{R}) = \mathbb{E}[(\hat{R} - R)^2 / \mathcal{F}_n]$$

\hat{R}_i , \hat{R} sont définis de la même façon au niveau de (1) et (2)

- Pour chaque année de survenance i , l'estimateur de la msep est donné par :

$$\widehat{msep}(\hat{R}_i) = \hat{C}_{in}^2 \sum_{j=n+2-i}^{n-1} \frac{\sigma_j^2}{\hat{\lambda}_j^2} \left(\frac{1}{\hat{C}_{ij}} + \frac{1}{\sum_{i'=1}^{n+1-j} C_{i'j}} \right)$$

- Le msep du montant total des provisions pour l'ensemble du portefeuille est donnée par :

$$\widehat{msep}(\hat{R}) = \sum_{i=1}^n \left(\widehat{msep}(\hat{R}_i) + 2\hat{C}_{in}^2 \sum_{i'=i+1}^n \hat{C}_{i'j} \sum_{j=n+1-i}^{n-1} \frac{\sigma_j^2}{\hat{\lambda}_j^2 \sum_{i'=1}^{n+1-j} C_{i'j}} \right)$$

I.3- Construction d'un intervalle de confiance

Dans le but de déterminer un intervalle de confiance pour nos provisions calculées par année de survenance, il est nécessaire de définir l'écart type des R_i . L'écart type est déduit du msep calculé précédemment. En effet il est défini par :

$$\widehat{sep}(\hat{R}_i) = \sqrt{\widehat{msep}(\hat{R}_i)}$$

Le modèle de Mack ne fournit pas la distribution pour les provisions calculées à ultime. Cependant il est nécessaire de supposer l'hypothèse paramétrique sur la forme de la distribution des \hat{R}_i afin de pouvoir définir des intervalles de confiance autour de ceux-ci.

Afin d'estimer les intervalles de confiance on suppose que les montants des provisions suivent la loi log-normale de paramètres μ_i et σ_i .

Classiquement l'hypothèse sur la distribution du montant des provisions est de supposer que les provisions suivent une loi normale de moyenne les montants estimés \hat{R}_i et d'écart type $\widehat{sep}(\hat{R}_i)$. L'intervalle de confiance à 95% est donné par :

$[\hat{R}_i \pm 1.96 \widehat{sep}(\hat{R}_i)]$. Cette hypothèse peut être remise en cause du fait de la distribution symétrique de la loi normale qui ne semble pas se vérifier dans la pratique.

C'est d'ailleurs pour cette raison que nous avons choisi d'utiliser la loi log-normale qui présente l'avantage d'être une distribution asymétrique, avec des queues de distribution plus épaisses.

On rappelle :

soit $X \sim$ loi log – normale de paramètre μ_i et σ_i .

La fonction de densité est donnée par :

$$f(x; \mu; \sigma) = \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right]$$

$$\mathbb{E}[X] = e^{\left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right)}$$

$$V[X] = (e^{\sigma^2} - 1)e^{(2\mu + \sigma^2)}$$

Dans notre cas nous avons :

$$\mathbb{E}[X_i] = e^{\left(\mu_i + \frac{\sigma_i^2}{2}\right)} = \hat{R}_i \Rightarrow \mu_i = \ln(\hat{R}_i) - \frac{\sigma_i^2}{2}$$

$$V[X_i] = (e^{\sigma_i^2} - 1)e^{(2\mu_i + \sigma_i^2)} = \widehat{se}(\hat{R}_i) \Rightarrow \sigma_i^2 = \ln\left[1 + \left(\frac{\widehat{se}(\hat{R}_i)}{\hat{R}_i}\right)^2\right]$$

L'intervalle de confiance à 95% est donné par :

$$IC = [\exp(\mu_i - 1,96\sigma_i^2); \exp(\mu_i + 1,96\sigma_i^2)]$$

$$IC = \left[\hat{R}_i \exp\left(-\frac{\sigma_i^2}{2} - 1,96\sigma_i^2\right); \hat{R}_i \exp\left(-\frac{\sigma_i^2}{2} + 1,96\sigma_i^2\right)\right]$$

I.4 – Résultats obtenus

Les résultats obtenus pour le calcul de l'écart type des provisions et les intervalles de confiance sont présentés dans le tableau suivant :

Année de Survenance	\hat{R}_i	$\widehat{sep}(\hat{R}_i)$	Intervalle de confiance	
			Borne inf	Borne sup
2005	-	-	-	-
2006	-	405	-	-
2007	73 716	124 797	2 648	530 850
2008	23 374 971	40 075 723	801 659	173 013 919
2009	18 443 845	34 028 211	480 855	160 639 548
2010	49 105 320	49 163 708	8 898 656	135 327 566
2011	27 131 693	31 348 102	3 369 060	93 576 171
2012	54 479 852	43 327 221	16 316 509	111 428 305
2013	107 828 869	54 064 037	62 108 297	149 598 770
2014	66 188 857	75 886 944	8 398 755	225 369 688
Total	346 627 122	168 428 889	205 780 863	472 350 283

Tableau 21 : Erreur quadratique et intervalle de confiance du modèle de MACK

L'erreur quadratique moyenne est de 49% c'est-à-dire que la variance de l'estimation $E(R_i)$ représente 49% du montant total des provisions. Cela s'explique par le fait qu'en 2014 la valeur des règlements de la première année de développement est faible (on rappelle que nous n'avons que les règlements jusqu'en septembre 2014) ce qui augmente l'erreur d'estimation.

I.5- Validation des Hypothèses

Dans ce paragraphe nous allons vérifier la validité des trois hypothèses (H1, H2, H3), de Mack. Si ces hypothèses ne sont pas vérifiées, le modèle de Mack n'est pas valide. Il est donc nécessaire de tester chacune d'elles.

- ✚ Pour valider l'hypothèse d'indépendance (H1) des paiements cumulés $(C_{i,j})$ par année de survenance nous allons utiliser un test de signe en comparant les facteurs de développement individuels à la médiane par année de survenance.

Pour chaque valeur nous associons un signe + si le facteur de développement est supérieur à la valeur médiane et un signe - dans le cas inverse.

On définit pour chaque année de survenance :

n_{i+} : le nombre de (+) obtenu

n_{i-} : le nombre de (-) obtenu

z_i : $\min\{n_{i+}; n_{i-}\}$

Hypothèse :

H0 : il y a indépendance des $(C_{i,j})$ par année de survenance.

H1 : il n'y a pas indépendance des $(C_{i,j})$ par année de survenance.

Sous l'hypothèse d'indépendance, on s'attend à obtenir autant de valeurs supérieures, qu'inférieures à la médiane, c'est-à-dire que la variable n_{i+} devrait suivre une loi Binomiale $\beta_i\left(n, \frac{1}{2}\right)$ avec $n = n_{i+} + n_{i-}$

Le test portera ici sur la valeur de z_i qui devra être proche de l'espérance de la loi binomiale, à savoir $\frac{n}{2}$.

La statistique de test est définie par :

$$t = \frac{\sum_i Z_i - \mathbb{E}[\sum_i Z_i]}{\sqrt{V[\sum_i Z_i]}}$$

Les moments de la variable z_i peuvent être se déduire du lemme suivant :

Si $X \sim \beta_i\left(n, \frac{1}{2}\right)$ alors les deux premiers moments de z_i sont définis par :

$$\mathbb{E}[Z] = \frac{n}{2} - C_{n-1}^m \frac{n}{2^n}$$

$$V[Z] = \frac{n(n-1)}{4} - C_{n-1}^m \frac{(n-1)}{2^n} + \mathbb{E}[Z] + \mathbb{E}[Z]^2$$

ou m est la partie entière de $\frac{n}{2}$

Sous l'hypothèse H_0 $\mathbb{E}[\sum_i Z_i] = \sum_i \mathbb{E}[Z_i]$ et $V[\sum_i Z_i] = \sum_i V[Z_i]$

n_{i+}	n_{i-}	z_i	n_i	En $t(n_i/2)$	E (z_i)	V (z_i)
5	4	4	9	4	3,270	0,736
4	4	4	8	4	2,906	0,804
6	1	1	7	3	2,406	0,554
2	4	2	6	3	2,063	0,621
2	3	2	5	2	1,563	0,371
3	1	1	4	2	1,250	0,438
2	1	1	3	1	0,750	0,188
1	1	1	2	1	0,500	0,250
0	1	0	1	0	0,000	0,000
		16			14,707	3,961

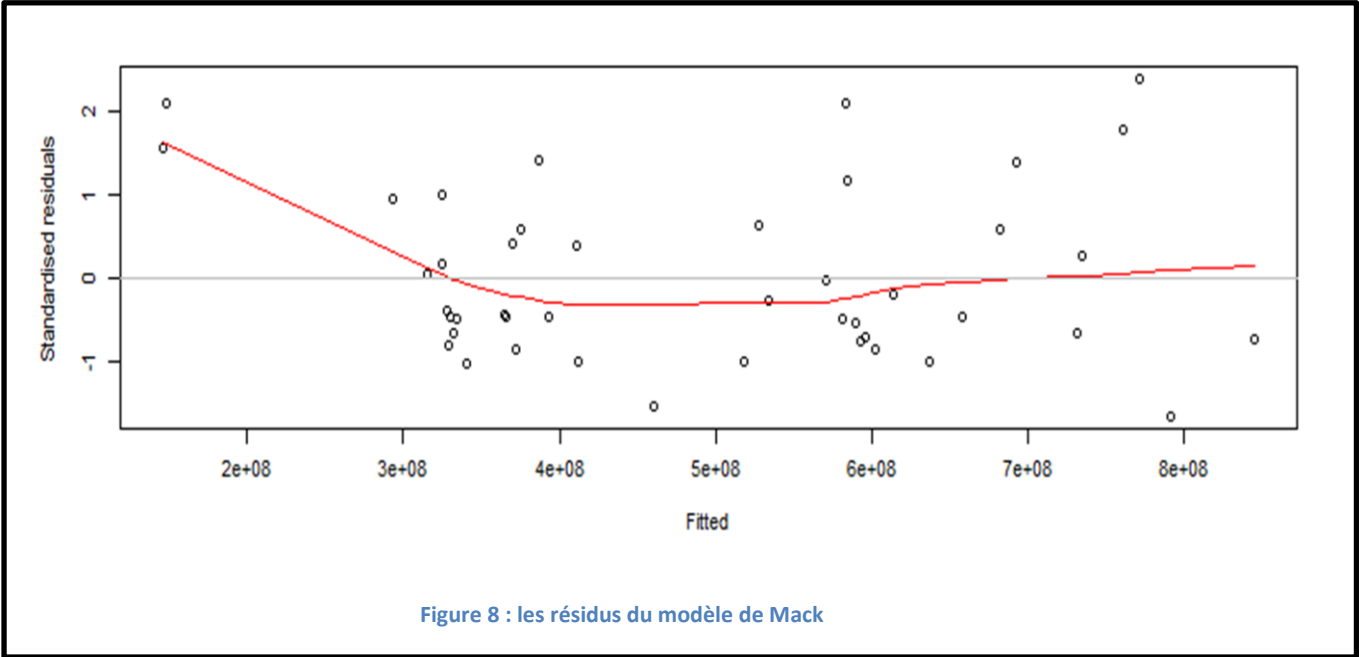
Tableau 22 : Résultat du test de signe

La statistique calculée $t=0,65 < 1,96$ nous acceptons l'hypothèse d'indépendance.

✚ L'hypothèse (H_2) de Mack est la même que celle validée précédemment dans le cas de Chain Ladder déterministe. Elle suppose la linéarité des règlements cumulés par année de survenance.

- L'hypothèse (H3) s'interprète graphiquement par le fait que pour une année de déroulement j donnée la représentation des points $(C_{i,j}; \varepsilon_{i,j})$ doit être non structurée. Les $\varepsilon_{i,j}$ représentent les résidus de l'estimation par moindre carrée.

$$\varepsilon_{i,j} = \frac{C_{i,j+1} - \lambda_j C_{i,j}}{\sqrt{C_{i,j}}}$$



II- METHODE DE REGRESSION LOG-NORMALE

II.1- Présentation du modèle

Dans le cadre du modèle de Log-Normale on suppose que les règlements $Y_{i,j}$ ($Y_{i,j} > 0$) sont distribués selon une loi Log-normale.

$Y_{i,j} \sim \text{LogN}(m_{i,j}, \sigma^2)$, ou σ^2 est un paramètre de dispersion.

On pose:

$$X_{i,j} = \ln(Y_{i,j}) = \mu + a_i + b_j + \varepsilon_{i,j}$$

$$\mathbb{E}(X_{i,j}) = \mu + a_i + b_j \quad \text{Avec} \quad \mathbb{E}(\varepsilon_{i,j}) = 0$$

Les erreurs $\varepsilon_{i,j}$ étant i.i.d, distribuées selon la loi Normale $N(0, \sigma^2)$.

Les variables a_i et b_j sont binaires et permettent de capter respectivement les effets des années de survenance et les cadences de règlements.

$$a_i = \begin{cases} 1 & \text{si le sinistre est survenue l'année} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$b_j = \begin{cases} 1 & \text{si le sinistre est réglé l'année } i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

▪ **Estimation des paramètres**

L'estimation des paramètres se fait à partir du modèle de régression multiple :

$$X = M\beta + \varepsilon$$

Avec :

X : Le vecteur des variables à expliquer

M : la matrice de regression associée

β : le vecteur des variables explicatives

$$\varepsilon_{i,j} = X_{i,j} - \widehat{X}_{i,j}$$

En introduisant les contraintes $a_0 = b_0 = 0$, nous estimons les paramètres par maximum de vraisemblance :

$$\widehat{\beta} = (M'M)^{-1}M'X \quad ; \quad \widehat{MSE} = \frac{\widehat{\varepsilon}^2}{n-p-1}$$

La partie inférieure du triangle est complétée par la formule suivante :

$$\mu_{ij} = \mathbb{E}[Y_{i,j}] = \exp\left(\mu + a_i + b_j + \frac{\sigma^2}{2}\right)$$

$$V[Y_{i,j}] = \exp\left(2\left(\mu + a_i + b_j\right) + \frac{\sigma^2}{2}\right) * (\exp(\sigma^2) - 1)$$

II.2- Résultats obtenus

Les estimations sont faites à partir du logiciel R. les résultats obtenus sont présentés dans le tableau ci-dessous.

Coefficients	μ	α_0	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	α_6	α_7	α_8	α_9
Estimations	18,42	0	-0,06	-0,08	0,55	0,71	1,09	-0,32	0,17	-0,13	-0,77

Coefficients	β_0	β_1	β_2	β_3	β_4	β_5	β_6	β_7	β_8	β_9
Estimations	0	- 0,15	- 1,30	- 2,68	-3,38	- 3,60	- 7,69	-6,53	-8,07	-9,21

Tableau 23 : Paramètres estimés du modèle log-Normale

A partir des paramètres estimés nous complétons la partie inférieure du triangle des règlements et déduisons la charge ultime et les provisions à l'ultime.

Année Survenance	Charge Ultime	Provision Ultime
2005	325 266 436	-
2006	412 268 937	127 893
2007	584 680 684	76 299
2008	802 313 232	11 179 979
2009	625 133 765	3 993 736
2010	867 856 826	37 814 430
2011	328 678 763	11 752 369
2012	451 825 192	36 128 711
2013	507 370 386	166 268 046
2014	201 608 650	155 242 550
Total	5 107 002 871	422 584 012

Tableau 24 : Provisions par la méthode log-Normale

La provision à l'ultime est de 422 584 012, elle est légèrement supérieure à celle de Chain Ladder car l'estimation des provisions avec la loi log normale intègre le paramètre de volatilité.

II.3- Analyse des Résidus et Validations des Modèles

Pour tester la significativité des paramètres du modèle nous utilisons le test de Fisher.

✚ Test de Fisher :

$$H_0 : \beta_j = 0$$

$$H_1 : \beta_j \neq 0$$

	Statistique du test	Degré de liberté	P-value
Fisher	12.95	(18,36)	9.962e-11

Tableau 25 : Résultat du test de Fisher

Nous constatons que la p-value de la statistique du Fisher est strictement inférieur à 5% donc nous rejetons l'hypothèse de non significativité des paramètres.

Par ailleurs le coefficient de détermination R^2 ajusté du modèle est égal 0.799 nous pouvons donc conclure que le modèle est significatif.

✚ Analyse des Résidus

Nous allons vérifier graphiquement si les résidus sont distribués de façon aléatoire et tester leurs normalités à l'aide du test de Kolmogorov Smirnov.

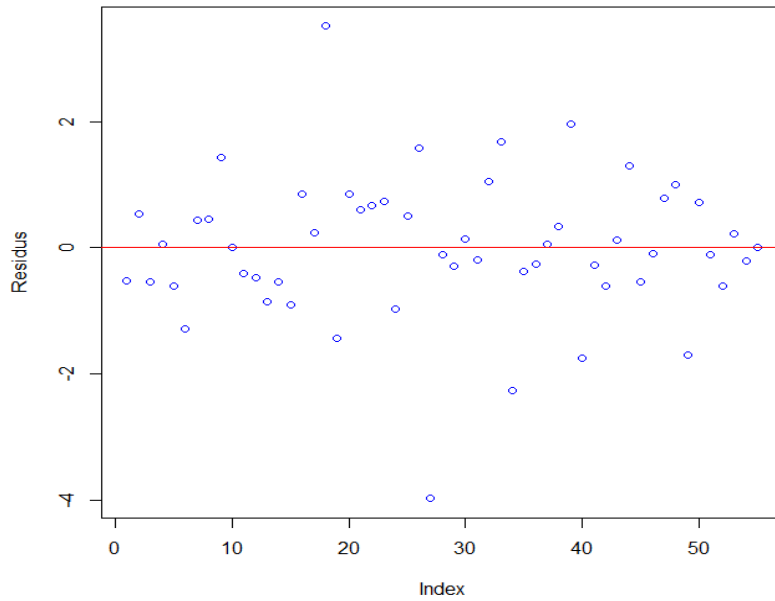


Figure 10 : Les Résidus du modèle log normale

D'après ce graphique les résidus sont distribués aléatoirement, il y a absence de structure. Nous confirmons cela par le test de Kolmogorov Smirnov et le Q-Q plot des résidus.

✚ Test de Kolmogorov Smirnov

Pour tester la normalité des résidus nous utilisons le test de Kolmogorov Smirnov.

	Statistique du test	P-value
Kolmogorov Smirnov	0.1292	0.2918

Tableau 26 : Résultat du test de Kolmogorov Smirnov

La p-value de la Statistique de Kolmogorov Smirnov est supérieure à 5%, nous acceptons l'hypothèse H_0 .

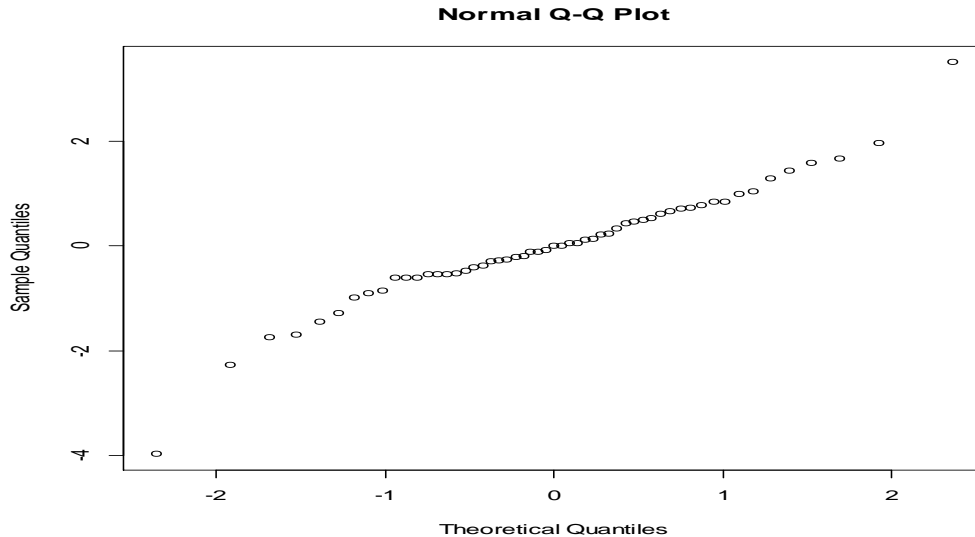


Figure 11 : Q-Q plot des résidus du modèle log normale.

L'analyse du Q-Q Plot des résidus et le résultat du test de Kolmogorov Smirnov nous permettent de conclure à la normalité des résidus.

II.4- Les limites du modèle

Le modèle de régression log-normale présente l'avantage de donner de bon résultat et simple à mettre en œuvre. Cependant l'application de cette méthode impose une condition à priori sur les incréments ($Y_{i,j} > 0$) qui n'est pas toujours vérifiée. La valeur attribuée aux incréments négatif ou nul influencent les paramètres estimés. Dans notre cas les incréments nuls ($Y_{i,j} = 0$) ont été remplacés par 10 000 FCFA afin de pouvoir appliquer la méthode.

III- MODELE LINEAIRE GENERALISE (GLM)

L'idée principale d'un modèle GLM est de capter la tendance des règlements incrémentaux au fil des années de survenance et des années de développement en supposant que les règlements suivent une loi paramétrique. Parmi les familles de distribution possibles (Poisson sur-dispersée, log-normal, Gamma, etc...) la théorie prouve qu'avec la famille Poisson sur-dispersée, le GLM reproduit exactement les mêmes prédictions que la méthode de Chain Ladder (cf. Renshaw et al. 1998).

III.1 Présentation du modèle

Le modèle utilise trois composantes : les composantes aléatoires, systématiques et la fonction de lien.

- **Composante aléatoire**

On suppose que les règlements non cumulés $(Y_{ij})_{i,j=0,\dots,n-1}$ sont des variables aléatoires indépendantes de fonction de densité :

$$f(Y_{ij}; \theta_{ij}; \phi) = \exp \left\{ \frac{[\theta_{ij} Y_{ij} - b(\theta_{ij})] \omega_{ij}}{\phi} + c(Y_{ij}, \phi) \right\}$$

Où :

- θ_{ij} est un paramètre naturel de la famille exponentiel.
- ϕ est un paramètre de dispersion, il est indépendant de i et de j , avec $\phi = 1$ pour une loi de poisson et $\phi \neq 0$ pour la loi de poisson sur-dispersée.
- ω_{ij} est une pondérée donnée.
- b et c sont de fonctions spécifiques de la distribution, b est une fonction régulière.

On en déduit les relations sur l'espérance $\mu_{ij} = E(Y_{ij})$ des règlements non cumulés et la variance des règlements par :

$$\begin{aligned} \mu_{ij} &= E(Y_{ij}) = b'(\theta_{ij}) \\ V(Y_{ij}) &= \phi b''(\theta_{ij}) = \phi b''[b'^{-1}(\mu_{ij})] = \phi V(\mu_{ij}) \\ \mu_3(Y_{ij}) &= \phi^2 V(\mu_{ij}) V'(\mu_{ij}) \\ \gamma_1(Y_{ij}) &= \frac{\mu_3(Y_{ij})}{[V(Y_{ij})]^{\frac{3}{2}}} = \sqrt{\phi} \frac{V'(\mu_{ij})}{[V(\mu_{ij})]^{\frac{1}{2}}} \end{aligned}$$

La fonction V est une fonction variance de la distribution. Elle prend différente forme selon la distribution étudiée.

▪ La composante systématique

La composante systématique est une composante déterministe basée sur un prédicteur linéaire de la forme :

$$\eta_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta_j \quad i, j = 0, \dots, n-1$$

Pour raison d'identification du modèle, on pose $\alpha_0 = \beta_0 = 0$.

Dans le cadre du provisionnement :

- μ : est un paramètre du contrôle global, qui représente l'inflation supposé constance.
- α_i : est un paramètre qui capte la tendance des règlements par rapport aux années de survenance.
- β_j : est un paramètre qui capte la tendance des règlements par rapport aux années de développement.

▪ La fonction lien

La fonction lien établit un pont entre les composantes aléatoires et systématiques sous forme de la donnée d'une fonction réelle g strictement monotone et dérivable telle que :

$$\eta_{ij} = g(\mu_{ij}) \text{ ou } \mu_{ij} = g^{-1}(\eta_{ij}) \quad i, j = 0, \dots, n-1$$

Les fonctions standards sont les fonctions :

- La fonction identité : $\eta_{ij} = \mu_{ij}$, pour laquelle les effets des facteurs sont additifs.
- La fonction logarithmique : $\eta_{ij} = \ln(\mu_{ij})$ où : $\mu_{ij} = e^{\eta_{ij}}$, elle représente un avantage parce qu'elle introduit un effet multiplicatif.

III.2- Modélisation par la loi poisson sur-dispersée

Les règlements Y_{ij} suivent la loi de poisson sur-dispersée de paramètres (μ_{ij}, ϕ) , la densité de probabilité de Y_{ij} en y_{ij} est :

$$\begin{cases} \mathbb{P}(Y_{ij} = y_{ij}) = \frac{(\mu_{ij}/\phi)^{y_{ij}/\phi} \exp(-\mu_{ij}/\phi)}{(y_{ij}/\phi)!} \\ E[Y] = \mu, \quad Var[X] = \phi E[X] \end{cases}$$

L'estimation des paramètres se fait par maximum de vraisemblance, la fonction de vraisemblance s'écrit :

$$\begin{aligned} L(Y_{ij}, \mu_{ij}) &= \log \prod_{i+j \leq n} \frac{(\mu_{ij}/\phi)^{y_{ij}/\phi} \exp(-\mu_{ij}/\phi)}{(y_{ij}/\phi)!} \\ &= \frac{1}{\phi} \sum_{i+j \leq n} (y_{ij}(\mu + \alpha_i + \beta_j) - \exp(\mu + \alpha_i + \beta_j)) - f(y_{ij}, \phi) \end{aligned}$$

Avec $f(y_{ij}, \phi)$ qui regroupe tous les termes qui ne dépendent que de y_{ij} et de ϕ . Remarquons que $f(y_{ij}, \phi)$ et ϕ ne jouent aucun rôle dans la maximisation de la vraisemblance du paramètre $\theta = \mu_{ij}$.

Par conséquent l'estimateur du maximum de vraisemblance du paramètre θ se fait à partir du programme suivant :

$$\hat{\theta} = \operatorname{argmax}_l \widehat{l}(Y_{ij}, \mu_{ij}) = \sum_{i+j \leq n} (y_{ij}(\mu + \alpha_i + \beta_j) - \exp(\mu + \alpha_i + \beta_j))$$

Ainsi chaque paramètre est obtenu par dérivation par rapport à chaque composante. On obtient le système d'équation suivant :

$$\text{Par rapport à } \mu : \sum_{i+j \leq n} y_{ij} - \sum_{i+j \leq n} \exp(\mu + \alpha_i + \beta_j) = 0$$

$$\text{Par rapport à } \alpha_i \quad \sum_{j \leq n-i} y_{ij} - \sum_{j \leq n-i} \exp(\mu + \alpha_i + \beta_j) = 0$$

$$\text{Par rapport à } \beta_j \quad \sum_{i \leq n-j} y_{ij} - \sum_{i \leq n-j} \exp(\mu + \alpha_i + \beta_j) = 0$$

Le système d'équation étant complexe pour être résolu analytiquement, nous avons eu recours à la méthode de Newton Raphson.

III.3- Résultats obtenus

▪ Estimation des paramètres

Le tableau ci-dessous présente les valeurs estimées des paramètres μ, α_i et β_j

μ	α_0	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	α_6	α_7	α_8	α_9
11,80	0	0,23	0,59	0,92	0,68	0,99	0,06	0,37	0,32	-1,061

β_0	β_1	β_2	β_3	β_4	β_5	β_6	β_7	β_8	β_9
0	-0,17	-1,19	-2,4	-2,88	-2,72	-7,99	-2,67	-8,09	-20,1

Tableau 27 : Paramètres estimés du modèle GLM

▪ **Définition des provisions et estimation du risque d'erreur**

Les provisions pour l'année de survenance $i = 0, \dots, n - 1$ sont :

$$E(R_i) = \sum_{j=n-i}^{n-1} E(y_{ij}) = \sum_{j=n-i}^{n-1} \mu_{ij}$$

$$V(R_i) = \sum_{j=n-i}^{n-1} V(y_{ij}) = \phi \sum_{j=n-i}^{n-1} V(\mu_{ij})$$

$$\mu_3(R_i) = \sum_{j=n-i}^{n-1} \mu_3(y_{ij}) = \phi^2 \sum_{j=n-i}^{n-1} V(\mu_{ij}) V'(\mu_{ij})$$

Les provisions sont estimées par maximum de vraisemblance

$$\hat{E}(R_i) = \sum_{j=n-i}^{n-1} \hat{\mu}_{ij} \quad , \quad \hat{V}(R_i) = \hat{\phi} \sum_{j=n-i}^{n-1} V(\hat{\mu}_{ij})$$

$$\hat{\mu}_3(R_i) = \hat{\phi}^2 \sum_{j=n-i}^{n-1} V(\hat{\mu}_{ij}) V'(\hat{\mu}_{ij})$$

Ainsi on déduit l'estimateur de la provision totale par :

$$\hat{E}(R) = \sum_{i=0}^{n-1} \hat{E}(R_i) \quad , \quad \hat{V}(R) = \sum_{i=0}^{n-1} \hat{V}(R_i) \quad , \quad \hat{\mu}_3(R) = \sum_{i=0}^{n-1} \hat{\mu}_3(R_i)$$

L'estimation du risque d'erreur *MSEP* se fait par la méthode delta, elle est présentée dans [2]. Le tableau suivant nous donne les provisions par année de survenance et la provision totale.

Année de Survenance	Charge Ultime	Provision Ultime	$\widehat{sep}(R_i)$	$\frac{\widehat{sep}(R_i)}{\hat{R}_i}$
2005	325 256 436	-	-	-
2006	412 131 044	-	94,84	-
2007	584 668 100	73 716	1 606 836	21,7976563
2008	814 498 225	23 374 971	27 580 070	1,1798974
2009	639 583 874	18 443 845	23 466 820	1,2723386
2010	879 147 717	49 105 320	38 932 650	0,7928397
2011	344 058 087	27 131 693	25 857 680	0,9530433
2012	470 176 332	54 479 852	37 774 360	0,6933639
2013	448 931 209	107 828 869	56 023 270	0,5195573
2014	112 554 957	66 188 857	56 722 530	0,8569801
Total	5 031 005 981	346 627 122	132 170 700	0,381305

Tableau 28 : Synthèse du GLM

Après estimation des provisions et de l'erreur standard de prédiction nous déterminons un intervalle de confiance des provisions à 95 % :

$$IC(\hat{R}) = [\hat{R} - 1,96 \widehat{sep}(\hat{R}) ; \hat{R} + 1,96 \widehat{sep}(\hat{R})]$$

Le tableau ci-dessous nous donne l'intervalle de confiance de la provision totale :

	Charge Ultime	Provision Ultime	IC(\hat{R})	
			Borne inf	Borne sup
Total	5 031 005 981	346 627 122	87 572 550	605 681 694

Tableau 29 : Intervalle de confiance des provisions

Nous constatons que les provisions sont identiques à celles estimées par Chain Ladder, ainsi la théorie est vérifiée.

III.3.1- Analyse des résidus et validation du modèle

- **Analyse des résidus**

L'analyse des résidus permet de mesurer la qualité d'ajustement d'un modèle. Elle reste indispensable pour détecter les cellules <<atypiques>> et confronter les hypothèses aux données. Dans le cadre d'un GLM, on utilise les résidus de Pearson parce qu'ils sont plus pertinents. L'analyse des résidus est indispensable pour tester l'indépendance des règlements par année de survenance, par année de développement et par rapport aux valeurs estimées.

- **Définition des résidus de Pearson**

Le résidu de Pearson de la cellule (i, j) est défini par :

$$r_{ij}^{(p)} = \frac{y_{ij} - \hat{\mu}_{ij}}{\sqrt{V(\hat{\mu}_{ij})}} \quad \forall i + j \leq n$$

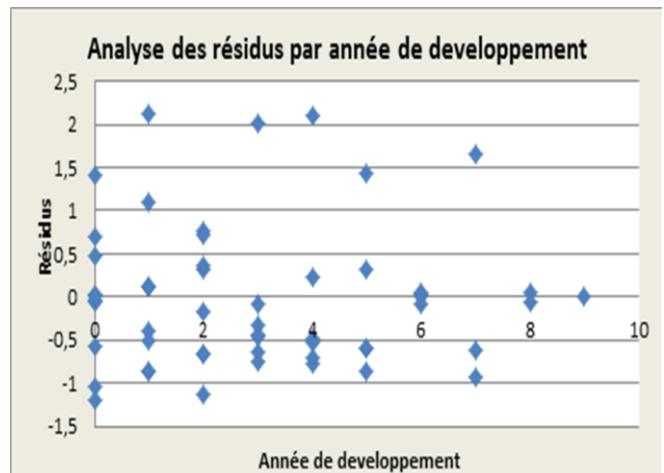
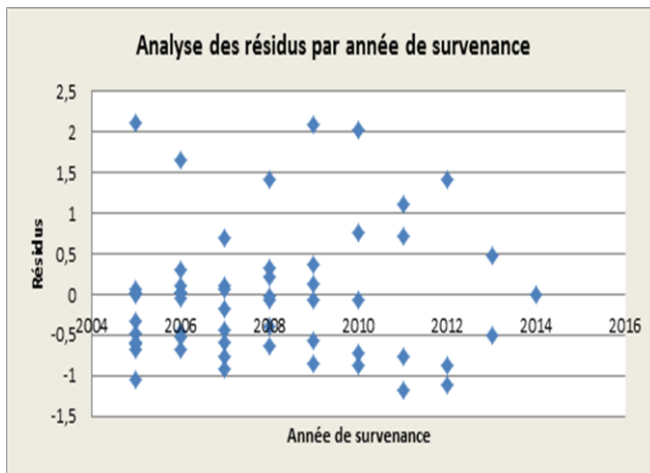


Figure 12 : Distribution des résidus

Le graphe ci-dessus présente la distribution des résidus par année de survenance, de développement et par rapport aux valeurs estimées. Nous constatons une distribution aléatoire des résidus par année de survenance et par année de développement. Les règlements sont donc indépendants par année de survenance et indépendants par année de développement.

▪ **Test de normalité des résidus**

Nous utilisons le test de Kolmogorov Smirnov pour tester la normalité des résidus.

	D	P-value
Test de Kolmogorov	0,177	0,054

Tableau 30 : Résultat du test de Kolmogorov des résidus glm

Le p-value est supérieur à 0,05 donc on accepte H0, les résidus suivent une loi normale

Le Q-Q plot permet de confirmer la normalité des résidus :

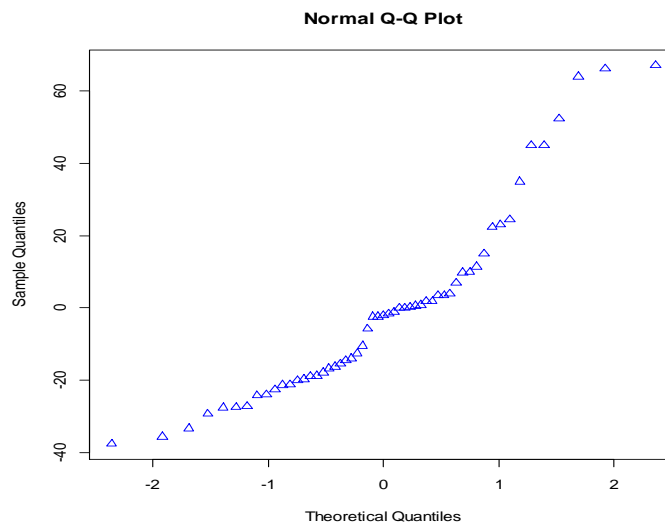


Figure 13 : Q-Q plot des résidus du modèle GLM

IV- APPROCHE NON PARAMETRIQUE : LE BOOTSTRAP

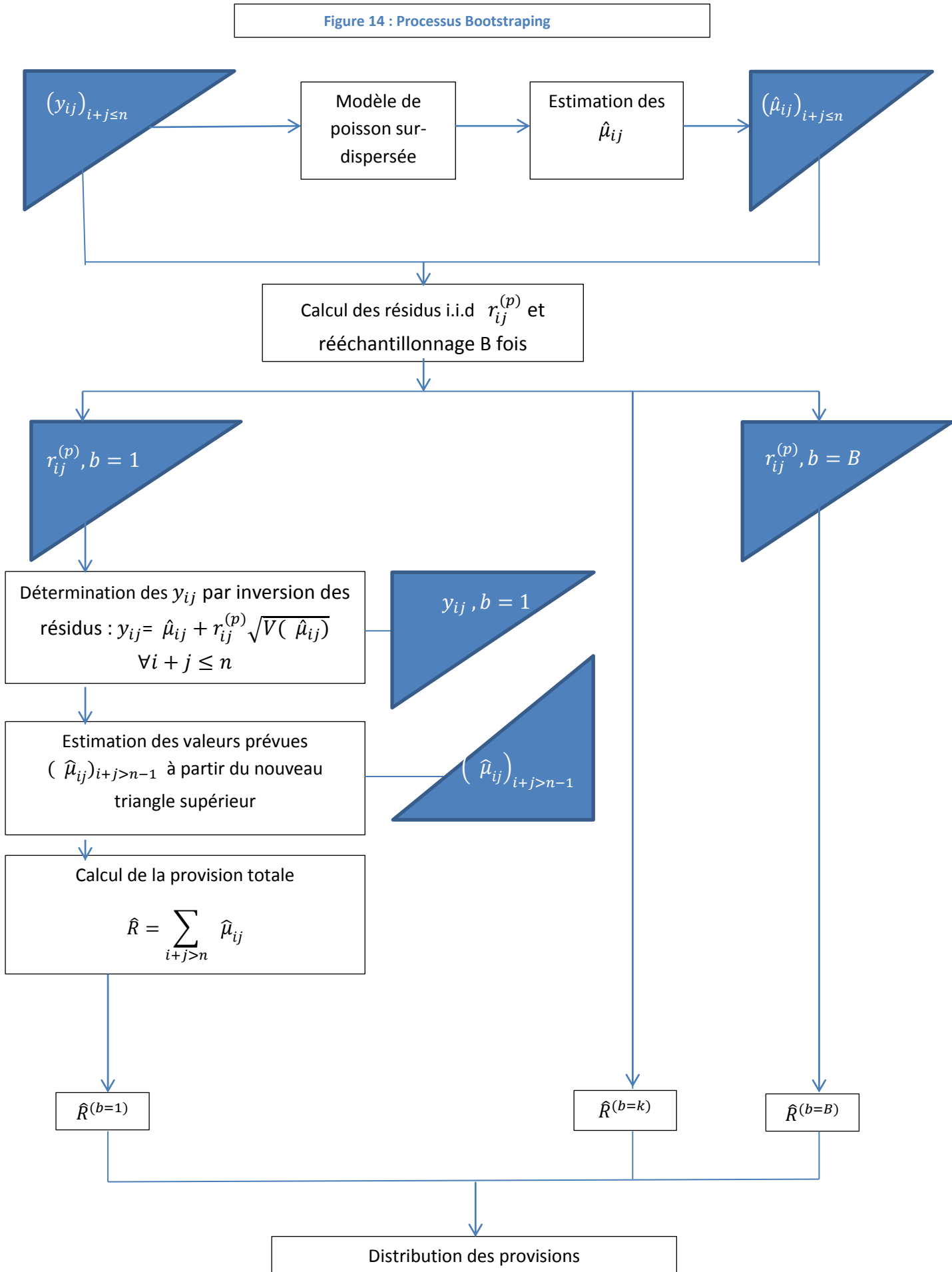
Le bootstrap est une méthode de ré-échantillonnage qui utilise les simulations Monte-Carlo à la place des calculs statistiques complexes. Il a été présenté pour la première fois par **Quenouille** en 1949 et amélioré par **Jackknife** dans le but de réduire le biais de l'estimateur et d'en déduire la variance. Il présente l'avantage de donner une distribution prédictive des provisions et d'en déduire les quantiles d'ordre extrêmes.

IV.1- Présentation de la technique de Bootstrapping

Les étapes du bootstrap dans le cadre d'un GLM sont :

- Estimation des paramètres, des valeurs prévues ($\hat{\mu}_{ij}$) et la provision $\hat{R} = \sum_{i+j>n} \hat{\mu}_{ij}$.
- Calcul des résidus de Pearson $r_{ij}^{(p)} \forall i + j \leq n$.
- Pour $b = 1, \dots, B$ le processus est décrit comme suit :

Figure 14 : Processus Bootstraping



IV.2- Résultats obtenus et intervalle de confiance du modèle

Pour déterminer un intervalle de confiance du modèle nous estimons le

$$MSEP_{boot}(\hat{R}) = V(R) + MSE_{boot}(\hat{R}) = \phi \sum_{i+j>n} V(\mu_{ij}) + MSE_{boot}(\hat{R})$$

Où $MSEP_{boot}(\hat{R})$ est l'estimation de l'erreur de prédiction et

$$MSE_{boot}(\hat{R}) = \frac{1}{B-1} \sum_{b=1}^B (R^{(b)} - \bar{R})^2$$
 est l'erreur d'estimation du bootstrap.

Après 5000 simulations nous obtenons les résultats suivants :

	\hat{R}^{boot}	Paramètre de poisson sur-dispersé	Coefficient de variation	$SEP_{boot}(\hat{R})$	Intervalle de confiance	
					Borne inf	Borne sup
Estimateurs	430 584 958	22,13	30,7%	132 172 210,23	171 527 424	689 642 491

Tableau 31 : synthèse des résultats du Bootstrap pour B = 5000 simulations

Le graphique suivant donne la distribution des provisions sous une représentation « densité ».

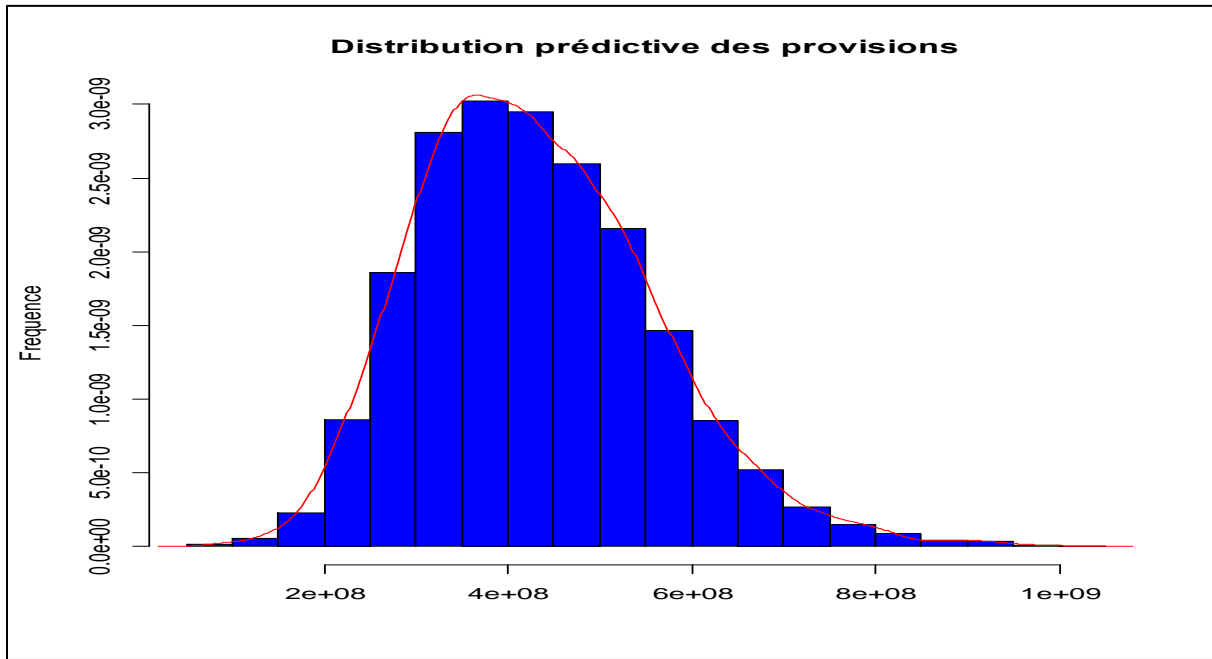


Figure 15 : Distribution des provisions

A partir de la distribution prédictive nous déterminons les quantiles d'ordre extrême :

	50%	75%	80%	85%	90%	95%
\hat{q}_α^{boot}	418 863 744	513 794 829	534 735 857	562 764 371	597 520 547	659 434 958

Tableau 32 : Quantile d'ordre extrême du bootstrap

Notons que ces quantiles sont pour une branche très volatile, où les sinistres graves peuvent survenir.

CHAPITRE 5 : CREDIBILISATION LINEAIRE DES METHODES DE PROVISIONNEMENT NON VIE

La crédibilité linéaire permet de déterminer un « méta estimateur », qui a des propriétés nettement meilleur qu'un simple estimateur. La problématique de la crédibilité est de connaître la répartition des pondérations à donner à plusieurs estimateurs afin de créer un estimateur meilleur que les estimateurs pris individuellement. En effet la recherche de la pondération s'effectue via un programme d'optimisation linéaire.

I-PRINCIPE GENERAL DE LA METHODE

Soient (X_1, \dots, X_n) un échantillon de taille n de la loi parente P_X . X_i Sont indépendantes et identiquement distribuées de même loi qu'une variable aléatoire X .

Le modèle statistique est : (χ^n, B, P)

L'espérance mathématique de X dans cet univers est $E(X)$ peut être déterminé à l'aide de différents estimateurs \hat{X} .

Soit \hat{X}_1 et \hat{X}_2 deux estimateurs de \hat{X} .

On pose par construction $E(\hat{X}_1) = E(\hat{X}_2) = E(X)$ ainsi ces estimateurs sont sans biais. Leur variance est supposé respectivement égale à $V(\hat{X}_1)$ et $V(\hat{X}_2)$.

Nous analysons la qualité de ces estimateurs à partir de leurs résidus :

$$\varepsilon = X - \hat{X}$$

On obtient : $E(\varepsilon_i) = E(X - \hat{X}_i) = 0 \quad \forall i \in \{1,2\}$

$$V(\varepsilon_i) = V(X - \hat{X}_i) \quad \forall i \in \{1,2\}$$

Le but est donc de construire un méta estimateur (\hat{X}_3) , comme combinaison linéaire des deux estimateurs \hat{X}_1 et \hat{X}_2 et dont l'objectif est d'améliorer l'estimation de X par rapport à celle fournie par \hat{X}_1 et \hat{X}_2 .

Nous posons $\hat{X}_3 = z.\hat{X}_1 + (1 - z).\hat{X}_2$ avec $z \in [0,1]$ et $\varepsilon_3 = X - \hat{X}_3$.

$$\begin{aligned} \text{Ainsi } E(\hat{X}_3) &= E(z.\hat{X}_1 + (1 - z).\hat{X}_2) \\ &= z.E(\hat{X}_1) + (1 - z).E(\hat{X}_2) \\ &= z.E(X) + (1 - z).E(X) \\ &= E(X) \end{aligned}$$

Le méta estimateur est donc sans biais.

$$\begin{aligned} \text{De plus } V(\hat{X}_3) &= V(z.\hat{X}_1 + (1 - z).\hat{X}_2) \\ &= z^2 V(\hat{X}_1) + (1 - z)^2 V(\hat{X}_2) + 2.z.(1 - z).cov(\hat{X}_1, \hat{X}_2) \end{aligned}$$

- Etude du résidu ε_3

$$\begin{aligned}
 V(\varepsilon_3) &= V(X - (z \cdot \hat{X}_1 + (1 - z) \cdot \hat{X}_2)) \\
 &= z^2 \cdot V(X - \hat{X}_1) + (1 - z)^2 \cdot V(X - \hat{X}_2) + 2 \cdot z \cdot (1 - z) \cdot \text{cov}(X - \hat{X}_1; X - \hat{X}_2) \\
 &= z^2 \cdot V(\varepsilon_1) + (1 - z)^2 \cdot V(\varepsilon_2) + 2 \cdot z \cdot (1 - z) \cdot \text{cov}(\varepsilon_1; \varepsilon_2) \\
 &= z^2 \cdot (V(\varepsilon_1) + V(\varepsilon_2) - 2 \cdot \text{cov}(\varepsilon_1; \varepsilon_2)) + 2 \cdot z \cdot (\text{cov}(\varepsilon_1; \varepsilon_2) - V(\varepsilon_2)) + V(\varepsilon_2)
 \end{aligned}$$

Après démonstration on a :

$$\begin{aligned}
 \frac{dV(\varepsilon_3)}{dz} = 0 &\Leftrightarrow z^* = \frac{V(\varepsilon_2) - \text{cov}(\varepsilon_1; \varepsilon_2)}{V(\varepsilon_1) - \varepsilon_2} \\
 \frac{\partial^2 V(\varepsilon_3)}{\partial z^2} &= z^2 \cdot [V(\varepsilon_1) + V(\varepsilon_2) - 2 \cdot \text{cov}(\varepsilon_1; \varepsilon_2)] = V(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) > 0
 \end{aligned}$$

L'étude de la variance montre qu'il existe un minimum en $z^* \in [0; 1]$.

Il est donc possible de trouver un « méta estimateur » $\hat{X}_3 = z^* \cdot \hat{X}_1 + (1 - z^*) \cdot \hat{X}_2$ au moins aussi bon que les autres estimateurs individuels car son résidu est toujours inférieur ou égal à celui des deux autres. Le fait de trouver un « méta estimateur » meilleur que les deux estimateurs le constituant est une forme de « crédibilisation » des deux estimations initiales. Celle-ci se fait en leur attribuant une pondération z^* , fonction de leur qualité respective. Cette pondération a pu être trouvée grâce à un programme de minimisation de la fonction de son résidu.

II- APPROCHE DE LA CREDIBILITE DANS LES METHODES DETERMINISTES

II.1 Méthode de Bornhuetter-Ferguson

II.1.1 Présentation du modèle

Cette méthode est une combinaison linéaire des méthodes de Chain Ladder et du Loss Ratio. En effet, elle utilise les cadences de développement et les facteurs exogènes aux triangles (Loss ratio du marché) pour estimer les charges ultimes de sinistres d'une année de développement aux autres.

Elle repose sur trois hypothèses :

- Une estimation ex ante des sinistres est déterminée par la méthode du Loss Ratio :

$$\hat{C}_{in}^{LR} = L_i * A_i$$

Avec A_i l'exposition dans notre cas il s'agit de la prime émise l'année i et L_i le S/P de l'année de survenance i .

- Les facteurs de développement sont donnés par :

$$F_{i,n-i} = \frac{\hat{C}_{in}^{CL}}{C_{in-i}}$$

L'estimation de la charge ultime est donnée par :

$$\hat{C}_{in}^{BF} = C_{i,n-i} + \left(1 - \frac{1}{F_{i,n-i}}\right) \hat{C}_{in}^{LR}$$

La provision se déduit alors par :

$$\hat{R}_{in}^{BF} = \hat{C}_{in}^{BF} - C_{i,n-i} = \left(1 - \frac{1}{F_{i,n-i}}\right) \hat{C}_{in}^{LR}$$

L'ultime de Bornhuetter - Ferguson peut s'écrire encore :

$$\hat{C}_{in}^{BF} = \frac{1}{F_{i,n-i}} C_{i,n-i} F_{i,n-i} + \left(1 - \frac{1}{F_{i,n-i}}\right) \hat{C}_{in}^{LR}$$

$$\hat{C}_{in}^{BF} = \omega_i C_{i,n-i} F_{i,n-i} + (1 - \omega_i) \hat{C}_{in}^{LR}$$

$$\text{Avec } \omega_i = \frac{1}{F_{i,n-i}}$$

Notons que ω_i est la pondération optimale obtenue par moindre carrée. La démonstration est présentée dans l'article [10].

Ainsi, l'estimation de la charge ultime selon la méthode de Bornhuetter Ferguson correspond à une pondération entre une estimation de la méthode de Chain Ladder et de la Charge ultime supposée connu via un S/P ultime défini a priori (méthode du Loss ratio).

Ainsi on obtient :

$$\hat{C}_{in}^{BF} = \omega_i \hat{C}_{in}^{CL} + (1 - \omega_i) \hat{C}_{in}^{LR}$$

Un inconvénient de cette méthode est qu'elle utilise un Loss ratio attendu qui n'est pas toujours connu. Les résultats dépendent fortement de ce ratio ainsi que de l'exposition choisi. Contrairement à la méthode du Loss ratio, cette méthode tient compte des sinistres déjà connus dans le calcul de la charge ultime de sinistres à l'aide d'une cadence de développement.

II.1.2- Application

A partir des résultats de Chain Ladder et l'estimation ex-ante des sinistres, avec un S/P de 8% nous obtenons les provisions suivantes :

Prime	1-(1/F _{n-i})	S/P	Charge Ultime	Provision Ultime
5874854159	0%	8%	325 256 436	-
4237842957	0%	8%	412 131 044	-
6856581686	0%	8%	584 663 544	69 159
4486552684	3%	8%	801 423 882	10 300 628
5732683720	3%	8%	634 365 219	13 225 190
5874854159	6%	8%	856 293 876	26 251 479
5237842957	8%	8%	349 970 011	33 043 617
7856581686	12%	8%	488 524 545	72 828 065
6486552684	24%	8%	465 742 842	124 640 501
3732683720	59%	8%	221 968 899	175 602 799
Total			5 140 340 297	455 961 438

Tableau 33 : Résultat de la méthode de Bornhuetter-Ferguson

Nous constatons que les provisions obtenues sont supérieures à celle de Chain Ladder, ceci vient du fait que la méthode dépend du S/P fortement du marché.

II.2 Méthode de Benktander

II.2.1 Présentation du modèle

En 1976, Benktander publia un article dans lequel il propose une nouvelle méthode de Provisionnement. Celle-ci est une combinaison linéaire entre les estimations de provisions des Méthodes Chain Ladder et Bornhuetter Ferguson.

La provision s'écrit :

$$R_i^{BK} = \omega_i R_i^{CL} + (1 - \omega_i) R_i^{BF}$$

La pondération ω_i proposée dans la méthode correspond à la part déjà connue des sinistres.

$$\omega_i = \frac{1}{F_{i,n-i}}$$

Avec $F_{i,n-i}$ estimé par la méthode Chain Ladder.

Cette pondération est obtenue en minimisant la variance du résidu de l'estimateur, la démonstration est dans l'article [10].

L'idée sous-jacente est que plus l'expérience augmente, plus l'estimation réalisée par la méthode Chain Ladder est fiable.

Ainsi la provision par année de survenance s'écrit :

$$R_i^{BK} = \frac{1}{F_{i,n-i}} R_i^{CL} + \left(1 - \frac{1}{F_{i,n-i}}\right) R_i^{BF}$$

Cette équation peut s'écrire en fonction des charges ultimes :

$$\begin{aligned} R_i^{BK} &= \frac{1}{F_{i,n-i}} (\hat{C}_i^{CL} - C_{n-i}) + \left(1 - \frac{1}{F_{i,n-i}}\right) (\hat{C}_i^{BF} - C_{n-i}) \\ &= \frac{1}{F_{i,n-i}} \hat{C}_i^{CL} + \left(1 - \frac{1}{F_{i,n-i}}\right) \hat{C}_i^{BF} - C_{n-i} \\ &= \hat{C}_{i,n}^{BK} - C_{n-i} \end{aligned}$$

Ainsi la charge ultime selon la méthode de Benktander est :

$$\hat{C}_{i,n}^{BK} = \frac{1}{F_{i,n-i}} \hat{C}_{i,n}^{CL} + \left(1 - \frac{1}{F_{i,n-i}}\right) \hat{C}_{i,n}^{BF}$$

Ce résultat est à rapprocher de la formule du modèle de Bornhuetter-Ferguson, mais le deuxième terme de la charge ultime est celui de Bornhuetter-Ferguson. Cette méthode est aussi appelée méthode de Bornhuetter-Ferguson récursive.

II.2.1 Application

Nous estimons la provision à partir de celle estimée par Bornhuetter-Ferguson et celle de Chain Ladder, les résultats obtenus sont résumés dans le tableau suivant :

<i>Année de survenance</i>	<i>Charge Ultime</i>	<i>Provision Ultime avec S/P de 8%</i>	<i>Provision Ultime avec S/P de 20%</i>
2005	325 256 436	-	
2006	412 131 044	-	
2007	584 668 100	73 716	73 729
2008	814 123 009	22 999 756	23 443 176
2009	639 433 382	18 293 353	18 865 420
2010	877 871 202	47 828 805	50 028 243
2011	344 524 289	27 597 895	31 506 519
2012	472 302 360	56 605 879	69 263 882
2013	452 969 198	111 866 858	156 772 995
2014	176 896 714	130 530 614	285 427 593
Total	5 100 175 735	415 796 875	635 381 557

Tableau 34 : Provisions obtenues par la méthode de Benktander

Les provisions (415 796 875) obtenues avec un S/P de 8% sont inférieures aux provisions obtenues avec un S/P de 20% (635 381 557). Les provisions dépendent fortement du ratio S/P

CHAPITRE 6 : APPROCHE PAR LES CHARGES ET LA SYNTHÈSE DES METHODES

I- MUNICH CHAIN LADDER

Les méthodes basées sur le triangle de règlements d'une part, et de charges d'autre part, donnent des résultats différents à l'ultime même pour les années de survénance les plus développées. Cela est encore plus accentué pour les années de survénance les plus récentes. En effet, les règlements de la première année de développement des années de survénance les plus récentes sont nettement inférieures aux charges de cette année. Ainsi en extrapolant le triangle de règlement et de charge, la charge à l'ultime obtenue est différente selon le triangle considéré. On pourrait donc conclure que l'utilisation du triangle de règlements sous-estime ici la charge ultime. La méthode de Munich Chain Ladder corrige ce biais en intégrant la corrélation entre le triangle de règlement et de charge pour obtenir une charge ultime plus fiable.

I.1- Présentation du modèle

La méthode utilise le triangle des règlements cumulés $(C_{ij})_{i+j < n}$ et le triangle de Charges cumulées $(\Gamma_{ij})_{i+j < n}$.

On définit le loss ratio paiement/charge et charge /paiement par :

$$Q_{ij} = \frac{C_{ij}}{\Gamma_{ij}} \quad \text{et} \quad Q_{ij}^{-1} = \frac{\Gamma_{ij}}{C_{ij}}$$

Comme dans la méthode de Chain Ladder de base, on définit les coefficients de développement sur le triangle des règlements et sur le triangle de charges de la manière suivante :

$$\hat{\lambda}_{j-1}^C = \frac{\sum_{i=0}^{n-j-1} C_{i,j}}{\sum_{i=0}^{n-j-1} C_{i,j-1}} \quad \text{et} \quad \hat{\lambda}_j^\Gamma = \frac{\sum_{i=0}^{n-j-1} \Gamma_{i,j}}{\sum_{i=0}^{n-j-1} \Gamma_{i,j-1}}$$

On rajoute également l'information sur les λ_{ij} . Si

$$\lambda_{i,j-1}^C = \frac{C_{i,j}}{C_{i,j-1}} \quad \text{et} \quad \lambda_{i,j-1}^\Gamma = \frac{\Gamma_{i,j}}{\Gamma_{i,j-1}}$$

Ainsi on suppose que :

On estime les variances des coefficients de Chain Ladder par :

$$(\hat{\sigma}_j^C)^2 = \frac{1}{n-j+1} \sum_{i=0}^{n-j+1} C_{ij} \left(\frac{C_{i,j+1}}{C_{ij}} - \hat{\lambda}_{j-1}^C \right)^2$$

$$(\hat{\sigma}_j^\Gamma)^2 = \frac{1}{n-j+1} \sum_{i=0}^{n-j+1} \Gamma_{i,j} \left(\frac{\Gamma_{i,j+1}}{\Gamma_{i,j}} - \hat{\lambda}_{j-1}^\Gamma \right)^2$$

On définit aussi le coefficient de corrélation entre les règlements et les charges par :

$$\lambda^C = \text{corr}(\Gamma_{i,j+1}, C_{ij} / \mathcal{F}_{i+j-1}^C)$$

$$\lambda^F = \text{corr}(\Gamma_{i,j+1}, C_{ij} / \mathcal{F}_{i+j-1}^C)$$

On suppose que :

$$E[\hat{\lambda}_{i,j-1}^c / \mathcal{F}_{i+j}] = \hat{\lambda}_{j-1}^c + \lambda_j^c \hat{\sigma}_j^c \frac{Q_{ij}^{-1} - E(Q_{ij-1}^{-1} / \mathcal{F}_{i+j}^c)}{\sqrt{\text{Var}(Q_{ij-1}^{-1} / \mathcal{F}_{i+j}^c)}}$$

$$E[\hat{\lambda}_{i,j-1}^\Gamma / \mathcal{F}_{i+j}] = \hat{\lambda}_{j-1}^\Gamma + \lambda_j^\Gamma \hat{\sigma}_j^\Gamma \frac{Q_{ij} - E(Q_{ij-1} / \mathcal{F}_{i+j}^\Gamma)}{\sqrt{\text{Var}(Q_{ij-1} / \mathcal{F}_{i+j}^\Gamma)}}$$

Sous ses hypothèses, il est alors possible de construire un estimateur sans biais de $E[C_{ij} / C_{i,j-1}]$, de $E[\Gamma_{ij} / \Gamma_{i,j-1}]$, de $E[Q_{ij} / \mathcal{F}_{i+j}^\Gamma]$, de $E[Q_{ij}^{-1} / \mathcal{F}_{i+j}^c]$.

Pour estimer les deux dernières quantités posons :

$$\hat{Q}_j = \frac{\sum_{i=0}^{n_j} C_{ij}}{\sum_{i=0}^{n_j} C_{ij}} = \frac{1}{Q_j^{-1}} \text{ et } \tilde{Q}_{ij} = \frac{Q_{ij} - \hat{Q}_j}{\sqrt{\text{Var}(Q_{ij} / \mathcal{F}_{i+j}^\Gamma)}}$$

Nous obtenons

$$\tilde{\lambda}_{ij}^\Gamma = \frac{\sqrt{\Gamma_{i,j-1}}}{[\hat{\sigma}_j^\Gamma]^2 [\lambda_{i,j-1} - \hat{\lambda}_{j-1}]} = \frac{\sum \tilde{Q}_{i,j-1} \tilde{\lambda}_{ij}^\Gamma}{\sum \tilde{Q}_{i,j-1}^2}$$

L'estimateur Munich-Chain-Ladder est construit de manière itérative. Le détail des formules est donné dans [13].

I.2- Application

Les résultats obtenus sont consignés dans le tableau suivant :

	Dernier règlement	Dernière charge	C/Γ	Règlements ultimes	Charges ultimes	C/Γ	Provision (triangle des règlements)	Provision (Triangle des charges)
2005	381 024 723	409 352 552	93,08%	381 000 000	409 000 000	93,15%	- 24 723	27 975 277
2006	470 062 207	526 407 718	89,30%	470 000 000	526 000 000	89,35%	- 62 207	55 937 793
2007	584 594 384	664 192 439	88,02%	585 000 000	663 000 000	88,24%	405 616	78 405 616
2008	791 123 254	830 652 206	95,24%	795 000 000	856 000 000	92,87%	3 876 746	64 876 746
2009	621 140 029	751 508 675	82,65%	657 000 000	724 000 000	90,75%	35 859 971	102 859 971
2010	830 042 397	1 138 644 781	72,90%	950 000 000	1 060 000 000	89,62%	119 957 603	229 957 603
2011	316 926 394	639 848 280	49,53%	447 000 000	517 000 000	86,46%	130 073 606	200 073 606
2012	415 696 481	651 504 713	63,81%	509 000 000	568 000 000	89,61%	93 303 519	152 303 519
2013	400 517 613	868 103 902	46,14%	625 000 000	705 000 000	88,65%	224 482 387	304 482 387
2014	46 366 100	386 038 240	12,01%	231 000 000	263 000 000	87,83%	184 633 900	216 633 900
Total	4 857 493 581	6 866 253 506	71%	5 650 000 000	6 291 000 000	90%	792 506 419	1 433 506 419

Tableau 35 : récapitulatif des valeurs estimées par Munich Chain Ladder.

Nous constatons que les charges ultimes des survenances les plus récentes estimées à partir du triangle de règlement sont nettement meilleures et proche de la charge ultime estimées à partir du triangle de charges. Cela est confirmé par un ratio C/Γ de 90%. Les provisions obtenues sont donc plus fiables. Nous obtenons des provisions de l'ordre de 1 433 506 419 FCFA.

II- SYNTHESE DES METHODES

Nous avons essayé tout au long de cette étude de tester un certain nombre de méthodes déterministes et stochastiques d'estimation des provisions pour sinistres à payer qui soit adaptées à la branche incendie compte tenu de ses caractéristiques particulières. Les résultats obtenus sur le triangle original des règlements sont significativement différents de ceux obtenus sur le triangle original des charges et un risque d'erreur d'estimation élevé. Lorsque nous séparons les sinistres attritionnels des graves nous obtenons de meilleurs résultats avec un risque d'erreur moins que celui obtenu sur le triangle original. Le triangle de règlement n'étant pas complètement développé, nous appliquons une méthode alternative qui tient compte de la dépendance entre le triangle des règlements et le triangle des charges. Nous avons obtenu de meilleurs résultats.

Il en ressort de cette étude, lorsque le triangle des règlements ou le triangle des charges n'est pas régulier, les différentes méthodes donnent des résultats complètement différents. De même lorsque le triangle de règlement n'est pas complètement développé l'estimation des provisions est biaisée. Il est donc important d'analyser à priori le triangle de règlements ou de charges avant d'appliquer les méthodes. Une analyse précise de la base est nécessaire afin de détecter la présence ou non des sinistres graves. Car ces derniers sont des phénomènes rares qui perturbent la stabilité du triangle. Par ailleurs, lorsque le triangle de règlement n'est pas complètement développé, il est intéressant d'utiliser des méthodes alternatives qui tiennent compte de la corrélation entre le triangle des règlements et le triangle des charges, parce que le triangle des charges contient des informations supplémentaires sur les sinistres.

Le tableau ci-dessous récapitule les résultats obtenus des différentes méthodes sur le triangle original des règlements, le triangle attritionnel des règlements, sur le triangle des charges original et le triangle attritionnel des charges.

		Récapitulatif												
		Triangle des Règlements nets de coass						Triangle des Charges nettes de coass						
		Règlements cumulés toutes survenances vue au 31/12/2014	Charges ultimes	Provisions	Erreur de prédiction	Coeff de variation	Prov/Chargesult	Charges toutes survenances vue au 31/12/2014	Charges ultimes	Provisions	Erreur de prédiction	Coeff de variation	Prov/Chargesult	
		Méthodes												
Attritionnels + graves	M. déterministes	Chain Ladder	21 269 066 907	21 879 058 261	609 991 354	-	-	2,8%	28 187 341 910	28 009 836 508	6 740 769 601	-	-	24,1%
		Cl pondérée	21 269 066 907	22 250 265 058	981 198 151	-	-	4,4%	28 187 341 910	28 552 222 144	7 283 155 237	-	-	25,5%
		De Vylder	21 269 066 907	21 636 409 748	367 342 841	-	-	1,7%	28 187 341 910	27 930 459 877	6 661 392 970	-	-	23,8%
		Taylor inflation	21 269 066 907	21 772 704 989	503 638 082	-	-	2,3%	28 187 341 910	27 780 048 084	6 510 981 178	-	-	23,4%
		Coût moyen	21 269 066 907	21 934 792 746	665 725 839	-	-	3,0%	28 187 341 910	27 887 184 909	6 618 118 002	-	-	23,7%
	M. avec crédibilisation(S/P = 60%)	Borhnhuetter-ferg	21 269 066 907	23 841 220 148	2 572 153 241	-	-	10,8%	28 187 341 910	27 846 756 732	6 577 689 825	-	-	23,6%
		Bektander	21 269 066 907	22 648 345 330	1 379 278 423	-	-	6,1%	28 187 341 910	28 015 465 327	6 642 921 736	-	-	23,7%
	M.stochastiques	Tmack	21 269 066 907	21 879 058 261	609 991 354	999 653 623,93	164%	2,8%	28 187 341 910	-	-	-	-	-
		GLM	21 269 066 907	21 959 158 281	609 991 372	589 542 800,00	96,6%	2,8%	28 187 341 910	-	-	-	-	-
		Log-linéaire	21 269 066 907	22 405 820 874	1 136 723 966	-	-	5,1%	28 187 341 910	-	-	-	-	-
		Bootstrap	21 269 066 907						28 187 341 910	-	-	-	-	-
		Munich Chain-Ladder	21 269 066 907	26 342 000 000	5 072 933 093	-	-	19,3%	28 187 341 910	27 775 000 000	6 505 933 093	-	-	23,4%
	Attritionnels	M.déterministes	Chain Ladder	4 684 378 859	5 031 005 981	346 627 122	-	-	6,9%	6 866 253 506	6 671 424 948	1 987 046 088	-	-
Cl pondérée			4 684 378 859	5 045 673 425	361 294 565	-	-	7,2%	6 866 253 506	6 612 395 419	1 928 016 560	-	-	29,2%
De Vylder			4 684 378 859	5 033 847 475	349 468 616	-	-	6,9%	6 866 253 506	6 665 614 611	1 981 235 752	-	-	29,7%
Taylor inflation			4 684 378 859	5 001 832 805	317 453 946	-	-	6,3%	6 866 253 506	6 681 997 466	1 997 618 606	-	-	29,9%
Coût moyen			4 684 378 859	5 015 335 995	330 957 136	-	-	6,6%	6 866 253 506	6 649 088 102	1 964 709 243	-	-	29,5%
M. avec crédibilisation(S/P = 8%)		Borhnhuetter-ferg	4 684 378 859	5 140 340 297	455 961 438	-	-	8,9%	6 866 253 506	6 710 193 130	2 025 814 271	-	-	30,2%
		Bektander	4 684 378 859	5 100 175 735	415 796 875	-	-	8,2%	6 866 253 506	6 667 846 383	1 983 467 524	-	-	29,7%
M.stochastiques		Tmack	4 684 378 859	5 031 005 981	346 627 122	168 428 889	48,6%	6,9%	6 866 253 506	-	-	-	-	-
		GLM	4 684 378 859	5 031 005 981	346 627 122	132 170 700	38,1%	6,9%	6 866 253 506	-	-	-	-	-
		Log-linéaire	4 684 378 859	5 107 002 871	422 584 012	-	-	8,3%	6 866 253 506	-	-	-	-	-
		Bootstrap	4 684 378 859	5 115 953 665	430 584 958	132172210,23	30,70%	8,4%	6 866 253 506	-	-	-	-	-
		Munich Chain-Ladder	4 684 378 859	5 650 000 000	792 506 419	-	-	14,0%	6 866 253 506	6 291 000 000	1 433 506 419	-	-	22,8%

Tableau 36 : Synthèse des méthodes

CONCLUSION

Tout au long de ce mémoire nous avons testé plusieurs méthodes déterministes et stochastiques de calcul des provisions pour sinistres à payer de la branche incendie de Saham Côte d'Ivoire. Une étude détaillée du portefeuille a permis de déceler quelques gros sinistres, des problèmes de cadence de règlement qui rendent le portefeuille volatile. Toute cette spécificité propre à la branche incendie et aux modes de gestion de Saham Côte d'Ivoire, rendent le triangle de règlement instable. Nous avons opté pour une séparation des sinistres attritionnels des graves avant d'appliquer les différentes méthodes.

Les méthodes déterministes nous ont permis d'obtenir une première estimation des provisions. Elles convergent toutes vers l'estimation donnée par Chain Ladder qui est la méthode de référence dans le monde professionnel. L'hypothèse de linéarité des règlements par année de survenance est vérifiée. Toutefois les estimations obtenues en utilisant le triangle de règlement et celui des charges diffèrent significativement, due au fait que le gestionnaire opte pour une attitude prudente en surévaluant la charge des sinistres les premières années de développement. Par ailleurs les méthodes stochastiques nous ont permis de déterminer l'erreur de prédiction des provisions, un intervalle de confiance et la distribution des provisions. Une approche avec la crédibilité a été introduite dans le but d'obtenir des estimateurs à variance minimale. Nous avons constaté que le triangle de règlement n'est pas complètement développé, pour ce fait, nous avons introduit une méthode alternative (Munich Chain Ladder) qui tient compte de la dépendance entre le triangle des règlements et le triangle des charges. Le triangle des charges contient en effet, des informations supplémentaires. Nous obtenons une meilleure estimation des provisions. Cette méthode s'avère plus adaptée à nos données.

Il en ressort de cette étude que, lorsque le triangle des règlements ou le triangle des charges n'est pas régulier, les différentes méthodes donnent des résultats complètement différents. De même lorsque le triangle de règlement n'est pas complètement développé l'estimation des provisions est biaisée. Il est donc important d'analyser à priori le triangle des règlements ou des charges avant d'appliquer les méthodes. Une analyse précise de la base est nécessaire, afin de détecter la présence ou non des sinistres graves. Ces sinistres graves sont des phénomènes rares qui perturbent la stabilité du triangle.

Les méthodes que nous avons présentées dans ce mémoire utilisent les données sous forme agrégées, ce qui constitue une perte d'information. Il est aussi difficile d'appliquer les traités de réassurance non proportionnel afin d'estimer les provisions cédées en réassurance. Une extension de ce sujet pourrait être de déterminer les provisions sinistres par sinistres en utilisant la théorie de durée de vie des sinistres et en considérant les règlements des sinistres comme étant des processus Markovien.

BIBLIOGRAPHIE:❖ *Ouvrages*

[1] **Arthur Charpentier, Michel Denuit**, MATHÉMATIQUES DE L'ASSURANCE NON-VIE, TOME II : TARIFICATION ET PROVISIONNEMENT.

[2] **Christian Partrat**, PROVISIONNEMENT TECHNIQUE EN ASSURANCE NON-VIE : PERSPECTIVES ACTUARIELLES MODERNES, ÉDITION ECONOMICA, 2007

[3] **Etienne Marceau**, MODELISATION ET EVALUATION QUANTITATIVE DES RISQUES EN ACTUARIAT MODELES SUR UNE PERIODE,

[4] **Michel Luzi**, ASSURANCE IARD : INTERPRETATION DES CHIFFRES 2006, ÉDITION ECONOMICA, 2006.

[5] **Pierre-Henri Dade**, MANUEL DU TECHNICIEN INCENDIE, L'ARGUS 2, RUE CHATEAUDUN-PARIS (9^E).

❖ *Publications*

[6] CODE DES ASSURANCES DE LA ZONE CIMA.

[7] **Goovaerts M.J. et Hoogstad W.J**, CREDIBILITY THEORY. SURVEYS OF ACTUARIAL STUDIES NO.4.

[8] **Hülmann**, CREDIBLE LOSS RATIO CLAIMS RESERVES: THE BENKTANDER, NEUHAUS AND MACK METHODS REVISITED.

[9] **Partrat C. & Pey N. & Schilling J**, DELTA METHOD AND RESERVING. ISFA (2007).

[10] **T. Mack**, CREDIBLE CLAIMS RESERVES: THE BENKTANDER METHOD. ASTIN BULLETIN 30, 2, 333-347, 2000.

[11] **T. Mack**, DISTRIBUTION-FREE CALCULATION OF THE STANDARD ERROR IN THE CHAIN-LADDER RESERVING METHOD. ASTIN BULLETIN (1993).

[12] **T. MACK**, MEASURING THE VARIABILITY OF CHAIN-LADDER RESERVE ESTIMATES. PROCEEDINGS OF THE CASUALTY ACTUARIAL SOCIETY (1994).

[13] **GERHARD QUARG AND THOMAS MACK**. MUNICH CHAIN LADDER: A RESERVING METHOD THAT REDUCES THE GAP BETWEEN IBNR PROJECTIONS BASED ON PAID LOSSES AND IBNR PROJECTIONS BASED ON INCURRED LOSSES. VARIANCES, 2:267-299, 2004.

❖ *support de cours*

[14] **Arthur Charpentier**, STATISTIQUE DE L'ASSURANCE, STT 6705V STATISTIQUE DE L'ASSURANCE II.

[15] **Frédéric Planchet**, UTILISATION DE LA THEORIE DES VALEURS EXTREMES DANS LE CONTEXTE SOLVABILITE 2, ISFA SUPPORT DE COURS 2012-2013.

❖ *Mémoires*

[16] **Allali Jeremy**, COMMENT CAPTURER LA VOLATILITE POUR EVALUER LE BEST ESTIMATE IARD, MEMOIRE PARIS DAUPHINE.

[17] **Aurélié Furet**, IMPACTS DE LA VOLATILITE DES IBNR DANS UNE COTATION EN REASSURANCE, MEMOIRE EURIA PROMOTION 2006.

- [18] **Beneteau G. (2004)**, MODELE DE PROVISIONNEMENT SUR DONNEES DETAILLEES EN ASSURANCE NON-VIE, MEMOIRE ENSAE PROMOTION 2004.
- [19] **Hélène Gibello et Benoît Lebrunt**, CREDIBILISATION DES METHODES DE PROVISIONNEMENT NON- VIE, MEMOIRE CENTRE D'ETUDES ACTUARIELLES.
- [20] **Pham Quang Hung**, PROVISIONNEMENT EN ASSURANCE NON-VIE, MEMOIRE ISFA PROMOTION 2006.
- [21] **Phi-Hung Le et Gaël Virot**, METHODE D'EVALUATION STOCHASTIQUE DES PROVISIONS TECHNIQUES D'UNE ENTREPRISE D'ASSURANCE DOMMAGES PAR UNE APPROCHE LIGNE A LIGNE, MEMOIRE ENSAE PROMOTION 2013.
- [22] **Sabrina Savarre et Benoît Payre**, CHARGE ULTIMES NETTES DE REASSURANCE EN RC CORPORELLE: 2 MODELES STOCHASTIQUES POUR LES FLOTTES AUTOMOBILES.
- [23] **Selma Jahiri (2011)**, METHODES DE PROVISIONNEMENT NON-VIE ET RISQUE DE RESERVE A UN AN, MEMOIRE ISFA PROMOTION 2011.

ANNEXES

- Triangle de nombre de sinistres cumulés

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2005	200	231	232	235	235	235	235	235	235	235
2006	244	273	277	278	278	279	279	279	279	
2007	265	280	285	288	289	290	290	290		
2008	299	328	329	329	330	330	330			
2009	259	316	319	321	321	321				
2010	454	495	498	501	502					
2011	278	316	318	318						
2012	254	330	334							
2013	228	300								
2014	124									

- Triangle Original des charges.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2005	3 951 763 245	4 286 249 118	4 302 246 523	4 284 977 545	4 288 226 103	4 179 704 191	4 174 659 421	4 173 556 023	4 173 296 528	4 173 296 528
2006	1 286 519 999	1 245 526 958	1 207 737 935	1 195 254 239	1 191 291 183	1 181 906 075	1 123 340 928	1 156 508 702	1 154 758 702	
2007	4 602 433 619	4 291 460 270	4 326 166 024	4 355 315 595	4 329 078 718	4 301 632 636	4 298 353 677	4 322 086 905		
2008	815 707 059	875 363 325	796 884 344	829 537 727	800 793 779	830 882 206	830 652 206			
2009	1 961 659 626	1 949 735 939	2 348 889 190	2 320 360 971	2 067 931 697	2 066 042 197				
2010	7 036 925 147	7 112 579 510	7 029 602 567	6 825 192 679	6 870 773 316					
2011	1 309 304 698	1 252 322 186	1 259 228 067	1 263 168 454						
2012	837 807 895	1 198 263 073	1 221 266 352							
2013	1 795 068 737	1 863 521 510								
2014	4 421 775 740									

▪ **Triangle original des règlements cumulés**

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2005	699 639 781	1 477 695 831	4 001 552 744	4 008 503 618	4 014 409 577	4 015 390 551	4 015 444 826	4 016 360 053	4 016 453 025	4 016 453 025
2006	569 422 852	1 000 114 882	1 030 033 900	1 037 393 231	1 039 680 745	1 055 374 382	1 055 459 346	1 092 318 595	1 092 318 595	
2007	3 846 000 741	4 090 665 818	4 158 044 897	4 194 611 897	4 198 140 130	4 205 930 974	4 213 818 210	4 228 943 210		
2008	332 751 949	586 606 519	701 877 668	716 678 792	739 640 314	791 123 254	791 123 254			
2009	345 369 503	694 805 644	1 645 318 147	1 816 544 008	1 866 694 773	1 868 178 873				
2010	3 160 335 671	5 588 540 021	6 012 431 333	6 357 088 492	6 363 642 368					
2011	85 313 255	682 198 134	926 817 028	927 582 667						
2012	440 261 630	797 155 436	817 559 835							
2013	822 963 755	1 116 898 982								
2014	46 366 100									

▪ **Triangle Attritionnel des règlements.**

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2005	80 200 754	293 066 782	314 654 157	321 605 031	323 212 988	324 193 962	324 248 237	325 163 465	325 256 436	325 256 436
2006	170 810 648	319 927 331	349 846 349	357 205 679	359 493 194	375 186 830	375 271 795	412 131 044	412 131 044	
2007	289 254 362	499 590 406	565 479 991	578 054 136	579 072 428	584 437 407	584 594 384	584 594 384		
2008	332 751 949	586 606 519	701 877 668	716 678 792	739 640 314	791 123 254	791 123 254			
2009	222 976 289	453 672 349	547 443 410	569 505 165	619 655 929	621 140 029				
2010	356 555 090	595 464 244	740 472 801	823 988 521	830 042 397					
2011	79 243 919	252 365 328	316 160 755	316 926 394						
2012	280 995 244	395 292 082	415 696 481							
2013	213 327 685	341 102 341								
2014	46 366 100									

▪ **Triangle Attritionnel des charges.**

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2005	548 294 410	442 875 938	430 447 173	416 094 349	415 044 905	415 760 214	410 715 445	409 612 046	409 352 552	409 352 552
2006	618 263 169	617 175 974	579 386 951	566 903 256	562 940 199	553 555 091	494 989 945	528 157 718	526 407 718	
2007	1 010 395 721	693 262 921	678 984 259	708 133 829	680 661 675	675 451 655	664 442 439	664 192 439		
2008	815 707 059	875 363 325	796 884 344	829 537 727	800 793 779	830 882 206	830 652 206			
2009	732 799 996	840 640 192	870 649 663	842 121 444	753 398 175	751 508 675				
2010	1 273 133 163	1 317 258 926	1 297 134 295	1 144 064 144	1 138 644 781					
2011	681 801 704	629 002 012	635 907 893	639 848 280						
2012	674 007 500	628 501 434	651 504 713							
2013	802 321 888	868 103 902								
2014	386 038 240									