



المندوبية السامية للتخطيط  
HAUT-COMMISSARIAT AU PLAN

ROYAUME DU MAROC  
\*.\*.\*.\*  
HAUT COMMISSARIAT AU PLAN  
\*.\*.\*.\*.\*  
INSTITUT NATIONAL  
DE STATISTIQUE ET D'ECONOMIE APPLIQUEE



**INSEA**

## Projet de Fin d'Etudes

\*\*\*\*\*

**Etude de la renormalisation de la volatilité equity du temps  
business au temps pricer**

Préparé par: *M. Hamza EL RHOULAM*

Sous la direction de: *M. Yassine EL QALLI (INSEA)*

*M. Kaïs BEJAOUI (SG CIB - Paris)*

*M. Youness IABITEN (SG ATS)*

*Mme. Sihame IRAMDANE (SG ATS)*

*Soutenu publiquement comme exigence partielle en vue de l'obtention du*

**Diplôme d'Ingénieur d'Etat**

**Filière: ACTUARIAT - FINANCE**

*Devant le jury composé de:*

- *M. Yassine EL QALLI (INSEA)*
- *M. Ahmed DOGHMI (INSEA)*
- *Mme. Sihame IRAMDANE (SG ATS)*
- *M. Youness IABITEN (SG ATS)*



# *Dédicaces*

*Je dédie cet humble travail*

*À mes très chers parents*

*Je ne saurai vous témoigner tout l'amour et le respect que je ressens pour vous,  
Un amour éternel pour les sacrifices que vous avez consentis pour mon*

*Instruction et mon bien être.*

*Que dieux vous protège*

*À mes deux frères*

*Quoique je dise, aucun mot ne pourra expliquer l'amour que j'ai pour vous,  
Votre place dans mon cœur est irremplaçable.*

*Que dieu vous garde et vous procure santé, bonheur et prospérité.*

*À tous mes amis proches*

*À tous mes amis de la promotion*

*À tous celles et ceux qui m'ont soutenu, je vous serai toujours reconnaissant pour  
votre appui et encouragement*

*À toute ma famille.*

*Je vous aime tous ...*

*Hamza.*

# *Remerciements*

De prime abord Je tiens à remercier Madame Sihame IRAMDANE, Manager de l'équipe Recherche et Développement pour son aide et ses précieux conseils qui m'ont permis de rédiger ce rapport. Mes sincères remerciements à Monsieur Kais BEJAOUI, mon référant et membre de l'équipe QUANT - Team Equity - à la Société Générale Corporate & Investment Banking (SG CIB) à Paris pour ses conseils, sa disponibilité et son encadrement. Je remercie également Monsieur Youness IABITEN, membre de cette même équipe à la Société Générale Africa Technologies & Services à Casablanca, qui a participé énormément à la réussite de mon stage.

Je remercie toute l'équipe QUANT, qui m'a bien accueillie parmi elle durant mon stage. Ainsi que tout le personnel de la Société Générale Africa Technologies & Services qui a rendu mon stage agréable.

Je tiens à remercier Monsieur le professeur Yassine ELQALLI, mon encadrant interne, pour ses directives et sa disponibilité. Aussi pour m'avoir accompagné tout au long de la rédaction de ce rapport.

Je remercie également Monsieur le professeur Ahmed DOGHMI qui a accepté d'évaluer ce modeste travail.

Je tiens à remercier aussi l'équipe pédagogique de l'INSEA. Je remercie également les responsables de la cellule de stages de l'INSEA qui veillent à la réussite de notre formation pratique.

Enfin j'adresse mes vifs remerciements à toute personne qui m'a aidé, de près ou de loin, dans la réalisation de ce travail.

---

## Résumé

---

Dans le cadre de la gestion de portefeuilles, connaître la dynamique des grecques est indispensable afin de pouvoir anticiper l'évolution des risques en fonction de l'environnement de marché et les couvrir le cas échéant.

De ce fait la connaissance de l'évolution des prix dans le temps, mesurée par le thêta, constitue un facteur clé de succès de la couverture dynamique et statique d'un portefeuille d'options.

L'utilisation d'un modèle Black & Scholes simple pour le pricing d'options donne des sauts du thêta la veille des jours fermés en particulier les vendredis. Ceci est dû au fait que ce modèle prévoit qu'il y a de la variance pendant les jours fermés alors que dans la vraie vie il n'y en a pas ou alors il y en a très peu. Dans ce rapport nous proposons des modèles de volatilités implicites qui vont nous permettre d'éviter les sauts la veille des jours fermés en introduisant la notion de la volatilité calendar effect.

---

## Liste des abréviations

---

<b>SG</b>	Société Générale
<b>SG CIB</b>	Société Générale Corporate & Investment Banking
<b>SG ATS</b>	Société Générale Africa Technologies & Services
<b>EDP</b>	Equation à dérivées partielles
<b>EDS</b>	Equation différentielle stochastique
<b>BS</b>	Black & Scholes
<b>P&amp;L</b>	Profit & Loss
<b>CE</b>	Calendar Effect

---

## Liste des figures

---

Figure 1 : Métiers du Groupe SG et composantes de la GBIS.....	11
Figure 2: Organisation des salles de marché de SG CIB .....	12
Figure 3: Organigramme de la SG ATS.....	15
Figure 4: Organigramme de l'équipe R&D.....	16
Figure 5: Valeur intrinsèque et valeur temps .....	20
Figure 6: Evolution de la valeur temps en fonction des jours restants à la maturité.....	20
Figure 7: Payoffs élémentaires.....	21
Figure 8 : Evolution du delta en fonction du sous jacent .....	28
Figure 9: Le $\Gamma$ comme indicateur de convexité.....	29
Figure 10: Variance des rendements par un modèle Black & Scholes simple.....	34
Figure 11: Thêta obtenu par un modèle Black & Scholes simple.....	37
Figure 12 : Variance des rendements par le modèle de volatilité calendar effect.....	44
Figure 13: Thêta obtenu par le modèle de volatilité CE en utilisant la convention interne .....	45
Figure 14: Thêta obtenu par le modèle de volatilité CE en utilisant la convention 252 .....	45
Figure 15: Thêta obtenu par le modèle de volatilité CE en utilisant la convention Average... ..	46
Figure 16: Thêta obtenu par le modèle de volatilité CE en utilisant la convention Rolling ....	47
Figure 17: Thêta le dernier jour de l'année obtenu par le modèle de volatilité CE .....	49
Figure 18: Thêta du swap de variance obtenu par un modèle BS simple .....	58
Figure 19: Thêta du swap de variance par l'ajustement calendar effect .....	59
Figure 20: Une trajectoire simulée du sous jacent pour une volatilité constante égale à 0.2... ..	69
Figure 21: Digramme du projet OptionPricer .....	75
Figure 22: Capture de l'interface Visual Studio sur laquelle est codé BlackScholesPricer.....	76
Figure 23: Tests unitaires effectués dans le cadre du projet OptionPricer .....	77
Figure 24: Digramme du projet VarSwap .....	78
Figure 25: Capture de l'interface Visual Studio sur laquelle est codé VarSwapPricer.....	79
Figure 26: Tests unitaires effectués dans le cadre du projet VarSwap.....	80

---

## Liste des Tableaux

---

Tableau 1: Illustration d'une opportunité d'arbitrage .....	22
Tableau 2: Données de marché pour le spot et la volatilité implicite .....	36
Tableau 3: Prix et Thêtas journaliers sans calendar effect .....	36
Tableau 4: Surface de volatilité.....	56
Tableau 5: Prix et Thêtas du swap de variance sans calendar effect.....	57

---

## Table des matières

---

<b>RESUME.....</b>	<b>3</b>
<b>LISTE DES ABREVIATIONS.....</b>	<b>4</b>
<b>LISTE DES FIGURES.....</b>	<b>5</b>
<b>LISTE DES TABLEAUX.....</b>	<b>6</b>
<b>TABLE DES MATIERES.....</b>	<b>7</b>
<b>INTRODUCTION GENERALE.....</b>	<b>9</b>
<b>CHAPITRE 1 : PRESENTATION DE L'ORGANISME D'ACCUEIL .....</b>	<b>11</b>
1. Le Groupe Société général .....	11
2. La filiale SG CIB .....	11
2.1. <i>Organigramme de la SG CIB.....</i>	<i>11</i>
2.2. <i>Les activités de marché.....</i>	<i>12</i>
3. Société Générale Africa Technologies & Services : .....	14
<b>CHAPITRE 2 : INTRODUCTION AU MARCHE DES DERIVES.....</b>	<b>17</b>
<b>INTRODUCTION.....</b>	<b>17</b>
1. Evolution des instruments dérivés .....	17
1.1. <i>Le contrat Forward.....</i>	<i>17</i>
1.2. <i>Le besoin aux contrats futures .....</i>	<i>17</i>
1.3. <i>Le besoin aux options .....</i>	<i>18</i>
1.3.1. Définition .....	18
1.3.2. Les paramètres des options.....	18
1.3.3. Types d'options .....	20
1.3.4. Les positions en options : .....	21
1.3.5. L'autofinancement et l'absence d'opportunité d'arbitrage .....	22
2. Le modèle de la Black & Scholes pour l'évaluation des options.....	24
2.1. <i>Hypothèses du modèle .....</i>	<i>24</i>
2.2. <i>Formules fermées de Black &amp; Scholes.....</i>	<i>25</i>
2.3. <i>Extension du modèle .....</i>	<i>26</i>
2.4. <i>EDP de Black &amp; Scholes.....</i>	<i>26</i>
2.5. <i>Volatilité historique et Volatilité implicite.....</i>	<i>27</i>
2.6. <i>Les grecques .....</i>	<i>28</i>
<b>CONCLUSION DU CHAPITRE 2.....</b>	<b>30</b>
<b>CHAPITRE 3 : LE CALENDAR EFFECT DANS LE CADRE DE VOLATILITE CONSTANTE .....</b>	<b>32</b>
<b>INTRODUCTION.....</b>	<b>32</b>
1. Pricer avec un modèle Black&Scholes .....	32
1.1. <i>La variance des rendements.....</i>	<i>32</i>
1.2. <i>Problème du Thêta.....</i>	<i>34</i>
1.3. <i>Des pertes non négligeables .....</i>	<i>37</i>
2. La volatilité Calendar Effect.....	39
2.1. <i>La volatilité calendar effect dans le cadre d'un modèle BS.....</i>	<i>39</i>
2.2. <i>Les conventions de la fraction business.....</i>	<i>41</i>
2.3. <i>La variance des rendements.....</i>	<i>42</i>
2.4. <i>Thêta corrigé .....</i>	<i>44</i>
2.5. <i>Limites de la calibration calendar effect .....</i>	<i>48</i>
3. Application aux swaps de variance.....	50
3.1. <i>Pricing d'un swap de variance .....</i>	<i>50</i>
3.2. <i>Thêta du swap de variance sans calendar effect.....</i>	<i>53</i>

3.3. <i>Thêta du variance swap calendar effect</i> .....	58
<b>CONCLUSION DU CHAPITRE 3 :</b> .....	<b>59</b>
<b>CHAPITRE 4 : LE CALENDAR EFFECT DANS LE CADRE DE LA VOLATILITE LOCALE</b> .....	<b>61</b>
<b>INTRODUCTION</b> .....	<b>61</b>
1.    Présentation du modèle à volatilité locale .....	61
1.1. <i>Distribution risque neutre implicite</i> .....	61
1.2. <i>EDP de Dupire</i> .....	62
2.    Pricer des options européenne en utilisant le modèle à volatilité locale .....	64
2.1. <i>Construction de la surface de volatilité à la date t</i> .....	65
2.2. <i>Calcul de la volatilité locale</i> .....	65
2.3. <i>Simulation Monte Carlo</i> .....	67
2.3.1.    Simulation du modèle de Black & Scholes.....	67
2.3.2.    Calcul de l'esperance.....	69
2.3.2.1.    Les intervalles de confiance .....	69
2.3.2.2.    Réduction de la variance.....	70
3.    Problème du Thêta.....	72
<b>CHAPITRE 5 : IMPLEMENTATION SOUS C SHARP (C#)</b> .....	<b>73</b>
1.    La programmation orientée objet avec C#.....	73
1.1. <i>La programmation orientée objet</i> .....	73
1.2. <i>Le langage de programmation C#</i> .....	73
2.    Description des objets principaux.....	74
2.1. <i>Définition d'un objet</i> .....	74
2.2. <i>Le test unitaire</i> .....	74
3.    Les projets utilisés .....	74
3.1. <i>Le projet OptionPricer</i> .....	74
3.1.1.    Implémentation.....	74
3.1.2.    Vérification du bon fonctionnement des méthodes.....	76
3.2. <i>Le projet VarSwap</i> .....	78
3.2.1.    Implémentation.....	78
3.2.2.    Vérification du bon fonctionnement des méthodes.....	79
<b>CONCLUSION GENERALE</b> .....	<b>82</b>
<b>BIBLIOGRAPHIE</b> .....	<b>83</b>
<b>ANNEXE</b> .....	<b>84</b>

---

## Introduction générale

---

Nul ne peut ignorer le rôle que joue le système financier dans la simulation de la croissance économique, et ce, à travers la collecte et l'injection des flux financiers dans les rouages de l'économie. Dans ce contexte les marchés financiers et en particulier le marché des dérivés joue, entre autres, un rôle important.

Le marché des dérivés ne cesse de prendre de l'importance, que ce soit par les sommes importantes qu'il draine, ou au niveau des tendances qui le caractérise ces dernières années tant d'un point de vue quantitatif que qualitatif .Toutefois, à cause de son caractère risqué vu que les instruments y échangés sont des actifs financiers servant pour se couvrir ; mais, aussi pour prendre des positions spéculatives. Le marché des dérivés suscite régulièrement de vives inquiétudes.

Les pertes sur le marché des dérivés ne sont pas l'apanage des entreprises non financières .Certaines institutions financières, parmi les leaders dans le domaine, ont essuyé de gros revers. La Société Générale en 2007, la Barings Bank en 1994, Amaranth Advisors en 2006, la caisse d'épargne Ecureuil en 2008, en plus des centaines de pertes de trading supérieures à 100 millions de dollars qu'on pourrait recenser ces vingt dernières années et dont la fréquence augmente depuis 2000 sont tous des exemples de pertes rencontrées sur le marché des dérivés et qui sont dues à des malversations ou une mauvaise appréciation des risques.

Pour les traders et gérants de portefeuilles, connaître de manière précise la dynamique de leurs grecques est indispensable pour anticiper l'évolution de nombreux risques en fonction de l'environnement de marché et les couvrir le cas échéant. Cependant une évaluation des options par un simple modèle de Black & Scholes donne des grecques qui sautent la veille des jours fermés et donne par la suite une illusion du contrôle et une sous-estimation des risques.

Notre problématique dans ce rapport consistera à

- Calibrer la volatilité de la classe d'actifs actions en modèle Black & Scholes (volatilité constante) et étudier le choix des bases de temps business.

- Appliquer la volatilité ainsi calibrée aux swaps de variance.
- Etude théorique d'une application de Dupire en temps business en utilisant la volatilité calibrée en modèle Black & Scholes et l'appliquer sur le timestep de la simulation.

Pour atteindre cette cible, le troisième chapitre sera dédié à l'étude du pricing avec le modèle Black & Scholes simple, la compréhension de l'origine du problème des sauts et leur impact sur les P&L journaliers en premier lieu. En second lieu, nous verrons le modèle de calibration de la volatilité Black & Scholes communément appelé calendar effect, tout en étudiant le choix des différentes bases de temps business, ainsi que les limites du modèle et nous terminons le chapitre par une application du calendar effect aux swaps de variance.

Quant au quatrième chapitre, nous verrons le contexte dans lequel s'inscrit le besoin à une volatilité locale d'une part et les étapes à suivre pour appliquer la volatilité calendar effect calibrée en modèle Black & Scholes dans un cadre de volatilité locale .

Les résultats de ce chapitre ne sont pas présentés dans ce rapport et font objet de la deuxième partie du stage.

Le cinquième chapitre sera consacré à la présentation de l'outil de programmation orienté objet utilisé lors du stage.

---

## Chapitre 1 : Présentation de l'organisme d'accueil

---

Mon projet de fin d'études a été réalisé au sein de la SG ATS (Société Générale Africa Technologies & Services) à Casablanca faisant partie de la SG CIB (Société Générale Corporate & Investment Banking) filiale du Groupe Société Générale. Dans ce chapitre, nous présenterons le Groupe Société Générale, sa filiale SG CIB et la Société Générale Africa Technologies & Services.

### 1. Le Groupe Société général

La Société Générale (SG) est une banque universelle française qui se compose de trois grands piliers. Ces trois piliers, qui sont au cœur du développement du modèle de banque relationnelle, sont présentés sur la figure 1

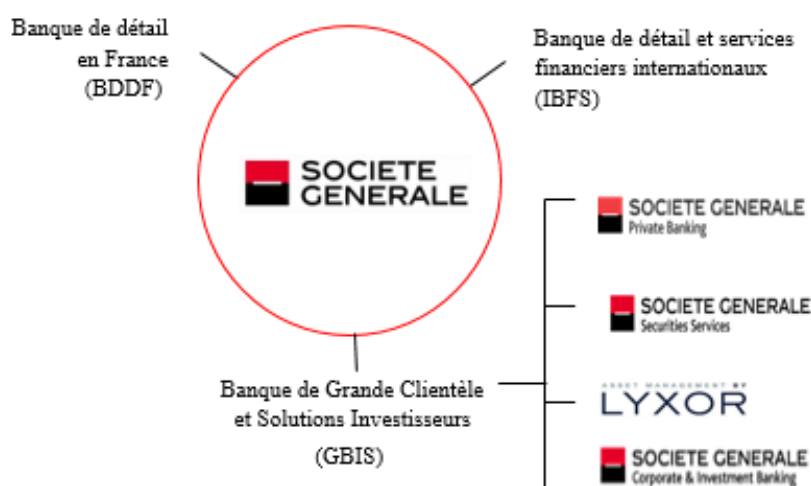


Figure 1 : Métiers du Groupe SG et composantes de la GBIS

### 2. La filiale SG CIB

#### 2.1. Organigramme de la SG CIB

La filiale SG CIB regroupe les activités de marché du Groupe Société Générale. Elle accompagne ses clients dans leurs besoins stratégiques de long terme et ceci à travers quatre services essentiels:

- Le conseil

- Le financement
- La couverture des risques
- Les solutions d'investissement

Son organigramme est présenté sur la figure 2.

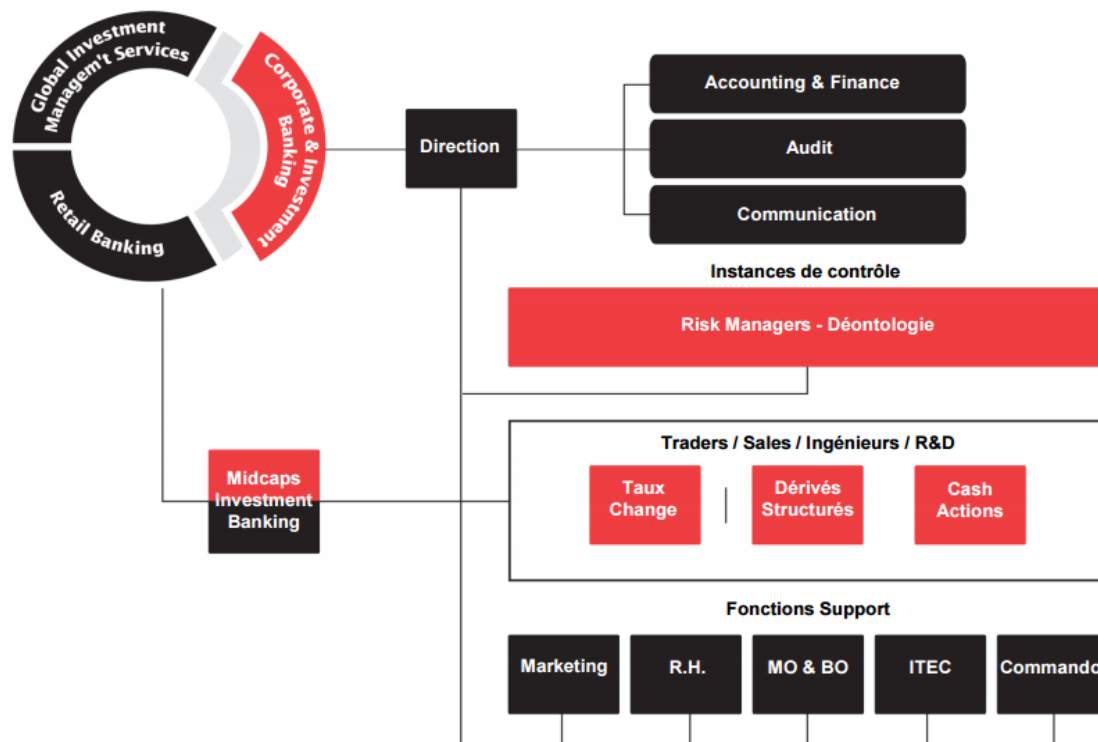


Figure 2: Organisation des salles de marché de SG CIB

## 2.2. Les activités de marché

Les activités de marché du Groupe SG sont exercées dans des salles de marchés gérées par SG CIB. Ces activités jouent un rôle essentiel dans le financement de l'économie et dans la répartition des risques entre les différents acteurs qu'elles font intervenir. Elles sont organisées pour apporter des solutions sur mesure aux problématiques parfois très complexes des clients de la banque.

La salle des marchés est composée de trois pôles distincts à savoir le *Front Office* chargé de la négociation avec les clients, le *Middle Office* chargé de contrôler les risques et d'analyser les résultats et le *Back-Office*, chargé des saisies, des contrôles comptables et du contrôle interne.

### Front office

Il centralise et traite les besoins de la salle des marchés et des clients en termes de couverture, de financement, d'investissement, gestion de position, et trading et arbitrage (cette notion est expliquée dans le chapitre 2 de ce rapport). C'est l'interface de la salle des marchés. Il regroupe les métiers suivants :

- **Traders** : Ils prennent des positions sur des devises, des taux d'intérêt ou des volatilités. Ils sont en particulier en charge de la gestion et de la couverture des produits dérivés. Les traders peuvent aussi se livrer à des opérations d'arbitrage ou de spéculation. Ils agissent dans le cadre de limites de marché, et de contrepartie.
- **Le service à la clientèle (institutionnelle et d'entreprises (corporate))** : la principale fonction des services commerciaux est de répondre aux besoins de la clientèle, de les conseiller et d'assurer le suivi des opérations. Ils travaillent essentiellement avec les institutionnels ou gérants de SICAV et d'autres fonds de placement français ou étrangers.
- **l'activité de market-maker ("teneur de marché")** : certaines entités sont des market-makers sur des marchés très spécifiques, c'est-à-dire qu'elles doivent répondre aux demandes de cotation en assurant ainsi la liquidité du marché.
- **Ingénierie financière** : Elle regroupe deux équipes :
  - **Pricing et Développement** : Cette équipe est en charge de concevoir, de structurer et de mettre en œuvre des transactions structurées sur des produits dérivés multi sous-jacents pour tous types de clientèles (corporate, institutionnels, distributeurs). Elle a pour rôle de concevoir des nouvelles structures adaptées et de fournir les cotations demandées par les équipes de vente Europe de la Banque de Financement et d'Investissement de Société Générale.
  - **Structuration Indicielle** : L'équipe Société Générale Index (SGI) est en charge de la conception, du développement et de la maintenance des indices propriétaires SGI pour l'ensemble du groupe Société Générale. Elle participe au développement, à l'intégration et la maintenance des indices SGI. Elle est

plus particulièrement en charge de la validation et de la maintenance des librairies et des Framework de valorisation des indices SGI.

- **Recherche et développement** : Cette équipe est en charge du développement et de la maintenance des librairies de pricing et des calculateurs de risque pour l'ensemble des équipes de trading de la banque de financement et d'investissement Société Générale.

### **Middle office**

Cette cellule sert d'interface entre le Back Office et le Front Office. Ses tâches sont les suivantes :

- Assister les traders dans la partie administrative de leurs tâches : rédaction des tickets de deals, vérification des ordres saisis par les traders dans les systèmes interfacés Front/Back Office avant relâche vers le Back Office.
- Etablir et vérifier les positions et le calcul des résultats du desk en vue de produire des reportings d'activités au chef de salle.
- L'établissement des analyses de risque en accord avec les normes des autorités de tutelle.

### **Back office**

Il est en charge du traitement administratif des opérations. Il est en principe en charge de :

- L'authentification des opérations aux contreparties.
- Le règlement des transactions avec les contreparties.
- La comptabilisation des positions et du calcul des résultats qu'il communique quotidiennement aux différents desks du Front Office.

### **3. Société Générale Africa Technologies & Services :**

C'est une filiale du groupe SG basée à Casablanca. Elle regroupe une partie des équipes de la salle des marchés gérée par SG CIB. Depuis début 2014, certains services liés aux activités de marché du Groupe SG ont été renforcés par les équipes de SG ATS.

Notamment, les équipes de Recherche et Développement, Ingénierie Financière, Trading Process Factory...

Son organigramme est présenté sur la figure 3.

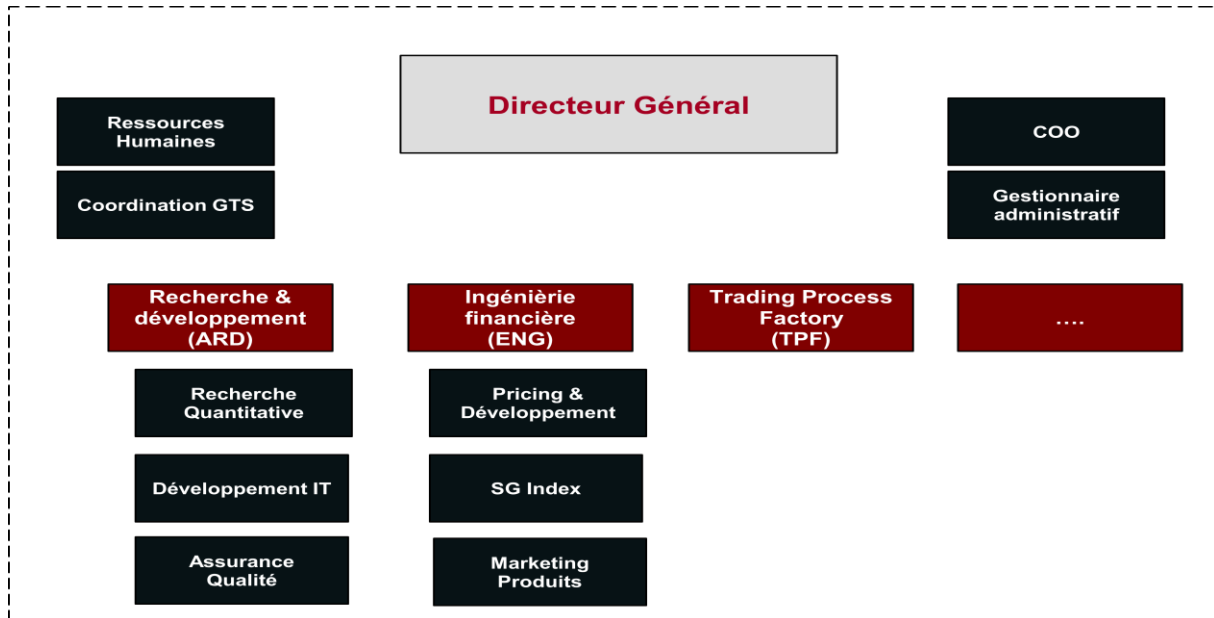


Figure 3: Organigramme de la SG ATS

Mon projet de fin d'études a été réalisé dans le cadre de l'activité de l'équipe Recherche et Développement (ARD), plus précisément au sein de l'équipe QUANT qui regroupe 8 collaborateurs spécialisés chacun dans un marché financier : Taux, Crédit, Actions, Changes, dont la tâche principale est de concevoir et de mettre en œuvre des modèles de pricing pour les produits dérivés sur toutes les classes d'actifs, et aussi amenée à participer au processus d'industrialisation des librairies de calcul (robustesse, flexibilité, efficacité numérique, calcul algorithmique)..

Les équipes de la R&D sont organisées selon l'organigramme suivant :

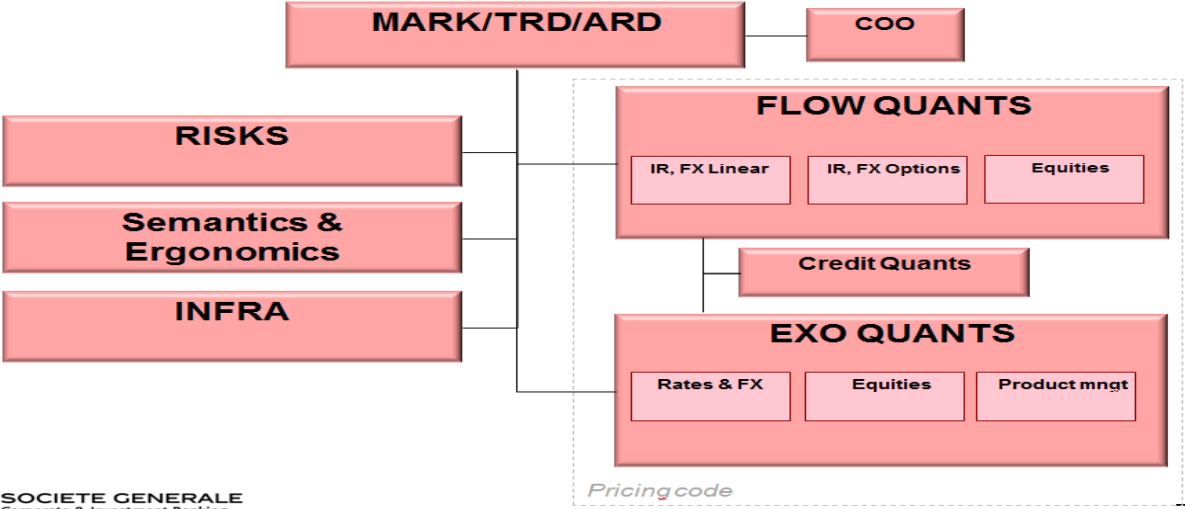


Figure 4: Organigramme de l'équipe R&D

---

## Chapitre 2 : Introduction au marché des dérivés

---

### Introduction

L'activité financière se développe à travers un certain nombre d'instruments tels que : la circulation de monnaie exprimée dans différentes devises, les opérations de prêts et d'emprunts qui sont assorties de paiements d'intérêts dépendant de la maturité des opérations, les actions émises par les entreprises qui reflètent leur capitalisation. Des indices ont été créés (SP500, CAC 40, MASI ...) afin de permettre aux investisseurs étrangers d'avoir une information rapide sur le niveau économique et le comportement des actions d'un pays. La très grande variabilité de ces paramètres ou de ces titres a conduit naturellement à une demande de transfert des risques (pour les éliminer ou au moins les réduire) de la part d'un certain nombre d'intervenants, comme les entreprises industrielles, les compagnies d'assurance...

Les banques jouent évidemment un rôle fondamental dans cette transformation, notamment en proposant un certain nombre de produits financiers appelés produits dérivés.

### 1. Evolution des instruments dérivés

Comme c'est le cas de n'importe quel produit, les produits dérivés évoluent comme un résultat d'innovation ; une innovation qui va répondre aux besoins de plus en plus complexes.

#### 1.1. Le contrat Forward

Il s'agit probablement du premier produit dérivé. Dans ce contrat deux parties se mettent d'accord pour compléter une transaction au future mais avec un prix prédéterminé aujourd'hui.

#### 1.2. Le besoin aux contrats futures

Les futures ont été créés pour résoudre les problèmes liés aux contrats forwards à savoir :

- **La double coïncidence** : les deux parties doivent trouver une contrepartie qui n'a pas seulement un besoin opposé par rapport à l'actif sous-jacent mais aussi par

rapport au temps et la quantité. Plusieurs facteurs doivent coïncider avant d'arriver à la négociation du contrat forward.

- **Contrat forcé** : Le contrat peut être forcé sur une partie (urgence d'une partie, asymétrie d'information,...).
- **Risque de la contrepartie** : c'est le problème le plus important.

L'avantage fondamental présenté par les contrats à terme par rapport à leurs prédateurs de gré à gré <sup>1</sup>(les forwards), est l'existence d'une chambre de compensation avec contrepartie centrale qui se substitue à tous les intervenants : elle est l'acheteur de tous les vendeurs et le vendeur à tous les acheteurs.

### 1.3. Le besoin aux options

#### 1.3.1. Définition

Bien que les forwards et futures nous permettent de savoir le prix avec lequel un produit va être échangé dans le futur, ils ne permettent pas de bénéficier des mouvements favorables des prix d'où le besoin des options.

Une option est un produit qui donne le droit, et non l'obligation,

- soit d'acheter (option d'achat, appelée aussi « call »),
- soit de vendre (option de vente, appelée aussi « put »),

une quantité donnée d'un actif financier (action, obligation, indice boursier, devise, matière première, un autre produits dérivé, etc.) appelé actif sous-jacent (spot), à un prix précisé à l'avance appelé prix d'exercice (strike) et à une échéance convenue (maturité).

#### 1.3.2. Les paramètres des options

- **La durée d'exercice** : Dans les marchés organisés, un nombre fini d'échéances est coté simultanément. La cotation cesse la veille de l'échéance, ce qui signifie que les options sont négociables jusqu'à l'avant-dernier jour du mois d'échéance.

---

<sup>1</sup> Marché gré à gré (OTC : Over The Counter) : c'est un marché sur lequel les transactions sont conclues directement entre les vendeurs et les acheteurs. Il s'oppose à un marché organisé, où les transactions se font via une place de marché centralisée et règlementée

- **Le prix d'exercice** : C'est le cours auquel l'option peut être exercée appelé le strike. Trois prix d'exercice au minimum sont cotés sur chaque sous jacent, et chacune des échéances. Ils respectent entre eux des écarts standards. Les prix d'exercice sont fixés à des cours proches de celui du sous jacent. Les options les plus liquides sont les options à la monnaie, pour lesquelles le strike est proche de la valeur du cours.
- **La prime** : La prime est le prix du contrat payé par l'acheteur au vendeur de l'option. Elle fait l'objet de cotations et peut être négociée : on peut acheter une option pour essayer de la revendre plus chère, ou l'inverse.  
Le prix de l'option évolue tout au long de sa durée de vie.
- **La valeur intrinsèque** : C'est la différence positive ou nulle entre le cours coté du titre support et le prix d'exercice.

$$\text{Call Valeur intrinsèque} = \sup (\text{Cours du spot} - \text{Prix d'exercice}; 0)$$

$$\text{Put Valeur intrinsèque} = \sup (\text{Prix d'exercice} - \text{Cours du spot}; 0)$$

La valeur intrinsèque peut être vue comme la valeur qu'aurait une option si l'on avait la possibilité de l'exercer au moment où l'on parle, comme si nous étions arrivés à maturité.

- **La valeur temps** : La valeur d'une option ne se réduit pas à sa valeur intrinsèque. En effet, la prime d'une option en dehors de la monnaie <sup>2</sup> (valeur intrinsèque nulle) conserve une valeur appelée valeur temps.

Plus généralement, la valeur temps représente l'incertitude quant au potentiel d'évolution du sous-jacent. Cette incertitude diminue à mesure que la maturité de l'option se rapproche. Les options sont donc d'autant moins chères que leur échéance est proche, toutes choses étant égales par ailleurs. A l'inverse, quand la maturité est éloignée, la valeur temps de l'option est importante.

L'incidence du temps sur la valeur de l'option n'est pas linéaire. Plus l'option approche de sa date d'échéance, plus sa valeur temps décroît rapidement comme le montre la figure 6.

---

<sup>2</sup> On dit qu'on est en dehors de la monnaie lorsque  $\text{Cours de l'action} < \text{prix d'exercice}$  dans le cas du call et inversement dans le cas du put.

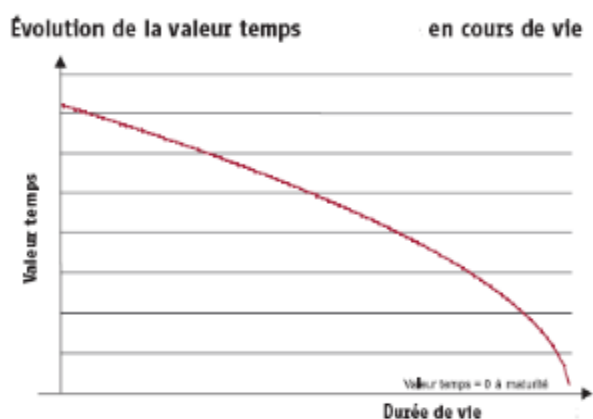


Figure 6: Evolution de la valeur temps en fonction des jours restants à la maturité

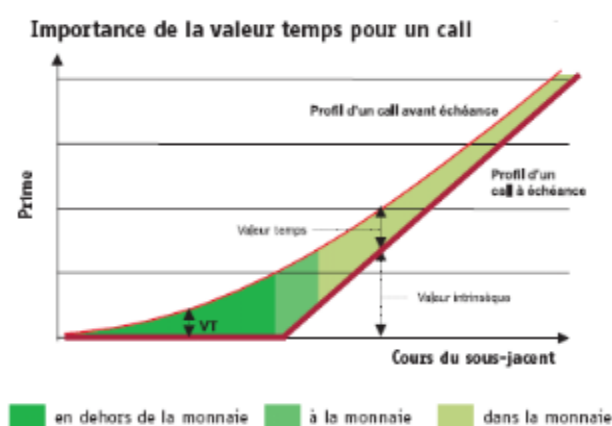


Figure 5: Valeur intrinsèque et valeur temps

### 1.3.3. Types d'options

Les options sur le marché peuvent être classées en deux catégories :

- **Options Vanilles** : dites de « première génération », sont les plus classiques, et généralement les plus liquides.
- **Options Exotiques** : Les options vanilles, de par leur profil classique, montrent rapidement leurs limites en termes de couverture ou de spéculation. Des profils de rendement ou de risque plus complexes peuvent être construits grâce à des options dites « exotiques » ou de « seconde génération ». comme les options Asiatiques, lookback, barrières...

Selon le moment de l'exercice de l'option on distingue entre :

- **Options Européennes** : l'option ne peut être exercée qu'à la date d'échéance
- **Options Américaines** : l'exercice peut survenir à tout moment jusqu'à la date d'échéance.

Selon le type du payoff de l'option on peut distinguer deux familles de payoffs :

- **Payoffs Européens** : Le payoff est une fonction de la valeur du sous jacent à maturité seulement.
- **Options Path Dependent** : sont des options dont la valeur terminal dépend de la trajectoire du prix du sous-jacent sur une période déterminée et non pas de sa valeur à maturité seulement.

### 1.3.4. Les positions en options :

Il existe quatre positions possibles :

- **L'achat de call** : L'achat d'un call permet de profiter d'une hausse du cours du sous-jacent d'ici l'échéance de l'option. L'exercice de l'option aura lieu seulement si le cours du sous-jacent est supérieur au strike. Sinon, l'option est abandonnée. L'expression de son payoff est donnée par  $\max(S_T - K; 0) = (S_T - K)^+$
- **La vente de call** : Le payoff du vendeur du call est l'opposé de celui de l'acheteur.
- **L'achat de put** : L'achat d'un put permet de se protéger contre une baisse de l'actif sous-jacent. L'expression de son *payoff* est :  $\max(K - S_T; 0) = (K - S_T)^+$
- **La vente de put** : Le payoff du vendeur du put est l'opposé de celui de l'acheteur du put.

La figure suivante résume ces différentes situations.

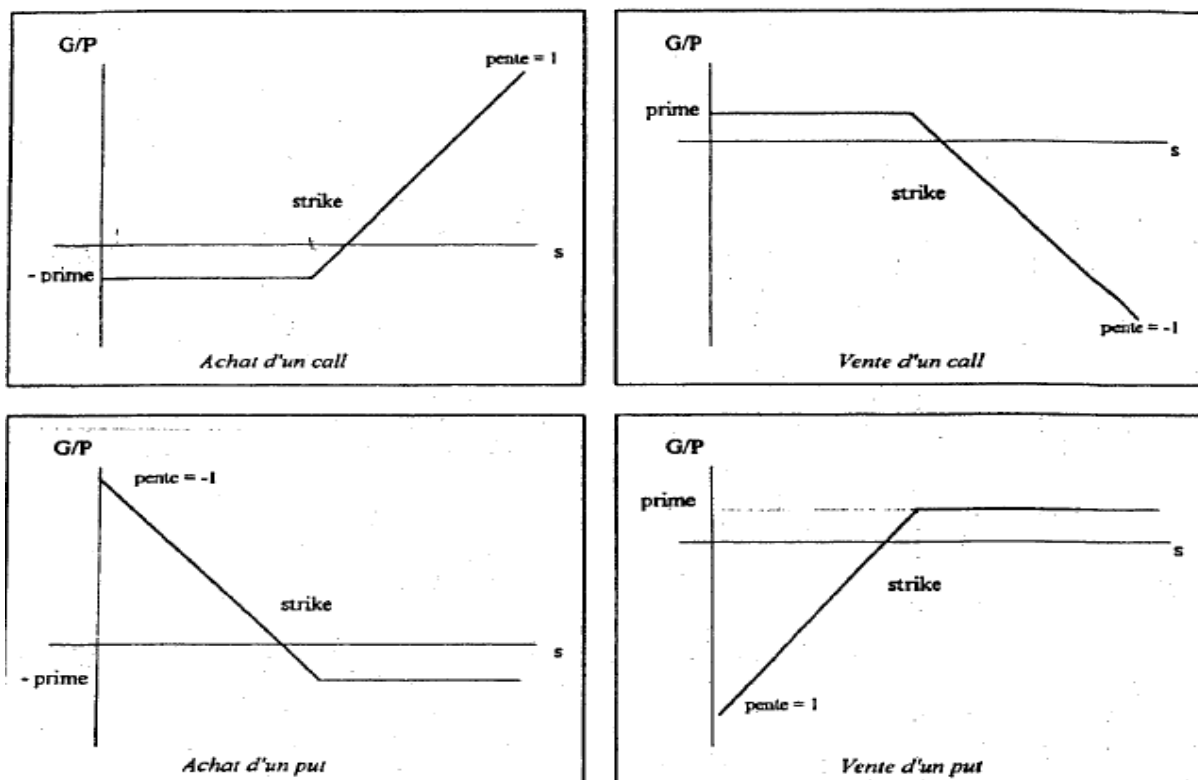


Figure 7: Payoffs élémentaires

### 1.3.5. L'autofinancement et l'absence d'opportunité d'arbitrage

- L'autofinancement

Une stratégie est autofinancée si la variation instantanée de la richesse ne dépend que de la variation de cours des actifs risqués et du rendement du montant placé au taux sans risque.

- Absence d'opportunité d'arbitrage

#### ➤ Définition de l'absence d'opportunité d'arbitrage

En théorie financière, l'absence d'opportunité d'arbitrage implique qu'il n'est pas possible de gagner de l'argent à coup sûr à partir d'un investissement nul.

Une des conséquences majeures de l'absence d'opportunité d'arbitrage sur les marchés financiers est la loi du prix unique. En effet deux actifs qui ont exactement les mêmes payoffs ont le même prix. C'est cette loi qui est la base de l'évaluation des produits financiers.

Et donc pour évaluer un actif, on peut utiliser une combinaison d'actifs existants, qui donnerait exactement les mêmes payoffs que notre actif. Une telle combinaison est appelée portefeuille autofinancé de réplcation.

NB : Dans un marché très liquide, où il n'y a ni coûts de transaction, ni limitations sur la gestion (achat-vente) des actifs supports, il n'y a pas d'opportunité d'arbitrage.

#### ➤ Illustration d'une opportunité d'arbitrage

Considérons un marché avec deux actions échangées,  $A$  et  $B$ . On suppose qu'il y a deux dates  $t = 0$  et  $t = 1$  (modèle mono périodique). En  $t = 1$  deux états sont possibles, hausse ou baisse.

Actif	$A$	$B$
$W1$ : état hausse	80	80
$W2$ : état baisse	35	35

Tableau 1: Illustration d'une opportunité d'arbitrage

Imaginons que le prix actuel de **A** est de **50€**, et celui de **B** est de **57€**. Comment peut-on construire une stratégie qui nous fasse gagner de l'argent en  $t = 0$  sans en perdre en  $t = 1$ ?

En  $t = 0$  : On vend à découvert **B** et on achète **A** on gagne alors **7€**;

En  $t = 1$ , on utilise les flux reçus de la vente de **A** pour acheter **B**.

➤ Modélisation mathématique

Le marché est viable<sup>3</sup>, si et seulement si, il existe une probabilité équivalente à la probabilité historique appelée probabilité risque neutre sous laquelle les prix actualisés des actifs sont des martingales.<sup>4</sup>

- La complétude

Le marché est dit complet, si et seulement si, il existe une unique probabilité risque neutre, sous laquelle les prix actualisés des actifs sont des martingales.

- La Parité Call-Put

La relation de parité call-put représente une des relations les plus importantes liant la valeur d'un call européen et celle d'un put européen. Cette relation s'applique sur des options portant sur des sous-jacent ne versant pas de dividendes et ayant le même prix d'exercice et la même date d'échéance.

Elle s'écrit telle que :

$$C_t + Ke^{-r(T-t)} = P_t + S_t$$

Où :

$r$  : taux d'intérêt sans risque annuel, capitalisé en continu ;

$S_t$  : désigne le cours de l'actif sous-jacent à l'instant  $t$  ;

$C_t$  : désigne la valeur d'un call européen à l'instant  $t$  ;

$P_t$  : désigne la valeur d'un put européen à l'instant  $t$  ;

---

<sup>3</sup> Nous dirons qu'un marché financier est viable s'il n'existe aucune opportunité d'arbitrage.

<sup>4</sup> En calcul stochastique, une martingale désigne un processus stochastique, c'est-à-dire un processus aléatoire et dynamique, Ce type de processus  $X$  est tel que sa valeur espérée connaissant l'information disponible à une certaine date  $s$ , dénotée  $F_s$ , est la valeur à cette même date :  $E(X_t/F_s) = X_s$  Avec  $s \leq t$ .

$K$  : désigne le prix d'exercice de l'option ;

Cette relation exprime le fait que la valeur d'un *call* (respectivement celle d'un *put*), caractérisé par un certain prix d'exercice et une date d'échéance, peut être déduite de la valeur d'un *put* (respectivement d'un *call*) européen doté des mêmes caractéristiques (en terme de prix d'exercice, date d'échéance, action sous-jacente).

**Preuve :**

Supposons que  $C_t - P_t > S_t - Ke^{-r(T-t)}$  et notons la différence des deux termes de cette inégalité  $Y_t$  donc  $Y_t = C_t - P_t - S_t + Ke^{-r(T-t)}$ .

Et soit  $V_t = -C_t + P_t + S_t + Y_t - Ke^{-r(T-t)} = 0$  le portefeuille constitué de l'achat d'un Call, de la vente d'un Put, de l'achat d'une action, de placement de  $Y_t - Ke^{-r(T-t)}$  à la banque pour l'horizon T, est de valeur initiale nulle. Mais à l'horizon T, il garantit un flux de :  $V_T = -(S_T - K)^+ + (K - S_T)^+ + S_T - K + Y_t e^{r(T-t)} = Y_t e^{r(T-t)}$  qui est strictement positif. Et donc on a pu construire une stratégie d'arbitrage.

On procède de la même façon pour  $C_t - P_t < S_t - Ke^{-r(T-t)}$

Finalement on retrouve l'égalité

$$C_t + Ke^{-r(T-t)} = P_t + S_t$$

## 2. Le modèle de la Black & Scholes pour l'évaluation des options

En 1973, Black et Scholes ont proposé une formule, qui porte aujourd'hui leurs noms, pour le prix d'une option européenne d'achat. Cette formule est très utilisée en pratique à tel point que la volatilité implicite qu'elle définit est devenue une véritable unité de mesure. Le modèle mathématique qui décrit le marché financier est à la fois simple et efficace.

### 2.1. Hypothèses du modèle

Pour obtenir l'équation de Black-Scholes, certaines hypothèses doivent être vérifiées à savoir :

- le marché est complet,
- le temps est continu,

---

<sup>5</sup> La simplification des flux à l'horizon T vient du fait que  $x^+ - (-x)^+ = x$

- le sous-jacent est infiniment divisible (par exemple on peut acheter 1/100 de sous jacent),
  - les ventes à découvert sont autorisées,
  - il n'y a pas de coup de transaction,
  - il existe un taux d'intérêt constant,
  - il n'y a pas de dividende (bénéfices distribués aux détenteurs d'actions).
- La dynamique du sous-jacent sous la probabilité risque neutre est donnée par :

$$\frac{dS_t}{S_t} = r dt + \sigma dW_t . \quad (1.1)$$

Avec :

( $W_t$ ) : Est un mouvement brownien sous la probabilité risque neutre.

$r$  : étant le rendement sans risque.

$\sigma$  : La volatilité du sous jacent

## 2.2. Formules fermées de Black & Scholes

Les formules de Black-Scholes permettant de calculer, à la date  $t$ , la valeur d'un call / Put européen sur une action qui ne verse pas de dividendes sont les suivantes :

$$C_t = S_t N(d_1) - K e^{-r(T-t)} N(d_2)$$
$$P_t = K e^{-r(T-t)} N(-d_2) - S_t N(-d_1)$$

Avec :

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}$$

Et

$$d_2 = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}} = d_1 - \sigma\sqrt{\tau}$$

Où :

$N(x)$  : est la fonction de répartition de la loi normale centre-réduite.

$\tau = T - t$  : Appelé dans le jargon de la finance le ténor.

Une manière de démontrer cette formule est d'utiliser l'approche intégrale qui consiste à utiliser la méthode d'évaluation risque-neutre et que les payoffs actualisés sont des martingales.

Et donc la valeur du call / Put européen est égale à l'espérance de la valeur du payoff à l'échéance, actualisée au taux sans risque : (voir annexe)

$$C_t = e^{-r(T-t)} \hat{E} [\max (S_T - K; 0)]$$

$$P_t = e^{-r(T-t)} \hat{E} [\max (K - S_T; 0)]$$

### 2.3. Extension du modèle

Il s'agit du cas des coefficients dépendant du temps. La dynamique du sous-jacent sous la probabilité risque neutre  $Q$  est :

$$\frac{dS_t}{S_t} = r dt + \sigma_t dW_t. \quad (1.2)$$

Les formules fermées ci-dessus restent les mêmes en remplaçant seulement  $\sigma^2$  par

$$\frac{1}{T-t} \int_t^T \sigma_s^2 ds.$$

### 2.4. EDP de Black & Scholes

Une autre manière de démontrer la formule de Black & Scholes consiste à résoudre l'équation aux dérivées partielles backward obtenue par l'application du lemme d'Itô (voir annexe) :

$$(2.1): \begin{cases} \frac{\delta v}{\delta t}(t, x) + rx \frac{\delta v}{\delta x}(t, x) + \frac{1}{2} \sigma^2 x^2 \frac{\delta^2 v}{\delta x^2}(t, x) = rv(t, x), & (t, x) \in [0, T) \times ]0, +\infty) \\ v(T, x) = h(x) \end{cases}$$

Le flux  $h(S_T)$  désigne le payoff du Call / Put et peut être répliqué par un portefeuille, dont la valeur à la date  $t$  est  $v(t, S_t)$ , tout en investissant la quantité  $\delta(t, S_t) = \frac{\delta v}{\delta x}(t, S_t)$  dans l'actif risqué  $S$ .

Dans le cas où on utilise le sous-jacent forward  $F_t = e^{r(T-t)}S_t$  et des prix non discountés c'est-à-dire :  $w = e^{r(T-t)}v$  au lieu de  $v$  nous obtenons l'EDP sur le forward suivante (voir annexe).

$$(2.2): \frac{\delta w}{\delta t}(t, x) + \frac{1}{2} \sigma^2 x^2 \frac{\delta^2 w}{\delta x^2}(t, x) = 0$$

## 2.5. Volatilité historique et Volatilité implicite

### ➤ La volatilité historique

C'est l'écart-type des rendements. Elle est calculée en se basant sur les log-rentabilités du sous-jacent :

$$\sigma_H = \sqrt{\frac{1}{N-1} * \sum_{i=1}^N (R_i - m_H)^2}$$

Avec :

$R_i$  : log-rentabilité du sous jacent sur la période  $i$  :  $R_i = \ln(S_{i+1}) - \ln(S_i)$

$m_H$  : Moyenne empirique des log-rendements :  $m_H = \frac{1}{N} \times \sum_{i=1}^N R_i$

### ➤ La volatilité implicite

Le modèle de Black & Scholes suppose que l'évolution du prix de l'actif est régie par l'équation différentielle stochastique suivante :

$$\frac{dS_t}{S_t} = r dt + \sigma dW_t .$$

On a vu qu'à partir de ce modèle de diffusion de l'actif, on peut déterminer le prix des options sur cet actif. Inversement, la volatilité  $\sigma$  étant le seul paramètre non observable de ce modèle, on s'intéresse au calcul de  $\sigma$  à partir du prix d'une option  $(K, T)$  observé sur le marché. La volatilité ainsi obtenue est appelée volatilité implicite noté  $\sigma_{imp}(K, T)$ .

Dans le cas où  $\sigma$  est déterministe dépendante du temps ( $\sigma_t$ ), on a la relation suivante :

$$\sigma_{imp}^2 = \frac{1}{T-t} \int_t^T \sigma_s^2 ds$$

## 2.6. Les grecques

Les grecs ou grecques sont des indicateurs de gestion qui permettent d'anticiper la manière dont va évoluer une option en fonction des variables auxquelles elle est étroitement liée. Ils permettent de couvrir les risques associés à un portefeuille d'options.

Les principaux grecques sont :

➤ Delta :

Elle mesure la sensibilité du prix par rapport aux variations du cours du sous-jacent ( $\delta = \frac{\delta v}{\delta S}$ ).

Il est le premier des indicateurs pris en compte par le trader.

Il fournit une information sur la variabilité de l'option mais aussi sur la probabilité d'exercer l'option. Enfin, elle représente la quantité d'actifs supports dans le portefeuille de couverture.

Le Delta d'un Call / Put européen dans le modèle de Black-Scholes est donné par :

$$\delta_C = \frac{\delta C}{\delta S} = N(d_1)$$

$$\delta_P = \frac{\delta P}{\delta S} = N(d_1) - 1$$

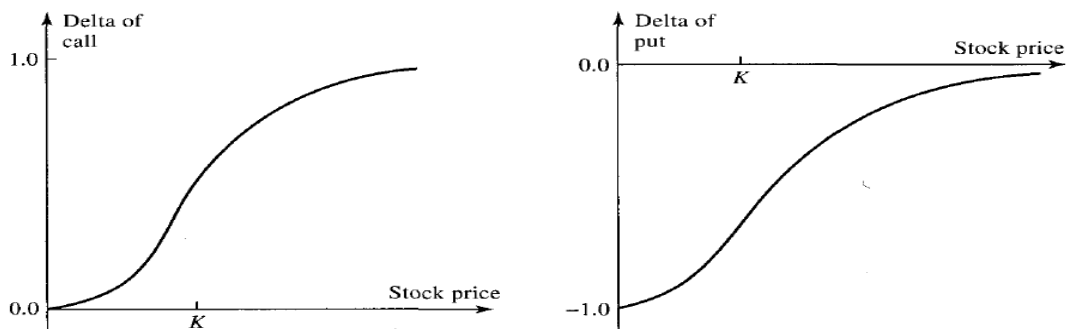


Figure 8 : Evolution du delta en fonction du sous-jacent

Au premier ordre, pour une petite variation  $\Delta S$  du sous-jacent, on a :  $\Delta v = \delta \times \Delta S$

➤ Gamma :

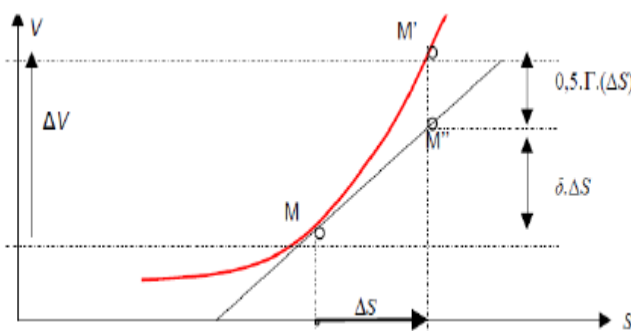
Le gamma représente la vitesse du delta, c'est à dire l'accélération de la prime aux variations du sous jacent ( $\Gamma = \frac{\delta\delta}{\delta S} = \frac{\delta^2 v}{\delta S^2}$ ).

Le gamma représente la convexité du prix d'une option en fonction du cours du sous-jacent. Il indique si le prix de l'option a tendance à d'évoluer plus ou moins vite que le prix du sous-jacent.

Le Gamma d'un Call / Put européen dans le modèle de Black-Scholes est identique et est donné par :

$$\Gamma_C = \Gamma_P = N(d_1) \times \frac{1}{S\sigma\sqrt{\tau}} \quad (3.1)$$

Lorsque le gamma est faible, les fluctuations du cours du sous-jacent n'ont que des effets très négligeables sur le delta. Dans ce cas, il ne sera guère nécessaire de réviser les positions détenues pour maintenir le delta proche du niveau recherché.



*Sous l'effet de  $\Delta S$ , le point M se déplace en M'. Si la convexité était nulle ( $\Gamma = 0$ ), il se déplacerait en M''*

Figure 9: Le  $\Gamma$  comme indicateur de convexité

Pour des grandes variations du sous jacent ( $\Delta S$ ), le gamma de la position est grand et non négligeable.

Au second ordre, pour une variation  $\Delta S$  du sous-jacent, on a :  $\Delta v = \delta \times \Delta S + \frac{1}{2} \Gamma \times \Delta S^2$

➤ Véga :

C'est la sensibilité du prix de à la volatilité du sous-jacent ( $\vartheta = \frac{\delta v}{\delta \sigma}$ ).

Le Véga d'un Call / Put européen dans le modèle de Black-Scholes est identique et est donné par :

$$\vartheta_C = \vartheta_P = N(d_1) \times S\sqrt{\tau} \quad (3.2)$$

Cette quantité représente peu d'intérêt dans le cas du modèle de Black-Sholes puisque est supposée constante.

Notons qu'il existe une relation entre le Gamma et le Véga de l'option. En effet d'après (3.1) et (3.2) on a :

$$\vartheta = S^2 \sigma \tau \Gamma \quad (3.3)$$

➤ Thêta :

Le Thêta d'une option mesure la variation attendue du prix de cette option sur une période, due au seul passage du temps.

$$\theta = \frac{\delta v}{\delta t} = -\frac{\delta v}{\delta \tau}$$

Dans le modèle de Black & Scholes, le Thêta d'un call est donné par :

$$\theta = -\frac{\delta C}{\delta \tau} = -\left( \frac{S\sigma}{2\sqrt{\tau}} f(d_1) + rKe^{-r\tau} N(d_2) \right)$$

Où  $f$  est la densité d'une loi normale centrée réduite :  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

Comme vu précédemment, la valeur temps d'une option est une fonction décroissante des jours restants à la maturité et les options sont donc d'autant moins chères que leur échéance est proche ceci donne un Thêta qui est toujours négatif..

## Conclusion du chapitre 2

Le chapitre précédent a été servi comme introduction à notre problématique de calibration, dans lequel nous avons présenté succinctement le modèle le plus célèbre dans le monde du pricing à savoir le modèle de Black & Scholes, étudié les dépendances entre le prix, les grecques et les paramètres du modèle.

Malgré son succès, le modèle de Black & Scholes est souvent critiqué pour son inadéquation aux réalités des marchés financiers. Plusieurs familles de modèles ont été ainsi

proposées pour remédier à ses déficiences, conduisant notamment à relâcher l'hypothèse de volatilité constante, continuité des trajectoires des prix ...

Une de ces déficiences, objet de ce travail, est la dépendance au weekend dans la volatilité qui sera traitée dans le chapitre suivant.

---

## Chapitre 3 : Le calendar effect dans le cadre de volatilité constante

---

### Introduction

La simplicité d'utilisation du modèle de Black & Scholes pour l'évaluation des options et la mise au point de couverture a fait qu'il a énormément contribué à la démocratisation des options auprès d'un large public. Cependant il présente un inconvénient. En effet, un pricing Black & Scholes simple suppose qu'il y a de la variance pendant les jours fermés alors que dans la vraie vie il n'y en a pas ou alors il y en a très peu. Ceci donne des grecques qui sautent typiquement la veille des jours fermés, en l'occurrence la veille du vendredi, chose qui influence les stratégies de couverture des traders ainsi que leurs P&L journaliers.

### 1. Pricer avec un modèle Black&Scholes

#### 1.1. La variance des rendements

Les routines de pricing avec le modèle de Black & Scholes supposent en interne une diffusion du spot sur tous les jours (ouvrés ou non).

La variance implicite du rendement du spot entre la date de pricing  $t$  et la maturité  $T$  est donnée par

$$\text{Var} \left( \ln \left( \frac{S_T}{S_t} \right) \right) = \text{volBS}^2 (T - t)$$

Où :

$\text{volBS}$  est la volatilité implicite Black & Scholes .

$t$  et  $T$  sont exprimés en nombre d'années.

*Preuve :*

En effet et en se plaçant dans un univers risque neutre la dynamique de  $S$  à l'instant  $t$  (en l'absence de dividendes) est donnée par :

$$S_t = S_0 e^{rt - \frac{1}{2} \int_0^t \sigma_u^2 du + \int_0^t \sigma_u dw_u}$$

Et donc

$$\frac{S_T}{S_t} = e^{r(T-t) - \frac{1}{2} \int_t^T \sigma_u^2 du + \int_t^T \sigma_u dw_u}$$

D'où

$$\ln\left(\frac{S_T}{S_t}\right) = r(T-t) - \frac{1}{2} \int_t^T \sigma_u^2 du + \int_t^T \sigma_u dw_u$$

Qui suit une loi normale d'espérance  $r(T-t) - \frac{1}{2} \int_t^T \sigma_u^2 du$  et de variance  $\int_t^T \sigma_u^2 du$  puisque le processus  $(\sigma_t)$  est déterministe.

Finalement

$$\text{Var}\left(\ln\left(\frac{S_T}{S_t}\right)\right) = \text{volBS}^2(T-t) \quad \text{Avec} \quad \text{volBS}^2 = \frac{1}{T-t} \int_t^T \sigma_u^2 du$$

En particulier si  $\sigma_t = \sigma$ , alors  $\text{volBS}^2 = \sigma^2$

Prenons l'exemple le plus simple d'une option qui expire le mardi 29 Mars 2016, avec une volatilité implicite supposée constante égale à :  $\text{volBS} = 20\%$ .

➤ Supposons que la date de pricing est le lundi 21 Mars 2016, alors la variance jusqu'à la maturité est égale à :

$$\text{volBS}^2 \times \frac{8}{365} = 8.76712 \times 10^{-4}$$

➤ Supposons que la date de pricing est le jeudi 24 Mars 2016, alors la variance jusqu'à la maturité est égale à :

$$\text{volBS}^2 \times \frac{5}{365} = 5.47945 \times 10^{-4}$$

➤ Naturellement, pour la date de pricing 29 Mars 2016, la variance est nulle car il s'agit de la maturité de l'option.

On constate que la variance décroît linéairement avec le nombre de jours **calendaires** jusqu'à maturité.

Le graphe ci-dessous illustre l'évolution de la variance des rendements en fonction du nombre de jours calendaires jusqu'à maturité sur un calendrier qui contient des dates de pricing qui s'étalent du 28 Février 2017 au 21 Mars 2017, pour une date de maturité 21 Mars 2017 et une volatilité implicite Black & Scholes constante égale à 20%.

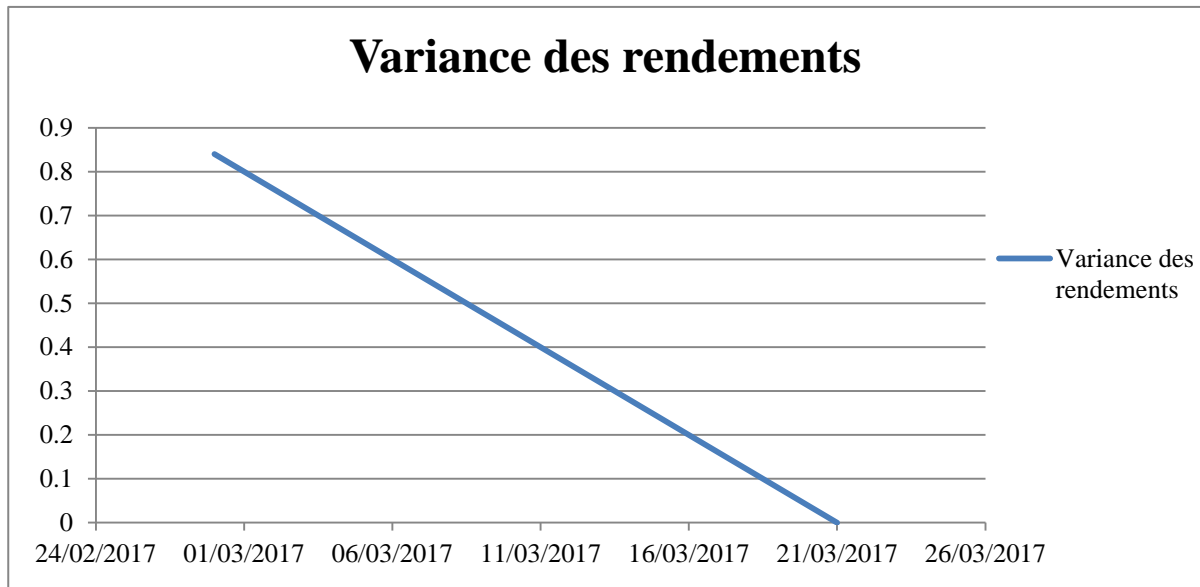


Figure 10: Variance des rendements par un modèle Black & Scholes simple

On constate effectivement que la variance décroît linéairement avec le nombre de **jours calendaires** restants à la maturité ceci dit que le modèle prévoit qu'il y a de la variance tous les jours en particulier pendant les jours fermés ce qui contredit la réalité.

### 1.2. Problème du Thêta

On a vu que si on utilise directement la volatilité implicite marquée par les traders dans le pricing, la variance décroît linéairement avec le nombre de jours calendaires. Ceci donne un thêta qui saute typiquement la veille des jours fermés, en particulier tous les vendredis. En effet considérons le delta hedging d'une option dans le modèle Black and Scholes :

$$\frac{dSt}{St} = rdt + \sigma dWt$$

L'évolution journalière du Thêta pur sur la valeur du portefeuille de couverture discounté entre deux dates futures  $t_-$  et  $t_+$  est donné par :

$$\Delta P = P(t_+, x, \sigma) - P(t_-, x, \sigma)$$

Où :

$x$  est le forward supposé constant entre  $t_-$  et  $t_+$ .

$t_-$  : désigne la clôture du jour  $j$  (la pricing date) et  $t_+$  la clôture du jour ouvré suivant  $j+1$  (appelé dans le jargon de la finance le «Thêta date»).

On a :

$$\Delta P = \int_{t_-}^{t_+} dP = \int_{t_-}^{t_+} \frac{\partial P}{\partial t} dt = \int_{t_-}^{t_+} \theta^{BS}(t, x, \sigma) dt$$

Or d'après l'EDP de BS sur le forward (2.2) :

$$\theta^{BS}(t, x, \sigma) = -\frac{1}{2} \sigma^2 x^2 \Gamma^{BS}(t, x, \sigma)$$

Donc :

$$\Delta P = - \int_{t_-}^{t_+} \frac{1}{2} \sigma^2 x^2 \Gamma^{BS} dt \approx -\$ \Gamma^{BS} \int_{t_-}^{t_+} \sigma^2 dt \approx -\$ \Gamma^{BS}(t_-, x, \sigma) \sigma^2 (t_+ - t_-)$$

Avec  $\$ \Gamma^{BS}(t_-, x, \sigma) = \frac{1}{2} x^2 \Gamma^{BS}(t, x, \sigma)$

L'écriture précédente est justifiée .En effet :

- Pour  $t_+ - t_- = 1$  jour (Thêta journalier du lundi au jeudi) nous pouvons faire l'hypothèse d'un forward quasi constant. Le sous jacent  $S_t$  varie peu et de manière constante sur  $[t_-, t_+]$  ( $S_{t_+} = S_{t_-} e^{r(t_+ - t_-)} \approx S_{t_-}$ ).
- Le Gamma étant financièrement parlant la fréquence de réajustement du portefeuille de couverture, on peut négliger ses mouvements dans cet intervalle.
- De la même manière, vu l'absence d'activités de marché pendant les jours fermés en général et les weekends en particulier, le gamma est nul les weekends.

Application

Considérons un call qui mature le 15 Mars 2022 avec un Strike  $K = 3319.61$  et un taux d'intérêt sans risque de 3% et avec les données de marché suivantes :

pricing dates	spot	implied volatility
28/02/2017	3319.61	19.67005
01/03/2017	3390.201	19.67582
02/03/2017	3384.706	19.7534
03/03/2017	3403.393	19.81057
06/03/2017	3387.462	19.93243
07/03/2017	3385.122	19.91344
08/03/2017	3389.622	19.87277
09/03/2017	3409.894	19.8471
10/03/2017	3416.269	20.04151
13/03/2017	3415.491	20.03427
14/03/2017	3399.435	20.01516
15/03/2017	3409.319	20.00901
16/03/2017	3439.963	19.95155
17/03/2017	3448.407	19.92808
20/03/2017	3437.476	19.86711
21/03/2017	3437.476	19.91122

Tableau 2: Données de marché pour le spot et la volatilité implicite

Le tableau ci-dessous donne les prix et les thêtas obtenu par un modèle Black & Scholes simple :

PricingDate	Price no CE	Theta no CE
28/02/2017	934,6592172	-0,157739623
01/03/2017	993,6855639	-0,156743541
02/03/2017	990,91016	-0,15756345
03/03/2017	1008,053995	-0,473455589
06/03/2017	996,9175364	-0,159260218
07/03/2017	993,986594	-0,159176885
08/03/2017	996,2082163	-0,15878806
09/03/2017	1012,279309	-0,158245096
10/03/2017	1022,993507	-0,479793476
13/03/2017	1020,921167	-0,159974577
14/03/2017	1006,315112	-0,16013547
15/03/2017	1014,132047	-0,159951116
16/03/2017	1038,238288	-0,158902469
17/03/2017	1044,409608	-0,475807484
20/03/2017	1032,048009	-0,15837168
21/03/2017	1032,927706	-0,158810643

Tableau 3: Prix et Thêtas journaliers sans calendar effect

La courbe de Thêta journalier de ce call est donnée par la figure ci-dessous :

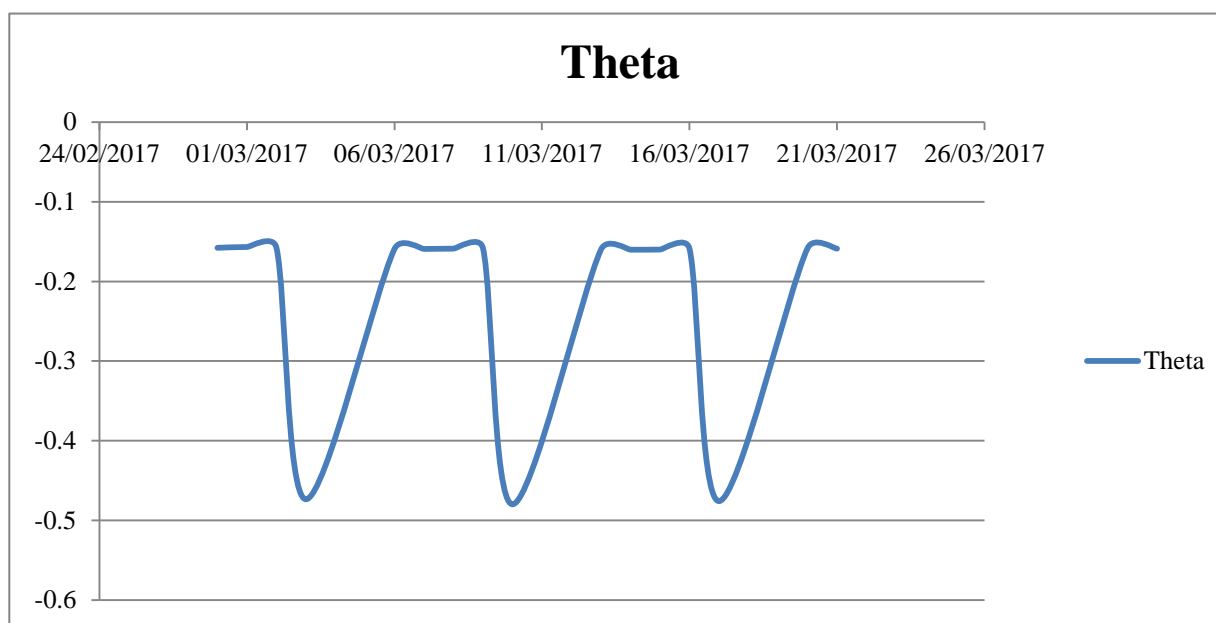


Figure 11: Thêta obtenu par un modèle Black & Scholes simple

On constate bien que le pricing par le modèle simple (1.1) donne des sauts de Thêta la veille des vendredis et affiche un Thêta en ce jour trois fois plus grand en valeur absolue qu'un thêta calculé un autre jour de la semaine ce qui est en ligne avec la formule du Thêta développée précédemment notamment car  $t_+ - t_- = 3$  jours et non 1 jour, mais est en contradiction avec le marché.

### 1.3. Des pertes non négligeables

Le trader est amené à calculer de façon journalière son résultat économique appelé P&L « Profits & Losses » ainsi qu'analyser et expliquer les écarts de ses P&L journaliers afin d'apprécier la rentabilité financière ou marge dégagée par son portefeuille et par la suite décider du sort de la position c'est-à-dire soit la maintenir ou la liquider.

La détention d'un portefeuille delta hedgé consiste à annuler la sensibilité d'une option aux variations du sous-jacent en annulant régulièrement le delta à l'aide d'une position sur le sous-jacent.

Une fois que le delta est annulé, il reste trois principaux risques :

- Le Gamma

- Le Thêta
- Le Vega

On peut ainsi écrire le P&L d'une position optionnelle delta hedgée comme suit :

$$\text{Daily P\&L} = \text{Gamma P\&L} + \text{Thêta P\&L} + \text{Vega P\&L} + \text{“autres”}$$

Dans “autres” on inclue le P&L généré par le financement du sous-jacent (qu'on va acheter si on vend un call sur action par exemple), le P&L dû aux mouvements de taux, les dividendes ainsi que les sensibilités d'ordre supérieur (vomma, etc.).

On peut écrire le P&L en fonction des lettres grecques :

$$\text{Daily P\&L} = 0.5 * \Gamma (\Delta S)^2 + \theta (\Delta t) + \nu (\Delta \sigma) + \dots$$

En utilisant le modèle de pricing (1.1) avec  $r$  et  $\sigma$  des constantes d'une part et en négligeant les variations de la volatilité et les sensibilités d'ordre supérieur d'autres part, l'équation devient :

$$\text{Daily P\&L} = 0.5 \Gamma (\Delta S)^2 + \theta (\Delta t)$$

Prenons le cas le plus simple où on considère les taux nuls alors on peut exprimer le thêta en fonction du gamma. En effet, à partir de l'EDP de Black & Scholes (2.1), dans un monde où les taux sont nuls, on peut écrire :

$$\left( \frac{\delta v}{\delta t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\delta^2 v}{\delta x^2} \right) = 0$$

Ou encore  $\theta = -0.5 \Gamma \sigma^2 S^2$

En réarrangeant les termes, on obtient :

$$\begin{aligned} \text{Daily P\&L} &= -0.5 \Gamma S^2 \left( \left( \frac{\Delta S}{S} \right)^2 - \sigma^2 \Delta t \right) \\ &= \frac{\theta}{\sigma^2} \left( \left( \frac{\Delta S}{S} \right)^2 - \sigma^2 \Delta t \right) \end{aligned}$$

On peut interpréter la quantité précédente de la manière suivante :

- $\frac{\Delta S}{S}$  est le rendement journalier. Son carré peut être interprété comme la variance réalisée.
- $\sigma^2 \Delta t$  est la variance implicite journalière.
- $0.5 \Gamma S^2$  est appelé le “dollar gamma”, et exprime l’impact du gamma et du prix du stock sur le P&L.

En synthèse, le P&L journalier d’une position optionnelle delta hedgée dépend de la différence entre la variance réalisée et la variance implicite (facturée au client), ajustée d’un facteur égal au « dollar gamma ».

Ainsi, le P&L dépend à la fois de l’écart entre volatilité implicite et réalisée, mais également de la trajectoire du sous-jacent (qui va impacter le gamma, Thêta et le prix du sous-jacent).

Et donc comme le P&L dépend du Thêta et que ce dernier affiche des sauts 3 fois plus importants tous les vendredis, le trader aura alors un P&L qui lui aussi saute tous les vendredis et de manière générale les veilles des jours fermés. Ceci va influencer ses stratégies de couverture sur cette position et causera probablement des pertes non négligeables.

D’où la nécessité d’une calibration du modèle de Black & Scholes pour éliminer ces sauts.

## 2. La volatilité Calendar Effect

### 2.1. La volatilité calendar effect dans le cadre d’un modèle BS

On considère le delta hedging d’une option dans le modèle :

$$\frac{dS_t}{S_t} = r dt + \sigma dW_t .$$

On aimerait appliquer une règle simple sur la volatilité de façon à trouver un modèle de volatilité implicite permettant d’éviter les sauts de thêta la veille des jours fermés de la forme  $\sigma_t(T) = \alpha(t, T) \sigma$ .

Pour rappel, le saut de Thêta pur sur la valeur du portefeuille de couverture discounté entre deux dates futures  $t$  et  $t_+$  est donné par :

$$\Delta P = P(t_+, x, \sigma_{t_+}(T)) - P(t_-, x, \sigma_{t_-}(T))$$

Où  $x$  est le forward supposé constant entre  $t_-$  et  $t_+$ .

On a

$$\begin{aligned} \Delta P &= \int_{t_-}^{t_+} dP = \int_{t_-}^{t_+} \frac{\partial P}{\partial t} dt + \frac{\partial P}{\partial \sigma_t(T)} d\sigma_t(T) \\ &= \int_{t_-}^{t_+} \left\{ \theta^{BS}(t, x, \sigma_t(T)) + \vartheta^{BS}(t, x, \sigma_t(T)) \frac{\partial \sigma_t(T)}{\partial t} \right\} dt \end{aligned}$$

Or d'après la relation Gamma-Vega (3.3) et l'EDP de BS sur le forward (2.2) on a :

$$\theta^{BS} = -\frac{1}{2} \sigma_t^2(T) x^2 \Gamma^{BS} \text{ et } x^2 \Gamma^{BS} \sigma_t(T)(T-t) = \vartheta^{BS}$$

Donc

$$\begin{aligned} \Delta P &= \int_{t_-}^{t_+} \left\{ \frac{1}{2} x^2 \Gamma^{BS}(t, x, \sigma_t(T)) \left( -\sigma_t^2(T) + 2\sigma_t(T)(T-t) \frac{\partial \sigma_t(T)}{\partial t} \right) \right\} dt \\ &\approx \$ \Gamma^{BS}(t_-, x, \sigma_{t_-}(T)) \int_{t_-}^{t_+} \left\{ -\sigma_t^2(T) + 2\sigma_t(T)(T-t) \frac{\partial \sigma_t(T)}{\partial t} \right\} dt \\ &\approx \$ \Gamma^{BS}(t_-, x, \sigma_{t_-}(T)) \int_{t_-}^{t_+} \frac{\partial(\sigma_t^2(T)(T-t))}{\partial t} dt \\ &\approx \$ \Gamma^{BS}(t_-, x, \sigma_{t_-}(T)) (\sigma_{t_+}^2(T)(T-t_+) - \sigma_{t_-}^2(T)(T-t_-)) \end{aligned}$$

Avec  $\$ \Gamma^{BS}(t_-, x, \sigma_{t_-}(T)) = \frac{1}{2} x^2 \Gamma^{BS}(t, x, \sigma_t(T))$  appelé dollars gamma.

Pour annuler la contribution dollar Gamma ( $\$ \Gamma^{BS}$ ) pendant les jours fermés et en particulier les weekends on peut générer des incréments de variance totale constants durant ces périodes c'est-à-dire  $\sigma_{t_+}^2(T)(T-t_+) - \sigma_{t_-}^2(T)(T-t_-) = 0$  ce qui donne :

$$\frac{\alpha(t_+, T)}{\alpha(t_-, T)} = \sqrt{\frac{T-t_-}{T-t_+}}$$

Si  $t_-$  est la date de fermeture le vendredi et  $t_+$  la date d'ouverture le lundi suivant. Le modèle :

$$\frac{dS_t}{S_t} = r dt + \sigma 1_{t \in O} dW_t \quad (1.3)$$

Où O est l'ensemble des jours ouvrés, a pour volatilité implicite  $\sigma_t(T) = \sigma \sqrt{\frac{1}{T-t} \int_t^T 1_{s \in O} ds}$  et génère des incréments de variance totale constants sur  $[t_-, t_+]$ .

C'est à dire :  $\sigma_{t_+}^2(T)(T - t_+) - \sigma_{t_-}^2(T)(T - t_-) = 0$

L'ajustement est donc bon en choisissant :

$$\alpha(t, T) = \sqrt{\frac{1}{T-t} \int_t^T 1_{s \in O} ds}$$

Et donc la volatilité calendar effect  $\sigma$  du nouveau modèle  $\frac{dS_t}{S_t} = r dt + \sigma 1_{t \in O} dW_t$  permettra de décrire un sous jacent dont les mouvements de volatilité sont faibles durant les jours fermés.

## 2.2. Les conventions de la fraction business

En utilisant le modèle ajusté (1.3) et afin de pouvoir utiliser la formule de Black & Scholes pour les calculer les prix des calls et des puts, il faut convertir la volatilité calendar effect  $\sigma$  en volatilité Black & Scholes via la relation :

$$\sigma_t(T) = \sigma \sqrt{\frac{1}{T-t} \int_t^T 1_{s \in O} ds} = \sigma \sqrt{\frac{\text{fraction Business}}{\text{fraction calendaire}}}$$

Avec :

-  $\text{fraction business} = \frac{\text{nombre de jours ouvrés entre } t \text{ et } T}{\text{nombre moyen de jours ouvrés de l'année}} = \int_t^T 1_{s \in O} ds$  C'est-à-dire le nombre de jours 'business' exprimé en fraction annuelle.

-  $\text{fraction calendaire} = \frac{\text{nombre de jours calendaires entre } t \text{ et } T}{\text{nombre moyen de jours calendaire de l'année}} = T - t$  C'est-à-dire le nombre de jours calendaires exprimé en fraction annuelle.

En finance le nombre moyen de jours calendaires dans l'année est approximé par 365 jours. Cependant pour le nombre moyen de jours ouvrés plusieurs conventions existent :

➤ **La convention interne**

C'est la convention utilisée par le pricer implémenté au sein de la société générale ATS pour calculer le prix des options vanilles. Elle consiste à calculer le nombre moyen de jours ouvrés de l'année comme rapport entre le nombre de jours ouvrés entre 01 janvier de l'année date de pricing et 31 décembre de l'année date de maturité, et année de maturité – année de pricing + 1.

➤ **La convention 252**

Elle consiste à calculer le calendar effect en base 252 (le nombre moyen de jours ouvrés de l'année = 252). Il faut noter que cette convention est simpliste et ne tiens pas compte des différences de nombre de jours ouvrés entre les différents marchés. Nous voulons donc explorer d'autres pistes plus réalistes.

➤ **La convention Average**

Elle consiste à calculer le nombre moyen de jours ouvrés de l'année comme moyenne entre plusieurs années (année de pricing + année de maturité par exemple). Il s'agit d'une généralisation de la convention interne.

➤ **La convention Rolling**

Elle consiste à calculer le nombre moyen de jours ouvrés de l'année d'une manière glissante en faisant le rapport entre le nombre de jours ouvrés entre pricing date et pricing date + n années tel que pricing date + n années > maturité, et n.

### 2.3. La variance des rendements

Comme vu précédemment un ajustement de volatilité permettant d'éviter les sauts du Thêta la veille des jours non ouvrés est donné par :

$$\sigma_t(T) = \sigma \sqrt{\frac{1}{T-t} \int_t^T 1_{s \in O} ds} = \sigma \sqrt{\frac{\text{fraction Business}}{\text{fraction calendaire}}}$$

En pratique la volatilité marquée par les traders est la volatilité implicite calendar effect  $\sigma$  coté sur le marché les jours business, on suppose implicitement donc qu'il n'y a pas de volatilité les jours fermés.

Afin de pouvoir utiliser la formule de black scholes, il faut convertir la volatilité calendar effect en volatilité implicite Black & Scholes  $\sigma_t(T)$ .

En théorie ce modèle permet de réduire les variations de variance des rendements entre deux instants de part et d'autres d'une période non ouvrée.

Considérons comme précédemment l'exemple simple d'une option qui expire le mardi 29 Mars 2016, avec une volatilité implicite supposée constante égale à :  $volCE = 20\%$  et travaillant avec la convention 252 alors :

- Supposons que la date de pricing est le lundi 21 Mars 2016, alors la volatilité Black & Scholes utilisés dans la formule de calcul des prix est égale à :

$$volBS = volCE \times \sqrt{\frac{\frac{6}{\frac{252}{8}}}{365}} = 0.208452, \text{ et donc on aura une variance du rendement égale}$$

à :

$$volBS^2 \times \sqrt{\frac{8}{365}} = 9.52 \times 10^{-4}$$

- Supposons que la date de pricing est le jeudi 24 Mars 2016, la volatilité Black & Scholes est égale à:

$$volCE \times \sqrt{\frac{\frac{3}{\frac{252}{5}}}{365}} = 0.186445, \text{ et donc la variance du rendement est égale à :}$$

$$volBS^2 \times \sqrt{\frac{5}{365}} = 4.76 \times 10^{-4}$$

- Naturellement, pour la date de pricing 29 Mars 2016, la variance est nulle.

Le graphe ci-dessous illustre les variations de la variance des rendements en fonction du nombre de jours calendaires jusqu'à maturité sur un calendrier qui contient des dates de pricing qui s'étalent du 28 Février 2017 au 21 Mars 2017, pour une date de maturité 21 Mars 2017 et une volatilité implicite calendar effect constante égale à 20%.

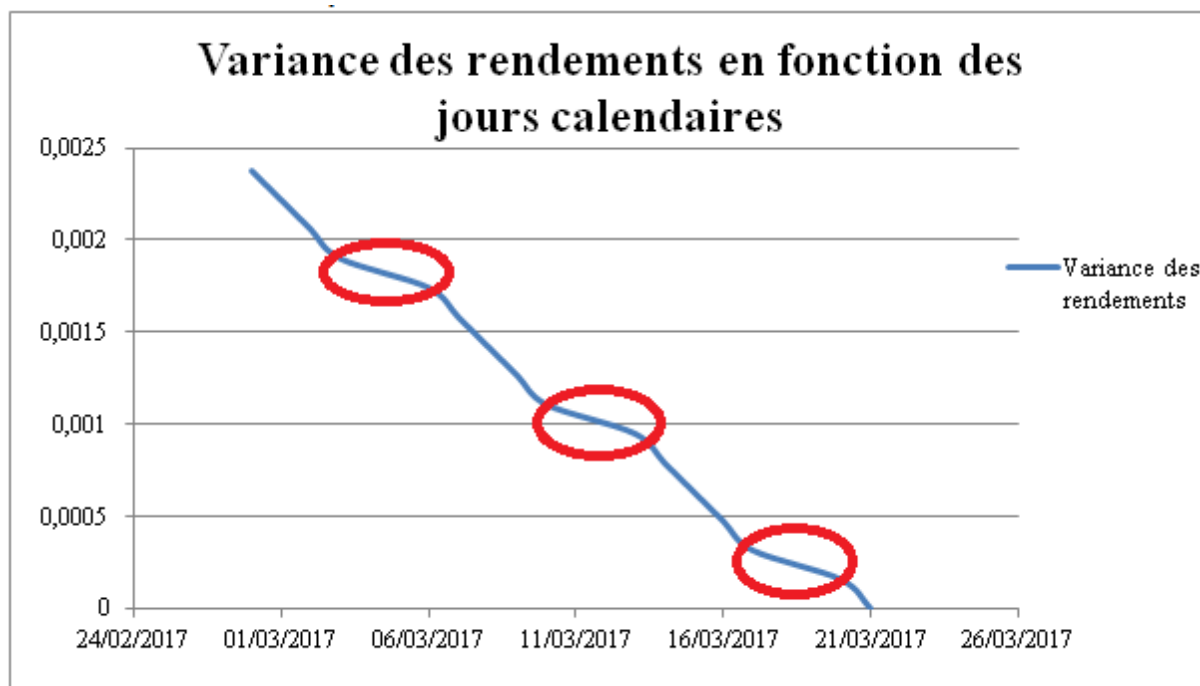


Figure 12 : Variance des rendements par le modèle de volatilité calendar effect

On constate que la variance décroît linéairement avec le nombre de jours **ouverts** restants à maturité et que les variations de variance des rendements entre deux instants de part et d'autres d'une période fermée sont réduites (zones rouges).

#### 2.4. Thêta corrigé

La nouvelle calibration calendar effect a permis de limiter la dépendance au weekend dans la volatilité et par la suite avoir un Thêta qui ne saute pas les vendredis.

#### Application

Prenons l'exemple du même call qui mature le 15 Mars 2022 avec un Strike  $K = 3319.61$  et un taux d'intérêt sans risque de 3% et en utilisant les mêmes données de marché que la section précédente.

Les résultats obtenus en utilisant les différentes conventions des fractions business sont les suivants:

- En utilisant la convention interne

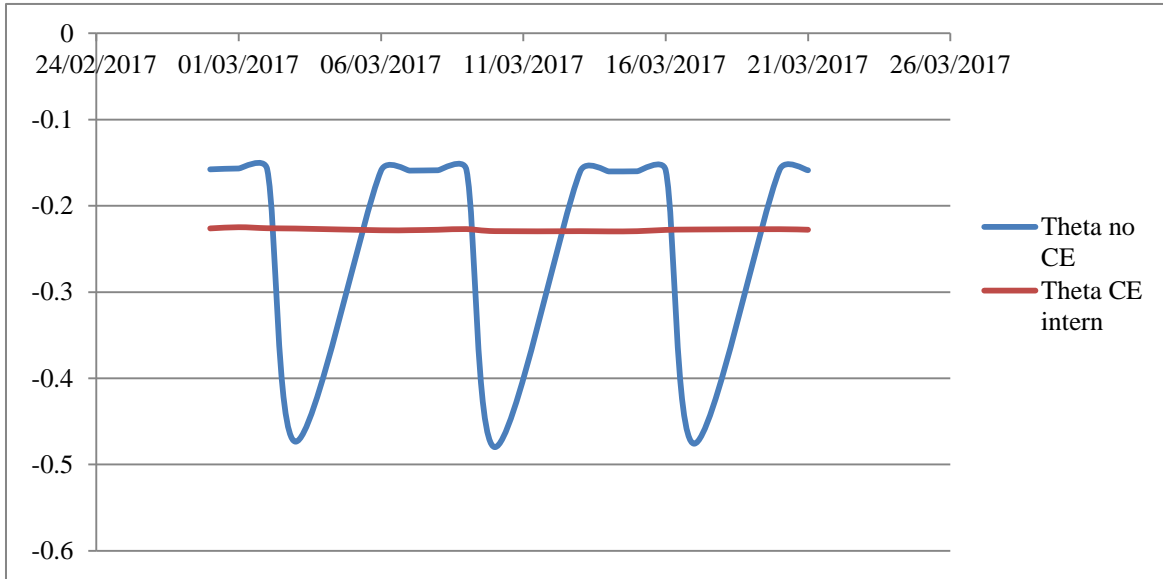


Figure 13: Thêta obtenu par le modèle de volatilité CE en utilisant la convention interne

**Remarques :**

L'ajustement calendar effect en utilisant la convention interne pour la fraction business donne un Thêta plutôt stable qui ne saute pas la veille des vendredis.

➤ En utilisant la convention 252

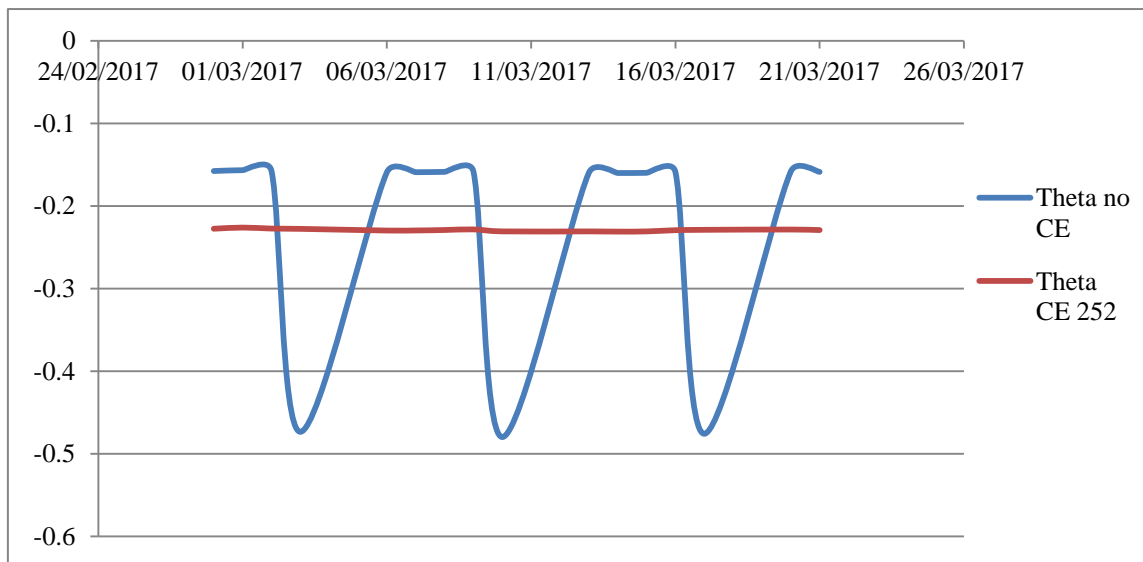


Figure 14: Thêta obtenu par le modèle de volatilité CE en utilisant la convention 252

**Remarques:**

La convention 252 utilisée donne un résultat similaire pour la courbe du Thêta journalier.

- En utilisant la convention Average

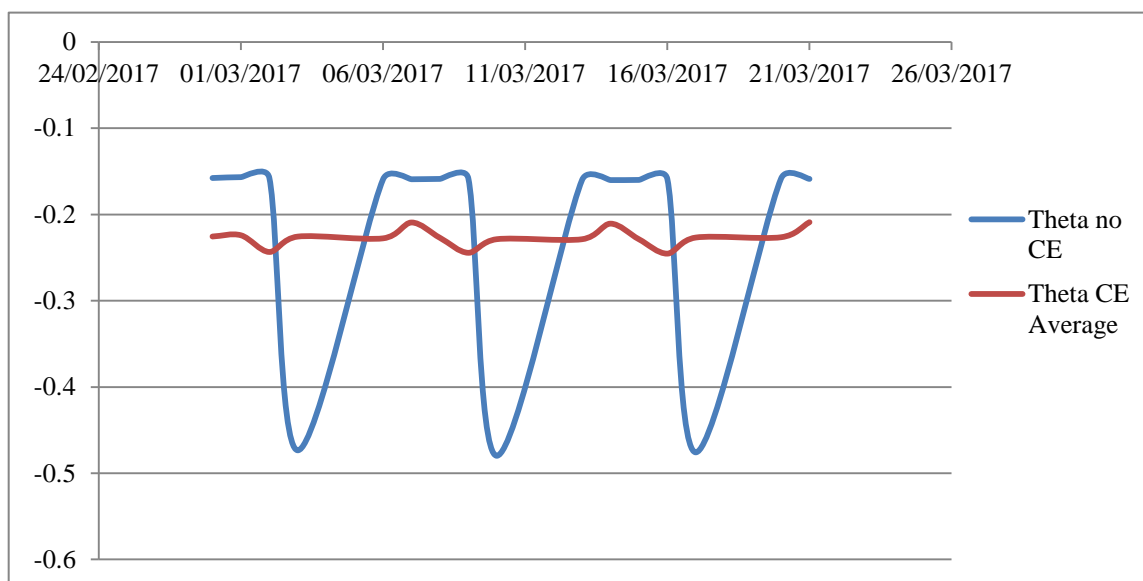


Figure 15: Thêta obtenu par le modèle de volatilité CE en utilisant la convention Average

**Remarques :**

La calibration calendar effect en utilisant la convention Average donne un Thêta qui saute de temps en temps avec une magnitude moins importante.

- En utilisant la convention Rolling

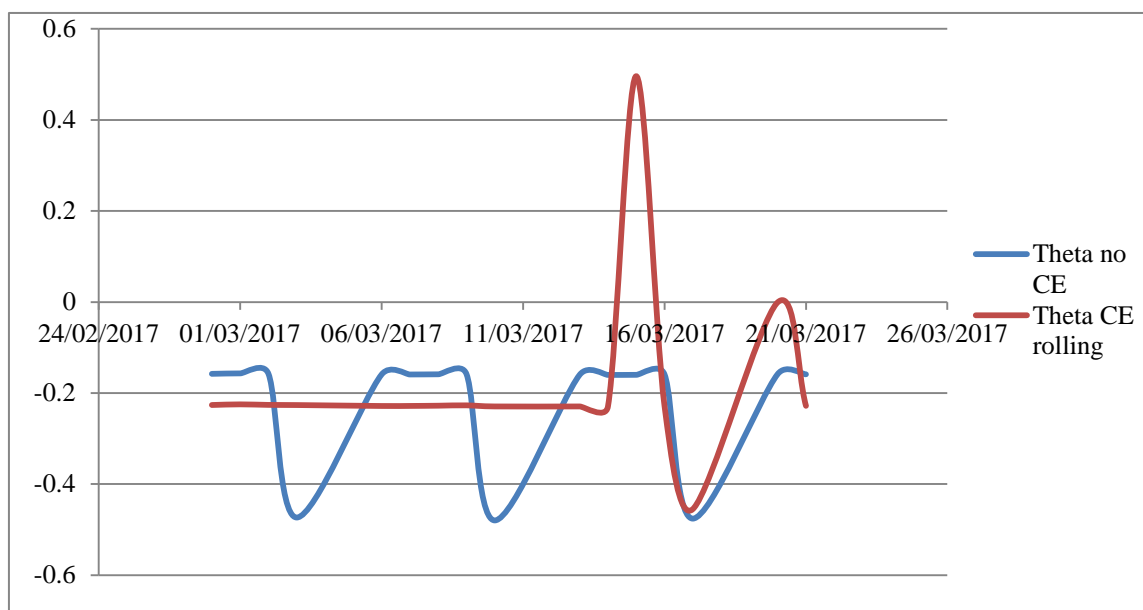


Figure 16: Thêta obtenu par le modèle de volatilité CE en utilisant la convention Rolling

**Remarques :**

L’ajustement par la convention Rolling s’avère moins bon et moins performant, ce dernier donne des résultats instables et affiche des sauts plus importants

En synthèse, l’ajustement calendar effect par l’utilisation de l’une des deux conventions 252 ou interne semble être bon et plus adapté aux perspectives des traders que les conventions Average et Rolling..

**Remarque importante :**

Les différents graphes montrent une baisse du niveau du Thêta après application de l’ajustement calendar effect, ceci est dû au fait qu’on utilise le même historique de volatilités implicites pour calculer les prix et les Thêtas avec et sans calendar effect ce qui donne des prix différents et par la suite des Thêta différents.

Supposons que nous utilisons la volatilité implicite  $\sigma_{SC}^{impl}$  pour calculer le prix d’un call de maturité T à l’instant t sans calendar effect alors  $\sigma_{SC}^{impl}$  représente la volatilité à injecter dans la formule fermée de BS pour reproduire le prix observé sur le marché à l’instant t, on a donc :

$$P_{market} = P_{BS}(\sigma_{SC}^{impl})$$

Pour appliquer l'ajustement calendar effect il faut chercher la nouvelle volatilité implicite calendar effect  $\sigma_{CE}^{impl}$  à utiliser pour limiter la dépendance au weekend et qui reproduit le prix observé sur le marché :

Donc :

$$P_{market} = P_{BS}(\sigma_t(T)) = P_{BS}\left(\sigma_{CE}^{impl} \sqrt{\frac{1}{T-t} \int_t^T 1_{s \in O} ds}\right) = P_{BS}(\sigma_{SC}^{impl})$$

Et donc  $\sigma_{CE}^{impl} < \sigma_{SC}^{impl}$  et l'utilisation de l'historique de volatilités  $\sigma_{SC}^{impl}$  et  $\sigma_{CE}^{impl}$  pour calculer respectivement le Thêta sans et avec calendar effect donnera le même niveau du Thêta.

## 2.5. Limites de la calibration calendar effect

### ➤ Problème du nouvel an

Prenons l'exemple d'un call qui mature le 20 Mars 2017 avec un strike  $K = 3048,773639$ , un taux d'intérêt sans risque de 3% et en utilisant des données de marché des spots et des volatilités pour un calendrier allant du 21 Mars 2016 au 17 Mars 2017. Il y a donc un changement d'année pendant la durée de vie du produit.

Le graphe ci-dessous illustre une partie de l'évolution du Thêta pour les dates qui vont du 20 Décembre 2016 au 13 Janvier 2017 du calendrier ainsi utilisé.

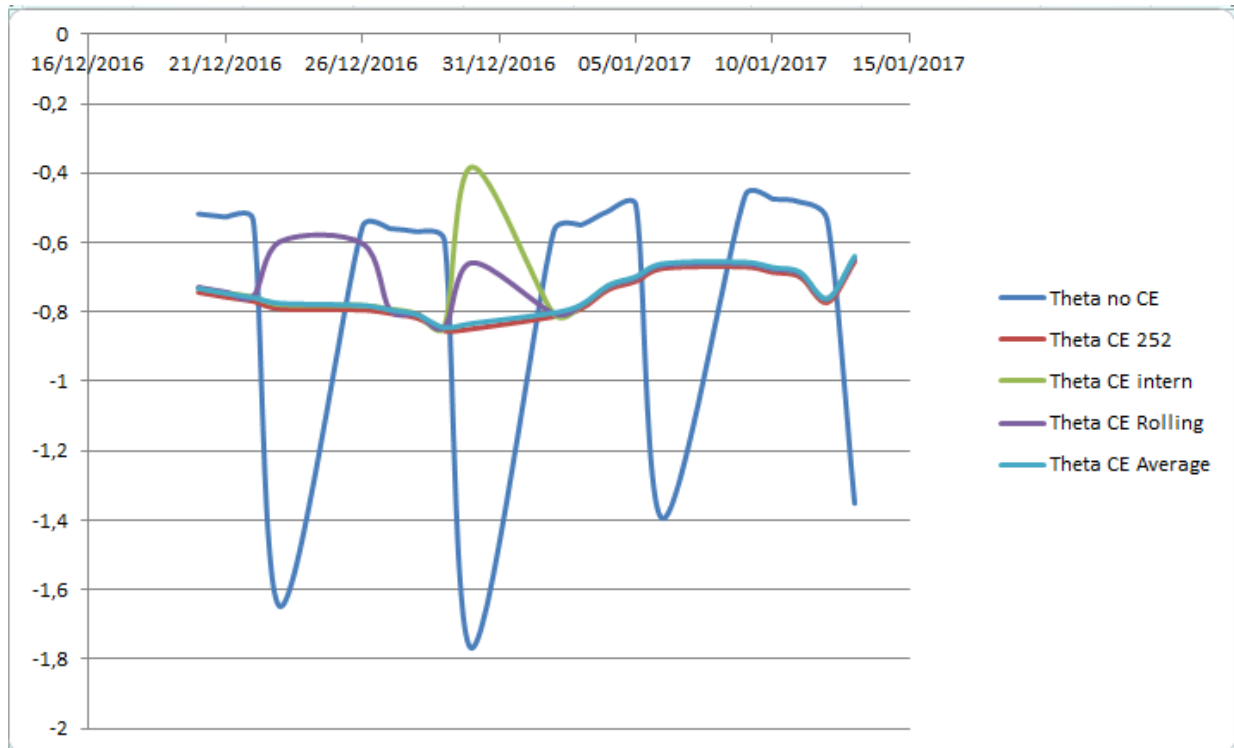


Figure 17: Thêta le dernier jour de l'année obtenu par le modèle de volatilité CE

On remarque que la convention interne donne un Thêta qui saute le dernier jour de l'année à savoir le 30 Décembre 2016.

➤ **Problème avec les options path-dependent**

L'approche calendar effect précédente est clairement possible dans un cadre d'options européennes, où l'on peut factoriser le saut de Thêta pur sous forme d'un dollar Gamma ( $\$ \Gamma^{BS}$ ) contre un incrément de variance totale grâce à la relation Gamma – Vêga :  $x^2 \Gamma^{BS} \sigma (T - t) = \vartheta^{BS}$ .

Ceci n'est plus possible avec les options path-dependent .En effet pour le cas des options barrière out c'est-à dire les options ne prenant plus l'effet si le sous-jacent franchit un certain niveau à la hausse (Up) ou à la baisse (Down). Le payoff d'un call barrière out est donné par :

$$\text{Payoff up} = \max (S_T - K ; 0) \times 1_{\{v_t, S_t < K\}} \quad : \text{Cas d'option barrière Up \& Out}$$

$$\text{Payoff Down} = \max (S_T - K ; 0) \times 1_{\{v_t, S_t > K\}} \quad : \text{Cas d'option barrière Down \& Out}$$

D'après [9]<sup>6</sup> la relation Gamma-Véga d'une option barrière out, pour un taux repo  $q = 0$ , est donnée par :

$$\frac{1}{2} \sigma \vartheta^{BS}(t, x, \sigma) = \frac{1}{2} \sigma^2 x^2 \Gamma^{BS}(t, x, \sigma) + r(T - t) \delta^{BS}(t, x, \sigma)$$

Il faut noter que dans la pratique, les options path-dependent ne sont pas évaluées avec un modèle à volatilité constante car elles dépendent de la volatilité pour plusieurs maturités et plusieurs strikes et donc une autre approche est nécessaire. A cet égard plusieurs recherches ont vu lumière comme celle du modèle à volatilité locale (modèle de Dupire) objet du chapitre 4.

### 3. Application aux swaps de variance

Il existe des produits dérivés sur des prix d'actions, taux, forex, matières premières, inflation, etc., et également, sur la volatilité de ces produits. En effet, il est possible d'acheter de la volatilité sur les marchés. Des exemples de ces produits : les swaps de variance, les swaps de volatilité, les options sur variance, les options sur volatilité...

#### 3.1. Pricing d'un swap de variance

L'exemple basique d'un produit sur variance est le swap de variance. Il s'agit d'un contrat forward qui permet de faire un pari sur l'évolution de la volatilité dans  $X$  jours et de se couvrir contre les mouvements volatilistes du sous-jacent. Le payoff d'un tel produit est :

$$(4.1) : \text{Payoff} = \text{Nominal} * (V_R - K)$$

Avec:

$$V_R = \frac{252}{N} \sum_1^{N-1} \log^2 \frac{S_{i+1}}{S_i} : \text{La variance annualisée réalisée}$$

$N$  : Le nombre de jours d'observations

$S_i$  : Le cours du sous-jacent à l'instant  $t_i$

$K_v$ : Le strike de variance

Dans le cas où nous travaillons en temps continu, le payoff d'un swap de variance devient :

---

<sup>6</sup> Fabio Mercurio . A Vega-Gamma relationship for European-style or barrier options in the Black & Scholes model.

$$(4.2) : \text{Payoff} = \text{Nominal} * \left( \frac{1}{T-t} \int_t^T \sigma_u^2 du - K_v \right)$$

$T - t$  : étant la période d'observation des  $\sigma_u$ .

En théorie, il existe deux possibilités pour valoriser ce produit, soit nous calculons simplement la valeur de la volatilité intégrée en utilisant un modèle donné, par exemple le modèle à volatilité stochastique introduit par Heston ou le modèle à volatilité locale que nous allons présenter dans le chapitre suivant, soit nous la répliquons par un portefeuille d'options.

Dans ce rapport nous allons suivre la deuxième approche c'est-à-dire essayer de répliquer la volatilité réalisée par un portefeuille d'options. Cela peut par exemple nous permettre de couvrir le portefeuille par des techniques classiques.

Pour ce faire on suppose le modèle générale de Black & Scholes avec volatilité déterministe sous la probabilité risque neutre :

$$\frac{dSt}{St} = rdt + \sigma_t dW_t .$$

En appliquant le lemme d'Itô à  $\ln(St)$  nous avons :

$$d\ln(S_t) = \left( r - \frac{1}{2} \sigma_t^2 \right) dt + \sigma_t dW_t$$

Et donc

$$\frac{1}{2} \sigma_t^2 dt = rdt + \sigma_t dW_t - d\ln(S_t) = \frac{dSt}{St} - d\ln(S_t)$$

$$\frac{1}{2} \int_t^T \sigma_u^2 du = \int_t^T \frac{dSu}{Su} - \int_t^T d\ln(S_t)$$

$$\frac{1}{2} \int_t^T \sigma_u^2 du = \int_t^T \frac{dSu}{Su} - \ln\left(\frac{S_T}{S_t}\right)$$

La valeur d'un investissement en  $\sigma_t$  est ainsi :

$$e^{-r(T-t)} \frac{1}{2} \int_t^T E(\sigma_u^2 / F_t) du = e^{-r(T-t)} E\left(\int_t^T \frac{dSu}{Su} / F_t\right) - e^{-r(T-t)} E\left(\ln\left(\frac{S_T}{S_t}\right) / F_t\right)$$

Comme  $\int_t^T \frac{dSu}{Su} = r(T-t) + \int_t^T \sigma_u dW_u$  et que le processus  $\left(\int_t^T \sigma_u dW_u\right)_t$  est une martingale d'espérance nulle alors :

$$E\left(\int_t^T \frac{dSu}{Su} / F_t\right) = r(T-t)$$

Et donc pour le premier terme nous avons :

$$e^{-r(T-t)} E\left(\int_t^T \frac{dSu}{Su} / F_t\right) = e^{-r(T-t)} r(T-t)$$

Pour répliquer le second terme, nous avons besoin d'introduire le résultat suivant connu sous la formule de Carr-Madan :

Tout payoff  $\varphi(S_T)$  avec  $S_T > 0$  peut être décomposé en une infinité de call et de put à différent strikes :

$$\varphi(S_T) = \varphi(F) + \varphi'(F)(S_T - F) + \int_0^F \varphi''(K) (K - S_T)^+ dK + \int_F^\infty \varphi''(K) (S_T - K)^+ dK$$

Où  $F = e^{r(T-t)} S_t$  le forward.

En multipliant par  $e^{-r(T-t)}$  et en passant sous l'espérance risque neutre on obtient pour toute valorisation d'option de payoff  $\varphi(S_T)$  :

$$e^{-r(T-t)} E(\varphi(S_T) / F_t) = e^{-r(T-t)} \varphi(F) + \int_0^F \varphi''(K) Put(T, K) dK + \int_F^\infty \varphi''(K) Call(T, K) dK$$

En appliquant ceci au payoff  $\varphi(x) = \ln\left(\frac{x}{S_t}\right)$  nous avons :

$$e^{-r(T-t)} E\left(\ln\left(\frac{S_T}{S_t}\right) / F_t\right) = e^{-r(T-t)} r(T-t) - \int_0^F \frac{Put(T, K)}{K^2} dK - \int_F^\infty \frac{Call(T, K)}{K^2} dK$$

La variance intégrée peut donc s'écrire comme :

$$\frac{e^{-r(T-t)}}{T-t} \int_t^T E(\sigma_u^2 / F_t) du = \frac{2}{T-t} \int_0^F \frac{Put(T, K)}{K^2} dK + \frac{2}{T-t} \int_F^\infty \frac{Call(T, K)}{K^2} dK$$

Finalement

$$e^{-r(T-t)} K_v = \frac{2}{T-t} \int_0^F \frac{Put(T, K)}{K^2} dK + \frac{2}{T-t} \int_F^\infty \frac{Call(T, K)}{K^2} dK$$

$$(4.3): K_v = \frac{2}{T-t} \int_0^F \frac{Put(T, K) \times e^{r(T-t)}}{K^2} dK + \frac{2}{T-t} \int_F^\infty \frac{Call(T, K) \times e^{r(T-t)}}{K^2} dK$$

Ce qui intéresse les traders en pratique ce n'est pas le prix du swap de variance mais plutôt la volatilité du pricing qui n'est autre que la racine carré du prix :

$$\sigma_P = \sqrt{K_v}$$

Une fois la volatilité de pricing calculée, nous devons la normaliser car le contrat initial donné par le payoff de la formule (4.1) n'est pas en temps continu. Il prévoit que la variance est observée uniquement les jours ouvrés en assumant qu'il y a 252 jours ouvrés par an. Et donc une normalisation de la volatilité de pricing est demandée pour la faire passer d'une « volatilité temps continu » en « volatilité 252 » en accord avec le contrat initial.

La volatilité normalisée  $\sigma_N$  du swap de variance est ainsi donnée par :

$$\sigma_N = \sigma_P \sqrt{\frac{\text{fraction calendrier}}{\text{fraction business}}}$$

Avec :

-  $\text{fraction business} = \frac{\text{nombre de jours ouvrés entre } t \text{ et } T}{252}$

-  $\text{fraction calendrier} = \frac{\text{nombre de jours calendaires entre } t \text{ et } T}{365}$

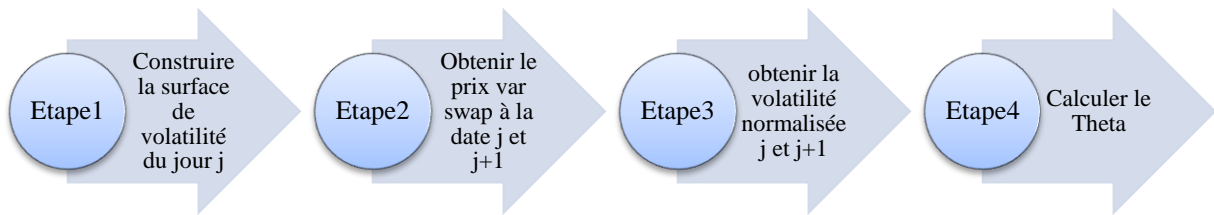
### 3.2. Thêta du swap de variance sans calendar effect

Le thêta journalier le jour j (pricing date) du swap de variance sera défini comme la différence entre la volatilité de pricing normalisée du jour j+1 (Thêta date) et celle du jour j toutes choses égales par ailleurs et en variant le temps seulement.

Et donc :

$$\text{Thêta}_j = \text{vol normalisée}_{j+1} - \text{vol normalisée}_j$$

Pour calculer le Thêta le jour j du swap de variance il faut passer par 4 étapes :



### Etape 1 : Construction de la surface de volatilité

Comme le montrent les données de marché, il n'y a pas sur un même sous-jacent une seule volatilité implicite, mais éventuellement plusieurs, qui dépendent du prix d'exercice et de la maturité.

Dans la pratique nous ne pouvons pas observer les prix d'options sur le marché pour un continuum de maturités et de strikes. Et donc nous ne pouvons observer la volatilité implicite  $\sigma(K, T)$  que pour quelques strikes et maturités.

Pour avoir la volatilité implicite pour n'importe quel strike et maturité on procède par interpolation et extrapolation en construisant ainsi pour une maturité donnée ce qu'on appelle un smile de volatilité ( $K \rightarrow \sigma(K, T)$ ), et pour un strike donné ce qu'on appelle structure par terme ( $T \rightarrow \sigma(K, T)$ ).

La représentation en trois dimensions de la volatilité implicite en fonction du temps et du strike est appelée surface de volatilité.

Il faut noter que l'interpolation et l'extrapolation sont faites de façon à respecter l'hypothèse fondamentale d'absence d'opportunité d'arbitrage et ceci en vérifiant que :

$$\frac{\delta^2 C}{\delta K^2} > 0 \text{ et } \frac{\delta C}{\delta T} > 0$$

En pratique, l'interpolation la plus utilisée est la spline cubique avec extrapolation linéaire ou tangente hyperbolique.

### Etape 2 : Obtenir le prix du swap de variance à la date j et j+1

Une fois la surface de volatilité à la date j est construite, nous pouvons en déduire pour une maturité T donnée les volatilités implicites pour différents strikes. Ces volatilités vont nous

servir pour calculer les prix des calls et des puts aux dates  $j$  et  $j+1$  via les formules fermés de BS et par la suite retrouver le prix du swap de variance donné par la formule (4.3) en ces dates en utilisant une méthode numérique pour l'intégration comme celle de Gauss-Legendre.

**Etape 3 : Obtenir la volatilité implicite du jour  $j$  et  $j+1$**

Une fois les prix sont calculés en  $j$  et  $j+1$ , il suffit de calculer leurs racines et les normaliser pour obtenir les volatilités normalisées swap de variance en ces dates.

**Etape 4 : Calculer le Thêta**

Le Thêta journalier du swap de variance est donné par :

$$Thêta_j = vol\ normslisée_{j+1} - vol\ normslisée_j$$

Application :

Prenons la surface de volatilité suivante et considérant qu'elle est constante pour toute les dates de pricing :

Strikes \ Maturités	21/10/2016	18/11/2016	16/12/2016	17/03/2017	16/06/2017	15/09/2017	15/12/2017	15/06/2018	21/12/2018	21/06/2019	20/12/2019	21/09/2021	21/09/2026
1,927	0,853275	0,845651	0,822103	0,729331	0,677133	0,639311	0,594705	0,544541	0,521839	0,497192	0,4901	0,450967	0,390363
4,8175	0,680821	0,679057	0,662724	0,622191	0,548991	0,521319	0,505041	0,451085	0,44248	0,415962	0,417956	0,394777	0,336071
7,708	0,572856	0,575603	0,564244	0,525614	0,470572	0,449602	0,434847	0,39531	0,368115	0,368115	0,367784	0,346376	0,305772
11,562	0,460541	0,469335	0,46385	0,432702	0,391918	0,378334	0,368046	0,341257	0,322588	0,322588	0,321444	0,304345	0,279185
13,489	0,410457	0,422714	0,420219	0,393581	0,358482	0,348343	0,34065	0,319171	0,304383	0,304383	0,303358	0,289024	0,269523
15,416	0,362339	0,378629	0,379314	0,357577	0,327818	0,321051	0,31613	0,299594	0,288542	0,288542	0,287954	0,276797	0,261721
16,3795	0,338777	0,357367	0,359737	0,340591	0,313457	0,308344	0,304877	0,290703	0,281463	0,281463	0,281217	0,27177	0,258437
17,343	0,31554	0,336637	0,340754	0,324281	0,299771	0,296277	0,294308	0,282423	0,274948	0,274948	0,275121	0,267428	0,255525
18,3065	0,292767	0,316549	0,322449	0,308701	0,286822	0,28489	0,284464	0,274782	0,269006	0,269006	0,26967	0,263729	0,252958
19,27	0,270824	0,297329	0,304988	0,293958	0,274708	0,274247	0,275402	0,267816	0,26365	0,26365	0,264862	0,260624	0,250709
20,2335	0,250426	0,279365	0,288635	0,280213	0,263554	0,264432	0,267192	0,261563	0,25889	0,25889	0,260687	0,258056	0,24875
21,197	0,232704	0,26321	0,273751	0,267674	0,253498	0,255536	0,259902	0,256055	0,254727	0,254727	0,257122	0,255961	0,247053
22,1605	0,218905	0,249498	0,26075	0,256565	0,244669	0,247642	0,253582	0,251306	0,251148	0,251148	0,254129	0,254277	0,24559
23,124	0,20965	0,23872	0,24999	0,247081	0,237151	0,240808	0,248248	0,247305	0,248127	0,248127	0,25166	0,252942	0,244337
24,0875	0,204511	0,230996	0,241638	0,239324	0,230964	0,235051	0,243874	0,244015	0,245624	0,245624	0,249657	0,251903	0,243269
26,0145	0,202428	0,223251	0,231594	0,228783	0,222296	0,226596	0,237706	0,239314	0,241963	0,241963	0,246816	0,25052	0,2416
28,905	0,208277	0,222981	0,227862	0,222429	0,216402	0,220058	0,233303	0,235791	0,239012	0,239012	0,244657	0,249648	0,239988
34,686	0,226084	0,234821	0,235553	0,225094	0,217188	0,218813	0,233218	0,235301	0,238053	0,238053	0,244318	0,250132	0,238722
38,54	0,237431	0,244126	0,243278	0,230364	0,221027	0,221442	0,235603	0,236933	0,239021	0,239021	0,245379	0,25118	0,238667
43,3575	0,250112	0,255132	0,252914	0,237604	0,226714	0,225858	0,23935	0,239666	0,24088	0,24088	0,247227	0,252784	0,239036
48,175	0,261244	0,265104	0,261891	0,244672	0,232489	0,230574	0,243273	0,242616	0,243001	0,243001	0,24928	0,254495	0,239664

**Tableau 4: Surface de volatilité**

Le tableau suivant donne les prix et les thêtas obtenu par un modèle Black & Scholes simple en utilisant la surface de volatilité ci-dessus, un spot égal à 10 et un taux sans risque de 3% pour les différentes dates de pricing.

pricingDate	normalized vol no CE	Theta no CE
01/12/2016	0,65	0,000232388
02/12/2016	0,65	-0,001487211
05/12/2016	0,65	0,000234406
06/12/2016	0,65	0,000236959
07/12/2016	0,65	0,000239527
08/12/2016	0,65	0,000242112
09/12/2016	0,65	-0,001493882
12/12/2016	0,65	0,000244015
13/12/2016	0,65	0,000246612
14/12/2016	0,65	0,000249225
15/12/2016	0,65	0,000251853
16/12/2016	0,65	-0,001501893
19/12/2016	0,65	0,000253617
20/12/2016	0,65	0,000256256
21/12/2016	0,65	0,000258911
22/12/2016	0,65	0,000261582
23/12/2016	0,65	-0,001511393
26/12/2016	0,65	0,000263187
27/12/2016	0,65	0,000265867
28/12/2016	0,65	0,000268564
29/12/2016	0,65	0,000271278
30/12/2016	0,65	-0,001522514
02/01/2017	0,65	0,000272706
03/01/2017	0,65	0,000275428
04/01/2017	0,65	0,000278167
05/01/2017	0,65	0,000280924
06/01/2017	0,65	-0,001535368
09/01/2017	0,65	0,000282165
10/01/2017	0,65	0,00028493
11/01/2017	0,65	0,000287714
12/01/2017	0,65	0,000290517
13/01/2017	0,65	-0,001550045
16/01/2017	0,65	0,000291561
17/01/2017	0,65	0,000294374
18/01/2017	0,65	0,000297206
19/01/2017	0,65	0,000300058
20/01/2017	0,65	-0,001566617
23/01/2017	0,64	0,000300904
24/01/2017	0,64	0,000303768
25/01/2017	0,65	0,000306654
26/01/2017	0,65	0,000309561
27/01/2017	0,65	-0,001585135
28/01/2017	0,64	0,000310307

Tableau 5: Prix et Thêtas du swap de variance sans calendar effect

La courbe de Thêta journalier de ce swap de variance est donnée par la figure ci-dessous :

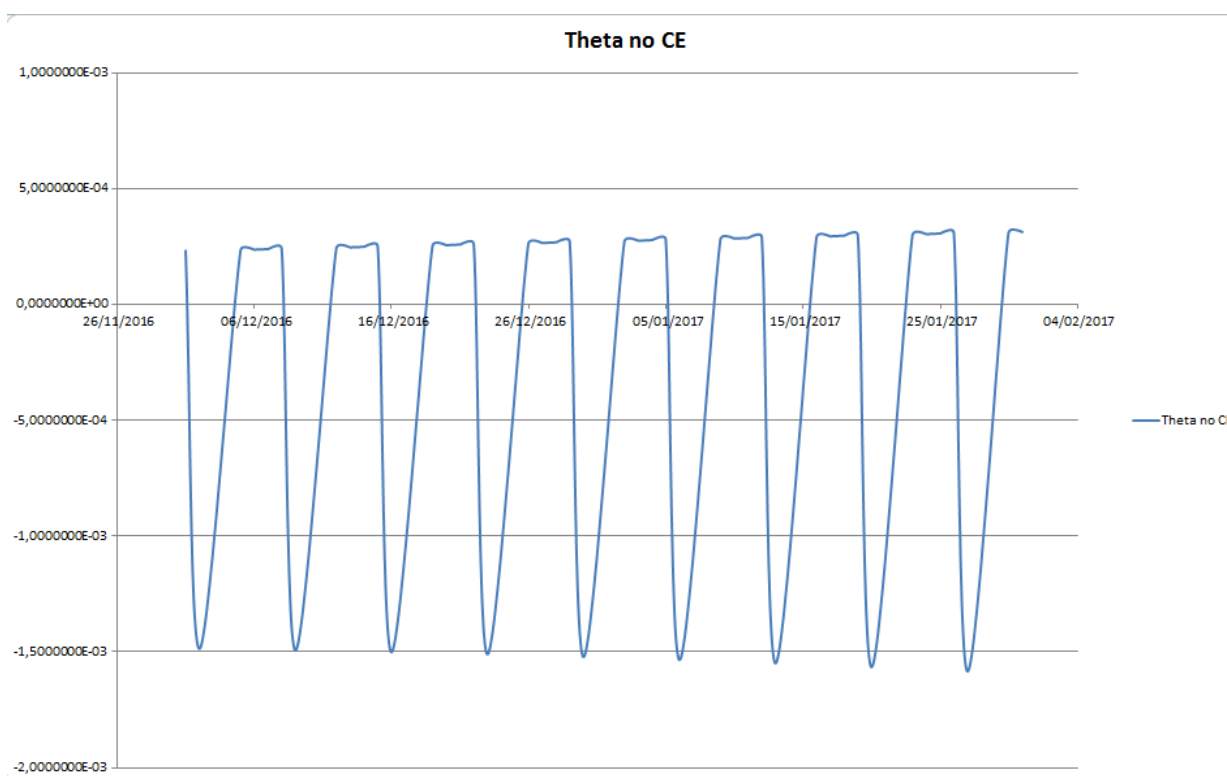


Figure 18: Thêta du swap de variance obtenu par un modèle BS simple

On constate bien que le pricing par le modèle BS simple donne un Thêta swap de variance positif qui saute la veille des vendredis.

### 3.3. Thêta du variance swap calendar effect

Le calcul du Thêta en utilisant le modèle de volatilité calendar effect se fait en suivant les mêmes étapes citées précédemment avec une seule différence : utiliser une surface de volatilité calendar effect et non pas une surface simple.

Pour obtenir une surface calendar effect à partir d'une surface simple, deux approches sont possibles.

- La première approche consiste à appliquer l'ajustement calendar effect aux volatilités implicites cotées sur le marché et interpoler / extrapoler ensuite.
- Une deuxième approche qui consiste à interpoler / extrapoler les volatilités implicites cotées et appliquer le modèle de volatilité calendar effect sur chaque point de la surface.

Pour des fins d'optimisations des calculs et d'efficacité, la première approche s'avère performante et non coûteuse car il s'agit de l'ajustement d'un nombre fini de volatilités implicites contrairement à la deuxième approche.

Dans ce rapport nous allons donc suivre la première approche.

Les résultats obtenus en utilisant la convention interne et 252 pour la fraction business sont les suivants:

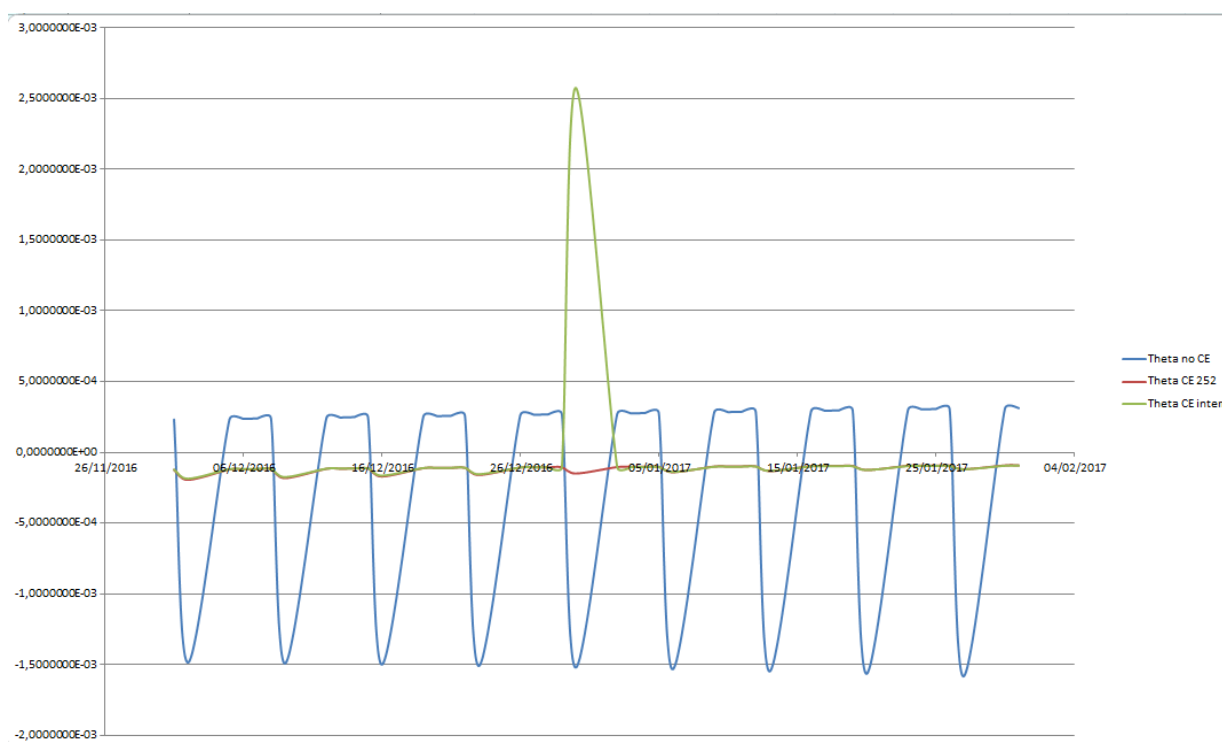


Figure 19: Thêta du swap de variance par l'ajustement calendar effect

L'ajustement calendar effect en utilisant la convention interne ou 252 pour la fraction business permet de corriger le signe du Thêta et donne un Thêta stable qui ne saute pas la veille des vendredis.

Comme pour le cas d'un call européen, le modèle de volatilité calendar effect affiche un saut du Thêta le dernier jour de l'année pour la convention interne.

### Conclusion du chapitre 3 :

Dans ce chapitre, nous avons vu dans un premier lieu le modèle à volatilité calendar effect qui se présente comme une méthode commode permettant de décrire un sous jacent qui ne

diffuse pas les jours fermés et nous avons vu ses avantages par rapport à un modèle de BS simple. Cependant, tel qu'il est défini, nous avons vu qu'il présente certains inconvénients à savoir le problème du nouvel an rencontré lors de l'utilisation de la convention interne et son insuffisance dans le cadre des options path-dependent d'où la nécessité d'une autre approche comme celle de volatilité locale présentée dans le chapitre suivant.

Dans un second lieu nous avons vu les différentes étapes à suivre pour implémenter le modèle à volatilité calendar effect dans le cadre des swaps de variance.

---

## Chapitre 4 : Le calendar effect dans le cadre de la volatilité locale

---

### Introduction

Le modèle à volatilité constante ou déterministe n'est pas un modèle conforme à ce qui se passe en réalité dans le marché. En effet, comme vu précédemment dans la section sur les swaps de variance, la volatilité implicite obtenue en inversant la formule de Black & Scholes sur les prix du marché n'est pas constante comme le modèle le prévoit mais une fonction de la maturité et du Strike. D'une part à strike fixé la volatilité implicite varie avec la maturité de l'option considérée. C'est ce qu'on appelle la structure par terme de la volatilité implicite. Et d'autre part, à maturité fixée, la volatilité implicite dépend du strike. C'est le smile de volatilité. Le modèle Black & Scholes simple à volatilité constante ou déterministe est compatible avec le phénomène de structure par terme de volatilité mais n'est pas capable de reproduire le smile constaté en pratique

#### 1. Présentation du modèle à volatilité locale

On a vu que la dynamique risque-neutre de Black-Scholes et Merton n'est pas compatible avec le phénomène de smile qui existe sur tous les marchés d'options d'où la nécessité de trouver une diffusion risque neutre unique compatible avec ce qui se passe réellement sur le marché.

Dans la suite nous allons nous poser la question dans l'autre sens et considérer les prix de marché d'options sur un sous-jacent  $S$  comme donnés. D'abord nous allons voir qu'il est possible de reconstruire la densité risque-neutre de  $S_T$  à partir des prix des options de maturité  $T$ . Puis qu'on peut trouver, en poussant plus loin l'analyse, une diffusion risque-neutre unique compatible avec l'ensemble des prix d'options.

##### 1.1. Distribution risque neutre implicite.

Dans cette partie on raisonne sur une maturité  $T > 0$  fixée. Et on suppose connaître les prix de tous les calls  $(C(K))_{K \in [0, +\infty[}$  ou de tous les puts  $(P(K))_{K \in [0, +\infty[}$  ce qui revient au même.

On note  $\varphi_T$  la densité risque neutre de  $S_T$  c'est-à-dire  $\varphi_T: R \rightarrow [0,1]$  telle que  $\varphi_T(x)dx = Q(S_T \in [x, x + dx])$ . On a par construction  $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_T(x) = 1$

Pour un call de strike  $K$ , on a

$$C(K) = e^{-rT} E((S_T - K)^+) = e^{-rT} \int_K^{+\infty} (x - K) \varphi_T(x) dx$$

En dérivant cette égalité une première fois par rapport à  $K$ , on obtient :

$$\frac{\partial C}{\partial K}(K) = - e^{-rT} \int_K^{+\infty} \varphi_T(x) dx$$

Puis une deuxième fois nous obtenons :  $\frac{\delta^2 C}{\delta K^2}(K) = e^{-rT} \varphi_T(K)$

Et donc  $\varphi_T(x) = e^{rT} \frac{\delta^2 C}{\delta K^2}(x)$

On a obtenu la densité  $\varphi_T$  de  $S_T$  à partir des prix des calls sur  $S$ . Cette formule est appelée formule de Breeden-Litzenberger. La connaissance des prix des calls pour un continuum de strike,  $(C(K))_{K \in [0, +\infty[}$  permet donc de reconstruire sans ambiguïté la densité risque neutre du sous-jacent en  $T$ . La distribution ainsi calculée est appelée distribution implicite.

## 1.2. EDP de Dupire

La connaissance des densités  $(\varphi_T)_T$  ne permet pas de déterminer de manière unique les caractéristiques de processus  $S$ .

La première idée de Dupire, est de restreindre son analyse à une diffusion risque neutre de la forme :

$$\frac{dS_t}{S_t} = r_t dt + \sigma(t, S_t) dW_t$$

Où  $\sigma$  (volatilité instantanée) est une fonction de volatilité locale que l'on cherche à déterminer à partir des prix des calls vanilles et qui permettra de reproduire à une date donnée, les prix observés des calls pour tous les strikes et toutes les maturités.

Il est intéressant de rappeler d'abord que le prix  $v = v(t, S_t)$  d'une option européenne de payoff  $h(S_T)$  en  $T$  vérifie une équation aux dérivées partielles qui ressemble à celle de Black & Scholes et Merton.

$$E) \begin{cases} \frac{\delta v}{\delta t}(t, x) + r_t x \frac{\delta v}{\delta x}(t, x) + \frac{1}{2} \sigma^2(t, x) x^2 \frac{\delta^2 v}{\delta x^2}(t, x) = r_t v(t, x), & (t, x) \in [0, T) \times ]0, +\infty) \\ v(T, x) = h(x) \end{cases}$$

Cette équation est aussi appelée équation backward car elle se résout en partant de la maturité  $T$  jusqu'à la date de pricing  $t$  dans l'espace  $(t, S_t)$ . En particulier pour un call cette équation devient :

$$\begin{cases} \frac{\delta C}{\delta t}(t, x) + r_t x \frac{\delta C}{\delta x}(t, x) + \frac{1}{2} \sigma^2(t, x) x^2 \frac{\delta^2 C}{\delta x^2}(t, x) = r_t C(t, x), & (t, x) \in [0, T) \times ]0, +\infty) \\ C(T, x) = (x - K)^+ \end{cases}$$

Et on est tenté d'écrire

$$\frac{1}{2} \sigma^2(t, x) = \frac{r_t C - \frac{\delta C}{\delta t} - r_t x \frac{\delta C}{\delta x}}{x^2 \frac{\delta^2 C}{\delta x^2}}$$

Mais sur le marché on ne connaît que les prix des calls au point  $(t, S_t)$ . C'est insuffisant pour calculer les dérivées partielles qui interviennent dans la formule. On ne peut pas donc retrouver la volatilité locale de cette façon. Il faut trouver un autre point de départ.

La seconde idée de Dupire est de se servir de l'équation de Fokker-Planck (voir l'annexe).

Dans notre cas la fonction de densité est  $f: (x, T) \rightarrow f(x, T) = \varphi_T(x)$  et l'équation s'écrit :

$$\begin{cases} \frac{\delta f}{\delta T} + r_T \frac{\delta}{\delta x}(x f) - \frac{1}{2} \frac{\delta^2}{\delta x^2}(x^2 \sigma^2(x, T) f) = 0, & (x, T) \in ]0, +\infty) \times [t, +\infty) \\ f(x, t) = \delta(S_t - x) \end{cases}$$

Où  $\delta$  est la fonction delta de Dirac qui permet de définir la condition initiale sur la densité. En effet, si on se place à l'instant initial  $t$ ,  $S_t$  est connu et on a

$$f(x, t) = \delta(S_t - x)$$

En combinant cette équation avec la formule de Breeden-Litzenberger, on obtient une équation forward portant sur le prix des calls. Cette équation est appelée équation de Dupire :

$$\begin{cases} \frac{\delta C}{\delta T} = \frac{1}{2} K^2 \sigma^2(K, T) \frac{\delta^2 C}{\delta K^2} + r_T (C - K \frac{\delta C}{\delta K}), & (x, T) \in ]0, +\infty) \times [t, +\infty) \\ C(K, t) = (S_t - K)^+ \end{cases}$$

Où  $C = C(K, T)$  est un prix de call non actualisé c'est-à-dire

$$C(K, T) = \hat{E} [(S_T - K)^+]$$

Il s'agit bien d'une équation forward qui se résout dans l'espace  $(K, T)$  en partant de  $t$  et portant sur l'ensemble des prix des calls, les conditions initiales  $(S_t, t)$  étant fixées. La preuve repose sur une intégration de l'équation de Fokker-Planck dans laquelle on remplace  $f$  par son expression en fonction de  $\frac{\delta^2 C}{\delta K^2}$ . (Voir annexe).

Enfin, de l'équation de Dupire, on déduit l'unique fonction de volatilité locale compatible avec les prix de marché (coefficient de diffusion implicite). C'est la formule de Dupire.

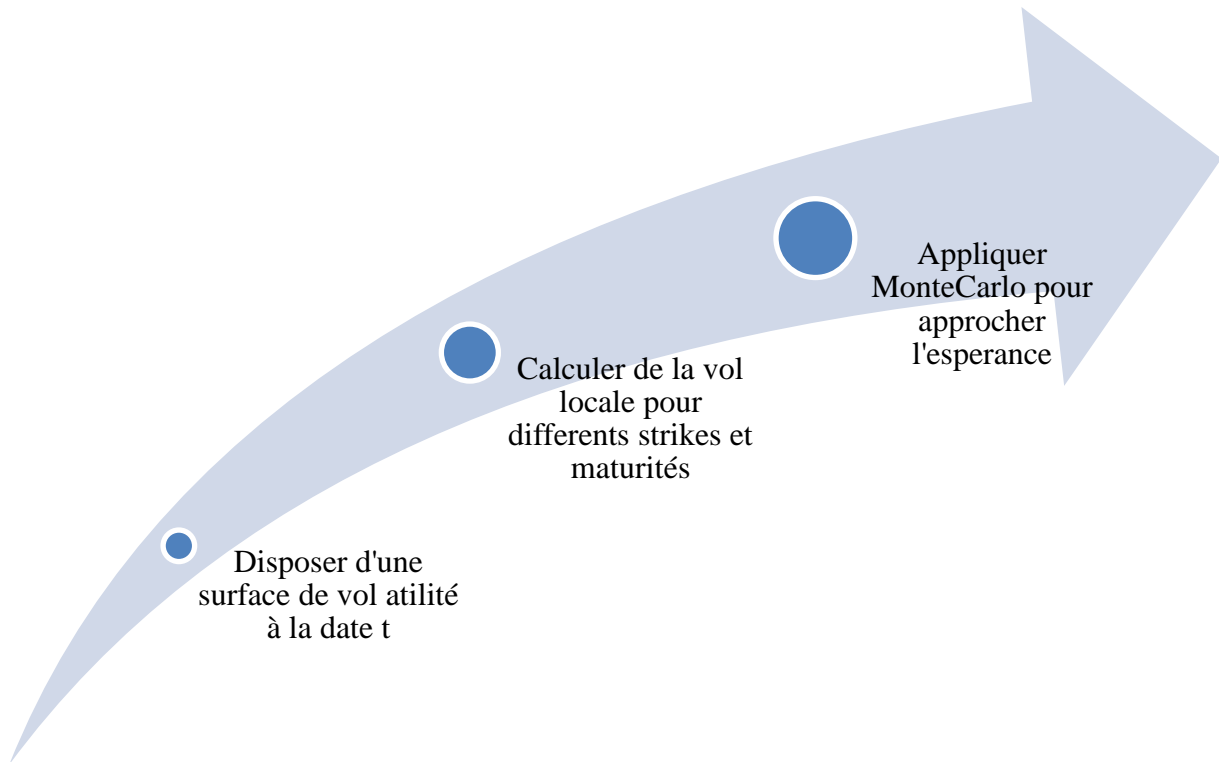
$$(K, T) \rightarrow \sigma_L^2(K, T) = 2 \frac{\frac{\delta C}{\delta T} - r_t(C - K \frac{\delta C}{\delta K})}{K^2 \frac{\delta^2 C}{\delta K^2}}$$

Remarquons que  $\sigma_L(\cdot)$  ainsi définie peut être calculée dès qu'on dispose d'un ensemble régulier de prix d'options. Comme à **une date donnée** on peut observer les prix d'options de plusieurs strikes et maturités, cette équation peut être utilisée pour recalculer la fonction de volatilité.

## 2. Pricer des options européenne en utilisant le modèle à volatilité locale

Le pricing des calls et des puts en utilisant le modèle à volatilité locale nécessite l'utilisation d'une méthode numérique pour approcher l'espérance puisque les formules fermés de BS pour les calls / puts citées dans le deuxième chapitre ne sont plus valables.

Le pricing d'un call européen de Strike  $K$  et de maturité  $T$  à la date  $t$  passe par 4 étapes :



## 2.1. Construction de la surface de volatilité à la date t

La construction de la surface de volatilité est identique à la description présentée dans le cadre des swaps de variance élaborés au chapitre 3.

## 2.2. Calcul de la volatilité locale

Une fois la surface de volatilité à l'instant t est construite, nous pouvons calculer les dérivées partielles. Dans cette section, nous allons procéder à la résolution numérique de l'équation de Dupire par différences finies en choisissant un schéma numérique adéquat et en remplaçant les dérivées partielles par des approximations discrètes de type différence progressive, centrée, rétrograde, etc.

Le Schéma le plus utilisé dans la littérature est celui de Crank-Nicolson pour sa consistance d'ordre deux en temps et en espace, et sa convergence inconditionnelle.

Posons :

- $C(T_j, K_n) = C_{j,n}$  la valeur du call à la date d'évaluation t, de Strike  $K_j$  et de maturité  $T_j$ .

- $\Delta T = k$  : le pas à choisir pour le temps
- $\Delta K = h$  : le pas à choisir pour l'espace

Le schéma de Crank-Nicolson consiste à évaluer les dérivées partielles au point  $(T_j + \frac{\Delta T}{2}, K_n)$  de la grille et elles seront approximées par :

$$\frac{\delta C}{\delta T} \approx \frac{C_{j+1,n} - C_{j,n}}{\Delta T}$$

$$\frac{\delta C}{\delta K} \approx \frac{C_{j,n+1} - C_{j,n-1} + C_{j+1,n+1} - C_{j+1,n-1}}{4\Delta K}$$

$$\frac{\delta^2 C}{\delta K^2} \approx \frac{C_{j,n+1} - 2C_{j,n} + C_{j,n-1} + C_{j+1,n+1} - 2C_{j+1,n} + C_{j+1,n-1}}{2\Delta K^2}$$

Les différences finies ne permettent pas d'approcher les dérivées partielles sur un intervalle infini (c'est généralement le cas des méthodes numériques). On se place donc sur  $(T_j, K_j) \in [t, T] \times [k_{\min}, k_{\max}]$ , où  $t$  est la date d'évaluation,  $T$  une date de maturité donnée,  $k_{\min}$  et  $k_{\max}$  sont choisis de façon à ce que :

$P(S < k_{\min}) = 0.5\%$  et  $P(S > k_{\max}) = 0.5\%$  et donc nous aurons 99% de chance que le spot  $S$  soit dans l'intervalle  $[k_{\min}, k_{\max}]$ .

Pour  $M \in \mathbb{N}^*$  On pose alors :

$$\Delta T = k = \frac{T-t}{M}, \quad \Delta K = h = \frac{k_{\max} - k_{\min}}{N}$$

$$T_j = t + jk \quad 0 \leq j \leq M, \quad K_n = k_{\min} + nh \quad 0 \leq n \leq N$$

On peut donc écrire notre schéma comme suit :

$$\frac{C_{j+1,n} - C_{j,n}}{\Delta T} - r \left( C_{j,n} - K_n \frac{C_{j,n+1} - C_{j,n-1} + C_{j+1,n+1} - C_{j+1,n-1}}{4\Delta K} \right) - \frac{\sigma_{j,n}^2}{4\Delta K^2} K_n^2 (C_{j,n+1} - 2C_{j,n} + C_{j,n-1} + C_{j+1,n+1} - 2C_{j+1,n} + C_{j+1,n-1}) = 0$$

Pour  $n \in [1, N-1]$  on en déduit le vecteur de volatilités  $(\sigma_{j,1}, \sigma_{j,2}, \dots, \sigma_{j,N-1})$  qu'on interpole pour obtenir le smile de volatilité à maturité  $j$ .

On répète ensuite l'opération pour différentes maturités  $j \in [1, M]$  pour obtenir des smiles pour différentes maturités.

Il ne reste alors qu'à interpoler sur l'axe des maturités pour obtenir la surface de volatilité à la date  $t$ .

### 2.3. Simulation Monte Carlo

Le principe de la méthode Monte Carlo est de :

- Simuler la valeur de  $S$  de manière aléatoire (en fonction des différents paramètres de la diffusion)
- Déduire les niveaux de spot à l'échéance
- Calculer l'espérance du payoff

#### 2.3.1. Simulation du modèle de Black & Scholes

On a vu que le modèle de Black & Scholes à volatilité locale suppose que l'évolution du prix de l'actif est régi par l'équation différentielle stochastique suivante :

$$\frac{dS_t}{S_t} = r dt + \sigma(t, S_t) dW_t$$

En appliquant le lemme d'Itô à  $\ln(S_t)$  nous avons :

$$d\ln(S_t) = \left( r - \frac{1}{2} \sigma^2(t, S_t) \right) dt + \sigma(t, S_t) dW_t$$

Donc

$$S_T = S_t e^{r(T-t) - \frac{1}{2} \int_t^T \sigma^2(u, S_u) du + \int_t^T \sigma(u, S_u) dW_u}$$

Soit  $t = t_0 < t_1 < t_2 \dots < t_n = T$  une subdivision de  $[t, T]$ . On cherche à simuler une trajectoire de  $S_t$  en les points de la subdivision, c'est-à-dire que l'on cherche la loi du processus discret  $(S_{t_i}, i = 0, \dots, n)$ .

Notons bien que cette méthode de simulation n'engendre pas d'erreur de discrétisation sur le processus discret.

Pour un pas  $h = \Delta t$  on écrit :

$$S_{t+\Delta t} = S_t e^{r\Delta t - \frac{1}{2} \int_t^{t+\Delta t} \sigma^2(u, S_u) du + \int_t^{t+\Delta t} \sigma(u, S_u) dw_u}$$

En considérant  $\sigma(u, S_u)$  constante sur  $[t, t + \Delta t]$  égale à  $\sigma(t, S_t)$  alors :

$$S_{t+\Delta t} = S_t e^{r\Delta t - \frac{1}{2} \sigma^2(t, S_t) \Delta t + \sigma(t, S_t) (w_{t+\Delta t} - w_t)}$$

Or :  $w_{t+\Delta t} - w_t \sim N(0, \Delta t)$

Donc

$$S_{t+\Delta t} = S_t e^{r\Delta t - \frac{1}{2} \sigma^2(t, S_t) \Delta t + \sigma(t, S_t) \sqrt{\Delta t} G_t}$$

Avec les  $G_t$  sont des variables aléatoires normales centrées réduites.

Algorithme de simulation :

- Calcul de  $\Delta t$
- Initialisation de  $S \rightarrow S_t$  (donnée initiale)
- Pour chaque date  $t_i$  entre  $t$  et  $T$ 
  - Générer une normale  $G$  centrée réduite
  - Récupérer la volatilité  $\sigma(t_{t+hj}, S_{t+hj})$  à partir de la fonction de volatilité locale précédemment calculée.
  - $S \rightarrow S e^{r\Delta t - \frac{1}{2} \sigma^2(t_{t+hj}, S_{t+hj}) \Delta t + \sigma(t_{t+hj}, S_{t+hj}) \Delta t G}$
- La variable  $S$  contient une approximation de  $S_T$

Le graphe suivant montre une trajectoire simulée du sous jacent pour une volatilité constante :  $vol = 0.2$ ,  $r = 0.03$ ,  $S_t = 500$ ,  $t = 04/05/2017$  et  $T = 16/05/2018$ .

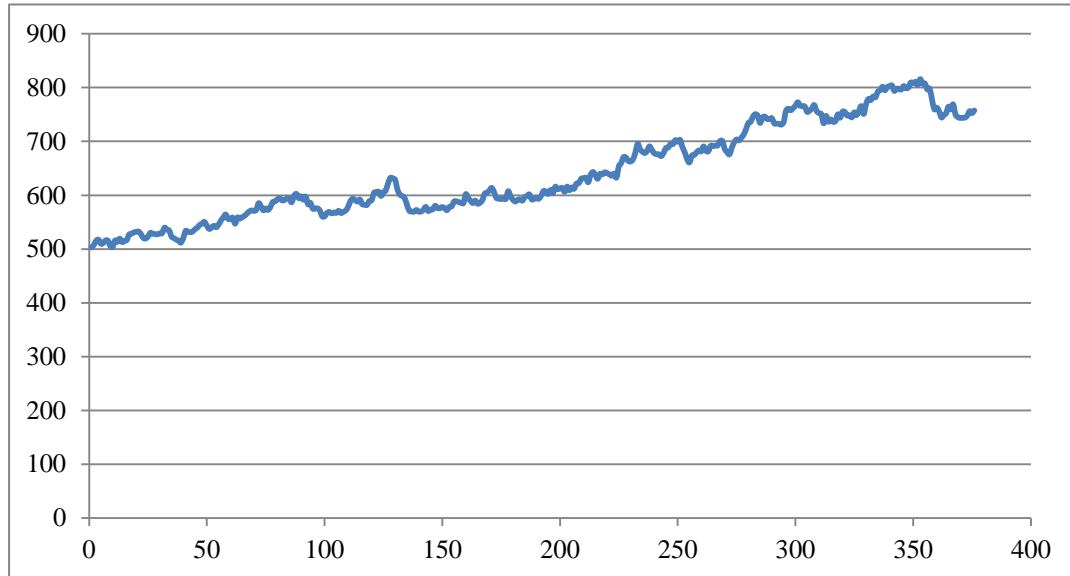


Figure 20: Une trajectoire simulée du sous jacent pour une volatilité constante égale à 0.2

### 2.3.2. Calcul de l'espérance

Le Théorème de loi forte des grands nombres (Voir Annexe) permet d'utiliser des algorithmes probabilistes pour calculer n'importe quelle espérance, en l'occurrence la valeur d'un call / put européen non discountée puisque cette dernière s'écrit sous forme d'une espérance :  $C_t = \hat{E} [(S_T - K)^+]$

Pour approcher cette espérance, il suffit donc de simuler  $n$  fois  $S_T$  et de faire la moyenne des simulations.

$$C_t = \hat{E} [(S_T - K)^+] \approx \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (S_{T_i} - K)^+ \approx \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g(S_{T_i}) = \bar{g}(S_n)$$

Avec  $g(x) = (x - K)^+$

#### 2.3.2.1. Les intervalles de confiance

Le problème qui se pose maintenant est d'évaluer théoriquement l'exactitude de cette méthode. Le théorème central limite (Voir annexe) permet de donner les intervalles de confiance de l'erreur commise lors du calcul. En effet si on considère l'erreur de l'estimation

$$\varepsilon_n = C_t - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g(S_{T_i})$$

Alors d'après le théorème central limite pour tout  $c_1 < c_2$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P\left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}c_1 \leq \varepsilon_n \leq \frac{\sigma}{\sqrt{n}}c_2\right) = \int_{c_1}^{c_2} e^{-\frac{x^2}{2}} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}}$$

Ainsi si on veut construire des intervalles de confiance, leurs largeurs dépendent du nombre de simulations et de la variance.

En pratique on applique l'approximation précédente pour  $n$  assez large et  $\varepsilon_n \sim N(0, \frac{\sigma^2}{n})$

A noter qu'il est impossible de borner l'erreur puisque le support d'une variable gaussienne est  $\mathbb{R}$ . Néanmoins, on peut définir un intervalle de confiance. Par exemple, remarquons que

$$P(|G| \leq 1.96) \approx 0.95 \quad G \sim N(0,1)$$

Donc, avec une probabilité de 0.95, pour  $n$  assez large on a

$$|\varepsilon_n| \leq 1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Et donc un intervalle de confiance au niveau de confiance  $1 - \alpha$  est donné par :

$$IC_\alpha(C_t) = \bar{g}(S_n) \pm z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}}$$

Où  $z_{1-\frac{\alpha}{2}}$  est le quantile d'ordre  $1 - \frac{\alpha}{2}$  d'une normale centrée réduite

Et  $\hat{\sigma}$  l'estimateur standard de la variance :  $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_1^n (g(S_{T_i}) - \bar{g}(S_n))^2$

### 2.3.2.2. Réduction de la variance

Nous avons vu que l'erreur due à l'approximation de l'espérance par la méthode Monte-Carlo à  $n$  simulations est majorée par une borne proportionnelle au ratio  $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$  et l'intervalle de confiance est d'autant petit que  $\sigma$  est petite. On a donc intérêt à réécrire cette espérance comme fonction d'une espérance d'une autre variable aléatoire qui a une variance plus faible. C'est l'idée de base des techniques de la réduction de la variance.

Supposons qu'on souhaite évaluer  $E(X)$ . On cherche donc une représentation alternative pour cette espérance telle que

$$E(X) = E(Y) + C$$

En utilisant une variable aléatoire  $Y$  qui a une variance inférieure à celle de  $X$  et  $C$  une constante connue. Plusieurs techniques ont été développées pour implémenter cette idée dont la plus utilisée est celle des variables antithétiques qui consiste à simuler  $n$

variables indépendantes  $S_{T_1} = h(G_{T_1}) \dots S_{T_n} = h(G_{T_n})$  de même loi que  $S_T$ , et approcher  $C_t$  par :

$$C_t = \frac{1}{n} \left[ \frac{1}{2} \left( g(h(G_{T_1})) + g(h(-G_{T_1})) \right) + \dots + \frac{1}{2} \left( g(h(G_{T_n})) + g(h(-G_{T_n})) \right) \right]$$

Avec

$$h(x) = S_t e^{r(T-t) - \frac{1}{2} \Delta t \sum_{i=0}^{n-1} \sigma^2(t+hj, S_{t+hj}) + \sqrt{\Delta t} \sqrt{\sum_{i=0}^{n-1} \sigma^2(t+hj, S_{t+hj})} x}$$

Pour tester l'efficacité de cette méthode on la compare à la méthode standard avec  $2n$  simulations

$$C_t^0 = \frac{1}{2n} \left[ g(h(G_{T_1})) + g(h(G_{T_2})) + \dots + g(h(G_{T_{2n-1}})) + g(h(G_{T_{2n}})) \right]$$

On a

$$Var(C_t^0) = \frac{1}{2n} Var(g(h(G_{T_1})))$$

Et

$$\begin{aligned} Var(C_t) &= \frac{1}{n} Var\left(\frac{1}{2} \left( g(h(G_{T_1})) + g(h(-G_{T_1})) \right)\right) \\ &= \frac{1}{2n} \left( Var(g(h(G_{T_1}))) + Cov(g(h(G_{T_1})), g(h(-G_{T_1}))) \right) \end{aligned}$$

On a

$$Var(C_t) \leq Var(C_t^0) \text{ Si et seulement si } Cov(g(h(G_{T_1})), g(h(-G_{T_1}))) \leq 0$$

**Théorème :**

Soit une  $X$  une variable aléatoire,  $T$  une transformation décroissante de  $\mathbb{R}$  telle que  $X$  et  $T(X)$  sont de même loi, et  $f$  une fonction monotone alors  $Cov(f(X), f(T(X))) \leq 0$  Avec inégalité stricte si  $f$  est strictement monotone sur un domaine de mesure non nulle.

**3. Problème du Thêta**

Le calcul du Thêta avec ou sans calendar effect peut se faire en suivant les mêmes étapes citées précédemment pour le calcul des prix en construisant une surface volatilité simple pour le modèle sans calendar effect et une autre avec calendar effect pour le modèle avec volatilité calendar effect.

---

## Chapitre 5 : Implémentation sous C Sharp (C#)

---

### 1. La programmation orientée objet avec C#

#### 1.1. La programmation orientée objet

La programmation orientée-objet propose une méthodologie centrée sur les données. Le programmeur va d'abord identifier un ensemble d'objets, tel que chaque objet représente un élément qui doit être utilisé ou manipulé par le programme, sous la forme d'ensembles de données. Ce n'est que dans un deuxième temps, que le programmeur va écrire les traitements, en associant chaque traitement à un objet donné. Un objet peut être vu comme une entité regroupant un ensemble de données et de méthodes de traitement. La possibilité d'intégrer ainsi toutes ces valeurs et ces fonctions offre divers avantages : par exemple, il est possible de ne suivre qu'une seule variable plutôt que plusieurs d'entre elles, de regrouper des fonctionnalités liées entre elles et de structurer les programmes pour qu'ils se rapprochent davantage du fonctionnement humain.

Les tâches courantes de la programmation orientée objet sont :

- la définition des classes d'objets ;
- la création de propriétés, méthodes et accesseurs get et set (méthodes accesseurs) ;
- le contrôle de l'accès aux classes, propriétés, méthodes et accesseurs ;
- la création de propriétés et de méthodes statiques ;
- la création de structures d'énumération ;
- la définition et utilisation d'interfaces ; l'utilisation de l'héritage, y compris lors de la redéfinition des éléments des classe.

#### 1.2. Le langage de programmation C#

Microsoft C# est un nouveau langage de programmation qui a été conçu pour permettre la création d'une large gamme d'applications pour les entreprises s'exécutant sur le .NET Framework. Évolution du Microsoft C et C++, C# est simple, moderne, de type sécurisé orienté objet. Le code en C# est compilé en tant que code managé, c'est-à-dire qu'il bénéficie des services du Common Language Runtime (CLR). Ces services incluent l'interopérabilité entre les langages, un garbage collection, une sécurité améliorée et une meilleure prise en charge du versioning.

Visual C# fournit un éditeur de code avancé, des concepteurs d'interface utilisateur pratiques, un débogueur intégré et de nombreux autres outils pour faciliter le développement d'applications basées sur le langage C# et le .NET Framework.

La syntaxe C# simplifie beaucoup des complexités de C++ et fournit des fonctionnalités puissantes, comme les types valeur Nullable, les énumérations, les délégués, les expressions lambda et l'accès direct à la mémoire, qui ne figurent pas dans Java. C# prend en charge des méthodes et types génériques qui fournissent de meilleures performances et plus de sécurité pour les types, et des itérateurs, qui permettent aux implémenteurs de classes de collection de définir des comportements d'itération personnalisés qui peuvent être utilisés facilement par le code client.

En tant que langage orienté objet, C# prend en charge les concepts d'encapsulation, héritage et de polymorphisme...

## **2. Description des objets principaux**

### **2.1. Définition d'un objet**

Un objet est avant tout une structure de données. Autrement, il s'agit d'une entité chargée de gérer des données, de les classer, et de les stocker sous une certaine forme. En cela, rien ne distingue un objet d'une quelconque autre structure de données. La principale différence vient du fait que l'objet regroupe les données et les moyens de traitement de ces données.

### **2.2. Le test unitaire**

Il s'agit d'un bout de code qui provoque l'exécution d'un autre bout de code et qui en analyse le résultat. Le premier bout de code est donc le test qui a été écrit, le second est le programme ou la fonction à tester. Le résultat d'un test est valide ou invalide.

## **3. Les projets utilisés**

### **3.1. Le projet OptionPricer**

#### **3.1.1. Implémentation**

C'est le projet qui contient toutes les classes et toutes les références qu'on utilise pour calculer les prix des calls et des puts non actualisés par les formules fermées et faire la calibration calendar effect pour les différents choix de la base business.

Le diagramme détaillé du projet *OptionPricer* se présente comme suit :

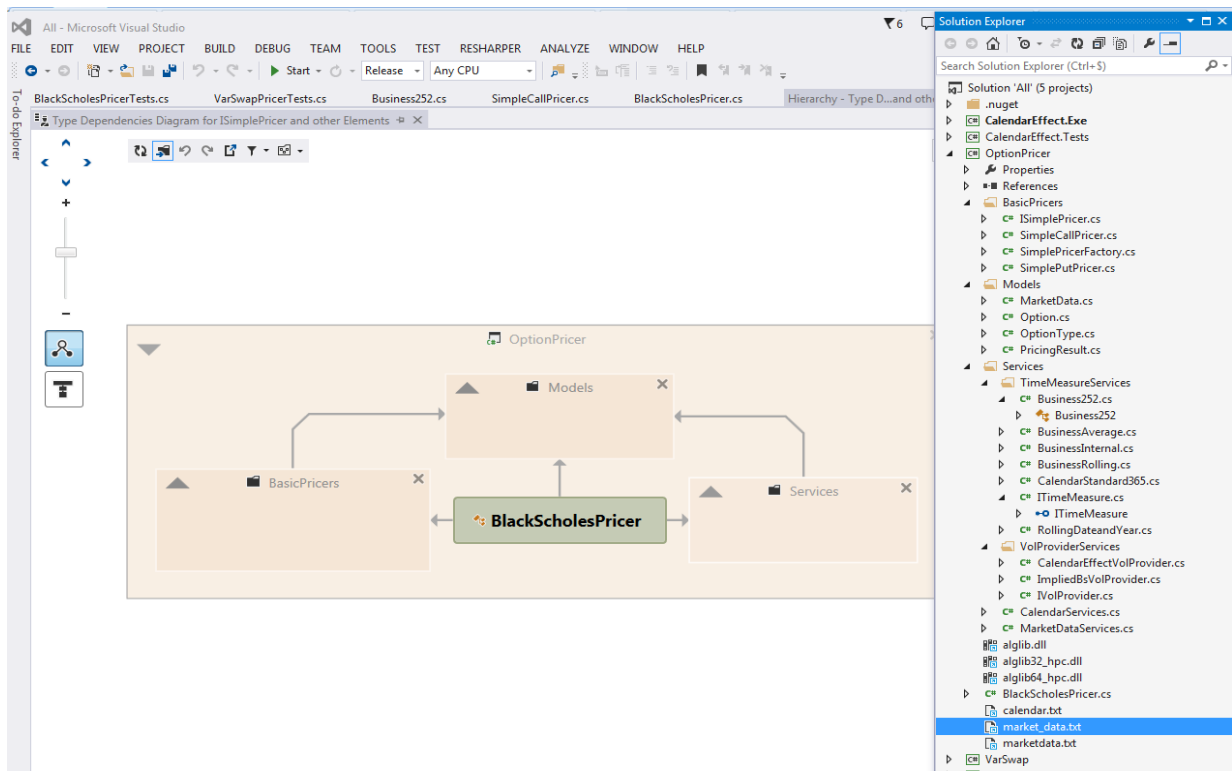


Figure 21: Diagramme du projet OptionPricer

Le diagramme présente plusieurs classes :

Deux premières classes *CalendarServices* et *MarketDataServices* qui collectent les données du marché (date d'évaluation, spot, volatilité implicite, calendrier des jours fermés).

Un premier bloc nommé *Models* constitué de plusieurs nouveaux types (*Option*, *PricingResult*, *MarketData*...)

Un deuxième bloc *BasicPricer* constitué de deux classes *SimpleCallPricer* et *SimplePutPricer* qui héritent de l'interface *ISimplePricer* et font appel à la méthode *Price* qui permet de calculer les prix des calls et des puts par des formules fermées.

Un troisième bloc *VolProviderServices* constitué de deux classes *ImpliedBsVolProvider* et *CalendarEffectVolProvider* héritant de l'interface *IvolProvider* et faisant appel à la méthode *GetVol* qui retourne la volatilité avec ou sans calendar effect. Ce bloc dépend d'un quatrième bloc *TimeMeasureServices* qui offre les différents choix de la base business (*Business252*,

*BusinessInternal, BusinessRolling, BusinessAverage*) à utiliser pour implémenter la volatilité calendar effect.

En dernier nous trouvons notre pricer *BlackScholesPricer* qui dépend des blocs ainsi cités .Ce dernier utilise la méthode *Price* qui retourne le prix non actualisé de l’option et son Thêta journalier.

Ci-dessous la capture d’écran de l’interface Visual 2013 sur laquelle est codé notre pricer :

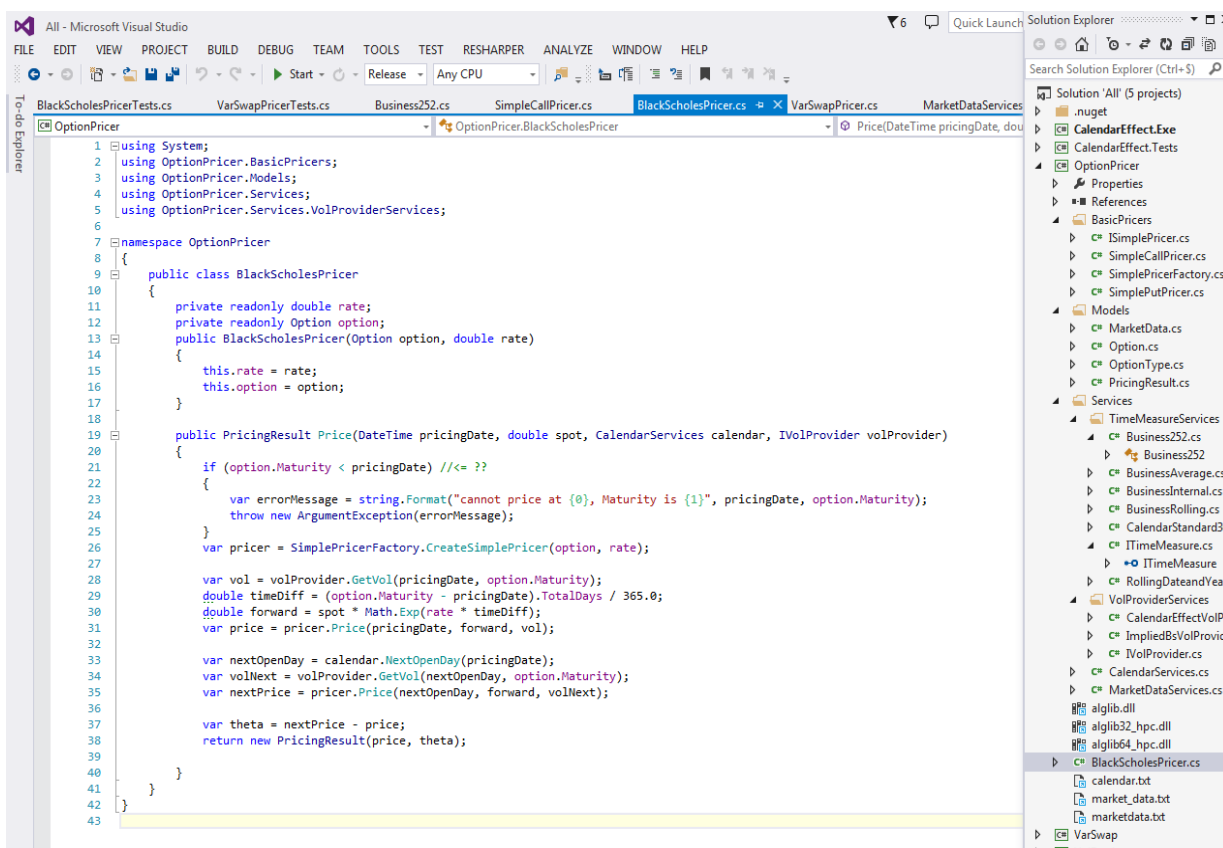


Figure 22: Capture de l’interface Visual Studio sur laquelle est codé BlackScholesPricer

### 3.1.2. Vérification du bon fonctionnement des méthodes

Après avoir implémenté notre pricer, il s’avère nécessaire de vérifier le bon fonctionnement de la méthode *Price* qui donne les prix des calls /puts.

Une manière de le faire est de construire un test unitaire en se basant sur la parité Call/Put. En effet les prix d’un call et put de même caractéristiques doivent vérifier la formule :

$$C_t - P_t = S_t - Ke^{-r(T-t)}$$

Ceci n'était qu'un exemple pour montrer l'importance majeure des tests unitaire.

En pratique pour chaque méthode implémentée, un ou plusieurs tests unitaires sont faits pour s'assurer du bon fonctionnement et de la pertinence des changements que pourrait avoir notre code.

La figue suivante montre les différents tests unitaires effectués dans le cadre du projet *OptionPricer*.

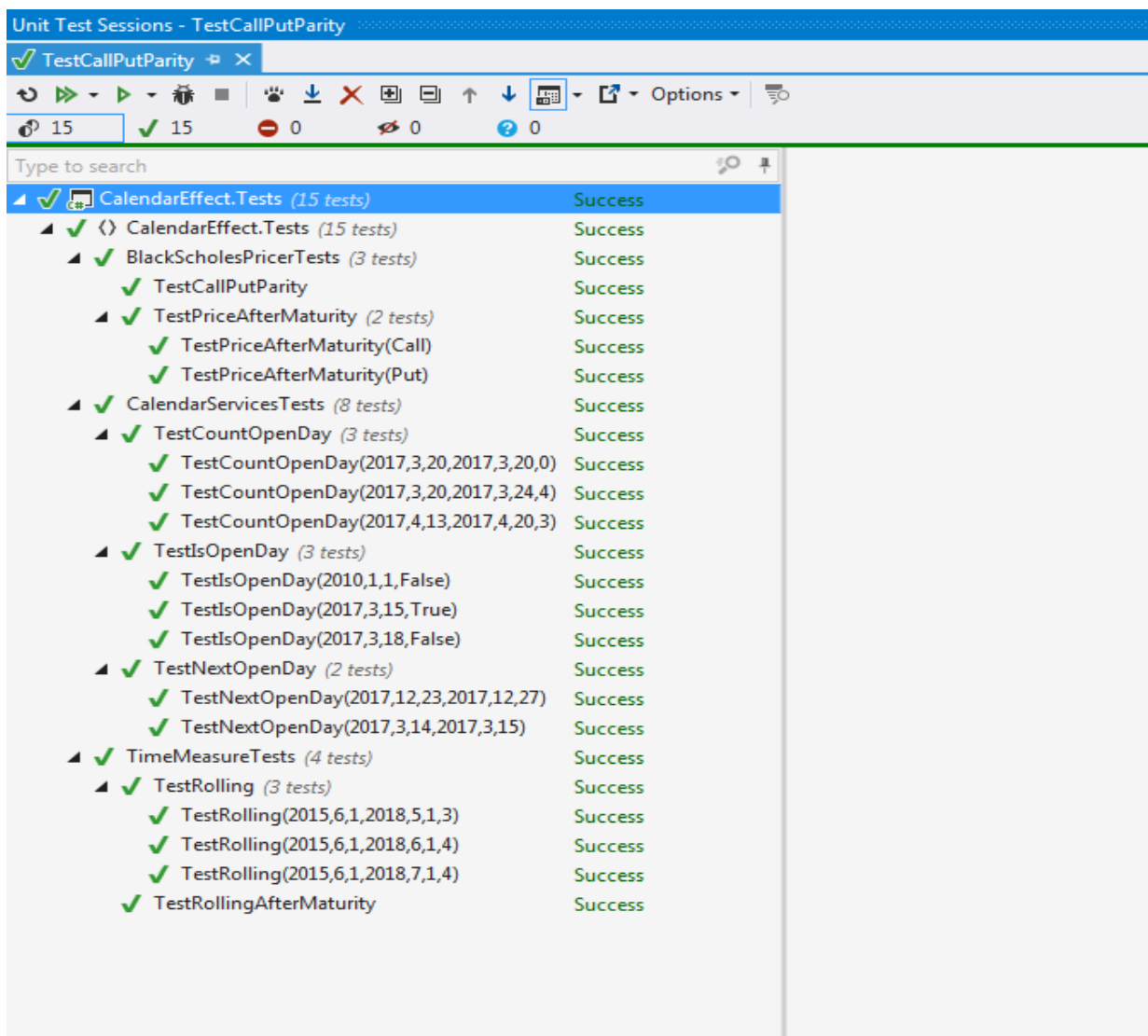


Figure 23: Tests unitaires effectués dans le cadre du projet *OptionPricer*

### 3.2. Le projet VarSwap

#### 3.2.1. Implémentation

C'est le projet qui contient toutes les classes et toutes les références permettant de calculer le prix, le Thêta et la volatilité normalisée du swap de variance.

Le diagramme détaillé du projet *VarSwap* se présente comme suit :

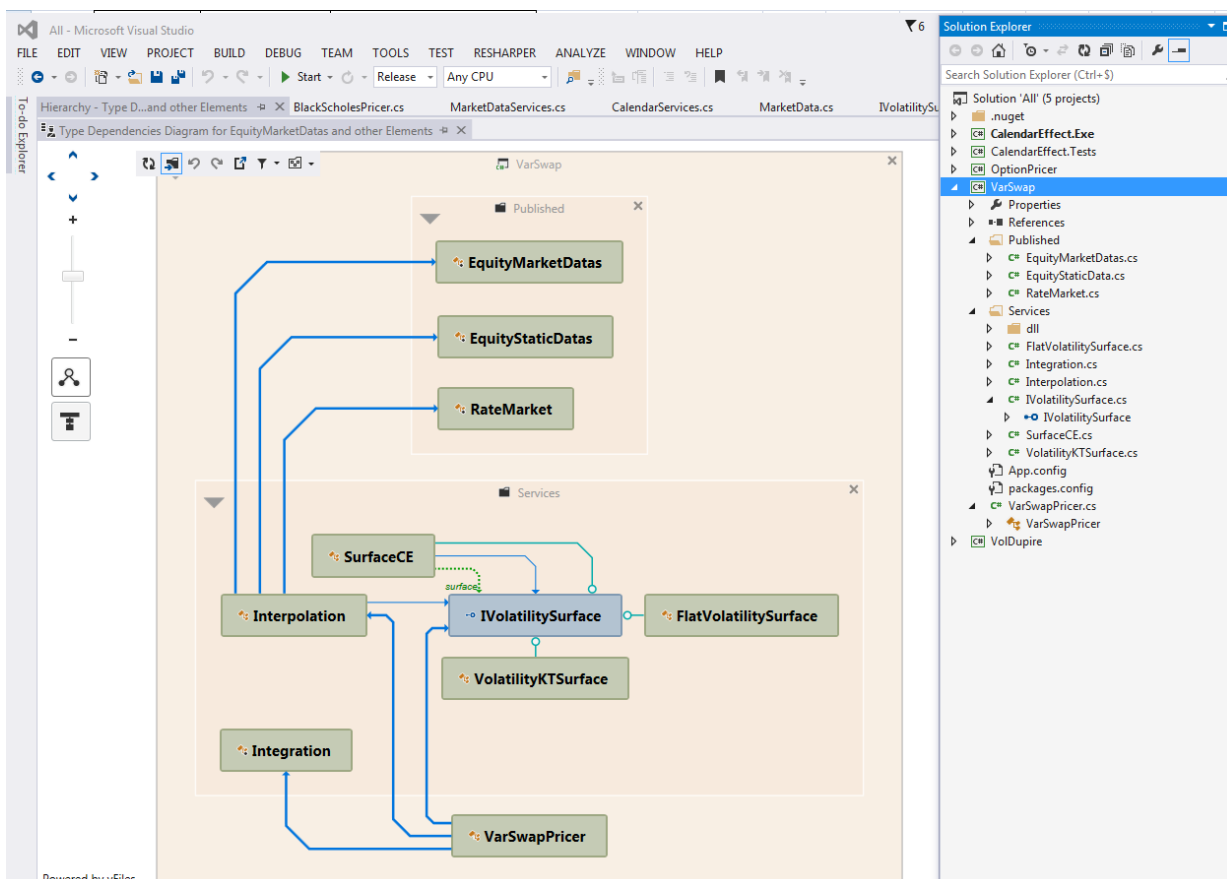


Figure 24: Digramme du projet VarSwap

Le diagramme fait intervenir plusieurs classes :

Un premier bloc appelé *Published* constitué de trois classes *EquityMarketDatas*, *EquityStaticDatas* et *RateMarket* qui collectent les données du marché.

Un deuxième bloc nommé *Services* constitué de cinq classes. Trois Premières classes *FlatVolatilitySurface*, *VolatilityKTSurface* et *SurfaceCE* qui héritent de l'interface *IVolatilitySurface* et font appel à la méthode *GetSurface* qui permet de retourner la surface de

volatilité souhaitée. Les autres classes restantes *Interpolation* et *Integration* sont utilisées respectivement pour faire l'interpolation et l'intégration.

En dernier nous trouvons notre pricer *VarSwapPricer* qui dépend des blocs ainsi cités. Ce dernier utilise plusieurs méthodes une première méthode *InternalPrice* qui retourne le prix du swap de variance, une deuxième nommée *GetNormalizedVolatility* qui retourne la volatilité de pricing normalisée utilisée dans le calcul du Thêta et une dernière méthode appelée *price* qui calcule les volatilités normalisées et les Thêtas.

Ci-dessous la capture d'écran de l'interface Visual 2013 sur laquelle est codé notre pricer :

```

1 using System;
2 using System.Collections.Generic;
3 using System.Linq;
4 using Accord.Math.Optimization;
5 using Ard.PublishedEquityPricersApi;
6 using OptionPricer;
7 using OptionPricer.Models;
8 using OptionPricer.Services;
9 using OptionPricer.Services.VolProviderServices;
10 using VarSwap.Services;
11
12 namespace VarSwap
13 {
14     public class VarSwapPricer
15     {
16         private readonly double rate;
17         private readonly double spot;
18         private readonly CalendarServices calendar;
19         private readonly PublishedEquityVolatilityInterpolationType interpolationType;
20         private readonly double[] x;
21         private readonly double[] w;
22
23         public VarSwapPricer(double rate, double spot, CalendarServices calendar, PublishedEquityVolatilityInterpolationType interpolationType)
24         {
25             this.rate = rate;
26             this.spot = spot;
27             this.calendar = calendar;
28             this.interpolationType = interpolationType;
29             this.x = new double[0];
30             this.w = new double[0];
31         }
32         private double InternalPrice(DateTime pricingDate, DateTime maturity, IVolatilitySurface surface, double forward)
33         {
34             // Implementation of InternalPrice method
35         }
36
37         public PricingResult Price(DateTime pricingDate, DateTime maturity, IVolatilitySurface surface, double forward)
38         {
39             // Implementation of Price method
40         }
41
42         public double GetPricingVol(DateTime pricingDate, DateTime maturity, IVolatilitySurface surface, double forward)
43         {
44             // Implementation of GetPricingVol method
45         }
46
47         public double GetNormalizedPricingVol(DateTime pricingDate, DateTime maturity, IVolatilitySurface surface, double forward)
48         {
49             // Implementation of GetNormalizedPricingVol method
50         }
51     }
52 }

```

Figure 25: Capture de l'interface Visual Studio sur laquelle est codé VarSwapPricer

### 3.2.2. Vérification du bon fonctionnement des méthodes

Pour les mêmes raisons que précédemment, des tests unitaires vérifiant le bon fonctionnement des méthodes implémentées sont nécessaires.

Nous avons choisi dans cet exemple de vérifier la justesse des prix obtenus par la méthode *Price*.

Une manière de procéder est de donner une surface de volatilité constante (flat surface) en input et de vérifier que le prix obtenu n'est autre que la variance entrée en input .En effet pour une surface constante  $\sigma(K, T) = \sigma = cst$ , le payoff su swap de variance est donné par :

$$Payoff = \left( \frac{1}{T-t} \int_t^T \sigma_u^2 du - K_v \right) = \sigma^2 - K_v$$

A la date de l'évaluation ce payoff actualisé est nul (car il s'agit d'un contrat forward) est donc on obtient :

$$K_v = \sigma^2$$

La figue suivante montre les différents tests unitaires effectués dans le cadre du projet *VarSwapPricer*.

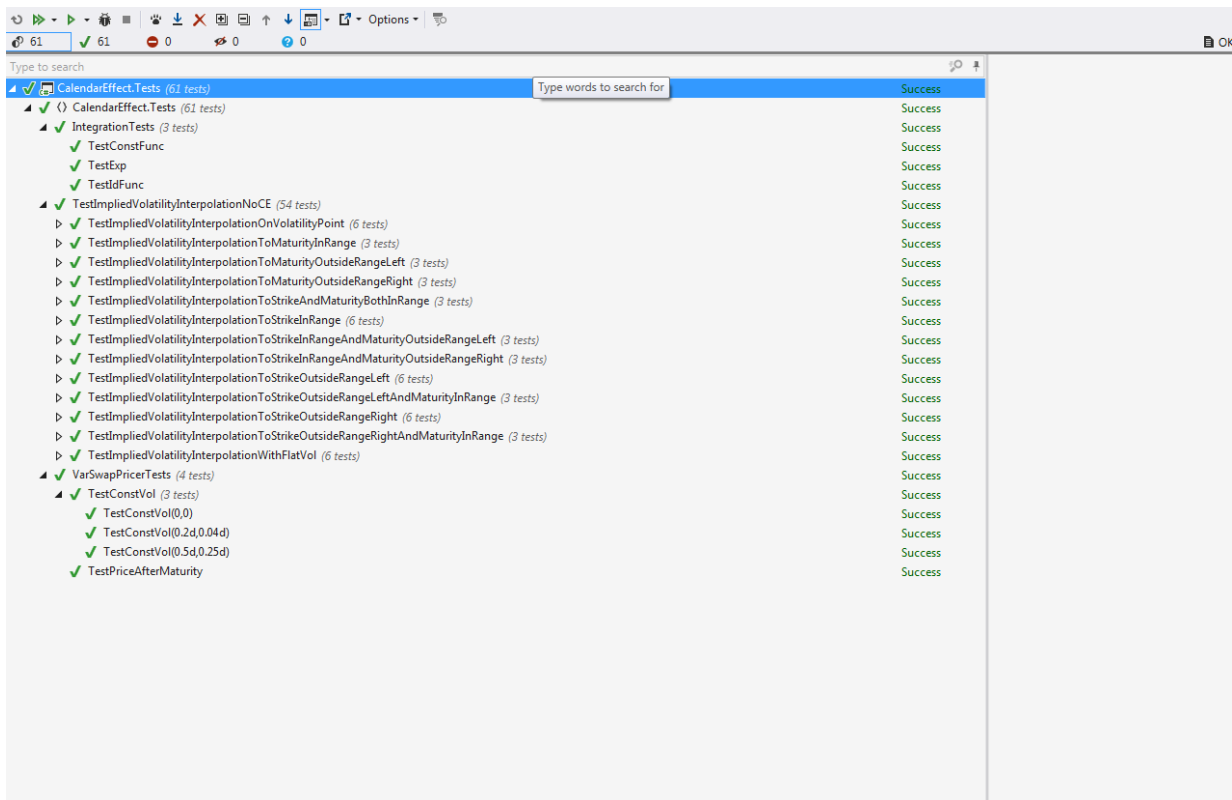


Figure 26: Tests unitaires effectués dans le cadre du projet VarSwap

## Conclusion du chapitre 5 :

Nous avons présenté dans ce chapitre l'outil de programmation orienté objet C# qui a été utilisé pour implémenter les différentes méthodes servant à calibrer la volatilité de la

classe d'actifs actions en modèle Black & Scholes (volatilité constante) pour les différents choix de la base de temps business et son application aux swaps de variance.

---

## Conclusion générale

---

En théorie financière, l'anticipation de l'évolution des différents risques en fonction de l'environnement du marché est primordiale. A ce fait une bonne connaissance de la dynamique des grecques comme mesure de risque sur le marché des dérivés s'avère trop nécessaire afin d'éviter des pertes non négligeables.

Avoir des grecques qui sautent constitue toujours une source d'inquiétude pour les traders puisqu'ils vont certainement influencer leurs stratégies de couverture et peuvent causer probablement des pertes non négligeables. Une telle problématique est observée sur le Thêta lors d'un pricing par un modèle de Black & Scholes simple. En effet ce dernier affiche des sauts la veille des jours fermés.

L'objectif de ce projet de fin d'études est de trouver un modèle de volatilité implicite permettant d'éviter la dépendance aux weekends et par la suite éviter les sauts de thêta la veille des jours fermés. Ce rapport relate les activités réalisées dans ce sens lors de mon stage au sein de l'équipe QUANT de la filiale SG ATS à Casablanca.

Dans le cadre de ce rapport, nous avons proposé un modèle de volatilité implicite avec différents choix pour les bases du temps business afin d'éviter les sauts la veille des jours fermés. Jusqu'ici et après trois mois de travail, nous avons pu implémenter et tester les différents cas de figures. Certains choix de la base business n'ont pas conduit à des résultats satisfaisants (la convention Rolling et Average), tandis que d'autres ont pu éliminer les sauts et donner un Thêta plutôt stable (La convention interne et 252).Après nous avons pu appliquer le modèle de volatilité calendar effect à un produit basique très utilisé dans le monde de la couverture à savoir les swaps de variance.

Au terme de ces trois mois de stage au sein de la SG ATS, j'ai eu l'occasion de découvrir le monde de la finance quantitative. C'est une expérience professionnelle très enrichissante, tant au niveau pédagogique qu'humain. Côté des Analystes Quant m'a permis d'observer et de comprendre de plus près la manière de travail de ce métier, et surtout de l'apprécier encore plus.

---

## Bibliographie

---

### **NOTES, OUVRAGES ET ARTICLES :**

- [1] HULL John, *Options, Futures And Other Derivative Securities*.
- [2] PONCET Patrice & PORTAIT Rolland, *Finance de marché*.
- [3] CARR Peter & MADAN Dilip, *Optimal positioning in derivative securities*.
- [4] EL KAROUI Nicole, *Couverture des risqué dans les marchés financiers 2003-2004*.
- [5] TAVIN Bertrand, *La volatilité Locale*.
- [6] BOSSU Sébastien & KLEINWORT Dresdner, *Introduction to variance swaps*.
- [7] ELQALLI Yassine, Cours magistral : *Finance Stochastique Valorisation et couverture*.
- [8] ELQALLI Yassine, Cours magistral : *Simulation des modèles financiers Monte Carlo & différence finies pour les EDP*

### **MEMOIRES ET THESES :**

- [9] BENHAMOU Afaf, *FX\_SMILE\_ARBITRAGE..*

### **WEBOGRAPHIE :**

- [10] Site d'information grand public, *<http://www.financedemarche.fr/>*
- [11] Site d'éducation et de la formation sur les marchés des dérivés, *[http : /www.strategies-options.com/](http://www.strategies-options.com/)*

---

## Annexe

---

### 1. Lemme d' Itô

Le lemme d'Itô, ou encore formule d'Itô est l'un des principaux résultats de la théorie du calcul stochastique. Ce lemme offre un moyen de manipuler le mouvement brownien ou les solutions d'équations différentielles stochastiques (EDS).

#### Enoncé :

Soit un processus d'Itô  $(X_t)_t$ , processus stochastique de la forme :

$$X_t = X_0 + \int \mu_s ds + \int \sigma_s dB_s$$

Autrement formulé, on a :  $dX_t = \mu_t dt + \sigma_t dB_t$

Avec  $\mu_t$  et  $\sigma_t$  deux fonctions aléatoires satisfaisant quelques hypothèses techniques d'adaptation au processus  $B_t$  (mouvement brownien).

Si  $f(X_t, t)$  est une fonction de classe  $C^2(R^2, R)$ , alors la formule d'Itô s'écrit

$$d(f(X_t, t)) = \frac{\partial f}{\partial t}(X_t, t)dt + \frac{\partial f}{\partial x}(X_t, t)dX_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(X_t, t)\sigma_t^2 dt$$

### 2. Formule de Black & Scholes

Dans le monde risque neutre le prix du call ou du put d'une option européenne en fonction de  $S_t$  et  $t$  est donné par :

$$V_t = E(e^{-r(T-t)}h(S_T)) = E\left(e^{-r(T-t)}h(S_t e^{r(T-t)} e^{\sigma(W_T - W_t) - \frac{\sigma^2}{2}(T-t)})/F_t\right)$$

Prenons le cas du call alors :

$$\begin{aligned} V_t &= E(e^{-r(T-t)}(S_T - K)^+) \\ &= E(e^{-r(T-t)}(S_T - K)1_{S_T > K}) \\ &= e^{-r(T-t)} \left( E(S_T 1_{S_T > K}) - K \times E(1_{S_T > K}) \right) \end{aligned}$$

Or

$$E(1_{S_T > K}) = P(S_T > K) = P\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t) + \sigma(W_T - W_t) > \ln\left(\frac{K}{S_t}\right)\right)$$

Donc

$$E(1_{S_T > K}) = P\left(\frac{1}{\sqrt{T-t}}(W_T - W_t) > \frac{\ln\left(\frac{K}{S_t}\right) - \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right) = P(G > -d_2)$$

Car la variable aléatoire  $W_T - W_t$  est gaussienne centrée de variance  $T - t$ .

Avec :

$$G = \frac{W_T - W_t}{\sqrt{T-t}} \sim N(0,1) \quad \text{et} \quad d_2 = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

Donc

$$P(S_T > K) = P(-G > -d_2) = P(G < d_2) = N(d_2)$$

Et on a :

$$E(S_T 1_{S_T > K}) = S_t E\left(e^{\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t) + \sigma\sqrt{T-t}(W_T - W_t)} 1_{G > -d_2}\right)$$

Donc :

$$\begin{aligned} e^{-r(T-t)} E(S_T 1_{S_T > K}) &= S_t \int_{-\infty}^{+\infty} 1_{x > -d_2} e^{-\frac{x^2}{2} + \sigma\sqrt{T-t}x - \frac{\sigma^2}{2}(T-t)} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} \\ &= \int_{-d_2}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}(x - \sigma\sqrt{T-t})^2} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} = S_t \int_{-d_2 - \sigma\sqrt{T-t}}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} \\ &= S_t \int_{-\infty}^{d_1} e^{-\frac{1}{2}x^2} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} = S_t N(d_1) \end{aligned}$$

Les formule fermées de Black & Scholes pour le call et le put sont :

$$C_t = S_t N(d_1) - K e^{-r(T-t)} N(d_2)$$

$$P_t = K e^{-r(T-t)} N(-d_2) - S_t N(-d_1)$$

### 3. EDP de Black & Scholes

Nous décrivons dans ce paragraphe la dérivation originale du prix d'arbitrage selon Black et Scholes.

On se donne un actif contingent  $h(S_T)$  et on cherche un prix de la forme  $V_t = v(t, x)$  qui soit la valeur d'un portefeuille autofinçant et répliquant  $h(S_T)$  à la maturité  $T$ . En supposant que la fonction  $v$  soit régulière, on peut appliquer la formule d'Itô et obtenir :

$$dv(t, S_t) = \left( \frac{\delta v}{\delta t}(t, S_t) + \frac{1}{2} \sigma^2 x^2 \frac{\delta^2 v}{\delta x^2}(t, S_t) \right) dt + \frac{\delta v}{\delta x}(t, S_t) dS_t$$

D'autre part, si  $v(t, x)$  est la valeur d'un portefeuille autofinçant de couverture d'un actif  $S$ , alors elle admet une différentielle de la forme :

$$dv(t, S_t) = (v(t, S_t) - \delta_t S_t) r dt + \delta_t dS_t$$

En identifiant les deux formules on obtient :

$$\begin{cases} \delta_t = \frac{\delta v}{\delta x}(t, S_t) \\ \frac{\delta v}{\delta t}(t, S_t) + \frac{1}{2} \sigma^2 x^2 \frac{\delta^2 v}{\delta x^2}(t, S_t) = (v(t, S_t) - \delta_t S_t) r \end{cases}$$

Après simplification, la fonction  $v$  doit satisfaire l'Equation aux Dérivées Partielles (EDP) :

$$(E) : \begin{cases} \frac{\delta v}{\delta t}(t, x) + rx \frac{\delta v}{\delta x}(t, x) + \frac{1}{2} \sigma^2 x^2 \frac{\delta^2 v}{\delta x^2}(t, x) = rv(t, x), & (t, x) \in [0, T) \times ]0, +\infty) \\ v(T, S_T) = h(S_T) \end{cases}$$

#### 4. EDP de Black & Scholes sur le forward

Dans le cas où on utilise le sous jacent forward et des prix non discountés :

La dynamique du Forward est donnée par :  $\frac{dF_t}{F_t} = \sigma dW_t$  en effet :

$$\begin{aligned} dF_t &= d(e^{r(T-t)} S_t) = e^{r(T-t)} dS_t - r e^{r(T-t)} S_t dt \\ &= e^{r(T-t)} (r S_t dt + \sigma S_t dW_t) - r e^{r(T-t)} S_t dt \\ &= r F_t dt + \sigma F_t dW_t - r F_t dt = \sigma F_t dW_t \end{aligned}$$

Faisant le changement de variable suivant :

$$v(t, S_t) = u(t, F_t) = u(t, S_t e^{r(T-t)}) = u(\varphi(t, S_t)) = (\varphi_1, \varphi_2)$$

avec  $\varphi(t, S_t) = (t, S_t e^{r(T-t)})$

En utilisant les matrices jacobiniennes :  $v = u \circ \varphi$  et donc

$$Jv(t, St) = Ju(t, Ft) \times J\varphi(t, St)$$

On obtient les égalités :

$$\left( \frac{\partial v}{\partial t}(t, St), \frac{\partial v}{\partial S}(t, St) \right) = \left( \frac{\partial u}{\partial t}(t, Ft), \frac{\partial u}{\partial F}(t, Ft) \right) \times \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi 1}{\partial t}(t, St) & \frac{\partial \varphi 1}{\partial St}(t, St) \\ \frac{\partial \varphi 2}{\partial t}(t, St) & \frac{\partial \varphi 2}{\partial St}(t, St) \end{bmatrix}$$

$$\text{Avec } \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi 1}{\partial t}(t, St) & \frac{\partial \varphi 1}{\partial St}(t, St) \\ \frac{\partial \varphi 2}{\partial t}(t, St) & \frac{\partial \varphi 2}{\partial St}(t, St) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -rFt & e^{r(T-t)} \end{bmatrix} .$$

Ce qui donne :

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial t} - rFt \frac{\partial u}{\partial F}, & \frac{\delta^2 v}{\delta S^2} = e^{2r(T-t)} \frac{\delta^2 u}{\delta F^2} \\ \frac{\partial v}{\partial S} = e^{r(T-t)} \frac{\partial u}{\partial F} \end{cases}$$

On remplace les dérivées partielles de  $v$  par celles de  $u$  dans l'expression de l'EDP (E) :

$$(E) \text{ devient alors : } \frac{\partial u}{\partial t} - rFt \frac{\partial u}{\partial F} + rFt \frac{\partial u}{\partial F} + \frac{1}{2} \sigma^2 F_t^2 \frac{\delta^2 u}{\delta F^2} - ru = 0$$

$$\text{Et donc : } \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 F_t^2 \frac{\delta^2 u}{\delta F^2} - ru = 0$$

Si on pose  $w(t, F_t) = u(t, F_t)e^{r(T-t)}$  alors  $w$  qui correspond au prix forward de l'option  $u$  (prix discounté) satisfait :

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 F_t^2 \frac{\delta^2 w}{\delta F^2} = 0$$

## 5. Equation de Fokker-Planck

On appelle équation de Fokker-Planck (ou Kolmogorov forward) l'EDP vérifiée par la fonction de densité associée à une diffusion.

À une dimension, l'équation de Fokker Planck avec un coefficient de diffusion  $D_2(x, t)$  et la tendance (drift)  $D_1(x, t)$  s'écrit :

$$\frac{\delta f}{\delta t} + \frac{\delta}{\delta x} (D_1(x, t)f) - \frac{1}{2} \frac{\delta^2}{\delta x^2} (D_2(x, t)f) = 0$$

$f$  est la probabilité de trouver l'élément au point  $x$  et à l'instant  $t$ .

## 6. Equation de Dupire

Le point de départ de cette preuve est l'écriture de  $C(K, T)$ , prix non actualisé du call de Strike  $K$  et maturité  $T$  sous la probabilité risque neutre de la forme :

$$C(K, T) = \hat{E} [(S_T - K)^+] = \int_K^{+\infty} (x - K) \varphi(x, T) dx .$$

Puis en dérivant par rapport à  $T$  :

$$\frac{\delta C}{\delta T} = \int_K^{+\infty} (x - K) \frac{\partial \varphi}{\partial T}(x, T) dx$$

Et on utilise l'équation de Fokker-Planck pour faire le lien entre la dérivée partielle de  $\varphi$  en  $T$  et dérivées partielles en  $x$ .

$$\begin{aligned} \frac{\delta C}{\delta T} &= \int_K^{+\infty} (x - K) \left[ -r_t \frac{\delta}{\delta x}(x\varphi) + \frac{1}{2} \frac{\delta^2}{\delta x^2}(x^2 \sigma^2(x, T)\varphi) \right] dx \\ \frac{\delta C}{\delta T} &= -r_t \int_K^{+\infty} (x - K) \frac{\delta}{\delta x}(x\varphi) dx + \frac{1}{2} \int_K^{+\infty} (x - K) \frac{\delta^2}{\delta x^2}(x^2 \sigma^2(x, T)\varphi) dx \end{aligned}$$

Calculons séparément les intégrales :

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_K^{+\infty} (x - K) \frac{\delta}{\delta x}(x\varphi) dx \\ I_2 &= \int_K^{+\infty} (x - K) \frac{\delta^2}{\delta x^2}(x^2 \sigma^2(x, T)\varphi) dx \end{aligned}$$

On calcule la première intégrale en faisant une IPP et en utilisant la formule de Breeden-Litzenberger qui s'écrit dans le cas où  $C$  est un prix non-actualisé :

$$\varphi_T(x) = \frac{\delta^2 C}{\delta K^2}(x)$$

$$I_1 = [(x - K)x\varphi]_K^{+\infty} - \int_K^{+\infty} x\varphi dx$$

$[(x - K)x\varphi]_K^{+\infty} = 0$  car  $\varphi(+\infty, T) = 0$  donc

$$I_1 = - \int_K^{+\infty} x\varphi dx = - \int_K^{+\infty} ((x - K) + K)\varphi dx$$

$$I_1 = -C(K, T) - K \int_K^{+\infty} \varphi(x) dx = -C(K, T) - K \int_K^{+\infty} \frac{\delta^2 C}{\delta K^2}(x) dx$$

$$\int_K^{+\infty} \frac{\delta^2 C}{\delta K^2}(x, T) dx = \left[ \frac{\partial C}{\partial K} \right]_K^{\infty} = -\frac{\partial C}{\partial K}(K, T)$$

Donc

$$I_1 = -C(K, T) + K \frac{\partial C}{\partial K}(K, T)$$

On calcule  $I_2$  de même en faisant une IPP et en utilisant la formule de Breeden Litzenberger.

$$I_2 = [(x - K) \frac{\delta}{\delta x}(x^2 \sigma^2 \varphi)]_K^{+\infty} - \int_K^{+\infty} \frac{\delta}{\delta x}(x^2 \sigma^2 \varphi) dx = - \int_K^{+\infty} \frac{\delta}{\delta x}(x^2 \sigma^2 \varphi) dx$$

Car  $[(x - K) \frac{\delta}{\delta x}(x^2 \sigma^2 \varphi)]_K^{+\infty} = 0$ . Et en remarquant que  $\varphi(\infty, T) = 0$  on obtient :

$$I_2 = - [x^2 \sigma^2 \varphi]_K^{\infty} = K^2 \sigma^2(K, T) \varphi(K, T)$$

Donc

$$I_2 = K^2 \sigma^2(K, T) \frac{\delta^2 C}{\delta K^2}(K, T)$$

Ainsi en combinant les intégrales calculées on obtient :

$$\frac{\delta C}{\delta T} = \frac{1}{2} K^2 \sigma^2(K, T) \frac{\delta^2 C}{\delta K^2} + r_t \left( C - K \frac{\partial C}{\partial K} \right)$$

Donc

$$\sigma^2(K, T) = 2 \frac{\frac{\delta C}{\delta T} - r_t \left( C - K \frac{\partial C}{\partial K} \right)}{K^2 \frac{\delta^2 C}{\delta K^2}}$$

C'est l'équation de Dupire.

## 7. Théorème (Loi forte des grands nombres)

Soit  $(X_i, i \geq 1)$  une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées telles que  $E(|X_1|) < +\infty$ , alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \right) = E(X_1)$$

### 8. Théorème (Central limite)

Soit  $(X_i, i \geq 1)$  une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées telles que  $E(X_1^2) < +\infty$ . On pose  $\sigma^2 = \text{Var}(X_i)$ , alors

$$\frac{\sqrt{n}}{\sigma^2} \left( E(X_1) - \frac{1}{n} (X_1 + \dots + X_n) \right) \rightarrow G \text{ Où } G \sim N(0,1)$$

