

*Sujet:*

## TARIFICATION DES TRAITÉS DE RÉASSURANCE NON-VIE

Réalisé par : **LATRACH Jamila (AF)**

Encadré par : **M. ZOUHAR Khalid (INSEA)**

**M. TALHAOUI Kamal (SCR)**

**M. DAOUDI Brahim (SCR)**

*Soutenu publiquement comme exigence partielle en vue de l'obtention du*

**Diplôme d'Ingénieur d'Etat**

**Filière : Actuariat-Finance**

*Devant le jury composé de :* **M. ZOUHAR Khalid (INSEA)**

**M. SAID Khalil (INSEA)**

**M. TALHAOUI Kamal (SCR)**

**M. DAOUDI Brahim (SCR)**

---

# Dédicaces

Je dédie ce travail,

**À mes parents**, je ne saurais exprimer la profondeur de mon amour, ma reconnaissance et mon attachement, que Dieu vous prête longue vie et bonne santé.

À ma **chère sœur Hassna** et à **mes chers frères**, je dédie ce rapport à chacun de vous. Votre soutien inébranlable, vos encouragements constants et votre amour ont été des sources de force et de motivation tout au long de ce parcours. Qu'Allah réalise vos souhaits et vous accorde plein de succès dans votre vie.

**À tous mes amis proches**, vivement pour une amitié qui dure et à de nouvelles expériences qui nous unissent,

**À tous mes camarades : Maryam, Wafae, Wiam ...**, vous avez contribué à donner vie à mes 3 ans à l'INSEA.

À tous mes collègues de l'INSEA,

# Remerciement

Je tiens tout d'abord à exprimer ma profonde gratitude à Monsieur **Kamal Talhaoui**, Directeur Actuariat Tarification et Surveillance du Portefeuille à la SCR, pour son accueil chaleureux au sein de son service. Je lui suis reconnaissant pour le temps qu'il m'a consacré, ainsi que pour son savoir, ses conseils précieux et ses encouragements tout au long de mon stage.

Je souhaite également adresser un remerciement spécial à Monsieur **Brahim Daoudi**, Actuaire Tarification Réassurance Non-vie, pour ses orientations pertinentes et son soutien continu, qui ont grandement contribué à la réussite de ce projet.

Mes sincères remerciements vont aussi à Monsieur **Khalid Zouhar**, mon professeur et encadrant interne à l'INSEA, pour ses conseils avisés et son soutien constant durant cette période.

Je souhaite exprimer ma gratitude envers l'équipe CAT Modelling, représentée par Monsieur **Annas BOUCHAIKH** et Madame **Salwa BOUZENDAGA**, pour leur accueil chaleureux et leur précieuse collaboration. Leur soutien a été indispensable pour intégrer les aspects liés aux événements catastrophiques dans le cadre de mon stage.

Je tiens à remercier Monsieur **Khalil SAID** pour l'intérêt qu'il a porté à ce travail en acceptant de faire partie des membres du jury.

Enfin, je voudrais exprimer ma gratitude à tous ceux qui, de près ou de loin, ont contribué à l'aboutissement de ce travail. Que chacun d'entre eux trouve ici l'expression de ma reconnaissance et de mes sincères remerciements.

# Résumé

Ce projet de fin d'études vise à fournir un guide sur la tarification des traités proportionnels et non proportionnels en XS de réassurance non-vie, en présentant donc les différentes méthodes actuarielles basées sur l'expérience (empirique et probabiliste) ainsi que la méthode de simulation.

Afin d'évaluer un traité proportionnel (estimer le ratio technique) d'une base de donnée multi-branche, nous avons appliqué la méthode empirique pour estimer le ratio sinistres/primes (S/P) des sinistres attritionnels et des sinistres majeurs. Pour les événements catastrophiques, et en raison de la rareté des données, une méthode de modélisation catastrophique (cat modelling) a été appliquée.

Nous avons mis en œuvre la méthode probabiliste pour estimer le ratio sinistres/primes (S/P) pour des sinistres majeurs sur une nouvelle base de données. Initialement, la détermination du seuil d'écèlement s'appuie sur les résultats de la théorie des valeurs extrêmes. Ensuite, nous avons examiné deux lois de probabilité discrètes pour la fréquence des sinistres majeurs, à savoir la loi de Poisson et la loi binomiale négative. Concernant la sévérité, l'ajustement a été réalisé avec la loi de Pareto généralisée.

Sur une base de données éthiopienne d'un traité XS, nous avons appliqué la méthode empirique pour la tranche basse (tranche travaillante) et la tarification par simulation pour la deuxième tranche (tranche non travaillante).

L'objectif principal est de souligner l'importance de la tarification probabiliste tout en mettant en évidence la nécessité de protéger le réassureur contre les fluctuations potentielles de la sinistralité, en comparant le ratio sinistres/primes avec trois mesures de risque : l'écart-type, la VaR (Value at Risk) et la TVaR (Tail Value at Risk). Cette analyse est cruciale en réassurance, un secteur qui couvre les risques extrêmes et peu fréquents.

Un autre défi dans la tarification avec la méthode probabiliste est l'incertitude des paramètres de tarification, un aspect souvent négligé dans les méthodes traditionnelles de

---

tarification en réassurance. Nous démontrons que la prise en compte de cette incertitude peut influencer significativement les résultats de la tarification des traités.

**MOTS-CLÉS** : tarification, traité proportionnel, traité non proportionnel, ratio technique, expérience, empirique, burning cost, probabiliste, fréquence, sévérité, seuil d'écrêtement, mesure de risque, incertitude des paramètres, bootstrap.

# Abstract

This final year project aims to provide a guide on the pricing of proportional and non-proportional excess of loss (XS) non-life reinsurance treaties by presenting various actuarial methods, including experience-based methods (empirical and probabilistic) as well as the simulation method.

To evaluate a proportional treaty (by estimating the technical ratio) for a multi-line dataset, we applied the empirical method to estimate the loss ratio (S/P) for attritional and major losses. For catastrophic events, due to the scarcity of data, a catastrophic modeling (cat modeling) method was applied.

We implemented the probabilistic method to estimate the loss ratio (S/P) for major losses on a new dataset. Initially, the determination of the retention threshold was based on the results of extreme value theory. Then, we examined two discrete probability distributions for the frequency of major losses, namely the Poisson distribution and the negative binomial distribution. For severity, the fitting was done using the generalized Pareto distribution.

For an Ethiopian XS treaty dataset, we applied the empirical method for the lower layer (working layer) and simulation-based pricing for the second layer (non-working layer).

The main objective is to highlight the importance of probabilistic pricing while emphasizing the need to protect the reinsurer against potential fluctuations in claims frequency, by comparing the loss ratio with three risk measures : the standard deviation, VaR (Value at Risk), and TVaR (Tail Value at Risk). This analysis is crucial in reinsurance, a sector that covers extreme and infrequent risks.

Another challenge in pricing using the probabilistic method is the uncertainty in pricing parameters, an aspect often overlooked in traditional reinsurance pricing methods. We demonstrate that accounting for this uncertainty can significantly influence the pricing results of the treaties.

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Contexte général</b>	<b>17</b>
1	Le marché de la réassurance . . . . .	18
1.1	Historique de la réassurance . . . . .	18
1.2	Le marché de la réassurance au Maroc . . . . .	18
1.3	Présentation de la SCR . . . . .	20
2	Généralités sur la réassurance . . . . .	20
2.1	Le rôle de la réassurance . . . . .	20
2.2	Les formes de la réassurance . . . . .	21
2.3	La réassurance proportionnelle . . . . .	22
2.4	La réassurance non-proportionnelle . . . . .	24
2.5	Les éléments techniques de la réassurance . . . . .	26
2.6	Branches couvertes par les traités de réassurance non vie . . . . .	33
2.7	Chaîne de production . . . . .	35
<b>2</b>	<b>Méthodes de détermination du seuil d'écrêtement</b>	<b>37</b>
1	Théorie de valeurs extrêmes . . . . .	38
1.1	Lois des valeurs extrêmes GEV (Generalized Extreme Value) . . . . .	38
1.2	Loi de Pareto Généralisée : GPD . . . . .	40
1.3	Estimation de l'indice de queue . . . . .	41
1.4	Méthodes graphiques de détermination du seuil . . . . .	42
2	Relation entre le seuil d'écrêtement et l'équilibre du traité . . . . .	47
<b>3</b>	<b>La tarification des traités de réassurance non vie : Aspect théorique</b>	<b>48</b>
1	La tarification des traités proportionnels . . . . .	49
1.1	Calcul de la commission . . . . .	49
1.2	Estimation de loss ratio : LR . . . . .	49
1.3	Calcul de Ratio technique . . . . .	57
2	La tarification des traités non proportionnels en XS . . . . .	58
2.1	Principe . . . . .	58
2.2	Composantes : prime pure, prime de risque, prime technique, prime commerciale . . . . .	59

2.3	Calcul du taux de prime . . . . .	61
<b>4</b>	<b>La tarification des traités de réassurance non vie : Aspect pratique</b>	<b>65</b>
1	La réassurance proportionnelle . . . . .	66
1.1	Calcul du ratio technique avec la méthode empirique . . . . .	66
1.2	Estimation de $LR_{Maj}$ avec la méthode probabiliste . . . . .	77
1.3	Application d'autres mesures de risque dans le calcul du $LR_{Maj}$ . . . . .	88
1.4	Incertitude des paramètres d'ajustement et son impact sur l'estimation du LR . . . . .	91
1.5	Automatisation du calcul de ratio technique via VBA Excel . . . . .	98
2	La réassurance non poroportionnelle en XS . . . . .	104
2.1	Présentation des données . . . . .	104
2.2	Calcul de Burning Cost . . . . .	105
2.3	Tarification par simulation . . . . .	107
	<b>Annexes :</b>	<b>114</b>
	<b>A La quote-part est la souhaitable pour les réassureurs : Preuve</b>	<b>114</b>
	<b>B Vérification de la deuxième hypothèse de la méthode de Chain Ladder</b>	<b>115</b>
	<b>C Le modèle de risque collectif</b>	<b>117</b>
	<b>D Modélisation des évènements Catastrophiques</b>	<b>121</b>
	<b>E Simulation de Monte Carlo</b>	<b>125</b>

# Table des figures

1.1	Le chiffre d’Affaires (2020 - 2021) de la SCR par type d’Affaires . . . . .	19
1.2	Evolution des primes émises par les réassureurs exclusifs en millions de dirhams, années 2013-2021 . . . . .	19
1.3	Evolution des parts de marché des réassureurs exclusifs, années 2014-2021 .	19
2.1	Principe de la répartition du risque en réassurance, Source : Analyse et gestion des risques en réassurance . . . . .	21
2.2	Exemple de réassurance en QP avec taux de cession de 40 %, Source : [2] .	23
2.3	Exemple de réassurance en excédent de plein, Source : [2] . . . . .	24
2.4	Exemple de réassurance en excédent de sinistre 30 XS 10, Source : [2] . . .	25
2.5	Chaîne de production en réassurance . . . . .	35
2.6	Chaine de production détaillée, Source : moi-même . . . . .	36
2.7	Différences entre un produit d’assurance et de réassurance, Source : [2] . .	36
1.1	QQ Plot Exponentielle pour les sinistres majeurs . . . . .	40
1.2	Fonction moyenne des excès $e(u)$ , Source : [7] . . . . .	44
1.3	Graphe de l’estimateur de Hill, Source : [8] . . . . .	45
1.4	Graphe de Gertensgarbe et Werner, Source : [8] . . . . .	46
1.1	Décomposition du loss ratio, Source : moi-même . . . . .	50
1.2	Les méthodes de calcul de différents types de ratio S/P, Source : moi-même	51
2.1	Décomposition : Prime pure, prime technique et prime commerciale . . . .	61
1.1	Procédure d’estimation du ratio de sinistralité, source : moi-même . . . . .	67
1.2	représentation des facteurs de développement et de ses moyennes par année de survenance . . . . .	70
1.3	représentation des coefficients de développement et de ses moyennes par année de survenance . . . . .	73
1.4	Courbe S/P . . . . .	75
1.5	Distribution du ratio de sinistralité . . . . .	77
1.6	summary(sinistres majeurs) . . . . .	78
1.7	Sinistres majeurs . . . . .	79
1.8	Boxplot des sinistres majeurs . . . . .	79

1.9	QQ Plot Exponentielle pour les sinistres majeurs . . . . .	80
1.10	Test de $\xi = 0$ (Cas de Gumbel) . . . . .	81
1.11	Test de $\xi > 0$ (Cas de Fréchet) . . . . .	81
1.12	Mean Excess Function . . . . .	82
1.13	Hill Plot . . . . .	82
1.14	Pickands Plot . . . . .	83
1.15	Gerstengarbe Plot . . . . .	83
1.16	Estimation des paramètres de GenPareto . . . . .	84
1.17	fonction de répartition empirique vs celle de GP . . . . .	85
1.18	Test de kolmorov-smirnov . . . . .	85
1.19	Estimation de l'espérance de GenPareto . . . . .	85
1.20	Fréquence des sinistres majeurs par année de souscription . . . . .	86
1.21	Ajustement de la fréquence par la loi de poisson . . . . .	86
1.22	Ajustement de la fréquence par la loi de binomiale négative . . . . .	86
1.23	Test de Fisher exact . . . . .	87
1.24	Espérance de fréquence . . . . .	87
1.25	Fonction de répartition empirique des données simulées . . . . .	89
1.26	Convergence de l'Erreur Standard des Estimations de Sinistres . . . . .	90
1.27	Histogramme du paramètre estimé $\lambda$ de la loi de Poisson par le bootstrap . . . . .	93
1.28	Distribution des paramètres de GPD simulés . . . . .	95
1.29	Les branches du traité . . . . .	98
1.30	Entrer les données . . . . .	99
1.31	Analyse de "Paid Losses" et "Outstanding losses" . . . . .	100
1.32	Analyse des sinistres majeurs . . . . .	101
1.33	Analyse de "CAT Events" . . . . .	102
1.34	Récapitulatif de la feuille de développement . . . . .	102
1.35	Analyse des données "Clean Cut" . . . . .	103
1.36	Fiche technique . . . . .	104
2.1	Le programme de l'affaire à tarifier . . . . .	104
2.2	Extrait de calcul de la charge annuelle de réassureur . . . . .	106
2.3	Courbe de p-value de test de kolmogorov smirnov . . . . .	108
2.4	Fonction de répartition empirique vs théorique . . . . .	108
2.5	Les méthodes graphiques de la détermination de seuil . . . . .	109
2.6	convergence de simulation XS . . . . .	110
0.1	CC plot de primes . . . . .	115
0.2	CC plot de sinistres . . . . .	116

## TABLE DES FIGURES

---

0.1	Le processus du The Catastrophe Modelling . . . . .	122
0.2	Exceedance Probability curve, Source : [10] . . . . .	124

# Liste des tableaux

2.1	Propriétés vérifiées par les mesures de risque . . . . .	33
1.1	Tableau récapitulatif des méthodes graphiques . . . . .	46
1.1	Tableau de CPI par année . . . . .	68
1.2	Primes combinées . . . . .	69
1.3	Primes Combinées indexées . . . . .	69
1.4	Tableau des facteurs de développement . . . . .	69
1.5	Les facteurs de développement des primes . . . . .	70
1.6	Les facteurs de développement à l'ultime des primes . . . . .	70
1.7	Les facteurs de développement des primes à l'ultime . . . . .	71
1.8	Paid losses . . . . .	71
1.9	Outstanding losses . . . . .	71
1.10	Incurred losses indexed . . . . .	72
1.11	Indexation des pertes majeures et des Events Cats . . . . .	72
1.12	Incurred losses exclus les CAT Event et Major losses . . . . .	73
1.13	Tableau des facteurs de développement des sinistres . . . . .	73
1.14	Les facteurs de développement des sinistres . . . . .	74
1.15	Les facteurs de développement à l'ultime des sinistres . . . . .	74
1.16	La charge ultime attritionnelle par année de survenance . . . . .	74
1.17	Ratio S/P Attritionnelle . . . . .	74
1.18	La charge ultime majeure par année de souscription . . . . .	75
1.19	Tableau récapitulatif des seuils obtenus . . . . .	87
1.20	LR pour les différents niveaux de confiance de VaR et TVaR . . . . .	91
1.21	Comparaison des résultats obtenus pour la fréquence . . . . .	94
1.22	Tableaux de statistiques des paramètres de GPD simulés . . . . .	95
1.23	Comparaison des résultats obtenus pour la sévérité . . . . .	96
1.24	Comparaison des résultats obtenus par les méthodes Bootstrap et Pratique . . . . .	97
2.1	GNPI et GNPI INDEXED par année . . . . .	105
2.2	Récapitulatif de la méthode de Burning Cost . . . . .	107
2.3	Tableau récapitulatif des seuils obtenus . . . . .	111

# Liste des Abréviations

SCR : Société Centrale de Réassurance

QS : Quota-Share

SP : Surplus Share

C : Engagement de la réassurance pour chaque risque

LR : Loss Ratio

RT : Ratio Technique

GPD : Generalized Pareto Distribution

GEV : Generalized Extrême Values

EPI : Estimated Premium Income SCR : Société Centrale de Réassurance. GNPI : Gross Net Premium Income en français L'assiette de prime. Cela fait référence au montant total des primes perçues par la Cédante. EPI : Estimated Premium Income, c'est l'estimation de la prime acquis par la cédante. RoL : Rate on Line, c'est le montant de la prime commerciale rapporté à la portée de l'XS tarifé. RC : Responsabilité Civile. BC : Burning Cost. INC : Incurred Losses.

SP : Sinistre Payé.

OS : Outstanding losses.

CPI : Consumer Price Index.

Cat Event : Catastrophic Events.

S/P : ratio sinistralité sur prime.

$LR_{Att}$  : Loss ratio Attritionnel.

$LR_{Maj}$  : Loss ratio des Major losses.

$LR_{Cat}$  : Loss ratio des catastrophic losses.

XS : L'excédent de Sinistre (ou Excess of Loss - XL).

C : cover (Porté).

P : Priority (Priorité).

R : Rétention.

SA : Somme Assurée.

AIC : Akaike Information Criterion.

# Introduction

Le secteur de l'assurance est caractérisé par un cycle de production inversé : pour chaque contrat souscrit, l'assureur perçoit une prime tout en s'engageant à verser des indemnités en cas de sinistre. Cette incertitude quant au coût final des contrats nécessite une gestion précise des risques couverts, essentielle pour garantir la solvabilité de la compagnie d'assurance. Le transfert d'une partie de risques, notamment les risques volatils et les grands risques, au réassureur en échange d'une prime de réassurance contribue ainsi à la protection du bilan d'assurance.

Dans ce contexte et pour la réassurance proportionnelle, une tarification de l'offre permet de prendre une décision quant à l'acceptation de l'affaire cédée, l'actuaire tarificateur est amené à faire une étude de la rentabilité de l'offre en se basant sur l'historique de la cédante, ainsi que déterminer la commission à céder par le réassureur en faveur de la cédante. Cette commission compense le cédant pour la part de la prime cédée allouée aux frais généraux. Quant à la tarification non proportionnelle, une estimation du prime de réassurance (sous forme d'un ratio) est requise.

Dans le premier chapitre de ce rapport, nous avons présenté le contexte général de notre étude, soit l'organisme d'accueil et des généralités sur la réassurance.

Le deuxième chapitre explore la détermination du seuil en utilisant la théorie des valeurs extrêmes, présentée via deux approches principales. Premièrement, la loi des valeurs extrêmes est examinée pour identifier les domaines d'attraction, permettant de déterminer si la distribution est déjà à queue lourde ou non. Deuxièmement, la loi de Pareto généralisée est appliquée pour obtenir des estimateurs de la queue de distribution, sur la base desquels des méthodes graphiques sont élaborées pour établir ce seuil. En outre, une méthode alternative, basée sur l'équilibre du traité en question, est également discutée.

Le troisième chapitre présente l'aspect technique de la tarification des traités proportionnels et non proportionnels en XS de réassurance non vie. Pour la réassurance proportionnelle, Nous nous présentons deux méthodes de calcul du ratio de sinistres/primes

S/P, une méthode empirique et l'autre probabiliste, à l'aide d'une décomposition de la sinistralité en trois types : les sinistres attritionnels, les sinistres majeurs et les événements catastrophiques. Ce ratio permet l'évaluation de la rentabilité de l'affaire offerte. Pour la réassurance non proportionnelle, les mêmes méthodes sont utilisées pour le calcul du prime, en plus de la méthode de simulation.

Le quatrième chapitre sera consacré au calcul du ratio de sinistralité sur une base de données multi-branches. Nous y appliquerons également la méthode probabiliste pour estimer le ratio sinistres/primes (S/P) majeur et évaluerons l'impact de différentes mesures de risque, telles que l'écart-type, la Value at Risk (VaR) et la Tail Value at Risk (TVaR), sur le calcul du chargement de sécurité. Ensuite, nous aborderons la problématique de l'incertitude et de la variabilité aléatoire des paramètres des lois d'ajustement de la fréquence et de la sévérité, toujours dans le cadre de la méthode probabiliste. En fin, Nous illustrerons la tarification non proportionnelle en XS par l'application des méthodes du "Burning Cost" (méthode empirique) et de la simulation pour estimer le taux pur et le taux technique sur une base de données d'une cédante éthiopienne.

# Chapitre 1

## Contexte général

### Sommaire

---

1	Le marché de la réassurance . . . . .	<b>18</b>
1.1	Historique de la réassurance . . . . .	18
1.2	Le marché de la réassurance au Maroc . . . . .	18
1.3	Présentation de la SCR . . . . .	20
2	Généralités sur la réassurance . . . . .	<b>20</b>
2.1	Le rôle de la réassurance . . . . .	20
2.2	Les formes de la réassurance . . . . .	21
2.3	La réassurance proportionnelle . . . . .	22
2.4	La réassurance non-proportionnelle . . . . .	24
2.5	Les éléments techniques de la réassurance . . . . .	26
2.6	Branches couvertes par les traités de réassurance non vie . . .	33
2.7	Chaîne de production . . . . .	35

---

# 1 Le marché de la réassurance

## 1.1 Historique de la réassurance

La réassurance apparaît premièrement dans la **branche maritime** au 14<sup>eme</sup> siècle, principalement dans le transfert de marchandises transcontinentales. A l'origine de ces couvertures, on trouve des risques liés aux attaques de pirates ou plus simplement des risques de naufrage (shipwreck).

En 1370, un assureur vénitien du nom de Gustav Cruciger, qui assure le transport de marchandises entre le port de Gênes et la ville de Sluys aux Pays-Bas, décide de céder le risque à un autre assureur sur la partie la plus risquée du voyage : autour du Déroit de Gibraltar et lors de l'escale à Cadix, en Espagne.

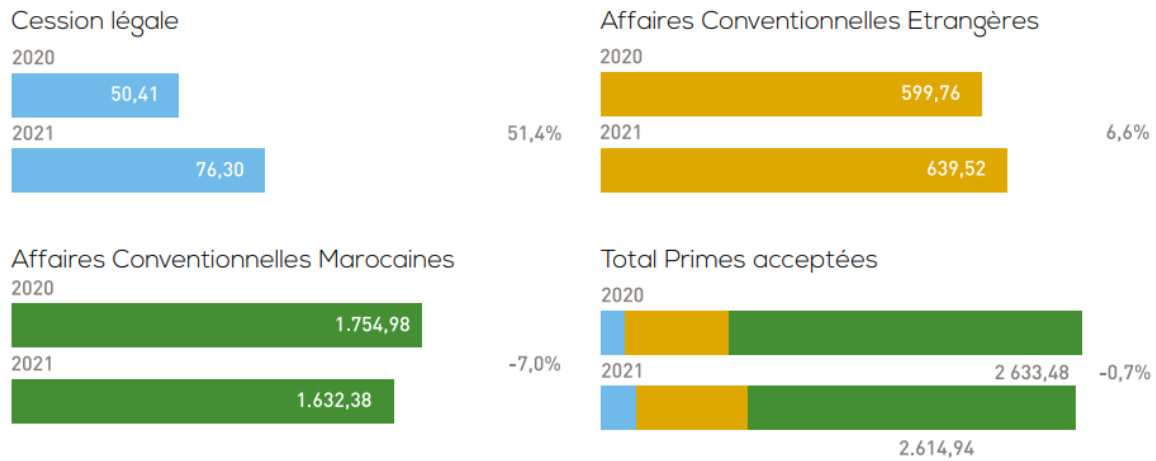
La réassurance moderne apparaît en Allemagne vers la fin du 19<sup>eme</sup> siècle, au moment de la révolution industrielle. De plus en plus, les sociétés d'assurance allemandes ont trouvé des difficultés à couvrir des complexes industriels immenses, notamment l'incendie. Le grand **incendie de Hambourg** en 1842 a entraîné la destruction de 4000 logements et laisse 10% de la population sans toit. Les compagnies d'assurance allemandes décident donc de faire appel à des contrats de réassurance. Pour ce faire, elles sont créées la **Koelnische Rueck** (Gen Re aujourd'hui) en 1852. En 1861, un sinistre comparable survient à Glaris en Suisse et conduit à la création de la compagnie **Swiss Re** en 1863.

## 1.2 Le marché de la réassurance au Maroc

*Face au désintérêt des investisseurs privés pour le secteur d'assurance*, l'État marocain a réagi en créant en 1960 la **Société Centrale de Réassurance** (SCR), qu'il contrôle via la Caisse de Dépôts et de Gestion (CDG).

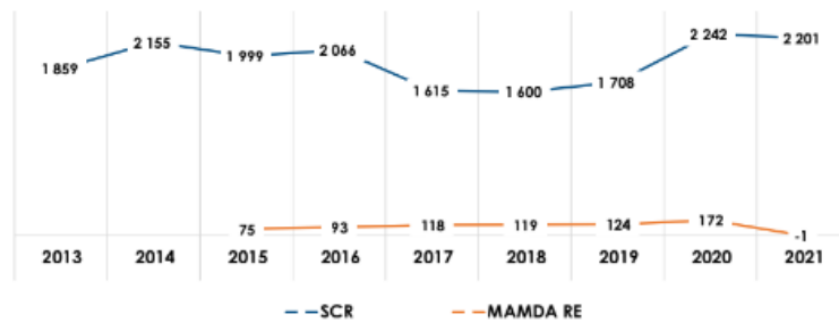
La SCR représente donc le leader du marché de la réassurance au Maroc, affichant un chiffre d'affaires de 2,6 milliards de dirhams en 2021.

## 1. LE MARCHÉ DE LA RÉASSURANCE

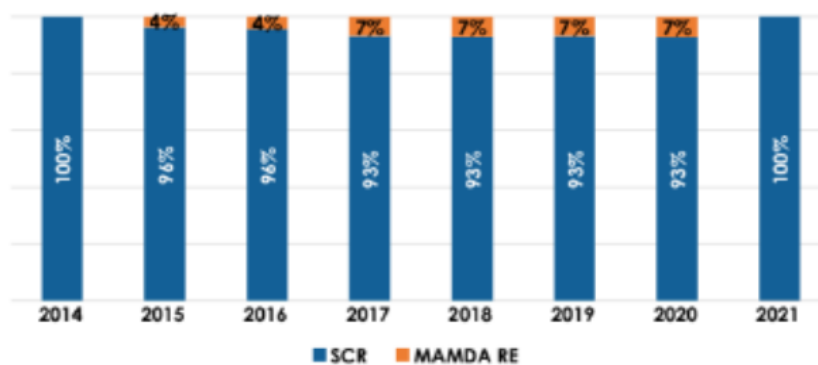


**Figure 1.1** – Le chiffre d’Affaires (2020 - 2021) de la SCR par type d’Affaires

En 2015, la **MAMADA RE** a fait son entrée sur le marché. Toutefois, l’entreprise a enregistré **une baisse** de son chiffre d’affaires en 2021, ce qui a finalement mené à son retrait du marché.



**Figure 1.2** – Evolution des primes émises par les réassureurs exclusifs en millions de dirhams, années 2013-2021



**Figure 1.3** – Evolution des parts de marché des réassureurs exclusifs, années 2014-2021

### 1.3 Présentation de la SCR

la Société Centrale de Réassurance (SCR) est l'une des plus anciennes sociétés de réassurance des pays en développement, fondée en 1960 par une convention entre l'État et la Caisse de Dépôt et de Gestion (CDG). Elle joue un rôle clé d'investisseur institutionnel en contribuant à la conservation des primes à l'échelle nationale et à la mobilisation de l'épargne dans l'économie marocaine. En plus de servir le marché marocain, la SCR développe également des affaires à l'international, ciblant principalement l'Afrique, le Moyen-Orient et certains marchés asiatiques tels que l'Inde, la Chine, l'Iran, la Corée du Sud, et le Pakistan.

La SCR a également joué un rôle déterminant dans la création de sociétés régionales comme **la Société Arabe de Réassurance** et **la Société Africaine de Réassurance**. Aujourd'hui, elle est reconnue comme un partenaire privilégié des institutions financières, grâce à sa solide réputation. Elle est classée *premier réassureur arabe et troisième réassureur africain*, avec des évaluations de crédit de **AM.Best (B++ Good)**, **Standard & Poors (BBB-/Stable)** et **Fitch (AAA/ Stable)**.

## 2 Généralités sur la réassurance

La réassurance est un mécanisme crucial dans le secteur de l'assurance, permettant aux compagnies de transférer une partie de leurs risques à d'autres réassureurs. Cela leur offre une protection financière contre les sinistres majeurs et contribue à la stabilité de leurs opérations.

Pour plus d'informations sur la réassurance, je vous incite à lire le livre de *Blondeau et Partat* [1].

### 2.1 Le rôle de la réassurance

Le rôle principal de la réassurance est de **protéger le bilan de la cédante**. En plus de plusieurs autres avantages pour la cédante, comme la réduction de son engagement net sur des risques individuels et une protection contre des pertes significatives. Elle augmente ainsi la capacité de souscription de la cédante, lui permettant de couvrir des risques plus grands et plus nombreux, ce qui serait irréalisable **sans augmenter ses fonds propres**.

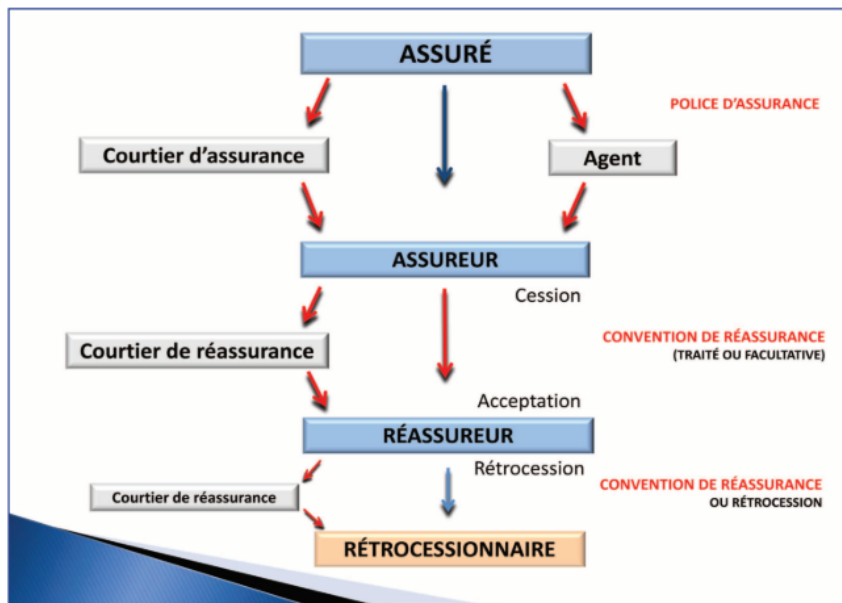
Un contrat de réassurance a généralement une période de validité d'un an. Il regroupe entre une seule cédante et habituellement plusieurs réassureurs (souvent de 4 à 10 réassureurs).

## 2. GÉNÉRALITÉS SUR LA RÉASSURANCE

Le réassureur qui détient la plus grosse part de risque cédé est appelé le réassureur apériteur (**Leader**), c'est avec lequel la cédante négocie d'éventuelles modifications du contrat. Les autres réassureurs doivent suivre la décision de ces discussions.

Les réassureurs mutualisent les risques à une échelle plus large que celle de l'assureur. Les entreprises de réassurance peuvent également participer à la **rétrocession**, où elles transfèrent une partie des risques réassurés à d'autres réassureurs ou assureurs, diffusant ainsi encore plus le risque.

Un autre intervenant s'appelle le **courtier** (l'Intermédiaire). Il joue un rôle clé dans le secteur de la réassurance. Son rôle principal est de conseiller l'assureur sur son plan de réassurance en recherchant les produits de réassurance les plus adaptés. Le courtier positionne également les demandes de contrats chez d'importants réassureurs. De plus, le courtier est responsable de **négocier** les termes et les conditions des contrats de réassurance.



**Figure 2.1** – Principe de la répartition du risque en réassurance, Source : Analyse et gestion des risques en réassurance

### 2.2 Les formes de la réassurance

La réassurance se divise juridiquement en trois catégories principales :

- **La réassurance facultative** : Il s'agit d'une simple note de couverture accompagnée d'une copie du contrat original (police d'assurance) pour chaque risque. Dans ce type de réassurance, l'assureur (la cédante) et le réassureur sont **libres** de céder ou d'accepter les

risques transférés. En général, l'assureur fait recours à cette forme de réassurance lorsqu'il souhaite transférer un **risque spécifique** ou un petit nombre de risques qui **ne sont pas couverts** par des traités de réassurance obligatoires (des risques excédentaires).

- **La réassurance facultative-obligatoire** : Elle permet à l'assureur de **choisir** de céder ou non un risque, mais **oblige** le réassureur à accepter tous les risques cédés selon des conditions prédéfinies.

- **Les Traités** : C'est un accord contractuel qui établit des **obligations réciproques**. L'assureur s'engage, durant une période donnée (généralement une année renouvelable) à céder tous les risques d'un portefeuille donné (qui dépasse un périmètre défini dans le traité), et le réassureur est obligé de les accepter. Ce mode de réassurance est le plus couramment utilisé et constitue le **cœur de cette étude**.

**Techniquement**, on distingue deux types de traité de réassurance : la réassurance proportionnelle et non proportionnelle.

### 2.3 La réassurance proportionnelle

La réassurance est dite proportionnelle lorsqu'on a une **relation de proportionnalité** entre la prime cédée au réassureur et la participation de ce dernier dans le sinistre. Cela signifie que pour chaque police d'assurance incluse dans le traité, la cédante transfère au réassureur une part du risque assuré, et en contrepartie, le réassureur reçoit la **même proportion** de la prime d'assurance payée par le souscripteur. Les assurances font souvent recours à ce type de contrat en cas des branches où les **risques sont volatils ou flous** comme la **RC décennale**.

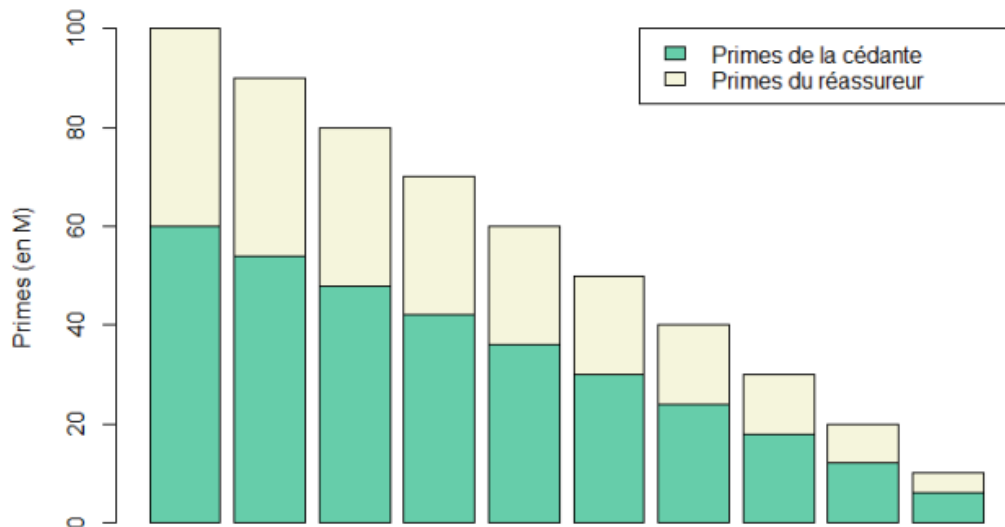
#### 2.3.1 Quote-part ou QP (Quota Share - QS)

La réassurance en quote-part est définie par un **taux de cession** ( $\alpha$ ) **fixé**, qui indique quel pourcentage de prime et de sinistre l'assureur cède au réassureur.

Soit  $n$  le nombre de risque cédé (ie de police), alors :

	risque total	risque cédé	risque conservé
<b>Primes</b>	$P = \sum_{i=1}^n P_i$	$\alpha P = \alpha \times \sum_{i=1}^n P_i$	$(1 - \alpha)P = (1 - \alpha) \times \sum_{i=1}^n P_i$
<b>Sinistres</b>	$S = \sum_{i=1}^n S_i$	$\alpha S = \alpha \times \sum_{i=1}^n S_i$	$(1 - \alpha)S = (1 - \alpha) \times \sum_{i=1}^n S_i$

Graphiquement :



**Figure 2.2** – Exemple de réassurance en QP avec taux de cession de 40 %, Source : [2]

### Remarques :

- La réassurance en quote-part nécessite un portefeuille **homogène**, où les risques sont similaires et les sommes assurées d'une ampleur comparable.
- Ce type de réassurance permet de libérer une partie non négligeable des fonds propres, augmentant ainsi la capacité de souscription de la compagnie améliorant aussi sa marge de solvabilité.
- **La quote-part ne modifie pas le Loss Ratio.** Pour la démonstration voir [3].

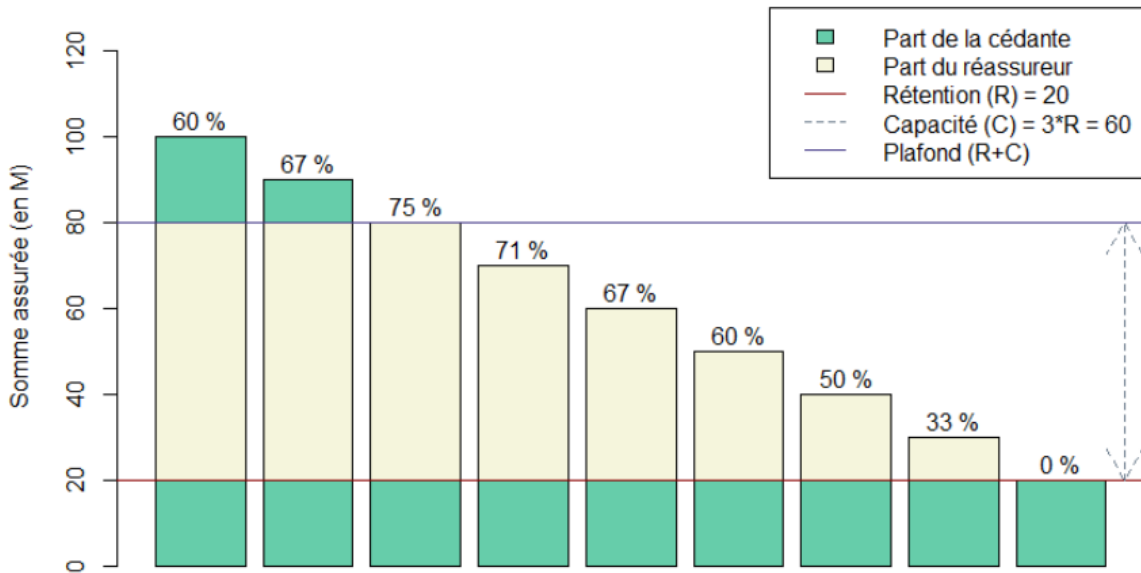
### 2.3.2 L'excédent de Plein ou XP (Surplus Share - SP)

La réassurance en excédent de plein est la deuxième forme de réassurance proportionnelle. Elle est similaire à la réassurance en quote-part, à la différence que le taux de cession **varie** pour chaque risque réassuré.

	risque total	risque cédé	risque conservé
<b>Primes</b>	$P = \sum_{i=1}^n P_i$	$\sum_{i=1}^n a_i P_i$	$\sum_{i=1}^n (1 - a_i) P_i$
<b>Sinistres</b>	$S = \sum_{i=1}^n S_i$	$\sum_{i=1}^n a_i S_i$	$\sum_{i=1}^n (1 - a_i) S_i$

En effet, pour chaque risque  $i$ , le taux de cession est calculé en fonction du plein, s'appelle aussi la **rétenion** ( $R_i$ ), de la **capacité** ( $C_i$ ) et de la **somme assurée** ( $SA_i$ ) comme le suivant :

$$\alpha_i = \min \left( \max \left( 0, 1 - \frac{R_i}{SA_i} \right), \frac{C_i}{SA_i} \right)$$



**Figure 2.3** – Exemple de réassurance en excédent de plein, Source : [2]

### 2.3.3 La quote-part est la souhaitable pour les réassureurs

Les traités de quote part sont particulièrement **avantageux** pour les réassureurs, facilitant le partage des pertes totales avec les assureurs de manière à minimiser l'incertitude du réassureur. En effet, dans le cas des traités QP, les sinistres les plus élevés sont **partagés** entre l'assureur et le réassureur contrairement au cas d'excédent de plein où le réassureur **se charge seul** de la volatilité des sinistres (la queue de la distribution). Pour la preuve, voir A.

## 2.4 La réassurance non-proportionnelle

### 2.4.1 L'excédent de Sinistre ou XS (Excess of Loss - XL)

Dans un contrat d'excédent de sinistres, le réassureur n'intervient que pour les sinistres qui dépassent un certain montant prédéfini (priorité) (P), limités à un montant prédéterminé (porté) (C) et on note le traité XS par C xs P.

## 2. GÉNÉRALITÉS SUR LA RÉASSURANCE

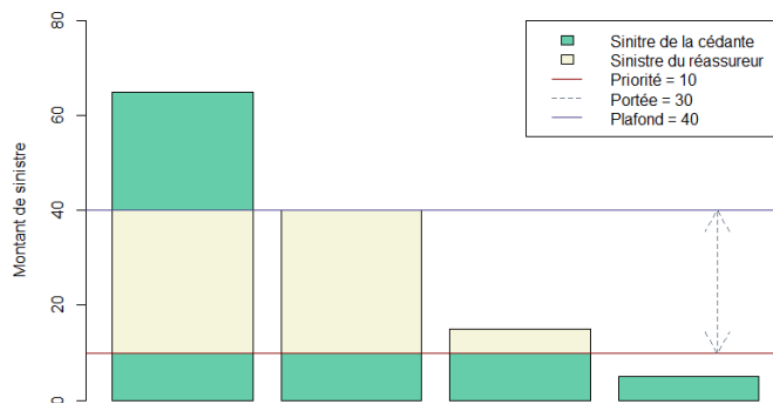
Ce type de réassurance est souvent utilisé pour les **risques plus importants** ou les **événements catastrophiques**, il peut donc être *défini par risque ou par événement, ou par les deux*.

La sinistralité de réassureur s'écrit donc :

$$X_{\text{Reas}} = \min(\max(X - P, 0), C)$$

Il ne reste donc à **la charge de l'assureur** que le montant :  $X_{\text{net}}^{\text{ass}} = X - X_{\text{Reas}}$ .

Graphiquement :



**Figure 2.4** – Exemple de réassurance en excédent de sinistre 30 XS 10, Source : [2]

- Un XS est en général découpé en plusieurs **tranches indépendantes et cotées séparément**.
- Un même programme peut avoir des réassureurs différents sur chacune de ses tranches.

### 2.4.2 Stop loss (SL)

La réassurance en Stop Loss (SL) protège la compagnie d'assurance contre les mauvais résultats **annuels** en intervenant lorsque le ratio sinistres/primes (S/P) dépasse un seuil prédéterminé (P). La couverture est limitée à un ratio maximal (C).

La réassurance en Stop Loss (SL) aide à **lisser** les résultats d'un portefeuille d'assurance sur plusieurs années, en couvrant les **risques à fréquence élevée et cyclique** comme les tempêtes.

Un exemple de SL est le cas de **EVCAT** dont la rétention du traité en QP est couverte par un traité de SL.

### 2.5 Les éléments techniques de la réassurance

#### 2.5.1 Les clauses

Dans les contrats de réassurance, les clauses jouent un rôle crucial en définissant les modalités de répartition des risques et des responsabilités entre la cédante et le réassureur. Ces clauses peuvent considérablement influencer l'équilibre financier du contrat et l'efficacité de la couverture.

Ces clauses, qui sont essentielles pour la tarification technique du traité, sont sujettes à **négoiation** avant la finalisation du traité et reflètent le jeu de l'offre et de la demande sur le marché de la réassurance. En général, un excès d'offre de réassurance entraîne des clauses favorables à la cédante, tandis qu'une offre limitée favorise plutôt le réassureur.

##### 2.5.1.1 Commission QP-SP :

La prime reçue par l'assureur est :

$$P = \pi + MR + \text{frais généraux}$$

où  $\pi$  est la prime pure,  $MR$  la marge pour le risque et les frais généraux comprennent les frais de gestion et d'acquisition et d'autres frais.

Cependant, le réassureur a moins de coûts de fonctionnement (administratifs) que la cédante, alors que cette dernière envoie une proportion de la **prime originale**, qui inclue en plus du Coût de risque, les frais généraux. C'est pour cette raison que le réassureur rend à la cédante une proportion de la prime cédée sous la forme d'une **commission de réassurance** établie par négociations.

Cette commission a deux formes :

**Commission fixe :** La commission fixe est l'élément de tarification le plus largement répandu. Il s'agit d'un pourcentage prélevé par la cédante sur la prime cédée au réassureur.

Du point de vue du réassureur, le résultat d'un traité s'exprime de la manière suivante :

$$R = 100 - LR - c$$

où

—  $R$  : résultat du traité en pourcentage de la prime

## 2. GÉNÉRALITÉS SUR LA RÉASSURANCE

---

- $LR$  : taux de sinistralité du traité( loss ratio)
- $c$  : taux de commission du traité

**Commission à l'échelle (Slading commission)** : La cédante et le réassureur peuvent s'accorder sur une commission de réassurance variable, **ajustée selon la performance du traité**. La commission  $c$  peut être définie ainsi comme une **fonction du taux de sinistralité  $c(LR)$** .

La formulation courante pour cette fonction de commission variable est la suivante :

$$c(LR) = \begin{cases} c_{\text{base}} & \text{si } LR > LR_{\text{haut}} \\ c_{\text{base}} + \frac{(LR_{\text{haut}} - LR)}{LR_{\text{haut}} - LR_{\text{bas}}} \cdot (c_{\text{haute}} - c_{\text{base}}) & \text{si } LR_{\text{bas}} < LR \leq LR_{\text{haut}} \\ c_{\text{haute}} & \text{si } LR \leq LR_{\text{bas}} \end{cases}$$

### 2.5.1.2 surcommission (Overriding commission) :

Cette commission est payée pour les frais d'acquisition des affaires acceptées via **fronting** ou **rétrocession** d'un réassureur.

### 2.5.1.3 La participation aux bénéfices (PB) :

En cas de bénéfice pour le réassureur, Cette clause permet le partage de ce bénéfice entre l'assureur cédant (la cédante) et le réassureur. Elle s'exprime généralement comme un **taux fixe (plus rarement variable) appliqué au résultat net** de frais généraux du réassureur. Elle permet ainsi d'intéresser la cédante à **la qualité des risques cédées** au traité.

Le résultat final est exprimé par :

$$R = 100 - LR - c(LR) - \max(TP_b(100 - LR - c(LR) - FG), 0)$$

Où  $FG$  représente les frais généraux du réassureur, pouvant inclure le report d'éventuelles pertes (pour les exercices antérieures), et  $TP_b$  est le taux de participation aux bénéfices.

### 2.5.1.4 La participation aux pertes (LC) :

l'assureur prend en charge une partie de la sinistralité du réassureur si le S/P dépasse un certain seuil habituellement limité ( **loss corridor**). Cette clause vise à limiter l'intervention du réassureur.

Le résultat peut alors s'écrire :

$$R = 100 - LR - c(LR) + \min(L_p, \max(T_p(LR - LR_0), 0))$$

Où :

- $T_p$  : taux de prise en charge des sinistres
- $LR_0$  : seuil d'intervention de la cédante exprimé en taux
- $L_p$  : limite d'intervention de la cédante exprimée en taux, cette limite pouvant être infinie dans le cas du cap (le réassureur bénéficie alors d'une couverture Stop Loss)

### 2.5.1.5 Courtage :

Une cédante peut choisir de se réassurer directement auprès d'un réassureur ou d'engager un courtier (exemple : **Aon, Gallagher** ...), qu'elle rémunère via une commission de courtage, payée également par le réassureur. Cette commission de courtage est généralement égale à **2.5%** pour le cas de la souscription d'un traité proportionnel et **10%** pour les traités non proportionnels.

### 2.5.1.6 taxes :

Certains pays peuvent imposer des impôts sur les compagnies de réassurance étrangères.

### 2.5.1.7 Annual Aggregate Deductible (AAD) : pour les traités en XS

L'aggregate deductible, également appelé clause de franchise annuelle. Il s'agit d'une clause de charge cumulée minimale pour déclencher l'intervention du réassureur. L'assureur couvre les premiers sinistres, ou un volume important de sinistres relativement petits, et le réassureur intervient seulement en cas de sinistres accumulés dépassant le montant de la franchise aggregate. Cela protège donc l'assureur contre un nombre important de sinistres survenus durant l'année tout en diminuant le prix de la réassurance.

Le traité s'écrit alors C XS P XS AAD et la charge de réassureur égal à :

$$X_{Réass} = \max \left( \left( \sum_{j=1}^{n_i} X_j^{Réass} \right) - AAD, 0 \right)$$

où

$$X_j^{Réass} = \min(\max(X_j^{as\ if} - P; 0); C)$$

et  $n_i$  c'est le nombre de sinistres survenus l'année  $i$ .

### 2.5.1.8 Annual Aggregate Limit (ALL) : pour les traités en XS

L'aggregate, ou plafond annuel, fonctionne comme une limite maximale sur l'engagement financier du réassureur, ce qui réduit aussi le prix de réassurance. Une fois que ce plafond est atteint, l'assureur doit prendre en charge tout seul les sinistres excédentaires. Ce dispositif permet de plafonner le coût total du contrat pour le réassureur, réduisant ainsi le risque de ruine tout en apportant de la prévisibilité dans ses engagements financiers. La charge de réassureur égal à :

$$X_{Réass} = C_i = \min \left( \left( \sum_{j=1}^{n_i} X_j^{Réass} \right); AAL \right)$$

En cas des deux Aggregate :

$$X_{Réass} = \min \left( \max \left( \left( \sum_{j=1}^{n_i} X_j^{Réass} \right) - AAD, 0 \right); AAL \right)$$

### 2.5.1.9 Clause de Reconstitutions de Garanties : pour les traités en XS

Avec un traité en excédent de sinistres (XS), le réassureur s'engage à couvrir tous les sinistres jusqu'à un certain seuil, mais il se peut que le nombre de sinistres pris en charge est également limité. Ce modèle peut laisser l'assureur à découvert en cas de sinistres excessifs, ce qui est problématique. Pour remédier à cela, le réassureur peut convenir, moyennant une prime additionnelle, de **rétablir la couverture**, un processus appelé reconstitution de garantie. Ainsi, pour deux reconstitutions sur une tranche donnée, le réassureur pourrait s'engager à payer jusqu'à trois fois la portée initiale. Généralement, l'engagement du réassureur dans le cas de  $N$  reconstitutions est  $(N + 1) \times C$ .

Cette reconstitution, ainsi que le paiement de la prime, doit intervenir dès que le seuil XS est atteint. Le système de reconstitutions est plus complexe que celui des aggregates, car la prime devient elle aussi aléatoire et dépend des sinistres.

Pour un trait C xs P avec une clause de reconstitution  $c\%$ , P : Prime de reconstitution,  $i$  : ième mois de l'année. la charge de réassureur est :

$$\text{Charge Réassureur} = \min (\max (X - P, 0), C)$$

Les reconstitutions peuvent être calculées de différentes manières :

- **Prorata capita** : proportionnelle au montant à reconstituer ;

$$\text{Coût Reconstitution} = P \times \frac{c}{100} \times \frac{\text{Charge Réassureur}}{\text{Portée}}$$

- **Prorata temporis** : proportionnelle au temps restant jusqu'à la fin de la période de couverture ;

$$\text{Coût Reconstitution} = P \times \frac{\text{Charge Réassureur}}{\text{Portée}} \times \frac{12 - i}{12}$$

- **Double prorata** : combinant à la fois le montant à reconstituer et la durée restante de couverture.

$$\text{Coût Reconstitution} = P \times \frac{c}{100} \times \frac{\text{Charge Réassureur}}{\text{Portée}} \times \frac{12 - i}{12}$$

### 2.5.1.10 Clause No Claim Bonus : pour les traités en XS

Cette clause garantit une réduction de  $m\%$  sur la prime payée à la cédante si, en fin d'année, aucun sinistre n'a touché la tranche.

$$\mathbb{E}(\text{recettes}) = \mathbb{E}(\text{dépenses})$$

$$\Rightarrow PP = \mathbb{E}(X) + \mathbb{P}(X = 0) \times m\% \times PP$$

### 2.5.2 Modes de comptabilisation

Les données cédées par l'assureur prend l'une des trois modes :

**Par année de souscription** : Une police d'assurance est intégrée à un traité de réassurance dès sa date de renouvellement ou d'émission. Ainsi, toutes **les primes et les sinistres associés à cette police sont inclus dans le traité**. Pour les traités d'une durée d'un an, l'exposition au risque s'étend sur deux ans (car les polices annuelles émises en fin de traité restent exposées pendant une **année supplémentaire**). Les sinistres continuent d'être gérés jusqu'à **extinction**.

**Par année de survenance** : Au contraire de comptabilisation par année de souscription, Les **primes** sont **proratisées** en fonction de la durée de couverture pendant la période du traité. Par exemple, une police démarrant juste avant le début du traité apportera la majorité de ses primes à ce dernier. Les **sinistres** sont comptabilisés et suivis jusqu'à **résolution complète** seulement s'ils surviennent pendant la période du traité.

Prenons l'exemple d'un traité s'étalant du 1er janvier N au 31 décembre N. Une police souscrite le 1er décembre de l'année N1 contribuera avec 11/12 de ses primes au traité.

Pour une police émise le 1er juillet N, uniquement les sinistres survenus durant les six mois suivants sont attribués au traité, et la moitié de la prime annuelle concernant l'exposition de l'année N+1 est comptabilisée en tant que Sortie de Portefeuille Primes à la fin de période.

**Par année de compte (Clean-cut) :** Ce mode de comptabilisation est similaire au principe de survenance pour les primes, où **seules les primes liées à la période du traité sont comptabilisées**. En revanche, **Les sinistres survenus ne sont pas suivis jusqu'à extinction** mais sont réglés à la fin de l'année, ce qui est indiqué comme une Sortie de portefeuille sinistrese.

Ce système est souvent **privilegié pour les branches courtes** où les évaluations de provisions pour sinistres en suspens ne posent pas de problème majeur. Pour les sinistres plus conséquents ou complexes nécessitant plus de temps pour être réglés, il est courant de suivre les dossiers jusqu'à leur résolution finale.

### 2.5.3 Plein et fonctionnement de la réassurance

Dans un traité de réassurance proportionnelle, le plein désigne **le montant d'engagement d'assureur cédant par risque**. Le plein maximal est fixé dans le traité, mais la cédante a la liberté d'utiliser un montant inférieur.

**L'engagement sur un risque** est ainsi exprimé en multiple du plein :

$$C = m \times \text{Plein}$$

On distingue deux cas :

- Si  $m < 1$ , on considère que le risque est *dans le plein* et l'intégralité de la prime et des sinistres sont pris en compte au titre du plein (cas des traités en quote-part).
- Si  $m > 1$ , on dit que le risque *excède le plein*; la prime et les sinistres sont alors répartis entre le plein et l'excédent de plein avec des poids respectifs de 1 et du (multiple - 1) (cas des traités en excédent de plein).

Une cédante peut choisir de **structurer** son programme de réassurance en utilisant exclusivement **un traité en quote-part**, **un traité en excédent de plein**, ou **une combinaison des deux** pour laquelle **l'engagement total du traité correspond à la somme de ceux de**

**QP et SP.**

### 2.5.4 Base de calcul de l'engagement du réassureur par risque

La base de calcul de l'engagement par risque peut être exprimée de différentes manières :

- **Somme Assurée** : le montant maximum que la compagnie d'assurance s'engage à payer en cas de sinistre, tel que défini dans le contrat d'assurance.
- **Probable Maximum Loss (PML)** : une estimation du sinistre le plus important qui pourrait raisonnablement se produire.
- **SRE** : Sinistre raisonnablement estimable.

### 2.5.5 Équilibre du traité

L'équilibre du traité est défini par **le rapport entre l'engagement maximal au traité et la prime cédée**. Un traité est considéré comme *déséquilibré* lorsque ce rapport est *élevé*, indiquant que le réassureur assume un risque élevé par rapport à la prime reçue. Inversement, un traité est dit *équilibré* lorsque ce rapport est *faible*, signifiant que le montant du risque assumé est couvert par la prime perçue.

### 2.5.6 Chargement de sécurité et principe de prime

Le chargement de sécurité en réassurance est une **marge ajoutée** aux primes basées uniquement sur les pertes prévues, afin de **protéger le réassureur contre les fluctuations potentielles de la sinistralité** et donc d'assurer la stabilité financière de la réassurance.

Parmi les principaux objectifs du chargement de sécurité :

- **Protéger contre la volatilité extrême** : En réassurance, certaines années peuvent connaître des sinistres graves ou catastrophiques extrêmement coûteux (incendie Beyrouth). Le chargement de sécurité contribue à former une réserve financière pour absorber ces chocs.
- **Couvrir l'incertitude des estimations** : Les modèles actuariels utilisés pour calculer les primes sont basés sur des données historiques et des hypothèses qui peuvent ne pas capturer parfaitement la réalité future. Le chargement de sécurité aide à couvrir le risque que les sinistres réels soient plus élevés que les estimations.

Pour calculer le chargement de sécurité, nous nous basons sur le principe de prime défini par plusieurs mesures de risque, Toutes ne respectent pas les mêmes propriétés. On cite :

- **Principe de l'espérance** :  $P(X) = (1 + \beta)E[X]$
- **Principe de la variance** :  $P(X) = E[X] + \beta \text{Var}[X]$
- **Principe de l'écart-type** :  $P(X) = E[X] + \beta\sqrt{\text{Var}[X]}$
- **Principe de la Value at Risk** :  $P(X) = \text{VaR}[X; \beta] = F_X^{-1}(\beta)$
- **Principe de la Tail Value at Risk** :  $P(X) = \text{TVaR}[X; \beta] = \frac{1}{1-\beta} \int_{\beta}^1 \text{VaR}[X; \alpha] d\alpha$

Principe	Profitabilité	Pas de chargements injustifiés	Translation	Sous-additivité	Homogénéité
Espérance ( $\beta \neq 0$ )	✓			✓	✓
Variance	✓	✓	✓		
Écart type	✓	✓	✓	✓	✓
Exponentiel	✓	✓	✓		
VaR		✓	✓		✓
TVaR	✓	✓	✓	✓	✓

**Table 2.1** – Propriétés vérifiées par les mesures de risque

L'écart-type, bien qu'utile pour mesurer la volatilité, **ne différencie pas les déviations positives des négatives** et ne capture pas les caractéristiques des distributions à queue lourde typiques des contrats de réassurance non proportionnelle. De même, la Value at Risk (VaR) indique **la perte maximale à une faible probabilité** mais ne prend pas en compte les pertes extrêmes. L'Expected Shortfall (ES), ou Tail-VaR, est une meilleure alternative, car elle mesure **la moyenne des pertes au-delà du VaR**, offrant une évaluation plus complète du risque. Pour plus de détails, voir *Deelstra et Plantin* [4] (2006).

## 2.6 Branches couvertes par les traités de réassurance non vie

### 2.6.1 Définition de l'assurance non-vie

L'assurance non-vie, également appelée **assurance de dommages**, couvre tous les types d'assurances non liés à la vie de l'assuré. L'assureur s'engage à indemniser l'assuré, en cas de réalisation d'un risque couvert, et ce en échange d'un paiement, s'appelle la **prime**. La durée générale d'un contrat d'assurance non vie est une **année renouvelable**.

### 2.6.2 Les branches d'études

les branches les plus concernés par les traités non-vie de la SCR sont :

**Assurance Property** : L'assurance incendie est l'une des garanties comprises dans l'assurance multirisque habitation (MRH), au même titre que les assurances « dégât des eaux » ou « événements climatiques ». L'assurance incendie couvre les dommages

causés par un incendie, aux biens matériels qu'elle contient l'habitation garantie.

**Assurance RC & Motors (Casualty) :** Ce type d'assurance protège contre les dommages causés à des tiers (Responsabilité Civile) et les dommages au véhicule lui-même (Motors), couvrant les accidents, le vol, et autres risques liés à l'utilisation de véhicules à moteur. L'assurance RC se compose de **l'assurance responsabilité civile automobile MTPL** (*Motor Third-Party Liability*) et **l'assurance responsabilité générale garantie GTPL** (*General Third-Party Liability*).

**Assurance engineering :** L'assurance construction est une forme de couverture spécialement conçue pour les risques liés aux projets de construction. Elle englobe deux types de protections : **l'assurance dommages-ouvrage** souscrite par le maître d'ouvrage et **l'assurance de responsabilité civile décennale** pour les constructeurs.

**Assurance General Accident :** dont l'objet est la couverture des risques portant atteinte à l'intégrité physique de la personne assurée, des risques liés à la maladie ou des risques d'incapacité et d'invalidité.

**Assurance marine :** L'assurance maritime couvre les dommages subis lors du transport maritime de biens ou de marchandises. On distingue deux types : **l'assurance Cargo** qui protège les marchandises transportés, que ce soit par mer, air ou terre. De son côté, **l'assurance Hull** est dédiée à la protection des bateaux eux-mêmes, couvrant les dommages qui peuvent affecter la coque du navire et ses équipements. Pour l'assurance Hull, on peut ajouter une sous-branche qui s'appelle **Yachts**.

La tarification des traités de réassurance non-vie peut être réalisée en évaluant chaque branche individuellement, ou en appliquant une classification de branches : Non Marine (Property, Engineering, General Accident), Marine (Cargo, Hull) et RC & Motors & AT, ou bien aussi en combinant l'ensemble du portefeuille.

### 2.6.3 Distinction entre branches à développement court et développement long

Les branches d'assurance qui gèrent des sinistres généralement **réglés rapidement**, souvent dans l'année de leur survenance, sont appelées "assurances à développement court" (par exemple : **l'assurance incendie**).

En revanche, Les branches caractérisées par des sinistres qui, en raison de leur nature, **nécessitent un règlement sur plusieurs années**, sont qualifiées de *développement long*

(exemple : l'assurance automobile, responsabilité civile générale). Les raisons de ces délais peuvent inclure des raisons judiciaires (détermination des responsabilités, des indemnités) ou des raisons intrinsèques (consolidation de sinistres corporels graves). À un moment donné, tel que lors de la tarification d'un traité, il peut rester des sinistres à évaluer.

L'évaluation de la sinistralité exige donc deux autres types de données qui sont :

- **IBNER** (Incurred But Not Enough Reported) : montant provisionné pour couvrir le risque d'une sous-évaluation du sinistre.
- **IBNYR** (Incurred But Not Yet Reported) : montant destiné à couvrir le coût lié aux sinistres déjà survenus mais pas encore déclarés, appelés aussi les "**tardifs**".

### 2.7 Chaîne de production

Dès l'élaboration d'une offre (répond à des besoins spécifiques de couverture de risques d'un assureur), le **souscripteur** de la réassurance s'occupe de toutes les **démarches commerciales et administratives**. Il dispose d'un « guide de souscription » qui reflète la politique de l'entreprise dans les choix des risques à supporter, les capacités ou les priorités à ne pas dépasser. L'actuaire de réassurance intervient ensuite pour effectuer une **évaluation** détaillée des risques associés, en tarifant le traité. Le souscripteur reprend donc la main pour finaliser le contrat de réassurance selon les recommandations de l'actuaire et **prépare la cotation au prix du marché**.

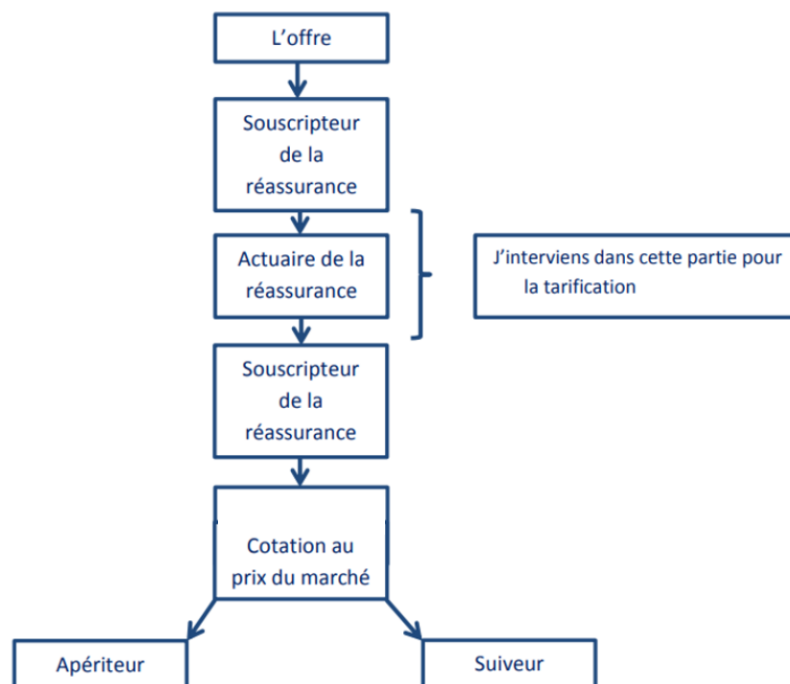
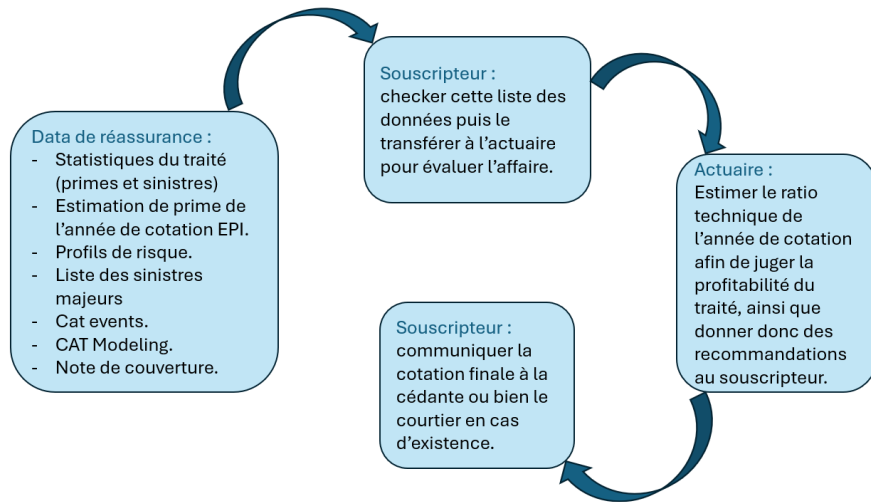
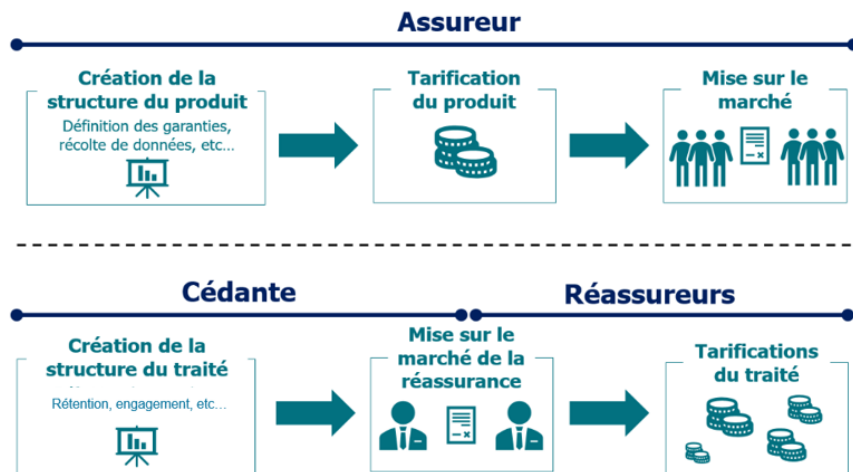


Figure 2.5 – Chaîne de production en réassurance



**Figure 2.6** – Chaîne de production détaillée, Source : moi-même

En assurance, la tarification et la construction du produit sont exclusivement à la charge de l'assureur, tandis qu'en réassurance, **La cédante émet un produit sans savoir à l'avance le tarif qui lui sera proposé**, ce sont les réassureurs qui déterminent par la suite le prix lors des appels d'offres. La cédante se place dans une position similaire à celle d'un client potentiel, mais avec le contrôle des garanties qu'elle souhaite obtenir pour sa couverture et la négociation du tarif.



**Figure 2.7** – Différences entre un produit d'assurance et de réassurance, Source : [2]

# Chapitre 2

## Méthodes de détermination du seuil d'écrêtement

### Sommaire

---

1	Théorie de valeurs extrêmes . . . . .	<b>38</b>
1.1	Lois des valeurs extrêmes GEV (Generalized Extreme Value) .	38
1.2	Loi de Pareto Généralisée : GPD . . . . .	40
1.3	Estimation de l'indice de queue . . . . .	41
1.4	Méthodes graphiques de détermination du seuil . . . . .	42
2	Relation entre le seuil d'écrêtement et l'équilibre du traité . . . . .	<b>47</b>

---

Dans ce chapitre, nous étudierons deux principales méthodes pour calculer le seuil d'écrêtement définit la zone des sinistres majeurs. Premièrement, nous explorerons les méthodes graphiques basées sur la théorie des valeurs extrêmes, qui exploitent les données de sinistres extrêmes pour déterminer la distribution de la queue. Deuxièmement, nous discuterons de l'approche basée sur l'équilibre de traité, qui ajuste le rapport entre le seuil et la prime en fonction de l'équilibre du traité.

# 1 Théorie de valeurs extrêmes

La théorie des valeurs extrêmes est un domaine spécifique des statistiques qui analyse les comportements des distributions aux extrémités, c'est-à-dire les valeurs très éloignées de la moyenne. Elle est donc cruciale, notamment dans des secteurs comme l'assurance et la réassurance. Pour plus d'informations sur cette théorie et ses méthodes de calcul du seuil, nous conseillons ce livre [5] et [6].

La théorie se divise en deux parties essentielles :

- **Le théorème de Fisher-Tippett** : Ce théorème offre un cadre pour comprendre la distribution asymptotique des maximums de séries de variables aléatoires, servant ainsi de parallèle au théorème central limite qui s'applique aux moyennes. Il exige la modélisation via la distribution de valeur extrême généralisée (GEV).
- **La fonction des excès** : Cette partie de la théorie traite des valeurs dépassant un certain seuil et est généralement modélisée par la distribution de Pareto généralisée.

## 1.1 Lois des valeurs extrêmes GEV (Generalized Extreme Value)

Soit  $X_1, \dots, X_n$  un échantillon de variables aléatoires i.i.d. Définissons  $M_n = \max(X_1, \dots, X_n)$  comme la variable aléatoire représentant le maximum de la réalisation  $X_n$ .

Selon le **théorème de Fisher-Tippett**, il existe deux suites réelles  $(a_n)_{n \geq 1}$ ,  $(b_n)_{n \geq 1}$  et  $\gamma$  avec  $a_n > 0, \forall n$ , tels que, pour  $n \rightarrow \infty$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\frac{M_n - a_n}{b_n} \leq x\right) = H_\xi(x)$$

$H_\xi$  est la fonction de répartition de la distribution GEV (Generalized Extreme Value) définie par :

$$H_{\xi,\mu,\sigma}(x) = \begin{cases} \exp\left(-\left[1 - \xi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)\right]^{-1/\xi}\right), & \xi \neq 0 \\ \exp\left(-\exp\left(-\frac{x-\mu}{\sigma}\right)\right), & \xi = 0 \end{cases}$$

La distribution GEV a trois cas particuliers (données par leur fonction de répartition) :

1. Loi de Fréchet,  $\Phi_\alpha(x) = \exp(-x^{-\alpha})\mathbb{I}(x > 0)$ ,  $\alpha > 0$ ;
2. Loi de Weibull,  $\Psi_\alpha(x) = \exp(-(-x)^\alpha)\mathbb{I}(x \leq 0)$ , et 1 sinon,  $\alpha > 0$ ;
3. Loi de Gumbel,  $\Lambda(x) = \exp(-\exp(-x))$ .

L'objectif de cette théorie est d'étudier le comportement de  $M_n$ . En centralisant et normalisant  $M_n$ , elle converge vers une distribution en fonction de  $\xi$  :

- Si  $\xi > 0$ , il s'agit de la distribution de Fréchet, ensemble de loi à queue lourde.
- Si  $\xi = 0$ , il s'agit de la distribution de Gumbel, ensemble de loi à queue légère.
- Si  $\xi < 0$ , il s'agit de la distribution de Weibull, ensemble de loi à queue finie.

### 1.1.1 Détermination du domaine d'attraction

Dans le domaine de la réassurance, les cas les plus courants concernent  $\xi \geq 0$ . Il est donc crucial de déterminer si nous sommes dans le contexte de la loi de Gumbel ( $\xi = 0$ ) ou de la loi de Fréchet ( $\xi > 0$ ). Nous utilisons des graphes pour ajuster les modèles.

- **Loi de Gumbel** : La fonction de répartition de la loi de Gumbel est définie par :

$$F(x) = \exp\left(-\exp\left(-\frac{x-\mu}{\sigma}\right)\right)$$

Il suffit donc de tracer la courbe  $\ln(\ln(1/F(x))), x$  et regarder si les points sont alignés.

- **Loi de Fréchet** : La fonction de répartition de la loi de Fréchet est exprimée par :

$$G(x) = \exp(-x^{-\alpha})$$

De même  $\ln(\ln(\frac{1}{G(x)}))$  doit être linéaire en  $\ln(x)$  pour dire que notre échantillon peut être ajusté par la loi de Fréchet et donc  $\xi > 0$ .

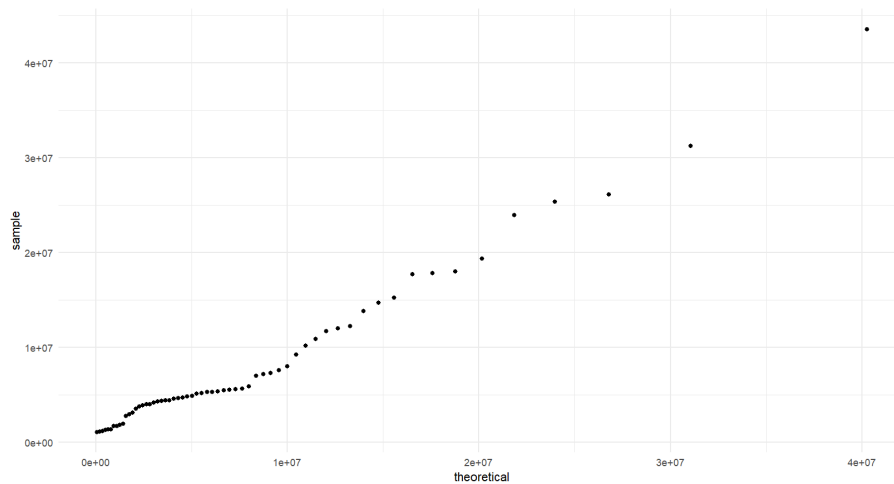
### 1.1.2 QQ-Plot

L'identification de la forme de la queue de distribution peut être aussi se faire par la méthode de *Quantile-Quantile Plot*. Ce graphique compare les quantiles empiriques aux quantiles théoriques d'une loi exponentielle. Il permet de tester l'adéquation entre l'échantillon et une loi paramétrique. Ce graphique représente les points suivants :

$$\left( F^{-1} \left( \frac{i}{n+1} \right), x_i \right)$$

où  $x_i$  est la  $i$ ème valeur de l'échantillon.

Les résultats du Q-Q plot doivent avoir l'allure suivante :



**Figure 1.1** – QQ Plot Exponentielle pour les sinistres majeurs

L'utilisation de ce graphique dans la théorie des valeurs extrême est comme suit :

- Si les données proviennent d'une loi exponentielle, le graphique sera sur la droite.
- si la courbe est au-dessus (en dessous) de la droite, nous sommes face à une distribution à queue plus lourde (plus légère).

## 1.2 Loi de Pareto Généralisée : GPD

La variable  $X$  suit une loi de Pareto Généralisée de paramètres  $\xi$  et  $\sigma > 0$ , ( $X \sim GPD(\xi, \sigma)$ ) si sa densité est de la forme :

$$g_{\xi, \sigma}(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sigma} \left( 1 + \frac{\xi x}{\sigma} \right)^{-(1/\xi+1)}, & \xi \neq 0 \\ \frac{1}{\sigma} \exp \left( -\frac{x}{\sigma} \right), & \xi = 0 \end{cases}$$

et sa fonction de répartition :

$$G_{\xi,\sigma}(x) = \begin{cases} 1 - \left(1 + \frac{\xi x}{\sigma}\right)^{-1/\xi}, & \xi \neq 0 \\ 1 - \exp\left(-\frac{x}{\sigma}\right), & \xi = 0 \end{cases}$$

pour  $x \geq 0$  si  $\xi \geq 0$  et  $0 \leq x \leq -\sigma/\xi$  si  $\xi < 0$ .

Nous allons nous intéresser au comportement de  $X/X > u$  pour des seuils  $u$  suffisamment grand.

### 1.3 Estimation de l'indice de queue

L'indice de queue  $\xi$  fournit des informations sur l'épaisseur de la queue de distribution de la variable  $X$ , indiquant ainsi l'importance des risques extrêmes associés à cette distribution. Selon la théorie des valeurs extrêmes, il existe deux méthodes possibles pour estimer  $\xi$  : **l'approche par la loi des valeurs extrêmes généralisée (GEV)** et **l'approche par la loi de Pareto généralisée (GPD)**.

#### 1.3.1 Approche GEV

Une méthode proposée par Gumbel en 1958 consiste à diviser un grand échantillon de taille  $n$  en  $k$  blocs de taille  $m$  telle que  $m \cdot k = n$ . Chaque bloc contient les variables  $X_{(i-1)m+1}, \dots, X_{im}$ , notons  $Y_i$  le maximum de chaque bloc, définie donc par  $Y_i = \max(X_{(i-1)m+1}, \dots, X_{im})$ .

Les  $X_i$  sont iid et les blocs étant de même taille, par conséquent, les  $Y_i$  sont également iid avec  $P(Y_i \leq y) = F_X(y)^m$ . Si  $m$  est suffisamment grand,  $Y_i$  peut être approximé par une loi GEV( $\xi, \mu, \sigma$ ), et on peut estimer les paramètres  $\xi, \mu$ , et  $\sigma$  par la méthode du maximum de vraisemblance. La log-vraisemblance pour l'échantillon  $Y_1, \dots, Y_m$ , assumant une distribution GEV, est donnée par :

$$\log L = -m \log \sigma - \left(1 + \frac{1}{\xi}\right) \sum_{i=1}^m \log \left(1 + \xi \frac{Y_i - \mu}{\sigma}\right) - \sum_{i=1}^m \left(1 + \xi \frac{Y_i - \mu}{\sigma}\right)^{-\frac{1}{\xi}}$$

et si  $\xi = 0$ ,

$$\log L = -m \log \sigma - \sum_{i=1}^m \exp\left(1 + \frac{Y_i - \mu}{\sigma}\right) - \sum_{i=1}^m \frac{Y_i - \mu}{\sigma}$$

De plus, si  $\xi > -\frac{1}{2}$ , alors  $\sqrt{m}(\hat{\xi}, \hat{\mu}, \hat{\sigma}) \rightarrow (\xi, \mu, \sigma)$  distribué normalement, comme établi

par Smith en 1985.

L'estimation de  $\xi$  en utilisant la distribution GEV à partir d'échantillons de maxima est dite "block componentwise". Cependant, *on ne choisit pas de travailler avec cette approche car certains blocs utilisés peuvent contenir plusieurs valeurs extrêmes, tandis que d'autres non, ce qui influence la précision de l'estimateur.*

### 1.3.2 Approche GPD

L'approche GPD permet de proposer des estimateurs autres que ceux donner par la méthode de maximum de vraisemblance. Ces estimateurs reposent sur l'utilisation de la statistique d'ordre  $X_i$ , pour tout  $i < n$  avec  $n$  la taille de l'échantillon. On s'intéresse aux  $m$  plus grandes valeurs de l'échantillon. Les estimateurs les plus utilisés sont ceux de Pickands, introduit en 1975, de Hill, introduit en 1975 également. Ces estimateurs sont définis comme suit :

$$\hat{\xi}_{Hill}(u) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \ln \left( \frac{X_i}{X_m} \right)$$

$$\hat{\xi}_{Pickands}(u) = \frac{1}{\log(2)} \log \left( \frac{X_m - X_{2m}}{X_{2m} - X_{4m}} \right)$$

Il est possible de montrer que ces estimateurs convergent lorsque  $n \rightarrow \infty$ ,  $m \rightarrow \infty$  et  $m/n \rightarrow 0$ . On a alors la limite asymptotique suivante :

$$\sqrt{m}(\hat{\xi}_{Hill} - \xi) \xrightarrow{loi} N(0, \xi^2) \text{ pour } \xi > 0$$

$$\sqrt{m}(\hat{\xi}_{Pickands} - \xi) \xrightarrow{loi} N \left( 0, \frac{\xi^2(2^{\xi+1} + 1)}{(2^\xi - 1)(\log 2)^2} \right)$$

## 1.4 Méthodes graphiques de détermination du seuil

La section précédente, axée sur la théorie des valeurs extrêmes, nous permet d'introduire diverses méthodes graphiques spécifiquement conçues pour examiner la distribution des queues ainsi que déterminer le seuil de sinistralité extrême.

### 1.4.1 Mean Excess Function

La fonction de la moyenne des excès est définie par :

$$e(u) = E(X - u | X > u), \quad 0 \leq u \leq x_F$$

pour  $x \geq 0$  où  $x_F$  est le point terminal droit de la distribution de  $X$ ,  $x_F = \sup\{x \in \mathbb{R} : F(x) < 1\}$

Un estimateur de la FME est donné par :

$$\hat{e}(u) = \frac{1}{N_u} \sum_{j=1}^{N_u} (x_j - u) 1_{\{x_j > u\}}(x_j)$$

Le graphe de la "mean excess function" en fonction de seuils permet d'avoir une bonne idée du comportement de la queue de distribution de  $X$  :

- Lorsque le graphe de  $e(u)$  est une constante, on a une distribution de type exponentielle ( $e(u) = \lambda$ ).
- Lorsque le graphe de  $e(u)$  est décroissante, on a une distribution à queue fine (Weibull, Gamma).
- Lorsque le graphe de  $e(u)$  est une droite croissante, on a une distribution à queue épaisse. En particulier, Si  $X \sim \text{GPD}(\xi, \sigma)$  avec  $\xi < 1$ , alors  $e(u) = \frac{\sigma}{1-\xi} + \frac{\xi}{1-\xi}u$ .

**Théorème (Pickands, Balkema, De Hann)** : Si  $F$  appartient à l'un des trois domaines d'attraction de la loi des valeurs extrêmes (DA (Fréchet), DA (Gumbel) ou DA (Weibull)), alors il existe une fonction  $\sigma(u)$  positive, définie à une équivalence près quand  $u \rightarrow x_F$ , et un réel  $\xi < 1$  tels que

$$\lim_{u \rightarrow x_F} \sup_{0 \leq x \leq x_F - u} |F_u(x) - G_{\xi, \sigma(u)}(x)| = 0$$

où  $G_{\xi, \sigma}(x)$  est la fonction de répartition de la loi de Pareto généralisée.

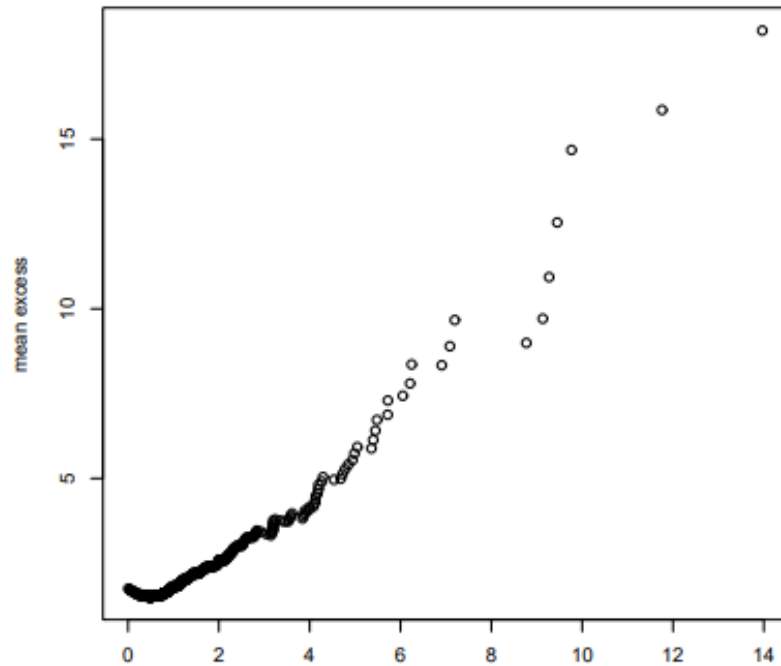
Cette équation se traduit par une approximation  $F_u(x) \approx G_{\xi, \beta(u)}^P(x)$ , où la fonction moyenne des excès est une fonction linéaire de  $u$ .

Notons que ca est juste seulement pour  $\xi < 1$ , quand  $\xi > 1$  l'intégrale diverge et donc  $e(u)$  n'existe pas. Cela est dû au phénomène de fuite vers l'infini propre aux distributions à queues épaisses.

Pour déterminer le seuil optimal  $u^*$ , on cherche le point à partir duquel les valeurs de Mean excess function deviennent plus volatiles.

Cependant, cet outil souffre d'une instabilité pour les dernières observations, ce qui ne facilite pas l'interprétation.

On peut aussi trouver ce seuil d'une manière automatique. Pour cela, nous adaptions une approche proposée par Servel et Tran (*Servel et Tran, 2012*). Cette méthode repose sur la maximisation du coefficient de détermination ( $R^2$ ) pour la régression de  $\hat{e}_n(u)$  sur  $u$ . En définissant une plage de recherche appropriée pour le seuil, nous identifions celui qui optimise la qualité de la modélisation ( $R^2$ ).



**Figure 1.2** – Fonction moyenne des excès  $e(u)$ , Source : [7]

### 1.4.2 L'estimateur de Hill

C'est l'un des estimateurs les plus répandus de l'indice de valeurs extrêmes. Introduit par Hill en 1975, la méthode consiste à ordonner les observations par ordre décroissant  $X_1 > X_2 > \dots > X_n$ , l'indice de queue étant donné par l'équation ci-dessous valable que lorsque  $\xi > 0$  (distributions de Fréchet) :

$$\hat{\xi}_{Hill}(u) = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \ln \left( \frac{X_i}{X_k} \right)$$

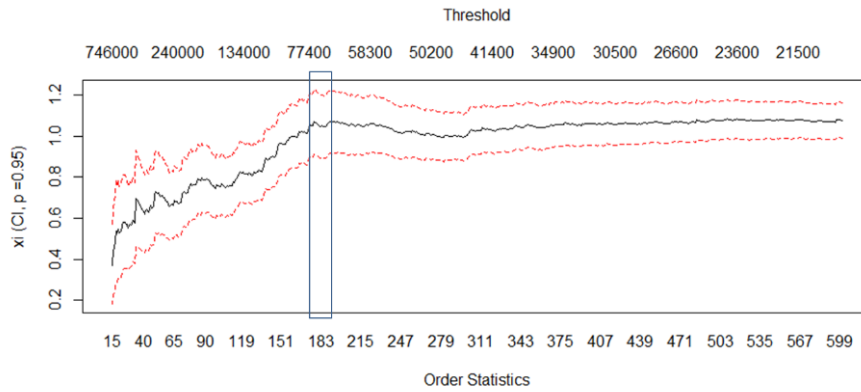
où  $k$  est le nombre d'observations supérieures au seuil  $u$  ( $k \leq n$ ).

Avec un **petit k**, l'estimateur est plus volatile et a donc un intervalle de confiance plus large, ce qui peut conduire à une plus **grande incertitude**.

Avec un **grand k**, l'estimateur peut être **biaisé** si les données moins extrêmes incluses ne représentent pas le comportement des valeurs extrêmes.

L'objectif est donc de trouver une valeur de  $k$  qui **minimise** à la fois le biais et la variance pour obtenir une estimation fiable de  $\xi$ .

Le Hill Plot permet de voir à partir de quel moment l'estimation devient plus **robuste** et **stable**, c'est la valeur qu'on prend pour le seuil.



**Figure 1.3** – Graphe de l’estimateur de Hill, Source : [8]

Pour l’exemple ci-dessus, on observe que l’estimateur de Hill montre une croissance suivie d’une stabilisation à partir de la valeur 70 000.

### 1.4.3 L’estimateur de Pickands

La méthode est analogue à celle de Hill, sauf que nous utilisons l’estimateur suivant :

$$\hat{\xi}_{\text{Pickands}}(u) = \frac{1}{\log 2} \log \left( \frac{X_k - X_{2k}}{X_{2k} - X_{4k}} \right)$$

Son principal avantage réside dans le fait qu’il reste valable quel que soit la distribution des extrêmes (Gumbel, Weibull ou Fréchet). Néanmoins cette caractéristique le rend peu robuste. En plus il est connu pour être très sensible à la taille de l’échantillon ce qui le rend très volatile.

**Remarque :** L’estimateur de Hill fait intervenir la moyenne des logarithmes des observations, le résultat est donc plus lissé et moins sensible au saut d’une observation.

### 1.4.4 Gerstengarbe plot

Cette procédure a été proposée par Gerstengarbe et Werner en 1989 et permet de déterminer le point de départ de la région extrême en donnant une estimation du seuil optimal. L’idée est qu’à partir de la zone des sinistres extrêmes on aura sans doute une modification du comportement des écarts  $\Delta_i = x[i] - x[i - 1]$ ,  $i = 2, \dots, n$  de l’échantillon ordonné,  $x[1] \leq \dots \leq x[n]$  (différence de coût entre deux sinistres).

Nous cherchons donc à identifier un changement dans une série. Nous appliquons la version séquentielle du test de Mann-Kendall : pour chaque valeur  $\Delta_k$ , nous déterminons combien

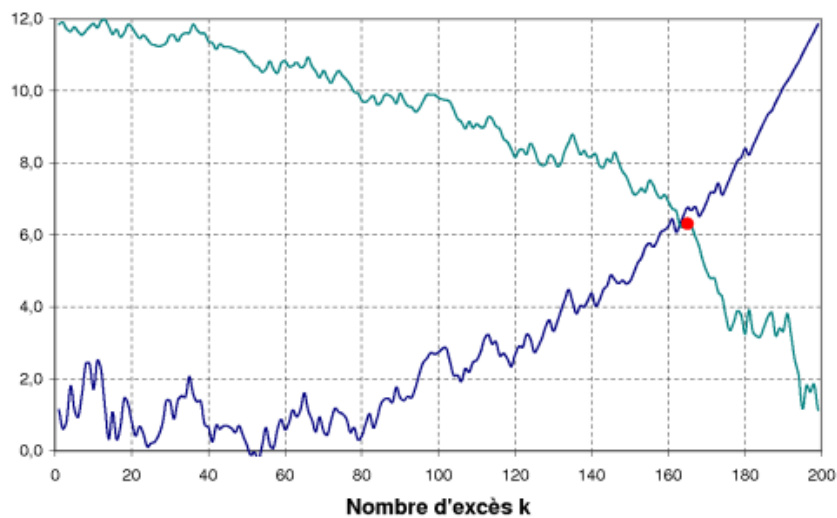
d'éléments précédents  $\Delta_2, \dots, \Delta_k$  lui sont inférieurs, ce que nous notons  $n_k$ .

La statistique du test est donnée par l'écart  $U^*$  entre  $U_i^*$  et  $E(U_i^*)$ , soit :

$$U_i = \frac{U_i^* - E(U_i^*)}{\sqrt{\text{Var}(U_i^*)}} = \frac{U_i^* - \frac{i(i-1)}{4}}{\sqrt{\frac{i(i-1)(2i+5)}{72}}} \quad i = 1, \dots, n-1 \quad (n \geq 10)$$

ou  $U_i^* = \sum_{k=2}^i n_k$

De la même manière, nous calculons une autre série  $U'_i$  pour la série décroissante des différences,  $\Delta_n, \dots, \Delta_2$ . Le point d'intersection de ces deux séries détermine le seuil d'entrée dans la zone extrême.



**Figure 1.4** – Graphe de Gertensgarbe et Werner, Source : [8]

On peut résumer ces méthodes dans le tableau suivant :

Mean excess fonction	Estimateur de Hill	Estimateur de Pickands	Gertensgarbe Plot
- Définie seulement pour $\xi < 1$ . Le seuil choisi correspond à la valeur à partir duquel les valeurs de Mean excess fonction deviennent plus volatiles)	- Valable seulement pour $\xi > 0$ (distribution de Fréchet), il est donc plus stable et plus utilisé	- S'adéquate avec tous les différentes distributions de la loi des valeurs extrêmes, ce qui le rendre plus volatil.	- Donne une valeur exacte correspond au changement du comportement des écarts de sinistres.

**Table 1.1** – Tableau récapitulatif des méthodes graphiques

## 2 Relation entre le seuil d'écrêtement et l'équilibre du traité

L'équilibre d'un traité de réassurance est déterminé par le ratio entre l'engagement maximal et l'encaissement du traité.

Plus un traité est déséquilibré, plus le poids relatif d'un sinistre individuel est significatif, augmentant ainsi le seuil au-delà duquel les sinistres sont jugés importants.

**Mesure de l'exposition du traité :** Comparaison entre l'engagement maximal et l'engagement pondéré selon le profil de risque. Bien que l'engagement maximal rapporté à la prime indique un déséquilibre potentiel du traité, il n'est pas toujours utilisé de manière systématique. Une approche pondérée, prenant en compte les expositions réelles et attribuant plus de poids aux risques les plus importants, peut être plus pertinente mais également plus complexe à mettre en œuvre.

Le seuil est lié au pourcentage de l'encaissement par rapport au ratio prime/engagement par la relation suivante :

$$\ln\left(\frac{\text{Seuil}}{\text{Prime}}\right) = a \ln\left(\frac{\text{Engagement}}{\text{Prime}}\right) - b$$

# Chapitre 3

## La tarification des traités de réassurance non vie : Aspect théorique

### Sommaire

---

1	La tarification des traités proportionnels . . . . .	<b>49</b>
1.1	Calcul de la commission . . . . .	49
1.2	Estimation de loss ratio : LR . . . . .	49
1.3	Calcul de Ratio technique . . . . .	57
2	La tarification des traités non proportionnels en XS . . . . .	<b>58</b>
2.1	Principe . . . . .	58
2.2	Composantes : prime pure, prime de risque, prime technique, prime commerciale . . . . .	59
2.3	Calcul du taux de prime . . . . .	61

---

# 1 La tarification des traités proportionnels

En réassurance proportionnelle, le calcul des primes cédées est simple grâce à son principe (taux de cession). D'une part, La tarification d'un traité proportionnel implique le calcul de la commission de réassurance au profit de l'assureur. D'autre part, elle concerne l'élaboration d'une analyse approfondie de l'affaire cédée avant la souscription d'un contrat en estimant la rentabilité du traité. Pour cela, on estime ce qu'on appelle le ratio technique pour l'année de cotation, qui permet d'accepter ou pas l'affaire à tarifier.

## 1.1 Calcul de la commission

Le prix de la réassurance proportionnelle se matérialise par la commission de réassurance. Celle-ci était conçue pour restituer à la cédante la part de primes cédées, correspondant à ces frais d'acquisition et de gestion.

Le calcul de la commission peut se faire avec la formule suivante (sans LC et PB, voir [1]) :

$$Commission = 100 - (LR + \text{Frais d'acquisition} + \text{Frais Généraux de réassureur})$$

Avec :

- Frais d'acquisition : les frais d'acquisition autre que la commission, Ex : courtage (généralement 10%), taxes...
- Frais Généraux de réassureur : frais de gestion (généralement 5%), frais de rétrocession...

Le calcul de la commission repose donc sur l'estimation du loss ratio LR. En général, la commission commerciale fait l'objet de négociation entre le leader et le courtier (ou la cédante en cas de souscription directe).

## 1.2 Estimation de loss ratio : LR

Le ratio de sinistralité d'un traité représente **l'estimation du rapport entre la sinistralité réassureur et la prime cédée** au réassureur S/P pour l'année de cotation.

$$LR = \frac{\sum_{i=1}^n S_i}{\sum_{i=1}^n P_i}$$

Où :

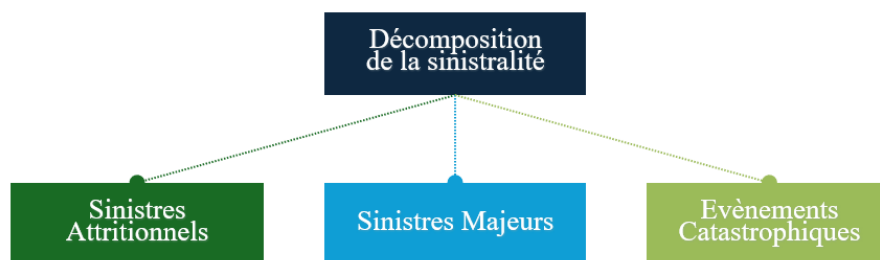
- $n$  : nombre de risques du traité
- $S_i$  : sinistralité spécifique du risque  $i$  cédée au traité (en monétaire)
- $P_i$  : prime du risque  $i$  cédée au traité (en monétaire)

Étant donné que la composition des traités de réassurance inclut souvent un grand nombre de risques (souvent **hétérogènes**), il est pratiquement impossible de définir précisément la loi des  $S_i$ . Pour cela, **une segmentation de la sinistralité est mise en place**.

### 1.2.1 Décomposition de la sinistralité : sinistres attritionnels, Sinistres Majeurs et Cat Events

En assurance, on peut avoir une grande diversification des montants des sinistres et de leurs fréquences. Certes que la plus part des sinistres présentent des petits montants, cela n'empêche de trouver aussi des sinistres avec des montants élevés. Généralement le montant moyen des sinistres est beaucoup moins que la médiane. Cet écart est dû à certains sinistres ayant un montant très élevé. On distingue dans ce cas entre deux types de sinistres :

- **Sinistres attritionnels** : ce sont des sinistres ayant une petite sévérité avec une fréquence élevée. Ce type de sinistralité touche généralement les **tranches travaillantes** et qualifié donc d'une sinistralité relativement stable.
- **Sinistres extrêmes** : les sinistres extrêmes sont des sinistres caractérisés par une sévérité élevée et une faible fréquence, on distingue entre les sinistres majeurs et les évènements catastrophique. Ce type touche les **tranches partiellement ou non travaillantes**. Ils sont généralement défini par les sinistres dont le montant dépasse un certain seuil. Ils impactent le résultat de la compagnie de façon importante et le rend plus volatil. De ce faite, une **détermination prudentielle du seuil de séparation** s'impose pour une bonne modélisation de la sinistralité et une bonne maîtrise de risque.



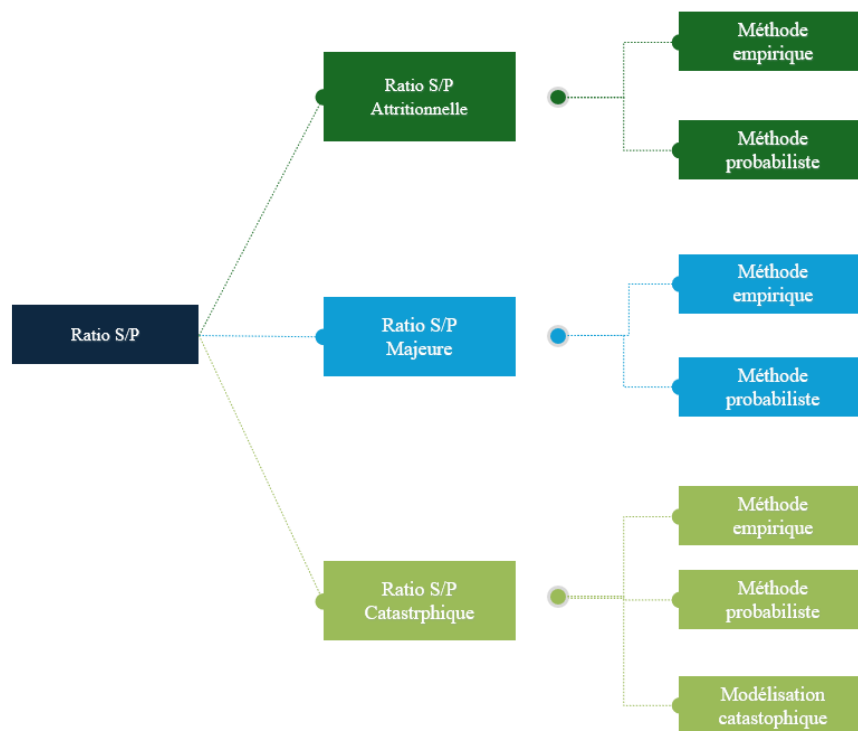
**Figure 1.1** – Décomposition du loss ratio, Source : moi-même

Le **ratio de sinistralité sur prime LR** d'un traité est estimé donc, à l'aide de la décomposition de sinistralité, comme suit :

$$LR = LR_{Attr} + LR_{Maj} + LR_{CAT}$$

Où  $LR_{Attr}$  : c'est le ratio de sinistralité attritionnelle ,  $LR_{Maj}$  : est celle de sinistralité majeure et  $LR_{CAT}$  correspond au ratio des événements catastrophiques.

Les méthodes de calcul de ces différents ratios sont illustrées dans la figure 1.2.



**Figure 1.2** – Les méthodes de calcul de différents types de ratio S/P, Source : moi-même

## 1.2.2 Préparation des données : Mise en statistique «AS IF»

Pour calculer le loss ratio, on fait recours à l'historique prime et sinistre du portefeuille traité, en supposant que **la sinistralité future est expliquée par celle du passé**. Cependant, l'expérience traité ne peut être pas utilisée directement sans l'actualiser afin de constituer des données comparables à l'année de cotation. Cette correction s'appelle la mise en statistique « As If », elle devra comporter :

**Indexation de la statistique** : vise à neutraliser l'impact de l'inflation monétaire, en se basant sur une unité monétaire constante.

**Redressement de la statistique :** a pour objectif de reconstituer une base de portefeuille homogène dans le temps, en prenant en compte l'évolution du profil des risques (comme les capitaux et le nombre de polices) ou des garanties accordées (ctelles que les franchises).

**Revalorisation de la statistique :** consiste à adapter la base aux évolutions de l'environnement du risque, qu'il s'agisse du coût des matières premières pour la reconstruction de bâtiments ou des changements juridiques (par exemple, l'introduction de nouvelles lois d'indemnisation des accidents de la route).

Ces processus : indexation, redressement et revalorisation, reposent généralement sur deux indices :

- **Indice prime :** reflète l'évolution des tarifs et des garanties de départ, soit celle de la prime moyenne initiale.
- **Indice sinistre :** représente l'évolution des coûts de sinistre, tenant compte de l'inflation des différentes composantes des sinistres.

Les indices les plus utilisés :

- indice RI (risques industriels)
- indice CPI (l'indice des prix à la consommation)
- indice ICC (l'indice du coût de la construction)

**La mise en "AS IF" des primes :** La valeur « AS IF » de la prime cédée au réassureur de l'année k vue l'année de cotation n est donnée par :

$$P_k^n = P_k \times \frac{I_n}{I_k}$$

Avec :

$I_i$  : est l'indice pour l'année  $i = n, k$ ;

$P_k$  : est la valeur de prime cédée au réassureur de l'année k;

**La mise en "AS IF" des sinistres :** De même, la mise en "AS IF" du sinistralité réassureur se fait selon la formule suivante :

$$S_k^n = S_k \times \frac{I_n}{I_k}$$

Avec :

$S_k$  : le montant de sinistre à la charge du réassureur pour l'année k.

**Remarque :** La mise en "AS IF" peut se faire également à l'aide d'une **mesure d'exposition**, lorsque celle-ci est donnée. La mesure d'exposition correspond généralement au **nombre de polices** ou à la **somme assurée** en vigueur chaque année. Par exemple :

$$S_k^n = S_k \times \frac{SA_n}{SA_k}$$

Où  $SA_k$  est la somme assurée de l'année  $k$ .

### 1.2.3 Estimation de la sinistralité attritionnelle

Ce ratio aide à comprendre combien les pertes régulières (de faible coût) représente des primes acquises. Un ratio élevé peut indiquer que la cédante est fréquemment touchée par de petits sinistres, ce qui pourrait signaler une bonne capacité de souscription.

Le processus du calcul de ce ratio est comme suit :

#### 1. Projection des sinistres attritionnels et des primes à l'ultime :

Après avoir revalorisé les primes et les montants de sinistres attritionnelles à l'année de cotation (2023) par année d'origine, on développe ces données à l'ultime avec la méthode de «Chain Ladder».

#### Présentation de la méthode de Chain Ladder :

Cette méthode suppose une relation explicative entre les années de développement et la sinistralité future :

$$C_{i,j+1} = \lambda_j \times C_{i,j}$$

pour  $i, j = 0, \dots, n - 1$ .

Où :  $\lambda_j$  : est le facteur de développement de l'année de développement  $j$  à l'année de développement  $j + 1$ .

La méthode de Chain Ladder repose sur deux hypothèses indispensables sur les données contenues dans les triangles, à savoir :

- **(H1)** : Les paiements cumulés  $C_{i,j}$  des années de survenance sont indépendants.
- **(H2)** : Les années de développement sont des variables explicatives du comportement des paiements futurs.

Sous ces hypothèses, les facteurs de développement sont estimés par :

$$\hat{\lambda}_j = \frac{\sum_{i=0}^{n-j} C_{i,j+1}}{\sum_{i=0}^{n-j} C_{i,j}}$$

pour  $j = 0, \dots, n - 1$

les facteurs à l'ultime d'une année  $i$  égal donc à :

$$\hat{\lambda}_{i,ult} = \prod_{k=n-i+1}^{n-1} \hat{\lambda}_k$$

Finalement, la charge à l'ultime est donnée par :

$$C_{proj_i} = \hat{\lambda}_{i,ult} \times C_{i,i}$$

Avec :  $C_{i,i}$  est le sinistre cumulé à l'année  $i$ .

**Remarque** : Avant de procéder au calcul des facteurs, il est essentiel de commencer par établir le triangle des facteurs par année de survenance et par année de développement :  $\lambda_{ij} = \frac{C_{i,j+1}}{C_{i,j}}$ . Cela permet de détecter les facteurs aberrants (notamment éloignés de la moyenne) ainsi que ceux inférieurs à 1, qui peuvent perturber le calcul des facteurs.

Pour remédier ce problème, en cas d'existence, on applique l'une des méthodes suivantes :

- Éliminer ces facteurs, ce qu'on appelle **Chain Ladder avis d'expert**.
- Appliquer la technique de lissage
- Substituer ces facteurs par la moyenne des autres
- Pondération des coefficients en fonction du volume des charges de sinistres constatés

De la même manière, **les primes projetées** sont calculées.

### 2. Méthode empirique :

Le ratio de sinistralité attritionnelle  $LR_{Attr}$  peut être calculer empiriquement en **tranchant** les charges liées aux sinistres majeurs et aux événements catastrophiques du total des charges. Les résultats sont ensuite multipliés par les facteurs de développement obtenus via la méthode de *Chain Ladder*. Cette opération permet d'obtenir la charge attritionnelle indexée. Le  $LR_{Attr}$  est déterminé en divisant la somme de ces charges, pour toutes les années de survenance, par la somme des primes

projetées. La formule mathématique s'écrit donc :

$$LR_{Att} = \frac{\sum \text{Ch Attr AS IF}}{\sum \text{Primes proj AS IF}} \times (\sigma_{S/P} + 1)$$

Avec  $\sigma_{S/P}$  c'est l'écart-type du loss ratio, correspond au chargement de sécurité.

**Remarque :** L'utilité de la méthode empirique se présente en cas de périodicité insuffisante pour une bonne modélisation du ratio de sinistralité, ou lorsque les données cédées sont agrégées.

### 3. Méthode probabiliste :

En supposant que les ratios S/P des années précédentes sont des scénarios possibles pour le S/P de l'année de cotation, ce dernier peut être estimé par la formule suivante :

$$LR_{Attr} = E(S_{Attr}/P)$$

où  $S_{Attr}$  est la sinistralité attritionnelle et  $P$  est la prime projetée.

Dans un portefeuille d'assurance, les corrélations entre les sinistralités individuelles de chaque risque sont généralement quasi-nulles, particulièrement pour des risques comme l'incendie. Cependant, une corrélation peut survenir en raison de scénarios spécifiques. Dans l'industrie, il est important de traiter deux usines adjacentes comme un seul et même risque en raison de leur proximité et du potentiel de risques partagés.

Pour un **nombre grand n de risques**, le théorème central limite peut nous permettre de modéliser le taux de sinistralité attritionnelle totale par une loi normale.

Comme le taux de sinistralité ne peut pas être *négatif*, On choisit de le modéliser  $LR_{Attr}$  par **une loi log-normale**. Sa densité est formulée comme suit :

$$f_{Attr}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma x} \exp\left(-\frac{(\ln x - m)^2}{2\sigma^2}\right)$$

Avec  $m$  correspond à la moyenne et  $\sigma$  la volatilité. Ces paramètres peuvent être estimés soit par la méthode de maximum de vraisemblance ou la méthode des moments.

### 1.2.4 Estimation de la sinistralité majeure

Ce ratio détermine la part des sinistres majeurs des primes acquises. On peut le calculer à l'aide de l'une des deux méthodes, selon la disponibilité des données :

1. **Méthode empirique :**

On commence par calculer le **PayBack** pour chaque sinistre majeur  $i$  :

$$PayBack_i = \frac{1}{\text{Période de retour}} = P(\text{avoir un sinistre} > x)$$

La perte moyenne pour chaque sinistre majeur est ensuite calculée en multipliant le montant du sinistre majeur indexé par son PayBack. Le  $LR_{\text{Maj}}$  représente la somme de ces pertes moyennes divisée par la somme des primes projetées indexées. Mathématiquement :

$$LR_{\text{Maj}} = \frac{\sum \text{Sin Maj AS IF} \times \text{PayBack}}{\sum \text{Primes proj AS IF}} \times (\sigma_{S/P} + 1)$$

2. **Méthode probabiliste :**

Le  $LR_{\text{Maj}}$  peut être estimé en utilisant le principe de prime de l'écart-type :

$$LR_{\text{Maj}} = \frac{E(S_{\text{Maj}}) + \beta \times \sqrt{VAR(S_{\text{Maj}})}}{EPI}$$

où  $S_{\text{Maj}} = \sum_{i=1}^N \min(X_i, C)$  et  $E(S_{\text{Maj}})$  est l'espérance de la somme des sinistres graves (qui sont supérieurs au seuil optimal  $u^*$ ) par année, et  $EPI$  (*Estimated Premium Income*) est la prime acquise estimée pour l'année de cotation.

Cette méthode est basée sur le modèle de risque collectif (modèle fréquence / sévérité, voir Annexe C), il consiste à modéliser séparément le coût de sinistres individuelles  $X_i$  (dépassant le seuil d'écrêtement) et leur fréquence  $N$ . Sous l'hypothèse que *les  $X_i$  sont indépendants et identiquement distribués* de même loi qu'une variable aléatoire  $X$ , et que *les  $X_i$  et  $N$  sont des variables aléatoires indépendantes*, on obtient le résultat fondamental de ce modèle donné par :

$$E(S_{\text{Maj}}) = E(X^{\text{Réass}}) \times E(N)$$

- Les lois les plus utilisées pour la modélisation de la **fréquence N** sont la *distribution de Poisson* et la *distribution binomiale négative* (voir Annexe 1).
- **La sinistralité extrême X** fera l'objet d'une modélisation par l'un des lois de la *famille des valeurs extrêmes*, généralement la loi de Pareto (voir Annexe 1).

**Remarque :** Ce type de sinistralité peut être mieux modéliser par une loi de Pareto généralisée comme l'indique la théorie des valeurs extrêmes.

### 1.2.5 Estimation de la sinistralité CAT

Le ratio des événements catastrophes est défini comme le rapport entre les pertes totales issues des événements catastrophiques (comme les ouragans, les tremblements de terre, les inondations majeures, etc.) et les primes acquises.

#### 1. Méthode empirique :

De la même manière, le calcul du  $LR_{CAT}$  s'effectue après l'indexation des montants des événements catastrophiques puis les multiplier par la période de retour pour chaque perte catastrophique. La somme de ces résultats est ensuite divisée par la prime EPI fournie par la cédante, conduisant ainsi au  $LR_{CAT}$ .

#### 2. Méthode probabiliste :

Cette méthode est exactement semblable à celle utilisée pour les sinistres majeurs.

#### 3. Modélisation catastrophique :

Généralement, Nous ne disposons pas de **suffisamment de données** pour établir appliquer la méthode empirique ou bien probabiliste. Une autre contribution est l'utilisation de plus en plus répandue de tables d'événements, développés par des sociétés de modélisation des risques naturels. L'estimation de loss ratio d'événements catastrophiques est donnée par la formule suivante :

$$LR_{CAT} = \frac{\sum_{i=1}^p AAL_i + \beta \times SD_i}{EPI}$$

Où pour  $i = 1, \dots, p$ ,  $AAL_i$  représente Average Annual Loss de l'événement  $i$  et  $SD_i$  désigne l'écart-type des pertes de l'événement  $i$ .

Ces données se résume dans une base de donnée de modélisation des catastrophes, donnée par la cédante, on l'appelle **Cat Modeling**.

## 1.3 Calcul de Ratio technique

Le ratio technique en réassurance proportionnelle est un indicateur essentiel pour évaluer la performance d'un traité de réassurance. Il mesure l'équilibre entre les primes collectées et les charges estimées.

Ce ratio est également utilisé pour comparer la performance de différents traités de réassurance ou de divers portefeuilles au sein d'une même compagnie de réassurance, offrant ainsi une base pour des décisions stratégiques en matière de tarification et de souscription des traités.

Le ratio technique est généralement calculé sur la base des éléments suivants :

- **le ratio sinistres/primes S/P** (loss ratio LR) : correspond à l'estimation du rapport sinistres de réassurance sur primes de réassurance pour l'année de cotation.
- **La commission** (et **surcommission**), définie **fixée C** ou **à l'échelle C(LR)**.
- **Courtage** (Brokerage BK) : en pourcentage de la prime **EPI**.
- **taxes** : en cas d'existence des impôts imposés par l'état.
- **La participation aux bénéfices PB**, en cas de **profit** pour le réassureur (en pourcentage de la prime EPI).
- **marge** = 100% - des frais généraux de réassureur : c'est la marge technique définie selon le résultat technique de la compagnie de réassurance (en pourcentage de la prime EPI). Pour la SCR, on prend  $\text{marge} = 90\%$  correspond à des frais généraux égal à 10% .

Le **ratio technique RT** est défini par la formule suivante :

$$RT = RT_{APB} + PB \times (\text{marge} - R_{APB})^+$$

Avec  $RT_{APB}$  : est le *ratio technique avant participation aux bénéfices* défini par :

$$RT_{APB} = LR + C(LR) + BK + taxes$$

**Interprétation** : Un ratio technique inférieur à un seuil prédéfini indique que l'entreprise réalise un **bénéfice technique** (les primes couvrent les sinistres et les frais). En revanche, Un ratio supérieur à ce seuil signifie que l'entreprise subit une **perte technique** (les sinistres et/ou les frais dépassent les primes).

## 2 La tarification des traités non proportionnels en XS

### 2.1 Principe

Chaque année, lors de la période de renouvellement des traités de réassurance, les cédantes transmettent aux réassureurs des informations historiques concernant leurs expositions et leur sinistralité. Cependant, seuls les sinistres dépassant un **seuil de**

**déclaration**, inférieur au montant de la priorité de la première tranche du traité, sont communiqués, ce qui peut introduire un biais concernant les tranches bases.

Le défi pour le réassureur est alors d'estimer sa charge future de sinistralité en se basant sur ces données. Toutefois, ces informations ne sont pas directement exploitables et nécessitent une revalorisation pour qu'elles soient comparables avec l'année de cotation.

Le choix du modèle de tarification d'un traité en excédent de sinistres (XS) dépend à la fois de la nature de la branche à tarifer, qu'il s'agisse d'une branche à développement court ou long, et du type de la tranche concernée. Les tranches peuvent être classées en trois catégories : travaillante (celle pour laquelle la plupart des années sont touchées par l'historique sinistre individuel), partiellement travaillante (peu d'années d'historique de tarification sont touchées), et non travaillante (aucun sinistre n'affecte la tranche pour tous les années de l'historique).

	<b>Tranche</b>		
	<b>Travaillante (Working layer)</b>	<b>Partiellement Travaillante</b>	<b>Non Travaillante</b>
<b>Branches à développement court</b>	- Modèle probabiliste* - Burning Cost - Tarification sur exposition - Simulations	- Modèle probabiliste* - Tarification sur exposition - Simulations	- Simulations* - Tarification sur exposition
<b>Branches à développement long</b>	- Burning Cost* - Simulations	- Simulations* - Modèle probabiliste - Tarification sur exposition	- Tarification sur exposition* - Modèle probabiliste - Simulations

Le modèle suivi du symbole \* correspond à celui qui est fréquemment utilisé.

Nous nous limiterons à présenter la méthode Burning Cost, le modèle probabiliste et la tarification par simulation.

## 2.2 Composantes : prime pure, prime de risque, prime technique, prime commerciale

La tarification en réassurance correspond à l'estimation de la prime, soit le montant que la cédante devra payer, en échange de la cession (totale ou partielle) de son risque à son réassureur.

Cette prime est constituée de divers composantes : la prime pure, les chargements, et les frais. L'ajout de chaque élément construit une nouvelle notion de prime :

- **Prime pure** : La prime pure ou le taux pur, pour une tranche spécifique correspond au coût moyen attendu des sinistres au sein de cette tranche, c'est le prix du risque.
- **Prime de risque** : obtenue en ajoutant une marge de risque qui s'appelle aussi le chargement de sécurité. Ce chargement doit permettre principalement de couvrir le risque de fluctuation, qui correspond aux variations du montant total des sinistres par rapport à la moyenne ou à cause des erreurs de calcul.

Comme déjà mentionné, ce chargement peut être calculé avec différentes **mesures de risque** selon le principe de prime (voir la partie 2.5.6). Cependant, le chargement de sécurité est généralement un pourcentage ( $\beta$ ) de l'écart type de la distribution du montant total à charge. En réassurance, un pourcentage de 20% est couramment utilisé :

$$\text{Chargement de sécurité} = 20\% \times \sqrt{\text{Var}(S_N)}$$

On peut calculer la prime de risque en utilisant la formule inspirée par Gunnar Benktander :

$$\text{prime de risque} = \text{prime pure} + 20\% \times \sqrt{\text{Var}(S_N)}$$

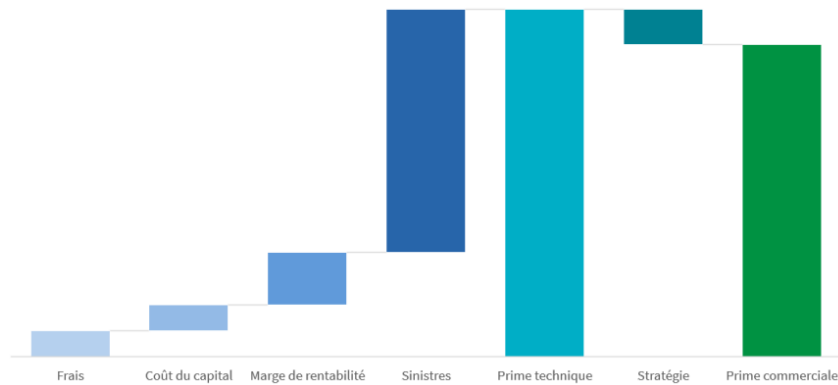
- **La prime technique** : Cette prime obtenue en ajoutant les frais généraux de réassureur. Cela inclut les frais d'acquisition (la commission de courtage), les frais d'administration (gestion des traités et des primes) ainsi que Le coût du capital ; afin de satisfaire les attentes des actionnaires en matière de retour sur investissement. Comme les fonds propres sont souvent placés dans des actifs sûrs mais peu rentables, la différence avec le rendement attendu par les actionnaires est répercutée sur la cédante dans la prime technique.

La prime technique peut être calculée à l'aide de la formule suivante :

$$\text{prime technique} = \frac{\text{prime de risque}}{(1 - BK - FG - AF)}$$

où  $BK$  représente les frais de courtage (broukage),  $FG$  les frais de gestion et  $AF$  les autres frais incluent le coût de capital, la marge bénéficiaire...

- **La prime commerciale** : qui est la prime communiquée à la cédante, est souvent inférieure à la prime technique. L'écart entre les deux primes peut être interprété comme une remise accordée par le réassureur dans le cadre de sa démarche commerciale.



**Figure 2.1** – Décomposition : Prime pure, prime technique et prime commerciale

**Remarque :** Au lieu de fixer un montant absolu de prime, Il est préférable de travailler avec un taux, la cotation se fait donc en pourcentage d'une **assiette définie contractuellement** : **taux pur, taux de risque, taux technique.**

### 2.3 Calcul du taux de prime

Le calcul du taux de prime s'appuie sur les méthodes de la tarification déjà mentionnées : la méthode Burning Cost, le modèle probabiliste et la tarification par simulation. Ces méthodes utilisées reposent sur l'expérience individuelle de l'affaire considérée. Une mise en statistique des données est donc requise, comme dans le cas de la tarification proportionnelle.

#### 2.3.1 La mise en statistique "AS IF" des données historiques

Afin d'obtenir des données évaluées dans les conditions actuelles. Elle implique deux principaux retraitements :

- **La mise en "AS IF" des assiettes de primes historiques :** Les montants des assiettes de primes sont ajustés au niveau de l'année de couverture, en obtenant des assiettes de primes "as if". Dans notre cas, l'indexation se fait avec l'un des indices CPI.
- **La mise en "AS IF" des montants de sinistres :** Les montants de sinistres sont ajustés en fonction de l'évolution de l'**exposition du portefeuille**. Bien que la probabilité de survenance d'un sinistre reste théoriquement la même d'une année à l'autre, le montant des dommages peut varier en raison de changements dans le nombre de polices assurées et dans les sommes assurées. Ainsi, les sinistres sont recalculés en "as if" pour refléter ces évolutions.
- **La mise en "AS IF" de nombre de sinistres :** cette indexation se fait dans le cadre de la **méthode probabiliste** ou la **méthode de simulation**, présentées par la suite.

Elle s'applique de façon similaire à celle des sinistres.

Pour plus de détails sur la mise en statistique "AS IF", voir la partie 1.2.2.

## 2.3.2 Présentation des méthodes

### 2.3.2.1 Méthode du Burning Cost

Le "Burning Cost" (taux de flambage) est une méthode de tarification qui repose sur l'hypothèse que l'historique sinistre est un scénario possible des pertes potentielles à venir. Cette méthode permet le calcul de taux de prime, appelé aussi le "burning cost". Il est obtenu par la moyenne des ratios Sinistres "as if" sur les assiettes de primes "as if".

Pour un traité C xs P, la charge de réassureur pour l'année  $i$  est donné par :

$$C_i = \min \left( \max \left( \left( \sum_{j=1}^{n_i} X_j^{Réass} \right) - AAD, 0 \right); AAL \right)$$

où

$$X_j^{Réass} = \min(\max(X_j^{as\ if} - P; 0); C)$$

et  $n_i$  c'est le nombre de sinistres survenus l'année  $i$ .

Le Burning Cost pur  $BC_{pur}$  se calcule alors comme suit :

$$BC_{pur} = \frac{\sum_{i=1}^N C_i}{\sum_{i=1}^N \Pi_i^{as\ if}}$$

Avec  $\Pi_i^{as\ if}$  : assiette de primes de l'année  $i$  "as if".

En introduisant  $BC_i^{pur} = \frac{C_i}{\Pi_i^{as\ if}}$  comme étant le Burning Cost de l'année  $i$ , on peut réécrire le Burning Cost pur global sous la forme :

$$BC_{pur} = \frac{\sum_{i=1}^N BC_i^{pur} \times \Pi_i^{as\ if}}{\sum_{i=1}^N \Pi_i^{as\ if}}$$

Ainsi, le Burning Cost pur s'interprète comme étant la moyenne des Burning Cost purs annuels, pondérés par l'assiette de primes "as if" de chaque année  $i$ . En **réassurance des catastrophes**, la mise en "as if" ajuste la sévérité des événements, mais pas leur fréquence. Par la suite, on calcule le taux technique  $BC_{technique}$  selon la formule suivante :

$$BC_{technique} = \frac{BC_{pur} \times (1 + \beta \times \sigma)}{1 - BK - FG - AF}$$

Avec  $\sigma$  : volatilité des taux  $BC_i$  de l'année  $i$ .

**La prime technique attendue** pour l'année actuelle ( $N + 1$ ) correspond simplement à

$$\text{Prime technique} = BC_{\text{technique}} \times \Pi_{N+1}$$

En pratique, le Burning Cost est souvent utilisé pour obtenir une estimation rapide du coût d'un programme de réassurance, en particulier pour les tranches basses. Toutefois, cette méthode présente des **limites**, notamment une volatilité des résultats selon la période d'étude et une incapacité à fournir des tarifs pour *les tranches de risque non travaillantes*. Pour surmonter ces défis, une approche de **tarification probabiliste** est adoptée.

### 2.3.2.2 Méthode probabiliste

Le principe de cette méthode est exactement le même présenté dans la partie de la tarification des traités proportionnels. L'utilité de cette méthode se révèle dans la tarification des tranches pour lesquelles on dispose de peu d'informations.

Contrairement à la méthode \*Burning Cost\*, le modèle probabiliste intègre toutes les données disponibles, toutes les couches de réassurance et les clauses contractuelles. Elle permet d'obtenir une distribution du risque agrégé en modélisant à la fois le coût des sinistres ( $X$ ) ainsi que leur fréquence ( $N$ ), on en déduit la modélisation des montants pris en charge par le réassureur ( $S_N$ ). Le prix de l'excédent de sinistres pu aussi la prime pure est alors, comme l'indique le modèle de risque collectif :

$$\mathbb{E}(S_N) = \mathbb{E}(S) \times \mathbb{E}(N)$$

Le taux technique égal à :

$$\text{taux technique} = \frac{\mathbb{E}(S) \times \mathbb{E}(N) + \beta \times \sqrt{\mathbb{E}(N) \times \text{Var}(S) + \text{Var}(N) \times \mathbb{E}(S)^2}}{GNPI \times (1 - BK - FG - AF)}$$

Les lois les plus couramment utilisées pour modéliser les variables aléatoires  $X$  et  $N$  sont respectivement la loi de Pareto pour  $X$  et la loi de Poisson pour  $N$ , ce qui conduit à l'utilisation classique d'une loi composée Poisson-Pareto pour modéliser  $S_N$ .

Dans des situations plus complexes comme avec des clauses annuelle, cette méthode n'est plus utile. Une simulation aléatoire ou l'algorithme de transformée de Fourier rapide peut être nécessaire pour agréger les distributions de fréquence et de sévérité.

### 2.3.2.3 Méthode par Simulation

La méthode de simulation est un outil puissant pour la tarification des réassurances, particulièrement lorsque les méthodes analytiques deviennent impraticables en raison de la complexité du modèle c'ad en cas de besoin de la distribution de la sinistralité individuelle comme le cas des clauses particulières.

#### Principe de la tarification par Simulation :

la tarification par simulation repose sur la génération aléatoire de variables suivant des lois probabilistes. Cela permet d'estimer le tarif final en observant la convergence des résultats après un grand nombre de simulations.

#### Mise en Œuvre de la Simulation :

Dans le cadre de la simulation pour la tarification, l'actuaire génère un échantillon de sinistres selon les lois de fréquence et de sévérité. Chaque simulation inclut :

1. Indexation des primes GNPI par un indice d'indexation, et des sinistres ainsi que de leur fréquence en fonction des GNPIs indexés.
2. Ajuster la sévérité, généralement par une loi de la famille de Pareto et tester l'adéquation à l'aide du test de kolmogorov smirnov ou d'Anderson darling.
3. Ajuster la fréquence avec une loi appropriée comme la loi de Poisson ou la loi binomiale négative, puis tester l'adéquation à l'aide du test de khi-deux de pearson.
4. Générer N variables aléatoires selon la loi de fréquence choisie.
5. Pour chaque variable aléatoire différente de 0, générer une variable aléatoire selon la loi de sévérité utilisée.
6. Pour chaque sinistre simulé, appliquer la clause principale.
7. Appliquer les clauses annuelles.
8. La moyenne ainsi que la variance des coûts sont calculées pour chaque tranche de réassurance, permettant ainsi d'estimer le taux technique, pour chaque tranche, à l'aide de la formule suivante :

$$\text{taux technique} = \frac{\mathbb{E}(S) + \beta \times \sqrt{\text{VAR}(S)}}{\text{GNPI} \times (1 - BK - FG - AF)}$$

Ce processus est guidé par l'application de la loi des grands nombres, qui assure que la moyenne des simulations convergera vers l'espérance des coûts.

# Chapitre 4

## La tarification des traités de réassurance non vie : Aspect pratique

### Sommaire

---

1	La réassurance proportionnelle . . . . .	<b>66</b>
1.1	Calcul du ratio technique avec la méthode empirique . . . . .	66
1.2	Estimation de $LR_{Maj}$ avec la méthode probabiliste . . . . .	77
1.3	Application d'autres mesures de risque dans le calcul du $LR_{Maj}$	88
1.4	Incertitude des paramètres d'ajustement et son impact sur l'estimation du LR . . . . .	91
1.5	Automatisation du calcul de ratio technique via VBA Excel .	98
2	La réassurance non proportionnelle en XS . . . . .	<b>104</b>
2.1	Présentation des données . . . . .	104
2.2	Calcul de Burning Cost . . . . .	105
2.3	Tarification par simulation . . . . .	107

---

# 1 La réassurance proportionnelle

## 1.1 Calcul du ratio technique avec la méthode empirique

Dans cette partie, on va calculer le ratio technique d'un traité proportionnel (en QS et SP) pour une compagnie de réassurance Chinoise. Les données tarifées combinent des branches d'assurance marine et non-marine, incluant notamment la branche Property, Machine Breakdown, Engineering, Général Accident et Marine Cargo. Cette approche est également connue sous le nom de tarification multi-branches ou multi-classes.

Les étapes d'estimation du ratio de sinistralité sont illustrées dans le schéma ci-dessous :

### Les étapes d'estimation de Ratio technique

- ✓ **Revalorisation et projection des primes.**
- ✓ **Revalorisation des sinistres.**
- ✓ **Estimation de  $LR_{Attr}$  :** en utilisant la méthode empirique
  - Exclusion des sinistres majeurs et des catastrophes du total des sinistres :
    - Détermination du seuil d'écrêtement pour les grands sinistres et aussi pour les évènements catastrophiques.
    - Indexation des sinistres qui dépassent ce seuil et tranchement de la charge des grands sinistres et des évènements catastrophiques indexés.
  - Calcul de la charge attritionnelle en multipliant les charges diminuées des sinistres majeurs et des Cat Events par les facteurs de développement de Chain ladder.
  - calculer le rapport entre la somme de ces charges et les primes projetées.
  - Ajout de chargement de sécurité à l'aide du principe de l'écart-type.
- ✓ **Estimation de  $LR_{Maj}$  :** en utilisant la méthode empirique
  - Calcul de la période de retour et de la perte moyenne pour chaque sinistre majeur.
  - Division de la somme des pertes moyennes sur la somme des primes indexées.
  - Ajout de chargement de sécurité à l'aide du principe de l'écart-type.
- ✓ **Estimation de  $LR_{CAT}$  :** en utilisant la méthode CAT Modelling

## 1. LA RÉASSURANCE PROPORTIONNELLE

- sommation des pertes annuelles moyennes pour tous les événements mentionnés dans le traité.
  - L'ajout de chargement de sécurité pour tous ces événements.
  - Division du résultat par la prime acquise estimée.
- ✓ l'ajout des **autres frais de réassurance** permet d'obtenir le ratio technique du traité à tarifier.

L'estimation de ratio de sinistralité et illustrée dans le figure ci-dessous :

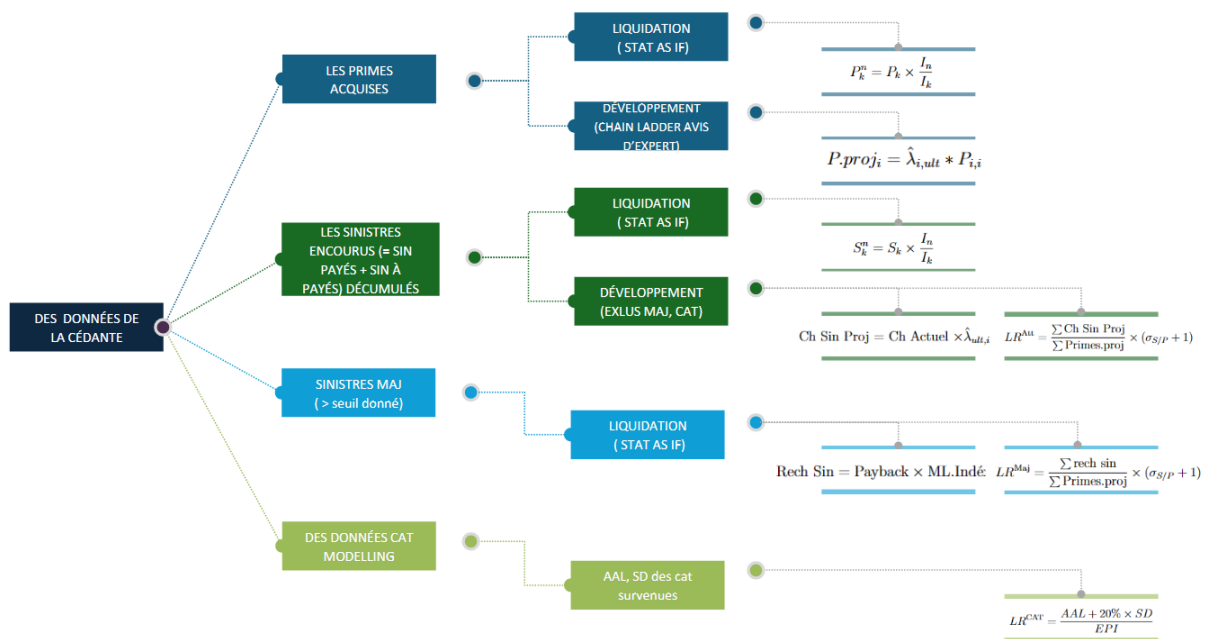


Figure 1.1 – Procédure d'estimation du ratio de sinistralité, source : moi-même

### 1.1.1 Présentation des données

Nous avons reçu trois fichiers : deux bases de données sur Excel et un fichier PDF :

1. La première base de données contient les montants des sinistres et des primes du traité (QS et SP) :
  - une feuille pour la triangulation des sinistres (paid, outstanding et incurred) et des primes agrégées pour chaque année de développement et chaque année de souscription (Underwriting Year noté U/Y).
  - Une feuille dédiée aux grands sinistres (Large Loss).
  - Une feuille pour les pertes liées aux événements catastrophiques (Major Event Loss).

## 1. LA RÉASSURANCE PROPORTIONNELLE

---

2. La seconde base de données fournit des informations sur la modélisation catastrophique (Cat Modeling), en cas de présence des événements catastrophes.
3. un fichier PDF qui contient les conditions du contrat (rétention, commission, PB, etc.), appelé Note de couverture (Slip).

En raison de confidentialité des données, les données sont normalisées.

Pour la mise en statistique "AS IF", on se base sur l'indice CPI ( Consumer Price Index ), l'indice des prix à la consommation. On suppose que **notre portefeuille est parfaitement homogène dans le temps (répartition des risques et des profils)**. On se base sur l'indice d'indexation/revalorisation CPI (Consumer Price Index) pour la mise en place de la statistique "AS IF". Cet indice est préférable pour mesurer l'inflation pour les branches NON MARINES (Property, Engeneering...) ou encore un autre indice qui présente le plus l'inflation dans la branche en question. Les données du CPI pour chaque pays sont obtenues sur le site de la Banque mondiale : <https://www.banquemonddiale.org/fr/home>.

On visualise l'évolution de l'indice CPI de la chine entre 2016 et 2023.

Année	CPI (%)
2016	100.00
2017	101.59
2018	103.70
2019	106.71
2020	109.29
2021	110.36
2022	112.54
2023	113.44

**Table 1.1** – Tableau de CPI par année

### 1.1.2 Estimation de loss ratio

#### 1.1.2.1 Indexation et développement des primes :

En se basant sur les taux d'inflation figurant dans le graphe ci-dessus, on effectue notre indexation des primes à l'année de cotation 2023 et on calcule la statistique "AS IF". Les résultats illustrés sont présentés dans le tableau ci-dessous :

## 1. LA RÉASSURANCE PROPORTIONNELLE

UWY	1	2	3	4	5	6	7
2016	1562672	1560045	1576531	1579056	1587513	1587560	1587560
2017	2178932	2268203	2314099	2320436	2332157	2332157	
2018	2933326	2825656	2821605	2815978	2815978		
2019	3431779	3576648	3610815	3625366			
2020	4391000	4545343	4556696				
2021	4460914	4611838					
2022	2070264						

**Table 1.2** – Primes combinées

UWY	1	2	3	4	5	6	7
2016	1772695	1776905	1787796	1790475	1799267	1799307	1799307
2017	2433094	2530750	2579540	2586118	2598158	2598158	
2018	3208838	3094378	3090171	3084395	3084395		
2019	3648214	3798585	3833705	3848373			
2020	4557736	4716387	4720631				
2021	4583944	4737508					
2022	2086820						

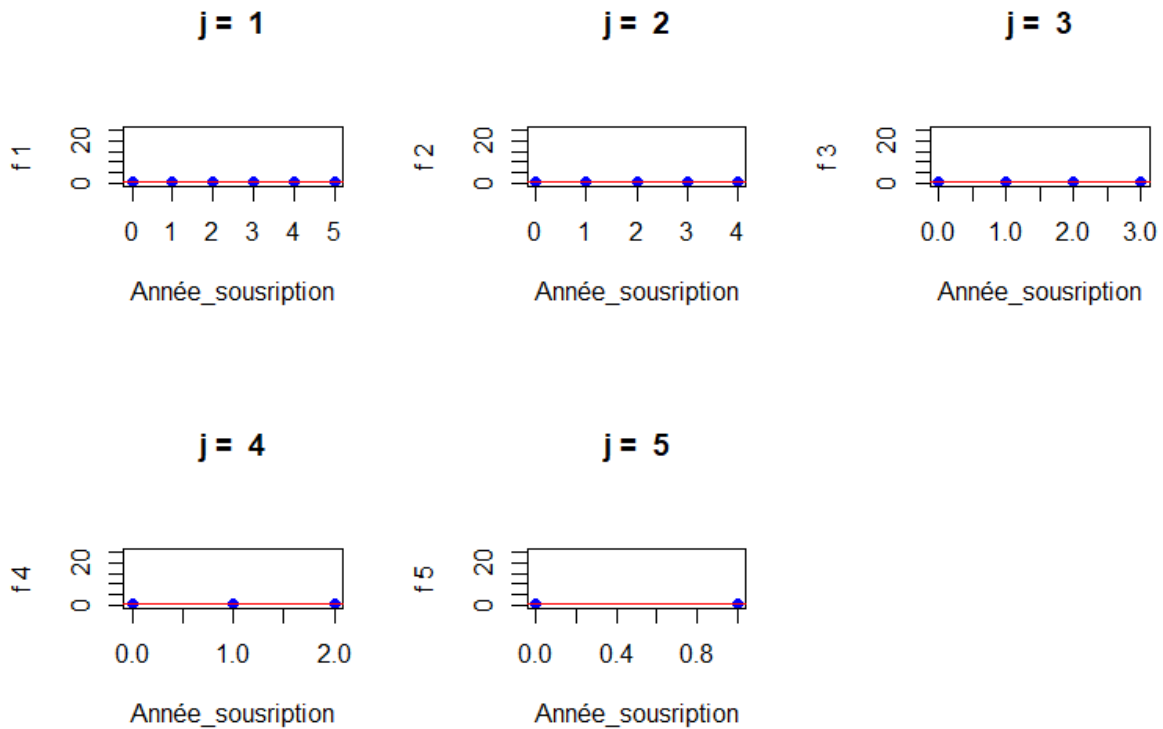
**Table 1.3** – Primes Combinées indexées

Après l'indexation à l'année de cotation, on calcule les primes à l'ultime à l'aide de la méthode de Chain Ladder avis d'expert. La première hypothèse de chain ladder est vérifiées ci-dessous, pour la vérification de la deuxième hypothèse, voir B.

Commoncons par le calcul des facteurs de développement par année de souscription et par année de développement afin d'identifier les années comportant des données aberrantes.

Année d'origine	1	2	3	4	5	6
2016	0.998	1.010	1.002	1.005	1.000	1
2017	1.040	1.019	1.003	1.005	1	
2018	0.964	0.999	0.998	1		
2019	1.041	1.009	1.004			
2020	1.035	1.001				
2021	1.034					

**Table 1.4** – Tableau des facteurs de développement



**Figure 1.2** – représentation des facteurs de développement et de ses moyennes par année de survenance

A partir du tableau et à l'aide de graphes, nous constatons *l'absence des valeurs aberrantes*, bien que certaines **valeurs inférieures à un** (colorées en rouge) soient présentes. Ces dernières pourraient résulter d'erreurs de tarification ou de résiliations de contrats. Par conséquent, il serait approprié de remplacer ces valeurs par des 1 ou de les exclure. Nous optons pour leur *remplacement avec un* dans notre analyse.

Nous allons maintenant calculer les facteurs de développement après avoir **retiré** les primes associées à des facteurs inférieurs à un. Voici le tableau résultant :

	1	2	3	4	5	6
$\lambda_j$	1.037	1.008	1.003	1.003	1.000	1.000

**Table 1.5** – Les facteurs de développement des primes

On calcule par la suite **les facteurs de développement à l'ultime** résumés dans le tableau suivant :

	1	2	3	4	5	6	7
$\lambda_{i,ult}$	1.000	1.000	1.000	1.003	1.006	1.014	1.051

**Table 1.6** – Les facteurs de développement à l'ultime des primes

## 1. LA RÉASSURANCE PROPORTIONNELLE

---

**Remarque :** Le développement des primes est généralement **stable** (proche de 1 : *Une grande partie de primes est payée dans une à deux années*), contrairement à celui des sinistres qui tend à augmenter.

**Les primes projetées à l'ultime** pour chaque année de survenance  $i$  sont ainsi déterminées par la formule suivante :

$$P.proj_i = \hat{\lambda}_{i,ult} * P_{i,i}$$

Avec :  $P_{i,i}$  est la prime encaissée à l'année de cotation.

Année	2016	2017	2018	2019	2020	2021	2022
P.proj	1799314	2598158	3084416	3859152	4747664	4804116	2194040

**Table 1.7** – Les facteurs de développement des primes à l'ultime

### 1.1.2.2 Indexation et développement des sinistres :

Les données de sinistralité cédées par la cédante se divise en : une somme du **montant de sinistre payée** durant l'année  $i$  (Paid losses), on la note  $P_i$  et  $OS_i$  le **suspend** (Outstanding losses) du sinistre à l'année  $i$ .

**Le montant total**  $S_i$  d'un sinistre survenu à l'année  $i$  est alors donné par la somme de ces deux montants :  $S_i = \sum_{i=1}^p P_i + OS_i$ .

UWY	1	2	3	4	5	6	7
2016	17781	274005	564704	622380	633355	642191	649446
2017	79773	723555	1150559	1220869	1283886	1291787	
2018	174544	551362	926900	1033015	1097285		
2019	325742	1359046	1731996	1866697			
2020	557501	1699528	2375537				
2021	498543	1435462					
2022	90567						

**Table 1.8** – Paid losses

UWY	1	2	3	4	5	6	7
2016	125912	310343	36835	18278	14728	5394	4200
2017	393937	359102	124946	73554	17824	17824	
2018	114816	406821	242441	144684	61632		
2019	840108	741963	409058	284740			
2020	932622	1003262	817501				
2021	1443316	1361402					
2022	588404						

**Table 1.9** – Outstanding losses

## 1. LA RÉASSURANCE PROPORTIONNELLE

---

Les suspends sont décumulés, ils sont donc revalorisés directement comme suit :

$$OS'_i = OS_i \times \frac{CPI_{2023}}{CPI_i}$$

Les sinistres payés sont cumulés. On les **décumule** puis on les indexe selon la formule suivante :

$$P'_i = P'_{i-1} + (P_i - P_{i-1}) \times \frac{CPI_{2023}}{CPI_i}$$

La somme des deux triangles obtenus donne le triangle de montants des sinistres survenus indexés :

UWY	1	2	3	4	5	6	7
2016	163006	653539	664580	705028	713019	711625	717627
2017	528966	1185370	1379922	1396566	1403316	1410925	
2018	316538	1013790	1230527	1236236	1216812		
2019	1239385	2188965	2222512	2224988			
2020	1546706	2783846	3258024				
2021	2 346 877	2829165					
2022	684400						

**Table 1.10** – Incurred losses indexed

Afin d'**isoler** uniquement les sinistres attritionnels, nous commençons par **soustraire** les montants des pertes majeures (Major Losses) et des événements catastrophiques (Cat Event), après les avoir **indexés**, du total des pertes enregistrées *pour chaque année de développement et de souscription*. Le **seuil d'écêtement** pour les grands sinistres est fixé à **90 000**. Par conséquent, nous nous intéresserons principalement aux sinistres majeurs qui dépassent cette valeur, et qui sont **au nombre de trois**.

**Remarque :** Les montants ainsi retirés sont ensuite **rechargés** sous forme de loss ratio (LR) des sinistres majeures et des événements catastrophiques.

Year	Cat Event	Event Index	Major Losses	Major Losses Index
2016	30 193	34 251	94 780	107 518
2017	136 313	152 214	-	-
2018	3090	3381	119 429	130 646
2019	193 105	205 283	-	-
2020	51	53	-	-
2021	13 266	13 636	142 286	146 257
2022	-	-	-	-

**Table 1.11** – Indexation des pertes majeures et des Events Cats

## 1. LA RÉASSURANCE PROPORTIONNELLE

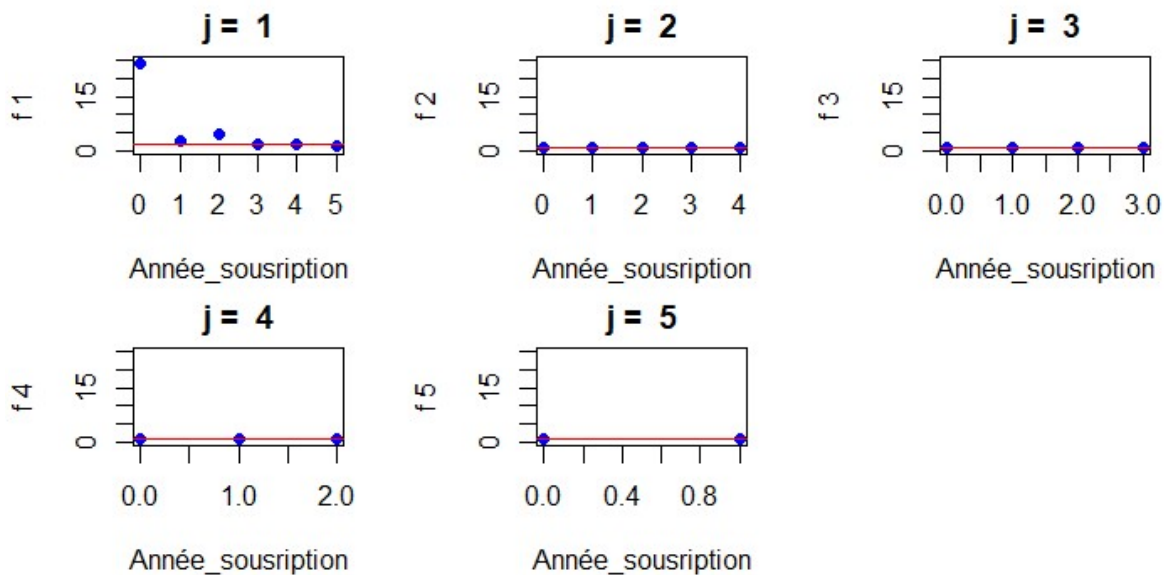
Le calcul nous donne le triangle ci-dessous. C'est sur la base de ce triangle qu'on va calculer les facteurs de développement. De même, la deuxième hypothèse de chain ladder est vérifiées dans annexe B.

UWY	1	2	3	4	5	6	7
2016	21236	511056	522811	563259	571250	569855	575858
2017	376752	1033163	1227844	1244352	1251102	1258711	
2018	182511	879762	1096501	1102210	1082785		
2019	1034094	1983674	2017222	2019697			
2020	1546654	2783786	3257971				
2021	1593884	2669272					
2022	684400						

**Table 1.12** – Incurred losses exclus les CAT Event et Major losses

$f_{ij}$	1	2	3	4	5	6
2016	24.539	1.037	1.082	1.014	0.999	1.012
2017	2.805	1.204	1.017	1.006	1.007	
2018	5.009	1.253	1.008	0.982		
2019	1.961	1.021	1.005			
2020	1.814	1.181				
2021	1.703					

**Table 1.13** – Tableau des facteurs de développement des sinistres



**Figure 1.3** – représentation des coefficients de développement et de ses moyennes par année de survenance

Lors de l'analyse des sinistres, nous observons la présence de facteurs de développement **aberrants**, c'est-à-dire significativement éloignés de la moyenne. Par conséquent, nous

## 1. LA RÉASSURANCE PROPORTIONNELLE

---

excluons les montants associés à ces valeurs lors du calcul des facteurs de développement, en plus de celles associées aux valeurs inférieures à un comme dans les primes. En procédant ainsi, nous obtenons les facteurs suivants :

dev	1	2	3	4	5	6
$\lambda_j$	1.808	1.139	1.017	1.009	1.007	1.012

**Table 1.14** – Les facteurs de développement des sinistres

dev	1	2	3	4	5	6	7
$\lambda_{ult}^j$	1	1.012	1.018	1.027	1.045	1.190	2.152

**Table 1.15** – Les facteurs de développement à l'ultime des sinistres

La charge ultime attritionnelle est ainsi résumée dans le tableau suivant :

Année	2016	2017	2018	2019	2020	2021	2022
Ch.ultime	517104	1152746	1005309	1893251	3087613	2846976	1301063

**Table 1.16** – La charge ultime attritionnelle par année de survenance

### 1.1.2.3 Estimation du $LR_{Att}$ : Méthode empirique

Maintenant comme les primes et les sinistres attritionnelles sont indexées et projetées à l'ultime, on calcule simplement le loss ratio pour les sinistres attritionnelles prédéfini comme :

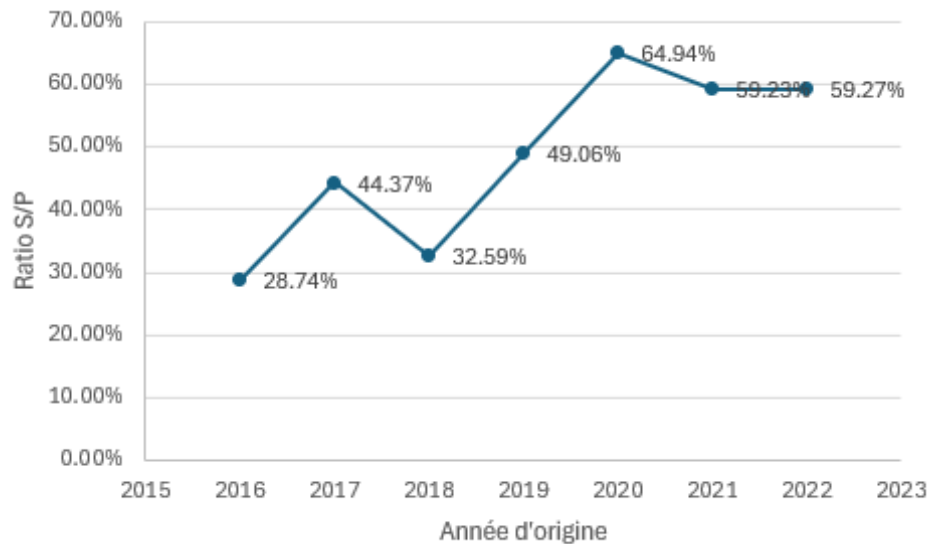
$$LR_{Att} = \frac{\sum \text{Ch Sin AS IF}}{\sum \text{Primes proj AS IF}} \times (\sigma_{S/P} + 1)$$

Avec  $\sigma_{S/P}$  : l'écart-type du loss ratio, correspond au **chargement de sécurité**. Il sert à **couvrir** le réassureur contre **la volatilité de la sinistralité**.

Année	Prime projetée	Charge ultime attr	S/P
2016	1799307	517104	29%
2017	2598166	1152746	44%
2018	3084422	1005309	33%
2019	3859157	1893251	49%
2020	4754914	3087613	65%
2021	4806839	2846976	59%
2022	2195060	1301063	59%

**Table 1.17** – Ratio S/P Attritionnelle

## 1. LA RÉASSURANCE PROPORTIONNELLE



**Figure 1.4** – Courbe S/P

En excluant les valeurs aberrants de loss ratio, on obtient un **chargement de sécurité** correspond à **7.49%**, ce qui donne un ratio de sinistralité attritionnelle égal à :

$$LR_{Att} = 54.93\%$$

### 1.1.2.4 Estimation du $LR_{Maj}$ : Méthode empirique

Comme déjà mentionner dans la section précédente, le ratio de sinistralité des sinistres majeurs s'estime par la formule suivante :

$$LR_{Maj} = \frac{\sum \text{charge de sinistres majeurs indexée}}{\sum \text{Primes proj AS IF}} \times (\sigma_{S/P} + 1)$$

On résume le processus dans le tableau suivant :

Année	Major Losses Indexé	PayBack	RECH SIN	S/P
2016	107518	0.50	53759	3%
2017	-	-	-	0%
2018	130646	0.33	43549	1%
2019	-	-	-	0%
2020	-	-	-	0%
2021	3435565	0.17	572594	12%
2022	-	-	-	0%

**Table 1.18** – La charge ultime majeure par année de souscription

## 1. LA RÉASSURANCE PROPORTIONNELLE

---

Le **chargement de sécurité** calculé est de **1.26%**, tandis que le taux de sinistralité des pertes majeures s'établit à :

$$LR_{Maj} = 3.06\%$$

.

### 1.1.2.5 Estimation du $LR_{Cat}$ : CAT Modelling

La cédante nous a fourni une base de données dédiée à la modélisation des catastrophes, nommée Cat Modelling. Cette base inclut deux types d'événements catastrophiques : *les séismes (earthquake) et les tempêtes (Windstorm)*.

Le ratio  $LR_{CAT}$  est calculé ainsi selon la formule :

$$LR_{CAT} = \frac{AAL_1 + AAL_2 + \beta \times (SD_1 + SD_2)}{EPI}$$

Où pour  $i = 1, 2$  :  $AAL_i$  est la perte annuelle moyenne de l'événement  $i$ , calculée à l'aide d'une modélisation catastrophique, et  $SD_i$  est l'écart-type des pertes de l'événement  $i$ .  $EPI$  représente la prime acquise estimée pour l'année de cotation (2023).

	<b>Earthquake</b>	<b>Windstorm</b>
<b>AAL</b>	33429	107071
<b>SD</b>	343000	278286

La cédante estime un EPI de l'année de cotation égal à **5157143**.

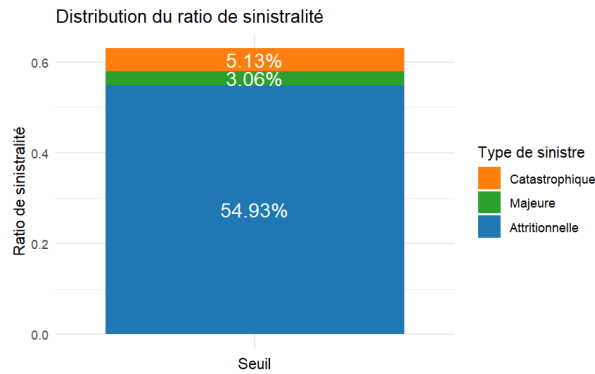
Pour un  $\beta = 20\%$ , on obtient un ratio de sinistralité des évènements catastrophiques de :

$$LR_{Cat} = 5.13\%$$

### 1.1.2.6 Estimation du Loss Ratio final :

Le ratio de sinistralité obtenu est donné par :

$$LR_{global} = LR_{Att} + LR_{Maj} + LR_{Cat} = 63.12\%$$



**Figure 1.5** – Distribution du ratio de sinistralité

### 1.1.3 Estimation du ratio technique : Ajout des autres frais

Afin d’obtenir le ratio technique, on ajoute les **autres frais** de la réassurance, donnés par la **note de couverture**.

la commission dépend du niveau du loss ratio de la cédante (sliding commission).

Les données requises pour effectuer le calcul sont présentées dans le tableau ci-dessous :

Commission	PB	BK	Taxes	Marge
23.00%	30%	2.5%	0%	90%

Nous commençons par calculer le **Ratio technique avant PB** :

$$R_{APB} = LR + COM(LR) + BK + tax = 88.62\%$$

le ratio technique égal donc :

$$\text{Ratio Technique} = R_{APB} + PB \times (\text{marge} - R_{APB})^+ = 89.02\%$$

La comparaison de ce ratio avec un seuil prédéfini donne un jugement sur l’affaire cédée. Si ce ratio > seuil, on peut accepter l’affaire. Dans le cas contraire, on le refuse.

## 1.2 Estimation de $LR_{Maj}$ avec la méthode probabiliste

Dans cette partie, on va appliquer la méthode probabiliste pour le calcul du loss ratio des sinistres majeurs. Ainsi que voir l’impact de différents mesures de risque dans l’intégration du chargement de sécurité et comparer par la suite les résultats obtenus.

Les étapes du calcul de **ratio de sinistralité majeure** avec la méthode probabiliste :

### Procédure

- ✓ Détermination du seuil d'écrêtement en exploitant les résultats de la théorie des valeurs extrêmes.
  - Etablir l'existence d'une queue lourde, en analysant le QQ-plot et en ajustant les données aux lois de Fréchet et de Gumbel.
  - Le seuil est donné par des méthodes graphiques basées sur la loi GPD.
- ✓ Calcul de l'espérance de la sévérité des sinistres individuels :
  - Ajustement par la loi de Pareto Généralisée.
  - Tester l'adéquation à ce loi à l'aide des deux tests d'adéquations : Test de Kolmogorov-Smirnov et test d'Anderson-Darling.
- ✓ Calcul de l'espérance de la fréquence des sinistres majeurs :
  - Estimer les paramètres des lois candidates : Poisson, Binomiale Négative
  - Effectuer le test de Fisher exact afin de ne retenir que les plus significatives.
  - Sélectionner la loi la plus adéquate au travers du critère d'AIC.
- ✓ l'Ajout du chargement de sécurité en utilisant le principe de l'écart-type.

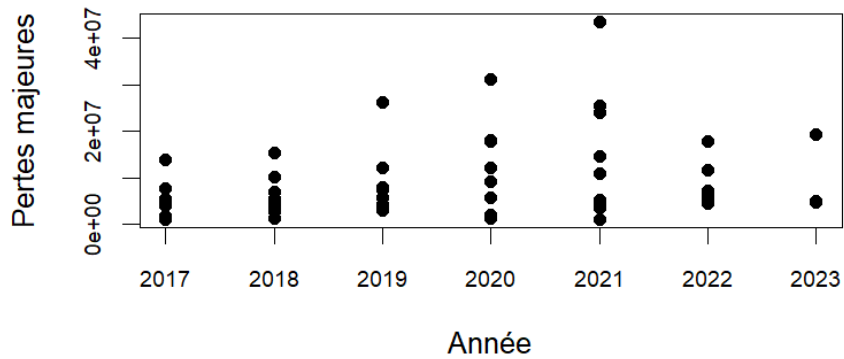
### 1.2.1 Statistiques descriptives :

Afin de nous familiariser avec les données, nous avons commencé par effectuer quelques statistiques descriptives sur la base de données des sinistres majeurs.

Min.	1st Qu.	Median	Mean	3rd Qu.	Max.
1033776	3878128	5256681	8382949	10863590	43575995

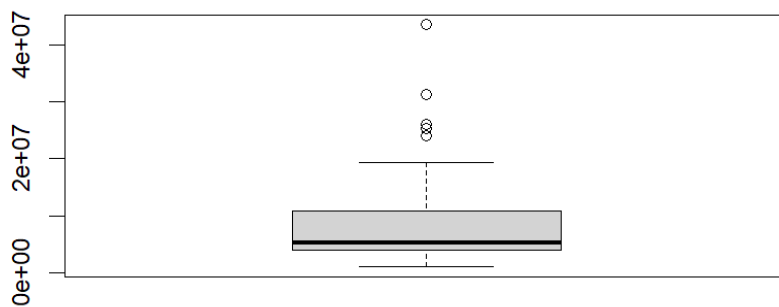
**Figure 1.6** – summary(sinistres majeurs)

On constate une grande étendue des valeurs. En effet, le minimum est de 1033776, alors que le sinistre maximum dépasse le 40M, soit près de 6 fois la moyenne. En outre, la médiane est nettement inférieure à la moyenne qui est augmentée par les gros sinistres.



**Figure 1.7** – Sinistres majeurs

La figure montre une valeur aberrante supérieure à 40M. On vérifie aussi qu'il n'existe pas une tendance dans leur fréquence, ce qui pourrait confirmer l'hypothèse d'indépendance.



**Figure 1.8** – Boxplot des sinistres majeurs

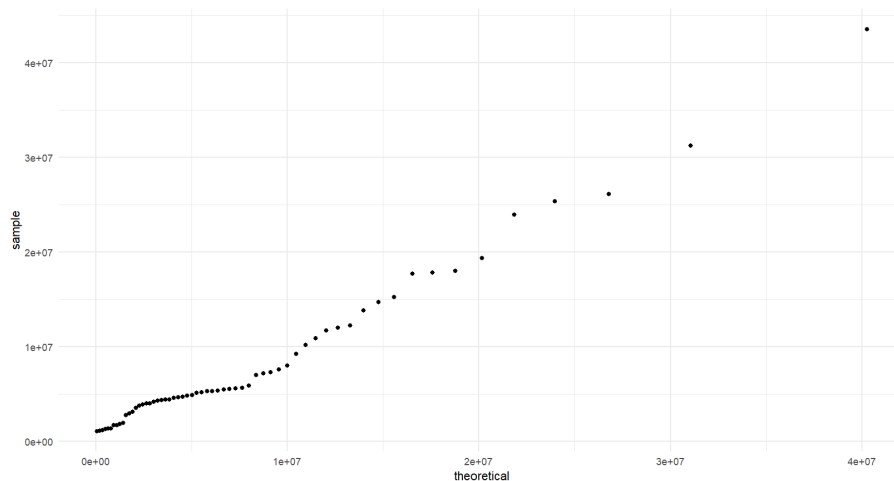
Le **boxplot** confirme que cette valeur est trop éloignée de la moyenne. On peut choisir de l'éliminer ou bien de le conserver. Pour notre étude, on va le **garder**.

### 1.2.2 Détermination du seuil des sinistres majeurs :

Pour établir le seuil qui marque l'entrée dans la zone extrême, nous appliquerons les **méthodes graphiques** décrites dans la section 1.5, en utilisant la base de données des sinistres majeurs. Toutefois, avant de procéder, nous identifierons le **domaine d'attraction** approprié en analysant le *QQ plot* et en ajustant les données avec les lois de *Gumbel* et de *Fréchet*. Cette étape préliminaire nous permettra de sélectionner la méthode graphique la plus adaptée à notre base de données. En effet, L'estimateur de Hill **n'a de sens** que si nous sommes dans le cas  $\xi > 0$  (cas de Fréchet).

#### 1.2.2.1 QQ Plot :

Afin d'avoir une première idée de la distribution du montant des sinistres, nous avons tracé les graphiques Quantiles Quantiles pour la loi exponentielle.

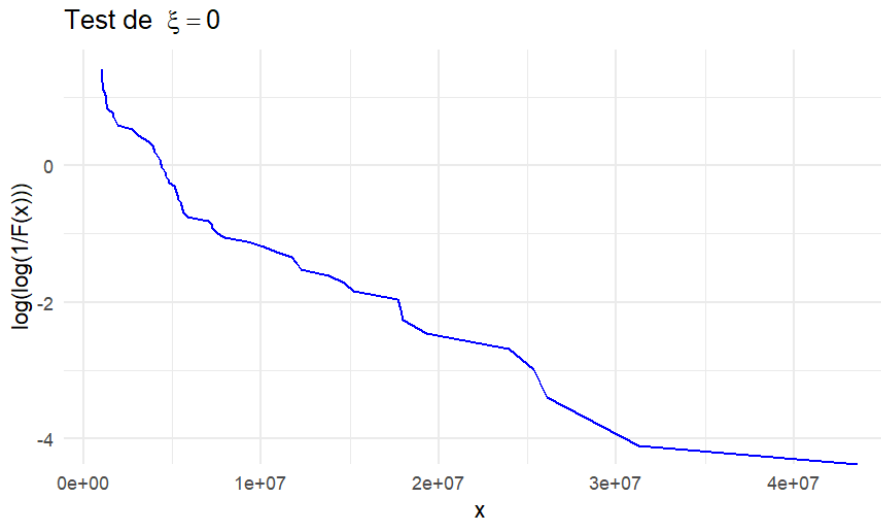


**Figure 1.9** – QQ Plot Exponentielle pour les sinistres majeurs

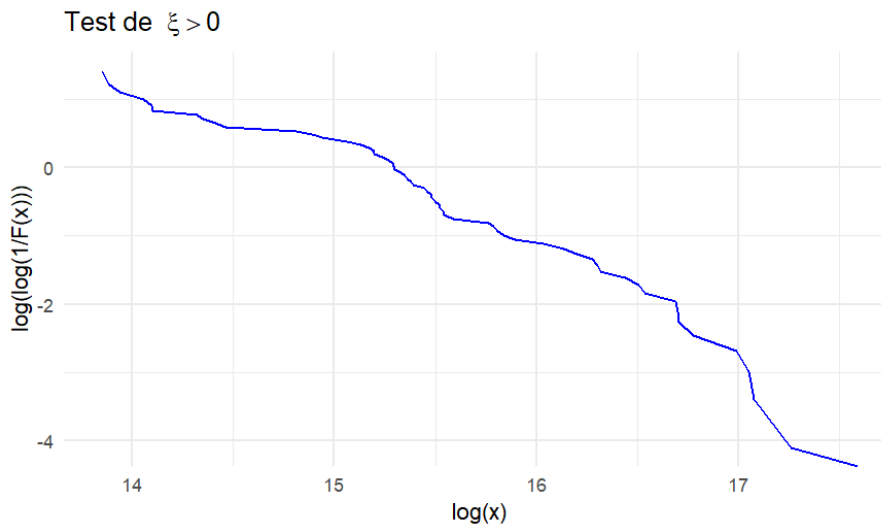
La droite obtenue semble un peu **convexe**, on peut dire que nous sommes face à une distribution à **queue lourde**.

#### 1.2.2.2 Ajustement GEV :

On trace les graphiques qui permettent de distinguer les cas  $\xi = 0$  (Ajustement avec la loi de *Gumbel*) et  $\xi > 0$  (Ajustement avec la loi de *Fréchet*). Le premier graphique permet d'avoir une représentation visuelle de la pertinence de l'hypothèse  $\xi = 0$ . Si cette hypothèse est vérifiée, alors les points du graphique sont **alignés**. Le second graphique est le pendant du premier pour l'hypothèse  $\xi > 0$ . Si cette hypothèse est vérifiée, alors les points du graphique sont alignés. Les deux figures sont présentées ci-après.



**Figure 1.10** – Test de  $\xi = 0$  (Cas de Gumbel)

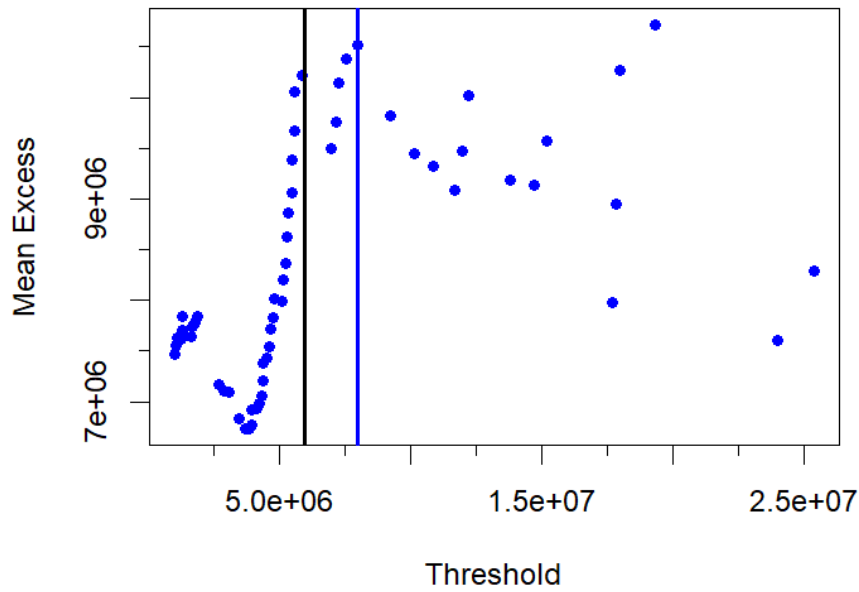


**Figure 1.11** – Test de  $\xi > 0$  (Cas de Fréchet)

Nous constatons que la seconde courbe est la plus proche à une **droite**, d'où l'acceptation de l'hypothèse  $\xi > 0$ .

### 1.2.2.3 Détermination du seuil

Commoncons par tracer le **Mean Excess Function**, nous utilisons la fonction *meplot()* du package *VGAM*. le seuil choisi est celui à partir duquel les valeurs du mean excess function sont le plus volatil, ce qui correspond au valeur **6M** ou bien aussi **8M**.



**Figure 1.12** – Mean Excess Function

Comme l'hypothèse de  $\xi > 0$  est vérifiée, On peut appliquer la méthode de *Hill*. Le graphique suivant représente l'**estimateur de Hill** en fonction du seuil et du nombre d'excès considérés. On estime la zone de stabilité à partir de 24 excès ou aussi 19 excès, correspond respectivement à un seuil de [5875064](#) et [7984152](#).



**Figure 1.13** – Hill Plot

## 1. LA RÉASSURANCE PROPORTIONNELLE

---

Le graphe de Pickands ci-dessous donne un nombre d'excès correspond à 6, ce qu'est un nombre **trop faible** pour une bonne modélisation (il faut au minimum 10 sinistres). Par conséquent, nous ne retenons pas le résultat obtenu par cette méthode.

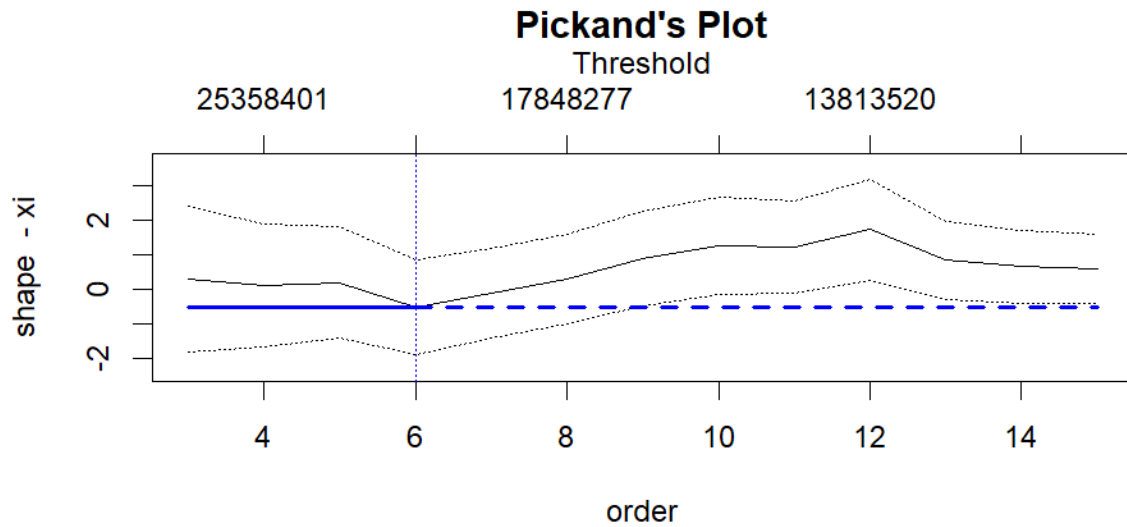


Figure 1.14 – Pickands Plot

La méthode de *Gerstengarbe* suggère un nombre d'excès égal à 15, ce qui correspond à un seuil d'environ 11703132.

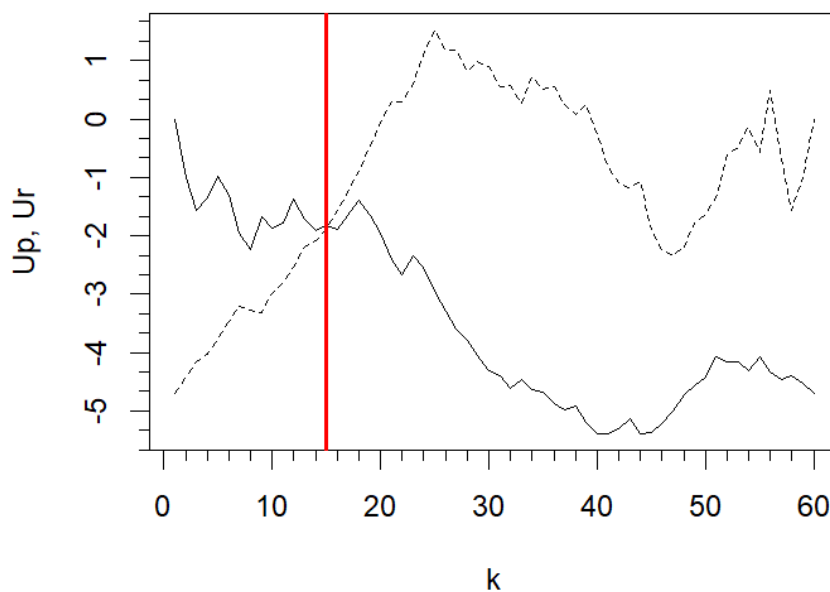


Figure 1.15 – Gerstengarbe Plot

les valeurs obtenues par la méthode de Mean Excess Function et la méthode Hill sont trop proches. Alors que celle obtenue par la méthode de Gerstengarbe est loin des deux valeurs. En effet, il n'existe pas une méthode juste ; La détermination du seuil est par conséquent un jugement d'expert. On choisi de détailler le calcul de loss ratio des sinistres majeurs avec le seuil donné par la méthode de Hill, correspond à  $u = 7984152$ .

### 1.2.3 Ajustement de la sévérité :

Pour le montant de sinistralité, on choisit de le modéliser par la loi de **Pareto Généralisée**. Ce choix est justifié par le fait que le seuil est déterminé par un estimateur du queue de la distribution, donnés par cette loi. On peut choisir de travailler avec le paramétrage présenté par la théorie de valeurs extremes, le problème se trouve dans le calcul de l'espérance de la sinistralité de réassurance :

$$E(\min[c, \max(X - a, 0)]) = \int_a^{c+a} (1 - F_{t,a}(x)) dx$$

Pour cette raison, on travaille plutôt avec le **paramétrage de Riegel** présenté par Ulrich Riegel, voir [9] :

Soit  $t, \alpha_{\text{ini}}, \alpha_{\text{tail}} > 0$ , la fonction de répartition est défini comme ceci :

$$F_{t, \alpha_{\text{ini}}, \alpha_{\text{tail}}}(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour } x \leq t \\ 1 - \left(1 + \frac{\alpha_{\text{ini}}}{\alpha_{\text{tail}}} \left(\frac{x}{t} - 1\right)\right)^{-\alpha_{\text{tail}}} & \text{pour } x > t \end{cases}$$

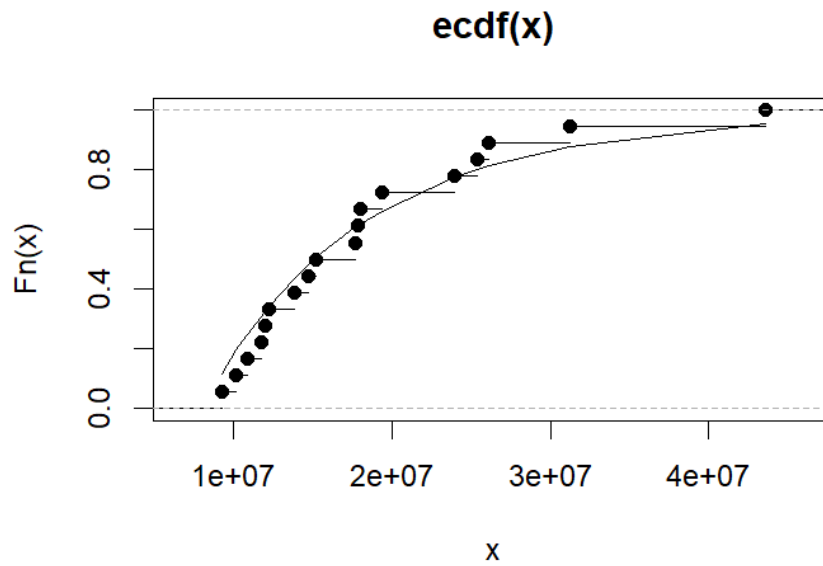
On prend  $t$  le seuil obtenu avec la méthode de Hill, allant estimer les autres paramètres.

A l'aide du Package **Pareto**, développé aussi par Ulrich Riegel, on peut estimer les paramètres  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  par la méthode de Maximum de vraisemblance ML :

```
> library(Pareto)
> t0 = 7984152
> losses = losses_0[losses_0 > t0]
> alpha = GenPareto_ML_Estimator_Alpha(losses, t = t0)
> alpha
[1] 0.8056478 10.0000000
```

**Figure 1.16** – Estimation des paramètres de GenPareto

A l'aide du graphe de la fonction de répartition et du test de kolmogorov-smirnov, on confirme le bon ajustement des sinistres majeurs par la loi de Pareto Généralisée :



**Figure 1.17** – fonction de répartition empirique vs celle de GP

```
> ks = ks.test(losses, "pGenPareto", t0, alpha[1], alpha[2])
> ks
```

Exact one-sample Kolmogorov-Smirnov test

```
data: losses
D = 0.14143, p-value = 0.8162
alternative hypothesis: two-sided
```

**Figure 1.18** – Test de kolmorov-smirnov

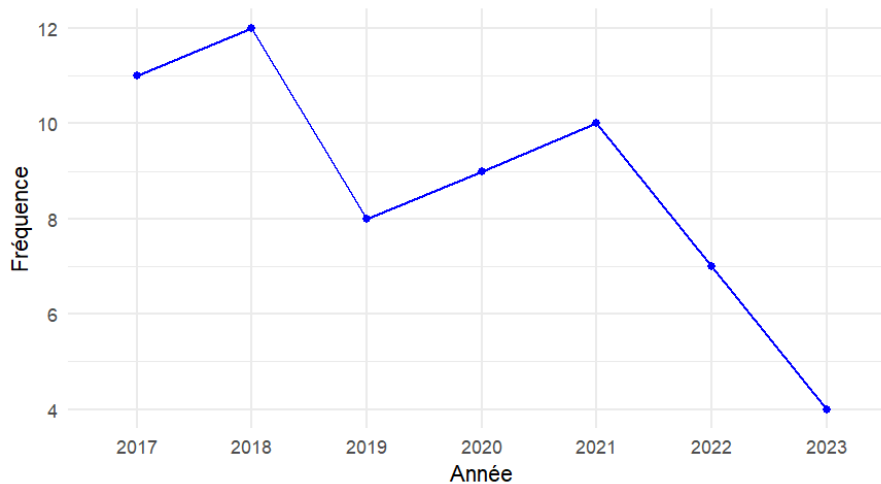
l'espérance est estimé par la fonction suivante :

```
> espérance_GP = GenPareto_Layer_Mean(25 * 10^8, 0, t = t0, alpha_ini = alpha[1],
+                                     alpha_tail = alpha[2])
> espérance_GP
[1] 18995514
```

**Figure 1.19** – Estimation de l'espérance de GenPareto

### 1.2.4 Modélisation de la fréquence :

On modélise la fréquence  $N$  par une loi de Poisson ou une loi Binomiale Négative. Allant voir tout d'abord la distribution de la fréquence :



**Figure 1.20** – Fréquence des sinistres majeurs par année de souscription

- l'ajustement avec **la loi de poisson** donne le résultat suivant :

```
> fitpois <- fitdist(freq,"pois")
> summary(fitpois)
Fitting of the distribution ' pois ' by maximum likelihood
Parameters :
      estimate Std. Error
lambda 2.571429  0.6060914
Loglikelihood: -12.65412  AIC:  27.30823  BIC:  27.25414
```

**Figure 1.21** – Ajustement de la fréquence par la loi de poisson

- Pour **la loi binomiale négative**, on obtient :

```
> summary(fitBN)
Fitting of the distribution ' nbinom ' by maximum likelihood
Parameters :
      estimate Std. Error
size 1.340913e+05      NaN
mu   2.571649e+00  0.6061493
Loglikelihood: -12.65412  AIC:  29.30823  BIC:  29.20005
```

**Figure 1.22** – Ajustement de la fréquence par la loi de binomiale négative

D'après les *critères de sélection*, le meilleur modèle est celui possédant **AIC** ou **BIC** le plus faible. Dans notre cas, correspond au **modèle de poisson**. En plus, on confirme l'adéquation de notre data avec la loi de poisson par le test de **Fisher exact** qui donne un **p-value >5%** :

Fisher's Exact Test for Count Data

```
data: contingency_table
p-value = 0.4737
alternative hypothesis: two.sided
```

Figure 1.23 – Test de Fisher exact

C/C : l'espérance de la fréquence est estimé donc par :  $E(x) = \lambda = 2.57$ .

```
> espérance_pois = fitpois$estimate
> espérance_pois
lambda
2.571429
```

Figure 1.24 – Espérance de fréquence

Avec  $C = 2.5 \times 10^9$  c'est l'engagement maximal du réassureur.

Le loss ratio des sinistres majeurs égal ainsi :

$$LR_{Maj} = \frac{18995514 \times 2.571429 + 0.2 \times \sqrt{1.316 \times 10^{15}}}{1052300000} = 5.33\%$$

On applique la même étude pour les autres seuils, les résultats obtenus sont résumés dans le tableau suivant :

t	$\alpha_1$	$\alpha_2$	KS	AD	E(X)	VAR(x)	$\lambda$	E(S)	SD(S)	$LR_{Maj}$
6000000	0.638	10	0.954	0.911	16457172	$1.367 \times 10^{14}$	3.286	54073565	36592349	5.8%
8000000	0.809	10	0.820	0.701	18992718	$1.510 \times 10^{14}$	2.571	48838418	36276714	5.3%
11702171	1.392	10	0.909	0.99	21045982	$1.091 \times 10^{14}$	2.000	42091964	33226495	4.6%

Table 1.19 – Tableau récapitulatif des seuils obtenus

Nous constatons que les quatre seuils déterminés à partir du graphe de la fonction d'excès moyen et de l'estimateur de Hill indiquent des valeurs de ratio de sinistralité similaires. En revanche, le seuil obtenu par la méthode de Gerstengarbe affiche un ratio de sinistralité qui est inférieur de près de 1% à ceux calculés par les autres méthodes.

## 1.3 Application d'autres mesures de risque dans le calcul du $LR_{Maj}$

### 1.3.1 Value at Risk : VaR

La **VaR** est le quantile d'ordre  $1 - \alpha$  de la distribution de la sinistralité. Il mesure la valeur de perte attendue pour une probabilité de survenance de sinistre égale à  $\alpha$ . Elle est définie comme suit :

$$VaR_\alpha(S) = \inf\{x/Pr(S \leq x) \geq \alpha\}$$

### 1.3.2 Tail Value at Risque : TVaR

la TVaR mesure la perte moyenne attendue au-delà de la VaR :

$$TVaR(X, \alpha) = \frac{1}{1 - \alpha} \int_\alpha^1 F_X^{-1}(p) dp = E[X|X > VaR(X, \alpha)]$$

Contrairement à la Value at Risk (VaR) traditionnelle, qui ne fournit qu'une estimation ponctuelle, la TVaR prend en compte la queue de la distribution des pertes.

### 1.3.3 Simulation de la sinistralité

Afin de calculer la *VaR* et la *TVaR*, il est nécessaire de connaître la répartition des sinistres majeurs. On peut utiliser une loi de poisson composée mais il est difficile d'intégrer les conditions du traité (dans notre cas : *l'engagement de la réassurance*). On pouvait autrefois utiliser l'algorithme de Panjer, mais compte tenu de la vitesse de calcul des ordinateurs, il est beaucoup plus simple d'utiliser des simulations.

Pour simuler la distribution de la sinistralité majeure, nous exploitons les paramètres ajustés des lois de distribution des sinistres. La somme des sinistres majeurs est représentée par la formule suivante :

$$S = \sum_{i=1}^N X_i$$

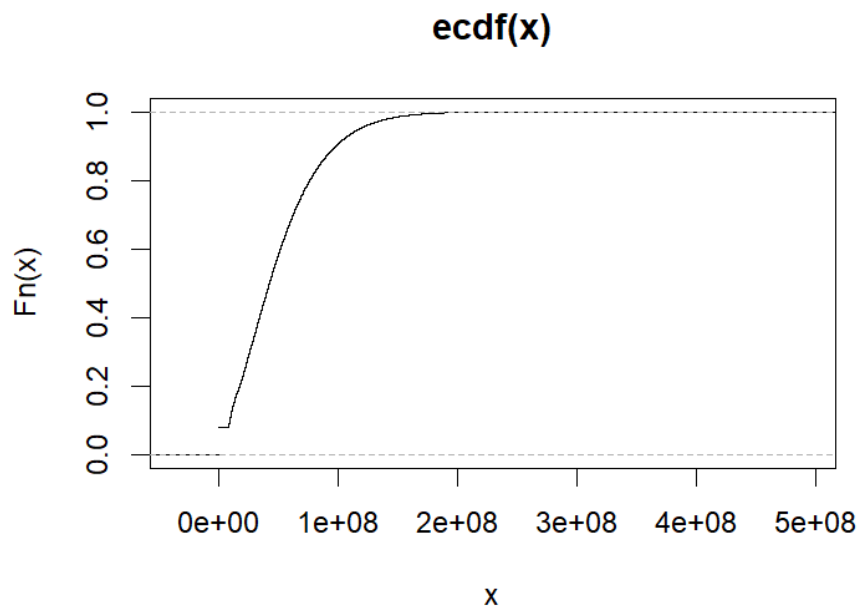
où  $N$  suit une loi de Poisson avec le paramètre  $\lambda$  et chaque  $X_i$  est tiré d'une distribution de Pareto généralisée, tronquée à  $2.5 \times 10^9$ .

L'algorithme utilisé pour la simulation est le suivant :

```
simulate_S <- function(t0, alpha_1, alpha_2, lambda) {  
  N = rpois(1,as.numeric(lambda))  
  if (N == 0){  
    S = 0  
  }  
  else {  
    GPD = rGenPareto(N, t0, alpha_1, alpha_2)  
    S = pmin(GPD, C)  
  }  
  S = sum(S)  
  return(S)  
}  
sin_simul = replicate(100000, simulate_S(t0, alpha_1, alpha_2, lambda))
```

Dans ce code, nous effectuons 100 000 simulations (ce nombre choisit en étudiant la convergence des estimateurs : voir partie suivante) où pour chaque simulation, nous calculons le nombre de sinistres  $N$  selon une distribution de Poisson. Si  $N$  est non nul, nous générons  $N$  sinistres suivant une distribution de Pareto généralisée.

Pour le seuil 8000000, on trace la courbe de fonction de répartition empirique :

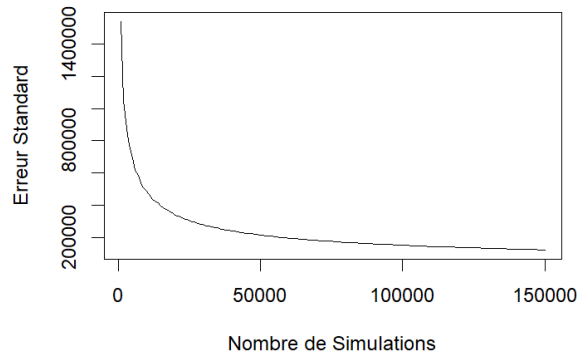


**Figure 1.25** – Fonction de répartition empirique des données simulées

### 1.3.4 Convergence de la simulation

La simulation joue sur le caractère asymptotique des estimateurs et sa précision dépend donc du nombre de simulations. La **vitesse de convergence** des estimateurs doit être aussi prise en compte pour déterminer le nombre de simulations nécessaires. *Plus le nombre de simulations est grand, plus le temps de calcul est long*, ce qui présente un inconvénient.

**Convergence de l'Erreur Standard des Estimations de Si**



**Figure 1.26** – Convergence de l'Erreur Standard des Estimations de Sinistres

On remarque que l'estimateur de l'**erreur standard** converge approximativement à partir de 100 000. Nous avons choisi donc 100 000 comme nombre de simulation.

### 1.3.5 Estimation de la sinistralité majeure

En **automatisant** le seuil des sinistres majeurs, Nous calculons le ratio de sinistralité pour quatre niveaux de confiance (80%, 85%, 90%, 95%) en utilisant les deux mesures de risque :  $VaR$  et  $TVaR$  comme suit :

$$LR = \frac{VaR(S, \alpha)}{EPI}$$

et

$$LR = \frac{TVaR(S, \alpha)}{EPI}$$

les résultats obtenus sont résumés dans le tableau suivant :

Seuil	LR							
	VaR				TVaR			
	80%	85%	90%	95%	80%	85%	90%	95%
6000000	7.77%	8.65%	9.82%	11.68%	10.54%	11.33%	12.39%	14.14%
8000000	7.23%	8.11%	9.29%	11.19%	10.04%	10.84%	11.92%	13.70%
11702171	6.42%	7.23%	8.28%	10.00%	8.96%	9.67%	10.65%	12.24%

**Table 1.20** – LR pour les différents niveaux de confiance de VaR et TVaR

L'utilisation de la mesure de risque VaR ou TVaR dans le calcul du ratio de sinistralité donne des valeurs plus grands que celles obtenues avec l'écart type. En plus, le ratio de sinistralité estimé avec VaR, pour chaque niveau de confiance et chaque seuil, est supérieur à celui obtenu avec TVaR ; pour un seuil 8000000 et un niveau de confiance de 90% ,le ratio de sinistralité calculé avec TVaR est plus grand de 2.57% à celui estimé avec VaR. Ces différences s'expliquent par le fait que le calcul du ratio de sinistralité à partir de la VaR ne capte pas la sévérité des sinistres au-dessus de ce montant, alors que la TVaR, prend en compte la totalité de l'épaisseur de la queue de distribution de la charge sinistre à partir de VaR. On constate aussi que le ratio de sinistralité diminue avec l'augmentation du seuil, cela peut être interpréter par la baisse du nombre de sinistres au-delà du seuil.

La notion d'importance de sinistre est à mettre en relation avec la fréquence de survenance, un sinistre majeur est dont le montant a une probabilité de survenance inférieure à  $k\%$  sur une année. Généralement, on travaille avec  $k = 10\%$  , correspond donc à un **niveau de confiance de de 90%** . Sa période de retour égale à :

$$\text{période de retour} = \frac{1}{Pr(S > VaR)} = \frac{1}{10\%} = 10$$

Le seuil atteint à un niveau de récurrence 10 s'appelle seuil à 10 ans.

## 1.4 Incertitude des paramètres d'ajustement et son impact sur l'estimation du LR

Dans cette partie, nous examinerons les méthodes statistiques employées pour évaluer l'incertitude des paramètres obtenus que ca soit pour les lois de fréquence utilisés (la loi de Poisson et la Binomiale Négative) ou bien des paramètres de la loi de Pareto généralisée. Ces paramètres sont très incertains, car **il est difficile d'estimer les véritables paramètres**

### **de la population à partir de laquelle un petit échantillon est prélevé.**

Dans la statistique classique, on estime généralement les paramètres en utilisant la méthode du maximum de vraisemblance ou la méthode des moments. Toutefois, ces estimateurs sont eux aussi des variables aléatoires, par exemple si l'on prend deux échantillons finis d'une même distribution, les estimateurs par maximum de vraisemblance des paramètres vont être différents. Utiliser des paramètres fixes dans un modèle fréquence-sévérité peut conduire à une sous-évaluation du risque. Trois approches permettent la prise en compte de l'incertitude des paramètres :

- Les méthodes statistiques classiques, comme la limite normale asymptotique des estimateurs obtenus avec le maximum de vraisemblance.
- La méthode de bootstrap paramétrique.
- L'approche bayésienne qui utilise la méthode de simulation Monte Carlo par chaîne de Markov.

Le bootstrap et l'approche bayésienne ont suscité beaucoup d'intérêt ces dernières années, et leur application est facilitée notamment grâce à l'évolution de la performance des ordinateurs et la disponibilité de logiciels professionnels de simulation. Par la suite, on choisit d'appliquer uniquement la méthode de bootstrap.

L'étude appliquée concerne un seuil de 8000000.

### **1.4.1 Le bootstrap paramétrique**

Le bootstrap paramétrique est une technique de rééchantillonnage utilisée pour estimer la distribution de statistiques d'échantillon lorsque l'ensemble de données original est supposé être distribué selon un modèle paramétrique spécifique.

**L'algorithme du bootstrap paramétrique** comprend les étapes suivantes :

1. Estimation des paramètres de la loi ajustée  $P_0$  sur l'échantillon initial par la méthode du maximum de vraisemblance. Soit  $\hat{\theta} = (\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \dots, \hat{\theta}_p)$  les estimateurs obtenus.
2. Génération aléatoire d'un grand nombre  $B$  d'échantillons de même taille que l'échantillon original, tirés de la distribution ajustée  $\hat{P}_0$ .
3. Pour chaque échantillon bootstrapé  $j$  (pour  $j = 1, 2, \dots, B$ ), recalcul de la fonction de vraisemblance  $L(\theta|k_j)$  et détermination des nouvelles estimations des paramètres  $\hat{\theta}_j = (\hat{\theta}_{j1}, \hat{\theta}_{j2}, \dots, \hat{\theta}_{jp})$ .
4. Création d'un échantillon de taille  $B$  d'estimateurs de paramètres  $\{\hat{\theta}_j\}_{j=1}^B$  obtenus

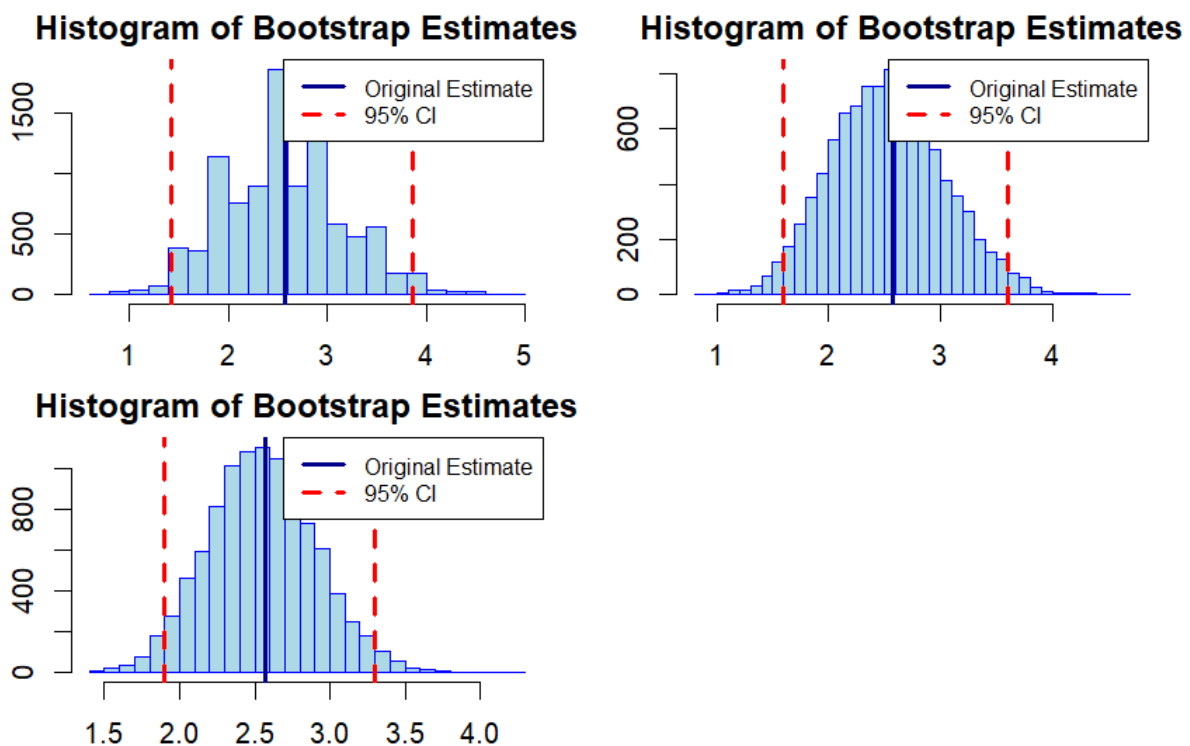
par bootstrap.

**Remarque :** Si l'échantillon de bootstrap est de taille très grande, la distribution empirique obtenue doit correspondre à la loi normale selon la théorie centrale limite.

### 1.4.2 Incertitude du paramètre de la fréquence

#### Pour la loi de poisson :

En utilisant le modèle de poisson obtenu dans la partie précédente pour un seuil d'écrêtement égal à 800000 ( $\lambda = 2.57$ ), on génère 10000 échantillons de même taille, chacun distribué selon une loi de poisson. L'estimateur  $\hat{\lambda}$  est recalculé pour chaque échantillon, générant une série de réalisations  $\{\hat{\lambda}_j\}_{j=1}^B$ . Cette distribution empirique des estimateurs montre la variabilité de  $\hat{\lambda}$  autour de l'estimateur initial  $\lambda = 2.57$ .



**Figure 1.27** – Histogramme du paramètre estimé  $\lambda$  de la loi de Poisson par le bootstrap

La figure illustre comment la dispersion autour de la moyenne du paramètre  $\lambda$  montre une incertitude accrue mesurée par le bootstrap, et d'autant plus grande que l'échantillon de nombre est de petite taille. On peut aussi dresser le tableau d'analyse de l'estimateur de la moyenne du nombre de sinistres (pour rappel l'estimateur de la moyenne dans le cas Poissonnien correspond au paramètre de la loi) :

Statistic	Fréquence initiale	Echantillon 1	Echantillon 2
lambda	2.57707	2.57707	2.57707
SD	0.60316	0.50517	0.35877
CoV (%)	23.40497	19.60257	13.92180
Quantile 50%	2.57143	2.60000	2.55000
Quantile 75%	3.00000	2.90000	2.80000
Quantile 90%	3.42857	3.20000	3.05000
Quantile 95%	3.57143	3.40000	3.20000

**Table 1.21** – Comparaison des résultats obtenus pour la fréquence

Il est important de rappeler que dans le cas de la loi de Poisson, l'erreur commise sur le paramètre est exactement l'erreur commise sur l'espérance et la variance du nombre de sinistres. Ceci vient du fait que les estimateurs de ces deux premiers moments sont égaux :

$$E(N)_{\text{Boot}} = E(N|\lambda) = V(N)_{\text{Boot}} = V(N|\lambda) = \lambda$$

Les estimateurs des espérances de l'estimateur sont égaux à 2.577 pour les trois échantillons. On mesure des coefficients de variation  $CoV$  du paramètre égaux à 23.4%, 19.6% et 13.92% pour la fréquence initiale et les échantillons 1, 2 respectivement, ce qui indique de moins en moins d'incertitude sur l'estimation de la moyenne de la fréquence à mesure que l'horizon d'expérience grandit (7 ans, 10 ans, 20 ans pour la fréquence initiale et les échantillons 1, 2 respectivement). Ce sont au demeurant des coefficients de variation qui font état d'une incertitude non négligeable sur l'estimation de la fréquence des sinistres.

De même, les quantiles se diffèrent de la même manière. Cela confirme par l'exemple le caractère non négligeable de l'incertitude du paramètre de fréquence de Poisson en particulier pour les échantillons de petites tailles. Nous verrons dans la suite de ce mémoire les impacts sur le loss ratio du cas pratique.

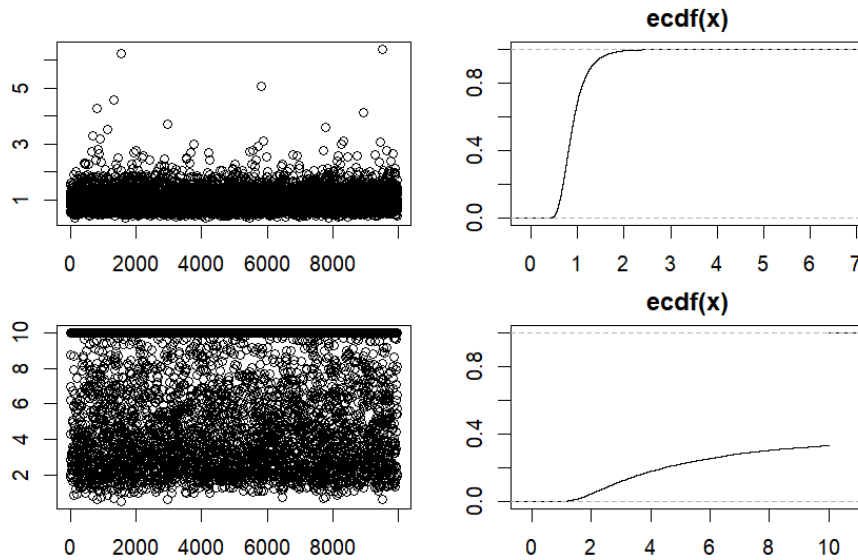
### 1.4.3 Incertitude des paramètres de la sévérité

Suite à l'analyse précédente de la distribution de Pareto généralisée pour la modélisation des données de sévérité, il est essentiel de s'attacher également à l'évaluation de l'incertitude des paramètres de cette distribution.

Dans le cas de la loi de Pareto Généralisée, on a deux paramètres  $\alpha_1, \alpha_2$ , notons donc  $\hat{P}_{\alpha_1, \alpha_2}$  la densité de la loi ajustée sur les estimateurs des paramètres obtenus par maximum de vraisemblance

Avec  $B = 10\,000$  échantillons bootstrap de taille  $n = 60$  sont générés avec  $\hat{P}_{\alpha_1=0.6498, \alpha_2=10}$ .

Pour chaque échantillon généré, les estimateurs des paramètres  $\hat{\alpha}_1$  et  $\hat{\alpha}_2$  sont recalculés de sorte qu'un échantillon de B réalisations des paramètres, noté  $\{\hat{\alpha}_{1j}, \hat{\alpha}_{2j}\}_{j=1, \dots, B}$ , est obtenu.



**Figure 1.28** – Distribution des paramètres de GPD simulés

Statistic	Alpha_1	Alpha_2
Mean	0.931	8.102
SD	0.329	2.982
CoV (%)	35.267	36.804
Quantile 50%	0.867	10.000
Quantile 75%	1.062	10.000
Quantile 90%	1.309	10.000
Quantile 95%	1.502	10.000

**Table 1.22** – Tableaux de statistiques des paramètres de GPD simulés

L'espérance de la sinistralité du réassureur pour une distribution GPD avec un seuil  $t$ , un engagement correspond à  $C$  et des paramètres  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  est calculée comme suit :

$$\begin{aligned}
 E(X^{\text{réass}}) &= E(\min(C, X)) \\
 &= \int_0^C (1 - F_{t, \alpha_1, \alpha_2}(x)) dx \\
 &= \int_t^C \left( 1 - \left[ 1 - \left( 1 + \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \left( \frac{x-t}{t} \right) \right)^{-\alpha_2} \right] \right) dx \\
 &= \int_t^C \left( 1 + \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \left( \frac{x-t}{t} \right) \right)^{-\alpha_2} dx \\
 &= \left[ \frac{\alpha_2 t}{\alpha_1 (1 - \alpha_2)} \left( \left( 1 + \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \left( \frac{x-t}{t} \right) \right)^{1-\alpha_2} \right) \right]_t^C \\
 &= \frac{\alpha_2 t}{\alpha_1 (1 - \alpha_2)} \left( \left( 1 + \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \left( \frac{C-t}{t} \right) \right)^{1-\alpha_2} \right)
 \end{aligned}$$

Dans le cas de la prise en compte de l'incertitude des paramètres de sévérité, l'espérance et la variance de la sinistralité réassureur deviennent des variables aléatoires.

— L'estimateur de l'espérance est défini par :

$$E_{\alpha_1, \alpha_2}(E(X^{\text{Réass}})_{\text{Boot}}) = E_{\alpha_1, \alpha_2}(E(X^{\text{Réass}} / \alpha_1, \alpha_2))$$

— L'estimateur de la variance donné par :

$$VAR_{\alpha_1, \alpha_2}(VAR(X^{\text{Réass}})_{\text{Boot}}) = VAR_{\alpha_1, \alpha_2}(VAR(X^{\text{Réass}} / \alpha_1, \alpha_2))$$

— Son coefficient de variation vaut :

$$\text{CoV} = \frac{V_{\alpha_1, \alpha_2}(E(X^{\text{Réass}})_{\text{Boot}})}{E_{\alpha_1, \alpha_2}(E(X^{\text{Réass}})_{\text{Boot}})}$$

On calcule par la suite ces éléments, on obtient :

<b>Statistic</b>	<b>Estimateur de l'espérance</b>	<b>sinistralité initiale</b>
Mean	19 926 180	18 500 940
SD	5 818 725	8 803 108
CoV (%)	29.2	47.58
Quantile 50%	18 980 590	16 458 300
Quantile 75%	21 586 940	22 804 860
Quantile 90%	24 852 410	27 645 880
Quantile 95%	28 083 360	33 108 470

**Table 1.23** – Comparaison des résultats obtenus pour la sévérité

On constate que l'estimateur de l'espérance de la sévérité est légèrement plus élevé que celui correspondant à l'ajustement des données initiales, comme prévu. Le tableau révèle également que les estimations de sévérité présentent une plus grande variabilité et une incertitude plus élevée par rapport aux estimations de bootstrap. Le coefficient de variation est de 47.58% pour les estimations sans intégration de l'incertitude des paramètres, contre 29.2% pour les estimations de bootstrap. Cela indique que les résultats sans prise en compte de l'incertitude des paramètres sont moins prévisibles et plus dispersés.

Par la suite, nous voyons l'impact de la prise en compte de cette incertitude sur LR.

### 1.4.4 Impact de l'incertitude sur l'estimation du ratio de sinistralité

Nous dressons le tableau final des résultats du ratio de sinistralité en tenant compte ou non de l'incertitude des paramètres pour la fréquence et/ou la sévérité.

Méthode	Loss Ratio
Sans incertitude	5.3%
Avec incertitude de fréquence	5.3%
Avec incertitude de sévérité	6.1%
Avec incertitude de fréquence et de sévérité	6.1%

**Table 1.24** – Comparaison des résultats obtenus par les méthodes Bootstrap et Pratique

On observe premièrement que le ratio de sinistralité est identique lorsque seule l'incertitude des paramètres de fréquence est prise en compte. Que ce soit dans le cas de la prise en compte de l'incertitude de la sévérité uniquement ou bien la prise de celle de la fréquence aussi, on constate une augmentation correspond à 0.8% par rapport soit au cas de non intégration du caractère d'aléatoire des paramètres estimés ou bien au cas d'intégration de celui de paramètre de fréquence.

Ces résultats sur le cas pratique montrent qu'il est indispensable de prendre en compte l'incertitude des paramètres des modèles de fréquence et de sévérité lors de la tarification en réassurance. L'impact sur le ratio de sinistralité est significatif pour être ignoré. En conclusion, l'analyse montre que la négligence de l'incertitude des paramètres peut conduire à une sous-estimation du ratio de sinistralité. Ce qui se traduit par une procédure de tarification moins robuste et prudente, en laissant une partie du risque non couverte. On constate également que c'est l'incertitude des paramètres de la sévérité qui semble avoir un impact plus significatif sur la cotation.

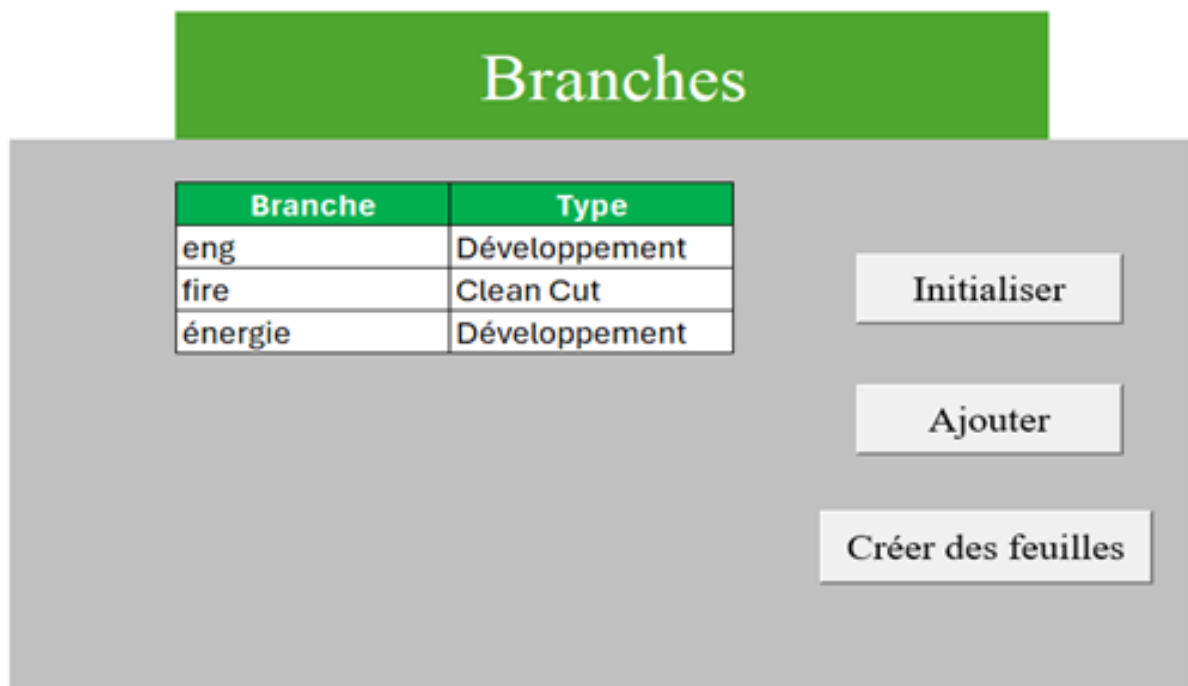
## 1.5 Automatisation du calcul de ratio technique via VBA Excel

### 1.5.1 Présentation de l'application VBA Excel

l'application VBA Excel en question conçue pour la tarification des traités proportionnels en réassurance non-vie. Elle comporte quatre feuilles, chacune dédiée à une fonctionnalité spécifique pour faciliter et automatiser le processus de tarification.

### 1.5.2 Feuille "Branches" :

**Objectif :** Cette feuille est le point de départ pour le remplissage des branches d'affaire et leurs modes.



**Figure 1.29** – Les branches du traité

La feuille contient trois boutons :

- le bouton **"Initialiser"** : pour nettoyer la feuille de toutes entrées précédentes.
- le bouton **"Ajouter"** : permet d'entrer le nom de la branche ainsi que sélectionner le type de comptabilisation des données : *"Développement"* ou *"Clean Cut"*.
- le bouton **"Créer les feuilles de calcul"** : Une fois toutes les branches ajoutées, ce bouton permet de générer automatiquement des feuilles de calcul pour chaque

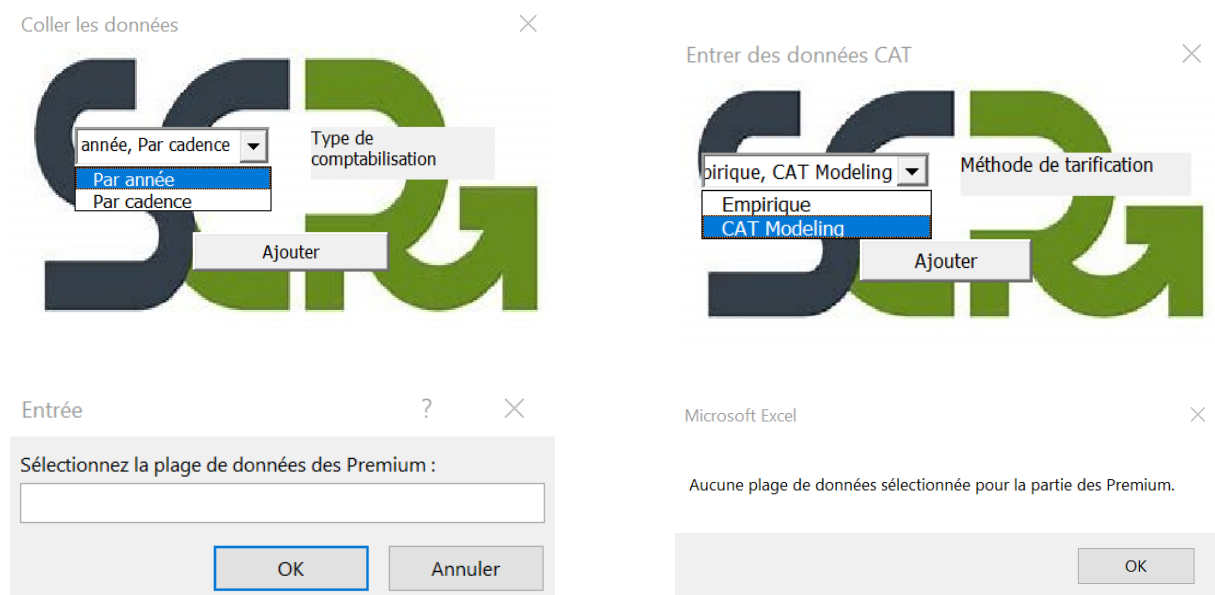
## 1. LA RÉASSURANCE PROPORTIONNELLE

branche, en utilisant les modèles prédéfinis en fonction du type de comptabilisation choisi : "Développement" ou "Clean Cut".

### 1.5.3 Feuille "Développement" :

**Objectif :** La feuille "Développement" est destinée à la gestion et à l'analyse des données de sinistres et de primes que ça soit sous forme de triangles de développement par année d'origine ou bien par cadence.

Cette feuille comporte un bouton pour initialiser la feuille, un autre pour saisir les données en sélectionnant le mode de comptabilisation (soit par année, soit par cadence), ainsi qu'un bouton pour réaliser le calcul global jusqu'à l'obtention des ratios S/P. Concernant les événements catastrophiques, des boutons spécifiques sont disponibles, car le traitement dépend de la disponibilité d'un historique ou de l'utilisation de la modélisation des catastrophes.



**Figure 1.30** – Entrer les données

Cette feuille contient 5 sections :

## 1.5.3.1 les sinistres payés et les suspens :

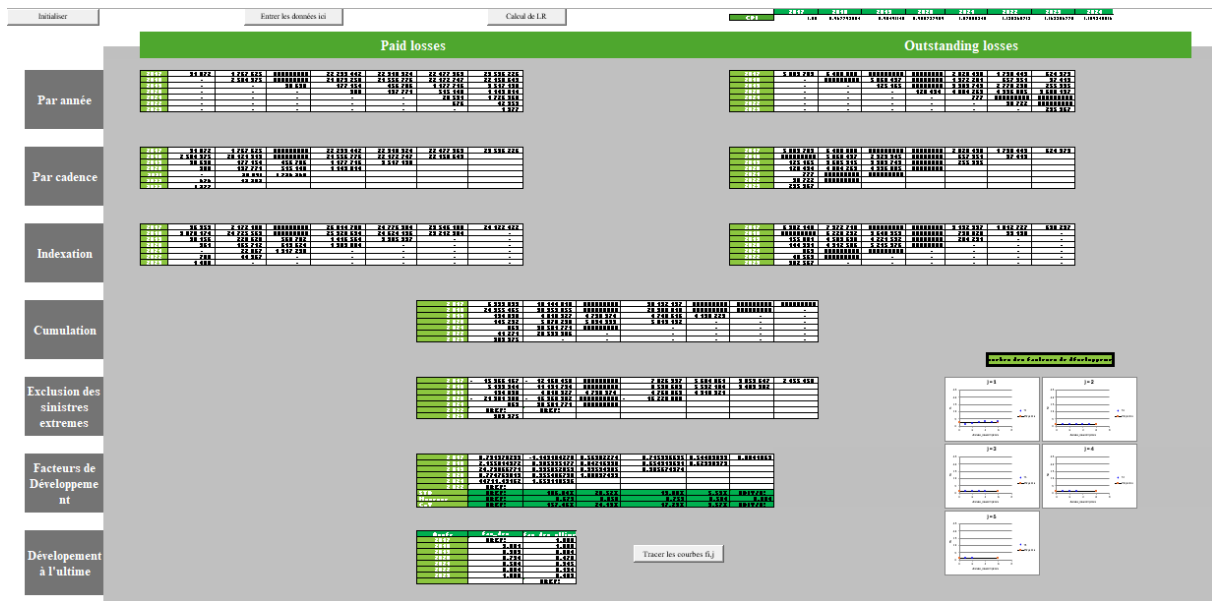


Figure 1.31 – Analyse de "Paid Losses" et "Outstanding losses"

- **Par année** : Affiche les pertes payées et les suspens par année d'origine.
- **Par cadence** : Détaille les pertes selon la cadence du développement.
- **Indexation** : la mise en statistique « As If » à l'aide d'indice d'indexation présenté dans la feuille.
- **Cumulation** : Accumule les sinistres payés et les suspens afin d'obtenir les montants totaux de sinistres survenus.
- **Exclusion des sinistres extrêmes** : Afin d'isoler uniquement les sinistres attritionnels, nous soustrayons les montants des pertes majeures (Major Losses) et des événements catastrophiques (Cat Event), après les avoir indexés.
- **Tableau des facteurs de Développement** : Présente le tableau des facteurs de développement des sinistres par année d'origine et de développement ainsi que ses écarts-type, ses moyennes et ses coefficients de variation.
- **Facteurs de Développement et à l'Ultime** : Calcule les facteurs de développement des sinistres et celles à ultimes pour chaque année d'origine.

## 1. LA RÉASSURANCE PROPORTIONNELLE

### 1.5.3.2 Les primes :

Cette section affiche les étapes de la préparation des données de primes, similaires à celles utilisées pour les sinistres, à l'exception de la cumulation et de l'exclusion des valeurs extrêmes.

### 1.5.3.3 Les sinistres majeurs :

Elle contient deux tableaux. Le premier tableau présente les sinistres majeurs, les sinistres majeurs indexés, leurs périodes de retour " Payback " ainsi que les recherches associées aux sinistres. Le deuxième tableau, répertorie les sinistres majeurs par année d'origine avec leur indexation. Ce sont ces sinistres qui sont déduits du triangle des sinistres survenus pour déterminer les sinistres attritionnels.

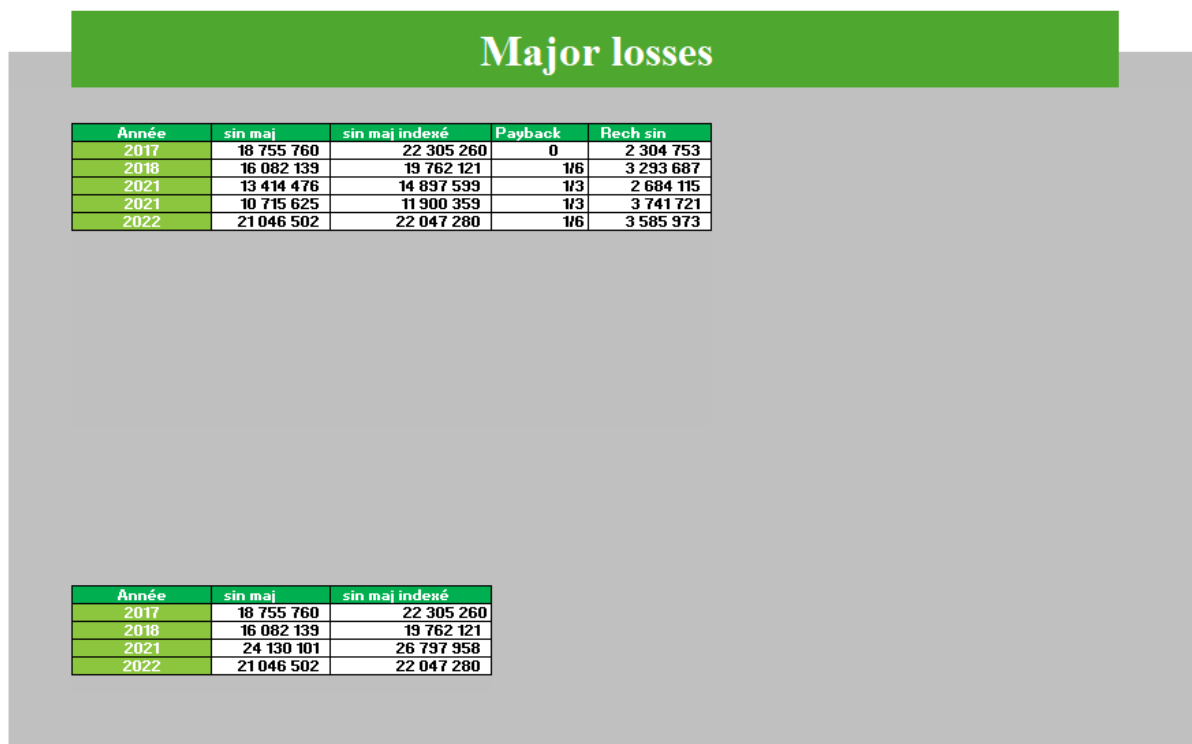


Figure 1.32 – Analyse des sinistres majeurs

### 1.5.3.4 Les événements catastrophiques :

Présente l'analyse des événements catastrophiques. Si on possède un historique des catastrophes, **cette section est similaire à celle des sinistres majeurs**, sinon on utilise la méthode de modélisation catastrophique. La feuille présente donc les éléments techniques de cette méthode, qui sont : *AAL*, *SD*, *EPI* et *la volatilité utilisée*. Par la suite donne le taux S/P des sinistres catastrophiques.

## 1. LA RÉASSURANCE PROPORTIONNELLE

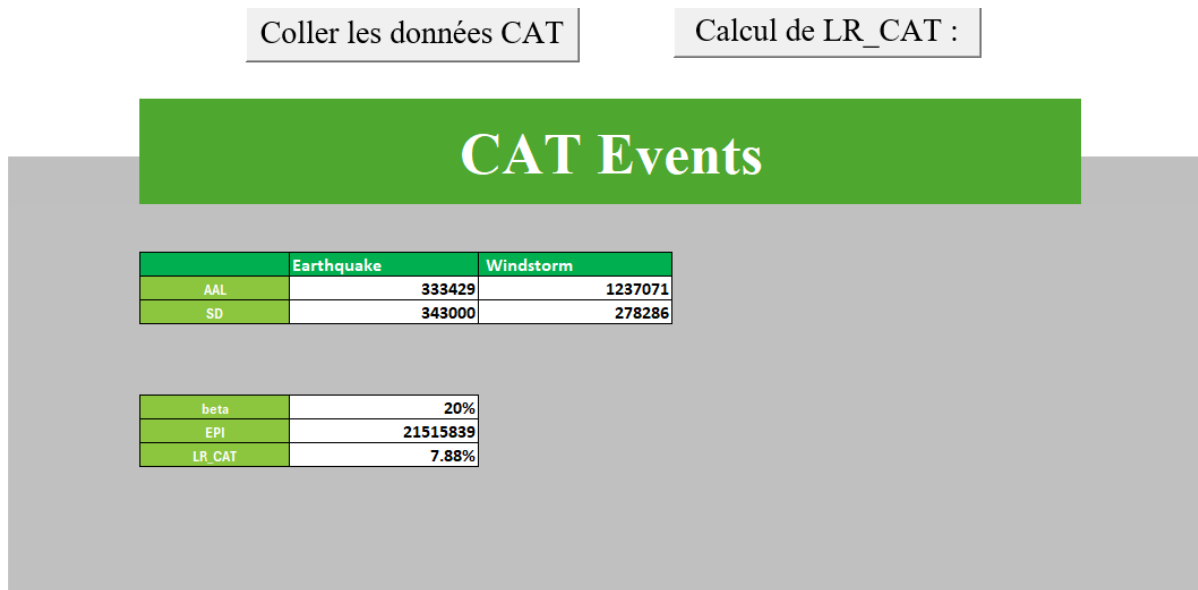


Figure 1.33 – Analyse de "CAT Events"

### 1.5.3.5 Résultat :

Fournit un récapitulatif des résultats des ratios S/P de la branche à tarifier.

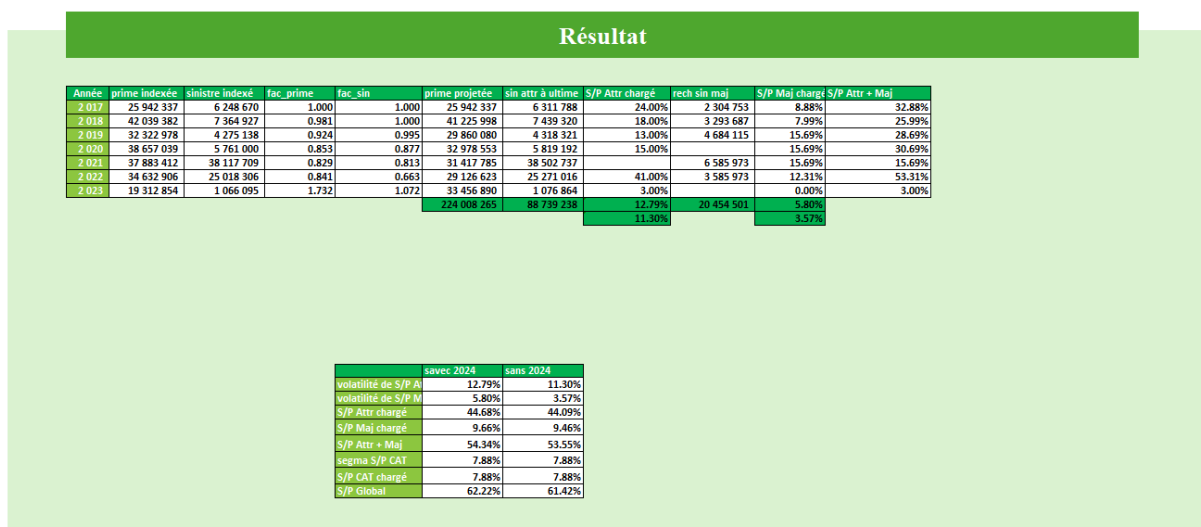


Figure 1.34 – Récapitulatif de la feuille de développement

### 1.5.4 Feuille "Clean Cut" :

**Objectif :** Cette page offre trois sections principales, permettant le calcul du taux de sinistres/primes (S/P) en cas des données par année de compte.

# 1. LA RÉASSURANCE PROPORTIONNELLE

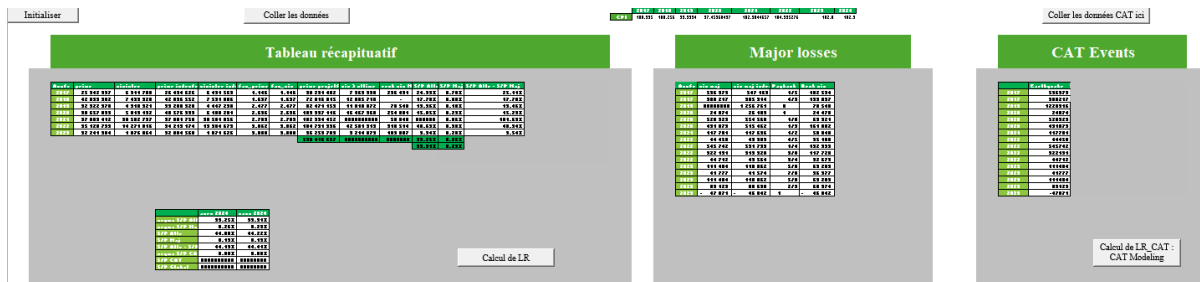


Figure 1.35 – Analyse des données "Clean Cut"

De la même, cette feuille présente des boutons d'initialisation, d'entrer des données et d'effectuer les calculs nécessaires.

## 1.5.4.1 Récapitulatif :

Cette section affiche 2 tableaux : le premier montre l'analyse pour le calcul de loss ratio attritionnel et majeur. Le deuxième présente les volatilités et les valeurs du taux de sinistres/primes (S/P) sans et avec l'inclusion de l'année de cotation.

## 1.5.4.2 "Major losses" et "CAT Events" :

Ces deux sections sont similaires à celles présentées dans la feuille "Développement". Chaque section est équipée de boutons fonctionnels comme "Initialiser" pour remettre à zéro les données et "Coller les données" pour importer de nouvelles données dans le tableau, permettant une gestion dynamique et interactive des données.

## 1.5.5 Feuille "Récapitulatif" :

**Objectif :** Cette page "Récapitulatif" est conçue pour présenter automatiquement les résultats des calculs des autres feuilles ainsi que d'ajouter les autres éléments techniques nécessaires pour le calcul du ratio technique.

## 2. LA RÉASSURANCE NON PROPORTIONNELLE EN XS

Fiche technique

Zone	
Pays	
Cédante	
Monnaie	

Type de traité	
Type d'offre	
Date	
Monnaie to MAD	

Branche	LR_ATTR	LR_MAJ	LR_CAT	LR_global	Commission	BK	Taxes	Marque	PB	RT_avtPB	RT	EPI	RT_global
fire	44.68%	3.66%	7.88%	62.22%						62.22%	62.22%	39567	61.31%
eng	44.00%	6.19%	5.45%	55.64%						55.64%	55.64%	43856	
energie	43.34%	3.67%	7.80%	66.81%						66.81%	66.81%	38766	
Bouquet	45.31%	8.42%	6.38%	61.31%	0	0	0			61%	61.31%	122189	

Initialiser

Calcul de RT

Branche	RT
fire	62.22%
eng	55.64%
energie	66.81%
Bouquet	61.31%

Figure 1.36 – Fiche technique

## 2 La réassurance non proportionnelle en XS

### 2.1 Présentation des données

Les données utilisées proviennent d'une cédante située en Éthiopie, correspond à une branche Motor Own Damage. L'objectif est de tarifier un traité XS comportant deux tranches C xs P. Notre programme de tarification est le suivant :

LINE OF BUSINESS: Motor Own Damage					
<i>All figs in ETB</i>					
2024-25 Final Terms					
Layer	GNPI	Limit	Deductible	Reinstatement	AAL
Layer 1	138 647 566	13 000 000	2 250 000	AAL 20M & 1 reinst.	20000000
Layer 2		10 000 000	15 250 000	prorata as to amount	20000000
<b>TOTAL</b>	<b>138 647 566</b>	<b>23 000 000</b>	<b>17 500 000</b>		<b>40000000</b>

Figure 2.1 – Le programme de l'affaire à tarifier

## 2.2 Calcul de Burning Cost

### 2.2.1 Processus

#### Etape 1 : Indexation des primes GNPIs

On choisit de travailler avec l'indice des prix à la consommation CPI du pays en question.

Année	GNPI	GNPI INDEXED
2014	21 980 000	33 437 754
2015	23 281 340	34 110 124
2016	34 640 000	48 226 321
2017	47 286 943	62 968 254
2018	47 655 488	58 727 836
2019	41 325 865	47 454 461
2020	45 547 069	50 696 679
2021	42 899 957	46 117 549
2022	77 896 883	82 527 975
2023	120 067 885	124 031 975
2024	138 647 566	138 647 566

**Table 2.1** – GNPI et GNPI INDEXED par année

#### Etape 2 : Préparation des sinistres

On indexe les sinistres individuels puis on calcule le coût annuel de sinistres à la charge du réassureur en appliquant la clause principale pour chaque tranche ainsi que les clauses particulières, dans notre cas, correspond à la clause de la limite "Aggregate" AAL (Annual Aggregate Limit) et la clause de reconstitutions de garantie.

## 2. LA RÉASSURANCE NON PROPORTIONNELLE EN XS

Année	Coût	Coût indexé	Tranche 1					Tranche 2
			$\min(\max(X_i - P, 0), C)$	$\min(\max(C_i - AAD, 0), AAL)$	BC i	Volatilité	prRec i	$\min(\max(X_i - P, 0), C)$
2014	315 000	479 203.48	-	-	-	-	-	-
2014	411 448	625 927.98	-	-	-	-	-	-
2014	1 562 755	2 377 389.31	127 389.31	532 804.44	1.59%	1.59%	4.10%	-
2014	1 745 513	2 655 415.13	405 415.13	-	-	-	-	-
2015	447 000	654 911.85	-	-	-	-	-	-
2015	508 725	745 346.22	-	-	-	-	-	-
2015	494 000	723 772.83	-	-	-	-	-	-
2015	441 629	647 042.66	-	-	-	-	-	-
2015	489 339	716 944.11	-	-	-	-	-	-
2015	799 623	1 171 549.17	-	-	-	-	-	-
2015	1 315 869	1 927 915.76	-	-	-	-	-	-
2015	1 995 000	2 922 928.75	672 928.75	1 396 206.76	4.09%	4.09%	10.74%	-
2015	1 715 068	2 512 792.70	262 792.70	-	-	-	-	-
2015	1 850 000	2 710 485.30	460 485.30	-	-	-	-	-
2016	800 000	1 113 771.85	-	-	-	-	-	-
2016	800 000	1 113 771.85	-	-	-	-	-	-
2016	855 000	1 190 343.66	-	-	-	-	-	-
2016	884 355	1 231 212.03	-	-	-	-	-	-
2016	900 511	1 253 705.39	-	-	-	-	-	-
2016	950 000	1 322 604.07	-	-	-	-	-	-
2016	976 725	1 359 811.62	-	-	-	-	-	-
2016	999 000	1 390 822.59	-	-	-	-	-	-
2016	1 656 982	2 306 874.25	56 874.25	-	-	-	-	-
2016	1 800 000	2 505 986.66	255 986.66	-	-	-	-	-
2016	1 900 000	2 645 208.14	395 208.14	-	-	-	-	-
2016	1 958 977	2 727 317.21	477 317.21	-	-	-	-	-
2016	2 014 519	2 804 642.88	554 642.88	4 088 152.92	8.48%	8.48%	31.45%	-
2016	2 210 000	3 076 794.73	826 794.73	-	-	-	-	-
2016	2 600 000	3 619 758.51	1 369 758.51	-	-	-	-	-
2016	1 525 000	2 123 127.58	-	-	-	-	-	-
2016	914 519	1 273 206.59	-	-	-	-	-	-

**Figure 2.2** – Extrait de calcul de la charge annuelle de réassureur

**Etape 3 :** Le taux BC est donné donc par la formule suivante :

$$BC = \frac{\sum_{i=1}^N \text{charge réassureur indexée}}{\sum_{i=1}^N \text{Prime GPNI indexée}}$$

Par la suite, on calcule le taux technique selon la formule suivante :

$$\text{taux technique} = \frac{BC \times (1 + \beta \times \sigma) \times (1 - \text{Rec})}{(1 - BK - FG - AF)}$$

Avec :

$\sigma$  : volatilité des taux  $BC_i$  de l'année  $i$ .

Et

$$\text{Rec} = \frac{prRec}{prRec + N}$$

Avec :

$$prRec = \sum_{i=1}^N \sum_{r=1}^{nrec} t_{rec}^r \times \frac{\min(C, \max(C_i - (r - 1) * C))}{C}$$

$N$  est le nombre d'années utilisées pour faire la tarification,  $t_{rec}^r$  est le taux de reconstitution calculé selon le type de reconstitution, et  $C_i$  représente la charge dans la tranche de l'année  $i$  :  $C_i = \min(\max((\sum_{j=1}^{n_i} X_j^{Réass}) - AAD, 0); AAL)$  où  $X_j^{Réass} = \min(\max(X_j^{as} -$

$P; 0); C)$  et  $n_i$  c'est le nombre de sinistres survenus l'année  $i$ .

On obtient le résultat suivant :

<b>Tranche 1</b>	
BC	4.72%
$\sigma$	3.85%
Rec	17.59%
BK	10%
FG	5%
AF	10%
<i>taux technique</i>	5.19%
<b>Tranche 2</b>	
BC	0%

**Table 2.2** – Récapitulatif de la méthode de Burning Cost

- La première tranche **13 000 000 XS 2 250 000** est **travaillante**, on obtient un burning cost pur de 4.72% ainsi qu'un taux technique de 5.19%.

- Pour la deuxième tranche est **non travaillante**, la méthode de Burning Cost donne un taux BC pur nul. On applique donc **la méthode de tarification par simulation** pour cette branche.

**Attention :** Ne pas confondre le taux technique dans la tarification proportionnelle et non proportionnelle.

## 2.3 Tarification par simulation

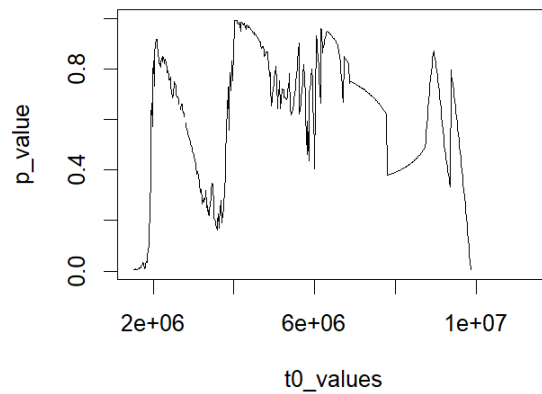
### 2.3.1 Détermination du seuil de modélisation

Le choix du seuil de modélisation est un aspect fondamental dans la tarification des traités de réassurance. Le seuil de modélisation choisi doit être se situer entre le **seuil de communication** (le seuil à partir duquel le courtier rapporte les sinistres) et la priorité de la tranche que l'on souhaite tarifier. Si on choisit un seuil trop proche de la priorité, on risque de ne pas capturer un nombre suffisant de sinistres pour garantir une modélisation robuste, le résultat est donc biaisé. À l'inverse, s'il est trop éloigné de la priorité (généralement en dessous de 50% de celle-ci), la loi choisie risque de ne pas être pertinente pour décrire de manière adéquate les sinistres situés au-delà de cette priorité.

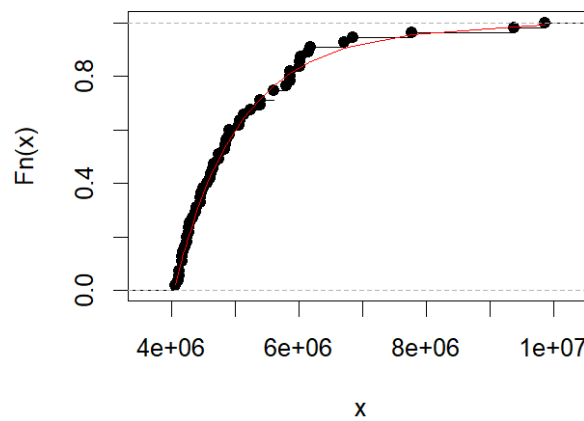
### 2.3.1.1 Méthode 1 : Bon ajustement de sinistres au-delà du seuil

Ce seuil est choisi de manière à ce que les sinistres au-delà du seuil soient **bien modélisés par la loi théorique**, optimisant ainsi la p-value du test d'adéquation de **Kolmogorov Smirnov**.

On choisit d'ajuster la sévérité avec la distribution de Pareto Généralisée à la même raison présentée dans la partie proportionnelle.



**Figure 2.3** – Courbe de p-value de test de kolmogorov smirnov



**Figure 2.4** – Fonction de répartition empirique vs théorique

- la seuil qui maximise le p-value est de [4041250](#).

### 2.3.1.2 Méthode 2 : Estimateur de maximum de vraisemblance

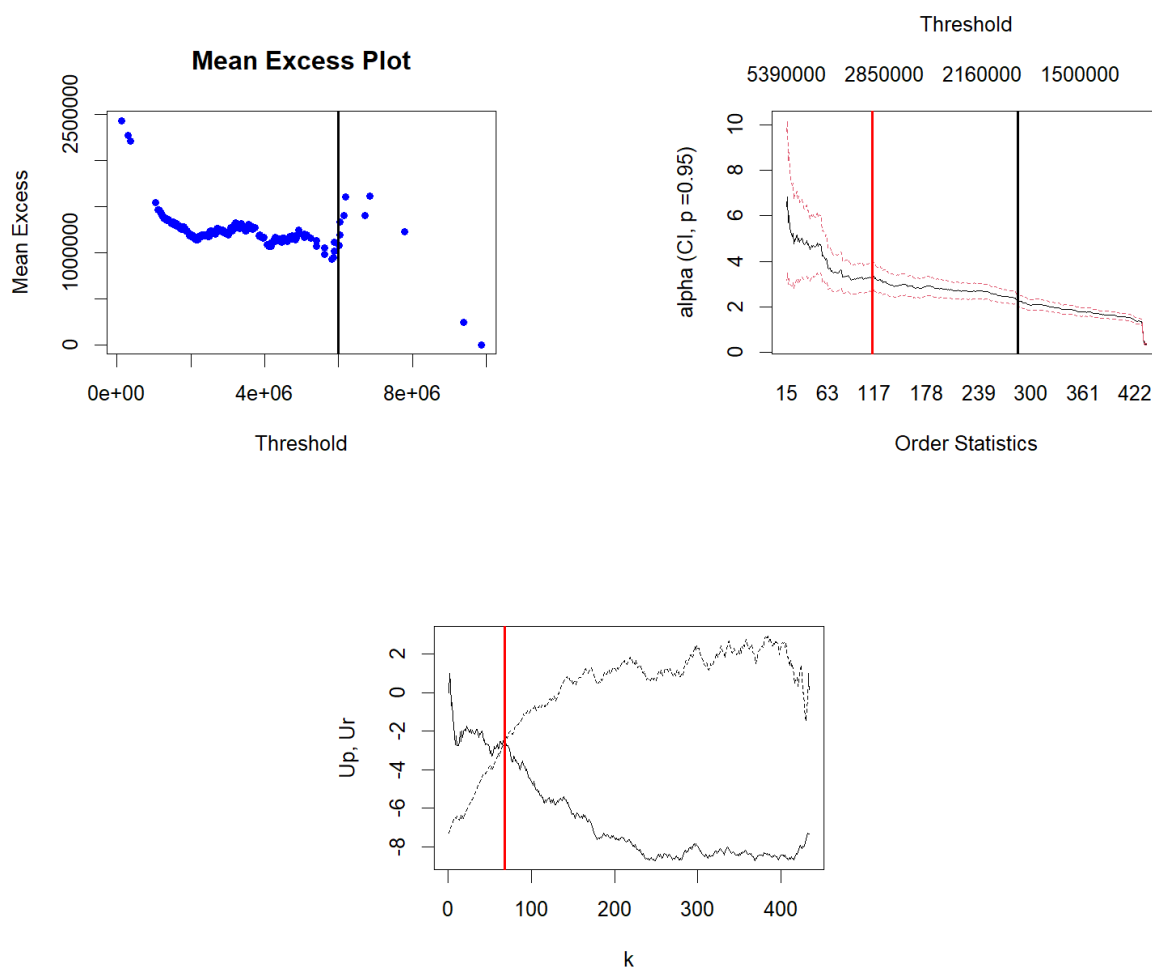
L'estimateur de maximum de vraisemblance de seuil de modélisation comme paramètre de la loi de Pareto Généralisée est donné par :

$$\hat{u} = \min(X_i)$$

Pour nos données, cette valeur égale à 126374.

### 2.3.1.3 Méthode 3 : Théorie de valeurs extrêmes

Avec les mêmes fonctions utilisées dans la partie de la tarification proportionnelle, on trace le graphe de la fonction moyenne d'excès, le Hill Plot et le Gerstengarbe Plot.



**Figure 2.5** – Les méthodes graphiques de la détermination de seuil

- Le graphe de **mean excess function** donne un seuil de 5 500 000, à partir duquel les valeurs du mean excess function semblent volatiles.

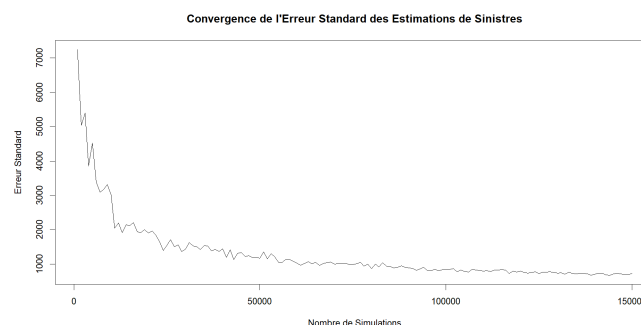
- Pour le graphique de l'**estimateur de Hill**, la zone de stabilité est estimée à partir de **285** excès ou alternativement **115** excès, correspond respectivement à des seuils de **1 891 322** et **3 013 673**.
- La méthode de **Gerstengarbe** propose un nombre d'excès de **68**, correspondant à un seuil d'environ **3 618 756**. Cette valeur est proche à la deuxième valeur obtenue par le Hill plot.

### 2.3.2 Ajustement de la sévérité et de la fréquence

Pour chaque seuil retenu, on modélise la sévérité avec la loi de Pareto Généralisée puis on test l'adéquation avec le test de kolmogov smirnov et le test d'anderson darling. on modélise la fréquence avec la loi de poisson en testant l'adéquation à l'aide de test de khi-deux de Pearson.

### 2.3.3 Processus de simulation

On étudie tout d'abord **la convergence des données simulées**. Le graphe ci-dessous montre que l'estimateur de l'erreur standard approximativement converge à partir de **100 000**. Nous avons choisi donc **100 000** comme nombre de simulation.



**Figure 2.6** – convergence de simulation XS

On simule donc **100 000** scénarios de sinistralité avec les paramètres déjà ajustés des lois de distribution des sinistres. La somme des sinistres est représentée par la formule suivante :

$$S = \sum_{i=1}^N X_i$$

où  $N$  suit une loi de Poisson de paramètre  $\lambda$  et chaque  $X_i$  est tiré d'une distribution de Pareto généralisée.

L'algorithme utilisé pour la simulation est le suivant :

```

simulate_S <- function(t0, alpha_1, alpha_2, lambda) {
  N = rpois(1,as.numeric(lambda))
  if (N == 0){
    S = 0
  }
  else {
    GPD = rGenPareto(N, t0, alpha_1, alpha_2)
    for (i in 1:N) {
      S[i] = min(max(0, GPD[i] - P ), C)
    }
  }
  S = min(AAL, sum(S))
  return(S)
}

```

Après l’obtention de la sinistralité annuelle, le taux pur est calculé simplement comme moyenne de cette sinistralité divisée par GNPI. Ensuite, Nous appliquons les clauses stipulées dans le traité. Dans notre cas, une reconstitution de garantie de type propata capito. L’engagement de réassureur est limité donc à  $2 \times C = 20000000$ . En ajoutant le chargement de sécurité, la clause de reconstitution et les autres frais de réassureur résumés en 25%, on obtient le taux technique par la formule suivante :

$$\text{taux technique} = \frac{(\mathbb{E}(S) + \beta \times \sqrt{\text{VAR}(S)}) \times (1 - \text{Rec})}{\text{GNPI} \times (1 - \text{BK} - \text{FG} - \text{AF})}$$

Les résultats obtenus sont résumés dans le tableau suivant :

Seuil	$\alpha_1$	$\alpha_2$	KS	AD	lambda	taux pur	taux technique
<b>4041250</b>	3.994	10	0.9954	0.986	3.778	0.0041%	0.0055%
<b>126374</b>	0.053	10	0	0	5.9	0.1835%	0.2023%
<b>5500000</b>	6.132	5.178	0.6951	0.6722	2.857	0.0072%	0.0096%
<b>3618756</b>	3	10	0.1891	0.3009	4.222	0.0077%	0.0103%
<b>3013673</b>	2.7	10	0.4528	0.6328	4.444	0.0072%	0.0096%
<b>1891322</b>	1.654	10	0.0821	0.0765	5.222	0.0112%	0.0148%

**Table 2.3** – Tableau récapitulatif des seuils obtenus

# Conclusion

L'objectif de ce mémoire était de proposer un guide complet concernant la tarification des traités proportionnels et non proportionnels en XS de réassurance non vie, en explorant son aspect théorique et pratique.

Pour la tarification des traités proportionnels, l'objectif est de calculer la commission de réassurance et d'évaluer la performance de l'affaire à travers le calcul du ratio technique. Pour ce faire, une étape importante concerne l'estimation de ratio de sinistres sur primes en utilisant la méthode empirique ou aussi la méthode probabiliste. Nous avons également souligné l'importance de l'adoption de la méthode de modélisation catastrophique pour les événements catastrophiques, où les données sont souvent insuffisantes.

La méthode probabiliste a particulièrement mis en lumière son potentiel pour améliorer notre compréhension et notre gestion des risques extrêmes. Elle permet une estimation plus précise des distributions de fréquence et de la sévérité des sinistres majeurs, tout en facilitant l'évaluation de diverses mesures de risque dans le calcul de la marge de sécurité.

Ensuite, étant donné que les méthodes traditionnelles de la tarification ne prennent pas en compte l'incertitude des paramètres de fréquence et de sévérité, l'analyse de l'impact de cet aspect a également constitué un point focal de ce rapport. Cette approche permet non seulement d'améliorer la fiabilité des estimations, mais elle contribue également à renforcer la solvabilité de l'entreprise de réassurance face à des risques volatils et imprévisibles.

Dans le cadre de la tarification des traités non proportionnels en XS, nous avons analysé quelques méthodes de calcul de prime : méthode de burning cost, modèle probabiliste et la tarification par simulation.

En définitive, ce projet a non seulement permis d'éclairer les pratiques actuelles de tarification en réassurance, mais il a aussi ouvert la voie à une réflexion plus large sur la manière d'intégrer efficacement les outils modernes de risque et de l'incertitude dans l'évaluation de l'affaire à tarifier.

# **Annexe**

# Annexe A

## La quote-part est la souhaitable pour les réassureurs : Preuve

Soit :  $X_{\text{réass}} = X - X_{\text{ass}}$

où :

- $X$  : Sénéstralité totale.
- $X_{\text{réass}}$  : Le montant à la charge du réassureur.
- $X_{\text{ass}} = g(X)$  : représente la part des pertes retenues par l'assureur, où  $g(\cdot)$  est appelée la fonction de rétention. Pour simplifier, assumons que l'assureur ne retient pas plus de pertes que celles du sinistre, i.e.,  $g(x) \leq x$ , et qu'il est uniquement préoccupé par la stabilité de la variance des réclamations retenues  $\text{Var}(X_{\text{ass}})$ , fixée à  $Q$ . Il est alors indifférent à la forme de  $g$  tant que  $\text{Var}(X_{\text{ass}}) = Q$ .

La variance de la sinistralité réassureur s'exprime comme suit :

$$\begin{aligned}\text{Var}(X_{\text{réass}}) &= \text{Var}(X) + \text{Var}(X_{\text{ass}}) - 2\text{Cov}(X, X_{\text{ass}}) \\ &= \text{Var}(X) + \text{Var}(X_{\text{ass}}) - 2\text{Corr}(X, X_{\text{ass}}) \times \sqrt{\text{Var}(X)\text{Var}(X_{\text{ass}})}\end{aligned}$$

Comme  $Q$  et  $\text{Var}(X)$  ne changent pas avec le choix de  $g$ . Cette formule montre que  $\text{Var}(X_{\text{réass}})$  soit minimale quand  $\text{Corr}(X, X_{\text{ass}})$  est maximisée. Pour un traité de réassurance à quota-part,  $\text{Corr}(X, X_{\text{ass}}) = 1$ , indiquant une corrélation maximale et donc une optimisation de la réduction de la variance pour le réassureur.

# Annexe B

## Vérification de la deuxième hypothèse de la méthode de Chain Ladder

L'hypothèse de linéarité des montants cumulés de Chain Ladder avec le CC Plot :

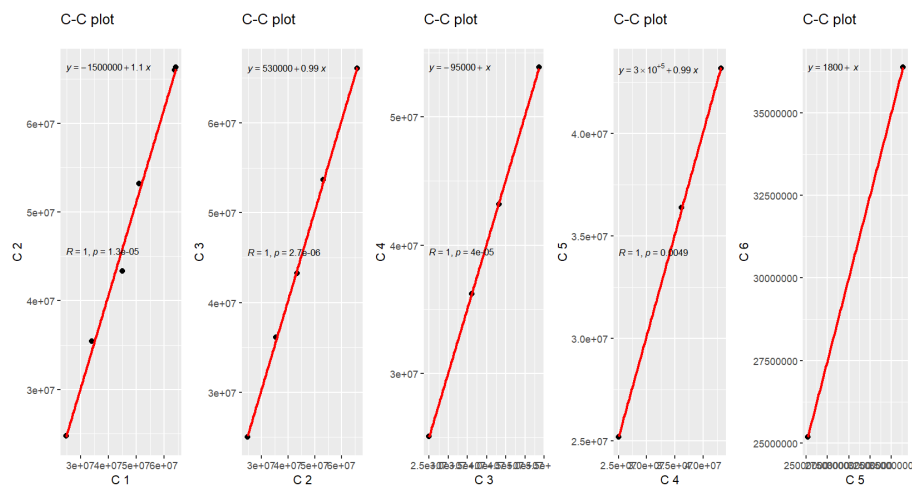
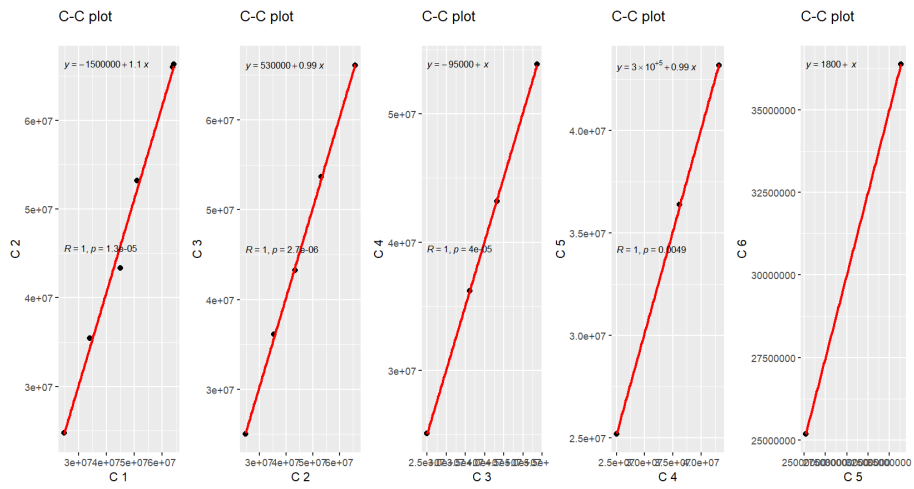


Figure 0.1 – CC plot de primes



**Figure 0.2** – CC plot de sinistres

# Annexe C

## Le modèle de risque collectif

Le modèle de risque collectif considère le montant total des sinistres d'un portefeuille composé de plusieurs polices homogènes ; une police pouvant générer plusieurs sinistres. Soit  $S$  la variable aléatoire réelle qui représente la charge totale des sinistres du portefeuille sur la période étudiée.  $S$  est déterminée par le nombre total de sinistres survenant sur le portefeuille dans la période étudiée et par les montants de chacun de ces sinistres. Ainsi, on pose :

- $N$  : la variable aléatoire réelle à valeurs entières qui représente le nombre des sinistres survenant sur le portefeuille dans la période étudiée,
- $(X_i)_{i \geq 1}$  : la suite de variables aléatoires réelles représentant chacune le montant d'un sinistre.

On a alors :

$$S = \sum_{i=1}^N X_i$$

Nous ferons également les deux hypothèses suivantes :

- **Indépendance des nombres et des montants** : les variables aléatoires réelles  $N$  et  $(X_i)_{i \geq 1}$  sont indépendantes.
- **Indépendance et équidistribution des montants de sinistre** : les coûts des sinistres successifs  $X_1, X_2, \dots, X_i, \dots$  sont indépendants et de même loi que la variable aléatoire réelle parente  $X$ .

Ainsi, en supposant  $N$  et  $X$  admettent des moments d'ordre 1 et 2, nous avons :

$$E(S) = E(N) \times E(X)$$

$$V(S) = E(N)V(X) + V(N) [E(X)]^2$$

Preuve :

$$\begin{aligned} E(S) &= E[E(S | N)] \\ &= E\left[\sum_{i=1}^N X_i | N\right] \\ &= E\left[\sum_{i=1}^N E(X_i | N)\right] \\ &= E[NE(X | N)] \\ &= E(N)E(X). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V(S) &= E[V(S | N)] + V[E(S | N)] \\ &= E\left[\sum_{i=1}^N V(X_i | N)\right] + V\left[\sum_{i=1}^N E(X_i | N)\right] \\ &= E[NV(X | N)] + V[NE(X | N)] \\ &= E(N)V(X) + V(N)[E(X)]^2. \end{aligned}$$

En cas de traité de réassurance proportionnelle avec un engagement maximal :

$$E(X^{Réass}) = E(\min(X, C))$$

Avec : C correspond à l'engagement maximal de réassureur pour chaque risque (Capacité).

Ce modèle est moins précis que le modèle individuel mais bien plus commode à calibrer.

## Modélisation du Nombre de Sinistres

Nous rappelons ici les principales caractéristiques des deux distributions usuelles servant à la modélisation du nombre de sinistres.

### Distribution de Poisson : $P(\lambda)$

Elle a pour paramètre  $\lambda > 0$ .

$$P(N = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \text{ pour } k \in \mathbb{N}.$$

---

Moments d'ordre 1 et 2 :

$$\mu_k = \lambda^k \text{ d'où pour les premiers moments } E(N) = \lambda, \quad V(N) = \lambda = E(N).$$

### **Distribution binomiale négative : $BN(r, p)$**

Elle a pour paramètres  $r > 0$  et  $p \in [0, 1]$ ; nous poserons  $q = 1 - p$ .

$$P(N = n) = \frac{\Gamma(r+n)}{\Gamma(r)n!} p^r q^n \text{ pour } n \in \mathbb{N} \text{ avec } \Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt$$

et

$$\frac{\Gamma(r+n)}{\Gamma(r)} = (r+n-1) \dots r \text{ si } n \geq 1 \text{ et } 1 \text{ si } n = 0.$$

Moments 1 et 2 :

$$E(N) = \frac{r}{p}, \quad V(N) = \frac{rq}{p^2} = \frac{r(1-p)}{p^2}$$

### **L'utilisation de ces distributions :**

**La loi de Poisson**  $P(\lambda)$  est la loi fondamentale de l'assurance non vie, bien adaptée aux classes homogènes de risques. Cependant, son unique paramètre la rend moins flexible, elle présente une queue de distribution fine et l'égalité  $E(N) = V(N)$  est loin d'être toujours vraie.

**La distribution binomiale négative**  $BN(r, p)$  a la particularité  $V(N) > E(N)$  qui la rend souvent utilisable en non vie. Elle est surtout utilisée pour modéliser la distribution du nombre de sinistres d'un contrat d'une classe de risques dont l'hétérogénéité est encore élevée malgré la segmentation du portefeuille.

## **Modélisation de la Sévérité**

### **Distribution log-normale $LN(\mu, \sigma^2)$**

Elle a pour paramètres  $\mu \in \mathbb{R}$  et  $\sigma > 0$ .

La sévérité  $X$  suit une loi log-normale  $LN(\mu, \sigma^2)$  si et seulement si la variable aléatoire  $\ln(X)$  suit la loi normale  $N(\mu, \sigma^2)$ .

Densité et fonction de répartition :

$$f(x) = \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}} \quad \text{et} \quad F(x) = \Phi\left(\frac{\ln x - \mu}{\sigma}\right)$$

où  $\Phi$  est la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.

Moments 1 et 2 :

$$E(X) = e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}}, \quad V(X) = e^{2\mu + \sigma^2} (e^{\sigma^2} - 1)$$

## Distribution Pareto $P(a, \alpha)$

Elle a pour paramètres  $a$  (souvent donné, niveau d'une franchise par exemple) et  $\alpha$  strictement positifs.

Densité et fonction de répartition :

Elle a pour paramètres :  $a > 0$  le paramètre d'échelle (le seuil) et  $\alpha > 0$  le paramètre de forme (de Pareto) .

$$f(x) = \frac{\alpha a^\alpha}{x^{\alpha+1}} \text{ pour } x \geq a, \quad F(x) = 1 - \left(\frac{a}{x}\right)^\alpha \text{ pour } x \geq a$$

Moments 1 et 2 :

$$E(X) = \frac{\alpha a}{\alpha - 1} \text{ si } \alpha > 1, \quad V(C) = \frac{\alpha a^2}{(\alpha - 1)^2(\alpha - 2)} \text{ si } \alpha > 2$$

## L'utilisation des différentes lois

**La distribution log-normale** est la plus utilisée en assurance non vie et en réassurance en cas des données positives causant une distribution à queue pas trop épaisse.

**La distribution de Pareto** est privilégiée en réassurance en raison de sa queue de distribution épaisse ( cas des sinistres majeures et des évènements catastrophiques). Cependant, l'existence des moments n'est pas certaine pour tous les paramètres.

# Annexe D

## Modélisation des évènements Catastrophiques

Les évènements catastrophiques se caractérisent par l'insuffisance des données historiques. En plus, l'hypothèse d'indépendance entre les montants de sinistres des risques n'est plus valable. Une conséquence de cela est que les techniques actuarielles traditionnelles sont inadéquates pour gérer le risque issu des aléas naturels (Banks, 2005). Parallèlement, l'avancement de la technologie de l'information et des systèmes d'information géographique (SIG) dans les années 1980 et 1990, permettant ainsi une analyse plus précise et efficace des risques potentiels. Cette évolution a été marquée par le développement de logiciels spécialisés par des entreprises comme AIR Worldwide et RMS, et par la création de modèles publics tels que HAZUS par la FEMA.

### Les principales composantes des modèles de catastrophe

L'objectif d'un modèle de catastrophe est de quantifier le risque financier issu d'un type particulier d'aléa naturel. Les quatre modules d'un modèle CAT sont :

**Module Exposition :** Pour l'estimation des pertes, les informations les plus importantes sont la localisation et le type de construction du bien ainsi que sa valeur totale (l'exposition).

**Module Aléa (catalogue d'événements) :** Le but de ce module est de produire des représentations simplifiées des caractéristiques physiques complexes qui sont modélisées. Ce module se base sur des données historiques ainsi que des données synthétiques

(stochastiques). Les paramètres d'entrée varient considérablement d'un évènement à un autre (la vitesse du vent pour un ouragan, ou l'intensité des secousses pour un tremblement de terre, par exemple).

**Module de vulnérabilité :** Cette fonction de vulnérabilité est généralement estimée à partir de des modules d'aléa et d'inventaire, s'appuyant sur des experts en ingénierie (Grossi et Kunreuther, 2005), quantifiant ainsi l'impact physique des évènements sur les biens . Pour estimer cette vulnérabilité, La plupart des modèles utilisent des courbes de dommages. La perte physique correspond donc à :  $Perte\ physique^1 = \text{taux de destruction} \times Somme\ assurée$ .

**Module financier :** En prenant en considération les conditions du contrat d'assurance et de la réassurance, Ce module calcule les perte financières assurées<sup>2</sup> et réassurées<sup>3</sup> à partir des pertes physiques modélisés via la fonction de vulnérabilité.

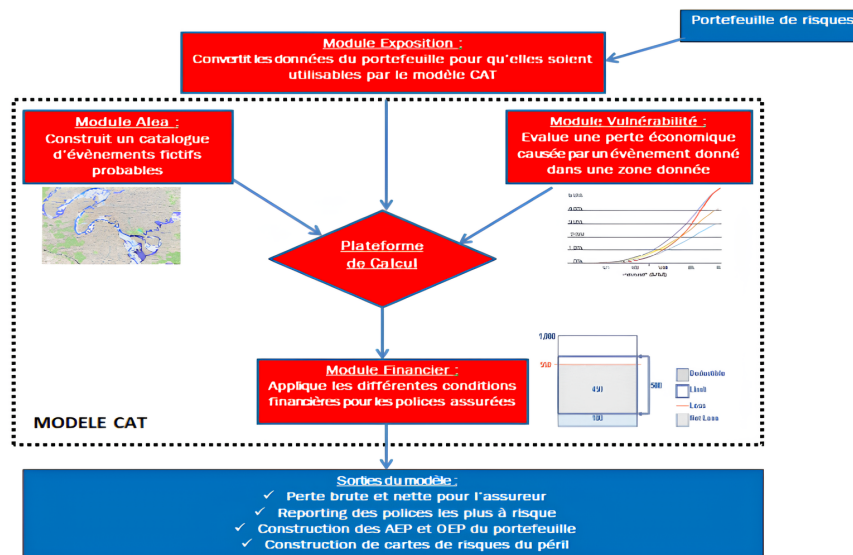


Figure 0.1 – Le processus du The Catastrophe Modelling

## Sorties du modèle

La sortie finale du modèle de catastrophe est soit de la forme d'un Event Loss Table ELT (développé par évènement) ou bien Year Event Loss Table YELT (par évènement et par année). Chaque évènement est identifié par sa Perte Ground-up, Perte Gross et Perte Net. Ces pertes sont souvent représentées à l'aide de courbes de Exceedance Probability (EP) en fonction de la période du retour de l'évènement.

1. On l'appelle aussi perte From Ground-Up FGU
2. Pertes Gross
3. Pertes Net

Soient  $X_1, X_2, \dots, X_N$  les pertes des évènements catastrophes simulés par le modèle supposés indépendants et identiquement distribués de même loi qu'une variable aléatoire  $X$ , et que les  $X_i$  et  $N$  sont des variables aléatoires indépendantes. On distingue deux types de courbes EP :

- **Aggregate Exceedance Probability (AEP)** : La probabilité que la somme des pertes annuelles excède un certain seuil :  $AEP(x) = Pr\left(\sum_{i=1}^N X_i > x\right)$ .
- **Occurrence Exceedance Probability (OEP)** c'est la perte maximale en une année  $X_{max} = \max(X_1, \dots, X_N)$  dépasse un seuil  $x$  :  $OEP(x) = Pr(X_{max} > x)$ .

**Quand les AEP et OEP sont-ils similaires ?** L'AEP et l'OEP, généralement, ne sont pas identiques, mais elles peuvent coïncider lorsque la probabilité d'avoir deux sinistres ou plus dans la même année, pour un type d'évènements, est très faible ou nulle  $Pr(N > 1) \approx 0$ .

**Preuve :** En effet, pour un modèle de risque collectif avec une fonction de répartition  $F_X(x)$  et des probabilités de comptage  $P_N(n)$ , la distribution agrégée pour

$$Z = X_1 + \dots + X_N$$

est

$$F_Z(x) = \sum_n P_N(n) F_X^{(n)}(x),$$

où  $F_X^{(n)}(x)$  est la  $n$ -ième convolution de  $F_X$  avec elle-même. Par conséquent, l'AEP, qui est la probabilité que les pertes annuelles  $Z$  dépassent un montant donné  $x$ , est  $1 - F_Z(x)$  ou

$$A(x) = 1 - \sum_n P_N(n) F_X^{(n)}(x).$$

Comparez ceci à l'OEP pour lequel  $Z = X_{max}$ , donc :

$$O(x) = 1 - F_Z(x) = 1 - \sum_n P_N(n) (F_X(x))^n.$$

Lorsque  $P_N(n) = 0$  pour  $n > 1$ , alors  $A(x) = O(x)$  parce que  $F_X^{(1)} = F_X$ . De même,  $A(x) \approx O(x)$  si

$$A(x) - O(x) = \sum_{n=2}^{\infty} P_N(n) \left( F_X^{(n)}(x) - (F_X(x))^n \right)$$

est suffisamment petit.

**Remarque :** L'Occurrence Exceedance Probability est le plus utilisé. En effet, pour un objet subit deux sinistres de même nature d'évènement dans une année, les dégâts causés par le premier affecte ceux du deuxième évènement. Cependant, cette méthode sous-estime les pertes, un choix optimal est donc de prendre un facteur de la somme des pertes, estimé à

partir de l'exposition. Pour RMS, ce facteur égal à 0.6.

En tant qu'actuaire, nous nous concentrons principalement sur deux mesures : Average Annual Loss défini par  $AAL = E[Z]$  ainsi que son écart-type :  $SD = \sqrt{VAR(Z)}$  avec

$$Z = \begin{cases} \sum_{i=1}^N X_i, & \text{en cas d'AEP} \\ X_{\max}, & \text{en cas d'OEP} \end{cases}.$$

La période de retour de l'évènement correspond donc à :

$$\text{Période de retour (x)} = \frac{1}{Pr(Z > x)}$$

Ces deux mesures forment la base pour le calcul du taux de sinistralité associé aux événements catastrophiques.

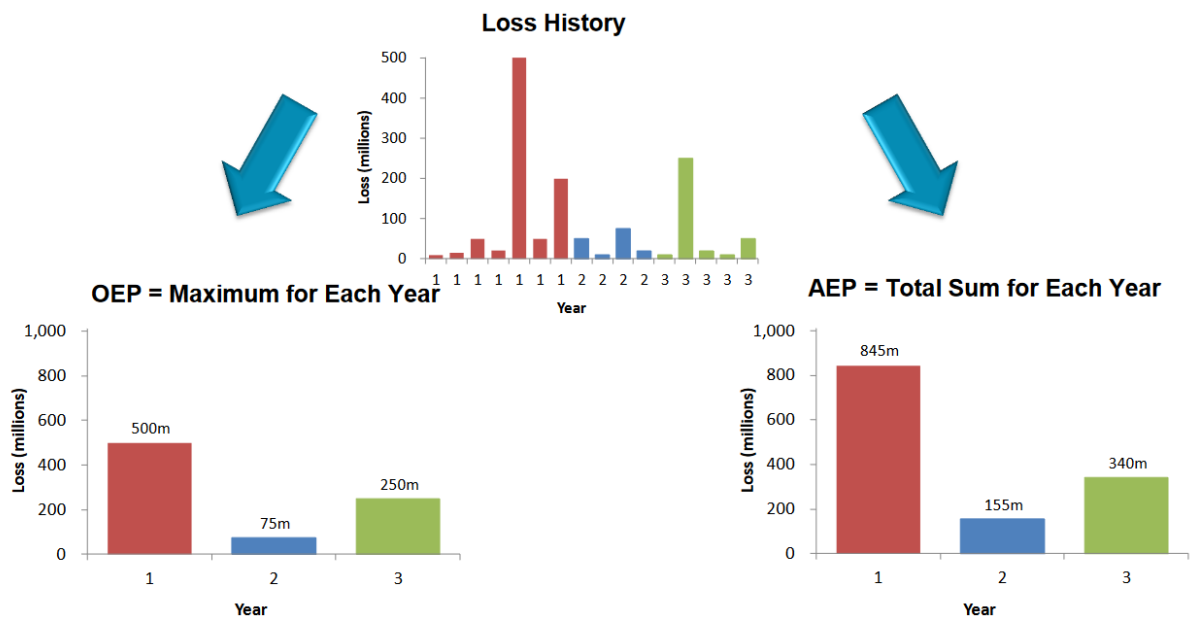


Figure 0.2 – Exceedance Probability curve, Source : [10]

# Annexe E

## Simulation de Monte Carlo

La modélisation de la sinistralité grave se fait par le modèle fréquence sévérité :

$$S = \sum_{i=1}^N \min(X_i, C)$$

où :

- $N$  est une variable aléatoire discrète représentant le nombre de sinistres.
- $X_i$  est une variable aléatoire continue indiquant le montant du  $i$ -ème sinistre.
- $C$  est l'engagement du réassureur par risque.

Il existe de nombreuses méthodes de simulation, mais nous allons nous concentrer sur la méthode de simulation de Monte Carlo par inversion de la fonction de répartition. Cette méthode est largement utilisée en simulation lorsque l'inversion de la fonction de répartition est faisable. Il convient de rappeler que l'inverse généralisée de la fonction de répartition  $F$  d'une variable aléatoire réelle (v.a.r)  $X$  est exprimé comme suit :

$$F^{-1}(y) = \inf\{x \mid F(x) \geq y\}$$

Cette méthode repose sur le lemme suivant :

**Lemme :** Si  $U$  est une variable aléatoire réelle (v.a.r) de loi uniforme sur l'intervalle  $[0, 1]$ , et  $F$  est la fonction de répartition de la variable aléatoire  $X$ , alors  $F^{-1}(U)$  suit la même loi que  $X$ .

Ainsi, pour générer  $n$  observations indépendantes et identiquement distribuées (i.i.d.) à partir d'une loi de probabilité définie par la fonction de répartition  $F$ , il suffit de générer

---

$n$  observations indépendantes à partir d'une v.a.r suivant une loi uniforme sur l'intervalle  $[0, 1]$ , puis d'appliquer l'inverse généralisée de la fonction de répartition.

En ce qui concerne une variable aléatoire de type Pareto généralisé, la fonction de distribution, pour  $\xi \neq 0$ , est donnée par :

$$G_{\xi,\sigma}(x) = \left( 1 - \left( 1 + \frac{\xi x}{\sigma} \right)^{-\frac{1}{\xi}} \right)$$

Et, la fonction de distribution inverse est donnée par :

$$G_{\xi,\sigma}^{-1}(y) = \frac{\sigma}{\xi} \left( (1 - y)^{-\xi} - 1 \right)$$

Ou pour la loi des excès,  $G_{\xi,\sigma}^{-1}(y) = X - u$  avec  $X$  correspondant à la charge de sinistre grave et  $u$  représentant le seuil choisi. Finalement, pour une variable aléatoire  $v$  de loi uniforme sur l'intervalle ouvert  $(0,1)$ , on a :

$$X - u = \frac{\sigma}{\xi} \left( (1 - v)^{-\xi} - 1 \right)$$

Donc :

$$X = u + \frac{\sigma}{\xi} \left( (1 - v)^{-\xi} - 1 \right)$$

En utilisant cette formule, nous sommes en mesure de générer des échantillons de variables aléatoires qui suivent la distribution GPD. Par la suite on applique les conditions de la réassurance ; dans notre cas, un engagement C.

# Bibliographie

- [1] Jacques BLONDEAU et Christian PARTRAT. *La Réassurance : Approche technique*. Assurance Audit Témoin. Paris : Economica, 2003. ISBN : 978-2-7178-4533-4.
- [2] Alexandre PAMBIANCHI. “Tarification des traités en réassurance XS et comparaison des réassureurs en vision cédante”. In : (2021).
- [3] Khalil SAID. *Cours de la réassurance, INSEA*.
- [4] Griselda DEELSTRA et Guillaume PLANTIN. *Risk Theory and Reinsurance*. EAA Series. Springer, 2014. ISBN : 978-3642397434. URL : <https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-642-39744-1>.
- [5] Paul EMBRECHTS, Claudia KLÜPPELBERG et Thomas MIKOSCH. *Modelling Extremal Events for Insurance and Finance*. Springer, 1997. ISBN : 978-3540609318. URL : <https://www.springer.com/gp/book/9783540609318>.
- [6] YAPI ARNAUD CARMEL. “ANALYSE DE LA SINISTRALITÉ D’UNE BASE DE DONNÉES À L’AIDE DE LA THÉORIE DES VALEURS EXTRÊMES ET D’UN OUTIL DE SIMULATION”. In : (2021).
- [7] ARMELLE GUILLOU ALEXANDRE YOU. “Introduction a la théorie des valeurs extremes : Applications en actuaria”. In : (2011).
- [8] Émilie DEPREY et Alexandre GODZINSKI. “Problématique de seuil dans la modélisation de la sinistralité en Réassurance Non Vie”. In : (2007).
- [9] U. RIEGEL. “Generalizations of common ILF models”. In : *Blätter der DGVMF* 29 (2008), p. 45-71.
- [10] AON. “Catastrophe Model Workflow and its Applications Catastrophe Insights 2018”. In : (2018).