





# Remerciement

Je souhaite exprimer ma profonde gratitude envers toutes les personnes qui m'ont accompagné de près ou de loin durant mon stage de PFE, et qui ont contribué à en faire une expérience d'apprentissage enrichissante et formatrice. Pendant ces quatre mois, j'ai pu mettre en pratique les connaissances acquises grâce à leur soutien et leur enseignement précieux.

Je tiens à remercier chaleureusement toute l'équipe de La Société Centrale de Réassurance (SCR) pour leur accueil chaleureux, ainsi que l'équipe de la Direction de l'organisation pour leur soutien et les précieuses leçons qu'ils m'ont transmises pendant ce stage. Je souhaite particulièrement exprimer ma gratitude envers mes encadrants externes, Monsieur **BOUZINAB Faris** et Monsieur **HOMMADA Outman**, ainsi que mon encadrant interne, Monsieur **EL QALLI Yassine**, pour leur encadrement attentif et leurs conseils pertinents qui m'ont été d'une aide précieuse.

J'adresse mes remerciements particuliers à Monsieur **YOUSSEFI Anasse** et à tous les membres de l'équipe **ERM** ainsi que les **personnels de la SCR** pour m'avoir accueilli au sein de leur organisation et pour avoir veillé à ce que mon intégration au sein de l'équipe se déroule de manière agréable et fluide.

**Merci mille fois.**

# Dédicace

Je souhaite dédier ce travail à mes chers parents, **Abdellah** et **Jmiaa**. Aucune dédicace ne saurait suffire à exprimer l'amour, l'estime, le dévouement et le respect que j'ai toujours eu envers vous. Vos efforts inlassables pour mon éducation et mon bien-être sont inestimables. Je dédie également ce travail à ma très chère sœur, **DAOUDI Elbatoul**, ainsi qu'à tous mes frères et sœurs, des personnes en or qui n'ont cessé de m'inspirer et de me motiver. Mes sincères remerciements vont à mes encadrants qui m'ont soutenu et guidé tout au long de cette expérience enrichissante.

J'adresse une reconnaissance particulière à tous les membres de ma famille qui m'ont doté d'une éducation exemplaire. Leur amour a façonné la personne que je suis aujourd'hui, en particulier à mon oncle **DAOUD Driss** et à mon cousin **MASSIK ABDELOUAHAB**. Je n'oublie pas mes amis, et en particulier mon amie **ECHAIKHI Maha**, pour leur soutien constant tout au long de ce stage.

# Résumé

Ce mémoire se concentre sur l'optimisation de l'indicateur risque-rendement de la société Centrale de Réassurance au Maroc, dans le cadre de la norme réglementaire Solvabilité II. Nous étudions la mesure de risque SCR marché, calculée selon la formule standard, et identifions une problématique liée à l'allocation d'actif. L'algorithme d'optimisation sans contraintes, utilisant le gradient, favorise les actifs risqués (actions), ce qui entre en contradiction avec la gestion traditionnelle des portefeuilles d'assurance privilégiant généralement les actifs peu risqués (obligations).

Afin de remédier à cette situation, nous introduisons des contraintes d'investissement pour guider l'optimisation vers une allocation d'actif plus appropriée. Nous explorons différents algorithmes d'optimisation non linéaire avec contrainte, tant déterministes que métaheuristiques (Lagrangien Augmenté, PSO, GA, ISRES), et sélectionnons celui qui répond le mieux à nos critères de validation. L'objectif est de parvenir à une allocation d'actif équilibrée, conforme aux exigences de Solvabilité II et aux objectifs de gestion des risques et de rendement de la société Centrale de Réassurance au Maroc.

Le rapport se termine par une discussion sur l'incorporation des passifs dans le processus d'allocation des actifs, en utilisant des approches comme les modèles de Sharpe et Tint, et de Kim et Santomero. Dans l'ensemble, ce travail vise à fournir une perspective éclairée sur l'optimisation de l'allocation d'actifs dans le contexte de la norme Solvabilité II.

**Mots clés :** Solvabilité II, Allocation d'actifs, SCR Marché, Principe d'allocation d'Euler, Indicateur risque-rendement, Les contraintes d'investissement, Les algorithmes d'optimisation non linéaire.

# Abstract

This report focuses on the optimization of the risk-return indicator of the Centrale de Réassurance company in Morocco, within the framework of the Solvency II regulatory standard. We examine the market SCR risk measure, calculated according to the standard formula, and identify an issue related to asset allocation. The unconstrained optimization algorithm, using the gradient, favors risky assets (stocks), which contradicts traditional management of insurance portfolios that usually prioritize low-risk assets (bonds).

To address this situation, we introduce investment constraints to guide optimization towards a more suitable asset allocation. We explore different constrained nonlinear optimization algorithms, both deterministic and metaheuristic (Augmented Lagrangian, PSO, GA, ISRES), and select the one that best meets our validation criteria. The goal is to achieve a balanced asset allocation, in line with Solvency II requirements and the risk management and return objectives of the Centrale de Réassurance company in Morocco.

The report concludes with a discussion on the incorporation of liabilities into the asset allocation process, using approaches like the Sharpe and Tint models, and Kim and Santomero's. Overall, this work aims to provide an enlightened perspective on asset allocation optimization in the context of the Solvency II standard.

**Key words :** Solvency II, Asset allocation, SCR Market (Solvency Capital Requirement), Euler's allocation principle, Risk-return indicator, Nonlinear Optimization algorithms.

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Contexte du projet</b>	<b>2</b>
1.1	Présentation de l'organisme d'accueil . . . . .	3
1.2	Le portefeuille de placements de la SCR . . . . .	6
1.3	Le cadre général de la solvabilité 2 . . . . .	7
1.4	La réglementation et le capital requis sous la solvabilité II . . . . .	11
1.5	Le SCR marché . . . . .	15
1.6	Allocation d'actif . . . . .	23
<b>2</b>	<b>Allocation d'actifs par l'optimisation d'un indicateur rendement-risque</b>	<b>26</b>
2.1	Une Méthode qui optimise le risque et le rendement . . . . .	27
2.2	Mesures de rendement . . . . .	27
2.3	Mesures de risque . . . . .	31
2.4	Les indicateurs risque-rendement . . . . .	38
2.5	Quelques méthodes d'allocation du capital et contribution au risque . . . . .	39
2.6	L'algorithme du gradient et l'allocation optimale via la méthode d'Euler . . . . .	44
2.7	L'optimisation avec contraintes d'investissement . . . . .	49
2.8	Les algorithmes d'optimisation évolutionnaires . . . . .	53
<b>3</b>	<b>L'application des algorithmes d'optimisation</b>	<b>66</b>
3.1	Le portefeuille étudié et Hypothèses . . . . .	67
3.2	Application de l'algorithme du gradient . . . . .	72
3.3	L'optimisation sous contraintes d'investissement . . . . .	77
3.4	L'application de l'algorithme génétique . . . . .	79
3.5	L'algorithme ISRES . . . . .	82
3.6	L'algorithme PSO . . . . .	82
3.7	L'application de l'algorithme de Lagrangien Augmenté (AUGLAG) . . . . .	83
3.8	Comparaison et validation des algorithmes d'optimisation . . . . .	83
<b>4</b>	<b>Ouverture : Prise en compte du passif</b>	<b>90</b>
4.1	Cash-flow Matching . . . . .	91
4.2	Le modèle de Sharpe et Tint (1990) . . . . .	91
4.3	Modèle de Kim et Santomero . . . . .	94

<b>A Démonstration : Le calcul des contributions</b>	<b>101</b>
<b>B Démonstration : Le calcul du Gradient</b>	<b>103</b>

# Table des figures

1.1	Bilan économique sous la solvabilité II et solvabilité I, Source : Lucas GRANDPERRIN, Allocation de capital : théorie et pratique de la méthode d'Euler . . . . .	10
1.2	Bilan économique Solvabilité II, Source : Mémoire Romain CHOQUER : Allocation stratégique d'actifs sous contrainte Solvabilité II . . . . .	10
1.3	Les capitaux requis réglementaires, Source : Lucas GRANDPERRIN, Allocation de capital : théorie et pratique de la méthode d'Euler . . . . .	11
1.4	Décomposition modulaire du SCR : underlying assumptions EIOPA, Source : Formule Standard et USP : Guide Pratique De Solvabilité II . . . . .	13
1.5	L'indice MASI utiliser dans l'effet du dampener . . . . .	19
1.6	Tableau des chocs pour SCR spread pour les obligations . . . . .	21
2.1	Value at Risque au niveau $q$ . . . . .	35
2.2	Tail Value at Risque au niveau $\alpha$ . . . . .	36
2.3	Illustration de l'algorithme gradient . . . . .	46
2.4	Schéma simplifié du fonctionnement de l'algorithme génétique, Source : <a href="https://ledatascientist.com/algorithmes-genetique/">https://ledatascientist.com/algorithmes-genetique/</a> . . . . .	56
2.5	Exemple de Mutation . . . . .	58
2.6	Exemple de Croisement . . . . .	59
2.7	Le fonctionnement de l'algorithme ISRES, Source : Moi même . . . . .	62
2.8	Le fonctionnement de l'algorithme PSO. Source : Dongshu Wang · Dapei Tan · Lei Liu : "Particle swarm optimization algorithm : an overview" . . . . .	63
2.9	Le schéma des itérations de l'algorithme. Source : Dongshu Wang · Dapei Tan · Lei Liu : "Particle swarm optimization algorithm : an overview" . . . . .	64
3.1	Le répartition du richesse selon le type d'actif . . . . .	68
3.2	La courbe des taux obtenue par interpolation d'Hermite . . . . .	69
3.3	Le rendement journalier du l'indice MASI pendant l'année 2022 . . . . .	70
3.4	L'évolution du $I_{RR}^{\beta,\lambda}$ et de $SCR_{marche}$ selon les itérations de l'algorithme . . . . .	73
3.5	L'évolution du $I_{RR}^{\beta,\lambda}$ selon des valeurs croissante de $\rho = 0.1, 0.15, 0.2$ et $0.3$ . . . . .	74
3.6	L'indicateur après changement d'espace pour les valeurs suivantes : $\lambda = 0.001, \rho = 0.01, N = 100$ . . . . .	75
3.7	L'évolution de $I_{RR}^{\beta,\lambda}$ pour des valeurs croissantes de $\rho = 0.1$ et $\rho = 0.001$ . . . . .	75

3.8	L'évolution de l'indicateur pour $N = 1000$ . . . . .	76
3.9	L'évolution de l'indicateur $I_{RR}^{\beta,\lambda}$ en fonction de la somme investie et au fil des itérations de l'algorithme . . . . .	77
3.11	Le cash non investi en comparaison avec la richesse investie dans les obligations et les actions en pourcentage . . . . .	81
3.12	La répartition après l'application de GA selon la part de la richesse investie par rapport à $VM_0$ et en comparaison avec les contraintes . . . . .	85
3.13	La répartition selon les actions-obligations et la poche obligataire . . . . .	86
3.14	Le cash non investi en comparaison avec la richesse investie dans les obligations et les actions en pourcentage . . . . .	86
3.15	La répartition, après application de l'algorithme ISRES, selon la part de la richesse investie par rapport à la valeur initiale du portefeuille et en comparaison avec les contraintes . . . . .	87
3.16	La répartition selon les actions-obligations et la poche obligataire . . . . .	88
3.17	La part du cash qui reste en comparaison avec les obligations et les actions . . . .	88
3.18	La répartition selon les actions-obligations et la poche obligataire . . . . .	89
3.19	La part du cash qui reste en comparaison avec les obligations et les actions . . . .	89

# Liste des tableaux

1.1	Chiffres clés de la SCR (en millions), Source Site de la SCR : <a href="https://www.scrmaroc.com/">https://www.scrmaroc.com/</a>	5
1.2	Matrice de corrélations entre les modules de SCR - Source [1] : Article SCR.1.32	14
1.3	Chocs réglementaires sur la courbe de taux - Source [1] : Article SCR.5.25 . . . . .	17
1.4	Chocs réglementaires de SCR Actions avec ajustement calculé au 30/11/2022 . . .	18
1.5	Méthode de calcul selon le type de placement immobilier . . . . .	19
1.6	Matrice de corrélations entre les sous-modules de SCR marche- Source [1] : Article SCR.1.32 . . . . .	22
3.1	Le pourcentage réglementaire des obligations . . . . .	78
3.2	Comparaison des algorithmes . . . . .	84

# Liste des Abréviations

- SCR** : solvency capital requirement.
- MCR** : Minimum Capital Requirement
- OPCVM** : Organisme de Placement Collectif en Valeurs Mobilières.
- EIOPA** : European Insurance and Occupational Pensions Authority
- VM** : Valeur de marché
- MEDAF** Modèles d'évaluation des actifs financiers
- Var** : Value at risk
- TVaR** : Tail-Value-at-Risk
- RAROC** : Risk Adjusted Return On Capital
- RORAC** : Return On Risk Adjusted Capital
- RARORAC** : Risk adjusted Return On Risk Adjusted Capital
- GA** : Algorithme Génétique
- ISRES** : Improved Stochastic Ranking Evolution Strategy
- PSO** : Particle swarm optimization algorithm
- AUGLAG** : lgorithme de Lagrangien Augmenté
- IND** : indicateur
- GSE** : Générateurs de scénarios économiques

# Introduction Générale

L'assurance est communément connue par un phénomène appelé **inversion du cycle de production**, c'est le fait que le produit de l'assurance soit vendu (recevoir les primes) avant que l'on ne connaisse le coût définitif (sinistre). Pendant l'intervalle de temps séparant l'encaissement des primes et le versement des prestations, l'assureur investit les capitaux qui lui sont confiés par les assurés ou les souscripteurs de contrat afin d'en tirer un rendement et d'honorer ses engagements. Les assureurs ne disposent donc pas directement des capitaux qu'ils investissent mais agissent pour le compte des souscripteurs. C'est pourquoi la gestion d'actifs est **réglementée**, on dit qu'elle est **institutionnalisée**.

Dans ce processus de gestion de portefeuille, les organismes d'assurance se doivent de répondre à des objectifs de rendements à offrir aux assurés et aux actionnaires dans un cadre réglementaire défini par l'Etat. L'un des normes les plus connues dans ce contexte est la norme européenne **Solvabilité II (Solvency II)**. La norme Solvabilité II repose sur une approche plus économique de gestion des risques par rapport aux normes précédentes, et elle offre des outils réglementaires supplémentaires pour mesurer le risque en complément de la gestion existante. Dans ce cadre, la notion de capitaux requis réglementaires a évolué vers le **Solvency Capital Requirement (SCR)**, qui dépend désormais de la composition du portefeuille d'actifs.

La réglementation Solvabilité 2 a instauré des exigences strictes en matière de solvabilité et de gestion des risques pour les entreprises d'assurance. Parmi les principales composantes de Solvabilité 2, nous trouvons **l'allocation d'actifs**, qui joue un rôle crucial dans la gestion des risques et la rentabilité des compagnies d'assurance. L'allocation d'actifs est une méthode quantitative de gestion de portefeuille, visant à établir un portefeuille optimal en choisissant la meilleure répartition possible entre les grandes classes d'actifs (principalement actions, obligations, titres monétaires), sous contrainte du passif.

Dans cette étude, on se concentre sur **l'automatisation de la constitution** d'un portefeuille en tenant compte de la nouvelle contrainte introduite par la directive Solvabilité II. Cela nécessite de prendre en considération deux flux essentiels : le coût généré par l'immobilisation de capital estimé réglementairement et le gain provenant du rendement et des intérêts générés par cette immobilisation. Ainsi, trouver un équilibre entre ces deux flux devient un enjeu crucial

de la gestion des actifs d'un portefeuille d'assurance. Toutefois, cet équilibre, qui est atteint grâce à une mesure de risque réglementaire, ne doit pas négliger **une évaluation économique** des risques présents dans le portefeuille.

Dans le cadre de ce mémoire, je me suis intéressé à l'application de l'allocation d'actifs en s'inspirant de la norme de la Solvabilité 2, en se focalisant sur le cas de **la Société Centrale de Réassurance (SCR)**. Notre objectif principal était d'optimiser un indicateur clé, inspiré de l'indicateur **RORAC (Return On Risk Adjusted Capital)**, à savoir **le ratio risque-rendement**. En effet, chaque composante d'un portefeuille d'une société d'assurance est caractérisée par deux notions essentielles. Tout d'abord, il y a **le rendement** qu'elle peut générer pour son propriétaire. Ce rendement peut prendre différentes formes, telles que les coupons des obligations, les dividendes des actions ou les plus-values latentes, mais il est soumis à l'incertitude. Cette incertitude, communément appelée **risque**, constitue la deuxième composante que l'investisseur doit évaluer. Cependant, l'évaluation du risque est une tâche complexe. La principale difficulté réside dans la multitude de sources de risque : défaillance de l'émetteur d'obligations, crises économiques ou politiques, parmi d'autres. La deuxième difficulté provient de la nature même du risque, qui est potentiel et incertain, rendant difficile une estimation précise en termes de montants. Malgré cela, les organismes de régulation doivent s'engager dans cette évaluation afin de prévenir le risque de faillite des sociétés d'assurance ou de réassurance.

Notre indicateur vise à obtenir un portefeuille final permettant à la fois de **minimiser les coûts** provenant de l'immobilisation des capitaux requis réglementaires (Risque) et de **maximiser la rentabilité** de ce portefeuille. Les rendements des actions est calculés à l'aide du modèle **CAPM (Capital Asset Pricing Model)** et les obligations à l'aide à de la plus value réalisée. La mesure de risque calculée selon la formule standard, connue sous le nom de **SCR (Solvency Capital Requirement) marché**. La SCR marché est une mesure du risque qui prend en compte divers facteurs tels que la volatilité des marchés financiers et les fluctuations des prix des actifs. Après qu'on étudie quelques propriétés de cette mesure de risque on applique **le principe d'allocation d'Euler** pour obtenir formule simple (linéaire) du SCR marché en fonction des montants investit dans chaque actif. Cette formule permet d'appliquer **l'algorithme d'optimisation du gradient** modifié pour obtenir des portefeuilles réalisables.

Cependant, lors de l'utilisation de cet algorithme d'optimisation simple, j'ai constaté que celui-ci accordait une importance disproportionnée aux **actifs risqués**, notamment les actions. Cette situation est en contradiction avec la gestion traditionnelle des portefeuilles d'assurance, où l'accent est généralement mis sur **les obligations** et les actifs à **faible risque**. Afin de résoudre ce problème, nous avons décidé d'introduire **des contraintes d'investissement**, fixer par l'entreprise SCR, dans notre approche d'allocation d'actifs.

Dans cette étude, j'ai exploré différentes méthodes **d'optimisation non linéaires avec contraintes** pour parvenir à une allocation d'actifs qui soit cohérente avec les objectifs de gestion de portefeuille de la société SCR. Nous examinerons un algorithme déterministe tels que le **Lagrangien Augmenté**, ainsi que **des algorithmes métaheuristiques** telles que **PSO (Particle Swarm Optimization)**, **GA (Genetic Algorithm)** et **ISRES (Improved Stochastic Ranking Evolution Strategy)**. Mon objectif ultime sera de choisir la meilleure méthode d'optimisation en fonction de critères de validation pertinents.

# Chapitre 1

## Contexte du projet

### Contents

---

<b>1.1</b>	<b>Présentation de l'organisme d'accueil</b>	<b>3</b>
1.1.1	La société centrale de réassurance	3
1.1.2	Le Rôle de la Société Centrale de Réassurance	3
1.1.3	Le marché national de réassurance	4
1.1.4	Les fonds économiques de la SCR	4
1.1.5	Quelques chiffres clés (2021)	5
1.1.6	La direction Entreprise Risk Management	5
<b>1.2</b>	<b>Le portefeuille de placements de la SCR</b>	<b>6</b>
1.2.1	Les objectifs de performance des placements	6
<b>1.3</b>	<b>Le cadre général de la solvabilité 2</b>	<b>7</b>
1.3.1	Contexte réglementaire	7
1.3.2	De Solvabilité 1 à Solvabilité 2	8
1.3.3	Le bilan économique sous solvabilité II	9
<b>1.4</b>	<b>La réglementation et le capital requis sous la solvabilité II</b>	<b>11</b>
1.4.1	Le calcul du SCR	11
1.4.2	Présentation générale de l'approche standard	12
<b>1.5</b>	<b>Le SCR marché</b>	<b>15</b>
1.5.1	Interest rate	15
1.5.2	Equity	17
1.5.3	Property	18
1.5.4	Currency	20
1.5.5	Spread	20
1.5.6	Concentration	21
1.5.7	Le calcul du SCR marché et la notion du choc unitaire	21
<b>1.6</b>	<b>Allocation d'actif</b>	<b>23</b>
1.6.1	l'allocation stratégique	23
1.6.2	Allocation tactique	24
1.6.3	Allocation du capital et enjeux	25

---

La norme Solvabilité II introduit une approche économique de gestion des risques, fournissant des outils réglementaires complémentaires à la gestion existante. Le Solvency Capital Requirement (SCR) est un indicateur qui évalue les fonds nécessaires pour faire face à la pire situation possible sur une période de 200 ans. Il ne remplace pas la mesure réelle du risque, mais ajoute une dimension supplémentaire à la gestion des actifs. Le SCR segmente les risques en fonction de leur nature (vie, non vie, marché) et représente une part importante des risques réglementaires et économiques pour les assureurs. La directive Solvabilité II impose une nouvelle contrainte d'optimisation pour atteindre une allocation optimale du portefeuille.

Le chapitre sur le contexte de ce projet se concentre sur la présentation de l'organisme d'accueil, la Société Centrale de Réassurance (SCR), ainsi que sur le cadre général de la réglementation Solvabilité II et son impact sur le portefeuille de placements de la SCR. Nous examinerons également le concept de capital requis réglementaire, en mettant l'accent sur le SCR marché et son calcul, et aborderons les enjeux liés à l'allocation d'actif dans ce contexte. Ce chapitre offre une vue d'ensemble essentielle pour comprendre le cadre dans lequel se situe notre projet.

### 1.1 Présentation de l'organisme d'accueil

#### 1.1.1 La société centrale de réassurance

Grâce à la convention qu'a eu lieu entre l'état Marocain et la caisse de Dépôt et de Gestion (CDG), la société centrale de réassurance (SCR) a vu le jour en 1960. La CDG détient 94% du capital de celui-ci. La SCR est classé première dans le monde Arabe et troisième en Afrique, avec une activité sur plus de 50 marchés. De plus, depuis 2020, la SCR dispose de la notation *AAA(mar)* par Fitch et "*B<sub>++</sub>*" avec une perspective stable concernant la solidité financière accordée par l'agence de notation *AM best*, celle-ci affirme que la capacité de gestion de risques de la SCR est appropriée en dépit de la complexités de ses opérations et du profil de risque de la société. Le portefeuille de cette réassurance s'étend vers l'international et représentent le quart du chiffre d'affaires, en outre, son expansion continue par la mise en place de bureaux en *Egypte*, en *Côte d'Ivoire* et en *Rwanda*.

#### 1.1.2 Le Rôle de la Société Centrale de Réassurance

La SCR est un acteur à multiple facette. D'une part, elle est manager du Centre Africain des Risques Catastrophiques et manager de l'aviation *Pool FAIR* depuis 1989. D'autre part, elle est actionnaire de SEN Ré (*société sénégalaise de réassurance*) et Arab Re (*Arab reinsurance Company* en Liban). Selon le rapport annuel de SCR de 2020, celle-ci agit dans les cas suivants :

- **Support de réassurance pour le Marché Marocain**
- **Mission d'intérêt Général : Régime des Risques catastrophiques**

- Au service des assureurs et des grands groupes marocains dans leur développement à l'international et offrant des nouveaux produits pour le compte des compagnies d'assurance marocaines et africaines.
- **Zone de Souscription** : Afrique, Moyen Orient et certains Marchés de l'Asie

Elle propose les catégories de couverture en réassurance vie et en non vie suivantes :

- Traités proportionnels et non proportionnels
- Des traités facultatives proportionnelles et non proportionnelles

La SCR souscrit principalement dans les branches suivantes : Dommages aux Biens, Engineering, Responsabilité civile, Automobile (RC Dommages), Accident de travail, Risques agricoles, Aviation, Énergie (Oil and Gas), Marine (Corps et Facultés), RC décennale, Violence politique et Crédit caution.

### 1.1.3 Le marché national de réassurance

Le rapport annuel de la SCR de 2020 a indiqué que malgré la crise du covid 19, le secteur de l'assurance a connu une croissance de 2%, cette progression notable redevable au fragment non vie de l'assurance (avec une prépondérance de l'assurance automobile, soit 47% du total) dont le volume des primes a atteint les 25.37 milliards de dirhams en 2020, avec une hausse notable de 3.9% par rapport à l'an dernier. Quant à l'assurance vie, son activité a connu une vraisemblable stagnation, les primes couvrant les catastrophes naturelles a atteint une valeur de 482.6 millions de dirhams.

### 1.1.4 Les fonds économiques de la SCR

La compagnie de réassurance dispose de fonds propres qui lui donnent la possibilité de couvrir l'ensemble des risques qu'elle a la responsabilité de réassurer.

Les fonds économiques de la SCR proviennent de plusieurs sources de financement, notamment :

- **Les primes de réassurance** : ce sont les primes de réassurance de ses clients pour couverture des risques que la SCR se doit de couvrir. Ces primes constituent une source importante de financement pour l'entreprise.
- **Les placements financiers** : Ce sont des fonds propres qu'elle investit dans des placements financiers (i.e : des actions, des obligations ou des fonds d'investissement). Les revenus issus de ces placements contribuent à renforcer les fonds économiques de la société.
- **Les fonds publics** : La SCR peut également percevoir du soutien de l'état marocain qui peut lui accorder des subventions ou des garanties pour renforcer sa capacité à couvrir les risques.
- **Les emprunts** : La SCR peut également faire appel à des emprunts pour financer ses activités de réassurance.

Dans l'ensemble, les fonds économiques de la SCR sont destinés à garantir la solidité financière de la société et à lui permettre de faire face aux risques qu'elle prend en réassurance.

### 1.1.5 Quelques chiffres clés (2021)

Chiffre d'affaire 2 614.94 MAD	Fonds propres 2 663.90 MAD	Résultat technique net de rétrocession 207.48 MAD
Résultat net de l'exercice 310.52	Placements affectés bruts 10 443.23	Total balance 15 619.24

TABLE 1.1 – Chiffres clés de la SCR (en millions), Source Site de la SCR : <https://www.scrmaroc.com/>

### 1.1.6 La direction Entreprise Risk Management

La SCR dispose d'un système ERM dont l'objectif est de gérer la totalité des risques de manière distinct et conjointement à l'aide du processus d'évaluation interne des risques et de la solvabilité (ORSA). Ce processus se résume par le contrôle des limites d'appétence et le pilotage de la rentabilité et de la solvabilité selon la stratégie risque adoptée.

Au niveau opérationnel, la politique de souscription s'applique conformément à des procédures spécifiques basées sur la sélection et la tarification des risques. Elle s'appuie sur une comitologie dédiée pour mettre en œuvre et suivre cette politique.

#### Les facteurs de risques

Depuis 2021, la société centrale de réassurance a adopté un nouveau référentiel de gestion de risque. Ce référentiel couvre toutes les familles de risques, notamment : les risques de marché, les risques de souscription, les risques de contrepartie, les risques opérationnels, etc.

- **Les risques de marché** : le risque de perte ou d'un changement désavantageux de la situation financière provenant des fluctuations au niveau des prix des marchés des portefeuilles de placements (i.e : Risques sur la valorisation des actifs, risques provenant à une absence de diversification des actifs...).
- **Les risques de souscription** : le risque de perte ou de changement défavorable de la situation financière, dû à une mauvaise estimation des montants réels des sinistres et les règlements d'indemnités dans le cadre d'un contrat de réassurance.
- **Les risques de contrepartie** : le risque de perte suit à un changement imprévu ou d'un changement de la situation financière d'une contrepartie (ex : risques de défaillance d'un rétrocessionnaire, risques à la variation de la qualité de crédit d'un émetteur conduisant à l'augmentation de la prime de risque).
- **Les risques opérationnels** : le risque de perte ou de changement défavorable à la situation financière liée aux processus internes, de membres du personnel, de systèmes inadéquats ou défaillants, ou d'événements extérieurs.

L'intégralité de ces risques est géré par le dispositif ERM. Parallèlement, la SCR a mis en place un cadre d'appétence au Risque, cette notion indique le risque maximal que l'entreprise est en mesure de prendre sans tomber dans une banqueroute tout en atteignant ses objectives stratégiques.

La révision du risque se fait à l'aide du processus suivant :

- L'évaluation des expositions aux risques.
- La détermination probable des niveaux infranchissables.
- Le contrôle et l'avertissement des exposition au risque si en fie aux limites prédéfinies.
- Proposer des solutions au violations qu'ont eux lieu.

### Les indicateurs ALM

La SCR dispose d'une minerai de liquidité. Celle-ci contient des actifs à vue, ces actifs, composés essentiellement d'OPCVM et d'Actions cotées sur la bourse de Casablanca, sont en mesure d'être traitées sur le marché avec aucune limites.

L'analyse Actif/Passif est réalisé, par canton, à l'aide de :

- L'analyse de l'écoulement des provisions et des flux des éléments en couverture
- L'analyse en duration

## 1.2 Le portefeuille de placements de la SCR

Le portefeuille de la SCR comporte cinq type d'actifs : Portefeuille obligataire, Portefeuille actions cotées et non cotées, Portefeuille OPCVM, Portefeuille immobilier (Direct et OPCI), La Trésorerie et les Placements en DAT.

**NB :** L'analyse de risque de l'ensemble de ce portefeuille se fait par l'analyse des points suivants :

- Le risque de taux
- Le risque de change
- Le risque de liquidité et de contrepartie

### 1.2.1 Les objectifs de performance des placements

#### Actif affecté : cession légale

Cet actif prend en compte principalement la situation *Run-Off* du canton. Celui-ci correspond à l'écoulement des réserves contraint la compagnie à adopter une stratégie en OPCVM obligataires investis à 90% en BDT et titres garantis pour faire face au engagement de la SCR.

### **Actifs affecté : Conventionnel Marocain**

L'intérêt de l'investissement de l'actif affecté canton réassurance conventionnelle Marocain est **d'optimiser l'aspect bilatéral risque/rendement**, tout en conservant la liquidité des actifs.

### **Actif affecté : Conventionnel Étranger**

Le bénéfice de ce type d'investissement est l'ajustement de la duration de l'actif avec celle du passif, également de toujours avoir d'actifs liquides suffisants pour couvrir ses engagements techniques.

### **Remarque :**

Le portefeuille de SCR est confronté à deux contraintes :

- **La volatilité :** SCR adopte la stratégie *Buy and Hold* pour qu'elle puisse se protéger des fluctuations de taux d'intérêt et de éliminer l'effet de volatiliser. De ce fait, la compagnie possède des participations stratégiques maintenues en portefeuille sur de long période.
- **La sensibilité :** la sensibilité est maîtrisée par des indicateurs macro-économiques. La sensibilité du fonds SCR Obligations s'élève à 6,61 pour une duration de 6,78. La sensibilité permet de capter le maximum de performance suite à la baisse des taux vécue sur l'année en question. Notons que le portefeuille obligataire permet d'améliorer ses indicateurs pour stabiliser au maximum ses revenus même face à un choc brutal sur la courbe des taux.

## **1.3 Le cadre général de la solvabilité 2**

### **1.3.1 Contexte réglementaire**

Le projet de régulation Solvabilité II, lancé en 2009, vise à doter les assureurs de principes de régulation prudentielle. La protection des assurés et du système financier dans son ensemble sont les objectifs déclarés de la réforme, qui permet également la mise en place d'un cadre standardisé de gestion des risques pour les assureurs à travers l'Europe. Le but est d'établir un système de solvabilité qui soit plus sensible aux risques encourus par les sociétés d'assurance et qui permette ainsi aux contrôleurs de protéger le plus efficacement possible, et selon des principes communs, les intérêts des assurés. Le système doit également être conçu pour éviter les risques de distorsion de concurrence.

Le cadre de Solvabilité II s'organise autour de trois piliers :

### **Pilier 1 : Exigences quantitatives**

Les exigences quantitatives se rapportent à l'évaluation des passifs, du capital cible de solvabilité, des actifs, ou encore à la gestion interne du risque. Ce pilier vise à établir les outils de mesure de la suffisance des passifs et des seuils de fonds propres, afin que les organismes assureurs

puissent être solvables. Cela se fait par le biais de l'allocation de montants de capital réglementaire pour permettre à l'assureur de faire face à ses engagements. On distingue notamment le Minimum Capital Requirement (MCR), qui représente le niveau minimal de capital en dessous duquel une compagnie d'assurance ne peut fonctionner, et le Solvency Capital Requirement (SCR), qui correspond au montant de fonds propres nécessaires pour couvrir un scénario de crise majeure et réduire la probabilité de ruine de l'entreprise.

## Pilier 2 : Exigences qualitatives

Ce pilier concerne l'établissement d'une politique interne de suivi des risques par le biais du dispositif Own Risk and Solvency Assessment (ORSA). Il impose aux assureurs de mettre en place une gestion intégrée des risques, incluant l'évaluation continue de la solvabilité, la gestion des risques et le contrôle interne. L'objectif est de doter les autorités de contrôle des outils nécessaires pour identifier les entreprises qui présentent des risques financiers ou organisationnels significatifs.

## Pilier 3 : L'information aux marchés

Ce pilier concerne l'information publique, c'est-à-dire les exigences de publication d'informations de manière uniforme pour l'ensemble des assureurs européens. L'objectif est d'améliorer la transparence et de promouvoir une meilleure discipline de marché en diffusant des informations telles que les performances financières, les mesures de risques ou les politiques à appliquer dans le cadre de périodes de stress.

Le cadre réglementaire de Solvabilité II représente une avancée majeure dans la régulation des assureurs, en mettant l'accent sur une évaluation plus complète et rigoureuse des risques, une gestion intégrée des risques et une transparence accrue envers les parties prenantes.

### 1.3.2 De Solvabilité 1 à Solvabilité 2

Depuis le 1er janvier 2016, les compagnies d'assurances et de réassurances en France sont soumises à la norme Solvabilité II pour le calcul des capitaux requis et des fonds propres. Du point de vue d'un assureur, être solvable signifie qu'il est capable de faire face à ses engagements. Cette solvabilité dépend de deux notions distinctes dont les définitions sont au cœur de la réglementation des assurances :

- Les engagements : il s'agit de la nature des contrats souscrits par l'assureur, des garanties qu'ils contiennent et des dettes contractées par l'assureur.
- Les fonds pour faire face à ces engagements, c'est-à-dire les fonds propres. Les assurances ont l'obligation de constituer des fonds propres suffisants pour faire face à des événements exceptionnels, appelés les capitaux requis réglementaires.

En termes de quantification de la solvabilité, le calcul de ce capital permet d'élaborer le ratio de solvabilité :

$$Ratio_{solvabilite} = \frac{FPD}{CRR}$$

où  $FPD$  représente les fonds propres disponibles et  $CRR$  correspond au capital requis réglementaire. Réglementairement, si le ratio est supérieur à 1, alors la société est considérée comme solvable.

Le passage de la norme Solvabilité I à la norme Solvabilité II est marqué par un changement significatif en termes de solvabilité. En effet, la norme Solvabilité I traite la solvabilité d'une vision comptable par un calcul prudent de provisions, des actifs sûrs et diversifiés, et un capital requis réglementaire, appelé Exigence Minimale de Marge de Solvabilité, calculé de façon forfaitaire en fonction des provisions et des capitaux sous risques. L'une des limites importantes de cette norme est son manque de souplesse et surtout l'absence de prise en compte des risques propres à chaque entreprise.

En revanche, la réforme Solvabilité II s'inscrit dans une vision économique du bilan des assurances et surtout dans une plus grande adaptabilité et prudence. Cela signifie que chaque assureur peut prendre en compte ses propres risques. L'objectif est d'adapter le niveau des capitaux requis en fonction des risques réellement subis par l'assurance. Plus l'exposition au risque d'un assureur est grande, plus les capitaux requis réglementaires seront élevés.

La réforme de Solvabilité II aboutit à une exigence d'estimation d'un montant de capital réglementaire pour l'ensemble de la structure actifs-passifs de l'assureur. En se concentrant sur la partie liée à l'allocation d'actifs, nous présenterons dans le cadre de ce mémoire **une méthode d'estimation de cet indicateur**, puis nous chercherons à déterminer **une technique d'allocation d'actifs** spécifique au portefeuille de la SCR.

### 1.3.3 Le bilan économique sous solvabilité II

D'après Article 7 du Règlement Délégué (UE) du Parlement Européen Conseil de l'Union Européenne (2014) : «*Les entreprises d'assurance et de réassurance valorisent leurs actifs et leurs passifs en se fondant sur l'hypothèse d'une continuité d'exploitation de l'entreprise.*».

Afin de comprendre les capitaux requis réglementaires sous Solvabilité II, il est important de comprendre les mutations impliquées par Solvabilité II dans le bilan économique. La norme Solvabilité II applique une vision plus économique (figure 1.1) au bilan à l'actif et au passif<sup>1</sup>. En effet les actifs sont valorisés à leurs valeurs de marché et non en valeur d'achat, et les passifs aux montants pour lesquels ils pourraient être échangés ou **Fair Value**. Le passif est composé de :

- **Best Estimate of Liabilities (BEL)** : c'est la valeur actuelle nette probable des flux futurs<sup>2</sup>.
- **La Marge pour risque (RM)** : c'est la différence entre la valeur à laquelle l'entreprise cédante peut vendre ces passifs à une autre entreprise et la valeur des provisions techniques.
- **Les impôts différés (deferred taxes : DT)** : ce compte est purement comptable, ces impôts apparaissent dans le bilan économique au titre des différences temporelles et des pertes ou crédit d'impôts reportables non utilisés.

---

1. Valorisation économique des provisions en fonction des flux économiques futurs

2. Prestations, Frais futurs, Commissions, Primes

— Les fonds propres sont constitués de :

1. **Value of In force (VIF)** : c'est la valeur actuelle des profits futurs générés par le portefeuille de contrats calculée dans un scénario déterministe sans prime de risque et en tenant compte des options et garanties financières.
2. **Actif net réévalué (L'ANR)** : il s'agit de la valeur de la richesse accumulée dans le passé de la compagnie c-à-d plus ou moins values latentes, résultats passés.

La figure 1.1 et 1.2 montre représentation simple du bilan sous la Solvabilité II. Suite à une analyse détaillée de la composition du bilan au regard de la norme de Solvabilité, les compagnies d'assurance ont des responsabilités en termes d'exigences réglementaires de fonds propres. De ce point de vue, la réforme Solvabilité II s'est en effet traduite par un changement de méthodologie.

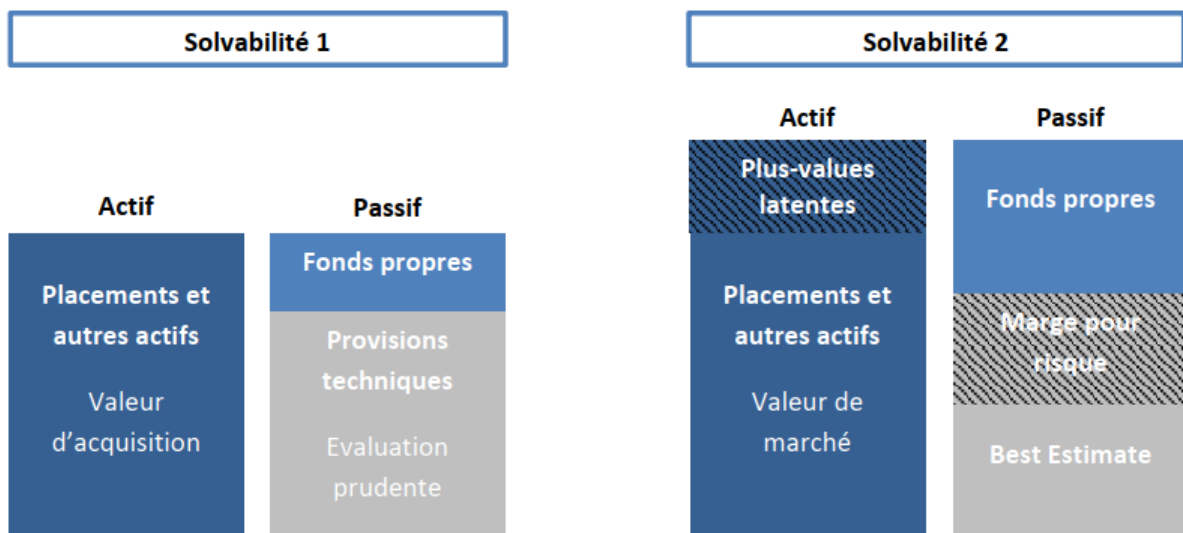


FIGURE 1.1 – Bilan économique sous la solvabilité II et solvabilité I, Source : Lucas GRAND-PERRIN, Allocation de capital : théorie et pratique de la méthode d'Euler

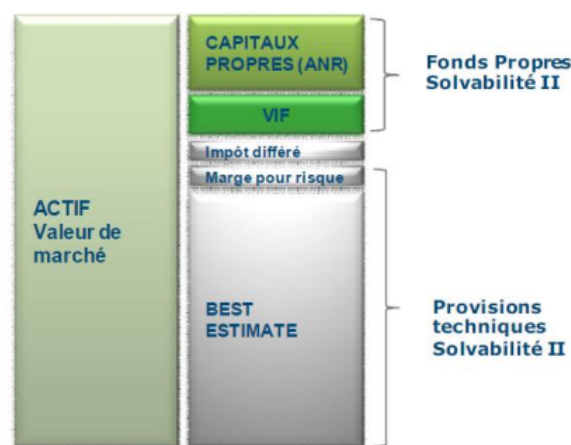


FIGURE 1.2 – Bilan économique Solvabilité II, Source : Mémoire Romain CHOQUER : Allocation stratégique d'actifs sous contrainte Solvabilité II

## 1.4 La réglementation et le capital requis sous la solvabilité II

La méthodologie de calcul des besoins en capitaux est basée sur une approche de quantification de risques. On distingue deux niveaux de capitaux requis distincts :

- Le **MCR** (Minimum Capital Requirement) : C'est le minimum de Capital Requis, il s'agit du montant minimum de fonds propres à détenir sous peine d'intervention des autorités, avec possible retrait d'agrément.
- Le **SCR** (Solvency Capital Requirement) : ou Capital de Solvabilité Requis, c'est le niveau nécessaire pour dire qu'une compagnie d'assurance est solvable. Il garantit théoriquement la solvabilité annuelle de la compagnie et cela même en cas d'exercice de mauvaise qualité (par exemple un exercice à forte sinistralité). En effet, on considère qu'une société d'assurance ayant immobilisé ce niveau de fonds propres pourra faire face à tous les risques possibles dans 1 an avec une probabilité théorique de 99,5% (c-à-d réduire la probabilité de ruine de l'entreprise à 0.05%).

La figure 1.3 montre les différents niveaux de capitaux requis réglementaires.

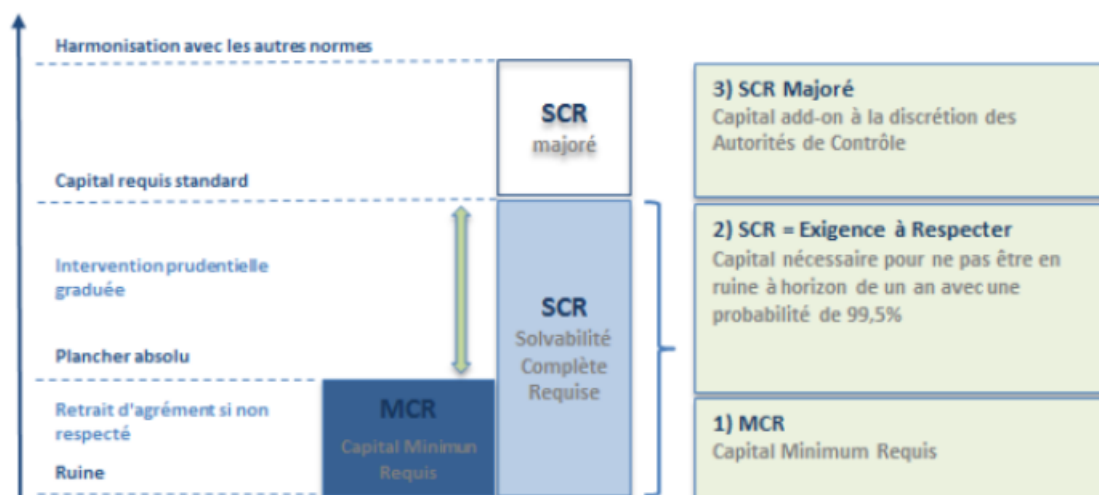


FIGURE 1.3 – Les capitaux requis réglementaires, Source : Lucas GRANDPERRIN, Allocation de capital : théorie et pratique de la méthode d'Euler

### 1.4.1 Le calcul du SCR

Le SCR peut s'interpréter comme un quantile de niveau 0,5% sur la distribution des pertes potentielles de l'assureur et fournit une mesure de risque liée à la survenance d'un événement bicentenaire qui arrive 1 fois dans 200 ans.

Pour le calcul du SCR l'autorité européenne des assurances et des pensions professionnelles, ou **European Insurance and Occupational Pensions Authority (EIOPA)** , propose deux approches :

1. **Formule Standard** : basée sur des règles de calibration réglementaire, cette approche permet aux assureurs de calculer des chocs par catégories de risques : marché, santé, vie, non-vie, défaut ou intangible, puis de les agréger par une matrice de corrélation pour obtenir une mesure globale de risque.
2. **Modèle Interne** : Cette approche, basée sur un modèle actif/passif propre à l'assureur, permet d'avoir une vision plus précise des pertes potentielles. Elle a besoin de ressources importantes en gestion des risques et en modélisation, et doit être approuvée par le régulateur. Au-delà de l'élément purement réglementaire, la démarche de modélisation interne du SCR peut également permettre au certificateur de mettre en évidence certains axes stratégiques de pilotage de l'activité. Mais le développement d'un tel modèle est un processus long et coûteux.

**Remarque** : Il y a une méthode hybride appelée **Modèle Interne Partiel (MIP)**. Cette méthode repose à la fois sur l'usage de méthode de type formule standard et sur des méthodes simulatoires (utilisées dans les modèles internes).

#### 1.4.2 Présentation générale de l'approche standard

Dans l'approche préconisée par le régulateur, la méthodologie vise à fournir une estimation du BSCR<sup>3</sup> (Basic Solvency Capital Requirement) en s'appuyant sur une volonté de décomposer le risque de pertes selon la nature de l'activité, appelé **module**, et la source de risque, appelée **sous-module**. Cette vision flexible de l'approche englobe les principales activités d'assurance, y compris les risques d'assurance vie, non-vie et santé, le risque de crédit, le risque de marché et un segment de risque lié aux actifs incorporels, comme le risque de réputation. Par exemple, on considère le risque du aux évolutions du marché comme un module. Ce module étant lui-même décomposé en sous module comme le risque portant sur les titres obligataires, risque portant sur les actions.

Dans chacun de ces modules de risques, le calcul d'un SCR se fait sur la base de stress scénarios définis par l'EIOPA en fonction de différentes caractéristiques propres au portefeuille actifs/passifs de l'assureur. Ces scénarios ont été calibrés pour être représentatifs d'un quantile d'ordre 0,5%<sup>4</sup> sur les pertes à 1 an de l'assureur et permettent ainsi de calculer le SCR directement comme la variation de fonds propres associée aux différents chocs. Puis, une fois ces besoins en capitaux estimés pour chaque risque, l'agrégation de ces derniers se fait, via des matrices de corrélation permettant alors une prise en compte des structures de dépendance propre à chaque risque.

---

3. Cette mesure de capital de solvabilité requis de base par le régulateur se complète par la suite de deux modules de risques opérationnels et de mesure d'ajustement, que nous ne traiterons pas dans le cadre de ce mémoire.

4. Correspond donc à un risque de probabilité d'occurrence 0,5%

Dans la figure 1.4 la décomposition du SCR donnée par EIOPA. Cette décomposition du SCR repose sur trois hypothèses fortes :

- Les coefficients de corrélations utilisés pour agréger les risques sont considérés comme constants quelque soit le scénario économique. Ces coefficients de corrélation ont été calibrés sur des scénarios économiques extrêmes.
- Le SCR couvre tous les risques quantifiables pour 1 an d'exercice à venir. Ceci est évidemment une approximation, certains risques ne sont pas pris en compte dans cet arbre.
- Le SCR se doit d'être représentatif des capitaux requis pour faire face à un risque bicentenaire (niveau de confiance à 99,5%). Ainsi le calcul du besoin en capital de chaque sous module se fait à ce même niveau de risque.

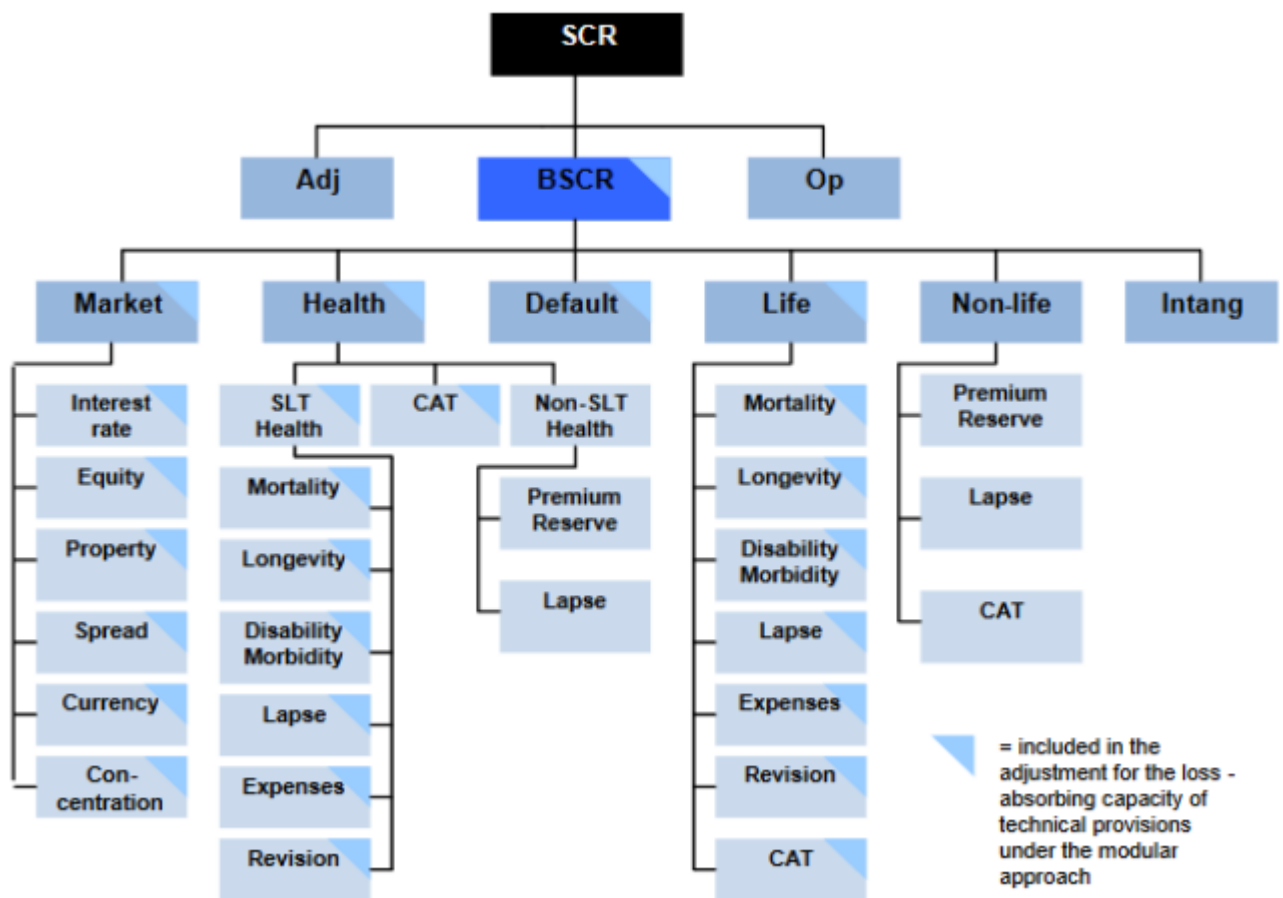


FIGURE 1.4 – Décomposition modulaire du SCR : underlying assumptions EIOPA, Source : Formule Standard et USP : Guide Pratique De Solvabilité II

L'arbre représentée dans la figure 1.4 montre que les risques pris en compte sont :

- **Le risque de marché** : déjà défini dans 1.1.6 Ce risque est composé de six sous-modules et sera détaillé de façon exhaustive dans la suite de ce mémoire car il constituera l'indicateur réel de mesure de risque pris en compte.
- **Le risque de défaut** : déjà défini dans 1.1.6.

- **Le risque de souscription vie** : il correspond à la perte de fonds propres économiques suite à une évolution défavorable du portefeuille vie (contrats de type assurances vie, rentes viagère. . .) au niveau des hypothèses ayant servies au calcul du Best Estimate (BE).
- **Le risque de souscription non-vie** : il correspond à la perte de fonds propres économiques suite à une évolution défavorable du portefeuille non-vie (contrat de type non-vie) au niveau des hypothèses ayant servies au calcul du Best Estimate (BE).
- **Le risque de souscription santé** : il correspond à la perte de fonds propres économiques suite à une évolution défavorable des risques concernant la santé. On distingue les risques santé assimilables à la vie (par exemple santé de type *viager*, rentes invalidité. . .) et les risques santé assimilables à de la non-vie (par exemple santé classique, frais de soin, prestations à domicile).
- **Le risque intangible** : il correspond à une baisse de valeur des actifs incorporels possédés par l'entreprise. Par exemple, la marque ou la réputation d'une entreprise est un actifs incorporels et un scandale de contrefaçon (comme l'a vécu Wolkswagen en 2015) impacte fortement le résultat de l'entreprise et doit ainsi être considéré comme un risque intangible. La nature abstraite de ces risques rend leur quantification très complexe.
- **Le risque opérationnel** : déjà défini dans 1.1.6

### Remarque

Ce risque ne se diversifie pas avec les autres risques. Ainsi on lui applique ce que on appelle *l'add-on* : la valeur de capital requis liée à ce risque est ajoutée après l'application des matrices de corrélation.

Par la suite, les mesures de SCR obtenues par modules de risques sont agrégées à l'aide de la matrice de corrélation réglementaire dans la table 3.2.

Dans ce projet, nous nous intéresserons plus particulièrement aux risques liés à la partie gestion

	Marché	Défaut	Vie	Santé	Non Vie
Marché	1				
Défaut	0.25	1			
Vie	0.25	0.25	1		
Santé	0.25	0.25	0.25	1	
Non Vie	0.25	0.5	0	0	1

TABLE 1.2 – Matrice de corrélations entre les modules de SCR - Source [1] : Article SCR.1.32

d'actifs de l'assureur et donc en particulier au module de **SCR Marché**, dont nous développerons la méthodologie de calcul dans la section suivante.

### Remarque

Le risque de marché est le principal risque à la SCR.

## 1.5 Le SCR marché

*"The market risk module shall reflect the risk arising from the level or volatility of market prices of financial instruments which have an impact upon the value of the asset and liabilities of the undertaking."* (Art. 105 (4) de la Directive 2009/138/EC).

Dans cette partie, nous détaillerons les différents choix méthodologiques effectués par l'EIOPA pour la modélisation du  $SCR_{marche}$ . La directive Solvabilité 2 définit le risque de marché comme les Risques de pertes liés à la fluctuation des prix de marché des éléments du portefeuille de placement.

Ce risque se décompose en plusieurs sous-modules de risque (figure 1.4). Ces modules seront agrégés par une matrice de corrélation. Le risque de marché est composé en sous-familles suivantes :

- **Le risque action** : Equity
- **Le risque de taux** : Interest rate
- **Le risque immobilier** : Property
- **Le risque de crédit** : Spread
- **Le risque de concentration** : Concentration
- **Le risque de change** : Currency

Chaque risque élémentaire (module) présenté précédemment se verra appliquer **un choc**, entraînant une consommation de capital. Par conséquent, la consommation de capital générée par un risque élémentaire constituera un capital au niveau de ce risque. C'est ainsi qu'un risque élémentaire est formalisé sous la forme d'un montant correspondant à la perte générée par le choc.

### Le principe du choc

La valeur du SCR du risque (module) sera la différence entre la valeur marché ( $VM_{aprschoc}^i$ ) choquée et la valeur non choquée ( $VM_{avantchoc}^i$ ). L'application **des chocs** (ou scénarios) se fait pour chaque ligne d'actif  $i$  du portefeuille d'investissement ainsi que le calcul de l'impact du choc, en utilisant la formule suivante :

$$SCR_{risque}^i = VM_{avantchoc}^i - VM_{aprschoc}^i \quad (1.1)$$

Cela et pour chaque ligne d'actif  $i$  et pour chaque risque.

#### 1.5.1 Interest rate

*"The sensitivity of the values of assets, liabilities and financial instruments to changes in the term structure of interest rates, or in the volatility of interest rates (interest rate risk)."* (Art.

105 (4) (a) de la Directive 2009/138/EC).

D'après la directive Solvabilité II, ce risque est applicable aux produits à taux fixes. le module de  $SCR_{Taux}$  a pour objectif de prévenir la variation de valeur du portefeuille en cas de mouvements sur la courbe de taux sans risque (à la hausse ou la baisse). Ce choc est donc double<sup>5</sup> : il y a un choc à **la hausse** appelé aussi INTUP dans l'outil et un choc à **la baisse** ou INTDOWN dans l'outil.

Les actifs financiers classiques concernés par ce choc sont les suivants :

- Les produits de taux simples : obligations d'entreprise et d'Etat, titres de créances (CD, BT).
- Les produits dérivés (options, futures, warrants, swaps, CDS).
- Les produits structurés (CDO, CLO)
- Les OPC (Organisme de Placements Collectifs) ayant une sensibilité taux non nulle.

Ce choc consiste donc à **recalculer la valeur de marché** de tous les titres en portefeuille concernés avec deux courbes de taux (hausse et baisse) découlant de la courbe de taux initiale. Le tableau 1.3 représente les deux courbes des taux donné par EIOPA. Voir

### Remarque

L'application de ce choc à l'actif seul conduit à une approximation de l'impact réel du choc. En effet, une modification de la courbe des taux à le plus souvent un impact global : à la fois à l'actif et au aussi au **passif**. Car Les provisions techniques sont sensibles aux fluctuations de taux puisque ceux-ci servent de facteur d'actualisation. Ainsi il est important de prendre en compte la fluctuation du passif dans l'impact du choc de taux pour chaque ligne. Il y a plusieurs méthodes utilisées pour prendre en compte du passif comme **cash flow matching**.

Une fois calculées les valeurs de marché dans le scénario de choc, on applique la formule 1.1 pour chaque ligne  $i$  :

$$SCR_{hausse}^i = VM_{avantchoc}^i - VM_{aprchochausse}^i$$

$$SCR_{baisse}^i = VM_{avantchoc}^i - VM_{aprshocbaisse}^i$$

Pour savoir quelle valeur du  $SCR_{taux}$ , on prend le maximum<sup>6</sup> sur tout le portefeuille des deux chocs :

$$SCR_{taux} = Max \left( \sum_i SCR_{hausse}^i; \sum_i SCR_{baisse}^i \right)$$

---

5. Étant donné que les taux d'intérêt fluctuent, cela peut apparaître nocif dans les deux sens. Parce que leur rendement est inférieur au rendement des nouvelles obligations, une augmentation des taux d'intérêt entraîne une baisse de la valeur des obligations existantes dans le portefeuille. Cependant, lorsque les titres à taux fixes doivent être réinvestis, une baisse des taux d'intérêt se traduit par une perte de rendement réelle par rapport à la performance des nouveaux entrants.

6. Correspond au scénario le plus désavantageux

Maturité	Hausse	Baisse
≤ 1 an	70%	-75%
2	70 %	-65 %
3	64 %	-56 %
4	59 %	-50 %
5	55 %	-46 %
6	52 %	-42 %
7	49 %	-39 %
8	47 %	-36 %
9	44 %	-33 %
10	42 %	-31 %
11	39 %	-30 %
12	37 %	-29 %
13	35 %	-28 %
14	34 %	-28 %
15	33 %	-27 %
16	31 %	-28 %
17	30 %	-28 %
18	29 %	-28 %
19	27 %	-29 %
20	26 %	-29 %
21 ans à 89 ans	interpolation linéaire	interpolation linéaire
≥ 90 ans	20 %	-20 %

TABLE 1.3 – Chocs réglementaires sur la courbe de taux - Source [1] : Article SCR.5.25

### 1.5.2 Equity

*"The sensitivity of the values of assets, liabilities and financial instruments to changes in the level or in the volatility of market prices of equities (equity risk)"*(Art. 105 (4) (b) de la Directive 2009/138/EC).

Ce module vise à quantifier l'impact des variations des prix d'actions sur la valeur des fonds propres. Il est décomposé en deux catégories d'action : **Equity 1**<sup>7</sup> et **Equity 2**<sup>8</sup>. Dans ce module on applique **des chocs forfaitaire** pour chaque type d'EQUITY. Pour calibrer les chocs à appliquer sur les marchés actions, l'EIOPA distingue pour chaque type d'action **un choc de base**, défini en fonction de la nature de la position, et **un ajustement symétrique** (l'effet dampener) permettant d'adapter le choc en fonction de la position du marché par rapport au cycle économique :

$$SCR_{EQUITY}^i = VM_i \times (chocbase + ajustement)$$

— Pour le choc action de type 1 le choc de base est de 39 %.

7. Les actions globales qui correspondent aux actions listées dans un pays membre de l'Union Européenne ou de l'OCDE

8. Les autres actions : autres actions listées hors OCDE, action non listées, Hedge funds, matières premières et autres titres non classés dans un module de risque de marché.

— Pour le choc action de type 2 le choc de base de 49%.

L'ajustement symétrique est calculé en fonction de l'écart de valeur entre la position actuelle (VA) des marchés actions (indice du MASI) et leurs moyennes mobiles sur les 3 dernières années (MM3). Il est défini comme :

$$ajustement = \frac{1}{2} \times \left( \frac{VA - MM3}{MM3} - 8\% \right)$$

Pour prendre un exemple calculé à la date du 30 décembre 2022 :

- VA du MASI au 30/12/2022 est 10720.251.
- MM3 du MASI au 30/12/2022 est 11734.51991.

	Type 1	Type 2
Choc de base	39%	49%
Ajustement au 30/11/2022	-8.73%	-8.73 %
choc final	30.27%	40.27 %

TABLE 1.4 – Chocs réglementaires de SCR Actions avec ajustement calculé au 30/11/2022

Par une formule simple, l'application d'un choc se fait pour une ligne de type actions  $i$  :

$$SCR_{EQUITY1}^i = chocfinal_{EQUITY1} \times VM_{avantchoc}^i$$

Pour chaque action  $i$  de type EQUITY 1.

$$SCR_{EQUITY2}^i = chocfinal_{EQUITY2} \times VM_{avantchoc}^i$$

Pour chaque action  $i$  de type EQUITY 2. Pour la  $SCR_{EQUITY}$  des action on applique la formule 1.2 après qu'on somme les  $SCR$  pour chaque type d'EQUITY :

$$SCR_{EQUITY} = \sqrt{U^t \times \Omega \times U} \tag{1.2}$$

Avec :  $U = \begin{pmatrix} SCR_{EQUITY1} \\ SCR_{EQUITY2} \end{pmatrix}$  et  $\Omega = \begin{pmatrix} 1 & 0.75 \\ 0.75 & 1 \end{pmatrix}$

$$SCR_{EQUITY1} = \sum_i SCR_{EQUITY1}^i \text{ et } SCR_{EQUITY2} = \sum_i SCR_{EQUITY2}^i$$

Ce principe d'agrégation des risques par une matrice de corrélation (dans notre cas  $\Omega$ ) est un principe fondamental de la formule standard de la directive Solvabilité II. On le retrouve à plusieurs reprises dans les calculs effectués.

### 1.5.3 Property

"The sensitivity of the values of assets, liabilities and financial instruments to changes in the level or in the volatility of market prices of real estate (property risk)." (Art. 105 (4) (c) de la Directive 2009/138/EC).

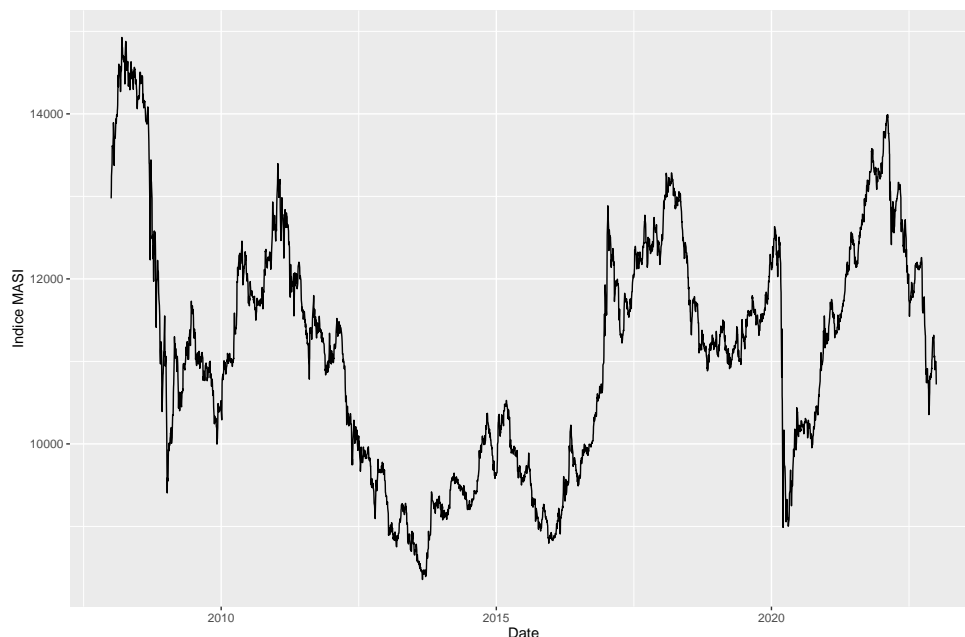


FIGURE 1.5 – L’indice MASI utiliser dans l’effet du dampener

Le sous-module de SCR Immobilier vise à quantifier les potentielles variations de valeurs des actifs vis-à-vis à une baisse des marchés immobiliers. **Le choc recommander par la directive Solvabilité II** et qu’on va **adopter dans ce mémoire** est consiste à appliquer un **choc forfaitaire** de à diminuer la valeur des actifs immobiliers de 25% .

L’investissement dans des biens immobiliers des sociétés d’assurances se fait souvent de façon indirecte. Ainsi ces investissements ne sont pas assimilables au risque immobilier et peuvent avoir un coût d’immobilisation supérieur à 25% de la valeur de marché. Dans le tableau 1.5 un récapitulatif des méthodes de calcul du SCR immobilier selon le type de placements immobiliers.

Classe d’actif	Charge brute en capital hors change
Immobilier en direct	SCR immobilier : 25%
SCPI	SCR immobilier : 25% × taux d’investissement
SIIC	SCR Actions Type 1 : 39% ± SA
SCI	SCR immobilier : 25% (1+taux d’endettement)
OPCI	Mise en transparence des actifs ou SCR actions type 2 49% ± SA

TABLE 1.5 – Méthode de calcul selon le type de placement immobilier

L’application d’un choc se fait de façon similaire à celle d’un choc action pour chaque ligne d’actif concernée :

$$SCR_{Property}^i = VM_{avantchoc}^i \times Pourcentagechocimmobilier$$

### 1.5.4 Currency

"The sensitivity of the values of assets, liabilities and financial instruments to changes in the level or in the volatility of currency exchange rates (currency risk)." (Art. 105 (4) (e) de la Directive 2009/138/EC).

Ce sous-module vise à quantifier le besoin en capital correspondant à la perte générée par la variation des taux de change sur la valeur des actifs en devise étrangère. Ce risque concerne tous les titres libellés en devise étrangère et les produits dérivés de change et qui ne faisant pas l'objet d'un programme de couverture (options, futures, swaps, forward). On calcule le SCR de ce risque en associant à chaque devise un stress de change spécifique puis on l'applique à la part du portefeuille exposée à cette devise.

La calibration s'effectue en deux étapes : premièrement l'application de chocs réglementaires devise par devise et cela on multipliant la valeur de marché par 0.25 et deuxièmement, le calcul du  $SCR_{Change}$  final comme la somme des chocs individuels.

### 1.5.5 Spread

Le  $SCR_{Spread}$  permet de bénéficier d'un capital réglementaire permettant de faire face aux variations de valeur du portefeuille en cas de mouvements sur les spreads de taux associés aux émetteurs. Le spread est l'écart entre **le taux actuariel** d'un produit à taux fixe de taux et **le taux sans risque**.

Le calcul du  $SCR_{spread}$  l'aide de la somme de 3 terme distinct :

$$SCR_{spread} = SCR_{bonds} + SCR_{titrisation} + SCR_{drivscrdit}$$

- $SCR_{bonds}$  : le risque contenu dans les obligations et les prêts.
- $SCR_{titrisation}$  : concerne les titres issus de titrisation.
- $SCR_{drivscrdit}$  : les produits dérivés de crédit (Credit Default Swap par exemple).

### SCR Spread pour les obligations

L'idée est d'utiliser un choc forfaitaire et d'attribuer le choc en fonction selon deux paramètres : **la notation** du titre ( qualité de crédit) et **sa duration**. Cette attribution se fait en utilisant une interpolation linéaire, en associant chaque tranche de 5 ans de duration à une fonction affine de cette même duration . Le tableau 1.6 présente les valeurs réglementaires de SCR Spread (en pourcentage du valeur marché) associées aux obligations d'entreprises et aux créances non-immobilières. En fonction de la duration de l'obligation et du notation.

Le tableau 1.6 présente en lignes les durations et en colonne les notations. La colonne 1 correspond à la notation AAA et ainsi de suite.

La première étape consiste à calculer la duration, par exemple pour une obligation de duration de 13 ans et une notation A (correspond au colonne 2 dans le tableau) on applique un choc forfaitaire de  $10.5\% + (13 - 10) \times 0.5 = 12\%$ . La valeur du SCR spread pour cette obligation de valeur du marché  $VM_{avantchoc}^i$  est  $SCR_{obligation}^i = 12\% \times VM_{avantchoc}^i$ . Le SCR de spread sera alors obtenus par la somme du capital calculé pour chaque ligne  $i$ .

Échelon de crédit	0	1	2	3	4	5 et 6	NR
Crédit Duration							
de 0 à 5	0.9 % · dur	1.1 % · dur	1.4 % · dur	2.5 % · dur	4.5 % · dur	7.5 % · dur	3.0 % · dur
de 5 à 10	4.5% + 0.5 % · (dur -5)	5.5% + 0.6% · (dur -5)	7.0% + 0.7% · (dur -5)	12.5% + 1.5% · (dur -5)	22.5% + 2.5% · (dur -5)	37.5% + 4.2% · (dur -5)	15%+1.7% · (dur -5)
de 10 à 15	7% + 0.5 % · (dur -10)	8.4% + 0.5 % · (dur -10)	10.5% + 0.5 % · (dur -10)	20.0% + 1.0 % · (dur -10)	35.0% + 1.8 % · (dur -10)	58.5% + 0.5 % · (dur -10)	23.5%+1.2% · (dur -10)
de 25 à 20	9.5% + 0.5 % · (dur -15)	10.9% + 0.5 % · (dur -15)	13.0% + 0.5 % · (dur -15)	25.0% + 1.0 % · (dur -15)	44.0% + 0.5 % · (dur -15)	61.0% + 0.5 % · (dur -15)	23.5%+1.2% · (dur -10)
Supérieur à 20	12% + 0.5 % · (dur -20)	13.4% + 0.5 % · (dur -20)	15.5% + 0.5 % · (dur -20)	30.0% + 0.5 % · (dur -20)	46.5% + 0.5 % · (dur -20)	63.5% + 0.5 % · (dur -20)	Min(35.5% + 0.5 % · (dur -20);1)

FIGURE 1.6 – Tableau des chocs pour SCR spread pour les obligations

### 1.5.6 Concentration

*"Additional risks to an insurance or reinsurance undertaking stemming either from lack of diversification in the asset portfolio or from large exposure to default risk by a single issuer of securities or a group of related issuers"* (Art. 105 (4) (f) de la Directive 2009/138/EC).

Enfin, le sous-module de SCR Concentration a pour objectif de couvrir le portefeuille de l'assureur à **un manque de diversification** contre une trop forte **concentration dans les contreparties sélectionnées** (surexposition au risque de défaut). En effet, la réglementation cherche par ce module à inciter les assureurs à diversifier les positions de son portefeuille pour éviter d'être trop sensibles aux différents chocs pouvant impacter une contrepartie spécifique. Pour le calcul du SCR de ce module voir "Seuils réglementaires de SCR Concentration - Source EIOPA [1] - Article SCR.5.131".

### 1.5.7 Le calcul du SCR marché et la notion du choc unitaire

Pour le portefeuille étudié, nous avons donc décidé de ne pas tenir compte des sous modules de risques de concentration et de change. Ainsi, à chaque ligne d'actif  $i$ , on associe le vecteur de

choc suivant :

$$Choc^i = \begin{pmatrix} SCR_{INTUP}^i \\ SCR_{INTDOWN}^i \\ SCR_{EQUITY1}^i \\ SCR_{EQUITY2}^i \\ SCR_{PROPERTY}^i \\ SCR_{BONDS}^i \\ SCR_{titrisation}^i \\ SCR_{drivscrdit}^i \end{pmatrix}$$

On donne à chaque ligne un vecteur de **choc unitaire**<sup>9</sup> (ramené une valeur de ligne de 1MAD) qui restera invarié quelque soit la réallocation du portefeuille. Cette constance allège ainsi les calculs nécessaires à l'algorithme en évitant de recalculer ces chocs à chaque réallocation de portefeuille :

$$Choc^i = \begin{pmatrix} SCR_{INTUP}^i \\ SCR_{INTDOWN}^i \\ SCR_{EQUITY1}^i \\ SCR_{EQUITY2}^i \\ SCR_{PROPERTY}^i \\ SCR_{BONDS}^i \\ SCR_{titrisation}^i \\ SCR_{drivscrdit}^i \end{pmatrix} = VM^i \times \begin{pmatrix} scr_{INTUP}^i \\ scr_{INTDOWN}^i \\ scr_{EQUITY1}^i \\ scr_{EQUITY2}^i \\ scr_{PROPERTY}^i \\ scr_{BONDS}^i \\ scr_{titrisation}^i \\ scr_{drivscrdit}^i \end{pmatrix} = VM^i \times choc_{unitaire}^i$$

A l'aide du vecteur décrit ci-dessus, les lignes d'actif sont agrégées pour donner un vecteur qui englobe les chocs pour les 4 modules du risque marché (INTEREST, EQUITY, PROPERTY, SPREAD) :

$$choc^{global} = \begin{pmatrix} SCR_{taux} \\ SCREQUITY \\ SCR_{PROPERTY} \\ SCR_{SPREAD} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Max(\sum_i SCR_{hausse}^i; \sum_i SCR_{baisse}^i) \\ \sqrt{U^t \times \Omega \times U} \\ SCR_{property} \\ SCR_{bonds} + SCR_{titrisation} + SCR_{drivscrdit} \end{pmatrix}$$

Finalement, on fait l'agrégation par la matrice de corrélation réglementaire :

$$SCR_{march} = \sqrt{(choc^{global})^t \times \Omega_{march} \times choc^{global}} \quad (1.3)$$

Où  $\Omega_{march}$  est la matrice de corrélation définie dans le tableau 1.6.

	Interest	Equity	Property	Spread	Currency	Concentration
Interest	1					
Equity	0	1				
Property	0	0.75	1			
Spread	0	0.75	0.5	1		
Currency	0.25	0.25	0.25	0.25	1	
Concentration	0	0	0	0	0	1

TABLE 1.6 – Matrice de corrélations entre les sous-modules de SCR marché- Source [1] : Article SCR.1.32

9. Voir [40]

**Remarque :** L'idée clé de ce mémoire est la notion de choc unitaire, qui nous permettra de calculer la SCR marché pour différentes valeurs de  $VM_i$ .

## 1.6 Allocation d'actif

Il est important de rappeler la difficulté principale des investisseurs institutionnels (principalement pour l'activité de l'assurance) en termes de gestion d'actifs : **l'horizon d'investissement** et **l'incertitude des flux**. Du fait de la structure de leurs passifs, ces derniers doivent élaborer une gestion d'actifs de long terme tout en essayant de respecter un niveau de performance annuelle minimal.

L'allocation d'actifs est un processus quantitative de gestion de portefeuille, visant à établir un portefeuille optimal<sup>10</sup> en choisissant la meilleure répartition possible entre les différentes catégories d'actifs (actions, obligations, titres monétaires), sous contrainte du passif. Ce processus est effectué en fonction de l'horizon d'investissement, des différentes contraintes et de la tolérance au risque de l'investisseur. c'est cette répartition entre les différents actifs qui détermine la rentabilité du portefeuille. Sur le marché, on peut considérer deux types d'allocations différentes : **l'allocation stratégique** et **l'allocation tactique**.

### 1.6.1 l'allocation stratégique

L'allocation stratégique d'actifs d'une compagnie d'assurance est souvent définie comme une étape d'un processus plus général de la gestion actif-passif, c'est une approche rationnelle, plus utilisée dans l'investissement à long terme. Elle permet de fournir un portefeuille d'investissement afin d'obtenir les meilleures performances, avec un niveau de risque le moins élevé possible, quelque soit l'évolution du marché. Généralement, elle est en fonction de l'aversion au risque, de la richesse et de l'âge de l'investisseur. ce type d'allocation permet d'offrir un investissement constant quelques soient les mouvements des marchés, d'offrir des portefeuilles bien diversifiés et utiliser les connaissances en matière de corrélation d'actifs et de volatilité pour construire des portefeuilles qui conviennent à l'intérêt des investisseurs.

Le terme *stratégique* vient, d'une part, de l'horizon temporel auquel s'appliquent les études d'allocation stratégique, d'autre part, du nombre limité de classes d'actifs considérées dans ces études, généralement limité entre trois et dix au maximum.

En 1952, HARRY MARKOWITZ<sup>11</sup> a donné les premières pistes de *la théorie moderne de portefeuille* et qui est à la base du processus d'investissement de la plupart des investisseurs dans le monde entier. D'après lui, les différentes corrélations entre actifs peuvent être mises à profit pour **réduire le risque d'un portefeuille** ou obtenir **des rendements supplémentaires**,

---

10. Un portefeuille qui maximise le couple rendement-risque

11. Harry MARKOWITZ est un économiste américain (né en 1927), auteur du modèle de « diversification efficiente » des portefeuilles d'actifs financiers en 1952.

sans augmenter le risque. Malheureusement, ce modèle ne prend pas en compte un paramètre important qui est la durée d'investissement. En effet, le modèle de *Markowitz* est un modèle *monopériodique* qui ne prend en compte que le risque de ne pas obtenir le rendement espéré à un horizon d'investissement donné. Pourtant, les investisseurs peuvent avoir des horizons d'investissement différents selon leurs situations. Par exemple, en assurance vie et particulièrement en retraite l'assureur doit investir sur le long terme du fait de la durée de son passif alors que d'autres investisseurs auront un horizon d'investissement plus court.

L'objectif de l'allocation stratégique d'actifs est de déterminer les pondérations optimales de chaque classe d'actifs afin de maximiser le rendement attendu pour un niveau de risque donné ou de réduire le risque pour un niveau de rendement espéré fixé. Les rendements attendus sont généralement calculés soit à l'aide de moyennes historiques sur plusieurs décennies, soit à l'aide de modèles de prévision, et l'allocation stratégique est supposée fixe même s'il existe de bonnes raisons de croire que les rendements espérés à court terme seront différents de ceux à long terme.

Le choix de la durée d'investissement a une conséquence sur le processus de gestion d'actifs. En effet, *Merton* (1970) a montré que le choix optimal de portefeuille peut être très différent selon l'horizon d'investissement. Le modèle développé par *Markowitz* (1952) est mono-périodique et ne prend en compte que les risques entre la période d'investissement et l'horizon de placement. Certains chercheurs ont montré que si, au contraire, les rendements des actifs ne varient pas dans le temps alors, le choix optimal de portefeuille est le même quel que soit l'horizon d'investissement.

### 1.6.2 Allocation tactique

L'allocation tactique est la deuxième étape de l'investissement, permettant à l'investisseur de s'écarter de l'allocation stratégique initiale pour tenir compte des conditions du marché. Cette allocation tactique doit rester proche de l'allocation stratégique en termes de poids et de durée.

La politique générale d'investissement est déterminée par l'allocation stratégique, qui se concentre sur les grandes classes d'actifs à long terme. Cependant, une fois les grandes lignes établies, l'investisseur peut procéder à l'allocation tactique en ajustant les pondérations des différentes classes d'actifs à court terme, dans certaines limites fixées, ainsi que le choix des titres individuels au sein d'une même classe. L'allocation tactique repose sur la capacité du gestionnaire à identifier les actifs surévalués ou sous-évalués et à anticiper les retournements de marché. Elle est généralement réalisée sur une période de trois à six mois et utilise les résultats et la recherche de l'allocation stratégique pour guider la stratégie d'investissement à long terme.

Il convient de noter que l'allocation tactique est un ajustement de l'allocation stratégique en fonction des circonstances structurelles du marché. Une méthode courante d'allocation tactique

est l'optimisation de *Markowitz*, cependant, en raison de la sensibilité de cette méthode aux changements dans les estimations des rendements moyens, une version plus robuste a été proposée par *Black et Litterman* en 1990. En général, en raison de la variabilité des rendements, il est important de séparer l'allocation d'actifs en deux étapes : une étape stratégique à long terme et une étape tactique prenant en compte les opportunités de rendement à court terme offertes par les différentes classes d'actifs.

### 1.6.3 Allocation du capital et enjeux

L'allocation de capital représente un enjeu important pour les compagnies d'assurance notamment dans le cadre du dispositif **ORSA (Own Risk and Solvency Assessment)**. A travers l'article 45, la directive Solvabilité 2 impose *une évaluation interne des risques et de la solvabilité*. Ainsi, grâce au processus d'allocation du capital réglementaire, la compagnie aura une vision sur la rentabilité et la consommation des différents passifs considérés lors de la segmentation. De plus, la compagnie pourra utiliser le capital alloué comme un indicateur de rentabilité du risque, ainsi en fonction de son appétence et tolérance au risque, elle pourra piloter son activité.

Dans ce sens il y a plusieurs modèles qui sont proposés pour étudier et déterminer l'allocation optimale, cela en prend en considération le couple rendement-risque en utilisant des méthodes d'optimisation. On arrive à ces modèles dans la suite de ce mémoire.

**Remarque sur la confidentialité des données :** Pour assurer la confidentialité des données liées à la SCR, nous continuerons, dans ce mémoire, à présenter les résultats et à afficher les valeurs de certaines données.

Cette partie visait à présenter le cadre réglementaire dans lequel se plaçait cette étude ainsi que les simplifications effectuées pour la suite de cet écrit. En effet, la directive Solvabilité II a introduit et a rendu inévitable l'analyse des risques auxquels s'expose une compagnie d'assurance. Le SCR en est une méthode d'estimation réglementaire, et en particulier le module du SCR marché permet une estimation des risques inhérents à un portefeuille d'actif pour calculer les capitaux requis réglementaires. C'est pourquoi, on s'intéresse dans la partie suivante aux propriétés de cette méthode réglementaire en tant que mesure de risque. Il était aussi essentiel de détailler les méthodes de calculs préconisées pour les différents chocs. Les valeurs de ces chocs sont une des données de base du processus d'optimisation qui sera détaillé dans la partie suivante.

## Chapitre 2

# Allocation d'actifs par l'optimisation d'un indicateur rendement-risque

### Contents

---

<b>2.1</b>	<b>Une Méthode qui optimise le risque et le rendement</b>	<b>27</b>
<b>2.2</b>	<b>Mesures de rendement</b>	<b>27</b>
2.2.1	Le rendement d'une entreprise	27
2.2.2	Le rendement selon nature d'actif : obligations, actions ...	28
<b>2.3</b>	<b>Mesures de risque</b>	<b>31</b>
2.3.1	Définition et propriétés	32
2.3.2	Les mesures usuelles de risque	33
2.3.3	Le SCR marché comme mesure de risque	36
<b>2.4</b>	<b>Les indicateurs risque-rendement</b>	<b>38</b>
<b>2.5</b>	<b>Quelques méthodes d'allocation du capital et contribution au risque</b>	<b>39</b>
2.5.1	Notations et propriétés	39
2.5.2	Méthode proportionnelle	41
2.5.3	Méthode marginale	41
2.5.4	Méthode d'Euler	42
2.5.5	Utile pour l'algorithme d'optimisation : le calcul des contribution $C_i$	43
<b>2.6</b>	<b>L'algorithme du gradient et l'allocation optimale via la méthode d'Euler</b>	<b>44</b>
2.6.1	Le problème d'optimisation sans contraintes	44
2.6.2	Sur l'algorithme du gradient	45
2.6.3	Application de l'algorithme sur l'indicateur $I_{RR}^\beta$	46
2.6.4	Limites de l'optimisation sans contraintes	47
2.6.5	Remédier à ces limites	48
<b>2.7</b>	<b>L'optimisation avec contraintes d'investissement</b>	<b>49</b>
2.7.1	L'introduction des contraintes d'investissements	49
2.7.2	Le problème d'optimisation avec contraintes	50
2.7.3	La Méthode d'Uzawa	51
2.7.4	La méthode de Lagrangien augmenté	51
2.7.5	Critique des algorithmes déterministes	53
<b>2.8</b>	<b>Les algorithmes d'optimisation évolutionnaires</b>	<b>53</b>
2.8.1	Traitement des contraintes par les algorithmes génétiques	54
2.8.1.1	L'algorithme génétique	54
2.8.1.2	Optimisation numérique et opérateurs	56
2.8.1.3	Constraint-Handling dans les algorithmes génétiques	59
2.8.2	Improved Stochastic Ranking Evolution Strategy (ISRES)	61
2.8.3	Particle swarm optimization algorithm (PSO)	62

---

Le rendement et risque sont souvent deux notions opposées. Un titre risqué sera en général plus rentable qu'un titre non risqué. Par exemple, les obligations d'état allemandes sont considérées comme les moins risquée en terme de placement, c'est aussi elles qui proposent des taux de rendements les plus bas. Dans ce chapitre en vas proposer des méthodes d'allocation qui prend en considération **le couple risque-rendement**.

## 2.1 Une Méthode qui optimise le risque et le rendement

L'optimisation du couple risque-rendement s'avère paradoxale, car il sont deux notions opposées. Dans la suite on propose une méthode qui permet , parallèlement, l'optimisation de ces deux notions. L'idée principale de cette méthode est de constituer **un indicateur** de qualité permettant de mesurer le risque de chaque ligne du portefeuille ainsi que le rendement espéré de cette même ligne. Bien que cet indicateur est en fonction de l'allocation du portefeuille. Ensuite, en partant d'une allocation initiale<sup>1</sup>, et donc d'une valeur de notre indicateur, on met en place un processus d'optimisation dite algorithme d'optimisation afin d'obtenir l'allocation de fonds permettant de minimiser le risque et maximiser le rendement du portefeuille.

Notre processus n'a pas l'intérêt de projeter le bilan de la compagnie sur un horizon donné, car le processus d'allocation concernant seulement le portefeuille d'actif en proposant un processus de réallocation à **valeur globale constante** donc c'est **une vision instantané du** portefeuille des actifs.

La première difficulté de l'outil se trouve dans la définition des **mesures de risques et de rendement** pour pouvoir définir notre indicateur. En effet, il existe plusieurs méthodes possibles : certaines sont complexes, d'autre trop simpliste. La difficulté étant de trouver la méthode la plus adéquate avec les données dont on dispose et la vision de la compagnie.

## 2.2 Mesures de rendement

Le rendement dégagé par un investissement, un placement ou une opération financière est définie comme le rapport entre **le revenu** obtenu et **la mise de fonds initiale**. Cette définition, bien que simple en apparence, s'applique difficilement à un portefeuille d'actifs. En effet, le revenu obtenu via un portefeuille d'actifs peut se décomposer en deux types distinctes selon la nature du flux. Les revenus directs (dividendes, coupons) dont le gain est irréversible et des revenus indirects dont le gain est perçu uniquement lors de cessions de titres.

### 2.2.1 Le rendement d'une entreprise

Dans le domaine de l'analyse financière il y a plusieurs indicateurs classiques de rentabilité utilisés pour déterminer le rendement d'une entreprise :

---

1. Le point de départ de l'algorithme

- **Return On Equity (ROE)** : en français rendement des capitaux propres, ce ratio vise à calculer la rentabilité du capital. Il se base sur le calcul du résultat net de l'entreprise (via le compte de résultat) et les fonds propres. Il s'analyse sur un horizon d'un an :

$$ROE = \frac{Resultatnet}{Fondspropre}$$

- **Return On Assets (ROA)** : en français le rendement des actifs, ce ratio s'intéresse au revenu généré par les capitaux employés. C'est la capacité des actifs possédés par l'entreprise à générer du résultat et de l'activité. Son calcul se base sur le résultat d'exploitation. Il s'analyse sur un horizon d'un an :

$$ROA = \frac{Resultatexploitation}{capitauxemployes}$$

### Remarques

- Ces ratios classiques de rendements nécessitent une modélisation exhaustive du bilan de la compagnie d'assurance ainsi que l'utilisation des projections de résultat à moyen terme.
- Ces indicateurs ont une vision très globale du rendement de l'entreprise. Hors, afin d'étudier l'impact d'une réallocation, une vision par ligne d'actif est nécessaire.

### 2.2.2 Le rendement selon nature d'actif : obligations, actions ...

Comme on a déjà évoqué, la mesure de la rentabilité d'un actif dépend essentiellement de la nature de l'actif. Ainsi, la méthodologie mise en place doit être spécifique pour chaque type d'actif dans le portefeuille étudié.

Il existe une variété de classe d'actifs en circulation dans les marchés financiers. Certains sont simples à modéliser comme *les obligations à taux fixes* car les flux qu'ils dégagent sont fixes. D'autres sont bien plus complexes on cite à titre d'exemple *les actions, obligations convertibles, obligations taux variables*, ils dépendent des aléas de marchés et de nombreux facteurs<sup>2</sup> extrêmement difficiles à modéliser.

Dans ce memoire on ne considère que quatre catégories d'actifs et qui sans les plus utilisées dans un portefeuille d'assurance classique :

- Les obligations à taux fixes (OTF)
- Les actions cotées (ACT)
- Les placement Immobiliers (IMO)
- Les organismes de placements (OP)

On détaille par la suite comment le calcul du rendement est modélisé pour chacune de ces catégories d'actif.

---

2. Comme la réputation d'une entreprise, politique de banques centrales

### Les obligations :

Les obligations Une obligation est une valeur mobilière qui constitue une créance sur son émetteur, elle représente une dette financière à moyen, long terme. C'est l'actif dans lequel investisse le plus les sociétés d'assurance. Il existe plusieurs types d'obligations variant essentiellement selon les caractéristiques du coupon. Il existe des coupons dont le taux est variable (indexé sur des indices de référence), d'autre dont le taux est indexé dont le nominal et les coupons sont indexés sur l'inflation. Par soucis de clarté, le portefeuille de cette étude n'est pas constitué d'obligation à coupons fixes.

Lorsque l'obligation est gardée jusqu'à son échéance, son espérance de rendement correspondant à son **taux actuariel**, c'est le taux d'actualisation égalisant le prix d'achat du titre et la somme des flux futurs actualisé par ce taux :

$$P = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{CF_i}{(1+x)^{i+\frac{365-NJP}{365}}}$$

Où :

- $P$  : le prix d'achat du titre.
- $n$  : nombre d'année avant l'échéance.
- $x$  : le taux de rendement recherché.
- $CF_i$  : le cash flux de l'année  $i$ .
- $NJP$  : nombre de jours parcourus.

La mesure de rendement via la valeur comptable de l'obligation (prix d'achat) ne tient pas compte des fluctuations du marché, ainsi la mesure par la valeur de marché de l'obligation à l'avantage d'être représentative de l'état actuel des taux de marché et donc cohérent avec les taux de rendements des autres types. Ainsi, le taux de rendement  $x$  en **valeur de marché** est donnée par :

$$VM = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{CF_i}{(1+x)^{i+\frac{365-NJP}{365}}}$$

Où :

- $VM$  : la valeur de marché.
- $n$  : nombre d'année avant l'échéance.
- $x$  : le taux de rendement recherché.
- $CF_i$  : le cash flux de l'année  $i$ .
- $NJP$  : nombre de jours parcourus.

### Mesure du rendement d'une obligation basée sur la valeur du marché

Dans notre cas on va utiliser la mesure du rendement basée sur la valeur du marché :

$$r_t = \frac{VM_t - VM_{t-1}}{VM_{t-1}}$$

Avec  $r_t$  est le rendement d'une obligation de valeur de marché  $VM_t$  à l'instant  $t$ .

$VM_t$  est obtenue à l'aide de la courbe des taux à l'instant  $t$  :

$$VM_t = \sum_{i=0}^{n-1} CF_i \times P(t, T_i) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{CF_i}{(1 + R(t, T_i))^{t-T_i}} \quad (2.1)$$

Où  $P(t, T_i)$  est le prix zéro-coupon et  $R(t, T_i)$  est le taux d'intérêt composé.  $CF_i$  est le  $i$ -ème cash flow après l'instant  $t$  et  $n$  est le nombre des cash flows

Dans [35], plusieurs méthodes, sont détaillées et calibrées pour la construction de la courbe des taux à chaque instant  $t$  et selon divers modèles. Nous recommandons également les références [13], [14], [15], [16] pour d'autres modèles de construction de la courbe des taux.

#### Les actions :

Estimer la rentabilité à un horizon d'un an pour une action est très complexe. En effet, la valeur d'une action dépend de plusieurs facteurs complexes à modéliser : la réputation d'une entreprise, la tendance économique, les perspectives de croissance du secteur. La modélisation du rendement d'une action se fait, plus fréquemment, à l'aide du modèle **MEDAF** (Modèle d'Evaluation Des Actifs Financiers) :

$$E(R_i) = \beta_i(E(R_m) - R_0) + R_0$$

Où  $R_i$  le rendement de l'actif  $i$ ,  $R_0$  le rendement de l'actif sans risque et  $\beta_i$  est le beta de l'actif estimé par  $\beta_i = \frac{Cov(R_i, R_m)}{Var(R_m)}$ .

Pour tester ce modèle on applique le test de **Black, Jensen et Scholes** (1972) détaillé dans [39].

#### Les immobiliers :

Pour estimer la rentabilité des placements immobiliers, on applique le modèle du **MEDAF**.

#### OPCVM

Organisme de Placement Collectif en Valeurs Mobilières (OPCVM) est un organisme financier qui a pour vocation : La collecte de l'épargne auprès des investisseurs pour la placer dans des valeurs mobilières selon des critères bien défini. Il existe différentes catégories d'OPCVM défini selon l'Autorité des Marchés Financiers (AMF) :

- **Les OPCVM monétaires** : fonds contenant essentiellement des placement monétaires. Il s'agit de placement court termes souvent utilisés par les entreprises pour gérer leurs trésoreries. Ces placements sont sans risque et leur rendement est souvent faible car lié à celui des intérêts à court terme.
- **Les OPCVM obligataires** : fonds contenant essentiellement des placements obligataires. Il est possible que ce type de fonds contienne une poche monétaire.
- **Les OPCVM actions** : fonds contenant essentiellement des placements en action. Il est possible que ce type de fonds contienne une poche monétaire.
- Les OPCVM de fonds alternatifs : ce sont des fonds investis à plus de 10 % dans d'autres OPCVM mettant en œuvre des stratégies dites « alternatives ».
- **Les OPCVM de fonds avec formule** : Ces OPCVMs permettent de récupérer à une échéance prédéterminée l'intégralité (OPCVM garantis) ou une partie (OPCVM protégés) du capital investi majoré d'une performance finale définie dans une formule.
- **Les OPCVM diversifiés** : fonds où les investissements se font dans une gamme très variée de valeurs mobilières.

La modélisation **des trois derniers types de fonds décrits ci-dessus est complexe**. C'est pourquoi ce type de fonds n'est pas pris en compte dans l'outil.

Les organismes de placement sont composés d'actifs assez variés, ce qui rend complexe l'évaluation de performance et de rentabilité. De plus, le manque de **transparence** rend complexe et fastidieuse l'application des méthodes lignes à lignes décrites ci-dessus. Afin d'obtenir une mesure de rentabilité cohérente et simple, la décomposition en poche semble être adéquate. Puis, on estime la rentabilité de chaque poche en prenant les moyennes observées en portefeuille, en estimant qu'elles sont représentatives des moyennes de marché :

$$R_{opcvn} = \sum_i w_i R_i$$

Où :

- $R_{opcvn}$  : le rendement du placement.
- $w_i$  : le pourcentage du fond représenté par la poche  $i$ .
- $R_i$  : le rendement de la poche  $i$ .

Pour la poche monétaire, on prend comme rentabilité le taux sans risque.

## 2.3 Mesures de risque

La définition classique du risque est la suivante : *Possibilité, probabilité d'un fait, d'un événement considéré comme un mal ou un dommage..* Pour pouvoir comparer deux risques, il faut être capable de les mesurer. C'est l'objectif **des mesures de risques**.

### 2.3.1 Définition et propriétés

Une mesure de risque  $\mathcal{R}$  étant une fonction définie sur l'espace des variables aléatoires, et prenant ses valeurs dans  $\mathbb{R}$ , il convient de spécifier quelques propriétés naturelles et souhaitables de ces mesures :

- **Invariance en loi** : si  $X \stackrel{\mathcal{L}}{=} Y$ , alors  $\mathcal{R}(X) = \mathcal{R}(Y)$ . Le portefeuille le plus risqué nécessite d'immobiliser plus de capitaux.
- **Croissance** : si  $X \geq Y$ , alors  $\mathcal{R}(X) \geq \mathcal{R}(Y)$ .
- **Invariance par translation** : si  $k \in \mathbb{R}$ , alors  $\mathcal{R}(X + k) = \mathcal{R}(X) + k$ . Si on considère  $k$  comme un actif **sans risque**, cette propriété signifie qu'un placement sans risque n'apporte pas de bénéfice de diversification.
- **Homogénéité** : si  $\lambda \in \mathbb{R}_+$ , alors  $\mathcal{R}(\lambda X) = \lambda \mathcal{R}(X)$ . On multiplie la valeur de chaque ligne d'un portefeuille par 2, la valeur du risque global sera doublée aussi.
- **Sous-additivité** : pour tous risques  $X$  et  $Y$ ,  $\mathcal{R}(X + Y) \leq \mathcal{R}(X) + \mathcal{R}(Y)$ . Cette propriété est la base de **la diversification** : la fusion de deux portefeuilles risqués minimise le risque global (un portefeuille qui comporte des actifs aux comportements anti corrélés).
- **Convexité** : si  $\beta \in [0; 1]$ , alors  $\mathcal{R}(\beta X + (1 - \beta)Y) \leq \beta \mathcal{R}(X) + (1 - \beta)\mathcal{R}(Y)$ .

#### Mesure de risque Cohérente

Une mesure de risque est dite :

- *Monétaire si elle est monotone et invariante par translation,*
- *Convexe si elle est monétaire et convexe,*
- *Cohérente si elle est monétaire, homogène et sous-additive.*

Les mesures cohérentes peuvent s'écrire :

$$\mathcal{R}(X) = \max_{\mathbb{Q} \in \mathcal{Q}} \{\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(X)\}$$

Où  $\mathcal{Q} = \{\mathbb{Q} \in \mathcal{M}, \alpha(\mathbb{Q}) = 0\}$ .  $\mathcal{M}$  est l'ensemble des mesures additives et normalisées<sup>3</sup> à 1, et

$$\alpha(\mathbb{Q}) = \max_{X \in \mathcal{A}} \{\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(X)\}$$

On notera que  $\mathcal{M}$  contient plus que des mesures de probabilité.

$\mathcal{A}$  est l'ensemble d'acceptation associé à  $\mathcal{R}$ . Si  $\mathbb{R}$  est une mesure de risque, on définit la région de risques acceptables pour la mesure  $\mathcal{R}$  comme :

$$\mathcal{A} = \{X, \mathcal{R}(X) \leq 0\}$$

Dans ce mémoire, on s'intéresse particulièrement aux **mesures de risque cohérentes**, et on définit les variables aléatoires  $X_1, X_2, \dots, X_n$  comme les gains ou les pertes associés à  $n$  actifs

---

3. Voir Arthur Charpentier "Mesures de risque" [3]

constituants le portefeuille de placement de la société SCR.

On définit le gain ou la perte du portefeuille global, noté  $S$  de la manière suivante :

$$S = \sum_{i=1}^n X_i$$

### Le capital économique et la mesure de risque

Le capital économique (CE) requis par le portefeuille (i.e. les fonds qui doivent être bloqué pour faire face à d'éventuelles fortes pertes.) peut être déterminé par une *mesure de risque*  $\rho$  :

$$CE = \rho(S) = \rho\left(\sum_{i=1}^n X_i\right)$$

On peut donner une forme générale, et introduire alors un vecteur d'allocation  $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$  tel que  $u_i$ , correspondt au montant investit dans ligne  $i$ . On a alors :

$$S(u) = \sum_{i=1}^n u_i X_i$$

Notez que  $S(1, 1, \dots, 1) = S$ .

Dans le cadre de ce mémoire, nous posons l'hypothèse que la distribution de probabilité du vecteur aléatoire  $(X_1, \dots, X_n)$  reste constante. Cependant, nous examinerons différentes variations du vecteur  $u$ . Par conséquent, il est nécessaire d'introduire la fonction :

$$f_{\rho,S}(u) = \rho(S(u)) \tag{2.2}$$

#### Remarque :

Cette fonction associe à une allocation d'actif donnée  $\mathbf{u}$  un capital économique (i.e. un coût du risque) qui est  $f_{\rho,S}(u)$ . Elle prend comme paramètre une mesure de risque et un univers de ligne d'actif. Le choix de la mesure de risque est très sensible. Il existe plusieurs types de mesures de risques. *Artzner, Delbaenv, Eber et Heath*, on introduit un critère de qualité et définissant le concept de **mesure de risque cohérente**<sup>4</sup>.

### 2.3.2 Les mesures usuelles de risque

Il existe plusieurs méthodes pour mesurer les risques inhérents dans un portefeuille. On représente dans cette partie quelques mesures de risque de la plus simple à la plus complexe à mettre en place.

---

4. Voir l'article COHERENT MEASURES OF RISK [4].

## L'écart-type

On rappelle que l'écart-type est une mesure de dispersion de variable aléatoire définie comme la moyenne quadratique des écarts à la moyenne. Il s'agit de la mesure la plus simple, on assimile le risque porté par le portefeuille à son écart-type multiplié le plus souvent par un scalaire dit *scalaire d'ajustement* (noté  $\lambda$ ). Ainsi, le capital économique à immobiliser correspond à l'écart type du portefeuille donné par le formule générale suivante :

$$f_{\rho,S}(u) = \lambda \times \sqrt{\text{Var}(S(u))}$$

cette idée que le risque peut être quantifié à l'aide de l'écart-type (qui a la même unité que les coûts) est implicitement présente dans l'idée de *mutualisation* de l'activité d'assurance. En effet, une des bases de l'assurance est le théorème central limite : si  $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$  désigne la charge totale payée sur  $n$  polices d'assurance sur une année, le théorème central limite garantit que sous certaines conditions<sup>5</sup> on a :

$$\frac{S_n - nE(X)}{\sqrt{n}\sqrt{\text{Var}(X)}}$$

Ce qui s'interprète parfois de la manière suivante : en multipliant par 4 la taille du portefeuille, on multiplie par 4 le chiffre d'affaire<sup>6</sup>, mais le risque (correspondant à l'écart-type) n'est multiplié que par 2. Ce qui légitime le principe de *mutualisation* des risques sur des portefeuilles aussi grands que possibles.

Bien que simple à mettre en place, cette mesure présente **deux inconvénients majeurs** : le calcul de l'écart-type ne tient pas du signe des écarts à la moyenne. Ainsi, **on ne mesure pas le risque de perte**, mais la dispersion pour laquelle on tient compte des scénarios de perte et de gain. De plus, l'écart-type **n'est pas une mesure de risque cohérente** (Les propriétés nécessaires de monotonie et d'invariance par translation ne sont pas respectées).

## Value at risk (VaR)

La Value-at-Risk est apparue (sous ce nom) dans les années 90, en réponse à de nombreux désastres qui ont touché les marchés de capitaux à cette période<sup>7</sup>. Elle est définie comme *le montant de pertes qui ne devrait pas être dépassé qu'avec une probabilité donnée sur un horizon temporel donné*. Mathématiquement, la Value at Risk est à l'origine un calcul de probabilité, on appelle Value-at-Risk de niveau  $\alpha \in [0, 1]$  le quantile de niveau  $\alpha$  :

$$\text{VaR}(X, \alpha) = \inf \{x; \mathbb{P}(X \leq x) \geq \alpha\} = F_X^{-1}(\alpha)$$

Graphiquement :

---

5. Les  $X_i$  sont indépendante et de même espérance est variance finies et satisfaisants la Condition de *Lindeberg*

6. Les primes étant souvent proportionnelles à  $E(X_i)$

7. Consulter "P. Jorion. Value at Risk : The New Benchmark for Managing Financial Risk. McGraw-Hill, 2006". Pour plus d'information sur l'histoire de VaR

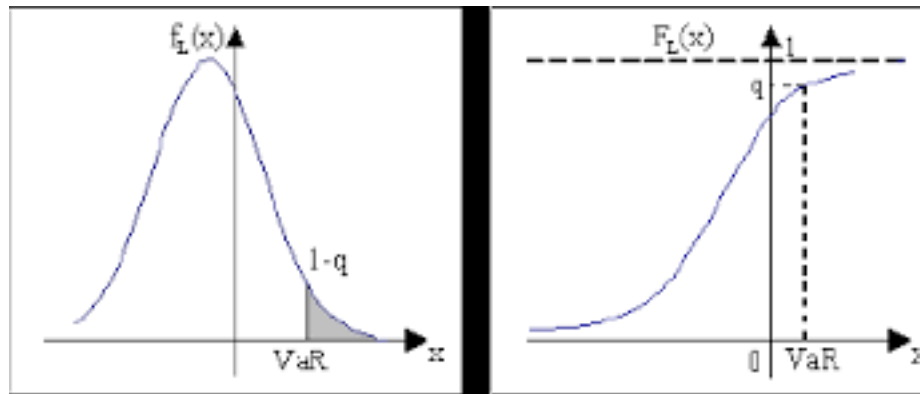


FIGURE 2.1 – Value at Risque au niveau  $q$

Ainsi, la value-at-risk peut être utilisé comme mesure de risque d'un portefeuille à condition de le modéliser de façon efficace. Le capital économique à immobiliser s'écrira :

$$CE = f_{\rho, S}(u) = S(u)^{t=0} - VaR(S(u), \alpha)$$

Généralement, Le niveau de confiance  $\alpha$  dépend de l'aversion au risque. On retrouve dans les méthodes de calcul du SCR imposées par les directives Solvabilité II que le niveau de risque tolérable est bi-centennal. Dans ce cas  $\alpha = 99,5\%$ .

La  $VaR$  représente la mesure de risque la plus utilisée en pratique, notamment pour la facilité de son calcul et ses estimations, et aussi pour la performance de ses procédures de backtesting. Cette mesure de risque est bien **monotone, positive homogène, et invariante par translation**. Cependant, **elle ne vérifie pas, généralement, la propriété de sous-additivité** (par exemple, cette propriété est vérifiée pour les variables de risque elliptiques). De plus, la mesure  $VaR$  **ne donne pas d'information sur le comportement de la distribution d'une variable aléatoire  $X$  au-delà de la  $VaR$** , c'est-à-dire qu'il ne donne pas d'information sur la queue de distribution et peut ne pas prendre en compte des risques extrêmes de probabilité non négligeable.

### Tail Value at Risque (TVaR)

Si la Value-at-Risk s'intéressait aux probabilités d'événements rares et extrêmes par le biais d'une estimation ponctuelle, avec la **Tail-Value-at-Risk**, nous nous intéresserons à ce qui se passe lorsque ces événements extrêmes surviennent<sup>8</sup>. En prenant la moyenne de la queue de distribution au-delà d'un certain seuil ( $VaR$ ). Mathématiquement, la Tail Value-at-Risk au niveau  $\alpha$  est définie par :

$$TVaR(X, \alpha) = \mathbb{E}(X|X \geq VaR(X, \alpha)) = \frac{1}{1 - \alpha} \int_{\alpha}^1 VaR(X, t) dt :$$

8. Au delà de la  $VaR$

**Remarque** : il est intéressant de noter qu'il existe une fonction de répartition  $\tilde{F}_X$ , appelée transformée de Hardy-Littlewood<sup>9</sup> de  $F_X$ , telle que pour tout  $\alpha$  :

$$\tilde{F}_X^{-1}(\alpha) = TVaR(X, \alpha)$$

Si on considère  $\tilde{X}$  une variable aléatoire de fonction de répartition  $\tilde{F}_X$ , on a :

$$TVaR(X, \alpha) = VaR(\tilde{X}, \alpha)$$

Ainsi en utilisant  $TVaR$  comme mesure de risque du risque du portefeuille  $X$ , le capital économique se calcule de la manière suivante :

$$CE = f_{\rho, S}(u) = S(u)^{t=0} - TVaR(S(u), \alpha)$$

Cette mesure de risque est **monotone, positivement homogène, invariante par translation, sous additive** : elle est donc **cohérente**. Ainsi, la  $TVaR$  apparaît comme optimale d'un point de vue théorique. Cependant, la mise en pratique de ce calcul pour un portefeuille reste relativement **complexe**. Cette approche correspond, d'un point de vue réglementaire, à une mesure des risques par formule interne et qui nécessite la mise en place des outils complexe tels que des Générateurs de Scénarios Économiques (GSE) ne rentrant pas dans le cadre de ce mémoire.

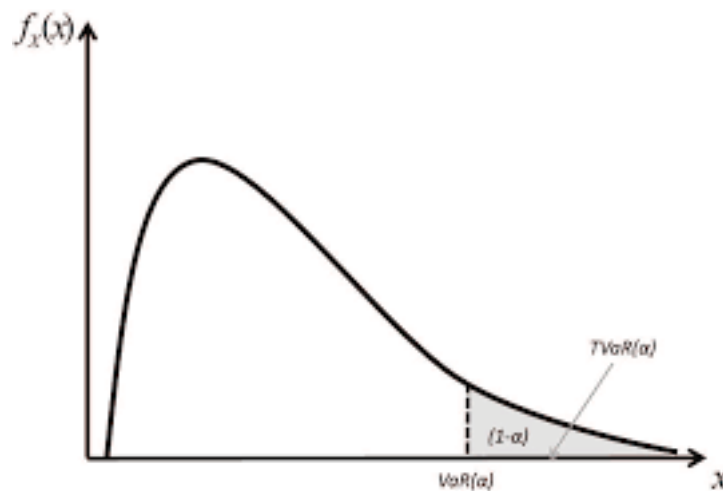


FIGURE 2.2 – Tail Value at Risque au niveau  $\alpha$

### 2.3.3 Le SCR marché comme mesure de risque

L'application de notre **algorithme** nécessite le choix d'une mesure de risque simple à la mise en place. La directive Solvabilité II détaille les méthodes de calculs du **SCR marché**, et il ne nécessite alors pas de modélisations statistiques. Ce qui apparaît intéressant de choisir le SCR marché comme mesure de risque.

---

9. Voir "G. H. Hardy and J. E. Littlewood. A maximal theorem with functiontheoretic applications. Acta Math., 54(1) :81–116, 1930".

On rappelle que le SCR marché s'écrit comme :

$$SCR_{marche} = \sqrt{(choc^{global})^t \times \Omega_{marche} \times choc^{global}}$$

Avec  $choc^{global} = \begin{pmatrix} SCR_{taux} \\ SCR_{EQUITY} \\ SCR_{PROPERTY} \\ SCR_{SPREAD} \end{pmatrix}$ . Ce vecteur peut s'écrire en fonction de l'allocation  $u =$

$(u_1, \dots, u_n)$  et le choc unitaire (voir la partie 1.5.7) de chaque actif  $i$  :  $choc^{global} = \phi(\sum_{i=1}^n u_i \times choc_{unitaire}^i)$ .  $\phi$  est une fonction multivariée de  $\mathbb{R}^8$  vers  $\mathbb{R}^4$ .

Donc le  $SCR_{marche}$  est bien une fonction permettant de calculer un capital économique en prenant comme paramètre un portefeuille et l'allocation  $u$  de celui-ci :

$$SCR_{marche}(u) = f_{\rho,S}(u)$$

Afin d'étudier la **cohérence** de la mesure de risque  $SCR_{marche}(u)$ , on utilise la **décomposition de Cholesky**.

### La décomposition de Cholesky

La *décomposition de Cholesky* dite aussi la *factorisation de Cholesky*, nommée d'après *André-Louis Cholesky*, consiste, pour une matrice symétrique définie positive  $A$ , à déterminer une matrice triangulaire inférieure  $L$  telle que :  $A = LL^T$ .

#### Théorème 1 (Décomposition de Cholesky)

Soit  $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ . Il existe une unique matrice  $L \in M_n(\mathbb{R})$  triangulaire supérieure à coefficients diagonaux strictement positifs telle que  $A = L^T L$ .

—  $S_n^{++}(\mathbb{R})$  : l'ensemble des matrices symétriques et définies positives.

D'après cette décomposition on a :  $\Omega_{marche} = L^T L$ . Donc :

$$SCR_{marche} = \sqrt{(choc^{global})^t \times L^T L \times choc^{global}} = \sqrt{(Lchoc^{global})^t \times (Lchoc^{global})} = \sqrt{U^t \times U}$$

Finalement :

$$SCR_{marche} = \|U\|_2 \tag{2.3}$$

Où :  $U = L \times \phi(\sum_{i=1}^n u_i \times choc_{unitaire}^i)$ .

La propriété de **sous-additivité** semble intuitive, car le SCR prend en compte la diversification via les matrices de corrélation. Par conséquent, l'ajout d'un portefeuille ne devrait pas aggraver le risque inhérent au portefeuille plus que son propre risque, c'est pourquoi le SCR a supposé la propriété de sous-additivité. Par l'expression 2.3 simplifiée du  $SCR_{marche}$ , montrer simplement les propriétés de **monotonie** et **d'homogénéité**.

Cependant la propriété de **l'invariance par translation n'est pas vérifiée** :

$$SCR_{marche}(X + h) = SCR_{marche}(X)$$

## Resultat

Le  $SCR_{marche}$  n'est donc pas une mesure de risque cohérente. Cependant, elle vérifie la propriété d'homogénéité essentielle pour la mise en place d'une stratégie d'allocation du risque détaillée dans la suite de ce mémoire.

## 2.4 Les indicateurs risque-rendement

Dans les parties précédentes on a fait un zoom sur les mesures utiliser pour quantifier le risque ( $SCR_{marche}$ ) et le rendement (selon chaque type d'actif). En général, on ne peut pas optimiser à la fois le risque est le rendement à la fois. En effet, optimiser le risque (minimiser le  $SCR_{marche}$ ) concentrera les investissements sur les actifs **les moins risqués** (EX : liquidités, obligations d'état allemand). En autre coté, optimiser le rendement, mène à **des allocations massives** sur les lignes les plus rentables et donc **les plus risquées** (obligations mal notées, Hedge fund). Afin de prend en compte de ce paradoxe il est très utile de construire **un indicateur** qui prend en considération les deux notions et cela selon les objectifs de la compagnie d'assurance. En réalité, **l'aversion au risque** diffère selon les compagnies d'assurance et devrait être laissée à la discrétion de l'utilisateur.

En pratique, il y a plusieurs indicateurs qui sont utilisés par les compagnies d'assurances et qui constituent un outil essentiel dans l'allocation de capital, l'analyse des performances et la gestion du risque, dont on quelque uns cite :

- **Risk Adjusted Return On Capital (RAROC)** est l'indicateur le plus utilisé dans la pratique, il estime la rentabilité probable  $E(R)$  par rapport aux fonds alloués  $EC$ <sup>10</sup> pour permettre cette rentabilité :

$$RAROC = \frac{E(R)}{EC}$$

- **Return On Risk Adjusted Capital (RORAC)** c'est une estimation de la rentabilité (R) par rapport aux fonds alloués probablement (EC). L'idée est à l'opposé du  $RAROC$  dans le sens où le risque ou l'aléa est présent dans le capital économique (et non le rendement) :

$$RORAC = \frac{R}{E(EC)}$$

- **Risk adjusted Return On Risk Adjusted Capital (RARORAC)** la même idée que les deux indicateurs précédents, cependant contient lui de l'aléa dans chacune des deux parties (rendement et capital alloué) :

$$RARORAC = \frac{E(R)}{E(EC)}$$

Dans ce mémoire, on va s'inspirer<sup>11</sup> de l'indicateur **RARORAC** et définir l'indicateur  $I_{RR}$  **une mesure de risque-rendement** avec  $SCR_{marche}$  comme capital économique  $E(EC)$ ,

10. La partie aléa est présente dans le rendement

11. Cet indicateur n'est pas exactement le RARORAC puisque le SCR marché n'est pas le capital économique.

et cela ,pour **un horizon d'un an** :

$$I_{RR}(u) = \frac{E(R(u))}{SCR_{marche}(u)}$$

La motivation qui réside dans l'utilisation de cet indicateur est sa simplicité de calcul et son coté intuitif. En effet, cet indicateur prend en compte le risque et le rendement de façon équilibrée cela s'explique simplement par l'exemple suivant : une allocation qui augmente le rendement, par multiplication, de  $x$  sera équivalente à une allocation permettant de diminuer le  $SCR_{marche}$  de  $x$ . Le point qui reste à prendre en compte dans cet indicateur est l'aversion au risque de l'utilisateur (la société de l'assurance). Pour cela, on propose alors un nouvel indicateur qui prend en compte cette notion via un paramètre  $\beta$  et qui sera **pris pour l'application de l'algorithme d'optimisation dans la partie suivante** :

$$I_{RR}^{\beta}(u) = \frac{E(R(u))}{SCR_{marche}(u)^{\beta}}$$

**N.B.** : Le nouvel indicateur  $I_{RR}^{\beta}$  prend en compte **l'aversion au risque** via le **paramètre**  $\beta$  qui est laissé au choix de l'utilisateur de l'outil d'optimisation. Plus il est élevé, plus le comportement de l'outils sera prudent : c'est-à-dire qu'on accord la priorité à la minimisation du risque par rapport à la maximisation de la rentabilité.

## 2.5 Quelques méthodes d'allocation du capital et contribution au risque

Par l'introduction de la notion de mesure de risque cohérente dans la partie précédente, on a établi une façon d'évaluer le risque global du portefeuille de façon raisonnable, ainsi il peut être utile de répondre à la question : dans quelle mesure l'actif (ou un sous-portefeuille)  $i$  contribue-t-il à  $EC = \rho(X)$ ? La réponse à cette question aide à évaluer le coût en risque de chaque ligne afin d'obtenir une allocation optimale. Ainsi, on introduit la notion de **contribution au risque** , c'est-à-dire la contribution au capital économique d'un titre donné. Dans le cas où la mesure de risque est le  $SCR_{marche}$ , cela revient à calculer le coût en capitaux requis de chaque ligne constitutive du portefeuille.

Dans cette partie, nous analysons les différentes méthodes d'allocation du capital présentes dans la littérature des sciences actuarielles, et utilisées en pratique par les compagnies du secteur de l'assurance.

### 2.5.1 Notations et propriétés

Depuis l'apparition des mesures de risque cohérentes dans "*coherent measures of risk*" [4] introduites par *Artzner et al*, la notion de **la cohérence** occupe une place importante dans le domaine de la gestion des risques. Par la suite, *Denault (2001)*<sup>12</sup> a défini le concept de **principe**

---

12. voir M. Denault. "Coherent allocation of risk capital". Journal of risk 2001

**d'allocation de capital.** Il s'agit d'une méthode permettant de calculer la contribution au risque de chaque ligne d'actif d'un portefeuille. Il a fourni aussi les principaux axiomes qui permettent de bien définir une méthode cohérente d'allocation de capital.

### Notations

- $X = (X_1, \dots, X_n)$  un vecteur de  $n$  risques (perte|gain) associés à  $n$  segments ou actifs.
- Le risque global  $S = \sum_{i=1}^n X_i$ .
- $\rho(S)$  le risque global calculé avec la mesure de risque  $\rho$ .
- $\rho(X_i)$  le risque associé au segment  $i$  (actif) calculé avec la mesure de risque
- $\rho^\lambda(X_i|S)$  la contribution au risque global du segment  $i$ , calculée avec la méthode d'allocation  $\lambda$  et la mesure de risque (notez aussi  $K_i$ ).
- $N$  l'ensemble des  $n$  segments sur lesquels le capital est alloué.

### Définition 1 : méthode d'allocation

Une méthode d'allocation de capital est une fonction  $\Pi_{\lambda, \rho}$ , d'un ensemble des problèmes d'allocations  $A$  à  $\mathbb{R}^n$  qui à chaque mesure de risque  $\rho$  associe un unique jeu de contributions au risque de tous les segments :

$$\Pi_{\lambda, \rho} : N \rightarrow (\rho^\lambda(X_1|S), \rho^\lambda(X_2|S), \dots, \rho^\lambda(X_n|S))$$

Cette dernière définition doit vérifier certaines propriétés afin d'être exploitable. Ainsi, on définit la notion de **méthode d'allocation cohérente**.

### Définition 2 : méthode d'allocation cohérente

Une méthode d'allocation de capital est dite *cohérente* si elle vérifie les propriétés suivantes :

1. **Full-allocation** :  $\sum_{i=1}^n \rho^\lambda(X_i|S) = \sum_{i=1}^n K_i = \rho(X) = CE$ . Cette propriété est très importante car elle garantit que le capital économique est intégralement réparti entre chaque ligne.
2. **Symétrie** : Si 2 risque  $i$  et  $j$  ayant le même impact marginal<sup>13</sup> par rapport à tout sous-ensemble  $D$  (sous-portefeuille), de  $N$ , contenant les deux à la fois, on alloue la même contribution au risque. Cette propriété peut se traduire mathématiquement par :

$$\text{Soit } \{i, j\} \in D \subseteq N \text{ et } IM_i(D, h) = IM_j(D, h)$$

$$\text{Alors : } K_i = K_j \text{ ou encore } \rho^\lambda(X_i|S) = \rho^\lambda(X_j|S)$$

---

13. L'impact marginal du segment  $i$  sur le risque associé à  $D$ , après cession d'une fraction  $h$  du segment  $i$  est défini par :  $IM_i(D, h) = \frac{\rho(X_D) - \rho(X_D - hX_i)}{h}$

3. **No undercut** : Cette propriété est une généralisation de la propriété full-allocation. Elle dit qu'on ne peut attribuer plus de risque à une sous partie de portefeuille que le risque généré par cette partie :

$$\text{Soit } M \text{ un sous-ensemble de } N \text{ alors : } \sum_{i \in M} K_i \leq \rho \left( \sum_{i \in M} K_i \right)$$

4. **Riskless allocation** : Si  $X_n$  est un actif sans risque<sup>14</sup> alors  $K_n = \rho(\alpha R_f) = -\alpha$ . En général, cette propriété stipule que l'allocation sur un segment non risqué est nulle.

Ces propriétés sont simplement des points de repère afin de définir une méthode d'allocation exploitable. Elles ne constituent pas une règle impraticable, afin de pouvoir distribuer à chaque ligne du portefeuille des actifs le risque estimé via le  $SCR_{marche}$  il est important de choisir une mesure et une méthode respectant la plupart de ces propriétés. Dans la suite, on présente quelques méthodes d'allocation utilisées en pratique dans le domaine de l'assurance.

### 2.5.2 Méthode proportionnelle

Cette méthode d'allocation est la plus triviale. La contribution au risque dans cette méthode est proportionnelle à la valeur du risque *standalone* de ligne  $\rho(X_i)$  :

$$K_i = \rho^{\text{proportionnelle}}(X_i|S) = \alpha \rho(X_i)$$

On choisit  $\alpha$  de manière à ce que le principe *full allocation* est respecté, donc :

$$\alpha = \frac{\rho(S)}{\sum_{k=1}^n \rho(X_k)}$$

Finalement :

$$\rho^{\text{proportionnelle}}(X_i|S) = \frac{\rho(S)}{\sum_{k=1}^n \rho(X_k)} \times \rho(X_i)$$

Cette méthode est facile à mettre en œuvre et vérifie la propriété *full allocation* en redistribuant le bénéfice de diversification. Mais elle est une vision très linéaire et elle ne prend pas en compte la dépendance entre les risques. La méthode marginale s'échappe de ce dernier inconvénient.

### 2.5.3 Méthode marginale

Cette méthode vise à déterminer la contribution de chaque ligne  $i$  par l'estimation de l'impact de cette ligne sur le risque global en calculant le risque global du portefeuille qui ne comporte pas cette ligne  $\rho(S_{-i})$ <sup>15</sup> :

$$K_i = \rho^{\text{marginale}}(X_i|S) = \alpha(\rho(S) - \rho(S_{-i}))$$

On choisit  $\alpha$  de manière à ce que le principe *full allocation* est respecté, donc :

$$\alpha = \frac{\rho(S)}{\sum_{k=1}^n \rho(S) - \rho(S_{-k})}$$

---

14. Nous supposons que le  $n$ -ième portefeuille est un instrument sans risque avec une valeur nette au temps  $T$  égale à  $X_n = \alpha R_f$ , où  $R_f$  le prix au temps  $T$  d'un instrument sans risque avec un prix 1 aujourd'hui

15. Avec  $S_{-i} = \sum_{k=1; k \neq i}^n X_k$

Finalement :

$$\rho^{\text{proportionnelle}}(X_i|S) = \frac{\rho(S) - \rho(S_{-i})}{\sum_{k=1}^n \rho(S) - \rho(S_{-k})} \times \rho(S)$$

Cette méthode présente l'avantage de prendre en compte l'impact de la ligne sur le risque global. Cependant, cette méthode est extrême, dans le sens où elle ne prend en compte que l'impact marginal des segments sur l'ensemble du portefeuille, et non sur des sous-groupes. De plus, elle ne teste pas l'impact d'une réallocation partielle d'une ligne, par exemple une vente de 50% de la valeur de la ligne. Or, l'algorithme de réallocation qu'on présente ne se limite pas à des achats/vente totaux de lignes d'actifs mais bien à des réallocations partielles.

### 2.5.4 Méthode d'Euler

La méthode d'Euler ou la méthode du gradient<sup>16</sup> est la méthode la plus utilisée en pratique car elle répartit le risque global à chaque ligne selon l'impact marginal infinitésimal de chaque ligne. Dans l'article [5], *Dirk Tasche* propose une analyse pratique et théorique de cette méthode. Cette méthode est l'équivalent continu de la méthode marginale, elle mesure l'impact sur le risque en cédant pour une ligne  $i$  donnée une quantité infinitésimale  $h$ .

On prend les notations définies dans la partie 2.3.1 on donne la proposition suivante :

#### Proposition 1

Soit  $\rho$  une mesure de risque et  $f_\rho$  la fonction qui correspond à  $\rho$  selon 2.2. Supposons que  $f_\rho$  est continûment différentiable. S'il existe des contributions au risque  $\rho(X_1|X), \dots, \rho(X_n|X)$  compatibles RORAC<sup>17</sup> pour des espérances  $\mu_1, \dots, \mu_n$  de  $X_1, \dots, X_n$ , alors  $\rho(X_i|X)$  est uniquement déterminé comme :

$$\rho^{\text{Euler}}(X_i|S) = \frac{d\rho}{dh}(S - hX_i)|_{h=0} = \frac{\partial f_\rho}{\partial u_i}(1, 1, \dots, 1)$$

Ou encore

$$\rho^{\text{Euler}}(X_i|S) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\rho(S) - \rho(S - hX_i)}{h}$$

La nomination de cette méthode par la *la méthode d'Euler* revient au fait que cette méthode présente des propriétés très intéressantes lorsqu'on lui applique le **théorème d'Euler** pour les fonctions homogènes.

#### Définition 3 : une fonction homogène

Une fonction  $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  est dite homogène de degré  $\tau$  si pour tout  $h > 0$  et  $u \in U$  avec  $hu \in U$  l'équation suivante est vraie :

$$f(hu) = h^\tau f(u).$$

---

16. Voir D. Balog. Capital allocation in financial institutions : "the euler method. Iehas discussion papers, Institute of Economics, Hungarian Academy of Sciences, June 2011.

17. Voir l'article [5]

### Théorème d'Euler

Soit  $O$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ , et  $f : O \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue, différentiable :

$$f \text{ homogène de degré } \tau \iff \tau f(u) = \sum_{i=1}^n u_i \frac{\partial f(u)}{\partial u_i} \text{ pour } u = (u_1, u_2, \dots, u_n) \in O$$

Il y a plusieurs articles qui traitent quelques propriétés de cette méthode d'allocation tel que on trouve *Buch et Dorfleitner* (2008), Balog, Dóra (2011) D. Tasche (2000, 2004 et 2007).

### Résultat

— On a prouvé que la  $SCR_{marche}$  est une mesure de risque homogène<sup>18</sup> de degré 1, donc :

$$SCR_{marche}(u) = \sum_{i=1}^n u_i \frac{\partial SCR_{marche}(u)}{\partial u_i} = \sum_{i=1}^n u_i C_i \quad (2.4)$$

Où  $C_i$  est la contribution globale du segment  $i$  au risque global du portefeuille. Par *Le théorème d'Euler* on vérifie la propriété de *full allocation* (on remplace  $u$  dans l'égalité du théorème on trouve  $f_\rho((1, 1, \dots, 1)) = \rho(S) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_\rho}{\partial u_i}(1, 1, \dots, 1) = \sum_{i=1}^n \rho^{Euler}(X_i|S)$ ).

— Par ces propriétés on peut montrer la cohérence de la méthode d'allocation d'Euler avec comme mesure de risque le  $SCR_{marche}$ , donc cette méthode qui sera utilisée comme méthode d'allocation. Par l'allocation d'Euler on a écrit la  $SCR_{marche}$  en fonction du vecteur des montants alloué  $u(u_1, u_2, \dots, u_n)$ , il ne reste que de définir des indicateurs qui contrôle à la fois le risque via le  $SCR_{marche}$  et le rendement pour appliquer l'algorithme d'optimisation afin de déterminer l'allocation optimale.

La question qui se pose est **comment calculer les contribution  $C_i$**  avec comme mesure le  $SCR_{marche}$  ?

#### 2.5.5 Utile pour l'algorithme d'optimisation : le calcul des contribution $C_i$

A l'aide d'un calcul simplifié en utilisant la dérivation en chaîne j'ai démontré que la contribution  $C_i$  est donné par :

**Formule :**

$$C_i = \frac{\partial f(u)}{\partial u_i} = \frac{\partial \sqrt{y}}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u_i} = \frac{1}{2SCR_{marche}} \times \sum_{k=1}^m \frac{\partial y}{\partial SCR^k} \times scr_k^i$$

Où  $scr_k^i$  le SCR unitaire du choc  $k$  définie dans 1.5.7,  $\frac{\partial y}{\partial SCR^k}$  peut être définie comme **la contribution du choc  $k$**  au risque global et que on détaille le calcul dans l'annexe A.

L'utilisation du  $SCR_{marche}$  comme mesure de risque et *l'allocation d'Euler* comme méthode d'allocation permet d'avoir deux visions du risque contenu dans le portefeuille : **une vision**

---

18.  $SCR_{marche}(\lambda.X) = \lambda.SCR_{marche}(X)$

**globale** après diversification via le calcul du *SCR global*, et autre **une vision locale** après diversification par le calcul **des contributions** de chaque ligne d'actif. C'est cette méthode qui servira de mesurer le risque en fonction des montants alloués  $u$  et donc d'être utile pour l'application de **l'algorithme d'optimisation**.

## 2.6 L'algorithme du gradient et l'allocation optimale via la méthode d'Euler

### 2.6.1 Le problème d'optimisation sans contraintes

L'indicateur calculé précédemment sera utilisé dans cette partie comme **une fonction objective** d'un **algorithme d'optimisation sans contraintes** spécifique afin de trouver l'allocation optimale  $u$  en maximisant cet indicateur. Il existe plusieurs algorithmes d'optimisation mais dans ce mémoire je me conte d'utiliser l'algorithme gradient qui est le plus utilisé dans la littérature.

*L'optimisation est un sujet vaste dont l'objectif est d'agir sur un système afin d'en améliorer les performances et de rechercher la solution qui offre le meilleur rendement. Les applications concernent autant l'économie que la gestion des ressources ou encore la conception optimale. D'un point de vue mathématique, l'optimisation revient à rechercher le minimum ou le maximum d'une fonction sachant que l'inconnue satisfait des contraintes qui dépendent du problème physique.* Francis Filbet

#### Définition 1 : Optimisation sans contraintes

Un problème d'optimisation se présente sous la forme suivante : étant donné une partie  $U$  non vide d'un espace vectoriel  $V$  et une fonction  $f : V \rightarrow R$ . il s'agit de trouver un minimum ou maximum de la fonction  $f$  par rapport à l'ensemble  $U$ , c'est-à-dire un élément  $u$  qui vérifie :

$$u \in U \text{ et } \inf_{u \in U} f(u) \text{ ou } \sup_{u \in U} f(u)$$

Dite qu'on a *un problème d'optimisation sans contrainte* lorsque  $U = V$ .

Les deux problèmes d'optimisation précédents sont équivalents (remplacer  $f$  par  $-f$ ), donc il suffit de caractériser un problème d'optimisation par  $\inf_{u \in U} f(u)$  ou par  $\sup_{u \in U} f(u)$ .

En général, il est difficile de trouver une forme explicite de la solution du problème d'optimisation, c'est pour quoi on recourt à **des algorithmes d'optimisation** qui permet de **s'approcher** à la solution ( $u_k \rightarrow u$ ).

### La condition nécessaire d'optimalité :

Si on suppose que  $U = \mathbb{R}^n$  on sait que la condition nécessaire d'optimalité est que le gradient de la fonction  $f$ , supposé différentiable en  $\bar{x}$ , soit nul au point où il y a un optimum par exemple  $\bar{x}$  :

$$\nabla f(\bar{x}) = \left[ \frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_n} \right] = [0, 0, \dots, 0]$$

La première idée pour trouver la solution optimale, lorsque  $f$  est suffisamment régulière, est d'appliquer les algorithmes proposés au chapitre précédent à la fonction gradient *bigtriangledown*  $f$  comme *la méthode de Newton*. Cependant, cela n'assure pas forcément que la solution numérique approche bien la solution recherchée  $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ , puisqu'un maximum de la fonction  $f$  a également un gradient nul. Pour résoudre ce problème, différentes méthodes d'optimisation sont possibles par exemple : **les Méthodes de descente** (par exemple la méthode du gradient) et **la méthode de relaxation**. Dans les deux ouvrages [10] et [11] une explication détaillée des deux méthodes. Dans le cadre de ce mémoire est **la méthode du gradient**.

#### 2.6.2 Sur l'algorithme du gradient

L'algorithme du gradient<sup>19</sup> est un algorithme d'optimisation (minimisation ou maximisation) destiné aux fonctions différentiables  $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ . Cet algorithme consiste à la recherche d'un optimum par l'amélioration successive. Pour cela, **la première étape** consiste à construire des algorithmes de descente<sup>20</sup> où nous recherchons des directions permettant de rendre les valeurs de la fonction  $f$  de plus en plus petite à chaque itération. La méthode de descente pour la recherche de  $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$  solution du problème d'optimisation consiste à construire deux suites  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$  et  $(w_k)_{k \in \mathbb{N}}$  telles que  $w_k$  soit une direction de descente stricte en  $x_k$  vérifiant  $x_{k+1} = x_k + \rho_k w_k$ , avec  $\rho_k > 0$  bien choisi (dite le pas de l'algorithme).

En général Si  $\nabla f(x_k) \neq 0$ , alors le vecteur  $w_k = -\nabla f(x_k)$  est une direction de descente stricte en  $x_k$ . Alors, dans le cas de maximisation, on a  $w_k = \nabla f(x_k)$ , et dans le cas de minimisation, on a  $w_k = -\nabla f(x_k)$ . **La deuxième étape** est de choisir le pas de l'algorithme  $\rho_k$  que ça soit fixe ou variable. Il y a plusieurs variété de l'algorithme du gradient (à pas fixe, à pas optimal et la méthode du gradient conjugué) dans ce mémoire, on va utiliser l'algorithme du gradient à pas fixé et on présente ci-dessous cet algorithme :

Cette méthode ne converge pas systématiquement, notamment parce que  $\nabla f$  peut s'annuler ailleurs qu'en un extremum. Cependant, sous des hypothèses sur la fonction  $f$  et sur le pas  $\rho > 0$ , démontrons un résultat de convergence vers le minimum global (voir [11]).

Dans la figure 2.3 on donne une illustration de ce algorithme dans  $\mathbb{R}^2$ .

---

19. Pour plus d'information consulter les sources [10] et [11]

20. Voir [11] Page 127-130

---

**Algorithm 1** Algorithme du gradient à pas fixe

---

Soit  $\rho > 0$ ,  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  et  $N \in \mathbb{N}$ , respectivement, le pas, le point initial et le nombre d'itération de l'algorithme .

1. **Pour k allant de 1 à N :**
  2.     Calculer  $w_{k-1} = \nabla f(x_{k-1})$
  3.     Calculer  $x_k = x_{k-1} + \rho \times w_{k-1}$
  4. **Fin pour** 5. **Retourner**  $x_N$
- 

## Gradient Descent

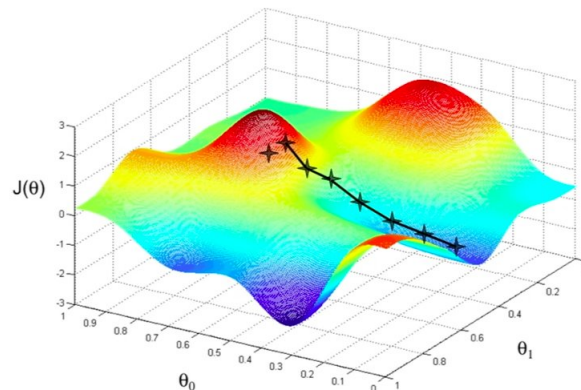


FIGURE 2.3 – Illustration de l'algorithme gradient

### 2.6.3 Application de l'algorithme sur l'indicateur $I_{RR}^\beta$

Dans notre cas la fonction objectif du programme d'optimisation  $f$  est l'indicateur  $I_{RR}^\beta$ , le problème d'optimisation peut se formuler de la manière suivante : Soit  $u \in \mathbb{R}^n$  un portefeuille de  $n$  ligne, et on rappelle que :

$$I_{RR}^\beta : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$$

$$u \rightarrow \frac{E(R(u))}{SCR_{marche}(u)^\beta}$$

Pour tout  $\beta$  on cherche l'allocation  $\bar{u}$  tel que :

$$I_{RR}^\beta(\bar{u}) = \sup_{u \in C} I_{RR}^\beta(u) \text{ ou encore } \bar{u} = \operatorname{argmax}_{u \in C} (I_{RR}^\beta(u))$$

Où  $C = \{x \in \mathbb{R}^n, \}$  Avant l'application de l'algorithme du gradient, il est nécessaire de vérifier que  $I_{RR}^\beta$  soit différentiable, ce qui est facile à montrer car,  $I_{RR}^\beta$  est un produit de deux fonctions différentiables (par hypothèse de différentiabilité). Ensuite, on calcule le gradient de notre fonction à optimiser :

$$\nabla I_{RR}^\beta(u) = \left[ \frac{\partial I_{RR}^\beta(u)}{\partial u_1}, \dots, \frac{\partial I_{RR}^\beta(u)}{\partial u_n} \right]$$

Donc pour chaque  $i$  on calcul  $\frac{\partial I_{RR}^\beta(u)}{\partial u_i}$  :

$$\frac{\partial I_{RR}^\beta(u)}{\partial u_i} = \frac{d \left( \frac{E(R(u))}{SCR_{marche}(u)^\beta} \right)}{du_i} = \frac{d \left( \frac{\sum_{i=1}^n u_i \times r_i}{SCR_{marche}(u)^\beta} \right)}{du_i}$$

Où  $r_i$  est le rendement espéré de la ligne  $i$ .

Donc :

$$\frac{dE(R(u))}{du_i} = r_i$$

**Remarque :**

En général, le rendement espéré d'un portefeuille composé de  $n$  actifs est donné par  $E(R(u)) = \frac{1}{VM} \sum_{i=1}^n r_i u_i$ , où  $VM$  est la valeur totale du portefeuille, pour une raison de simplification, on ne prend pas le terme  $VM$  dans le calcul.

On applique le principe d'allocation d'Euler afin de calculer les contribution  $C_i$  de chaque ligne comme détaillé dans les parties 2.5.4 et 2.5.5, par l'expression 2.4 on a :

$$\frac{dSCR_{marche}(u)}{du_i} = C_i \text{ par la suite } \frac{d(SCR_{marche}(u)^\beta)}{du_i} = \beta \times C_i \times SCR_{marche}(u)^{\beta-1}$$

Alors :

$$\frac{\partial I_{RR}^\beta(u)}{\partial u_i} = \frac{r_i \times SCR_{marche}(u) - \beta C_i \times E(R(u))}{SCR_{marche}(u)^{\beta+1}} = \left( \frac{r_i}{E(R(u))} - \beta \frac{C_i}{SCR_{marche}(u)} \right) \times I_{RR}^\beta(u)$$

D'où en déduit l'expression du gradient  $\nabla I_{RR}^\beta(u)$ .

Le gradient obtenu peut facilement être **interprété** par : pour qu'une l'algorithme encourage l'investissement dans un actif  $i$  il faudra que son rendement relatif soit au moins  $\beta$  fois plus élevé que sa contribution relative au risque. L'algorithme devient alors beaucoup plus prudent lorsque  $\beta$  augmente.

---

**Algorithm 2** Algorithme du gradient à pas fixe sur la fonction  $I_{RR}^\beta$

---

Soit  $\rho > 0$ ,  $u_0 \in \mathbb{R}^n$  et  $N \in \mathbb{N}$ , respectivement, le pas, l'allocation initiale et le nombre d'itération de l'algorithme .

1. **Pour k allant de 1 à N :**
  2.     Calculer  $w_{k-1} = \nabla I_{RR}^\beta(u_{k-1})$
  3.     Calculer  $u_k = u_{k-1} + \rho \times w_{k-1}$
  4. **Fin pour**
  5. **Retourner**  $u_N$
- 

## 2.6.4 Limites de l'optimisation sans contraintes

Malgré sa simplicité de mise en place, la méthode du gradient présente quelques limites. En effet, l'application de cet algorithme tel quel et n'est pas assez contraignante menée à des allocations incohérentes en pratique :

- **Allocations négatives** : Il est possible d'observer des allocations négatives à l'issue de l'algorithme. En effet, il n'existe aucune contrainte sur le gradient  $\nabla I_{RR}^\beta(u)$  pour une ligne  $i$  donnée. Ainsi, si  $\frac{\partial I_{RR}^\beta(u)}{\partial u_i} < -u_i$  le titre sera vendu en excès et on trouvera une allocation négative sur le titre.
  
- Pour **remédier à ce problème**, une borne inférieure a été mise en place sur le gradient. Ainsi, si l'algorithme mène à une telle allocation, l'allocation de la ligne est fixée à 0, et ce, jusqu'à la fin de l'algorithme.
  
- **Allocations excessives** : certains actifs pouvaient avoir des allocations massives ce qui incohérent avec le principe de diversification et la liquidité relative du marché.
  
- **Pas de diversification** : La notion de diversification n'étant pas présente dans le calcul de  $SCR_{marche}$ , l'algorithme se concentre sur la seule comparaison entre rendement unitaire et risque unitaire de chaque actif. De ce fait, un titre est privilégié au détriment des autres, modifiant complètement le portefeuille.
  
- **La non inclusion des contraintes d'investissement** : Les contraintes d'investissement reflète le plus la réalité du problème dans cette mémoire. On va détailler, dans la suite, un algorithme qui prend en considération ces contraintes (*algorithme d'Uzawa*).

### 2.6.5 Remédier à ces limites

Le but étant d'optimiser le ratio rendement-risque d'un portefeuille **sans en changer totalement la composition**, pour cela, on ajoute **un terme de pénalisation**  $\lambda$  des écarts par rapport à l'allocation initiale  $u_0$ . Plus  $\lambda$  sera élevé, plus l'algorithme sera prudent et n'éloignera pas l'allocation de l'allocation initiale  $u_0$ . Donc, la fonction objective de notre algorithme devient :

$$I_{RR}^{\beta,\lambda} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$$

$$u \rightarrow \frac{E(R(u))}{SCR_{marche}(u)^\beta} - \lambda \times \|u - u_0\|_2$$

Où :  $\lambda$  est l'intensité de pénalisation définie par l'utilisateur,  $u_0$  l'allocation initiale et  $\|\cdot\|_2$  la norme euclidienne.

#### Remarques :

1. Ces changements entraînent une deuxième itération de l'algorithme qui est plus complexe et produit des résultats à la fois intéressants et simples à comprendre.
2. Pour le pas constant  $\rho$  de l'algorithme : si des lignes ne respectent pas les contraintes (allocations négatives ou sur allocation), on réduit le pas de l'algorithme de telle sorte à ce qu'aucune contrainte ne soit brisée.

On détaille ci-dessus le fonctionnement de l'algorithme du gradient sous les nouvelles contrainte.

Le calcul de cette partie est détaillé dans l'annexe.

**Algorithm 3** Algorithme du gradient à pas fixe sur la fonction  $I_{RR}^{\beta,\lambda}$

Soit  $\rho > 0$ ,  $u_0 \in \mathbb{R}^n$  et  $N \in \mathbb{N}$ , respectivement, le pas qui respecte le plus les contraintes, l'allocation initiale et le nombre d'itération de l'algorithme .

1. **Pour k allant de 1 à N :**
  2.     Calculer  $\nabla I_{RR}^{\beta}(u_{k-1})$
  3.     Calculer  $u_k = \frac{u_{k-1} + \rho \times (\nabla I_{RR}^{\beta}(u_{k-1}) + 2\lambda u_0)}{1 + 2\rho \times \lambda}$
  4. **Fin pour**
  5. Éliminer des  $u_i$  dont les valeurs de marché touchent les contraintes
  6. **Retourner**  $u_N$
- 

### Remarque sur la condition de convexité :

La convexité n'est pas une condition nécessaire pour l'application de l'algorithme du gradient. L'algorithme du gradient est une méthode d'optimisation qui peut être appliquée à la fois aux problèmes convexes et non convexes.

Cependant, dans le cas des problèmes convexes, l'algorithme du gradient est particulièrement efficace et garantit souvent la convergence vers un minimum global. En revanche, dans le cas des problèmes non convexes, l'algorithme du gradient peut converger vers un minimum local, ce qui peut ne pas être le meilleur résultat global.

**N.B :** Il est important de noter qu'il existe des variantes de l'algorithme du gradient, comme la méthode du gradient stochastique ou la méthode du gradient projeté, qui peuvent être utilisées pour traiter des problèmes non convexes ou des problèmes avec des contraintes. Cependant, la convergence et l'efficacité de ces variantes peuvent varier en fonction de la nature spécifique du problème.

## 2.7 L'optimisation avec contraintes d'investissement

### 2.7.1 L'introduction des contraintes d'investissements

Les contraintes d'investissement sont usuellement utilisées dans la pratique des modèles mono-périodiques comme *le modèle de Markowitz* pour l'allocation d'actifs. Afin d'analyser l'impact de l'introduction de ces contraintes d'investissements dans ce modèle, Jagannathan et Ma (2003) ont adopté une démarche permet de se ramener au problème d'optimisation sans limites par l'introduction d'une nouvelle matrice de variance-covariance.

Les contraintes d'investissement, se confirment avec la réalité et permettent de réduire les effets des erreurs d'estimation des paramètres sur le portefeuille optimal en introduisant une **diversification supplémentaire**. En effet, en imposant des contraintes sur les poids des classes d'actifs, l'investisseur diminue le risque d'obtenir un portefeuille optimal fortement concentré

dans lequel il ne peut pas avoir parfaitement confiance du fait du risque d'erreurs d'estimation des paramètres. De plus, l'investisseur peut introduire des contraintes spécifique comme l'interdiction des ventes à découvert ou la limitation du poids des actifs peu liquides comme les actifs immobiliers.

Dans cette partie, on va met le point sur l'un des algorithmes d'optimisation sans contraintes le plus utilisé dans la littérature qui est l'algorithme d'Uzawa, et cela à cause de sa simplicité et facilité pour la mise en œuvre.

### 2.7.2 Le problème d'optimisation avec contraintes

On cherche à résoudre numériquement le problème :

$$\inf_{u \in C} f(u) \tag{2.5}$$

Avec  $f$  est  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  différentiable et  $C = \{u \in \mathbb{R}^n \mid h(u) = 0 \text{ et } g(u) \leq 0\}$  l'ensemble des contraintes d'égalité et des inégalité, où  $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$  et  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^q$ .  $p$  et  $q$  désignent le nombre des contraintes, respectivement, d'égalités et d'inégalités.

**NB :** La technique proposée ici provient de la partie de l'optimisation appelée *théorie de la dualité convexe*.

L'idée générale est de considérer le Lagrangien  $\mathcal{L}$  défini sur  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$  par :

$$\mathcal{L}(u, \lambda, \mu) = f(u) + h(u) \times \lambda^t + g(u) \times \mu^t$$

Ce choix est motivé par plusieurs raisons :

- La fonction Lagrangienne englobe à la fois la fonction  $f$  et les contraintes  $h$  et  $g$ .
- une condition nécessaire du premier ordre pour que  $u^*$  soit un minimum de  $f$  avec contraintes est que  $u^*$  (associé aux multiplicateurs de Lagrange) soit un point critique de  $\mathcal{L}$ .

On cherche un point qui vérifie certaines conditions ditent *les conditions de Kuhn-Tucker*, et cela on supposant de plus que  $f$ ,  $h$  et  $g$  sont différentiables :

1. Pour  $(\lambda^*, \mu^*)$  fixés dans  $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q_+$ , on résout le problème de minimisation sans contrainte dans  $\mathbb{R}^n$  :

$$\inf_{u \in \mathbb{R}^n} \mathcal{L}(u, \lambda^*, \mu^*)$$

2. Pour  $u^*$  fixé dans  $\mathbb{R}^n$ , on résout le problème de maximisation sur  $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q_+$  (c'est-à-dire avec des contraintes de bornes simples) :

$$\sup_{(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q_+} \mathcal{L}(u^*, \lambda, \mu)$$

Pour répondre à ces conditions il existe plusieurs algorithmes d'optimisation utilisés par exemple l'algorithme du *gradient à pas fixe avec projection* et l'algorithme d'*Uzawa*. Vu la complexité de l'algorithme du *gradient à pas fixe avec projection* (Voir [11]) on va utiliser la méthode d'*Uzawa* qui utilise la formulation duale du problème.

### 2.7.3 La Méthode d'Uzawa

Le point clé de cette méthode est le théorème de **la projection pour des espaces de Hilbert**.

---

**Algorithm 4** Algorithme d'Uzawa sur la fonction  $I_{RR}^\beta$

---

Soit  $\rho > 0$ ,  $\lambda^{(0)} \in \mathbb{R}^p$ ,  $\mu^{(0)} \in \mathbb{R}^q$ , les multiplicateurs de Lagrange initiaux.

1. Iteration. Tant que le critère d'arrêt n'est pas satisfait :
2. Calculer, par une méthode numérique,  $u_k \in \mathbb{R}^n$  la solution de :

$$\inf_{u \in \mathbb{R}^n} \mathcal{L}(u, \lambda^{(k)}, \mu^{(k)})$$

3. Calculer  $\lambda^{(k+1)}$  et  $\mu^{(k+1)}$  tel que :

$$\lambda^{(k+1)} = \lambda^{(k)} + \rho \times h(u_k) \quad \mu^{(k+1)} = p_{\mathbb{R}_+^q} \left( \mu^{(k)} + \rho \times g(u_k) \right)$$

4. **Fin**

5. **Retourner**  $u_N$

---

$p_{\mathbb{R}_+^q}(\mu^k + \rho \times g(u^k))$  désigne la projection de  $\mu^{(k)} + \rho \times g(u_k)$  sur  $\mathbb{R}_+^q$  qui s'écrit simplement pour tout  $j = 1, 2, \dots, q$  :

$$p_{\mathbb{R}_+^q} \left( \mu^{(k)} + \rho \times g(u_k) \right)_j = \max \left( 0, \mu_j^{(k)} + \rho \times g_j(u_k) \right)$$

Dans cet algorithme, nous remplaçons le problème de minimisation initial sous contraintes par un problème de minimisation du Lagrangien  $\mathcal{L}$  sans contrainte, qui est donc plus facile à résoudre avec une méthode du gradient ou du BFGS.

### 2.7.4 La méthode de Lagrangien augmenté

Selon les même notation de la partie 2.7.2, Le lagrangien augmenté de Powell-Hestenes-Rockafellar (PHR) [31], [32], [33] est donné par :

$$L_\rho(u, \lambda, \mu) = f(u) + \frac{\rho}{2} \left( \sum_{i=1}^p \left( h_i(u) + \frac{\lambda_i}{\rho} \right)^2 + \sum_{j=1}^q \max \left( 0, g_j(u) + \frac{\mu_j}{\rho} \right)^2 \right)$$

Avec  $u \in \mathbb{R}^n$  et  $h(u) = (h_1(u), \dots, h_p(u))$ ,  $g(u) = (g_1(u), \dots, g_q(u))$ ,  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_p)$  et  $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_q)$ . Pour introduire la contrainte des bornes on note  $\Omega$  l'ensemble  $\Omega = \{u \in \mathbb{R}^n | lb \leq u \leq ub\}$ , donc on restreint le problème sur l'ensemble  $\Omega$ .

Les méthodes de Lagrangien augmentées basées sur PHR pour résoudre 2.5 sont basées sur la minimisation itérative (approximative) de  $L_\rho$  par rapport à  $x \in \Omega$ , suivie de la mise à jour du paramètre de pénalité  $\rho$  et des approximations des multiplicateurs de Lagrange  $\lambda$  et  $\mu$ . Dans [36] et [37], des méthodes de Lagrangien augmenté sauvegardées ont été définies et qui convergent vers les points KKT<sup>21</sup> sous la qualification de contrainte CPLD et présentent de bonnes propriétés en termes de limitation des paramètres de pénalité. Algencan, qui est accessible au public sur la page Web du projet Tango <http://www.ime.usp.br/egbirgin/tango/>, est l'application de l'algorithme principal de [36] au problème 2.5.

### Algorithm (Algencan)

---

#### Algorithm 5 Algorithm (Algencan)

Let  $\lambda_{min} < \lambda_{max}$ ,  $\lambda_{max} > 0, \gamma > 1, 0 < \tau < 1$ . Soit  $\{\epsilon_k\}$  une suite de nombres positifs telle que  $\lim_{k \rightarrow \infty} \epsilon_k = 0$ . Soit  $\lambda^1 = (\lambda_1^1, \dots, \lambda_p^1)$  tel que  $\lambda_i^1 \in [\lambda_{min}, \lambda_{max}]$ ,  $i = 1, \dots, p$ ,  $\mu^1 = (\mu_1^1, \dots, \mu_q^1)$  tel que  $\mu_i^1 \in [\mu_{min}, \mu_{max}]$   $i = 1, \dots, q$ , and  $\rho > 0$ . Soit un point initial  $u^0 \in \Omega$  et  $N \in \mathbb{N}^*$ .

1. **Pour**  $k$  **Allant de 1 jusqu'à**  $N$ .

2. Calculer par une méthode numérique, le minimum  $u^k$  de la fonction  $L_{\rho_k}(u, \lambda_k, \mu_k)$ .  $u^k$  doit vérifier :

$$\|P_\Omega(u^k - \nabla L_{\rho_k}(u, \lambda_k, \mu_k)) - u^k\| \leq \epsilon_k$$

3. Calculer  $V_i^k = \max\left(g_i(u^k), -\frac{\mu_i^k}{\rho_k}\right)$   $i = 1, \dots, q$  :

4. Si  $k = 1$  ou  $\max\{\|h(u^k)\|, \|V^k\|\} \leq \max\{\|h(u^{k-1})\|, \|V^{k-1}\|\}$  :

5. définit  $\rho_{k+1} = \rho_k$ .

6. Sinon :  $\rho_{k+1} = \gamma\rho_k$ .

7. Calculer  $\lambda_i^{k+1} \in [\lambda_{min}, \lambda_{max}]$ ,  $i = 1, \dots, p$  and  $\mu_i^{k+1} \in [0, \mu_{max}]$ ,  $i = 1, \dots, q$ .

4. **Fin pour**

5. **Retourner**  $u^N$

---

### Remarkes

—  $P_\Omega(u^k - \nabla L_{\rho_k}(u, \lambda_k, \mu_k))$  désigne la projection de  $u^k - \nabla L_{\rho_k}(u, \lambda_k, \mu_k)$  sur  $\Omega$ .

— En pratique, on utilise les estimations sauvegardées du premier ordre des multiplicateurs de Lagrange :

$$\lambda_i^{k+1} = \min\{\max\{\lambda_{min}; \lambda_i^k + \rho_k h_i(u^k)\}; \lambda_{max}\} \text{ et } \mu_i^{k+1} = \min\{\max\{0; \mu_i^k + \rho_k h_i(u^k)\}; \mu_{max}\}$$

— Dans le logiciel **R** l'implémentation de cet algorithme est faite à l'aide de la fonction `nloptr()` du package `nloptr`<sup>22</sup>. L'application de cette algorithme nécessite de définir

21. Les points qui vérifiés les conditions de Karush-Kuhn-Tucker (KKT)

22. Voir <https://cran.r-project.org/web/packages/nloptr/nloptr.pdf>

une algorithmes d'optimisation local, ainsi que le gradient de la fonction objective et les contraintes qu'on a déjà défini dans la partie 2.6.3.

- Le package `nloptr` offre plusieurs algorithmes d'optimisation<sup>23</sup>.
- Il y a aussi la fonction `solnp()` du package `Rsolnp`<sup>24</sup> qu'on va utiliser pour appliquer cette méthode.

Dans le papier [37] une preuve de la convergence de cet algorithme.

Les méthodes d'optimisation qui utilisent le Lagrangien augmenté classique de Powell-Hestenes-Rockafellar (PHR) sont des approches utiles pour résoudre les problèmes de programmation non linéaire. Leur réputation a diminué au cours des dix dernières années en raison du succès relatif des **algorithmes Newtoniens du point intérieur**, qui sont asymptotiquement plus rapides. Dans le papier [39] page 10, une combinaison des deux approches est évaluée. L'idée est de produire une méthode compétitive, plus robuste et plus efficace que ses homologues « pures » pour les problèmes critiques. De plus, un algorithme hybride supplémentaire est défini, dans lequel la méthode du point intérieur est remplacée par la résolution Newtonienne d'un système KKT identifié par l'algorithme Lagrangien augmenté.

### 2.7.5 Critique des algorithmes déterministes

Les méthodes déterministes tel que la méthode du Lagrangien augmenté, la méthode d'Uzawa, la méthode du gradient réduit et la méthode de projection du gradient, sont applicables soit aux problèmes ayant uniquement des régions réalisables convexes et des fonctions différentiables, soit aux problèmes ayant un petit nombre de variables, en raison de la charge de calcul accrue avec un grand nombre de variables. Et ils ont besoin de la détermination du gradient de Lagrangien. De plus les algorithmes déterministes ont l'inconvénient de trouver la convergence au point optimal, la difficulté de s'échapper au problème d'optimum local, la sensibilité aux points et conditions initiales, difficulté avec les espaces de recherche complexes et temps de calcul élevés.

Pour toutes ces limites on propose dans la section suivante l'approche par **des algorithmes stochastiques** ou par **des algorithmes métaheuristiques** plus particulièrement les **algorithmes évolutionnaires** (Evolutionary Algorithms).

## 2.8 Les algorithmes d'optimisation évolutionnaires

Les techniques de calcul évolutionnaire ont suscité beaucoup d'attention en tant que techniques d'optimisation pour les fonctions numériques complexes. Cependant, elles ont eu des résultats limités dans le domaine de la programmation non linéaire en raison d'une approche insuffisante des contraintes. Récemment, plusieurs méthodes ont été proposées pour traiter les

---

23. Voir [https://nlopt.readthedocs.io/en/latest/NLopt\\_Algorithms/](https://nlopt.readthedocs.io/en/latest/NLopt_Algorithms/)

24. Voir <https://cran.r-project.org/web/packages/Rsolnp/Rsolnp.pdf>

contraintes non linéaires dans les problèmes d'optimisation numérique en utilisant des algorithmes évolutionnaires.

Les métaheuristiques peuvent être classées en deux catégories : celles inspirées par des phénomènes naturels et celles qui ne le sont pas. Les algorithmes génétiques et les algorithmes des fourmis s'inspirent respectivement de la théorie de l'évolution et du comportement des fourmis à la recherche de nourriture. Il existe également des métaheuristiques plus récentes, comme la méthode Tabou, qui ne se classent pas facilement dans ces catégories.

Les métaheuristiques peuvent différer selon leur approche de travail avec les solutions. Certaines travaillent avec une population de solutions, tandis que d'autres manipulent une seule solution à la fois. Les méthodes de recherche locale, comme la méthode Tabou, le recuit simulé et la recherche à voisinages variables, améliorent itérativement une solution en se rapprochant de solutions optimales. En revanche, l'algorithme génétique travaille avec une population de solutions, générant de nouvelles solutions en modifiant et combinant les solutions existantes, et sélectionnant les individus les mieux adaptés pour former la génération suivante.

Les métaheuristiques peuvent également différer dans leur utilisation de la fonction objectif. Certaines travaillent directement avec la fonction objectif, tandis que d'autres utilisent une fonction dérivée de celle-ci, modifiant ainsi la topologie de l'espace des solutions.

De plus, certaines métaheuristiques utilisent l'historique de la recherche, tandis que d'autres n'ont pas de mémoire du passé. Les algorithmes sans mémoire sont considérés comme des processus markoviens, où l'action à entreprendre est entièrement déterminée par la situation actuelle. L'utilisation de l'historique de la recherche peut se faire à court terme ou à long terme.

Les algorithmes évolutionnaires sont particulièrement efficaces pour explorer des espaces de recherche complexes et vastes. Ils utilisent des opérateurs génétiques pour explorer différentes régions de l'espace des solutions. Ces algorithmes sont adaptés à la recherche globale, contrairement aux algorithmes déterministes qui peuvent converger vers des optima locaux. C'est pourquoi l'introduction de ces algorithmes est motivée dans ce mémoire.

## **2.8.1 Traitement des contraintes par les algorithmes génétiques**

### **2.8.1.1 L'algorithme génétique**

La méthode évolutive la plus connue est inspirée de la théorie de l'évolution et des processus biologiques qui permettent à des organismes de s'adapter à leur environnement. Il s'agit de l'algorithme génétique qui a été proposé dans le milieu des années 60 (Holland, 1962 ; Rechenberg, 1965 ; Fogel et al, 1966). On donne ci-dessous une simplification des étapes de l'algorithme.

Les applications en finance se sont fortement développées ces dernières années (voir Pereira (2000) pour un tour d'horizon récent) et commencent à intégrer les livres de finance (Bauer (1994), Ruggiero (1997)). La raison d'un tel développement, comme le souligne Pereira (2000), est évidente :

*"Genetic algorithms are a valid approach to many practical problems in finance which can be complex and thus require the use of an efficient and robust optimisation technique. Some applications of genetic algorithms to complex problems in financial markets include : forecasting returns, portfolio optimisation, trading rule discovery, and optimisation of trading rules."*

Selon Lerman et Ngouenet (1995) un algorithme génétique est défini par :

- **Individu (chromosome ou séquence)** : une solution potentielle du problème, dans notre cas il s'agit du vecteur  $u$ .
- **Population** : un ensemble de points de l'espace de recherche.
- **Environnement** : l'espace de recherche, dans notre cas  $\mathbb{R}^n$ .
- **Fonction de fitness** : la fonction que nous cherchons à maximiser, dans notre cas  $I_{RR}^\beta$ .

On peut résumer les étapes de l'algorithme par le schéma 2.4 :

1. On commence avec une population initiale d'individus, généralement générée de manière aléatoire.
2. Chaque individu est évalué pour obtenir une valeur de fitness, qui est généralement déterminée par la fonction objectif que vous essayez d'optimiser.
3. Une sélection d'individus est faite à partir de la population, généralement en fonction de leur fitness (les individus avec une meilleure fitness ont une plus grande chance d'être sélectionnés).
4. Un croisement (ou recombinaison) est effectué sur les individus sélectionnés pour créer une nouvelle génération d'individus. Cela est généralement fait en mélangeant les "gènes" de deux individus pour créer un nouvel individu.
5. Une mutation est appliquée à la nouvelle génération d'individus, généralement en modifiant aléatoirement certains de leurs gènes.
6. Les nouveaux individus sont évalués pour leur fitness.
7. Les individus de la nouvelle génération remplacent certains ou tous les individus de l'ancienne génération dans la population. Si les critères de terminaison sont atteints (par exemple, un certain nombre de générations a été atteint, ou une solution suffisamment bonne a été trouvée), l'algorithme se termine. Sinon, on retourne à l'étape 3 avec la nouvelle population.

**Algorithm 6** Algorithme Génétique

Générer, aléatoirement, une population initiale  $P^0$  de  $p \geq 2$  individus et poser  $i \leftarrow 0$ .

1. **Tant que** le critère d'arrêt n'est satisfait **faire**
2.     Poser  $i \leftarrow i + 1$  et  $P_i \leftarrow \emptyset$ ;
3.     Répéter  $p$  fois les 2 lignes suivantes :
4.         Créer un enfant  $E$  en croisant 2 individus  $I_1$  et  $I_2$  de  $P_{i-1}$ .
5.         Appliquer un opérateur de mutation à  $E$  et rajouter l'enfant ainsi modifié à  $P_i$ .
6. **Fin tant que**
7. **retourner**  $u^N$  dans la dernière population avec valeur de  $f$  la plus élevée.

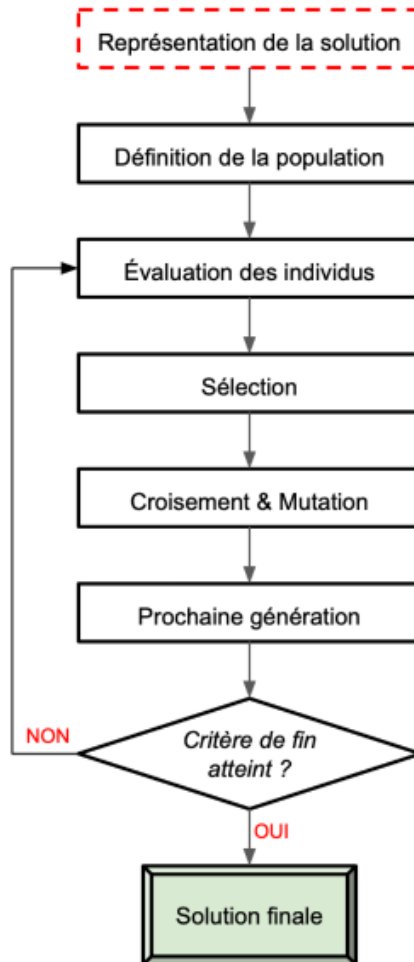


FIGURE 2.4 – Schéma simplifié du fonctionnement de l'algorithme génétique, Source : <https://ledatascientist.com/algorithme-genetique/>

Les opérateurs utilisés pour faire le **croisement** et la **mutation** sont détaillé dans la partie suivante.

### 2.8.1.2 Optimisation numérique et opérateurs

La plupart des algorithmes évolutionnaires utilisent des vecteurs de nombres réels pour représenter leurs chromosomes. Pour de telles représentations, de nombreux opérateurs ont été proposés au cours des 30 dernières années. Plusieurs méthodes de gestion des contraintes sont discutées dans la section suivante; certaines de ces méthodes (par exemple, Genocop) néces-

sitent un ensemble d'opérateurs spécifiques. Pour cette raison, nous discutons brièvement de ces opérateurs à tour de rôle.

### Opérateurs de mutation

La mutation est un processus où une solution est légèrement modifiée pour créer une nouvelle solution. Le rôle de cet opérateur est de modifier aléatoirement, avec une certaine probabilité, la valeur d'un composant de l'individu (dans la figure 2.5 un exemple de mutation). L'opérateur de mutation le plus populaire est **la mutation gaussienne**, qui modifie tous les composants du vecteur de solution  $u = (u_1, \dots, u_n)$  en ajoutant un bruit aléatoire :

$$u^{t+1} = u^t + \mathcal{N}_n(0, \Sigma)$$

Où  $u^{t+1}$  la valeur mutée et  $u^t$  la valeur réelle  $\mathcal{N}_p(0, \Sigma)$  est un vecteur aléatoire normal en dimension  $n$  avec un moyen 0 et une matrice de variance-covariance  $\Sigma$ . Généralement on prend  $\Sigma = \sigma I_n$ , où  $I_n$  la matrice d'identité d'ordre  $n$ . Une telle mutation est utilisée dans les stratégies d'évolution (*Back et al*, 1991) et la programmation évolutive (*Fogel*, 1995). L'une des différences historiques entre ces techniques réside dans l'ajustement du matrice  $\Sigma$ .

D'autres types de mutations comprennent **la mutation non uniforme**<sup>25</sup>, où pour  $i = 1, \dots, n$  :

$$u_i^{t+1} = \begin{cases} u_i^t + \Delta(t, r(i) - u_i) & \text{si un chiffre binaire aléatoire est 0} \\ u_i^t - \Delta(t, u_i - l(i)) & \text{si un chiffre binaire aléatoire est 1} \end{cases}$$

Les variables  $r(i)$  et  $l(i)$  sont les bornes, respectivement, supérieure et inférieure qu'on choisit pour le vecteur  $u$  et cela pour chaque  $u_i$ . La fonction  $\Delta(t; y)$  renvoie une valeur dans l'intervalle  $[0, y]$  tel que la probabilité que  $\Delta(t, y)$  soit proche de 0 augmente lorsque  $t$  augmente ( $t$  est le numéro de génération). Cette propriété amène cet opérateur à parcourir l'espace de manière uniforme initialement (lorsque  $t$  est petit), et très localement aux étapes ultérieures. Dans les expériences rapportées par *Michalewicz et al.* (1994), la fonction suivante a été utilisée :

$$\Delta(t, y) = y.r. \left(1 - \frac{t}{T}\right)^b$$

où  $r$  est un nombre aléatoire dans  $[0, 1]$ .  $T$  est le nombre maximal de générations et  $b$  est un paramètre système déterminant le degré de non-uniformité.

Il est également possible d'expérimenter une mutation uniforme, qui modifie un seul composant du vecteur solution ; par exemple, si  $u^t = (u_1, \dots, u_k, \dots, u_n)$ , alors  $u_{t+1} = (u_1, \dots, u'_k, \dots, u_n)$ , où  $u'_k$  est une valeur aléatoire (distribution de probabilité uniforme) du domaine de la variable  $u_k$ .

---

25. Voir André Neubauer : Adaptive Non-uniform Mutation for Genetic Algorithms

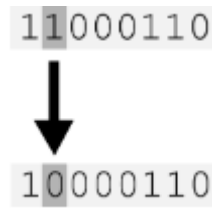


FIGURE 2.5 – Exemple de Mutation

### Opérateurs de croisement

La croisement est un processus où deux solutions sont combinées pour créer une nouvelle solution. L'opérateur de croisement permet la création de nouveaux individus selon un processus fort simple. Il permet donc l'échange d'information entre les individus de la population initiale (parents) pour la création des nouveaux individus ou fils (Voir Exemple 2.6). Il existe plusieurs types intéressants d'opérateurs de croisement. La première famille est directement conçue à partir des opérateurs de croisement de chaînes de bits bien connus (opérateurs de *re-combinaison discrète*) : croisement à 1 point, à 2 points et uniforme, sauf que les *gènes* échangés entre les deux parents sont des coordonnées à valeurs réelles. Par exemple, **le croisement uniforme** fonctionne comme suit : Pour deux parents,  $u = (u_1, \dots, u_n)$  et  $v = (v_1, \dots, v_n)$ , produire un fils,  $w = (w_1, \dots, w_n)$ , où  $w_i = u_i$  ou  $w_i = v_i$  avec une probabilité égale pour tout  $i = 1, \dots, n$ .

Certaines versions multi-parents de ces opérateurs ont également été conçues. *Muhlenbein et Voigt* (1995) ont étudié les propriétés d'un opérateur de re-combinaison appelé **re-combinaison du pool de gènes** (mécanisme de recombinaison par défaut dans les stratégies d'évolution (*Schwefel*, 1981), où les gènes sont choisis au hasard dans le pool de gènes défini par les parents sélectionnés. un croisement multiparent similaire a également été étudié par *Eiben et al.* (1994) dans le contexte de l'optimisation combinatoire.

Une autre possibilité est **le croisement arithmétique**. Ici, deux vecteurs,  $u$  et  $v$  produisent deux fils,  $p$  et  $q$ , qui sont des combinaisons linéaires de leurs parents :

$$p = au + (1 - a)v \text{ et } q = (1 - a)u + av$$

Avec  $a \in [0, 1]$  Cet opérateur a également été appelé **croisement moyen garanti** (*Davis*, 1989) (quand  $a = 0.5$ ), et croisement intermédiaire (*Schwefel*, 1981). Il est possible de généraliser le croisement arithmétique en opérateur multi-parent ; parents  $u^{(1)}, u^{(2)}, \dots, u^{(r)}$  peut produire une famille de fils tel que

$$v = \sum_{i=1}^r a_i u^{(i)}$$

Avec  $a_i \in [0, 1]$  tel que  $a_1 + a_2 + \dots + a_r = 1$ .

Pour plus d'information sur les opérateurs de l'algorithme génétique voir [40], [41], [42] et [43]. Dans R, l'implémentations de cet algorithme est assurée à l'aide de la fonction `ga()` du

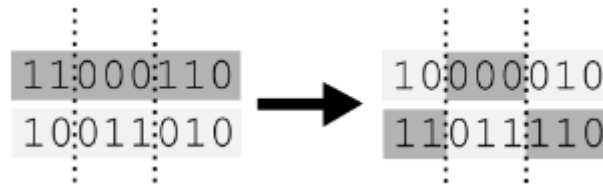


FIGURE 2.6 – Exemple de Croisement

package `GA`<sup>26</sup>.

### 2.8.1.3 Constraint-Handling dans les algorithmes génétiques

Au cours des dernières années, plusieurs méthodes ont été proposées pour traiter les contraintes par des algorithmes génétiques pour des problèmes d'optimisation de paramètres. Il est utile de regrouper ces méthodes en quatre catégories :

1. Des méthodes basées sur la préservation de la faisabilité des solutions.
2. Les méthodes basées sur **les fonctions de pénalité**.
3. Méthodes qui font une distinction claire entre les solutions réalisables et irréalisables.
4. Les méthodes hybrides.

Dans la plupart des applications des GA aux problèmes d'optimisation sous contrainte, on utilise la méthode de **la fonction de pénalité**. Pour gérer les contraintes dans les problèmes de minimisation, on remplace le problème de minimisation de  $f$  sous contraintes par une minimisation d'une fonction  $F$  sans contraintes, cette fonction égale à la somme de la fonction objectif  $f$  et d'un terme de pénalité qui dépend de la violation de la contrainte  $h$  et  $g$  :

$$F(u) = \begin{cases} f(u) & \text{si } u \in \mathcal{C} \\ f(u) + \text{penalty}(u) & \text{si non} \end{cases}$$

On rappelle que  $\mathcal{C}$  est l'ensemble des variables qui vérifient les contraintes d'égalité  $h$  et inégalité  $g$ ,  $\text{penalty}(u)$  vaut zéro, si aucune violation ne se produit, et est positif, sinon. Généralement  $\text{penalty}$  s'écrit comme suit :

$$\text{penalty}(u) = \sum_{j=1}^m R_j f_j^2(u)$$

Où  $m = p + q$  :

$$f_j(u) = \begin{cases} \max\{0, g_j(u)\} & 1 \leq j \leq q \\ |h_j(u)| & q + 1 \leq j \leq m \end{cases}$$

Cependant, ces méthodes diffèrent par de nombreux détails importants, la façon dont la fonction de pénalité est conçue et appliquée aux solutions irréalisables, et plus particulièrement **le terme de pénalité**  $R = (R_1, \dots, R_m)$  :

26. <https://cran.r-project.org/web/packages/GA/GA.pdf>

1. **Méthode de pénalités statiques** (Homaifar, Lai, et Qi 1994) : Pour chaque violation de contrainte  $f_j(u)$  on définit **un paramètre de pénalité constant**  $R_j$ . Donc :

$$F(u) = \begin{cases} f(u) & \text{si } u \in \mathcal{C} \\ f(u) + \sum_{j=1}^m R_j f_j^2(u) & \text{si non} \end{cases}$$

Le but d'un paramètre de pénalité  $R_j$  est de rendre la violation de contrainte  $f_j(u)$  du même ordre de grandeur que la valeur de la fonction objective  $f(u)$ .

Afin de réduire le nombre de paramètres de pénalité, souvent les contraintes sont normalisées et un seul paramètre de pénalité  $R = R_1 = \dots = R_m$ .

L'inclusion du terme de pénalité distord la fonction objective. Pour de petites valeurs de  $R_j$  (ou  $R$ ), la distorsion est faible, mais l'optimum de  $F(x)$  peut ne pas être proche du vrai optimum contraint. D'autre part, si un grand  $R_j$  (ou  $R$ ) est utilisé, l'optimum de  $F(x)$  est plus proche du véritable optimum contraint, mais la distorsion peut être si grave que  $F(x)$  peut avoir des solutions artificielles localement optimales. Cela se produit principalement en raison des interactions entre plusieurs contraintes. Pour éviter ces optimums locaux optimaux, l'approche classique de la fonction de pénalité fonctionne en séquences, où dans chaque séquence les paramètres de pénalité sont augmentés, et la séquence actuelle d'optimisation commence à partir de la solution optimisée trouvée dans la séquence précédente.

Dans la suite on propose quelques méthodes de pénalité dynamiques qui prennent en considération ces séquences.

2. **Méthode des pénalités dynamiques** (Joines et Houck (1994)) : Contrairement à la méthode précédente, les auteurs ont supposé des pénalités dynamiques. Les individus sont évalués (à l'itération  $t$ ) par la formule suivante :

$$penality(u) = (C \times t)^\alpha \sum_{i=1}^m f_i^\beta(u)$$

$C, \alpha$  et  $\beta$  sont des constants, Joines et Houck (1994) ont proposé ces valeurs pour ces paramètres :  $\alpha = \beta = 2$  et  $C = 0.5$ .

La méthode nécessite un nombre beaucoup plus petit (indépendamment du nombre de contraintes) de paramètres que la première méthode. Aussi, au lieu de définir plusieurs niveaux de violation, la pression sur les solutions irréalisables est augmentée du fait de la composante  $(C \times t)^\alpha$  et cela jusqu'à la fin du processus.

3. **Méthode de recuit des pénalités** : Cette méthode, appelée Genocop II, est également basée sur des pénalités dynamiques et a été décrite par Michalewicz et Attia (1994) et Michalewicz (1996). Sa version modifiée fonctionne comme suit :

- (a) Diviser toutes les contraintes en quatre sous-ensembles : égalités linéaires, inégalités linéaires, égalité non linéaires et inégalités non linéaires,
- (b) Sélectionner un point unique aléatoire comme point de départ (la population initiale est constituée de copies de cet individu unique). Ce point initial doit satisfaire Les contraintes linéaires
- (c) Donner la température initiale :  $\tau = \tau_0$ .
- (d) Faire évoluer la population à l'aide de la formule suivante :

$$f(u) + \frac{1}{2\tau} \sum_{j=1}^m f_j^2(u)$$

- (e) Si  $\tau < \tau_f$  : arrêt du processus,  
Sinon : diminuer la température  $\tau$  et la meilleure solution sert de point de départ à l'itération suivante, répéter l'étape (d) et (c).  $\tau_f$  un seuil minimal déjà défini.
4. **Méthodes de pénalités adaptatives** : deux méthodes principales, la première méthode a été développée par Bean et Hadj-Alouane (1992), et Hadj-Alouane et Bean (1992). Comme la méthode précédente, elle utilise une fonction de pénalité, cependant, un composant de la fonction de pénalité prend un retour du processus de recherche. La seconde méthode est proposée par Smith et Tate (1993), la fonction de pénalité adaptative utilisée intègre à la fois la longueur de recherche et la rétroaction sur la sévérité des contraintes<sup>27</sup>

### 2.8.2 Improved Stochastic Ranking Evolution Strategy (ISRES)

L'algorithme Improved Stochastic Ranking Evolution Strategy (ISRES) est une méthode d'optimisation globale qui est généralement utilisée pour résoudre des problèmes d'optimisation non linéaires. Ci-dessous une explication simplifiée des étapes de cette algorithme :

1. **Initialisation** : L'algorithme commence avec une population initiale de solutions potentielles. Ces solutions sont généralement générées de manière aléatoire dans l'espace de recherche du problème.
2. **Évaluation** : Chaque solution est évaluée en fonction de sa performance par rapport à une fonction objectif et une ou plusieurs contraintes.
3. **Classement stochastique (stochastic ranking)** : Les solutions sont classées en fonction de leur performance. Cette étape diffère des autres algorithmes d'évolution stratégique en ce sens qu'elle utilise un classement stochastique au lieu d'un classement déterministe. Cela signifie que le classement n'est pas strictement basé sur la performance, mais comprend également un élément de hasard. Cela aide à maintenir la diversité dans la population et à éviter de se coincer dans des optima locaux.
4. **Sélection, croisement et mutation** : De nouvelles solutions sont générées en sélectionnant, en croisant et en mutant les solutions existantes en fonction de leur classement. La

---

27. Voir [40], [41], [42], [43]

sélection est un processus où les solutions les mieux classées sont choisies pour la prochaine génération.

5. **Itération** : Ces étapes sont répétées jusqu'à ce qu'un certain critère d'arrêt soit atteint, comme un nombre maximum d'itérations, ou une amélioration minimale de la meilleure solution.

ISRES est particulièrement efficace pour traiter des problèmes d'optimisation avec des contraintes complexes et non linéaires. Il est largement utilisé dans divers domaines, comme l'ingénierie, la science des matériaux et l'optimisation de processus.

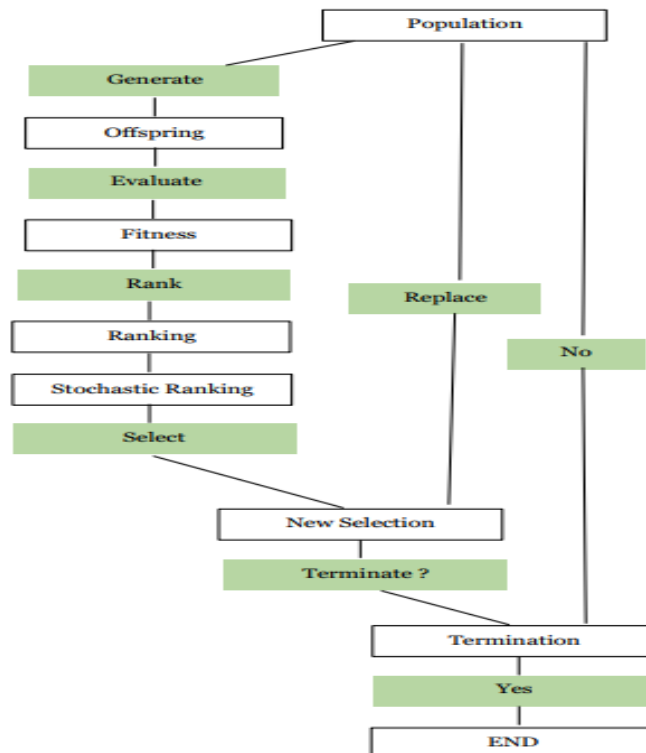


FIGURE 2.7 – Le fonctionnement de l'algorithme ISRES, Source : Moi même

### 2.8.3 Particle swarm optimization algorithm (PSO)

Particle Swarm Optimization est une méthode d'optimisation globale stochastique basée sur la simulation de comportements sociaux. Elle inspiré du comportement des essaims dans la nature, comme les bancs de poissons ou les volées d'oiseaux.

Contrairement aux méthodes précédentes dans PSO, aucun opérateur inspiré de l'évolution naturelle n'est appliqué pour extraire une nouvelle génération de solutions candidates. Au lieu de mutation, PSO repose sur **l'échange d'informations** entre les individus, appelés **particules**, de la population, appelée **essaim**. En effet, chaque particule ajuste sa trajectoire vers sa propre meilleure position précédente, et vers la meilleure position précédente atteinte par n'importe quel membre de son voisinage. Plusieurs variantes de PSO ont été proposées, à la suite d'*Eberhart et Kennedy* qui furent les premiers à introduire cette méthode [46], [47], [48].

Voici une explication simplifiée du fonctionnement de cette algorithmme :

1. **Initialisation** : L'algorithme commence avec un "essaim" de "particules", qui sont essentiellement des solutions potentielles. Chaque particule a une position initiale et une vitesse dans l'espace de recherche du problème.
2. **Évaluation** : Chaque particule est évaluée en fonction de sa performance par rapport à une fonction objective. La meilleure position atteinte par chaque particule est enregistrée comme sa "meilleure position personnelle". De plus, la meilleure position atteinte par l'ensemble de l'essaim est enregistrée comme la "meilleure position globale".
3. **Mise à jour** : Les positions et les vitesses de toutes les particules sont mises à jour à chaque itération. La mise à jour est basée sur la meilleure position personnelle de chaque particule, la meilleure position globale et la position actuelle de chaque particule. Un élément de hasard est également inclus pour ajouter de la diversité et éviter de se coincer dans des optima locaux.
4. **Itération** : Les étapes d'évaluation et de mise à jour sont répétées jusqu'à ce qu'un certain critère d'arrêt soit atteint, comme un nombre maximum d'itérations, ou une amélioration minimale de la meilleure position globale.

On résume ses étapes dans la figure 2.8.

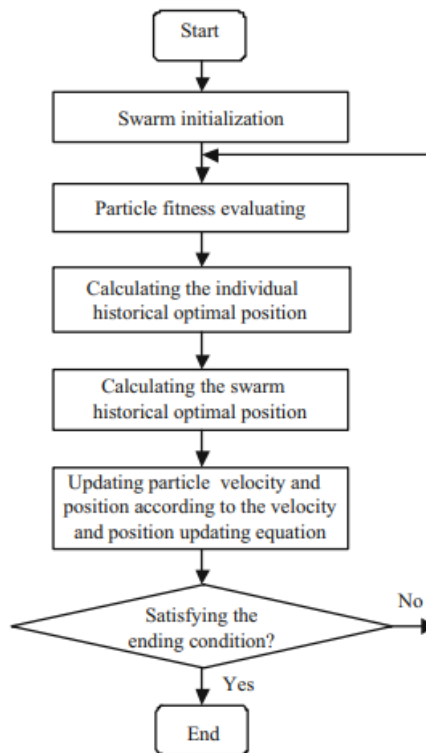


FIGURE 2.8 – Le fonctionnement de l'algorithme PSO. Source : Dongshu Wang · Dapei Tan · Lei Liu : "Particle swarm optimization algorithm : an overview"

## Formulation mathématique du problème

En suppose qu'on a le problème de minimisation :

$$\inf_{x \in \mathbb{R}^d} f(x)$$

Dans un premier temps, définissons la notation adoptée dans cet article : en supposant que l'espace de recherche est  $\mathbb{R}^d$ , la  $i$ -ème particule de l'essaim est représentée par un vecteur  $X_i = (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{id}) \in \mathbb{R}^d$  et la meilleure particule de l'essaim, c'est-à-dire la particule avec la valeur de fonction la plus faible, est désignée par l'indice  $g$ . La meilleure position précédente (c'est-à-dire la position correspondant à la meilleure valeur de la fonction) de la  $i$ -ème particule est enregistrée et représentée par  $P_i = (p_{i1}, p_{i2}, \dots, p_{id})$ , et le changement de position (vitesse) de la  $i$ -ème particule est  $V_i = (v_{i1}, v_{i2}, \dots, v_{id})$ .

Les particules sont manipulées selon les équations suivantes (Voir aussi figure 2.9) :

$$V_i^{k+1} = \chi \left( wV_i^k + c_1 \times r_{i1}^k \left( P_i^k - X_i^k \right) + c_2 \times r_{i2}^k \left( P_g^k - X_i^k \right) \right)$$

$$X_i^{k+1} = X_i^k + V_i^{k+1}$$

Où  $i = 1, 2, \dots, N$ , et  $N$  est la taille de la population ;  $\chi$  est un facteur de constriction utilisé pour contrôler et restreindre les vitesses,  $w$  est le poids d'inertie.  $c_1$  et  $c_2$  sont deux constantes positives, appelées respectivement paramètre cognitif et social ;  $r_{i1}$  et  $r_{i2}$  sont des nombres aléatoires uniformes  $\mathcal{U}(0, 1)$ .

La première équation est utilisée pour déterminer la nouvelle vitesse de la  $i$ -ème particule, à chaque itération, tandis que la deuxième équation fournit la nouvelle position de la  $i$ -ème particule, en ajoutant sa nouvelle vitesse, à sa position actuelle. La performance de chaque particule est mesurée selon une fonction *fitness*, qui dépend du problème. Dans les problèmes d'optimisation, la fonction *fitness* est généralement identique à la fonction objective à l'étude.

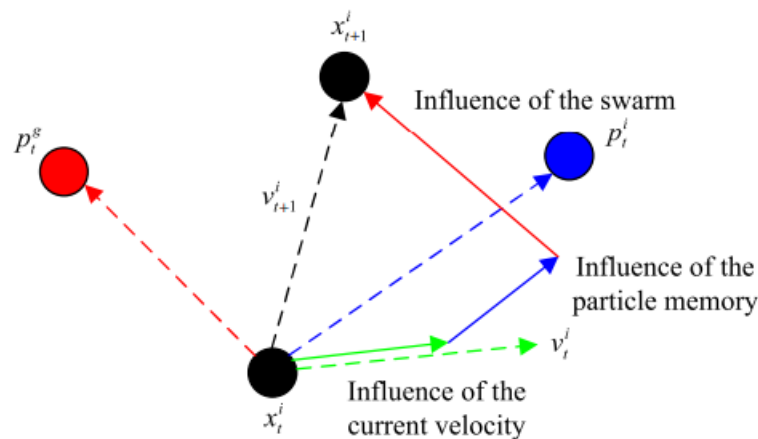


FIGURE 2.9 – Le schéma des itérations de l'algorithme. Source : Dongshu Wang · Dapei Tan · Lei Liu : "Particle swarm optimization algorithm : an overview"

### Remarque

Pour un problème d'optimisation avec contraintes l'algorithme PSO travail avec le principe de la **fonction de pénalité**. Je vous propose de consulter l'article [49] pour plus d'information sur cette méthode d'optimisation.

Sous **R** on applique l'algorithme PSO à l'aide de la fonction `psoptim()` du package `pso`<sup>28</sup>.

---

28. Voir <https://cran.r-project.org/web/packages/pso/pso.pdf>

# Chapitre 3

## L'application des algorithmes d'optimisation

### Contents

---

<b>3.1</b>	<b>Le portefeuille étudié et Hypothèses</b>	<b>67</b>
3.1.1	La composition du portefeuille	67
3.1.2	Les hypothèses	67
<b>3.2</b>	<b>Application de l'algorithme du gradient</b>	<b>72</b>
<b>3.3</b>	<b>L'optimisation sous contraintes d'investissement</b>	<b>77</b>
3.3.1	Les contraintes d'investissement	77
3.3.2	La formulation mathématique du problème	78
<b>3.4</b>	<b>L'application de l'algorithme génétique</b>	<b>79</b>
<b>3.5</b>	<b>L'algorithme ISRES</b>	<b>82</b>
<b>3.6</b>	<b>L'algorithme PSO</b>	<b>82</b>
<b>3.7</b>	<b>L'application de l'algorithme de Lagrangien Augmenté (AUGLAG)</b>	<b>83</b>
<b>3.8</b>	<b>Comparaison et validation des algorithmes d'optimisation</b>	<b>83</b>

---

Dans ce chapitre, nous explorons en profondeur l'application de divers algorithmes d'optimisation dans le contexte de la gestion de portefeuille. Après avoir examiné le portefeuille d'étude et les hypothèses sous-jacentes, nous appliquons plusieurs algorithmes sans contraintes, dont l'algorithme du gradient, et avec contraintes dont l'algorithme génétique, l'ISRES, le PSO, et le Lagrangien Augmenté (AUGLAG). Ces outils sont utilisés pour optimiser la composition du portefeuille sous des contraintes d'investissement spécifiques, mettant en évidence la manière dont les décisions d'investissement peuvent être guidées par des méthodes algorithmiques. Enfin, nous comparons et validons ces algorithmes d'optimisation pour évaluer leur efficacité et leur applicabilité dans le monde réel.

### 3.1 Le portefeuille étudié et Hypothèses

#### 3.1.1 La composition du portefeuille

On étudie un portefeuille simplifié composé de  $n = 112$  actifs répartis selon les actions et les produits taux :

Type d'actif	nombre
Actions Cotées (type 1)	82
Obligations	30

Les obligations sont réparties selon les classes suivantes :

Type d'obligation	nombre
Obligations Étrangères	10
obligations Marocaines	20

Type d'obligation	nombre
Obligations Privées	17
obligations Gouvernementales	13

Les actions<sup>1</sup> présentées sont cotées sur la Bourse de Casablanca et sont disponibles sur le site <https://fr.investing.com>, où vous pouvez trouver toutes les données relatives à ces actions. Sa part par rapport à la richesse initiale (Valeur de marché totale initiale) est égale à 20%, contre 80% pour les obligations. Ces actions sont réparties également selon plusieurs secteurs d'activité (presque 26 secteurs).

#### 3.1.2 Les hypothèses

La valorisation de notre portefeuille est faite à la date 30/12/2022, que l'on peut noter instant 0.

---

1. La SCR dispose de 50 actions dans lesquelles elle investit les 32 nouvellement intégrées, donc elles ont une valeur initiale de 0.

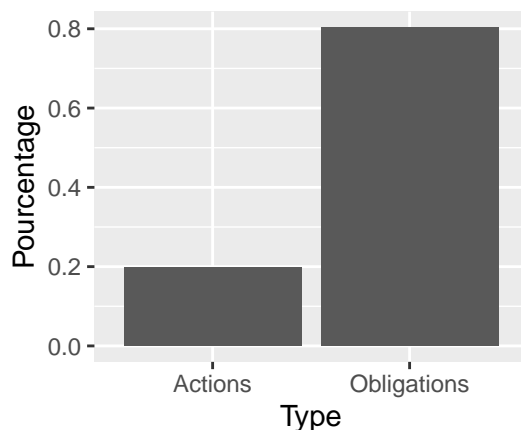


FIGURE 3.1 – Le répartition du richesse selon le type d'actif

### Hypothèse pour les obligations

Pour simplifier l'étude, nous allons appliquer l'interpolation d'Hermite (Hermite spline) sur les données du marché<sup>2</sup> pour la construction de la courbe des taux. Le résultat de cette interpolation est présenté dans la figure 3.2. Nous avons choisi cette méthode en raison de sa simplicité et du fait que les obligations que nous étudions ont des maturités inférieures à 50 ans.

Le rendement d'une obligation est calculé à l'aide du formule :

$$R_{obl} = \frac{VM_1 - VM_0}{VM_0}$$

Où  $VM_0$  est la valeur de l'obligation à l'instant 0 (30/12/2022),  $VM_1$  est la valeur de l'obligation à l'instant 1 (30/12/2023).

— On calcule  $VM_0$  à l'aide du formule :

$$VM_0 = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{CF_i}{(1 + R(0, T_i))^{T_i}} \quad (3.1)$$

$R(0, T_i)$  est le taux d'intérêt composé de maturité  $T_i$  à la date 0, qui est donné par la courbe 3.2.  $CF_i$  est le cash flow à la date  $T_i$ ,  $CF_i = r \times N$ ,  $i = 0, \dots, n-2$ , et  $CF_{n-1} = N \times (1+r)$ , où  $r$  est le taux d'intérêt et  $N$  est la valeur nominale de l'obligation.

— On calcule  $VM_1$  à l'aide du formule :

$$VM_1 = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{CF_i}{(1 + R(1, T_i))^{T_i}} \quad (3.2)$$

$R(1, T_i)$  est le taux d'intérêt composé de maturité  $T_i$  à la date 1 (30/12/2023), qui est obtenu en forwardant la courbe des taux 3.2. On peut obtenir la courbe des taux à l'instant futur 1 en utilisant l'une des dynamiques décrites dans les références [13], [15], [16] et [35]. Par exemple, si l'on choisit les modèles STA, le prix ZC s'écrit de la manière suivante :

$$P(t, T) = A(t, T)e^{-r_t B(T, t)}$$

2. Nous utilisons le taux des bons du Trésor comme taux d'actif sans risque, qui sont publiés sur le site de la BAM (<https://www.bkam.ma/>).

Après avoir estimé les paramètres des fonctions  $A(t, T)$  et  $B(T, t)$ , ainsi que les paramètres de la dynamique de  $r_t$ , nous obtenons une prévision de  $r_1$ . Ensuite, nous calculons le prix ZC pour chaque maturité  $T$ . Cependant, dans le but de simplifier notre étude, nous choisissons d'utiliser la même courbe des taux 3.2 que nous décalons de -0.001 proportionnellement afin d'obtenir les taux  $R(1, T_i)$ .

### Remarque

Le  $T_i$  est la différence en années entre la date de valorisation 0 et la date du versement du cash flow  $CF_i$ .

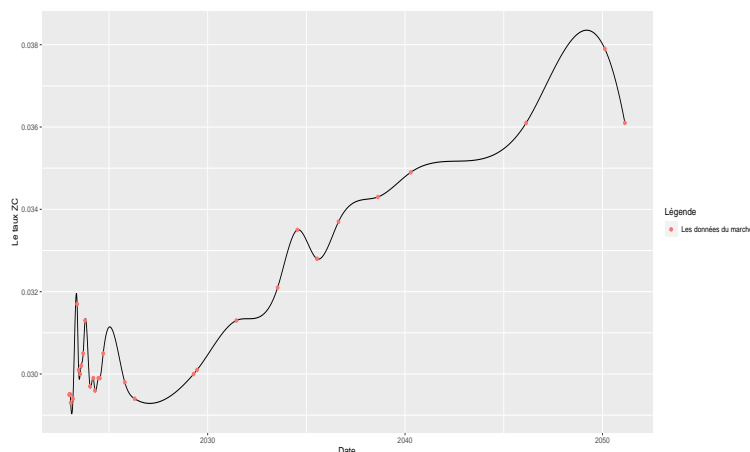


FIGURE 3.2 – La courbe des taux obtenue par interpolation d'Hermite

### Hypothèse pour les actions

Pour déterminer le rendement d'une action, on utilise le modèle du **CAPM**. Pour tester ce modèle, on utilise l'approche de **Black, Jensen et Scholes (1972)** [39], qui consiste en un modèle de régression linéaire avec séries chronologiques. L'expression qui caractérise ce modèle est la suivante :

$$R_{it} - R_{ft} = a_i + \beta_i \times (R_{mt} - R_{ft}) + \epsilon_t \quad (3.3)$$

Où  $R_{it}$ ,  $R_{ft}$  et  $R_{mt}$  représentent respectivement le rendement à l'instant  $t$  d'une action  $i$ , d'un bon du Trésor à un an et du MASI (portefeuille du marché, voir 3.3). Cet indice a généralement un rendement négatif pendant la période 2022, avec une moyenne de -0.0008 et une variance très faible de  $5.588123 \times 10^{-5}$ .  $\beta_i$  et  $a_i$  sont des constantes de régression (si  $a_i = 0$ , alors  $\beta_i$  est le bêta de l'action  $i$ ). Pour l'instant  $t$ , nous choisissons **un pas journalier**.

**Le principal objectif de ce test** est d'estimer les paramètres  $a_j$  et  $\beta_j$ . Pour tester la validité du MEDAF, on teste l'hypothèse nulle selon laquelle la constante  $a_j$  est égale à zéro.

À l'aide de la fonction `lm()`, nous effectuons la régression 3.3. Cette fonction permet également de fournir les résultats du test de Student (la significativité des paramètres) sur les para-

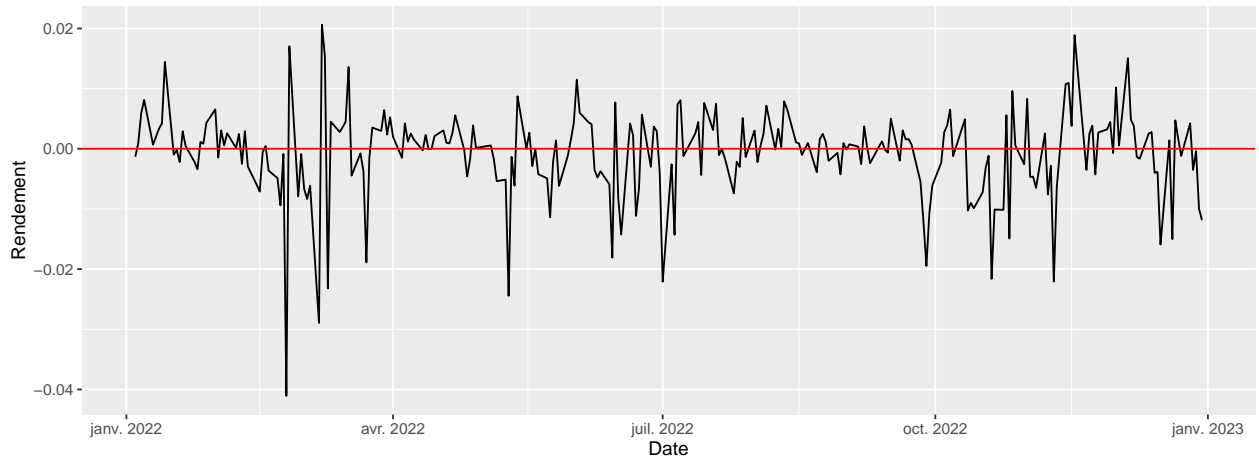


FIGURE 3.3 – Le rendement journalier de l'indice MASI pendant l'année 2022

mètres  $\beta_i$  et  $a_i$ , nous permettant ainsi de tester l'hypothèse nulle selon laquelle la constante  $a_j$  est égale à zéro. Les résultats de l'application de `lm()` sur deux actions sont présentés ci-dessous :

### Actions 1

```
Call:
lm(formula = y ~ x)

Residuals:
    Min       1Q   Median       3Q      Max
-0.057026 -0.008725  0.000526  0.009528  0.062811

Coefficients:
            Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept) -0.003639   0.004551  -0.799   0.425
x             0.897583   0.182312   4.923 1.54e-06 ***
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 0.02163 on 251 degrees of freedom
(1 observation effacée parce que manquante)
Multiple R-squared:  0.08807,    Adjusted R-squared:  0.08443
F-statistic: 24.24 on 1 and 251 DF,  p-value: 1.543e-06
```

### Action 2

```
Call:
lm(formula = y1 ~ x)

Residuals:
    Min       1Q   Median       3Q      Max
-0.063366 -0.007220 -0.000772  0.007041  0.061436
```

```

Coefficients:
              Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept) -0.009209  0.005174  -1.78  0.07629 .
x            0.563635  0.207244   2.72  0.00699 **
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 0.02459 on 251 degrees of freedom
(1 observation effacée parce que manquante)
Multiple R-squared:  0.02862,    Adjusted R-squared:  0.02475
F-statistic: 7.397 on 1 and 251 DF,  p-value: 0.006991
    
```

### Résultat 1

La colonne  $\text{Pr}(>|t|)$  indique que le test t donne une valeur de p inférieure ou égale à 0.05, ce qui nous permet d'accepter  $H_0$  et de conclure que le modèle CAPM est valide pour les 2 actions. L'application de ce modèle sur 82 actions montre que le CAPM est valide pour presque toutes les actions.

### Résultat 2

Voici les bêtas estimés des actions pour l'année 2022 en utilisant la formule  $\beta_i = \frac{\text{Cov}(R_i, R_m)}{\text{Var}(R_m)}$ .

```

beta_mm
  ACT 1    ACT 2    ACT 3    ACT 4    ACT 5
1.65288492 -0.05441457  0.56363461  0.14032578  0.15025041
  ACT 6    ACT 7    ACT 8    ACT 9    ACT 10
0.49135957 -0.26516020 -0.11091583  1.02294962  0.09074102
  ACT 11   ACT 12   ACT 13   ACT 14   ACT 15
0.89758323  0.95534235  0.32500501  0.08695637  0.49326847
  ACT 16   ACT 17   ACT 18   ACT 19   ACT 20
1.09493397 -0.05830667  0.01773901  0.05327261  0.72397726
  ACT 21   ACT 22   ACT 23   ACT 24   ACT 25
0.40323474 -0.01447634  0.03506777  0.12942541  0.53035994
  ACT 26   ACT 27   ACT 28   ACT 29   ACT 30
0.79207695  0.85241251  1.04607683  0.36133228  0.63626855
  ACT 31   ACT 32   ACT 33   ACT 34   ACT 35
0.21192816  0.34894404  0.58022449 -0.02327130  0.14828323
  ACT 36   ACT 37   ACT 38   ACT 39   ACT 40
0.63456649  0.72773638  0.95466479  0.30364801  0.39109848
  ACT 41   ACT 42   ACT 43   ACT 44   ACT 45
1.27080573  0.65299386  0.59853669  0.38195782  1.12280490
  ACT 46   ACT 47   ACT 48   ACT 49   ACT 50
0.45322882  0.03181485  0.46541683 -0.08907354  0.33912811
  ACT 51   ACT 52   ACT 53   ACT 54   ACT 55
0.43632858  0.86464707  0.33900115  0.18347867  0.52146834
  ACT 56   ACT 57   ACT 58   ACT 59   ACT 60
0.84609588  0.73718174  1.67880534  0.82795986  0.16277088
  ACT 61   ACT 62   ACT 63   ACT 64   ACT 65
    
```

1.06137167	1.33414064	0.42624718	0.88435271	0.96220015
ACT 66	ACT 67	ACT 68	ACT 69	ACT 70
1.40559930	0.56029959	0.44323300	0.96859920	0.48299565
ACT 71	ACT 72			
-0.87810006	0.82808719			

Le rendement espéré de l'indice du MASI sera paramétré selon l'utilisateur. Dans notre cas, nous allons choisir  $E(R_m) = 0.02$  et le taux sans risque  $R_0 = 0.023$ . Nous estimons le rendement espéré d'une action  $i$  à l'aide de la formule :

$$E(R_i) = R_0(1 - \beta_i) + \beta_i E(R_m)$$

### Résultat 3

Voici quelques rendements obtenus sous les hypothèses précédentes :

```
> RENDEMENT_tous
  issue_key  Rendement  Type_actif
1  OBL1  0.0017813168      OBL
2  OBL2 -0.0192111145      OBL
3  OBL3 -0.0100044842      OBL
4  OBL4 -0.0184017342      OBL
5  OBL5  0.0025095842      OBL
6  OBL6 -0.0282021107      OBL
7  OBL7  0.0011314782      OBL
8  OBL8  0.0016447575      OBL
9  OBL9  0.0102507494      OBL
10 OBL10 0.0015987149      OBL
11 ACT1  0.0502721385      ACT
12 ACT2  0.0188100778      ACT
13 ACT3  0.0663998647      ACT
14 ACT4  0.0338050852      ACT
15 ACT7 -0.0446137044      ACT
16 ACT2  0.0867627136      ACT
```

## 3.2 Application de l'algorithme du gradient

### Gradient avec le terme de pénalisation $\lambda$

Nous choisissons les valeurs suivantes pour l'algorithme du gradient, tel qu'expliqué dans la partie 2.6.5 :

- $u_0$  est le portefeuille initial de la société SCR.
- $\lambda = 0.001$
- $\rho = 0.01$
- $\beta = 1$
- Le nombre d'itérations  $N = 100$

- L'indicateur  $I_{RR}^\beta$  pour le portefeuille initial  $u_0$  et une valeur de  $\beta = 1$  est égal à  $I_{RR}^\beta(u_0) = 0.422086$ .

À l'aide du logiciel **R**, après avoir automatisé le calcul du  $SCR_{marche}$  ainsi que la détermination de la contribution  $C_i$  pour chaque portefeuille  $u$ , nous appliquons l'algorithme du gradient. L'évolution de notre indicateur et du  $SCR_{marche}$  pour chaque itération est présentée dans la figure 3.4. Nous remarquons que les deux mesures,  $I_{RR}^{\beta,\lambda}$  et  $SCR_{marche}$ , ont une évolution linéaire, respectivement croissante et décroissante.

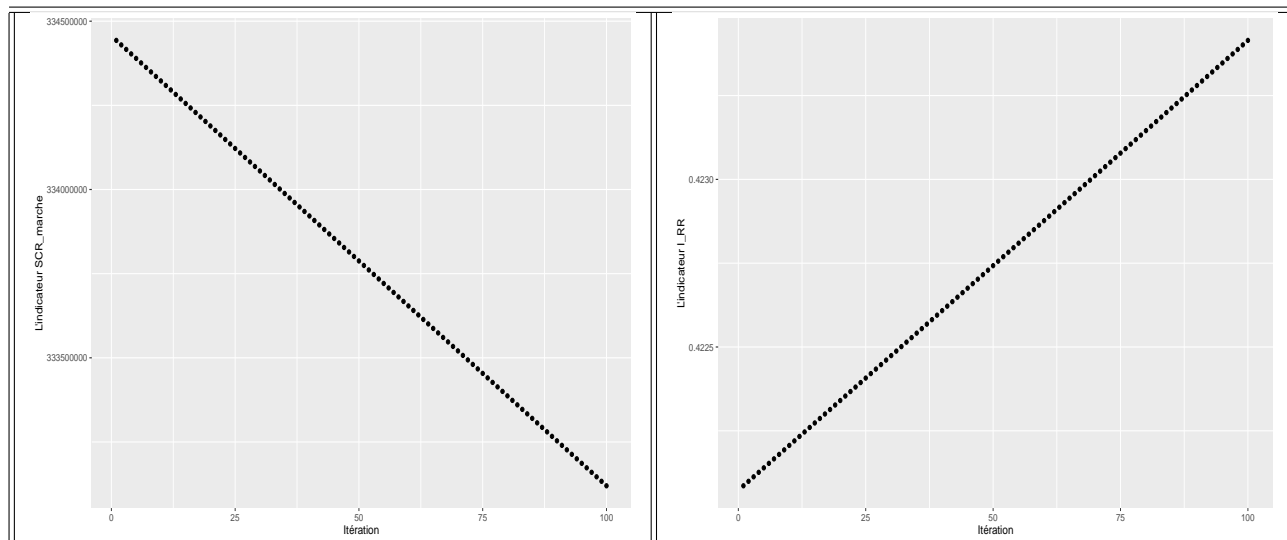


FIGURE 3.4 – L'évolution du  $I_{RR}^{\beta,\lambda}$  et de  $SCR_{marche}$  selon les itérations de l'algorithme

**Remarque :** L'observation de l'augmentation puis de la diminution de l'indicateur au fur et à mesure de l'augmentation du nombre d'itérations suggère que l'algorithme du gradient ne converge pas vers des valeurs qui maximisent l'indicateur. Il peut produire des solutions irréalisables avec des valeurs négatives ou très élevées.

### Impact des paramètres

Nous représentons dans la figure 3.5 l'évolution de l'indicateur  $I_{RR}^{\beta,\lambda}$  en fonction du pas  $\rho$ . Nous observons que l'évolution de l'indicateur prend une forme exponentielle à mesure que le paramètre  $\rho$  augmente.

L'augmentation du paramètre  $\lambda$  a le même impact que le paramètre  $\rho$ . La diminution des deux paramètres n'impacte pas la vitesse d'augmentation de l'indicateur, mais seulement les valeurs de celui-ci à chaque itération.

### Adapter l'algorithme du gradient aux vecteurs irréalisables

- Il existe plusieurs solutions réalisables qui maximisent notre indicateur que la société peut adopter en fonction des paramètres de l'algorithme.

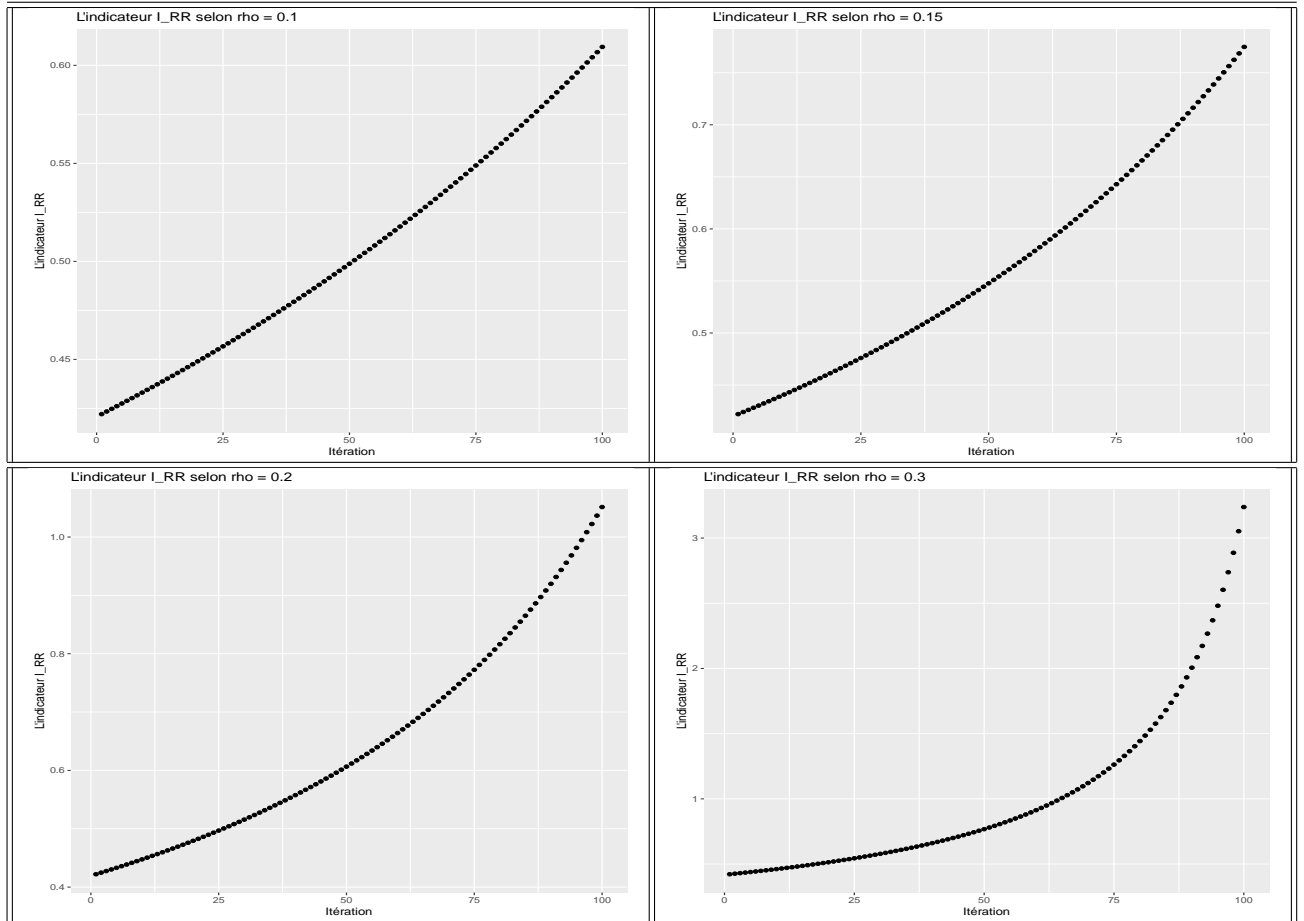


FIGURE 3.5 – L'évolution du  $I_{RR}^{\beta, \lambda}$  selon des valeurs croissantes de  $\rho = 0.1, 0.15, 0.2$  et  $0.3$ .

— Même si l'algorithme du gradient est simple à implémenter, pour des valeurs élevées de l'indicateur  $I_{RR}^{\beta, \lambda}$ , on observe des solutions irréalisables. Par exemple, des solutions avec des montants négatifs. Pour résoudre ce problème, si un portefeuille est irréaliste, on fixe les actifs ayant un montant négatif à 0. Ainsi, notre algorithme devient :

---

**Algorithm 7** Algorithme du gradient à pas fixe sur la fonction  $I_{RR}^{\beta, \lambda}$

---

Soit  $\rho > 0$ ,  $u_0 \in \mathbb{R}^n$  et  $N \in \mathbb{N}$  respectivement, le pas qui respecte le plus les contraintes, l'allocation initiale et le nombre d'itérations de l'algorithme.

1. **Pour**  $k$  allant de 1 à  $N$  :
  2.     Calculer  $\nabla I_{RR}^{\beta}(u_{k-1})$
  3.     Calculer  $u_k = \frac{u_{k-1} + \rho \times (\nabla I_{RR}^{\beta}(u_{k-1}) + 2\lambda u_0)}{1 + 2\rho \times \lambda}$
  4.      $u_k = u_k^+ = (\max(u_1, 0), \max(u_2, 0), \dots, \max(u_n, 0))$ .
  5. **Fin pour**
  6. **Retourner**  $u_N$
- 

On remarque que cette solution améliore les valeurs de notre indicateur (il y a des portefeuilles qui passent de 0.4544385 à 0.5402142), et nous constatons la convergence de notre

algorithme.

- Nous modifions l'espace de recherche en changeant le portefeuille  $u$  par  $\frac{1}{VM_0} \times u$ , où  $VM_0 = \sum_{i=1}^n u_i^0$  est la somme de la richesse initialement investie. Le résultat est présenté dans la figure 3.6, qui montre que notre indicateur a deux modes d'évolution et que le maximum est atteint pour un portefeuille qui investit une valeur inférieure à celle du portefeuille initial  $VM_0$ .

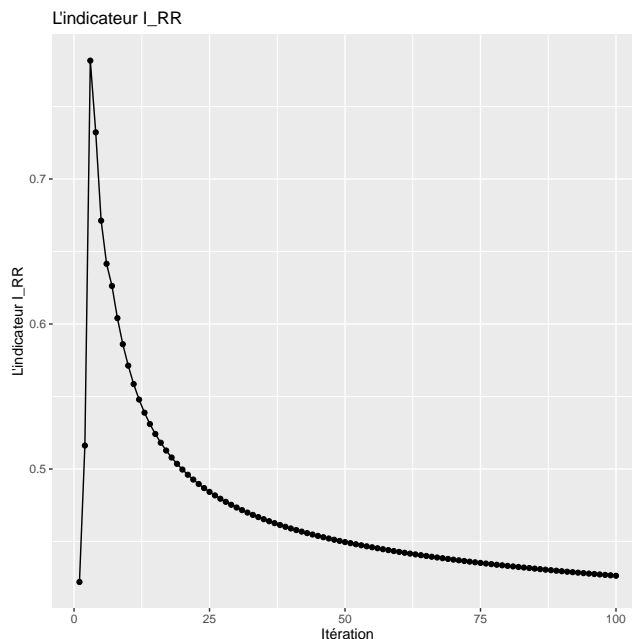


FIGURE 3.6 – L'indicateur après changement d'espace pour les valeurs suivantes :  $\lambda = 0.001$ ,  $\rho = 0.01$ ,  $N = 100$

- Nous effectuons une variation sur le **pas**  $\rho$ , en prenant  $\rho = 0.1$  et  $\rho = 0.001$ . Les résultats sont présentés dans la figure 3.7.

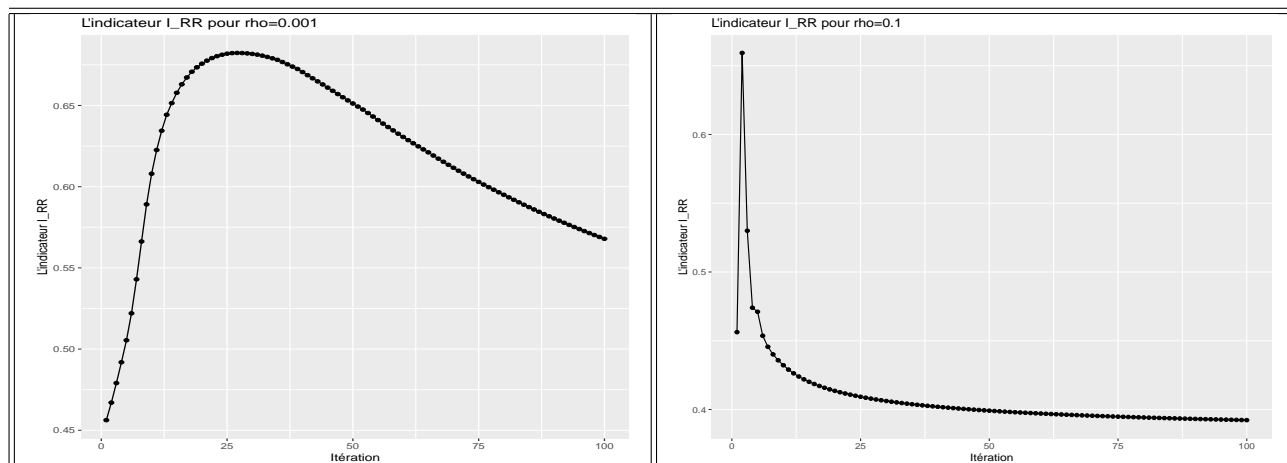


FIGURE 3.7 – L'évolution de  $I_{RR}^{\beta, \lambda}$  pour des valeurs croissantes de  $\rho = 0.1$  et  $\rho = 0.001$

- Nous augmentons maintenant le **nombre d'itérations**  $N$ . Nous constatons que notre indicateur diminue et que la richesse investie continue d'augmenter pour atteindre des

valeurs très élevées. De plus, nous ne constatons pas de convergence (voir figure 3.8).

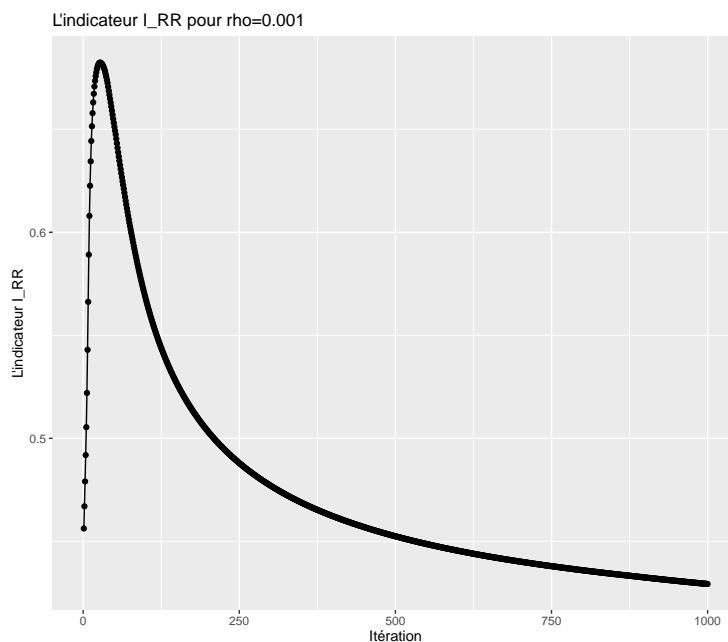


FIGURE 3.8 – L'évolution de l'indicateur pour  $N = 1000$

- Le **critère de sélection du portefeuille optimal** dépend de la capacité de l'entreprise, c'est-à-dire qu'il faut prendre en considération la somme investie par la société. Dans la figure 3.9, nous présentons l'évolution de l'indicateur  $I_{RR}^{\beta,\lambda}$  en fonction de la somme investie sur  $VM_0$  au fil des itérations de l'algorithme.
- Pour un portefeuille avec une valeur investie égale à  $1.0214 \times VM_0$ , l'algorithme donne une répartition avec un indicateur égal à 0.5404 et la composition suivante :

Type d'actif	La part
Actions	0.67
Obligations	0.33

## Résultat

Bien que l'algorithme du gradient ait été adapté pour résoudre le problème, il présente plusieurs inconvénients. Tout d'abord, sa convergence n'est pas garantie, et il atteint la valeur maximale avec des portefeuilles qui investissent moins de richesse. De plus, l'efficacité de l'algorithme du gradient est limitée lorsqu'il est utilisé dans le cadre des contraintes réglementaires en matière d'investissement. Par exemple, une grande partie des investissements est réalisée dans les actions, représentant près de 60%. Par conséquent, nous allons utiliser les algorithmes d'optimisation que nous avons déjà expliqués précédemment et qui prennent en compte ces contraintes.

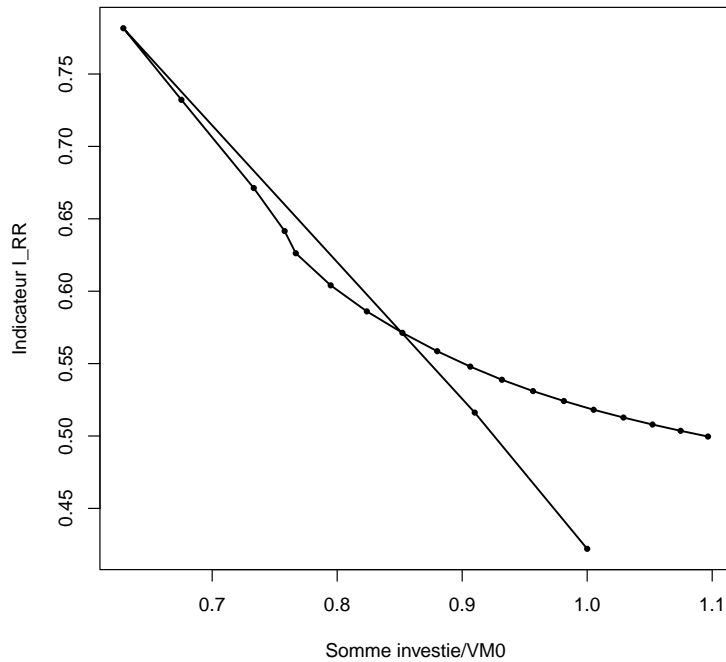


FIGURE 3.9 – L'évolution de l'indicateur  $I_{RR}^{\beta, \lambda}$  en fonction de la somme investie et au fil des itérations de l'algorithme

### 3.3 L'optimisation sous contraintes d'investissement

Dans cette partie, nous exposons les contraintes d'investissement ainsi que l'application des algorithmes d'optimisation sous contraintes.

#### 3.3.1 Les contraintes d'investissement

Sur la base des explications données dans la partie théorique (Partie 2, chapitre 4), nous introduisons les contraintes d'investissement suivantes :

- Tous les montants alloués doivent être positifs.
- Le pourcentage du montant alloué pour les actions doit être compris entre un pourcentage  $a_1$  et  $a_2$ .
- Le pourcentage du montant alloué pour les actions par secteur doit être inférieur au niveau  $\beta$  du montant global alloué pour les actions.
- La duration des obligations doit être inférieure à un seuil défini.
- Selon la maturité des obligations, la répartition du portefeuille obligataire par rapport au montant alloué aux obligations est la suivante :
- La part du cash réinvesti ne doit pas dépasser certains seuils.

Maturité (en ans)	Pourcentage
$1 < \leq 3$	$\alpha_1$
$3 < \leq 7$	$\alpha_2$
$7 < \leq 13$	$\alpha_3$
$13 <$	$\alpha_4$

TABLE 3.1 – Le pourcentage réglementaire des obligations

### 3.3.2 La formulation mathématique du problème

#### Notation :

Nous considérons un portefeuille qui contient  $n$  actifs (obligations et actions),  $u^0 = (u_1^0, \dots, u_n^0)$ <sup>3</sup> est le vecteur qui donne les montants investis  $u_i^0$ , en valeur du marché, à chaque actif  $i$  du portefeuille initial avant l'instant de réinvestissement<sup>4</sup>.

Nous notons :

- $VM_0 = \sum_{i=1}^n u_i^0$  : **la valeur initiale du portefeuille** avant investissement.
- Le portefeuille initial  $u^0$  a dégagé dans l'instant  $0^-$  un **cash-flow** initial noté  $C_0$ .
- $C_{RIN}$  : une partie du cash-flow  $C_0$  qui sera **réinvestie avec  $VM_0$** . Donc, **la richesse qui doit être investie** est  $VM_0 + C_{RIN}$ .
- $n_O$  : Le nombre d'obligations.
- $n_A$  : Le nombre d'actions.
- Pour simplifier, nous notons notre indicateur par :  $f(u) = I_{RR}^\beta(u) = \frac{E(R(u))}{SCR_{marche}(u)^\beta}$ .
- Nous supposons avoir  $K$  secteurs selon lesquels les  $n_A$  actions sont réparties (par exemple : agriculture, industrie, etc.).
- Pour une obligation  $j$ , nous notons  $D(OBL_j)$  la duration de cette obligation.
- Nous supposons que les obligations sont réparties selon leur maturité et nous notons  $J$  le nombre de ces répartitions possibles.
- $I_i$ ,  $i = 1, \dots, 4$ , représente l'ensemble des obligations qui ont une maturité dans l'un des intervalles présentés dans le tableau ci-dessus de maturité  $I_i$ . Nous notons également  $\alpha_i$  les pourcentages associés. Par exemple,  $I_1$  pour  $]1, 3]$  et  $\alpha_1 = 64\%$ .
- $u^1 = (u_1^1, \dots, u_n^1)$  représente la valeur du marché du portefeuille à l'instant  $t = 1$  an. L'évolution de ce portefeuille est déterminée à l'aide des hypothèses sur les rendements des actifs.
- $R_i$  est le rendement de l'actif  $i$ , donc :  $u_i^1 = (1 + R_i) \times u_i$ , où  $u_i$  est le portefeuille optimal trouvé par l'algorithme.
- $D$  est un seuil de duration prédéfini.

3. Le 0 représente l'instant de la revalorisation

4. Notez l'instant de réinvestissement  $0^+$

**Formulation mathématique du problème :**

Nous cherchons le portefeuille qui maximise la fonction  $f$  tout en respectant les contraintes à deux instants : à l'instant d'investissement  $0^+$  et à l'instant  $t = 1$  an, c'est-à-dire après un an :

$$\sup_{u \in \mathbb{R}^n} f(u)$$

Sous contraintes :

$$u_i \geq 0 \quad (1)$$

$$a_1 \leq \frac{\sum_{i \in \text{actions}} u_i}{\sum_{i=1}^n u_i} \leq a_2 \quad (2)$$

$$0\% \leq \frac{\sum_{i \in \text{secteur}} u_i}{\sum_{i \in \text{actions}} u_i} \leq \beta \quad (3) \text{ Il y a } K \text{ secteurs}$$

$$0 \leq D(OBL_j) \leq D \quad (4) \quad j = 1, \dots, n_O$$

$$\frac{\sum_{i \in I_k} u_i}{\sum_{i \in \text{obligations}} u_i} = \alpha_k \quad (5) \quad k = 1, \dots, 4$$

$$m \leq \frac{C_{RIN}}{C_0} \leq M \quad (6)$$

Il y a des contraintes qui doivent être vérifiées pour le portefeuille  $u^1$ . Sous l'hypothèse que nous avons déjà mentionnée, nous ajoutons les contraintes suivantes au problème :

$$a_1 \leq \frac{\sum_{i \in \text{actions}} (1 + R_i) u_i}{\sum_{i=1}^n (1 + R_i) u_i} \leq a_2 \quad (7) \quad u_i^1 = (1 + R_i) u_i$$

$$0\% \leq \frac{\sum_{i \in \text{secteur}} (1 + R_i) u_i}{\sum_{i \in \text{actions}} (1 + R_i) u_i} \leq \beta \quad (8) \text{ Il y a } K \text{ secteurs}$$

$$\frac{\sum_{i \in I_k} (1 + R_i) u_i}{\sum_{i \in \text{obligations}} (1 + R_i) u_i} = \alpha_k \quad (9) \quad k = 1, \dots, 4$$

Pour simplifier l'application des algorithmes sous R on prend en considération les contraintes (1), (2), (5) et (6).

### 3.4 L'application de l'algorithme génétique

Lorsqu'il s'agit d'appliquer l'algorithme génétique à des problèmes de **grande dimension sous R**, un inconvénient majeur réside dans le temps de calcul nécessaire. En raison de la complexité accrue des problèmes à grande échelle, la recherche exhaustive de toutes les combinaisons

possibles demande une puissance de calcul considérable. Cela peut entraîner des temps d'exécution prolongés, limitant ainsi l'applicabilité pratique de l'algorithme génétique dans de nombreux cas.

Nous avons tenté d'appliquer l'algorithme génétique, à l'aide de la fonction `ga()` du package `GA`, à notre problème à grande échelle avec une taille de  $n = 112$ . Cependant, nous avons constaté que le temps de calcul requis était d'environ **60 minutes**. Pour surmonter cette contrainte, nous avons décidé d'appliquer cette méthode à **une classe d'actifs** de dimension plus petite (5 classes). À chaque étape, nous avons observé l'évolution des résultats obtenus<sup>5</sup>.

Lors de la première application de l'algorithme génétique sur une population de 100 individus pendant 100 itérations, un portefeuille est généré qui respecte toutes les contraintes, mais qui investit moins d'argent que la richesse initiale (environ 91% de la richesse initiale). De plus, l'algorithme produit un indicateur de 0.3178, qui est inférieur à la valeur initiale. Cette situation s'explique par le poids significatif accordé aux obligations à courte échéance, qui ont un rendement négatif. Nous normalisons l'espace de recherche en divisant par  $VM_0$ , ce qui permet à notre indicateur d'atteindre une valeur de 0.438 (supérieure à la valeur initiale après changement du dimension du problème 0.41), tout en respectant toutes les contraintes, sauf que la richesse investie reste inférieure à la valeur initiale du portefeuille.

Nous appliquons l'algorithme génétique à l'aide de la fonction `ga()` du package `GA` en choisissant les paramètres suivants :

- Population : 100 individus
- Nombre d'itérations : 100
- Bornes choisies à l'aide des contraintes
- Contraintes : (1), (2), (5) et (6)

Pour les deux classes d'obligations et d'actions ainsi que la poche obligataire, l'algorithme `GA` donne les répartitions définies dans la figure 3.4.

Le portefeuille qui maximise l'indicateur avec une valeur de 0.44139 et qui respecte le plus grand nombre de contraintes est celui avec une somme investie égale à  $1.0206 \times VM_0$ . J'ai fixé  $0.0316 \times VM_0$  comme maximum de cash investi et  $0.00316 \times VM_0$  comme minimum de cash investi. Le cash restant après l'investissement (cash non investi) est comparé aux deux poches d'obligations et d'actions dans la figure 3.11. L'investissement dans les limites de la richesse proposée (contrainte (6)) par la société reste une contrainte très importante qui doit être testée. Pour cela, nous présentons dans la figure 3.12 la répartition selon plusieurs niveaux de richesse. Dans les paramètres de l'algorithme, nous modifions les bornes.

---

5. Après changement du nombre de classes La valeur initiale de l'indicateur est restée relativement stable, se situant à peu près à 0.41012

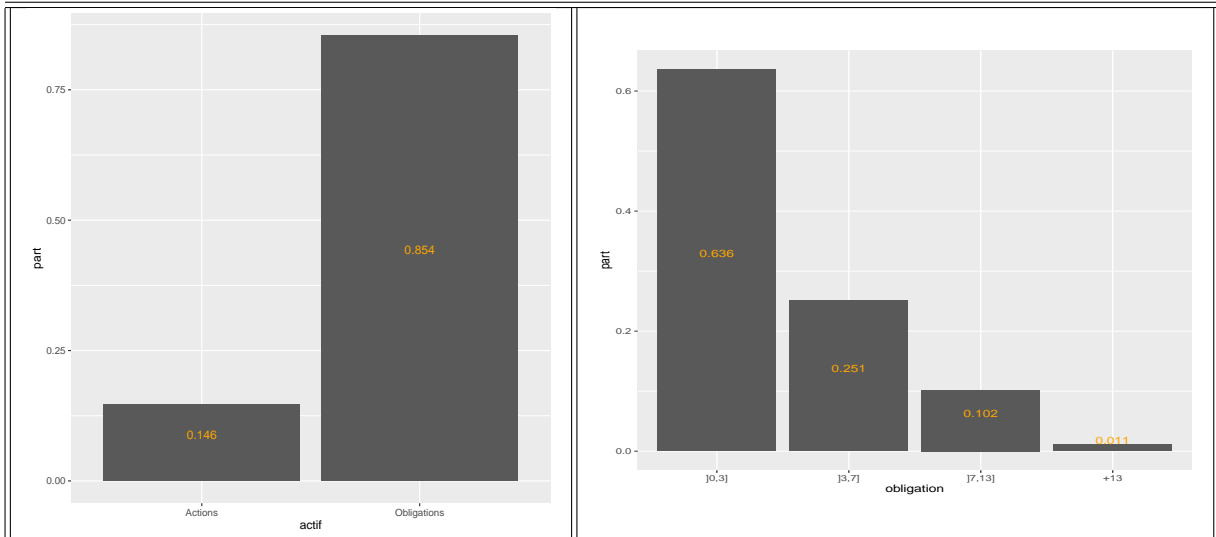


FIGURE 3.10 –

La répartition selon les actions-obligations et la poche obligataire

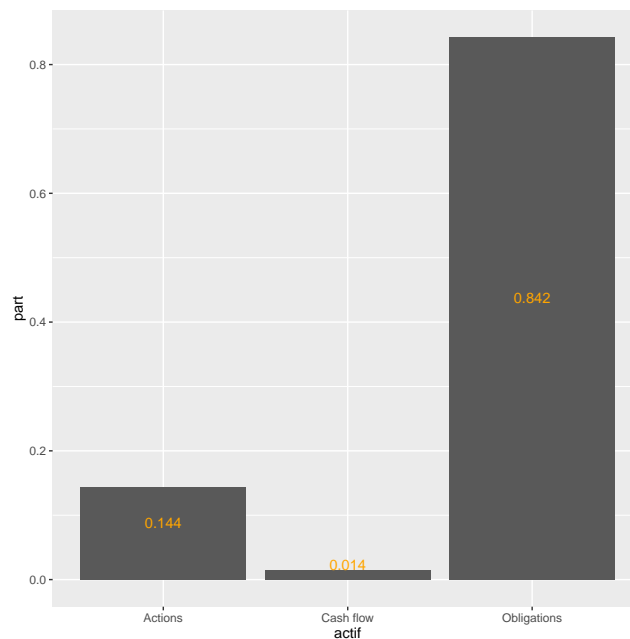


FIGURE 3.11 – Le cash non investi en comparaison avec la richesse investie dans les obligations et les actions en pourcentage

### Résultat

L'application de l'algorithme génétique se révèle très intéressante en termes de traitement des contraintes et de maximisation de notre indicateur.

Malgré sa facilité d'application et son efficacité à prendre en compte les contraintes, l'algorithme génétique est confronté à une contrainte de **temps de calcul**, surtout lorsque le nombre de populations est élevé, ainsi que le nombre important de paramètres à régler pour les contraintes.

Afin de remédier à ce problème, ainsi qu'au problème de l'optimum local, et pour bien explorer l'espace de recherche, nous allons appliquer l'algorithme ISRES dans la partie suivante.

### 3.5 L'algorithme ISRES

Le premier avantage de l'application de cet algorithme est le temps **réduit de calcul**, même lorsque le nombre d'itérations est élevé, et l'algorithme ne nécessite pas l'adaptation de la fonction de pénalité pour vérifier les contraintes. L'algorithme ISRES présente un nombre limité de paramètres à régler par rapport à l'algorithme GA, ce qui facilite sa mise en œuvre et réduit la complexité du réglage des paramètres, ce qui peut être un avantage pratique dans certaines situations.

À l'aide de la fonction `nloptr()` du package `nloptr` sous R, nous avons appliqué l'algorithme ISRES pour un nombre d'itérations égal à  $N = 10000$ . Le point initial de l'algorithme est le portefeuille initial. Le temps de calcul a été réduit et il a donné la répartition 3.13 avec  $I_{RR} = 0.4109$ . Le cash qui reste après l'investissement est présenté en comparaison avec les 2 poches obligations et actions dans la figure 3.14. Nous avons ensuite appliqué cet algorithme en augmentant progressivement le **nombre d'itérations**. Les résultats sont présentés dans la figure 3.15.

#### Résultat

Plus que cette algorithme maximise notre indicateur, l'algorithme ISRES est bien adapté pour **prendre en considération les contraintes d'investissement**. Son principal point fort réside dans le temps de calcul, qui est généralement rapide, et dans **sa simplicité** d'implémentation sous R, contrairement à l'algorithme GA.

### 3.6 L'algorithme PSO

On applique l'algorithme PSO à l'aide de la fonction `psoptim()` du package `pso`. L'indicateur a pour valeur 0.4012 et le résultat est dans les figures 3.16. Pour les paramètres de contrôle, j'ai choisi les paramètres par défaut, le stress des paramètres ne change pas significativement l'indicateur ni le respect des contraintes. Le cash qui reste après l'investissement est présenté en comparaison avec les 2 poches obligations et actions dans la figure 3.17.

#### Résultat

Le temps de calcul de cet algorithme est très faible (immédiat). Les contraintes sont strictement respectées, mais l'indicateur n'a pas été optimisé.

### 3.7 L'application de l'algorithme de Lagrangien Augmenté (AUGLAG)

On applique l'algorithme du **Lagrangien Augmenté** à l'aide des fonctions `solnp()` du package `Rsolnp`. Le résultat est donné dans la figure 3.18. Le cash qui reste après l'investissement est présenté en comparaison avec les 2 poches obligations et actions dans la figure 3.19.

#### Résultat

L'application de l'algorithme AUGLAG montre que : il y a convergence au fur et à mesure de l'augmentation du nombre des itérations, les contraintes sont vérifiées, mais l'indicateur donne une valeur inférieure à 0.41012, qui est égale à 0.3812. Le temps de calcul est très pertinent.

### 3.8 Comparaison et validation des algorithmes d'optimisation

Pour comparer les algorithmes, nous les évaluons en termes de plusieurs critères que nous exposons ci-dessous. Il faut noter que les contraintes d'inégalité sont vérifiées pour tous les algorithmes, sauf pour l'algorithme de gradient (optimisation sans contraintes). Pour les autres contraintes, nous calculons l'écart quadratique entre les fractions  $\alpha_i$  et les fractions données par les algorithmes, qui est donné par la formule suivante :

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{4} \sum_{i=1}^4 (\alpha_i - \alpha_i^{alg})^2}$$

où  $\alpha_i$  est la fraction contrainte donnée pour la classe des obligations  $i$  et  $\alpha_i^{alg}$  est la fraction donnée par l'algorithme pour la classe des obligations  $i$ .

**N.B.** : La valeur initiale de l'indicateur est 0.41012.

Au terme de ce chapitre, nous avons pu observer l'impact significatif des algorithmes d'optimisation sur la gestion de portefeuille. Grâce à l'application de ces techniques, il a été possible de réorienter un portefeuille initialement axé sur les actifs à risque vers un portefeuille plus équilibré, en accord avec les objectifs de la compagnie d'assurance. La comparaison et la validation des différents algorithmes ont révélé leurs forces et faiblesses respectives, ouvrant la voie à des recherches futures pour optimiser davantage ces méthodes et pour adapter ces algorithmes à différents contextes d'investissement. En fin de compte, l'optimisation algorithmique de la gestion de portefeuille offre un puissant outil pour atteindre l'équilibre entre rendement et risque.

<b>Critère</b>	<b>GA</b>	<b>ISRES</b>	bfGradient	<b>PSO</b>	<b>AUGLAG</b>
Les contraintes (RMSE)	0.00234	0.003143	Non vérifié	$7.2 \times 10^{-10}$	0.0234
L'indicateur	0.441	0.4109	0.54	0.4012	0.3812
Exploration de l'espace de recherche	Bonne	Bonne	Un peu	Bonne	Limitée
La simplicité	Simple	Simple	Un peu complexe	Simple	Complexité moyenne
Le temps de calcul	Un peu long	Court	Moyen	Court	Court
Nombre de paramètres	Moyen	Moyen	Faible	Moyen	Élevé
Les conditions sur la fonction	Aucune condition	Aucune condition	Différentiable	Aucune condition	Différentiable
La convergence et la stabilité	Pas de convergence	Pas de convergence	Pas de convergence	Convergence	Convergence

TABLE 3.2 – Comparaison des algorithmes

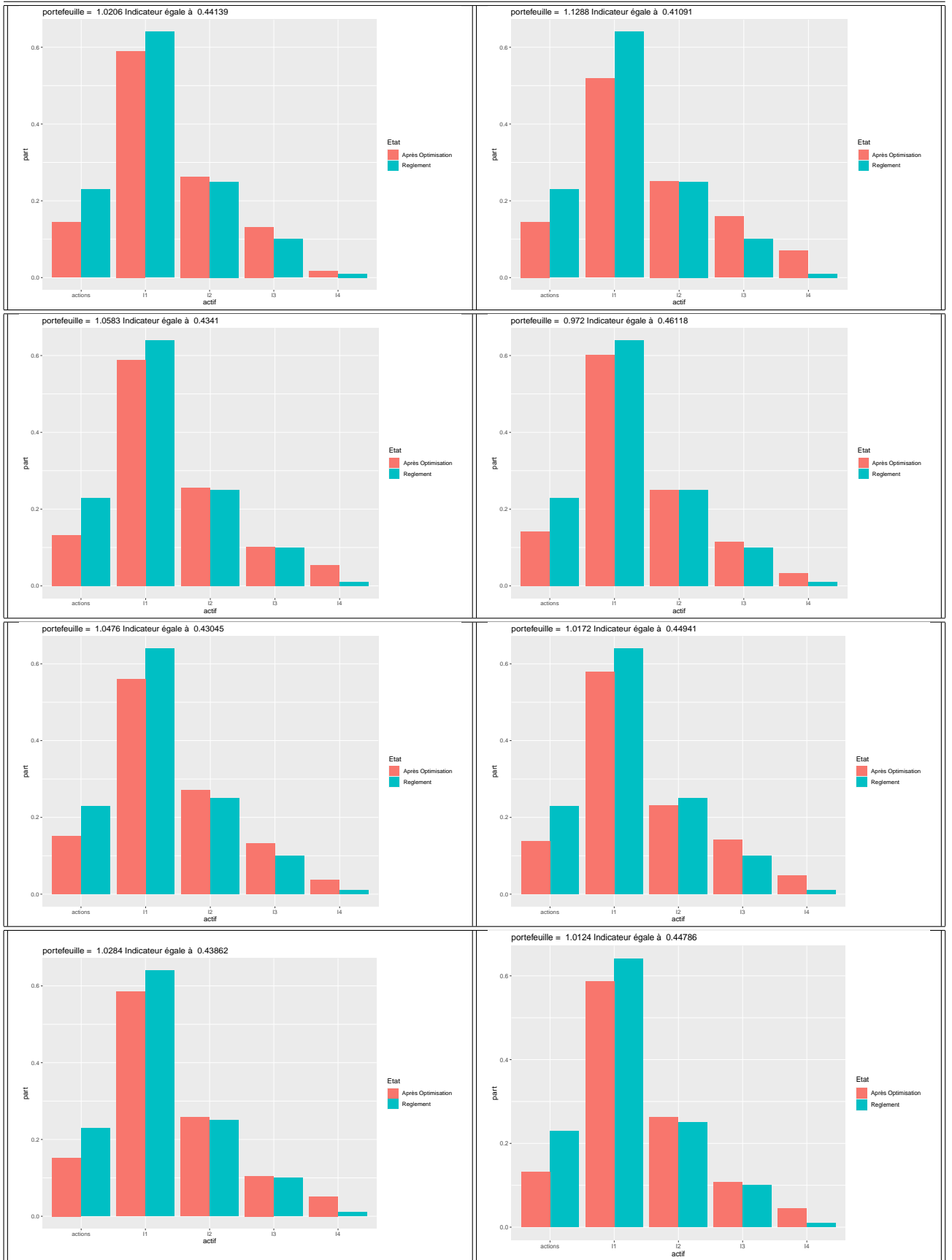


FIGURE 3.12 – La répartition après l'application de GA selon la part de la richesse investie par rapport à  $VM_0$  et en comparaison avec les contraintes

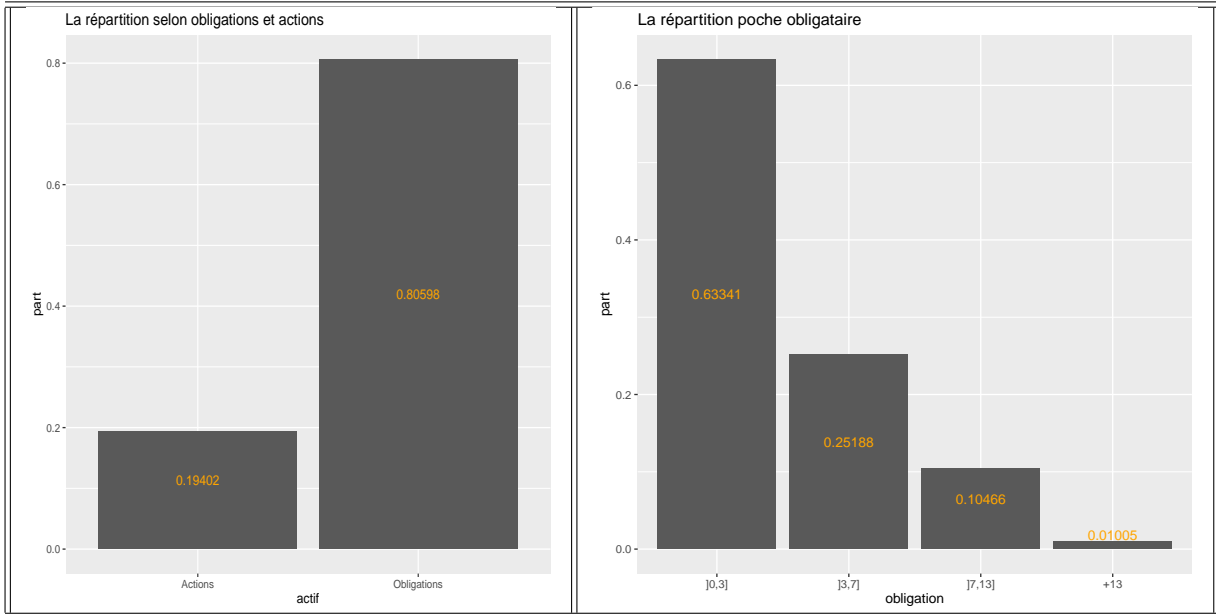


FIGURE 3.13 – La répartition selon les actions-obligations et la poche obligataire

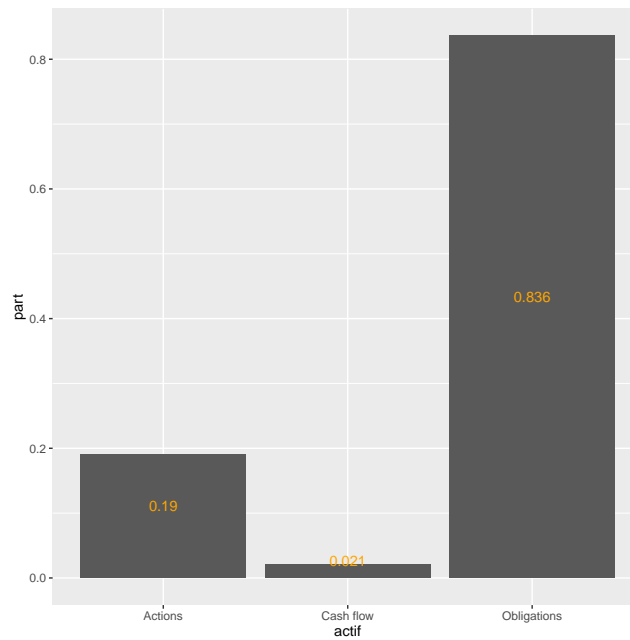


FIGURE 3.14 – Le cash non investi en comparaison avec la richesse investie dans les obligations et les actions en pourcentage

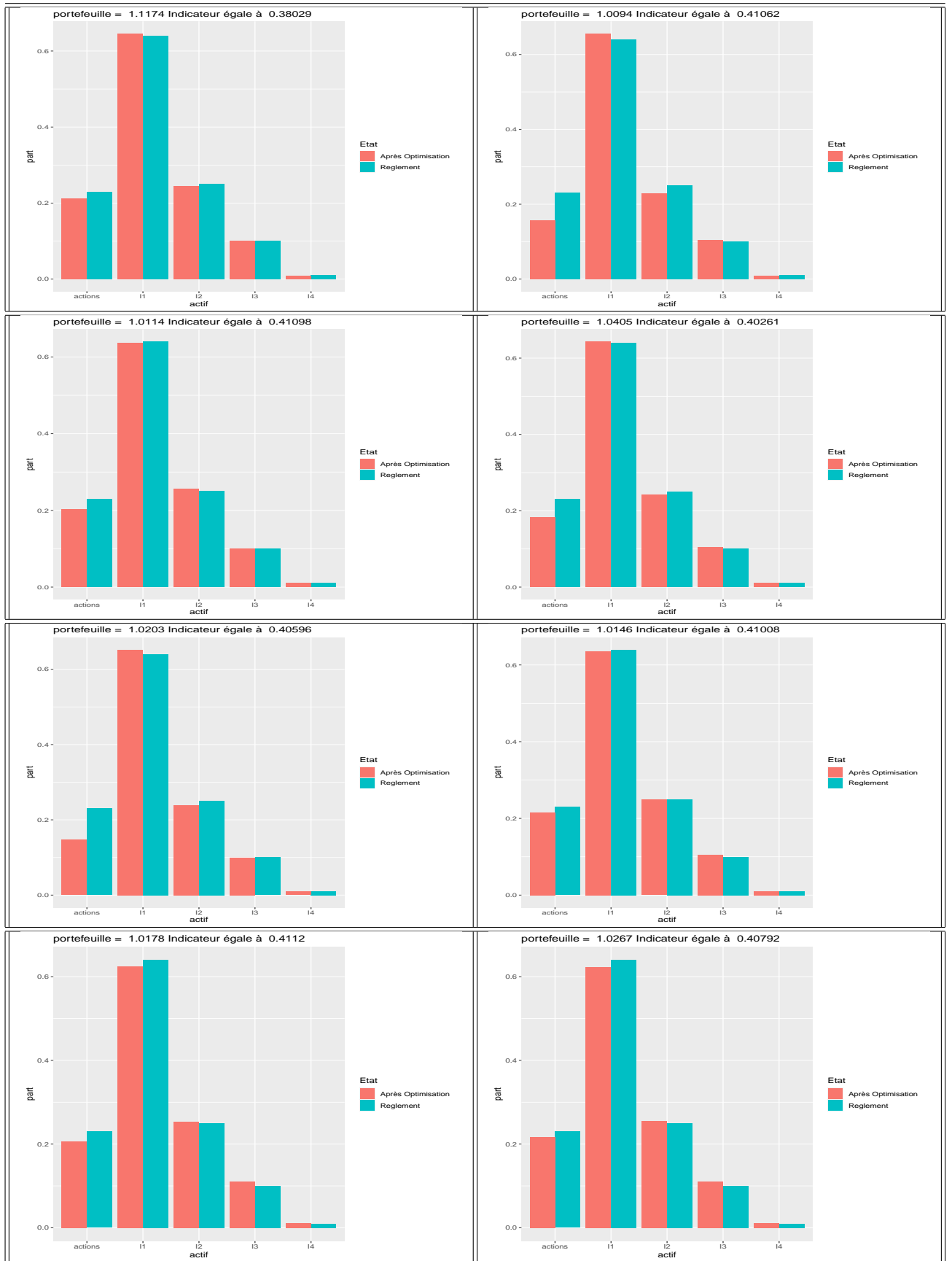


FIGURE 3.15 – La répartition, après application de l’algorithme ISRES, selon la part de la richesse investie par rapport à la valeur initiale du portefeuille et en comparaison avec les contraintes

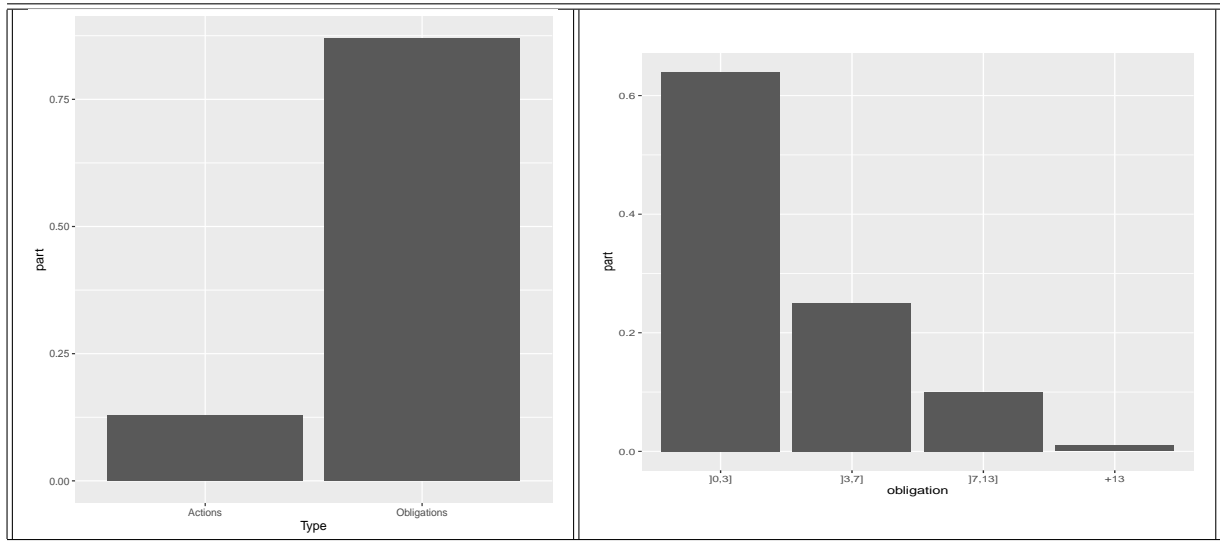


FIGURE 3.16 – La répartition selon les actions-obligations et la poche obligataire

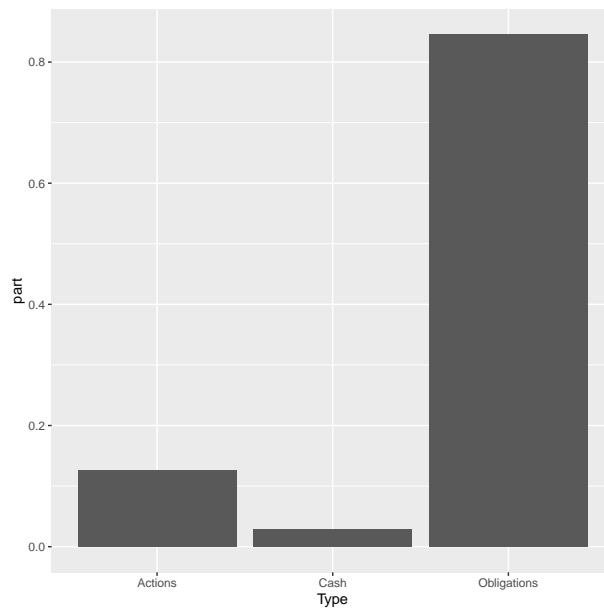


FIGURE 3.17 – La part du cash qui reste en comparaison avec les obligations et les actions

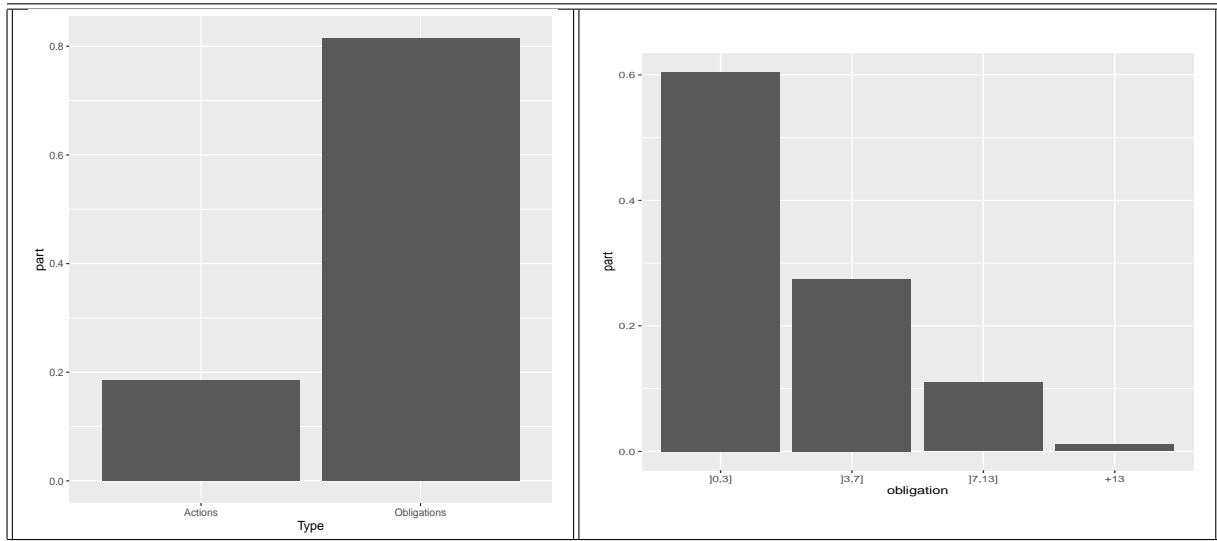


FIGURE 3.18 – La répartition selon les actions-obligations et la poche obligataire

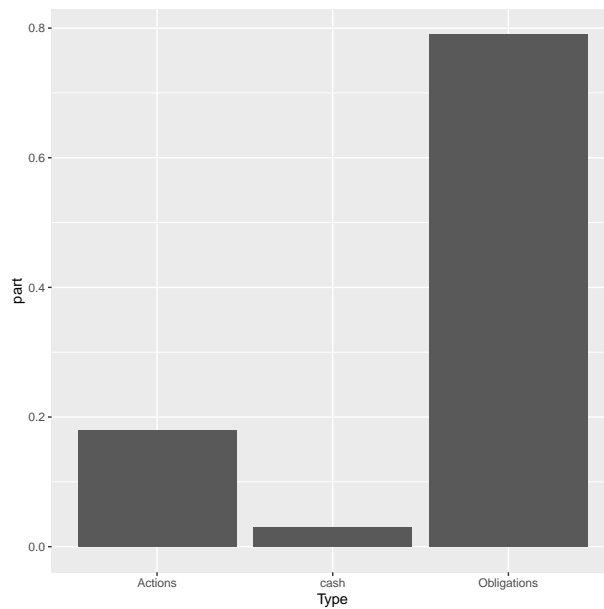


FIGURE 3.19 – La part du cash qui reste en comparaison avec les obligations et les actions

# Chapitre 4

## Ouverture : Prise en compte du passif

### Contents

---

<b>4.1</b>	<b>Cash-flow Matching</b>	<b>91</b>
<b>4.2</b>	<b>Le modèle de Sharpe et Tint (1990)</b>	<b>91</b>
4.2.1	Présentation du modèle	92
4.2.2	Formulation mathématique du modèle	92
4.2.3	Limites du modèle	93
<b>4.3</b>	<b>Modèle de Kim et Santomero</b>	<b>94</b>
4.3.1	Principe du modèle	94
4.3.2	Limitation du modèle	94

---

La méthode que nous avons examinée dans le chapitre précédent présente une caractéristique distincte : elle omet le passif lors du calcul du  $SCR_{\text{marché}}$ . Néanmoins, il faut souligner que le passif peut être affecté par les chocs de taux, comme illustré par le module (*best-estimate* (BE)). En conséquence, il est impératif de modéliser les flux de passifs, comme les sinistres et les rentes, en réponse à ces chocs. Ce chapitre marque le début d'une exploration de méthodes qui intègrent le passif dans la gestion de l'allocation d'actifs.

## 4.1 Cash-flow Matching

Le SCR marché présente une caractéristique notable : son calcul est largement indépendant du passif. La méthodologie prescrite pour calculer les chocs se fait en isolant le portefeuille actif. Cependant, pour le choc de taux, il est nécessaire de modéliser les flux issus du passif (comme les sinistres et les rentes), car ce choc vise à évaluer le risque de variation des taux d'intérêt, à la baisse ou à la hausse. Dans ce contexte, le scénario envisagé utilisera différentes courbes d'actualisation. Il est donc crucial de prendre en compte, pour ce choc, le résultat net des flux entrants (revenus financiers) et sortants (sinistres, paiement de rentes).

Une stratégie de gestion de portefeuille couramment utilisée vise à équilibrer les flux issus de l'actif (par exemple, les coupons) avec ceux provenant du passif (sinistres, rachats), de manière à ce que les flux entrants soient égaux aux flux sortants à chaque date future. Cette approche immunise le portefeuille contre le risque de taux d'intérêt, car la somme de ces flux est nulle. Cette technique est appelée "cash flow matching" et son objectif est de minimiser les chocs dus aux variations de taux.

Pour mettre en œuvre cette modélisation, le passif est représenté par un tableau de flux, c'est-à-dire qu'à chaque mois, un flux de sortie est associé au passif. Cette ligne se comporte en réalité comme une ligne d'actif, à la différence que ses flux sont négatifs et représentent l'ensemble du portefeuille de passif. Ainsi, à chaque date, le passif est représenté par un flux négatif. Cette représentation du passif correspond à des produits d'assurance dont les flux ne dépendent pas des fluctuations du marché (sans revalorisations, sans flux négatifs). Par exemple, un portefeuille de rentes de vie sans revalorisation des rentes pour l'assurance-vie, ou un portefeuille de type IARD où l'inflation n'est pas prise en compte pour ajuster le coût des sinistres.

## 4.2 Le modèle de Sharpe et Tint (1990)

L'objectif est donc de maximiser le rendement du surplus sous la contrainte de ne pas dépasser un certain niveau de SCR marché.

### 4.2.1 Présentation du modèle

Le modèle a été proposé par Sharpe et Tint (1990). Ils ont été parmi les premiers à concilier le modèle de Markowitz avec le passif, en remarquant que les engagements étaient les plus contraignants et devaient être pris en compte dans la gestion actif-passif. Pour ce faire, ils ont introduit la notion de **surplus** et ont cherché à l'optimiser.

Ce modèle s'applique à un univers de classes d'**actifs**, en se basant sur **leur valeur de marché**, tandis que le modèle du **passif** se base sur **sa valeur actuelle**. Il s'agit d'un modèle *mono-périodique* qui cherche à **minimiser la variance du surplus pour un niveau de rentabilité du surplus donné** et sous certaines contraintes (en général, la même démarche que Markowitz).

### 4.2.2 Formulation mathématique du modèle

La notion de "surplus" se définit comme la différence entre l'actif et la part de passif prise en compte dans l'élaboration de l'allocation stratégique, telle que :

$$S_t = A_t - k \cdot L_t$$

avec :

- $k$  : un coefficient mesurant l'importance de la couverture de ses engagements pour l'investisseur
- $A_t$  : la valeur de marché de l'actif à l'instant  $t$ .
- $L_t$  : les provisions techniques dans le référentiel Solvabilité 2 à l'instant  $t$ .

Dans le cadre de l'assurance vie, nous partons du constat que l'investisseur souhaite en priorité honorer ses engagements. D'ailleurs, lors de l'élaboration de son allocation stratégique d'actifs, le modèle prend en compte la totalité de ses engagements, ce qui justifie le choix de  $k = 1$ .

La valeur du surplus est connue à la date initiale  $t = 0$  et inconnue à  $t = 1$ . La variation du surplus entre ces deux dates s'écrit comme suit :

$$\begin{aligned} S_1 - S_0 &= [A_0 \cdot (1 + r_A) - L_0 \cdot (1 + r_L)] - (A_0 - L_0) \\ &= A_0 \cdot r_A - L_0 \cdot r_L \end{aligned}$$

avec :

- $r_A$  : le rendement de l'actif entre les deux périodes
- $r_L$  : le taux de croissance du passif issu de la variation de la courbe des taux sans risque EIOPA.

**Remarque :** La modélisation étant effectuée sous le référentiel "Solvabilité 2", les flux de trésorerie futurs sont modélisés en *run-off* et ne tiennent donc pas compte des affaires nouvelles.

De plus, le calcul de la valeur finale de l'actif et du passif exclut les encaissements et décaissements sur les affaires existantes, de sorte que  $r_A$  et  $r_L$  ne soient liés qu'à l'évolution des marchés financiers.

Nous définissons le rendement du surplus en  $t = 1$  en divisant la variation du surplus par le montant initial de l'actif afin de se rapprocher du cas où l'investissement est effectué sans contrainte de passif, comme suit :

$$r_S = r_A - \frac{1}{f_0} \cdot r_L$$

où  $f_0 = \frac{A_0}{L_0}$  correspond au ratio de financement initial des provisions techniques.

En notant  $\lambda$  la tolérance au risque de l'investisseur, l'objectif se résume à maximiser l'utilité définie par :

$$U = \mathbb{E}(r_S) - \frac{1}{\lambda} \text{Var}(r_S)$$

avec :

- $\mathbb{E}(r_S) = \mathbb{E}(r_A) - \frac{1}{f_0} \cdot \mathbb{E}(r_L)$ , où seule la première partie est affectée par les décisions d'allocation d'actifs.
- $\text{Var}(r_S) = \text{Var}(r_A) - \frac{2}{f_0} \text{Cov}(r_A, r_L) + \frac{1}{f_0^2} \text{Var}(r_L)$ , où le dernier terme n'est pas affecté par les décisions d'allocation d'actifs.

Les termes qui ne sont pas affectés par les décisions d'allocation d'actifs peuvent être négligés sans effet sur les résultats. Ainsi, le problème revient à trouver le portefeuille X tel que :

$$\max_X \mathbb{E}(r_A) - \frac{1}{\lambda} \text{Var}(r_A) + \frac{2}{f_0 \lambda} \text{Cov}(r_A, r_L)$$

Les deux premiers termes correspondent aux éléments de l'allocation d'actifs sans contrainte de passif, tandis que le dernier terme correspond à un terme additionnel provenant de l'investissement dans des actifs permettant de se couvrir contre les variations du passif.

L'utilité s'écrit ainsi :

$$U = \text{Rendement espéré de l'actif} - \text{Pénalité due au risque pris} + \text{Liability Hedging Credit}$$

### 4.2.3 Limites du modèle

Le modèle de Sharpe et Tint (1990) est simple d'utilisation du fait de sa proximité avec le modèle de Markowitz. Néanmoins, il hérite des mêmes limites que ce dernier. De plus, son utilisation en pratique peut s'avérer compliquée car, contrairement aux actifs, il n'existe pas d'indice de référence fiable pour représenter le comportement du passif d'une société d'assurance vie. Les paramètres (variances et corrélations) de la distribution du taux de croissance futur du passif doivent donc être en général approximés à partir d'indices construits.

## 4.3 Modèle de Kim et Santomero

### 4.3.1 Principe du modèle

Le modèle de Kim et Santomero est un modèle de gestion de portefeuille qui s'inspire de la démarche de Markowitz pour déterminer le portefeuille optimal contenant plusieurs classes d'actifs. Il se distingue par son objectif de minimiser la variance de la rentabilité du surplus pour un certain niveau de rentabilité donné et une contrainte de poids (la somme des poids doit être égale à 1).

Dans ce modèle, la rentabilité du surplus  $R_S$  est définie comme une variation relative du surplus sur une période donnée, exprimée par l'équation :

$$R_S = \frac{S_1 - S_0}{S_0}$$

où  $S_1$  est le surplus final et  $S_0$  le surplus initial.

Le modèle considère un portefeuille composé de  $N$  classes d'actifs et d'un passif qui s'évalue en valeur actuelle de rentabilité  $\mathbf{r} = [R_A, R_P]_{(1+N,1)}$ , avec  $R_A$  le vecteur des rendements des actifs et  $R_P$  la variation relative de la valeur actuelle du passif.

Le vecteur des poids de l'actif et du passif est noté  $\mathbf{w} = (w_A, w_P)$  et doit être égal à 1. Le poids de l'actif  $i$  est mesuré par la valeur de marché initiale de cet actif divisée par la valeur initiale du surplus, et le poids du passif est mesuré par la valeur initiale négative du passif divisée par la valeur initiale du surplus.

La rentabilité du surplus à maximiser est ainsi exprimée par l'équation :

$$R_S = w'_A R_A + w_P R_P$$

### 4.3.2 Limitation du modèle

Le modèle de Kim et Santomero, bien qu'offrant une approche intéressante pour la gestion de portefeuille, présente des limitations. Il suppose que le vecteur des rentabilités est gaussien, ce qui peut ne pas être réaliste. De plus, le modèle dépend d'un ratio de solvabilité initial, ce qui peut limiter son applicabilité à des entreprises ayant des structures financières similaires. Enfin, il introduit une contrainte de déficit qui peut être difficile à mettre en œuvre en pratique. Il est donc essentiel de comprendre les hypothèses du modèle et de vérifier leur validité dans le contexte spécifique de l'entreprise ou du marché concerné.

# Conclusion

Au terme de notre mémoire, nous pouvons affirmer avoir acquis une compréhension approfondie de l'allocation d'actifs dans le contexte de la réglementation Solvabilité 2. Notre travail s'est particulièrement concentré sur la société Centrale de Réassurance. L'objectif principal de notre recherche a été de parvenir à une optimisation de l'indicateur risque-rendement qui soit en adéquation avec la SCR marché, une mesure de risque calculée selon la formule standard dans le cadre de Solvabilité 2.

Au cours de notre étude, nous avons été confrontés à plusieurs obstacles. L'un d'entre eux était l'application de l'algorithme du gradient une fois que nous avons trouvé une expression explicite pour calculer la contribution au risque (calcul du gradient). Malheureusement, nous avons constaté que cet algorithme avait tendance à accorder une importance excessive aux actifs à risque élevé, tels que les actions. Cette situation allait à l'encontre des principes de gestion de portefeuille en assurance, qui prônent une approche prudente dans l'allocation des actifs.

Pour remédier à ce problème, nous avons introduit des contraintes d'investissement spécifiques. Par exemple, nous avons établi des limites à l'exposition aux classes d'actifs plus risqués et défini un pourcentage minimum d'investissement dans les actifs moins risqués, comme les obligations. Ce faisant, nous avons réussi à rééquilibrer le portefeuille, réduisant ainsi l'exposition au risque tout en maintenant des rendements acceptables.

Parallèlement à cette approche, nous avons exploré d'autres techniques d'optimisation. Les approches évolutionnaires, notamment les algorithmes génétiques, l'ISRES (Improved Stochastic Ranking Evolution Strategy) et le PSO (Particle Swarm Optimization), se sont révélées particulièrement prometteuses. Ces méthodes ont démontré leur capacité à optimiser l'allocation des actifs tout en respectant les contraintes réglementaires.

La seconde partie de notre travail, plus orientée vers l'empirisme, a consisté à appliquer ces différentes méthodes d'optimisation à un portefeuille de placements réels. Notre but était de comparer leur efficacité et leur pertinence dans un contexte réel. Nous avons constaté que chaque algorithme avait des points forts et des points faibles spécifiques, et que les résultats en termes de maximisation du ratio risque-rendement variaient en fonction de l'algorithme utilisé.

Notre analyse a démontré que l'algorithme ISRES présente un équilibre intéressant entre l'efficacité de calcul, la qualité des solutions obtenues et le temps qu'il requiert, ainsi que le respect des contraintes qu'on a posé. Par conséquent, l'utilisation de l'algorithme ISRES pourrait être une alternative viable pour les compagnies d'assurance qui souhaitent optimiser leur allocation d'actifs tout en se conformant à la réglementation Solvabilité 2.

Dans la dernière partie de notre travail, nous avons également abordé la question de la prise en compte du passif dans l'allocation d'actifs. Nous avons étudié plusieurs modèles, tels que le modèle de Sharpe et Tint, le modèle de Kim et Santomero, et le modèle de Leibowitz. Chacun de ces modèles propose des approches différentes pour aligner l'allocation d'actifs sur les obligations passives d'une entreprise d'assurance. La compréhension de ces modèles et leur application appropriée peuvent aider à assurer la solvabilité et la stabilité financière à long terme de l'entreprise.

À travers ce rapport, nous avons souligné l'importance cruciale de l'optimisation de l'allocation d'actifs dans le contexte de Solvabilité 2. Nous avons démontré que la maximisation du rendement, bien que importante, doit toujours être équilibrée par une approche prudente qui respecte les contraintes réglementaires et minimise le risque. Nous pensons que cette approche est essentielle pour une gestion efficace du portefeuille d'actifs, favorisant ainsi une stabilité financière durable pour l'entreprise d'assurance.

Pour conclure, nous espérons que les résultats de notre recherche, présentés dans ce rapport, contribueront à améliorer la compréhension et la gestion de l'allocation d'actifs dans le cadre de la réglementation Solvabilité 2. Nous encourageons les futures recherches à se concentrer sur l'amélioration des algorithmes d'optimisation existants ou sur l'élaboration de nouvelles méthodes qui prennent en compte d'autres facteurs pertinents, comme les conditions de marché et les changements réglementaires. Cette recherche continue est essentielle pour s'adapter aux défis et aux opportunités changeants du paysage financier.

# Bibliographie

- [1] European Insurance and Occupational Pensions Authority (EIOPA), Technicals Specification for the Preparatory Phase, Avril 2014.
  
- [2] Rahul Bhadani : Nonlinear Optimization in R using nlopt 2021.
  
- [3] Arthur Charpentier : Mesures de risque .2013
- [4] P. Artzner, JM. Eber, F Delbaen, D.Heath ; Coherent measures of risk ; July 1998
  
- [5]D. Tasche. "Euler allocation : theory and practice". Aug 2007.
  
- [6]D. Tasche. Allocating portfolio economic capital to sub-portfolios. In Economic Capital : A Practitioner Guide, pages 275302. Risk Books, 2004.
  
- [7] Balog, Dóra. Capital allocation in financial institutions : the Euler method. IEHAS Discussion Papers Institute of Economics, Hungarian Academy of Sciences 2011.
  
- [8] D. Tasche. Conditional expectation as quantile derivative. Technical report, TU Munchen,Germany, November 2000.
  
- [9] P.G.CIARLET "Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation" Université Pierre et Marie Curie 1988
  
- [10] Francis Filbet "Analyse numérique : Algorithmes et étude mathématique" 2013
  
- [11] Fletcher, Roger (1987), Practical Methods of Optimization (2nd ed.), New York : John Wiley Sons
  
- [12] JING LV, SONGHAI DENG , AND ZHONG WAN "An Efficient Single-Parameter Scaling Memoryless Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno Algorithm for Solving Large Scale Unconstrained Optimization Problems" April 2020

- [13] N. Privault, 2012, An Elementary Introduction to Stochastic Interest Rate Modeling, Second Edition, Advanced Series on Statistical Science Applied Probability, 16, World Scientific Publishing Co., Singapore.
- [14] 2022 Technical documentation of the methodology to derive EIOPA's risk-free interest rate term structures (Public Report). EIOPA.
- [15] Alexis Fauth "Modèles de Taux, Surface de Volatilité et Introduction au Risque de Crédit" Université Lille I.
- [16] Pierre-E Thérond Génération de scénarios économiques : Modélisation des taux d'intérêt. ISFA - Université Lyon 1 2013.
- [17] G. Cohen et D.L. Zhu : Decomposition Coordination Methods in Large-Scale Optimization Problems. The Non-differentiable Case and the Use of Augmented Lagrangians. J.B. Cruz (Ed), Advances in Large-Scale Systems, Theory and Applications, vol. 1, JAI Press Inc., Greenwich, Connecticut, 1984.
- [18] M. R. Hestenes, Multiplier and gradient methods, Journal of Optimization Theory and Applications 4, pp. 303–320, 1969
- [19] M. J. D. Powell, A method for nonlinear constraints in minimization problems, in Optimization, R. Fletcher (ed.), Academic Press, New York, NY, pp. 283–298, 1969.
- [20] R. T. Rockafellar, Augmented Lagrange multiplier functions and duality in nonconvex programming, SIAM Journal on Control 12, pp. 268–285, 1974.
- [21] R. Andreani, E. G. Birgin, J. M. Martinez and M. L. Schuverdt, Augmented Lagrangian methods under the Constant Positive Linear Dependence constraint qualification, Mathematical Programming 111, pp. 5–32, 2008.
- [22] R. Andreani, E. G. Birgin, J. M. Martínez and M. L. Schuverdt, On Augmented Lagrangian methods with general lower-level constraints, SIAM Journal on Optimization, to appear.
- [23] G. Cohen et D.L. Zhu : Decomposition Coordination Methods in Large-Scale Optimization Problems. The Non-differentiable Case and the Use of Augmented Lagrangians. J.B. Cruz (Ed), Advances in Large-Scale Systems, Theory and Applications, vol. 1, JAI Press Inc., Greenwich, Connecticut, 1984.

- [24] E. G. Birgin J. M. Martinez : Improving ultimate convergence of an Augmented Lagrangian method. March 19, 2008.
- [25] Back T., Fogel D., Michalewicz Z. (2000). Evolutionary Computation 1 : Basic Algorithms and Operators. IOP Publishing Ltd., Bristol and Philadelphia.
- [26] Back T., Fogel D., Michalewicz Z. (2000b). Evolutionary Computation 2 : Advanced Algorithms and Operators. IOP Publishing Ltd., Bristol and Philadelphia.
- [27] Goldberg D. (1989). Genetic Algorithms in Search, Optimization, and Machine Learning. Addison-Wesley Professional, Boston, MA.
- [28] Thomas Vallée et Murat Yıldızoglu (2001) : Présentation des algorithmes génétiques et de leurs applications en économie.
- [29] Zbigniew Michalewicz and Marc Schoenauer : Evolutionary Algorithms for Constrained Parameter Optimization Problems (1996).
- [30] Kalyanmoy Deb : An efficient constraint handling method for genetic algorithms (2000).
- [31] Kennedy, J., Eberhart, R.C. : Swarm Intelligence. Morgan Kaufmann (2001)
- [32] Kennedy, J., Eberhart, R.C. : Particle Swarm Optimization. Proc. IEEE Int. Conf. Neural Networks. Piscataway, NJ (1995).
- [33] Eberhart, R.C., Simpson, P.K., Dobbins, R.W. : Computational Intelligence PC Tools. Academic Press Professional, Boston (1996).
- [34] Konstantinos E. Parsopoulos and Michael N. Vrahatis : Particle Swarm Optimization Method for Constrained Optimization Problems, Department of Mathematics, University of Patras Artificial Intelligence Research Center.
- [35] Frédéric PLANCHET : ANALYSE COMPARATIVE DES MODELES DE CONSTRUCTION D'UNE COURBE DES TAUX SANS RISQUE DANS LA ZONE CIPRES. 2000.
- [36] Thomas P. Runarsson and Xin Yao : Stochastic Ranking for Constrained Evolutionary Optimization 2000.
- [37] Thomas Philip Runarsson, Member, IEEE, and Xin Yao, Fellow, IEEE : Search Biases in Constrained Evolutionary Optimization. 2005.

[38] ANDREW R. CONN, NICHOLAS I. M. GOULD, AND PHILIPPE L. TOINT A : GLOBALLY CONVERGENT AUGMENTED LAGRANGIAN ALGORITHM FOR OPTIMIZATION WITH GENERAL CONSTRAINTS AND SIMPLE BOUNDS 1991.

[39] Michael C. Jensen The Capital Asset Pricing Model : Some Empirical Tests. The Journal of Finance 1972.

[40] Romain CHOQUER : Allocation stratégique d'actifs sous contrainte Solvabilité II. (2015)

## Annexe A

# Démonstration : Le calcul des contributions

Pour une raison de simplification on considère :

$$f(u) = SCR_{marche}(u) = \sqrt{(choc^{global})^t \times \Omega_{march} \times choc^{global}} = \sqrt{x^t \Omega_{march} x} = \sqrt{y}$$

On a :

$$C_i = \frac{\partial f(u)}{\partial u_i} = \frac{\partial \sqrt{y}}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u_i} = \frac{1}{2\sqrt{y}} \frac{\partial y}{\partial u_i} \quad (A.1)$$

On développe maintenant l'expression  $\frac{\partial y}{\partial u_i}$  par une dérivation en chaîne, mais avant ça il faut noter que l'expression  $y = \sqrt{x^t \Omega_{march} x}$  dépend des *SCR* de tous les chocs considérés dans

le calcul du *SCR*<sub>marche</sub> cela est obtenu par l'écriture  $choc^{global} = \begin{pmatrix} SCR_{taux} \\ SCR_{EQUITY} \\ SCR_{PROPERTY} \\ SCR_{SPREAD} \end{pmatrix}$

Plus particulièrement on a :

$$y = \sqrt{(choc^{global})^t \times \Omega_{march} \times choc^{global}} = y(SCR^1, SCR^2, \dots, SCR^m)$$

Où  $SCR^k$  est le SCR d'un choc (par exemple  $SCR_{taux}$ ).

Par une dérivation en chaîne sur la fonction  $y$ , on peut écrire  $\frac{\partial y}{\partial u_i}$  en fonction du SCR des chocs :

$$\frac{\partial y}{\partial u_i} = \sum_{k=1}^m \frac{\partial y}{\partial SCR^k} \frac{\partial SCR^k}{\partial u_i} \quad (A.2)$$

Avec la notion du choc unitaire on a  $\frac{\partial SCR^k}{\partial u_i} = scr_k^i$ , c'est le choc unitaire (correspond à 1 MAD) de ligne  $i$  et du choc  $k$ .

Par une dérivation matricielle on a :

$$\frac{\partial y}{\partial x} = 2 \times \Omega_{march} \times x$$

Donc, pour un choc simple (EX property),  $\frac{\partial y}{\partial SCR^k}$  est le  $k$ -ième terme<sup>1</sup> du vecteur  $2\Omega_{marche} \times x$  qui correspond au même position du choc  $k$  dans le vecteur  $x$ .

Pour un sous-choc, par exemple EQUITY 1 (E1) dans EQUITY(E),  $\frac{\partial y}{\partial SCR^k}$  est donné par :

$$\frac{\partial y}{\partial SCR^{E1}} = \frac{\partial y}{\partial SCR^E} \frac{\partial SCR^E}{\partial SCR^{E1}}$$

L'expression de  $\frac{\partial y}{\partial SCR^E}$  est donné par le terme<sup>2</sup>  $k$  du vecteur  $2\Omega_{marche} \times x$ . Il reste à calculer le terme  $\frac{\partial SCR^E}{\partial SCR^{E1}}$ .

D'après la formule 1.2 :

$$SCR_{EQUITY} = \sqrt{U^t \times \Omega \times U}$$

Alors, par une dérivation matricielle :

$$\frac{\partial SCR^E}{\partial U} = \frac{1}{2\sqrt{U^t \times \Omega \times U}} \times 2 \times \Omega \times U = \frac{1}{SCR^E} \times \Omega \times U$$

Donc  $\frac{\partial SCR^E}{\partial SCR^{E1}}$  correspond à la première terme de  $\frac{1}{SCR^E} \times \Omega \times U$  avec  $U = \begin{pmatrix} SCR_{EQUITY1} \\ SCR_{EQUITY2} \end{pmatrix}$ .

Donc :

$$C_i = \frac{\partial f(u)}{\partial u_i} = \frac{\partial \sqrt{y}}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u_i} = \frac{1}{2SCR_{marche}} \times \sum_{k=1}^m \frac{\partial y}{\partial SCR^k} \times scr_k^i \quad (A.3)$$

Où  $\frac{\partial y}{\partial SCR^k}$  est calculée selon le type de l'actif  $i$  selon le calcul développé précédemment.

---

1. Par exemple Si la position de PROPERTY(P) dans le vecteur  $choc^{global}$  est la troisième donc le  $\frac{\partial y}{\partial SCR^P}$  est la troisième dans  $2\Omega_{marche}choc^{global}$

2. Si la position de EQUITY(E) dans le vecteur  $choc^{global}$  est la deuxième donc le  $\frac{\partial y}{\partial SCR^E}$  est la deuxième dans  $2\Omega_{marche}choc^{global}$

## Annexe B

# Démonstration : Le calcul du Gradient

Cette nouvelle méthode vise à détailler le fonctionnement de l'algorithme lorsqu'il est contraint par la pénalisation représentée par le terme :  $\lambda \times \|u^0 - u\|_2$ . Ce terme vise à pénaliser les écarts de l'allocation actuelle  $u$  vis-à-vis de l'allocation initiale  $u^0$ . La fonction à optimiser par l'algorithme du gradient est la suivante :

$$\text{IndPen}_{RR}^\alpha : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$$
$$u \rightarrow \frac{E[R(u)]}{(SCR_{\text{marché}}(u))^\alpha} - \lambda \times (\|u^0 - u\|_2)^2$$

On calcule donc le gradient de cette fonction :

$$\nabla (\text{IndPen}_{RR}^\alpha) = \nabla (\text{Ind}_{RR}^\alpha) - \nabla (\|u^0 - u\|_2)^2$$

Or la norme correspond à :

$$(\|u^0 - u\|_2)^2 = \sum_{i=1}^n (u_i - u_0)^2$$

D'où,  $\nabla (\lambda \times (\|u^0 - u\|_2)^2) = 2 \times \lambda \times (u_i - u^0)$

Ainsi

$$\nabla (\text{IndPen}_{RR}^\alpha) = \nabla (\text{Ind}_{RR}^\alpha) - 2 \times \lambda \times (u_i - u^0)$$

La récurrence appliquée dans l'algorithme devient alors :

$$u_k = u_{k-1} + \omega \times \nabla (\text{IndPen}_{RR}^\alpha) \text{ avec } \omega \text{ le pas appliqué}$$

$$u_k = u_{k-1} + \omega \times [\nabla (\text{Ind}_{RR}^\alpha) - 2 \times \lambda \times (u_k - u^0)]$$

$$(1 + 2\omega\lambda) \times u_k = u_{k-1} + \omega \times [\nabla (\text{Ind}_{RR}^\alpha) + 2\lambda u^0]$$

$$u_k = \frac{u_{k-1} + \omega \times [\nabla (\text{Ind}_{RR}^\alpha) + 2\lambda u^0]}{(1 + 2\omega\lambda)}$$

Cette expression est le centre de l'algorithme d'optimisation et constitue la récurrence sous contrainte.