

Dédicaces

À ma chère mère, Ton amour et ton soutien sans faille ont été mon guide tout au long de ce parcours. Ce rapport t'est dédié, en gratitude pour tout ce que tu as fait pour ma réussite.

À mon cher père, Tes encouragements constants et tes précieux conseils ont été une source d'inspiration. Ce travail est pour toi, en reconnaissance de ta confiance indéfectible.

À mon cercle d'amis proches, Merci pour votre amitié et vos encouragements qui m'ont aidé à surmonter les difficultés. Ce rapport vous est dédié, pour avoir été à mes côtés tout au long de cette aventure.

Merci à vous tous, du fond du cœur, pour votre soutien inestimable.

Zakaryae Maamour

Je tiens à dédier ce travail :

À ma chère mère, Pour ses sacrifices, son amour inconditionnel et son éducation qui ont fait de moi ce que je suis aujourd'hui.

À mes frères Karim et Mohamed, Pour leur encouragement, leur soutien permanent et pour être ma motivation à devenir la meilleure version de moi-même, telle qu'ils aimeraient me voir.

À mes amis et collègues, Pour les souvenirs inoubliables que nous avons partagés.

Anwar ARSSI

Remerciement

Nous souhaitons exprimer notre profonde gratitude à toutes les personnes qui ont contribué à la réalisation de ce projet.

Nous adressons nos remerciements les plus sincères à **M. Kamal TALHAOUI**, Directeur de la direction Tarification à la Société Centrale de Réassurance (SCR), ainsi qu'à **M. Brahim DAOUDI**, pour leur encadrement rigoureux, leur soutien constant et leur disponibilité tout au long de ce travail. Leur expertise et leurs conseils avisés ont été essentiels à la qualité de cette étude. Nous vous sommes tous infiniment reconnaissants pour cette expérience marquante

Nous remercions également vivement **M. MARRI Fouad**, notre professeur et encadrant interne, pour son accompagnement bienveillant, ses recommandations pertinentes et ses encouragements qui ont grandement contribué à la bonne conduite de ce projet.

Nous exprimons aussi notre reconnaissance à **Mme .ZEDDOUK Fadoua** pour avoir accepté d'évaluer ce travail avec rigueur, ainsi qu'à l'ensemble du corps professoral de l'INSEA, dont l'enseignement de haut niveau a constitué un socle fondamental pour notre formation et la réalisation de ce rapport.

Enfin, nous remercions toutes les personnes, proches ou professionnelles, qui, par leurs conseils, leur soutien moral ou leur aide technique, ont participé, de près ou de loin, à l'aboutissement de ce projet.

Résumé

Ce projet de fin d'études, mené en collaboration avec Atlantic Re (ex SCR), s'attaque à la problématique complexe de la tarification des traités de réassurance non-vie non proportionnels, spécifiquement les couvertures en excédent de sinistre (XS). L'ambition est de dépasser les approches standards en développant et en appliquant un cadre méthodologique multi-facettes pour aboutir à des primes techniques à la fois précises et robustes, intégrant une quantification rigoureuse des incertitudes inhérentes.

Le cœur de l'analyse repose sur la mise en œuvre et la comparaison de trois approches de tarification distinctes mais complémentaires, appliquées à un programme de réassurance Non-Marine concret pour une cédante chinoise. La méthode historique « Burning Cost » fournit une première estimation basée sur l'expérience sinistre passée, soigneusement retraitée et actualisée. Parallèlement, une modélisation probabiliste approfondie est conduite, décomposant le risque via des lois de fréquence (Poisson, Binomiale négative) et de sévérité (Pareto, Lognormale, Pareto généralisée) ajustées aux données. Cette approche permet non seulement d'estimer la prime pure via simulation Monte-Carlo, mais aussi d'évaluer l'incertitude paramétrique grâce à des techniques de rééchantillonnage bootstrap, offrant ainsi une vision plus complète du risque. Une méthode mixte par extrapolation Pareto est également explorée pour traiter spécifiquement les couches de risque élevées. L'étude intègre l'impact financier des clauses contractuelles spécifiques, telles que les reconstitutions de la couverture et aussi les paramètres de tarification (la mesure de risque utilisé), affinant ainsi l'évaluation du coût technique.

Un volet essentiel de ce travail concerne la construction et la modélisation des courbes de tarifs marché pour les traités catastrophe (CAT XL). Cette démarche vise à fournir un outil de benchmark dynamique, permettant de positionner les tarifs techniques par rapport aux conditions prévalant sur le marché et d'appréhender les cycles de souscription. La méthodologie proposée articule l'ajustement de fonctions de puissance (« power curves ») par moindres carrés et l'interpolation par courbes splines pour capturer l'évolution du Rate On Line (ROL) en fonction des caractéristiques des tranches (priorité, limite). Calibrée

sur des données de transactions réelles issues de marchés spécifiques (Turquie, Inde), cette approche se distingue par l'utilisation des (« midpoints »), offrant une représentation plus fiable et stable des tendances tarifaires que les méthodes conventionnelles. Le modèle résultant constitue un outil prédictif pour l'évaluation de nouveaux programmes et l'ajustement stratégique des prix.

MOTS-CLÉS : Tarification réassurance, Traités non proportionnels, Burning Cost, Modélisation probabiliste, Extrapolation Pareto, Courbes d'exposition, Clauses contractuelles, Incertitude paramétrique, Bootstrap, Rate On Line (ROL), Courbes de marché, Midpoint.

Abstract

This final-year project, conducted in collaboration with Atlantic Re, addresses the complex issue of pricing non-proportional non-life reinsurance treaties, specifically excess of loss (XL) covers. The aim is to go beyond standard approaches by developing and applying a multi-faceted methodological framework to produce technical premiums that are both accurate and robust, with a rigorous quantification of the inherent uncertainties.

The core of the analysis relies on the implementation and comparison of three distinct yet complementary pricing approaches, applied to a concrete Non-Marine reinsurance program for a Chinese cedant. The historical "Burning Cost" method provides an initial estimate based on processed and updated loss experience. In parallel, a comprehensive probabilistic modeling approach is undertaken, breaking down the risk using frequency (Poisson, Negative Binomiale) and severity (Pareto, Lognormal, generalized pareto) distributions fitted to the data. This allows not only the estimation of the pure premium through Monte Carlo simulation, but also the assessment of parameter uncertainty via bootstrap resampling techniques, offering a broader view of risk. A hybrid approach based on Pareto extrapolation is also explored, specifically targeting high-risk layers. The study incorporates the financial impact of contractual clauses, such as reinstatements, further refining the technical cost evaluation.

An essential component of this work involves the construction and modeling of market pricing curves for catastrophe treaties (CAT XL). This approach aims to provide a dynamic benchmarking tool, enabling technical premiums to be positioned relative to prevailing market conditions and supporting the understanding of underwriting cycles. The proposed methodology combines the fitting of power functions via least squares and spline interpolation to capture the evolution of the ROL depending on layer characteristics. Calibrated on real data from specific markets (Turkey, India), this approach stands out through the use of optimized midpoints, offering a more reliable and stable representation of pricing trends than conventional methods. The resulting model serves as a predictive tool for evaluating new programs and guiding strategic pricing decisions.

Table des matières

1	Contexte Général	16
1	Organisme d'accueil	17
2	Définition et rôle de la réassurance	18
2.1	Définition de la réassurance	18
2.2	Historique de la réassurance	19
2.3	Rôles de la réassurance	19
2.4	La réassurance financière	20
3	Les différentes formes de la réassurance	21
3.1	Par critère juridique	21
3.2	Par critère technique	22
3.3	Les clauses d'un traité de réassurance	27
3.4	Le processus de réassurance	31
2	Tarification des traités de réassurance non-vie non proportionnelle	33
1	Eléments techniques de la tarification	35
1.1	Objectifs de la tarification	35
1.2	L'Assurance non-vie et ses branches	36
1.3	Ventilation par branche et nature de tranche	37
1.4	Notions clés en réassurance	39
1.5	Définition et décomposition de La prime de réassurance	40
1.6	Les modèles de tarification	45
2	Méthode Burning Cost	46
3	Méthode probabiliste	49
3.1	Modélisation de la Sévérité	51
3.2	Modélisation de la loi de fréquence de sinistre	52
3.3	Évaluation des ajustements des lois	52
3.4	Incertitude sur les paramètres estimés	56
3.5	Tarification des clauses particulières et Simulation stochastique	58
4	Méthode mixte (Extrapolation Pareto)	65
5	Méthode par exposition	66

5.1	Fonctionnement des courbes d'exposition	66
5.2	Propriétés mathématique des courbes d'exposition	68
5.3	Une famille de référence : les courbes MBBEFD	69
5.4	Processus de cotation	69
6	Processus de tarification	71
6.1	Check-list des données nécessaires à la cotation	71
6.2	Exploitation de la statistique cédante	72
6.3	Choix du modèle de tarification	75
3	Application des méthodes de Tarification pour les Traités XS	76
1	Présentation du programme de réassurance à tarifer	77
2	Application de la méthode Burning Cost	78
3	Application de la méthode d'extrapolation Pareto	81
4	Application de la méthode Probabiliste	81
4.1	Statistiques descriptives	81
4.2	Modélisation de la sévérité	83
4.3	Modélisation de la fréquence	85
4.4	Retraitement des sinistres majeurs	86
4.5	Simulation et Tarification	87
5	Incertitude sur les paramètres	89
5.1	Incertitude des paramètres de la fréquence	89
5.2	Incertitude des paramètres de la sévérité	91
5.3	Résultats de l'incertitude des paramètres sur la prime pure	92
4	Modélisation et construction des courbes de tarifs marché	95
1	Présentation de la problématique	96
2	Les outils benchmark : Les approches marché par branche	96
2.1	Outil benchmark adapté aux branches longues	96
2.2	Outil benchmark adapté aux branches courtes	98
3	Tarification des taraités CAT XS à l'aide de courbes de marché	98
3.1	La méthode des power curves appliquées aux ROL	98
3.2	La méthode Spline curve	106
3.3	Validation du modèle	108
3.4	Tarification d'un nouveau programme	111
4	Application et résultats	112
4.1	Marché Turc	112
4.2	Marché Indien	118
4.3	Conclusion	121

Références	123
Annexes	126
A Les Opérateurs de Distorsion et mesures de risque	126
A.1 Propriétés des mesures de risuqe	126
A.2 Principe de base des opérateurs de distorsion :	127
A.3 Principe de Wang :	127
A.4 Conditions sur l'opérateur g :	127
A.5 Intérêt du principe :	128
A.6 Exemples Fondamentaux	128
B lois usuelles en réassurance	131
B.1 Modélisation de la sévérité	131
B.2 Modélisation de la fréquence	133
C Prime Pure dans le cadre Pareto-Poisson	135
D Le QQ-plot	137
E L'algorithme récursif de Panjer	139
F Checklist des données	142

Table des figures

1.1	Changement de l'identité de marque : SCR devient Atlantic Re	18
1.2	Organigramme d'Atlantic Re	18
3.1	Traité QP avec un taux de cession 30% [source 3]	23
3.2	Traité XP avec un plein de conservation de 0.5M et une capacité de 3 pleins [source 3]	24
3.3	Fonctionnement de l'excédent de sinistres par risque [source 2]	25
3.4	Fonctionnement de l'excédent de sinistres par évènement [source 2]	26
3.5	Processus du fonctionnement des compagnies de réassurance [source 6]	31
3.6	Comparaison des chaînes de production en assurance et en réassurance [Source : 5]	32
1.1	Segmentation par nature des tranches [source 7]	38
1.2	Illustration de la VaR et le TVaR [source 13]	43
3.1	Résumé du processus de la méthode probabiliste	51
5.1	Plusieurs courbes d'exposition sur le marché [source 6]	67
6.1	Vue d'ensemble du processus de tarification	72
4.1	Boxplot des coûts de sinistres (Quantiles 1% - 99%)	82
4.2	Analyse de la p-value du test KS (Pareto) en fonction du seuil.	83
4.3	Comparaison visuelle des ajustements des lois de sévérité.	84
5.1	Bootstrap du paramètre de la loi de Poisson	90
4.1	Comparaison des courbes de marché de 2025 ajustées selon les quatre midpoints	114
4.2	Comparaison des courbes de marché de 2024 ajustées selon les quatre midpoints	114
4.3	Diagnostics d'ajustement du modèle avant	115
4.4	Vue d'ensemble de l'interface R Shiny	116
4.5	Interface de cotation	117
4.6	Les courbes benchmark du marché turc.	117
4.7	Comparaison des courbes ajustées selon les quatre midpoints (points 2025 affichés avec LOG_Gen)	120

4.8	Diagnostics d'ajustement pour le modèle LOG_Gen	121
A.1	Exemeples d'un opérateur de distorsion g	128
D.1	QQ-Plot sur simulation d'une loi de Pareto.	138
D.2	QQ-Plot sur simulation d'une loi Log-Normale.	138

Liste des tableaux

3.1	Lois usuelles pour le montant de sinistres	52
3.2	Modélisation du nombre de sinistres par une loi de Poisson	52
6.1	Avantages et limitations des différentes méthodes de tarification	75
1.1	Structure du traité Non Marine XS – Cédante chinoise (année 2024)	77
2.1	Évolution de l'indice d'actualisation (CHINE IIC)	78
2.2	EPI et EPI indexée par année	79
2.3	Extrait de calcul de la charge annuelle de réassureur et application des clauses particulières pour la première tranche	79
2.4	Résultats de la tarification	80
2.5	Composantes des chargements appliqués	80
4.1	Statistiques descriptives sommaires des coûts de sinistres.	81
4.2	Résumé des ajustements par des 3 lois	84
4.3	Fréquences annuelles de sinistres actualisées par l'EPI	85
4.4	Résultats des ajustements aux lois discrètes et tests d'adéquation	86
4.5	Résultats de tarification par tranche XS	87
4.6	Résultats par loi de distribution	88
4.7	Taux techniques utilisant d'autres mesures de risques	89
5.1	Analyse de l'estimateur de la moyenne du nombre de sinistre par bootstrap	90
5.2	Statistiques de l'estimateur du paramètre de Pareto (bootstrap)	91
5.3	Analyse de l'estimateur de la prime pure des tranches	93
4.1	Paramètres d'ajustement des Courbes Marché de l'année 2025 selon le type de midpoint	113
4.2	Paramètres d'ajustement des Courbes Marché de l'année 2024 selon le type de midpoint	113
4.3	Paramètres d'ajustement pour le marché Indien	119
F.1	Résumé des données techniques, de souscription et CAT pour la cotation	142
F.2	Spécifications de portefeuille par branche	143

Liste des Abréviations

XS	Traité Excess of Loss
QP	Traité Quote-Part
XP	Traité Excédent de Plein
C	cover (Porté).
P	Priority (Priorité).
AAL	Annual Aggregate Limit
AAD	Annual Aggregate Deductible
BC	Burning Cost
ROL	Rate On Line
CAT XL	Catastrophe Excess of Loss
VaR	Value at Risk
TVaR	Tail Value at Risk
EPI	Estimated Premium Income
IIC	Indice de Coût de la Construction
MBBEFD	Courbes de Maxwell-Boltzmann, Bose-Einstein et Fermi-Dirac
STD	Standard Deviation
EP CURVES	Exceedance Probability Curves
TIV	Total Insured Value

Introduction Générale

Dans un environnement financier en constante évolution, la réassurance joue un rôle capital dans la stabilisation des marchés d'assurance et la gestion des risques complexes. Au sein de ce domaine, la tarification des traités de réassurance non-vie non proportionnels, et plus particulièrement les couvertures en excédent de sinistre (Excess of Loss – XS), représente un défi majeur pour les acteurs du secteur. Ces traités, qui protègent les assureurs contre les pertes catastrophiques ou les accumulations de sinistres, exigent des méthodes d'évaluation précises et robustes pour garantir l'équilibre financier des réassureurs et la pérennité des couvertures.

Le présent rapport, s'inscrit dans cette problématique centrale. Il a pour objectif d'explorer et de développer un cadre méthodologique approfondi pour la tarification des traités de réassurance non-vie non proportionnels, en mettant l'accent sur la modélisation et la construction des courbes de tarifs marché. L'ambition de ce travail est de dépasser les approches traditionnelles en proposant des solutions innovantes qui intègrent une quantification rigoureuse des incertitudes inhérentes à ces opérations.

Ce travail permis d'approfondir la compréhension des mécanismes de tarification des traités XS, en explorant diverses approches et en les appliquant à des cas concrets. L'étude a également porté sur l'élaboration d'outils d'analyse du marché, essentiels pour une prise de décision éclairée dans ce secteur complexe. L'objectif final est de fournir des perspectives et des outils pertinents pour la tarification, contribuant ainsi à l'optimisation des stratégies des réassurances.

Ce projet est structuré en plusieurs chapitres. Le premier chapitre posera le contexte général de la réassurance. Les chapitres suivants détailleront les différentes facettes de cette étude, depuis les fondements théoriques jusqu'aux applications pratiques et à la modélisation des dynamiques de marché. Ce travail espère apporter une contribution significative à la compréhension et à l'optimisation des processus de tarification en réassurance, en fournissant des outils et des analyses pertinents.

Chapitre 1

Contexte Général

Sommaire

1	Organisme d'accueil	17
2	Définition et rôle de la réassurance	18
2.1	Définition de la réassurance	18
2.2	Historique de la réassurance	19
2.3	Rôles de la réassurance	19
2.4	La réassurance financière	20
3	Les différentes formes de la réassurance	21
3.1	Par critère juridique	21
3.2	Par critère technique	22
3.3	Les clauses d'un traité de réassurance	27
3.4	Le processus de réassurance	31

1 Organisme d'accueil

La Société Centrale de Réassurance (SCR) est un acteur clé dans le secteur de la réassurance, opérant auprès de plus de 500 clients dans plus de 70 pays, notamment en Afrique, au Moyen-Orient, en Inde, au Pakistan, en Chine et en Corée du Sud. Cette présence internationale témoigne de son positionnement stratégique sur le marché mondial de la réassurance. La Caisse de Dépôt et de Gestion (CDG) est l'actionnaire majoritaire de la SCR avec 94 % des actions. La SCR s'inscrit donc dans le cadre de valeurs de la CDG qui privilégie le développement économique et social par la promotion de projets structurants et stratégiques dans le Royaume.

La SCR a connu une croissance soutenue de ses activités, répondant aux besoins croissants du marché grâce à une stratégie d'expansion ciblée. Elle a ainsi établi trois bureaux de représentation en Côte d'Ivoire, en Égypte et au Rwanda, renforçant sa proximité avec les marchés locaux et consolidant son rôle dans le développement régional de la réassurance. Au Maroc, la SCR joue un rôle essentiel en tant que partenaire de confiance, mettant à disposition une expertise spécialisée pour répondre aux exigences du secteur. Ses services contribuent à renforcer la stabilité et la résilience du marché de l'assurance, tout en soutenant les objectifs d'intérêt général.

Engagée dans la promotion des marchés de la réassurance, la SCR propose des solutions adaptées et innovantes, favorisant la croissance économique et la stabilité financière des régions où elle est implantée. Grâce à une collaboration étroite avec ses clients et à une anticipation des évolutions du marché, la SCR s'affirme comme un acteur fiable et stratégique, prêt à relever les défis futurs.

En 2025, la SCR opère une transformation majeure avec l'adoption d'une nouvelle identité de marque, devenant **Atlantic Re**. Cette évolution reflète l'ambition de la société de renforcer sa présence sur les marchés internationaux, particulièrement en Afrique. À travers son plan stratégique REACH2030, Atlantic Re vise à s'établir comme un leader régional dans le secteur de la réassurance, en augmentant sa part de chiffre d'affaires sur le continent africain tout en consolidant son expertise et ses compétences. Cette transition stratégique marque une étape clé dans l'histoire de la société, soulignant son engagement à répondre aux besoins croissants des marchés émergents et à s'adapter aux dynamiques globales de la réassurance.



Figure 1.1 – Changement de l'identité de marque : SCR devient Atlantic Re

Atlantic Re suit une organisation hiérarchique avec un schéma de gouvernance présidé par la CDG, à travers sa présidence sur conseil d'administration. Ci-dessous l'organigramme d'Atlantic Re :

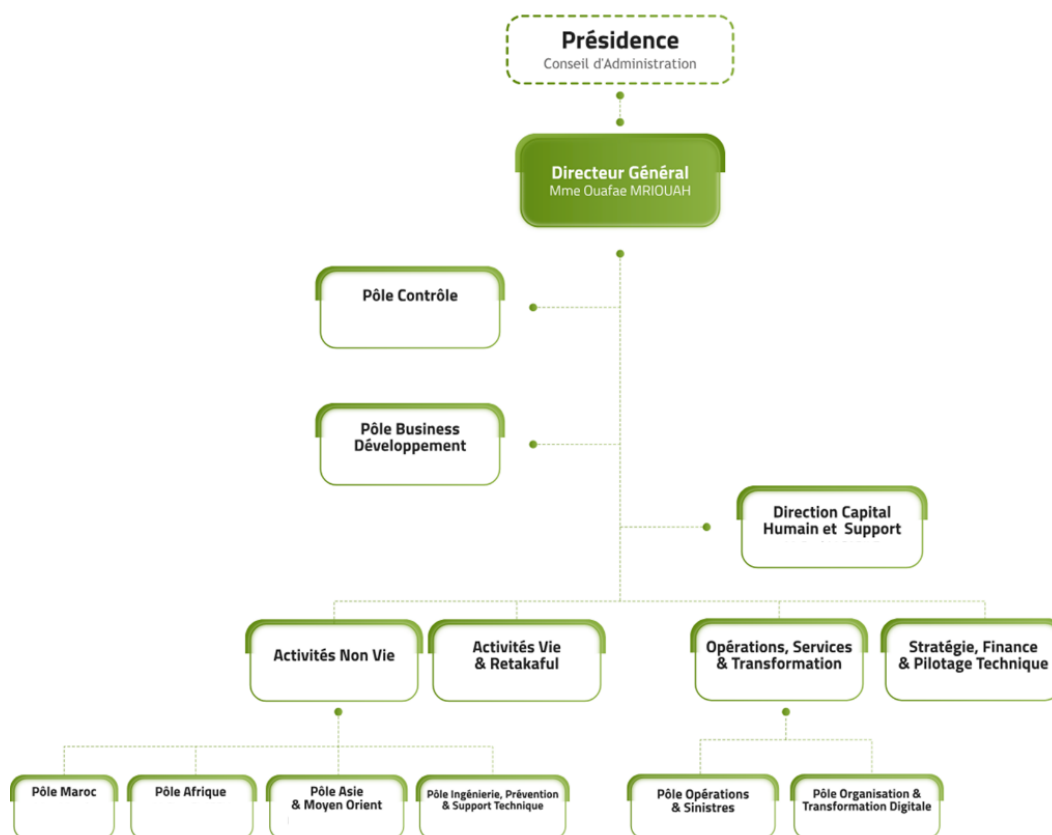


Figure 1.2 – Organigramme d'Atlantic Re

2 Définition et rôle de la réassurance

2.1 Définition de la réassurance

La réassurance est souvent désignée comme *l'assurance des assureurs*. Plus techniquement, il s'agit d'une opération par laquelle un assureur, appelé *cédante*, transfère tout ou partie d'un ou plusieurs risques à un réassureur en échange d'une prime. Cette

transaction est formalisée par un *traité de réassurance* ou, dans le cas des réassurances facultatives, par un contrat spécifique.

La réassurance peut être perçue comme un partage du risque entre l'assureur et le réassureur. Toutefois, ce partage s'effectue **verticalement** plutôt qu'**horizontalement**, contrairement à la co-assurance. Ainsi, la réassurance permet une division des risques sans pour autant fractionner le contrat d'assurance initial. Par ailleurs, il est important de souligner que le réassureur n'est pas directement responsable des engagements pris par la cédante envers ses assurés.

2.2 Historique de la réassurance

L'histoire de la réassurance est intimement liée à l'évolution de l'assurance elle-même. L'apparition de l'assurance en 1666, à la suite du grand incendie de Londres, a marqué une transformation dans la gestion des risques. Grâce à l'assurance, il est devenu possible de mutualiser un risque individuel en un risque collectif.

Dès 1681, la grande ordonnance de la marine, promulguée par Colbert, a permis aux assureurs de se couvrir en souscrivant des assurances auprès d'autres assureurs, organisés en syndicats. Cependant, la réassurance moderne ne prend véritablement son essor qu'en Allemagne en 1842. À cette époque, l'industrialisation croissante et la fréquence des incendies rendaient de plus en plus difficile pour les assureurs de faire face à leurs engagements.

Le 22 décembre 1842, à la suite d'un important incendie à Hambourg, l'idée de créer une société spécialisée en réassurance a émergé. C'est ainsi qu'en 1846, la *Cologne Re* (*Kölnische Rückversicherungs-Gesellschaft*), aujourd'hui connue sous le nom de *GenRe*, a été fondée. Son premier traité de réassurance a été souscrit en 1852. Depuis lors, les techniques de réassurance n'ont cessé d'évoluer pour s'adapter aux besoins du marché et aux nouveaux risques émergents.

2.3 Rôles de la réassurance

En se réassurant, la cédante peut bénéficier de plusieurs types de soutiens en fonction de ses besoins. Tout d'abord, dans le but de répondre aux exigences de la réglementation Solvabilité 2, la réassurance permet à la cédante de mieux maîtriser sa probabilité de ruine, et ce, par plusieurs mécanismes, comme par exemple, en transférant des portefeuilles risqués (volatiles) et/ou mal connus.

Aussi, lors du lancement d'un produit d'assurance, le besoin en fonds propres peut être important. Néanmoins, la compagnie d'assurance ne dispose pas nécessairement de fonds propres suffisants (ou ne veut pas allouer une partie de ses fonds propres) pour le démarrage de son produit. Dans ce cas, la réassurance permet de compenser cette absence de fonds propres (par exemple avec une réassurance de type quote-part, avec un taux de cession élevé) à travers une forme d'assistance technique et de partenariat.

Également, si la cédante possède un portefeuille de petite taille, la volatilité de la fréquence de sinistre peut être élevée. Parallèlement, si le portefeuille est grand, la fréquence est bien estimée mais la probabilité de survenance d'un sinistre de sévérité forte peut être importante. Dans ce cadre, le réassureur peut intervenir pour lisser les résultats de ces portefeuilles.

Finalement, dans un contexte de sinistres élevés demandant une forte capacité, le réassureur peut proposer d'en prendre en charge une grande partie. Dans le cas de catastrophes naturelles (tremblements de terre, tempêtes, tsunamis, ...), il est aussi possible d'utiliser la réassurance pour mutualiser ces risques à l'échelle mondiale. Il existe deux types de réassurance pouvant chacune prendre quatre formes.

2.4 La réassurance financière

La réassurance financière, encore appelée réassurance « Finite », permet de combiner différents niveaux de transfert de risque et de partage des profits éventuels entre compagnie cédante et réassureur. La tarification finale étant généralement plus souvent basée sur l'expérience réelle du traité de réassurance par rapport à un programme dit traditionnel, la compagnie cédante va généralement supporter une proportion plus large de ces sinistres à travers le paiement de la prime de réassurance et des revenus financiers qui seront explicitement pris en considération et définis par un taux d'intérêt créditeur.

Étant basés sur un transfert limité des risques, les traités de réassurance « Finite » peuvent couvrir un éventail très large de garanties et périls. Ils peuvent ainsi offrir une alternative aux longues listes d'exclusions des traités traditionnels et aux branches ou garanties dites non (ou moins facilement) assurables telles que les risques politiques, les risques environnementaux, les risques de change, les risques opérationnels, les risques de développement, etc. Contrairement aux programmes traditionnels, ces couvertures peuvent également être souscrites plus facilement sur une période pluriannuelle. Dans certains cas, une structure pluriannuelle est même une condition nécessaire à l'existence d'une telle protection « Finite ».

Ces couvertures peuvent convenir pour les petits risques et les risques « moyens ». Pour les premiers, toute couverture doit surtout considérer les éléments de cash-flows, par exemple la possibilité de considérer immédiatement dans le calcul des résultats la valeur actuelle des réserves pour sinistres au lieu de leur valeur nominale. Pour les risques moyens, une solution mixte entre transfert de risque et financement dépendra de l'aversion au risque et de considérations de risque/profit. Il s'avère par contre difficile de lisser sur une période de temps raisonnable des événements de type catastrophique à faible fréquence et forte sévérité. Dans ces cas, d'autres structures de transfert de risque tels que les « Cat Bonds », « Cat Swaps » et autres opérations de titrisation sont à recommander lorsque la réassurance traditionnelle ne répond pas ou n'est pas considérée comme efficace.

3 Les différentes formes de la réassurance

3.1 Par critère juridique

1. La réassurance facultative

C'est le mode le plus ancien de réassurance : l'assureur et le réassureur sont respectivement libres de céder ou d'accepter un risque en totalité ou en partie. La forme facultative est utilisée pour couvrir :

- les **grands risques** où les sommes assurées dépassent largement la capacité de souscription de la compagnie (exemples : risques industriels, technologiques ou spéciaux) ;
- des **risques exceptionnels**, rarement souscrits par la compagnie mais acceptés à titre commercial (exemple : corps maritimes pour une compagnie spécialisée dans l'automobile).

Ce mode de réassurance nécessite une forte capacité de souscription, une expertise spécialisée et des coûts de gestion élevés. Il peut être *proportionnel* ou *non proportionnel*.

2. La réassurance facultative-obligatoire

Le réassureur s'engage à accepter toutes les affaires attribuées par la cédante, sous réserve d'un engagement maximum fixé au préalable. Lorsque les cessions facultatives deviennent fréquentes dans une branche donnée, la cédante cherche à obtenir une couverture facultative-obligatoire.

Inconvénient : les risques cédés ne sont pas forcément homogènes avec le portefeuille de la cédante.

3. La réassurance obligatoire

Ce mode de réassurance est le plus utilisé car il repose sur une **obligation réciproque**.

- La **cédante** s'engage à céder les risques d'une catégorie spécifique sur une période donnée.
- Le **réassureur** est obligé de les accepter.

Ces contrats, appelés **traités**, peuvent être *proportionnels* ou *non proportionnels*.

Ce projet se focalisera principalement sur les traités de réassurance.

3.2 Par critère technique

3.2.1 La réassurance proportionnelle

Dans la réassurance proportionnelle, tous les éléments du risque (**primes** et **sinistres**) sont partagés proportionnellement entre l'assureur et le réassureur. Pour cette raison, il y a un réel partage du risque entre les deux parties.

Ce type de réassurance est principalement utilisé par :

- **Des assureurs de petite et moyenne taille** : réduction du besoin de marge de solvabilité.
- **Des assureurs en fort développement**.
- **Des branches à développement rapide** impliquant des investisseurs techniques.

On distingue alors deux types de réassurance proportionnelle :

- **Le Quote-Part (QP) ou Quote-Share (QS)** : Il s'agit de la forme la plus simple de réassurance. Pour ce type de traité, un taux de cession $x\%$ est défini. Le réassureur s'engage alors à prendre en charge $x\%$ de tous les risques du portefeuille considéré, moyennant le même pourcentage $x\%$ de la prime perçue pour ce portefeuille.

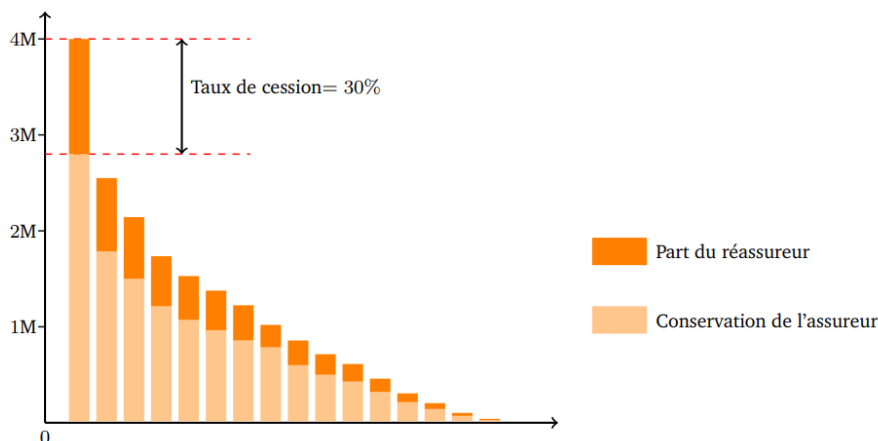


Figure 3.1 – Traité QP avec un taux de cession 30% [source 3]

Ce type de couverture est intéressant pour les cédantes disposant d'un capital insuffisant et désirant se développer. En effet, la cédante peut souscrire plus de primes pour le même niveau de capital tout en maintenant sa marge de solvabilité.

Par contre, ce type de traité ne permet pas d'obtenir un lissage des résultats dans le temps. En effet, le ratio S/P demeure le même avant et après application du Quote-Part.

De plus, ce type de traité ne permet pas de se protéger contre la survenance de sinistres extrêmes.

	Risque Total	Risque Conservé	Risque Cédé
Primes	$\Pi = \sum_{i=1}^n \Pi_i$	$(1 - x)\Pi$	$x\Pi$
Sinistres	$S = \sum_{i=1}^n X_i$	$(1 - x)S$	xS

- **L'Excédent de Plein (XP)** : Dans le cas d'un Quote-Part, comme le montre la figure 3.1, le réassureur est impliqué dans tous les sinistres, même les plus petits. Cela n'est pas nécessairement la meilleure stratégie pour la cédante. En effet, les petits risques sont plus fréquents et donc mieux maîtrisés que les grands risques. De plus, ces risques représentent en général le plus grand nombre de polices du portefeuille de la cédante. C'est pourquoi certaines préféreront conserver une plus grande partie de la prime (et donc les petits sinistres) et bénéficier d'une protection proportionnelle uniquement pour les risques les plus importants. Ces cédantes souscriront alors un traité en Excédent de Plein. Pour un Excédent de Plein, à la différence du Quote-Part, le taux de cession est défini pour chaque police selon la formule suivante :

$$x_i = \min \left\{ \max \left(\frac{S_i - R}{S_i}, 0 \right), \frac{C}{S_i} \right\}$$

où :

- S_i est la somme assurée totale pour la police $n^{\circ}i$.
- R désigne le *plein de rétention*, souvent appelé simplement *plein*, correspondant au montant maximal que la cédante souhaite conserver.
- C est la capacité de l'Excédent de Plein, définie en nombre de pleins.

R et C sont définis contractuellement.

Ainsi :

- Si $S_i \leq R$, la cédante conserve entièrement le risque de la police $n^{\circ}i$.
- Si $R < S_i \leq C$, la cédante cède $\frac{S_i - R}{S_i} \%$ au réassureur.
- Si $S_i > C$, la cédante cède $\frac{C}{S_i} \%$ au réassureur.

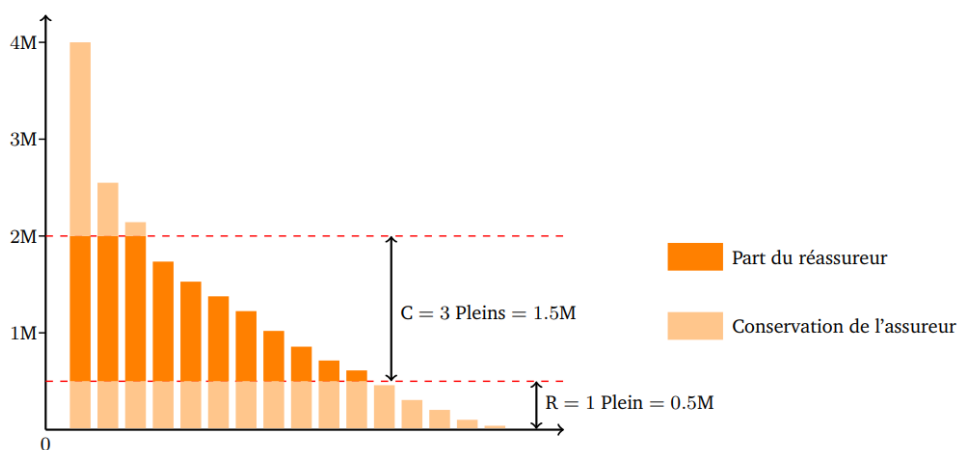


Figure 3.2 – Traité XP avec un plein de conservation de 0.5M et une capacité de 3 pleins [source 3]

3.2.2 La réassurance non proportionnelle

Pour ces types de traités, la symétrie des engagements entre l'assureur et le réassureur n'est plus respectée. Les obligations de chaque partie sont déterminées en fonction de deux critères indépendants de la prime d'assurance initiale et de la somme assurée du risque.

Le premier critère est [la priorité](#), représentant le seuil en dessous duquel le réassureur n'intervient pas. Le deuxième critère est [la portée ou la capacité](#), définissant le montant maximal de couverture offert par le réassureur.

3. LES DIFFÉRENTES FORMES DE LA RÉASSURANCE

Les deux types de traités non proportionnels qui existent sont les traités en Excédent de Sinistre (Excess of Loss, "XL" ou "XS") et les traités en Excédent de Perte Annuelle (Stop-loss, "SL").

- **L'excédent de sinistre (excess-of-loss), XL ou XS :** La part des montants des sinistres dépassant la priorité mais restant dans la limite de la capacité relève de la responsabilité du réassureur. Cette situation se subdivise en deux sous-catégories :
 - **L'excédent de sinistre par risque :** Ce type de traité est utilisé par les cédantes pour acquérir de la capacité ou pour limiter leur exposition par risque. Le réassureur prend à sa charge tous les sinistres au-delà d'un certain montant. L'assureur détermine le montant maximum qu'il peut conserver sur un seul sinistre pour une branche donnée et le réassureur prend en charge l'excédent de ce sinistre.

Contrairement à ce qui se passe dans un traité proportionnel, la prime de réassurance d'un traité non proportionnel est déterminée par le réassureur, qui la calcule à partir de statistiques de la cédante et/ou du marché pour une branche donnée. Le réassureur s'engage à payer un montant inférieur ou égal à la portée à chaque fois qu'une police est sinistrée pour un montant supérieur à la priorité. On parlera d'excédent de sinistre par risque en non-vie et d'excédent de sinistre par tête en vie.

Ainsi, si X est le montant du sinistre couvert par un traité XS, le montant à la charge du réassureur X^{reass} sera :

$$X^{\text{reass}} = \min(\max(X - P, 0), C)$$

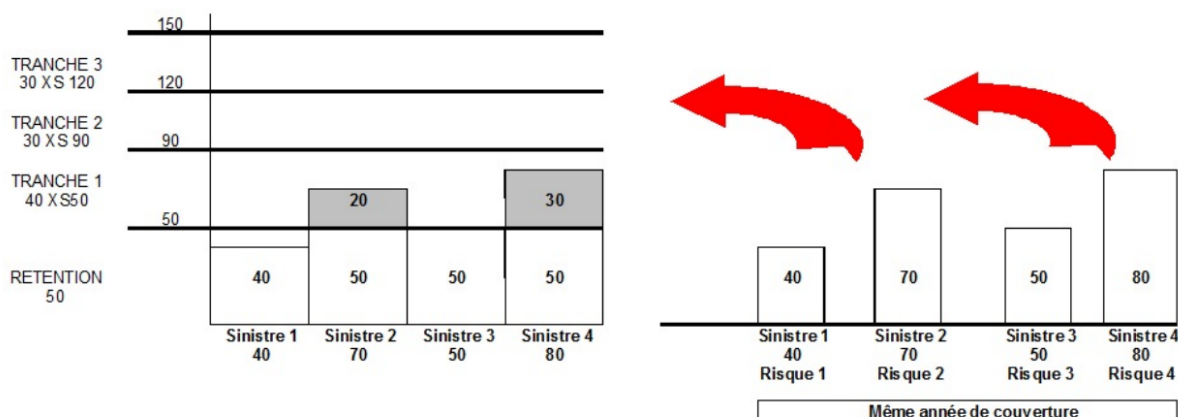


Figure 3.3 – Fonctionnement de l'excédent de sinistres par risque [source 2]

	Risque Total	Risque conservé	Risque cédé
Primes	Π	$(1 - t)\Pi$	$t\Pi$
Sinistres	$S = \sum_{i=1}^N X_i$	$\sum_{i=1}^N X_i^{net}$	$\sum_{i=1}^N X_i^{reass}$

Avec Π le montant total des primes récoltées par l'assureur sur toutes les polices sujettes au traité. La prime cédée au réassureur est un taux de prime t qui est appliqué sur l'ensemble des primes sujettes au traité Π .

- **L'excédent de sinistre par évènement** : l'XS par évènement, est liée à la survenance d'un évènement de même cause sur plusieurs risques réputés non indépendants (au regard de la survenance de l'évènement) dans le portefeuille de l'assureur. Le réassureur est confronté à une accumulation anticipée de sinistres. Le réassureur paie la partie du sinistre qui excède un montant pré-établi. Les pertes découlant d'un même évènement sont regroupées et le réassureur rembourse le montant de la perte globale qui excède le montant pré-établi. Il est donc primordial de définir clairement ce qui constitue un évènement dans le traité de réassurance.

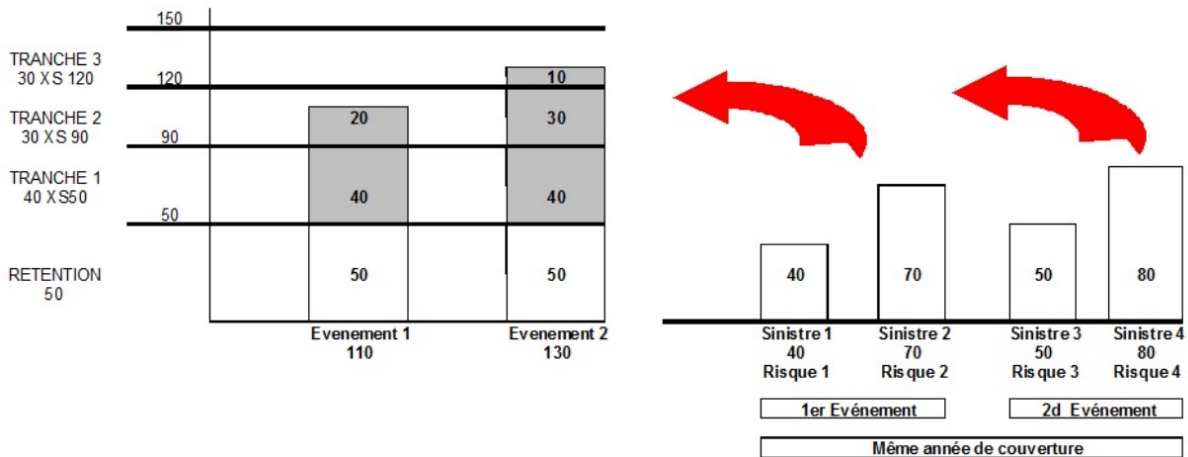


Figure 3.4 – Fonctionnement de l'excédent de sinistres par évènement [source 2]

- **L'excédent de perte annuelle ou stop loss (SL)** : Pour des risques à caractère cyclique et très localisés géographiquement, comme la grêle ou les orages, ce n'est pas tant la sévérité des sinistres mais plutôt leur fréquence qui pourrait compromettre le résultat d'une année. Pour ce type de sinistres, l'XS par risque est sans grand intérêt. L'XS par évènement n'est pas d'un grand secours non plus car ce dernier sert à se protéger contre la survenance d'un évènement exceptionnel, une catastrophe, qui occasionnerait de multiples sinistres individuels. Or, un orage exceptionnel, par exemple, n'aura pas nécessairement un gros impact sur le résultat d'une année tandis qu'un nombre important d'orages pourra mettre en péril ce résultat. D'où la nécessité

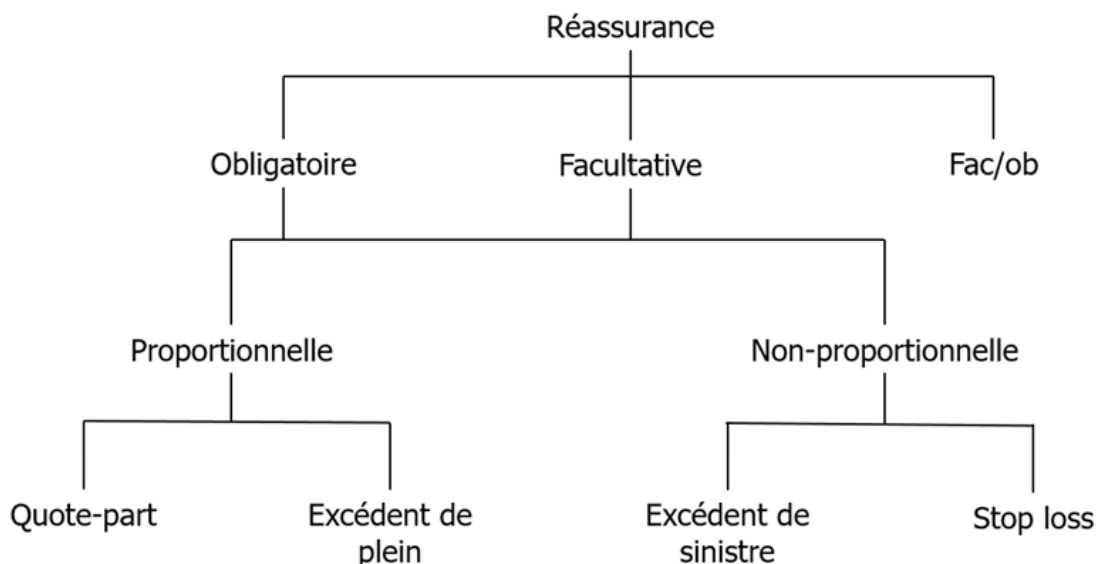
3. LES DIFFÉRENTES FORMES DE LA RÉASSURANCE

du traité en excédent de perte annuelle plus communément appelé Stop-Loss.

Le fonctionnement d'un Stop-Loss est identique à celui d'un Excédent de Sinistre à la différence que les limites du traité ne sont pas exprimées sous la forme de montants mais de rapports sinistres sur primes. Si l'on note $\{X_i\}_{i=1\dots n}$ les sinistres de la cédante durant la période de couverture, P la somme des primes acquises par la cédante et S le sinistre à charge du réassureur, on a :

$$S = \min \left\{ \max \left(\frac{\sum X_i}{P} - \text{priorité}, 0 \right), \text{portée} \right\} \times P$$

En somme, les différentes modes et formes de réassurance se résument dans le schéma suivant :



3.3 Les clauses d'un traité de réassurance

Dans le cadre des traités XS, ces clauses sont particulièrement déterminantes pour la tarification technique du traité. Elles sont généralement négociées avant la finalisation du contrat, reflétant ainsi la dynamique entre l'offre et la demande sur le marché de la réassurance. En période d'abondance de capacité en réassurance, les clauses tendent à être plus favorables à la cédante, tandis qu'en cas de ressources limitées, elles avantagent davantage le réassureur.

De manière générale, il est possible d'ajouter aux traités XS des clauses supplémentaires

visant à limiter certaines garanties. L'objectif principal de ces clauses est de réduire le coût de la couverture de réassurance tout en maintenant un niveau de protection adapté aux besoins de la cédante. Les plus courantes sont les suivantes :

3.3.1 Franchise annuelle

La clause de franchise annuelle ou *annual aggregate deductible* (AAD) spécifie le montant minimal de la charge annuelle avant que le réassureur intervienne. Par exemple, pour un traité XS avec le montant annuel éligible au traité de réassurance $S_{\text{cédée}}$, on a la formule suivante :

$$S_{\text{cédée}}^{\text{AAD}} = \max(S_{\text{cédée}} - \text{AAD}, 0)$$

3.3.2 Engagement maximal annuel

La clause d'engagement maximal annuel ou *annual aggregate limit* (AAL) spécifie le montant maximal annuel payé par le réassureur.

$$S_{\text{cédée}}^{\text{AAL}} = \min(S_{\text{cédée}}, \text{AAL})$$

Une combinaison de ces deux clauses donne le montant annuel à charge du réassureur :

$$S_{\text{cédée}}^{\text{AAD,AAL}} = \min[\max(S_{\text{cédée}} - \text{AAD}, 0), \text{AAL}]$$

Afin de tarifer un traité avec ce type de clause, il faut procéder par simulation. Pour chaque scénario, la charge annuelle à la charge du réassureur est calculée sans clause. La clause est ensuite appliquée pour tous les scénarios. La moyenne des charges du réassureur après prise en compte de la clause, d'après la loi des grands nombres, est un bon indicateur de la prime pure.

3.3.3 Clauses de reconstitution de garantie

Des clauses de reconstitutions de garantie, gratuites ou payantes : lorsque la portée « C » est consommée, le réassureur mettra à disposition une autre portée (gratuite ou payante selon des conditions prédéfinies au traité) et ainsi de suite selon le nombre de reconstitutions définies au traité. Il peut arriver que le nombre de reconstitutions soit

illimité.

Primes de reconstitution

Lorsque plusieurs sinistres surviennent dans la même année et absorbent toute la portée prévue par le contrat XS, la société cédante se retrouve à découvert. Pour éviter cela, les réassureurs ont mis en place la reconstitution de garantie, c'est-à-dire qu'après la survenance d'un sinistre, l'assureur va payer un certain montant pour bénéficier à nouveau de la protection totale du contrat XS qui lui était proposé à l'origine.

Ainsi, la clause de reconstitution sert à repayer la portée après sinistre, c'est-à-dire à maintenir le même niveau de protection pour la société cédante.

Partiellement ou totalement absorbée par la réclamation, la clause de reconstitution de la garantie s'applique immédiatement. Lorsque le réassureur accorde N fois la reconstitution de la garantie, il s'engage à payer au maximum $N + 1$ fois la portée durant la période de référence du traité d'indemnisation : garantie initiale + les reconstitutions. Le nombre de reconstitutions peut être illimité.

Donc un contrat XS s'accompagne généralement du nombre N de reconstitutions accordées de la prime de reconstitution (en général égale à 1% de la portée), et la clause de reconstitution (généralement comprise entre 0 et 50% en prorata capital, et entre 0 et 100% en double prorata).

*Exemple de reconstitution

Supposons par un exemple C XS P .

- **Prime de reconstitution** : P
- **Clause de reconstitution** : $r\%$
- **Sinistre** : S
- **Survenance** : $i^{\text{ème}}$ mois de l'année
- **Charge du réassureur** : S^{Reass}

*Prorata capital

calculée sur la base du sinistre survenu, elle est égale au montant de sinistre après application de la réassurance en proportion de la portée multiplié par la prime de reconstitution :

$$S^{\text{Reass}} = \min [\max(S - P, 0), C]$$

$$\text{Coût}_{Reconstitution} = P \cdot \frac{r}{100} \cdot \frac{S^{Reass}}{C}$$

*Double prorata calculée sur la base du temps écoulé au moment de la survenance du sinistre et sur son montant, elle est égale au montant de sinistre après application de la réassurance en proportion de la portée multiplié par la prime de reconstitution et le temps restant avant la fin du contrat :

$$S^{Reass} = \min [\max(S - P, 0), C]$$

$$\text{Coût}_{Reconstitution} = P \cdot \frac{r}{100} \cdot \frac{S^{Reass}}{C} \cdot \frac{12 - i}{12}$$

3.3.4 Clause de stabilisation

Dans le laps de temps séparant la survenance et le règlement définitif d'un sinistre, se produit une augmentation du coût liée à des paramètres économiques, financiers et juridiques. Le but d'une clause de stabilisation est de répartir entre l'assureur et le réassureur cette augmentation du coût, de sorte à conserver dans le partage du sinistre les proportions qu'il y aurait eues sans cette évolution.

L'application de la clause de stabilité se fait à l'aide d'un indice défini dans le traité qui reflète l'évolution de la conjoncture économique et juridique.

3.3.5 Clause de participation aux bénéfices

Cette clause propose simplement d'offrir une ristourne à la cédante (correspondant à une partie du bénéfice du réassureur) si le solde de réassurance est positif.

Le solde correspond ici au montant des primes auquel on retranche les sinistres et les frais engagés.

3.3.6 Clause de No-Claim Bonus

Cette clause garantit à l'assureur une baisse de sa prime si, en fin d'année, aucun sinistre n'a touché la tranche. Il s'agit ainsi d'un système bonus-malus.

3.4 Le processus de réassurance

L'assurance et la réassurance reposent sur un principe commun : la mutualisation des risques. Cependant, la réassurance se distingue par son aspect international, qui lui permet de bénéficier d'une expertise accrue et de disposer de techniques d'analyse sophistiquées, adaptées à la gestion de divers types de risques. De plus, le marché de la réassurance se caractérise par une forte présence des courtiers.

Dans ce secteur, trois types d'intervenants jouent un rôle clé. Les deux premiers sont les compagnies d'assurance, qui cèdent une partie de leur risque, et les compagnies de réassurance, qui assument une partie de ce risque. Le troisième acteur est le courtier en réassurance, qui intervient comme intermédiaire. Les courtiers en réassurance ont pour rôle de rechercher les produits de réassurance adaptés et de placer les demandes de contrats auprès des grands réassureurs. Ils agissent en tant que mandataires des assureurs, en les conseillant sur leurs stratégies de réassurance. Par ailleurs, leur rôle d'intermédiation consiste à regrouper plusieurs réassureurs pour couvrir un risque donné, chaque réassureur prenant en charge une portion du risque global. On résume ce processus dans la figure ci-dessous :

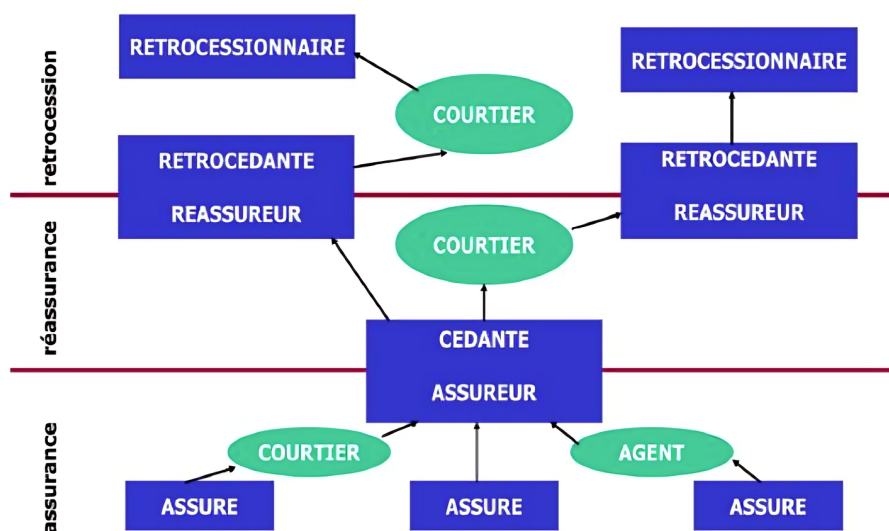


Figure 3.5 – Processus du fonctionnement des compagnies de réassurance [source 6]

3.4.1 Différences entre le processus de réassurance et d'assurance

En assurance, l'entreprise gère seule l'ensemble du processus de création de son produit, depuis la définition des garanties jusqu'à la tarification et la mise sur le marché. À l'inverse,

3. LES DIFFÉRENTES FORMES DE LA RÉASSURANCE

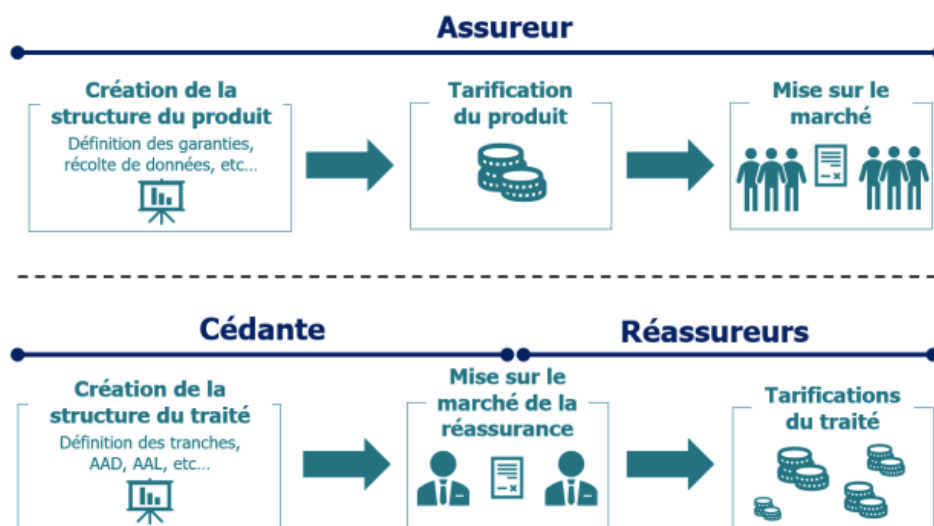


Figure 3.6 – Comparaison des chaînes de production en assurance et en réassurance [Source : 5]

en réassurance, ce processus est inversé : le traité est d'abord proposé sur le marché avant d'être tarifé, et ce sont les réassureurs qui déterminent le prix du contrat.

La cédante se retrouve ainsi dans une position comparable à celle d'un client potentiel, à la différence qu'elle définit elle-même les garanties souhaitées pour sa couverture. Cette particularité peut rendre l'évaluation de la prime de réassurance complexe pour un assureur ou un réassureur en récession. En effet, il ne dispose pas d'une vision claire du modèle de tarification interne des réassureurs, ce qui l'empêche de juger si la prime cotée est réaliste, compétitive ou excessive.

Pour pallier cette difficulté, l'assureur peut tenter d'estimer lui-même une prime de réassurance, bien que cette estimation repose uniquement sur sa propre perception du risque. Dans la pratique, il peut adopter une approche similaire à celle de la tarification d'un produit d'assurance en appliquant une mesure de risque usuelle. Bien que cette estimation diffère probablement des cotations réelles des réassureurs, elle offre néanmoins une première évaluation de la prime commerciale potentielle.

Chapitre 2

Tarification des traités de réassurance non-vie non proportionnelle

Sommaire

1	Eléments techniques de la tarification	35
1.1	Objectifs de la tarification	35
1.2	L'Assurance non-vie et ses branches	36
1.3	Ventilation par branche et nature de tranche	37
1.4	Notions clés en réassurance	39
1.5	Définition et décomposition de La prime de réassurance	40
1.6	Les modèles de tarification	45
2	Méthode Burning Cost	46
3	Méthode probabiliste	49
3.1	Modélisation de la Sévérité	51
3.2	Modélisation de la loi de fréquence de sinistre	52
3.3	Évaluation des ajustements des lois	52
3.4	Incertitude sur les paramètres estimés	56
3.5	Tarification des clauses particulières et Simulation stochastique	58
4	Méthode mixte (Extrapolation Pareto)	65
5	Méthode par exposition	66
5.1	Fonctionnement des courbes d'exposition	66
5.2	Propriétés mathématique des courbes d'exposition	68
5.3	Une famille de référence : les courbes MBBEFD	69
5.4	Processus de cotation	69
6	Processus de tarification	71

6.1	Check-list des données nécessaires à la cotation	71
6.2	Exploitation de la statistique cédante	72
6.3	Choix du modèle de tarification	75

1 Éléments techniques de la tarification

1.1 Objectifs de la tarification

La tarification technique joue un rôle central dans la gestion des risques en assurance et réassurance. Elle vise à estimer au mieux le coût des engagements pris, à assurer la rentabilité des contrats et à permettre un suivi efficace du portefeuille.

1.1.1 Décision de souscription

La tarification est un élément clé dans la prise de décision pour l'acceptation d'un traité de réassurance non proportionnel. Elle permet d'évaluer les coûts engendrés par les engagements du contrat afin d'atteindre, sur le long terme et en tenant compte des fluctuations statistiques de la sinistralité, un équilibre technique. Un second objectif est d'évaluer la **profitabilité** d'un traité en fonction des conditions du marché et des interactions entre les différents réassureurs. L'apérateur (leader) fixe généralement la prime de marché, ce qui impacte la rentabilité pour chaque réassureur participant.

1.1.2 Suivi de portefeuille : provisionnement et rentabilité

Au niveau du portefeuille de réassurance, il est essentiel de comparer la **prime technique** théorique à la **prime effectivement souscrite**. Cette comparaison est un indicateur fondamental pour :

- **Évaluer le besoin en provisions complémentaires**,
- **Anticiper la rentabilité du portefeuille** en utilisant des modèles d'estimation de la sinistralité ultime.

1.1.3 Suivi du risque de tarification

La tarification repose sur une modélisation probabiliste avant la souscription d'un contrat. un exercice important pour les actuaires consiste à se poser la question si, pour les générations antérieures d'affaires, la tarification ne souffre pas de biais systématiques

- La tarification a-t-elle été systématiquement **trop prudente** (*sur-tarification*) ou **trop optimiste** (*sous-tarification*) ?
- L'évolution des sinistres observés est-elle cohérente avec les hypothèses initiales ?

L'analyse de ces écarts peut être réalisée par différentes approches, en fonction des bases de données disponibles et des pratiques de provisionnement. L'amélioration continue des systèmes d'information et des modèles de prévision joue un rôle clé dans la maîtrise du risque de tarification.

1.2 L'Assurance non-vie et ses branches

1.2.1 Définition de l'assurance non-vie

L'assurance non-vie, également appelée assurance de dommages, englobe toutes les formes de couverture qui ne concernent pas l'assurance vie. Son objectif principal est de protéger l'assuré contre divers risques (incendie, accidents, catastrophes naturelles, responsabilité civile, etc.).

Dans ce type de contrat, l'assureur s'engage à indemniser l'assuré en cas de réalisation du risque couvert, en échange du paiement d'une prime. Ces contrats sont généralement souscrits pour une durée d'un an et sont renouvelables par tacite reconduction, sauf résiliation par l'une des parties.

1.2.2 Les branches d'assurance non-vie

Les branches les plus concernées par les traités non-vie de la SCR sont :

Assurance Property : L'assurance incendie est l'une des garanties incluses dans les contrats d'assurance multirisque habitation (MRH). Elle couvre les dommages causés par un incendie, les dégâts des eaux ainsi que les événements climatiques, protégeant ainsi les biens matériels assurés.

Assurance RC & Motors (Casualty) : Cette catégorie d'assurance couvre les dommages causés aux tiers (Responsabilité Civile) ainsi que les dommages subis par les véhicules assurés. Elle inclut :

- **L'assurance responsabilité civile automobile MTPL** (*Motor Third-Party Liability*).
- **L'assurance responsabilité générale GTPL** (*General Third-Party Liability*).

Assurance Engineering : Conçue pour protéger contre les risques liés aux projets de construction, cette branche inclut :

- **L'assurance dommages-ouvrage** souscrite par le maître d'ouvrage.
- **L'assurance responsabilité civile décennale** couvrant les constructeurs.

Assurance General Accident : Cette assurance couvre les risques portant atteinte à

l'intégrité physique des assurés, incluant les accidents, la maladie, ainsi que les risques d'incapacité ou d'invalidité.

Assurance marine : L'assurance maritime protège contre les dommages survenant lors du transport maritime de biens ou de marchandises. On distingue deux types :

- **Assurance Cargo** : Protège les marchandises transportées par mer, air ou terre contre tout risque de dommage ou de perte.
- **Assurance Hull** : Couvre les navires eux-mêmes contre les dommages pouvant affecter leur coque et leurs équipements. Une sous-branche spécifique est dédiée aux **Yachts**.

La tarification des traités de réassurance non-vie peut être réalisée en évaluant chaque branche individuellement ou en appliquant une classification globale des branches : Non Marine (Property, Engineering, General Accident), Marine (Cargo, Hull) et RC & Motors & AT. Une autre approche consiste à considérer l'ensemble du portefeuille dans son intégralité.

1.3 Ventilation par branche et nature de tranche

1.3.1 Notion de branches courtes et branches longues

Les branches d'assurance peuvent être classées en deux grandes catégories en fonction du délai séparant la survenance d'un sinistre, sa déclaration et son règlement.

Les branches courtes : Ces branches concernent les assurances pour lesquelles le délai entre la déclaration d'un sinistre, l'évaluation du montant de l'indemnisation et son règlement est relativement court, généralement inférieur à une année. Elles incluent principalement les assurances liées à la propriété, comme l'assurance incendie ou vol. Pour établir des tarifications précises, l'actuaire utilise un historique de données couvrant 5 à 7 ans.

Les branches longues : À l'inverse, ces branches d'assurance impliquent des délais plus longs entre la survenance d'un sinistre, sa déclaration, son estimation et son règlement. Dans certains cas, plusieurs années peuvent s'écouler avant que l'indemnisation ne soit finalisée. Cela concerne principalement certaines assurances de responsabilité civile ou d'indemnisation différée. Ces branches font l'objet d'un traitement spécifique par l'actuaire, car le coût estimé à la date de déclaration peut différer significativement de l'indemnisation réellement versée plusieurs années plus tard. Pour évaluer la charge ultime du règlement, l'actuaire utilise des triangles de liquidation. Des provisions sont ainsi constituées et suivies tout au long du processus de gestion du sinistre. Afin de tarifier ces branches de manière

appropriée, un minimum de huit années d'historique est nécessaire.

1.3.2 Notion de tranches travaillantes et non travaillantes

Les programmes de réassurance en excédent de sinistre sont souvent segmentés en plusieurs tranches afin de mieux répondre aux préférences des réassureurs en matière de risque.

Certains réassureurs privilégient la couverture des tranches basses, caractérisées par une fréquence élevée de sinistres, dites **tranches travaillantes**. D'autres préfèrent souscrire des parts sur des tranches supérieures, où la fréquence des sinistres est plus faible, appelées **tranches non travaillantes**.

La figure ci-dessous montre la segmentation par nature des tranches de réassurance et la fréquence des sinistres correspondant à chaque tranche.

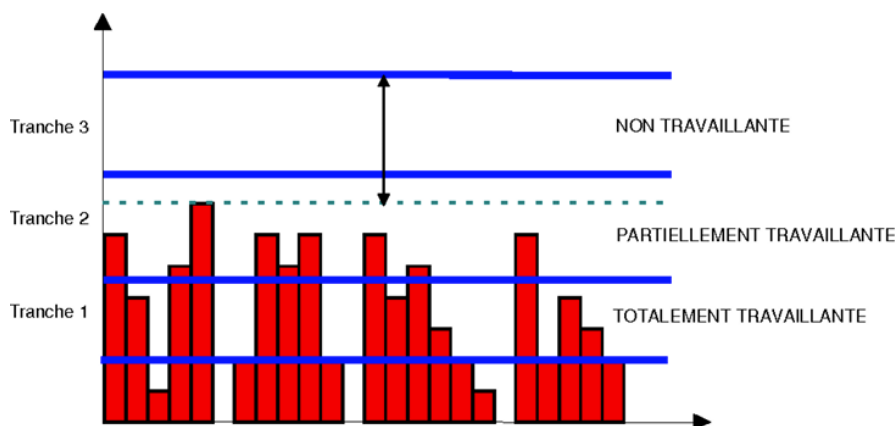


Figure 1.1 – Segmentation par nature des tranches [source 7]

Une tranche non travaillante correspond à une portion d'un programme de réassurance ayant une probabilité faible d'être impactée par un sinistre. Cette classification repose sur plusieurs critères :

- Un historique de sinistralité faible ou inexistant.
- Un ROL bas, ce qui indique une faible probabilité que la tranche soit entièrement consommée par un ou plusieurs sinistres.
- Une priorité élevée dans la structure de réassurance.

La tarification des tranches non travaillantes est particulièrement complexe, car l'actuaire dispose généralement de peu de données historiques pour estimer la prime pure de manière fiable.

1.4 Notions clés en réassurance

1.4.1 Période de retour

La **période de retour** (ou *return period*) est une mesure fondamentale en gestion des risques extrêmes et en réassurance, permettant de quantifier la fréquence moyenne d'occurrence d'un événement rare.

1.4.1.1 Définition mathématique

Pour un seuil de sinistralité x , la période de retour $T(x)$ est l'inverse de la probabilité annuelle que ce seuil soit dépassé :

$$T(x) = \frac{1}{\mathbb{P}(X > x)},$$

où X représente le montant des sinistres. Par exemple, un événement avec $\mathbb{P}(X > x) = 1\%$ a une période de retour de 100 ans.

1.4.1.2 Interprétation pratique

- **Notion de moyenne** : Une période de retour de T ans ne signifie pas que l'événement se produit *exactement* tous les T ans, mais qu'il survient en moyenne une fois sur T ans sur une longue période.
- **Utilisation en réassurance** : Les traités **non proportionnels** (Cat XL, Stop-Loss) utilisent cette métrique pour définir les priorités et limites. Par exemple, une couche "50M€ XS 50M€" pourrait être calibrée pour un événement de période de retour 200 ans.

1.4.1.3 Estimation et sources de données

- **Modélisation stochastique** : Les lois des valeurs extrêmes (Fréchet, Gumbel, Weibull) permettent d'estimer $\mathbb{P}(X > x)$ au-delà des observations historiques, via des méthodes comme l'approche POT (*Peaks Over Threshold*).

Or, Les données peuvent sous-estimer le risque si la période d'observation est trop courte ou non représentative (ex. : changement climatique).

- **Bases de données externes** : Les périodes de retour des événements naturels sont généralement fournies par des organismes spécialisés dans la modélisation des catastrophes, tels que :

- RMS (Risk Management Solutions)
- AIR Worldwide
- EQUecat (intégré à CoreLogic depuis 2013)

Ces organismes proposent des modèles stochastiques intégrant les données historiques, scientifiques et climatiques pour estimer la probabilité de survenance de divers types de sinistres majeurs.

1.4.2 Rate On Line

Le *Rate On Line* (ROL) est une mesure couramment utilisée en réassurance pour exprimer le coût de la couverture d'une tranche de sinistres. Il est directement lié à la notion de **PayBack**, qui représente le nombre d'années de primes nécessaires pour couvrir un sinistre traversant totalement la tranche.

- **PayBack** :

$$\text{PayBack} = \frac{\text{Portée de la tranche}}{\text{Prime}}$$

Il indique, en nombre d'années, combien il faudrait de primes pour rembourser un sinistre égal à la capacité maximale de la tranche.

- **ROL (Rate On Line)** :

$$\text{ROL} = \frac{1}{\text{PayBack}} = \frac{\text{Prime}}{\text{Portée}}$$

Il exprime le coût de 1\$ de couverture dans la tranche. Autrement dit, plus le ROL est élevé, plus la couverture est coûteuse.

Cette mesure est intuitive et très utilisée par les souscripteurs et les actuaires :

- Elle permet de comparer rapidement différentes tranches ou programmes de réassurance.
- Les discussions techniques entre assureurs et réassureurs se font fréquemment autour de cette grandeur, car elle synthétise efficacement la rentabilité attendue de la couverture.

1.5 Définition et décomposition de La prime de réassurance

L'objectif principal de la tarification en réassurance est d'élaborer la prime, qui représente la contrepartie financière versée par l'assureur cédant au réassureur en échange de la prise en charge d'une partie des risques. Celle-ci se compose de trois éléments essentiels.

1.5.1 La Prime Pure

La **prime pure** correspond à la valeur actuelle probable des sinistres qui seront réglés dans le cadre du traité. Ce montant serait suffisant pour garantir un résultat nul (*Prime - Sinistres*) en l'absence d'aléa sur les sinistres.

1.5.2 La Prime de risque

La prime de risque correspond à la somme de la prime pure et du **chargement de sécurité**. La prime pure étant sujette à une certaine volatilité, celle-ci résulte à la fois des incertitudes liées à la modélisation (erreur dite de « paramètres ») et du caractère aléatoire des sinistres. Il est donc nécessaire d'allouer un capital pour couvrir ce risque, garantissant ainsi schématiquement la solvabilité du réassureur vis-à-vis de l'assureur et permettant la rémunération du capital mobilisé. Le **chargement de sécurité** représente alors le coût de ce capital sur le temps, facturé à l'assureur.

La prime de risque est donc la somme de la prime pure déjà mentionné et le chargement de sécurité, l'élément principal dans la conception de ce dernier est la détermination d'une mesure de risque

1.5.2.1 Les mesures de risque

La recherche d'une mesure de risque pertinente a conduit à un vaste ensemble de propositions, parmi lesquelles des mesures très simples ;

On suppose que $\mathbb{E}(X)$ représente la **prime pure** et $PR(X)$ représente la **prime de risque**.

1. L'espérance mathématique C'est le principe le plus simple : on applique un chargement proportionnel à la prime pure.

$$P(X) = (1 + \lambda)\mathbb{E}(X), \lambda > 0.$$

Ce modèle suppose que le risque est suffisamment bien résumé par son espérance seule, ce qui le rend intuitif mais peu sensible à la variabilité du risque.

2. L'écart type On ajoute un terme proportionnel à la volatilité du risque :

$$P(X) = \mathbb{E}(X) + \beta\sigma(X), \beta > 0.$$

Ce principe prend en compte non seulement l'espérance des sinistres, mais aussi leur dispersion. Il est particulièrement utile lorsque les sinistres sont rares mais très variables.

3. La variance Ici, la prime est ajustée selon la variance des sinistres :

$$P(X) = \mathbb{E}(X) + \gamma\text{Var}(X), \gamma > 0.$$

Ce modèle donne encore plus d'importance à la dispersion, puisque la variance croît plus rapidement que l'écart type. Il est toutefois moins utilisé car son interprétation est moins directe.

4. La perte maximale On pondère la prime entre l'espérance et la pire issue possible :

$$P(X) = \alpha\mathbb{E}(X) + (1 - \alpha)\max(X), \alpha > 0.$$

Ce principe reflète une approche prudente du risque, adaptée lorsque le risque de sinistres extrêmes est important. Il peut toutefois surestimer le risque si la valeur maximale est aberrante.

Value at Risk : VaR La **VaR** est le quantile d'ordre $1 - \alpha$ de la distribution de la sinistralité. Il mesure la valeur de perte attendue pour une probabilité de survenance de sinistre égale à α . Elle est définie comme suit :

$$\text{VaR}_\alpha(S) = \inf\{x \mid \text{Pr}(S \leq x) \geq \alpha\}$$

Tail Value at Risk : TVaR La **TVaR** mesure la perte moyenne attendue au-delà de la **VaR** :

$$\text{TVaR}(X, \alpha) = \frac{1}{1 - \alpha} \int_\alpha^1 F_X^{-1}(p) dp = E[X \mid X > \text{VaR}(X, \alpha)]$$

Contrairement à la Value at Risk (VaR) traditionnelle, qui ne fournit qu'une estimation

ponctuelle, la TVaR prend en compte la queue de la distribution des pertes.

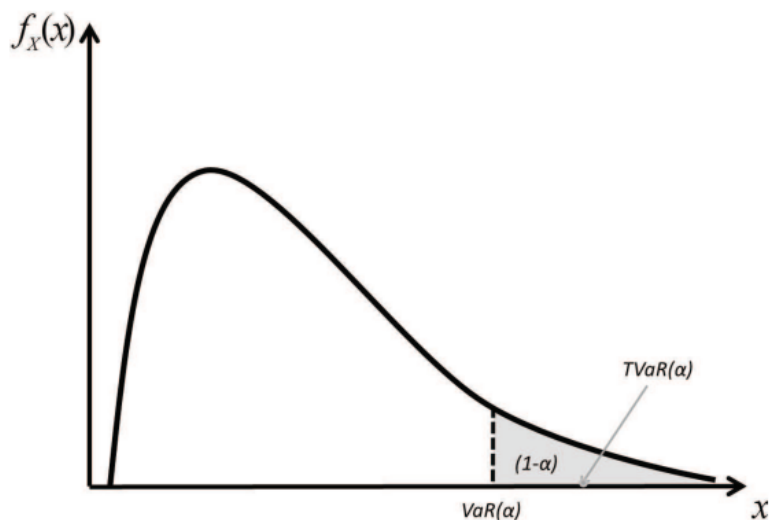


Figure 1.2 – Illustration de la VaR et le TVaR [source 13]

Propriétés mathématiques des mesures de risque Cependant aucun des principes de calcul de primes issus de ces mesures de risque n'est réellement satisfaisant. En effet, ils ne vérifient pas l'ensemble des propriétés, retenues pour juger de la pertinence d'un procédé de chargement.

Les plus importantes des propriétés attendues d'un « bon » principe de primes sont citées en Annexe A.

Aucun des principes de calcul de primes issus des mesures de risque évoquées (espérance, variance, etc.) ne vérifie l'ensemble des propriétés énoncées.

Ces considérations ont conduit Shaun Wang à proposer un nouveau procédé, qui repose sur les opérateurs de distorsion. Ce procédé, et plus particulièrement la Wang Transform, ouvre d'importantes perspectives et fait l'objet d'une utilisation grandissante, notamment en raison de sa souplesse et de sa pertinence.

Dans l'annexe A, une section est consacrée aux opérateurs de distorsion ainsi qu'à quelques exemples fondamentaux.

1.5.3 La prime technique

En plus de la prime de risque, la prime technique intègre divers ajustements destinés à couvrir plusieurs coûts. Ces ajustements comprennent :

1. ELÉMENTS TECHNIQUES DE LA TARIFICATION

- **Les frais de gestion** : servant à rémunérer les employés de la compagnie de réassurance, ils sont composés d'une partie fixe et d'une partie variable proportionnelle à la prime commerciale.
- **Les frais de courtage** : correspondant à la rémunération du courtier en réassurance, généralement exprimés en pourcentage de la prime commerciale.
- **Le coût du capital** : permettant d'assurer la rémunération des actionnaires.

La prime technique est exprimé généralement comme suit :

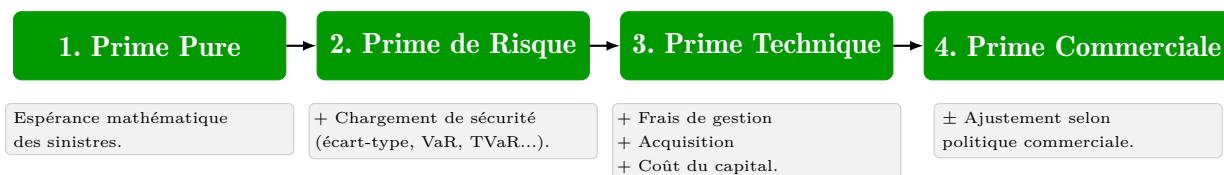
$$\text{Prime technique} = \frac{(\text{PP} + \text{Chargement de sécurité}) \times (1 - \text{Rec})}{(1 - \text{BK} - \text{FG} - \text{AF})}$$

où :

- **PP** : la prime pure,
- **Chargement de sécurité** : Calculé selon l'une des méthodes de mesure du risque évoquées précédemment.
- **PP+Chargement de sécurité** : la prime de risque
- **Rec** : la réduction de la prime due à la reconstitution,
- **BK** : les frais de courtage,
- **FG** : les frais de gestion,
- **AF** : les autres frais particuliers à chaque réassurance.

1.5.4 La prime commerciale

En addition à la prime technique, la prime commerciale vient constituer la prime finale communiquée à la cédante. Un ajustement est alors appliqué à la prime technique, pouvant la réduire ou l'augmenter, en fonction de la politique de souscription du réassureur, de sa stratégie commerciale et de la relation clientèle entretenue avec la cédante.



Décomposition de la prime de réassurance

1.6 Les modèles de tarification

Le choix du modèle de tarification d'un traité en excédent de sinistres (XS) dépend à la fois de la nature de la branche à tarifier, qu'il s'agisse d'une branche à développement court ou long, ainsi que du type de tranche concernée. Ces tranches se répartissent en trois catégories : travaillante, lorsque la majorité des années sont impactées par l'historique des sinistres individuels ; partiellement travaillante, lorsque seules quelques années de l'historique de tarification sont affectées ; et non travaillante, lorsque l'ensemble des années de l'historique ne présente aucun sinistre sur la tranche considérée.

Le tableau ci-dessus résume les différents cas ainsi que les méthodes de tarification appropriées.

Travaillante	Partiellement Travaillante	Non Travaillante
Branches à développement court		
Modèle probabiliste*	Modèle probabiliste*	Simulations*
Burning Cost	Tarification sur exposition	Tarification sur exposition
Tarification sur exposition	Simulations	
Simulations		
Branches à développement long		
Burning Cost*	Simulations*	Tarification sur exposition*
Simulations	Modèle probabiliste	Modèle probabiliste
	Tarification sur exposition	Simulations

Le modèle suivi du symbole * correspond à celui qui est fréquemment utilisé.

Dans ce qui va suivre, nous allons définir chaque méthode en détail, en expliquant clairement son fonctionnement, ses avantages et ses limites, afin d'offrir une compréhension complète de chaque approche

2 Méthode Burning Cost

La méthode de tarification sur expérience (ou méthode statistique, ou méthode Burning Cost) repose sur l'analyse de la sinistralité historique pour estimer les futurs coûts des sinistres. L'idée sous-jacente est que les données passées, telles que le nombre et la gravité des sinistres, peuvent refléter les caractéristiques du portefeuille d'assurés.

D'un point de vue statistique, cette méthode peut être vue comme une application de la méthode des moments, qui consiste à ajuster les paramètres d'un modèle en utilisant les moments (par exemple, la moyenne et la variance) calculés à partir des données historiques. L'objectif est de calculer un tarif qui reflète au mieux la sinistralité observée dans le passé, en prenant en compte les différents facteurs qui ont influencé les sinistres dans le passé.

La première étape consiste en la mise en place d'une statistique "*as if*". Dans la mesure où la tarification a pour but d'analyser la situation pour l'année à venir, chaque élément statistique est actualisé en vue d'être utilisé comme élément "*as if*" de l'exercice au cours duquel l'XS couvrira le risque.

Cette étape sera détaillée dans la section "*Processus de tarification*".

Pour un traité C xs P, la charge de réassureur pour l'année i est donné par :

$$C_i = \min \left(\max \left(\left(\sum_{j=1}^{n_i} X_j^{Réass} \right) - AAD, 0 \right); AAL \right)$$

où

$$X_j^{Réass} = \min(\max(X_j^{as\ if} - P; 0); C)$$

et n_i c'est le nombre de sinistres survenus l'année i.

Le Burning cost se calcule soit par l'estimateur empirique qui est sans bias :

$$\hat{BC} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \frac{\sum_i C_{i,n}}{\Pi_i^{as\ if}}$$

2. MÉTHODE BURNING COST

En pratique on lui préfère souvent l'estimateur suivant :

$$\hat{BC} = \frac{\sum_{n=0}^{N-1} \sum_i C_{i,n}}{\sum_{n=0}^{N-1} \Pi_i^{as\ if}}$$

- Cet estimateur est beaucoup **plus stable** que le premier ;
- Cet estimateur est aussi sans biais.

Avec $\Pi_i^{as\ if}$: assiette de primes de l'année " as if ".

En introduisant $BC_i^{pur} = \frac{C_i}{\Pi_i^{as\ if}}$ comme étant le Burning Cost de l'année i, on peut réécrire le Burning Cost pur global sous la forme :

$$BC_{pur} = \frac{\sum_{i=1}^N BC_i \times \Pi_i^{as\ if}}{\sum_{i=1}^N \Pi_i^{as\ if}}$$

En fait le Burning Cost n'est qu'une moyenne de ratios S/P croisés : les sinistres étant ceux à la charge du réassureur et les primes celles perçues à la source par la cédante.

La prime pure correspondante est donc :

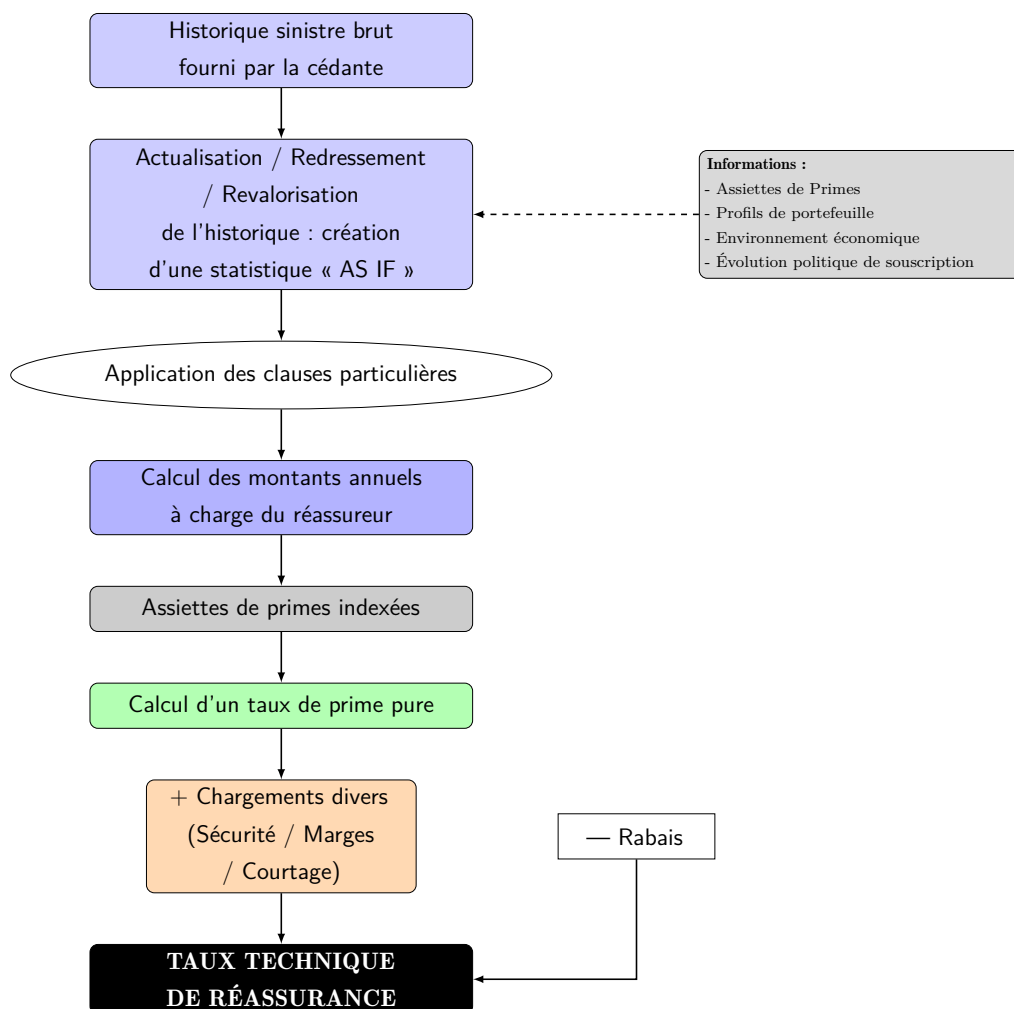
$$P_{pure} = BC_{pur} \times \Pi^{estimée}.$$

avec $\Pi^{estimée}$ désigne l'assiette de prime estimée pour l'année à venir (i.e. l'année de la cotation).

Ainsi, cette prime pure correspond à la moyenne des charges observées pour le réassureur, mises en situation « as if », et pondérées par les coefficients de variation d'assiettes reflétant les variations du portefeuille.

Le schéma ci-dessous illustre le **processus de tarification par Burning Cost** :

2. MÉTHODE BURNING COST



La méthode du Burning Cost se distingue par sa facilité de calcul, sa simplicité et son caractère intuitif. Elle ne nécessite pas l'utilisation de distributions de probabilité complexes. De plus, elle offre une évaluation satisfaisante de la qualité du portefeuille pour les "tranches basses" lorsque le nombre d'observations est suffisant, ce qui en fait une méthode pratique et efficace pour évaluer le risque dans ces cas.

Tarification théorique des traités XS par événement à l'aide du Burning Cost.

La tarification des traités en excédent de sinistre (XS) par événement repose sur la méthode empirique du *Burning Cost*, adaptée aux spécificités des événements rares et catastrophiques. Contrairement aux sinistres individuels, la fréquence des événements historiques pertinents est faible, rendant le calcul du *Burning Cost brut* peu fiable. Il est donc nécessaire de procéder à une indexation rigoureuse des sinistres, prenant en compte à la fois l'inflation et l'évolution de l'exposition du portefeuille, mesurée par les sommes assurées ou le nombre de polices. Deux formules d'indexation sont proposées selon les

données disponibles :

$$S_k^n = S_k \times \frac{I_n}{I_k} \times \frac{N_n}{N_k} \quad \text{ou} \quad S_k^n = S_k \times \frac{SI_n}{SI_k}$$

où S_k est le sinistre observé en année k , I_k l'indice d'inflation pour l'année k , N_k le nombre de polices et SI_k la somme assurée totale. Une fois les sinistres correctement indexés, le *Burning Cost* brut se calcule classiquement par :

$$BC = \frac{1}{N} \sum_{k=n-N+1}^n \frac{C_k^n}{\text{EPI}}$$

où C_k^n est le coût du sinistre indexé en année k et EPI (Expected Premium Income) l'exposition correspondante. Cependant, dans le cas des événements, cette approche doit être corrigée pour tenir compte de leur période de retour. Ainsi, une pondération probabiliste est appliquée à chaque sinistre via la probabilité de survenance annuelle, inverse de sa période de retour :

$$P(\text{évènement}_i) = \frac{1}{T_i} \quad \text{où } T_i = \text{période de retour de l'évènement } i.$$

Le *Burning Cost pondéré* est alors défini par :

$$BC_{\text{pondéré}} = \sum_i \left(\frac{C_i^n}{\text{EPI}} \times P(\text{évènement}_i) \right)$$

Ce calcul permet de lisser l'impact de sinistres extrêmes dans le temps et d'obtenir une estimation plus représentative du coût futur attendu de la couverture XS par événement. Cette méthode repose sur une analyse probabiliste rigoureuse, en intégrant à la fois l'intensité des sinistres passés et leur probabilité de réapparition.

3 Méthode probabiliste

La tarification par **Burning Cost**, bien que simple et intuitive, montre ses limites lorsqu'il s'agit d'évaluer les tranches inactives, où la fréquence des sinistres est faible, ou lorsque le réassureur dispose de peu de données historiques. En effet, l'absence de sinistres dans le passé ne signifie pas nécessairement que le coût futur sera nul.

Pour surmonter cette limitation, les réassureurs ont recours aux **méthodes probabilistes**, qui s'appuient sur des modèles mathématiques avancés. Ces approches permettent d'estimer à la fois la **fréquence** et la **sévérité** des sinistres en exploitant les données disponibles.

Cette méthode paramétrique repose sur le **modèle collectif** qui permet une étude distincte de la fréquence et de la sévérité des sinistres, en les modélisant séparément. Dans ce modèle, la charge globale S s'exprime comme la somme sur le nombre de sinistres N des montants de chaque sinistre. Formellement, La charge totale S est donnée par :

$$S = \sum_{i=1}^N X_i$$

avec :

- X_1, \dots, X_N des variables aléatoires représentant les montants de chaque sinistre du portefeuille. Ces variables sont supposées indépendantes et identiquement distribuées de même loi qu'une variable aléatoire X .
- N est une variable aléatoire à valeurs dans \mathbb{N} indépendante de la suite $(X_i)_{i \geq 1}$. Cette variable représente le nombre total de sinistres survenus au sein du portefeuille.

Après avoir modélisé le coût des sinistres X et leur nombre N , on en déduit la modélisation des montants à charge du réassureur S_N . Le prix de l'excédent de sinistre (XS) est alors donné par :

$$P = \mathbb{E}[S_N]$$

Les lois les plus couramment utilisées pour les variables aléatoires X et N sont respectivement la loi de Pareto et la distribution de Poisson. Cela conduit naturellement à l'utilisation d'une loi composée **Poisson-Pareto** pour modéliser S_N .

Le graphe ci-dessous illustre de manière synthétique le processus de la méthode probabiliste

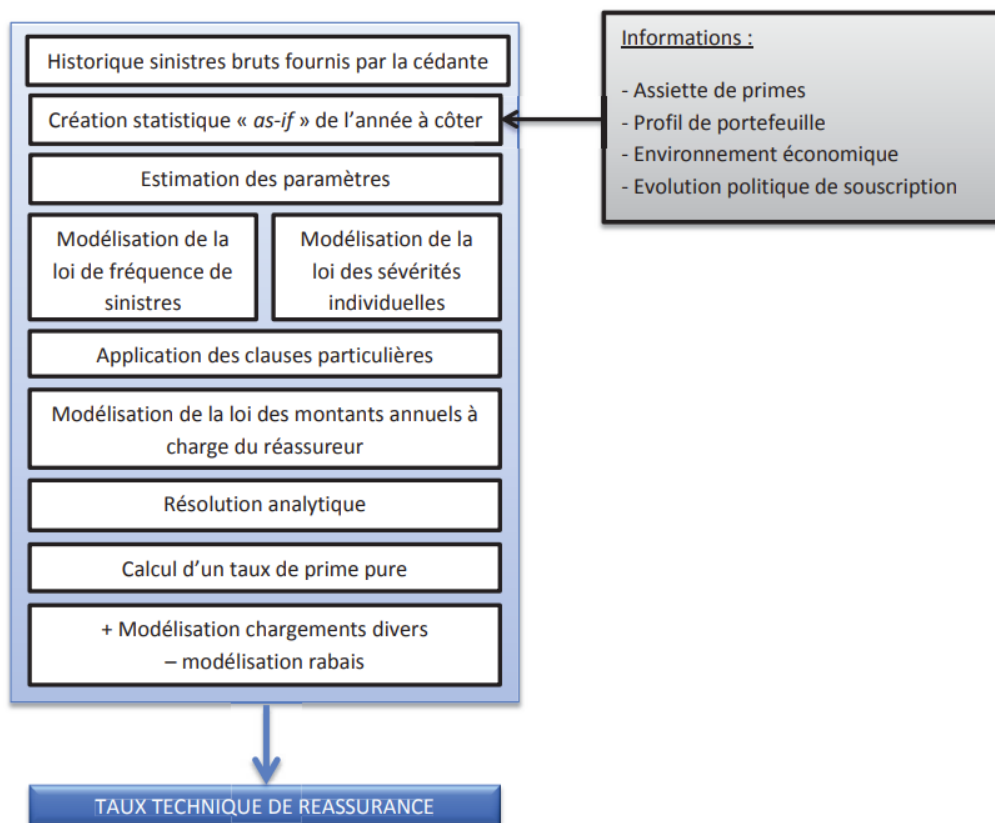


Figure 3.1 – Résumé du processus de la méthode probabiliste

3.1 Modélisation de la Sévérité

L'ajustement paramétrique des coûts à l'aide de distributions de probabilité est une étape essentielle en réassurance. Nous nous appuyons sur un échantillon d'observations, noté $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$, qui représente les montants de sinistres d'un portefeuille donné. Ces observations sont supposées être issues d'une même loi de probabilité, et nous cherchons à estimer la fonction de répartition associée F , afin d'obtenir une approximation fidèle du comportement de la variable aléatoire X .

3.1.1 Les lois usuelles de montant de sinistres

Toute approche probabiliste de la tarification nécessite au préalable une modélisation de la loi du montant du sinistre individuel.

Nous rappelons ci-dessous les caractéristiques des deux lois de montant de sinistres les plus couramment utilisées en réassurance¹.

1. Le détail des lois est rappelé en Annexe B

Table 3.1 – Lois usuelles pour le montant de sinistres

Distribution paramètres	Fonction de répartition	Densité
Pareto $Pa(t; \alpha)$	$F(x) = 1 - \left(\frac{t}{x}\right)^\alpha$	$f(x) = \alpha t^\alpha x^{-\alpha-1}$
	avec $t > 0; \alpha > 0; x \geq t$	
Log-Normale $LN(t; m; \sigma)$	$F(x) = \Phi\left(\frac{\ln(x-t) - m}{\sigma}\right)$	$f(x) = \frac{1}{(x-t)\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln(x-t) - m}{\sigma}\right)^2\right)$
	avec $t > 0; -\infty < m < +\infty; \sigma > 0; x > t$, et Φ est la fonction de répartition de la loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$	

3.2 Modélisation de la loi de fréquence de sinistre

L'approche probabiliste nécessite, après la modélisation de la loi du montant du sinistre individuel, une modélisation de la loi de fréquence de sinistre.

En notant N la variable aléatoire « Nombre total de sinistres annuels », la loi la plus souvent retenue pour N est la loi de Poisson.

Table 3.2 – Modélisation du nombre de sinistres par une loi de Poisson

Distribution paramètres	Loi de probabilité	Espérance ; Variance
Poisson $P(\lambda), \lambda > 0$	$P(N = n) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^n}{n!}$	$\mathbb{E}(N) = \text{Var}(N) = \lambda$

D'autres distributions peuvent être envisagées telles la loi Binomiale ou Binomiale Négative ou encore dans le cas de recherches de modélisations plus fines les lois Poisson Inverse Gaussienne, Poisson Inverse Gaussienne Généralisée ou Poisson Gamma Généralisée.

3.3 Évaluation des ajustements des lois

L'actuaire dispose de plusieurs lois de probabilité pour modéliser les sinistres. Son objectif est de choisir le modèle qui s'ajuste le mieux aux données observées. Divers outils existent pour évaluer la qualité de cet ajustement. Parmi eux, les graphiques Quantile-Quantile permettent une évaluation visuelle, tandis que les tests statistiques et les critères de qualité offrent une mesure quantitative de l'adéquation.

3.3.1 Graphique Quantile-Quantile

Le graphique Quantile-Quantile (QQ-plot) est un outil qui permet d'évaluer la pertinence de l'ajustement d'une distribution donnée à un modèle théorique. Pour ce faire,

le graphique Quantile-Quantile consiste à représenter les quantiles empiriques en fonction des quantiles théoriques afin d'étudier visuellement la linéarité entre ces deux quantités. L'annexe D présente le formalisme mathématique associé au QQ-plot.

3.3.2 Tests d'hypothèse et Validation des modèles

Dans cette section, nous avons pour objectif d'appliquer des tests statistiques afin de juger de la validité des lois de probabilité ajustées à nos données. Ensuite, pour identifier le modèle le plus pertinent parmi plusieurs candidats, nous nous appuyerons sur des critères objectifs de comparaison basés sur la qualité d'ajustement.

Test d'adéquation du Chi-deux

Ce test est le plus utilisé des tests d'adéquation, il s'applique à des lois discrètes ou continues.

Soit une v.a. X , à valeurs dans un ensemble E de loi P_X inconnue et $\mathcal{P}_0 = \{P_0^\theta : \theta \in \Theta\}$ une famille de lois ajustées sur l'ensemble E avec paramètre θ . Soit A_1, \dots, A_r partition en r classes de E , avec $r > p + 1$, et $\pi_k(\theta) = P_0^\theta(A_k) > 0$ pour tout $k = 1, \dots, r$ et $\theta \in \Theta$, nous considérons la v.a. (N_1, \dots, N_r) où N_k est le nombre de X_i dans A_k , $k = 1, \dots, r$, et (n_1, \dots, n_r) sa réalisation, p le nombre de paramètres d'une loi.

Nous testons :

$$H_0 : (P_X(A_1), \dots, P_X(A_r)) \in \left\{ \left(P_0^\theta(A_1), \dots, P_0^\theta(A_r) \right) : \theta \in \Theta \right\}$$

contre

$$H_1 : (P_X(A_1), \dots, P_X(A_r)) \notin \left\{ \left(P_0^\theta(A_1), \dots, P_0^\theta(A_r) \right) : \theta \in \Theta \right\}$$

Si l'estimateur $\hat{\theta}$ de θ est estimé sur l'ensemble des échantillons, c'est à dire s'il est estimé à partir des observations complètes (x_1, \dots, x_n) avant regroupement en classes A_k ($k = 1, \dots, r$), alors, $\sum_{k=1}^r \frac{(n_k - n\pi_k(\hat{\theta}))^2}{n\pi_k(\hat{\theta})}$ est encadrée par les lois χ_{r-p-1}^2 et χ_{r-1}^2 .

Cet encadrement est généralement de faible amplitude lorsque le nombre de paramètres p du modèle est petit par rapport au nombre de classes r . Si cette plage ne permet pas de conclure clairement, il devient alors préférable de calculer précisément la valeur P .

Test de dispersion

Dans le cas où les deux lois de fréquence considérées sont la loi de Poisson et la loi Binomiale Négative. Pour départager ces deux modèles, on peut effectuer un test basé sur l'indice de dispersion de l'échantillon de fréquence. Si cet indice révèle une sur-dispersion, il convient de privilégier un ajustement via la loi Binomiale Négative.

L'hypothèse testée est :

$$H_0 : \text{“L'échantillon suit une loi de Poisson”} \Leftrightarrow \mathbb{V}[N] = \mathbb{E}[N]$$

On utilise l'indice de dispersion $DI = \frac{\mathbb{V}[N]}{\mathbb{E}[N]}$. En prenant les estimateurs empiriques de la moyenne et de la variance, la statistique de test T est définie par :

$$T = \frac{\bar{S}^2}{\bar{X}} \quad \text{où} \quad \bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \quad \text{et} \quad \bar{S}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$$

Sous l'hypothèse nulle H_0 , la statistique nT suit asymptotiquement une loi du $\chi^2(n-1)$.

Par conséquent, on rejette H_0 au seuil α si :

$$nT > \chi_{n-1, 1-\alpha}^2$$

ou, de manière équivalente, si la p-valeur est inférieure au seuil :

$$p = \mathbb{P}_{H_0} \left(\chi^2(n-1) > nT \right) < \alpha$$

Dans ce cas, on rejette l'hypothèse d'une loi de Poisson en faveur d'une loi alternative surdispersée.

Test de Kolmogorov-Smirnov

Le test de Kolmogorov-Smirnov (KS) est un test d'hypothèse permettant de vérifier si un échantillon suit une loi donnée connue à partir de sa fonction de répartition continue, ou bien si deux échantillons proviennent de la même distribution.

Soit $F(x)$ la fonction de répartition théorique, $\hat{F}_n(x)$ la fonction de répartition empirique

issue d'un échantillon de taille n , la statistique du test est :

$$D_n = \sup_x |\hat{F}_n(x) - F(x)|$$

Nous testons les hypothèses suivantes :

$$H_0 : \hat{F}_n(x) = F(x) \quad \text{vs} \quad H_1 : \hat{F}_n(x) \neq F(x)$$

Sous H_0 , $\sqrt{n}D_n$ converge en loi vers la distribution de Kolmogorov, indépendante de la loi testée :

$$\sqrt{n}D_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} K$$

La région critique est définie par : $\sqrt{n}D_n > K_\alpha$, où K_α est le quantile d'ordre $1 - \alpha$.

Remarque : ce test est initialement un test de conformité (non d'adéquation). $F(x)$ ne doit pas être estimée à partir de l'échantillon testé. Toutefois, pour valider un ajustement, il est parfois appliqué après une correction liée à la perte de degrés de liberté. Nous l'utiliserons ici comme indicateur pour choisir la meilleure loi parmi plusieurs lois candidates.

Test d'Anderson-Darling

Le test d'Anderson-Darling est une amélioration du test de Kolmogorov-Smirnov, qui attribue plus d'importance aux écarts dans les queues de distribution.

Il vise à comparer la fonction de répartition empirique $\hat{F}(x)$ à une fonction théorique $F(x)$. La statistique du test est définie par :

$$S^2 = \int_{-\infty}^{\infty} [\hat{F}(x) - F(x)]^2 w(x) dF(x)$$

où $w(x)$ est une fonction de pondération (généralement $w(x) = \frac{1}{F(x)(1-F(x))}$). Ce test est particulièrement pertinent lorsqu'on souhaite détecter des écarts dans les extrémités de la distribution.

3.4 Incertitude sur les paramètres estimés

3.4.1 Incertitude des paramètres de la fréquence

Dans cette section, nous présentons un exposé des techniques statistiques permettant d'évaluer l'incertitude liée à l'estimation des paramètres des lois de fréquence discrètes (telles que la loi de Poisson, la loi Binomiale Négative ...), ajustées à des échantillons de sinistres annuels.

L'incertitude sur les paramètres provient du fait que les données disponibles sont issues d'un échantillon limité, ce qui complique l'estimation précise des véritables paramètres de la population.

En statistique classique, les paramètres sont estimés par la méthode du maximum de vraisemblance ou la méthode des moments. Toutefois, ces estimateurs sont eux-mêmes des variables aléatoires : deux échantillons de même taille, tirés de la même loi, peuvent conduire à des estimations différentes. Cela peut induire une sous-évaluation du risque lorsque les paramètres sont supposés fixes.

Dans ce contexte, trois grandes approches peuvent être envisagées :

- **La méthode asymptotique classique**, qui repose sur le théorème central limite appliqué aux estimateurs de vraisemblance ;
- **La méthode empirique du bootstrap**, qui permet d'estimer la variabilité des estimateurs à partir des données disponibles.
- **l'approche bayésienne** (cette approche sort du cadre de ce mémoire)

3.4.2 La limite asymptotique du maximum de vraisemblance

Pour fixer les notations :

- $\Theta = (\Theta_1, \Theta_2, \dots, \Theta_p)$: les p paramètres de la loi du nombre de sinistres annuels,
- $\hat{\Theta} = (\hat{\Theta}_1, \hat{\Theta}_2, \dots, \hat{\Theta}_p)$: les estimateurs obtenus par maximum de vraisemblance,
- $\hat{\theta} = (\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \dots, \hat{\theta}_p)$: la réalisation observée de $\hat{\Theta}$.

Lorsque la taille de l'échantillon n tend vers l'infini, on a :

$$\sqrt{n}(\hat{\Theta} - \Theta) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, I(\hat{\Theta})^{-1})$$

où $I(\hat{\Theta})$ est la matrice d'information de Fisher, définie par :

$$I(\hat{\Theta}) = -\frac{1}{n} \mathbb{E} \left[\left(\frac{\partial^2}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \ln L(\Theta) \right) \Big|_{\theta_j \in [1,p]} \right]$$

Dans le cas particulier de la loi de Poisson, on retrouve :

$$\hat{\lambda} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N} \left(\lambda, \frac{\lambda}{n} \right)$$

3.4.3 Méthode du bootstrap paramétrique

Une autre méthode pour évaluer l'incertitude des estimateurs est la méthode du *bootstrap*. Cette technique consiste à resimuler un grand nombre d'échantillons à partir de la distribution ajustée (ou directement à partir des données initiales via rééchantillonnage), puis à recalculer les estimateurs sur chaque échantillon.

Cela permet d'obtenir une distribution empirique des estimateurs, à partir de laquelle on peut construire des intervalles de confiance, estimer les biais, ou calculer des mesures de dispersion (écart-type, variance, etc.).

Cette méthode est particulièrement utile lorsque les conditions d'application de la méthode asymptotique ne sont pas réunies, ou lorsque la distribution des estimateurs est asymétrique ou difficile à approximer analytiquement.

L'algorithme du bootstrap :

L'algorithme commence par l'estimation, via la méthode du maximum de vraisemblance, des p paramètres de la loi de fréquence ajustée \hat{P}_{Θ} à partir de l'échantillon d'origine k . Cela permet d'obtenir un vecteur d'estimateurs noté $\hat{\theta} = (\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \dots, \hat{\theta}_p)$. Ce vecteur constitue le meilleur estimateur de la loi de la population, et on pose alors $\hat{P}_{\Theta} = \hat{\theta}$ pour l'échantillon k .

Dans un second temps, on génère B échantillons aléatoires indépendants de taille n , même taille que l'échantillon d'origine, tirés selon la loi ajustée \hat{P}_{θ} . Pour chaque échantillon $j = 1, \dots, B$, on note k_j les données simulées, et on réestime les paramètres en maximisant la fonction de vraisemblance $L(\Theta/k_j)$, ce qui donne un estimateur $\hat{\theta}_j = (\hat{\theta}_{j,1}, \hat{\theta}_{j,2}, \dots, \hat{\theta}_{j,p})$.

On obtient ainsi un échantillon bootstrap de taille B d'estimateurs de paramètres, noté

$\{\hat{\theta}_j\}_{j=1}^B$, qui permet de construire la distribution empirique des estimateurs.

Cette distribution empirique est alors utilisée pour quantifier l'incertitude des paramètres estimés. Lorsque la taille n de l'échantillon initial est suffisamment grande, la distribution bootstrap de Θ converge vers une loi normale multivariée, en accord avec la théorie asymptotique classique.

3.4.4 Incertitude des paramètres de la sévérité

Tout comme pour l'analyse de la fréquence, il est important de prendre en compte l'incertitude liée à l'estimation des paramètres des lois de sévérité ajustées aux échantillons de sinistres. L'approche la plus simple et la plus courante consiste à appliquer un bootstrap paramétrique sur la loi de sévérité ajustée à l'échantillon observé. Cette méthode permet d'approximer la distribution des estimateurs des paramètres en répétant de nombreuses fois un échantillonnage à partir de la loi ajustée initialement, puis en estimant les paramètres de la loi de sévérité pour chaque nouvel échantillon généré.

Dans le cas de la sévérité, cette incertitude a un impact spécifique sur le tarif des tranches selon leur niveau. En effet, une des composantes de la prime pure d'une tranche est représentée par l'aire sous la courbe de la fonction de répartition de la sévérité, calculée entre la franchise et la limite de la tranche.

3.5 Tarification des clauses particulières et Simulation stochastique

Cette section propose une **formalisation mathématique** permettant de calculer la **Prime Pure** de chacune des clauses suivantes, classiques pour des traités en excédent de sinistres :

- Clauses « aggregate »,
- Clause de reconstitution de garantie (REC),
- Clause de participation bénéficiaire (PB),
- Clause de « No Claim Bonus ».

La tarification rigoureuse de ces clauses implique la connaissance de la distribution du **montant total des sinistres** S_N .

Deux approches principales peuvent être adoptées :

Deux approches principales peuvent être adoptées :

- **Approche 1** : On considère *a priori* que la distribution de S_N suit une loi Normale (m, σ) , ou de préférence, une loi Lognormale (μ, ρ) .
- **Approche 2** : En supposant que S_N suit une *loi de Poisson Composé*, la distribution discrète de S_N est déterminée par *L'algorithme récursif de Panjer* .
- **Approche 3** : En supposant que S_N suit une *loi de Poisson Composé*, la distribution discrète de S_N est déterminée par une *simulation stochastique*.

3.5.1 Méthode de simulation de Monte Carlo

La définition, la simulation est le fait d'utiliser un modèle, c'est-à-dire une représentation abstraite d'un système ou d'un problème, et d'étudier l'évolution de ce modèle sans faire fonctionner le système réel. Nommée par Stanisław Ulam et John von Neumann, la simulation de Monte Carlo est une méthode simple d'utilisation qui permet d'estimer des quantités numériques qui utilisent des nombres aléatoires. Elle est utilisée lorsque la complexité du modèle envisagé rend extrêmement difficile, voire impossible, toute approche analytique. Par exemple, pour X une variable aléatoire, approcher analytiquement la valeur de la moyenne de $\min(\max(0, X - f), p)$ est extrêmement difficile.

Le principe de Monte Carlo se base principalement sur trois propriétés.

3.5.1.1 Propriété 1

On note par F une fonction de répartition d'une variable continue et définie sur \mathbb{R} , Si X est une variable aléatoire de fonction de répartition F , alors $F(X)$ suit une loi uniforme sur $[0, 1]$.

$$F(X) \sim U(0, 1)$$

Ainsi pour simuler la variable aléatoire X , il suffit de simuler un nombre entre 0 et 1, puis d'inverser la fonction de répartition à fin d'obtenir la réalisation associée.

3.5.1.2 Propriété 2 (Loi faible des grands nombres)

Une fois qu'on a simulé les valeurs prises par une variable aléatoire suivant une loi donnée, la méthode de Monte Carlo consiste à approcher $\mathbb{E}(X)$ par la moyenne empirique

des réalisations de la variable aléatoire X .

L'algorithme ci-dessous décrit la façon selon laquelle nous simulons la fréquence (modélisée par une loi de Poisson de paramètre θ), la sévérité (modélisée par une loi de Pareto de paramètre α) pour obtenir le taux pur pour une tranche de réassurance $1XSd$.

L'algorithme de simulation se résume en 3 étapes :

- Générer un nombre de sinistres pour l'année ;
- Générer les montants de sinistres correspondants ;
- Calculer la charge XS.

À la fin de la simulation, il suffit de calculer la moyenne de la charge XS ainsi que celle du nombre de sinistres sur l'ensemble des années simulées afin d'obtenir la prime pure du traité.

Algorithm 1 Détermination du taux pur par simulation.

Entrée : $C \times P$, EPI, Poisson(θ), Pareto(α, a).

Sortie : le taux pur de la tranche cotée.

```
1: for  $i \leftarrow 1$  to  $n$  do
2:    $N = \text{rpoiss}(1, \theta)$ 
3:   if  $N = 0$  then
4:      $S_i = 0$ 
5:   else
6:      $v = \text{rpareto}(N, \alpha, a)$ 
7:     for  $j \leftarrow 1$  to  $N$  do
8:        $w_j = \min(\max(0, v_j + a - P), C)$ 
9:     end for
10:     $S_i = \sum w_j$ 
11:  end if
12: end for
13: return  $\frac{\text{mean}(S_i)}{\text{EPI}}$ 
```

3.5.2 Tarification de la clause Aggregate

Nous rappelons que la clause Aggregate est une clause qui a comme objectif de limiter les engagements du réassureur. En d'autre terme, il s'agit d'une limite annuelle appliquée au montant cumulé des sinistres à charge du réassureur appelé l'Aggregate .

Dans ce cas, l'algorithme de simulation reste identique, à l'exception de la formule de calcul de S_i , modifiée comme indiqué ci-dessous :

— Si la tranche à tarifier présente une AAL, alors :

$$S_{\text{AAL}}^{\text{XS}} = \min \left(\text{AAL}, \sum w_j \right)$$

— Si la tranche à tarifier présente une AAD, alors :

$$S_{\text{AAD}}^{\text{XS}} = \max \left(0, \sum w_j - \text{AAD} \right)$$

— Si le traité comporte à la fois une franchise et une limite annuelle, il vient :

$$S_{\text{AAL \& AAD}}^{\text{XS}} = \min \left(\max \left(S^{\text{XS}} - \text{AAD}, 0 \right), \text{AAL} \right)$$

3.5.3 Tarification de la clause de Reconstitution de garantie

On considère un XS de la forme : C XS P avec une clause de reconstitution Prorata Capita avec r reconstitutions, et pour chaque reconstitution i , on note r_i le taux de reconstitution.

Le calcul de la prime pure de base P_0 avec reconstitution s'obtient en égalisant l'espérance des primes² et le coût des sinistres :

$$E(\text{primes}) = E(\text{coût})$$

-Calcul des primes de REC pour une charge totale de réassurance qui égale à CT :

$$\begin{cases} \text{Si } CT = 0 & P = P_0 \quad P' = 0 \\ \text{Si } 0 < CT \leq C & P = P_0 + r_1 P_0 \frac{CT}{C} \quad P' = r_1 P_0 \frac{CT}{C} \\ \text{Si } CT > C & P = P_0 + r_1 P_0 \quad P' = r_1 P_0 \end{cases}$$

1er REC :

$$\begin{cases} \text{Si } 0 < CT \leq C & P = P_0 + r_1 P_0 \frac{CT}{C} \\ \text{Si } C < CT \leq 2C & P_2 = r_2 P_0 \frac{CT-C}{C} \\ \text{Si } CT > 2C & P_2 = r_2 P_0 \end{cases}$$

2ème REC :

2. ou primes nettes selon votre convention

$$\begin{cases} \text{Si } 0 \leq CT \leq (i-1)C & P_i = 0 \\ \text{Si } (i-1)C < CT \leq iC & P_i = r_i P_0 \frac{CT - (i-1)C}{C} \\ \text{Si } CT > iC & P_i = r_i P_0 \end{cases}$$

$$P_i = \frac{r_i P_0}{C} \times \min(C, (CT - (i-1)C)^+)$$

$$\text{Prime} = P_0 + \sum_{i=1}^r P_i$$

$$E(\text{prime}) = P_0 + \sum_{i=1}^r E(P_i)$$

$$E(P_i) = \frac{r_i P_0}{C} E(\min(C, (CT - (i-1)C)^+))$$

$$E(\text{prime}) = P_0 \left(1 + \sum_{i=1}^r r_i E(\min(C, (CT - (i-1)C)^+)) \right)$$

Le coût est quant à lui dans le cas de r reconstitutions :

$$\text{Coût} = \min(CT, (r+1)C) = PSR$$

En cas d'une clause de *AAD* on remplace CT par $(CT - AAD)^+$.

On a $E(\text{Cout}) = PSR$, PSR est la prime sans reconstitution.

A partir de l'égalité F.1, la prime pure avec reconstitution est donnée par :

$$P_0 = \frac{PSR}{1 + \sum_{i=1}^r r_i E(\min(C, (CT - (i-1)C)^+))}$$

On fait l'approximation de $E(\min(C, (CT - (i-1)C)^+))$ par :

$$E(\min(C, (CT - (i-1)C)^+)) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \min(C, (CT_j - (i-1)C)^+)$$

3. MÉTHODE PROBABILISTE

Où N est le nombre des années utilisés pour tarifer la tranche, et CT_j la somme des charges dans la tranche à l'année j .

Alors :

$$P_0 = PSR \times \frac{N}{N + \sum_{i=1}^r r_i \frac{\sum_{j=1}^N \min(C, (CT_j - (i-1)C)^+)}{C}}$$

$$P_0 = PSR \times \frac{N}{N + \sum_{i=1}^r r_i \min(C, (CT_j - (i-1)C)^+)}$$

Finalement :

$$P_0 = PSR \times (1 - \text{Rec})$$

Avec $\text{Rec} = \frac{\text{PrRec}}{N + \text{PrRec}}$ et PrRec est donnée par :

$$\text{PrRec} = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^N r_i \frac{\min(C, (CT_j - (i-1)C)^+)}{C}$$

En cas d'une clause de AAD on remplace CT par $(CT - AAD)^+$. Il faut noter que dans le cas d'une clause de reconstitution AAL est toujours présente et égale à $AAL = (r+1)C$. Donc d'une manière générale :

$$\text{PrRec} = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^N r_i \frac{\min(C, (ChXL_j - (i-1)C)^+)}{C}$$

Avec

$$ChXL_j = \min(\max(CT_j - AAD, 0), AAL)$$

3.5.4 Tarification de la clause de Participation Bénéficiaire

Cette clause prévoit de restituer à la cédante une partie du bénéfice réalisé, si à la fin de la période le solde de réassurance est positif.

Le solde de réassurance est défini comme étant :

Prime de réassurance - Sinistres à charge du réassureur - Frais engagés par le réassureur

Modélisation

Les couvertures prévoyant une telle clause sont caractérisées par la donnée de :

- la prime pure de base notée PB
- le taux de participation aux bénéfices noté q
- le taux de frais généraux du réassureur f

Dans le cas d'une clause de PB le résultat R du réassureur entendu comme la différence entre recettes et dépenses envers cédante se présente comme suit en fonction de la sinistralité observée S_N :

- Si $S_N \in [0, PB(1 - f)]$ alors

$$R = PB - S_N - (PB - S_N - PBf)q = (PB - S_N)(1 - q) + PBfq$$

- Si $s_N \geq PB(1 - f)$ alors $R = PB - s_N$. D'où

$$R = [(PB - s_N)(1 - q) + PBfq] 1_{0 \leq s_N \leq PB(1-f)} + (PB - s_N) 1_{PB(1-f) \leq s_N}$$

et la prime pure recherchée est PB telle que $E(R) = 0$

3.5.5 Tarification de la Clause de No Claim Bonus

Cette clause garantit au réassuré une réduction de $m\%$ sur la prime payée, si en fin d'année aucun sinistre n'a touché la tranche. C'est donc une proportion m de la prime qui sera restituée si et seulement si la couverture du réassureur n'entre pas en jeu.

Ce type de clause se caractérise par :

- la prime pure de base : PNCB
- le taux de ristourne en cas d'absence de sinistre m

La modélisation de la clause de No Claim Bonus peut être formulée comme suit :

$$\text{PNCB} = E(S_N) + P(S_N = 0) \cdot m \cdot \text{PNCB}$$

D'où :

$$\text{PNCB} = \frac{E(S_N)}{1 - mP(S_N = 0)}$$

La clause de « No claim bonus » présente donc l'avantage de garantir une « réduction » à la cédante, en cas d'année sans sinistre donc sans frais de gestion, ce qui représente un argument commercial indéniable, tout en majorant les recettes du réassureur en cas de sinistre.

Cependant, il est évident qu'il faut rester dans de justes limites sur la valeur de m , car rendre 100% de la prime ne serait plus de l'assurance. Aussi, la valeur de m doit correspondre aux frais de gestion attendus.

4 Méthode mixte (Extrapolation Pareto)

Il existe une méthode, très utilisée en pratique, appelée la méthode mixte ou méthode "extrapolation Pareto". Cette méthode calibre un modèle probabiliste de façon à ce que la prime pure obtenue par le modèle probabiliste sur la tranche travaillante corresponde à la prime pure donnée par le *burning cost*. Formellement, on suppose à priori que la loi du montant total à charge de l'XS est une loi composée Poisson-Pareto et on note :

- P la franchise de la tranche travaillante
- C la portée de la tranche travaillante.
- l_t la limite de la tranche travaillante
- PB_{tt}^{BC} = Prime pure de l'XS C XS P obtenue avec la méthode *burning cost*.
- $\hat{\lambda}$ est l'estimateur du paramètre de la loi de Poisson.

La méthode probabiliste avec une loi composée Poisson-Pareto donne, avec $\alpha > 1$ et une limite l finie³ :

$$E[S_N] = \lambda \frac{\alpha}{\alpha - 1} (P^{1-\alpha} - l_t^{1-\alpha}) \quad (4.1)$$

Le $\hat{\alpha}$ retenu pour cette méthode sera alors la solution de l'équation :

$$PB_{tt}^{BC} = \hat{\lambda} \frac{f^\alpha}{\alpha - 1} (P^{1-\alpha} - l_t^{1-\alpha}) \quad (4.2)$$

.

On suppose donc que la sévérité d'un sinistre individuel suit une loi de Pareto Pa $(P, \hat{\alpha})$.

La cotation de base dans ce modèle probabiliste est calibrée avec un modèle par

3. La démonstration de (4.1) est présentée en annexe C.

expérience *burning cost*.

D'autres méthodes peuvent également être utilisées, c'est le cas de la tarification par exposition présentée dans la section suivante.

5 Méthode par exposition

La méthode à l'expérience se base seulement sur les sinistres passés ; elle reflète les sinistralités passées mais pas nécessairement celles à venir. La tarification à l'exposition apparaît alors souhaitable puisqu'elle s'appuie sur une connaissance approfondie des phénomènes physiques et sur un très grand nombre d'événements possibles, qu'ils soient survenus ou non. Elle permet d'effectuer une tarification même en l'absence de sinistralité historique. Ainsi, cette méthode repose sur la réalisation du risque potentiel sur le portefeuille couvert. Elle permet d'étudier l'exposition aux risques de la cédante par péril, à partir de données fines sur le portefeuille et les caractéristiques de chaque risque, afin d'évaluer sa vulnérabilité. Une connaissance précise de l'exposition géographique du territoire est également nécessaire. Pour la tarification, il est important d'estimer la probabilité de sinistre, le montant du sinistre ou le taux de destruction en cas de sinistre. En pratique, on utilise souvent des modèles (Cat) pour estimer ces paramètres. Ces modèles intègrent des catalogues d'événements fictifs avec leur probabilité de survenance. Pour chaque événement, le modèle fournit un montant moyen de dommages ou un taux moyen de destruction. Dans ce mémoire, les modèles ne sont pas utilisés intégralement pour la tarification des XS, mais servent à tester le catalogue d'événements fictifs sur le portefeuille étudié afin d'en extraire les paramètres par événement. Leur utilisation adaptée aux caractéristiques des contrats en XS sera présentée.

5.1 Fonctionnement des courbes d'exposition

Une courbe d'exposition représente la part de prime nécessaire à la couverture d'un risque, en fonction du niveau maximal de dommage pris en charge. Le taux de dommage correspond au rapport entre le coût du sinistre et la somme assurée.

Autrement dit, ces courbes traduisent la probabilité qu'un sinistre ait un coût inférieur à $x\%$ de la somme assurée.

Dans le cadre d'un traité de réassurance en excédent de sinistre (XS), l'intérêt porte sur la part de sinistralité excédant la priorité. Dans ce contexte, la limite x correspond au rapport entre la priorité et la somme assurée, ou encore le SMP.

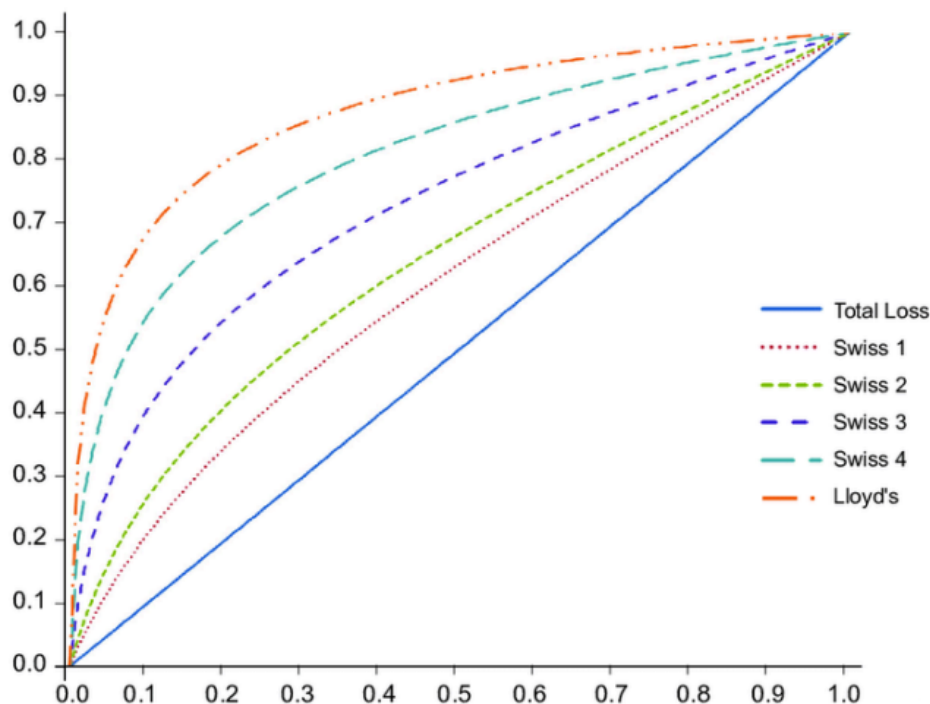


Figure 5.1 – Plusieurs courbes d'exposition sur le marché [source 6]

Posons M comme la somme assurée SMP. Soit Y_i la variable aléatoire représentant le montant du sinistre associé à un bien de valeur M . On définit alors :

$$X_i = \frac{Y_i}{M},$$

où X_i désigne le pourcentage de la valeur assurée détruite. En assurance de biens, il est raisonnable de supposer que ce pourcentage appartient à l'intervalle $[0, 1]$.

Plaçons-nous à présent dans le cadre d'un contrat en excédent de sinistre, avec une priorité (ou franchise) P . Cette priorité correspond à la part du sinistre restant à la charge de l'assuré, et au-delà de laquelle l'indemnisation du réassureur commence. Supposons que la tranche soit illimitée, c'est-à-dire un contrat $+\infty$ XS P . On introduit alors le montant normalisé d défini par :

$$d = \frac{P}{M}.$$

Une courbe d'exposition est une fonction de $[0, 1]$ dans $[0, 1]$: l'axe des abscisses représente les montants normalisés, tandis que l'axe des ordonnées exprime des montants

également normalisés.

Sur cette courbe, on représente en abscisse ce montant d , et en ordonnée la proportion :

$$\frac{\mathbb{E}[X_i \wedge d]}{\mathbb{E}[X_i]} = \frac{\mathbb{E}[Y_i \wedge D]}{\mathbb{E}[Y_i]},$$

c'est-à-dire la part de la prime pure correspondant à la couverture jusqu'à la priorité P , assumée par l'assureur. La partie complémentaire correspond alors à la part de la prime pure revenant au réassureur, pour un bien de valeur M dans le cadre d'un contrat $+\infty$ XS P .

5.2 Propriétés mathématique des courbes d'exposition

Mathématiquement, la courbe d'exposition est une fonction de $[0, 1]$ dans $[0, 1]$, définie par :

$$G_{X_i}(d) = \frac{\mathbb{E}[X_i \wedge d]}{\mathbb{E}[X_i]} = \frac{\int_0^d (1 - F_{X_i}(x)) dx}{\mathbb{E}[X_i]},$$

où F_{X_i} désigne la fonction de répartition de X_i .

\mathbf{G} étant la courbe d'exposition, on peut l'interpréter comme la portion de prime pure nécessaire pour couvrir la part des sinistres tronquée au degré de dommage \mathbf{d} . De plus, on peut déterminer la fonction de répartition du risque à partir de sa courbe d'exposition :

$$F_X(d) = \begin{cases} 1 & \text{si } d = 1 \\ 1 - \frac{G'(d)}{G'(0)} & \text{si } 0 \leq d < 1 \end{cases}$$

Tel que :

$$G'(0) = \frac{1}{\mathbb{E}(X)} \quad \text{et} \quad F_X(0) = 0$$

Propriétés mathématiques des courbes d'exposition :

- Elles sont croissantes et concaves
- Elles passent par l'origine et franchissent le point $(1; 1)$, c'est-à-dire que pour un taux

de dommage égal à 1, la sinistralité est totale et inversement pour un taux de dommage nul on ne constate pas de sinistralité

- Plus la courbe est proche de la diagonale, plus la distribution sous-jacente contient des sinistres avec destruction totale. Et, inversement, plus elle s'en éloigne, plus la distribution sous-jacente contient des sinistres à taux de dommage faibles.

5.3 Une famille de référence : les courbes MBBEFD

Le terme *MBBEFD* est issu des noms des mathématiciens *MAXWELL-BOLTZMANN*, *BOSE-EINSTEIN* et *FERMI-DIRAC*. Cette famille de courbes d'exposition est apparue pour la première fois en physique, et utilise les distributions des personnes citées ci-avant. Stefan *BERNEGGER* a exposé son application en réassurance dans son article de référence publié en 1997. Cette méthode est notamment utilisée dans le dommage aux biens.

La courbe d'exposition est définie par la relation suivante :

$$G_{a,b}(x) = \frac{\ln(a + b^x) - \ln(a + 1)}{\ln(a + b) - \ln(a + 1)}$$

Elle doit en outre vérifier $G_{a,b}(0) = 0$ et $G_{a,b}(1) = 1$.

La fonction de distribution des taux de destruction est définie par :

$$F_{a,b}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 1 \\ 1 - \frac{(a + 1)b^x}{a + b^x} & \text{si } 0 \leq x < 1 \end{cases}$$

Les paramètres a et b sont définis de telle façon que la fonction $G_{a,b}(x)$ soit réelle, croissante, et concave sur $[0, 1]$.

La densité de probabilité associée est définie par :

$$f_{a,b}(x) = \frac{-a(a + 1) \ln(b)b^x}{(a + b^x)^2}, \quad 0 < x < 1$$

5.4 Processus de cotation

Ces courbes vont nous permettre de mettre en place la tarification à l'exposition. On désire tarifier à l'exposition un traité C vs P , de limite $L = C + P$. Pour ce faire, on va

s'appuyer sur le profil de l'année T de la cédante et calculer pour chaque bande b_T :

- $r_{b_T} = \min\left(1, \frac{P}{ASI_{b_T}}\right)$ désignant le taux de dommage minimum
- $s_{b_T} = \min\left(1, \frac{L}{ASI_{b_T}}\right)$ désignant le taux de dommage maximum

Où, ASI réfère à la somme assurée moyenne.

Ainsi, à partir de la courbe d'exposition on retrouve les conservations du réassureur qui sont données par :

$$\text{Conservation Réassureur pour une bande } b_T = G_{b_T}(s_{b_T}) - G_{b_T}(r_{b_T})$$

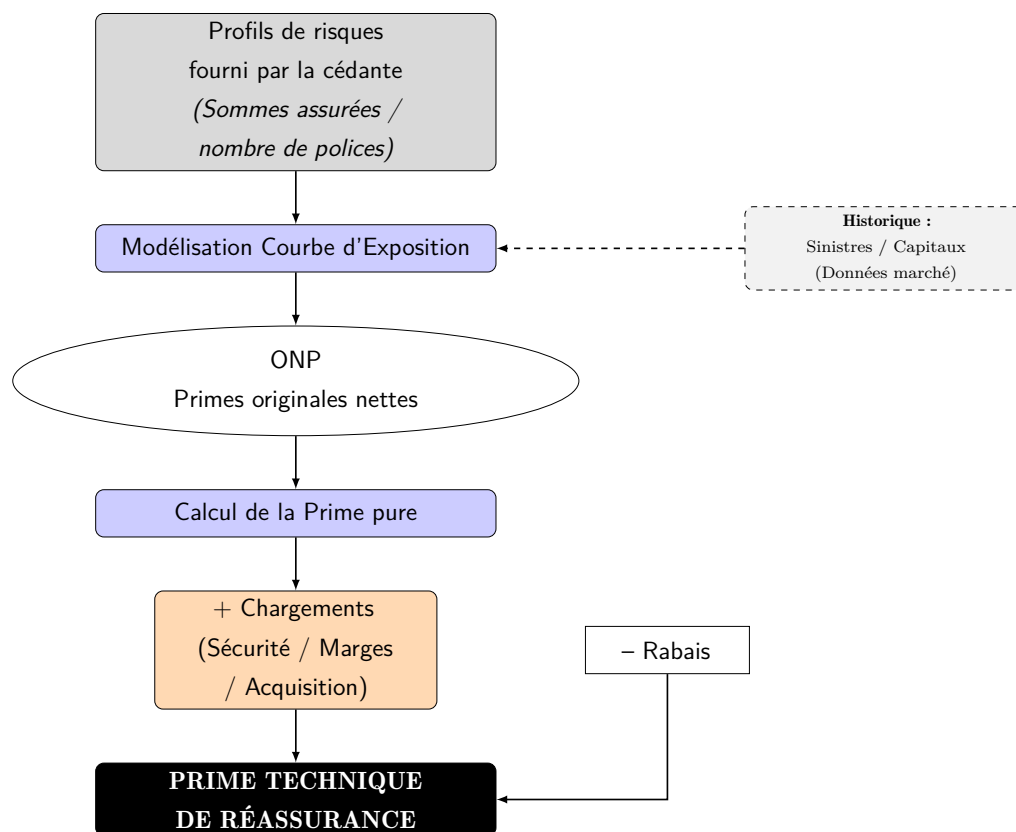
D'où, on déduit la prime totale nécessaire pour couvrir notre traité C xs P :

$$P = \sum_{b_T=1, \dots, N} (G_{b_T}(s_{b_T}) - G_{b_T}(r_{b_T})) \cdot P_{b_T}$$

Tel que :

- N est le nombre de bandes b_T
- P_{b_T} est la prime pour chaque bande b_T

En schématisant le processus, on a :



6 Processus de tarification

Cette section propose une synthèse du processus global de tarification, démontrant comment les méthodes abordées précédemment s'articulent. Le schéma ci-dessous offre une vue d'ensemble simplifiée de ce parcours et constitue le prélude à l'étude détaillée de chacune de ses phases, qui seront examinées successivement.

6.1 Check-list des données nécessaires à la cotation

Dans le cadre de l'évaluation technique pour la cotation, il est essentiel de disposer d'un ensemble structuré de données. Ces données couvrent deux axes principaux : (1) les données techniques relatives à l'étude de rentabilité et à l'exposition, et (2) les spécifications par branche. Les éléments requis permettent une analyse complète du portefeuille, de l'exposition aux risques, ainsi que des politiques de souscription et de renouvellement des traités. *L'ensemble des éléments est détaillé dans l'Annexe F.*

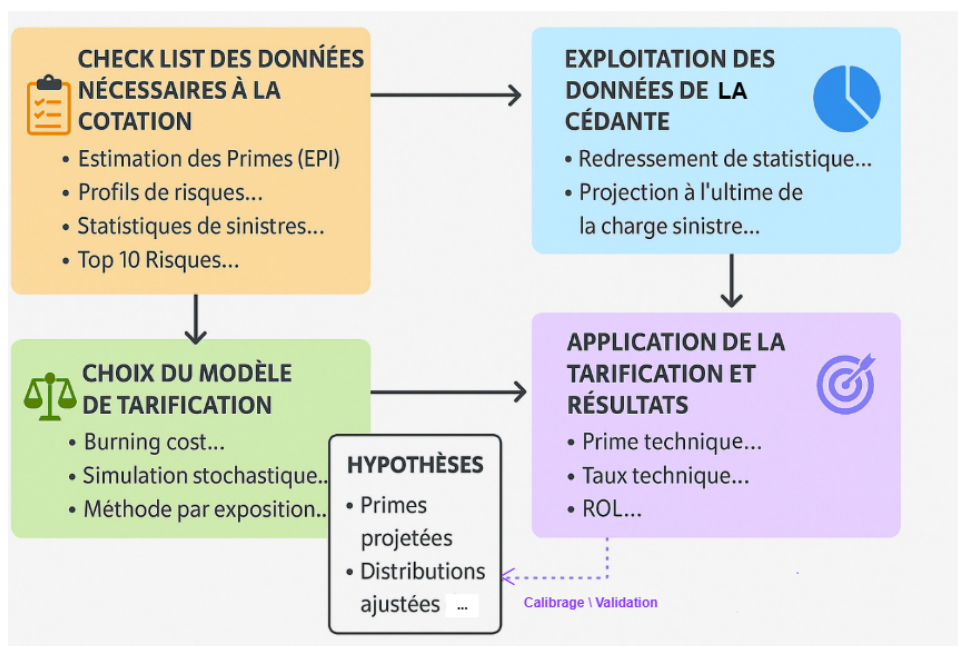


Figure 6.1 – Vue d’ensemble du processus de tarification

6.2 Exploitation de la statistique cédante

6.2.1 Construction d’une vision *As-if*

La première étape du calcul de la prime pure consiste à redresser un échantillon de statistiques historiques, afin de le rendre représentatif des conditions de souscription et économiques de l’année de couverture à évaluer. Ce redressement est appelé mise en *As if*.

Ce redressement doit prendre en compte les changements éventuels :

- de politique de souscription,
- de sélection des risques,
- de composition du portefeuille,
- de politique de provisionnement des sinistres (branches à développement long).

Les statistiques redressées sont :

- les sinistres individuels historiques,
- les assiettes de primes historiques,
- les sommes assurées.

Revalorisation des primes

Le redressement des primes historiques tient compte des modifications tarifaires de l’assureur. Il permet de recalculer les assiettes de primes qui auraient été émises (et

acquises) si les conditions tarifaires avaient été celles de l'année de couverture.

XS par Risque / Clash :

Si le nombre de polices souscrites nb_k est connu pour l'année k , et si la prime moyenne par police à l'année de cotation est $P_{\text{police, année de cotation}}$, alors :

$$P_{AsIf,k} = P_{\text{police, année de cotation}} \times nb_k = P_{\text{année de cotation}} \times \frac{nb_k}{nb_{\text{année de cotation}}}$$

Si l'on ne dispose pas de cette information, la revalorisation s'effectue à partir d'un indice tarifaire global représentatif de l'évolution du portefeuille⁴.

XS par Évènement :

Dans le cadre des événements naturels, la fréquence de survenance est indépendante du nombre de polices assurées. Seul le coût varie avec les capitaux assurés et leur niveau de destruction. L'assiette de prime à utiliser est donc simplement :

$$P_{AsIf,k} = P_{\text{année de cotation}}$$

Revalorisation des sinistres et des seuils de communication

La revalorisation des sinistres (et des seuils, en montants) doit être effectuée de façon cohérente avec le type de couverture XS considérée.

XS par Risque / Clash :

Le coût des sinistres individuels est revalorisé à l'aide d'un indice reflétant l'inflation économique sur les capitaux assurés (ou d'autres composantes comme la surinflation corporelle). Par exemple, pour la branche incendie, l'utilisation de l'indice de coût de la construction est généralement acceptée¹ :

$$S_{AsIf,k} = S_{hist,k} \times \frac{C_{\text{année de cotation}}}{C_k}$$

4. Les indices les plus utilisés sont : l'indice RI (risques industriels), l'indice CPI (indice des prix à la consommation), et l'indice ICC (indice du coût de la construction).

XS par Évènement :

La revalorisation des événements, et donc des coûts d'accumulation, dépend :

- du nombre de polices touchées,
- du degré de destruction des capitaux assurés.

L'exposition au risque est représentée par les capitaux assurés totaux C_k (produit du nombre de polices par la valeur moyenne assurée par police). Si l'on suppose que le degré de destruction observé historiquement serait identique aujourd'hui, on applique la même formule :

$$S_{AsIf,k} = S_{hist,k} \times \frac{C_{\text{année de cotation}}}{C_k}$$

6.2.2 Projection à l'ultime de la charge sinistre

Cette étape est spécifique à la tarification des traités non-proportionnels *long tail*. Le développement des sinistres étant rapide dans les branches *short tail*, il est d'usage de supposer que les montants de la dernière date d'arrêté sont ultimes.

Le triangle de liquidation

Une fois que chaque sinistre individuel a été retraité de telle sorte qu'il représente son équivalent survenu dans l'année de couverture, on va sommer la charge de l'excédent de sinistre correspondant à chaque sinistre survenu une même année. De cette façon, on aura un aperçu de la charge de sinistre annuelle historique. Cette présentation des données est appelée triangle de liquidation.

Cette charge agrégée est ensuite projetée à l'ultime suivant les méthodes de détermination de la charge ultime

les méthodes de détermination de la charge ultime

L'étude des différentes méthodes de provisionnement n'est cependant pas le sujet de ce mémoire. la méthode la plus utilisée est : la méthode **Chain Ladder**. elle repose sur l'extrapolation des profils de développement historiques, mais présente des limites notamment sa non-additivité et sa sensibilité aux données récentes. La méthode *Cape Cod* (Bornhuetter-Ferguson) apporte une correction en intégrant les primes acquises et un facteur de retardement pour le calcul des réserves IBNR. Enfin, la méthode de *Schnieper*

propose une approche stochastique distinguant clairement les composantes IBNR (sinistres non encore survenus) et IBNER (révisions de sinistres connus), permettant ainsi une estimation plus fine des réserves. Chacune de ces méthodes offre des avantages spécifiques selon le contexte d'application et la nature des données disponibles.

Une présentation plus approfondie de ces méthodes est disponible dans l'ouvrage de référence de Blondeau et Partrat 1

6.3 Choix du modèle de tarification

Le tableau ci-dessous synthétise les avantages et les limitations de chaque modèle, dans le cadre de l'évaluation comparative en vue de la sélection d'un modèle, ou d'une combinaison de modèles, adapté au programme de tarification.

Table 6.1 – Avantages et limitations des différentes méthodes de tarification

Méthode	Avantages	Limitations
Méthode du Burning Cost (BC)	<ul style="list-style-type: none"> - Simple, rapide à mettre en place, consomme peu de ressources. - Bonne estimation du risque si les tranches sont bien alimentées. 	<ul style="list-style-type: none"> - Suppose un portefeuille stable dans le temps. - Nécessite beaucoup de données fiables. - Donne un BC nul dans les tranches non touchées, même si le risque est réel.
Méthode probabiliste (fréquence-sévérité)	<ul style="list-style-type: none"> - Prend en compte l'historique avec une approche paramétrique des risques. - Permet des tests de sensibilité. - Utilise tous les sinistres. 	<ul style="list-style-type: none"> - Suppose l'indépendance entre le nombre et le coût des sinistres (hypothèse parfois irréaliste). - Peut souffrir du manque de données historiques.
Méthode par exposition	Très simple à appliquer une fois la courbe d'exposition construite.	<ul style="list-style-type: none"> - Ne prend pas en compte l'historique de la cédante. - Nécessite un Loss Ratio non toujours disponible.

L'étape suivante, qui succède au choix du modèle de tarification, consiste en l'application concrète des méthodes retenues. Celle-ci sera développée dans le chapitre suivant.

Chapitre 3

Application des méthodes de Tarification pour les Traités XS

Sommaire

1	Présentation du programme de réassurance à tarifer	77
2	Application de la méthode Burning Cost	78
3	Application de la méthode d'extrapolation Pareto	81
4	Application de la méthode Probabiliste	81
4.1	Statistiques descriptives	81
4.2	Modélisation de la sévérité	83
4.3	Modélisation de la fréquence	85
4.4	Retraitement des sinistres majeurs	86
4.5	Simulation et Tarification	87
5	Incertitude sur les paramètres	89
5.1	Incertitude des paramètres de la fréquence	89
5.2	Incertitude des paramètres de la sévérité	91
5.3	Résultats de l'incertitude des paramètres sur la prime pure . .	92

Dans le chapitre précédent, nous avons examiné en profondeur les principales méthodes de tarification applicables à un traité d'excédent de sinistre (XS) en réassurance non-vie. Le présent chapitre s'attache à leur mise en œuvre concrète sur le portefeuille de notre cédante chinoise, en se concentrant spécifiquement sur la tranche non-marine. Chaque méthode sera analysée à la lumière des particularités du portefeuille, des données historiques de sinistres disponibles et des spécificités du marché chinois. Cette analyse comparative permettra, in fine, d'identifier la méthode — ou combinaison de méthodes — la plus pertinente pour le programme de tarification de notre cédante.

1 Présentation du programme de réassurance à tarifer

Nous nous plaçons en décembre 2024, année de cotation, dans le cadre du calcul du taux de prime d'un traité d'excédent de sinistre par risque . Ce traité, couvrant la branche Non-marine du portefeuille d'une cédante chinoise, est structuré en quatre tranches successives. Les caractéristiques techniques de chaque tranche sont présentées dans le tableau ci-dessous.

Nom	EPI 2024	Garantie	Priorité	AAD	AAL	N rec	% Txrec
Tranche 1	65.000.000,00	5.000.000,00	5.000.000,00			2	100;100
Tranche 2	65.000.000,00	10.000.000,00	10.000.000,00			2	100;100
Tranche 3	65.000.000,00	20.000.000,00	20.000.000,00			2	100;100
Tranche 4	65.000.000,00	30.000.000,00	40.000.000,00			1	100

Table 1.1 – Structure du traité Non Marine XS – Cédante chinoise (année 2024)

Pour entamer la tarification, nous disposons d'une base historique fournie par *Atlantic Re*, comprenant les sinistres individuels (2014-2023) et les primes émises (EPI, 2014-2024) agrégées annuellement, accompagnées de l'indice d'actualisation IIC Chine (2014-2024). Bien que la légitimité institutionnelle d'*Atlantic Re* confère une certaine crédibilité, celle-ci est limitée par l'absence de documentation sur les méthodologies de collecte des sinistres et de contrôle qualité et des incohérences internes non expliquées (dont un sinistre anormal de 29.4M en 2021).

Cette base de données présente une structure globalement satisfaisante et suffisante pour une première analyse actuarielle.

2 Application de la méthode Burning Cost

Dans la section 6 , Nous avons mis en évidence l'importance essentielle de la mise en As-If des données en amont de leur exploitation dans les calculs actuariels. Dans le contexte de notre analyse, qui couvre à la fois les risques incendie et les risques liés au secteur de l'ingénierie (construction), il est indispensable de procéder à une normalisation rigoureuse des données à l'aide d'indices appropriés. À ce titre, l'indice ICC (Indice de Coût de la Construction) constitue un outil de référence permettant de mesurer l'évolution des coûts dans le domaine de la construction. Les données historiques de l'indice d'actualisation utilisé pour la mise en As-if des sinistres (CHINE IIC) sont résumées dans le tableau ci-dessous.

Année	Indice (CHINE IIC)
2014	98,50
2015	94,00
2016	97,60
2017	110,90
2018	109,40
2019	102,60
2020	100,46
2021	105,50
2022	103,10
2023	103,31
2024	104,34

Table 2.1 – Évolution de l'indice d'actualisation (CHINE IIC)

- **Indexation des primes (EPI)**

Le tableau ci-dessous présente les EPI entre 2014 et 2024, ainsi que leur version actualisée à l'aide de l'indice ICC

2. APPLICATION DE LA MÉTHODE BURNING COST

Année	EPI	EPI actualisé
2014	28.238.521,62	29.912.553,36
2015	31.243.503,07	34.680.043,11
2016	42.639.721,45	45.583.986,35
2017	59.513.833,93	55.993.052,40
2018	66.657.058,14	63.573.567,22
2019	75.942.718,53	77.230.089,72
2020	81.159.090,10	84.293.047,64
2021	67.432.406,45	66.690.497,86
2022	70.033.830,80	70.875.637,45
2023	46.341.630,39	46.805.046,69
2024	65.000.000,00	65.000.000,00

Table 2.2 – EPI et EPI indexée par année

• Préparation des sinistres

On indexe les sinistres individuels puis on calcule le coût annuel de sinistres à la charge du réassureur en appliquant la clause principale pour chaque tranche ainsi que les clauses particulières .

Année	2019	2020	2021	2022	2023	Somme
Primes	75.942.718,53	81.159.090,10	67.432.406,45	70.033.830,80	46.341.630,39	340.909.676,27
Primes actualisées	77.230.089,72	84.293.047,64	66.690.497,86	70.875.637,45	46.805.046,69	345.894.319,36
Charge XL Réel	940.321,64	3.346.608,10	5.400.000,00	-	-	9.686.929,74
Charge XL Indexée	1.041.021,21	3.668.912,30	5.340.587,82	-	-	10.050.521,32
N charge Réel	1	1	2	0	0	4
N charge indexé	1	1	2	0	0	4
Bcost Réel	1,24%	4,12%	8,01%	0,00%	0,00%	-
Bcost Indexé	1,35%	4,35%	8,01%	0,00%	0,00%	-
REC Indexée						
r1*Ct1/C	20,82%	73,38%	100,00%	0,00%	0,00%	-
r2*Ct2/C	0,0%	0,0%	6,8%	0,0%	0,0%	-
Gar. conso. Indexé	20,8%	73,4%	106,8%	0,0%	0,0%	201,0%
REC Réelle						
r1*Ct1/C	18,8%	66,9%	100,0%	0,0%	0,0%	-
r2*Ct2/C	0,0%	0,0%	8,0%	0,0%	0,0%	-
Gar. conso. Réelle	18,8%	66,9%	108,0%	0,0%	0,0%	193,7%

Table 2.3 – Extrait de calcul de la charge annuelle de réassureur et application des clauses particulières pour la première tranche

• Calcul du taux Burning Cost

Le taux BC est donné par la formule suivante :

2. APPLICATION DE LA MÉTHODE BURNING COST

$$BC = \frac{\sum_{i=1}^N \text{charge réassureur indexée}}{\sum_{i=1}^N \text{Prime EPI indexée}}$$

Par la suite, on calcule le taux technique selon la formule suivante :

$$\text{Prime Technique} = \frac{(BC + \beta \times \sigma) \times (1 - \text{Rec})}{(1 - BK - FG - AF)}$$

Avec :

- σ : volatilité des taux BC_i de l'année i .
- β : Le chargement de sécurité
- BK : les frais de courtage (broukage).
- FG : les frais de gestion
- AF : les autres frais incluent le coût de capital, la marge bénéficiaire...
- Le calcul de formule de reconstitution **Rec** est détaillée dans la section 3.5.3.

On obtient les résultats suivants, en tenant compte des chargements indiqués dans le tableau ci-contre :

Tarification	Indexée
BC	2,91%
Écart type des BC	3,44%
Réduction prime rec	66,78%
Taux de prime (sans rec)	4,20%
Taux technique	1,40%
Rol	18,14%

Table 2.4 – Résultats de la tarification

Chargements	
Frais d'acquisition	10,0%
Frais généraux	15,0%
Chargement de sécurité	20,0%

Table 2.5 – Composantes des chargements appliqués

- La première tranche **5 000 000 XS 5 000 000** est semi-travaillante. On obtient un *burning cost pur* de **2,91%** ainsi qu'un *taux technique* de **1,40%**.
- Pour les autres tranches, qui sont non travaillantes, la méthode de *Burning Cost* donne un taux BC pur nul. On applique donc une méthode d'extrapolation de type

Pareto ou une tarification par simulation.

3 Application de la méthode d'extrapolation Pareto

Dans cette section, nous appliquons la méthode d'extrapolation Pareto décrite précédemment afin d'estimer les taux techniques et les primes par tranche de couverture, sur la base des données suivantes :

- $PP^{BC} = 1\,888\,680,59$: prime pure observée sur la tranche travaillante via la méthode *burning cost*.
- $\hat{\alpha} = 2,25$: paramètre estimé de la loi de Pareto.
- $\hat{\lambda} = 10,8$: l'estimateur du paramètre de la loi de Poisson, il correspond au nombre moyen de sinistres observés par année.

Les résultats obtenus sont présentés dans le tableau ci-dessous :

Nom	EPI 2024	Garantie	Priorité	Taux technique	Prime technique	ROL
Tranche 1	65 000 000,00	5 000 000,00	5 000 000,00	1,40%	907 141,49	18,14%
Tranche 2	65 000 000,00	10 000 000,00	10 000 000,00	3,67%	2 386 603,55	23,86%
Tranche 3	65 000 000,00	20 000 000,00	20 000 000,00	2,69%	1 750 736,78	8,75%
Tranche 4	65 000 000,00	30 000 000,00	40 000 000,00	1,30%	843 659,40	2,81%

4 Application de la méthode Probabiliste

4.1 Statistiques descriptives

Une première exploration statistique des données de sinistres est indispensable pour appréhender les caractéristiques intrinsèques du portefeuille étudié. Le tableau 4.1 synthétise les principaux indicateurs.

MIN	MAX	MOYENNE	MEDIANE	ÉCART-TYPE
24695.00	29429694.29	1386551.00	820339.00	1525968.00

Table 4.1 – Statistiques descriptives sommaires des coûts de sinistres.

L'analyse de ces statistiques révèle immédiatement une **forte hétérogénéité** des coûts : l'écart-type (1525968) est supérieur à la moyenne (1386551), indiquant une dispersion considérable. De plus, la moyenne est significativement plus élevée que la médiane (820339), ce qui témoigne d'une forte asymétrie positive (vers la droite) de la distribution des coûts. Cette asymétrie suggère la présence probable de sinistres de montants très élevés qui influencent fortement la moyenne.

Pour affiner cette première analyse et visualiser la structure de la distribution, notamment la présence de valeurs extrêmes, nous utilisons une représentation graphique par boîte à moustaches (boxplot). La figure 4.1 présente un boxplot construit sur la base des quantiles à 1% et 99%, permettant de focaliser l'analyse sur le corps principal de la distribution tout en identifiant les valeurs les plus extrêmes.

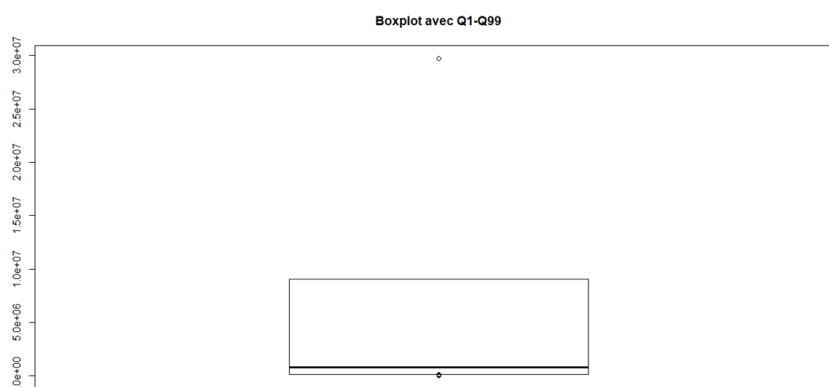


Figure 4.1 – Boxplot des coûts de sinistres (Quantiles 1% - 99%).

Ce graphique confirme de manière flagrante la présence d'une valeur extrême : un sinistre survenu en 2021, d'un coût de 29429694.29, se situe très au-delà de la *moustache* supérieure, même en considérant une définition basée sur les quantiles à 1% et 99%. Ce sinistre se distingue nettement du reste du portefeuille et peut être qualifié de **sinistre majeur** ou d'événement exceptionnel (parfois désigné comme **sinistre de référence** dans certains contextes, s'il impacte significativement plusieurs tranches du programme de réassurance).

Dans le cadre de la tarification d'un traité en excédent de sinistre (XS), l'identification et le traitement spécifique de tels sinistres majeurs sont cruciaux. Leur nature exceptionnelle justifie souvent de les **isoler de l'analyse actuarielle standard** (modélisation fréquence/sévérité de la partie *attritionnelle* du portefeuille) pour leur appliquer une approche dédiée, par exemple basée sur des scénarios spécifiques, des modèles de type EVT (Extreme Value Theory) ou une estimation de leur période de retour. Ignorer leur

caractère exceptionnel et les inclure dans la modélisation globale pourrait conduire à une distorsion significative des paramètres estimés et, in fine, à une tarification inadéquate des différentes tranches du traité.

4.2 Modélisation de la sévérité

Pour la modélisation de la sévérité, nous testerons les trois lois suivantes : la loi de Pareto, la loi de Pareto généralisée et la loi log-normale.

Le choix du seuil de modélisation constitue une étape cruciale dans la modélisation de la sévérité. Deux approches principales sont généralement envisagées :

- Les méthodes issues de la **théorie des valeurs extrêmes** (TVE)
- La détermination par un **pourcentage de la franchise**, méthode largement utilisée dans la pratique actuarielle

Dans le cadre de cette étude, nous avons privilégié la seconde approche en cherchant à identifier le pourcentage optimal de franchise permettant une modélisation adéquate des données de sinistres. Pour ce faire, nous avons déterminé le seuil optimal de modélisation en analysant systématiquement l'évolution des p-values du test de Kolmogorov-Smirnov pour la loi de Pareto en fonction du seuil :

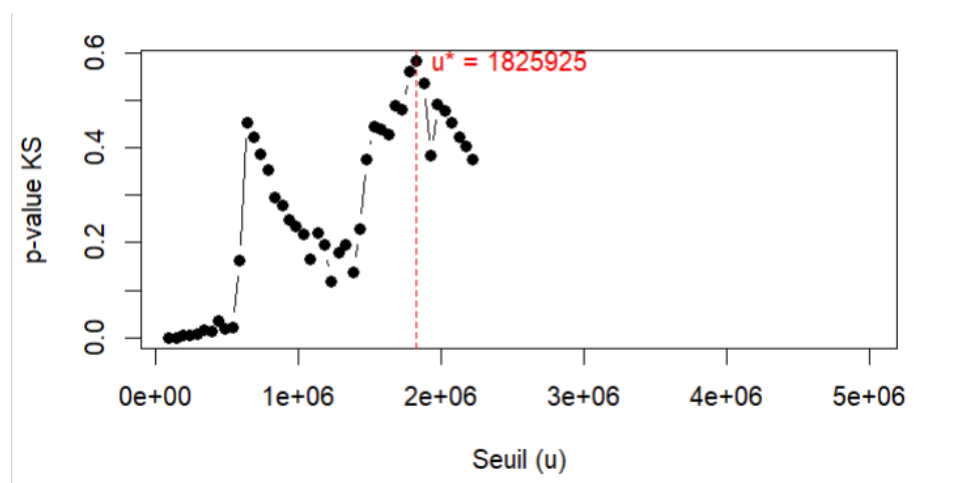


Figure 4.2 – Analyse de la p-value du test KS (Pareto) en fonction du seuil.

Cette analyse suggère une région de stabilité pour l'ajustement Pareto au-delà d'un certain seuil (ici, déterminé comme étant approximativement 35% de la franchise du traité). De plus, la validité de l'ajustement Pareto est souvent corroborée en vérifiant que le paramètre de queue estimé $\hat{\alpha}$ se situe dans des plages empiriquement observées sur des marchés comparables (typiquement entre 1.2 et 1.8 pour ce type de branches).

Les résultats de l'ajustement des trois lois aux données excédant le seuil retenu sont synthétisés dans le tableau 4.2, incluant les p-values des tests de Kolmogorov-Smirnov (KS) et Anderson-Darling (AD).

Loi	Paramètres	Valeur(s)	Test KS	Test AD
Pareto	α	1.688619	0.517	0.4177
Pareto généralisée	$\alpha_{ini}, \alpha_{tail}$	1.111366 ; 10	0.7708	0.9401
Log-normale	μ_{log}, σ_{log}	14.9673263 ; 0.4036144	0.5959	0.7237

Table 4.2 – Résumé des ajustements par des 3 lois

Les p-values élevées pour les tests KS et AD suggèrent quedes trois lois ne peut être rejetée statistiquement sur la base de ces critères globaux. Lvisuel (Figure 4.3) confirme une adéquation raisonnable des trois modèles aux données empiriques.

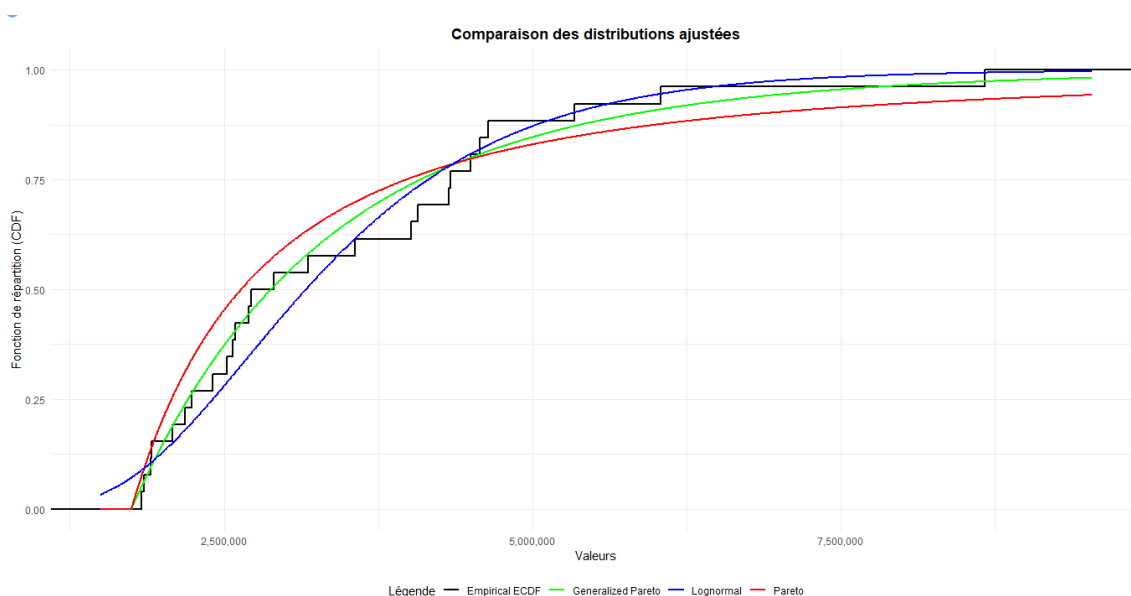


Figure 4.3 – Comparaison visuelle des ajustements des lois de sévérité.

Le choix final doit cependant être guidé par l'objectif de tarification des tranches XS, qui dépend cruciallement de la modélisation de la queue de distribution.

- La **Log-normale**, bien qu'ajustée, est reconnue pour avoir une queue plus légère que les lois de type Pareto et peut sous-estimer la probabilité des sinistres les plus extrêmes, cruciaux pour les tranches hautes.
- La **GPD**, plus flexible grâce à son paramètre de forme , offre un bon ajustement statistique. Cependant, l'estimation de peut être instable avec un nombre limité d'observations dans la queue, induisant une incertitude potentiellement élevée sur l'extrapolation nécessaire à la tarification des tranches supérieures.

- La **Pareto simple**, bien que moins flexible, est parcimonieuse (un seul paramètre) fournit souvent une modélisation stable et robuste des queues lourdes. Sa capacité à extrapoler de manière cohérente dans les extrêmes en fait un choix privilégié par prudence actuarielle pour la tarification des couches XS élevées, même si son ajustement global peut être légèrement inférieur à celui de la GPD.

Compte tenu de la nécessité d'une tarification robuste pour les tranches hautes (T3, T4) et de la potentielle instabilité de la GPD sur des données limitées, la **loi de Pareto simple** est retenue pour modéliser la sévérité dans cette étude. Sa robustesse et sa parcimonie offrent un compromis raisonnable entre adéquation aux données et fiabilité de l'extrapolation pour les risques extrêmes.

Les résultats de la simulation par ces trois lois par la suite vont confirmer le fait qu'en collant trop à l'échantillon, y compris sur le haut, toutes les lois sauf la Pareto touchent très peu ou pas les tranches du haut T3 et T4.

4.3 Modélisation de la fréquence

La modélisation de la fréquence des sinistres débute par le calcul de la fréquence brute annuelle des sinistres excédant le seuil sélectionné. Étant donné la variation interannuelle de l'exposition au risque, une actualisation s'impose pour obtenir des estimateurs comparables. Cette correction est effectuée à l'aide de l'**EPI actualisé**, qui constitue une approximation raisonnable de l'exposition bien que l'idéal serait d'utiliser le nombre de polices. La fréquence actualisée est noté N^* est le tableau des fréquences annuelles est le suivant :

Année	N	EPI*	N^*
2014	1	29912553.4	2.2
2015	2	34680043.1	3.7
2016	1	45583986.4	1.4
2017	2	55993052.4	2.3
2018	2	63573567.2	2.0
2019	1	77230089.7	0.8
2020	5	84293047.6	3.9
2021	9	66690497.9	8.8
2022	2	70875637.5	1.8
2023	1	46805046.7	1.4

Table 4.3 – Fréquences annuelles de sinistres actualisées par l'EPI

L'ajustement de la variable N^* (fréquence actualisée) a été testé pour trois lois discrètes : Poisson, binomiale et binomiale négative. Les paramètres ont été estimés par maximisation

de la vraisemblance via la fonction `goodfit` (package `vcd` de R). L'adéquation des modèles a été évaluée par un test d'adéquation du χ^2 de Pearson, dont les résultats sont synthétisés ci-dessous :

Loi	Paramètres estimés	p-value (χ^2)
Binomiale	$\begin{cases} n = 8 \\ p = 0.35 \end{cases}$	0.0007
Binomiale négative	$\begin{cases} r = 1.4542 \\ p = 0.3418 \end{cases}$	0.0587
Poisson	$\lambda = 2.8$	0.0260

Table 4.4 – Résultats des ajustements aux lois discrètes et tests d'adéquation

La loi binomiale est rejetée de manière significative (p-value = 0.0007 < $\alpha = 0.05$), indiquant une inadéquation structurelle avec les données. Ce rejet s'explique par la rigidité de sa variance $\mathbb{V}(X) = np(1-p)$, inférieure à l'espérance $\mathbb{E}(X) = np$, alors que les données présentent une surdispersion ($\bar{x} = 2.8$, $s^2 \approx 5.2$).

La loi de Poisson est rejetée au seuil de 5% (p-value = 0.0260), bien que cette décision mérite une analyse critique. La proximité de la p-value avec le seuil critique pourrait résulter d'artefacts liés à la taille modeste de l'échantillon ($n = 10$ années) ou de fluctuations aléatoires. Le test du χ^2 étant sensible aux effectifs théoriques faibles dans les queues de distribution, il tend à sur-rejeter en présence de légère surdispersion.

La binomiale négative, dont la variance $\mathbb{V}(X) = \frac{r(1-p)}{p^2}$ dépasse l'espérance $\mathbb{E}(X) = \frac{r(1-p)}{p}$, présente une adéquation marginale. Toutefois, l'introduction d'un paramètre supplémentaire ($r = 1.4542$) expose au risque de sur-ajustement, particulièrement pour un échantillon de taille limitée. L'estimateur de λ pour la loi de Poisson ($\hat{\lambda} = 2.8$) offre une approximation robuste malgré le rejet formel du test, cette dernière restant théoriquement justifiée pour des fréquences moyennes.

Ces conclusions statistiques influenceront directement le calcul des primes pures dans les sections ultérieures.

4.4 Retraitement des sinistres majeurs

La traitement du sinistre référence, déjà exclu de la base, est effectuée selon le principe du *Burning Cost*. Toutefois, la charge du réassureur est dévisé par une période de retour T estimée à 20 ans. Les résultats correspondants sont résumés ci-dessous.

Charge XS	Charge XL/T	Tx Pure (%)	Tx Risque (%)	Tx Technique (%)
5 000 000,00	250 000,00	0,3846	0,4231	0,5641
10 000 000,00	500 000,00	0,7692	0,8462	1,1282
9 105 901,26	455 295,06	0,7005	0,7705	1,0273
–	–	–	0,0000	0,0000

Table 4.5 – Résultats de tarification par tranche XS

Les taux techniques obtenus seront intégrés aux taux issus de la simulation afin de déterminer le taux final.

4.5 Simulation et Tarification

Une simulation stochastique a été réalisée sur 10 000 années afin de modéliser la sinistralité du portefeuille. La sévérité suit l'une des trois lois ajustées. Afin de garantir la reproductibilité des résultats, la graine aléatoire a été fixée à l'aide de la commande `set.seed(1234)`. Le choix de la valeur 1234, arbitraire mais simple à retenir, permet d'assurer que chaque exécution du code produise les mêmes résultats, ce qui est essentiel pour valider et comparer les différentes hypothèses de tarification de manière cohérente.

Suite à la simulation, la charge du réassureur est calculée pour chacune des 10 000 années simulées ainsi que les reconstitutions. La Prime technique est ensuite déterminé à l'aide de la formule suivante :

$$\text{Prime Technique} = \frac{(\mathbb{E}(Y) + \beta \times \sigma(Y)) \times (1 - \text{Rec})}{1 - BK - FG - AF}$$

avec :

- Y représente la charge annuelle du réassureur,
- $\mathbb{E}(Y)$ son espérance,
- $\sigma(Y)$ son écart type,
- les autres paramètres sont détaillés dans la section 2.

Pour les raisons mentionnées précédemment, nous avons retenu la distribution de Poisson comme modèle de fréquence. Concernant la modélisation de la sévérité, les calculs de prime ont été effectués selon les trois lois ajustées, permettant d'une part de visualiser précisément leurs effets comparatifs, et d'autre part de valider les résultats théoriques et interprétations développées en fin de la partie 4.2. Les principaux résultats sont condensés dans les tableaux présentés ci-après :

4. APPLICATION DE LA MÉTHODE PROBABILISTE

Pareto					
Tranche	Prime Pure	Prime de risque	Prime technique	Taxe technique	ROL
Tranche 1	1 326 573.5	1 790 808.1	2 257 318.1	3.47%	45.1464%
Tranche 2	827 203.7	1 348 378.0	2 393 902.6	3.68%	23.939%
Tranche 3	504 953.0	1 070 051.4	2 060 125.7	3.17%	10.307%
Tranche 4	429 486.6	806 770.9	1 064 030.4	1.64%	3.247%

Pareto Généralisée					
Tranche	Prime Pure	Prime de risque	Prime technique	Taxe technique	ROL
Tranche 1	793 627.7	1 112 583.6	694 918.81	2.53%	32.9428%
Tranche 2	106 490.7	180 216.4	971 089.32	1.49%	9.711%
Tranche 3	4 628.8	20 585.1	694 918.81	1.07%	3.475%
Tranche 4	0	0	0.00	0.00%	0.00%

Log Normale					
Tranche	Prime Pure	Prime de risque	Prime technique	Taxe technique	ROL
Tranche 1	419 202.7	610 752.3	733 930.0	1.72%	14.67%
Tranche 2	8 933.3	44 585.6	792 724.5	1.22%	7.93%
Tranche 3	0	0	733 930.0	1.13%	3.87%
Tranche 4	0	0	0.00	0.00%	0.00%

Table 4.6 – Résultats par loi de distribution

L'examen des résultats révèle des divergences marquées entre les lois de distribution, particulièrement dans l'appréhension du risque sur les tranches supérieures. La loi de Pareto attribue une charge de sinistre conséquente à toutes les tranches, y compris les plus élevées (Tranches 3 et 4), générant une prime pure respective de 504 953 et 429 486. Le ROL associé diminue de manière cohérente avec l'élévation de la priorité, passant de 45,1 % pour la première tranche à 3,2 % pour la dernière, ce qui correspond aux attentes théoriques et pratiques pour les couvertures XS.

En revanche, la loi Log-Normale n'alloue aucune prime aux tranches 3 et 4, et une charge très faible à la tranche 2. Cette caractéristique illustre sa nature « à queue légère », inapte à capturer la probabilité des sinistres extrêmes nécessaires pour atteindre ces niveaux de couverture, entraînant une sous-estimation significative du risque.

La loi Pareto Généralisée (GPD) adopte une position intermédiaire, mais reste insuffisante pour les risques extrêmes dans ce contexte. Elle n'attribue qu'une prime minimale à la tranche 3 et aucune à la tranche 4. Bien qu'elle puisse offrir un bon ajustement statistique global, la forme de queue estimée ici ne permet pas une extrapolation prudente et adéquate au-delà des sinistres observés.

Ces observations valident le choix de la loi de Pareto simple pour cette tarification. La nature même de la réassurance XS impose une prise en compte rigoureuse des événements rares mais potentiellement coûteux. La robustesse de la loi de Pareto dans la modélisation de la queue de distribution, qui se traduit par une tarification non nulle et cohérente des tranches hautes, la désigne comme l'outil le plus approprié parmi ceux évalués. L'incapacité des lois Log-Normale et GPD à tarifier correctement ces mêmes tranches dans cette application souligne leurs limitations pour ce type spécifique de risque. La simulation fondée sur la loi de Pareto offre ainsi la base de tarification la plus fiable et actuariellement prudente pour l'ensemble du programme.

Un autre paramètre crucial dans le calcul de la prime de risque est le choix de la mesure de risque. Après avoir adopté le modèle Poisson-Pareto, nous avons mené une étude comparative en calculant les taux techniques pour quatre tranches de risque. Trois mesures ont été évaluées :

	STD ERROR	VaR	TVaR
T1	3,47%	3,70%	4,02%
T2	3,68%	4,78%	5,60%
T3	3,17%	2,70%	2,98%
T4	1,64%	3,59%	3,86%

Table 4.7 – Taux techniques utilisant d'autres mesures de risques

Les mesures VaR et TVaR, par construction, intègrent explicitement le risque de queue de distribution, conduisant à des estimations systématiquement plus prudentes que l'erreur standard. Cette prudence se traduit par des tarifs plus élevés, particulièrement pour la TVaR qui capture l'ampleur moyenne des pertes extrêmes au-delà du seuil de la VaR.

5 Incertitude sur les paramètres

5.1 Incertitude des paramètres de la fréquence

Nous avons retenu la loi de Poisson pour modéliser la fréquence des sinistres. L'estimation du paramètre de cette loi, noté λ , à partir de l'échantillon d'origine donne une valeur de $\hat{\lambda} = 2,84$.

Un total de $B = 100\,000$ échantillons bootstrap de taille $n = 10$ sont générés selon $P_{\hat{\lambda}=2,84}$.

5. INCERTITUDE SUR LES PARAMÈTRES

Pour chaque échantillon, l'estimateur $\hat{\lambda}$ est recalculé. On obtient ainsi un échantillon de B réalisations de l'estimateur, noté $\{\hat{\lambda}_j\}_{j=1,\dots,B}$. La distribution empirique de ces valeurs rend compte de la variabilité de l'estimateur autour de la valeur de départ estimée à $\hat{\lambda} = 2,84$.

Une fois les B réalisations simulées, on peut représenter graphiquement la distribution empirique du paramètre λ . On observe généralement une symétrie autour de l'estimateur moyen, révélant une certaine symétrie dans l'incertitude autour de l'estimateur moyen

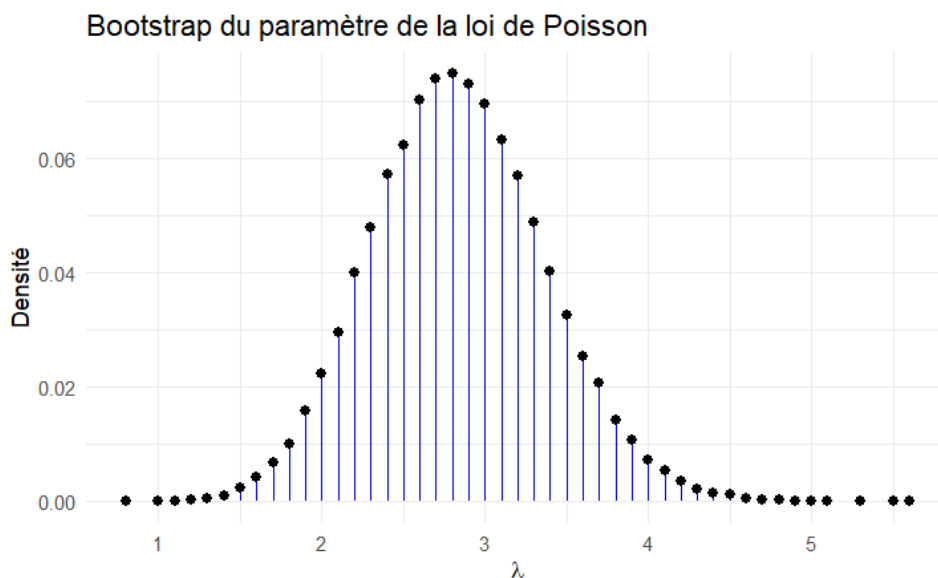


Figure 5.1 – Bootstrap du paramètre de la loi de Poisson

Il est également possible de formaliser l'analyse statistique de l'estimateur de la moyenne du nombre de sinistres, dans le cadre d'une hypothèse de modélisation par une loi de Poisson.

Table 5.1 – Analyse de l'estimateur de la moyenne du nombre de sinistre par bootstrap

Statistiques	Valeurs
Espérance	2,838
Écart-type	0,534
Coefficient de variation	19%
Quantile à 95%	3,7

Il est important de rappeler que dans le cas de la loi de Poisson, l'erreur commise sur le paramètre est exactement l'erreur commise sur l'espérance et la variance du nombre de

sinistres. Ceci vient du fait que les estimateurs de ces deux premiers moments sont égaux :

$$\mathbb{E}(\hat{N})^{\text{Boot}} = \mathbb{E}(N/\lambda) = \mathbb{V}(\hat{N})^{\text{Boot}} = \mathbb{V}(N/\lambda) = \lambda$$

Dans notre analyse, la moyenne des valeurs de λ obtenues par bootstrap est de 2,838, avec un écart-type de 0,534, soit un coefficient de variation de 19%. Ce niveau d'incertitude traduit une variabilité non négligeable autour de l'estimation centrale, notamment en raison de la taille limitée de l'échantillon. Le quantile à 95% de cette distribution atteint 3,7; c'est la valeur qu'il conviendrait de retenir si l'on souhaite ne tolérer que 5% de probabilité de sous-estimer la moyenne annuelle du nombre de sinistres. Cela revient à intégrer une marge de sécurité de 0,9 sinistre au-dessus de l'estimation centrale, Nous verrons dans la suite de ce mémoire les impacts sur la prime pure .

5.2 Incertitude des paramètres de la sévérité

Afin d'intégrer l'incertitude sur le paramètre de la loi de Pareto, une procédure de bootstrap paramétrique est mise en œuvre à partir d'un échantillon de même taille que celui utilisé lors de l'estimation initiale., on réalise le bootstrap , ce qui conduit à la simulation de 10 000 valeurs . ce qui donne pour espérance et coefficient de variation de α :

Table 5.2 – Statistiques de l'estimateur du paramètre de Pareto (bootstrap)

Statistiques	Valeurs
Moyenne	1,75
Écart-type	0,36
Coefficient de variation	20,45%
Quantile à 95%	2,41

Nous passons à présent à l'étude de l'impact de la prise en compte – ou non – de l'incertitude sur les paramètres de fréquence et de sévérité, en évaluant son effet sur les primes pures des différentes tranches à tarifier .

5.3 Résultats de l'incertitude des paramètres sur la prime pure

On rappelle que la distribution de sévérité ajustée au seuil t suit une loi de Pareto de paramètre α et dont la fonction de distribution s'écrit

$$F_{P(t,\alpha)}(x) = 1 - \left(\frac{t}{x}\right)^\alpha, \quad x \geq t.$$

l'espérance de la charge d'une tranche de priorité P et une limite $L = P + C$ s'écrit alors

$$E(Y) = \int_P^L (1 - F_{P(t,\alpha)}(x)) dx,$$

lorsque le paramètre α est connu, s'écrit :

$$E(Y) = \begin{cases} \frac{P \left(\frac{P}{t}\right)^{-\alpha} - L \left(\frac{L}{t}\right)^{-\alpha}}{\alpha - 1}, & \alpha \neq 1, \\ t \ln\left(\frac{L}{P}\right), & \alpha = 1. \end{cases}$$

Lorsqu'on intègre l'incertitude sur un ou plusieurs paramètres de la sévérité, la charge attendue sur la tranche se transforme en une variable aléatoire. dont on peut tracer les caractéristiques (espérances, écart type, coefficient de variation et distribution complète).

dans le cadre où la fréquence est modélisée par une loi de poisson et la sévérité par une loi de Pareto. Elles permettent, selon que l'on considère ou non l'incertitude sur les paramètres de fréquence et de sévérité, d'établir la distribution de l'estimateur de la prime pure et, en particulier, de calculer ses deux premiers moments.

▷ **Cas sans incertitude :**

$$E(\widehat{PP}) = \lambda \frac{t^\alpha}{\alpha - 1} (P^{1-\alpha} - L^{1-\alpha}), \quad V(\widehat{PP}) = 0.$$

▷ **Cas avec incertitude du paramètre de fréquence :**

$$E(\widehat{PP}) = E_\lambda[\lambda] \frac{t^{\hat{\alpha}}}{\hat{\alpha} - 1} (P^{1-\hat{\alpha}} - L^{1-\hat{\alpha}}),$$

$$V(\widehat{PP}) = V_\lambda[\lambda] \left(\frac{t^{\hat{\alpha}}}{\hat{\alpha} - 1} (P^{1-\hat{\alpha}} - L^{1-\hat{\alpha}}) \right)^2.$$

▷ **Cas avec incertitude du paramètre de sévérité :**

$$E(\widehat{PP}) = \hat{\lambda} \mathbb{E}_\alpha \left[\frac{t^\alpha}{\alpha - 1} (P^{1-\alpha} - L^{1-\alpha}) \right],$$

$$V(\widehat{PP}) = \hat{\lambda}^2 \mathbb{V}_\alpha \left[\frac{t^\alpha}{\alpha - 1} (P^{1-\alpha} - L^{1-\alpha}) \right].$$

▷ **Cas avec incertitude des paramètres de fréquence et de sévérité :**

$$E(\widehat{PP}) = E_\lambda[\lambda] \mathbb{E}_\alpha \left[\frac{t^\alpha}{\alpha - 1} (P^{1-\alpha} - L^{1-\alpha}) \right],$$

$$V(\widehat{PP}) = E_\lambda[\lambda]^2 \mathbb{V}_\alpha \left[\frac{t^\alpha}{\alpha - 1} (P^{1-\alpha} - L^{1-\alpha}) \right] + V_\lambda[\lambda] \left(\left(\mathbb{E}_\alpha \left[\frac{t^\alpha}{\alpha - 1} (P^{1-\alpha} - L^{1-\alpha}) \right] \right)^2 + \mathbb{V}_\alpha \left[\frac{t^\alpha}{\alpha - 1} (P^{1-\alpha} - L^{1-\alpha}) \right] \right).$$

Cela permet de dresser le tableau final des résultats de primes pures pour toutes les tranches suivant que l'on prend en compte l'incertitude des paramètres ou pas, sur la fréquence et/ou la sévérité.

Table 5.3 – Analyse de l'estimateur de la prime pure des tranches

Espérance Prime Pure	T1 – 5M XS 5M	T2 – 10M XS 10M	T3 – 20M XS 20M	T4 – 40M XS 30M
1. Sans incertitude	1 329 779,43	825 058,39	511 905,46	450 939,49
2. Incertitude sur λ	1 328 560,18	824 301,91	511 436,10	450 526,03
3. Incertitude sur α	1 349 031,22	902 176,96	626 609,90	607 941,51
4. Incertitude sur λ et α	1 347 794,32	901 349,77	626 035,38	607 384,10

Coef. de variation Prime Pure	T1 – 5M XS 5M	T2 – 10M XS 10M	T3 – 20M XS 20M	T4 – 40M XS 30M
1. Sans incertitude	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%
2. Incertitude sur λ	18,80%	18,80%	18,80%	18,80%
3. Incertitude sur α	43,36%	64,00%	85,33%	100,73%
4. Incertitude sur λ et α	47,96%	67,78%	88,84%	104,20%

Quantile 95% Prime Pure	T1 – 5M XS 5M	T2 – 10M XS 10M	T3 – 20M XS 20M	T4 – 40M XS 30M
1. Sans incertitude	1 329 779,43	825 058,39	511 905,46	450 939,49
2. Incertitude sur λ	1 732 085,55	1 074 668,24	666 775,28	587 364,91
3. Incertitude sur α	2 402 775,37	2 007 745,14	1 677 660,18	1 810 920,58
4. Incertitude sur λ et α	2 926 198,44	2 421 882,56	2 008 938,30	2 164 308,67

Il apparaît clairement que l'incertitude s'accroît à mesure que l'on progresse vers les tranches non travaillante : les écarts-types et les quantiles supérieurs (95 %) augmentent

fortement pour T3 et T4, traduisant une variabilité exacerbée de la prime pure. En conséquence, la prime pure intégrant l'incertitude peut dépasser de plus de 100 % la valeur calculée en mode déterministe (sans incertitude).

Les résultats de ce cas pratique montrent qu'il est indispensable de tenir compte l'incertitude des paramètres de fréquence et de sévérité en tarification réassurance : l'effet sur la prime pure dépasse largement un seuil critique d'importance et impacterait également le capital à allouer. En perspective, il serait intéressant d'étudier précisément cet effet sur le capital requis pour les traités non proportionnels, et d'explorer une méthode de mélange en crédibilité entre estimations sur expérience et sur exposition pour réduire l'incertitude des paramètres.

Chapitre 4

Modélisation et construction des courbes de tarifs marché

Sommaire

1	Présentation de la problématique	96
2	Les outils benchmark : Les approches marché par branche	96
2.1	Outil benchmark adapté aux branches longues	96
2.2	Outil benchmark adapté aux branches courtes	98
3	Tarification des taraités CAT XS à l'aide de courbes de marché	98
3.1	La méthode des power curves appliquées aux ROL	98
3.2	La méthode Spline curve	106
3.3	Validation du modèle	108
3.4	Tarification d'un nouveau programme	111
4	Application et résultats	112
4.1	Marché Turc	112
4.2	Marché Indien	118
4.3	Conclusion	121

Ce chapitre détaille la modélisation et la construction des courbes de tarifs marché, un outil indispensable pour les souscripteurs en quête de repères objectifs. La tarification marché est utilisée lorsque les données de la cédante sont indisponibles, insuffisantes ou non représentatives, rendant impossible l'établissement d'une prime d'expérience fiable. En tenant compte de la structure des programmes et en utilisant une courbe de marché, il devient possible d'attribuer un tarif de marché à un nouveau programme. Notre point d'application porte précisément sur les programmes CAT XL, Pour ces traités, nous déployons plusieurs méthodologies de construction des courbes marchés .

1 Présentation de la problématique

Comment établir une tarification simple et cohérente d'un programme de réassurance catastrophe en excédent de sinistre (Cat XL) en situation d'information limitée, en s'appuyant notamment sur les taux commerciaux observés de programmes déjà cotés, afin de refléter fidèlement les conditions réelles du marché et de pallier les limites des modèles actuariels de tarification classiques .

2 Les outils benchmark : Les approches marché par branche

Le principe étant d'obtenir un taux marché par comparaison du traité que l'on veut tarifier avec d'autres traités en portefeuille de composition similaire.

2.1 Outil benchmark adapté aux branches longues

Cet outil est fondé sur le modèle Poisson–Pareto et s'inspire des travaux de Robert Verlaak et de Werner Hürlimann[11] . Il n'est pas adapté aux branches courtes. En effet, il repose sur l'hypothèse selon laquelle, l'intensité des sinistres demeure constante d'une année sur l'autre.

Soit la tranche C x s P . Nous avons :

$$E[S_{C,P}] = E[N_\lambda] \times E[X_{C,P}]$$

avec

$$E[X_{C,P}] = \frac{\lambda}{\alpha - 1} \left[\left(\frac{\lambda}{P} \right)^{\alpha-1} - \left(\frac{\lambda}{C+P} \right)^{\alpha-1} \right] \text{ si } \alpha > 1.$$

Si la compagnie de réassurance ajoute un chargement c proportionnel à la charge de sinistralité attendue et applique une remise à un taux ν pour tenir compte des investissements futurs, la prime marché pour la tranche $C x s P$ est égale à :

$$P(P, C) = \nu(1 + c) E[N_\lambda] E[X_{C,P}].$$

S'il semble naturel de supposer que l'intensité des sinistres demeure constante d'année en année, le taux de remise ν , le taux de chargement c et le nombre attendu de sinistres $E[N_\lambda]$ peuvent, quant à eux, varier d'une année à l'autre. En divisant la prime $P(P, C)$ par l'EPI, on obtient le taux benchmark :

$$\pi(P, C, \gamma, \lambda, \alpha) = \frac{P(P, C)}{\text{EPI}} = \frac{\nu(1 + c) E[N_\lambda]}{\text{EPI}} \times \frac{\lambda}{\alpha - 1} \left[\left(\frac{\lambda}{P} \right)^{\alpha-1} - \left(\frac{\lambda}{C+P} \right)^{\alpha-1} \right].$$

En posant :

$$\gamma = \frac{\nu(1 + c) E[N_\lambda]}{\text{EPI}}.$$

on obtient :

$$\pi(P, C x s P, \gamma, \lambda, \alpha) = \gamma \frac{\lambda}{\alpha - 1} \left[\left(\frac{\lambda}{P} \right)^{\alpha-1} - \left(\frac{\lambda}{C+P} \right)^{\alpha-1} \right].$$

Ainsi, le taux benchmark associé à la tranche $C x s P$ dépend de trois paramètres inconnus, γ , $\lambda > 0$ et $\alpha > 1$. Parmi ces trois paramètres, seul le premier γ dépend de l'année de cotation.

Soit un marché donné de la réassurance. Soit $(P_i, C_i)_{i=1, \dots, n}$ l'ensemble des tranches des traités en excédent de sinistre de ce marché pour lesquelles les taux leaders $r_i = r(P_i, C_i)$ sont disponibles. Ces taux correspondent à des proportions des assiettes de primes notées P_i . La détermination des paramètres inconnus, γ , λ et α , des taux benchmark $\pi_i = \pi_i(P_i, C_i, \gamma, \lambda, \alpha)$ correspondants, se ramène au problème d'optimisation suivant :

$$f(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k, \lambda, \alpha) = \min \sum_{t=1}^k \sum_{i=1}^{N^{(t)}} \frac{(r_i^{(t)} - \pi_i^{(t)})^2}{\pi_i^{(t)}} \quad k \leq 5.$$

Nous posons $k \leq 5$ car nous estimons qu'au-delà de 5 années les taux ne sont plus comparables.

un solveur permet de trouver en un les paramètres $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k, \lambda$ et α .

2.2 Outil benchmark adapté aux branches courtes

L'outil décrit dans la suite de ce chapitre repose sur la notion du ROL . Pour pouvoir comparer les prix de différentes tranches de réassurance, nous réduisons la tranche de réassurance C xs P a un point milieu . De plus, afin de manipuler des grandeurs sans unités, nous divisons la valeur centrale des tranches par la somme assurée totale. Pour obtenir un taux « marché » pour une tranche d'un traité en excédent de sinistre (XS) pour laquelle les données sont limitées, on procède en deux étapes :

On constitue d'abord un marché de référence en sélectionnant des traités comparables, puis on trace une courbe marché , ensuite, on calcule la valeur centrale de la tranche à tarifier, on la divise par la valeur assurée totale du traité, et l'on reporte le ratio obtenu sur la courbe marché pour lire directement la valeur du RoL. Cette méthode sera détailler dans la suite de ce chapitre .

3 Tarification des traités CAT XS à l'aide de courbes de marché

En nous appuyant sur l'article de Morel (2013) [9], qui a analysé l'usage des courbes de puissance et des points milieu (Midpoint) — arithmétique, géométrique — pour la tarification des programmes CAT XL, cette section présentera d'abord cette approche et les principales critiques formulées par Morel à l'encontre de cette méthode. Elle passera ensuite en revue d'autres limites identifiées dans la littérature, et montrera pourquoi la moyenne logarithmique généralisée (moyenne de Stolarsky) constitue un point milieu plus naturel et robuste.

3.1 La méthode des power curves appliquées aux ROL

La notion de **ROL** se définit simplement comme la prime versée à la souscription divisée par la garantie de la tranche. En pratique, les différentes tranches d'un programme prévoient généralement un certain nombre de *restitutions* (généralement payables à 100 %), c'est-à-dire de remises en place de la couverture après sinistre. On montrera ensuite comment ajuster la prime pour tenir compte de ces restitutions.

Les réassureurs utilisent couramment des modèles commerciaux pour tarifier les risques

catastrophes, intégrant leurs frais techniques et de capital. Dans ce contexte, les courtiers et souscripteurs cherchent souvent à « recalibrer » les ROL observés afin d'extrapoler des tarifs sur d'autres tranches ou d'anticiper l'évolution des primes selon les tendances de marché.

L'objectif de cette partie est de justifier l'usage des *power curves* (courbes de puissance) appliquées aux ROL de chaque tranche. Nous verrons qu'à condition de choisir un point milieu approprié pour chaque tranche, on peut obtenir des résultats consistants, à la fois simples à mettre en œuvre et fiables pour la tarification.

3.1.1 Prise en compte des reconstitutions

l'impact des reconstitutions sur le prix reste généralement marginal : on peut postuler une formule théorique valable pour un nombre illimité de reconstitutions, même si les réassureurs ne proposent pas un renouvellement annuel infini pour le risque catastrophe. De fait, reconstituer la limite gratuitement n'est pas une option réaliste : chaque remise en place de la capacité initiale entraîne le paiement d'une prime de reconstitution, que nous supposons calculée au Prorata Capita .

Définissons S comme la perte stochastique dans la tranche et posons SLOL (Stochastic Loss On Line)

$$\text{SLOL} = \frac{S}{C},$$

Si ROL désigne le ROL initial (*up-front ROL*), Walhin (2001) montre que le ROL additionnel attendu dû aux reconstitutions payantes s'écrit

$$\text{ROL}_{\text{add}} = \text{ROL} \times \sum_{i=1}^k c_i \frac{\mathbb{E}[\min(C, \max(0, S - (i-1)C))]}{C},$$

où k est le nombre de reconstitutions et c_i le prix de la i -ième reconstitution.

Dans l'hypothèse où toutes les reconstitutions sont à 100 % et où leur nombre est suffisamment grand pour approcher $k \rightarrow \infty$, la formule se simplifie ainsi :

$$\text{ROL} \times \frac{\mathbb{E}[S]}{C} = \text{ROL} \times \text{LOL}.$$

où le LOL est égal à l'espérance du SLOL.

Ainsi, la réduction applicable pour des reconstitutions payantes par rapport à des

3. TARIFICATION DES TARITÉS CAT XS À L'AIDE DE COURBES DE MARCHÉ

restitutions gratuites est égale à LOL. Autrement dit, si la tranche comporte une (ou plusieurs) reconstitution(s) à 100%, le ROL équivalent avec des restitutions gratuites (noté FROL) est approximé par :

$$\text{FROL} = \text{ROL} \times (1 + \text{LOL}).$$

Le LOL n'est pas directement observable, mais si l'on fait des hypothèses sur le chargement appliqué par les réassureurs, il devient possible d'en déduire le LOL et, par conséquent, le ROL initial correspondant lorsque les restitutions sont gratuites (FROL).

Compte tenu de cette explication, nous pouvons choisir d'ajuster :

- **FROL** : c'est-à-dire ROL équivalent avec des restitutions gratuites ;
- **ROL** : c'est-à-dire ROL initial (lorsque les restitutions sont payantes).

En principe, cette dernière option ignore le fait que la réduction lié aux restitutions payantes est déjà inclus dans la valeur de ROL. Lorsque l'on regroupe plusieurs programmes pour ajuster une courbe de puissance, plusieurs d'entre eux auront des modalités de reconstitution différentes . Travailler en FROL permet de ramener toutes les observations à une même base « sans reconstitution », évitant que les écarts de structure ne se transforment en écarts de tarification.

3.1.2 La méthode midpoint pour l'ajustement des ROLs

Comme l'explique Morel (2013) [9], une solution possible au problème exposé consiste à ajuster une courbe de puissance sur les midpoints des tranches du programme initial ; cette approche, s'appuie aussi sur des fondements déjà posés par Verlaak, Beirlant et Hürlimann (2005) [11], qui avaient justifié l'emploi de courbes de puissance dans un cadre Pareto.

Soit N une loi de fréquence d'espérance λ et X une loi de sévérité indépendante, de fonction de survie

$$S(x) = \Pr[X > x], \quad x \geq 0.$$

On a alors :

$$\text{ROL}(P, C) = \lambda \int_P^{P+C} S(x) dx.$$

Comme $S(x)$ est décroissante, il découle immédiatement :

$$\lambda S(P + C) \leq \text{ROL}(P, C) \leq \lambda S(P).$$

3. TARIFICATION DES TARITÉS CAT XS À L'AIDE DE COURBES DE MARCHÉ

Notons par ailleurs $\lambda_u = \lambda S(u)$. On obtient alors la chaîne d'inégalités :

$$\lambda_{P+C} \leq \text{ROL}(P, C) \leq \lambda_P.$$

Il existe donc un point $m = MP(P, C)$ tel que

$$\lambda_{P+C} \leq \lambda_{MP(P,C)} = \text{ROL}(P, C) \leq \lambda_P.$$

Si $MP(P, C)$ peut être calculé explicitement, on en déduit naturellement une approximation de la forme

$$\text{ROL}(P, C) = \lambda_{MP(P,C)} = a [MP(P, C)]^{-b},$$

ce qui conduit à estimer a et b par régression linéaire sur $\ln(\text{ROL})$ en fonction de $\ln(MP)$.

En particulier, si la sévérité suit une loi de Pareto de seuil A et de paramètre α , on montre que

$$\lambda_{MP(P,C)} = \lambda_A \left(\frac{MP(P,C)}{A} \right)^{-\alpha},$$

où A est choisi inférieur à la priorité P et α dépend de ce choix. En reprenant la relation

$$\lambda_{MP(P,C)} = \lambda_A \left(\frac{MP(P,C)}{A} \right)^{-\alpha},$$

et en posant un seuil inférieur $B < A$, on obtient également

$$\lambda_{MP(P,C)} = \lambda_B \left(\frac{B}{A} \right)^{-\alpha} \left(\frac{MP(P,C)}{B} \right)^{-\alpha} = \lambda_B \left(\frac{MP(P,C)}{B} \right)^{-\alpha},$$

ce qui montre que le choix de tout seuil B inférieur à la priorité P du programme conduit au même exposant α .

La formule justifie l'usage d'une fonction de puissance pour ajuster les ROL observés. Les paramètres de cette *power function* se déterminent facilement par régression linéaire une fois qu'on a collecté les couples (y_i, ROL_i) avec

$$y_i = \frac{MP(P_i, C_i)}{A}, \quad i = 1, \dots, n,$$

pour n tranches (P_i, C_i) dont on connaît les ROL_i . On écrit alors

$$\text{ROL}_i = \lambda_A y_i^{-\alpha}, \quad i = 1, \dots, n.$$

En prenant le logarithme naturel de chaque côté, on obtient la relation linéaire

$$\ln(\text{ROL}_i) = \ln(\lambda_A) - \alpha \ln(y_i), \quad i = 1, \dots, n,$$

dont les coefficients $\ln(\lambda_A)$ et α se calculent directement par régression OLS. Cette méthode ne requiert aucune procédure numérique complexe, ce qui la rend particulièrement adaptée aux besoins rapides. Il reste à choisir le *midpoint*

3.1.3 Les points Candidats pour le Midpoint

Midpoint arithmétique

Le midpoint arithmétique est la moyenne classique des extrémités de la tranche :

$$ARI(P, C) = \frac{P + (P + C)}{2} = P \left(1 + \frac{c}{2}\right)$$

où $c = C/P$.

En l'insérant dans la formule générale, la prime pure devient :

$$PP_{\text{ARI}}(P, C) = a \cdot \left(P + \frac{C}{2}\right)^{-b} \cdot C$$

Ce choix est intuitif et simple à mettre en œuvre. Toutefois, lorsque $C \rightarrow \infty$, on observe que $PP \sim a \cdot 2^b \cdot C^{1-b}$. Si $b > 1$, la prime décroît vers zéro, ce qui est incohérent avec le risque croissant d'une couverture infinie. En outre, cette moyenne ne garantit pas l'additivité des primes, c'est-à-dire que la somme des primes de deux tranches adjacentes ne correspond pas à la prime d'une couche globale équivalente, ce qui est problématique dans un cadre de tarification agrégée.

Midpoint géométrique

Le midpoint géométrique est défini comme la moyenne géométrique des bornes :

$$GEO(P, C) = \sqrt{P(P + C)} = P\sqrt{1 + c}$$

La moyenne géométrique présente l'avantage de correspondre exactement au cas $\alpha = 2$ dans le cadre Pareto.

3. TARIFICATION DES TARITÉS CAT XS À L'AIDE DE COURBES DE MARCHÉ

La prime pure s'écrit alors :

$$PP_{\text{GEO}}(P, C) = a \cdot (P(P + C))^{-b/2} \cdot C$$

Pour les valeurs typiques $b \in (1, 2)$, le comportement asymptotique devient problématique. En effet, pour $C \rightarrow \infty$, on obtient $PP \sim a \cdot P^{-b/2} \cdot C^{1-b/2}$, ce qui implique une croissance excessive de la prime lorsque $b < 2$. Cela peut mener à des valeurs irréalistes pour les tranches hautes. De plus, la propriété d'additivité n'est pas respectée.

Midpoint logarithmique

Le midpoint logarithmique s'exprime par :

$$LOG(P, C) = \frac{C}{\ln(1 + c)} = P \frac{c}{\ln(1 + c)}$$

Cette moyenne offre une alternative intéressante, elle correspondant exactement au cas $\alpha = 1$ dans un cadre Pareto.

La prime pure associée est donc :

$$PP_{\text{LOG}}(P, C) = a \cdot \left(\frac{C}{\ln\left(1 + \frac{C}{P}\right)} \right)^{-b} \cdot C$$

Ce choix présente des défauts importants pour $b > 1$. En particulier, lorsque $C \rightarrow \infty$, on a $MP \sim \frac{C}{\ln C}$, d'où $PP \sim a \cdot C^{1-b} \cdot (\ln C)^b \rightarrow 0$. Cette décroissance de la prime est incohérente avec l'augmentation du risque sur les tranches élevées. Par ailleurs, ce midpoint est numériquement instable pour des couches très fines ($C \ll P$) en raison du dénominateur logarithmique.

Moyenne logarithmique généralisée d'ordre r

Soit :

$$f : \mathbb{R}_+^2 \longrightarrow \mathbb{R}_+$$

une fonction continue à deux variables. On dit que f est une *moyenne* sur \mathbb{R}_+ si, pour tous $x, y > 0$,

$$\min(x, y) \leq f(x, y) \leq \max(x, y).$$

Le théorème de Cauchy, the Cauchy mean value theorem (1882)(voir 12.). garantit que, si f et g sont continues sur $[x, y]$, dérivables sur (x, y) et que $g'(z) \neq 0$ pour tout

3. TARIFICATION DES TRAITÉS CAT XS À L'AIDE DE COURBES DE MARCHÉ

$z \in (x, y)$, alors il existe un point $\xi \in (x, y)$ tel que

$$\frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

En posant

$$f(z) = z^r \quad \text{et} \quad g(z) = z,$$

on obtient

$$\frac{x^r - y^r}{x - y} = r \xi^{r-1} \quad \Longrightarrow \quad \xi = \left[\frac{x^r - y^r}{r(x - y)} \right]^{1/(r-1)}.$$

On appelle alors ξ la *moyenne logarithmique généralisée* d'ordre r de x et y . Comme nous nous intéressons aux points médians des tranches $[P, P + C]$, que nous notons $\text{MP}(P, C)$, nous adopterons la notation $\text{MP}(x, y - x)$ avec $y \geq x$. Dans ce contexte, la moyenne logarithmique généralisée s'écrit plus précisément :

$$L_r(x, y - x) = \begin{cases} \left(\frac{x^r - y^r}{r(x - y)} \right)^{\frac{1}{r-1}}, & r \neq 0, r \neq 1, x \neq y \\ e^{-1} \left(\frac{x^x}{y^y} \right)^{\frac{1}{x-y}}, & r = 0, x \neq y \quad (\text{moyenne identrique}) \\ \frac{x - y}{\ln x - \ln y}, & r = 1, x \neq y \quad (\text{moyenne logarithmique}) \\ x, & x = y \end{cases}$$

Avec des cas particuliers remarquables :

- Pour $r = 1$: L_1 correspond à la **moyenne logarithmique classique**
- Pour $r = 2$: L_2 correspond à la **moyenne arithmétique**

Nous allons ensuite relier cette moyenne logarithmique généralisée à la tarification des traités XS dans un cadre de sévérité régi par une loi de Pareto :

Posons désormais le changement de variable suivant :

$$\alpha = 1 - r.$$

la moyenne logarithmique généralisée d'ordre $1 - \alpha$ fournit le midpoint exact pour la formule du ROL dès que $\alpha > 0$.

$$ROL(P, C) = \lambda_A \left(\frac{L_{1-\alpha}(P, C)}{A} \right)^{-\alpha} = \begin{cases} \lambda_A \frac{P^{-\alpha} A^{-\alpha}}{c(1-\alpha)} \left((1+c)^{1-\alpha} - 1 \right), & \alpha \neq 1, \\ \lambda_A \frac{A \ln(1+c)}{Pc}, & \alpha = 1. \end{cases}$$

avec $c = \frac{C}{P}$.

Il devient donc naturel de réaliser l'ajustement en calculant les midpoints selon la moyenne logarithmique généralisée d'ordre $1 - \alpha$, en utilisant la valeur estimée de α . Un petit nombre d'itérations suffit pour converger vers la meilleure adéquation.

Ci-dessous, la procédure itérative d'estimation de l'ordre r est décrite, Un nombre très restreint d'itérations suffira pour obtenir l'ajustement fondé sur la moyenne logarithmique généralisé .

Algorithm 2 Estimation itérative de l'ordre r

Require: Données $\{(P_i, C_i, TIV_i, ROL_i)\}_{i=1}^n$, $r^{(0)}$, tolérance ε , itérations max. K_{\max}

Ensure: Convergence vers r^*

1: $r \leftarrow r^{(0)}$ $k \leftarrow 0$ $\delta \leftarrow +\infty$

2: **while** $k < K_{\max}$ **et** $\delta > \varepsilon$ **do**

3: $k \leftarrow k + 1$

4: **for** $i = 1, \dots, n$ **do**

5: $MP_i \leftarrow L_r(P_i, C_i)$

6: $x_i \leftarrow MP_i / TIV_i$

7: **end for**

8: Ajuster la régression :

$$\ln(ROL_i) = \ln(a) - b \ln(x_i) + \varepsilon_i$$

9: $\alpha_{\text{new}} \leftarrow -b$ $r_{\text{new}} \leftarrow 1 - \alpha_{\text{new}}$

10: $\delta \leftarrow \left| \alpha_{\text{new}} - (1 - r) \right|$

11: $r \leftarrow r_{\text{new}}$

12: **end while**

13: **return** r

Contrairement aux autres choix, ce choix ne présente ni divergence, ni décroissance aberrante pour les tranches extrêmes. De plus, il respecte l'additivité, garantissant une cohérence dans les calculs de primes pour programmes multitranches. Malgré une complexité de calcul légèrement supérieure, il constitue le choix le plus robuste et théoriquement fondé.

3.2 La méthode Spline curve

Les courbes de puissance présentées offrent un moyen d'évaluer le prix de marché d'une tranche Cat XL. Plus largement, on peut les considérer comme des « courbes de marché » et s'attendre à l'existence d'autres variantes. Dans cette section, nous introduisons brièvement une nouvelle courbe de marché construite à l'aide d'un spline ajusté sur les données du programme Cat XL de référence.

Les *spline curves*, proposées par Morel (2013) comme alternative aux *power curves*, sont des fonctions mathématiques par morceaux utilisées pour modéliser les taux de réassurance (ROL) dans les contrats XOL .

Contrairement aux approches classiques basées sur des Midpoints , les splines intègrent directement les limites des tranches de réassurance selon :

$$RP(P, C) = \lambda_A \int_P^{P+C} S(x) dx \quad (3.1)$$

où $S(x)$ représente la fonction de survie du processus de sinistres sous-jacentes.

La spline $g(x)$ se décompose en $n + 1$ segments pour un programme à $n - 1$ couches :

— **Segments extrêmes** (linéaires) :

$$g_i(x) = a_i + b_i x \quad \text{pour } i \in \{0, n\} \quad (3.2)$$

— **Segments intermédiaires** (quadratiques) :

$$g_i(x) = a_i + b_i x + c_i x^2 \quad \text{pour } i \in \{1, \dots, n - 1\} \quad (3.3)$$

Les points de segmentation et conditions sont définis par :

- $LP_0 = 0$
- $LP_i = \frac{D_i}{TIV}$ (point gauche de la couche)
- $RP_i = \frac{D_i + L_i}{TIV}$ (point droit de la couche)
- $RP_i = LP_{i+1}$ (connectivité des points extrêmes)
- $D_i =$ franchise de la i -ème couche du programme Cat XL original ($i = 1, 2, \dots, n - 1$)
- $L_i =$ limite de la i -ème couche du programme Cat XL original ($i = 1, 2, \dots, n - 1$)

3. TARIFICATION DES TARAITÉS CAT XS À L'AIDE DE COURBES DE MARCHÉ

— RP_n = point au-delà du programme Cat XL original (point droit maximal)

Les coefficients sont déterminés par :

$$\text{Continuité : } g_i(RP_i) = g_{i+1}(LP_{i+1}) \quad (3.4)$$

$$\text{Lissage : } g'_i(RP_i) = g'_{i+1}(LP_{i+1}) \quad (3.5)$$

$$\text{Intégration : } \int_{LP_i}^{RP_i} g_i(x) dx = \frac{L_i \times R_i}{TIV} \quad (3.6)$$

$$\text{Bornes : } \begin{cases} g(0) = \text{ROL}_{\text{MAX}} \\ g(RP_n) = \text{ROL}_{\text{MIN}} \end{cases} \quad (3.7)$$

La solution s'obtient par inversion matricielle du système linéaire de $3n + 1$ équations :

$$\begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdots & k_{1,3n+1} \\ k_{21} & k_{22} & \cdots & k_{2,3n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{3n+1,1} & k_{3n+1,2} & \cdots & k_{3n+1,3n+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ a_1 \\ b_1 \\ c_1 \\ \vdots \\ a_{n-1} \\ b_{n-1} \\ c_{n-1} \\ a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_{3n+1} \end{pmatrix}$$

où :

- Les coefficients a_0, b_0 et a_n, b_n correspondent aux segments linéaires extrêmes
- Les triplets a_i, b_i, c_i représentent les segments quadratiques pour chaque couche i
- La matrice k_{ij} encode les contraintes de : Continuité (C^0), Dérivabilité (C^1), Intégration exacte et les Conditions aux limites.
- Le vecteur s_j contient :
 - Les ROL observés
 - Les bornes $\text{ROL}_{\text{max/min}}$
 - Les aires normalisées $p_i = \text{ROL}_i \times L_i / \text{TIV}$

Les splines offrent une **précision** accrue en reproduisant exactement les coûts observés et une **flexibilité** d'ajustement local grâce à leurs segments quadratiques/linéaires, avec l'avantage de bornes contrôlables ($ROL_{MAX/MIN}$) évitant les extrapolations irréalistes. Cependant, Walhin (2018) souligne leur **complexité** ($3n+1$ équations à résoudre), l'absence de garantie de **décroissance stricte** (risque de primes négatives) et la **subjectivité** dans le choix des bornes influençant les résultats.

3.3 Validation du modèle

Cette section présente les fondements théoriques de la régression linéaire, technique statistique essentielle pour la détermination des paramètres des power curves et des fonctions splines.

3.3.1 Formulation et Estimation

Le modèle de régression linéaire simple s'écrit :

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \varepsilon_i, \quad i = 1, \dots, n$$

où :

- β_0 est l'ordonnée à l'origine,
- β_1 est le coefficient de pente mesurant l'effet de X sur Y ,
- ε_i est un terme d'erreur aléatoire, supposé centré, homoscédastique et indépendamment distribué selon une loi normale.

Les estimateurs des coefficients par la méthode des moindres carrés sont :

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\text{Var}(X)} \quad ; \quad \hat{\beta}_0 = \bar{Y} - \hat{\beta}_1 \bar{X}$$

La droite estimée est donnée par $\hat{Y}_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_i$. Les résidus $e_i = Y_i - \hat{Y}_i$ quantifient l'écart entre les observations et les valeurs ajustées.

3.3.2 Qualité de l'Ajustement

3.3.2.1 Coefficient de détermination

Le coefficient de détermination R^2 permet de quantifier la part de variance de Y expliquée par X :

$$R^2 = \frac{\sum(\hat{Y}_i - \bar{Y})^2}{\sum(Y_i - \bar{Y})^2} = 1 - \frac{\text{SCR}}{\text{SCT}}$$

où SCR est la somme des carrés des résidus, et SCT la somme des carrés totaux. Un R^2 proche de 1 suggère un bon ajustement, mais ne garantit pas l'adéquation du modèle (à compléter avec l'analyse graphique).

3.3.2.2 Test de significativité

On souhaite tester :

$$H_0 : \beta_1 = 0 \quad \text{vs} \quad H_1 : \beta_1 \neq 0$$

— **Test de Student** :

$$t = \frac{\hat{\beta}_1}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1}} \sim \mathcal{T}(n - 2)$$

Un rejet de H_0 implique une relation linéaire significative entre X et Y .

— **Test de Fisher** :

$$F = \frac{R^2}{1 - R^2} \cdot (n - 2) \sim \mathcal{F}(1, n - 2)$$

Dans le cas de la régression simple, les tests de Student et de Fisher sont équivalents :
 $F = t^2$.

En R, la fonction `summary(lm(...))` fournit directement les statistiques de test, les coefficients estimés, R^2 ainsi que les p-valeurs associées.

3.3.2.3 Critères d'information

Les critères d'information AIC et BIC sont des outils essentiels pour la sélection de modèles statistiques. Ils s'expriment par les formules :

$$\text{AIC} = 2p - 2 \ln(\hat{L}) \quad \text{et} \quad \text{BIC} = p \ln(n) - 2 \ln(\hat{L})$$

où \hat{L} représente la vraisemblance maximisée, p le nombre de paramètres du modèle, et n la taille de l'échantillon.

Ces critères permettent d'arbitrer entre la qualité d'ajustement du modèle et sa complexité, le BIC imposant une pénalité plus forte pour les modèles comportant trop de paramètres. Ils sont particulièrement utiles pour comparer différents modèles sur un même jeu de données.

3.3.3 Analyse Diagnostique des Résidus

L'analyse des résidus constitue une étape centrale dans la validation d'un modèle de régression linéaire simple. Elle permet de vérifier les hypothèses fondamentales du modèle (normalité, homoscélasticité, indépendance) et d'identifier les observations atypiques ou influentes.

3.3.3.1 Normalité des résidus

L'hypothèse de normalité des résidus est cruciale pour la validité des intervalles de confiance et des tests statistiques. Elle peut être évaluée par :

- **Droite de Henry (QQ-plot)** : graphique comparant les quantiles empiriques des résidus aux quantiles théoriques d'une loi normale. Sous normalité, les points doivent être alignés sur la diagonale. En R, la fonction `qqPlot()` du package `car` permet une visualisation augmentée avec bandes de confiance à 95%.
- **Test de Shapiro-Wilk** : test statistique formel basé sur la statistique :

$$W = \frac{\left(\sum_{i=1}^n a_i e_{(i)}\right)^2}{\sum_{i=1}^n (e_i - \bar{e})^2}$$

où a_i sont des constantes tabulées et $e_{(i)}$ les résidus triés. Une p-valeur faible suggère un écart à la normalité. Ce test est implémenté via `shapiro.test()` dans R.

3.3.3.2 Homoscélasticité (variance constante)

L'homoscélasticité signifie que la variance des erreurs est constante quel que soit le niveau de X . Sa violation implique des intervalles de confiance mal calibrés.

- **Graphique des résidus vs valeurs ajustées** : on trace (\hat{Y}_i, e_i) . En présence d'hétéroscélasticité, des motifs en cône ou vagues apparaissent, suggérant une variance non constante.
- **Test de Breusch-Pagan** : test basé sur la régression des carrés des résidus e_i^2 sur les valeurs de X . Sous H_0 , les erreurs sont homoscélastiques. La statistique suit une loi

χ^2 . Implémenté via `bptest()` du package `lmtest`.

3.3.3.3 Indépendance des résidus

Dans le cas de données temporelles ou séquentielles, l'indépendance des erreurs est nécessaire.

- **Test de Durbin-Watson** : permet de tester l'autocorrélation des résidus d'ordre 1. La statistique est donnée par :

$$d = \frac{\sum_{t=2}^n (e_t - e_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^n e_t^2}$$

Une valeur proche de 2 suggère une absence d'autocorrélation. Implémenté par `dwtest()` dans le package `lmtest`.

3.4 Tarification d'un nouveau programme

Une fois les *power curves* validées, la tarification d'un nouveau programme de réassurance en excédent de sinistre (*Cat XL*) s'effectue selon les étapes suivantes :

-Calcul des midpoints Pour chaque *tranche* (P, C) du programme, on détermine son midpoint

$$x = \frac{MP(P, C)}{\text{TIV}} \quad (\% \text{TIV})$$

-Application de la power curve Le taux $\widehat{\text{ROL}}$ est estimé par la loi de puissance ajustée :

$$\widehat{\text{ROL}} = a(x)^{-\alpha}$$

-Calcul du coût par tranche Le coût actuariel de chaque tranche s'écrit :

$$\text{Coût}_{\text{tranche}} = C \times \widehat{\text{ROL}}$$

-Coût total du programme On agrège ensuite tous les coûts pour obtenir le coût global :

$$\text{Coût}_{\text{total}} = \sum_{\text{toutes les tranches}} C_i \times \widehat{\text{ROL}}_i$$

4 Application et résultats

4.1 Marché Turc

Dans cette section, nous présentons la démarche d'application des courbes marché pour la tarification des traités Cat XoL en Turquie, sur la base des observations de marché 2023–2025.

4.1.1 Description des données

Nous travaillons sur un jeu de données internes regroupant, pour chaque traité :

- **Year** : année de renouvellement (2023, 2024, 2025) ;
- **TIV** : Total Insured Value du programme ;
- **P** (*Priorité*)
- **C** (*Garantie*)
- **ROL** : Rate-on-Line observé
- Toutes les tranches considérées sont sans les clauses **AAL** et **AAD**
- Les programmes incluent des **clauses de reconstitution**, généralement une ou deux reconstitutions par tranche fixés à un taux de 100% .

On déduit pour chaque traité le *mid-point* MP et sa proportion $x = MP/TIV$, qui sert d'abscisse aux courbes.

4.1.2 Contexte et premier constat

Les taux moyens de ROL en 2023 étaient significativement plus bas qu'en 2024 et 2025. Ce constat s'explique principalement par le séisme majeur de février 2023 (magnitude 7.8), qui a :

- entraîné un *hardening* brutal du marché – retrait de capacité et hausse des coûts des couvertures ;
- modifié le profil de risque (exposition accrue aux pertes majeures) ;
- poussé les taux de renouvellement 2024 à un niveau supérieur de +23 % (soit, sur nos observations, une hausse de 23 % de 2023 à 2024, conséquence directe du durcissement post-séisme de février 2023).

Dès lors, les cotations 2023 ne reflètent plus la structure de marché post-catastrophe et sont écartées de l'estimation de la forme des courbes.

4. APPLICATION ET RÉSULTATS

Sur la base des observations de 2025 et 2024, jugées les plus significatives, nous avons ajusté nos courbes de marché selon les quatre types de midpoints discutés. Les résultats sont présentés dans le tableau ci dessous :

Table 4.1 – Paramètres d’ajustement des Courbes Marché de l’année 2025 selon le type de midpoint

Modèle	a	b	r	R^2	AIC	BIC	Somme erreurs
ARI	0.0046	0.5470	–	0.7551	59.41	65.54	-0.31
GEO	0.0045	0.5402	–	0.7647	57.13	63.26	-0.29
LOG	0.0045	0.5430	–	0.7618	57.81	63.94	-0.30
LOG_Gen	0.0037	0.5494	0.4506	0.7361	63.67	69.80	-0.36

Table 4.2 – Paramètres d’ajustement des Courbes Marché de l’année 2024 selon le type de midpoint

Modèle	a	b	r	R^2	AIC	BIC	Somme des erreurs
ARI	0.0120	0.3981	–	0.5145	73.84	79.13	-0.73
GEO	0.0123	0.3830	–	0.5224	73.13	78.41	-0.72
LOG	0.0121	0.3893	–	0.5209	73.27	78.55	-0.73
LOG_Gen	0.0089	0.4227	0.5773	0.5110	74.15	79.43	-0.73

Interprétation des résultats

L’ajustement des power-curves sur les données 2025 présente une excellente qualité de fit ($R^2 \approx 0,75$, AIC 59–64) et des pentes $b \approx 0,54$ très cohérentes quel que soit le midpoint (ARI, GEO, LOG, LOG_Gen). En revanche, sur 2024, la capacité explicative chute ($R^2 \approx 0,52$, AIC 73–78) .

Le paramètre \mathbf{a} qui représente le niveau de base des primes de réassurance a pris en 2024 des valeurs comprises entre 0,009 et 0,012, soit un niveau nettement supérieur à celui observé en 2025 qui traduit clairement l’impact du séisme de 2023 sur le marché en 2024, caractérisé par un durcissement général des tarifs. Cette hausse reflète la réaction des réassureurs face à l’augmentation du risque perçu et la réduction des capacités disponibles. Le retour à des valeurs plus basses en 2025 indique une normalisation progressive du marché.

Le paramètre \mathbf{b} qui contrôle la décroissance des primes avec la hauteur des tranches, montre une évolution inverse. une valeur basse en 2024 révèle une modification structurelle dans l’évaluation des risques : après le choc, les réassureurs attribuent un risque relatif plus important aux tranches élevées, réduisant ainsi l’écart tarifaire entre tranches basses et hautes. La remontée de b en 2025 vers 0.54 témoigne du retour à une évaluation plus

4. APPLICATION ET RÉSULTATS

différenciée des risques par niveau de tranche.

La somme des résidus standardisés, deux fois plus forte en 2024, témoigne d'une plus grande hétérogénéité ou d'effets transitoires cette année-là.

Passons à la représentation graphique de ces ajustements :

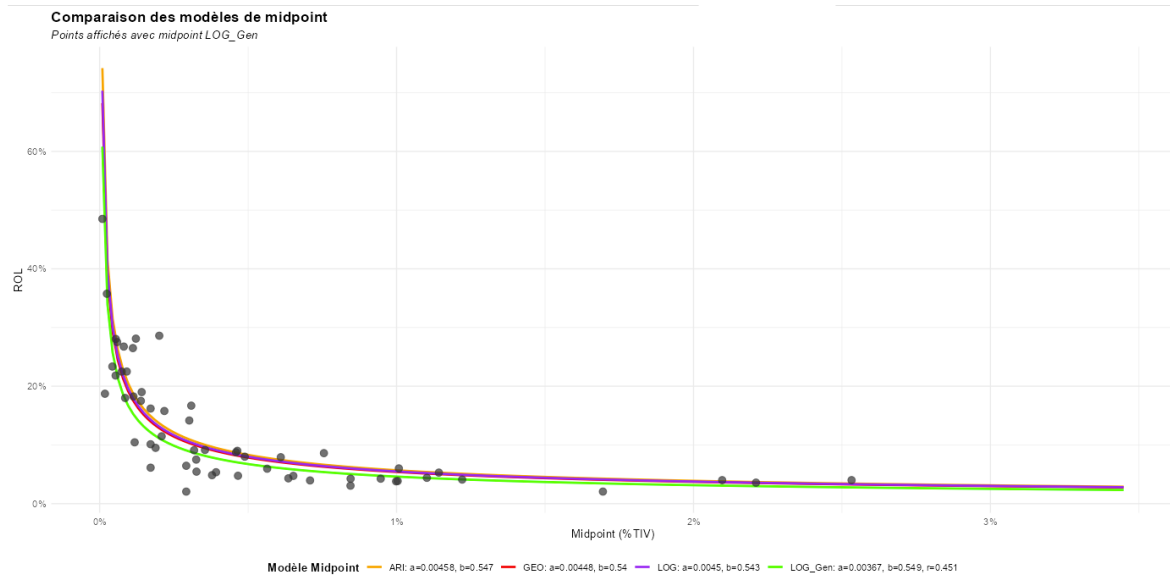


Figure 4.1 – Comparaison des courbes de marché de 2025 ajustées selon les quatre midpoints .

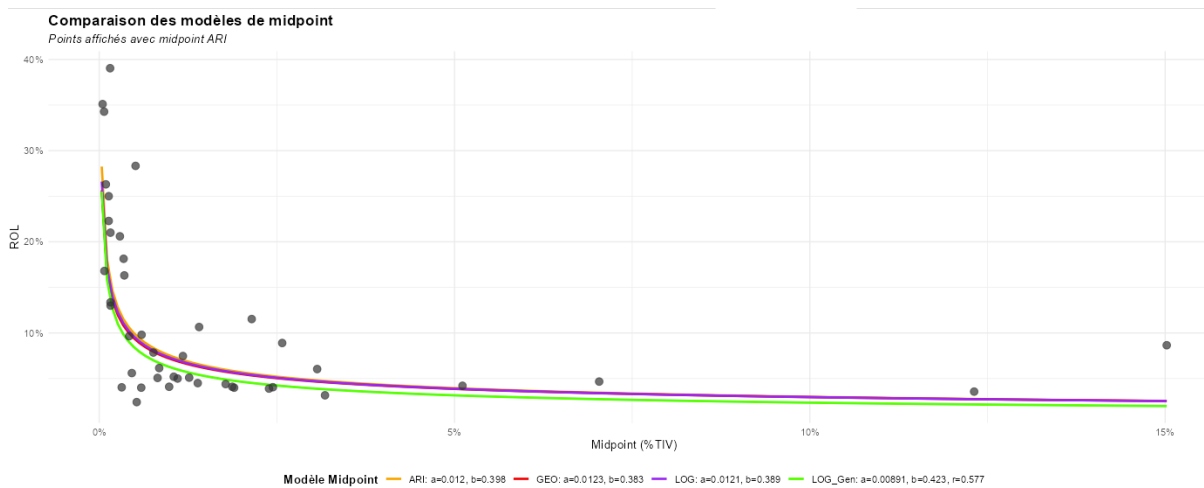


Figure 4.2 – Comparaison des courbes de marché de 2024 ajustées selon les quatre midpoints .

4.1.3 Validation du modèle

Lors d'une régression, il est nécessaire de vérifier diverses hypothèses faites sur le modèle :

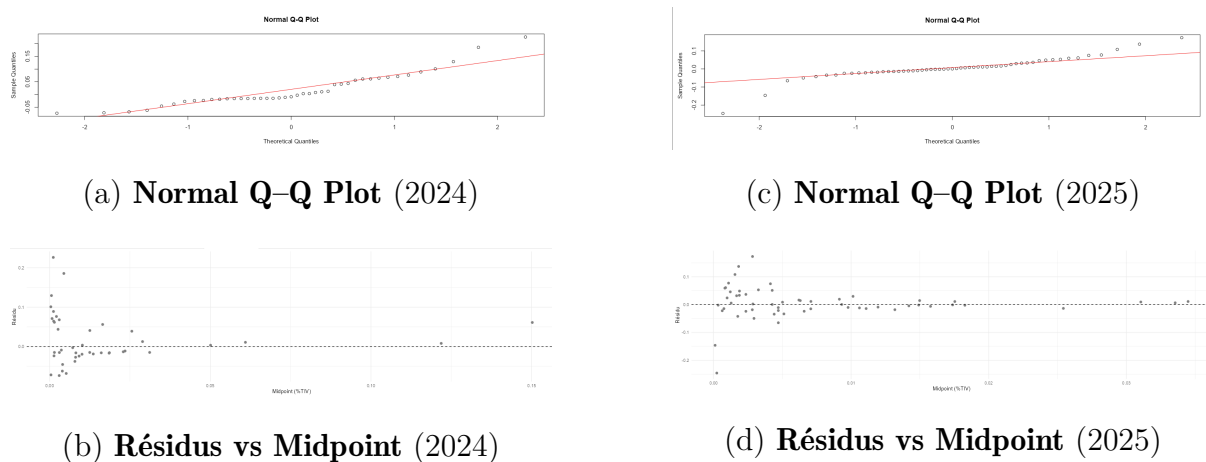


Figure 4.3 – Diagnostics d'ajustement du modèle avant

Les diagnostics ci-dessus attestent de la qualité de l'ajustement :

- Le $Q-Q$ plot (a) montre que la majorité des résidus suit une distribution proche de la normale, sans déviation systématique aux quantiles extrêmes.
- Le nuage *résidus vs midpoint* (b) ne met pas en évidence de tendance ou de structure particulière : les résidus sont centrés autour de zéro et leur dispersion reste homogène sur toute la plage de midpoints.

Ces deux éléments confirment l'hypothèse d'indépendance et d'homoscédasticité des erreurs, validant ainsi l'usage de la *power curve* calibrée sur ces observations.

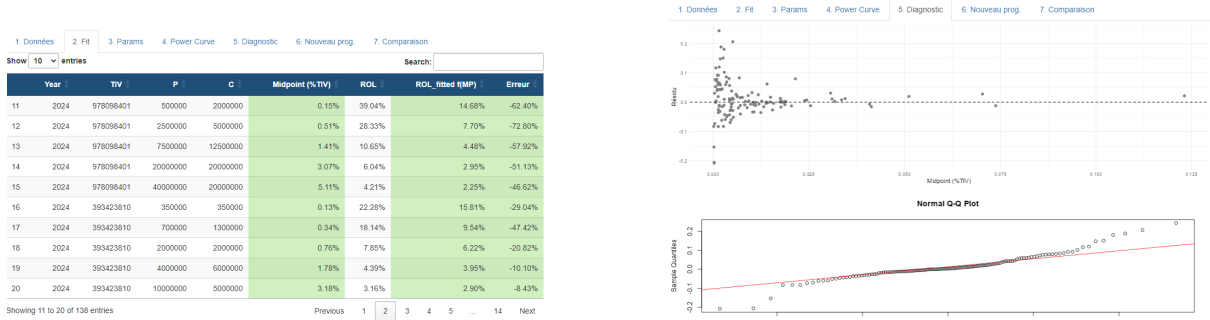
4.1.4 Automatisation du processus de Tarification d'un nouveau programme

L'ensemble du processus de construction des courbes de tarifs de marché, incluant le choix du *midpoint* souhaité, a été entièrement automatisé via une interface R Shiny. L'utilisateur n'a qu'à importer la base de données du marché qu'il souhaite modéliser et sélectionner le *midpoint* adéquat. L'application génère alors automatiquement plusieurs onglets :

- un onglet présentant les ROL ajustés (*fitted ROL*) ainsi que les erreurs relatives,
- un onglet regroupant les paramètres issus de la régression, accompagnés des indicateurs de qualité d'ajustement tels que le R^2 , l'AIC et le BIC,

4. APPLICATION ET RÉSULTATS

- un onglet affichant la courbe de marché et un autre pour la comparaison entre les différents Midpoints,
- un onglet dédié au diagnostic des résidus pour la validation du modèle.



(a) Fitted ROLs et les erreurs associés

(b) Diagnostic des résidus



(c) La courbe de marché

(d) Les paramètres et la qualité d'ajustement

Figure 4.4 – Vue d'ensemble de l'interface R Shiny

Cette automatisation permet de fiabiliser et d'accélérer significativement le processus de tarification d'un nouveau programme.

Un onglet dédié à la tarification d'un nouveau programme est également disponible. L'utilisateur y saisit simplement, via un tableau interactif, les caractéristiques de chaque tranche : la priorité, la garantie, ainsi que la nouvelle valeur du TIV (*Total Insured Value*). Le système calcule automatiquement le *midpoint* de chaque tranche, détermine sa proportion relative, puis applique le modèle de (*power curve*) ajusté en fonction du *midpoint* sélectionné. Il en résulte l'affichage du ROL projeté pour chaque tranche, ainsi que du ROL global du programme.

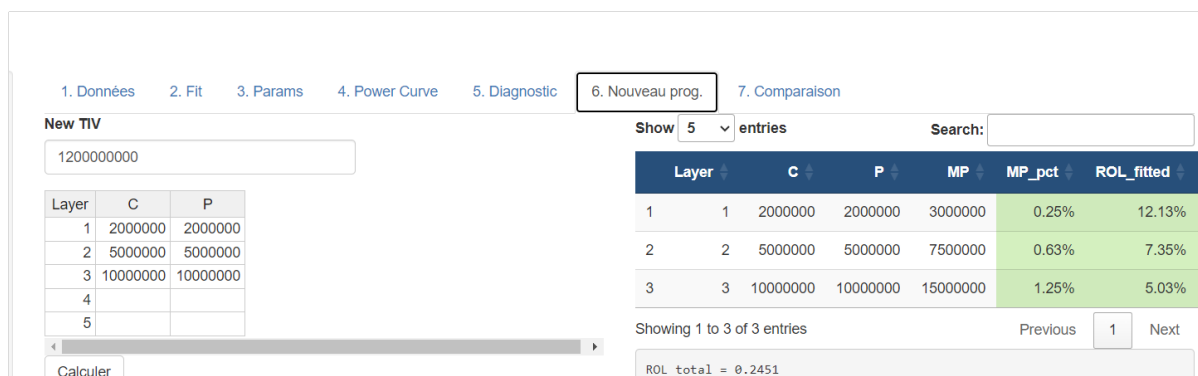


Figure 4.5 – Interface de cotation .

cette méthode peut facilement être utilisée pour comparer le tarif des tranches d'une année à l'autre, mais aussi pour construire des courbes de référence en utilisant des données provenant de différentes compagnies d'assurance.

Le graphique ci-dessous présente les courbes benchmark du marché turc.

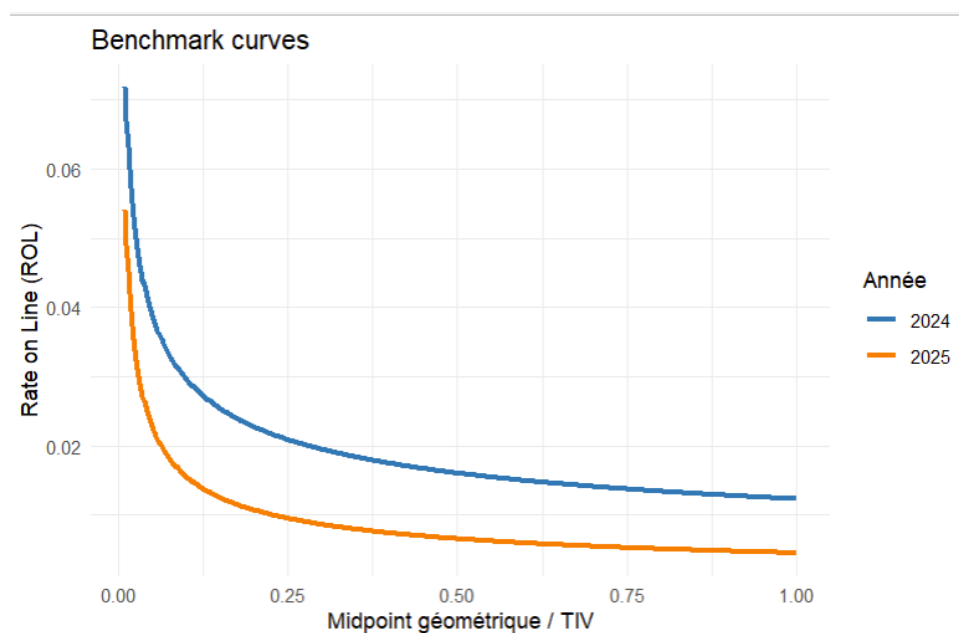


Figure 4.6 – Les courbes benchmark du marché turc.

4.1.5 Influence d'une catastrophe naturelle sur la structure des programmes

Nous avons analysé l'ensemble des programmes de type CAT XL ayant été impactés par la catastrophe naturelle de 2023 et que nous avons retrouvés dans notre portefeuille l'année suivante. Cette analyse a porté sur l'évolution du Rate On Line entre les deux

exercices. Par ailleurs, nous nous sommes également intéressés à l'évolution de la structure des programmes, en examinant les éventuelles modifications des niveaux de rétention et de limite.

Lorsque l'on s'intéresse à l'évolution de la structure des programmes CAT XL à la suite d'une catastrophe naturelle, plusieurs constats se dégagent. Tout d'abord, on observe de manière générale une augmentation des niveaux de rétention et de limite. Cette évolution structurelle semble répondre à des logiques distinctes selon le paramètre considéré. En effet, la hausse de la limite apparaît fortement corrélée à la taille de la perte enregistrée : plus l'événement est coûteux, plus les assureurs cherchent à augmenter leur niveau de protection. À l'inverse, la hausse de la rétention ne présente pas un lien aussi clair avec le montant des pertes. Elle semble plutôt résulter d'une volonté des réassureurs de réduire leur exposition sur les premières tranches du programme, en transférant davantage de risque à la charge des assureurs. Ainsi, l'évolution de la structure reflète un réajustement des responsabilités entre assureurs et réassureurs dans un contexte post-catastrophique.

4.2 Marché Indien

Le marché indien (CAT XL) se distingue par une stabilité notable, contrastant avec la volatilité observée sur d'autres marchés, comme celui de la Turquie. Cette stabilité, potentiellement liée à une exposition différente aux grands périls naturels ou à une dynamique de marché plus mature, se reflète dans la qualité et l'homogénéité des données de transactions disponibles. Cette caractéristique permet un ajustement plus fiable et robuste des courbes de tarifs marché.

4.2.1 Description des Données et Contexte

L'analyse repose sur une base de données consolidée, agrégeant les informations de plusieurs programmes de réassurance CAT XL souscrits par différentes cédantes indiennes. Une particularité de cet échantillon est sa concentration exclusive sur l'année de souscription 2024, afin de refléter les conditions tarifaires les plus récentes dans un marché perçu comme stable. Les variables clés utilisées pour la modélisation sont identiques à celles employées pour le marché turc : année de souscription (YEAR), valeur totale assurée (TIV), priorité (P), limite/garantie (C), et le taux de prime résultant (Rate on Line – ROL).

4.2.2 Ajustement des Courbes de Puissance

Le tableau suivant résume les paramètres estimés pour chaque modèle sur le marché indien.

Table 4.3 – Paramètres d’ajustement pour le marché Indien

Modèle	a	b	r	R^2	AIC	BIC
ARI	0,00009	0,92825	–	0,9477	17,44	24,09
GEO	0,0001	0,9149	–	0,9488	16,02	22,68
LOG	0,0001	0,91977	–	0,9488	16,02	22,68
LOG_GEN	0,0001	0,92015	0,07985	0,9498	16,42	22,7

4.2.3 Interprétation Approfondie des Résultats

L’analyse des paramètres ajustés pour le marché indien met en évidence plusieurs enseignements notables.

Tout d’abord, la **robustesse de l’ajustement** est manifeste. Les coefficients de détermination (R^2) sont tous très élevés, supérieurs à 0,94, ce qui traduit une excellente capacité des courbes de puissance à reproduire les données observées. Parallèlement, les critères d’information AIC et BIC restent faibles, confirmant la qualité de l’ajustement. Ces résultats surpassent nettement ceux obtenus sur le marché turc, et traduisent une meilleure qualité des données sous-jacentes en Inde, probablement en lien avec une standardisation plus avancée des pratiques ou une volatilité moindre des conditions de souscription.

Ensuite, on observe une **stabilité remarquable de l’exposant b** , autour de 0,91 à 0,93 selon les modèles. Cette constance renforce la crédibilité des résultats, mais surtout, la valeur relativement élevée de b tranche nettement avec celle constatée en Turquie (environ 0,54–0,55). Un exposant proche de 1 signifie que le ROL décroît lentement à mesure que la priorité augmente, traduisant une sensibilité modérée au niveau de la tranche. Cela pourrait indiquer une perception différente du risque associé aux couches supérieures, ou refléter le poids accru de facteurs non techniques — comme des considérations commerciales ou contractuelles — dans un marché perçu comme plus mature et structuré.

En ce qui concerne la **performance des différents modèles**, le modèle Logarithmique Généralisé (LOG_GEN), bien qu’un peu plus complexe avec son paramètre r , n’apporte pas d’amélioration significative. Son R^2 est à peine supérieur, et ses critères AIC et BIC sont même légèrement moins favorables que ceux des modèles plus simples comme LOG ou GEO. Cela suggère que la complexité additionnelle du LOG_GEN n’est pas justifiée

4. APPLICATION ET RÉSULTATS

dans le cas du marché indien, et qu'une structure de puissance classique suffit à bien modéliser les données observées.

Enfin, une **cohérence globale** se dégage entre les différents modèles testés. Les variations des paramètres a et b selon le type de midpoint restent marginales, et la très faible valeur du paramètre a (de l'ordre de 10^{-4}) explique pourquoi les courbes s'alignent visuellement presque parfaitement, malgré des différences numériques. Cette homogénéité renforce la solidité de l'approche méthodologique et la pertinence des résultats obtenus.

L'analyse visuelle suivante permet de comparer les courbes ajustées.

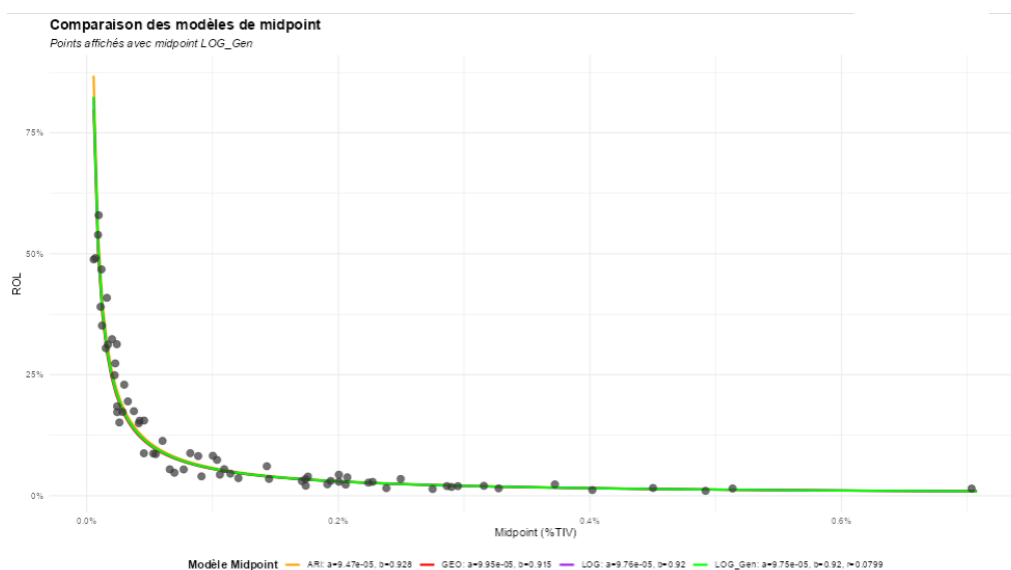


Figure 4.7 – Comparaison des courbes ajustées selon les quatre midpoints (points 2025 affichés avec LOG_Gen)

La Figure 4.7 confirme l'excellente superposition des courbes issues des quatre méthodes de calcul des midpoints, malgré de légères différences paramétriques. L'écart relatif maximal sur l'exposant b est inférieur à 1,5 %, soulignant la stabilité structurelle du marché indien telle que capturée par les données de 2024. Le modèle LOG_Gen ne montre une divergence mineure que pour les très faibles valeurs de x (inférieures à 0,2 %), une zone où les données sont potentiellement moins denses. Cette faible différence ne justifie pas sa complexité additionnelle au regard des critères AIC et BIC.

4.2.4 Validation du Modèle et Utilité Pratique

La validation de la qualité statistique de l'ajustement est complétée par l'analyse des résidus, notamment pour le modèle LOG_Gen qui présente le R^2 le plus élevé.

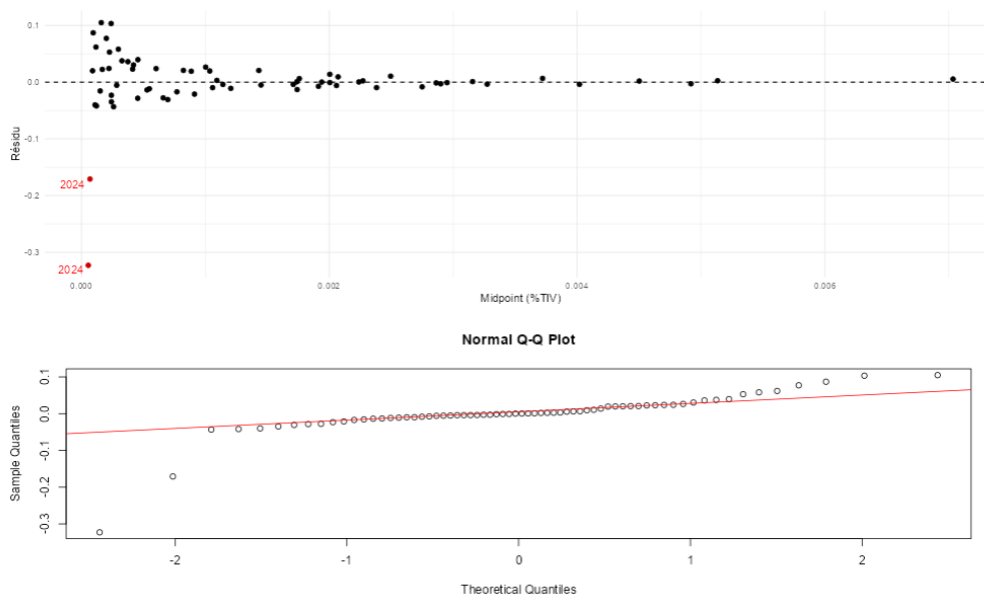


Figure 4.8 – Diagnostics d’ajustement pour le modèle LOG_Gen

Le graphique quantile-quantile (Q-Q plot) des résidus montre une adéquation satisfaisante à la distribution normale, à l’exception de quelques points aux extrémités qui s’écartent légèrement de la droite théorique. Ces quelques observations potentiellement influentes ne semblent cependant pas invalider le modèle globalement. Le graphique des résidus en fonction des midpoints confirme une bonne homoscedasticité (variance constante des résidus), sans structure apparente, validant ainsi les hypothèses sous-jacentes du modèle de régression. Les deux points présentant les résidus les plus élevés (pour $x > 0,4$ %) n’altèrent pas la tendance générale.

En conclusion, la modélisation par courbes de puissance s’avère particulièrement efficace pour le marché CAT XL indien sur la base des données de 2024. La stabilité et la cohérence des résultats obtenus permettent de construire un benchmark tarifaire fiable.

4.3 Conclusion

L’analyse des marchés turc et indien met en lumière la polyvalence des *power curves* pour la tarification Cat XoL, adaptables à des contextes structurellement opposés. D’un côté, un marché soumis à des chocs externes majeurs nécessite une approche dynamique, avec des recalibrages réguliers pour intégrer les évolutions brutales des primes et des risques. De l’autre, un environnement stable permet une modélisation pérenne.

La validation des hypothèses statistiques sous-jacentes (distribution et indépendance des résidus, homogénéité des variances) renforce la crédibilité des ajustements réalisés,

tandis que la cohérence des paramètres-clés entre modèles concurrents atteste de la robustesse méthodologique. Cette dualité illustre l'équilibre atteint entre : - Réactivité opérationnelle : Capacité à absorber des perturbations systémiques via des mises à jour ciblées, - Stabilité prédictive : Conservation d'une structure tarifaire fiable sur le long terme en l'absence de chocs exogènes.

En synthèse, les *power curves* émergent comme un cadre unifié pour la tarification XL, alliant transparence algorithmique et adaptabilité aux cycles de marché. Leur capacité à fournir des prédictions cohérentes, malgré des logiques de midpoint divergentes, en fait un outil stratégique pour les réassureurs opérant sur des terrains hétérogènes, où la simplicité d'exécution et l'interprétabilité des résultats sont primordiales.

Conclusion Générale

La problématique de la tarification des traités de réassurance non-vie non proportionnels, notamment les couvertures en excédent de sinistre XS, a été au cœur de cette étude. Pour y répondre, une approche méthodologique rigoureuse a été mise en œuvre, combinant plusieurs techniques avancées.

Techniquement, ce travail a exploré et appliqué trois approches de tarification complémentaires : la méthode du « Burning Cost », la modélisation probabiliste avancée et l'extrapolation de Pareto. La modélisation probabiliste a notamment impliqué l'ajustement de lois de fréquence et de sévérité, l'utilisation de simulations Monte-Carlo et l'application de techniques de rééchantillonnage Bootstrap pour évaluer l'incertitude paramétrique. Ces outils ont permis d'obtenir des primes techniques précises et robustes, intégrant une quantification rigoureuse des incertitudes.

Un résultat clé de cette étude est la construction et la modélisation des courbes de tarifs marché pour les traités catastrophe (CAT XL), utilisant des fonctions de puissance et l'interpolation par courbes splines. Ces courbes offrent un outil de *benchmarking* dynamique, essentiel pour positionner les tarifs techniques par rapport aux conditions de marché et appréhender les cycles de souscription.

Ces méthodes et outils ont permis de répondre à la problématique posée en fournissant des cadres d'évaluation des risques plus sophistiqués et adaptés aux spécificités des traités non proportionnels. Les résultats obtenus offrent une vision plus complète et nuancée des coûts techniques, permettant une prise de décision plus éclairée pour les réassureurs.

Ce travail contribue ainsi à une meilleure appréhension des mécanismes de tarification en réassurance. Il ouvre la voie à des recherches futures, notamment sur l'intégration de la théorie de crédibilité et l'application de techniques d'apprentissage automatique pour affiner davantage les modèles de tarification. Les analyses et les outils développés dans ce rapport sont destinés à être des ressources utiles pour les chercheurs du domaine.

Bibliographie

- [1] Blondeau, J. et Partrat, C. (2004). *La réassurance : approche technique*. Economica.
- [2] Poulin, M. (2008). *Analyse des solutions actuarielles en tarification des traités de réassurance non-proportionnels Non-Vie*. Mémoire d'Actuariat, Centre d'Études Actuarielle, Promotion 2008.
- [3] FINAS, C. (2015). *Les tarifs des réassureurs sont-ils crédibles ?*. Mémoire d'Actuariat, ISFA, Promotion 2015.
- [4] Philbrick, S. W. (1985). *A Practical Guide to the Single Parameter Pareto Distribution*. Proceedings of the Casualty Actuarial Society, 72, 47–66.
- [5] Pambianchi, A. (2021). *Tarification des traités en réassurance XS et comparaison des réassureurs en vision cédante*.
- [6] El Moussaada, S. (2021). *Application de la théorie de la crédibilité à la tarification des traités de réassurance*. Mémoire de fin d'études, INSEA, Maroc.
- [7] Deprey, E. & Godzinski, A. (2007). *extitProblématique de seuil dans la modélisation de la sinistralité en Réassurance Non Vie*. Mémoire d'Actuariat, ENSAE, Promotion 2007.
- [8] Mata, A. J. (2000). *Pricing excess of loss reinsurance with reinstatements*. ASTIN Bulletin, 30(2), 349–368.
- [9] Morel, D. (2013). *Pricing Catastrophe Excess of Loss Reinsurance using Market Curves*. Casualty Actuarial Society E-Forum, Spring 2013, Volume 2.
- [10] Walhin, J. F. (2018). *Pricing Catastrophe Excess of Loss Reinsurance Using Power Curves and the Generalized Logarithmic Mean*. Casualty Actuarial Society, 12(1), 100–107.
- [11] Verlaak et al.(2005). *Benchmarking Excess-of-Loss Reinsurance with a Poisson–Pareto Model. Technical Report, Actuarial Research Center*.
- [12] Tong, J. (2004). *Cauchy's Mean Value Theorem Involving n Functions*. *The College Mathematics Journal*, 35(1), 50–51.

- [13] A. Castañer, M.M. Claramunt[†] and M. Mármol (2013). *TAIL VALUE AT RISK. AN ANALYSIS WITH THE NORMAL-POWER APPROXIMATION*. Department of Economic, Financial and Actuarial Mathematics Universitat de Barcelona, Spain.

Annexes

A Les Opérateurs de Distorsion et mesures de risque

A.1 Propriétés des mesures de risque

1. *Au moins la prime pure* : $\forall X, PR(X) \geq E(X)$.
2. *Homogénéité* : $\forall X$ et $\lambda > 0, PR(\lambda X) = \lambda PR(X)$.
3. *Invariance par translation* : $\forall X$ et $c \geq 0, PR(X + c) = PR(X) + c$.
4. *Additivité* : Pour X et X' indépendantes, $PR(X + X') = PR(X) + PR(X')$.
5. *Sous-additivité (forte)* : Pour X et X' indépendantes (non indépendantes), $PR(X + X') \leq PR(X) + PR(X')$.
6. *Convexité* : Pour X et X' quelconques, $\lambda \in [0, 1], PR(\lambda X + (1 - \lambda)X') \leq \lambda PR(X) + (1 - \lambda)PR(X')$.
7. *Préservation de la dominance stochastique* : Si $X \leq_{st} X'$, alors $PR(X) \leq PR(X')$.
8. *Additivité par tranches* : On définit une tranche $(a, b]$ d'un risque X de la façon suivante :

$$I_{(a,b]} = \begin{cases} 0, & 0 \leq X < a \\ (X - a), & a \leq X < b \\ (b - a), & b \leq X \end{cases}$$

qui a pour fonction de survie :

$$S_{I_{(a,b]}}(t) = \begin{cases} S_X(a + t), & 0 \leq t < (b - a) \\ 0, & (b - a) \leq t \end{cases}$$

Alors, quand un risque X est divisé en tranches $\{(x_i, x_{i+1}], i = 0, 1, \dots\}$:

$$X = I_{(0, x_1]} + I_{(x_1, x_2]} + \dots \quad \text{avec } 0 = x_0 < x_1 < x_2 < \dots$$

sa prime de risque est :

$$PR(X) = \sum_{i=0}^{\infty} PR(I_{(x_i, x_{i+1}]})$$

Cette propriété qui peut être négligée en assurance est d'une réelle importance en réassurance non proportionnelle puisqu'elle assure une cohérence dans le chargement des tranches.

A.2 Principe de base des opérateurs de distorsion :

En assurance dommage, un risque X est une variable aléatoire positive représentant un montant cumulé de sinistres. La prime pure s'exprime par l'espérance :

$$E[X] = \int_0^{\infty} S_X(y) dy$$

avec $S_X(x) = 1 - F_X(x)$ la fonction de survie.

A.3 Principe de Wang :

Wang (1996) propose de transformer la fonction de survie $S_X(x)$ via une fonction g , appelée opérateur de distorsion, pour définir une prime ajustée au risque :

$$H_g[X] = \int_0^{\infty} g(S_X(x)) dx$$

A.4 Conditions sur l'opérateur g :

La fonction g doit satisfaire :

$$0 \leq g(u) < 1, \quad g(0) = 0, \quad g(1) = 1$$

et :

- être croissante : pour préserver la structure de survie,

- être concave : pour garantir un chargement positif quel que soit le risque,
- $g'(0) = +\infty$: pour refléter un chargement illimité sur les tranches extrêmes.

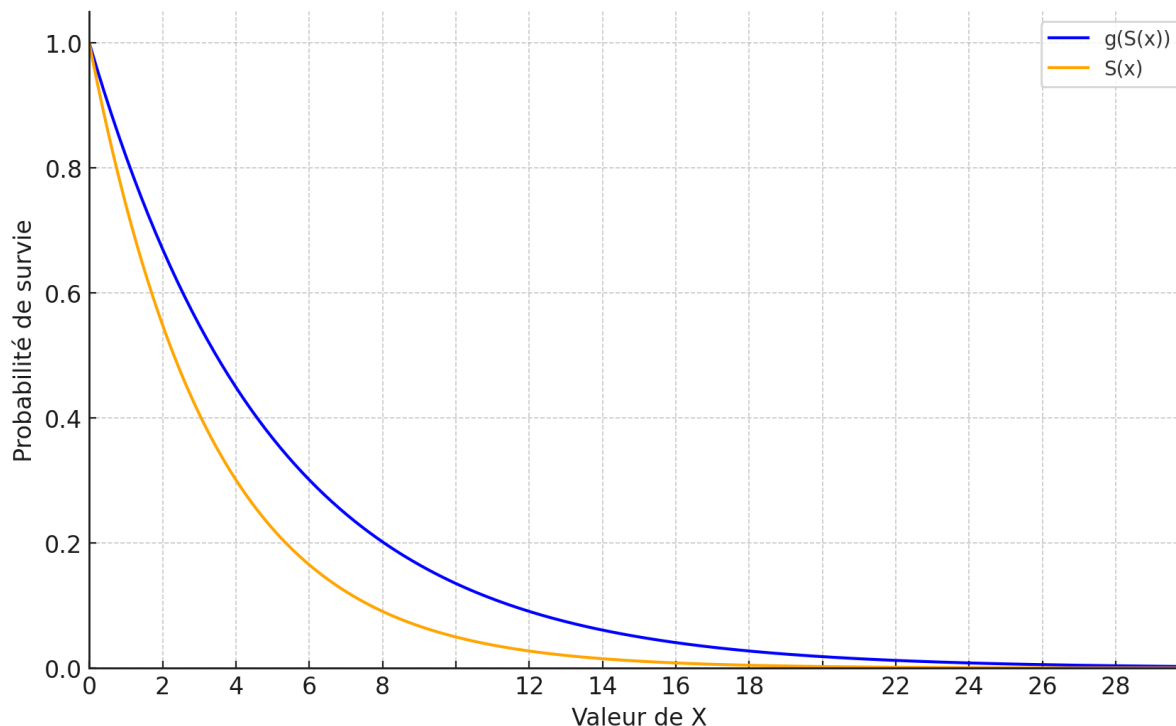


Figure A.1 – Exemple d'un opérateur de distorsion g

A.5 Intérêt du principe :

Ce principe permet :

- une répartition cohérente du chargement sur toutes les tranches de sinistres,
- de refléter le véritable risque sous-jacent à chaque tranche,
- un décalage global des paramètres du tarif (espérance, variance, etc.) au lieu de cibler un seul paramètre.

A.6 Exemples Fondamentaux

PH-transform

La PH-transform, proposée par Shaun Wang en 1995, est un opérateur de distorsion défini comme suit : pour une variable aléatoire X de fonction de survie S_X , la PH-transform génère une nouvelle variable aléatoire Y dont la fonction de survie est :

$$S_Y(t) = S_X(t)^{1/\rho} \quad \text{avec } \rho \geq 1.$$

La prime ajustée au risque associée est donnée par :

$$\pi_\rho(X) = \int_0^\infty S_X(t)^{1/\rho} dt,$$

où ρ est le coefficient d'aversion au risque. Pour $\rho = 1$, on retrouve la prime pure $E(X)$, et pour $\rho \rightarrow \infty$, la prime tend vers le maximum du support de X .

Propriétés de la PH-transform :

- Elle vérifie les propriétés essentielles d'un bon principe de calcul de prime : homogénéité, invariance par translation, sous-additivité, et préservation de la dominance stochastique.
- Elle est facile à utiliser pour certaines lois invariantes comme l'exponentielle, Pareto, Weibull et Burr.
- Elle garantit un chargement positif et une répartition harmonieuse de la marge entre les tranches de risque.

Limites de la PH-transform :

- Manque de souplesse pour certaines distributions, comme la lognormale, qui n'est pas invariante sous cette transformation.
- Le chargement relatif des tranches hautes peut croître trop rapidement par rapport aux prix de marché.
- Impossible d'appliquer simultanément aux actifs et aux passifs.

Wang Transform

Proposée en 1999 par Shaun Wang, la Wang Transform est un opérateur de distorsion plus général défini par :

$$g_\alpha(u) = \Phi\left(\Phi^{-1}(u) + \alpha\right),$$

où Φ est la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite et α un paramètre réel. La prime ajustée au risque est calculée comme une intégrale de Choquet :

$$H[X; \alpha] = \int_{-\infty}^0 [g_\alpha(S_X(x)) - 1] dx + \int_0^\infty g_\alpha(S_X(x)) dx.$$

Propriétés de la Wang Transform :

- Elle conserve les propriétés fondamentales de la PH-transform (homogénéité, invariance par translation, etc.).
- Elle est invariante pour les lois normale et lognormale, ce qui permet un lien naturel avec les modèles financiers comme Black-Scholes.

- Elle permet un traitement unifié des actifs et des passifs, avec $g_\alpha^* = g_{-\alpha}$.
- Elle généralise le CAPM et reproduit la formule de Black-Scholes, offrant ainsi un cadre cohérent entre assurance et finance.

Avantages par rapport à la PH-transform :

- Plus grande souplesse et pertinence pour les distributions complexes.
- Capacité à intégrer les aspects financiers et actuariels dans un même cadre théorique.
- Facilité d'application numérique grâce aux fonctions standard de la loi normale.

Application pratique : La Wang Transform est utilisée pour répartir une marge globale sur les tranches de risque en réassurance. Par exemple, avec une marge de 12%, le paramètre α est calibré pour ajuster la distribution des sinistres, et les chargements relatifs sont calculés par intégration des fonctions de survie distordues.

B lois usuelles en réassurance

B.1 Modélisation de la sévérité

La modélisation des distributions en probabilité est essentielle pour évaluer les couvertures de réassurance, notamment lorsque les données d'expérience sont limitées. Cette section présente les distributions les plus couramment utilisées pour modéliser les montants des sinistres.

B.1.1 Loi log-normale

La loi log-normale est utilisée pour modéliser les montants de sinistres. Une variable X suit une loi log-normale de paramètres μ et σ , notée $X \sim \ln \mathcal{N}(\mu, \sigma)$ si :

$$\ln(X) \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$$

Sa densité de probabilité est :

$$f(x) = \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right), \quad x > 0$$

Les moments sont :

$$\mathbb{E}[X] = \exp\left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right), \quad \text{Var}(X) = [\exp(2\mu + \sigma^2)] [\exp(\sigma^2) - 1]$$

Estimation des paramètres

— Estimateur de t : $\hat{t} = \min_i(x_i)$

— Estimateur de m :

$$\hat{m} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln\left(\frac{x_i}{\hat{t}}\right)$$

— Estimateur de σ :

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\ln\left(\frac{x_i}{\hat{t}}\right)\right)^2 - \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln\left(\frac{x_i}{\hat{t}}\right)\right)^2}$$

B.1.2 Loi de Pareto

La loi de Pareto est utilisée pour modéliser les sinistres de grande ampleur.

Densité :

$$f(x) = \frac{\theta a^\theta}{x^{\theta+1}} \mathbf{1}_{x \geq a}$$

Fonction de répartition :

$$F(x) = 1 - \left(\frac{a}{x}\right)^\theta, \quad x \geq a$$

Moments :

$$\mathbb{E}[X] = \frac{a\theta}{\theta - 1}, \quad \text{Var}(X) = \frac{\theta a^2}{(\theta - 2)(\theta - 1)^2}, \quad \theta > 2$$

Estimation des paramètres

— Estimateur de t :

$$\hat{t} = \min_i(x_i)$$

— Estimateur de α :

$$\hat{\alpha} = \frac{n}{\sum_{i=1}^n \ln(x_i/t)}$$

B.1.3 Loi de Pareto généralisée (GPD)

La loi de Pareto généralisée permet de modéliser les sinistres extrêmes.

Densité :

$$g_{\gamma,\sigma}(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sigma} \left(1 + \frac{\gamma x}{\sigma}\right)^{-\left(\frac{1}{\gamma}+1\right)}, & \gamma \neq 0 \\ \frac{1}{\sigma} e^{-x/\sigma}, & \gamma = 0 \end{cases}$$

Fonction de répartition :

$$G_{\gamma,\sigma}(x) = \begin{cases} 1 - \left(1 + \frac{\gamma x}{\sigma}\right)^{-1/\gamma}, & \gamma \neq 0 \\ 1 - e^{-x/\sigma}, & \gamma = 0 \end{cases}$$

Espérance (existante si $\gamma < 1$) :

$$\mathbb{E}[X] = \frac{\sigma}{1 - \gamma}$$

Remarques

- Si $\gamma = 0$, la loi devient exponentielle.
- Extension à 3 paramètres : $G_{\gamma,\sigma,\mu}(x) = G_{\gamma,\sigma}(x - \mu)$.

Estimation des paramètres

- **Méthode du maximum de vraisemblance :**

$$\mathcal{L}(Y, \gamma, \sigma) = \begin{cases} -n \ln(\sigma) - \left(1 + \frac{1}{\gamma}\right) \sum_{i=1}^n \ln\left(1 + \frac{\gamma Y_i}{\sigma}\right), & \gamma \neq 0 \\ -n \ln(\sigma) - \frac{1}{\sigma} \sum_{i=1}^n Y_i, & \gamma = 0 \end{cases}$$

- **Méthode des moments :**

$$\hat{\gamma} = \frac{\bar{Y}^2 - s^2}{2s^2}, \quad \hat{\sigma} = \frac{\bar{Y}}{2} \left(\frac{\bar{Y}^2}{s^2} + 1 \right)$$

B.2 Modélisation de la fréquence

B.2.1 Distribution de Poisson

Notation : $N \sim \mathcal{P}(\lambda)$.

Loi de probabilité :

$$P(N = n) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^n}{n!}$$

Moments :

$$\mathbb{E}[N] = \mathbb{V}[N] = \lambda$$

Estimation

$$\hat{\lambda} = \bar{n}$$

B.2.2 Distribution binomiale négative

Notation : $N \sim \mathcal{BN}(r, p)$.

Loi de probabilité :

$$P(N = n) = \binom{r + n - 1}{n} p^r (1 - p)^n$$

Moments :

$$\mathbb{E}[N] = r \frac{1 - p}{p}, \quad \mathbb{V}[N] = r \frac{1 - p}{p^2}$$

Estimation

$$\hat{r} = \frac{\bar{n}^2}{s^2 - \bar{n}}, \quad \hat{p} = \frac{\bar{n}}{s^2}$$

B.2.3 Distribution de Poisson généralisée

Densité :

$$P_{\theta, \omega}(N = k) = \frac{\theta(\theta + \omega k)^{k-1}}{k!} e^{-(\theta + \omega k)}$$

Moments :

$$\mathbb{E}[N] = \frac{\theta}{1 - \omega}, \quad \mathbb{V}[N] = \frac{\theta}{(1 - \omega)^3}$$

B.2.4 Distribution binomiale classique

Notation : $N \sim \mathcal{B}(\alpha, p)$.

Loi de probabilité :

$$P(N = n) = \binom{\alpha}{n} p^n (1 - p)^{\alpha - n}$$

Moments :

$$\mathbb{E}[N] = \alpha p, \quad \mathbb{V}[N] = \alpha p(1 - p)$$

C Prime Pure dans le cadre Pareto-Poisson

Soit une tranche de réassurance $C \times P$ et A le seuil choisi pour la modélisation, X la variable représentant le coût d'un sinistre et $X_{C,P}$ la variable désignant le coût du sinistre à charge de la tranche $C \times P$. On rappelle que A est inférieur à la priorité et supérieur au seuil de déclaration des sinistres revalorisés.

X est supposé de loi de Pareto de paramètres α au seuil A .

$$E[X_{C,P}] = E[\min\{\max\{0, X - P\}, C\} | X > A] \quad (\text{C.1})$$

$$= \int_P^{C+P} (x - P)f(x)dx + \int_{C+P}^{\infty} Cf(x)dx \quad (\text{C.2})$$

$$= \int_P^{C+P} (x - P)\frac{\alpha A^\alpha}{x^{\alpha+1}}dx + \int_{C+P}^{\infty} \frac{C\alpha A^\alpha}{x^{\alpha+1}}dx \quad (\text{C.3})$$

$$= \alpha A^\alpha \int_P^{C+P} x^{-\alpha}dx - P\alpha A^\alpha \int_P^{C+P} x^{-(\alpha+1)}dx + C\alpha A^\alpha \int_{C+P}^{\infty} x^{-(\alpha+1)}dx \quad (\text{C.4})$$

$$= \underbrace{I_1} - \underbrace{I_2} + \underbrace{I_3} \quad (\text{C.5})$$

Avec :

$$I_1 = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha} [(C + P)^{1-\alpha} - P^{1-\alpha}] & \text{si } \alpha \neq 1 \\ \ln\left(\frac{C+P}{P}\right) & \text{si } \alpha = 1 \end{cases}$$

$$I_2 = \frac{1}{\alpha} (P^{-\alpha} - (C + P)^{-\alpha})$$

$$I_3 = \frac{(C + P)^{-\alpha}}{\alpha}$$

En remplaçant I_1 , I_2 et I_3 dans l'expression de $E[X_{C,P}]$, on obtient :

$$E[X_{C,P}] = \begin{cases} \frac{A^\alpha}{1-\alpha} [(C + P)^{1-\alpha} - P^{1-\alpha}] & \text{si } \alpha \neq 1 \\ A \ln\left(\frac{C+P}{P}\right) & \text{si } \alpha = 1 \end{cases}$$

dans le cadre du modèle collectif, la prime pure pour la tranche $C \times P$ peut être

calculée de la façon suivante :

$$E[S_{C,P}] = E[N_\lambda] \times E[X_{C,P}]$$

Où N_λ désigne le nombre de sinistres reportés annuellement dépassant le seuil de modélisation A .

En remplaçant $E[X_{C,P}]$ par son expression et en supposant que N_λ suit une loi de Poisson de paramètre λ , on obtient :

$$E[S_{C,P}] = \begin{cases} \lambda \times \frac{A^\alpha}{1-\alpha} [(C+P)^{1-\alpha} - P^{1-\alpha}] & \text{si } \alpha \neq 1 \\ \lambda \times A \ln\left(\frac{C+P}{P}\right) & \text{si } \alpha = 1 \end{cases}$$

D Le QQ-plot

Considérons (X_1, \dots, X_n) un échantillon de variables aléatoires supposées indépendantes et identiquement distribuées de même loi qu'une variable aléatoire X . Notons (x_1, \dots, x_n) l'échantillon d'observations et $(x_{(1)}, \dots, x_{(n)})$ le même vecteur ordonné par ordre croissant, c'est-à-dire tel que $x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \dots \leq x_{(n)}$. Notons F_n la fonction de répartition empirique de l'échantillon et F la fonction de répartition théorique que l'on souhaite comparer.

Le graphique Quantile-Quantile s'attache à analyser graphiquement la linéarité entre les points $(F_n^{-1}(p), F^{-1}(p))$ pour des valeurs de $p \in [0, 1]$.

En pratique, le graphique Quantile-Quantile de (X_1, \dots, X_n) est le graphe des points suivants :

$$\left\{ \left(x_{(i)}, F^{-1} \left(\frac{i}{n+1} \right) \right), \quad \text{pour tout } i \in \{1, \dots, n\} \right\}$$

Si l'échantillon est identiquement distribué selon la même loi que X , alors les points doivent être alignés sur une droite. Dans ce cas les quantiles empiriques sont égaux aux quantiles théoriques de la loi analysée. C'est une condition nécessaire pour estimer que la distribution des données disponibles peut être ajustée par la loi théorique en question. En revanche, si le graphe du QQ-plot est concave, cela indique que l'échantillon est issu d'une distribution à queue plus épaisse, et inversement, un graphe convexe indique que l'échantillon est issu d'une loi à queue plus fine.

Le graphique Quantile-Quantile peut être adapté à de nombreuses distributions de probabilité afin d'effectuer un premier test graphique d'adéquation de loi.

— **Pour la loi de Pareto**, le graphique consiste à tracer les points :

$$\left\{ \left(\ln(x_{(i)}), -\ln \left(1 - \frac{i}{n+1} \right) \right), \quad \text{pour tout } i \in \{1, \dots, n\} \right\}$$

— **Pour la loi Log-Normale**, en utilisant le lien avec la loi Normale centrée réduite et sa fonction de répartition φ , le graphique consiste à tracer les points :

$$\left\{ \left(\ln(x_{(i)}), \varphi^{-1} \left(\frac{i}{n+1} \right) \right), \quad \text{pour tout } i \in \{1, \dots, n\} \right\}$$

Pour illustrer ces différents graphiques Quantile-Quantile, deux échantillons de 1 000

observations sont simulés. Le premier est issu d'une distribution de Pareto de paramètre $\alpha = 2$ et $t = 100$ et le second d'une distribution Log-Normale de paramètres $\mu = 1$ et $\sigma = 2$.

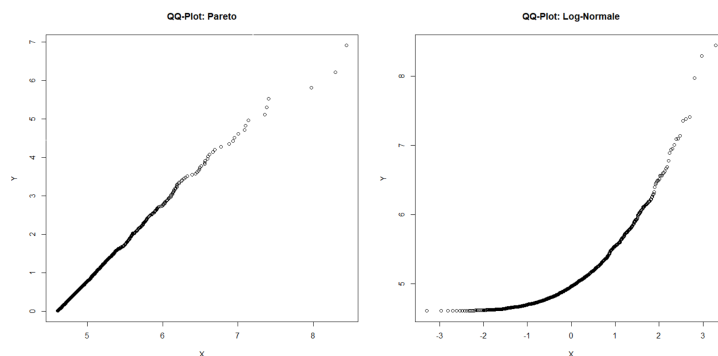


Figure D.1 – QQ-Plot sur simulation d'une loi de Pareto.

Le log-normale et weibull est concave car la loi simulée de l'échantillon a une queue plus épaisse. Le QQ-Plot de Pareto est linéaire ce qui fournit une première preuve graphique de l'adéquation de l'échantillon à cette loi.

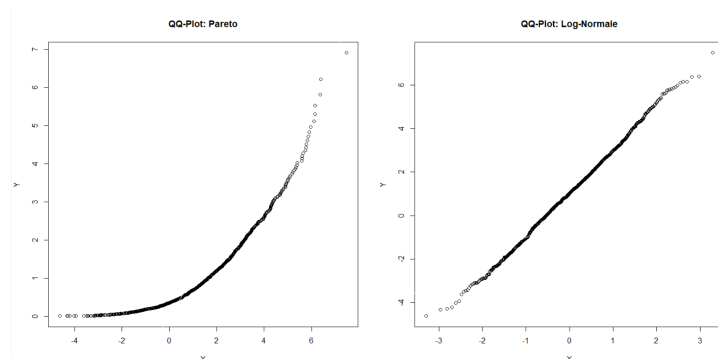


Figure D.2 – QQ-Plot sur simulation d'une loi Log-Normale.

Le QQ-Plot de Pareto est convexe car la loi log-normale simulée a une queue plus fine. Le QQ-Plot log-normale est logiquement linéaire.

E L'algorithme récursif de Panjer

L'algorithme de Panjer est une relation récursive qui permet l'évaluation de la fonction de masse de probabilité associée à une loi composée, dont la loi de fréquence fait partie de la famille $(a, b, 0)$. Soit S la variable aléatoire définie par :

$$S = \begin{cases} \sum_{j=1}^N Y_j & \text{si } N > 0 \\ 0 & \text{si } N = 0 \end{cases}$$

où :

- N est une variable aléatoire discrète de fréquence,
- Y_1, Y_2, \dots est une suite de variables aléatoires discrètes non négatives i.i.d. de même loi que Y ,
- La suite Y_1, Y_2, \dots est indépendante de N .

Avant d'expliquer l'algorithme de Panjer, il est d'abord nécessaire de présenter une importante famille de distributions de fréquence appelée la famille $(a, b, 0)$. On dit qu'une distribution de fréquence d'une variable aléatoire N appartient à la famille de distributions de comptage $(a, b, 0)$ si sa fonction de masse de probabilité

$$f_N(k) = \Pr(N = k)$$

satisfait la relation récursive suivante :

$$f_N(k) = \left(a + \frac{b}{k}\right) f_N(k-1), \quad k = 1, 2, \dots$$

On peut montrer que seules les lois de Poisson, Binomiale et Binomiale négative sont membres de cette famille. On indique ci-dessous les valeurs de a et b pour ces lois :

- **Loi de Poisson** $\mathcal{P}(\lambda)$: $a = 0, b = \lambda$
- **Loi Binomiale** $\mathcal{B}(n, q)$:

$$a = -\frac{q}{1-q}, \quad b = (n+1)\frac{q}{1-q}$$

— **Loi Binomiale négative** $\mathcal{BN}(r, \beta)$:

$$a = \frac{\beta}{1 + \beta}, \quad b = \frac{\beta}{1 + \beta}(r - 1)$$

L'algorithme récursif de Panjer

L'algorithme de Panjer est une relation récursive qui permet de calculer la fonction de masse de probabilité de S , pour une famille $(a, b, 0)$ de lois de fréquence.

$$S = \begin{cases} \sum_{j=1}^N Y_j & \text{si } N > 0 \\ 0 & \text{si } N = 0 \end{cases}$$

Le point de départ de l'algorithme est :

- $f_S(0) = \Pr(S = 0) = M_N \{\log(f_Y(0))\}$
- La relation récursive est donnée par :

$$f_S(x) = \frac{\sum_{y=1}^x \left(a + b \frac{y}{x}\right) f_Y(y) f_S(x - y)}{1 - a f_Y(0)}, \quad x = 1, 2, \dots$$

- Pour appliquer l'algorithme de Panjer, on doit discrétiser la loi de Y_j , c'est-à-dire on remplace Y_j par une variable aléatoire discrète \tilde{Y}_j définie sur $\{0, h, 2h, \dots\}$. On présente deux méthodes de discrétisation : méthode **Upper** et méthode **Lower**.

La méthode upper est donnée par :

$$F_{\tilde{Y}}(x) = \begin{cases} F_Y(h) & \text{si } 0 \leq x < h \\ F_Y(2h) & \text{si } h \leq x < 2h \\ F_Y(3h) & \text{si } 2h \leq x < 3h \\ \text{etc} & \end{cases}$$

— La masse à 0 :

$$f_{\tilde{Y}}(0) = F_Y(h)$$

— La masse à $h, 2h, 3h, \dots$:

$$f_{\tilde{Y}}(kh) = F_Y((k+1)h) - F_Y(kh), \quad k = 1, 2, \dots$$

La méthode lower est donnée par :

$$F_{\tilde{Y}}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq x < h \\ F_Y(h) & \text{si } h \leq x < 2h \\ F_Y(2h) & \text{si } 2h \leq x < 3h \\ \text{etc} & \end{cases}$$

— La masse à 0 :

$$f_{\tilde{Y}}(0) = 0$$

— La masse à $h, 2h, 3h, \dots$:

$$f_{\tilde{Y}}(kh) = F_Y(kh) - F_Y((k-1)h), \quad k = 1, 2, \dots$$

F Checklist des données

Données nécessaires à la cotation (Techniques, Souscription et Risques CAT)	
Éléments	Commentaires / Détails
Treaty Renewal Program 2025	Programme à coter : priorités, portées, nombre de REC, clauses, couvertures, exclusions, spécifications
Estimated Premium Income (EPI) 2024 et 2025	
Risk Profiles (au 31/12/2023 et 30/09/2024)	Net de facultatives ventilés par type (Prop et NProp) et par branche
Proportional Treaty Statistics	Primes, commissions, taxes, courtage, pertes (payées et en suspens), RESULT Historique : 5–6 ans (Short Tail), 9–10 ans (Long Tail)
Non-Proportional Treaty Statistics	Primes XL, pertes XL (payées et en suspens), RESULT ou pertes individuelles > 25% ou 50% de la priorité
Triangulations	Primes et pertes avec développement par année de survenance
Liste des sinistres majeurs (Cat Loss)	Dates précises : année, mois, jour
Top 10 Risks	
CRESTA Zoning (for CAT Covers)	Répartition par zone CRESTA (pays, branche, type Prop/NProp) Pour PROP EVENT LIMIT : à préciser si absent du SLIP
Split of Exposure	Répartition de l'exposition par type et par branche
Underwriting Policies	Politique de souscription, évolution du marché, description du portefeuille, gestion des sinistres, stratégie du réassureur, barèmes tarifaires
Treaty Renewal 2025 (notes)	Notes des couvertures 2024
CAT Modelling Results	EP CURVES, période de retour, AAL, STD ventilées par traité, branche et péril
Stat CAT	Historique des primes et sinistres CAT ventilés par type de péril : Earthquake, Flood, Typhon

Table F.1 – Résumé des données techniques, de souscription et CAT pour la cotation

Spécifications par branche
Marine Portfolio Details
Motor Portfolio Composition
Fire Portfolio Details per occupation
Special Acceptance

Table F.2 – Spécifications de portefeuille par branche