ROYAUME DU MAROC
-*-*-*-
HAUT COMMISSARIAT AU PLAN
-*-*-*-*-*-*-
INSTITUT NATIONAL
DE STATISTIQUE ET D'ECONOMIE APPLIQUEE

INSEA

Projet de Fin d'Etude

Fair Value en Assurance

Préparé par : **Mlle. Imane OUZZINE**
M. Kacem SAHNOUN

Sous la direction de: **M. Kamal BENCHEKROUN (INSEA)**
M. Achraf FTOUHI (DELOITTE)

***Soutenu Publiquement com*me exigence partielle en vue de l'obtention du**

Diplôme d'ingénieur d'Etat

Option : Actuariat-Finance

Devant le jury composé de:

M. Kamal BENCHEKROUN (INSEA)

M. Said Ramadan NSIRI (INSEA)

M. Achraf FTOUHI (DELOITTE)

Juin 2009

A nos très chers parents, pour leurs soutiens et tous leurs sacrifices

A nos frères et sœurs pour leur amour et leur soutien

A toutes nos familles

A nos professeurs

A tous nos amis

A ceux qui nous ont soutenus tout au long de notre vie

Nous dédions ce modeste travail

Imane & Kacem

Remerciement

Nous ne saurions commencer ce rapport sans remercier le tout puissant **ALLAH** miséricordieux, qui nous a permis d'effectuer notre stage au sein de Deloitte dans de bonnes conditions et sans difficultés majeures.

Aussi nous remercions du fond du coeur **M. Kamal BENCHEKROUN** notre encadrant interne de l'INSEA qui n'a ménagé aucun effort pour nous aider à mener à terme notre projet, nous remercions également **M. Achraf FTOUHI** notre encadrant externe du service actuariat de Deloitte pour ces enseignements qui témoignent d'une grande expérience.

Nous ne saurions terminer ces remerciements sans rendre grâce à Mlle **Fouzia AMGHAR** pour sa parfaite collaboration.

Un grand merci également à **M. Pierre DEVOLDER** pour un échange de mails aussi constructif que sympathique.

Nos remerciements s'en vont également à **M. Samir FAEZ, M. Abdelwahab SMINI** et **M. Mohammed OUZZINE**, qui ont déployé leur affection et toute leur assistance logistique et scientifique pour mener à bien cette expérience.

Résumé

Sur des marchés aussi complexes que ceux d'aujourd'hui, la transparence est un atout crucial. En effet, l'évaluation à la juste valeur assure une valorisation très transparente des titres à taux fixe ou variable, et nous aide à respecter les nouvelles normes comptables.

Ce travail procède d'abord à l'évaluation de la valeur de marché de l'actif qui est composé d'obligation et d'action. Étant donné l'aspect pragmatique des objectifs visés, l'analyse est centrée sur deux importants problèmes d'ordre pratique : le problème de l'estimation (le choix du meilleur modèle pour représenter la courbe de rendement et de la méthode d'optimisation des paramètres) et le problème du choix des données (c'est-à-dire la sélection d'un échantillon approprié parmi les données du marché). Les résultats obtenus à partir de chacun des modèles envisagés sont évalués en fonction de leur robustesse et de l'adéquation statistique.

Au niveau démographique, il faut alors probabiliser ces flux actualisés à l'aide d'une table de mortalité prospective jouant ainsi le rôle de « best estimate » de la mortalité attendue de l'affilié.

Ensuite, des simulations stochastiques des taux d'actualisation et des taux de mortalité permettent d'évaluer la précision des valeurs du marché des provisions techniques et de l'actif ainsi obtenus, et le risque pris par l'assureur. Un chargement de sécurité adéquat peut être appliqué en fonction de la marge d'erreur.

Enfin, à partir de la modélisation des postes de l'actif et du passif du bilan d'une compagnie d'assurance-vie, les outils de gestion actif-passif tels que l'analyse des gaps et la duration, ont pu être implémentés de manière concrète pour une compagnie d'assurance.

Mots clés :

Fair value, Normes IFRS, MASI, Taux zéro coupon, Lee and Carter, Boostrap, Modélisation de l'actif, Modélisation du passif, Participation aux bénéfices, Valeur de marché, Stratégie de réinvestissement.

Abstract

In today's complex markets, transparency is a crucial asset. Indeed, fair value provides a very transparent valuation of securities with fixed or variable rate, and helps us comply with new accounting standards.

This work will first carry out an assessment of asset's market value which is composed of bonds and equities. The analysis focuses on two important practical problems: the problem of estimation (choosing the best model to represent the yield curve and the method of parameter optimization) and the problem of data selection (ie selecting an appropriate sample of market data). The results obtained from each of the models considered are evaluated on their robustness and statistical adequacy.

Demographically, it is sufficient to give a probability for these cash flows with a prospective mortality table playing the role of "best estimate" of the expected mortality of the affiliate.

Then, simulations of the stochastic discount rate and mortality rates are used to assess the accuracy of market values of liabilities and assets obtained, and the risk taken by the insurer. A security loading rate, in terms of the error margin may be applied.

Finally, from the modeling of asset and liabilities of a life insurance company, the tools of asset-liability management, such as the analysis of gaps and duration, could be implemented in a concrete way for an insurance company.

Key words :

Fair value, IFRS, MASI, Interest rates, Lee and Carter, Boostrap, Modeling of assets, liabilities Modeling, share in profits, market value, reinvestment strategy.

Table des matières

Dédicace **2**

Remerciment **3**

Résumé **4**

Mots clés **4**

Abstract **5**

Table des matières **6**

Liste des abréviations **10**

Liste des tableaux **11**

Liste des figures ***12***

Introduction générale ***14***

Partie I : Contexte général ***17***
Chapitre I : Généralités et présentations ***18***
I.1 Présentation de l'organisme d'accueil: DELOITTE ***19***
I.2 Présentation de la spécificité de l'assurance vie ***21***
II. Les gains statutaires ***22***
III.Les bases techniques de l'assurance vie ***23***
III.1 Les chargements ***23***
III.2 Les primes d'assurance sur la vie ***24***
III.3 Les provisions mathématiques ***24***
III.4 Rachat du contrat avant terme ***25***
III.5 Participation aux bénéfices ***25***
III.6 Compte de resultat ***26***

Chapitre II : Normes comptables afférentes aux entreprises d'assurances ***28***
I. Normes IAS/IFRS ***29***
I.1 Généralités sur les normes IFRS ***29***
I.2 Définitions ***30***
I.3 Normes afférentes à l'assurance ***30***
II. Concept de la « juste valeur » dans les modèles théoriques ***48***
III. Convergence entre Solvabilité II et IFRS ***40***
III.1 L'actif ***40***
III.2 Le passif ***40***
III. Présentation du Bilan sous Solvabilité II & IFRS phase II ***41***
III.1 L'actif ***42***
III.2 Le passif ***43***

Partie III : Modélisation de l'actif 46
Chapitre III : Modélisation du taux sans risque du marché 47
I. La méthode de Nelson Siegle 48
II. Le modèle de Sevenssen 49
III.Les étapes d'estimation des paramètres des modèles utilisés 49
IV.Les résultats des différents modeles d'estimation 50
IV.1 Le modèle de Nelson Siegle 50
IV.2 Le modèle de Sevenssen 53
V. Modèle retenu 56
VI.Modèle Vasicek 57
VI.1 Autres modèles stochastiques des taux d'intérêts 58
VI.2 Processus de Wiener 59
VI.3 Estimation du modèle de Vasicek 60
VI.4 La stratégie de Dickey Fuller 67
VII.Modelisation du taux d'interet 71
VII.1 La dynamique des taux court termes 72
VIII.Structure de taux et problème de prime de risque du marché 75
VIII.1 Prime de risque nulle 76
VIII.2 Prime de risque estimée 79
IX. Simulation des valeurs futures du fonds d'obligation 82

Chapitre IV : Modélisation de l'action 83
I. Les indices boursiers 84
I.1 MASI 84
I.2 MADEX 84
II.Présentation et analyse des données 85
II.1 Présentation des données 85
II.2 Analyse des données 87
II.3 Modélisation de l'action 94

Partie IV : Modélisation du passif 96
Chapitre V : Etude des tables de mortalité 97
I. Table de mortalité 98
II. Outils statistiques 98
II.1 Probabilité de survie et de décès 99
II.2 Espérence de vie 99
II.3 Nombre de commutation 100
III.Comparaison démographique des tables de mortalité 100
III.1 Présentation des tables 100
III.2 Etudes démographiques 101
IV.Approches critiques des nouvelles tables de mortalité 102
IV.1 Analyse des principaux indicateurs demographiques 104
IV.2 Analyse des déterminants de la mortalité 105
V.Modèle stochastique de taux de mortalité 105
V.1 Les données utilisées 106
V.2 Le modèle de Lee-Carter 106

Chapitre VI : Modélisation des taux de rachat et de décès 113
I. Construction des tables d'experience 114
II. Modèle du taux de rachat 115
II.1 Le modèle de rachat 115

II.2 Test de normalité 117
III.Les flux du passif 119

Chapitre VII: Modélisation de la participation aux bénéfices et valorisation du contrat 123
I. Le contrat d'assurance de base 124
I.1 Les acteurs de marché d'assurance 124
I.2 Les garanties du contrat d'assurance 125
I.3 Paiement à maturité 127
I.4 Défaut précoce de la compagnie 129
I.5 Le droit des assurés 132
I.5 Le droit des actionnaires 133
II. Valorisation de l'engagement envers les assurés 135
II.1 Valeur du contrat sous la mesure risque neutre 135
II.2 Méthode d'évaluation 139
II.3 Etude numérique 141

Partie V : Valeur de marché et stratégie de reinvestissement 145
Chapitre VIII : Valeur de marché de l'actif et des provisions techniques 146
I. Valeur de marché de l'actif 147
I.1 Rendement de l'actif 147
I.2 Résultat 148
II. Valeur de marché des provisions 149
II.1 Best Estimate 149
II.2 Marge de risque 150
II.3 Valeur de marché de l'actif et des provisions 151
III.Determination du capital de solvabilité 151
III.1 Mesure de risques 152
III.2 Les différentes méthodes d'estimation de la VaR 153
III.3 Deux définitions de la ruine 154
III.4 Approche de Boostrap 155

Chapitre IX : Exigence en capital sous solvabilité II 157
I. Concept de Solvabilité II 158
II. Les objectifs pour Solvabilité II 158
III. Les deux phases de travail de solvabilité II 158
IV. Les trois piliers de Solvabilité II 159
IV.1 Pilier 1 : Les exigences quantitatives en capital 159
IV.2 Pilier 2 : Le contrôle 159
IV.3 Pilier 3 : L'information aux marché 160
V. Pilier 1 : provisions techniques et besoin en capital 160
VI.1 Estimation des provisions techniques 160
VI.2 Estimation du besoin en capital 160
VI. Les études quantitatives d'impact QIS 161
VII.Schématisation des différents risques encours 162
VIII.Principe d'évaluation 162
XI.Provisions techniques 163
XI.1 Best Estimate 164
XI.2 Marge de risque 164
X.Capital minimum de risque MCR 166
X.1 Définitions 166
X.2 Calcul des MCR par type de risque 167
XI.Capital de solvabilité requis : formule standard 169

XI.1 SCR de Base 169
XI.2 Risque oppérationnel 170
XI.3 Risque de souscription 171
XI.4 Modélisation du risque de marché 174

Chapitre X : Analyse des gaps et stratégie de reinvestissement 179
I. Définition de la problématique 180
II. Détermination des cash flows et des gaps 180
II.1 Le portefeuille de contrat d'assurance 180
II.2 Le portefeuille obligataire représentatif 181
II.3 Le portefeuille obligataire constitué par les réinvestissements 182
III. Stratégie de réinvestissements en obligation d'Etat 183
III.1 Les flux 183
III.2 L'évolution du bilan 183
III.3 Rendement des placements et value at risk 185
IV. Modèle de Markowitz 187
IV.1 Présentation du modèle de Markowitz 187
IV.2 Application du modèle de Markowitz 189
V. Stratégie de réinvestissements en obligation d'état et en actions 190
VI.1 Flux 190
VI.2 L'évolution du bilan 192

Conclusion générale 196

Annexes 198

Glossaire 223

Bibliographie et Webographie 227

IFRS	International Financial Report Standards
IASB	International Accounting Standards Board
MCR	Minimum Capital Requirement
SCR	Solvency Capital Requirement
ANR	Actif Net Réévalué
EV	Embedded value
BE	Best estimate
TRA	Taux de Rendement des Actifs
TSR	Taux de sortie par Rachat
CF	Les Cash flows
VAR	Value At Risque
PB	Participation aux bénéfices
CEIOPS	Comitee of European Insurance and Occupational Pensions Supvisors.
QIS	Les études quantitatives d'impact
CIMR	Caisse Interprofessionnelle Marocaine de Retraite
CC	Coût de capital
DUR_{mod}	Duration modifiée
PT	Provisions Techniques
q	Taux de décès moyen
TIAP	Titres immobilisés de l'activité du portefeuille
VM	Valeur du marché
T_{rachat}	Taux du rachat
T_{sortie}	Taux de sortie en capital
MR	Marge de risque
ALM	Asset and Liability Management
ACF	Autocorrelation function
AR	Autorégressif
BDT	Bons du trésor
DW	Durbin-Watson

Liste des tableaux

Tableau 1 *: Comptabilisation des actifs financiers selon IAS 39 35*
Tableau 2 *: Actif selon IFRS & Solvabilité II 43*
Tableau 3 *: Passif selon IFRS & Solvabilité II 44*
Tableau 4 *: les paramètres estimès du modéle standard 51*
Tableau 5 *: Les paramètres estimès du moséle standard 53*
Tableau 6 *: Les paramètres estimès du modéle Svenssen standard. 54*
Tableau 7 *: Les paramètres estimès du modéle Svenssen extension. 55*
Tableau 8 *: Modèles stochastiques des taux d'intérêt 58*
Tableau 9 *: Statistiques résumant du taux 61*
Tableau 10 *: Application du test de Shapiro - Wilk sur les résidus 67*
Tableau 11 *: Taux zéro-coupon du marché. 77*
Tableau 12 *: Taux zéro-coupon théoriques 77*
Tableau 13 *: Statistiques descriptives : 78*
Tableau 14 *: Test d'adéquation 79*
Tableau 15 *: Test d'adéquation 81*
Tableau 16 *: Statistiques descriptives 88*
Tableau 17 *: Le test de Shapiro-Wilk pour des résidus de taux de rachat 119*
Tableau 18 *: Le test de Jarque-Bera pour des résidus de taux de rachat 119*
Tableau 19 *: Simulation de flux de passif sur les 40 ans en DH 122*
Tableau 20 *: Données relatives aux marchés financiers 141*
Tableau 21 *: Données relatives aux marchés de l'assurance 141*
Tableau 22 *: Valeur des Ei des sous contrats du contrat 144*
Tableau 23 *: Valeurs de la variable perte (ou gain) obtenues pour dix scénarios 156*
Tableau 24 *: La matrice de corrélation entre les risques de souscription et de marché. 170*
Tableau 25 *: La matrice de corrélation entre les risques de mortalité, longévité, et rachat 171*
Tableau 26 *: La matrice de corrélation entre le risque d'actions et le risque de taux. 174*
Tableau 27 *: Structure des chocs de taux d'intérêt pour différentes échéances t 176*
Tableau 28 *: Flux issus des cotrats d'assrances 181*
Tableau 29 *: Flux issus du portefeuille obligataire initial, existant au 31 décembre 2008. 182*
Tableau 30 *: Détail du calcul de réinvestissement de l'année 2009 183*
Tableau 31 *: Détail du calcul de réinvestissement de l'année 2010 183*
Tableau 32 *: Détail du calcul de réinvestissement de l'année 2009 184*
Tableau 33 *: Détail des montants à réinvestir 184*
Tableau 34 *: Comparaison du portefeuille obligataire total et du montant requis 186*
Tableau 35 *: Détail des montants à réinvestir chaque année 192*
Tableau 36 *: Comparaison des portefeuilles obligataire total, d'actions et des provisions 193*
Tableau 37 *: Values at risk pour la valeur du portefeuille d'action 194*

Liste des figures

Figure 1 *: Un partnership expérimenté et riche de sa diversité* ____ *19*
Figure 2 *: Evolution des effectifs* ____ *19*
Figure 3 *: La distribution de nos clients* ____ *20*
Figure 4 *: Evaluation des instruments financiers* ____ *37*
Figure 5 *: La structure par terme zéro estimé par le modèle Nelson Siegel standard* ____ *52*
Figure 6 *: La structure par terme zéro estimé par le modèle Nelson Siegel extension* ____ *53*
Figure 7 *: La structure par terme zéro estimé par le modèle Svenssen standard* ____ *54*
Figure 8 *: La structure par terme zéro estimé par le modèle Svenssen extension* ____ *56*
Figure 9 *: Evolution du Taux obligataire* ____ *60*
Figure 10 *: Corrélogramme du taux obligataire* ____ *62*
Figure 11 *: Estimation des paramètres de Modèle.* ____ *63*
Figure 12 *: Diagramme de dispersion des résidus* ____ *63*
Figure 13 *: Corrélogramme des résidus* ____ *64*
Figure 14 *: Test de Jarque-Bera sur les résidus* ____ *66*
Figure 15 *: Test de Dickey Fuller sur le taux obligataire* ____ *68*
Figure 16 *: Estimation des paramètres du Modèle* ____ *69*
Figure 17 *: Evolution du taux réel et le taux estimé* ____ *69*
Figure 18 *: Diagramme de dispersion des résidus* ____ *70*
Figure 19 *: Corrélogramme des résidus* ____ *70*
Figure 20 *: Les diagrammes de Q-Q plot et P-P plot pour les résidus* ____ *71*
Figure 21 *: Comparaison entre les taux obligataires réel et estimé* ____ *75*
Figure 22 *: Courbe du taux théorique et du taux du marché.* ____ *78*
Figure 23 *: Estimation de λ avec la méthode des moindres* ____ *80*
Figure 24 *: Prime de risque estimée* ____ *80*
Figure 25 *: Les courbes des taux zéro-coupon théorique et taux zéro-coupon du marché* ____ *81*
Figure 26 *: Evolution stochastique du fonds d'obligation* ____ *82*
Figure 27 *: Evolution des cours de MASI* ____ *85*
Figure 28 *: Représentation de la série des données des rendements de MASI* ____ *86*
Figure 29 *: Test de racine unitaire* ____ *87*
Figure 30 *: Corrélogramme des rendements journaliers* ____ *89*
Figure 31 *: Rentabilité mensuelle sur la période 1999-2009* ____ *90*
Figure 32 *: Statistiques descriptives des rendements mensuels* ____ *91*
Figure 33 *: Modélisation des rendements boursiers par une loi normale* ____ *92*
Figure 34 *: Estimation des paramètres μ_s et σ_s* ____ *95*
Figure 35 *: Evolution stochastique du fonds d'action* ____ *95*
Figure 36 *: Comparaison des tables décès (TD 88-90 et PM 60-64)* ____ *101*
Figure 37 *: Comparaison des tables vie (TV 88-90 et PF 60-64)* ____ *102*
Figure 38 *: Comparaison des tables décès selon l'espérance de vie* ____ *103*
Figure 39 *: Comparaison des tables vie selon l'espérance de vie* ____ *103*
Figure 40 *: Indicateurs démographique Maroc/France* ____ *104*
Figure 41 *: Evolution des Alpha suivant l'âge* ____ *108*
Figure 42 *: Evolution des Bêta suivant l'âge* ____ *109*
Figure 43 *: Extrapolation de la composante temporelle* ____ *109*

Figure 44 *: Diagramme P-P plot gaussien* _____ *110*
Figure 45 *: Analyse de l'erreur en fonction de l'âge* _____ *112*
Figure 46 *: Projection de taux du quotient de mortalité en utilisant Lee carter* _____ *114*
Figure 47 *: Projection de taux du quotient de mortalité en utilisant Lee carter* _____ *115*
Figure 48 *: Ajustement polynomiale de taux de rachat* _____ *116*
Figure 49 *: Le diagramme P-P plot des résidus de taux de rachat* _____ *118*
Figure 50 *: Répartition des réserves mathématiques selon l'âge* _____ *120*
Figure 51 *: Répartition des réserves mathématiques selon l'ancienneté* _____ *121*
Figure 52 *: Projection de flux de passif sur les 40 ans* _____ *122*
Figure 53 *: Bilan en t = 0* _____ *124*
Figure 54 *: Pay-off final des assurés* _____ *128*
Figure 55 *: Paiement à maturité des assurés* _____ *129*
Figure 56 *: Illustration de la barrière réglementaire pour* $\lambda \geq 1$ _____ *131*
Figure 57 *: Illustration de la barrière réglementaire pour* $\lambda < 1$ _____ *132*
Figure 58 *: Pay-off final des actionnaires* _____ *134*
Figure 59 *: Valeur du contrat en fonction du taux de participation* _____ *142*
Figure 60 *: Valeur du contrat en fonction du taux technique* _____ *143*
Figure 61 *: L'évolution de la valeur de marché de l'actif en dirham* _____ *149*
Figure 62 *: Projection des éléments constiuant les provisions techniques en dirham* _____ *151*
Figure 63 *: Les trois piliers de solvabilité II* _____ *159*
Figure 64 *: Cartographie des risques en assurance vie sous Solvabilité II.* _____ *162*
Figure 65 *: Evaluation économique des actifs et des passifs* _____ *163*
Figure 66 *: Flux des contrats d'assurance* _____ *181*
Figure 67 *: Flux issus du portefeuille obligataire initial, existant au 31 décembre 2008* __ *182*
Figure 68 *: Décomposition du montant à réinvestir* _____ *185*
Figure 69 *: Comparaison du portefeuille obligataire total et du montant requis* _____ *186*
Figure 70 *: La frontière efficiente du portefeuille* _____ *190*
Figure 71 *: détail des moments à réinvestir* _____ *192*
Figure 72 *: Comparaison des actifs et des passifs* _____ *194*

Les compagnies d'assurance-vie offrent une multitude de contrats contenant des clauses plus ou moins complexes. La garantie d'un taux de rendement minimum, la possibilité d'un remboursement anticipé et les clauses de participation aux bénéfices sont des exemples de telles clauses apparaissant dans des polices standards.

Ces clauses sont souvent appelées options cachées. En effet, elles se décrivent à l'aide de la théorie des options, mais pendant longtemps elles ont été négligées. Ces éléments d'option, implicites dans de nombreux contrats, sont des engagements des assureurs envers les assurés apparaissant au passif. Chaque convention particulière a donc une valeur et doit être valorisée. Ceci a participé aux difficultés rencontrées par de nombreuses compagnies dans ces dernières années[1].

Au sujet de la garantie de taux d'intérêt, il faut savoir que la plupart des polices contiennent une garantie explicite : « le compte du preneur d'assurance sera crédité sur base annuelle avec un taux de rendement qui est au moins égal à un taux garanti fixe » est appelé taux technique. A l'émission des contrats, le taux technique était typiquement plus faible que les taux d'intérêt en vigueur sur les marchés financiers, un fait qui a conduit les compagnies à ignorer leur valeur de même que leur risque.

Les taux de marché n'ont pas cessé de décroître et dans laquelle les taux techniques sont restés au même niveau, ce qui a pour conséquence une réduction de la rentabilité des compagnies d'assurance. Les autorités de contrôle ont répondu à cette menace de solvabilité due aux garanties de rendement en diminuant les taux d'intérêt maximums qui peuvent légalement être garanti aux assurés[2].

Les compagnies ont ainsi été forcées de diminuer le taux technique sur les nouveaux contrats. En conséquence, les portefeuilles des compagnies d'assurance vie contiennent plusieurs générations de polices avec différents taux garantis. Ceci soulève la question

1 Pour une présentation et une discussion détaillée des problèmes rencontrés par le secteur d'assurance vie pendant la période allant de la fin des années 1980 jusqu'aux années 1990 et des causes de ces événements, le lecteur peut se référer par exemple à Briys & de Varenne (1994, 1997) ou Grosen & Jørgensen (2000, 2002).

2 En particulier, l'article 18 de la troisième directive de l'Union Européenne au sujet de l'assurance vie, qui était effective le 10 novembre 1992, demande que les garanties de taux d'intérêt ne dépassent pas 60 % du taux de rendement des dettes gouvernementales (de maturité non spécifiée) (Voyez à ce sujet Grosen & Jørgensen (2000)).

d'éviter un traitement inéquitable entre les différentes classes d'assurés surtout en matière d'attribution de la participation aux bénéfices.

L'approche habituelle pour attribuer les participations aux bénéfices consiste à créditer tous les contrats avec un taux identique, supérieur ou égal au taux technique le plus élevé. Cette manière de faire augmente le risque de défaut d'un business qui est déjà dans de mauvais draps. Clairement, le chemin correct vers une attribution juste des surplus parmi des classes de polices inégales passe par une valorisation de marché des différentes clauses – un point essentiel de ce travail.

Ceci explique les raisons pour lesquelles le sujet de la valorisation juste des passifs d'assurance a attiré beaucoup d'attention dans la littérature au cours des dernières années. La valorisation de marché, appelée fair value dans la littérature anglophone, est comprise au sens d'une tarification en l'absence d'opportunités d'arbitrage. Les contrats d'assurance vie sont considérés comme des produits financiers vendus et achetés sur un marché financier liquide parmi des investisseurs parfaitement informés. Ce fait est pris comme une hypothèse fondamentale dans ces études, et c'est l'hypothèse de base que nous faisons dans ce travail. Notez que l'idée de fair pricing tend à s'installer avec les normes comptables IFRS.

Ce travail est structuré de la manière suivante :

- La première partie introduit le contexte général de notre stage en donnant d'abord un aperçu sur l'organisme d'accueil, ensuite nous allons essayer de comprendre les gains statutaires en rappelant les bases techniques de l'assurance vie. Et enfin, nous allons mettre à jour quelques référentiels théoriques et conceptuels sous-jacents à la notion de juste valeur.

- La deuxième partie modélise l'actif qui est composé d'obligations et d'actions. en présentant dans un premier temps la dynamique retenue pour le taux court terme, à savoir le modèle de Vasicek, nous allons dans un deuxième temps présenter la construction de la courbe des taux initiale à partir des données de marché. La construction de la courbe initiale se fera à partir des taux interbancaires .Dans un troisième point, nous estimerons les paramètres de la dynamique du taux via les données de marché. Enfin dans un dernier temps, nous expliquerons la manière dont sont générés les taux futurs.

- A La troisième partie, nous modélisons le passif en estimant le taux de décès et de rachat. Pour cela, dans un premier temps, nous allons présenter les outils statistiques pour élaborer une table de mortalité puis nous allons procéder à une étude démographique en comparant les anciennes et les nouvelles tables. Dans un deuxième temps, nous allons passer à la modélisation stochastique de la table de mortalité en utilisant le modèle de Lee Carter qui nous octroie la possibilité de construire des tables prospectives tenant en compte et l'âge et le temps. Dans un troisième temps, nous allons tracer l'évaluation du passif du portefeuille CIMR moyennant la modélisation des taux de sortie par l'approche déterministe en premier lieu et ensuite l'approche stochastique qui nous permettra de mesurer le terme d'erreur. Dans un quatrième temps, nous allons traiter la modélisation de la participation aux bénéfices. Pour ce fait nous avons choisi un modèle qui s'inspire de celui introduit par Briys & de Varenne (1997a). Enfin dans un dernier temps nous allons essayer de modéliser la best estimate des provisions techniques et d'appliquer l'approche de Bootstrap afin de mesurer la ruine.
- Après avoir déterminé la valeur du marché de l'actif et du passif, la dernière partie essaye de déterminer les capitaux de solvabilité selon l'approche standard et selon le risque requis, pour calculer la marge de risque qui nous permettra d'analyser le profil des cash flows futurs en confrontant deux stratégies de réinvestissements : Il s'agit de déterminer, à l'aide du modèle de Markowitz, le portefeuille optimum pour un réinvestissement en obligations d'Etat uniquement ou un réinvestissement combiné entre les actions et les obligations.

– Partie I –

Contexte général

- Généralités et présentations
- Normes comptables afférentes aux entreprises d'assurances

CHAPITRE 1

Généralités et présentations

L'assurance est avant tout une affaire de confiance. En effet, l'assuré paie un montant (la prime) et reçoit en échange la promesse que l'assureur paiera si un sinistre survient. Cette promesse, ou garantie, ne se matérialise que si un sinistre survient à une époque future. Ce mécanisme par lequel l'assuré paie d'abord et reçoit le "produit" après, dénommé inversion du cycle de production, a des conséquences à la fois sur la situation financière de la compagnie et sur le degré de connaissance qu'elle a de ses engagements.

Ce chapitre peut être réparti en deux grandes parties :

En effet, dans un premier temps, nous allons présenter l'organisme d'accueil : DELOITTE et la spécificité de l'assurance vie.

Dans un deuxième temps, nous allons essayer de comprendre ses gains statutaires en rappelant les bases techniques de l'assurance vie.

I. Présentations :

I.1 Présentation de l'organisme d'accueil : DELOITTE :

Deloitte est l'un des leaders mondiaux de l'audit et des services professionnels. En effet, DELOITTE forme une équipe expérimentée et dispose d'une expertise sectorielle reconnue.

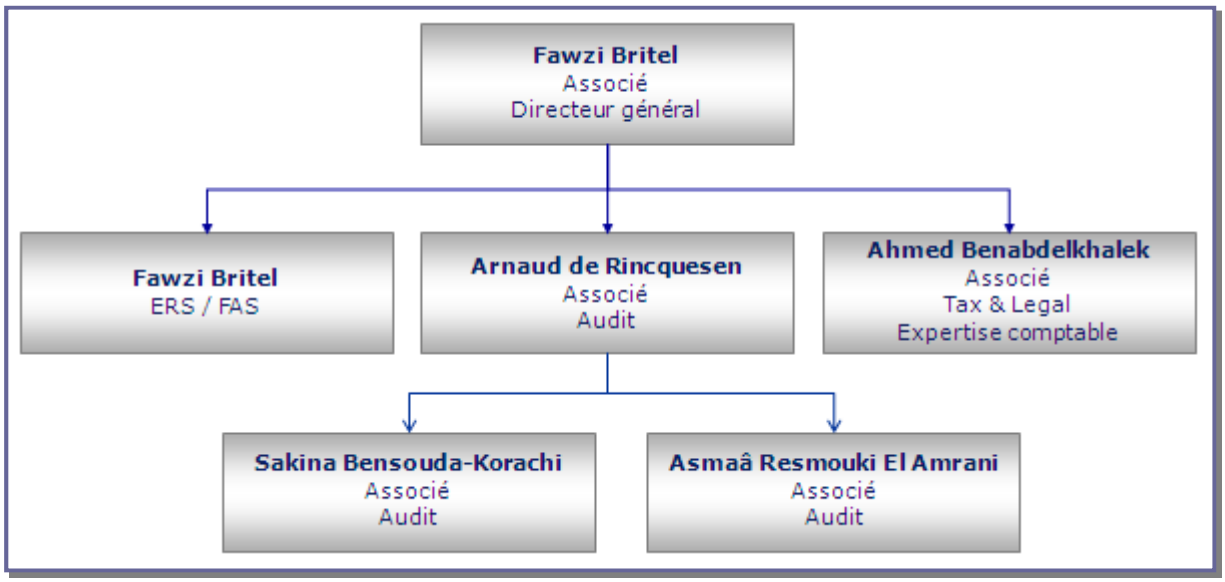


Figure 1 : Un partnership expérimenté et riche de sa diversité

Les effectifs de Deloitte Maroc ont doublé entre 2003 et 2008 passant de 53 à 110. En 2008-2009 le nombre de jours de formation atteindra 1.150

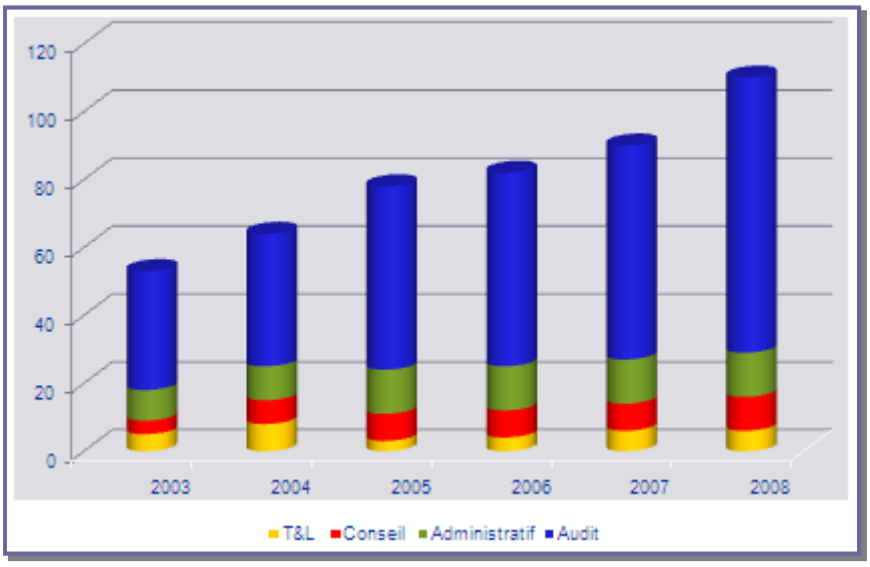


Figure 2 : E**volution des effectifs**

Implanté au Maroc depuis 1994, Deloitte est membre du réseau international de Deloitte, leader mondial des métiers d'Audit et de Conseil.

La diversité des missions et des clients, le dynamisme et les relations de confiance tissées au plus haut niveau sont parmi les caractéristiques les plus attrayantes de la firme marocaine

Deloitte est placé dans les premiers cabinets d'audit et de conseil au Maroc. En effet, elle dispose d'une répartition équilibrée avec un renforcement de la position au Maroc (les sociétés marocaines représentent 62 % du CA des vingt premiers clients).

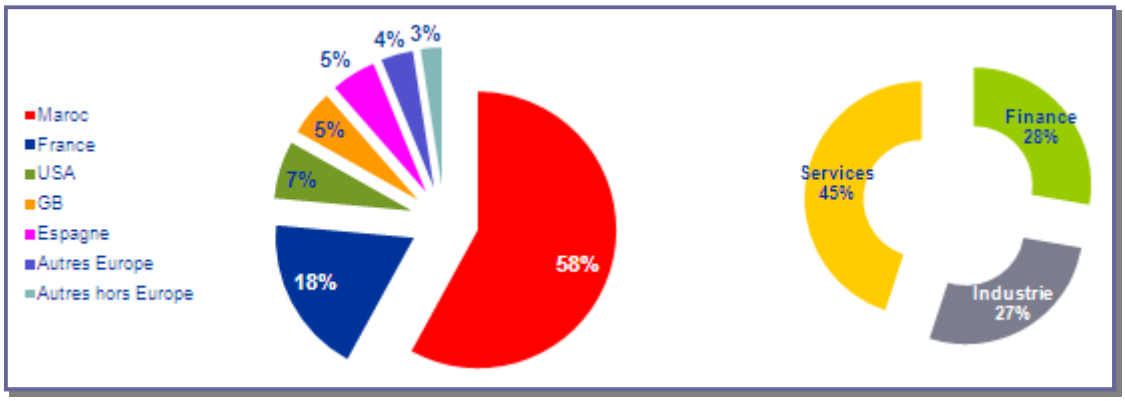


Figure 3 : La distribution de nos clients

Historique de Deloitte :

L'histoire de Deloitte au Maroc est indissociable de celle de la Firme internationale, née de la vision d'hommes ayant repoussé les limites de leur métier: accompagner leurs clients dans toutes les étapes de leur développement.

Créée au mois d'octobre 1994, le cabinet d'audit Deloitte & Touche Maroc voit le jour à l'initiative de Deloitte & Touche France et devient affilié au réseau international de Deloitte, leader mondial des métiers d'audit et de conseil.

Souhaitant offrir à ses clients des services complémentaires et répondant aux exigences des dirigeants marocains et étrangers, Deloitte & Touche se rapproche, à partir de 1997, au cabinet marocain Cardex-Auditors dirigé alors par deux experts comptables : MM. Fawzi Britel et Ahmed Benabdelkhalek. Ce rapprochement va aboutir à une association conclue début 1999 et permettra à l'ensemble nouvellement crée de connaître un développement exceptionnel et un ancrage structurel dans le contexte économique marocain.

La diversité des missions et des clients, le dynamisme et les relations de confiance tissées au plus haut niveau sont parmi les caractéristiques les plus attrayantes de notre la firme marocaine.

En 2003, suivant la décision de la firme internationale de Deloitte Touche Tohmatsu, la firme marocaine simplifie sa marque et devient « Deloitte ».

Deloitte aujourd'hui

En conformité avec l'environnement réglementaire et dans le respect des engagements pris envers ses clients et le marché, Deloitte a mis en place une organisation recentrée aussi bien sur les métiers de la sécurité et de l'information financière que sur ceux relatifs à l'adaptation et au développement de la performance des entreprises. En effet, elle répond aux exigences accrues de ses clients en matière :

- d'audit, de contrôle interne et sécurité financière et de risk management ;
- de conseil en Corporate Finance ;
- de conseil en organisation, systèmes d'information ;
- de conseil juridique et fiscal ;
- d'expertise comptable ;
- de service d'actuariat :

  - Actuariat Protection sociale :

    - Evaluation du passif social
    - Pilotage et réforme des caisses de retraite et des mutuelles maladie

  - Actuariat Vie et Non Vie :

    - Evaluation d'activités, Embedded Value, ALM, Etude de rentabilité,
    - Certification des provisions techniques
    - Rapport de solvabilité
    - Conversion aux normes IFRS

  - Allocation et gestion d'actifs
  - Conseil stratégique
  - Mise en place, audit et optimisation des couvertures d'assurance de personnes et dommages
  - Etude et élaboration de programmes d'assurance en cohérence avec les objectifs de la société : Montant, seuil de déclenchement, …
  - Conception de produits d'assurance.

I.2 Présentation de la spécificité de l'assurance vie :

L'assurance vie est toute opération d'assurance comportant des engagements dont l'exécution dépend de la durée de vie humaine.

Dans la mesure où certaines éléments sont aléatoires (décès ou survie de l'assuré, date de décès), l'opération d'assurance ne peut être considérée comme une simple opération bancaire.

L'assurance vie est un contrat forfaitaire (à la différence des contrats d'assurance dommages qui sont des contrats indemnitaires) : le capital assuré n'est pas évalué en fonction du dommage éventuel, mais fixé par avance par l'asuré en appréciant librement son risque et en fonction de ses propres ressources.

Certes, l'assurance vie est une assurance de personnes qui a pour objet de couvrir les risques attachés à la durée de leur vie et garantir le versement d'une certaine somme d'argent en rente ou en capital lorsque survient un évènement lié à l'assuré. Ces risques sont pris en charge par un organisme spécialisé, le plus souvent une compagnie d'assurance, qui les mutualise dans un ensemble suffisamment étendu d'opérations similaires, de manière à ce que la loi des grands nombres puisse être appliquée.

Il est à noter que seulement deux risques sont possibles : le décès et la survie. Et c'est à partir de la couverture de ces deux risques que l'assureur élabore toute une gamme de produits.

II. Les gains statutaires :

La législation de surveillance des institutions d'assurances privées détermine le système de financement et les principes d'après lesquels une compagnie d'assurances vie doit établir ses résultats et ses bilans. Les gains statutaires se déduisent du compte de pertes et profits.

Ils ne reflètent pas la vraie performance financière d'une compagnie pendant une période donnée, mais sont plutôt liés à la capacité de l'entreprise de continuer ses opérations : ils déterminent sa solvabilité. En effet, les gains statutaires sont liés au système de financement des compagnies d'assurances. Le "système de capitalisation", dans lequel l'assureur doit pouvoir disposer des moyens des prestations futures, fonctionne en principe de la manière suivante: les prestations de chaque assuré sont couvertes individuellement par ses propres provisions mathématiques.

Souvent les commissions et autres frais d'acquisition sont immédiatement amortis. Ainsi, la production d'affaires nouvelles fournit une perte comptable la première année, suivie d'une série de gains. Le fait d'amortir immédiatement les frais d'acquisition des nouvelles affaires, sans prendre en considération les gains futurs de ces nouvelles affaires, est approprié pour l'examen de la solvabilité, mais fausse l'information sur la performance de la compagnie

d'assurances. Ainsi, une compagnie d'assurances vie en pleine expansion produit, en général, des gains statutaires plus médiocres qu'une compagnie d'assurances vie en stagnation.

La solvabilité correspond au droit des assurés de pouvoir prétendre aux prestations convenues dans le contrat, en cas de cessation des activités de la compagnie d'assurances. Pour satisfaire à l'exigence de solvabilité, les réserves sont calculées avec des marges de sécurité. Evidement, ces marges de sécurité sont en contradiction avec le principe de profitabilité maximale à court terme dans la comptabilité financière. Les gains statutaires proviennent donc d'hypothèses conservatrices dues au besoin de solvabilité.

Pour mieux comprendre ce gain rappelons les bases techniques de l'assurance vie.

III. Bases techniques de l'assurance vie :

Les bases techniques de l'assurance vie reposent sur le « principe d'équivalence » qui impose l'égalité entre l'espérance de la valeur actuelle des prestations assurées d'une part, et l'espérance de la valeur actuelle des primes pures (c'est-à-dire avant chargements) qui seront payées d'autre part.

Deux facteurs interviennent dans les opérations d'assurance sur la vie :

- ***Le taux d'intérêt technique*** *:* C'est le taux d'intérêt sur la base duquel on calcule les valeurs actuelles des prestations et des primes.
- ***La mortalité :*** Pour déterminer la probabilité de décès ou de survie de l'assuré, on utilise une table appelée table de mortalité (construction permettant de suivre le nombre de décès, les probabilités de décès ou de survie selon l'âge et le sexe).

La table de mortalité indique, pour une population statistique initiale donnée, le nombre de survivants année par année, jusqu'à extinction totale de la population observée.

Le fonctionnement des compagnies d'assurance sur la vie au Maroc relève du Code des Assurances. En vertu de celui-ci, les compagnies sont contraintes d'utiliser des tables réglementées à savoir : la TD 88-90, la TV 88-90, la TPRV 93 et la PF 60-64.

III.1 Les chargements:

Les frais encourus par une compagnie sont classés en trois types :

- ***Les frais de gestion*** encourus tout au long de la durée de vie des contrats (gestion financière des actifs représentant les provisions, calcul et

attribution des participations aux bénéfices…). Chaque contrat contribue ainsi à la formation des frais généraux de la compagnie.

- ***Les frais d'acquisition*** encourus à l'occasion ou avant la souscription des contrats (rémunération des intermédiaires qui apportent les contrats, impression des brochures présentant les assurances proposées…).
- ***Les frais d'encaissement des primes*** (confection et expédition des avis d'échéance, commissions payées aux intermédiaires sur les primes perçues).

III.2 Les primes d'assurance sur la vie :

Dans la prime payée par le souscripteur, appelée prime commerciale, l'assureur distingue une prime pure et des chargements.

Sur un grand nombre de contrats, l'assureur espère équilibrer ses frais de gestion avec l'ensemble des chargements et les prestations garanties avec l'ensemble des primes pures.

Il existe trois niveaux de primes :

- ***La prime pure:*** établit l'égalité, à la souscription du contrat, entre la valeur actuelle probable des engagements de l'assureur et la valeur actuelle probable des engagements de l'assuré, hors considération des frais inhérents au contrat. C'est la contrepartie de la prestation assurée.
- ***La prime d'inventaire :*** égale à la prime pure augmentée d'un chargement de gestion. Elle correspond donc au besoin de l'assureur pour couvrir le risque et gérer cette couverture jusqu'au terme du contrat, en intégrant le cas échéant la charge de la gestion des primes périodiques.
- ***La prime commerciale:*** qui en plus des éléments figurant dans la prime d'inventaire contient encore des chargements pour frais d'acquisition et frais d'encaissement de primes.

III.2 Les provisions mathématiques :

L'assurance vie étant une branche dans laquelle les principaux contrats sont de longue durée, il faut attendre longtemps avant de connaître le résultat définitif d'une souscription.

Les provisions mathématiques sont un outil indispensable pour établir des comptes annuels réalistes. Les compagnies d'assurance sur la vie établissent chaque année un bilan comptable. Dans le passif de ce bilan, figure un poste très important appelé « provisions

mathématiques ». Ce poste reprend la valeur actuelle de l'engagement futur probable de l'assureur.

Comme pour les primes, il existe trois niveaux de provisions mathématiques :

- ***Provision mathématique pure*** *:* constitue la différence entre la valeur actuelle des engagements de l'assureur pour tous les contrats en cours et la valeur actuelle des primes à recevoir au titre des mêmes contrats (la prime pure est calculée selon le principe d'équivalence).
- ***Provision mathématique d'inventaire*** *:* intègre les charges de gestion du contrat.
- ***Provision mathématique commerciale*** *:* intègre les charges de gestion et les charges d'acquisition du contrat.

D'un autre point de vue, la provision mathématique d'un contrat est une dette de l'assureur envers l'assuré, et il paraît équitable que l'assuré y ait droit dans certaines circonstances.

III.4 Rachat du contrat avant terme:

La réglementation marocaine en matière d'assurance vie donne le droit au preneur d'assurance de mettre à tout moment fin au paiement des primes. On distingue trois circonstances dans lesquelles l'assuré peut exercer un droit sur la provision mathématique de son contrat, avant son terme normal:

- ***Le rachat:*** Il met fin au contrat. C'est une formule accordée à l'assuré qui lui permet de percevoir une partie (rachat partiel) ou la totalité (rachat total)de sa provision avant le terme du contrat.
- ***La réduction:*** le contrat reste en vigueur mais avec des prestations assurées réduites.
- ***L'avance :*** Une partie de la provision mathématique représente l'épargne acquise par l'assuré. Elle ne met pas fin au contrat. Si l'assuré ne rembourse pas sa dette, l'assureur imputerait les sommes impayées sur le montant de ses engagements ou de ses prestations.

III.5 Participations aux bénéfices :

Les bénéfices peuvent provenir soit du cours de la mortalité, soit du rendement des placements, soit encore des frais administratifs et soit enfin des opérations telles que rachat, résiliation et autres.

La décomposition du bénéfice global en trois bénéfices partiels dus à chacune des causes citées ci-dessus est le seul moyen permettant de calculer à posteriori du choix des bases de calcul du tarif (table de mortalité, taux technique d'intérêt et taux de chargements pour frais).

- ***Les bénéfices d'intérêt*** (ou financiers) engendrés par la différence entre les taux d'intérêt technique et les taux de rendement réels obtenus sur le placement des provisions mathématiques ;
- ***Les bénéfices de mortalité*** engendrés par la différence entre la table de mortalité du tarif et la mortalité réelle dans la population des assurés.
- ***Les bénéfices de gestion*** engendrés par l'écart entre les chargements du tarif et les frais de gestion réellement encourus par la compagnie.

La concurrence entre les compagnies d'assurance d'une part, entre les produits d'assurances vie et les autres produits financiers d'autre part a amené les compagnies à ristourner aux preneurs d'assurance une part importante de ces bénéfices. Ces ristournes portent le nom de participation aux bénéfices.

III.6 Compte de résultat :

Cette activité se décompose en trois parties essentielles :

- résultat technique pur, appelé ou résultat technique hors frais
- résultat relatif à la gestion du contrat ou résultat sur frais de fonctionnement
- résultat financier

III.6.1 Résultat technique pur:

Le résultat technique pur correspond à la différence entre les primes pures encaissées et la charge des sinistres et des provisions techniques.

Pour déterminer le résultat technique, il faut procéder au calcul des provisions mathématiques définies comme étant la différence entre l'engagement de l'assureur de verser des prestations et l'engagement de l'assuré de payer les cotisations.

Le résultat technique pur se décompose lui-même en deux :

- Résultat sur risque de mortalité généré par l'activité d'assurance de risque.
- Résultat technique pur sur autres éléments généré par l'activité d'épargne. Ce résultat provient essentiellement des pénalités de rachat supportées par l'assuré en cas d'interruption du contrat.

III.6.2 **Résultat sur frais de fonctionnement:**

Le calcul de ce résultat nécessite la mesure, à chaque arrêté, des engagements de l'assureur (frais restant à payer jusqu'au terme du contrat) et de l'assuré (chargements d'acquisition et chargements de gestion restant à payer à la société jusqu'au terme du contrat).

On distingue :

- Le résultat sur frais de gestion : c'est la différence entre les frais d'administration, les frais de règlements de sinistres et les frais de gestion financière d'une part, et les chargements supportés par l'assuré pour couvrir ces risques d'autre part.
- Le résultat sur frais d'acquisition : c'est la différence entre les frais relatifs à l'émission du contrat et les chargements supportés par l'assuré pour couvrir ses frais.

À la fin de chaque exercice, il faut donc identifier :

- ✓ Les chargements d'acquisition et d'encaissement prélevés sur les primes
- ✓ Les chargements de gestion du contrat prélevés sur les réserves mathématiques
- ✓ Les chargements de gestion financière des placements prélevés sur les sommes placés

III.6.3 **Résultat financier:**

Le résultat financier représente la part nette de la compagnie sur les placements financiers hors droits de l'assuré (Taux garanti et participation aux bénéfices) et frais de gestion financière des placements.

Il est égal à la différence entre les produits financiers générés au cours de l'exercice par les placements financiers affectés au contrat, déduction faite de la participation aux résultats attribuée à l'assuré, et de la quote-part des produits financiers alloués à la couverture des frais de gestion.

Nous allons présenter dans le chapitre qui suit un aperçu sur les normes comptables afférentes aux entreprises d'assurances et une comparaison du bilan sous Solvabilité II et IFRS phase II.

CHAPITRE 2

Normes comptables afférentes aux entreprises d'assurances

Dans le but de répondre à la nécessité de normalisation des contrats d'assurance, pour plus de cohérence et pour un fonctionnement efficace du marché des capitaux, de nouvelles normes ont été proposées par l'IASB (International Accounting Standards Board) pour créer un ensemble unique de normes internationales capables de générer une information compréhensible et de haute qualité.

Nous allons d'abord essayer de nous acclimater avec les normes ISA / IFRS pour ensuite définir le concept de la « juste valeur » dans les modèles théoriques et enfin détecter la convergence entre Solvabilité II et IFRS.

I. Normes IAS / IFRS :

I.1 Généralités sur les normes IFRS[3] :

Bien que certaines normes traitent des contrats d'assurance à savoir celles relatives aux instruments financiers (IAS 32 & 39), il n'existait pratiquement pas de normes spécifiques aux contrats d'assurance.

La mondialisation des marchés et la croissance de la convergence dans le secteur financier qui sont observées de nos jours imposent donc une harmonisation de la comptabilité des entreprises d'assurance. C'est ainsi que depuis 2005 l'union européenne a proposé que toutes les sociétés cotées utilisent les normes internationales dans leurs états financiers consolidés.

Le projet de normes IFRS comprenait deux phases :

- La première qui s'étale de 2005 à 2007 a entamé le processus de reforme et a été lancée après adoption au niveau de l'union européenne de certaines normes[4] par le règlement nº 1606/2002[5] de la commission européenne. Cette adaptation a donc imposé aux sociétés cotées de publier leurs états financiers selon les normes IFRS : Article 4 du règlement nº 1606/2002 ***« Pour chaque exercice commençant le 1er janvier 2005 ou après cette date, les sociétés régies par le droit international d'un Etat membre sont tenues de préparer leurs comptes consolidés conformément aux normes comptables internationales adoptés (…) si, à la date de la clôture de leur bilan, leurs titres sont admis à la négociation sur le marché réglementé d'un Etat membre(…) ».***

  Cette adoption a également pu avoir des effets d'entrainements car de nombreux pays à l'image de l'Arménie, de l'Egypte, ou de l'Ukraine… utilisent déjà (comme l'U.E) en totalité ou en partie le référentiel international. Dans cette phase, les assureurs non vie n'étaient pas obligés d'actualiser leur passif.

- La deuxième phase qui est en cours, est largement consacrée aux entreprises d'assurance et explique le traitement donné aux éléments comptables pour la présentation des états financiers. Pour l'évaluation de ces éléments selon les normes IFRS, certaines notions très importantes apparaissent telles que la fair value, l'entity specific value, l'embedded value… Cette phase ci marquée par le passif qui doit être actualisé, le principe sous-jacent du cadre étant que l'information financière est plus compréhensible si le bilan ne contient que les ressources et obligations réelles. Il serait donc intéressant de définir ces notions de façon comptable.

[3] Il est question de parler de ces normes dans le contexte de l'assurance.
[4] IAS : 1, 2, 7, 8, 10 à 12, 14, 16 à 21, 23, 24, 26 à 29, 31 à 34, 36 à 41 et IFRS : 1 à 7
[5] Adopté le 19 juillet 2002.

I.2 Définitions :

I.2.1 La fair value ou juste valeur :

L'utilisation de la juste valeur est une méthode de valoriser des actifs qui s'applique aux comptes consolidés des entreprises. La juste valeur d'un actif correspond à sa valeur de marché à la date de clôture du bilan par opposition à ''la valorisation au coût historique '', utilisée dans la plupart des normes comptables, selon laquelle l'actif reste valorisé dans les comptes à son prix à la date d'achat, même si sa valeur de marche a entre temps évolué.

L'organisme IASB définit la fair value comme ***« le montant pour lequel un actif pourrait être échangé ou un passif réglé entre des parties bien informées et consentantes dans le cadre d'une transaction effectuée dans des conditions de concurrence normale ».*** C'est-à-dire, la valeur de marché des cash-flows.

La valorisation des actifs à leur valeur de marché à la date de clôture du bilan est dénommée « mark to market ». Dans le cas où il n'existerait pas de valeur de marché pour ceux-ci, il est conseillé d'utiliser un modèle de valorisation. Il s'agit dans ce cas de la méthode « mark to model ».

I.2.1 L'entity specific value :

Cette autre notion a une définition proche de la précédente. Elle est définie comme ***« la valeur qu'ont les actifs ou les passifs pour l'entreprise qui les porte ».*** C'est-à-dire la valeur de marché des cash-flows pour cette entreprise. Il peut donc y avoir similitude entre ces deux notions mais dans la pratique, la différence entre la fair value et l'entity specific value est minime.

I.3 Normes afférentes à l'assurance :

Les normes IFRS ayant un contexte international s'appliquent aux états financiers à usage général et aux autres informations financières de toutes les entités commerciales industrielles financières et similaires. Il existe parmi elles un certain nombre de normes qui trouvent leur application en assurance et qui sont assez intéressantes d'un point de vue actuariel.

Seront principalement traitées dans le présent mémoire :

- La norme IFRS 4 relative aux contrats d'assurances ;
- Les normes traitant des instruments financiers (IAS 32 et IAS 39).

I.3.1 **IFRS 4 et les contrats d'assurances:**

Cette norme relative aux contrats d'assurance, présente notamment une définition du contrat d'assurance et propose des améliorations aux pratiques comptables en matière de contrat d'assurance et les informations à fournir dans les états financiers de toute entité émettant des contrats d'assurance. Elle s'applique aussi aux instruments financiers comportant un élément de participation discrétionnaire. Nous ne nous attarderons pas sur ce dernier point vu que notre application porte sur une société d'assurance vie.

La particularité des compagnies d'assurance nécessite des normes propres. En effet, la notion d'inversion du cycle de production[6] qui est propre aux sociétés d'assurance entraine une certaine complexité de ces contrats.

Les contrats d'assurances sont définis selon les normes IFRS 4 comme ***« tout contrat selon lequel une partie (l'assureur) accepte de couvrir un risque d'assurance significatif d'une autre partie (le titulaire de la police) en convenant d'indemniser le titulaire de la police si un événement futur incertain spécifié (l'événement assuré) affecte de façon défavorable le titulaire de la police ».***

Il s'agit aussi de contrats dans lesquels l'assureur est engagé dès l'origine. Pour assurer plus de clarté dans cette définition, l'annexe B de l'IFRS 4 apporte quelques précisions sur le sens des expressions « risque d'assurance significatif » et « un événement futur incertain ».

En parlant de « risque d'assurance significatif « il est fait allusion à « tout risque, autre que le risque financier[7], transféré du titulaire du contrat à l'émetteur.

Les assureurs se devront donc de bien apprécier le caractère significatif du risque d'assurance, contrat par contrat, car un risque d'assurance peut être significatif même s'il y a une probabilité minimale de pertes d'importance relative pour un portefeuille entier de contrats.

L'incertitude d'un événement peut porter sur la date de survenance de l'événement ou sur le montant à régler.

En analysant cette vision du contrat d'assurance, il s'avère que certains types de contrats qui sont utilisés de nos jours ne remplissent pas toutes ces conditions. C'est le cas des contrats en unités de compte sans garantie plancher. Dans ce type de contrat l'assureur ne supporte pas de risque d'assurance significatif. A cela on peut ajouter d'autres types de contrats tels que :

[6] Les sociétés d'assurances fixent à priori les primes qu'elles doivent recevoir et ce, à partir d'estimations statistiques.

[7] Risque d'une variation future possible d'une ou plusieurs des éléments suivants : taux d'intérêt spécifié, prix d'une marchandise, taux de change,…

- Les contrats d'investissement : ces dernies ont la forme juridique d'un contrat d'assurance mais comme dans les contrats en unité de compte, les assureurs ne sont pas exposés à un risque d'assurance significatif ;
- Les traités de réassurance financière qui font un transfert de risque.

Selon les normes IFRS, les méthodes comptables utilisées dans une société d'assurance et relative aux contrats d'assurance tels que définis plus haut ne devraient être changées que si ce changement apporte plus de pertinence et plus de fiabilité aux états financiers.

Tous les contrats ne répondant pas à la définition d'un contrat d'assurance seront comptabilisés ou évalués comme des instruments financiers selon la norme IAS 39 (cf. II.2.3)

II.3.1.1 **Spécificités de la norme IFRS 4 :**

L'une des spécificités des contrats relevant d'IFRS 4, à savoir les contrats d'assurance et les contrats d'investissement avec participation discrétionnaire, est la notion de « comptabilité reflet » de son nom anglais « shadow accounting ».

La méthode dite de « comptabilité reflet » est définie au paragraphe 30 de la norme IFRS 4 de la façon suivante : ***« Dans certains modèles comptables, les plus-values ou moins-values réalisées sur les actifs d'un assureur ont un effet direct sur l'évaluation de certains ou de la totalité***

(a) de ses passifs d'assurances,

(b) des coûts d'acquisition différés correspondants et

(c) des immobilisations incorporelles liées, tels que celles decrites aux paragraphes 31 et 32.

Un assureur est autorisé à, mais n'est pas tenu de, changer de méthodes comptables afin qu'une plus-value comptabilisée mais latente sur un actif affecte ces évaluations de la même façon que le fait une plus-value ou une moins-value réalisée.
L'ajustement correspondant du passif d'assurance (ou des coûts d'acquisition différés ou des immobilisations incorporelles) doit être comptabilisé en capitaux propres. Cette pratique est parfois décrite comme " une comptabilité reflet ". ».

Notons qu'il existe des similarités au niveau de l'application de la « comptabilité de reflet » aux plus ou moins-values latentes entre l'approche retenue en normes françaises pour constater les droits des assurés sur les plus ou moins-values liées à des retraitements de consolidation.

L'analyse des paragraphes 34 et 35 montre que la comptabilité reflet est applicable aux contrats d'assurance et aux contrats d'investissement avec participation discrétionnaire[8].

Ainsi, en considérant la définition de la « comptabilité reflet » il s'avère que les contrats pour actifs et passifs, ne peuvent faire l'objet de la « comptabilité reflet » ;

L'application de la « comptabilité reflet » suppose de repartir[9] les plus et moins-values latentes entre les actifs en couverture des contrats concernés et les autres actifs, en particulier de ceux détenus en représentation de contrats d'investissement sans participation discrétionnaire (purs instruments financiers), de contrats d'assurance sans participation aux bénéfices ou des capitaux propres.

II.3.1.2 **Test de suffisance du passif :**

En vue de garantir l'intérêt des assurés les sociétés d'assurance doivent se constituer des réserves ou provisions techniques. Selon IFRS 4, il faudrait que leurs passifs d'assurance tels qu'ils ressortent des comptes consolidés (hormis les frais d'acquisition reportés et des actifs incorporels rattachés) soient suffisants pour couvrir les flux de trésorerie futurs estimés à cette date à chaque arrêté comptable.

La comparaison de ces valeurs comptables (passifs nets et flux de trésorerie) est appelée « test de suffisance du passif ». Si ce test montre des insuffisances au niveau de la couverture, il faudrait les provisionner.

Le « test de suffisance du passif » de son nom anglais Liability Adequacy Test (LAT) est donc un test qui doit se faire à chaque arrêté de compte et qui compare la valeur de l'ensemble des flux de trésorerie futurs des contrats aux engagements provisionnés dans les comptes de l'assureur :

Passifs des contrats +/- autres éléments d'actif et de passif liés ≥ Total des flux de trésorerie futurs (y compris options et coûts)

Le paragraphe 15 d'IFRS 4 apporte des précisions à ce niveau :

---

[8] Le § 35 d'IFRS 4, relatif aux dispositions comptables applicables aux instruments financiers contenant un élément de participation discrétionnaire, précise que les dispositions du § 34 s'appliquent à ces instruments. O/75

- Le § 34 (e) impose à l'émetteur d'un contrat d'assurance contenant un élément de participation discrétionnaire de poursuivre l'application des méthodes comptables existantes pour tous les aspects non décrits aux § 14-20 et 34 (a)-(d), sauf si l'émetteur choisit de modifier ses méthodes comptables en conformité avec les dispositions des paragraphes 21-30.
- Page 19 de la synthèse des travaux de groupes de travail du conseil national (français) de la comptabilité sur les spécificités de mise en œuvre des normes IFRS par les organismes d'assurance (Janvier 2007) .

[9] Affectation aux cantons ou, à défaut, application d'une méthode proportionnelle (« règle de 3 »).

« Un assureur doit vérifier à chaque date de reporting si ses passifs d'assurance comptabilisés sont suffisants, en utilisant les estimations actuelles de flux de trésorerie futurs générés par ses contrats d'assurance. Si cette évaluation indique que la valeur comptable de ses passifs d'assurance (diminuée des coûts d'acquisition différés correspondants et des immobilisations incorporelles liées) est insuffisante au regard des flux de trésorerie futurs estimés, l'insuffisance totale doit être comptabilisée en résultat ».

I.3.2 Comptabilisation des instruments financiers : IAS 39 :

La norme ISA 39 n'est certes pas la seule norme comptable qui traite des instruments financiers[10] mais elle montre comment évaluer et comptabiliser les actifs et passifs financiers.

Le principe général de l'IFRS est la capitalisation dans le bilan de tous les dérivés à leur juste valeur. Dans cette norme, les contrats d'achat ou de vente conclus pour des motifs autres que la satisfaction des objectifs de l'entreprise en termes d'achat sont comptabilisés comme des instruments dérivés, c'est-à-dire à leur juste valeur.

Dans la norme IAS 39, les instruments dérivés sont définis comme tout instrument financier qui réglé à une date future, ne requérant aucun placement net initial et dont la valeur fluctue en fonction d'un prix, d'un indice ou de toute autre variable (le sous-jacent).

Ainsi, les contrats suivants constituent des dérivés au sens de la norme IAS 39 :

- Contrats devant se dénouer dans les détails fixés par la réglementation ou par des conventions du marché (contrats regular way) ;
- Engagement d'achat à prix fixe d'un instrument de dette à taux fixe ;
- Swap de taux ou de devise.

Notons qu'il existe des dérivations indiquées sur des variables climatiques, néologiques ou physiques.

Dans le bilan tous les dérivés sont comptabilisés qu'il s'agisse de dérivés de « trading » ou ceux de hedging et ce, à la date de transaction.

I.3.2.1 Catégories d'actifs :

Les instruments financiers sont généralement scindés en quatre catégories qui se rapprochent de celles utilisées dans les normes américaines FAS :

[10] IAS 32 qui s'intéresse exclusivement à la présentation des instruments financiers dans les états comptables de leur présentation ; IAS 37 sur les provisions, passifs éventuels et actifs éventuels et IFRS 7.

- Actifs ou passifs détenus à des fins de transaction « Trading » : Ces actifs sont définis comme des actifs acquis ou générés par l'entreprise principalement dans l'objectif de dégager un bénéfice lié à des fluctuations de prix à court terme.
- Prêts et créances émis par l'entreprise en procurant de l'argent, des biens ou des services directement « Trading ».
- Actifs ou passifs détenus jusqu'à échéance « Held to maturity HTM » : Il s'agit d'actifs qui ont des flux fixe ou déterminables et à échéance fixée. Il existe une sanction « Tainting » encourue par l'entreprise en cas de cession d'actifs classés dans cette catégorie.

Instrument financiers détenus à la vente : Entrent dans cette catégorie tous les actifs qui ne recoupent pas les critères des 3 catégories précédentes.

Le tableau suivant montre comment ces actifs sont évalués et comptabilisés selon les normes IFRS :

Catégorie d'actif financier	Exemple	Evaluation	Impact (variation de valeur)
Actifs financiers en juste valeur par résultat « Financial assets held for trading »	Titres d'OPCVM	**Juste valeur**	**Résultat**
Placements détenus jusqu'à leur échéance « Held To Maturity »	Obligations	**Coût amorti** (Avec méthode du taux d'intérêt effectif)	**Résultat**
Prêts et créances Emis par l'entreprise « originated loans & receivables »	Créance client, dette fournisseur, emprunt émis.	**Coût amorti** (Avec méthode du taux d'intérêt effectif)	**Résultat**
Actifs financiers Disponibles à la vente « Available for sale financial assets »	TIAP[11], titres de participation non consolidés, autres titres immobilisés.	**Juste valeur**	**Capitaux propres**

Tableau 1: Comptabilisation des actifs financiers selon IAS 39

Ces instruments financiers doivent être couverts de façon efficace ; couverture variant de 80% à 125%.

[11] Titres immobilisés de l'activité du portefeuille.

I.3.2.2 Types d'évaluations des actifs ou passifs :

Est considéré comme passif financier tout passif qui est soit :

- Une obligation contractuelle de remettre à une autre entité de la trésorerie ou d'échanger des passifs financiers avec une autre entité dans les conditions potentiellement favorables à l'entité,
- Un contrat qui sera ou pourra être réglé en instrument de capitaux propres de l'entité elle-même (instrument non dérivé ou instrument dérivé).

Dans la première phase du projet de normes IFRS, les passifs financiers étaient évalués selon la méthode du coût lors de leur comptabilisation initiale, c'est-à-dire la juste valeur de la contrepartie reçue en échange.

Deux autres méthodes ont été adoptées dans le cadre de la phase II du projet de normes IFRS.

Ainsi, les passifs financiers y compris ceux liés aux contrats d'investissement soumis à la norme IAS 39 pourraient être évalués selon :

- La méthode du coût amorti ;
- La juste valeur.

Il existe deux catégories de passifs :

- Les passifs financiers à la juste valeur par le biais du compte de résultat
  - Passifs financiers encourus à des fins de transactions,
  - Passifs comptabilisés volontairement à la juste valeur : classement opéré à l'initiation de l'opération (sous conditions).
- Les autres passifs financiers

Evaluation au coût amorti[12] :

L'évaluation d'un élément comptable au coût amorti correspond à sa valeur à l'origine du contrat diminuée des remboursements et augmentée/diminuée de la différence entre ce montant initial et le montant à régler à l'échéance.

Evaluation à la juste valeur « fair value » :

Le paragraphe 89 d'IAS 39 stipule qu'une entité a la possibilité d'évaluer les passifs financiers soit en coût amorti soit en juste valeur si ces derniers sont détenus à des fins de transaction « Trading ».

[12] IAS 39.10

La notion de juste valeur a été présentée dans le paragraphe ''Définition'' (cf. II.2 Voir dans les annexes statistiques et financiers pour plus d'informations).

Notons qu'il existe un traitement spécial pour les contrats en unités de comptes pour lesquels il y a possibilité d'évaluer à la juste valeur ou de faire une séparation du passif entre le contrat hôte qui est assimilé à un dépôt remboursable pour un moment fixé et un dérivé incorporé.

Le schéma ci-dessous résume les différentes méthodes d'évaluations dont on a parlé plus haut :

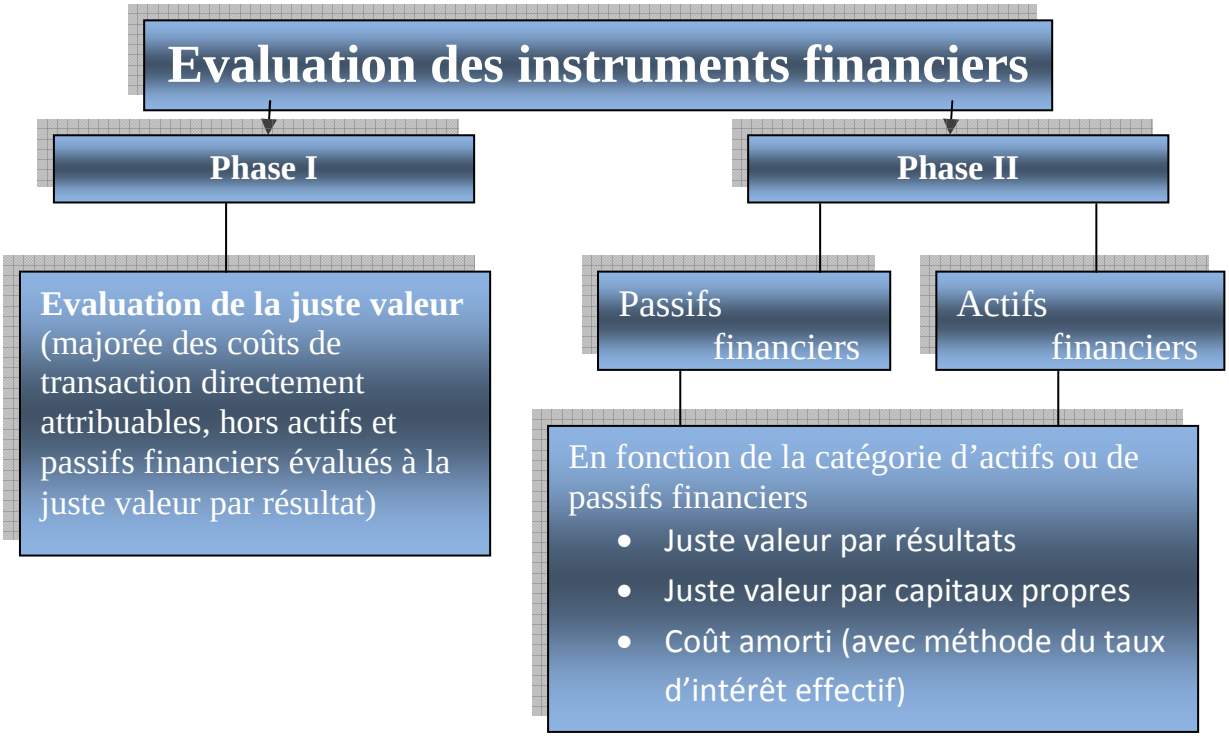


Figure 4 : Evaluation des instruments financiers

L'obligation faite aux sociétés cotées d'élaborer les états financiers consolidés à compter du 1er janvier 2005 a ouvert de nombreux débats sur les normes IFRS, largement focalisés sur la notion de « juste valeur ». Les nombreuses critiques et interrogations sur l'opérationnalisation de la juste valeur ont souvent occulté les questionnements et problématiques théoriques et conceptuels sous jacents.

La nécessité de trouver un consensus large autour de la « juste valeur » est probablement à l'origine des ambiguïtés et incohérences qui apparaissent dans le référentiel de l'IASB. La polémique sur la notion de juste valeur appelle une meilleure compréhension du concept. L'objet du point suivant est de mettre en exergue une justification théorique de la juste valeur comme mesure du capital « investi » dans l'entreprise.

II. Concept de la « juste valeur » dans les modèles théoriques :

Le «Framework» ou «Cadre pour la Préparation et la Présentation des Etats Financiers» publié par l'IASB, développe l'idée que les états financiers sont élaborés en cohérence avec le choix fait par les utilisateurs principaux de l'information entre deux approches du capital : capital financier et capital physique. La mise en perspective des deux concepts de maintien du capital physique ou financier impliquent dans l'IAS 1 des visions différentes du reporting de la performance, progressant vers la notion de compte de résultat global ou «comprehensive income».

Le terme de juste valeur est polysémique et ouvre de nombreux débats (Casta et Colasse, 2001). La définition stricto sensu de la notion est présentée dans l'IAS 39 – Instruments financiers. Il s'agit du « montant pour lequel un actif pourrait être échangé, ou un passif réglé, entre des parties bien informées et consentantes dans le cadre d'une transaction effectuée dans des conditions de concurrence normale » (IAS 39, §8). Dans le contexte précis de la norme sur les instruments financiers, cette juste valeur peut correspondre à la valeur obtenu de la vente de ce bien sur un marché actif. Pour autant, il n'est nullement fait mention de cette définition dans le Cadre pour la préparation des états financiers. Quatre conventions d'évaluation sont proposées et peuvent co-exister au sein d'un même bilan, la valeur vénale n'étant qu'une d'entre elles.

La première convention d'évaluation est celle du coût historique. Loin d'être obsolète, il est précisé que le coût historique peut demeurer dans bien des cas pertinent et sera retenu pour nombre d'actifs. La seconde convention est celle du coût actuel, équivalent de montant de trésorerie si le même actif était acquis au moment de l'établissement des comptes. En d'autres termes, il s'agit d'une valeur de remplacement. La troisième convention est la valeur de réalisation, ou prix de vente de l'actif qui résulterait d'une transaction sur un marché actif.

En d'autres termes, il s'agit de la valeur vénale. La quatrième et dernière convention proposée est la valeur actualisée des flux de trésorerie que l'on pourrait attendre de l'utilisation de cet actif.

La juste valeur peut être mesurée par une de ces quatre conventions. Etant donné que pour un même actif, plusieurs conventions peuvent être effectives, on peut en conclure qu'il n'existe pas une juste valeur mais des justes valeurs pour un même bien. La juste valeur à retenir est a priori celle qui paraît la plus pertinente compte tenu des spécificités de l'actif au moment de l'établissement des comptes. En considérant maintenant les concepts de capital développés précédemment, il apparaît que le choix d'un concept influence logiquement le choix des conventions d'évaluation.

Dans le cadre du capital financier, même s'il est clairement exprimé que toutes les conventions pré-citées sont utilisables, les valeurs de réalisation ou valeurs vénales semblent les plus cohérentes avec l'objectif de maintien du nominal ou du pouvoir d'achat investi. A défaut d'existence de marchés actifs, les valeurs d'actualisation semblent également adaptées.

A contrario, le concept de maintien du capital physique conduit à retenir essentiellement le coût actuel des biens car c'est bien cette valeur qui représente le mieux ce qu'il faudrait investir au moment de l'établissement des comptes pour reconstituer l'appareil de production de l'entreprise et ainsi atteindre la même capacité productive.

Ce concept de capital apparaît donc central pour orienter les choix de convention d'évaluation des actifs et passifs. Ces choix réalisés ont enfin une conséquence directe sur la mesure des capitaux propres, intégrant le bénéfice créé sur la période.

Si la juste valeur est perçue comme la valeur qui apparaît la plus pertinente pour les utilisateurs de l'information (actionnaires versus managers), d'un point de vue théorique, elle doit être appréhendée de façon duale. En effet, mesurer la performance ou mesurer l'accumulation de valeur, c'est mettre en exergue la double finalité du système d'informations comptables. Le choix pour l'une ou l'autre des approches étant difficile à départager dans des référentiels normatifs construits par consensus politique et social ; seuls des modèles théoriques peuvent proposer un cadre d'analyse approprié en fonction des objectifs des utilisateurs de l'information.

La notion « juste valeur » ne se comprend qu'à partir de la définition d'un capital et de son maintien. La liberté affichée du choix des types de capital et de conventions d'évaluation se révèle très réduite si l'on s'attache à la cohérence conceptuelle du modèle retenu. A l'extrême, l'ensemble de la modélisation semble orienté vers le choix du capital financier et des valeurs vénales, dès que cela est possible. La mise en exergue des besoins d'information de l'investisseur en constitue en quelque sorte une formulation elliptique. Il est à noter que, quoiqu'il en soit, le choix des valeurs vénales pour évaluer les actifs et les passifs ne conduirait que très fortuitement à la valeur de marché des capitaux propres, s'ils étaient proposés sur un marché financier.

Il apparaît donc que de nombreuses ambiguïtés subsistent dans le « Cadre pour la préparation des états financiers » publié par l'IASB. Sans doute, les délicats processus de négociation dans l'élaboration de ce type de document expliquent en partie l'origine de telles contradictions. Malgré tout, le Cadre vise explicitement à être le texte de référence en l'absence de normes plus précises. Sur la base de ces observations, on peut légitimement se

demander si la marche forcée de la normalisation française vers ce référentiel international peut faire l'économie d'une réflexion, académique et peut-être gouvernementale, plus ouverte sur les concepts sous jacents.

L'ampleur internationale de la financiarisation des sphères économiques justifie encore plus fortement de participer activement aux processus de normalisation internationale, que ce soit par une représentation nationale ou européenne.

III. Convergence entre Solvabilité II et IFRS :

L'idée du projet de solvabilité II est de rester le plus cohérent possible avec les normes comptables internationales IFRS phase II. Examinons les points de convergence et de divergence de ces deux régimes au niveau de l'évaluation des points du Bilan.

III.1 Actifs :

Dans l'étude QIS 4 du projet solvabilité II, il est stipulé que la quasi-totalité des actifs doivent être évalués par leur valeur de marché qui est considérée comme étant la juste valeur si ces derniers sont cotés « marked to market ». Dans le cas échéant. On essaie d'approcher en utilisant un modèle d'évaluation « market to model ». Il existe donc une petite différence à ce niveau. En effet, ces actifs sont évalués à la juste valeur ou au coût amorti selon la catégorie à laquelle ils appartiennent.

III.2 Passifs :

Au niveau des réserves (provisions) techniques, on retrouve certains termes qui se répètent à la fois dans Solvabilité II et IFRS phase II. Ces termes sont la meilleure estimation « best estimate » et la marge de risque « risk margin ». Si au niveau du Best Estimate les définitions sont à peu près similaires, les marges de risques peuvent ne pas être les mêmes. En effet, dans le QIS 4 la marge de risque doit être calculée par la méthode du coût du capital « cost of capital » alors que les normes IFRS n'imposent pas de méthode spécifique d'évaluation. D'un point de vue théorique ces marges correspondent au supplément à ajouter au Best Estimate pour faire face aux engagements de l'assureur. Par ailleurs une problématique peut être posée sur les taux utilisés pour l'actualisation des cash-flows futurs dans l'évaluation du Best Estimate. On pourrait par exemple tenir compte du spread de signature de l'entité d'assurance en question et donner la courbe de taux qui lui est appropriée. L'une des particularités des normes IFRS est la notion de « service margin » ou

marge de service. Elle désigne en fait les éventuels « profits » générés par les contrats de l'entité elle-même en excluant toute variable spécifique à cette dernière telle que les fonds propres.

IV. Présentation du Bilan sous Solvabilité II & IFRS phase II:

Le tableau ci-dessous représente un résumé de tout ce qui a été présenté pour l'évaluation des actifs et passifs dans le cadre de ces deux régimes.

IV.1 **Actif :**

		Normes applicables	Méthodes d'évaluation possibles ou associés à ces normes	Ajustements et traitements recommandés pour QIS 4
ACTIF	**Actifs Incorporels**			
	Ecart de réévaluation	IFRS 3.51 ; IFRS 4.31-32	Après reconnaissance : coût déduit de toute dépréciation ou différence entre juste valeur du passif et celle comptable	Supposé nul
				Si possible approximer à titre d'information en respectant IFRS 3 et 4
	Immobilisations incorporelles	IAS 38.8, 10-17	Au modèle de coût, ou au moins de réévaluation (juste valeur moins les dépréciations ou amortissements)	Supposées nulles
				Si possible approximer à titre d'information en respectant IAS 38 en n'utilisant que le modèle de réévaluation
	Actifs Corporels			
	Immobilisations corporelles	IAS 16	Au modèle de coût, ou au modèle de réévaluation (juste valeur moins les dépréciations)	Appliquer le traitement en respectant IAS 16 avec le modèle de réévaluation
				Possibilité de déterminer si nécessaire une valeur économique ou d'évaluer sur une autre base en la justifiant
	Stocks	IAS 2	Minimum entre le coût et la valeur de réalisation nette	Appliquer selon IAS 2 en utilisant la valeur de réalisation nette et non le coût
	Leasing	IAS 17	Minimum entre la juste valeur et la valeur actualisée du minimum des paiements de location	Appliquer selon IAS 17 en utilisant la juste valeur et non la valeur actualisée du minimum des paiements de location
	Placements			
	Immeubles	IAS 40	Au coût (pour commencer) puis à la juste valeur ou au modèle de coût.	Appliquer selon IAS 40 en utilisant la juste valeur
	Placements dans des entreprises apparentées	IAS 27 et IAS 28	Au coût, ou en utilisant la méthode d'équivalence ou selon IAS 39	Appliquer selon IAS 39
	Investissements détenus jusqu'à échéance	IAS 39	Au coût amorti	Appliquer selon IAS 39 en utilisant la juste valeur
	Créances et prêts	IAS 39	Au coût amorti	Appliquer selon IAS 39
	Actifs libres	IAS 39	A la juste valeur avec ajustement de la valeur d'équité	Appliquer selon IAS 39
	Actifs financiers à la fair value	IAS 39	A la juste valeur avec évaluation à l'aide du compte de résultat	Appliquer selon IAS 39

	Autres actifs			
	Actifs non courants	IFRS 5	A la valeur comptable ou la juste valeur diminuée des frais de cession	Appliquer selon IFRS 5 en utilisant la juste valeur et non la valeur comptable
	Actif d'impôts différés	IAS 12	Appliquer le taux de taxation au moment ou l'actif est réalisé. Actualiser à chaque bilan	Appliquer selon IAS 12
				Pas obligation de faire apparaître ce point dans le bilan
				Vivement recommandé pour être en conformité avec solvabilité II, notamment pour QIS 4
	Impôts courants (actif)	IAS 12	Au moment à recouvrer	Appliquer selon IAS 12
	Trésorerie	IAS 7.6 et IAS 39	Pas moins que le montant payable à la demande, escompter à partir de la première date possible de payement	Appliquer selon IAS 7 et IAS 39
	Dépréciation	IAS 36 et IAS 39		Appliquer selon IAS 36 et IAS 39

Tableau 2 : Actif selon IFRS & Solvabilité II

IV.2 Passif :

		Normes applicables	Méthodes d'évaluation possibles ou associés à ces normes	Ajustements et traitements recommandés pour QIS 4
P A S S I F	**Provisions**	IAS 37	Best Estimate à la date du bilan	Application selon IAS 37
	Passifs financiers			
	Passifs financiers	IAS 39	A la juste valeur avec évolution à l'aide du compte de résultat	Appliquer selon IAS 39
	Dette et autres passifs financiers	IAS 37 ; IAS 39	Juste valeur à partir du compte de résultat ou au maximum du montant comptabilisé au début et celui déterminé selon IAS 37	Appliquer selon IAS 39 en utilisant la juste valeur
	Passif d'impôts différés	IAS 12	Appliquer le taux de taxation au moment où le passif est réglé	Appliquer selon IAS 12
				Pas obligation de faire apparaître ce point dans le bilan
				Vivement recommandé pour être en conformité avec solvabilité II, notamment pour QIS 4
	Impôts courants (Passif)	IAS 12	Montant à verser	Appliquer selon IAS 12
	Avantages sociaux			
	Avantages sociaux à court terme	IAS 19	Valeur courante des frais courus déduite de tout montant déjà payé	Appliquer selon IAS 19

	Avantage sociaux à long terme (y compris la retraite)	IAS 19	Estimation actuarielle des pensions (antérieures et en cours), utiliser la méthode du **PUC** pour déterminer la valeur actuelle des prestations définies et des coûts de services courants, déterminer la juste valeur de l'actif des régimes de retraites et la valeur actuariel du montant total des gains et pertes reconnus	Appliquer selon IAS 19 Faire un commentaire sur l'application de la norme IAS 19
	Autres avantages sociaux à long terme	IAS 19	Les gains et pertes actuariels et les coûts des services passés sont comptabilisés immédiatement	Appliquer selon IAS 19
	Prestation de cessation d'emploi	IAS 19	Escompter les indemnités de licenciement venant à échéance au moins 12 mois après la date du bilan. Pour les départs volontaires se baser sur le nombre de personnes ayant opté pour ce choix	Appliquer selon IAS 19

Tableau 3 : Passif selon IFRS & Solvabilité II

PUC : Projected unit credit (en régime de retraite).

L'écriture du bilan selon le régime solvabilité II et les normes IFRS a montré combien de fois les éléments comptables pouvaient varier de la composition du portefeuille dont on dispose. En effet, le classement[13] défini à l'origine de l'opération ne reste pas sans conséquences sur l'évaluation des instruments financiers. La sanction qui provient de tout changement de catégorie lors de la circulation de ces instruments permet d'éviter tout « désordre » dans l'évaluation du bilan[14].

La partie qui suit traite la modélisation de l'actif.

[13] Catégorie définis plus haut
[14] Par exemple un passage de HTM à AVS

– Partie II –

Modélisation de l'actif

- Modélisation du taux sans risque du marché
- Modélisation de l'action

.

CHAPITRE 3

Modélisation du taux sans risque du marché

Le principal objectif des auteurs est d'établir un cadre d'analyse permettant d'élaborer une base de données chronologiques relative aux courbes théoriques de taux de rendement zéro coupons et de taux à terme estimés à partir des cours des titres du gouvernement. Les auteurs cherchent également à mieux comprendre le comportement des modèles paramétriques des courbes de rendement.

Dans ce présent chapitre, nous présenterons dans un premier temps, la programmation de l'approche statistique sur le logiciel Matlab et nous estimerons les modèles de Nelson et Siegel standard, de Nelson et Siegel extension, de Sevenssen standard et de Sevenssen extension.

Dans un deuxième temps, nous présenterons la modélisation stochastique du taux sans risque, à savoir, le modèle de Vasicek et la stratégie de Dickey Fuller.

Enfin, dans un dernier temps, nous expliquerons la manière dont sont générés les taux futurs et présenterons deux variables construites au départ de cette courbe des taux qui sont : le taux à 10 ans, qui interviendra dans la modélisation du fonds obligataire et les facteurs d'actualisation.

I. La méthode de Nelson Siegel (1987) :

Les méthodes d'estimation de la courbe des taux zéro sont nombreuses. Nous pouvons les classer en 3 catégories : celles qui se basent sur les fonctions splines, celles qui utilisent une classe de fonctions, et celles qui utilisent des techniques non paramétriques. La méthode de Nelson Siegel fait partie de la deuxième catégorie. Nous présentons la méthode de Nelson Siegel et celle de Svenssen basée sur la construction de cette dernière.

La méthode de Nelson Siegel fait partie des méthodes qui se basent sur le critère de minimisation entre les données observées et les valeurs « théoriques ».

Le point de départ du travail de Nelson et Siegel est de supposer que le taux à terme instantané $f(t, m, \alpha)$ est solution d'une équation différentielle ordinaire du second ordre dans le cas d'une racine double, c'est-à-dire que l'expression de $f(t, m, \alpha)$ est de la forme suivante :

$$\boldsymbol{f(t,m,\alpha) = \mu_1 + \mu_2 e^{(-m/\tau_1)} + \mu_3 \frac{-m}{\tau_1} e^{(-m/\tau_1)}}$$

Avec : $f(t,m,\alpha)$: taux à terme à l'instant t, de maturité m et de paramètre $\alpha = [\mu_1, \mu_2, \mu_3, \tau_1]$

Le taux d'intérêt zéro coupon se déduit par intégration du taux à terme sur l'intervalle $[0,m]$ divisée par m. Cela conduit à la relation suivante :

$$\boldsymbol{y(t,m,\alpha) = \mu_1 + \mu_2 \frac{1 - e^{(-m/\tau_1)}}{m/\tau_1} + \mu_3 \left(\frac{1 - e^{(-m/\tau_1)}}{m/\tau_1} - e^{(-m/\tau_1)} \right)}$$

La courbe des taux zéro-coupons dépend donc d'un vecteur de 4 paramètres : $\alpha = [\mu_1, \mu_2, \mu_3, \tau_1]$

Avec : $y(t,0,\alpha) = \mu_1 + \mu_2$

Et $y(t,\infty,\alpha) = \mu_1$

Cette expression admet deux limites suivant les valeurs extrêmes de la maturité m. Pour une maturité égale à zéro, $y(t,m,\alpha)$ est égale à $\mu_1 + \mu_2$ qui s'interprète comme un taux court au comptant. Il est alors facile de contraindre la fonction de passer par le taux court observé. Lorsque la durée de vie résiduelle tend vers l'infini, le taux zéro coupon tend vers le paramètre μ_1 qui correspond au taux long. Ainsi, par construction, le taux zéro coupon, comme le taux à terme instantané, tend vers une asymptote horizontale quand le terme de l'échéance tend vers l'infini. Connaissant la forme du taux zéro coupon, on déduit le prix associé, en temps continu ;

μ_3 et τ_1 : Leur rôle est de capter les inflexions de la courbe de taux pour des maturités différentes.

L'estimation du vecteur des paramètres revient à résoudre le programme suivant :

$$\widehat{\alpha} = min \sum_{n=1}^{N} \omega_n \left(p_t^{(n)}(\alpha) - p_t^{(n)} \right)^2$$

Avec : $p_t^{(n)}(\alpha) = exp(-y(t, m, \alpha) * m)$

Et ω_n le poids accordé à la n-ième obligation. Dans notre étude, ω_n sera la duration des bons du trésor.

II. Le modèle de Svenssen :

Les formes de la structure par terme des taux présentent, en période de troubles importants sur les marchés, des configurations parfois complexes pour les maturités très courtes. Pour tenir compte de ces possibilités et pour accroître la flexibilité de la fonction de base, Svensson (1994) a proposé d'ajouter deux paramètres supplémentaires dans l'équation de détermination du taux à terme. La formulation du taux zéro coupon qui en découle est donnée par la relation suivante :

$$y(t, m, \alpha) = \mu_1 + \mu_2 \frac{1 - e^{(-m/\tau_1)}}{m/\tau_1} + \mu_3 \left(\frac{1 - e^{(-m/\tau_1)}}{m/\tau_1} - e^{(-m/\tau_1)} \right) + \mu_4 \left(\frac{1 - e^{(-m/\tau_2)}}{m/\tau_2} - e^{(-m/\tau_2)} \right)$$

Elle présente les mêmes propriétés que la relation pour les valeurs extrêmes de m. Les deux derniers termes du membre de droite se distinguent uniquement par leurs paramètres (τ_1 et μ_3 d'une part, τ_2 et μ_4 d'autre part). Leur rôle respectif est de capter les inflexions de la courbe de taux pour des maturités différentes.

Nous estimons le vecteur des paramètres de la même façon que pour le modèle de Nelson siegel. Celui-ci est défini par : $\alpha = [\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_3, \tau_1]$.

En pratique, l'estimation du modèle de Svenssen pose problème au niveau de la convergence, lié certainement au point d'initialisation de l'algorithme. Pour remédier à ce problème, nous estimons d'abord les paramètres du modèle de Nelson et Siegel et le résultat trouvé est utilisé comme point de départ de l'algorithme d'optimisation.

III. Les étapes d'estimation des paramètres des modèles utilisés :

Comme nous l'avons déjà expliqué, Nelson Siegel donne une forme fonctionnelle au taux à terme donc au taux zéro coupon. Cette dernière est en fonction de 4 paramètres à

déterminer. Concernant le modèle de Svenssen, il a repris le travail des premiers en donnant cette fois une forme fonctionnelle dépendant de 6 paramètres.

Ce qui est exigé dans ces modèles est de déterminer les valeurs optimales de ces paramètres. Les différentes étapes d'estimation des paramètres sont comme suite :

Etape1 : Nous sélectionnons un vecteur de paramètres initiaux $[\mu_0, \mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_3, \tau_1, \tau_2]$.

Etape2 : Nous déterminons à l'aide de ces paramètres initiaux le taux à terme, le taux zéro coupon, et la fonction discount.

Etape3 : Nous utilisons la fonction discount pour déterminer la valeur des cash-flows et du vecteur de prix théoriques.

Etape4 : Nous calculons les erreurs du prix qui est la différence entre les prix théoriques et les prix observés (les valeurs du marché).

Etape5 : Nous utilisons la procédure d'optimisation numérique : Après avoir déterminé la fonction objective du problème, à savoir, la minimisation des erreurs du prix pondérés par la duration, nous avons utilisés la fonction fminserch prédéfinit dans Matlab pour résoudre le problème d'optimisation. Nous signalons que les paramètres μ_0 et τ_1 sont forcées à prendre des valeurs.

Etape6 : Les étapes 2 jusqu'à 5 sont répétées jusqu'à ce que la fonction objective soit minimisée.

Remarque : Toutes les étapes d'estimation ainsi que les fonctions utilisées au cours de l'estimation sont programmées sur le logiciel Matlab (voir annexe).

IV. Les résultats des différents modèles d'estimation :

IV.1 Modèles de Nelson Siegel :

Le modèle de Nelson Siegel peut prendre deux formes différentes. La première forme est le modèle standard. Il consiste à prendre quatre valeurs initiales, nous n'imposons pas de restriction sur la structure à terme constante (μ_0) et la structure à terme courte (μ_1). La deuxième forme est lorsque nous ajoutons une contrainte liant la structure à terme constante et la structure courte ($\mu_0 + \mu_1 = cte$).

Une fois les paramètres estimés, il est possible de construire, simplement les courbes de taux. La courbe de taux zéro coupon est obtenue en deux temps.

Dans un premier temps, on calcule le prix d'un bon zéro coupon sur la base de la relation définie en temps continu comme suit $B(t,m) = \exp(-my_c(t,m))$. Où y_c représente le taux continu. Quitte à signaler qu'en temps discret $B(t,m) = \frac{1}{(1+y_d(t,m))^m}$, où y_d représente le taux discret.

Sur la base d'un développement limité d'ordre deux, on montre que l'écart entre les taux discret et continus est de l'ordre de la moitié du carré du taux discret $y_d - y_c \cong \frac{{y_d}^2}{2}$

Dans un second temps, on détermine les taux de rendement actuariels en temps discret associés, avec la relation suivante :

$$\boldsymbol{y_d(t,m) = \left(\frac{1}{B(t,m)}\right)^{1/m} - 1}$$

Le taux à terme se déduit de la comparaison du rendement d'un bon zéro coupon à deux échéances différentes. Si on appelle k la durée de placement, définie en t pour la période allant de t + m à t + m + k. La courbe des taux à terme, en temps discret, se calcule donc pour une valeur de k donnée en faisant varier m.

$$\boldsymbol{y_d(t,m,k) = \left(\frac{B(t,m)}{B(t,m+k)}\right)^{-1/k} - 1}$$

IV.1.1 **Modèle standard :**

Les valeurs initiales du modèle : $X_0 = [0{,}1045\ ;\ 1{,}03\ ;\ 7{,}0562\ ;\ 6.2]$. En utilisant l'algorithme dans Matlab le vecteur des paramètres estimés $[\mu_0, \mu_1, \mu_2, \tau_1]$. est le suivant :

μ_0	μ_1	μ_2	τ_1
0.080091	-0.053449	$3.8438.10^{-7}$	11.609

Tableau 4: les paramètres estimès du modéle standard

Nous remplaçons ces valeurs dans la forme fonctionnelle pour pouvoir tracer la structure par terme zéro comme nous le montre la figure suivante.

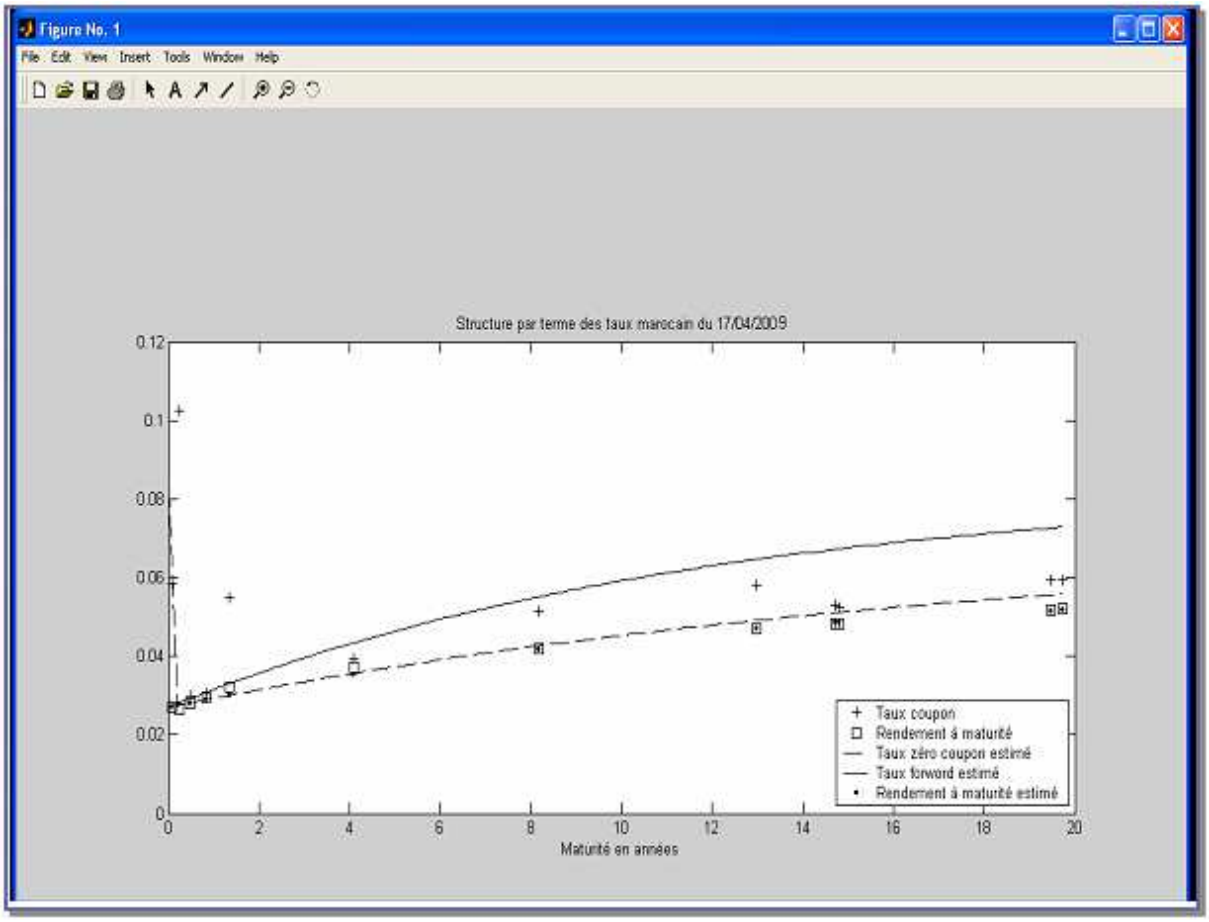


Figure 5 : La structure par terme zéro du marché marocain (17/04/2009) estimé par le modèle Nelson Siegel extension.

Ce graphique présente les résultats des calculs pour le 17 avril 2009. La courbe des taux d'intérêt zéro coupon connaît une chute à court terme, après elle augmente de façon régulière. Dans le court terme, la courbe des taux zéro coupon connaît une forte chute allant de 8 % jusqu'à 3 %, ensuite elle augmente continuellement jusqu'à atteindre un taux de 4 %.

Les points qui correspondent aux rendements à maturité estimés se trouvent à l'intérieur des carreaux qui représentent les rendements à maturités du marché, donc on peut conclure que la structure estimée concorde avec celle du marché.

IV.1.2 Modèle extension :

Le modèle extension de Nelson Siegel est fondé sur la même base théorique que le modèle standard, sauf que nous devons contraindre la structure par terme constante (μ_0) et la structure par terme courte (μ_1) : $\mu_0 + \mu_1 = cte$.

Les valeurs initiales du modèle : X0 = [1.33 ; 4.0562 ; 6.2].

En utilisant l'algorithme dans Matlab le vecteur des paramètres estimés le suivant : $[\mu_0, \mu_1, \mu_2, \tau_1,]$

μ_0	μ_1	μ_2	τ_1
0.080091	-0.053449	$-1.2486 .10^{-8}$	11.609

Tableau 5 : Les paramètres estimès du moséle standard

On remarque que les paramètres estimés sont les mêmes que le modèle précédent.

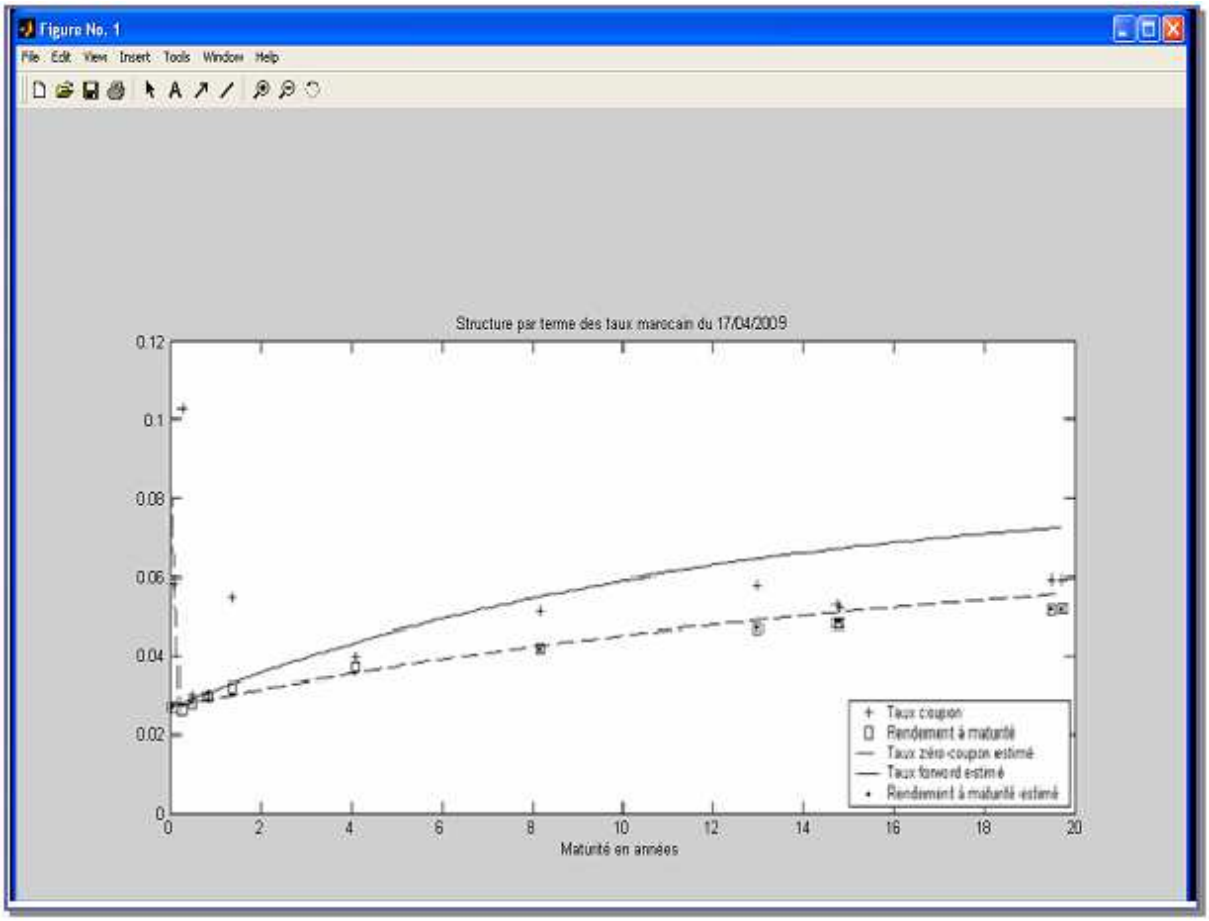


Figure 6 : La structure par terme zéro du marché marocain (17/04/2009) estimé par le modèle Nelson Siegel extension.

Ce graphique présente les taux de rendement à maturité observée et estimée et la structure par terme des taux zéro. Nous constatons qu'en utilisant le modèle extension nous obtenons presque le même graphique du modèle standard.

IV.2 Modèle de Svenssen :

Svenssen a introduit un quatrième terme dans la définition du taux zéro du modèle de Nelson Siegel. Dans ce modèle notre vecteur de paramètre sera composé de 6 éléments $\alpha = [\mu_1, \mu_2, \mu_3, \ \mu_3, \tau_1, \tau_2]$

Comme pour le modèle précédent, nous pouvons avoir deux sous modèles, à savoir le modèle standard et le modèle extension, en contraignant la structure constante et courte.

Pour avoir une bonne estimation des paramètres du modèle, Svenssen propose de composer le vecteur des valeurs initiales par les paramètres estimés du modèle précédent.

IV.2.1 **Modèle standard :**

X_0 = [0,080091; -0,053449 ; -1.2708e-007 ; 0,01 ; 11,609 ; 1]. En utilisant l'algorithme dans Matlab le vecteur des paramètres estimés est le suivant :

μ_0	μ_1	μ_2	μ_3	τ_1	τ_2
0.061806	-0.035449	$-1.5867.10^{-7}$	0.0095686	0.098008	1.7394

Tableau 6 : Les paramètres estimès du modéle Svenssen standard.

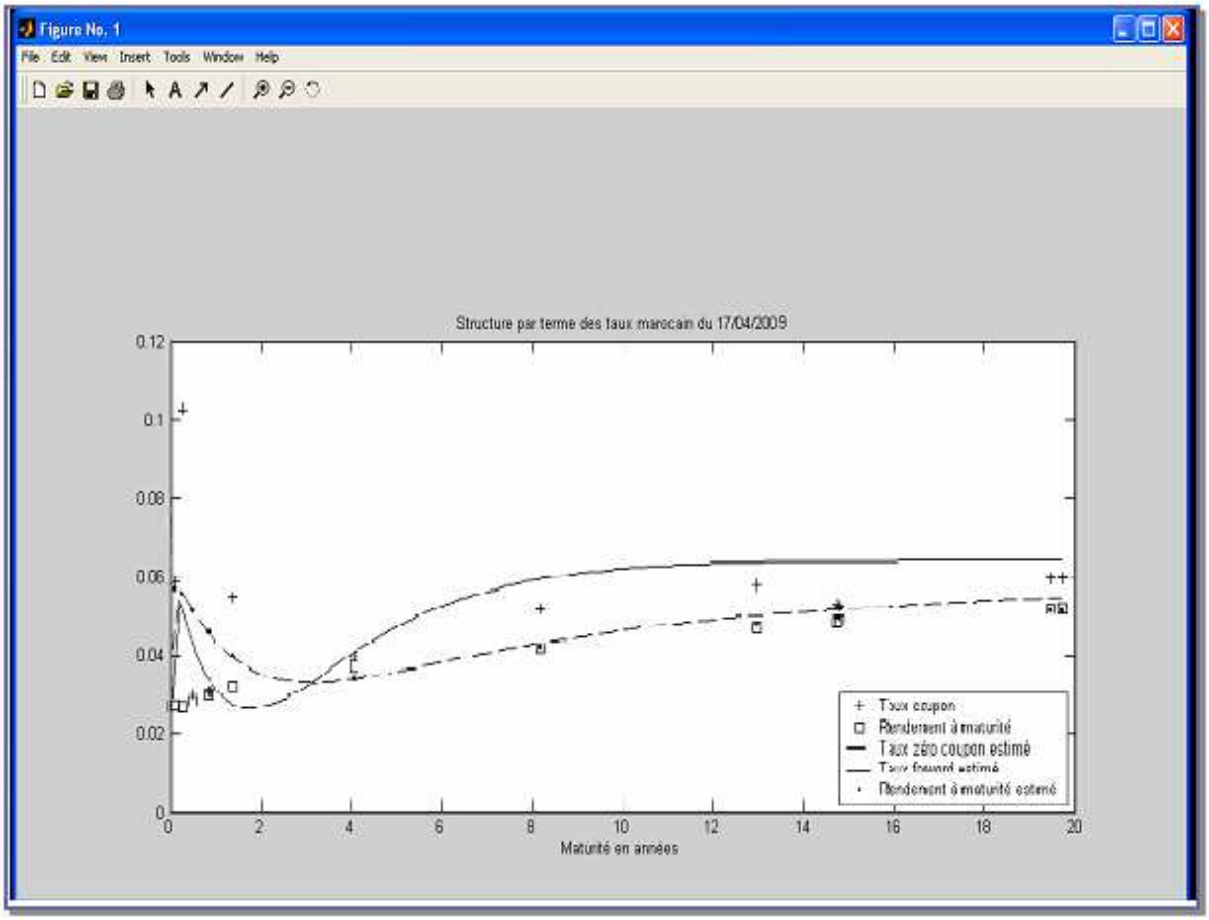


Figure 7 : La structure par terme zéro du marché marocain (17/04/2009) estimé par le modèle Svenssen standard.

Le graphique présente les résultats de ces calculs pour le 17/04/2009. Ce graphique illustre les taux de rendement actuariels observés ainsi que les taux actuariels recalculés sur la base des paramètres estimés. De même que le modèle Nelson Siegel, la courbe zéro coupon connaît, dans le court terme, une chute mais cette fois ci moins forte allant de 6 % à 4 %. Après elle augmente de façon modéré jusqu'à environ 5 %.

Contrairement aux résultats de Nelson Siegel, les points correspondants aux rendements à maturité estimés se trouvent cette fois ci à l'extérieur des carreaux qui représentent les rendements à maturité observés et ceci dans le court et moyen terme (0-1 an et 1-5 ans). Ce qui signifie qu'il existe un problème d'adéquation entre les résultats obtenus par la méthode et les valeurs observées sur le marché. Ceci nous emmène à affirmer que la méthode a des problèmes de convergence. Il faut tout de même signaler que la méthode donne des bons résultats à long terme.

IV.2.2 **Modèle extension :**

On ce qui concerne ce modèle nous avons pris comme valeurs initiales le vecteur suivant : X_0 = [0,080091 ; -0,053449 ; -1,2708e-007 ; 4,01 ; 11,609].

Le vecteur ci-dessous présente les paramètres du modèle estimés par l'algorithme dans Matlab.

μ_0	μ_1	μ_2	μ_3	τ_1	τ_2
0.030258	-0.0036164	0.4646	$1.8452.10^{-7}$	0.17435	56.258

Tableau 7: Les paramètres estimès du modéle Svenssen extension.

Les paramètres estimés seront remplacés dans les différentes équations pour pouvoir tracer les différentes courbes (courbe zéro, rendement estimé et le taux à terme). Ce que nous montrons dans le graphique ci-dessous.

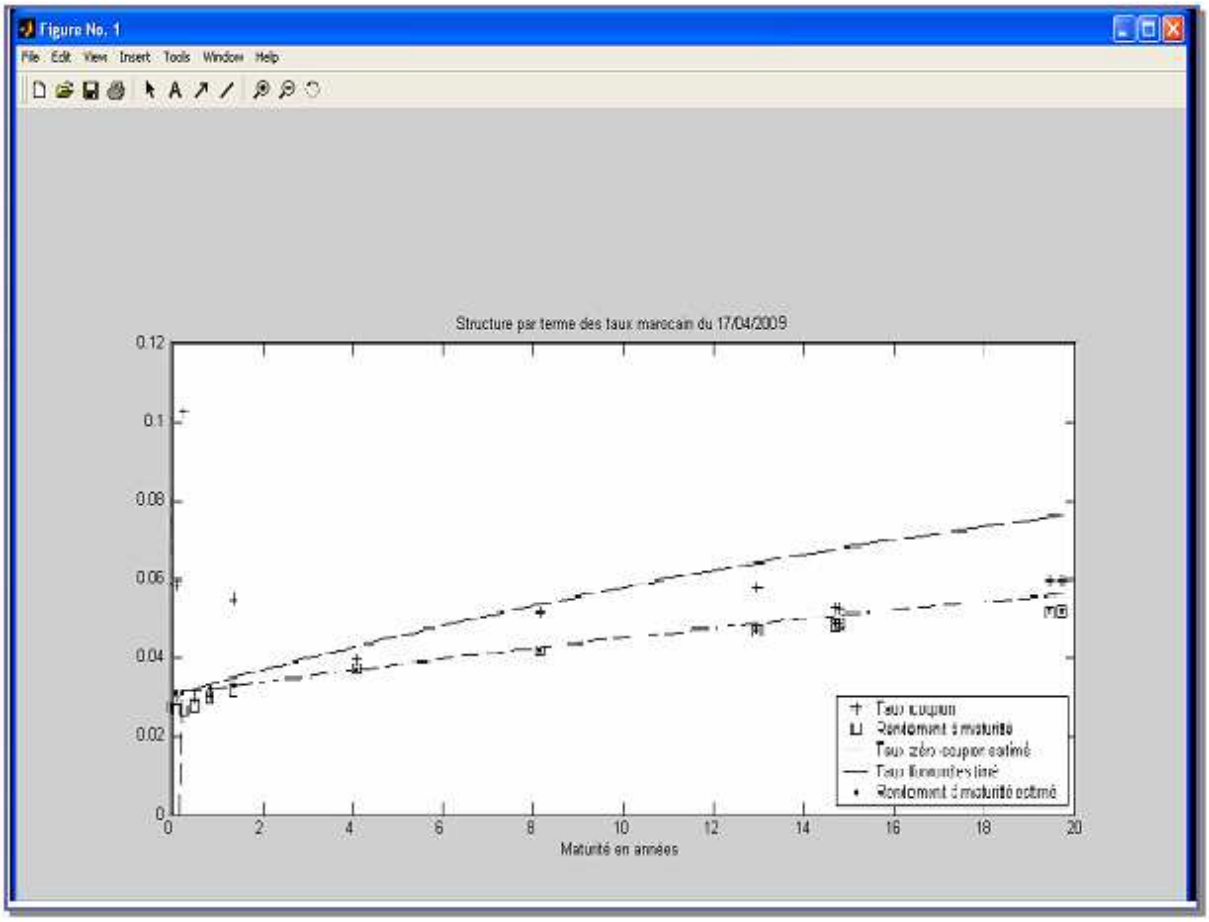


Figure 8 : La structure par terme zéro du marché marocain (17/04/2009) estimé par le modèle Svenssen extension

Nous représentons dans ce graphique la courbe zéro coupon, le rendement à maturité observé ainsi que le rendement à maturité estimer, ce qui nous permet de comparer les valeurs estimées avec celle du marché. Nous constatons que la courbe zéro coupon ne prend pas en considération les petites maturités (une semaine, un mois) dans la représentation,ce qui ne correspond pas à la réalité. En ce qui concerne le moyen et court terme nous remarquons que les rendements estimés correspondent à celles du marché.

On remarque que le modèle possède aussi des problèmes de convergence. Nous pouvons conclure que le modèle de Svenssen a présenté des problèmes de convergence sur les données marocaines.

V. Modèle retenu :

D'après l'analyse que nous avons fait précédemment nous pouvons conclure que le modèle de Nelson Siegel standard donne des résultats plus proches de la réalité que les trois autres modèles.

Pour valider les résultats obtenus, nous proposons de faire un test d'adéquation entre les résultats obtenus et les résultats observés sur le marché.

V.1 Test de Kolmogorov-Smirnov:

L'objectif du test de Kolmogorov-Smirnov (test bilatéral) est de déterminer si les fonctions de répartition des populations à l'origine des échantillons sont différentes.

Soient F(x) et G(x) les fonctions de répartition des deux populations d'où sont tirés les deux échantillons. Le test bilatéral correspond au test de la différence entre les deux populations, ce qui revient à tester si les rendements estimés s'ajustent aux rendements du marché.

L'hypothèse nulle (H_0) et l'hypothèse alternative (H_1) sont les suivantes :

H_0 : F(x) = G(x) pour tout x Les estimations s'ajustent aux rendements du marché.

H_1 : F(x) ≠ G(x) pour au moins une valeur de x Les estimations ne s'ajustent pas aux rendements du marché.

Résultat du test :

Nous testerons l'hypothèse au niveau de signification 5%.

Cherchant la valeur de la statistique dans la table de Siegel $D_{0,05}(12)$.

$D_{0,05}(12) = 0{,}410$

La valeur du test D : $D = 0{,}167$

Puisque $D_{0,05}(12) > D$ nous concluons que les rendements estimés s'ajustent aux valeurs du marché.

Conclusion : le modèle retenu (Nelson Siegel standard) donne de bonne estimation à la structure par terme marocain.

VI. Modèle Vasicek (1977):

Dans le modèle Vasicek des taux, un seul facteur est à l'origine de la courbe des taux. Cet unique facteur est le taux court qui est modélisé sous la forme d'un processus d'Ornstein-Uhlenbeck[15] :

Le modèle peut être s'écrire sous la forme suivante :

[15] Le seul défaut de ce modèle est le fait que des taux négatifs ne sont pas interdits dans un environnement gaussien. On peut toutefois noter que pour des valeurs raisonnables des paramètres, cet événement a une faible probabilité d'occurrence.

$$\boldsymbol{dr_t = a(b - r_t)dt + \sigma dw_t}$$

Où

r_t : Taux sans risque à l'instant t.

b : Moyenne sur long terme du taux.

a : Vitesse de retour à la moyenne.

dw_t : Mouvement brownien.

Cette modélisation permet de prendre en compte l'effet de retour à la moyenne constaté sur les taux d'intérêt, ainsi des valeurs élevées des taux ont tendance à être suivies plus fréquemment par des baisses que par des hausses tandis que l'effet inverse est également constaté pour des niveaux de taux inhabituellement bas.

En effet lorsque $\mathbf{r_t}$ est éloigné de **b,** l'espérance de variation instantanée de $\mathbf{r_t}$, est égale à $\mathbf{a(b-r_t)}$ qui est positive si $\mathbf{r_t < b}$, dans ce cas, le taux court a tendance à augmenter, se rapprochant de la moyenne sur long terme d'autant plus intensément qu'il s'en est écarté et que le paramètre **a** est grand. A l'inverse, si $\mathbf{r_t > b}$, l'espérance de variation instantanée de $\mathbf{r_t}$ est négative et $\mathbf{r_t}$ diminue dans le temps pour se rapprocher de **b**.

L'inconvénient de cette modélisation est que le taux court suit un processus gaussien, donc est négatif avec une probabilité non nulle.

VI.1 Autres modèles stochastiques des taux d'intérêt:

L'équation générale du taux court est de la forme suivante :

$$\boldsymbol{dr_t = [\mu_1 + \mu_2 r_t]dt + [\sigma_1 + \sigma_2 r_t]^{\alpha} dw_t}$$

Modèle	μ_1	μ_2	σ_1	σ_2	α
Merton (1973)	*		*		1
Vasicek (1977)	*	*	*		1
Dothan (1978)				*	1
Bernnan Schwartz (1980)	*	*		*	1
Cox- Ingerssoll- Ross (1985)	*	*		*	0.5
Pearson –Sun (1994)	*	*	*	*	0.5

Tableau 8 : Modèles stochastiques des taux d'intérêt

Plusieurs modèles ont été élaborés différents du modèle normal. En effet, Rogers (1996) montre que les modèles gaussiens de type Vasicek induisent une proportion de taux négatif parfois importante qui introduit des distorsions fortes dans la valorisation de certains produits dérivés. Les modèles log normaux ont eux des proportions trop élevées de taux importants pour des horizons lointains. Pour toutes ces raisons, Flesaker et Hughston (1996) proposent par construction du processus du prix des obligations, d'assurer la positivité du taux d'intérêt.

VI.2 Le processus de Wiener standard:

Une marche aléatoire $\{W(i);\ \mathrm{i} = \mathrm{nh}\ ;\ \mathrm{n} = 0, \dots, \mathrm{N}\ ;\ \mathrm{h} = \text{pas tendant vers } 0\}$ est un processus répondant aux caractéristiques suivantes :

- $W(0) = 0$;
- Les accroissements $\Delta W(i)$, définis par $W(i) - W(i-1)$, sont independants et obéissent à la même loi.

Le processus de Wiener est une marche aléatoire dont les accroissements suivent une loi de Bernoulli :

- $\Delta W(i) = \sqrt{h}$ avec une probabilité $1/2$;
- $\Delta W(i) = -\sqrt{h}$ avec une probabilité $1/2$.
- Dès lors, l'espérance et la variance de $\Delta W(i)$ valent respectivement0 $et\ h$. Ceci entraine que $W(T) = \sum_{n=1}^{N} \Delta W(nh)$ est d'espérance nulle et de variance égale à $N * h$, soit T. Par le théorème central limite[16], il vient :

$$\boxed{\frac{\sum_{n=1}^{N} \Delta W(nh) - 0}{\sqrt{h}\sqrt{N}} = \frac{W(T)}{\sqrt{T}} \xrightarrow{n\to\infty} Z}$$

Où Z est une variable aléatoire normale centrée réduite.

Ceci signifie que $\frac{W(T)}{\sqrt{T}}$ est une variable aléatoire normale standard et que $W(T)$ est une normale centrée de variance T. Ce processus est insuffisant pour modéliser une action, car le prix de l'action serait maintenu en moyenne à sa valeur de départ, i.e. 0. Le mouvement brownien géométrique permet de combler les lacunes du processus de Wiener standard.

[16] **Théorème Central Limite**
Si (X_i) est une suite de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées de moyenne μ et d'écart-type σ, alors $P[S_n \le a] = P\left[\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \le \frac{a-n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\right] \xrightarrow{n\to\infty} P\left[Z \le \frac{a-n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\right]$ où Z est une variable aléatoire normale centrée réduite et $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$.

VI.3 Estimation du modèle Vasicek:

Dans cette section nous choisissons le modèle de Vasicek, et ce pour deux avantages majeurs :

- Le modèle est à un facteur simple à comprendre d'un point de vue théorique.
- Le modèle admet une discrétisation exacte.

Ce dernier point facilite beaucoup l'estimation des paramètres du processus des taux.

Nous nous intéressons dans cette section à modéliser les taux sans risque du marché émis par adjudication à 13 semaines.

VI.3.1 Présentation de la série et analyse préliminaire:

Considérons la série hebdomadaire du taux obligataire, observée du 01 avril 1999 au 21 avril 2009, constituée de 520 observations. Nous avons choisi les taux court terme : taux hebdomadaire obligataire émis par adjudication à 13 semaines noté r(t) ;

Nous avons pris l'année 2009 comme instant initial t=0. Une fois obtenus les taux courts r(t), nous avons déterminé les prix zéro coupon sous Vasicek.

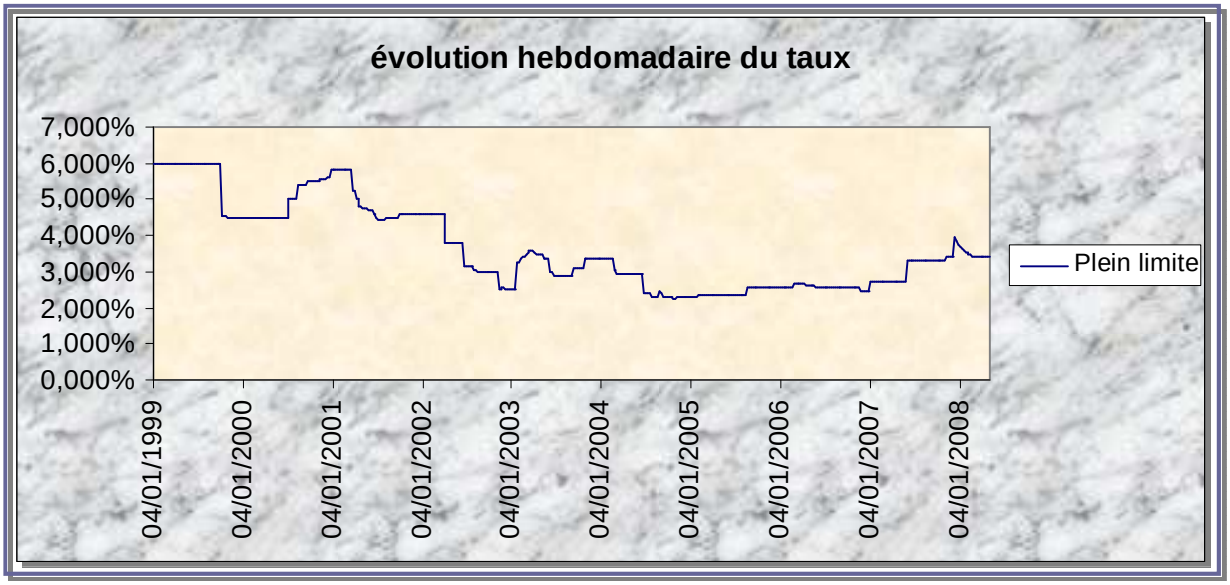


Figure 9 : Evolution du Taux obligataire

Le graphique montre bien que le taux est stationnaire tout au long de la première année après il suit une tendance baissière au long des années 2001 et 2003, puis une tendance haussière jusqu'à 2008.

Le tableau suivant nous permet de nous imprégner des principales statistiques descriptives :

Statistiques	Taux
Minimum	0,022700
Maximum	0,060000
Asymétrie	0,689
Médiane	0,032900
Somme	17,84730
Moyenne	0,036627
Ecart type	0,019

Tableau 9 : Statistiques résumant du taux

Rappelons que le modèle est basé sur le processus d'Ornstein-Uhlenbeck

$$\boldsymbol{dr_t = a(b - r_t)dt + \sigma dw_t}$$

La seule solution de cette équation différentielle stochastique est :

$$\boldsymbol{r_t = r_0 e^{-at} + b(1 - e^{-at}) + \sigma e^{-at} \int_0^t e^{a\delta} dw(\delta)}$$

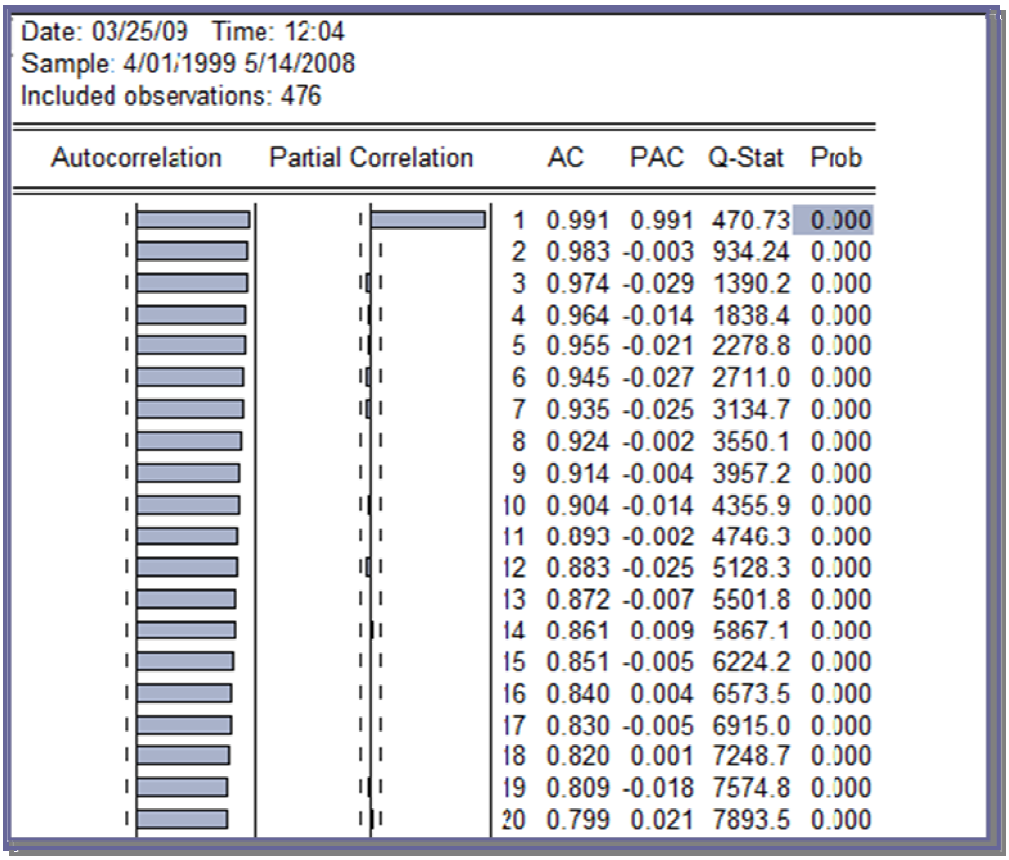
Les propriétés de l'intégrale d'une fonction déterministe par rapport à un mouvement brownien conduisent à la discrétisation exacte :

$$\boldsymbol{r_{t+\delta} = r_t e^{-a\delta} + b\left(1 - e^{-a\delta}\right) + \sigma \sqrt{\frac{1 - e^{-2a\delta}}{2a}} \varepsilon}$$

Où :

- $\boldsymbol{\varepsilon}$ est une variable aléatoire de loi normale centrée réduite.
- $\boldsymbol{\delta}$ est le pas de discrétisation retenu.

Le diagramme des autocorrélations partielles, indiquera un pas de discrétisation de l'ordre de 1.



Date: 03/25/09 Time: 12:04
Sample: 4/01/1999 5/14/2008
Included observations: 476

Autocorrelation	Partial Correlation		AC	PAC	Q-Stat	Prob
		1	0.991	0.991	470.73	0.000
		2	0.983	-0.003	934.24	0.000
		3	0.974	-0.029	1390.2	0.000
		4	0.964	-0.014	1838.4	0.000
		5	0.955	-0.021	2278.8	0.000
		6	0.945	-0.027	2711.0	0.000
		7	0.935	-0.025	3134.7	0.000
		8	0.924	-0.002	3550.1	0.000
		9	0.914	-0.004	3957.2	0.000
		10	0.904	-0.014	4355.9	0.000
		11	0.893	-0.002	4746.3	0.000
		12	0.883	-0.025	5128.3	0.000
		13	0.872	-0.007	5501.8	0.000
		14	0.861	0.009	5867.1	0.000
		15	0.851	-0.005	6224.2	0.000
		16	0.840	0.004	6573.5	0.000
		17	0.830	-0.005	6915.0	0.000
		18	0.820	0.001	7248.7	0.000
		19	0.809	-0.018	7574.8	0.000
		20	0.799	0.021	7893.5	0.000

Figure 10 : Corrélogramme du taux obligataire

L'estimation des paramètres du modèle s'effectue en régressant la série des taux sur la série décalée d'une période. Ce qui donne l'équation suivante :

$$\boldsymbol{r_{t+1} = r_t e^{-a} + b(1 - e^{-a}) + \sigma \sqrt{\frac{1 - e^{-2a}}{2a}} \varepsilon}$$

Assimilable à $\boxed{\boldsymbol{r_{t+1} = \alpha + \beta r_t + \sigma_1 \varepsilon}}$

Avec comme liaison, les paramètres initiaux :

$\alpha = b(1 - e^{-a})$ $\qquad$ $\beta = e^{-a}$ $\qquad$ $\sigma_1 = \sigma\sqrt{\frac{1-e^{-2a}}{2a}}$

L'estimation des paramètres du modèle par Eviews nous donne les résultats suivants :

Dependent Variable: TAUX
Method: Least Squares
Date: 03/25/09 Time: 12:11
Sample (adjusted): 4/08/1999 5/08/2008
Included observations: 475 after adjustments

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	0.000264	0.000171	1.541774	0.1238
TAUX(-1)	0.991364	0.004432	223.6662	0.0000

R-squared	0.990634	Mean dependent var	0.036578
Adjusted R-squared	0.990614	S.D. dependent var	0.012006
S.E. of regression	0.001163	Akaike info criterion	-10.67105
Sum squared resid	0.000640	Schwarz criterion	-10.65352
Log likelihood	2536.374	F-statistic	50026.56
Durbin-Watson stat	2.005104	Prob(F-statistic)	0.000000

Figure 11 : Estimation des paramètres de Modèle.

Les paramètres sont significatifs et $\mathbf{R^2 = 99{,}06\%}$. La valeur de σ_1 se déduit à partir d'analyse résiduelle, on trouve : $\boldsymbol{\sigma_1 = 0{,}001163}$

Le modèle est : $\boldsymbol{r_t = 0{,}000264 + 0{,}991364 * r_{t-1} + 0{,}001163 * \varepsilon_t}$

VI.3.2 Analyse des résidus :

VI.3.2.1 Etude d'homoscédasticité :

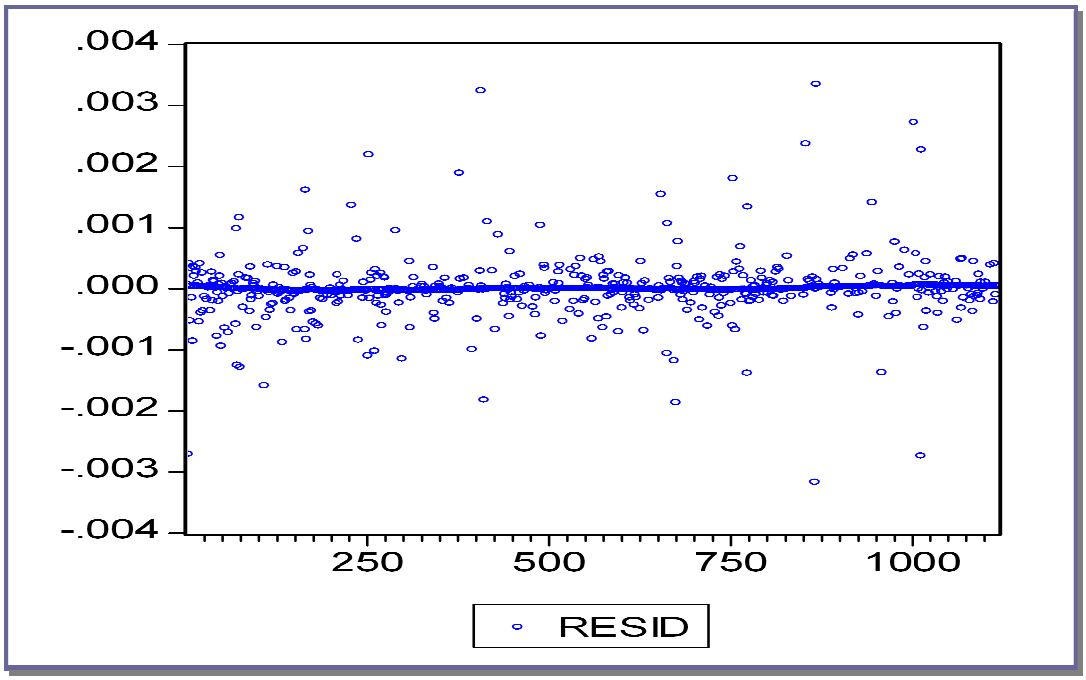
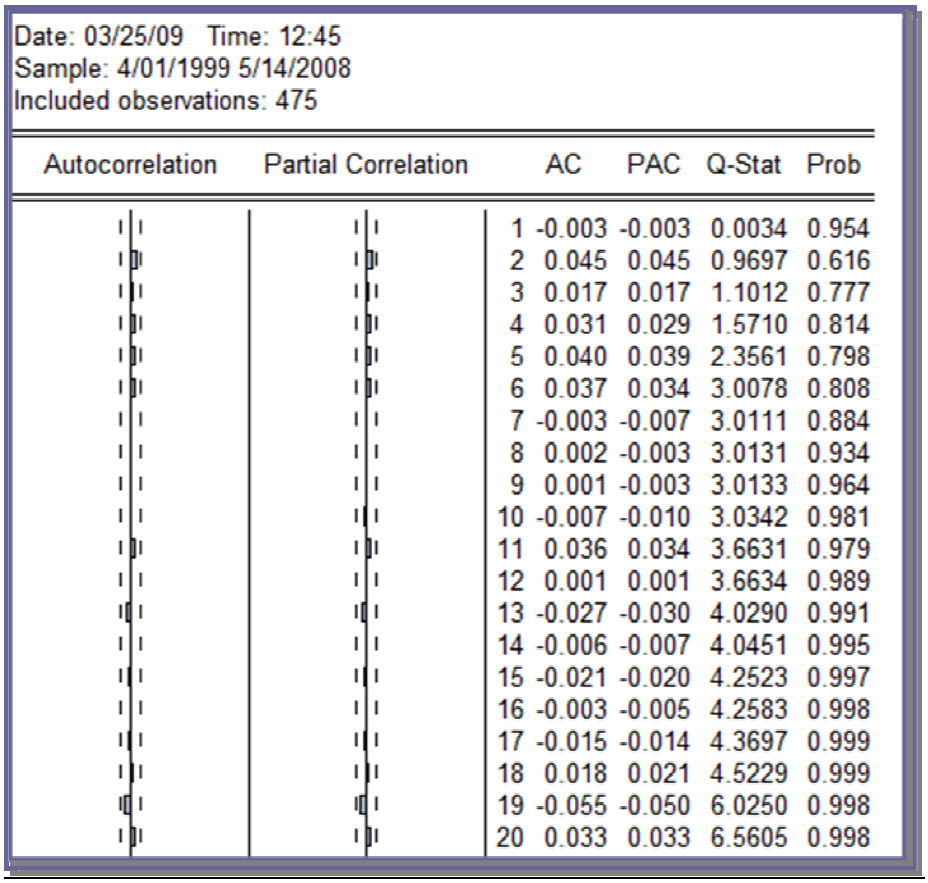


Figure 12 : Diagramme de dispersion des résidus

L'examen graphique reflète l'existence d'une dispersion des points relativement faible à part certaines observations éloignées, les résidus sont bien répartis dans une bande horizontale. Ce résultat signifie que la distribution de notre modèle est bien identifiée.

VI.3.2.2 **Test d'autocorrélation :**



Date: 03/25/09 Time: 12:45
Sample: 4/01/1999 5/14/2008
Included observations: 475

Autocorrelation	Partial Correlation		AC	PAC	Q-Stat	Prob
		1	-0.003	-0.003	0.0034	0.954
		2	0.045	0.045	0.9697	0.616
		3	0.017	0.017	1.1012	0.777
		4	0.031	0.029	1.5710	0.814
		5	0.040	0.039	2.3561	0.798
		6	0.037	0.034	3.0078	0.808
		7	-0.003	-0.007	3.0111	0.884
		8	0.002	-0.003	3.0131	0.934
		9	0.001	-0.003	3.0133	0.964
		10	-0.007	-0.010	3.0342	0.981
		11	0.036	0.034	3.6631	0.979
		12	0.001	0.001	3.6634	0.989
		13	-0.027	-0.030	4.0290	0.991
		14	-0.006	-0.007	4.0451	0.995
		15	-0.021	-0.020	4.2523	0.997
		16	-0.003	-0.005	4.2583	0.998
		17	-0.015	-0.014	4.3697	0.999
		18	0.018	0.021	4.5229	0.999
		19	-0.055	-0.050	6.0250	0.998
		20	0.033	0.033	6.5605	0.998

Figure 13 : Corrélogramme des résidus

Le diagramme montre bien qu'il y a une corrélation entre les résidus, ainsi La statistique de Durbin-Watson est de 2,005104. On rejette donc l'hypothèse d'absence d'autocorrélation et donc la dépendance des résidus.

VI.3.3 **Analyse de la normalité :**

Pour tester la normalité d'une distribution donnée, plusieurs statistiques on été mises au point. Parmi elles nous retiendrons les 4 suivantes :

VI.3.3.1 **Coefficient d'asymétrie :**

C'est un coefficient qui est donné par la relation suivante:

$$S = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}\frac{(R_t - \bar{R})^3}{\sigma^3}$$

Il permet dans notre cas d'évaluer la symétrie de la distribution des résidus. Dans le cas où d'une distribution normale, on doit trouver un coefficient d'asymétrie égal où très proche de zéro.

VI.3.3.2 **Coefficient d'aplatissement :**

Ce dernier coefficient s'ajoute au précédent pour évaluer la normalité. On peut le calculer à partir de la relation suivante:

$$\mathbf{g = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}\frac{(R_t - \bar{R})^4}{\sigma^4}}$$

Dans le cas normal il est égal à 3.

VI.3.3.3 **Statistique de Jarque Bera:**

C'est une statistique qui utilise les coefficients présentés plus haut. Elle est donnée par :

$$\mathbf{JB = \frac{N}{6}\left(S^2 + \frac{(g-3)^3}{4}\right)}$$

En supposant la normalité des résidus, la statistique de Jarque Bera suit une khi deux à deux degrés de liberté.

VI.3.3.4 **Statistique de Shapiro-Wilk :**

Le test utilisant cette statistique est bien adapté aux échantillons de moins de 5000 observations. Ce qui est notre cas ici avec moins de 500 observations pour les observations hebdomadaires du taux obligataire.

Notons qu'il existe aussi d'autres tests intéressants pour la normalité dont le test d'Anderson-Darling et celui de Lilliefors. Dans la suite, nous n'utiliserons pas les coefficients

d'aplatissements et d'asymétrie pour déterminer la normalité car étant incus dans la statistique de Jarque Bera.

VI.3.3.5 Normalité à l'aide de graphiques :

Une autre façon de vérifier la normalité des rendements serait d'analyser les graphiques Q-Q (quantiles - quantiles) ou P-P (probabilités - probabilités). Ce sont des graphiques qui permettent de comparer respectivement les quantiles (les probabilités) de l'échantillon dont on dispose à ceux d'un échantillon effectivement distribué suivant une loi normale de même moyenne et même variance. Si l'échantillon suit une loi normale, les points doivent être confondus avec un axe de pente même que celle de la première bissectrice du plan.

VI.3.3.6 Application aux résidus :

- **Tests analytiques :**

Le test qu'on effectuera, pour les résidus est le suivant :

- H0 : les résidus suivent une loi normale.
- Ha : les résidus ne suivent pas une loi normale.

Le tracé de l'histogramme des résidus de notre modèle est le suivant :

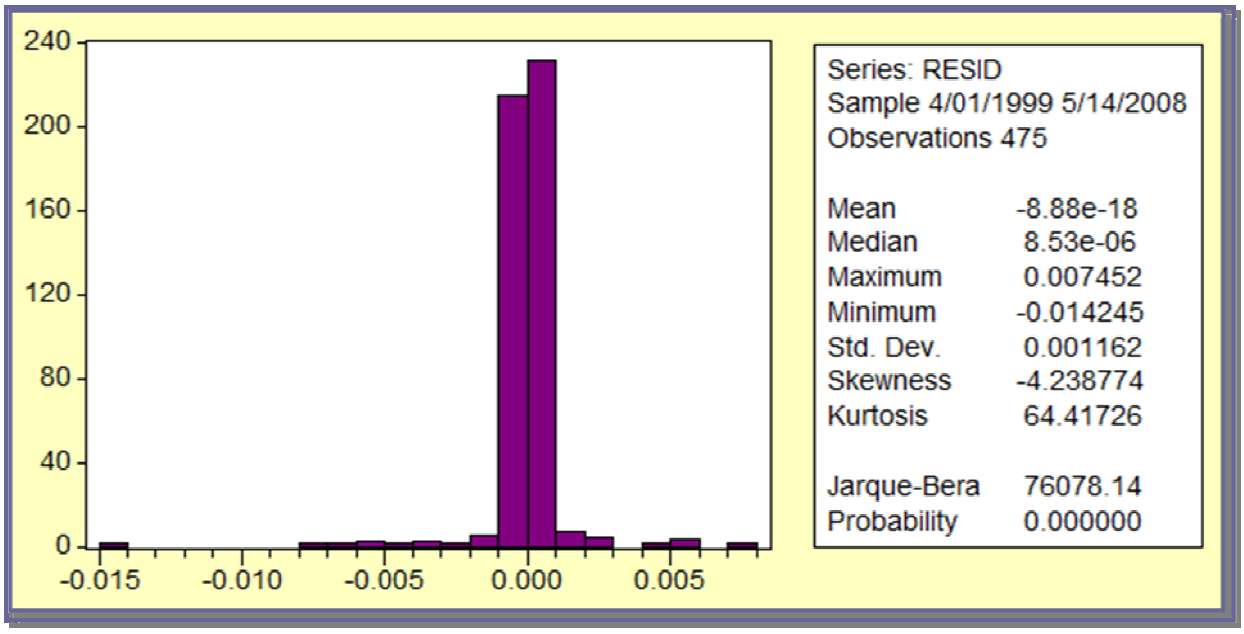


Figure 14 : Test de Jarque-Bera sur les résidus

L'histogramme montre que :

- Le coefficient d'asymétrie = -4,238774 < 0
- Le coefficient d'aplatissement = 64,41726 >> 3
- La non normalité est significative

Donc on **rejette l'hypothèse de la normalité**.

	Shapiro- Wilk
	Les résidus
W	0,509
p-value	< 0,0001
Alpha	0,05

Tableau 10: Application du test de Shapiro - Wilk sur les résidus

Etant donné que la p-value calculée est inférieure au niveau de signification alpha=0,05, on doit rejeter l'hypothèse nulle H_0, et retenir l'hypothèse alternative H_a.
Le risque de rejeter l'hypothèse nulle H_0 alors qu'elle est vraie est inférieur à 0,01%.

Le problème de la non stationnarité de la série ainsi que celui de la non normalité des résidus nous pousse à chercher une autre stratégie pour modéliser le taux obligataire. Pour cela nous allons proposer la stratégie de tests de Dickey Fuller qui permet d'étudier la non stationnarité du modèle. C'est ce que nous allons développer au point suivant.

VI.4 La stratégie de tests de Dickey Fuller :

On considère trois modèles définis comme suit :

Modèle 1 : $\Delta r_t = \varphi r_{t-1} + \sum a_i \Delta r_{t-i} + \varepsilon_t$

Modèle 2 : $\Delta r_t = \varphi r_{t-1} + \sum a_i \Delta r_{t-i} + c + \varepsilon_t$

Modèle 3 : $\Delta r_t = \varphi r_{t-1} + \sum a_i \Delta r_{t-i} + c + bt + \varepsilon_t$

Avec $\varepsilon_t \sim> N(0, \sigma^2_\varepsilon)$ et $\Delta r_{t=} r_t - r_{t-1}$.

On cherche à tester l'hypothèse de racine unitaire :

$H_0 : \varphi = 0 \qquad H_1 : \varphi < 0$

Le principe général de la stratégie de tests est le suivant : il s'agit de partir du modèle le plus général, d'appliquer le test de racine unitaire en utilisant les seuils correspondant à ce modèle, puis de vérifier par un test approprié que le modèle retenu était le "bon". En effet, si le modèle n'était pas le "bon", les seuils utilisés pour le test de racine unitaire ne sont pas valable. On risque alors de commettre une erreur de diagnostic quant à la stationnarité de la série. Il convient dans ce cas, de recommencer le test de racine unitaire dans un autre modèle, plus contraint. Et ainsi de suite, jusqu'à trouver le "bon" modèle, les "bons" seuils et bien entendu les "bons" résultats.

Appliquons la stratégie sous « Eviews », Le résultat de l'affichage pour la série est reproduit sur la figure suivante :

Augmented Dickey-Fuller Test Equation
Dependent Variable: D(TAUX)
Method: Least Squares
Date: 06/05/08 Time: 20:44
Sample (adjusted): 4 1118
Included observations: 1115 after adjustments

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
TAUX(-1)	-0.018986	0.004453	-4.263707	0.0000
D(TAUX(-1))	-0.152788	0.029657	-5.151750	0.0000
D(TAUX(-2))	-0.090199	0.029650	-3.042170	0.0024
C	0.000473	0.000123	3.837962	0.0001
@TREND(1)	1.85E-07	4.31E-08	4.290245	0.0000

R-squared	0.046585	Mean dependent var	-2.14E-06
Adjusted R-squared	0.043149	S.D. dependent var	0.000376
S.E. of regression	0.000368	Akaike info criterion	-12.97295
Sum squared resid	0.000150	Schwarz criterion	-12.95045
Log likelihood	7237.418	F-statistic	13.55886
Durbin-Watson stat	1.960618	Prob(F-statistic)	0.000000

Figure 15 : Test de Dickey Fuller sur le taux obligataire

Cette procédure nous donne la valeur des réalisations des estimateurs des MCO des différents Paramètres du modèle 3, ainsi la signification des paramètres.

On constate que l'ordre de la différentiation est 2 et tous les paramètres sont « significatifs ».

Donc le modèle est sous la forme suivante :

$$r_t = \varphi * r_{t-1} + a_1 * \Delta r_{t-1} + a_2 * \Delta r_{t-2} + c + b * t + \varepsilon_t$$

VI.4.1 Estimation des paramètres :

Le modèle obtenu par le logiciel Eviews est le suivant :

$$r_t = 0,989242 * r_{t-1} - 0,00061 * \Delta r_{t-1} + 0,046923 * \Delta r_{t-2} + 0,000392 + -2,06 * 10 - 7 * t + \varepsilon_t$$

Dependent Variable: TAUX
Method: Least Squares
Date: 03/25/09 Time: 15:36
Sample (adjusted): 4/22/1999 5/08/2008
Included observations: 473 after adjustments

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	0.000392	0.000433	0.905069	0.3659
TAUX(-1)	0.989242	0.007784	127.0843	0.0000
D(TAUX(-2))	0.046923	0.046387	1.011571	0.3123
D(TAUX(-1))	-0.000610	0.046384	-0.013158	0.9895
@TREND	-2.06E-07	6.86E-07	-0.301138	0.7634

R-squared	0.990503	Mean dependent var	0.036479
Adjusted R-squared	0.990422	S.D. dependent var	0.011935
S.E. of regression	0.001168	Akaike info criterion	-10.65657
Sum squared resid	0.000638	Schwarz criterion	-10.61260
Log likelihood	2525.278	F-statistic	12203.27
Durbin-Watson stat	2.001878	Prob(F-statistic)	0.000000

Figure 16 : Estimation des paramètres du Modèle

La comparaison entre l'évolution du taux réel obligataire et le taux estimé à partir de la formule ci-dessus montre une superposition des deux courbe ce qui signifie que le modèle s'ajuste mieux aux données réelles.

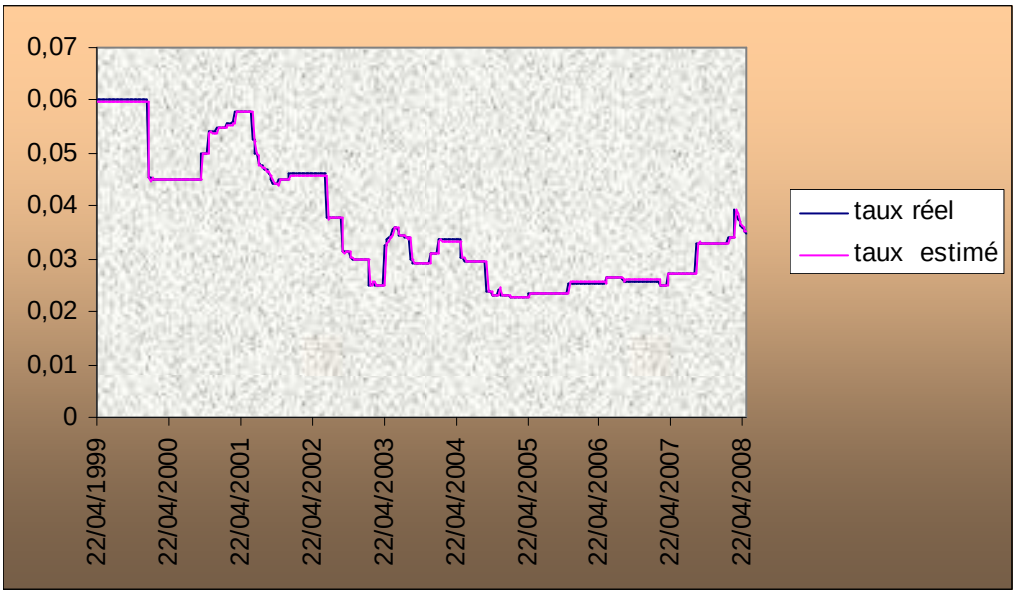


Figure 17 : Evolution du taux réel et le taux estimé

VI.4.2 Analyse résiduelle :

VI.4.2.1. Etude d'homoscédasticité :

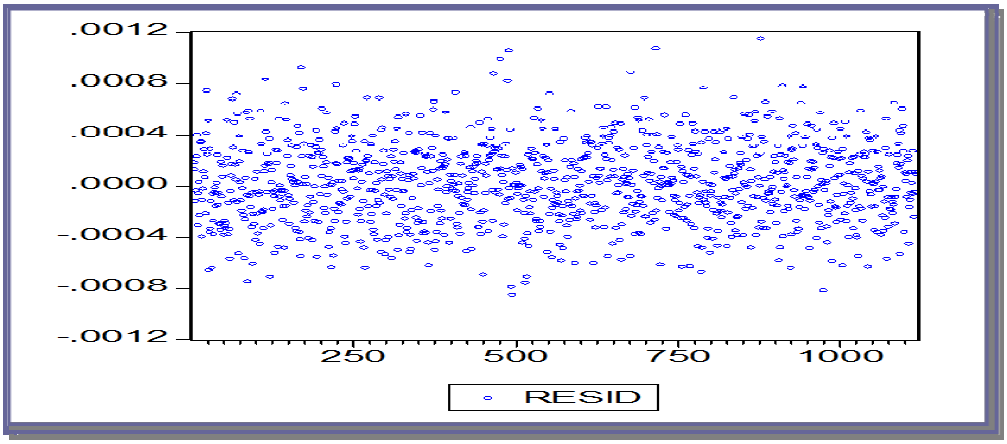


Figure 18 : Diagramme de dispersion des résidus

L'examen graphique montre l'existence d'une dispersion des points relativement forte, les résidus sont bien répartis dans tout l'espace. Ce résultat signifie que la distribution de notre modèle est bien identifiée.

VI.4.2.2 Test d'autocorrélation :

Date: 03/25/09 Time: 16:05
Sample: 4/22/1999 5/08/2008
Included observations: 473

Autocorrelation	Partial Correlation		AC	PAC	Q-Stat	Prob
		1	-0.001	-0.001	0.0005	0.982
		2	-0.002	-0.002	0.0019	0.999
		3	0.017	0.017	0.1402	0.987
		4	0.030	0.030	0.5619	0.967
		5	0.042	0.042	1.4086	0.923
		6	0.037	0.038	2.0824	0.912
		7	-0.002	-0.003	2.0850	0.955
		8	0.003	0.001	2.0891	0.978
		9	0.001	-0.003	2.0894	0.990
		10	-0.005	-0.009	2.1015	0.996
		11	0.039	0.036	2.8404	0.993
		12	0.003	0.002	2.8451	0.997
		13	-0.026	-0.026	3.1861	0.997
		14	-0.004	-0.005	3.1942	0.999
		15	-0.017	-0.019	3.3370	0.999
		16	-0.003	-0.005	3.3403	1.000
		17	-0.010	-0.011	3.3898	1.000
		18	0.018	0.021	3.5429	1.000
		19	-0.054	-0.050	4.9604	0.999
		20	0.033	0.036	5.5104	0.999
		21	0.015	0.017	5.6211	1.000
		22	-0.000	0.000	5.6211	1.000
		23	-0.012	-0.011	5.6887	1.000
		24	0.014	0.016	5.7878	1.000
		25	-0.028	-0.028	6.1877	1.000

Figure 19 : Corrélogramme des résidus

Le diagramme montre que la corrélation entre les résidus est presque nulle, ainsi La statistique de Durbin-Watson est 2,00. Alors on accepte l'hypothèse d'absence d'autocorrélation et donc l'indépendance des résidus.

VI.4.2.3 Test de normalité :

L'histogramme des résidus de notre modèle montre que :

- Le coefficient d'asymétrie = 0,168
- Le coefficient d'aplatissement = 3,07
- La non normalité est non significative.

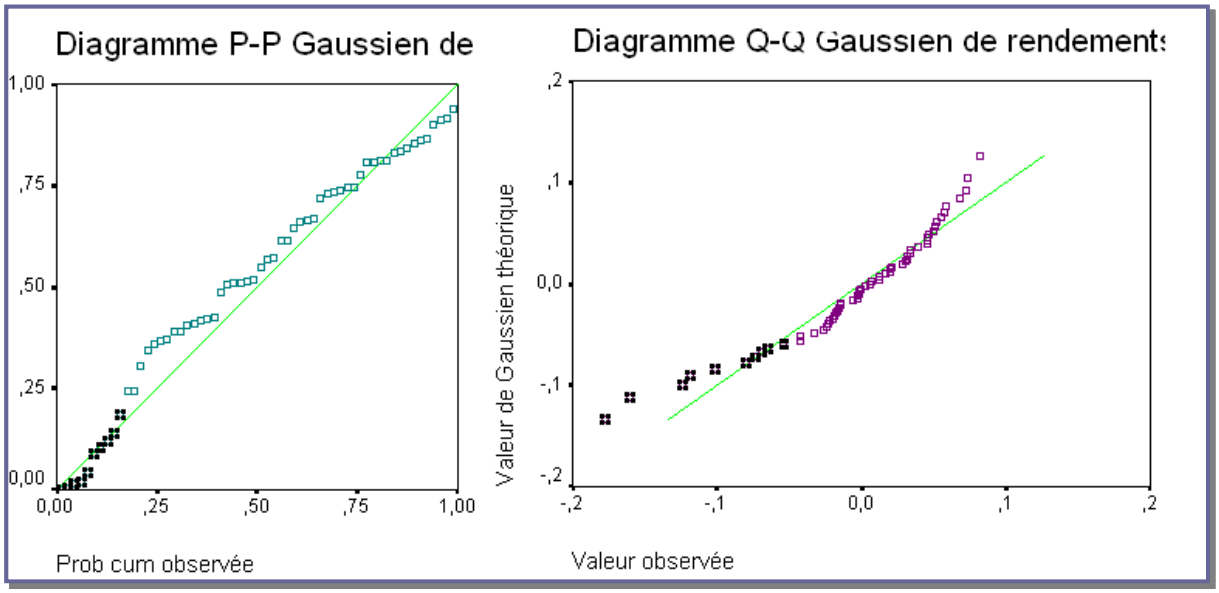


Figure 20 : Les diagrammes de Q-Q plot et P-P plot pour les résidus

Graphiquement aussi nous ne pouvons pas accepter la normalité des résidus, car les points des graphiques ne sont pas confondus avec la première bissectrice. Ce qui ne nous permet pas d'accepter la normalité des résidus. Pour lever le doute, il faudrait donc se baser sur les tests statistiques effectués plus haut pour décider de la normalité.

VII. Modélisation du taux d'intérêt :

Pour élaborer un modèle interne nécessaire de fixer une dynamique pour les taux d'intérêt.

Dans un premier temps, nous présenterons la dynamique retenue pour le taux court terme, à savoir le modèle de Vasicek.

Un deuxième point présentera la construction de la courbe des taux initiale au départ des données de marché. La construction de la courbe initiale se fera à partir des taux interbancaires.

Dans un troisième point, nous estimerons les paramètres de la dynamique du taux au départ des données de marché.

Enfin, nous expliquerons la manière dont sont générés les taux futurs et présenterons deux variables construites au départ de cette courbe des taux dont nous aurons besoin par la suite : le taux à 10 ans, qui interviendra dans la modélisation du fonds obligataire, ainsi que les facteurs d'actualisation.

VII.1. La dynamique des taux court terme :

Dans le cadre de cette illustration, nous avons choisi de modéliser le taux court à l'aide du modèle de Vasicek. Nous avons choisi ce modèle en raison de la relative facilité à le mettre en place en pratique.

Le taux d'intérêt instantané r(t) dans le modèle de Vasicek obéit à un processus d'Ornstein-Uhlenbeck :

$$\boxed{dr_t = a(b - r_t)dt + \sigma dw_t}$$

Avec : $b = \lim E(r(t))$ et $\lim var(r(t)) = \frac{\sigma^2}{2a}$

Où : r(t) : taux d'intérêt continu instantané (taux court) ;

a : vitesse de retour à la moyenne ;

b : cible mouvante du taux

σ : volatilité instantanée, supposée constante ;

w(t) : mouvement brownien standard.

La solution de ce modèle s'écrit sous la forme :

$$\boxed{r_t = r_0 e^{-at} + b(1 - e^{-at}) + \sigma e^{-at} \int_0^t e^{as} dw(s)}$$

Les propriétés de l'intégrale d'une fonction déterministe par rapport à un mouvement brownien conduisent à la discrétisation exacte :

$$r_{t+1} = r_t e^{-a} + b(1 - e^{-a}) + \sigma \sqrt{\frac{1 - e^{-2a}}{2a}} \varepsilon$$

On rappelle que l'équation du taux d'intérêt instantané retenue par Vasicek, exprimée dans l'univers historique, ne suffit pas à définir le prix des zéro-coupons, et doit être complétée par la forme de la prime de risque. Celle-ci est choisie constante dans le modèle de Vasicek, ce qui permet de conserver la même forme de la dynamique dans l'univers corrigé du risque.

VII.1.1. **Estimation des paramètres :**

L'estimation de ces deux paramètres est réalisée sur base de données historiques à l'aide d'une méthode décrite par PLANCHET et THEROND P. (2004).

La discrétisation exacte conduit donc à un processus auto-régressif d'ordre 1, AR(1).

L'estimation des paramètres du modèle s'effectue classiquement en régressant la série des taux courts sur la série décalée d'une période, que l'on écrit sous la forme usuelle :

$$Y = \alpha + \beta X + \sigma_1 \varepsilon$$

Avec :

$$a = -\ln\beta;\ b = \frac{\alpha}{1-\beta};\ \sigma^2 = \sigma_1^2 \frac{2\ln\beta}{\beta^2 - 1}$$

L'estimateur du maximum de vraisemblance (EMV) coïncide avec l'estimateur des moindres carrés ; on obtient ainsi les estimateurs suivants des paramètres du modèle d'origine :

$$\hat{a}_{exact} = -\ln\hat{\beta};\ \hat{b}_{exact} = \frac{\hat{\alpha}}{1-\hat{\beta}};\ \hat{\sigma}^2{}_{exact} = \hat{\sigma}_1^2 \frac{2\ln\hat{\beta}}{\hat{\beta}^2 - 1}$$

L'estimation des paramètres via le logiciel SPSS nous donne les résultats suivants :

α	β	σ_1
0,000264	0,991364	0,001163

Nous déduisons ainsi les paramètres du modèle de Vasicek

a	b	σ
0,0867351	0,03056971	0,00890695

VII.1.2. Simulation des taux futurs et calculs dérivés :

II.1.2.1. Simulation des taux courts :

Pour rappel, les taux futurs sont simulés par discrétisation de pas d'un an :

$$r_{t+1} = r_t e^{-a} + b(1 - e^{-a}) + \sigma \sqrt{\frac{1 - e^{-2a}}{2a}} \varepsilon$$

Où ε représente une normale centrée réduite.

Comme expliqué précédemment, le taux court terme nous permet tout d'abord d'estimer les prix des zéro coupons nécessaires pour l'actualisation des flux et ensuite de calculer les taux longs futurs qui interviendront dans l'indice obligataire.

VII.1.2.2. Structure des taux Zéro Coupon dans Vasicek :

Les taux simulés permettent de reconstituer le prix des obligations zéro coupon. Il peut être démontré que le prix d'un zéro coupon en t et de maturité s est lié au taux court r par la relation explicite suivante :

$$P(t, s, r) = \exp\left(\frac{1}{a}\left(1 - e^{-a(s-t)}\right)(\alpha - r) - (s - t)\alpha - \frac{\sigma^2}{4a^3}\left(1 - e^{-a(s-t)}\right)^2\right)$$

Avec : $\alpha = b + \frac{b\lambda}{a} - \frac{\sigma^2}{2a^2}$

Les prix de ces zéro coupons nous serviront à l'actualisation des flux.

VII.1.2.3. Taux de maturité T :

Les taux longs de maturité T sont obtenus au départ des prix de zéro coupon B(t,T). En effet :

$$R(t, T) = \frac{-\ln(B(t, T))}{T}$$

Ainsi nous représentons les taux réels obligataires et le taux estimé via le premier modèle et le taux obtenu en utilisant le processus de retour à la moyenne :

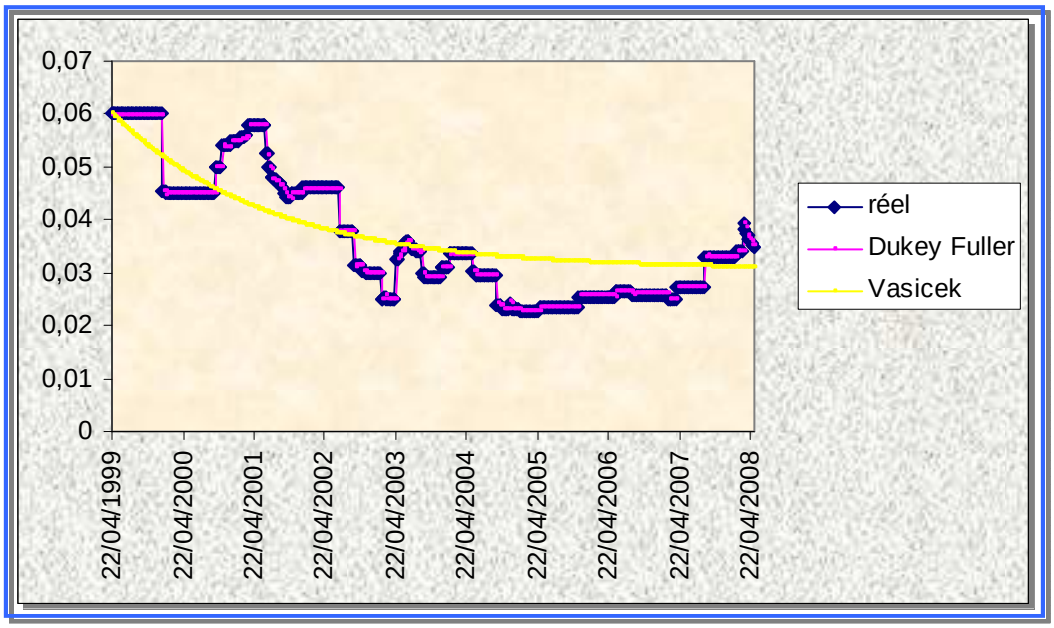


Figure 21 : Comparaison entre les taux obligataires réel et estimé par la stratégie de Dukey Fuller et le modèle de Vasicek

Conclusion : Il est évident que La stratégie de tests de Dickey Fuller permet de trouver un modèle du taux sans risque de marché respectant toutes les hypothèses que le modèle stochastique de Vasicek. Donc on va prendre dans la suite de ce projet le dernier modèle pour prévoir les valeurs futures du taux obligataire car il est plus performant que l'autre.

Avant de passer au point suivant, il faut signaler que la discrétisation conduit à des estimations biaisées. Pour remédier à ce problème, on devrait utiliser une des techniques d'estimations fondées sur des simulations, comme les procédures d'inférence indirecte chez Smith (1991) ou Gouriéroux, Monfort et Renault (1993).

Dans notre cas, nous n'allons pas utiliser ces techniques, car nous n'avons pas trouvé les références pour tirer la méthodologie.

VIII. Structure de taux et problème de la prime de risque du marché :

D'après la partie précédente, le rendement, R(t,T), d'une obligation zéro-coupon, de maturité T, à la date t est donné pour le processus de retour vers la moyenne sous la forme suivante :

$$R(t,T) = -\frac{1}{T-t}\left[\frac{1}{a}\left(e^{-(T-t)a}-1\right)r(t) + \frac{\sigma^2}{4a^3}\left(1-e^{-2(T-t)a}\right) + \frac{1}{a}\left\{b-\frac{\lambda}{a}-\frac{\sigma^2}{a^2}\right\}\left(1-e^{-(T-t)a}\right) - \left\{b-\frac{\lambda}{a}-\frac{\sigma^2}{2a^2}\right\}(T-t)\right]$$

Il nous reste maintenant un seul paramètre à estimer afin de déterminer les prix des obligations zéro-coupon. Il s'agit de la prime de risque exprimée par ë. Cette variable mesure le point auquel les investisseurs exigent des rendements plus élevés pour les compenser du risque auquel ils seront exposés en détenant une obligation. Malheureusement, cette prime du risque n'est pas directement observée sur le marché.

Nous allons supposer donc, dans un premier cas, que la prime de risque est nulle, et dans le deuxième cas, nous allons l'estimer par la méthode des moindres carrés.

VIII.1. **Prime de risque nulle :**

Cette hypothèse peut s'avérer raisonnable du fait que les instruments financiers qui vont nous permettre d'estimer la courbe des taux sont des obligations. Ces derniers peuvent être considérées quasiment sans risque. Cependant, cette hypothèse s'avère incertaine et, donc, affectera l'exactitude d'évaluation mais elle laisse traiter le modèle dans un milieu d'absence de risque.

Donc en prenant ë = 0, l'expression de R(t,T) aura la forme suivante :

$$R(t,T) = -\frac{1}{T-t}\left[\frac{1}{a}\left(e^{-(T-t)a}-1\right)r(t) + \frac{\sigma^2}{4a^3}\left(1-e^{-2(T-t)a}\right) + \frac{1}{a}\left\{b-\frac{\sigma^2}{a^2}\right\}\left(1-e^{-(T-t)a}\right) - \left\{b-\frac{\sigma^2}{2a^2}\right\}(T-t)\right]$$

Dans ce qui suit, nous allons prendre la courbe des taux zéro-coupon du marché au 23 mars 2009. Cette courbe de taux est obtenue en utilisant la méthode itérative, et, en interpolant pour des maturités manquantes vu que les bons du trésor existant sur le marché ne sont pas disponibles pour toutes les maturités.

Les calculs étant fait par le logiciel XLSTAT, on obtient les taux zéro-coupon pour différentes maturités. Ce résultat est présenté dans le Tableau suivant :

maturité	Taux zéro coupon	maturité	Taux zéro coupon
1j	0,028	5A	0,0363
7j	0,028	6A	0,0379
1m	0,0281	7A	0,0396
2m	0,0283	8A	0,0413
3m	0,0284	9A	0,043
4m	0,0285	10A	0,0447

5m	0,0287	11A	0,0464
6m	0,0288	12A	0,0481
7m	0,0289	13A	0,0498
8m	0,0291	14A	0,0515
9m	0,0292	15A	0,0532
10m	0,0294	16A	0,0549
11m	0,0295	17A	0,0566
1A	0,0296	18A	0,0584
2A	0,0313	19A	0,0601
3A	0,0329	20A	0,0618
4A	0,0346		

Tableau 11 : Taux zéro-coupon du marché.

En remplaçant maintenant les paramètres ç, r et s par leurs valeurs estimées, et en considérant une base de 365 jours avec le TMP du 26/03/2009 qui égal à 3,250%, on trouve :

$$\boldsymbol{R(t,T) = 0,02784 - \frac{1}{T-t}\left[0,061\left(e^{-0,0716(T-t)} - 1\right) + 0,0036\left(1 - e^{-0,1432(T-t)}\right)\right]}$$

On peut maintenant calculer les taux théoriques, et par suite, construire la courbe des Taux T→R(26/03/2009,T). Les résultats sont présentés dans le Tableau suivant.

maturité	Taux zéro coupon	maturité	Taux zéro coupon
1j	0,022957409	5A	0,023800558
7j	0,022960585	6A	0,023943589
1m	0,022972728	7A	0,024079313
2m	0,022988503	8A	0,024208189
3m	0,023004204	9A	0,024330643
4m	0,023019832	10A	0,024447068
5m	0,023035388	11A	0,02455783
6m	0,023050871	12A	0,024663268
7m	0,023066283	13A	0,024763697
8m	0,023081624	14A	0,024859409
9m	0,023096893	15A	0,024950678
10m	0,023112093	16A	0,025037759
11m	0,023127222	17A	0,025120887
1A	0,023144785	18A	0,025200285
2A	0,023322444	19A	0,025276158
3A	0,023490546	20A	0,025348701
4A	0,023649723		

Tableau 12 : Taux zéro-coupon théoriques

Traçons maintenant les deux courbes de taux zéro coupons obtenues par le modèle théorique et celle du marché afin de comparer les taux zéro-coupon théoriques avec ceux calculés sur le marché.

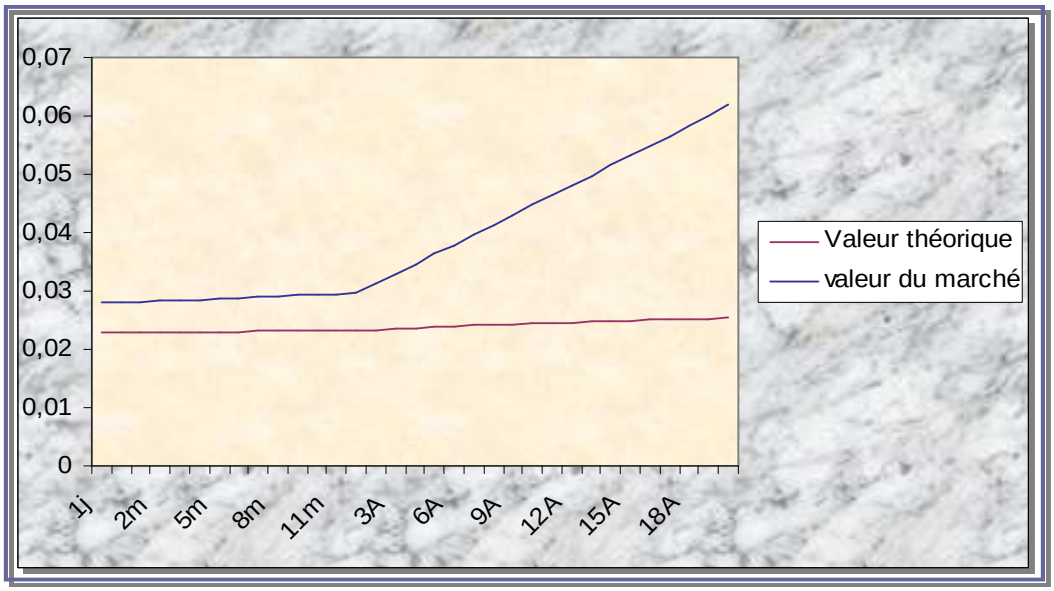


Figure 22 : Courbe du taux théorique et du taux du marché.

Nous voyons clairement que, plus la maturité est grande plus l'écart entre les taux théorique et taux du marché augmente.

Variable	Observations	Minimum	Maximum	Moyenne	Ecart-type
Taux théorique	33	0,023	0,025	0,024	0,001
Taux du marché	33	0,028	0,062	0,039	0,011

Tableau 13 : Statistiques descriptives :

Les taux théoriques atteignent un maximum de 2,495% pour une maturité de 15 ans, ce qui est loin de 5,118% observé sur le marché pour la même maturité.

On constate donc que, les taux théoriques obtenus par le processus de retour vers la moyenne, restent éloignés de ceux donnés par le marché pour le 26/03/2009.

Pour confirmer ce résultat, nous avons effectué un test d'adéquation. Il s'agit du test de Mann Whitney. Ce test permet de tester si deux échantillons indépendants sont extraits de la même population ou de populations ayant la même distribution.

- H_0 : La différence de position des échantillons est égale à 0.
- Ha : La différence de position des échantillons est différente de 0.

U	0,000
Espérance	544,500
Variance (U)	6080,123
p-value (bilatérale)	< 0,0001
Alpha	0,05

Tableau 14 : Test d'adéquation

On remarque que la valeur de la p-value est inférieure au seuil á = 5%. On peut donc rejeter l'hypothèse nulle selon laquelle les deux échantillons ne sont pas différents. Le risque de rejeter l'hypothèse nulle H0 alors qu'elle est vraie est inférieur à 0,01%

Autrement dit : **la différence entre les taux théoriques et ceux du marché est significative**.

VIII.2. Prime de risque estimée :

Pour estimer la prime de risque du marché f pour les différentes maturités, il nous suffit d'estimer la constante ë et ainsi via la formule : $\boldsymbol{\phi(t,T) = {}^{\lambda}/_{\eta}\left(e^{-(T-t)\eta} - 1\right)}$

On remonte à toutes les primes de risque pour les différentes maturités.

Nous allons donc calculer la prime de risque de manière à minimiser les erreurs entre les taux zéro coupon réels du marché et ceux obtenus par le processus de retour vers la moyenne.

La méthode d'estimation que nous allons utiliser est celle des moindres carrés. Nous allons alors estimer ë avec l'équation suivante :

$$\boldsymbol{R(t,T) = -\frac{1}{T-t}\left[\frac{1}{a}\left(e^{-(T-t)a} - 1\right)r(t) + \frac{\sigma^2}{4a^3}\left(1 - e^{-2(T-t)a}\right)\right.}$$
$$\boldsymbol{\left. + \frac{1}{a}\left\{b - \frac{\sigma^2}{a^2}\right\}\left(1 - e^{-(T-t)a}\right) - \left\{b - \frac{\sigma^2}{2a^2}\right\}(T-t)\right]}$$
$$\boldsymbol{- \lambda\left(\frac{1}{a} + \frac{e^{-(T-t)a} - 1}{(T-t)a^2}\right)}$$

On pose : $U(T-t) = \left(\frac{1}{a} + \frac{e^{-(T-t)a} - 1}{(T-t)a^2}\right)$

Le résultat de l'estimation est présenté dans le Tableau suivant:

Dependent Variable: MARCHE
Method: Least Squares
Date: 03/27/09 Time: 21:32
Sample: 1 33
Included observations: 33
MARCHE=THEORIQ - C(1)*U

	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C(1)	-0.005358	0.000161	-33.32930	0.0000

R-squared	0.925716	Mean dependent var	0.038936
Adjusted R-squared	0.925716	S.D. dependent var	0.011415
S.E. of regression	0.003111	Akaike info criterion	-8.677891
Sum squared resid	0.000310	Schwarz criterion	-8.632542
Log likelihood	144.1852	Durbin-Watson stat	0.014961

Figure 23 : Estimation de λ avec la méthode des moindres

Où : **MARCHE** **:** représente le taux zéro-coupon du marché.

THEORIQ **:** représente le taux zéro-coupon théorique**.**

U **:** représente la valeur définie à l'équation (64).

C(1) **:** représente la constante λ.

L'estimation par la méthode des moindres carrés ordinaires nous donne un $\lambda = -0.005358$ avec rejet de l'hypothèse de nullité de ce coefficient au niveau de confiance de 95%.

La prime de risque $\phi(t,T) = \lambda/\eta\,(e^{-(T-t)\eta} - 1)$ est présentée, pour chacune des maturités considérées :

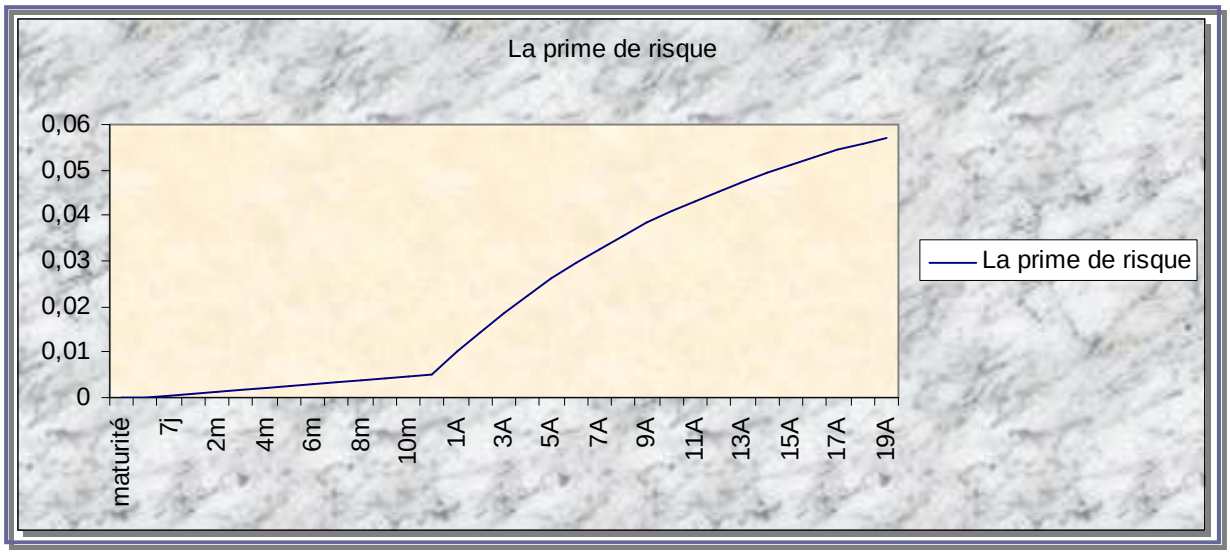


Figure 24 : Prime de risque estimée

On remarque sur cette figure que la prime de risque estimée croit avec la maturité, ce qui est tout à fait raisonnable.

Dans la suite, nous allons comparer la courbe des taux théoriques obtenue, en considérant la prime du risque estimée, et celle des taux du marché. Cette comparaison est donnée par la figure ci-dessous.

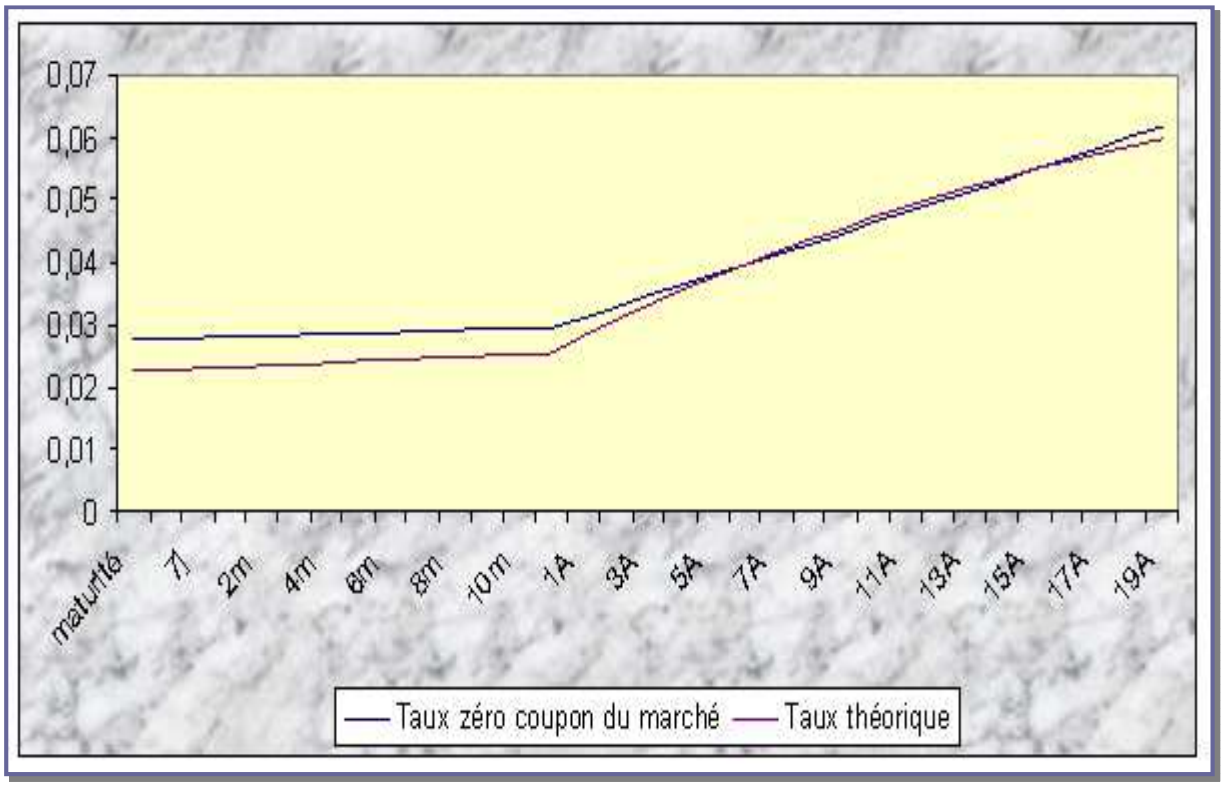


Figure 25 : Les courbes des taux zéro-coupon théorique et taux zéro-coupon du marché

On voit clairement que les deux courbes sont très proches. Elles sont quasiment identiques à partir du taux 3,76%.

On peut alors affirmer que le processus de retour vers la moyenne nous a permis d'obtenir une courbe qui s'ajuste mieux aux données du marché national.

Pour confirmer ceci, nous avons effectué le test de Mann Whitney. Le résultat de ce test est donné par le tableau suivant.

Z (valeur observée)	1,417
Z (valeur critique)	1,960
p-value bilatérale	0,156
Alpha	0,05

Tableau 15 : Test d'adéquation

IV. Simulation des valeurs futures du fonds d'obligation :

Pour simuler l'évolution du fonds des obligations, nous avons projeté notre portefeuille sur une période de 40 ans à partir de l'année 2009 en utilisant 25 scénarios.

Pour chaque scénario, on génère 40 échantillons aléatoires de la loi normale N(0 ; 1) de taille 1000.

Pour chaque t = 1, … , 40 ; on calcule la moyenne de l'échantillon généré : $N_b(t)$.

A l'aide d'une discrétisation d'Euler, nous procédons par discrétisation de pas de un an.

On applique la formule suivante :

$$\mathbf{B(t) = B(t-1).\exp\left(R(t-1,T-1) + \left(\lambda - \frac{\sigma_b^2}{2}\right) + \sigma_b.N_b(t)\right)}$$

Le graphe représentant l'évolution du fonds d'action est le suivant :

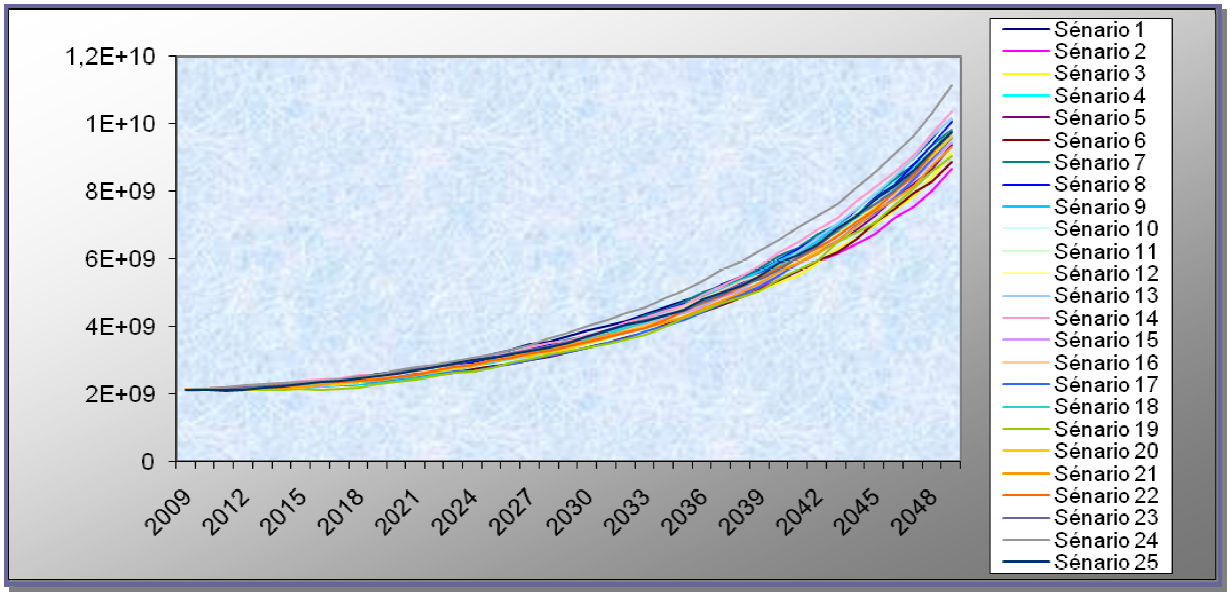


Figure 26 : Evolution stochastique du fonds d'obligation

Disons pour conclure, que notre portefeuille est passé de 2 milliards de dirhams à 10 milliards de dirhams au bout de 40 ans.

Nous présenterons dans le chapitre qui suit d'une manière analogue la modélisation du fonds d'action de notre portefeuille.

CHAPITRE 4

Modélisation du fonds de l'action

Le but de ce chapitre est de modéliser le taux de rendement futur des actions en vue d'établir la distribution de la valeur actuelle des résultats ainsi que des prestations par le calcul de ces flux sur différentes réalisations du taux de rendement des actifs

Pour ce fait, nous avons utilisé l'indice MASI qui rassemble toutes les valeurs cotées sur la place casablancaise. La durée d'observation s'étend du 01/04/1999 jusqu'au 24/03/2009

Nous modéliserons le fonds de l'action par un mouvement brownien géométrique pour tracer une évaluation stochastique de ce fonds.

I. Les indices boursiers :

Baromètres de l'évolution boursière, les indices sont les principaux indicateurs de tendance d'une place financière. Ils regroupent un panier d'actions, dont le suivi retrace, de manière plus ou moins parfaite selon le nombre de valeurs retenues, l'évolution instantanée du marché. De ce fait, chaque marché boursier s'est muni de son indice.

La bourse de Casablanca quand à elle, a développé une gamme homogène d'indices de capitalisation dont les plus importants sont: le MASI et le MADEX.

La plupart des grands indices boursiers sont calculés en additionnant les capitalisations boursières des sociétés le composant puis en divisant la somme obtenue par une valeur constante de façon à ce que la valeur de l'indice soit un nombre relativement petit.

I.1 Le MASI- Moroccan All Shares Index:

C'est un indice qui intègre toutes les valeurs de type actions cotées à la Bourse des Valeurs de Casablanca -BVC. Il a pour objectif de présenter l'évolution du marché dans son ensemble et de fournir une mesure de référence à long terme pour la gestion du portefeuille actions. Il est large, dans la mesure où il permet de suivre de façon optimale le développement de l'ensemble de la population de valeurs de la cote.

Le nombre de valeurs composant son échantillon évolue en fonction des admissions à la cote, des radiations et des opérations de fusion, absorption, etc.…

I.2 Le MADEX- Moroccan Most Active Shares Index:

Il est composé des valeurs les plus actives de la cote dont les variations sont fortement corrélées à l'ensemble du marché en terme de liquidité. Son échantillon de base compte 10 valeurs : Il s'agit des plus grandes sociétés telles que la BCM, la BMCE, WAFABANK, ONA-SNI, SAMIR, SONASID, MANAGEM , WAFA-ASSURANCE…

C'est un instrument particulièrement adapté à la gestion de portefeuille. Il est destiné à devenir le principal indice de référence, particulièrement pour l'indexation des fonds investis en actions.

La formation et les changements d'échantillons de cet indice s'effectuent chaque semestre parallèlement à la révision du listing des actions cotées en continu (La cotation sans interruption de 10h00 à 15h30 GMT à la Bourse de Casablanca).

Certes, l'indice de MADEX est plus stable ; mais pour modéliser l'actif on a choisi l'indice MASI car il représente au mieux l'économie. En effet il présente l'évolution du marché dans son ensemble et fournit une référence à long terme.

II. Présentation et analyse des données :

II.1 Présentation des données :

La performance des actions est calculée à partir de l'indice MASI.

La période d'observation couvrant les différents paramètres est étalée sur 10 ans : du jeudi 01/04/1999 au mardi 24/03/2009. Soit un total de : 2604 observations journalières.

II.1.1 Evolution des cours de l'indice de MASI :

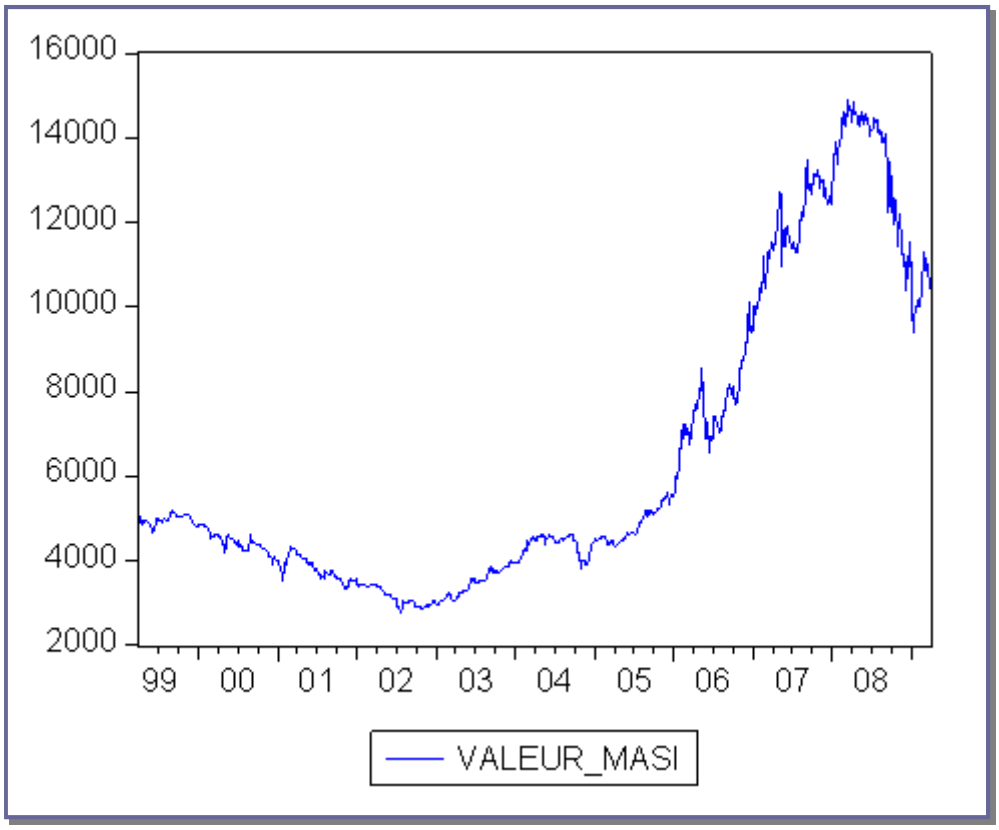


Figure 27 : Evolution des cours de MASI

D'après ce graphe, on peut dire que, malgré les fluctuations apparentes à la hausse ou à la baisse, la valeur de MASI a connu 3 phases :

- Phase de faible décroissance du début d'avril 1999 à la fin de juin 2002.
- Phase de forte croissance du début juillet 2002 à la fin de juin 2008 : au cours de cette période, la valeur de MASI est passée de 2.786,44 à 14.925,99.

- Phase de forte décroissance du début juillet 2008 à la fin de mars 2009 : on remarque que cette valeur a connu une tendance baissière au cours de cette période est cela est surement dû à la crise financière qu'a connu le monde et en particulier le Maroc.

II.1.2 Série des données des rendements de l'indice de MASI :

Le rendement à l'instant t : μ_t est donné par la formule suivante :

$$\boldsymbol{\mu_t = Log(p_t) - Log(p_{t-1})}$$

Où $\boldsymbol{p_t}$: valeur de l'indice de MASI à la date t.

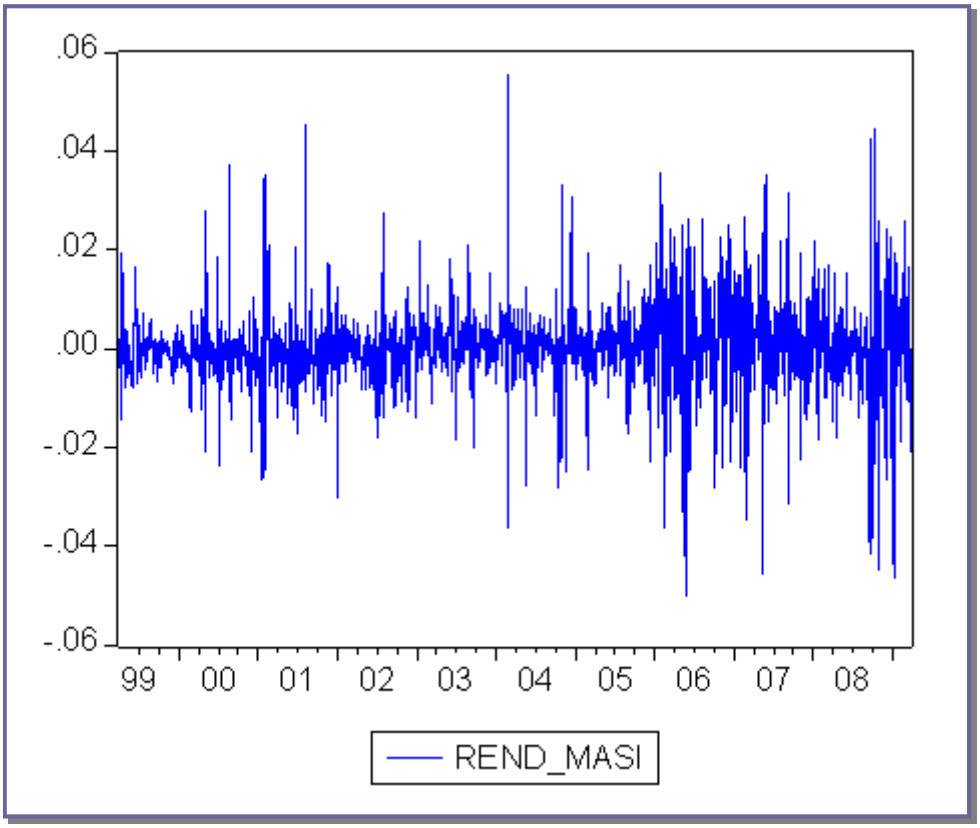


Figure 28 : Représentation de la série des données des rendements de MASI
Source : site de la bourse de Casablanca

On remarque que les rendements quotidiens sont compris entre -6% et 6% durant ces 10 ans d'analyse.

A première vue, on peut dire que cette série chronologique de données est stationnaire. En fait, pour vérifier cette stationnarité, nous présenterons le test de racine unitaire. Les résultats obtenus à l'aide du logiciel Eviews sont présentés dans le tableau ci-dessous :

Augmented Dickey-Fuller Unit Root Test on REND_MASI

Null Hypothesis: REND_MASI has a unit root
Exogenous: Constant
Lag Length: 0 (Automatic based on SIC, MAXLAG=27)

		t-Statistic	Prob.*
Augmented Dickey-Fuller test statistic		-36.96935	0.0000
Test critical values:	1% level	-3.432674	
	5% level	-2.862453	
	10% level	-2.567301	

*MacKinnon (1996) one-sided p-values.

Augmented Dickey-Fuller Test Equation
Dependent Variable: D(REND_MASI)
Method: Least Squares
Date: 03/30/09 Time: 12:07
Sample (adjusted): 4/05/1999 3/24/2009
Included observations: 2598 after adjustments

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
REND_MASI(-1)	-0.690572	0.018680	-36.96935	0.0000
C	0.000190	0.000155	1.228173	0.2195

R-squared	0.344897	Mean dependent var	-8.60E-06
Adjusted R-squared	0.344644	S.D. dependent var	0.009736
S.E. of regression	0.007881	Akaike info criterion	-6.847866
Sum squared resid	0.161252	Schwarz criterion	-6.843353
Log likelihood	8897.378	F-statistic	1366.733
Durbin-Watson stat	1.983052	Prob(F-statistic)	0.000000

Figure 29 : Test de racine unitaire

On remarque donc, que la valeur absolue de la statistique t du test (égale à 36,96) est plus grande que la valeur absolue de t tabulé au seuil de 5% (égale à 2,86). On rejette donc l'hypothèse H0 de la présence d'une racine unitaire et on conclut que la série des rendements quotidiens est stationnaire.

Les différentes statistiques relatives à la série de données du taux moyen pondéré sont résumées dans le tableau suivant :

Moyenne	**0,000279**
Médiane	0,000000
Maximum	0,055637
Minimum	-0,050167
Ecart-type	0,008281
Skewness	-0,111004
Kurtosis	9,654327

Tableau 16 : Statistiques descriptives

II.1.3 Test de normalité :

Pour tester l'hypothèse H0 de la normalité de la distribution, nous avons effectué le test de Jarque Bera fondé sur la notion de Skewness (asymétrie) et (aplatissement).

D'après le tableau, nous avons :

$$v_1 = \frac{\beta_1 - 0}{\sqrt{6/n}} = \frac{-0{,}11}{\sqrt{6/2604}} = -2{,}25$$

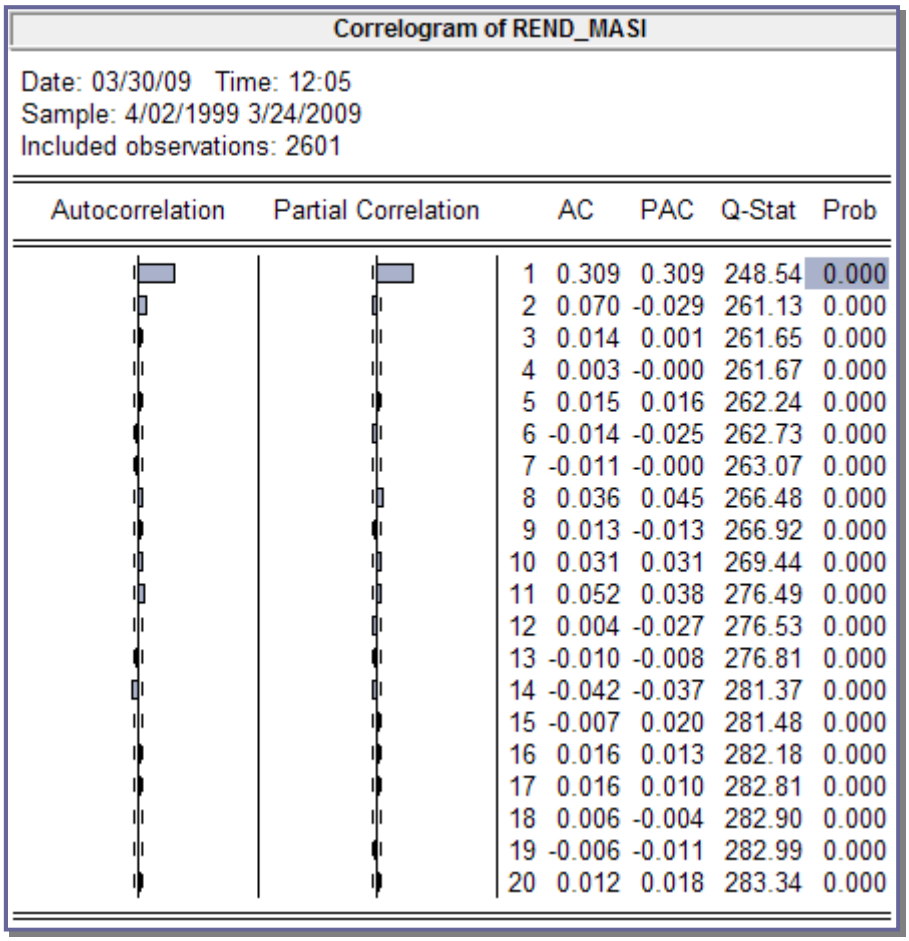
$$v_2 = \frac{3 - \beta_2}{\sqrt{24/n}} = \frac{3 - 9{,}65}{\sqrt{24/2604}} = 69{,}27$$

Avec β1 : coefficient d'asymétrie, et β2 : coefficient d'aplatissement.

Puisque $|v_1|$ et $|v_2|$ sont supérieurs à 1,96, alors on n'accepte pas l'hypothèse H0 de la normalité de la distribution.

II.2 Analyse des données :

Le tableau suivant présente les coefficients d'auto corrélation (AC), et les coefficients d'auto corrélation partielle (PAC) de la série chronologique de rendement de MASI.



Correlogram of REND_MASI

Date: 03/30/09 Time: 12:05
Sample: 4/02/1999 3/24/2009
Included observations: 2601

	Autocorrelation	Partial Correlation		AC	PAC	Q-Stat	Prob
1			1	0.309	0.309	248.54	0.000
2			2	0.070	-0.029	261.13	0.000
3			3	0.014	0.001	261.65	0.000
4			4	0.003	-0.000	261.67	0.000
5			5	0.015	0.016	262.24	0.000
6			6	-0.014	-0.025	262.73	0.000
7			7	-0.011	-0.000	263.07	0.000
8			8	0.036	0.045	266.48	0.000
9			9	0.013	-0.013	266.92	0.000
10			10	0.031	0.031	269.44	0.000
11			11	0.052	0.038	276.49	0.000
12			12	0.004	-0.027	276.53	0.000
13			13	-0.010	-0.008	276.81	0.000
14			14	-0.042	-0.037	281.37	0.000
15			15	-0.007	0.020	281.48	0.000
16			16	0.016	0.013	282.18	0.000
17			17	0.016	0.010	282.81	0.000
18			18	0.006	-0.004	282.90	0.000
19			19	-0.006	-0.011	282.99	0.000
20			20	0.012	0.018	283.34	0.000

<u>Figure 30</u> : Corrélogramme des rendements journaliers

Notons que les coefficients (PAC) suivent une loi normale de moyenne nulle et de variance égale à $\frac{1}{n} = \frac{1}{2604} = 0{,}000384 = 3{,}84\ 10^{-4}$

Désignons par PACi, le coefficient d'auto corrélation partielle d'ordre i et testons l'Hypothèse : H0 : PACi = 0 pour i = 1…20 .

L'intervalle de confiance correspondant à ce test avec un niveau de confiance de 95% est le suivant : $[\pm 1{,}96\sqrt{1/n}\ ] = [-0{,}0384 ; 0{,}0384]$.

Nous remarquons que, pour un niveau de confiance de 95%, tous les PAC d'ordre 2 et plus sont dans l'intervalle de confiance. Donc on ne rejette pas l'hypothèse de la nullité des PAC, et par conséquent, notre processus est bien un auto régressif d'ordre 1 vu, aussi, que les auto corrélations décroissent exponentiellement vers 0.

Puisque la durée d'observation n'est pas assez longue, alors nous avons envisagé de travailler avec les rendements mensuels au lieu des rendements annuels.

II.2.3 **Rendements mensuels :**

Pour les actions, nous avons cherché à estimer les caractéristiques de la performance mensuelle. Nous estimons donc une espérance et un écart-type des rendements historiques. Nous disposons d'une série d'indices quotidiens de performance des actions sur la période de 1999 à 2009.

II.2.3.1 **Série des rendements mensuels :**

Représentons la rentabilité mensuelle calculée sur la période de 1999 à 2009.

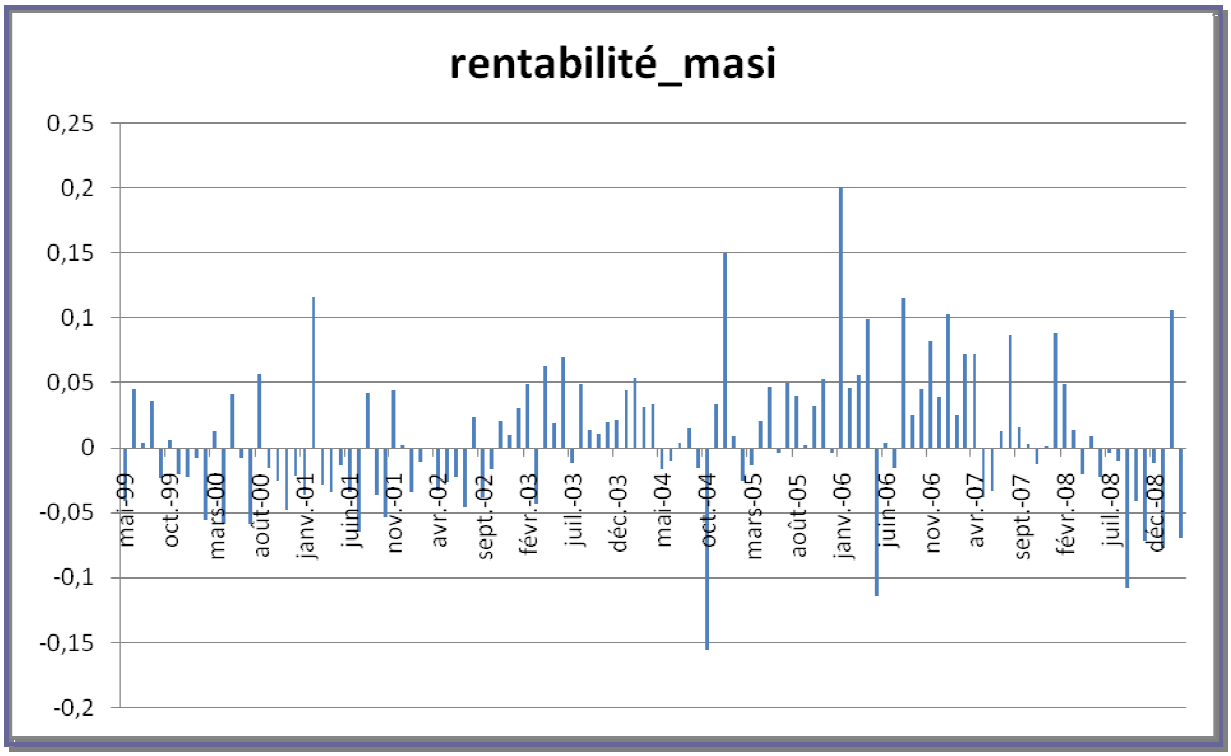


Figure 31 : Rentabilité mensuelle sur la période 1999-2009

La rentabilité calculée est un rendement mensuel nominal dont la formule de calcul est la suivante :

$$\textbf{Rentabilité nominale de l'indice du mois m} = \frac{\textbf{Indice nominal du mois m}}{\textbf{Indice nominal du mois m} - 1} - 1$$

Moyenne	0,006
Variance	0,003
Ecart-type	0,051
Coefficient de variation	8,208
Asymétrie (Pearson)	0,112
Asymétrie (Fisher)	0,113
Asymétrie (Bowley)	0,148
Aplatissement (Pearson)	1,500
Aplatissement (Fisher)	1,617

Figure 32 : Statistiques descriptives des rendements mensuels

Si on note :

$RNIM_m$: Rentabilité nominale de l'indice le mois m.

M : Le nombre de mois dans l'intervalle d'observation.

La rentabilité de l'indice que nous retiendrons se calcule comme suit :

$$\boldsymbol{Rendement\ annuel} = \left(\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{M}} \sum_{\boldsymbol{m}} \boldsymbol{RNIM_m}\right) * \frac{\mathbf{360}}{\mathbf{30}}$$

De la même manière, nous pouvons calculer la volatilité de cet indice :

$$\boldsymbol{Volatilité} = \boldsymbol{Ecart\ type}\ (\boldsymbol{RNIM_m}) * \sqrt{\frac{\mathbf{360}}{\mathbf{30}}}$$

L'étude des données historiques collectées nous fournit les résultats suivants :

- Espérance de rendement annuelle des actions: 9,11%
- Volatilité annuelle : 18,05%

II.2.3.2 Histogramme des rendements :

Nous avons voulu étudier la répartition des rendements boursiers annuels.

Cette répartition est modélisée par la loi Normale.

Décrivons brièvement la méthode de modélisation retenue :

- Calcul des rendements mensuels logarithmiques[17].
- Représentation de l'histogramme des rendements logarithmiques.
- Test d'adéquation à la loi normale.

[17] Si V_t représente la valeur de l'indice à l'instant t, le rendement logarithmique est défini par : $\ln(V_{t+1}/V_t)$.

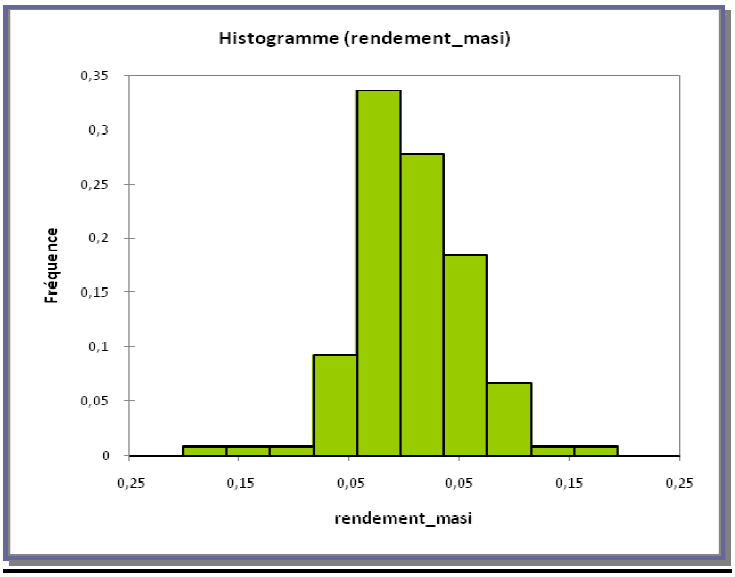


Figure 33 : Modélisation des rendements boursiers par une loi normale

II.2.3.3 Test de normalité :

Pour vérifier la normalité des données, le logiciel XLSTAT nous fournit :

Test de Shapiro-Wilk

W	0,980
p-value	0,075
alpha	0,05

Interprétation du test :

H0 : L'échantillon suit une loi Normale.

Ha : L'échantillon ne suit pas une loi Normale.

Etant donné que la p-value calculée est supérieure au niveau de signification seuil alpha=0,05, ***on peut valider l'hypothèse nulle H0.***

Le risque de rejeter l'hypothèse nulle H0 alors qu'elle est vraie est de 7,53%.

Test de Anderson-Darling

A^2	0,590
p-value	0,121
Alpha	0,05

Interprétation du test :

H0 : L'échantillon suit une loi Normale.

Ha : L'échantillon ne suit pas une loi Normale.

Etant donné que la p-value calculée est supérieure au niveau de signification seuil alpha=0,05, ***on peut valider l'hypothèse nulle H0.***

Le risque de rejeter l'hypothèse nulle H0 alors qu'elle est vraie est de 12,13%.

Test de Lilliefors

D	0,055
D (normalisé)	0,598
p-value	0,512
Alpha	0,05

Interprétation du test :

H0 : L'échantillon suit une loi Normale.

Ha : L'échantillon ne suit pas une loi Normale.

Etant donné que la p-value calculée est supérieure au niveau de signification seuil alpha=0,05, ***on peut valider l'hypothèse nulle H0.***

Le risque de rejeter l'hypothèse nulle H0 alors qu'elle est vraie est de 51,21%.

Test de Jarque-Bera

JB (Valeur observée)	10,301
JB (Valeur critique)	5,991
DDL	2
p-value	0,006
Alpha	0,05

Interprétation du test :

H0 : L'échantillon suit une loi Normale.

Ha : L'échantillon ne suit pas une loi Normale.

Etant donné que la p-value calculée est inférieure au niveau de signification alpha=0,05, ***on doit rejeter l'hypothèse nulle H0, et retenir l'hypothèse alternative Ha.***

Le risque de rejeter l'hypothèse nulle H0 alors qu'elle est vraie est inférieur à 0,58%.

II.3 Modélisation de l'action :

II.3.1 Equation de diffusion :

La figure de l'évolution des cours de l'indice de MASI montre que ce fonds doit être modélisé par un mouvement brownien géométrique :

$$\mathbf{dS(t) = \mu_s . S(t) . dt + \sigma_s . S(t) . dW_s(t)}$$

Où :

$S(t)$: Valeur du fonds au temps t ;

μ_s : Rendement moyen du fonds d'actions ;

σ_s : Volatilité du rendement du fonds d'actions ;

$W_s(t)$: Mouvement brownien standard.

II.3.2 Estimation des paramètres μ et σ :

L'estimation du rendement moyen du fonds d'actions et de sa volatilité est réalisée grâce aux données historiques dont nous disposons.

La solution de l'équation d'évolution du fonds est donnée par :

$$\mathbf{S(t) = S(0) . exp\left[\left(\mu_s - \frac{\sigma_s^2}{2}\right) . t + \sigma_s . W_s(t)\right]}$$

Le rendement du fonds entre t-1 et t est donné par :

$$\mathbf{rdt_s(t) = \ln \frac{S(t)}{S(t-1)} = \left(\mu_s - \frac{\sigma_s^2}{2}\right) + \sigma_s (W_s(t) - W_s(t-1))}$$

A partir de l'historique du cours journalier, nous avons trouvé :

r_s^{hist} = la moyenne historique des rendements ;

σ_s^{hist} = l'écart-type historique des rendements.

Sachant que le nombre de jours ouvrables dans l'année est 260, la variance annuelle est alors déterminée par :

$$\sigma_s = \sigma_s^{hist} . \sqrt{260}$$

Le rendement moyen du fonds est déterminé selon la relation :

$$r_s^{hist} . 260 = \mu_s - \frac{\sigma_s^2}{2}$$

Nous avons réalisé l'estimation des paramètres de rendement et de volatilité de l'indice concerné sur 2 périodes. Les résultats obtenus sont les suivants :

r_s^{hist} = la moyenne historique des rendements ;

σ_s^{hist} = l'écart-type historique des rendements.

Et donc :

μ_s	0,08150527
σ_s	0,13345196

Figure 34 : Estimation des paramètres μ_s et σ_s

II.3.2 Simulation des valeurs futures des actions :

Pour simuler l'évolution du fonds des actions, nous avons projeté notre portefeuille sur une période de 40 ans à partir de l'année 2009 en utilisant 25 scénarios.

Pour chaque scénario, on génère 40 échantillons aléatoires de la loi normale N(0 ; 1) de taille 1000.

Pour chaque t = 1, … , 40 ; on calcule la moyenne de l'échantillon généré : $N_s(t)$.

A l'aide d'une discrétisation d'Euler, nous procédons par discrétisation de pas de un an.

On applique la formule suivante : $$\mathbf{S(t) = S(t-1).\exp\left(\left(\mu_s - \frac{\sigma_s^2}{2}\right) + \sigma_s.N_s(t)\right)}$$

Le graphe représentant l'évolution du fonds d'action est le suivant :

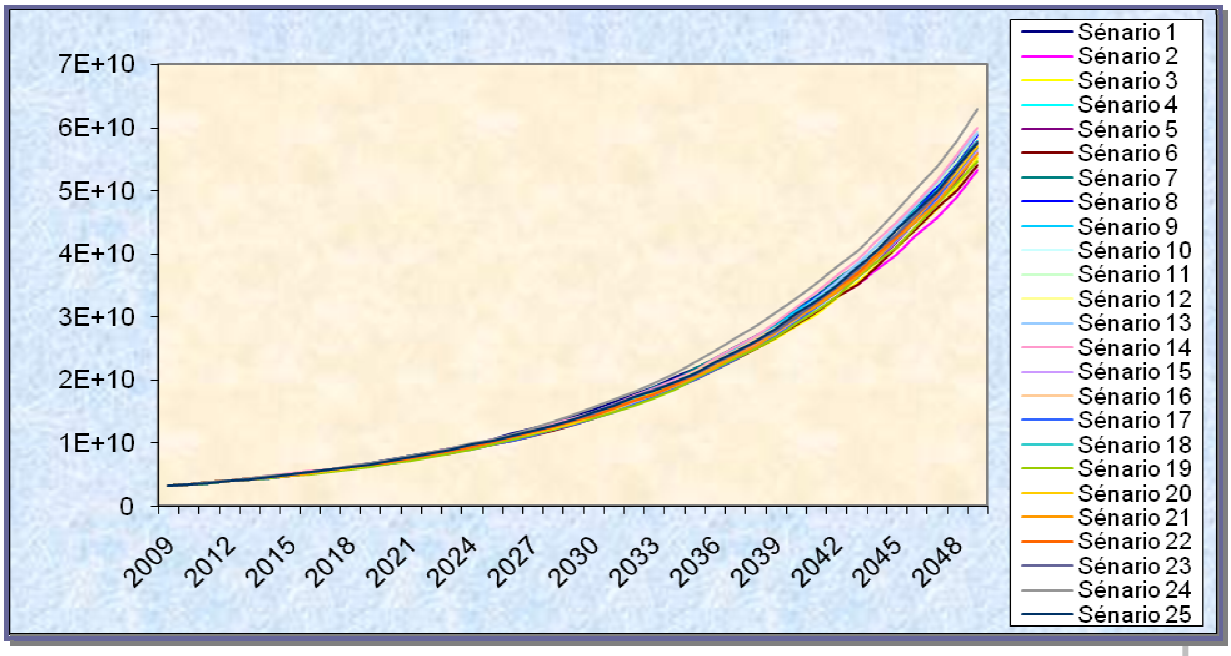


Figure 35 : Evolution stochastique du fonds d'action

Le fonds d'action de notre portefeuille est donc assimilé à un mouvement brownien géométrique de rendement moyen de 8,1% et de volatilité 13,3%.

Nous allons suivre dans la partie qui suit les mêmes démarches pour modéliser le passif.

– Partie III –

Modélisation du passif

- Etude des tables de mortalité
- Modélisation du taux de rachat et de décès
- Modélisation de la participation aux bénéfices et valorisation du contrat

. CHAPITRE

5

Etude des tables de mortalité

Les actuaires ont toujours consacré du temps à étudier la mortalité, car un de leurs objectifs est de construire des tables de mortalité fiables ou très proches de la réalité. Bien sûr, la mortalité future n'est pas la seule source d'aléa.

Dans un premier temps, nous allons présenter les rappels démographiques et les outils statistiques utilisés dans notre étude pour comparer la nouvelle et l'ancienne table de mortalité.

Dans un deuxième temps, nous allons modéliser d'une manière stochastique la table de mortalité en utilisant le modèle de Lee Carter qui nous octroie la possibilité de construire des tables prospectives.

I. Table de mortalité :

Une table de mortalité (appelée aussi table de survie) est une construction qui permet de suivre le nombre de décès, les probabilités de décès ou de survie selon l'âge et le sexe.

La table de mortalité donne donc, pour la suite des anniversaires x, le nombre de survivants l_x à ces anniversaires, le nombre de décès d_x entre deux anniversaires successifs et le quotient annuel de mortalité (s'interprétant comme une probabilité de décès) q_x à l'âge x. Ces tables sont alors très utiles notamment pour les assureurs, qui les utilisent pour déterminer leurs primes d'assurance.

Il existe deux types de tables de mortalité :

- **La table de mortalité du moment** : génération fictive à laquelle on applique les quotients de mortalité pour chaque âge (q_x)
- **La table de mortalité par génération** : se réalise de la même manière qu'une table de mortalité du moment à la différence que, au lieu de constituer une génération fictive, on construit la table en observant les niveaux réels de mortalité d'une génération particulière (par exemple la génération née en 1960)

On distingue également :

- **Les tables de mortalité brutes** : résultant de l'observation (recensement)
- **Les tables de mortalité ajustées** : table ajustée analytiquement
- **Les tables de mortalité statiques** : suppose que la mortalité va rester stable dans le futur
- **Les tables de mortalité prospectives** : intègre une évolution future attendue de la mortalit

II. Les outils statistiques :

C'est à partir d'une table de mortalité que peuvent être calculés divers indices synthétiques, dont :

II.1. Probabilités de survie et de décès :

- **Probabilité annuelle de décès** : Quotient de mortalité

C'est la probabilité qu'étant en vie à l'âge x de décéder dans l'année (avant d'atteindre l'âge x+1) :

$$q_x = \frac{d_x}{l_x} = \frac{l_x - l_{x+1}}{l_x}$$

- **Probabilité annuelle de survie** : Taux de survie

C'est la probabilité qu'étant en vie à l'âge x d'atteindre l'âge x+1 :

$$p_x = 1 - q_x = \frac{l_x + 1}{l_x}$$

- **Probabilité annuelle différée de décès** :

C'est la probabilité qu'étant en vie à l'âge x de décéder à l'âge x+n :

$$_{n|}q_x = \frac{d_{x+n}}{l_x}$$

- **Probabilité pluriannuelle (ou temporaire) de survie :**

C'est la probabilité qu'étant en vie à l'âge x d'atteindre l'âge x+n :

$$_{n}p_x = \frac{l_{x+n}}{l_x}$$

II.2. Espérance de vie :

L'espérance de vie (ou vie moyenne) est sans doute l'indicateur le plus célèbre.

L'espérance de vie à l'âge x est l'espérance mathématique de la durée de vie résiduelle. En notant ω la durée de vie maximale :

$$e_x = \frac{\int_0^{w-x} l(x+t)dt}{l(x)}$$

On a ainsi avec l'hypothèse de la linéarité de la fonction de la survie :

$$e_x = \frac{l_{x+1} + l_{x+2} + \cdots + l_w}{l_x}$$

II.3. **Nombres de commutation :**

Ce sont des fonctions actuarielles utilisées pour le calcul des primes d'assurance sur la vie et pour le calcul des engagements de l'assureur.

$D_x = v^x l_x$, $C_x = v^{x+1} d_x$

$N_x = D_x + D_{x+1} + \cdots + D_w$, $S_x = N_x + N_{x+1} + \cdots + N_w$

$M_x = C_x + C_{x+1} + \cdots + C_w$, $R_x = M_x + M_{x+1} + \cdots + M_w$

$v = \frac{1}{1+i}$: Facteur d'escompte Avec i : taux annuel d'intérêt technique.

Ces variables vont nous être utiles pour la comparaison des différentes tables de mortalité et ce sont la base des calculs actuariels en assurance vie (calcul de prime ou de réserves mathématiques)

III. Comparaison démographique des tables de mortalités :

III.1. **Présentation des tables :**

Vu la loi n° 17-99 portant code des assurances promulguée par le dahir n°1-02-238 du 25 rejeb 1423 (3octobre 2002), Les entreprises pratiquant les opérations d'assurance doivent constituer à leur passif les provisions techniques calculées sur la base de la nouvelle table de mortalité française TD88-90 (Table de décès) et la TV88-90 (Table de vie) au lieu de la table PM60-64 (Table de la population masculine) et PF60-64 (Table de la population féminine) utilisée. Ce changement était appliqué pour l'exercice 2006 des sociétés d'assurance.

Le choix de ces deux tables dû essentiellement au caractère de prudence puisque ce changement périodique de la table de mortalité est nécessaire pour tenir compte de la régression permanente de la mortalité en général tous les 15 ou 20 ans.

La TV est une table de vie utilisée dans l'assurance en cas de vie (rentes viagères, capitaux différés …) et la TD est une table de décès utilisée dans l'assurance en cas de décès et assurance mixte

Remarque : Les nouvelles tables ne font pas une distinction selon le sexe, un tarif pour hommes et un tarif pour femmes. Distinction absolument indispensable pour les assurances de rentes et elle est recommandée pour les assurances de capitaux.

III.2. **Etude démographique :**

L'objectif est de comparer démographiquement la nouvelle table par rapport à l'ancienne table et de prévoir ainsi l'aggravation du risque lié aux nouvelles tables.

L'aggravation du risque peut être perçue différemment selon le type de contrat étudié, pour les rentes, l'aggravation du risque pour l'assureur lié au versement des rentes est la survie plus longue de l'assuré, pour les contrats en cas de décès l'aggravation du risque lié au versement du capital décès est pour l'assureur l'augmentation du nombre de décès.

- **Fonction Logit :**

Cette transformation utilise les propriétés de la fonction logarithme népérien, la fonction Logit opère une bijection entre l'intervalle des $q_x \in [0,1]$ et l'ensemble R. Cela permet ainsi de transformer les qx plus aisément.

$$\text{Logit}\ (q_x) = \text{Ln}\left(\frac{q_x}{1 - q_x}\right)$$

Avec $q_x \in [0,1]$, les quotients annuels de décès observés à l'âge x

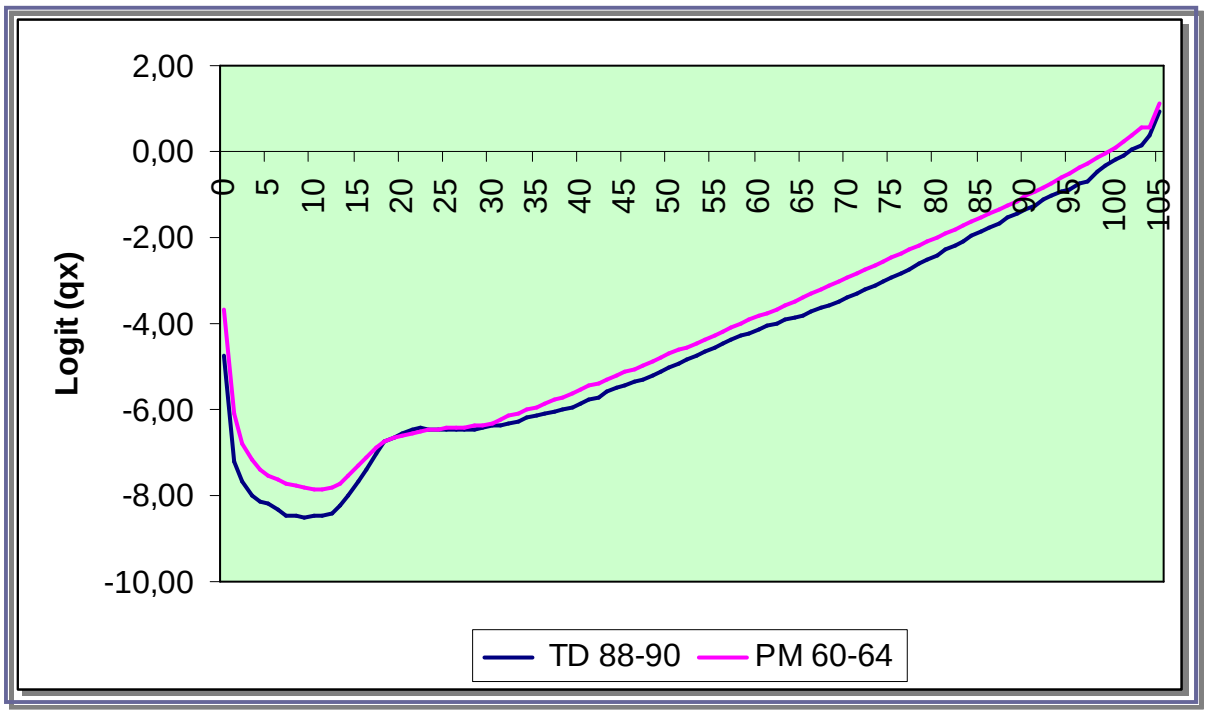


Figure 36 : Comparaison des tables décès (TD 88-90 et PM 60-64)

La fonction Logit est très utilisée en modélisation de la mortalité. La forme des courbes obtenues avec ce modèle correspond en effet à l'approche démographique courante. Elle fait en effet ressortir les phénomènes de mortalité suivants :

- Un pic à la naissance
- Puis un creux pendant l'enfance
- Puis un pic entre 18 et 25 ans
- Enfin une croissance linéaire jusqu'à l'extinction de vie

Selon ce graphique on remarque qu'à part la tranche d'âge compris entre 17 et 30 ans où les deux courbes se coïncident, pour les autres tranches d'âges, la table de mortalité TD88-90 présente des quotients de mortalité moins élevés que ceux de la table de mortalité PM60-64.

Pour les écarts entre les deux courbes, on remarque que pour la tranche d'âge 35 ans et plus, ces écarts se caractérisent par une moyenne de 0.32 et un écart type de 0.08 (très faible) d'où la mortalité évolue d'une manière analogue sur tous les âges de cette catégorie.

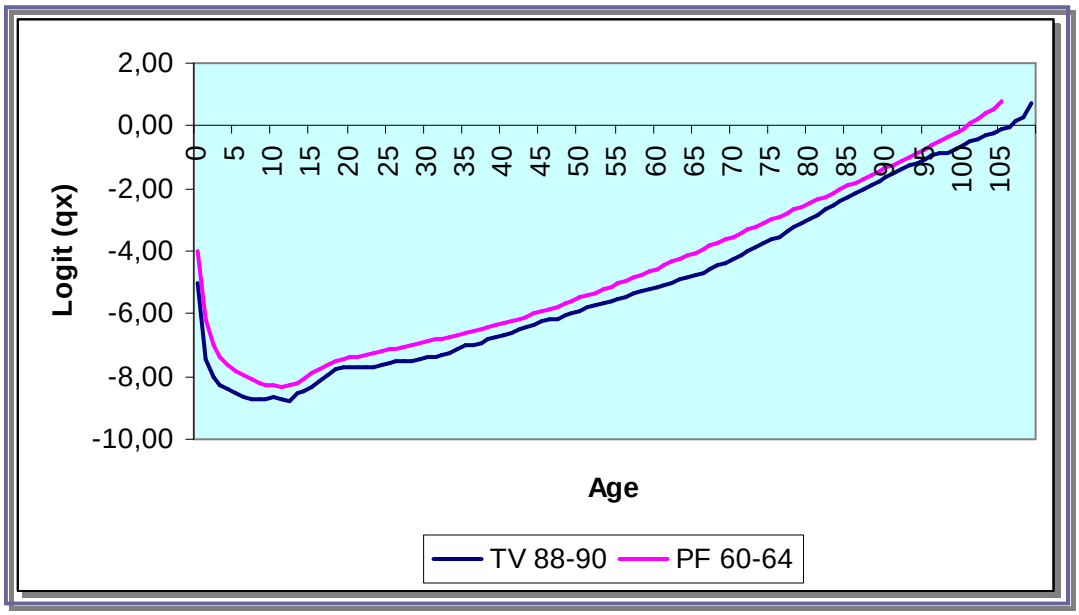


Figure 37 : Comparaison des tables vie (TV 88-90 et PF 60-64)

En plus de la même tendance des deux courbes, la TV88-90 présente des quotients de mortalité moins élevés par rapport à la PF60-64 et cela pour tous les âges.

En calculant les écarts entre les deux courbes de la tranche d'âge 15 ans et plus, on trouve une moyenne de 0.48 et un écart type est 0.14, d'où la variation entre les deux courbes est presque constante.

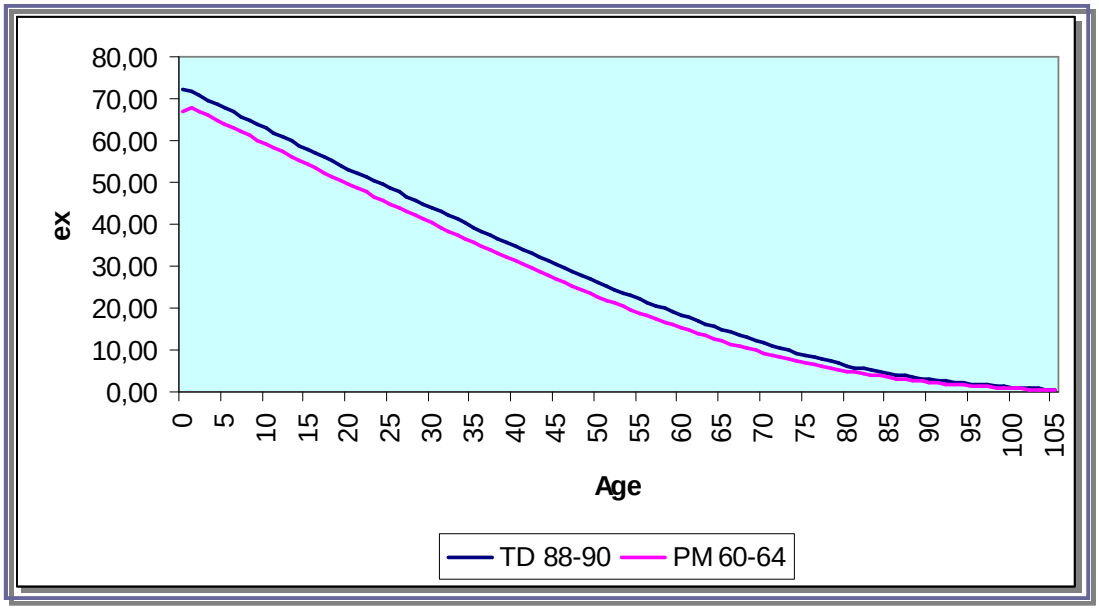


Figure 38 : Comparaison des tables décès selon l'espérance de vie

Ce graphique nous montre l'augmentation de l'espérance de vie de la nouvelle table par rapport à l'ancienne, tel que la TD affiche une espérance de vie à la naissance de 72 ans contre 67 ans pour la PM, ce qui influence fortement les réserves mathématiques puisque la TD donne une durée de vie plus élevée que celle de la PM et donc un nombre inférieur de décès.

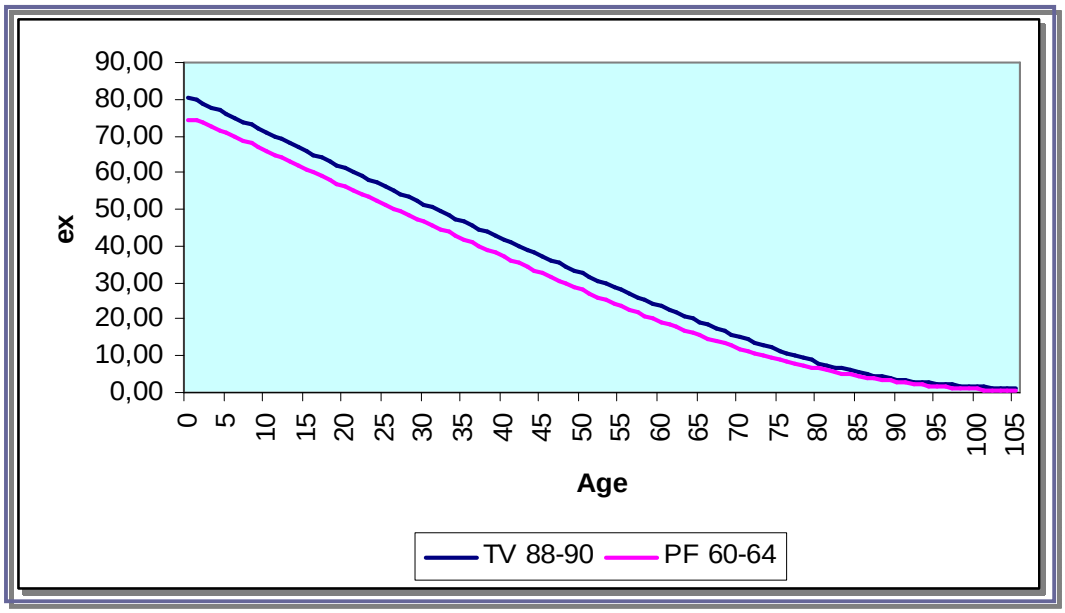


Figure 39 : Comparaison des tables vie selon l'espérance de vie

La table TV présente une espérance de vie plus grande que celle de la PF, tel que la TV affiche une espérance de vie à la naissance de 80 ans contre 74 ans pour la PM, ce qui influence fortement les réserves mathématiques puisque la TV donne une durée de vie plus élevée que celle de la PF et donc une aggravation du risque lié au versement des rentes ou du capital en cas de survie.

IV. Approche critique des nouvelles tables de mortalité :

Dans cette partie nous allons étudier la convenance de ces tables françaises exigées par le code d'assurance dans le traitement des opérations d'assurance vie, pour cela nous allons comparer les principaux indicateurs démographiques du Maroc avec ceux de la France et ensuite analyser les différents déterminants de la mortalité dans les deux pays.

IV.1. Analyse des principaux indicateurs démographiques :

	Maroc	France
Espérance de vie	70,5	79,35
Espérance de vie / H	68,5	75,8
Espérance de vie / F	72,7	82,9
Quotient de mortalité néonatale (1-28 jours)	19,7‰	2,8‰
Quotient de mortalité infantile (0-1 ans)	36,6‰	4,2‰
Densité médicale (Nombre de médecins pour 100 000 habitants)	47 (en 2002)	331(en 2000)

Source: www.insee.fr, Prj-CERED

Figure 40 : Indicateurs démographique Maroc/France

La population Française a une espérance de vie de 10 ans supérieure qu'au Maroc, on peut aussi comparer l'espérance de vie masculine avec la table TD 88-90 qui est égale à 72 ans, et l'espérance de vie féminine avec la table TV 88-90 qui est égal à 80.19, on voit alors que l'écart s'est réduit légèrement mais reste toutefois important.

La mortalité des enfants, malgré une sensible chute durant ces dernières années reste parmi les fléaux qui handicapent le développement social du pays et qui reflète l'inefficacité des différents plans sanitaires entrepris par les responsables du secteur de santé, en effet le quotient de mortalité néonatale est de 17,7 ‰ au Maroc et 2,8 ‰ en France, tandis que

quotient de mortalité infantile vaut 36,6‰ au Maroc et 4,2‰ en France, ce quotient n'est même pas proche de celui des tables 88-90 (6,48‰ pour la TV et 8,71‰ pour la TD).

IV.2 Analyse des déterminants de la mortalité :

La variation de la mortalité entre le Maroc et la France résulte des effets combinés des différences dans les conditions culturelles, économiques et sociales.

Pour le Maroc, la mortalité est fonction de plusieurs facteurs : pauvreté, inégalité de revenu, malnutrition, manque d'infrastructures sanitaires et absence de personnel qualifié, manque de médicaments, l'accès et la fréquentation des infrastructures sanitaires surtout pour le milieu rural, inégalités socio-économiques et culturelles entre les régions. Ces mêmes facteurs peuvent être cités pour les déterminants de la mortalité en France mais avec une influence moins consistante qu'au Maroc, néanmoins la mortalité en France est aussi fonction d'autres facteurs comme la suralimentation et l'alcoolisme.

V. Modélisation stochastique des taux de mortalité :

Les changements démographiques sont le fruit de trois tendances de fond, qui sont l'allongement continu de la durée de vie, fruit du progrès de la santé et de la qualité de vie, l'accroissement des effectifs des générations âgées de plus de 60 ans et la faible natalité. Ces tendances impactent les secteurs de la sécurité sociale, mais impactent également le monde de l'assurance. Les assurés pourraient vivre bien plus longtemps que prévu par les tables ayant servies à établir le tarif. C'est ce qu'on appelle le risque de longévité.

Dans cette partie nous nous sommes limitées aux tables prospectives à deux dimensions : l'âge de l'assuré et l'année calendaire. Ces tables donnent pour chaque âge la probabilité de décéder au cours d'une certaine année et sont dressées à partir de modèles statistiques estimant les tendances de la mortalité et en les extrapolant dans le futur. Le modèle de **Lee et Carter** permet de construire des tables de mortalité prospectives. Cette méthode a fait ses preuves sur plusieurs, et demeure une méthode solide amenant à des résultats satisfaisants. Cette méthode est devenue un standard dans l'élaboration des tables de mortalité prospectives. Néanmoins ce modèle présente quelques inconvénients qui seront cités ultérieurement.

Après avoir décrit les données utilisées, le modèle de Lee et Carter sera présenté.

V.1 Les données utilisées :

Ne possédant qu'un faible historique des données concernant le produit CIMR, il est difficile d'en déduire une tendance temporelle. Par conséquent, nous utilisons les tables de mortalité nationales fournies par l'INED (Institut National d'Etude Démographique) et disponibles sur le site Internet (voir bibliographie page). L'INED propose des tables de mortalité du moment pour les 19ème, 20ème et 21ème siècles et propose également des tables de mortalité prospectives par extrapolation des données passées.

Nous supposons par conséquent que notre portefeuille suit la même évolution que la population française. Nous décidons de déterminer les paramètres du modèle de Lee-Carter sur 16 années d'historique, c'est-à-dire à partir des tables de mortalité de l'INED de 1992 à 2006 et de la table d'expérience réalisée. Par interpolation linéaire entre la table d'expérience et les tables de l'INED, nous déterminons les tables de mortalité utilisées dans le modèle. L'approche prospective proposée par le modèle de Lee et Carter est intéressante et utile, mais présente un inconvénient.

Cette modélisation privilégie une tendance temporelle, qui peut entraîner des aberrations pour les longues projections. En effet, la décroissante des taux instantanés de décès engendre une augmentation de l'espérance de vie à la naissance sans limite ! L'âge limite dans les tables de l'INED étant de 105 ans, nous supposons donc que $q_{105} = 1$. Il est possible de proposer des probabilités de décès à ces grands âges, mais celles-ci n'auraient qu'une très faible contribution dans le montant de l'engagement total pour le produit CIMR (en effet, 97% des assurés optent pour une sortie en capital).

Cette hypothèse pourra être corrigée dans le modèle en considérant le problème de la fermeture de la table. Par exemple Coale et Kisker (1990) proposent un modèle basé sur la formule de Gompertz.

V.2 Le modèle de Lee-Carter:

La méthode développée par Lee et Carter en 1992 permet la construction de tables de mortalité prospectives. Ces tables ne tiennent pas seulement compte de l'âge des individus mais aussi du temps : la loi de mortalité du groupe étudié est caractérisée par un modèle bidimensionnel. C'est une méthode d'extrapolation des tendances passées, initialement utilisée sur des données américaines et qui est rapidement devenue un standard. En effet ce

modèle a par la suite été utilisé sur de nombreuses populations et étudié par différents actuaires, professeurs et chercheurs.

La modélisation retenue pour le taux instantané de mortalité à l'âge x est un modèle log-bilinéaire qui s'écrit de la manière suivante :

$$Ln\mu_x(t) = \alpha_x + \beta_x \bullet k_t + \varepsilon_x(t)$$

Où : les variables aléatoires ε_x représentent les erreurs d'ajustement et sont indépendantes et identiquement distribuées suivant une loi $N(0,\sigma^2)$ ce qui implique l'hypothèse d'homoscédasticité. On a alors que le logarithme du taux instantané se décompose en une somme de deux termes à un terme d'erreur près : le premier, α_x est spécifique à l'âge et décrit le comportement moyen des taux instantanés de mortalité au cours du temps ; le second exprime une tendance temporelle de la mortalité, k_t multipliée par un terme spécifique à l'âge, β_x , qui module la tendance suivant l'âge.

L'hypothèse sous jacente est la constance des taux instantanés de décès entre deux âges entiers, à savoir :

$$\mu_{x+s} = \mu_x = -\ln(1-q_x) \qquad s \in [0,1[$$

Ce qui implique que le taux de décès dans l'année pour un assuré d'âge x s'exprime :

$$q_{x+s} = q_x = 1 - \exp(-\mu_x), s \in [0,1[$$

Le critère d'optimisation de la modélisation est la minimisation de la variance des erreurs. Et pour que le modèle ait une solution unique, deux contraintes sont imposées :

$\sum_{x=0}^{\omega} \beta_x = 1$ et $\sum_{t=t_m}^{t=t_M} k_t = 0$

Nous obtenons alors les paramètres par un critère de moindres carrés :

$$\left(\hat{\alpha}_x, \hat{\beta}_x, \hat{k}_t\right) = \min \sum_{x,t} \left(\ln \mu_{xt}^* - \alpha_x - \beta_x \bullet k_t\right)^2$$

Le nombre de paramètres à estimer est élevé. Il correspond à :

$$2 \bullet (\omega + 1) + (t_M - t_m + 1) = 255 \text{paramètres}$$

V.2.1 **Estimation des paramètres :**

Estimons dans un premier temps les paramètres $\hat{\alpha}_x$:

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_x}\sum_{y,t}\left(\ln \mu^*_{yt} - \alpha_y - \beta_y k_t\right)^2 = 2(t_M - t_m + 1)\hat{\alpha}_x - 2\sum_{t=t_m}^{t_M}\left(\ln \mu^*_{yt} - \beta_y k_t\right)$$

En tenant compte de la contrainte $\sum_{t=t_m}^{t=t_M} k_t = 0$ nous obtenons :

$$\hat{\alpha}_x = \frac{1}{t_M - t_m + 1}\sum_{t=t_m}^{t_M} \ln \mu^*_{xt}$$

Par conséquent ce paramètre est interprété comme la moyenne temporelle des taux instantanés de décès à l'âge x sur l'échelle logarithmique.

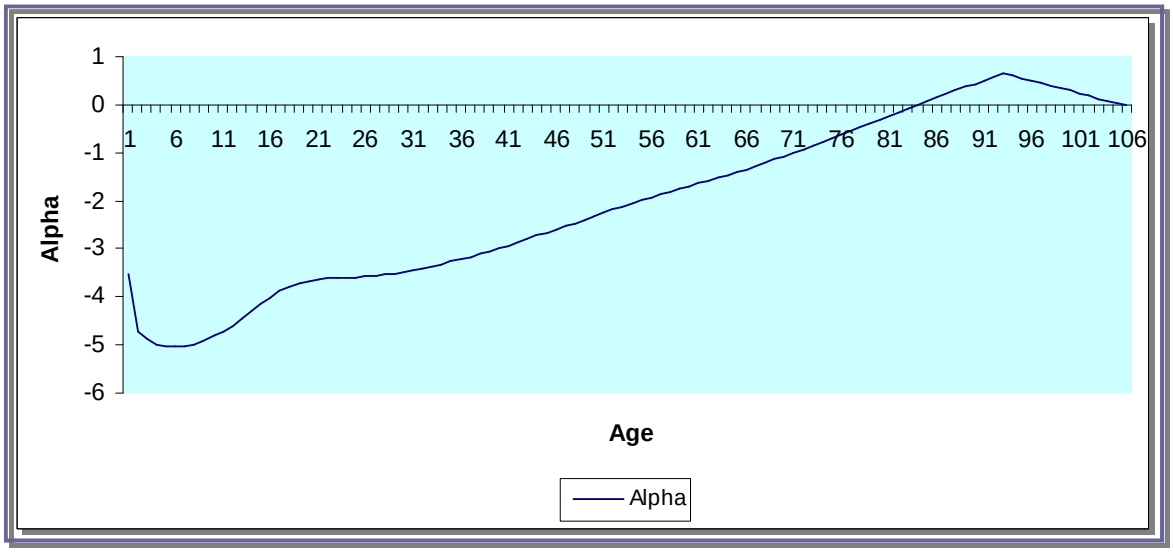


Figure 41 : Evolution des Alpha suivant l'âge

Pour l'estimation des paramètres $\hat{\beta}_x$ et de la composante temporelle $\hat{k}_t$, nous utilisons le processus itératif de Newton-Raphson, utilisé par le solveur d'Excel. Le principe est qu'à chaque itération, l'ensemble des paramètres sont mis à jour. Les valeurs sont initialisées et les deux contraintes sont introduites. Les valeurs nulles sont interdites pour le paramètre $\hat{\beta}_x$. Les résultats obtenus sont représentés sur les deux graphiques ci-dessous :

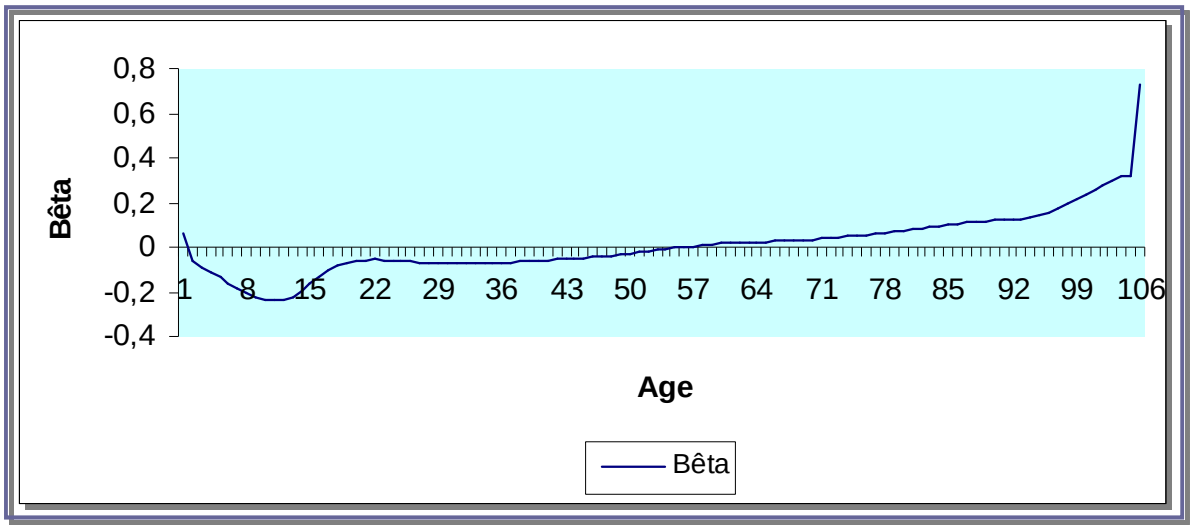


Figure 42 : Evolution des Bêta suivant l'âge

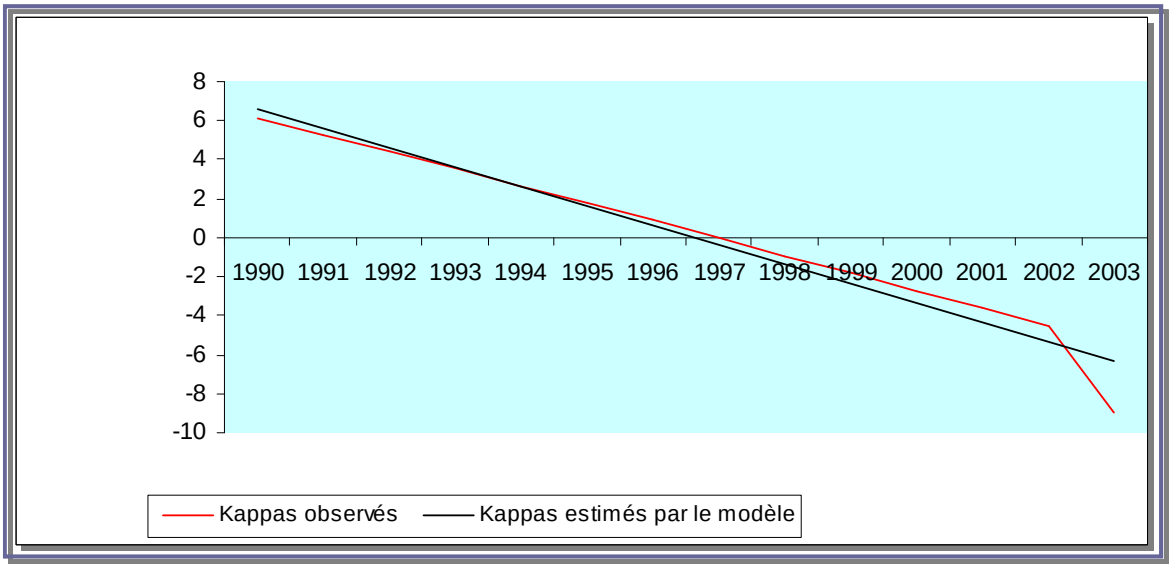


Figure 43 : Extrapolation de la composante temporelle

$$y = -0.9455x + 7.5636$$

Le coefficient d'ajustement est : $R^2 = 0.972$

Selon ce coefficient d'ajustement, on constate que le modèle s'ajuste bien avec les données observées, ils représente 97,2% des observations réelles, ainsi, on considère les différences entre les taux observés et ceux estimés selon l'âge comme des variables aléatoires suivant une loi normale centrée et d'écart type égale à l'erreur fourni par la procédure.

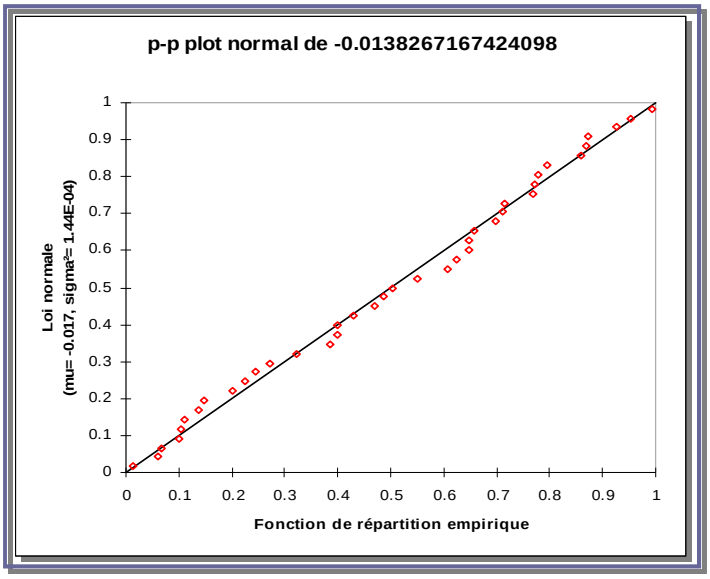


Figure 44 : Diagramme P-P plot gaussien

On déduit à partir du graphe P-P ci-dessus que la normalité est significative, alors la distribution des erreurs de la composante temporelle s'ajuste bien par la loi normale.

V.2.2 Projection des kappas :

L'étape suivante consiste à projeter les kappas afin d'estimer la mortalité future. Ces kappas projetés nous permettront en effet de déterminer les nouveaux taux de mortalité à utiliser dans les tables prospectives. Nous utilisons pour ce faire des outils de la régression.

Nous avons vu dans la partie précédente que la composante temporelle $\hat{k}_t$ a été extrapolée par une régression linéaire simple. A partir de l'équation de cette régression, nous introduisons un aléa dans les tables de mortalité prospectives. En effet, il suffit de générer un aléa ε_t pour chaque $\hat{k}_t$ des t années futures, avec ε_t un bruit blanc gaussien de varianceσ_k^2, tel que :

$$\hat{k_t}^{*} = \hat{a_k} \bullet t + \hat{b_k} + \varepsilon_t$$

La modélisation des tables prospectives utilise cette équation de régression de la composante temporelle, qui permet d'obtenir la tendance de mortalité future en effectuant des tirages dans la loi du résidu ε_t, qui est une loi normale $N(0, \sigma_k^2)$. La variable $\widehat{k^*}_t$ est sans biais, en effet :

$$E\left[\hat{k_t}^{*}\right] = E\left[\hat{a_k} \bullet t + \hat{b_k} + \varepsilon_t\right] = \hat{k}_t$$

Le taux instantané de mortalité s'écrit alors :

$$\hat{\mu}_x = \exp\left(\hat{\alpha}_x + \hat{\beta}_x \bullet \hat{k}_t^*\right) = \exp\left(\hat{\alpha}_x + \hat{\beta}_x \left(\hat{a_k} \bullet t + \hat{b_k} + \varepsilon_t\right)\right)$$

V.2.3 **Correction du biais engendré :**

Bien que le paramètre soit sans biais, la modélisation engendre un biais sur les taux instantanés de mortalité à l'âge x car :

$$E\left[\hat{\mu_x}(t)\right] = E\left[\exp\left(\hat{\alpha}_x + \hat{\beta}_x\left(\hat{a_k} \times t + \hat{b_k} + \varepsilon_t\right)\right)\right]$$

$$= E\left[\exp\left(\hat{\alpha}_x + \hat{\beta}_x\left(\hat{a_k} \times t + \hat{b_k}\right)\right) \times \exp\left(\hat{\beta}_x \times \varepsilon_t\right)\right]$$

$$= \mu_x(t) \times E\left[\exp\left(\hat{\beta_x^2} \times \varepsilon_t\right)\right]$$

$$= \mu_x(t) \times \exp\left(\frac{\hat{\beta_x^2} \times \sigma_k^2}{2}\right)$$

Puisque ε_t suit une loi normale $N\left(0, \sigma_k^{\,2}\right)$, nous avons que $\exp\left(\hat{\beta}_x, \varepsilon_t\right)$ suit une loi log-normale $LN\left(0, \hat{\beta}_X \sigma_k\right)$ et l'espérance d'une variable aléatoire log-normale $LN(m, \sigma)$ est. $\exp\left(m + \sigma^2/2\right)$

Nous montrons ici que notre modélisation stochastique de la mortalité entraîne une erreur positive sur les taux de mortalité : la mortalité est donc surévaluée. Nous observons l'erreur due suivant l'âge sur la figure ci-dessous :

Figure 45 : Analyse de l'erreur en fonction de l'âge

Nous pouvons constater que l'erreur est relativement faible et dépend de l'âge x. L'erreur est plus importante pour les âges entre 3 et 18ans et supérieurs à 98. L'impact sur le produit CIMR n'est donc pas important, aux vues de la répartition des âges des assurés pour ce produit. Mais pour d'autres produits, la volatilité pourrait être plus importante, et donc l'impact du biais serait plus conséquent.

La version corrigée du taux instantané de mortalité est :

$$\mu_x^*(t) = \exp\left(\hat{\alpha}_x + \hat{\beta}_x k_t^* - \frac{\hat{\beta}_x^2 \times \sigma_k^2}{2}\right)$$

Cette construction du modèle satisfait à la contrainte :

$$E\left[\mu_x^*(t)\right] = \mu_x(t)$$

Les tables de mortalité reflètent la situation démographique d'un pays, mais devant l'absence d'une table de mortalité marocaine à cause d'un système d'état civil défaillant, on utilise les tables françaises.

Pour réaliser un calcul de réserves mathématiques plus pertinent adapté aux spécificités du portefeuille assuré, il est préférable d'utiliser des tables d'expérience. Ceci est l'un des objectifs du chapitre suivant.

CHAPITRE

6

Modélisation des taux de rachat et de décès

le but cette partie qui est justement l'évaluation du passif du portefeuille CIMR moyennant la modélisation des taux de sortie par l'approche déterministe en premier lieu et ensuite l'approche stochastique qui permettra de mesurer le terme d'erreur.

I. Construction des tables d'expérience :

Pour effectuer des projections, il est indispensable de construire des tables d'expérience. Ces tables reflètent le comportement effectif des clients qui composent notre portefeuille.

La construction des tables concerne la mortalité, les rachats et les sorties à l'échéance. Nous n'avons pas pu construire de table de mortalité d'expérience vu que nous ne disposons pas de données pour le faire. Nous avons utilisé la méthode de Lee et Carter présenté dans le chapitre précédant.

La modélisation des tables prospectives utilise cette équation de régression de la composante temporelle, qui permet d'obtenir la tendance de mortalité future en effectuant des tirages dans la loi du résidu ε_t , qui est une loi normale $N\left(0,\sigma_k^{\ 2}\right)$

On aura ainsi la tendance de mortalité future sur 40 ans :

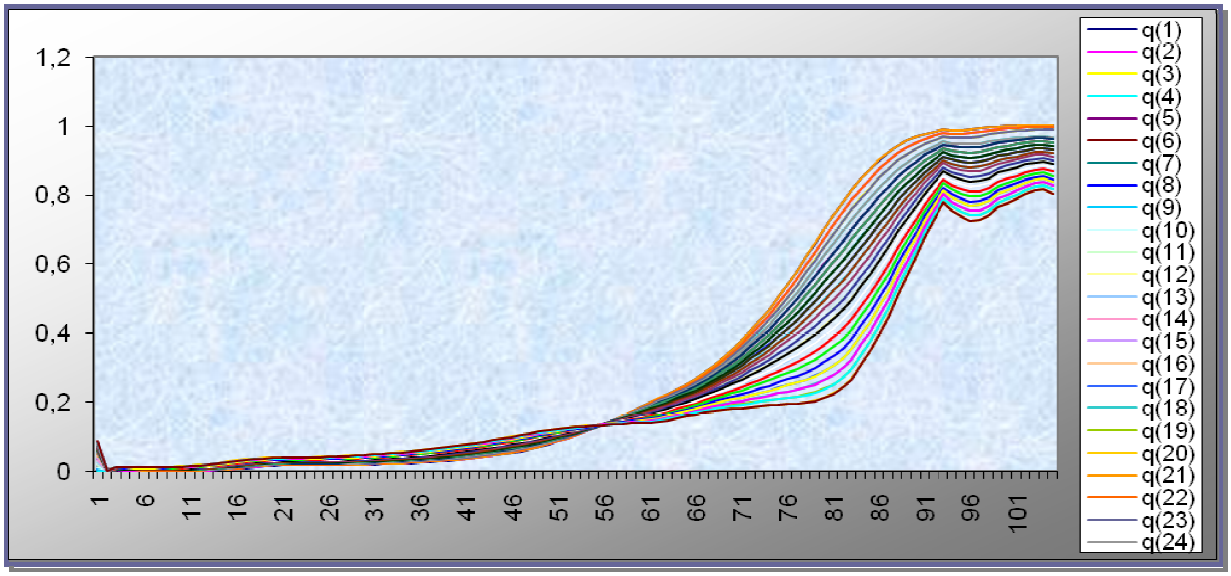


Figure 46 : Projection de taux du quotient de mortalité sur un horizon de 40ans en utilisant la méthode de Lee carter

D'après le graphe précédent on constate une intense mortalité infantile et juvénile et une augmentation relative à la tranche d'âge 20 à 40 ans enfin une croissance linéaire jusqu'à l'extinction de vie. Quitte à signaler que le quotient de mortalité augmente au fur et à mesure dans le temps.

Concernant notre portefeuille le minimum d'âge observé est de l'ordre 18 ans ainsi le quotient de mortalité aura l'allure suivante :

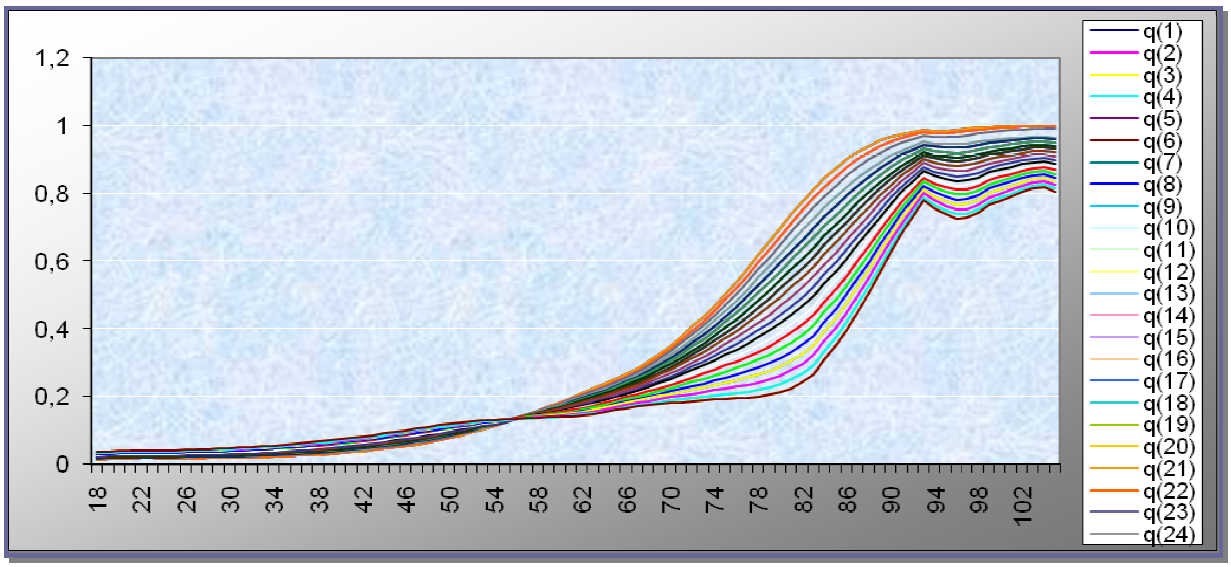


Figure 47 : Projection de taux du quotient de mortalité sur un horizon de 40ans en utilisant la méthode de Lee carter

II. Modélisation du taux de rachat :

Dans cette partie nous allons modéliser les taux de sortie de manière stochastique. Dans un premier temps, nous avons défini de nouvelles lois de sorties issues de modèles linéaires généralisés qui correspondent davantage à l'évolution des sorties en fonction de l'ancienneté des assurés.

Pour estimer les taux de sorties en fonction de l'ancienneté, nous utilisons les modèles linéaires généralisés sur Excel.

Nous allons effectuer cette procédure pour différents paramètres, comme par exemple l'âge et ses puissances. Cette procédure sur Excel nous fournit des critères pour évaluer la qualité de l'ajustement.

Dans ce modèle, on prend :

- x : l'âge des assurés en 2009
- a : l'ancienneté des assurés en 2009
- ω :L'âge limite de la table.

II.1 Taux de rachat:

A partir des données de la base de données des sorties on peut calculer le taux de rachat pour chaque âge x selon la formule suivante spécifique à la compagnie :

$$TRT_a = \frac{MRT_a}{RMD_a}$$

Où :

TRT_a : Taux brut de rachat total à l'ancienneté a.

RMD_a : Réserve mathématique au début de l'année des contrats d'ancienneté a.

MRT_a : Montant des rachats totaux des contrats d'ancienneté a.

Nous représentons les courbes des taux de rachat observés et estimés :

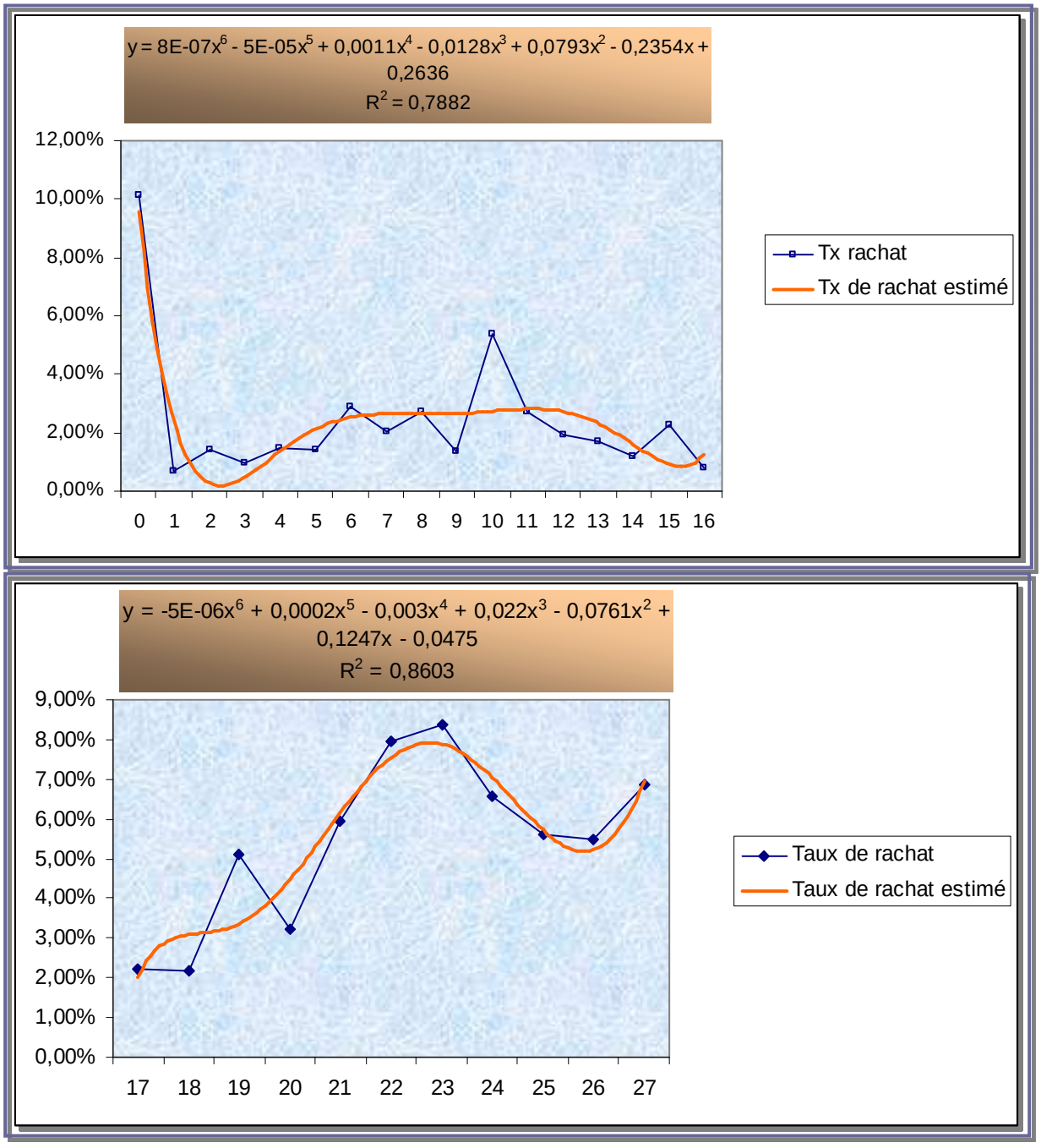


Figure 48 : Ajustement polynomiale de taux de rachat

Alors les taux de rachat sont donnés par l'expression suivante :

$$T_r(a) = \begin{cases} 8 * 10^{-7}a^6 - 5 * 10^{-5}a^5 + 0,001\ a^4 - 0,0128\ a^3 + 0,0793\ a^2 - 0,2354\ a + 0,2636 & si\ a \leq 16 \\ -5 * 10^{-6}a^6 + 0,0002a^5 - 0,003\ a^4 + 0,022\ a^3 - 0,0761\ a^2 + 0,1247\ a - 0,0475 & si\ a > 16 \end{cases}$$

Pour ce lissage, nous utilisons l'option « Ajustement d'une courbe de tendance » du logiciel Excel avec plusieurs types de fonctions de lissage (polynomial, exponentiel…). Nous retenons celui du meilleur ajustement, c'est-à-dire de R^2 le plus grand.

Nous retenons un lissage polynomial pour la modélisation puisqu'il suit davantage les taux bruts observés que les autres types d'ajustement.

Nous remarquons sur le graphique précédent que les rachats totaux surviennent davantage pour les anciens contrats (supérieurs à 16 ans), même si durant les trois premières années une pénalité de rachat total de 6% de l'épargne revalorisée s'applique. Les taux diminuent progressivement par la suite

Les coefficients d'ajustement sont : $R^2 = 0.8603$ pour le premier modèle et $R^2 = 0.7872$ pour le deuxième.

Selon ces coefficients d'ajustement, on peut dire que Les deux modèles représentent à peu prêt 80% des observations réelles, alors on considère les différences entre les taux selon l'ancienneté observés et ceux estimés comme des variables aléatoires suivant une loi normale centrée et d'écart type égale à l'erreur fourni par la procédure.
Dans notre cas, les taux de rachat stochastiques s'expriment de la manière suivante :

$$T_r(a) = \begin{cases} 8 * 10^{-7}a^6 - 5 * 10^{-5}a^5 + 0,001\ a^4 - 0,0128\ a^3 + 0,0793\ a^2 - 0,2354\ a + 0,2636 + \varepsilon_1(a) & si\ a \leq 16 \\ -5 * 10^{-6}a^6 + 0,0002a^5 - 0,003\ a^4 + 0,022\ a^3 - 0,0761\ a^2 + 0,1247\ a - 0,0475 + \varepsilon_2(a) & si\ a > 16 \end{cases}$$

Après avoir estimé les courbes des taux historiques, on procède alors au calcul des résidus et aux tests graphiques et analytiques de leur normalité dans le but d'effectuer une approche stochastique qui fournit plus de précision aux modèles.

II.2 Tests de normalité :

Les tests de normalité font partie des tests d'adéquation qui permettent de savoir si notre perception du réel est compatible avec ce que nous observons, la conformité à la loi normale revêt une importance supplémentaire. En effet, l'hypothèse de normalité des

distributions sous-tend souvent de nombreux tests paramétriques (ex. comparaison de moyennes, résidus de la régression, etc.). En toute rigueur, s'assurer au préalable de la compatibilité des distributions avec l'hypothèse de normalité avant de procéder au test statistique proprement dit devrait être incontournable.

II.3.1 Test graphique :

Pour faire ce test on se sert du diagramme P-P plot, sur le quel l'axe des ordonnés porte les fréquences cumulées Fi de la distribution observée, tandis que l'axe des abscisses porte les probabilités Fi* correspondantes de la loi théorique. Le nuage de points (Fi, Fi*) s'aligne sur la première bissectrice lorsque la distribution théorique proposée est une bonne représentation des observations.

Ainsi le diagramme P-P plot obtenus a l'allure suivante:

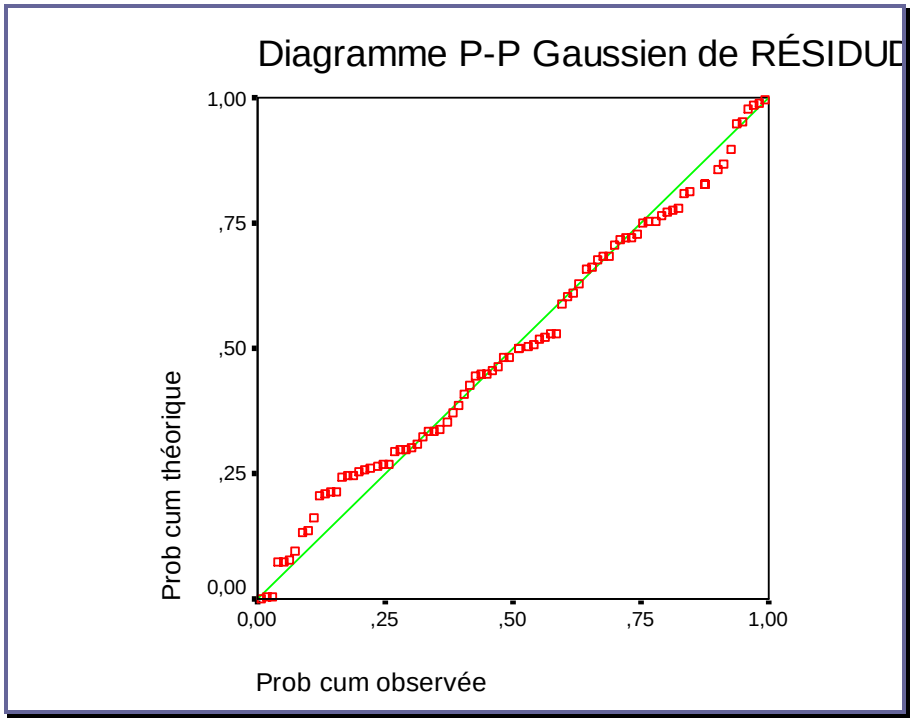


Figure 49 : Le diagramme P-P plot des résidus de taux de rachat

II.3.2 Test analytique de normalité des résidus :

On s'est servit du test de shapiro-Wilk et de Jaques-Bera pour mesurer la conformité de la distribution observée avec une distribution normale théorique.

Les tests de normalité des variables (les résidus du taux de rachat)

H_0 : L'échantillon suit une loi normale. H_a : L'échantillon ne suit pas une loi normale.

Test de Shapiro-Wilk	
W	0,985
p-value	0,596
alpha	0,05

Tableau 17 : Le test de Shapiro-Wilk pour des résidus de taux de rachat

Etant donné que la p-value calculée est supérieure au niveau de signification seuil alpha=0,05, on peut valider l'hypothèse nulle H_0.

Le risque de rejeter l'hypothèse nulle H_0 alors qu'elle est vraie est de 59,57%.

Test de Jarque-Bera	
JB (Valeurobservée)	0,251
JB (Valeur critique)	5,991
DDL	2
p-value	0,882
Alpha	0,05

Tableau 18 : Le test de Jarque-Bera pour des résidus de taux de rachat

Etant donné que la p-value calculée est supérieure au niveau de signification seuil alpha=0,05, on peut valider l'hypothèse nulle H_0.

Le risque de rejeter l'hypothèse nulle H_0 alors qu'elle est vraie est de 88,17%.

III. Flux du passif :

Hypothèses de travail :

- le passif d'assurance-vie considéré est uniquement composé des contrats relatifs au produit CIMR.
- Absence de frais de gestion des contrats CIMR (nous supposons que ces frais sont maîtrisés)
- Le taux de revalorisation des contrats est égal à 4,5% pour les cotisations après 1985 et à 3,25% avant 1985.
- la redistribution de la participation au bénéfice pour les contrats CIMR se fait de manière égalitaire entre les affiliés. Dans notre cas elle est incluse dans le calcul des réserves.

La valeur de marché de l'actif est également influencée par les flux du passif. Nous avons chaque année des affiliés qui quittent le portefeuille, soit suite à un décès, soit après un rachat de contrat, soit suite à une demande de départ en capital ou en rente, pour les affiliés atteignant l'âge légal de la retraite. Pour la compagnie, le remboursement de ces personnes se fait en revendant une partie de l'actif (le montant nécessaire pour honorer ces engagements). Ils sont déterminés de la façon suivante :

$$Flux_{passif}(t) = (T_d + T_r + T_{sc}).R^{t-1}.1{,}045$$

Avec :

T_d = Taux de décès l'année t;

T_r = Taux de rachat l'année t ;

T_{sc} = Taux de sortie en capital l'année t ;

R^{t-1} = Total des réserves de l'année t-1 revalorisées à 4,5% l'année t.

Ainsi la distribution des réserves de l'année 2009 selon l'âge a l'allure suivante :

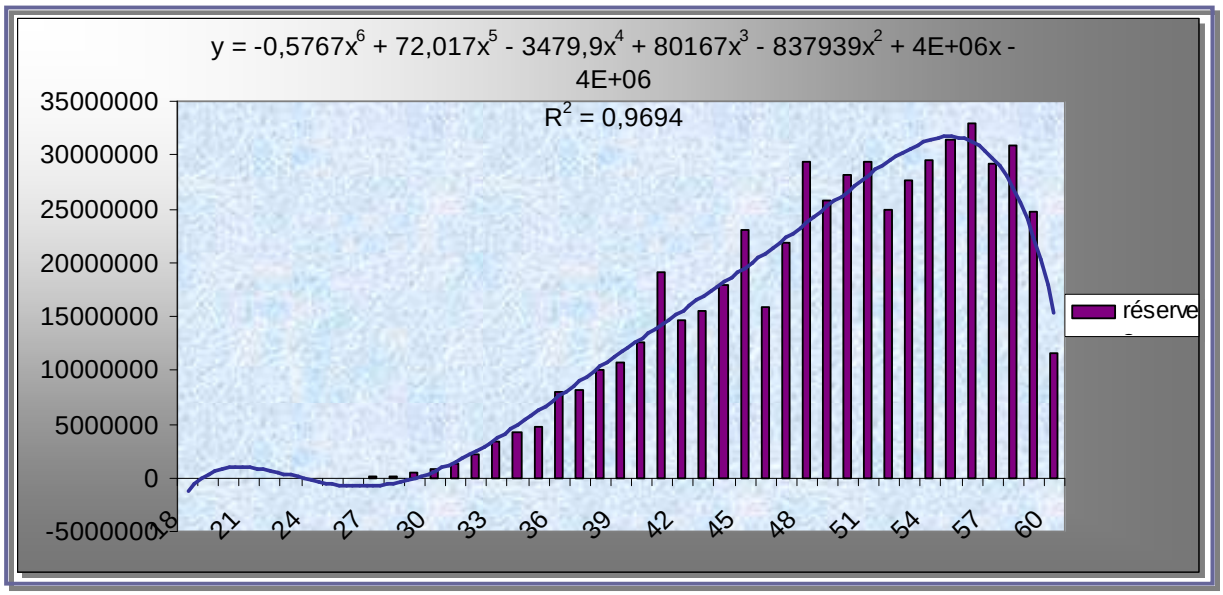


Figure 50 : Répartition des réserves mathématiques selon l'âge

On constate d'après ce graphe que les personnes âgées ont des réserves plus grandes que celles des jeunes.

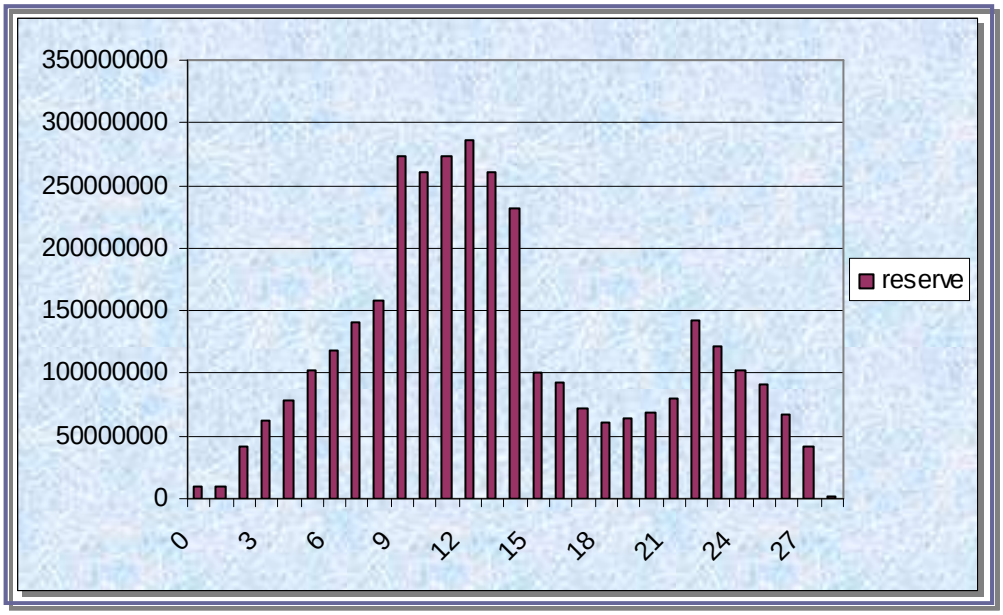


Figure 51 : Répartition des réserves mathématiques selon l'ancienneté

On constate que les personnes qui ont des années d'anciennetés entre 10 à 15 ans ont des réserves qui constituent la moitié des réserves de notre portefeuille.

Ces flux du passif sont fonction de la table de mortalité considérée. Ils sont par contre indépendants de paramètres financiers (aucun facteur d'actualisation n'intervenant ici).

Après la simulation des résidus pour préserver leur caractère aléatoire; les flux de passif sur les 40 ans sont donnés par le tableau suivant :

Année	flux passif	Année	Flux passif
2009	4 989 342 593,4	**2029**	651 197 768
2010	5 162 171 886	**2030**	427 346 791
2011	5 232 271 880	**2031**	306 976 895
2012	5 260 951 177	**2032**	299 613 782
2013	5 303 436 844	**2033**	288 228 435
2014	4 846 568 333	**2034**	289 656 154
2015	4 429 902 883	**2035**	198 993 978
2016	3 925 930 118	**2036**	183 798 778
2017	3 525 420 115	**2037**	179 585 080
2018	3 216 336 819	**2038**	137 036 568
2019	2 713 189 868	**2039**	89 683 327
2020	2 376 347 273	**2040**	78 277 744
2021	2 047 192 525	**2041**	75 484 216
2022	1 828 226 044	**2042**	63 121 313
2023	1 516 616 667	**2043**	55 528 457
2024	1 311 908 860	**2044**	59 547 960
2025	1 115 032 998	**2045**	60 839 315
2026	934 523 596	**2046**	64 820 610

2027	904 314 120	**2047**	70 774 112
2028	707 787 251	**2048**	77 758 772

Tableau 19 : Simulation de flux de passif sur les 40 ans en DH

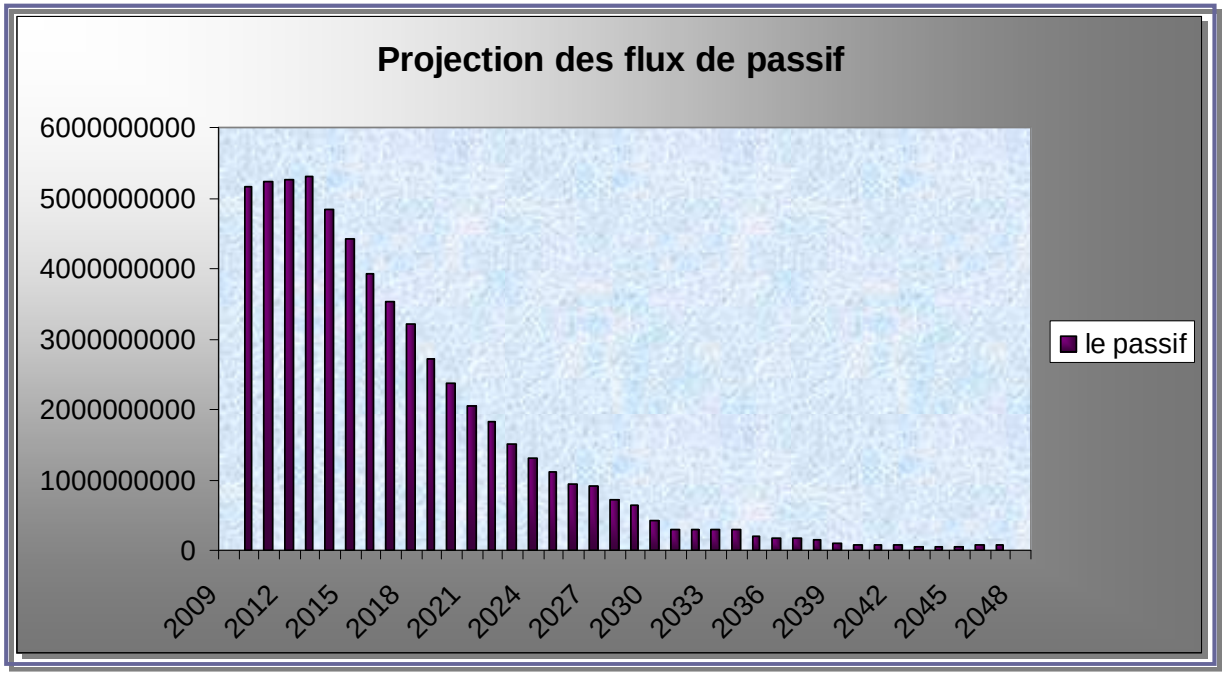


Figure 52 : Projection de flux de passif sur les 40 ans

D'après ce graphique on voit clairement que les flux de sorties augmentent progressivement entre l'année 2009 et 2012 pour atteindre 5 260 951 177 de Dhs comme maximum en cette année, puis les valeurs descendent linéairement dans les années qui suivent, cela est même justifié par la construction de la base de données sur laquelle on a travaillé, les effectifs des assurés des tranches d'âges entre 53 et 59 ans représentent une part majoritaire, alors on peut en tirer que la compagnie aura besoin de plus de liquidité dans les années qui viennent.

Pour conclure, après avoir déterminé la loi du rachat et de décès des affiliés selon l'âge d'une manière stochastique et la table prospective de la mortalité, nous avons simulé la projection des flux du passif en se basant sur des hypothèses bien précises; notre passif qui a diminué progressivement du 5 milliards de Dhs en 2009 pour atteindre 77 758 772 Dhs à l'horizon du 2048.

Nous essayerons dans le chapitre suivant de déterminer le taux de participation aux bénéfices et le taux garanti.

CHAPITRE

7

Modélisation de la participation aux bénéfices et valorisation du contrat

Ce chapitre traite la modélisation de la participation aux bénéfices.

Une autorité de contrôle des compagnies d'assurance est présente sur le marché pour vérifier la solvabilité de celles-ci.

Notre modèle s'inspire de celui introduit par Briys & de Varenne (1997a)

Dans un premier temps, nous allons présenter les clauses de participation aux bénéfices.

Dans un deuxième temps, nous allons essayer de valoriser notre contrat, c'est-à-dire l'engagement envers les assurés.

I. Le contrat d'assurance de base :

I.1 Les acteurs du marché d'assurance :

L'arrangement financier que nous allons analyser est initialisé à l'instant $t = 0$. Nous considérons une compagnie d'assurance vie dont l'horizon de prévision s'étend sur un intervalle de temps fini $[0, T]$. L'instant T peut être considéré comme le temps jusqu'à maturité d'une cohorte de polices d'assurance vie émises en $t = 0$. Nous supposons en outre que la compagnie ne vend qu'un seul type de police d'assurance vie.

Nous nous intéressons à une compagnie d'assurance vie dont la structure de passif fait intervenir deux types d'intervenants : les assurés et les actionnaires.

Le premier type d'agents, les assurés, achète une police homogène à la compagnie d'assurance vie. Les assurés sont tous engagés dans le même type de contrat venant à maturité à l'instant T. Les actionnaires, le deuxième type, sont des requérants résiduels fournissant les fonds propres. Par ailleurs, nous supposons que la compagnie d'assurance vie ne se finance pas à l'aide de dettes.

Sur le marché d'assurance, une autorité de contrôle est présente pour vérifier la solvabilité des compagnies d'assurance. Elle fait le suivi du respect des conditions d'exercice qui inclut un contrôle sur la marge de solvabilité des compagnies d'assurance.

A l'instant t = 0, les deux (types d') agents investissent une somme d'argent dans la compagnie. L'investissement initial apporté par les assurés est noté L_0, et équivaut au paiement des primes d'assurance, et celui des actionnaires E_0. Ces investissements servent à former la base initiale des actifs de la société, A_0, comme illustré par le bilan de la figure suivante. Le paramètre α ($\alpha < 1$) représente la quote-part initiale de participation des primes dans les actifs de la compagnie. Le portefeuille des actifs est supposé être totalement investi dans des actifs risqués (actions, obligations risquées, biens immobiliers).

Actifs	Passifs
A_0	$L_0 = \alpha A_0$ $E_0 = (1-\alpha) A_0$
A_0	A_0

Figure 53 : Bilan en t = 0

Nous adoptons pour la suite les notations suivantes : l'indice L se rapporte aux assurés (Liabilityholders en anglais) et l'indice E aux actionnaires (Equityholders).

I.2 Les garanties du contrat d'assurance :

Avant d'explorer en détail les droits acquis par les différentes parties, nous présentons les clauses du contrat d'assurance étudié. Celui-ci contient, en plus d'un taux de rendement garanti, une clause de participation aux bénéfices.

Sous l'hypothèse que la compagnie n'ait pas été mise en faillite avant la maturité des contrats d'assurance, nous pouvons alors décrire le paiement auquel les assurés ont droit à maturité. Ensuite, nous allons fixer ce qui se passera dans le cas d'une faillite.

I.2.1 Taux technique :

La compagnie d'assurance vie propose des contrats de retraite contenant une garantie explicite de taux de rendement minimum, c'est-à-dire une garantie que les fonds investis vont accumuler au moins un taux fixé à l'avance.

Ce taux de rendement garanti est appelé taux technique.

Autrement dit, la compagnie promet aux assurés un rendement continu accumulé sur la valeur de marché initiale des engagements d'au moins r^* pendant la vie du contrat. Ainsi en T, date d'échéance commune des contrats, elle garantit aux assurés une somme finale qui est a priori de $\boxed{L_{T^*} = L_0 e^{r^* T}}$

Le taux technique est garanti pour toute la durée de vie des contrats d'assurance. Il convient alors de ne pas oublier que la promesse d'un taux technique est un engagement de la part de l'assureur et a donc une valeur. Au cours des dernières années, où les taux des marchés financiers n'ont cessé de diminuer, de nombreuses compagnies ont rencontré des problèmes à cause des anciens contrats contenant des taux techniques très élevés et souvent beaucoup plus élevés que les taux actuellement en vigueur sur les marchés financiers. Le taux technique doit donc être fixé avec prudence.

Les compagnies d'assurance se sont toutefois concertées pour proposer toutes le même taux technique, un taux technique plus élevé représentant un avantage commercial. A cause de la pression due à la concurrence entre compagnies d'assurances, nous pouvons supposer pour la suite du travail qu'elles proposent toutes un taux technique identique.

Une observation s'impose cependant ici. La promesse de la compagnie ne peut être honorée que si les actifs ont généré assez de valeur, c'est-à-dire si $A_T > L_{T^*}$ à maturité. Dans le cas contraire, $A_T \leq L_{T^*}$, et dans la situation où la compagnie n'a pas été mise en faillite prématurément par l'autorité de contrôle, les assurés reçoivent A_T et les actionnaires ne touchent rien.

I.2.2 Clause de participation aux bénéfices :

En plus du paiement garanti à maturité impliqué par le taux technique, le contrat d'assurance comprend une clause de participation aux bénéfices : les assurés ont droit à un rendement supplémentaire si la valeur de marché des actifs a évoluée de manière suffisamment favorable.

Nous considérons ici une participation aux bénéfices finale, appelée Terminal Bonus dans la littérature anglaise, par opposition à une participation bénéficiaire annuelle ou Reversionary Bonus. La distinction se fait en fonction de l'instant d'attribution de la participation, la première n'étant donnée qu'au terme du contrat tandis que la deuxième est distribuée chaque année.

Pour le Terminal Bonus, le complément des prestations attribué au terme du contrat est déterminé en fonction du surplus final entre l'actif et le passif.

Pour le Reversionary Bonus, la dotation de participation est effectuée chaque année en fonction de la marge d'intérêt.

Les assurés reçoivent ainsi une fraction δ des revenus financiers nets -si positifs- de la compagnie d'assurance vie lorsque la situation financière de la compagnie est assez favorable, soit quand $A_T > \frac{L_{T^*}}{\alpha}$ avec $\alpha < 1$. Ces revenus nets incluent dividendes, gains de capitaux nets, coupons et loyers. δ représente la partie contractuelle du surplus et est appelé taux de participation aux bénéfices.

Ainsi, sans défaut préalable, le capital garanti de L_{T^*} sera minoré en cas de mauvais résultats alors qu'il sera majoré en cas de résultats exceptionnels de la compagnie. Le taux de participation bénéficiaire a parfois une limite inférieure due à la réglementation. En France, par exemple, il ne peut être inférieur à 85%.

Dans la littérature récente, il y a eu un débat intense sur la manière dont on peut modéliser de manière réaliste cet élément de participation aux bénéfices dans des contrats d'assurance vie. Ici, nous adoptons l'approche de Briys & de Varenne (1994, 1997a) qui, sous l'hypothèse que les actifs sont affectés dés le départ à une classe de contrats, spécifient le payoff de l'option bonus comme étant :

$$\boldsymbol{\beta_T = max\left[0, \delta\left[\frac{L_0}{A_0}(A_T - A_0) - (L_{T^*} - L_0)\right]\right] = \delta\, max[0, \delta\alpha A_T - L_{T^*}].}$$

$$\boxed{\boldsymbol{\beta_T = \delta[\alpha A_T - L_{T^*}]^+}}$$

Le montant positif β_T représente le revenu financier des assurés après le paiement du capital garanti.

En effet, les revenus financiers totaux (A_T, A_0) de la compagnie entre les instants 0 et T sont supposés être attribués aux différents contrats de manière à ce que seulement une fraction $\alpha = \frac{L_0}{A_0}$ est considérée pour la participation bénéficiaire des assurés. Après que les promesses garanties (L_{T^*}, L_0) ont été tenues et déduites des bénéfices financiers, les assurés reçoivent une fraction δ de ces revenus financiers nets.

La compagnie commence à distribuer des bénéfices dés que β_T est positif, c'est-à-dire dés que $A_T > \frac{L_{T^*}}{\alpha}$. En d'autres termes, puisque $\frac{L_{T^*}}{\alpha} = A_0 e^{r^* T}$ la compagnie commence à servir un supplément dés que le taux de rendement des actifs dépasse le taux garanti r^*.

De l'équation (1.1), il est clair que les assurés reçoivent une fraction δ du surplus dans les états finaux tels que la "part" des assurés dans la valeur totale excède le paiement promis de L_{T^*}. Le paramètre δ modélise l'amplitude dans laquelle les assurés participent dans des payoffs supérieurs.

I.3 **Paiement à maturité:**

La modélisation des clauses du contrat d'assurance de la section précédente permet de décrire le payoff contractuel $\Theta_L(T)$ des assurés à maturité en distinguant trois états du monde.

Dans le premier scénario (le plus mauvais), la compagnie d'assurances est totalement insolvable : la valeur des actifs en T est inférieure au paiement garanti aux assurés, L_{T^*}. La compagnie est déclarée en faillite et les actifs sont distribués aux assurés :

$\Theta_L(T) = A_T$ si $A_T < L_{T^*}$

Dans le deuxième scénario, la compagnie est capable de respecter ses engagements garantis mais elle est incapable de servir une participation bénéficiaire, ce qui est équivalent à $\beta_T = 0$:

$\Theta_L(T) = L_{T^*}$ si $L_{T^*} \leq A_T < \frac{L_{T^*}}{\alpha}$

Dans le troisième scénario, la participation aux bénéfices β_T est positive.

Les actifs génèrent assez de valeur pour faire face au paiement garanti et à la participation bénéficiaire. Dans un tel cas, l'engagement en T est égal à

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Theta_L(T) = L_{T^*} + \beta_T} & \quad \textbf{si } \boldsymbol{A_T \geq \frac{L_{T^*}}{\alpha}} \\ \boldsymbol{= L_{T^*} + \delta(\alpha A_T - L_{T^*})} & \quad \textbf{si } \boldsymbol{A_T \geq \frac{L_{T^*}}{\alpha}} \\ \boldsymbol{= \delta \alpha A_T + (1-\delta) L_{T^*}} & \quad \textbf{si } \boldsymbol{A_T \geq \frac{L_{T^*}}{\alpha}} \end{aligned}$$

Si nous reprenons le vocabulaire utilisé par Briys & de Varenne (1994), le premier cas correspond à un cas d'insolvabilité totale ; le deuxième cas est une insolvabilité partielle dans le sens où uniquement les engagements garantis sont remplis ; le troisième cas est le meilleur scénario et correspond à un scénario de solvabilité totale.

Pour résumer, le paiement accordé aux assurés à l'échéance du contrat, $\Theta_L(T)$, se décrit de la manière suivante en fonction de l'évolution des actifs de l'entreprise :

$$\boldsymbol{\Theta_L(T)} = \begin{cases} \boldsymbol{A_T} & \boldsymbol{si\ A_T < L_{T^*}} \\ \boldsymbol{L_{T^*}} & \boldsymbol{si\ \ L_{T^*} \leq A_T \leq \frac{L_{T^*}}{\alpha}} \\ \boldsymbol{L_{T^*} + \delta(\alpha A_T - L_{T^*})} & \boldsymbol{si\ \frac{L_{T^*}}{\alpha} < A_T} \end{cases}$$

Ou de manière plus compacte :

$$\boxed{\boldsymbol{\Theta_L(T) = \min[A_T, L_{T^*}] + \beta_T = \delta[\alpha A_T - L_{T^*}]^+ + L_{T^*} - [L_{T^*} - A_T]^+}}$$

La figure suivante illustre cette dernière équation.

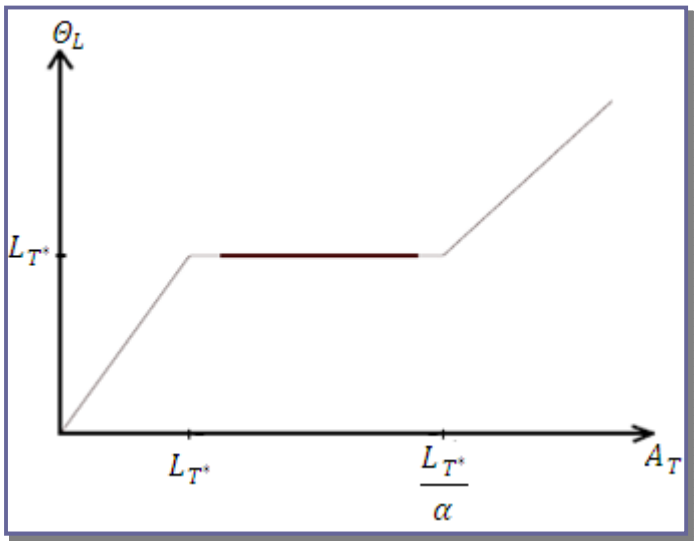


Figure 54 : Pay-off final des assurés

Les engagements d'assurance sont constitués de trois composantes comme le montre la figure.

Le premier terme de l'équation est lié à la participation bénéficiaire que la compagnie peut payer si les affaires vont bien. Les assurés détiennent une position longue sur l'option bonus.

<table>
<tr><td>Zéro-coupon sans risque</td><td>Option de défaut</td><td>Option bonus</td></tr>
<tr><td>Position longue</td><td>Position courte</td><td rowspan="2">Position longue</td></tr>
<tr><td colspan="2">Zéro-coupon risqué</td></tr>
</table>

Figure 55 : Paiement à maturité des assurés

Le deuxième terme correspond à une position longue sur un paiement fixe à maturité, égal au capital garanti. Il peut être assimilé au payoff d'un zéro-coupon sans risque (de défaut). Le terme restant est une position courte sur une option de vente, reflétant le risque de défaut. En particulier, ces deux termes sont collectivement équivalents au payoff d'une obligation risquée.

La relation (1.6) définit le payoff à maturité relatif au contrat des assurés.

Si l'échéance du contrat est le seul instant de flux possible, les techniques standards pour les produits dérivés de type européen peuvent être appliquées pour la valorisation. En effet, ces payoffs partagent les mêmes caractéristiques que les options européennes usuelles.

I.4 Défaut précoce de la compagnie:

Jusqu'ici, nous avons supposé que la compagnie d'assurance n'a pas été mise en faillite avant l'instant T. Pour ajouter du réalisme au modèle, nous introduisons à présent une restriction réglementaire de solvabilité. Celle-ci est fixée de manière exogène et imposée par l'autorité de contrôle. Une telle limite a été proposée la première fois par Grosen & Jørgensen (2002).

Nous suivons ici leur approche.

Comme annoncé ci-dessus, nous supposons qu'une autorité de contrôle est présente sur le marché de l'assurance. Celle-ci suit, entre autres, la marge de solvabilité requise par les compagnies pour qu'elles puissent proposer des contrats d'assurance sur la vie. Nous supposons qu'une compagnie d'assurance est solvable aussi longtemps que la valeur des actifs est supérieure à une certaine limite imposée par l'autorité de contrôle. Cette limite est fonction des garanties de capital.

Techniquement, supposons que dans le cadre ci-dessus, la compagnie peut uniquement continuer son activité jusqu'à échéance des contrats sous la condition :

$$A_t > \lambda L_0 e^{r^* t} \equiv B_t, \forall t \epsilon [0, T[$$

Où la courbe $\{B_t\}_{0\leq t<T}$ représente la barrière réglementaire imposée par l'autorité de contrôle.

L'interprétation et la motivation de cette restriction sont directes :

$L_0 e^{r^* t} \equiv L_{t^*}$ est le dépôt initial des assurés rémunéré au taux garanti jusqu'à l'instant t.

Voilà pourquoi c'est uniquement dans le cas où les actifs totaux ont à chaque instant été suffisants pour couvrir cet engagement nominal multiplié par une constante prédéfinie, λ, que les options des assurés vont vivre jusqu'à maturité.

λ donne le niveau de la limite réglementaire.

Dans le cas contraire, les actifs ont à un instant du temps, τ , eu une valeur de marché telle que $A_\tau = B_\tau$. Dans cette situation, la valeur de marché des actifs se trouve à un niveau critique et nous supposons que les autorités de contrôle vont fermer immédiatement la compagnie et distribuer les richesses récupérées aux stakeholders.

Notons τ l'instant de défaut de la compagnie d'assurance vie ; c'est le premier instant où A_t franchit la barrière B_t ce qui s'écrit : $\tau = \inf\{t \in [0,T] | A_t < B_t\}$

A ce point, il est intéressant de distinguer deux cas. En effet, en fonction de la valeur de λ, les cas de figure qui peuvent se présenter sont différents.

I.4.1 **Réglementation stricte : $\lambda \geq 1$:**

Pour $\lambda \geq 1$ et dans le cas d'une atteinte de la barrière, les curateurs sont capables de rembourser aux assurés leur investissement initial augmenté des intérêts au taux promis r^* jusqu'à la date de liquidation.

En même temps, il y aura un surplus de $(\lambda - 1)L_0 e^{r^* \tau}$ qu'il faudra redistribuer aux actionnaires. Une alternative et une hypothèse très raisonnable serait que le surplus servira à payer les frais de faillite et irait dans ce cas à des parties tierces comme l'autorité de contrôle et/ou les avocats. Même si intéressante, cette possibilité n'est pas approfondie dans le cadre de cette étude.

Ainsi, $\lambda \geq 1$ correspond à une situation dans laquelle l'autorité de contrôle prévient le défaut en permettant les affaires uniquement pour des compagnies qui ont une marge d'une certaine amplitude entre la valeur marché de leurs actifs et les obligations nominales envers les assurés. La situation $\lambda \geq 1$ est donc très confortable pour les assurés et les autorités. Théoriquement elle correspond à une absence de prise de risques.

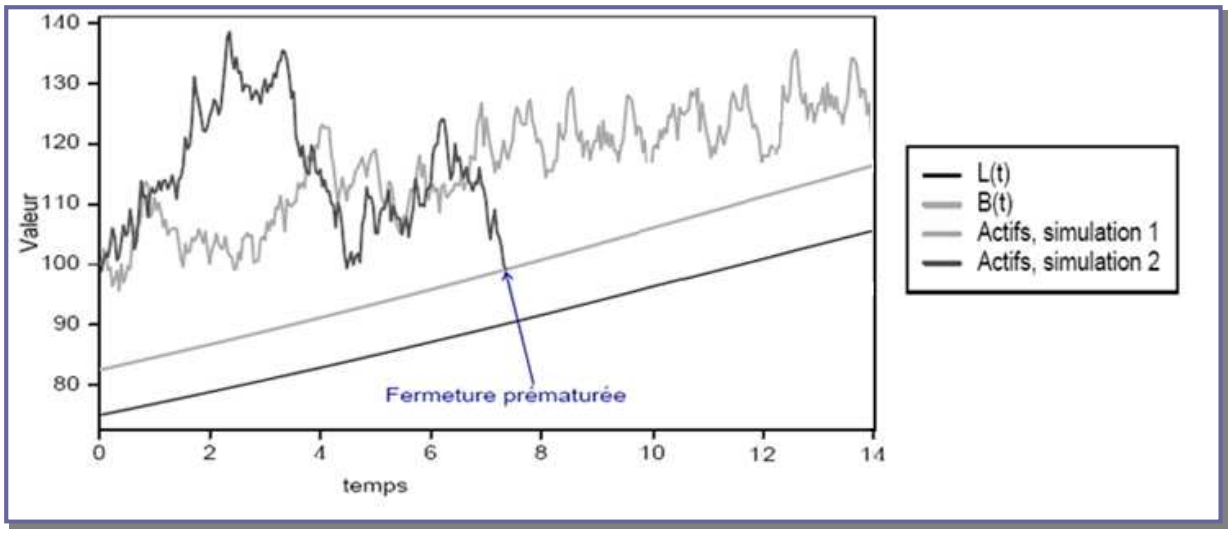


Figure 56 : Illustration de la barrière réglementaire pour $\lambda \geq 1$: $\lambda = 1{,}1$; $T = 10$; $\alpha = 0{,}75$

Cette figure montre un exemple d'une telle situation : la première simulation des actifs ne donne pas lieu à des problèmes de solvabilité et à maturité la compagnie peut remplir ses engagements sans problème quelconque. La deuxième simulation par contre donne lieu à une fermeture forcée après environs sept ans et demi.

I.4.2 Réglementation moins stricte : $\lambda < 1$:

$\lambda < 1$ correspond par contre à une situation dans laquelle l'autorité de contrôle admet des déficits temporaires et limités. Si un défaut intervient dans cette situation, les actifs récupérés ne vont pas suffire pour couvrir la prime initiale des assurés rémunérée au taux garanti jusqu'à l'instant τ. En cas de défaut, la compagnie ne sera donc pas en mesure de respecter intégralement ses engagements vis-à-vis des assurés.

Cette situation peut être vue comme correspondant à un certain laxisme de la part de la réglementation. Nous supposons que les assurés vont alors recevoir la valeur marché récupérée en entier et que les actionnaires ne touchent rien.

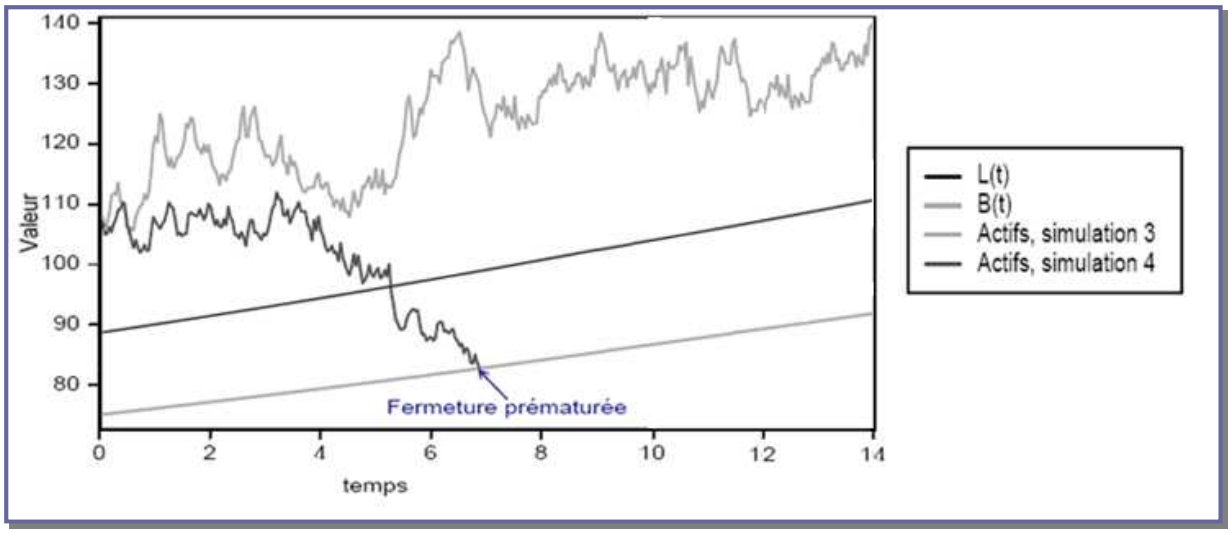


Figure 57 : Illustration de la barrière réglementaire pour $\lambda < 1$: $\lambda = 0{,}75$; $T = 10$; $\alpha = 0{,}75$

Ce cas de figure est illustré par la figure 1.5 : la première évolution des actifs permet à la compagnie de remplir ses engagements garantis, tandis que le deuxième cas entraîne la mise en faillite par l'autorité de contrôle.

Paiement en cas de défaut avant la maturité des contrats

Comme décrit auparavant, il y aura un dédommagement aux assurés, défini par (1.8), dans le cas d'une fermeture prématurée à l'instant τ. Formellement pour $\tau < T$, et en accordance avec la discussion ci-dessus, ce flux,

$\Theta_L(T)$, est donné par :

$$\Theta_L(\tau) = \begin{cases} L_0 e^{r^*\tau} & \text{si } \lambda \geq 1 \\ \lambda\, L_0 e^{r^*\tau} & \text{si } \lambda < 1 \end{cases}$$

Ou encore :

$$\boxed{\Theta_L(\tau) = \min[\lambda, 1]\, L_0 e^{r^*\tau} = \min[\lambda, 1]\, L_{\tau^*}}$$

A présent, nous disposons de tous les éléments nécessaires pour décrire l'engagement de la compagnie envers les assurés.

I.5 Le droit des assurés :

Pour rappel, le paiement accordé aux assurés à l'échéance du contrat,

$\Theta_L(T)$, se décrit de la manière suivante en fonction de l'évolution des actifs de l'entreprise : $\boxed{\Theta_L(T) = \delta[\alpha A_T - L_{T^*}]^+ + L_{T^*} - [L_{T^*} - A_T]^+}$

En plus, dans le cas d'une faillite de la compagnie d'assurances, les assurés ont droit au remboursement suivant : $\Theta_L(\tau) = \min[\lambda, 1]L_{\tau^*}$

En imposant la restriction réglementaire de solvabilité, le modèle devient considérablement plus compliqué. En particulier, les droits des assurés ont changé d'options plain vanilla en des options de type plus exotique avec des caractéristiques communes avec les options barrières knock-out. Dans le cadre proposé, la barrière knock-out est exponentielle et définie par la courbe $\{B_t\}_{0\le t<T}$ introduite ci-dessus.

Ainsi, les assurés bénéficient d'un taux d'intérêt garanti et d'une quotepart de la performance du portefeuille d'actifs de la compagnie. Au total, deux données clé caractérisent de telles polices : le taux d'intérêt garanti et le niveau de participation.

Avant de considérer la valorisation de $\Theta_L(T)$, nous décrivons les détails concernant le droit des actionnaires.

I.6 Le droit des actionnaires :

Le paiement aux actionnaires est implicite dans les discussions des sections précédentes. D'ailleurs, nous donnons ces formules uniquement à titre d'information, puisque notre but est de valoriser l'engagement de l'assureur envers les assurés.

En tant que possesseurs d'un droit résiduel et sous réserve que la compagnie n'ait pas cessé son activité prématurément, les actionnaires vont recevoir un paiement à maturité donné par :

$$\Theta_E(T) = \begin{cases} 0 & \text{si } A_T < L_{T^*} \\ A_T - L_{T^*} & \text{si } L_{T^*} \le A_T \le \frac{L_{T^*}}{\alpha} \\ A_T - L_{T^*} - \delta(\alpha A_T - L_{T^*}) & \text{si } \frac{L_{T^*}}{\alpha} < A_T \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si } A_T < L_{T^*} \\ A_T - L_{T^*} & \text{si } L_{T^*} \le A_T \le \frac{L_{T^*}}{\alpha} \\ (1-\delta)(\alpha A_T - L_{T^*}) + (1-\alpha)A_T & \text{si } \frac{L_{T^*}}{\alpha} < A_T \end{cases}$$

Ou encore

$$\Theta_E(T) = [A_T - L_{T^*}]^+ - \delta[\alpha A_T - L_{T^*}]^+ = [A_T - L_{T^*}]^+ - \delta\alpha[A_T - \frac{L_{T^*}}{\alpha}]^+$$

La figure suivante illustre la position des flux des actionnaires à l'instant T.

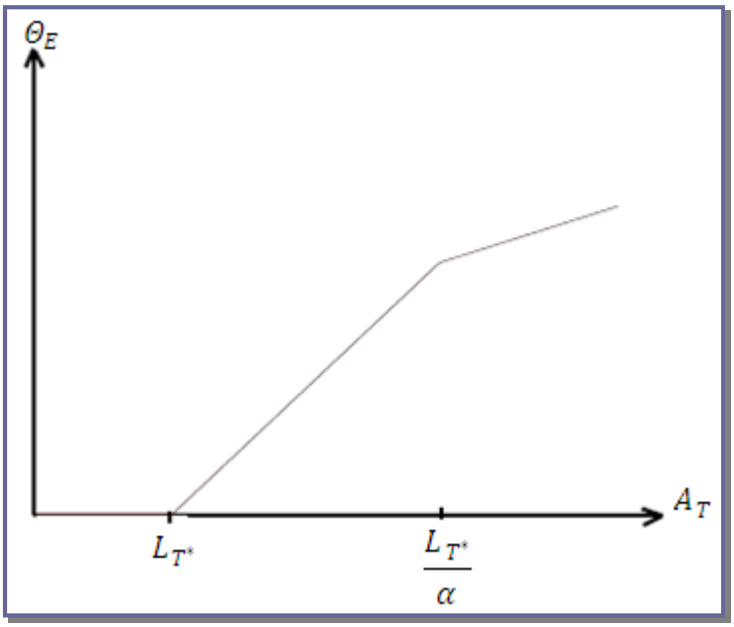


Figure 58 : Pay-off final des actionnaires

Le paiement à maturité des actionnaires est la différence entre deux options d'achat européennes. L'option longue est un call sur les actifs totaux avec un prix d'exercice égal au paiement à maturité promis aux assurés.

Si $\delta = 0$, ce terme est l'option call d'engagement limité (voir Black & Scholes (1973) et Merton (1973)). Les actionnaires ont l'option de s'en aller si les affaires ne vont pas bien.

Le second call est en position courte. Il a un poids donné par le taux de participation aux bénéfices δ et correspond à l'option bonus émise à l'égard des assurés. En effet, les actionnaires ont écrit une option d'achat aux assurés en introduisant une clause contractuelle de participation aux bénéfices basée sur la valeur des actifs.

En ce qui concerne une indemnisation possible dans le cas d'une fermeture forcée avant T, la section 1.4 a établi qu'il ne pourrait y avoir un tel paiement dans un régime où $\lambda < 1$. Toutefois, dans le cas où $\lambda \geq 1$, il y a une marge de surplus en cas de défaut et ceci ouvre la possibilité d'un remboursement prématuré aux actionnaires.

Dans cette étude, nous ne considérons pas l'alternative selon laquelle le surplus serait distribué à des parties tierces, nous supposons au contraire qu'il est payé intégralement aux actionnaires. Dans le cas d'une fermeture prématurée, les actionnaires ont droit au remboursement suivant :

$$\Theta_E(\tau) = \begin{cases} (\lambda - 1) L_0 e^{r^*\tau} & \text{si } \lambda \geq 1 \\ 0 & \text{si } \lambda < 1 \end{cases} = \max[\lambda - 1, 0]\, L_0 e^{r^*\tau}$$

$$\boxed{\Theta_E(\tau) = \max[\lambda - 1, 0]\, L_{\tau^*}}$$

La valorisation de l'engagement envers les assurés est essentielle. Une analyse plus profonde de cette question demande des hypothèses supplémentaires et en particulier un modèle dynamique des marchés financiers.

II. Valorisation de l'engagement envers les assurés:

Le but de cette partie est la valorisation de l'engagement de la compagnie d'assurance à l'égard des assurés.

La valorisation des droits des actionnaires peut se faire de manière similaire. Cependant, comme annoncé ci dessus, nous nous intéressons à la tarification de l'engagement de l'assureur envers les assurés.

Nous commençons par donner les formules générales pour valoriser le contrat des assurés. Pour ceci, nous suivons les approches de Grosen & Jørgensen (2002) et de Bernard, Le Courtois & Quittart-Pinon (2005). Ensuite, nous précisons la méthode de valorisation.

II.1 Valeur du contrat sous la mesure risque-neutre :

Nous nous plaçons dans l'univers risque-neutre pour prendre avantage de la tarification martingale. Dans cette théorie, l'absence d'arbitrage implique que sous la mesure de probabilité Q, tous les processus de valeur escomptés sont des martingales.

En conséquence, si nous désignons par $V_L(t)$ la valeur en t ($t < \tau$) des flux des assurés, nous pouvons écrire :

$$\mathbf{V_L(t) = \mathbb{E}^{\mathcal{Q}}_t[e^{-\int_t^T r_s ds}\Theta_L(T)1_{\{\tau \geq T\}} + e^{-\int_t^T r_s ds}\Theta_L(T)1_{\{\tau < T\}}]}$$

Où $\mathbb{E}^{\mathcal{Q}}_t$ désigne l'espérance sous la mesure risque-neutre Q conditionnellement à l'information disponible en t et 1_A la fonction indicatrice de l'ensemble A.

Remarquez que le premier terme du côté droit de l'équation représente la valeur en t du paiement éventuel à maturité et l'espérance est conditionnelle au fait qu'il n'y a pas eu de fermeture forcée précédemment via la fonction indicatrice. Le second terme représente la valeur en t du remboursement éventuel en cas de faillite avant l'instant T.

Cette formule devient :

$$\mathbf{V_L(t) = \mathbb{E}^{\mathcal{Q}}_t[e^{-\int_t^T r_s ds}(L_{T^*} + \delta[\alpha A_T - L_{T^*}]^+ - [L_{T^*} - A_T]^+)1_{\{\tau \geq T\}} + e^{-\int_t^T r_s ds}\ \min[\lambda, 1]L_{\tau^*}\ 1_{\{\tau < T\}}]}$$

Le contrat peut être décomposé en quatre sous-contrats plus simples :

$$\boldsymbol{V_L(t) = \widehat{TG_t} + \widehat{BO_t} + \widehat{PO_t} + \widehat{LR_t}}$$

Où les notations ci-dessus s'inspirent de celles utilisées par Grosen & Jørgensen (2002) et liées aux termes anglais suivants :

$\widehat{TG}_t$ correspond à la garantie finale : *Terminal Guarantee*,

$\widehat{BO}_t$ désigne l'option de participation aux bénéfices : *Bonus Option*,

$\widehat{PO}_t$ désigne l'option de défaut sur laquelle les assurés possèdent une position courte : *Put Option*, et enfin

$\widehat{LR}_t$ représente le dédommagement versé aux assurés en cas de faillite prématurée de la compagnie : *Liabilityholders' Rebate*.

Ces quatre sous-contrats possèdent individuellement les expressions :

$$\widehat{\boldsymbol{TG}}_{\boldsymbol{t}} = \mathbb{E}^{\mathcal{Q}}{}_{\boldsymbol{t}}[e^{-\int_t^T r_s ds} \boldsymbol{L_{T^*}} \mathbf{1}_{\{\tau \geq T\}}]$$

$$\widehat{\boldsymbol{BO}}_{\boldsymbol{t}} = \mathbb{E}^{\mathcal{Q}}{}_{\boldsymbol{t}}[e^{-\int_t^T r_s ds} \boldsymbol{\delta}[\boldsymbol{\alpha A_T} - \boldsymbol{L_{T^*}}]^+ \mathbf{1}_{\{\tau \geq T\}}]$$

$$\widehat{\boldsymbol{PO}}_{\boldsymbol{t}} = \mathbb{E}^{\mathcal{Q}}{}_{\boldsymbol{t}}[e^{-\int_t^T r_s ds} [\boldsymbol{L_{T^*}} - \boldsymbol{A_T}]^+ \mathbf{1}_{\{\tau \geq T\}}]$$

$$\widehat{\boldsymbol{LR}}_{\boldsymbol{t}} = \mathbb{E}^{\mathcal{Q}}{}_{\boldsymbol{t}}[e^{-\int_t^T r_s ds} \ \mathbf{min}[\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{1}] \boldsymbol{L_{\tau^*}} \mathbf{1}_{\{\tau < T\}}]$$

Remarquez que Grosen & Jørgensen (2002) ont obtenu des formules fermées dans le cas où le taux d'intérêt sans risque est constant. Ce cas est présenté dans l'annexe d'une manière théorique. Le but de ce travail est de valoriser des contrats d'assurance dans un cadre de taux stochastiques. Cette approche est plus compliquée et demande l'introduction de la mesure forward-neutre.

II.1.1 Valeur du contrat sous la mesure forward-neutre :

Nous souhaitons évaluer le contrat d'assurance vie décrit ci-dessus. Pour cela, il faut déterminer la valeur des quatre sous-contrats donnés par les équations en (3.4). Pour simplifier les notations, nous nous concentrons dés à présent sur le cas t = 0.

Nous changeons d'univers de probabilité et passons dans le monde forward neutre.

Le fait que les prix relatifs sont des martingales sous la mesure martingale équivalente forward-neutre permet de réécrire la formule comme suit :

$$\mathbf{V_L(0)} = \mathbb{E}^{\mathcal{Q}_T}[(\mathbf{L_{T^*}} + \boldsymbol{\delta}[\boldsymbol{\alpha} \mathbf{A_T} - \mathbf{L_{T^*}}]^+ - [\mathbf{L_{T^*}} - \mathbf{A_T}]^+) \mathbf{1}_{\{\tau \geq T\}} + \mathbf{e}^{-\int_\tau^T \mathbf{r_s ds}} \ \mathbf{min}[\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{1}] \mathbf{L_{\tau^*}} \mathbf{1}_{\{\tau < T\}}]$$

Les formules des sous-contrats peuvent également être simplifiées par passage à l'univers forward-neutre. En utilisant le fait que $1_{\{\tau \geq T\}} = 1 - 1_{\{\tau < T\}}$, nous pouvons écrire :

$$\boxed{V_L(0) = P(0,T)(TG + BO - PO + LR)}$$

Avec :

$$TG = L_{T^*}(1 - E_1)$$

$$BO = \alpha\delta(E_7 - E_2) - \delta L_{T^*}(E_8 - E_3)$$

$$PO = L_{T^*}(E_9 - E_4) - E_{10} + E_5$$

$$LR = \min[\lambda, 1]L_0\, E_6$$

Et où nous introduisons les quantités suivantes :

$$E_1 = \mathcal{Q}_T[\tau < T] \qquad E_6 = \mathbb{E}^{\mathcal{Q}_T}[e^{\int_\tau^T r_s ds} e^{r^*\tau} 1_{\{\tau<T\}}]$$

$$E_2 = \mathbb{E}^{\mathcal{Q}_T}[A_T 1_{\{\tau<T\}} 1_{\left\{A_T > \frac{L_{T^*}}{\alpha}\right\}}] \qquad E_7 = \mathbb{E}^{\mathcal{Q}_T}[A_T\, 1_{\left\{A_T > \frac{L_{T^*}}{\alpha}\right\}}]$$

$$E_3 = \mathcal{Q}_T[A_T > \tfrac{L_{T^*}}{\alpha};\ \tau < T] \qquad E_8 = \mathcal{Q}_T[A_T > \tfrac{L_{T^*}}{\alpha}]$$

$$E_4 = \mathcal{Q}_T[A_T < L_{T^*};\ \tau < T] \qquad E_9 = \mathcal{Q}_T[A_T < L_{T^*}]$$

$$E_5 = \mathbb{E}^{\mathcal{Q}_T}[A_T 1_{\{A_T<L_{T^*}\}} 1_{\{\tau<T\}}] \qquad E_{10} = \mathbb{E}^{\mathcal{Q}_T}[A_T 1_{\{A_T<L_{T^*}\}}]$$

Avant d'aborder le calcul de chacune de ces formules, voyons la manière de déterminer des contrats équitables. Un contrat sera dit équitable s'il a été initié avec un partage juste de valeur entre assurés et actionnaires : un contrat est équitable si l'investissement initial est égal à la valeur initiale du contrat souscrit.

II.1.2 **Contrats équitables :**

Les assurés bénéficient d'un taux d'intérêt garanti et d'une quote-part de la performance du portefeuille d'actifs de la compagnie. Au total, deux données clé caractérisent la police d'assurance : le taux d'intérêt garanti et le niveau de participation.

Le modèle permet de déterminer le taux d'intérêt garanti équitable ou le niveau de participation équitable que les assurés devraient demander pour les compenser entièrement des risques auxquels ils font face. En d'autres termes, le modèle cherche à déterminer le prix juste des passifs d'assurance étant donné la structure actuelle du bilan de la compagnie.

Le taux garanti r^* est en général inférieur au taux marché d'un actif sans risque de même maturité que la police. Comme l'expliquent Briys & de Varenne (1997a), le coefficient de participation δ peut être vu comme compensation pour la différence entre ces deux taux et comme incorporant la prime de risque requise par les assurés détenant des polices d'assurance vie risquées.

Les assurés doivent faire face au risque que les actifs ne performent pas comme prévu initialement. Les actionnaires peuvent s'en aller si les affaires ne vont pas bien. Les assurés touchent alors la part des actifs qui reste. En conséquence, les assurés demandent une prime de risque pour les compenser du risque qu'ils supportent.

Les assurés disposent de deux manières de compensation. La première possibilité est que, pour un niveau de participation δ donné, ils demandent un taux garanti r^* de manière à obtenir un taux de rendement équitable sur leur épargne. La seconde manière est que, pour un taux r^* donné, ils peuvent s'assurer que le niveau de participation δ est tel que la police d'assurance offre un taux de rendement équitable ex ante.

Nous cherchons ainsi à déterminer la participation aux bénéfices et le taux garanti permettant de rendre le contrat d'assurance vie équitable entre les stakeholders. Un contrat est dit équitable, ou juste, s'il a été initié avec un partage de valeur juste entre assurés et actionnaires.

Autrement dit, un contrat est équitable si l'investissement initial des assurés $L_0 = \alpha A_0$ est égal à la valeur totale des contrats souscrits. La condition d'équilibre sur r^*et δ est donc donnée par : $L_0 = V_L\,(0)$

Il existe une infinité de couples (r^*; δ) permettant d'obtenir un contrat juste entre les deux parties. Ces paramètres dépendent de la politique d'investissement de la compagnie, c'est-à-dire de la volatilité δ de ses actifs et de la barrière de surveillance imposée par l'autorité de contrôle.

Cependant, tous les contrats ne sont pas acceptables. Les valeurs équitables de δ doivent obligatoirement être comprises entre 0 et 1. De plus, le taux technique et la participation bénéficiaire sont souvent soumis à des contraintes légales.

L'équation d'équilibre donne soit le taux garanti r^*, soit le niveau de participation δ comme variable d'équilibre. Si δ est donné, le taux garanti doit être déterminé pour satisfaire cette relation. Si r^* est donné, l'équation d'équilibre donne la valeur d'équilibre du niveau de participation. Remarquez que si r^* ne peut être déterminé de manière explicite, il est possible de dériver une expression analytique pour le taux de participation δ.

Si nous souhaitons calculer la participation aux bénéfices rendant le contrat équitable (pour un taux technique donné), nous pouvons nous ramener au calcul de

$$\delta = \frac{\frac{L_0}{P(0,T)} - TG + PO - LR}{\alpha(E_7 - E_2) - L_{T^*}(E_8 - E_3)}$$

Le cas du calcul du taux garanti rendant le contrat équitable (à participation aux bénéfices donnée) est plus délicat. Il faut avoir recours à un algorithme de recherche de racine sur la condition que la valeur initiale du contrat est bien égale à L_0.

II.2 **Méthode d'évaluation :**

Il est possible d'évaluer les espérances de 3.7 qui ne font pas intervenir l'instant τ à l'aide de formules fermées. Nous reprenons ici les notations de Bernard, Le Courtois & Quittart-Pinon (2005).

Nous n'allons pas considérer le processus des actifs mais plutôt le processus lognormal X_t défini par : $X_t = A_t e^{r^* t}$

Pour identifier le processus X_t, nous introduisons le processus

$$\boxed{l_t = \ln(X_t) = \ln(A_t) - r^* t}$$

Rappelons d' abord que notre actif peut être modélisé par un mouvement brownien géométrique $\frac{dA_t}{A_t} = r_t dt + \sigma dZ^Q(t)$

Où Z^Q est un mouvement brownien standard. Théoriquement Z^Q est corrélé au mouvement brownien ${Z_1}^Q$ lié au processus du taux d'intérêt sans risque.

Rappelons que le taux d'intérêt sans risque suit l'équation suivante :

$dr_t = a(\theta - r_t)dt + \eta\, d{Z_1}^Q(t)$

Où a et θ sont des paramètres positifs et constants, le premier représentant la force de rappel du processus, le deuxième le taux d'équilibre ; η représente la volatilité de $r_t$et ${Z_1}^Q$ est un mouvement brownien standard sous Q.).

Leur coefficient de corrélation est donné par ρ : $dZ^Q d{Z_1}^Q = \rho dt$.

La valeur du portefeuille des investissements de la compagnie est comme étant soumise à un risque de marché spécifique ainsi qu'au risque de taux d'intérêt à travers la corrélation entre les deux processus de Wiener gouvernant ce système.

Construisons à présent un mouvement brownien Z_2 indépendant de Z_1 , c'est-à-dire tel que $d{Z_1}^Q d{Z_2}^Q = 0$. Nous pouvons décomposer le mouvement brownien Z^Q selon ces deux composantes $dZ^Q(t) = \rho d{Z_1}^Q + \sqrt{1-\rho^2}\, d{Z_2}^Q(t)$.

De cette manière, nous avons décorrélé le risque lié au taux d'intérêt des autres aléas. La dynamique des actifs s'écrit alors :

$$\boxed{\frac{dA_t}{A_t} = r_t dt + \sigma\rho d{Z_1}^Q + \sigma\sqrt{1-\rho^2}\, d{Z_2}^Q(t)}$$

En appliquant le lemme d'Itô à cette équation, nous pouvons montrer que le processus $l_t = \ln(X_t) = \ln(A_t) - r^* t$ suit sous la mesure forward neutre $\mathcal{Q}_T$ l'équation différentielle stochastique suivante :

$$\boxed{dl_t = \left(r_t - r^* - \frac{\sigma^2}{2} - \sigma\rho\,\sigma_p(t,T)\right)dt + \sigma\rho dZ_1^{\mathcal{Q}_T} + \sigma\sqrt{1-\rho^2}dZ_2^{\mathcal{Q}_T}}$$

Où σ : volatilité du cours des actifs

σ_p : volatilité des zéro-coupons

Pour t fixé, l_t est une variable normale décrite par ses deux premiers moments

$M_t = \mathbb{E}^{\mathcal{Q}_T}(I_t)$ et $M_t = \mathbb{V}ar^{\mathcal{Q}_T}(I_t)$ qui s'obtiennent à partir de l'équation

$$M_t = \ln\left(\frac{A_0}{P(0,t)}\right) + \int_0^t \left(-\sigma_p(u,t)\left[\sigma_p(u,t) + \sigma\rho\right] + \frac{\sigma^2(u,t) - \sigma^2}{2} - r^*\right)du$$

Et

$$V_t = \int_0^t (\sigma^2 + {\sigma_p}^2(u,t) + 2\sigma\rho\sigma_p(u,t))du$$

Précisons les expressions des moments de I_t pour une structure de volatilité exponentielle :

$$M_t = \ln\left(\frac{A_0}{P(0,t)}\right) - t\left(\frac{\eta^2}{2a^2} + \frac{\sigma\rho\eta}{a} + \frac{\sigma^2}{2} + r^*\right) + \frac{\eta^2}{4a^3}(1 - e^{-2at}) + \left(\frac{\eta^2}{a^3} + \frac{\sigma\rho\eta}{a^2}\right)e^{-aT}(e^{aT} - 1) + \frac{\eta^2}{2a^3}e^{-a(T+t)}(1 - e^{2aT})$$

$$V_t = t\left(\frac{\eta^2}{a^2} + \sigma^2 + \frac{2\sigma\rho\eta}{a}\right) - 2(1 - e^{-aT})\left(\frac{\eta^2}{a^3} + \frac{\sigma\rho\eta}{a}\right) + \frac{\eta^2}{2a^3}(1 - e^{-2at})$$

Le processus X_T suit une loi lognormale de moments M_T et V_T.

Notons N la fonction de répartition de la loi normale réduite.

Nous introduisons les deux fonctions suivantes pour une variable aléatoire X de loi $N(m ; \sigma^2)$:

$$\Phi_1(m;\sigma;a) = \mathbb{E}\left(e^X 1_{\{e^X < a\}}\right) = \exp\left(m + \frac{\sigma^2}{2}\right)\mathcal{N}\left(\frac{m + \sigma^2 - \ln(a)}{\sigma}\right),$$

$$\Phi_2(m;\sigma;a) = \mathbb{E}\left(e^X 1_{\{e^X < a\}}\right) = \exp\left(m + \frac{\sigma^2}{2}\right)\mathcal{N}\left(\frac{\ln(a) - m - \sigma^2}{\sigma}\right),$$

En appliquant les propriétés associées aux fonctions Φ_1 et Φ_2, nous obtenons les formules suivantes pour les espérances E_7, E_8, E_9 et E_{10} :

$$E_7 = e^{r^*T}\Phi_1(M_T; \sqrt{V_T}; \frac{L_0}{\alpha}) \qquad E_9 = \mathcal{N}\left(\frac{\ln(L_0)-M_T}{\sqrt{V_T}}\right)$$

$$E_8 = \mathcal{N}\left(\frac{M_T-\ln\left(\frac{L_0}{\alpha}\right)}{\sqrt{V_T}}\right) \qquad E_{10} = e^{r^*T}\Phi_2(M_T; \sqrt{V_T}; L_0)$$

II.3 Etude numérique:

II.3.1 Les données :

Fixons d'abord l'environnement économique de notre étude. Pour le processus du taux d'intérêt sans risque, quatre paramètres doivent être fixés, à savoir la force de rappel, le taux d'équilibre à long terme, la volatilité et sa valeur initiale. Pour les trois premiers paramètres, nous prenons les valeurs obtenues par la modélisation par Vasicek à savoir

a	θ	η
0,0867351	0,03056971	0,00890695

Nous supposons que le taux sans risque est de 3.25% à l'instant t = 0.

En ce qui concerne le volet de l'assurance proprement dit, nous admettons que la part initiale des primes dans les actifs de la compagnie, α, est de 80%.

La valeur initiale des actifs est de 5,5 MM de dirhams et leur volatilité σ de 8,5%. Nous supposons en outre que les contrats sont souscrits pour une durée moyenne de 14 ans.

a	θ	η	r_0
0,0867	0,0306	0,0089	3.25%

Tableau 20 : Données relatives aux marchés financiers

Le niveau de la barrière réglementaire λ, imposé par l'autorité de contrôle, est fixé à 75%. Nous supposons par ailleurs que la maturité est déterminée par la moyenne des échéances, pondérée par le nombre de contrat et que le taux technique maximum autorisé par la législation, r^*_{max} , est de 4.5%.

A	A_0	σ	T	λ	r^*_{max}
80%	5,5 MM	8,5%.	14	75%	4.5%

Tableau 21 : Données relatives aux marchés de l'assurance

Il reste à déterminer le taux technique et le taux de participation aux bénéfices. Nous voulons les fixer de manière à rendre les contrats équitables.

Ceci est l'objet du point suivant.

II.3.2 Contrats équitables :

Les paramètres r^*et δ ne peuvent pas être fixés de manière indépendante.

Le taux technique ne doit être ni trop haut (risque de faillite trop important en cas de baisse des taux), ni trop bas (contrat en défaveur de l'assuré). Par ailleurs, il ne peut dépasser un seuil légal limite.

Quant à la participation aux bénéfices, elle est calculée de manière à garantir l'équité des contrats vendus aux assurés. Ainsi, δ est d'autant plus grand que le taux garanti est faible. Niveau du taux de la participation bénéficiaire

Le seuil légal maximum, r^*_{max}, est bien adapté dans le sens où il n'est pas trop élevé par rapport aux taux d'intérêt en vigueur sur les marchés financiers.

Nous supposons donc que la compagnie propose un taux technique égal à r^*_{max}.

La figure suivante représente la valeur du contrat d'assurance en fonction du taux de participation aux bénéfices δ. Elle est réalisée avec un taux technique de 4.5%.

Pour un taux technique donné, la valeur du contrat est d'autant plus grande que le taux de participation aux bénéfices est important. En effet, un taux de participation aux bénéfices plus élevé est à l'avantage des assurés, le contrat a donc une valeur plus importante.

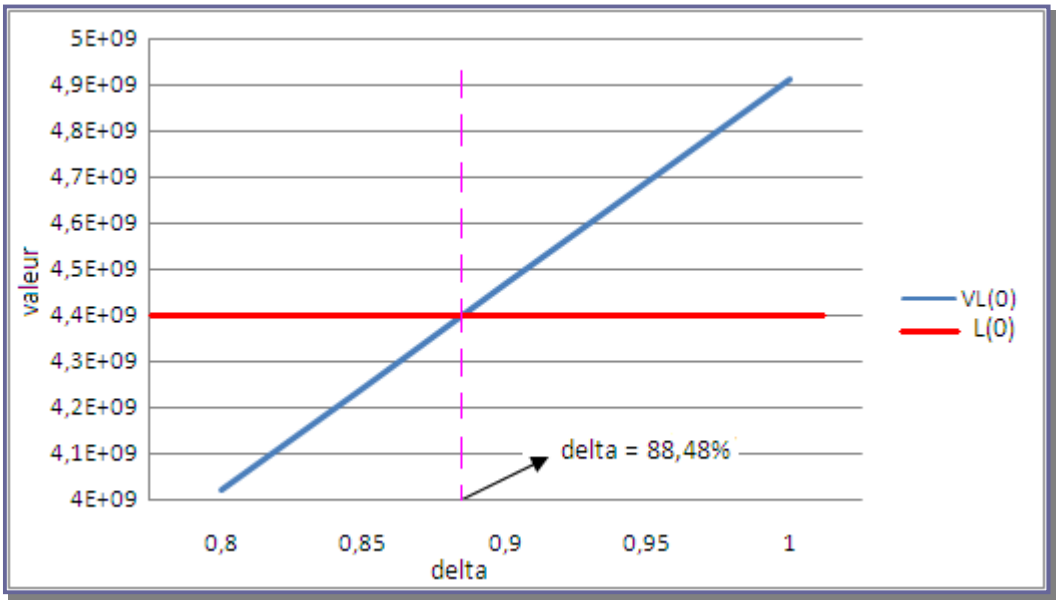


Figure 59 : Valeur du contrat en fonction du taux de participation
$\alpha = 80\%$, A_0 =5,5MM, σ =8,5%, T = 14, λ = 0,75, r^*_{max} = 4,5%

Nous recherchons le taux de participation bénéficiaire qui rend le contrat équitable. L'investissement initial des assurés est donné par $L_0 = \alpha A_0$, dans notre cas L_0 vaut 4400000000. Il faut ainsi trouver la valeur de δ qui donne lieu à un contrat de valeur 4400000000. Notons qu'une seule valeur de δ correspond à un contrat équitable, i.e. donnant lieu à une valeur initiale égale à L_0 = 4400000000.

Pour un taux technique r^*de 4.5%, le taux de participation aux bénéfices requis est ainsi de 88,48%. Rappelons qu'il peut être déterminé à partir de la formule :

$$\boldsymbol{\delta = \frac{\frac{L_0}{P(0,T)} - TG + PO - LR}{\alpha(E_7 - E_2) - L_{T^*}(E_8 - E_3)}.}$$

Niveau du taux technique :

La figure suivante représente la valeur du contrat en fonction du taux garanti.

Elle est réalisée avec un taux de participation aux bénéfices égal à 89.94%. Pour δ donné, la valeur du contrat est d'autant plus grande que le taux technique est plus élevé. De la même manière que pour le taux de participation aux bénéfices, un taux technique plus élevé représente un avantage pour les assurés et par conséquent le contrat gagne en valeur.

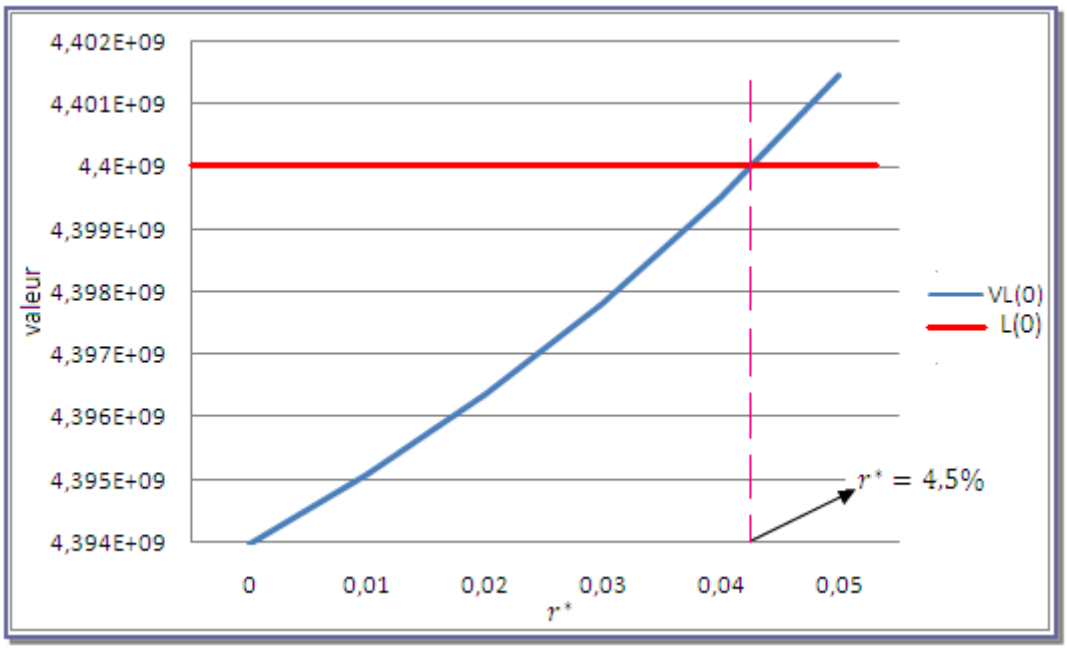


Figure 60 : Valeur du contrat en fonction du taux technique
$\alpha = 80\%$, A_0 =5,5MM, σ =8,5%, T = 14, λ = 0,75, $\delta = 88,48\%$

La figure montre qu'une seule valeur de r^*permet d'obtenir un contrat équitable. Rappelons qu'il n'est pas possible de trouver une formule directe pour déterminer le niveau d'équilibre de r^*, mais qu'il faut avoir recours à un algorithme de recherche de racine.

Graphiquement nous voyons que, pour donner lieu à un contrat juste, r^*doit être égal à 4.5% si δ vaut 88.48%.

II.3.3 **Paramètres et valeur du contrat :**

Le point précédent nous permet de fixer les derniers paramètres nécessaires pour l'étude, à savoir r^*et δ. Ils sont choisis de manière à obtenir des contrats équitables. Le tableau suivant donne l'ensemble des valeurs des paramètres entrant en jeu. Certains sont susceptibles de changer par la suite, en particulier la volatilité σ, les paramètres λ et α ou la durée du contrat T.

a	θ	η	r_0	α	A_0
0,0867	0,0306	0,0089	3.25%	80%	5,5MM

σ	T	λ	r^*_{max}	δ
8,5%	14	0,75	4,5%	88,48%

A l'aide des paramètres de ce tableau, nous pouvons déterminer les valeurs pour les différentes espérances E_i i = 1,…, 10. Celles-ci permettent alors de valoriser les quatre sous-contrats et le contrat d'assurance. Ces valeurs sont données au tableau suivant :

E_1	E_2	E_3	E_4	E_5
0,03973	4.472.562.432	0,03972996	3,973E-10	0,89451256
E_6	E_7	E_8	E_9	E_{10}
0,0756984	1,1257E+11	0,999999	0,00000001	22,5147889

TG	BO	PO	LR	VT(0)
8.654.462.933	8,6475E+10	64,924353	272.514.240	4.399.999.998

Tableau 22 : Valeur des E_i des sous contrats du contrat

Nous avons pu, dans ce chapitre, valoriser notre contrat. Le modèle utilisé nous a permis de retenir un taux de participation aux bénéfices de l'ordre de 89% et un taux technique de l'ordre de 4,5%

Nous allons présenter dans la partie qui suit la valeur de marché et la stratégie de réinvestissement.

– Partie IV –

Valeur de marché et stratégie de réinvestissement

- Valeur de marché de l'actif et des provisions techniques
- Exigence en capital sous Solvabilité II
- Analyse des gaps et stratégie de réinvestissement

.

CHAPITRE

8

Valeur de marché de l’actif et des provisions techniques

Dans les parties précédentes, nous avons explicité la modélisation des différents éléments stochastiques considérés dans notre simulation. Nous sommes à présent en mesure de calculer les différents agrégats nécessaires à la détermination du capital de solvabilité. Pour rappel, ceci implique dans un premier temps de valoriser les actifs ainsi que les passifs. Le projet Solvabilité II impose que ces agrégats soient calculés à une valeur cohérente avec le marché.

Dans un premier temps, nous modéliser la valeur de marché de l’actif.

Dans un deuxième temps, nous allons essayer de modéliser la best estimate des provisions techniques et d’appliquer l’approche de Bootstrap pour mesurer la ruine.

I. Valeur de marché des actifs :

Commençons par expliquer la méthode de valorisation des actifs dans le cadre de notre illustration.

Cette valeur de marché sera déterminée selon deux approches. Les actifs actions étant cotés, une valeur de marché est constamment disponible pour chacun des deux actifs, ce qui privilégie une approche mark-to-market[18]. Les actifs obligataires étant non côtés sur le marché, cela suggère plutôt une approche mark-to-model[19].

L'évolution de la valeur de marché des actifs dépend : du rendement des deux fonds qui le composent; des flux du passif, qui viennent le réduire.

Nous posons l'hypothèse, que les flux sont versés juste avant valorisation des agrégats bilantaires. Dans ce cas, la valeur de marché de l'actif évolue de la façon suivante :

$$\boldsymbol{VM_A(t) = VM_A(t-1).\exp\left(rdt_A(t)\right) - flux_p(t)}$$

Où :

$VM_A(t)$ = valeur de marché de l'actif en t ;

$rdt_A(t)$ = rendement de l'actif entre t-1 et t ;

$flux_p(t)$ = flux du passif au début de l'année t.

La valeur de marché de l'actif change en fonction des scénarios considérés.

I.1 Rendement de l'actif :

Le rendement du portefeuille pour un scénario et un temps t fixés peut être calculé par le biais des rendements des différents fonds d'investissement, sous l'hypothèse de proportions constantes investies dans chacun des deux fonds (60% dans le fonds obligataire et 40% dans le fonds d'action).

Notons :

$\mathrm{rdt_s(t)}$ = le rendement du fonds d'actions entre t-1 et t;

$\mathrm{rdt_b(t)}$ = le rendement du fonds d'obligations entre t-1 et t.

Les deux rendements s'expriment selon les formules suivantes :

[18] La valorisation des actifs à la valeur de marché à la date de clôture du bilan est dénommée « mark to market »

[19] Dans le cas où il n'existerait pas de valeur de marché pour ceux-ci, il est conseillé d'utiliser un modèle de valorisation. Il s'agit dans ce cas de la méthode « mark to model »

$$\boldsymbol{rdt_s(t) = \ln\left(\frac{S(t)}{S(t-1)}\right) = \left(\mu_s - \frac{\sigma_s^2}{2}\right) + \sigma_s . N_s}$$

$$\boldsymbol{rdt_b(t) = \ln\left(\frac{B(t)}{B(t-1)}\right) = \left(y(t-1, t+T-1) + \lambda_b - \frac{\sigma_b^2}{2}\right) + \sigma_b . N_b}$$

Après débalancement et paiement des flux, on obtient en t-1:

$$\boxed{\boldsymbol{VM_A(t-1) = VM_s(t-1) + VM_b(t-1)}}$$

Avec :

$VM_s(t-1) = 0{,}6.VM_A(t-1)$ = valeur de marché du fonds d'actions ;

$VM_b(t-1) = 0{,}4.VM_A(t-1)$ = valeur de marché du fonds d'obligations.

L'année suivante, avant rebalancement et paiement des flux, à un instant noté t-, on aura :

$\boldsymbol{VM_s(t^-) = VM_s(t-1).\exp\left(rdt_s(t)\right)}$ et $\boldsymbol{VM_b(t^-) = VM_b(t-1).\exp\left(rdt_b(t)\right)}$

La valeur totale de l'actif devient donc :

$$\boxed{\boldsymbol{VM_A(t^-) = VM_s(t^-) + VM_b(t^-) = VM_A(t-1).\left(0{,}6.\exp\left(rdt_s(t)\right) + 0{,}4.\exp\left(rdt_b(t)\right)\right)}}$$

Notons que ce montant total ne sera pas influencé par le débalancement (qui ne fait que modifier les proportions dans lesquelles ce total est investi).

Le rendement de l'actif entre t-1 et t est dès lors défini par :

$$\boxed{\boldsymbol{rdt_A(t) = \ln\left(\frac{VM_A(t^-)}{VM_A(t-1)}\right) = \ln\left[\left(0{,}6.\exp\left(rdt_s(t)\right) + 0{,}4.\exp\left(rdt_b(t)\right)\right]\right.}}$$

I.2 **Résultats :**

Nous pouvons maintenant déterminer la valeur de marché totale de l'actif. La figure suivante reprend l'évolution de la valeur de l'actif dans les vingt cinq scénarios financiers, ces graphes ont été construits en supposant que l'on disposait d'un actif initial (en valeur de marché) égal aux provisions techniques (également en valeur de marché) à l'instant 0+ c'est-à-dire en supposant que la valeur de marché des provisions techniques est le montant effectivement placé sur le marché financier, à l'instant initial.

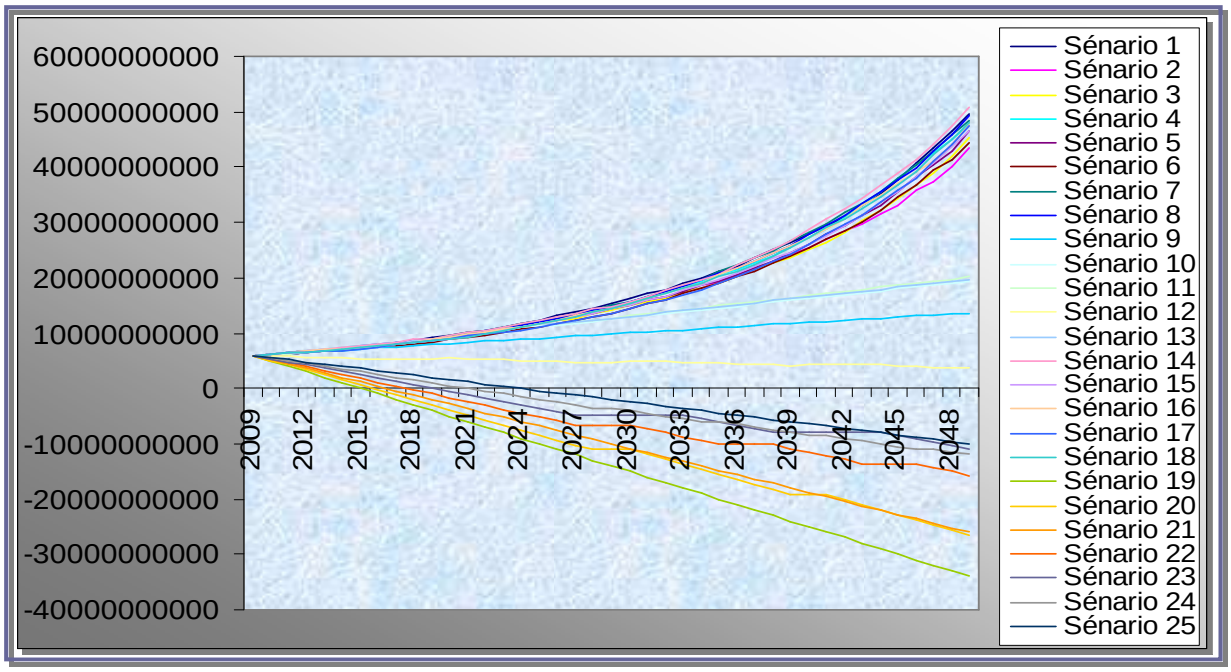


Figure 61 : L'évolution de la valeur de marché de l'actif en dirham

Nous constatons que l'impact des aléas financiers est très important, comme le montrent les variations de la valeur de marché de l'actif dans la figure ci-dessous, suite à une projection sur quarante ans.

Les cas où l'actif devient négatif sont des cas de ruine. Nous y reviendrons par la suite.

II. Valeur de marché des provisions:

Le projet de directive actuel indique que la valeur des provisions techniques sera égale à la somme du best estimate et d'une marge de risque.

Ces deux éléments se calculent de la manière suivante :

II.1 Best Estimate :

La notion de best estimate est définie par l'extrait suivant : « La meilleure estimation est égale à la moyenne pondérée par leur probabilité des flux de trésorerie futurs, compte tenu de la valeur temporelle de l'argent (valeur actuelle probable des flux de trésorerie futurs), déterminée à partir de la courbe des taux sans risque pertinente.

Le calcul de la meilleure estimation est fondé sur des informations actuelles crédibles et des hypothèses réalistes et il fait appel à des méthodes actuarielles et des techniques statistiques adéquates »

$$BE \approx \sum_{t=0}^{n} \frac{CF_t}{(1+r_t)^t}$$

Avec : $CF_t = Flux_{passif}(t) = (T_d + T_r + T_{sc}).R(t-1).1{,}045$

$r_t = y(t, 10)$: taux obligataire à 10 ans, supposé égal au taux sans risque.

T_d : taux de décès

T_d : taux de rachat

T_d : taux de sortie en capital

II.2 Marge de risque :

La marge de risque couvre les risques liés à l'écoulement des passifs sur la totalité de leur durée. Elle devrait être déterminée de manière à permettre le transfert ou la liquidation des engagements de (ré) assurance. Cette approche protège les droits des assurés et tient compte de l'incertitude liée à l'évaluation du "best estimate".

Deux modes de calcul de la marge de risque devraient être retenus comme hypothèses de travail. Tout d'abord, cette marge peut être calculée comme la différence entre le "best estimate" et le 75e centile de la distribution de probabilité sous-jacente, jusqu'à la liquidation. Cette marge de risque devrait toutefois être au moins égale à la moitié de l'écart type, afin de tenir compte de distributions éventuellement très asymétriques. Par ailleurs, on peut également calculer la marge de risque en fonction du coût que représenterait la mobilisation de capitaux propres à hauteur du Capital de Solvabilité Requis, jusqu'à la liquidation des engagements en cours.

Nous avons opté pour l'approximation de la marge de risque de la même manière que dans l'approche standard. Cette approche suppose que le capital de solvabilité est une proportion constante de la meilleure estimation des provisions. Cette proportion est calculée en t = 0 comme le rapport entre le capital de solvabilité en 0 et la meilleure estimation des provisions en 0.

Détermination de la proportion

Comme nous nous intéressons à l'écoulement du passif sur la totalité de la durée, il s'agit de déterminer les risques non réplicables à l'instant initial, autrement dit, il faut mesurer le capital lié au risque de souscription à l'instant t=0.

Détermination de la marge de risque

La marge de risque en t est alors déterminée de la manière suivante :

$$BE(t) = r_{capital}.x.\sum_{k=0} BE_p(t+k).B(t,t+k)$$

Avec : $r_{capital}$ = 6%.

II.3 Valeur de marché des provisions :

Nous pouvons maintenant déterminer la valeur de marché des provisions, somme de la meilleure estimation de ces provisions et de la marge de risque. Le résultat obtenu dans le premier scénario est présenté ci-dessous :

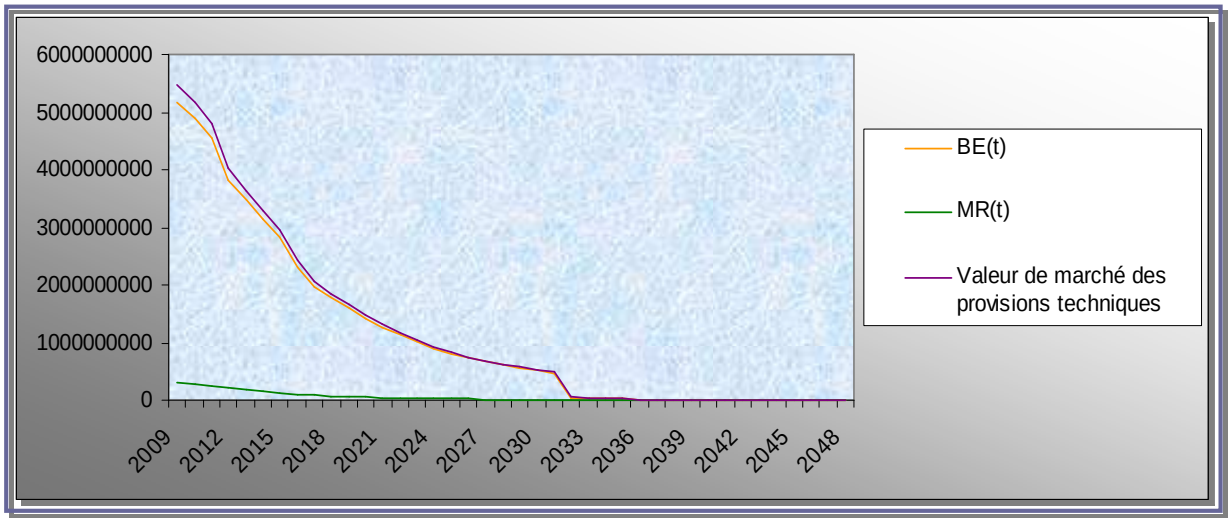


Figure 62 : Projection des éléments constiuant les provisions techniques en dirham

III. Détermination du capital de solvabilité :

Nous sommes à présent en mesure d'estimer le capital de solvabilité. Il peut être défini, rappelons-le, comme l'actif dont il faut disposer au-delà des provisions évaluées sur une base cohérente avec le marché afin d'atteindre une probabilité de ruine cible. Ce capital de solvabilité va dépendre de la mesure de risque choisie ainsi que de la définition de la ruine retenue.

III.1 **Mesures de risques :**

Définition de la VaR (Value at Risk) :

La Value at risk est une mesure probabiliste de la perte possible sur un horizon donné .elle représente un niveau de perte, pour une position ou un portefeuille, qui ne sera dépassé durant une période qu'avec un certain degré de confiance.

Par définition, la VaR à horizon h et au seuil de probabilité p est un nombre $VAR(h,p)$ VaR (h,p) tel que :

(1) $P(L_h \succ VAR(h,p)) = p$,

Ou de manière équivalente :

(2) $P(L_h \leq VAR(h,p)) = 1-p$ Avec L_k la perte sur l'horizon h.

Les équations (1) et (2) définissent la VaR et conduisent directement à son interprétation.

L'équation (1) indique que le montant de la perte de la période de durée h à venir sera supérieur à la VaR avec une probabilité p.

L'équation (2) exprime que la perte sera inférieure à la VaR avec une probabilité 1-*p* ; ainsi, la VaR peut être vue comme étant la valeur de la fonction inverse de la fonction de répartition généralisée du quantile 1-p.

La VaR d'un portefeuille dépend de trois paramètres:

- Distribution des pertes et profits du portefeuille en fin de période.
- Niveau de confiance qui est égale à 1 moins la probabilité des évènements défavorables. Par exemple, un niveau de confiance de 99,5% si l'on désire ignorer les 0,5% relatifs aux évènements les plus défavorables.
- Période de temps sur laquelle on désire mesurer la VaR.

Il faut noter que la VaR n' pas la propriété de sous-additivité. En effet, si on considère deux actifs A et B pour lesquels on estime la VaR pour le même horizon et le même seuil de confiance, $VAR_h(A+B)(p) \leq VAR_h A(p) + VAR_h B(p)$ n'est pas toujours vérifié.

Définition de la TailVaR :

Appelée aussi Conditional Value at Risk (CVaR). La TailVaR au seuil de confiance q se définit comme l'espérance du montant de perte au delà du seuil de VaR :

$$TailVaR_h(p) = E[L_h / L_h \leq VaR_h(p)]$$

Contrairement à la VaR, la Tail-VaR présente l'avantage de satisfaire la propriété de sous-additivité.

Ainsi, pour la détermination de la VaR le problème réside dans la modélisation de la distribution de la perte.

III.2. Les différentes méthodes d'estimation de la VaR :

Méthode analytique :

La méthode suppose que L_h suit une loi paramétrique de fonction de répartition F_h connue d'avance, l'estimation se restreint dès lors à celle des paramètres de la loi en question.

$$F_h = G((x-b)/a)$$

Avec : G : fonction de distribution d'une loi connue.

a : paramètre d'échelle.

b : paramètre de position.

Ainsi la VaR s'exprime comme suit :

$$VaR_h(p) = F_h^{-1}(p) = b + a * G^{-1}(p)$$

Méthode historique :

Dans cette méthode la distribution future de la perte est estimée en se basant sur sa distribution passée et en supposant que les données sont i.i.d. C'est une méthode non paramétrique.

Méthode de Monte Carlo :

La simulation de Monte Carlo est une méthode paramétrique ; son concept réside dans la simulation des trajectoires des différents facteurs de risque en tenant compte des

corrélations entre ces facteurs. Une fois que la distribution de chaque facteur de risque est déterminée on pourra estimer la VaR.

Pour générer des séries de rendements pour les actifs financiers, on effectue lesétapes suivantes :

- Estimer les écarts types des séries ;
- Déterminer la matrice de variance covariance Σ des rendements des actifs ;
- Décomposer la matrice de variance covariance selon la décomposition de Cholesky tel que : $\sum = A^4 A$;
- Générer des séries de nombres aléatoires indépendants et qui suivent une loi normale standard, notons les Y ;
- Déterminer les m séries selon leur structure de corrélation : $\varepsilon = YA$;
- Déterminer des trajectoires des rendements simulés selon les modèles choisis ;
- Calculer la VaR suivant la méthode historique ;

La méthode Bootstrap :

C'est une méthode de simulation non-paramètrique. Cette technique permet de modéliser la perte en effectuant des tirages aléatoires avec remise dans l'échantillon des données historiques.

III.3 Deux définitions de la ruine :

La ruine comptable survient lorsque l'actif est insuffisant pour couvrir la valeur actuelle de tous les flux futurs, c'est-à-dire la valeur de marché des provisions.

Notons X_t la variable aléatoire représentant la perte de l'année t dans un scénario fixé. Selon cette définition, il y aura ruine au temps t quand $X_t>0$ où :

$$\boldsymbol{X_t = VM_p(t) + VM_A(t)}$$

La ruine opérationnelle survient en t dans un scénario fixé lorsque l'actif en t est insuffisant pour couvrir les flux de l'année courante.

Notons à nouveau $X_t$la variable aléatoire représentant la perte l'année t dans un scénario fixé. Il y aura ruine au temps t quand $X_t>0$ où : $\boldsymbol{X_t = Flux_p(t) - VM_A(t)}$

On suppose que X_t sont des variables aléatoires représentant la perte à l'instant t et dans un scénario i,

Nous pouvons supposer que les X_t sont des variables indépendantes, pour chaque année t nous possédons dix observations (scénarios), dont nous ne savons pas une loi paramétrique, alors afin d'estimer la valeur de la ruine au seuil 5%, nous avons fait appel à l'outil Bootstrap.

III.4 Approche du Bootstrap :

Ce terme évoque littéralement l'action de « se hisser en tirant sur ses propres lacets » Il désigne en effet un ensemble de méthodes qui consistent à obtenir, à partir d'un échantillon initial de taille T,de nouvelles informations statistiques en simulant Nouveaux échantillons de même taille T. Le Bootstrap est ainsi également appelé méthode de « rééchantillonage ».

Une simulation Bootstrap consiste simplement à reconstituer un échantillon de T valeurs de ruines (ici T=10) en tirant aléatoirement avec remise les valeurs de ruine observées dans l'échantillon original observé.

Hypothèse de base pour l'utilisation du Bootstrap :

L'hypothèse sur laquelle repose le Bootstrap est l'indépendance (d'où le tirage avec remise) ainsi que la distribution identique des lois de chacun des éléments composant l'échantillon.

La mesure de la ruine :

Le montant de capital que nous cherchons à estimer dépend de la mesure de risque choisie, de l'horizon, et du niveau de confiance associé.

Dans notre cas nous avons choisie la Value-At-Risk comme mesure de risque, le capital de solvabilité est celui qui permet d'éviter la ruine dans 99% des cas, nous avons la relation suivante : $\boldsymbol{P[Perte > VaR\alpha\,] \leq 1-\alpha}$

Application du Bootstrap :

L'échantillon observé est formé de dix valeurs de perte (ou de gain). C'est un échantillon non paramétrique de dix observations. Nous pouvons donc connaître la valeur de la ruine espérée au seuil 0,5% en appliquant tout ce que nous avons expliqué précédemment.

Dans notre cas d'étude, avec une valeur de marché de l'actif de 7 578 133 500 Dh; dans les dix scénarios, la valeur de marché de l'actif est supérieure à celle des provisions techniques, ce qui nous permet de dire qu'il n'y a pas ruine, autrement dit, dans aucun des

scénarios générés, l'actif ne chute à un niveau inférieur à la valeur actuelle des engagements après un an.

Nous avons utilisé la méthode Bootstrap afin de trouver la valeur minimum de gain au seuil de 0,5% en utilisant le logiciel Eviews. La Var obtenue est égale à :
1 604 567 453 Dh.

Cependant, afin d'illustrer un cas de ruine, nous avons supposé que la valeur de marché initiale de l'actif est égale à la valeur de marché des provisions techniques, les résultats obtenus sont représentés dans le tableau suivant :

Scénarios	VM(actif)-VM(provisions techniques)
1	206 819 647.47
2	-339 368 942.48
3	-200 063 599.88
4	562 569 364.55
5	-444 651 350.96
6	-249 626 443.12
7	-202 157 658.29
8	142 340 560.90
9	-282 753 586.12
10	-374 678 003.37

Tableau 23 : Valeurs de la variable perte (ou gain) obtenues pour dix scénarios

Alors nous disposons d'un échantillon de dix observations, nous effectuons la méthode de Bootstrap échantillonnage. La Var de la ruine donnée par Eviews est égale à : -435 786 155 Dhs.

Dans ce cas, il faut ajouter 435 786 155 Dhs à l'actif pour éviter la ruine à 99,5% dans un an.

Nous avons pu, dans ce chapitre, avoir une idée globale sur la juste valeur de l'actif et du passif, ainsi les différentes méthodes d'estimation de la VAR afin de mesurer la ruine.

Nous présenterons dans le chapitre qui suit l'exigence en capital sous solvabilité II.

CHAPITRE

9

Exigence en capital Sous Solvabilité II

En raison du mouvement vers la comptabilisation à la juste valeur et l'évaluation conforme au marché des actifs et des passifs d'assurance, on s'efforce partout dans le monde de réviser la réglementation qui régit actuellement la solvabilité des sociétés d'assurances.

Solvabilité II définit les exigences en capital selon l'approche de la juste valeur plutôt que selon le cadre de capital fondé sur les risques et s'appuyant sur des formules qui est actuellement en vigueur aux É.-U.

Dans un premier temps, nous allons présenter la réforme de solvabilité, où nous avons défini le concept de solvabilité II ainsi que ses objectifs et ses piliers, enfin les études quantitatives d'impact.

Dans un deuxième temps, nous allons essayer de déterminer les capitaux de solvabilité selon l'approche standard selon le risque requis.

I. Concepts de la Solvabilité II:

« Volonté de développer un nouveau système de solvabilité pour toutes les entreprises d'assurance vie/non vie et de réassurance que tous les états membres seront en mesure d'appliquer de façon harmonisée, robuste et pérenne, sans engendrer de perturbation des marchés » (cadre de la consultation - Commission européenne).

La surveillance prudentielle du secteur bancaire (« Bâle2 ») a été considérablement modifiée. Cette reforme a inspiré les instances européennes pour repenser également le système de solvabilité des organismes assureurs à travers l'élaboration d'une directive européenne appelée « Solvabilité II ».

II. Les objectifs pour Solvabilité II:

Le nouveau système de Solvabilité II est destiné aux entreprises d'assurance vie, non-vie et aux entreprises de réassurance européennes. Le système doit fournir aux autorités de contrôle les outils et la capacité d'évaluer la solvabilité générale des entreprises par le biais d'une approche prospective basée sur :

-Les risques quantitatifs d'une part, comme la couverture du programme de réassurance ou l'adéquation entre les actifs et les passifs (ALM)

-Les risques qualitatifs comme la fiabilité des systèmes de contrôle interne et de gestion des risques, la qualité du management ou la maîtrise du risque opérationnel (défaillance des systèmes d'information, fraudes, etc.…)

III. Les deux phases de travail de Solvabilité II :

Les travaux pour l'élaboration des normes solvency II se sont déroulés en deux phases :

- **Phase 1** : Réflexions sur la forme générale que doit prendre le système de solvabilité européen. Cette phase est terminée depuis le 9 avril 2003.Elle a conduit au souhait d'un système cohérent avec l'approche Lamfalussy et à l'élaboration d'un système en 3 piliers pour être également en cohérence avec les règles du secteur bancaire (Bâle 2) ;
- **Phase 2** : Détermination des méthodes de prise en compte des différents risques.

La phase actuelle du projet est donc la phase 2 qui aboutit à l'établissement de méthodes d'évaluation des différents risques encourus par les organismes assureurs.

IV. Les 3 piliers de Solvabilité II :

Pour être homogène avec la réforme Bale 2 intervenue dans le milieu bancaire, le système Solvabilité II introduit un concept de solvabilité basé sur 3piliers :

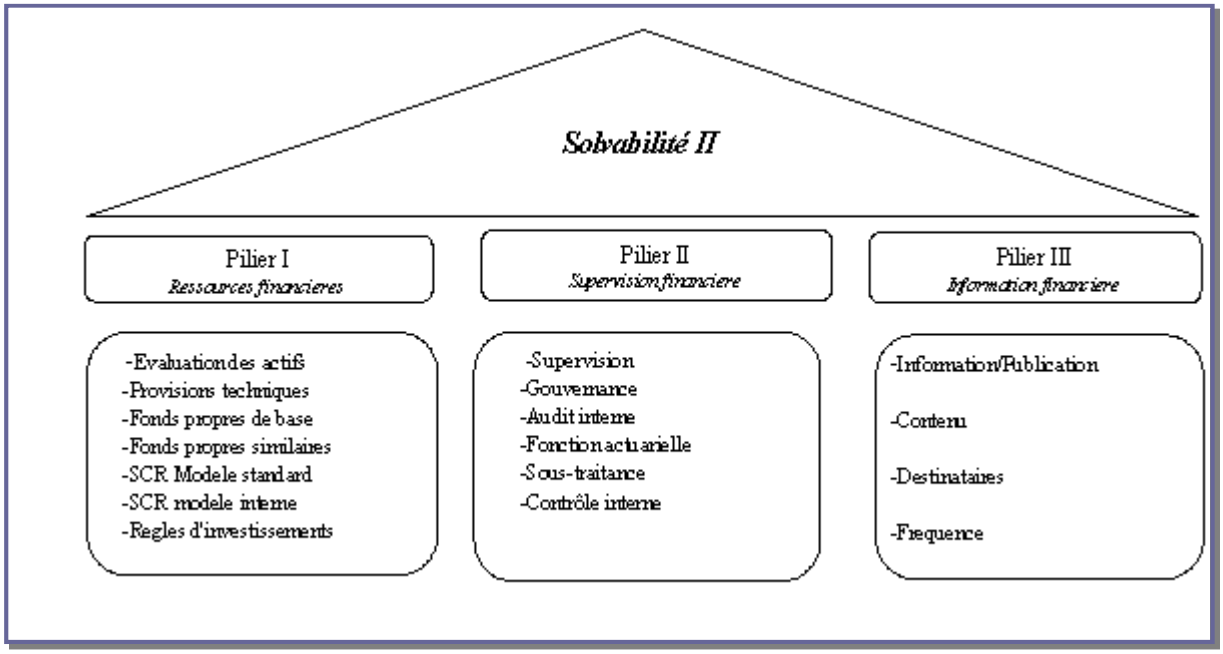


Figure 63 : Les trois piliers de solvabilité II

IV.1 Pilier 1 : Les exigences quantitatives en capital :

Les exigences quantitatives en capital se rapportent aux montants des provisions techniques, au capital cible et à la gestion interne du risque. Le pilier 1 s'attache donc à établir des outils de mesure de la « suffisance » des provisions techniques et à formuler une harmonisation des principes de calcul entre les différentes compagnies européennes. Ces exigences doivent par ailleurs être distinctes, le capital de l'organisme assureur ne devant pas permettre de compenser une insuffisance de provisions techniques.

IV.2 Pilier 2 : Le contrôle :

Il s'agit à la fois du contrôle par les autorités et du contrôle interne des entreprises.

Les instances européennes souhaitent donner aux autorités de contrôle les moyens d'identifier les compagnies présentant des risques financiers ou organisationnels importants dans de tels cas, elles doivent avoir la possibilité d'augmenter l'exigence de capital ou d'appliquer des mesures ciblées pour réduire les risques.

Conséquence directe de ce pilier 2, les autorités de contrôle auront un droit de regard sur l'ensemble de la gestion et du fonctionnement d'un organisme assureur, examinant l'ensemble des risques dont le risque opérationnel.

IV.3 Pilier 3 : L'information aux marchés :

Les « reporting » des entreprises d'assurance aux autorités de contrôles européennes, ainsi que l'information au public devront être harmonisés en vue d'améliorer la « discipline » de marché .Ces reporting devront par ailleurs être en ligne avec les travaux de l'IASB sur la phase 2 de la norme IFRS 4 relative aux contrats d'assurance.

V. Pilier 1 : Provisions techniques et besoin en capital :

V.1 Estimation des provisions techniques :

Solvency II se référera à un montant de provisions techniques avec marge de risque. En accord avec les développements attendus de l'IASB, les provisions techniques devront être calculées en « Best Estimate » puis tenir compte d'une marge de sécurité supplémentaire (fixée de manière provisoire au niveau de confiance de 75% d'une mesure de risque donnée), de sorte que la probabilité d'une insuffisance de provisions par rapport aux prestations futures corresponde à un seuil prédéfini.

V.2 Estimation du besoin en capital :

L'exigence de capital comprendra deux paliers : le MCR (Minimum Capital Requirement) et le SCR (Solvency Capital Requirement).

Lorsque le capital atteindra un niveau inférieur au capital minimum (MCR), des mesures diverses devront être exercées par les autorités de contrôle compétents (plan de redressement, retrait d'agrément…).la formule du MCR devra être simple, facile à calculer, pour permettre des évaluations fréquentes, et idéalement additives, sur les filiales d'un groupe.

Le capital cible (SCR) devra correspondre au niveau des fonds propres nécessaires pour réduire la probabilité de ruine de l'entreprise d'assurance à un niveau fixé sur un horizon de temps donné. La situation de ruine correspond à une situation d'insuffisance d'actifs représentatifs des provisions techniques calculées suivant la méthode « Best Estimate ».Le SCR sera calculé à l'aide de modèles internes (préalablement validés par les autorités de contrôle) ou de modèles standards développés au niveau européen .La détermination des

modèles standards européens constitue l'un des grands défis de la commission européenne. Ils pourraient s'apparenter à des formules de type RBC Américain.

VI. Les études quantitatives d'impact (QIS) :

Le CEIOPS doit déterminer les impacts possibles de la future norme de solvabilité par une série d'études quantitatives d'impact (QIS).L'objectif de ces études est double : d'une part évaluer la faisabilité des calculs et l'impact de Solvency II, et d'autre part préparer la proposition de directive.

La première vague de tests, à laquelle ont été conviées toutes les parties prenantes en assurance vie et non vie ainsi que les réassureurs, a été lancée le 15 octobre avec une réponse souhaitée aux commissions de contrôle locales au 31 décembre 2005.Ce QIS1 s'est concentré sur l'étude du niveau de prudence des provisions techniques courantes. L'enjeu est de mieux calibrer le montant des provisions techniques qui devraient être estimées selon un calcul au « Best Estimate » majoré d'une marge de risque.

- ✓ QIS1 se compose d'un questionnaire quantitatif et d'un questionnaire qualitatif. Le questionnaire quantitatif reprend les données comptables enregistrées au 31 décembre 2004 et l'estimation des provisions en VAR 75% et 90% à cette même date. Le questionnaire qualitatif reprend la méthodologie employée pour l'étude, les hypothèses choisies, les difficultés rencontrées dans les calculs, etc. Les données obtenues à partir du QIS1 devraient donc aider le CEIOPS à développer ses positions sur les règles de Solvency II.
- ✓ QIS 2 a élargi le champ pour y intégrer une première structure de la formule standard,
- ✓ QIS 3, encore plus détaillée, visait à tester en grandeur nature le calibrage de la formule standard par organisme ainsi que les aspects relatifs à l'appréciation de la solvabilité des groupes.
- ✓ La nouvelle étude, QIS 4, permettra d'affiner et de détailler les mesures quantitatives, en particulier sur le calibrage de la future exigence de solvabilité, sur les éléments éligibles du capital et les aspects groupes. Cette quatrième étude, qui s'achèvera mi-juillet 2009, comporte un questionnaire détaillé sur l'utilisation des modèles internes. Le rapport final sur l'exercice QIS4 est prévu pour le 19 novembre 2009.

Contrairement aux précédentes études d'impact, celle-ci est directement pilotée par la Commission européenne.

En parallèle de ces travaux techniques, la proposition de directive "Solvabilité II" sera soumise au Parlement européen dès le début de l'été prochain pour une adoption définitive prévue d'ici la fin de l'année.

VII. Schématisation des différents risques encourus :

Les modèles choisis devront prendre en compte différents risques déterminés par une étude d'International Actuarial Association (IAA).

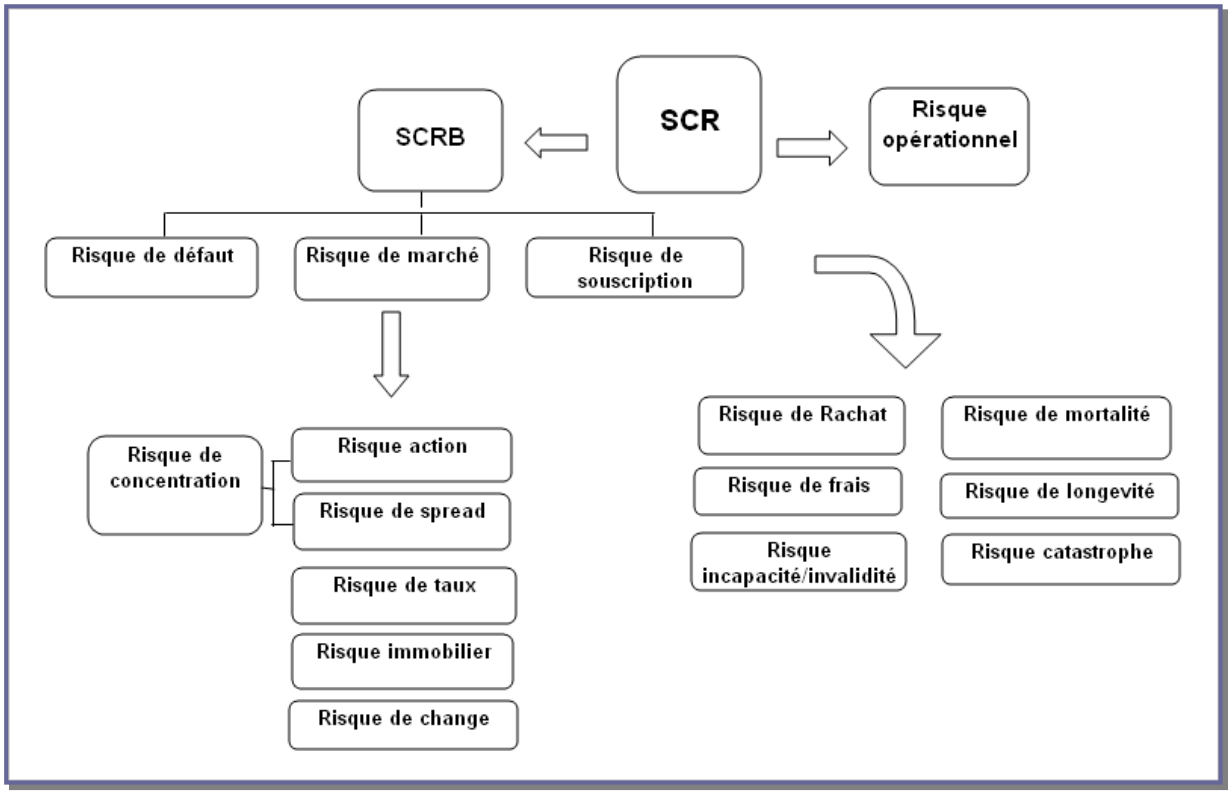


Figure 64 : Cartographie des risques en assurance vie sous Solvabilité II.

Si ces risques ne sont pas quantifiables alors ils rentrent dans le Pilier 2 qui intègre la possibilité de demander un capital supplémentaire pour certains risques.

VIII. Principe d'évaluation :

Le principe, posé par Solvabilité II, de la détermination du capital de solvabilité requis en fonction du risque s'efforce de tenir compte de l'ensemble des risques auxquels des entreprises d'assurance peuvent être exposées. Ce principe suppose, notamment, d'évaluer le risque de perte de valeur des actifs et passifs (autres que les provisions techniques) détenus

par les entreprises. Conformément à la proposition de directive cadre, il convient pour cela d'effectuer une évaluation économique, conforme à la valeur de marché, de l'ensemble des actifs et passifs.

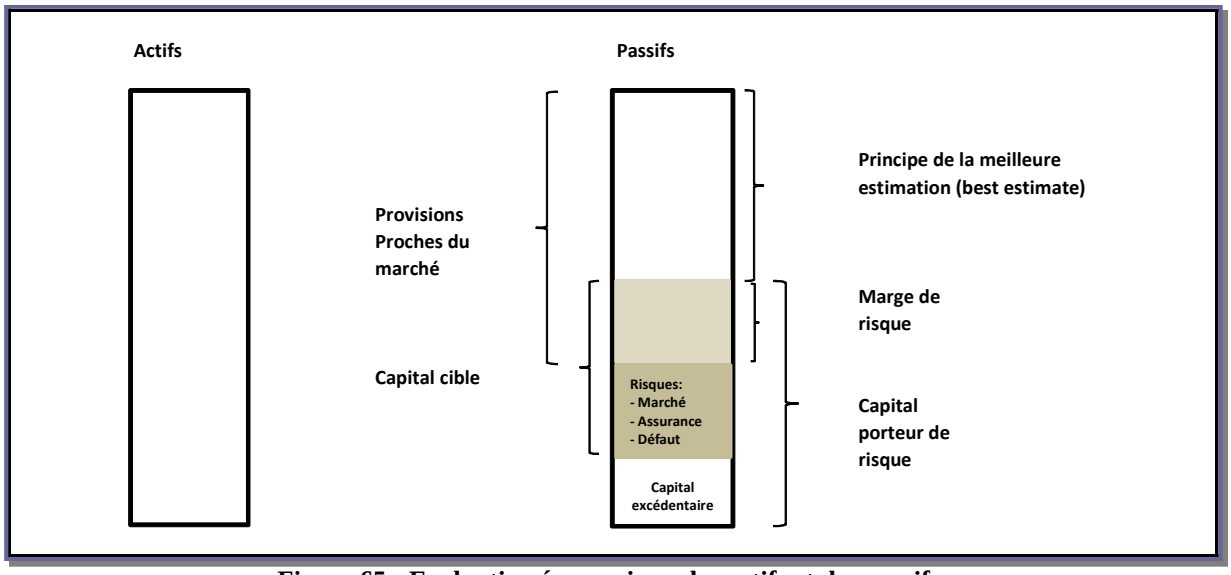


Figure 65 : Evaluation économique des actifs et des passifs

IX. Provisions techniques :

Remarque : Toutes les formules de calcul présentées à partir de ce point, et dans toute la suite de ce chapitre sont issues du QIS 4, mis à part les formules de calcul du capital minimum MCR, qui proviennent du QIS 2.

Les provisions techniques doivent être évaluées au montant auquel elles pourraient être transférées ou réglées entre des parties informées et consentantes dans des conditions de concurrence normales.

Le calcul sera basé sur la valeur de sortie actuelle, il fait appel aux informations données par les marchés financiers et aux données généralement disponibles sur les risques techniques d'assurance et sera cohérent avec celles-ci.

Les provisions techniques sont établies en tenant compte de l'ensemble des engagements à l'égard des souscripteurs et des bénéficiaires des contrats d'assurance.

Le montant des provisions techniques est égal à la somme du Best estimate et de la marge de risque.

Le *Best estimate* et la marge de risque doivent être évalués séparément,

IX.1 Best Estimate :

La détermination du Best estimate implique de déterminer et d'évaluer tous les futurs flux de trésorerie susceptibles d'être encourus pour honorer les engagements à l'égard des souscripteurs. Il est égal à la valeur actuelle attendue de tous les futurs flux de trésorerie potentiels, basée sur des informations actuelles et crédibles, compte tenu de toutes les informations disponibles et conformes aux caractéristiques du portefeuille d'assurance sous-jacent.

Les flux de trésorerie doivent être actualisés sur la base du taux sans risque applicable à l'échéance pertinente à la date d'évaluation, déterminé à partir de la structure par terme des taux sans risque à la date d'évaluation.

Le calcul approximatif du Best Estimate s'effectue comme suit :

$$BE \approx \sum_{t=0}^{n} \frac{CF_t}{(1+r_t)^t}$$

Avec :

CF_t : Flux de trésorerie probabilisé non actualisés des engagements d'assurance en vie.

r_t : Taux d'intérêt sans risque pour l'échéance t

Application numérique :

BE = 5 856 257 745 Dh.

IX.2 Marge de risque :

La marge de risque est calculée suivant la méthode dite du « coût du capital ».

Cette méthode consiste à calculer le coût de la mobilisation d'un montant de fonds propres éligibles égale au SCR nécessaire pour assumer les engagements d'assurance et de réassurance sur toute leur durée de vie. Pour ce faire, nous devons établir une projection des engagements d'assurance jusqu'à leur extinction puis, pour chaque année, déterminer le montant de SCR que doit présenter une entreprise exposée à de tels engagements.

Lorsque la marge de risque est calculée suivant la formule standard, elle doit être calculée nette de réassurance. Lorsque les participants calculent la marge de risque à l'aide d'un modèle interne, ils peuvent soit effectuer un calcul net unique ou deux calculs séparés.

- Risques à prendre en compte :

Les modules de risques à prendre en compte dans le calcul du coût du capital sont le risque opérationnel et le risque de souscription au regard du portefeuille en cours.

Pour l'assurance vie, la valeur de la marge de risque doit être indiquée séparément pour chaque segment.

- Coût du capital :

Le coût du capital est égal à 6 % pour tous les assureurs.

- Calcul de la marge de risque :

Le calcul de la marge de risque suivant la méthode du coût du capital s'effectue comme suit (on suppose que la date d'évaluation est le début de l'année 0, soit t = 0) :

- pour chaque segment d'assurance, trouver un SCR pour l'année t = 0 et pour chaque année future de la durée de vie des engagements pris sur ce segment. Le SCR pour l'année 0 correspond au capital que la société devrait détenir aujourd'hui, à ceci près qu'une partie seulement des risques est prise en compte.
- multiplier chacun des futurs SCR par le coût du capital pour obtenir le coût de détention des futurs SCR ;
- actualiser chacun des montants calculés à l'étape précédente au moyen de la courbe des taux sans risque en t = 0. La somme des valeurs actualisées correspond à la marge de risque à associer à le *Best estimate* des engagements concernés en t = 0 ;
- le montant total de la marge de risque est la somme des marges de risque de tous les segments.

La marge de risque d'un segment basée sur le coût du capital est déterminée par la formule :

$$\boxed{MR \approx CC \cdot (0.5 + Dur_{\text{mod}}) \cdot SCR(0)}$$

Avec : *MR :* La marge basée sur le coût du capital ;

CC : Le coût du capital ;

SCR(0) *:* Le SCR actuel du segment hors risque de marché et risque de contrepartie pour les dérivés financiers ;

Dur_{mod} *:* La duration modifiée du *Best estimate* des provisions du segment.

$$Dur_{mod}=D/(1+r)$$

Où : r =Taux d'actualisation

Et D : La duration $D = \frac{\sum_{1}^{n} \frac{t \bullet CF_t}{(1+r)^t}}{\sum_{1}^{n} \frac{CF_t}{(1+r)^t}}$

CF_t=Flux du passif en année t.

Application numérique :

D= 9.32 ans

$Dur_{mod}=D/(1+r)$ = 8.99 ans

$SCR(0)$ = 82,839,554

CC = 6%

MR = 58 215 356 Dh.

X. Capital minimum de risque (MCR) :

X.1 Définition :

Le projet de solvabilité II définit également un autre niveau de capital, comparable à l'ancienne exigence de marge de solvabilité. En effet, bien que la solution ne soit pas encore définitivement arrêtée, le niveau de capital minimum pourrait correspondre à l'actuelle exigence de marge de solvabilité, moyennant l'ajout préalable de certains éléments qui restent encore à définir.

Ce capital s'appelle capital minimum. Il remplit une fonction toute autre que le capital de solvabilité. Ce capital, bien inférieur aux exigences en termes de capital de solvabilité, représente la limite ultime en deçà de laquelle les autorités prudentielles sont en position de prendre des mesures extrêmes (jusqu'à révocation de l'agrément).

X.2 Calcul des MCR par type de risque :

La détermination de ce seuil minimum est aisée et rapide en comparaison avec celle relative au capital de solvabilité. L'approche développée par les autorités de contrôle de Solvabilité II propose, en effet, une version simplifiée de la méthodologie adoptée pour le calcul de ce dernier.

Il s'agit, en fait, de retenir les composantes les plus importantes des risques considérées pour le calcul du capital de solvabilité – à l'exclusion du risque opérationnel – et d'imposer des exigences moins contraignantes, correspondant à un niveau de confiance plus faible.

Le capital requis est à nouveau calculé dans un premier temps par type de risque, puis agrégé, en tenant compte des corrélations. Nous reprendrons pour ce faire les deux étapes explicitées à la section précédente. Notons que seules les composantes étudiée dans la détermination du capital de solvabilité seront abordées.

- Le risque de souscription et d'actions :

Le capital minimum relatif au risque de longévité, de rachat, de mortalité et d'actions correspond à la moitié du capital de solvabilité (SCR) relatif à ces risques.

$$MCR_{risque(i)} = 0.5 \bullet SCR_{risque(i)}$$

Où : i : indice du risques i.

- Le risque de taux d'intérêt :

Pour le risque de taux d'intérêt, la même approche que celle proposée pour le calcul du capital de solvabilité est utilisée. Nous avons appliqué des coefficients de chocs $S'_{hausse}(t)$ et $S'_{baisse}(t)$ sur la courbe des taux d'intérêt actuelle, afin d'obtenir des structures par terme de taux modifiées.

Avec : $S'_{hausse}(t) = 0{,}5 * S^{hausse}(t)$

Et $S'_{baisse}(t) = 0{,}5 * S^{baisse}(t)$

Les coefficients $S'_{hausse}(t)$ et $S'_{baisse}(t)$ sont explicités au paragraphe précédent.

- Agrégation du risque de marché :

L'exigence en capital pour le risque de marché est alors obtenue de la manière suivante:

$$MCR_{marché} = \sqrt{MCR^2_{actions} + MCR^2_{taux} + \rho_{12} * MCR_{actions} * MCR_{taux}}$$

Avec :

$MCR_{marché}$ = Capital minimum au titre du risque de marché ;

$MCR_{actions}$ = Capital minimum au titre du risque actions;

MCR_{taux} = Capital minimum au titre du risque de taux d'intérêt ;

ρ_{12}= Corrélation entre le risque actions et le risque de taux d'intérêt.

- Agrégation du risque de souscription :

L'exigence en capital pour le risque de souscription est alors obtenue de la manière suivante :

$$MCR_{souscription} = \sqrt{MCR^2{}_{mortalité} + MCR^2{}_{longévité} + MCR^2{}_{rachat} + 2 \bullet \rho_{i,j} \bullet MCR_i \bullet MCR_j}$$

Avec :

- $SCR_{souscription}$: Chargement en capital au titre du risque de souscription vie

- $MCR_{mortalité}$: Capital minimum au titre du risque de mortalité

- $MCR_{longévité}$: Capital minimum au titre du risque de longévité

- MCR_{rachat} : Capital minimum au titre du risque de rachat

- $\rho_{i,j}$: Corrélation entre le risque i et le risque j.

- Détermination du capital minimum :

Les exigences de capital pour les deux risques pris en compte sont combinées de la manière suivante :

$$MCR = \sqrt{MCR^2{}_{souscription} + MCR^2{}_{marché} + 2 \bullet \rho_{souscription,marché} \bullet MCR_{souscription} \bullet MCR_{marché}}$$

Avec :

- $MCR_{souscription}$: Capital minimum au titre du risque de souscription

- $MCR_{marché}$: Capital minimum au titre du risque de marché

- $\rho_{souscription,marché}$: Corrélation entre le risqué de souscription et le risqué de marché

La matrice de corrélation testée au niveau du QIS2 est identique à celle utilisée pour le calcul du SCR de base.

Application numérique :

$MCR_{mortalité}$ = 45 936 175 Dh

$MCR_{longévité}$ = 461 524 Dh

$MCR_{actions}$ = 1 501 315 226 Dh

MCR_{taux} = 167 082 571 Dh

$MCR_{souscription}$ = 51 183 680 Dh

$MCR_{marché}$ = 1 569 1432 942 Dh

MCR_{total} = 1 502 934 811 Dh

D'après ces résultats, nous avons constaté que les capitaux de solvabilité et les minimums relatifs au risque d'actions sont prépondérants dans le calcul des capitaux agrégés. Ils influencent donc beaucoup les résultats obtenus. C'est essentiellement le risque actions qui fait que l'approche standard surestime le capital de solvabilité par rapport à l'approche modèle interne.

XI. Capital de solvabilité requis : formule standard :

XI.1 SCR de base (BSCR) :

C'est le capital de solvabilité requis avant tout ajustement ; l'agrégat des chargements en capital au titre de grandes catégories de risque, dans notre mémoire nous nous sommes intéressées au risque de souscription et au risque de marché, ceux liés à notre produit d'épargne.

Le calcul du BSCR ainsi que les chargements en capital au titre des différents risques et sous risques doit être fait compte tenu de l'effet d'absorption des risques des futures participations aux bénéfices. C'est le concept de « risk mitigation ». Toutefois, n'ayant pas suffisamment de données sur l'histoire d'évolution de la participation bénéficiaire, et l'impact de celle-ci étant assez réduit, nous ne tenons pas compte dans nos calculs de l'effet d'absorption.

Le calcul du SCR de base est effectué comme suit :

$$SCR = \sqrt{SCR^2_{souscription} + SCR^2_{marché} + 2 \bullet \rho_{souscription,marché} \bullet SCR_{souscription} \bullet SCR_{marché}}$$

Avec : - $SCR_{souscription}$: Chargement en capital au titre du risque de souscription

- $SCR_{marché}$: Chargement en capital au titre du risque de marché

- $\rho_{souscription,marché}$: Corrélation entre le risqué de souscription et le risqué de marché

La matrice des $\rho_{i,j}$ testée au niveau du QIS4 est définie comme suit:

$\rho_{marché,souscription}$	$SCR_{marché}$	$SCR_{souscription}$
$SCR_{marché}$	1	
$SCR_{souscription}$	0.25	1

Tableau 24 : La matrice de corrélation entre les risques de souscription et de marché.

Application numérique :

SCR = 2 809 642 610, 91 Dh

XI.2 Risque opérationnel :

Le risque opérationnel est le risque de perte résultant de procédures internes inadaptées ou défaillantes, du personnel ou des systèmes, ou d'événements extérieurs. Il comprend également les risques juridiques, mais il exclut les risques de réputation et les risques résultant de décisions stratégiques. Le module Risque opérationnel tient compte des risques opérationnels non explicitement couverts dans d'autres modules de risque.

$$SCR_{op} = \min\{0.30 \bullet SCR; 0.003 \bullet PT\}$$

Avec :

-SCR : Le capital de solvabilité requis avant tout ajustement ; c'est l'agrégat des chargements en capital au titre de grandes catégories de risque.

- PT : Total des provisions techniques d'assurance vie.

Application numérique :

SCR_{op} = 18 563 034 Dh

XI.3 **Risque de souscription :**

Egalement appelé risque actuariel, il comprend les risques liés à une tarification insuffisamment prudente lors de la souscription ou du rachat de contrats.

Ce module concerne le risque résultant de la souscription de contrats d'assurance vie, qui est associé aux risques couverts et aux procédures suivies dans la gestion de l'activité.

Le risque de souscription vie est composé des risques biométriques (risque de mortalité, risque de longévité et risque d'invalidité/de morbidité), et du risque de rachat.

Le chargement en capital au titre du risque de souscription vie est une combinaison des chargements en capital au titre des sous-risques en vie suivant un tableau de corrélation :

$$SCR_{souscription} = \sqrt{SCR^2{}_{mortalité} + SCR^2{}_{longévité} + SCR^2{}_{rachat} + 2 \bullet \rho_{i,j} \bullet SCR_i \bullet SCR_j}$$

Avec:

- $SCR_{souscription}$: Chargement en capital au titre du risque de souscription vie
- $SCR_{mortalité}$: Chargement en capital au titre du risque de mortalité
- $SCR_{longévité}$: Chargement en capital au titre du risque de longévité
- SCR_{rachat} : Chargement en capital au titre du risque de rachat
- $\rho_{i,j}$: Corrélation entre le risque i et le risque j

A titre d'illustration, mentionnons que la matrice de corrélation testée au niveau du QIS4 est la suivante :

$\rho_{souscription}$	$SCR_{mortalité}$	$SCR_{longévité}$	SCR_{rachat}
$SCR_{mortalité}$	1		
$SCR_{longévité}$	-0.25	1	
SCR_{rachat}	0	0.25	1

Tableau 25 : La matrice de corrélation entre les risques de mortalité, longévité, et rachat

XI.3.1 **Risque de mortalité : $SCR_{mortalité}$**

Le risque de mortalité représente l'incertitude relative aux tendances et paramètres, dans la mesure où ceux-ci ne sont pas déjà pris en compte dans l'évaluation des provisions techniques.

Il est applicable aux contrats d'assurance subordonnés au risque de mortalité (c'est-à-dire les contrats pour lesquels le montant actuellement à verser au décès est supérieur aux provisions techniques détenues et où par conséquent, une augmentation des taux de mortalité risque d'entraîner une augmentation des provisions techniques).

Le calcul est effectué comme suit :

$$SCR_{mortalité} = (\text{Total du capital en risque}) * q * D * 0{,}10 * 1{,}1^{((D-1)/2)}$$

Avec :

-D = duration modifiée des flux de passif

-q = (spécifique à l'entreprise) taux de décès moyen attendu sur l'année suivante pondéré de la somme assurée

$-1{,}1^{((D-1)/2)}$ = Augmentation projetée de la mortalité.

Application numérique :

q = 0.0122

D = 10.72821948

$SCR_{mortalité}$ = 83035298.43

XI.3.2 **Le risque de longévité** : $SCR_{longévité}$

Le risque de longévité résulte de l'incertitude relative aux tendances et paramètres dans la mesure où ceux-ci ne sont pas déjà pris en compte dans l'évaluation des provisions techniques.

Il est applicable aux contrats d'assurance subordonnés au risque de longévité (lorsqu'il n'y a pas de prestation en cas de décès ou lorsque le montant actuellement à payer en cas de décès est inférieur aux provisions techniques détenues et que par conséquent, une baisse des taux de mortalité risque d'entraîner une augmentation des provisions techniques).

Le calcul du chargement en capital de ce risque est effectué comme suit :

$$SCR_{longévité} = 25\% * q *(1,1)^{((D-1)/2)} * D * PT_l$$

Avec :

PT_l : Provisions techniques pour les contrats exposés au risque de longévité

D : Duration modifiée des flux de trésorerie passifs

q : Taux de décès moyen attendu l'année suivante pondéré de la somme assurée.

Application numérique :

q = 0.0122

D = 10.72821948

PT_l = 20710792.19

$SCR_{longévité}$ = 797368.70

XI.3.3 Risque de rachat : SCR_{rachat}

Le risque de rachat concerne la perte ou la modification défavorable de la valeur des passifs d'assurance résultant d'une variation du niveau ou de la volatilité des taux de déchéance, de résiliation, et de rachat des polices. La formule standard tient compte du risque de changement permanent des taux et du risque de rachat massif.

Les calculs simplifiés sont définis comme suit :

$$SCR_{rachat} = \max(Rachat_{baisse}; Rachat_{hausse}; Rachat_{massif})$$

Avec :

$$Rachat_{Baisse} = 0.5 \cdot l_{Baisse} \cdot n_{Baisse} \cdot S_{Baisse} \quad \text{et} \quad Rachat_{Hausse} = 1.5 \cdot l_{Hausse} \cdot n_{Hausse} \cdot S_{Hausse}$$

Où :

$l_{Baisse}; l_{Hausse}$: Estimation du taux de rachat moyen des polices avec un coût de rachat négatif/positif

$n_{Baisse}; n_{Hausse}$: Durée moyenne (en années) pondérée des *coût de rachat*, de la liquidation de la police avec un *coût de rachat* négatif/positif

$S_{down}; S_{up}$: Somme des coûts de rachat négatifs/positifs.

Le coût du rachat d'une police se définit comme l'écart entre le montant actuellement dû au rachat et le best estimate de la provision détenu.

Application numérique :

SCR_{rachat} = 56.845.393 Dh

$SCR_{souscription}$ = 84.065.397 Dh

XI.4 Module Risque de marché :

Le risque de marché résulte du niveau ou de la volatilité de la valeur de marché des instruments financiers. L'exposition au risque de marché est mesurée par l'impact des mouvements de variables financières telles que les cours des actions, les taux d'intérêt, les prix de l'immobilier et les taux de change.

Ce module requiert les données suivantes :

SCR_{taux} = Chargement en capital au titre du risqué de taux d'intérêt

$SCR_{actions}$ Chargement en capital au titre du risqué sur actions

Les résultats obtenus sont les suivants :

$SCR_{marché}$ = Chargement en capital au titre du risqué de marché

Les sous risques de marché doivent être agrégés en un chargement global $SCR_{marché}$ au titre du risque de marché selon la formule suivante :

$$\mathbf{SCR_{marché}} = \sqrt{\mathbf{SCR_{actions}^2} + \mathbf{SCR_{taux}^2} + \boldsymbol{\rho}_{\mathbf{actions,taux}} * \mathbf{SCR_{actions}} * \mathbf{SCR_{taux}}}$$

Où : ρactions,taux = coefficient de corrélation entre SCRactions et SCRtaux

Les coefficients ρactions,taux sont définis selon le tableau de corrélation suivant :

$\rho_{souscription}$	SCR_{taux}	$SCR_{actions}$
SCR_{taux}	1	
$SCR_{actions}$	0	1

Tableau 26 : La matrice de corrélation entre le risque d'actions et le risque de taux.

Afin d'évaluer l'impact d'une corrélation différente, comme on l'a observé lors des récentes perturbations des marchés et d'épisodes plus anciens, le CEIOPS effectuera une analyse de sensibilité en testant un nouveau facteur de corrélation entre risque sur actions et risque de taux d'intérêt produisant une autre valeur de SCR.

À cette fin, le facteur de corrélation de 0 entre SCRactions et SCRtaux sera remplacé par un facteur de corrélation positive de 0,25 en cas de baisse des taux d'intérêt et par un facteur de corrélation négative de – 0,25 en cas de hausse des taux. Les résultats de cette analyse de sensibilité seront publiés dans le rapport final de QIS4.

Application numérique :

$SCR_{marché}$ = 2 845 375 721 Dh

XI.4.1 ***Risque de taux d'intérêt* : SCR_{taux}**

Un risque de taux d'intérêt existe pour tous les actifs et passifs dont la valeur d'actif nette est sensible aux variations de la structure par terme des taux d'intérêt ou à la volatilité des taux. Les actifs et passifs sensibles aux variations des taux d'intérêt sont les investissements en instruments à taux fixe, les passifs d'assurance ainsi que les instruments financiers (capitaux empruntés) et les dérivés de taux d'intérêt. Les flux de passifs futurs seront sensibles à une modification du taux d'actualisation de ces flux.

La valeur des actifs et passifs sensibles aux variations des taux d'intérêt peut être déterminée au moyen de la structure par terme des taux d'intérêt (« taux zéro »). Cette structure peut évidemment changer au cours d'une année.

Ce module requiert les données suivantes :

VAN = Valeur de l'actif net (en anglais NAV : net asset value) = $\boldsymbol{BE_{actif} - BE_{passif}}$

Les résultats obtenus sont les suivants :

$\mathbf{SCR_{taux}^{hausse}}$ = Chargement en capital au titre du risque de taux d'intérêt après un choc haussier ;

$\mathbf{SCR_{taux}^{baisse}}$ = Chargement en capital au titre du risque de taux d'intérêt après un choc baissier ;

$\mathbf{SCR_{taux}}$ = Chargement en capital au titre du risque de taux d'intérêt.

Le chargement en capital au titre du risque de taux d'intérêt est le résultat d'un scénario prédéfini :

$$SCR_{taux}^{\ hausse} = \Delta VAN|_{choc\ haussier}$$
$$SCR_{taux}^{\ baisse} = \Delta VAN|_{choc\ baissier}$$

Où : $\Delta VAN|_{choc\ haussier}$ et $\Delta VAN|_{choc\ baissier}$ sont les variations de valeur de l'actif net résultant de la réévaluation de tous les instruments sensibles aux taux d'intérêt en fonction de structures par terme modifiées.

Les structures par terme modifiées sont dérivées en multipliant la courbe des taux d'intérêt actuelle par $(1+ S^{hausse})$ et $(1+ S^{baisse})$, où le choc haussier S^{hausse} (t) et le choc baissier S^{baisse} (t) pour les différentes échéances t sont les suivants :

Echéance t	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
$\mathbf{S^{hausse}}$ **(t)**	0,94	0,77	0,69	0,62	0,56	0,52	0,49
$\mathbf{S^{baisse}}$ **(t)**	-0,51	-0,47	-0,44	-0,42	-0,4	-0,38	-0,37

Echéance t	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**
$\mathbf{S^{hausse}}$ **(t)**	0,46	0,44	0,42	0,42	0,42	0,42	0,42
$\mathbf{S^{baisse}}$ **(t)**	-0,35	-0,34	-0,34	-0,34	-0,34	-0,34	-0,34

Echéance t	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20+**
$\mathbf{S^{hausse}}$ **(t)**	0,42	0,41	0,4	0,39	0,38	0,37
$\mathbf{S^{baisse}}$ **(t)**	-0,34	-0,33	-0,33	-0,32	-0,31	-0,31

Tableau 27 : Structure des chocs de taux d'intérêt pour différentes échéances t

Afin de mieux approcher cette notion de chocs sur les taux d'intérêt, donnons l'exemple suivant :

Le taux d'intérêt à 10 ans en cas de choc haussier R1(10) est calculé comme suit :

$$R_1(10) = R_0(10) \,.\, (1+0{,}42)$$

Le chargement en capital au titre du risque de taux d'intérêt découle du type de choc qui requiert le chargement en capital le plus élevé.

$$SCR_{taux} = \begin{cases} \max\left(SCR_{taux}^{hausse}; 0\right) & si\ SCR_{taux}^{hausse} \geq SCR_{taux}^{baisse} \\ \max\left(SCR_{taux}^{baisse}; 0\right) & si\ SCR_{taux}^{baisse} \geq SCR_{taux}^{hausse} \end{cases}$$

Application numérique :

SCR_{taux} = 249 829 543 Dh

XI.4.2 Risque sur actions : $SCR_{actions}$

Le risque sur actions résulte du niveau ou de la volatilité de la valeur de marché des actions. L'exposition au risque sur actions concerne tous les actifs et passifs dont la valeur est sensible aux variations des cours de bourse.

Le sous-module Risque sur actions fait appel à des indices comme indicateurs de risque. Par conséquent, les données relatives à la volatilité et aux corrélations sont dérivées de ces indices. On suppose que toutes les actions peuvent être affectées à un indice de l'ensemble fourni.

Les scénarios de choc envisagés pour les différents indices illustrent le risque systématique inhérent à ce portefeuille de marché. On suppose que l'exposition au risque systématique du portefeuille d'actions des compagnies d'assurance est identique à l'exposition de l'indice (indicateur du risque) lui-même.

Les compagnies d'assurance ne doivent pas supposer qu'ils achètent d'autres instruments de couverture (par exemple, dans le cadre d'un programme de couverture glissant) outre ceux qui sont en vigueur à la date de clôture des comptes.

Notons: SCRactions = Chargement en capital au titre du risque sur actions.

La détermination du chargement en capital au titre du risque sur actions fait appel à un indice « Global », qui regroupe les actions cotées dans les pays de l'EEE et de l'OCDE, et à un indice « Autres », qui comprend les actions exclusivement cotées sur les marchés émergents, les actions non cotées, les fonds spéculatifs et les autres investissements alternatifs.

Le chargement en capital est déterminé comme le résultat d'un scénario de choc prédéfini pour cet indice :

$$SCR_{actions} = \max\left(\Delta VAN|_{\text{choc sur actions}} ; 0\right)$$

Où le choc sur actions est de 32% pour l'indice « Global » et 45% pour l'indice « Autres ».

Le chargement en capital SCRactions est l'effet immédiat attendu du scénario de choc sur actions sur la valeur de l'actif net compte tenu de l'ensemble des expositions directes et indirectes du participant aux cours des actions.

Application numérique :

$SCR_{actions}$ = 2 781 279 150 Dh.

Contrairement à Solvabilité I, qui tente de limiter le risque actions en dictant une stratégie stricte d'allocations des actifs en assurance vie, les directives proposées par Solvabilité II laissent aux assureurs le libre arbitre dans le choix de leurs stratégies de placements, tout en les contraignant à mettre de coté un capital plus important.

CHAPITRE

10

Analyse des gaps & stratégie de réinvestissement

L'objectif de l'étude qui suit est l'analyse du profil des cash flows issus, d'une part, du portefeuille de contrats d'assurances au passif et, d'autre part, du portefeuille d'actifs représentatifs des engagements liés aux contrats d'assurances. Le point de départ de l'analyse est le suivant : au 31 décembre 2008, les provisions de contrats sélectionnés s'élèvent à 5 171 495 487 DH et la marge de solvabilité à 302 570 198 DH.

Pour analyser le profil des cash flows futurs, nous allons confronter deux stratégies de réinvestissements : il s'agie de réinvestissement en obligations d'Etat uniquement &le réinvestissement combiné entre les actions et les obligations.

I. Définition de la problématique :

Parallèlement, à l'actif, un portefeuille obligataire de valeur comptable égale à la somme des deux montants, soit 5 474 065 685, est considéré. L'évolution de ces deux postes tout au long de la projection sur 40 années est analysée dans divers scénarios. Les cash flows positifs des premières années devront être réinvestis et gonfleront par ce fait les cash flows ultérieurs. Ces flux peuvent être réinvestis de différentes manières : trois stratégies sont comparées ci-dessous. La première consiste en un réinvestissement en obligations d'Etat exclusivement la deuxième combine les obligations d'Etat avec les actions, tandis que la troisième utilise les actions exclusivement. Nous nous intéressons aux deux premières stratégies.

II. Détermination des cash flows et des gaps :

Les cash flows analysés proviennent de trois sources distinctes : le portefeuille de contacts d'assurances, le portefeuille obligataire initial et les nouveaux placements issus des réinvestissements des flux nets positifs.

II.1 Le portefeuille de contrat d'assurance :

En premier lieu, les contrats d'assurances au passif du bilan génèrent une série de cash flows : des cash flows sortants (prestations, coûts, taxes, dividendes) et des cash flows entrants (primes). Les dividendes sont calculés de manière proportionnelle à l'argent mobilisé spécifiquement pour le portefeuille étudié, i.e. la marge de solvabilité. Le portefeuille doit pouvoir générer 12 % de la marge de solvabilité comme rémunération pour l'actionnaire. Le tableau ci-dessous reprend un échantillon de ces cash flows, la suite entière se trouve en annexe 3. Le graphe ci-dessous montre la situation de portefeuille pris isolément. Comme le portefeuille est relativement vieux, les primes attendues dans les dernières années de la projection dépassent les cash flows sortants, ce qui laisse un flux net positifs jusqu' en 2048, qui sera réinvesti.

Année	IN(Primes)	OUT (prestation, frais, commissions, taxes, dividendes)	Total
2009	2 063 588 811,40	-4 989 343 593,00	-2 925 754 781,61
2010	2 125 496 475,74	-5 162 171 885,60	-3 036 675 409,86
2011	2 189 261 370,01	-5 232 271 879,60	-3 043 010 509,59
2012	2 254 939 211,11	-5 260 951 176,60	-3 006 011 965,49
2013	2 322 587 387,44	-5 303 436 844,30	-2 980 849 456,86
2014	2 392 265 009,07	-4 846 568 333,20	-2 454 303 324,13

2015	2 464 032 959,34	-4 429 902 882,70	-1 965 869 923,36
2016	2 537 953 948,12	-3 925 930 118,40	-1 387 976 170,28
2017	2 614 092 566,56	-3 525 420 115,70	-911 327 549,14
2018	2 692 515 343,56	-3 216 336 819,10	-523 821 475,54
2019	2 773 290 803,87	-2 713 189 868,60	60 100 935,27
....	....	…	…
2043	5 637 529 201,60	-55 528 457,06	5 582 000 744,54
2044	5 806 655 077,65	-59 547 960,18	5 747 107 117,47
2045	5 980 854 729,97	-60 839 315,71	5 920 015 414,26
2046	6 160 280 371,87	-64 820 610,06	6 095 459 761,81
2047	6 345 088 783,03	-70 774 112,30	6 274 314 670,73
2048	6 535 441 446,52	-77 758 772,98	6 457 682 673,54

Tableau 28 : Flux issus des cotrats d'assrances

Ci-dessous, l'histogramme positif montre l'évolution des primes. L'histogramme négatif montre celle des sorties (prestations, frais, commissions, taxes, dividendes).

La courbe est négative jusqu'en 2030 : les prestations à financier dépassent les primes. Les surplus devront être réinvestis, de manière à pouvoir faire face aux années ultérieures, lorsque les primes diminuent et les prestations augmentent.

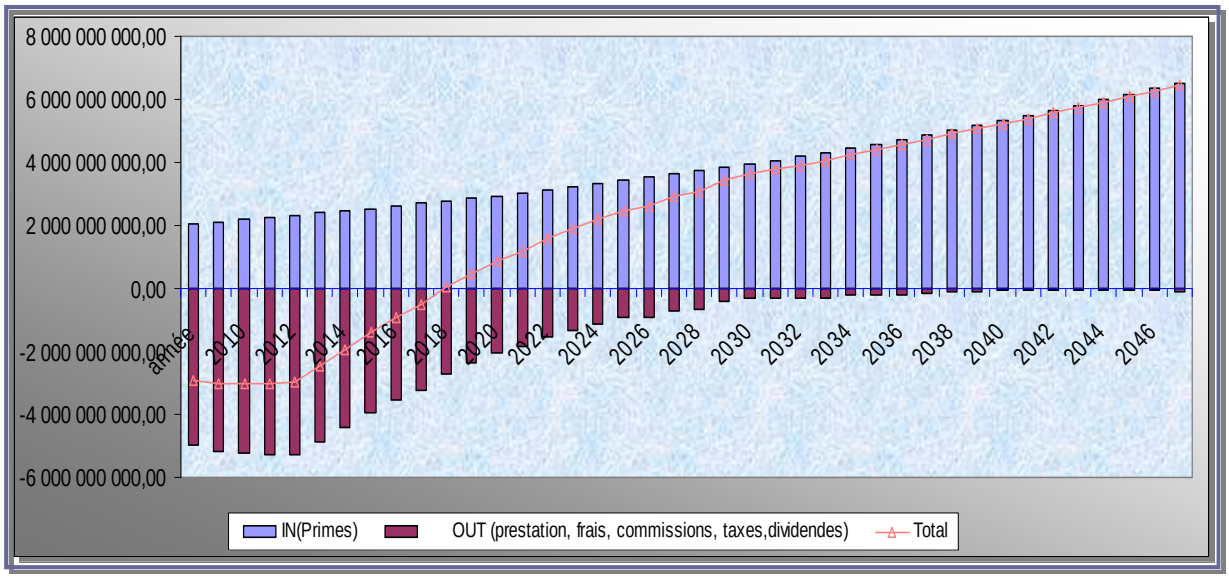


Figure 66 : Flux des contrats d'assurance

II.2 le portefeuille obligataire représentatif des réserves et de la marge de solvabilité au 31 décembre 2009 :

En deuxième lieu, le portefeuille d'obligations existant au 31 décembre 2008 procure un échéancier de cash flows.

Le tableau ci-dessous reprend un échantillon des cash flows (CF) espérés, issus du portefeuille obligataire du 31 décembre 2008 en milliers de dirhams.

Echéance	CF des obligations au 31-12-2008
2 009	44 497 826,3
2 010	32 314 602,6
2 011	19 208 413,3
2 012	36 458 413,3
2 013	70 8265 80,4
2 014	37 058 573,5
2 015	51 149 800,8
2 016	30 753 557
2 017	21 267100,2
2 018	11 007 772
2 019	66 907 772
2 020	26 048 819
2 021	7 016 016,65
2 022	7 016 016,65
2 023	7 016 016,65
2 024	18 016 016,6
2 025	106 749 035
2 026	22 994 080,3
2 027	0
…	…
2 045	0
2 046	0
2 047	0
2 048	0

Tableau 29 : Flux issus du portefeuille obligataire initial, existant au 31 décembre 2008.

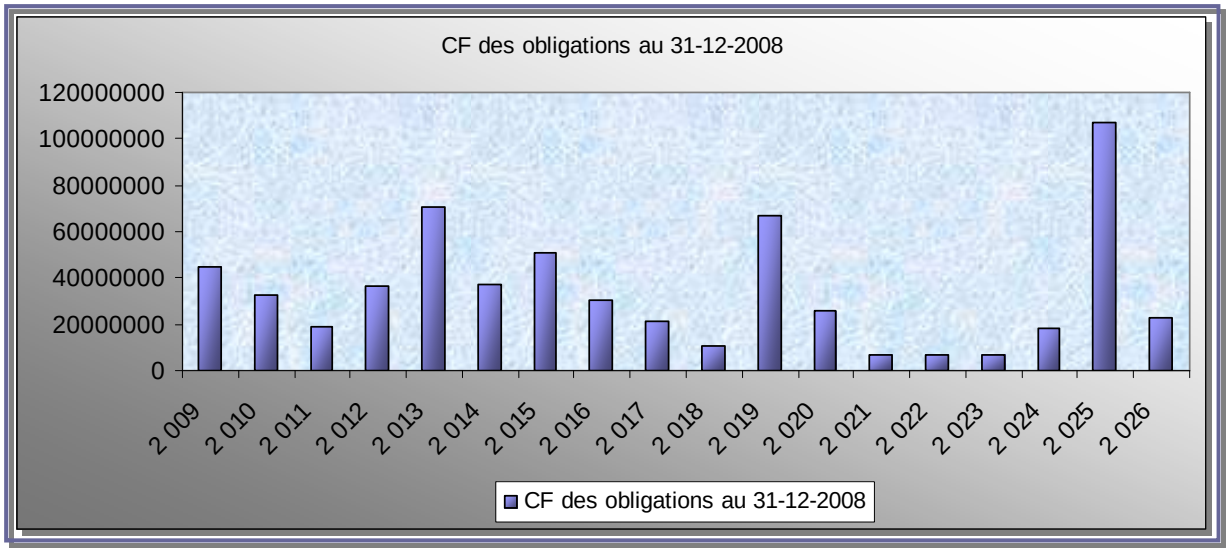


Figure 67 : Flux issus du portefeuille obligataire initial, existant au 31 décembre 2008

II.3 le portefeuille obligataire constitué par les réinvestissements des flux positifs nets au cours de la projection :

En troisième lieu, au cours de la projection, les cash flows positifs nets sont eux-mêmes réinvestis en actifs divers (obligations d'Etat, actions). Ces réinvestissements

engendrent des cash flows positifs pour les années ultérieures (coupon, arrivées à maturité, dividendes, plus values). Le montant de ces cash flows dépend de la stratégie choisie : investissements en obligations d'Etat et en actions, ou encore en obligations d'Etat. Celles-ci sont analysées une à une ci-dessous.

III Stratégie de réinvestissements en obligations d'Etat uniquement :

III.1 Les flux :

Suivant cette stratégie, tous les flux positifs nets sont systématiquement réinvestis en obligations d'Etat, pour une durée de 10 ans. Le coupon de ces obligations est le taux forward 10 ans débutant au cours de l'année du réinvestissement. Ces taux forward sont issus de la courbe spot en vigueur au moment de l'analyse, i.e. au 31 décembre 2008. Ci-dessous, suit un exemple détaillé pour quelques années de la projection.

***Année 2009* :** le passif génère un cash flow net négatif de -2 925 754 781 DH. Par ailleurs, le portefeuille obligataire génère 4 989 343 593 DH. Un dividende est prévu de 12% sur la marge de solvabilité. Ces trois cash flows conduisent à un total de 2 063 588 811 DH. Ce flux positif correspond à la masse d'argent qu'il convient de réinvestir en 2009, afin de pouvoir faire face aux engagements futurs et d'optimiser le rendement des actifs.

Echéance	Passif & dividende	Portefeuille obligataire initial	Nouvelles obligations	Total à réinvestir
2009	-2 925 754 781,61	4 989 343 593,00	0,00	2 063 588 811,40

Tableau 30 : Détail du calcul de réinvestissement de l'année 2009

***Année 2010* :** les primes étant encore nettement inférieures aux prestations et frais, les contrats d'assurances sont à la source d'un flux négatif : -3 036 675 409,86 DH. Le portefeuille obligataire du 31 décembre 2010 apporte quant à lui, 4 989 343 593 DH. Le dividende est de 36 308 423 DH. A ces trois cash flows, vient s'ajouter le coupon du nouveau portefeuille obligataire constitué par le réinvestissement en 2009 de 58 133 641,05 DH. Ce coupon est déterminé par le taux forward 10 ans débutant en 2009 : 3,47%. Ces trois contributions conduisent à un total de 2 194 727 426,28 DH à réinvestir en 2010. Ce montant vient donc gonfler le portefeuille obligataire constitué par les réinvestissements au cours de la projection.

Echéance	Passif & dividende	Portefeuille obligataire initial	Nouvelles obligations	Total à réinvestir
2010	-3 036 675 409,86	5 173 269 195,09	58 133 641,05	2 194 727 426,28

Tableau 31 : Détail du calcul de réinvestissement de l'année 2010

…

***Année 2019* :** les réinvestissements se poursuivent de la même manière, si ce n'est qu'à partir de 2019, les premières obligations du portefeuille arrivent à maturité : l'investissement réalisé en 2009 doit entièrement être reconduit. A partir de 2019, les cash flows entrants du passif commencent à dépasser les cash flows sortants du passif : ainsi, par exemple, le flux issu du portefeuille de contrats d'assurances en 2019 est positif et vaut 60 100 935 DH après distribution des dividendes. Le portefeuille obligataire du 31 décembre 2019 est encore présent et génère 595 961 723 DH. Le nouveau portefeuille obligataire génère un cash flow de 2 197 478 790 DH, et, d'autre part, des coupons des 10 réinvestissements précédents.

Echéance	Passif & dividende	Portefeuille obligataire initial	Nouvelles obligations	Total à réinvestir
2019	60 100 935,27	595 961 723,14	2 197 478 790,51	2 853 541 448,91

Tableau 32 : Détail du calcul de réinvestissement de l'année 2009

Le tableau et le graphe ci-dessous reprennent, pour un échantillon de la projection, les montants nets à réinvestir, ainsi que la répartition de ceux-ci entre leurs trois différentes sources possibles : les contrats d'assurances, le portefeuille obligataire initial et le nouveau portefeuille obligataire.

Echéance	Passif & dividende	Portefeuille obligataire initial	Nouvelles obligations	Total à réinvestir
2009	-2 925 754 781,61	4 989 343 593,00	0,00	2 063 588 811,40
2010	-3 036 675 409,86	5 173 269 195,09	58 133 641,05	2 194 727 426,28
2011	-3 043 010 509,59	5 176 606 216,49	125 523 339,25	2 259 119 046,16
2012	-3 006 011 965,49	5 095 791 416,72	200 350 212,39	2 290 129 663,62
2013	-2 980 849 456,86	5 035 357 482,52	281 484 795,58	2 335 992 821,24
2014	-2 454 303 324,13	4 749 963 620,55	369 384 657,07	2 665 044 953,48
2015	-1 965 869 923,36	4 183 358 794,50	475 264 904,95	2 692 753 776,09
2016	-1 387 976 170,28	3 703 486 719,96	587 648 168,60	2 903 158 718,28
2017	-911 327 549,14	2 852 683 309,59	714 376 641,04	2 655 732 401,49
2018	-523 821 475,54	2 523 263 808,88	835 168 186,28	2 834 610 519,62
2019	60 100 935,27	595 961 723,14	2 197 478 790,51	2 853 541 448,91
…	…			
2043	5 582 000 744,54	0,00	455 462 080,21	6 037 462 824,75
2044	5 747 107 117,47	0,00	478 640 502,51	6 225 747 619,98
2045	5 920 015 414,26	0,00	501 848 464,83	6 421 863 879,09
2046	6 095 459 761,81	0,00	526 199 012,69	6 621 658 774,50
2047	6 274 314 670,73	0,00	551 377 595,66	6 825 692 266,39
2048	6 457 682 673,54	0,00	577 446 264,96	7 035 128 938,50

Tableau 33 : Détail des montants à réinvestir

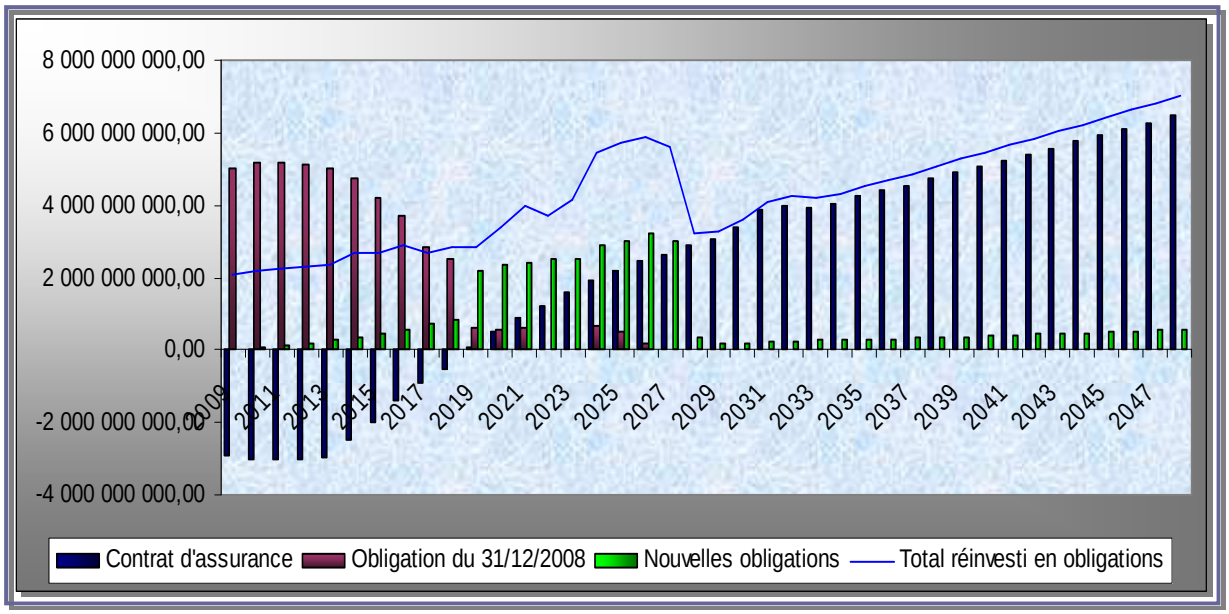


Figure 68 : Décomposition du montant à réinvestir en ses différentes sources et destinations

Pour autant que les hypothèses inhérentes aux modèles sous jacent soient proches de la réalité, cette stratégie garantit des flux nets positifs pour les 40 années à venir. En effet, la courbe du total réinvesti en obligations est positive tout au long de la projection. Si tel n'avait pas était le cas, il n'y aurait eu un problème de liquidité. Le portefeuille obligataire du 31 décembre 2008 permet donc de faire face aux engagements futurs, pour autant que les flux positifs intermédiaires puissent être réinvestis à des taux proches des taux forward 10 ans issus de la courbe des taux spot du 31 décembre 2008, que le comportement futur des clients de la compagnie d'assurance soit proche du modèle utilisé, etc.

III.2 L'évolution du bilan :

Après avoir constaté, grâce à l'analyse des cash flows qui précède, qu'aucun problème de liquidité n'est attendu, il convient de se pencher sur l'évolution du bilan : la valeur comptable des actifs d'une part et celle des provisions techniques et de la marge de solvabilité d'autre part, afin de vérifier, que pour chaque année de la projection, la valeur comptable du portefeuille obligataire total dépasse au moins la valeur comptable des provisions techniques et de la marge de solvabilité, ce qui est le cas. Si cette condition n'avait pas été respectée, il aurait fallu suivre une autre stratégie de réinvestissement, qui aurait généré suffisamment de flux intermédiaires, afin de maintenir le niveau du portefeuille obligataire au-delà de la limite minimale donnée par les provisions techniques et la marge de solvabilité.

Echéance	Portefeuille obligataire initial	Nouveau portefeuille obligataire	Portefeuille obligataire total	Provisions techniques & marge de solvabilité
2009	4 989 343 593,00	0,00	4 989 343 593,00	4 989 343 593,00
2010	5 173 269 195,09	58 133 641,05	5 231 402 836,15	5 162 171 885,60
2011	5 176 606 216,49	125 523 339,25	5 302 129 555,75	5 232 271 879,60
2012	5 095 791 416,72	200 350 212,39	5 296 141 629,11	5 260 951 176,60
2013	5 035 357 482,52	281 484 795,58	5 316 842 278,10	5 303 436 844,30
2014	4 749 963 620,55	369 384 657,07	5 119 348 277,62	4 846 568 333,20
2015	4 183 358 794,50	475 264 904,95	4 658 623 699,45	4 429 902 882,70
2016	3 703 486 719,96	587 648 168,60	4 291 134 888,57	3 925 930 118,40
2017	2 852 683 309,59	714 376 641,04	3 567 059 950,63	3 525 420 115,70
2018	2 523 263 808,88	835 168 186,28	3 358 431 995,16	3 216 336 819,10
2019	595 961 723,14	2 197 478 790,51	2 793 440 513,65	2 713 189 868,60
2020	564 673 355,08	2 334 288 548,46	2 898 961 903,54	2 376 347 272,70
2021	631 385 417,21	2 429 795 397,42	3 061 180 814,63	2 047 192 525,70
2022	7 053 396,61	2 496 015 159,11	2 503 068 555,72	1 828 226 044,10
…	….	….	….	….
2042	0,00	432 923 117,96	432 923 117,96	63 121 313,63
2043	0,00	455 462 080,21	455 462 080,21	55 528 457,06
2044	0,00	478 640 502,51	478 640 502,51	59 547 960,18
2045	0,00	501 848 464,83	501 848 464,83	60 839 315,71
2046	0,00	526 199 012,69	526 199 012,69	64 820 610,06
2047	0,00	551 377 595,66	551 377 595,66	70 774 112,30
2048	0,00	577 446 264,96	577 446 264,96	77 758 772,98

Tableau 34 : Comparaison du portefeuille obligataire total et du montant requis d'un point de vue comptable

Le graphe suivant compare le niveau des provisions techniques à celui du portefeuille obligataire :

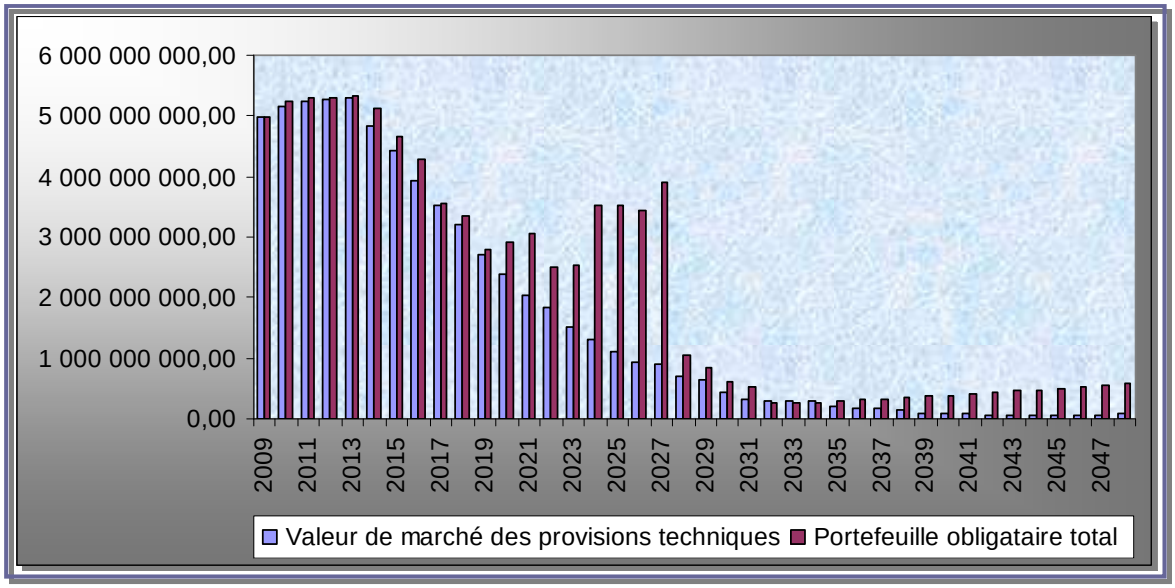


Figure 69 : Comparaison du portefeuille obligataire total et du montant requis d'un point de vue comptable

Les chiffres montrent qu'au terme de la projection, lorsque tous les engagements ont été respectés, la société conserve un portefeuille obligataire d'une valeur bilantaire de 577 millions de DH. Il s'agit du résultat cumulé des surplus de chaque année, après avoir octroyé un dividende de 12% sur la marge de solvabilité.

III.3 rendement des placements et la value at risk :

III.3.1 Le rendement des nouveaux placements :

Le rendement du nouveau portefeuille obligataire est obtenu à partir des taux forward 10 ans issus de la courbe des taux spot du 31 décembre 2008. Le taux de rendement actuel de ce portefeuille est de 4,59%.

III.3.2 La value at risk:

Le nouveau portefeuille de placements issu des réinvestissements au cours de la projection ne comporte aucun risque de défaut puisqu'il s'agit exclusivement d'obligations d'Etat. Dés lors, le seul risque présent dans le portefeuille total d'obligations est celui su portefeuille obligataire initial, évalué précédemment.

IV. Modèle de Markowitz :

Le modèle « moyenne-variance » des choix de portefeuille a connu un succès considérable depuis ses premiers développements avec Markowitz (1952). En fait, il occupe une place centrale dans la théorie financière moderne que l'on peut certainement attribuer à la richesse de ses prédictions empiriques. En effet, Markowitz avait formulé dans sa thèse de doctorat la notion de portefeuille efficient qui est devenue aujourd'hui familière à tous les théoriciens de la finance.

Tout investisseur rationnel dont l'utilité augmente avec la rentabilité et diminue avec le risque de sa richesse et qui dispose d'un certain nombre d'actifs financiers se pose le problème de leur choix et de leur combinaison en un portefeuille.

Cette méthode repose seulement sur la moyenne espérée et la variance de la rentabilité, d'où le nom de critère « moyenne-variance» associé à l'analyse de Markowitz.

IV.1 Présentation du modèle de Markowitz :

- ✓ **Principe de base du modèle de Markowitz :**

  Entre deux portefeuilles caractérisés par leur rendement (supposé aléatoire), on retient :

- à risque identique celui qui a l'espérance de rendement la plus élevée ;
- à espérance de rendement identique, celui qui présente le risque le plus faible.

Ce principe conduit à éliminer un certain nombre de portefeuilles, moins efficients que d'autres. Chaque couple possible d'actifs peut être représenté dans un graphique risque/rendement. Pour chaque rendement, il existe un portefeuille qui minimise le risque. À l'inverse, pour chaque niveau de risque, on peut trouver un portefeuille maximisant le rendement attendu. L'ensemble de ces portefeuilles est appelé frontière efficiente ou frontière de Markowitz. Cette frontière est convexe par construction : le risque n'augmente pas linéairement en fonction des poids des actifs dans le portefeuille.

✓ **Hypothèses du modèle de Markowitz :**

H1 : Le modèle fait l'hypothèse que les investisseurs sont averses au risque: ils ne seront prêts à prendre plus de risque qu'en échange d'un rendement attendu supérieur. À l'inverse, un investisseur qui souhaite améliorer la rentabilité de son portefeuille doit accepter de prendre plus de risque. L'équilibre risque/rendement jugé optimal dépend de chaque investisseur.

H2 : On suppose généralement que la préférence de l'investisseur pour un couple risque/rendement peut être décrite par une fonction d'utilité quadratique. De plus, les évolutions du marché sont supposées suivre une distribution symétrique. Par conséquent, seuls le rendement attendu (l'espérance de gain) et la volatilité (l'écart type) sont les paramètres examinés par l'investisseur. Ce dernier ne tient pas compte des autres caractéristiques de la distribution des gains, comme son asymétrie ou même le niveau de fortune investi.

✓ **Fondement théorique du modèle de Markowitz :**

La composition d'un portefeuille financier est fixée par les pondérations relatives des titres qu'il contient. Supposons que nous avions N titres et que la proportion du titre i (i=1 à N) est à égale α_i.

Soient r et Σ, le vecteur colonne des espérances des taux de rentabilité des actifs financiers et la matrice de variance covariance des rendements. La répartition optimale a des titres et la variance du portefeuille sont alors déterminés à partir de la résolution du problème suivant qui consiste à trouver la répartition a qui minimise la variance pour une rentabilité espérée donnée :

$$\begin{cases} \text{Min} \quad \frac{1}{2} \; a' \Sigma \, a \\ a' r = r_p \\ a' \Pi = 1 \end{cases} \qquad \text{Avec} \qquad \Pi = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \dots \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Pour résoudre ce système, on forme le Lagrangien:

$$\boldsymbol{L(a, \lambda, \mu) = a' \Sigma \, a - \lambda(a' r - r_p) - \mu(a' \prod - 1)}$$

Où λ et μ sont les multiplicateurs des contraintes.

On obtient la solution suivant :

$$\boldsymbol{r_p = \lambda C + \mu B} \qquad \text{et} \qquad \boldsymbol{a = \frac{A r_p - B}{\Delta} \Sigma^{-1} r + \frac{C - B r_p}{\Delta} \Sigma^{-1} \prod}$$

$$\boldsymbol{\sigma_p^2 = a' \Sigma \, a}$$

Avec : $A = \prod' \Sigma^{-1} \prod$

$B = \prod' \Sigma^{-1} r \;\; (= r' \Sigma^{-1} \prod)$

$C = r' \Sigma^{-1} r$

$\Delta = A\,C - B^2$

L'équation analytique de la frontière efficiente dans le repère (volatilité, rentabilité espérée) est la suivante :

$$\sigma_p = \left(\frac{A r_p^2 - 2 B r_p + C}{\Delta} \right)$$

IV.2 Application du modèle de Markowitz :

IV.2.1. La Frontière efficiente :

La courbe présentée ci-dessous appelée la frontière efficiente représente un ensemble de portefeuilles optimaux, pour un niveau de risque donné, qui maximisent la rentabilité espérée.

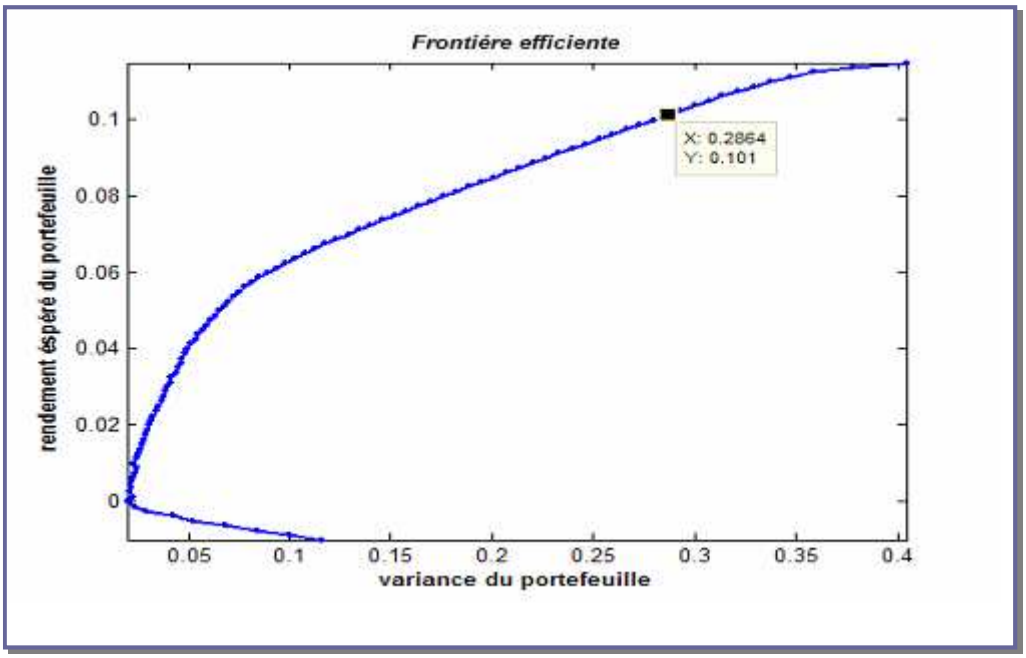


Figure 70 : La frontière efficiente du portefeuille

En observant le graphique, on remarque qu'il est difficile d'obtenir l'ensemble des portefeuilles efficients par cette méthode. Toutefois cette méthode n'indique pas quel est le meilleur portefeuille pour chaque investisseur. Comme on le voit sur la courbe celui qui désire une rentabilité plus élevée est obligé de courir un risque plus grand. Il faut donc intervenir ici l'attitude de l'investisseur face au risque.

IV.2.2 L'allocation optimale donnée par le modèle de Markowitz

Voici l'allocation optimale du notre portefeuille:

Le titre	Pondération
Obligation	61,62%
Action	38,38%

Pour une moyenne espérée de notre portefeuille actions d'ordre 5%, la répartition optimale, donnée par le modèle de Markowitz, montre une priorité d'investissement dans les obligation avec une part de 61,62%.

V Stratégie de réinvestissements en obligations d'Etat & en actions :

V.1 les flux :

Il est rare qu'une compagnie d'assurances choisie de limiter ses investissements aux obligations d'Etat. Afin d'optimiser le rendement de ses placements, tout en restant prudente,

si elle introduit dans son portefeuille un actif risqué, tel que des actions par exemple, elle se posera un ensemble de règles d'investissement à ne pas transgresser, afin de mesurer les risques pris et de ne pas mettre en péril sa solvabilité future.

L'analyse présente porte sur les réinvestissements des cash flows positifs nets en une combinaison d'obligations non risquées et d'actions. Les règles de gestion suivantes ont été choisies :

- ✓ lors de chaque réinvestissement, la part placée en actions est de 38,38% du montant total à réinvestir.
- ✓ la compagne doit être capable de faire face à ses engagements futurs, dans tous les cas de figure possibles quant au comportement des actions. Autrement dit, même en cas de catastrophe boursière généralisée, si tous les montants investis en actions sont perdus, la Compagnie doit avoir un portefeuille obligataire suffisamment fourni pour remplir ses engagements futurs, jusqu'à l'extinction du portefeuille.
- ✓ La valeur comptable du portefeuille obligatoire doit, chaque année, dépasser la somme des provisions techniques et la marge de solvabilité.
- ✓ Chaque année. Les cash flows nets finaux (coupons + maturités d'obligations + primes –prestations– frais – commissions – taxes – dividendes) doivent être positifs. Ceci restreint le placement en actions. Ainsi, à chaque prise de décision concernant la part investie en actions, il est nécessaire de vérifier les implications sur les éventuels problèmes de liquidité qui peuvent être engendrés pour les années futures. Cette contrainte requiert une programmation dynamique : à chaque étape, il est nécessaire de vérifier les conséquences sur les années ultérieures de la projection.

Ces règles étant respectées, le tableau ci-dessous repend les divers cash flows ainsi que la répartition du montant à investir entre les obligations d'état et les actions. Le détail se trouve en annexe 6. Ainsi, l'analyse montre qu'en 2009, il est possible de consacrer 38,38% du montant à réinvestir aux actions. Même si cet investissement s'avère désastreux de l'entreprise ne sera pas en danger.

Echéance	Contrat d'assurance	Portefeuille obligataire initial	Nouveau portefeuille obligataire	réinvestissement en obligations	réinvestissement en actions
2009	-2 925 754 781,61	4 989 343 593,00	0,00	1 238 153 286,84	825 435 524,56
2010	-3 036 675 409,86	5 173 269 195,09	34 880 184,63	1 302 884 381,92	868 589 587,94
2011	-3 043 010 509,59	5 176 606 216,49	74 885 601,36	1 325 088 784,96	883 392 523,30
2012	-3 006 011 965,49	5 095 791 416,72	118 775 386,88	1 325 132 902,87	883 421 935,24

2013	-2 980 849 456,86	5 035 357 482,52	165 722 119,83	1 332 138 087,30	888 092 058,20
2014	-2 454 303 324,13	4 749 963 620,55	215 848 452,54	1 506 905 249,37	1 004 603 499,58
2015	-1 965 869 923,36	4 183 358 794,50	275 716 673,94	1 495 923 327,05	997 282 218,04
2016	-1 387 976 170,28	3 703 486 719,96	338 149 692,21	1 592 196 145,13	1 061 464 096,75
2017	-911 327 549,14	2 852 683 309,59	407 652 122,10	1 409 404 729,53	939 603 153,02
2018	-523 821 475,54	2 523 263 808,88	471 756 538,29	1 482 719 322,98	988 479 548,65
2019	60 100 935,27	595 961 723,14	541 791 295,38	718 712 372,27	479 141 581,51
2020	480 142 255,28	564 673 355,08	576 942 109,55	973 054 631,94	648 703 087,96
2021	894 991 688,12	631 385 417,21	626 090 465,55	1 291 480 542,53	860 987 028,35
….	….				
2045	5 920 015 414,26	0,00	7 076 497 750,08	7 797 907 898,60	5 198 605 265,74
2046	6 095 459 761,81	0,00	7 715 447 985,48	8 286 544 648,37	5 524 363 098,92
2047	6 274 314 670,73	0,00	8 405 458 633,89	8 807 863 982,77	5 871 909 321,85
2048	6 457 682 673,54	0,00	9 150 594 505,91	9 364 966 307,67	6 243 310 871,78
2045	5 920 015 414,26	0,00	7 076 497 750,08	7 797 907 898,60	5 198 605 265,74

Tableau 35 : Détail des montants à réinvestir chaque année avec leur répartition suivant leurs sources (contrats d'assurances, portefeuille obligataire initial, nouveau portefeuille obligataire) et leurs destinations (actions, obligations d'Etat).

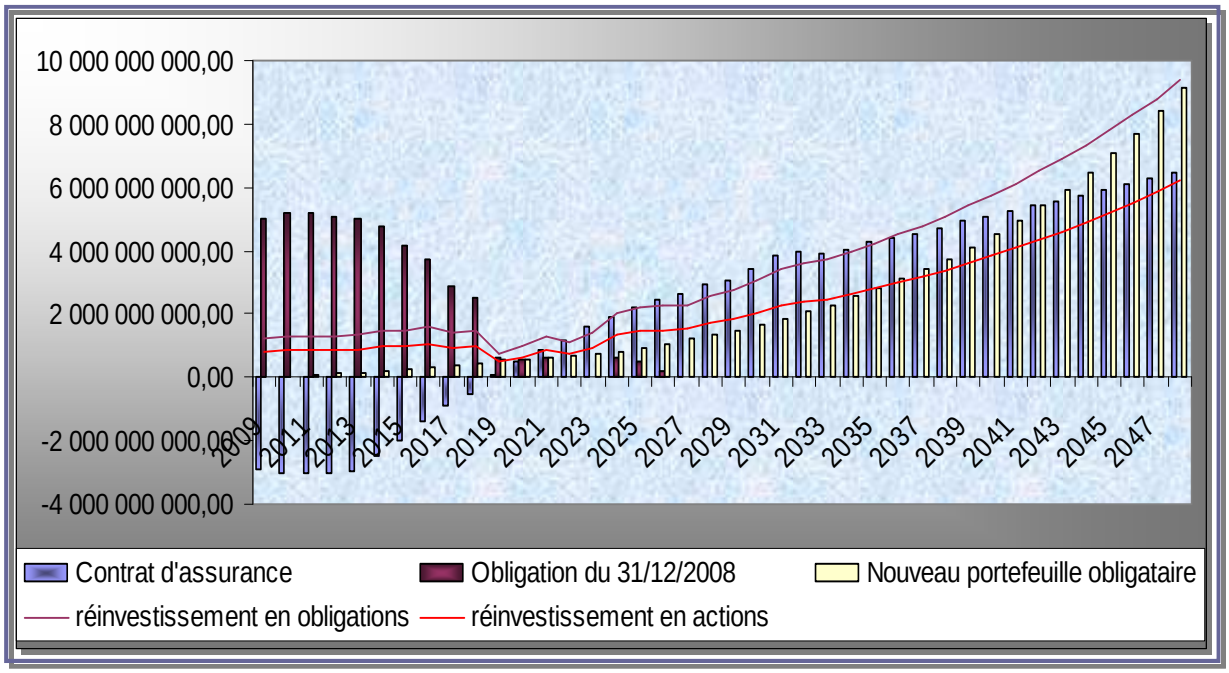


Figure 71 : détail des moments à réinvestir

V.2. L'évolution du bilan :

Au niveau du bilan, le portefeuille d'actions est ajouté par rapport à la situation précédente. Comme, chaque année, une partie du surplus à réinvestir a été consacrée aux actions, le portefeuille obligataire total est moins important, tout en restant supérieur à la somme des provisions techniques et de la marge de solvabilité. Sa valeur comptable au terme est de 77 millions de DH, contre 577 millions de DH en appliquant la première stratégie, i.e.

les réinvestissements uniquement en obligations d'état. Cette différence est compensée par le portefeuille d'actions.

La valeur comptable des actions est relativement faible, car celles-ci sont comptabilisées à leur valeur d'achat. Comme ces chiffres sont peu significatifs (surtout après 40 ans !), il faut également considérer la valeur attendue du portefeuille d'actions. En supposant un rendement annuel de 8,15%, le portefeuille d'actions atteint un niveau de près de 23 milliards de DH au terme de la projection. La suite complète se trouve en annexe.

Echéance	Obligations (valeur bilan)	Provisions techniques & marge de solvabilité	Action (valeur du bilan)	Action (Valeur espérée)
2009	4989343593	4989343593	825435524,6	825435524,6
2010	5208149380	5162171886	868589587,9	890445099,1
2011	5251491818	5232271880	883392523,3	949887927,1
2012	5214566804	5260951177	883421935,2	1028752808
2013	5201079602	5303436844	888092058,2	1107967311
2014	4965812073	4846568333	1004603500	1190397889
2015	4459075468	4429902883	997282218	1275052394
2016	4041636412	3925930118	1061464097	1380743014
….	….			
2043	55562799,06	55528457,06	4607589030	9820839870
2044	59582302,18	59547960,18	4892801002	10580983948
2045	60873657,71	60839315,71	5198605266	11350830879
2046	64854952,06	64820610,06	5524363099	12365290387
2047	70808454,3	70774112,3	5871909322	13289568803
2048	77793114,98	77758772,98	6243310872	14293266738

Tableau 36 : comparaison du portefeuille obligataire total, du portefeuille d'actions (valeur comptable et valeur attendue) et du montant des provisions techniques augmentées de la marge de solvabilité

Toutefois, pour que la comparaison avec la première stratégie soit valable, il faut tenir compte du risque pris en investissant une partie en actions. Par risque, il faut entendre ici la volatilité de la valeur du portefeuille d'actions au terme de la projection. Il n'est pas question ici d'un risque qui mettrait en péril la survie de la société, puisque les investissements en actions on été mesurés afin d'assurer la solvabilité de la compagnie, même si le portefeuille d'actions devait perdre entièrement sa valeur au terme de la projection. Ainsi, quoi qu'il advienne au portefeuille d'actions, les engagements de la société seront respectés.

Afin de prendre en compte la volatilité de la valeur attendue du portefeuille d'actions au terme de la projection, 25.000 simulations ont été réalisées. Les actions sont modélisées comme décrit dans la partie précédente, à l'aide du mouvement brownien géométrique. Les paramètres utilisés sont les suivants :

- μ : 8,15%;
- σ : 13,34%.

Comme indiqué à la partie précédente, le paramètre μ est fixé à 8,15%. Le tableau ci-dessous reprend les différentes values at risk pour la valeur du portefeuille d'actions au terme de la projection, en fonction de leur niveau de confiance. Ainsi, par exemple, il est certain, à 99,95%, que cette valeur dépassera 497.430.899 DH.

Niveau de confiance	Value at risk
99,99%	208.964.388
99,95%	**497.430.899**
99,9%	587.786.821
99,5%	827.548.361
99%	1.051.574.209
95%	2.100.763.615
90%	3.181.305.988

Tableau 37 : values at risk pour la valeur du portefeuille d'actions au terme de la projection, en fonction du niveau de confiance

Le graphe ci-dessous compare les actifs et les passifs en valeur bilan. La valeur attendue du portefeuille d'actions est également présente.

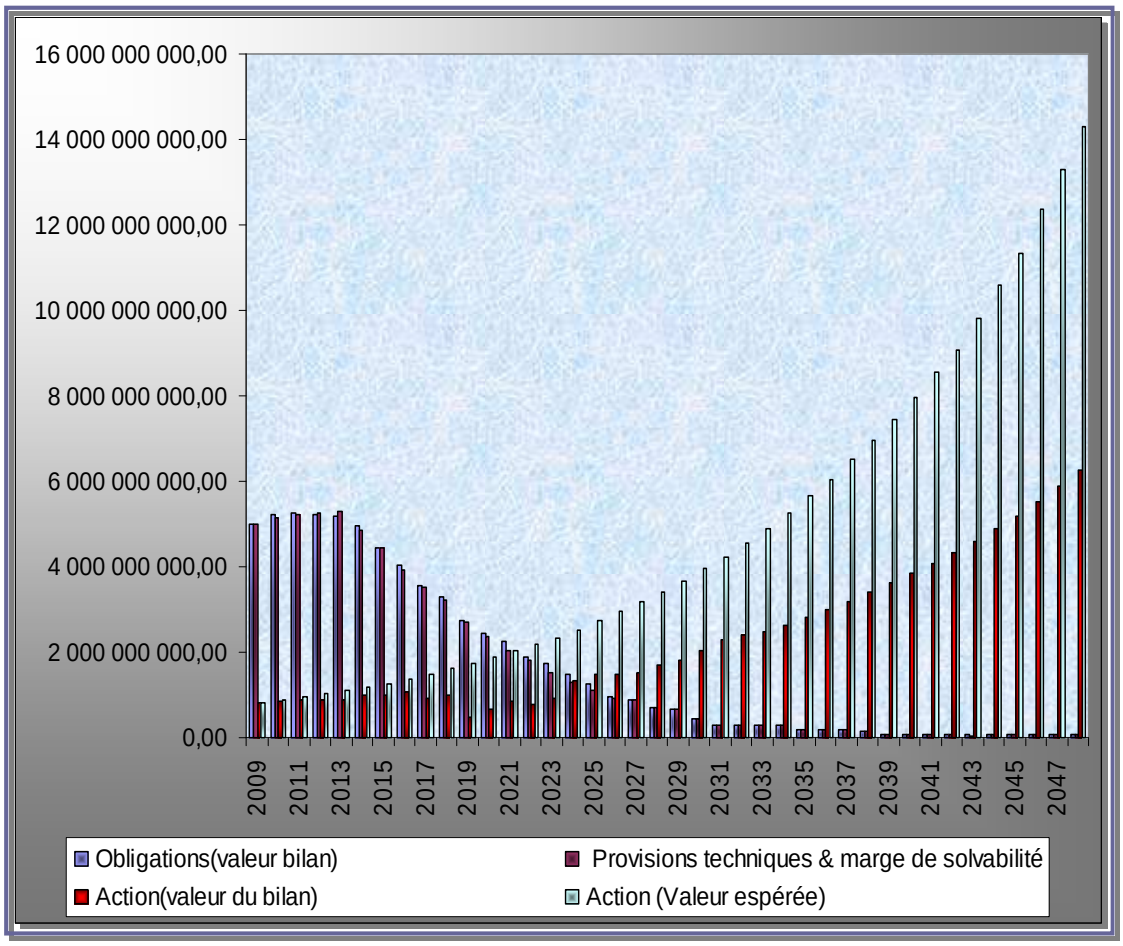


Figure 72 : Comparaison des actifs (obligations et actions) et des passifs (provisions techniques et marge de solvabilité)

Pour conclure, au niveau du bilan, le portefeuille d'actions est ajouté par rapport à la situation précédente. Comme, chaque année, une partie du surplus à réinvestir a été consacrée aux actions, le portefeuille obligataire total est moins important, tout en restant supérieur à la somme des provisions techniques et de la marge de solvabilité. Sa valeur comptable au terme est de 77 millions de DH, contre 577 millions de DH en appliquant la première stratégie, i.e. les réinvestissements uniquement en obligations d'état. Cette différence est compensée par le portefeuille d'actions.

L'objet de ce projet était de s'interroger sur les fondements conceptuels et théoriques de la notion de « juste valeur ». Cette notion ne se comprend qu'à partir de la définition de l'évaluation du contrat. En effet, le modèle de valorisation permet de déterminer la fair value de l'engagement d'une compagnie d'assurance envers ses assurés, indépendamment des bases techniques du contrat. Il prévoit ainsi l'utilisation d'une table de mortalité prospective, plus prudente qu'une table statique réglementaire.

L'utilisation d'une table prospective pour les probabilités de survie donne lieu à des participations bénéficiaires équitables qui, en plus de dépendre de l'âge de l'assuré, sont fonction du temps.

Dans une première étape, nous avons modélisé l'actif qui est composé d'obligations et d'actions, d'une manière stochastique ; ainsi nous avons obtenu les résultats suivants : Pour la courbe des taux ; Après l'analyse des différents résultats, nous avons conclu que le modèle de Nelson et Siegel donne de bonnes estimations et que le modèle de Svenssen présente des problèmes de convergence. Pour améliorer la courbe nous avons pris en compte la prime de risque en fonction de chaque maturité. Nous avons retenu la stratégie de test de Dickey Fuller qui permet de palier les problèmes de non stationnarité et de non homocidacité des résidus.

L'évolution du fonds des obligations se fait en projetant notre portefeuille sur une période de 40 ans à partir de l'année 2009 en utilisant 25 000 scénarios. Notre fonds d'obligation a passé de 2 milliards de dirhams à 10 milliards de dirhams au bout de 40 ans. Le fonds d'action de notre portefeuille a été assimilé à un mouvement brownien géométrique de rendement moyen de 8,1% et de volatilité 13,3%.

Dans une deuxième étape, nous avons modélisé le passif en estimant le taux de décès, le taux de rachat et la participation aux bénéfices ; Il en sort que : Pour le taux de décès, nous avons utilisé le modèle de Lee et Carter qui permet de construire des tables de mortalité prospectives. Néanmoins ce modèle présente quelques inconvénients : il peut entraîner des aberrations pour les longues projections. Pour le taux de rachat, les flux de sortie augmentent progressivement entre les années 2009 et 2012 pour atteindre 5 260 951 177 Dh comme maximum en cette année, puis les valeurs descendent linéairement dans les années qui suivent. On peut alors en tirer que la compagnie aura besoin de plus de liquidité dans les

années qui viennent. Le modèle utilisé pour valoriser le contrat nous a permis de retenir un taux de participation aux bénéfices de l'ordre de 89% et un taux technique de l'ordre de 4,5%.

Dans une troisième étape, nous avons déterminé la valeur de marché de l'actif et des provisions technique et les exigences en capital sous solvabilité II qui permettent d'analyser le profil des cash flows futurs en confrontant deux stratégies de réinvestissements : Il s'agie du réinvestissement en obligations d'Etat uniquement et du réinvestissement combiné entre les actions et les obligations. En utilisant le modèle de Markowiz pour déterminer le portefeuille optimum, l'allocation optimale donnée par ce modèle est de 38,38 % pour les actions et de 61,62 % pour les obligations. La valeur comptable au terme est de 77 millions de DH, contre 577 millions de DH en appliquant les réinvestissements uniquement en obligations d'état. Cette différence est compensée par le portefeuille d'actions.

Les résultats de ce travail appellent au moins à trois applications importantes. Premièrement, les formules de valorisation peuvent être appliquées afin de déterminer la fair value des engagements d'assurance.

Deuxièmement, les résultats peuvent être utilisés au cours de la conception de nouveaux produits. Si un assureur envisage la vente d'une nouvelle assurance, il doit pouvoir estimer l'impact de sa décision sur la solvabilité et il doit être capable d'évaluer les risques qu'elle implique.

Finalement, le modèle peut servir pour déterminer le taux de participation aux bénéfices qui ne favorise ni assurés ni actionnaires.

Une autre extension possible serait la modélisation de polices comprenant des engagements en cas de décès, comme une assurance mixte. Le cas le plus général serait la modélisation d'une compagnie d'assurance ayant un portefeuille composé de différents types de polices.

ANNEXES

Annexe I. La discrétisation d'Euler

Annexe II. Décorrelation des deux browniens

Annexe III. L'approche de Briys & de Varenne (1994, 1997a)

Annexe IV. Contrats équitables

Annexe V. Méthode d'évaluation de Fortet

Annexe VI. Contrats équitables

Annexe V. Méthode d'évaluation de Fortet

Annexe VI. Cash flows issus du portefeuille de contrats d'assurances

Annexe VII. Détail des montants à réinvestir (obligations d'Etat)

Annexe VIII. Comparaison du portefeuille obligataire et du montant requis du point de vue comptable

Annexe IX. Détail des montants à réinvestir (obligations d'état et actions)

Annexe X. Comparaison des actifs et des passifs (obligations d'état et actions)

Annexe XI. Les différents algorithmes programmés sur MATLAB

Annexe I. La discrétisation d'Euler :

On considéré un processus stochastique X dont la dynamique est donnée par l'équation de diffusion suivante :

$$\boldsymbol{dX = \mu(X).dt + \sigma(X).dZ}$$

La discrétisation d'Euler n'exige aucune condition de régularité pour les fonctions μ et σ. Si on suppose que la période de référence est divisée en n sous-périodes, l'approximation d'Euler appliquée au processus X donne :

$$\boxed{\boldsymbol{X\left(t+\frac{1}{n}\right) = X(t) + \frac{1}{n}.\mu(X(t)) + \frac{1}{\sqrt{n}}.\sigma(X(t))\varepsilon_{\lfloor t \rfloor}}}$$

Où la suite des $\varepsilon_{\lfloor t \rfloor}$ est une suite de variables aléatoires normales centrées et réduites indépendantes.$\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\boldsymbol{\varepsilon_{\lfloor t \rfloor}} \sim \boldsymbol{N}\left(\mathbf{0}; \frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)$

Annexe II. Décorrelation des deux browniens :

Décorrelation des deux browniens

Soit Z_2et Z_1 deux mouvements browniens standard corrélés avec $dZ_1.dZ_2 = \rho.dt$.

On préfère travailler dans une base orthogonale et ainsi on cherche un brownien $dZ_1^{\perp}$ tel que $dZ_1.dZ_1^{\perp} = 0$.

On cherche à exprimer $dZ_1^{\perp}$ en fonction de dZ_1 et dZ_2 : $dZ_1^{\perp} = \alpha.dZ_1 + \beta.dZ_2$.

A partir de :

- $dZ_1^{\perp} = \alpha.dZ_1 + \beta.dZ_2$
- $dZ_1^{\perp}.dZ_1^{\perp} = dt$
- $dZ_1.dZ_1^{\perp} = 0$

On obtient l'équation suivante :

$$\boxed{\boldsymbol{dZ_2 = \rho.dZ_1 + \sqrt{1-\rho^2}.dZ_1^{\perp}}}$$

Annexe III. L'approche de Briys & de Varenne (1994, 1997a) :

Ces auteurs ne tiennent pas compte d'une faillite éventuelle qui aurait lieu avant la maturité des contrats. Le contrat est alors égal à une combinaison d'options européennes classiques; il est donc possible de travailler à l'aide de formules fermées.

Dans cette annexe, nous présentons deux cas particuliers pour la valorisation du contrat d'assurance. D'un côté, nous regardons ce que donnent les formules de valorisation

dans l'approche de Briys & de Varenne (1994, 1997a). Ils ne tiennent pas compte d'une faillite éventuelle avant la maturité des contrats. D'un autre côté, nous présentons les résultats de Grosen & Jørgensen (2002). Ces auteurs ont obtenu des formules fermées dans le cadre d'un taux d'intérêt sans risque constant.

III.1 Valorisation des engagements de la compagnie sans défaut précoce :

Le premier cas particulier que nous présentons est celui qui a été étudié par Briys & de Varenne (1994, 1997a). Ils considèrent la possibilité de défaut uniquement à maturité des contrats. Dans Briys & de Varenne (1994), le taux d'intérêt sans risque suit un processus de Heath, Jarrow & Morton (1992) pour une courbe des taux forward initiale donnée. Dans Briys & de Varenne (1997a), les auteurs considèrent par contre un processus d'Ornstein-Uhlenbeck, ce qui équivaut au cadre de ce travail.

Contrairement à l'approche choisie dans cette étude qui consiste à valoriser l'engagement de la compagnie à l'égard des assurés, Briys & de Varenne (1994) étudient le point de vue des actionnaires.

Quand le contrat vient à maturité à l'instant T, les payoffs des assurés et des actionnaires sont donnés par les formules (1.10) et (1.12). Ces flux sont simplement fonction de la valeur finale des actifs : $\boldsymbol{\Theta_L(T) = \delta[\alpha A_T - L_{T^*}]^+ + L_{T^*} - [L_{T^*} - A_T]^+}$,

Et

$$\boldsymbol{\Theta_E(T) = L_{T^*}[A_T - L_{T^*}]^+ - \delta\alpha[A_T - \frac{L_{T^*}}{\alpha}]^+}$$

Ces formules montrent que les paiements $\Theta_L(T)$ et $\Theta_E(T)$sont des payoffs finaux d'options d'achat européennes venant à maturité en T. Les valeurs marché de ces flux peuvent donc être déterminées dans le cadre classique de la tarification des options.

L'engagement de la compagnie envers les assurés peut ainsi être valorisé en t ($0 \leq t \leq T$) par :

$$\boldsymbol{V_L(t) = L_{T^*}\, P(t,T) - P_E(A_t, L_{T^*}) + \delta\alpha C_E(A_t, \frac{L_{T^*}}{\alpha})}, \text{ (I.1)}$$

Où $P(t,T)$ désigne le prix en t d'un zéro-coupon venant à maturité en T, $P_E(A_t, L_{T^*})$ représente le prix de l'option de défaut européenne de prix d'exercice L_{T^*}et $C_E(A_t, \frac{L_{T^*}}{\alpha})$ est un call européen de maturité T et de prix d'exercice $\frac{L_{T^*}}{\alpha}$.

Si $\mathcal{N}(.)$ représente la fonction de répartition de la loi normale réduite, les valeurs des options sont données par :

$$\mathbf{P_E(A_t, L_{T^*}) = -A_t \mathcal{N}(-d_1) + P(t,T) L_{T^*} \mathcal{N}(-d_2)} \text{ (I.2)}$$

$$\mathbf{C_E(A_t, \frac{L_{T^*}}{\alpha}) = A_t \mathcal{N}(-d_3) + P(t,T) \frac{L_{T^*}}{\alpha} \mathcal{N}(d_4)} \text{ (I.3)}$$

Avec

$$d_1 = \frac{\ln\left[\frac{A_t}{P(t,T)L_{T^*}}\right] + \frac{1}{2}\bar{\sigma}^2(t,T)(T-t)}{\bar{\sigma}(t,T)\sqrt{T-t}},$$

$$d_2 = d_1 - \bar{\sigma}(t,T)\sqrt{T-t},$$

$$d_3 = \frac{\ln\left[\frac{\alpha A_t}{P(t,T)L_{T^*}}\right] + \frac{1}{2}\bar{\sigma}^2(t,T)(T-t)}{\bar{\sigma}(t,T)\sqrt{T-t}},$$

$$d_4 = d_3 - \bar{\sigma}(t,T)\sqrt{T-t},$$

$$\bar{\sigma}^2(t,T) = \frac{1}{T-t}\int_t^T \left[\left(\sigma\rho + \sigma_P(u,T)\right)^2 + (1-\rho^2)\sigma^2\right] du.$$

A l'aide de (I.2) et (I.3), la relation (I.1) s'écrit :

$$\boxed{\boldsymbol{V_L(t) = A_t\left(\mathcal{N}(-d_1) + \delta\alpha\mathcal{N}(d_3)\right) + P(t,T)L_{T^*}\left(\mathcal{N}(d_2) - \delta\mathcal{N}(d_4)\right)}}. \text{ (I.4)}$$

En ce qui concerne les actionnaires, la valeur de leur flux en *t* est donnée par :

$$V_E(t) = C_E(A_t, L_{T^*}) - \delta\alpha\, C_E(A_t, \frac{L_{T^*}}{\alpha}), \text{ (I.5)}$$

où $C_E(A_t, L_{T^*})$ représente un call européen de maturité *T* et de prix d'exercice L_{T^*} :

$$C_E(A_t, L_{T^*}) = A_t\mathcal{N}(d_1) - P(t,T)L_{T^*}\mathcal{N}(d_2). \text{ (I.6)}$$

A l'aide de (I.3) et (I.6), la relation (I.5) s'écrit :

$$\boxed{\boldsymbol{V_E(t) = A_t\left(\mathcal{N}(d_1) - \delta\alpha\,\mathcal{N}(d_3)\right) - P(t,T)L_{T^*}\left(\mathcal{N}(d_2) - \delta\,\mathcal{N}(d_4)\right)}}. \text{ (I.7)}$$

Contrats équitables

Du point de vue des actionnaires, la tarification de la police d'assurance doit se faire de sorte à ce qu'ils soient compensés de manière équitable pour détenir l'action de la compagnie d'assurance. Ceci se traduit par le fait que le taux garanti et la participation aux bénéfices doivent être tels que la mise de fonds initiale (prix d'émission initial) par les actionnaires est égale à la valeur présente de leur droit sur les flux futurs.

Cette valeur actuelle est connue : elle est donnée par l'expression (I.7).

La condition d'équilibre sur r^*et δ est donnée par :

$$\boxed{\boldsymbol{E_0 = (1-\alpha)A_0 = V_E(0)}}$$

En effet, les actionnaires ne vont jamais investir dans la compagnie d'assurance vie si la valeur de leur investissement est inférieure à leur dépense initiale.

L'équation (I.8) donne ainsi soit le taux garanti r^*, soit le niveau de participation δ comme variable d'équilibre. L'expression analytique pour déterminer δ s'écrit dans ce cas particulier :

$$\delta = \frac{C_E\left(A_t, L_{T^*}\right) - (1-\alpha)A_0}{\alpha C_E\left(A_t, \frac{L_{T^*}}{\alpha}\right)}. \quad \text{(I.9)}$$

En remplaçant les options d'achat par leurs formules respectives et L_{T^*} par $\alpha A_0 e^{r^* T}$, la relation (I.9) se réécrit

$$\delta = \frac{\alpha\left(1 - P(0,T)e^{r^* T}\mathcal{N}(d_2)\right) + \mathcal{N}(d_1) - 1}{\alpha\left(\mathcal{N}(d_3) - P(0,T)e^{r^* T}\mathcal{N}(d_4)\right)}, \quad \text{(I.10)}$$

Où d_1, d_2, d_3 et d_4 sont définis comme ci-dessus.

En appliquant la parité call-put, le niveau de participation δ peut être réécrit en fonction du put de défaut :

$$\boxed{\boldsymbol{\delta = \frac{\alpha A_0 - L_{T^*} P(0,T) + P_E\left(A_0, L_{T^*}\right)}{\alpha C_E\left(A_0, \frac{L_{T^*}}{\alpha}\right)}}}. \quad \text{(I.11)}$$

A partir des équations (I.4) et (I.7), Briys & de Varenne (1997a) montrent que $\bar{\sigma}$, la volatilité du ratio $\frac{A_t}{P(t,T)}$ est le paramètre important pour la tarification des engagements envers les actionnaires et les assurés.

La section I.2 rappelle les résultats de Grosen & Jørgensen (2002). Ces auteurs tiennent compte d'une faillite probable avant l'instant T et obtiennent des formules fermées dans le cadre d'un taux d'intérêt sans risque constant.

III.2 Taux sans risque constant :

Dans un cadre semblable à celui présenté dans ce travail, mais sous l'hypothèse d'un taux d'intérêt sans risque constant, Grosen & Jørgensen (2002) ont obtenu des formules fermées pour valoriser les flux des assurés et des actionnaires.

Sous l'hypothèse que le taux d'intérêt sans risque r est constant et positif, la dynamique des actifs (2.4) suit un mouvement brownien géométrique qui s'écrit sous la mesure de probabilité neutre-risque :

$$dA_t = r\, A_t\, dt + \sigma\, A_t\, dZ^Q(t). \quad \text{(I.12)}$$

Si nous désignons par $V_i(A_t, t)$, i = L ou E, la valeur en t des engagements de la compagnie envers les assurés et les actionnaires, nous pouvons réécrire la relation (3.1) comme suit :

$$V_i(A_t, t) = e^{-r(T-t)}\mathbb{E}_t^{Q}\left[\Theta_i(A_t)1_{\{\tau \geq T\}}\right] + \mathbb{E}_t^{Q}\left[e^{-r(\tau-t)}\Theta_i(\tau)\right]. \text{ (I.13)}$$

Considérant le problème comme variante des problèmes standard des options barrière knockout, Grosen & Jørgensen (2002) proposent les deux théorèmes suivants qui donnent des formules de valorisation fermées.

Théorème I.1 (La valeur du flux des assurés) *Sous réserve que la compagnie n'ait pas cessé son activité prématurément, le paiement à maturité aux assurés est donné par l'équation (1.10) :*

$$\Theta_L(T) = \delta[\alpha A_T - L_{T^*}]^+ + L_{T^*} - [L_{T^*} - A_T]^+.$$

Ce paiement est composé de trois parties : un élément d'option de participation bénéficiaire, un paiement fixé et un élément d'option put en position courte.

Dans le cas d'une atteinte prématurée de la barrière, une indemnisation est spécifiée par $\Theta_L(.)$ dans l'équation (1.11) :

$$\Theta_L(\tau) = \min[\lambda, 1]\, L_{T^*}.$$

$V_L(A_t, t)$ est la somme de la valeur en t des quatre éléments distincts donnés ci-dessous dans (i)-(iv), où apparaît la notation

$$d_\Upsilon^{\pm}(x,t) = \frac{\ln(x) + \left(r - \Upsilon \pm \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}},$$

et où $\mathcal{N}(.)$ représente la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.

(i) La valeur en t de l'élément d'option de participation aux bénéfices :

$$e^{-r(T-t)}\mathbb{E}_t^{Q}\left[\delta[\alpha A_T - L_{T^*}]^+ 1_{\{\tau \geq T\}}\right] =$$

$$\delta\alpha\left\{A_t\mathcal{N}\left(d_0^+\left(\frac{A_t}{X}, t\right)\right) - \frac{L_{T^*}}{\alpha}e^{-r(T-t)}\mathcal{N}\left(d_0^-\left(\frac{A_t}{X}, t\right)\right) - \right.$$

$$\left.\left(\frac{A_t}{B_t}\right)^{1-\frac{2(r-r^*)}{\sigma^2}}\frac{{B_t}^2}{A_t}\,\mathcal{N}\left(d_0^+\left(\frac{{B_t}^2/A_t}{X}, t\right)\right) - \frac{L_{T^*}}{\alpha}e^{-r(T-t)}\mathcal{N}\left(d_0^-\left(\frac{{B_t}^2/A_t}{X}, t\right)\right)\right\}$$

Avec $X = \max\left[\lambda, \frac{1}{\alpha}\right]L_{T^*}$.

(ii) La valeur en t de l'élément conditionnel de paiement fixe :

$$e^{-r(T-t)}\mathbb{E}_t^{\mathcal{Q}}\left[L_{T^*}1_{\{\tau\geq T\}}\right] =$$

$$L_{T^*}e^{-r(T-t)}\,\mathcal{N}\left(\,d_{r^*}^{-}\left(\frac{A_t/B_t}{X},t\right)\right)-\left(\frac{A_t}{B_t}\right)^{1-\frac{2(r-r^*)}{\sigma^2}}\mathcal{N}\left(\,d_{r^*}^{-}\left(\frac{A_t/B_t}{X},t\right)\right).$$

(iii) La valeur en t de l'élément de put en position courte :

$$-1_{\{\tau<T\}}\,e^{-r(T-t)}\mathbb{E}_t^{\mathcal{Q}}\left[[L_{T^*}-A_T]^+1_{\{\tau\geq T\}}\right]=-1_{\{\tau<T\}}\Bigg\{L_{T^*}\,e^{-r(T-t)}\left[\mathcal{N}\left(-\,d_0^{-}\left(\frac{A_t}{L_{T^*}},t\right)\right)-\right.$$

$$\left.\mathcal{N}\left(-\,d_{r^*}^{-}\left(\frac{A_t}{L_{T^*}},t\right)\right)\right]-A_t\left[\mathcal{N}\left(-\,d_0^{+}\left(\frac{A_t}{L_{T^*}},t\right)\right)-\mathcal{N}\left(-\,d_{r^*}^{+}\left(\frac{A_t}{L_{T^*}},t\right)\right)\right]-$$

$$\left(\frac{A_t}{B_t}\right)^{1-\frac{2(r-r^*)}{\sigma^2}}\Bigg\{L_{T^*}\,e^{-r(T-t)}\left[\mathcal{N}\left(-\,d_0^{-}\left(\frac{{B_t}^2}{A_tL_{T^*}},t\right)\right)-\mathcal{N}\left(-\,d_{r^*}^{-}\left(\frac{B_t}{A_t},t\right)\right)\right]-$$

$$\frac{{B_t}^2}{A_t}\left[\mathcal{N}\left(-\,d_0^{+}\left(\frac{{B_t}^2}{A_tL_{T^*}},t\right)\right)-\mathcal{N}\left(-\,d_{r^*}^{+}\left(\frac{B_t}{A_t},t\right)\right)\right]\Bigg\}\Bigg\}$$

(iv) La valeur en t du remboursement en cas de défaut :

$$\mathbb{E}_t^{\mathcal{Q}}\left[e^{-r(\tau-t)}\min[\lambda,1]\,L_0e^{r^*\tau}\right]=$$

$$\frac{\min[\lambda,1]}{\lambda}\,A_t[\mathcal{N}\left(-\,d_{r^*}^{-}\left(\frac{A_t}{B_t},t\right)\right)+\left(\frac{A_t}{B_t}\right)^{-1-\frac{2(r-r^*)}{\sigma^2}}\mathcal{N}\left(d_{r^*}^{+}\left(\frac{B_t}{A_t},t\right)\right).$$

Théorème I.2 (La valeur du flux des actionnaires) *Sous réserve que la compagnie n'ait pas cessé son activité prématurément, le paiement à maturité aux actionnaires est donné par l'équation (1.12) :*

$$\boldsymbol{\Theta_E(T)=[A_T-L_{T^*}]^+-\delta\alpha\left[A_T-\frac{L_{T^*}}{\alpha}\right]^+}.$$

Ce paiement est la différence de deux payoffs d'options call : une option call de droit résiduel et une autre option call qui correspond à l'option de participation aux bénéfices des assurés.

Dans le cas d'une faillite prématurée, il peut y avoir un remboursement aux actionnaires comme spécifié par l'équation (1.13) :

$\Theta_E(\tau)=\max[\lambda-1,0]\,L_{\tau^*}$.

Avec les notations du théorème I.1, $V_E(A_t,t)$ est la somme de la valeur en t de trois éléments distincts, listés dans la suite.

(i) La valeur en t de l'élément d'option d'achat en position longue :

$$e^{-r(T-t)}\mathbb{E}_t^{\mathcal{Q}}\left[[A_t - L_{T^*}]^+ 1_{\{\tau \geq T\}}\right] = A_t\mathcal{N}\left(d_0^+\left(\frac{A_t}{Y}, t\right)\right) - L_{T^*}e^{-r(T-t)}\mathcal{N}\left(d_0^-\left(\frac{A_t}{Y}, t\right)\right) -$$

$$\left(\frac{A_t}{B_t}\right)^{1-\frac{2(r-r^*)}{\sigma^2}}\left[\frac{{B_t}^2}{A_t}\mathcal{N}\left(d_0^+\left(\frac{{B_t}^2/A_t}{Y}, t\right)\right) - L_{T^*}e^{-r(T-t)}\mathcal{N}\left(d_0^-\left(\frac{{B_t}^2/A_t}{Y}, t\right)\right)\right.$$

Avec $Y = \max[B_t, L_{T^*}]$.

(ii) La valeur en t de l'option de participation aux bénéfices courte (voir la partie (i) du théorème I.1) :

$$e^{-r(T-t)}\mathbb{E}_t^{\mathcal{Q}}\left[\delta[\alpha A_T - L_{T^*}]^+ 1_{\{\tau \geq T\}}\right] =$$

$$\delta\alpha\left\{A_t\mathcal{N}\left(d_0^+\left(\frac{A_t}{X}, t\right)\right) - \frac{L_{T^*}}{\alpha}e^{-r(T-t)}\mathcal{N}\left(d_0^-\left(\frac{A_t}{X}, t\right)\right) -\right.$$

$$\left.\left(\frac{A_t}{B_t}\right)^{1-\frac{2(r-r^*)}{\sigma^2}}\frac{{B_t}^2}{A_t}\mathcal{N}\left(d_0^+\left(\frac{{B_t}^2/A_t}{X}, t\right)\right) - \frac{L_{T^*}}{\alpha}e^{-r(T-t)}\mathcal{N}\left(d_0^-\left(\frac{{B_t}^2/A_t}{X}, t\right)\right)\right\}$$

Avec $X = \max[\lambda, \frac{1}{\alpha}]L_{T^*}$.

(iii) La valeur en t du dédommagement des actionnaires en cas de défaut :

$$\mathbb{E}_t^{\mathcal{Q}}\left[e^{-r(\tau-t)}\max[\lambda - 1, 0]\, L_0 e^{r^*\tau}\right]$$

$$= \frac{\max[\lambda-1,0]}{\lambda}A_t\left[\mathcal{N}\left(-d_{r^*}^+\left(\frac{A_t}{B_t}, t\right)\right) + \left(\frac{A_t}{B_t}\right)^{-1-\frac{2(r-r^*)}{\sigma^2}}\mathcal{N}\left(d_{r^*}^+\left(\frac{B_t}{A_t}, t\right)\right)\right.$$

Les formules pour les valeurs des droits des assurés et des actionnaires présentées dans les deux théorèmes ci-dessus sont des formules exactes qui peuvent être implémentées une fois que les paramètres ont été fixés.

Annexe IV. **Contrats équitables :**

Tout choix de paramètres ne va pas représenter des contrats justes. Ainsi, le taux d'intérêt garanti, r^*, et le coefficient de participation, δ, ne peuvent pas prendre tous les deux

des valeurs arbitrairement hausses (à l'avantage des assurés) si tous les autres paramètres ont été fixés.

La question importante qui se pose alors est de savoir quelles sont les combinaisons de paramètres qui représentent des contrats initialement justes.

Pour y répondre, il faut résoudre l'équation suivante :

$$\boxed{\mathbf{L_0 \equiv \alpha A_0 = V_L(A_0, 0, \alpha, \delta, \lambda, \sigma, T, r, r^*)}}, \text{ (I.14)}$$

qui formalise l'exigence qu'à l'équilibre, il faut avoir une équivalence entre la contribution initiale des assurés aux actifs totaux et la valeur marché initiale de leur droit.

Puisque $A_0 = V_L(A_0, 0) + V_E(A_0, 0)$, (I.15) une approche équivalente serait de prendre le point de vue des actionnaires et de chercher les solutions de

$$E_0 \equiv (1 - \alpha)A_0 = V_E(A_0, 0, \alpha, \delta, \lambda, \sigma, T, r, r^*), \text{ (I.16)}$$

Des routines de recherche numériques similaires à celles utilisées pour calculer les volatilités implicites à partir de la formule de Black & Scholes (1973), permettent d'établir des solutions à l'aide de (I.14) ou de (I.16). Grosen & Jørgensen (2002) illustrent certaines relations typiques entre les paramètres de contrats initialement équitables.

Annexe V. **Méthode d'évaluation de Fortet :**

Cette annexe présente les approches de Bernard (2005) et de Bernard, Le Courtois & Quittart-Pinon (2005) qui ont proposé une alternative aux simulations de Monte Carlo. Leur méthode se base sur l'approximation de Fortet (1943) et a été proposée par Longstaff & Schwartz (1995) ainsi que par Collin-Dufresne & Goldstein (2001).

Longstaff & Schwartz (1995) se sont servis de l'approximation de Fortet (1943) pour approcher la loi de τ dans un problème analogue à celui étudié dans le cadre de ce travail : le problème de l'évaluation structurelle des obligations à taux fixe ou flottant, en présence des risques de taux et de défaut.

Toutefois, l'approximation de Longstaff & Schwartz (1995) n'est pas suffisante et mathématiquement non valide. Cette méthode n'est bien adaptée que pour des processus de Markov unidimensionnels. Collin-Dufresne & Goldstein (2001) ont apporté une correction à l'approximation précédente qui valide le modèle pour des problèmes du même type que ceux étudiés ici.

Bernard (2005) et Bernard, Le Courtois & Quittart-Pinon (2005) ont appelé méthode de Fortet étendue cette extension qui tient effectivement compte du caractère stochastique du taux d'intérêt. Nous reprenons cette appellation et décrivons son fonctionnement par la suite.

V.1 **Principe de l'approximation de *Fortet étendue* :**

Nous présentons dans cette section la méthode d'approximation utilisée par Bernard (2005) et Bernard, Le Courtois & Quittart-Pinon (2005) pour valoriser les contrats d'assurance vie étudiés. La méthode de Fortet étendue permet d'approcher la loi de τ sous la probabilité forward-neutre.

Bernard, Le Courtois & Quittart-Pinon (2005) abordent le problème à l'aide de densités tandis que Bernard (2005) travaille plutôt avec la notion de probabilité. Cette deuxième approche est préférable puisqu'elle ne suppose pas l'existence d'une densité. Nous reprenons ici les résultats de Bernard (2005).

L'équation de Fortet décrit le principe suivant : la seule manière pour un processus continu d'avoir une valeur initiale au-dessus d'une limite et de terminer en une valeur inférieure à celle-ci consiste à passer par la limite à un instant intermédiaire. Nous allons expliciter par la suite comment se ramener à l'équation de Fortet dans le cadre présenté ici.

Pour commencer, on se ramène au cas d'une barrière constante en notant que τ est également le premier temps de passage du processus lognormal $\boxed{\boldsymbol{X_t = A_t e^{r^* t}}}$ par la barrière constante $\lambda_, L_0$. Si nous introduisons le processus $\boxed{\boldsymbol{l_t = ln\,(X_t) = ln\,(A_t) - r^* t}}$, la barrière de défaut devient $h = \ln(\lambda\, L_0)$.

Nous supposons qu'elle est inférieure l_0, la valeur initiale du processus étudié.

Nous nous intéressons donc au temps de premier passage de l_t par la barrière constante h, ou plus explicitement $\tau = \inf\{t \in [0,T] | l_t \leq h\}$

Mathématiquement, le principe de Fortet se traduit par l'équation suivante :

$$\boxed{\boldsymbol{Q_T(l_t \in dl, r_t \in dr | l_0, r_0) = \int_0^t \int_{-\infty}^{+\infty} Q_T\,(l_t \in dl, r_t \in dr | l_s = h, r_s = r')\, Q_T(r_\tau \in dr', \tau \in ds)}}$$

.

Si nous intégrons l'équation précédente par rapport à l entre $-\infty$ et h, il vient :

$$\boxed{\boldsymbol{Q_T(l_t \leq h, r_t \in dr | l_0, r_0) = \int_0^t \int_{-\infty}^{+\infty} Q_T\,(l_t \in dl, r_t \in dr | l_s = h, r_s = r')\, Q_T(r_\tau \in dr', \tau \in ds)}}. \quad (V.1)$$

Pour simplifier, introduisons les notations suivantes :

$\boldsymbol{\Phi(r_t, t)dr = Q_T(l_t \leq h, r_t \in dr | l_0, r_0)}$,

$\boldsymbol{\psi(r_t, t, r', s)dr = Q_T(l_t \in dl, r_t \in dr | l_s = h, r_s = r')}$.

L'équation (V.1) peut alors se réécrire de la manière suivante :

$$\boldsymbol{\Phi(r_t, t)dr = \int_0^t \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(r_t, t, r', s) Q_T(r_\tau \in dr', \tau \in ds)}. \quad (V.2)$$

Nous cherchons à connaître la loi de τ . Pour ceci, le temps et le taux d'intérêt sont discrétisés. L'intervalle [0; T] est subdivisé en n_T sous-périodes de longueur $\delta_t = \frac{T}{n_T}$. Le taux d'intérêt est subdivisé entre r_{min} et r_{max}[20] en n_r intervalles de même taille $\delta_r = \frac{r_{max} - r_{min}}{n_r}$. Enfin, nous notons respectivement $t_j = j\delta_t$ et $r_i = r_{min} + i\delta_r$ les valeurs discrétisées du temps et du taux d'intérêt.

Nous donnons une approximation récursive de la loi de τ comme une fonction constante par morceaux sur $[t_{j-1} ; t_j]$ quand le taux d'intérêt est compris entre r_{i-1} et r_i.

Posons $q(\mathbf{i}, \mathbf{j}) = \boldsymbol{Q}_{\mathbf{T}}(\mathbf{r}_{\boldsymbol{\tau}} \in [\mathbf{r}_{\mathbf{i-1}}, \mathbf{r}_{\mathbf{i}}], \boldsymbol{\tau} \in [\mathbf{t}_{\mathbf{j-1}}, \mathbf{t}_{\mathbf{j}}])$.

En approchant la loi exacte de τ par les valeurs des différentes probabilités

$q(i, j)$ ci-dessus, l'écriture intégrale de la formule (V.2) devient une somme et se présente comme suit :

$$\boldsymbol{\Phi}(\mathbf{r}_i, \mathbf{t}_j) = \sum_{v=1}^{j} \sum_{u=1}^{n_r} \mathbf{q}(\mathbf{u}, \mathbf{v})\, \boldsymbol{\psi}(\mathbf{r}_i, \mathbf{t}_j, \mathbf{r}_u, \mathbf{t}_v).$$

A partir de cette dernière relation, on obtient alors un algorithme récursif pour déterminer les valeurs de $q(i, j)$. Ainsi pour j = 1, la formule ci-dessus s'écrit :

$$\boxed{\boldsymbol{\Phi}(\mathbf{r}_i, \mathbf{t}_1) = \sum_{u=1}^{n_r} \mathbf{q}(\mathbf{u}, \mathbf{v})\, \boldsymbol{\psi}(\mathbf{r}_i, \mathbf{t}_1, \mathbf{r}_u, \mathbf{t}_1)}.$$

Cette équation permet alors d'obtenir une valeur pour q(i, 1). En effet,

$$\psi(r_i, t_1, r_u, t_1) = 1_{\{r_i = r_u\}},$$

et donc : $$\boxed{\mathbf{q}(\mathbf{i}, \mathbf{1}) = \boldsymbol{\Phi}(\mathbf{r}_i, \mathbf{t}_1)}. \quad (V.3)$$

A partir des quantités q(i; 1), les valeurs pour q(i; j) (j ¸ 2) s'obtiennent par récurrence en utilisant la relation suivante :

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Phi}(\mathbf{r}_i, \mathbf{t}_j) &= \sum_{v=1}^{j} \sum_{u=1}^{n_r} \mathbf{q}(\mathbf{u}, \mathbf{v})\, \boldsymbol{\psi}(\mathbf{r}_i, \mathbf{t}_j, \mathbf{r}_u, \mathbf{t}_v) \\ &= \sum_{u=1}^{n_r} \mathbf{q}(\mathbf{u}, \mathbf{j}) \boldsymbol{\psi}(\mathbf{r}_i, \mathbf{t}_j, \mathbf{r}_u, \mathbf{t}_j) + \sum_{v=1}^{j-1} \sum_{u=1}^{n_r} \mathbf{q}(\mathbf{u}, \mathbf{v})\, \boldsymbol{\psi}(\mathbf{r}_i, \mathbf{t}_j, \mathbf{r}_u, \mathbf{t}_v)\end{aligned}$$

[20] Il faut choisir les deux valeurs extrêmes de telle sorte que la probabilité que le taux d'intérêt se trouve en dehors de cet intervalle, soit négligeable. Un processus d'Ornstein-Uhlenbeck prend en effet ses valeurs dans IR, mais les valeurs négatives ou très grandes de r_t sont très improbables.
Si le taux initial est compris autour de la moyenne à long terme plus ou moins une fois la volatilité, Collin-Dufresne & Goldstein (2001) remarquent qu'il suffit de prendre les valeurs minimale et maximale du taux d'intérêt de manière à considérer la moyenne à long terme plus ou moins trois fois la volatilité.

Grâce à la relation $\psi(r_i, t_1, r_u, t_1) = 1_{\{r_i, = r_u\}}$, la formule précédente permet de dériver une expression pour q(i, j) :

$$\mathbf{q(i,j) = \Phi(r_i, t_j) - \sum_{v=1}^{j-1} \sum_{u=1}^{n_r} q(u,v)\, \psi(r_i, t_j, r_u, t_v)}. \text{ (V.4)}$$

Pour déterminer les q(i; j), il ne reste plus qu'à connaître l'expression des termes $\Phi(r_i, t_j)$ et $\psi(r_i, t_j, r_u, t_v)$. Rappelons que le couple des processus d'actifs et de taux est un processus de Markov gaussien. Nous appliquons alors la règle de Bayès du produit des densités conditionnelles : si nous notons t_{l_t} la densité du couple (l_t, r_t) sous la probabilité forward-neutre, nous avons :

$$f_{l_t, r_t}(l, r) = f_{r_t}(r) + f_{l_t | r_t}(l).$$

Notons $\mathfrak{I}_0$ et $\mathfrak{I}_s$ les tribus respectives de l'information disponible aux instant 0 et s. D'après la propriété de Markov de (l_t, r_t), le conditionnement par rapport à $\mathfrak{I}_s$ se résume à la connaissance de (l_s, r_s). Nous en déduisons les expressions suivantes pour Φ et ψ :

$$\Phi(r, t) = f_{r_t}(r|\mathfrak{I}_0) \int_{-\infty}^{h} f_{l_t | r_t}(l|\mathfrak{I}_0) dl ,$$

$$\psi(r_t, t, r', s) = f_{r_t}(r|\mathfrak{I}_s) \int_{-\infty}^{h} f_{l_t | r_t}(l|\mathfrak{I}_s) dl.$$

Comme le processus (l_t, r_t) est gaussien, la loi conditionnelle de $l_t | r_t$ par rapport à la tribu engendrée par l'information disponible à l'instant s est gaussienne de moyenne $\mu(r_t, l_s, r_s)$ et de variance $\sum^2(r_t, l_s, r_s)$; ces valeurs sont obtenues grâce au théorème de projection :

$$\mu(r_t, l_s, r_s) = \mathbb{E}(l_t|\mathfrak{I}_s) + \frac{\mathrm{Cov}(l_t, r_t|\mathfrak{I}_s)}{\mathbb{V}\mathrm{ar}(r_t|\mathfrak{I}_s)} (r_t - \mathbb{E}(r_t|\mathfrak{I}_s))$$

Et

$$\sum^2(r_t, l_s, r_s) = \mathbb{V}\mathrm{ar}(l_t|\mathfrak{I}_s) - \frac{\mathrm{Cov}(l_t, r_t|\mathfrak{I}_s)^2}{\mathbb{V}\mathrm{ar}(r_t|\mathfrak{I}_s)}$$

Notons $\mathcal{N}$ la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite. En utilisant la loi conditionnelle gaussienne décrite ci-dessus, nous obtenons

$$\Phi(r, t) = f_{r_t}(r|r_0) \mathcal{N}\left(\frac{h - \mu(r, l_0, r_0)}{\sqrt{\sum^2(r, l_0, r_0)}}\right),$$

$$\psi(r_t, t, r', s) = f_{r_t}(r|r_s = r') \mathcal{N}\left(\frac{h - \mu(r, l_s, r_s)}{\sqrt{\sum^2(r, l_s, r_s)}}\right).$$

Où nous disposons d'une formule explicite pour la densité de transitionf_{r_t} du processus gaussien r : $$\boldsymbol{f_{r_t}(r|r_s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi v}}\, e^{-\frac{(r-m)^2}{2v}}},$$

où $m = \mathbb{E}[r_t|r_s]$ et $v = \mathbb{V}ar[r_t|r_s]$ désignent respectivement les moments conditionnels de r_t sachant r_s. Ils sont donnés au point V.3.

On dispose ainsi, grâce à la formule (V.4), d'une méthode de calcul des termes $q(i,j)$, approchant la densité de probabilité de la loi de τ. Cette formule est une formule de récurrence dans laquelle il faut connaître les fonctions Φ et ψ introduites ci-dessus. A l'aide des $q(i,j)$, il est possible de calculer toute expression dans laquelle intervient τ.

V.2 Formules quasi-fermées :

Pour évaluer le contrat décrit dans le troisième chapitre, il reste à déterminer chaque terme dans (3.7). Chaque terme faisant intervenir τ est déterminé en utilisant la méthode de Fortet étendue.

Pour cela, il faut connaître les moments de l_t21et de r_t de même que les moments conditionnels de l_t sachant r_t. Ces formules sont détaillées au point V.3.

Commençons par nous intéresser au calcul de E_1. Si nous discrétisons selon le temps et le taux d'intérêt, il vient directement : $$\boxed{\boldsymbol{E_1 = \sum_{j=1}^{n_T}\sum_{i=1}^{n_r} q(i,j)}}.$$

Pour déterminer les autres E_i faisant intervenir l'instant τ, on se sert principalement du conditionnement. En effet, la densité de l_T n'est pas connue, mais on connaît sa loi conditionnelle à r_T. La loi de $l_T|r_T$ conditionnelle à $\mathfrak{I}_s$ est gaussienne ; ses deux premiers moments sont $\hat{\mu}_{s,T} = \mu(r_T, l_s, r_s)$ et $\hat{\Sigma}^2_{s,T} = \Sigma^2(r_T, l_s, r_s)$. En se servant des propriétés de la loi de $l_T|r_T$ conditionnellement à $|\mathfrak{I}_s$, on obtient des formules semi-fermées.

A l'aide des fonctions $\Phi_1(m;\sigma;a)$ et $\Phi_2(m;\sigma;a)$, on obtient les formules suivantes pour les espérances E_2, E_3, E_4 et E_5:

$$\boldsymbol{E_2 = e^{r^*T}\sum_{j=1}^{n_T}\sum_{i=1}^{n_r}\sum_{k=1}^{n_r}\delta_r\, f_{r_T}(r_k|r_i,\mathfrak{I}_j)\,\Phi_1\left(\hat{\mu}_{t_j,T};\hat{\Sigma}_{t_j,T};\frac{L_0}{\alpha}\right) q(i,j)}\ ;$$

$$\boldsymbol{E_3 = e^{r^*T}\sum_{j=1}^{n_T}\sum_{i=1}^{n_r}\sum_{k=1}^{n_r}\delta_r\, f_{r_T}(r_k|r_i,\mathfrak{I}_j)\,\mathcal{N}\left(\frac{\hat{\mu}_{t_j,T}-ln\left(\frac{L_0}{\alpha}\right)}{\sqrt{\hat{\Sigma}^2_{t_j,T}}}\right) q(i,j)}\ ;$$

[21] Les termes de la formule (3.7) qui s'expriment en fonction de $A_t$peuvent se réécrire en termes de l_t.

$$\boldsymbol{E_4 = e^{r^* T} \sum_{j=1}^{n_T} \sum_{i=1}^{n_r} \sum_{k=1}^{n_r} \delta_r \, f_{r_T}(r_k | r_i, \mathfrak{I}_j) \; \mathcal{N}\left(\frac{ln(L_0) - \hat{\mu}_{t_j,T}}{\sqrt{\hat{\Sigma}^2_{t_j,T}}} \right) q(i,j)} \;\; ;$$

$$\boldsymbol{E_5 = e^{r^* T} \sum_{j=1}^{n_T} \sum_{i=1}^{n_r} \sum_{k=1}^{n_r} \delta_r \, f_{r_T}(r_k | r_i, \mathfrak{I}_j) \, \Phi_2 \left(\hat{\mu}_{t_j,T}; \hat{\Sigma}_{t_j,T}; L_0 \right) q(i,j)} \;\; ;$$

Considérons à présent l'expression E_6. Ce terme s'écrit sous forme approchée de la manière suivante :

$$\boldsymbol{E_6 = \sum_{j=1}^{n_T} \sum_{i=1}^{n_r} e^{r^* t_j} \, \mathbb{E}^{Q_T}[e^{\int_{t_j}^{T} r_u \, du} \, | \, r_{t_j} = r_i, t_j, l_{t_j} = h] \, q(i,j).}$$

Le calcul de E_6 est possible puisque $\int_{t_j}^{T} r_u$ du suit une loi gaussienne sous $Q_T$dont on peut déterminer les moments. Ils sont donnés dans la section V.3.

Finalement E_6 est obtenu grâce à la propriété suivante sur les lois normales :

Si Y est une variable gaussienne $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$, alors $\mathbb{E}[e^Y] = e^{m+\frac{\sigma^2}{2}}$

Les espérances E_7, E_8, E_9 et E_{10}: sont indépendantes de τ . Leurs formules ont déjà été données dans le rapport.

Dans le but de calculer les différents E_i, il faut connaître Φ_1, Φ_2, f_{r_t} et les différents moments apparaissant plus haut et explicités dans la section V.3, de même que les q(i, j). Pour obtenir des résultats précis, il suffit de discrétiser assez finement, c'est-à-dire de choisir n_t et n_r assez grands.

V.3 Moments des processus :

V.3.1 Moments conditionnels du processus l_t :

Examinons les moments conditionnels du processus l_t. Ce processus vérifie l'équation différentielle stochastique suivante donnée par (2.8) :

$$\boxed{\boldsymbol{dl_t = \left(r_t - r^* - \frac{\sigma^2}{2} - \sigma\rho \, \sigma p(t,T) \right) dt + \sigma\rho dZ_1^{Q_T} + \sigma\sqrt{1-\rho^2} dZ_2^{Q_T}}}$$

$Z_1^{Q_T}$ et $Z_2^{Q_T}$ sont deux mouvements browniens indépendants sous la mesure forward-neutre. En intégrant, nous pouvons déterminer les deux premiers moments de ce processus gaussien. Ainsi :

$$\mathbb{E}^{Q_T}(l_t | \mathfrak{I}_u) = l_u - (t-u)\left(\frac{\sigma^2}{2} + r^* - \theta + \frac{\sigma\rho\eta}{a} + \frac{\eta^2}{a^2} \right) - \frac{1}{a}\left(1 - e^{-a(t-u)}\right)\left(\theta - r_u - \frac{\eta^2}{a^2} \right)$$
$$- \frac{\eta^2}{2a^3} e^{-a(T-t)}\left(1 - e^{2a(t-u)}\right) + \left(\frac{\rho\sigma\eta}{a^2} + \frac{\eta^3}{a^2} \right) e^{-a(T-t)}\left(1 - e^{a(t-u)}\right)$$

Et

$$\mathbb{V}ar^{Q_T}(l_t|\mathfrak{J}_u) = (t-u)\left(\frac{\eta^2}{a^2}+\sigma^2+\frac{2\sigma\rho\eta}{a}\right)+\frac{\eta^2}{2a^3}\left(1-e^{2a(t-u)}\right)-2\left(1-e^{a(t-u)}\right)\left(\frac{\eta^2}{a^3}+\frac{\rho\sigma\eta}{a^2}\right).$$

Pour $s < t$, la covariance est donnée par :

$$Cov^{Q_T}(l_s,l_t|\mathfrak{J}_u) = (s-u)\left(\frac{\eta^2}{a^2}+\sigma^2+\frac{2\sigma\rho\eta}{a}\right)+\frac{\eta^2}{2a^3}e^{-a(t-s)}\left(1-e^{-2a(t-u)}\right)-\left(\frac{\eta^2}{a^3}+\frac{\rho\sigma\eta}{a^2}\right)\left(1+e^{-a(t-s)}\right)\left(1-e^{-a(s-u)}\right).$$

V.3.2 Covariance entre l_t et r_t :

Les processus l_t et r_t sont corrélés à travers le mouvement brownien ${Z_1}^{Q_T}$.

La covariance conditionnelle entre ces deux processus est donnée par :

$$\boxed{Cov^{Q_T}(l_t,r_t|\mathfrak{J}_u) = \left(1-e^{-a(t-u)}\right)\left(\frac{\eta^2}{a^2}+\frac{\sigma\rho\eta}{a}\right)+\frac{\eta^2}{2a^2}\left(1-e^{-2a(t-u)}\right)}.$$

V.3.3 Covariance entre r_t et r_s :

Nous pouvons donner également la covariance entre r_t et r_s ($s < t$) conditionnellement à $\mathfrak{J}_u$:

$$\boxed{Cov^{Q_T}(r_s,r_t|\mathfrak{J}_u) = \frac{\eta^2}{2a}e^{-a(t-s)}\left(1-e^{-2a(s-u)}\right)}.$$

V.3.4 Moments de $\int_u^T r_s\,ds$:

Le calcul de E_6 nécessite la connaissance des moments de l'intégrale $\int_u^T r_s\,ds$ qui est une variable gaussienne sous Q_T :

$$\boxed{\int_u^T r_s\,ds = \frac{r_u-r_T}{a}+\theta(T-u)-\frac{\eta^2}{a^2}\left(T-u-\frac{1}{a}\left(1-e^{-a(T-u)}\right)\right)+\frac{\eta}{a}\left({Z_1}^{Q_T}(T)-{Z_1}^{Q_T}(u)\right)}.$$

Ses moments sont donnés par les formules suivantes :

$$\mathbb{E}^{Q_T}\left(\int_u^T r_s\,ds\,|\mathfrak{J}_u\right) = \left(1-e^{-a(T-u)}\right)\left(\frac{r_u}{a}-\frac{\theta}{a}+\frac{2\,\eta^2}{a^3}\right)+\left(\theta-\frac{\eta^2}{a^2}\right)(T-u)-\frac{\eta^2}{2a^3}\left(1-e^{-2a(T-u)}\right)$$

et

$$\mathbb{V}ar^{Q_T}\left(\int_u^T r_s\,ds\,|\mathfrak{J}_u\right) = \frac{\eta^2}{a^3}\left(\frac{1}{2}\left(1-e^{-2a(T-u)}\right)-2\left(1-e^{-a(t-u)}\right)\right)+\frac{\eta^2}{a^2}(T-u).$$

Annexe VI. **Cash flows issus du portefeuille de contrats d'assurances :**

Année	IN(Primes)	OUT (prestation, frais, commissions, taxes, dividendes)	Total
2009	2 063 588 811,40	-4 989 343 593,00	-2 925 754 781,61
2010	2 125 496 475,74	-5 162 171 885,60	-3 036 675 409,86
2011	2 189 261 370,01	-5 232 271 879,60	-3 043 010 509,59
2012	2 254 939 211,11	-5 260 951 176,60	-3 006 011 965,49
2013	2 322 587 387,44	-5 303 436 844,30	-2 980 849 456,86
2014	2 392 265 009,07	-4 846 568 333,20	-2 454 303 324,13
2015	2 464 032 959,34	-4 429 902 882,70	-1 965 869 923,36
2016	2 537 953 948,12	-3 925 930 118,40	-1 387 976 170,28
2017	2 614 092 566,56	-3 525 420 115,70	-911 327 549,14
2018	2 692 515 343,56	-3 216 336 819,10	-523 821 475,54
2019	2 773 290 803,87	-2 713 189 868,60	60 100 935,27
2020	2 856 489 527,98	-2 376 347 272,70	480 142 255,28
2021	2 942 184 213,82	-2 047 192 525,70	894 991 688,12
2022	3 030 449 740,24	-1 828 226 044,10	1 202 223 696,14
2023	3 121 363 232,44	-1 516 616 666,50	1 604 746 565,94
2024	3 215 004 129,42	-1 311 908 860,40	1 903 095 269,02
2025	3 311 454 253,30	-1 115 032 998,40	2 196 421 254,90
2026	3 410 797 880,90	-934 523 596,00	2 476 274 284,90
2027	3 513 121 817,32	-904 314 120,90	2 608 807 696,42
2028	3 618 515 471,84	-707 787 251,90	2 910 728 219,94
2029	3 727 070 936,00	-651 197 768,60	3 075 873 167,40
2030	3 838 883 064,08	-427 346 791,20	3 411 536 272,88
2031	3 954 049 556,00	-306 976 895,50	3 647 072 660,50
2032	4 072 671 042,68	-299 613 782,30	3 773 057 260,38
2033	4 194 851 173,96	-288 228 435,80	3 906 622 738,16
2034	4 320 696 709,18	-289 656 154,10	4 031 040 555,08
2035	4 450 317 610,46	-198 993 978,20	4 251 323 632,26
2036	4 583 827 138,77	-183 798 778,20	4 400 028 360,57
2037	4 721 341 952,93	-179 585 080,80	4 541 756 872,13
2038	4 862 982 211,52	-137 036 568,80	4 725 945 642,72
2039	5 008 871 677,87	-89 683 327,37	4 919 188 350,50
2040	5 159 137 828,20	-78 277 744,83	5 080 860 083,37
2041	5 313 911 963,05	-75 484 216,47	5 238 427 746,58
2042	5 473 329 321,94	-63 121 313,63	5 410 208 008,31
2043	5 637 529 201,60	-55 528 457,06	5 582 000 744,54
2044	5 806 655 077,65	-59 547 960,18	5 747 107 117,47
2045	5 980 854 729,97	-60 839 315,71	5 920 015 414,26
2046	6 160 280 371,87	-64 820 610,06	6 095 459 761,81
2047	6 345 088 783,03	-70 774 112,30	6 274 314 670,73
2048	6 535 441 446,52	-77 758 772,98	6 457 682 673,54

Annexe VII. **Détail des montants à réinvestir (obligations d'Etat) :**

Echéance	Passif & dividende	Portefeuille obligataire initial	Nouvelles obligations	Total à réinvestir
2009	-2 925 754 781,61	4 989 343 593,00	0,00	2 063 588 811,40
2010	-3 036 675 409,86	5 173 269 195,09	58 133 641,05	2 194 727 426,28
2011	-3 043 010 509,59	5 176 606 216,49	125 523 339,25	2 259 119 046,16
2012	-3 006 011 965,49	5 095 791 416,72	200 350 212,39	2 290 129 663,62
2013	-2 980 849 456,86	5 035 357 482,52	281 484 795,58	2 335 992 821,24
2014	-2 454 303 324,13	4 749 963 620,55	369 384 657,07	2 665 044 953,48
2015	-1 965 869 923,36	4 183 358 794,50	475 264 904,95	2 692 753 776,09
2016	-1 387 976 170,28	3 703 486 719,96	587 648 168,60	2 903 158 718,28
2017	-911 327 549,14	2 852 683 309,59	714 376 641,04	2 655 732 401,49
2018	-523 821 475,54	2 523 263 808,88	835 168 186,28	2 834 610 519,62
2019	60 100 935,27	595 961 723,14	2 197 478 790,51	2 853 541 448,91
2020	480 142 255,28	564 673 355,08	2 334 288 548,46	3 379 104 158,82
2021	894 991 688,12	631 385 417,21	2 429 795 397,42	3 956 172 502,75
2022	1 202 223 696,14	7 053 396,61	2 496 015 159,11	3 705 292 251,85
2023	1 604 746 565,94	78 063,90	2 534 256 421,62	4 139 081 051,47
2024	1 903 095 269,02	643 734 830,82	2 892 332 361,76	5 439 162 461,59
2025	2 196 421 254,90	519 523 579,43	2 998 748 034,82	5 714 692 869,15
2026	2 476 274 284,90	197 949 689,93	3 232 018 617,14	5 906 242 591,97
2027	2 608 807 696,42	0,00	3 002 910 950,50	5 611 718 646,93
2028	2 910 728 219,94	0,00	336 512 095,91	3 247 240 315,86
2029	3 075 873 167,40	0,00	192 647 393,91	3 268 520 561,31
2030	3 411 536 272,88	0,00	198 257 427,24	3 609 793 700,11
2031	3 847 072 660,50	0,00	223 759 392,05	4 070 832 052,55
2032	3 973 057 260,38	0,00	257 752 390,65	4 230 809 651,03
2033	3 906 622 738,16	0,00	273 509 191,91	4 180 131 930,07
2034	4 031 040 555,08	0,00	275 793 139,56	4 306 833 694,64
2035	4 251 323 632,26	0,00	289 881 199,65	4 541 204 831,91
2036	4 400 028 360,57	0,00	311 696 464,01	4 711 724 824,58
2037	4 541 756 872,13	0,00	329 667 709,26	4 871 424 581,40
2038	4 725 945 642,72	0,00	347 321 123,99	5 073 266 766,71
2039	4 919 188 350,50	0,00	368 460 091,90	5 287 648 442,40
2040	5 080 860 083,37	0,00	391 063 406,17	5 471 923 489,55
2041	5 238 427 746,58	0,00	411 970 361,74	5 650 398 108,31
2042	5 410 208 008,31	0,00	432 923 117,96	5 843 131 126,27
2043	5 582 000 744,54	0,00	455 462 080,21	6 037 462 824,75
2044	5 747 107 117,47	0,00	478 640 502,51	6 225 747 619,98
2045	5 920 015 414,26	0,00	501 848 464,83	6 421 863 879,09
2046	6 095 459 761,81	0,00	526 199 012,69	6 621 658 774,50
2047	6 274 314 670,73	0,00	551 377 595,66	6 825 692 266,39
2048	6 457 682 673,54	0,00	577 446 264,96	7 035 128 938,50

Annexe VIII. **Comparaison du portefeuille obligataire et du montant requis du point de vue comptable :**

Echéance	Portefeuille obligataire initial	Nouveau portefeuille obligataire	Portefeuille obligataire total	Provisions techniques & marge de solvabilité
2009	4 989 343 593,00	0,00	4 989 343 593,00	4 989 343 593,00
2010	5 173 269 195,09	58 133 641,05	5 231 402 836,15	5 162 171 885,60
2011	5 176 606 216,49	125 523 339,25	5 302 129 555,75	5 232 271 879,60
2012	5 095 791 416,72	200 350 212,39	5 296 141 629,11	5 260 951 176,60
2013	5 035 357 482,52	281 484 795,58	5 316 842 278,10	5 303 436 844,30
2014	4 749 963 620,55	369 384 657,07	5 119 348 277,62	4 846 568 333,20
2015	4 183 358 794,50	475 264 904,95	4 658 623 699,45	4 429 902 882,70
2016	3 703 486 719,96	587 648 168,60	4 291 134 888,57	3 925 930 118,40
2017	2 852 683 309,59	714 376 641,04	3 567 059 950,63	3 525 420 115,70
2018	2 523 263 808,88	835 168 186,28	3 358 431 995,16	3 216 336 819,10
2019	595 961 723,14	2 197 478 790,51	2 793 440 513,65	2 713 189 868,60
2020	564 673 355,08	2 334 288 548,46	2 898 961 903,54	2 376 347 272,70
2021	631 385 417,21	2 429 795 397,42	3 061 180 814,63	2 047 192 525,70
2022	7 053 396,61	2 496 015 159,11	2 503 068 555,72	1 828 226 044,10
2023	78 063,90	2 534 256 421,62	2 534 334 485,53	1 516 616 666,50
2024	643 734 830,82	2 892 332 361,76	3 536 067 192,58	1 311 908 860,40
2025	519 523 579,43	2 998 748 034,82	3 518 271 614,25	1 115 032 998,40
2026	197 949 689,93	3 232 018 617,14	3 429 968 307,07	934 523 596,00
2027	0,00	3 002 910 950,50	3 907 225 071,40	904 314 120,90
2028	0,00	336 512 095,91	1 044 299 347,81	707 787 251,90
2029	0,00	192 647 393,91	843 845 162,51	651 197 768,60
2030	0,00	198 257 427,24	625 604 218,44	427 346 791,20
2031	0,00	223 759 392,05	530 736 287,55	306 976 895,50
2032	0,00	257 752 390,65	257 752 390,65	299 613 782,30
2033	0,00	273 509 191,91	273 509 191,91	288 228 435,80
2034	0,00	275 793 139,56	275 793 139,56	289 656 154,10
2035	0,00	289 881 199,65	289 881 199,65	198 993 978,20
2036	0,00	311 696 464,01	311 696 464,01	183 798 778,20
2037	0,00	329 667 709,26	329 667 709,26	179 585 080,80
2038	0,00	347 321 123,99	347 321 123,99	137 036 568,80
2039	0,00	368 460 091,90	368 460 091,90	89 683 327,37
2040	0,00	391 063 406,17	391 063 406,17	78 277 744,83
2041	0,00	411 970 361,74	411 970 361,74	75 484 216,47
2042	0,00	432 923 117,96	432 923 117,96	63 121 313,63
2043	0,00	455 462 080,21	455 462 080,21	55 528 457,06
2044	0,00	478 640 502,51	478 640 502,51	59 547 960,18
2045	0,00	501 848 464,83	501 848 464,83	60 839 315,71
2046	0,00	526 199 012,69	526 199 012,69	64 820 610,06
2047	0,00	551 377 595,66	551 377 595,66	70 774 112,30
2048	0,00	577 446 264,96	577 446 264,96	77 758 772,98

Annexe IX. **Détail des montants à réinvestir (obligations d'état et actions) :**

Echéance	Contrat d'assurance	Obligation du 31/12/2008	Nouveau portefeuille obligataire	réinvestissement en obligations	réinvestissement en actions
2009	-2 925 754 781,61	4 989 343 593,00	0,00	1 238 153 286,84	825 435 524,56
2010	-3 036 675 409,86	5 173 269 195,09	34 880 184,63	1 302 884 381,92	868 589 587,94
2011	-3 043 010 509,59	5 176 606 216,49	74 885 601,36	1 325 088 784,96	883 392 523,30
2012	-3 006 011 965,49	5 095 791 416,72	118 775 386,88	1 325 132 902,87	883 421 935,24
2013	-2 980 849 456,86	5 035 357 482,52	165 722 119,83	1 332 138 087,30	888 092 058,20
2014	-2 454 303 324,13	4 749 963 620,55	215 848 452,54	1 506 905 249,37	1 004 603 499,58
2015	-1 965 869 923,36	4 183 358 794,50	275 716 673,94	1 495 923 327,05	997 282 218,04
2016	-1 387 976 170,28	3 703 486 719,96	338 149 692,21	1 592 196 145,13	1 061 464 096,75
2017	-911 327 549,14	2 852 683 309,59	407 652 122,10	1 409 404 729,53	939 603 153,02
2018	-523 821 475,54	2 523 263 808,88	471 756 538,29	1 482 719 322,98	988 479 548,65
2019	60 100 935,27	595 961 723,14	541 791 295,38	718 712 372,27	479 141 581,51
2020	480 142 255,28	564 673 355,08	576 942 109,55	973 054 631,94	648 703 087,96
2021	894 991 688,12	631 385 417,21	626 090 465,55	1 291 480 542,53	860 987 028,35
2022	1 202 223 696,14	7 053 396,61	693 301 162,56	1 141 546 953,18	761 031 302,12
2023	1 604 746 565,94	78 063,90	754 383 310,36	1 415 524 764,12	943 683 176,08
2024	1 903 095 269,02	643 734 830,82	832 113 355,02	2 027 366 072,91	1 351 577 381,94
2025	2 196 421 254,90	519 523 579,43	946 168 116,77	2 197 267 770,65	1 464 845 180,44
2026	2 476 274 284,90	197 949 689,93	1 072 612 927,25	2 248 102 141,24	1 498 734 760,83
2027	2 608 807 696,42	0,00	1 204 760 028,78	2 288 140 635,12	1 525 427 090,08
2028	2 910 728 219,94	0,00	1 341 970 578,58	2 551 619 279,11	1 701 079 519,41
2029	3 075 873 167,40	0,00	1 493 349 212,91	2 741 533 428,19	1 827 688 952,12
2030	3 411 536 272,88	0,00	1 659 641 379,03	3 042 706 591,15	2 028 471 060,76
2031	3 847 072 660,50	0,00	1 848 248 882,28	3 417 192 925,67	2 278 128 617,11
2032	3 973 057 260,38	0,00	2 064 614 881,79	3 622 603 285,30	2 415 068 856,87
2033	3 906 622 738,16	0,00	2 298 805 350,97	3 723 256 853,48	2 482 171 235,65
2034	4 031 040 555,08	0,00	2 544 455 180,74	3 945 297 441,49	2 630 198 294,33
2035	4 251 323 632,26	0,00	2 810 002 363,75	4 236 795 597,60	2 824 530 398,40
2036	4 400 028 360,57	0,00	3 100 804 971,29	4 500 499 999,12	3 000 333 332,74
2037	4 541 756 872,13	0,00	3 415 693 802,98	4 774 470 405,07	3 182 980 270,05
2038	4 725 945 642,72	0,00	3 756 102 322,06	5 089 228 778,87	3 392 819 185,91
2039	4 919 188 350,50	0,00	4 125 721 699,43	5 426 946 029,96	3 617 964 019,97
2040	5 080 860 083,37	0,00	4 527 087 263,48	5 764 768 408,11	3 843 178 938,74
2041	5 238 427 746,58	0,00	4 961 105 343,41	6 119 719 853,99	4 079 813 235,99
2042	5 410 208 008,31	0,00	5 429 987 030,93	6 504 117 023,54	4 336 078 015,70
2043	5 582 000 744,54	0,00	5 936 971 831,62	6 911 383 545,70	4 607 589 030,46
2044	5 747 107 117,47	0,00	6 484 895 386,50	7 339 201 502,38	4 892 801 001,59
2045	5 920 015 414,26	0,00	7 076 497 750,08	7 797 907 898,60	5 198 605 265,74
2046	6 095 459 761,81	0,00	7 715 447 985,48	8 286 544 648,37	5 524 363 098,92
2047	6 274 314 670,73	0,00	8 405 458 633,89	8 807 863 982,77	5 871 909 321,85
2048	6 457 682 673,54	0,00	9 150 594 505,91	9 364 966 307,67	6 243 310 871,78

Annexe X. **Comparaison des actifs et des passifs (obligations d'état et actions) :**

Echéance	Obligations (valeur bilan)	Provisions techniques & marge de solvabilité	Action (valeur du bilan)	Action (Valeur espérée)
2009	4989343593	4989343593	825435524,6	825435524,6
2010	5208149380	5162171886	868589587,9	890445099,1
2011	5251491818	5232271880	883392523,3	949887927,1
2012	5214566804	5260951177	883421935,2	1028752808
2013	5201079602	5303436844	888092058,2	1107967311
2014	4965812073	4846568333	1004603500	1190397889
2015	4459075468	4429902883	997282218	1275052394
2016	4041636412	3925930118	1061464097	1380743014
2017	3540335432	3525420116	939603153	1487881463
2018	3295020347	3216336819	988479548,7	1616454773
2019	2737753019	2713189869	479141581,5	1751368882
2020	2441615465	2376347273	648703088	1887309891
2021	2256566870	2047192526	860987028,4	2029504983
2022	1900353991	1828226044	761031302,1	2182655617
2023	1754461373	1516616667	943683176,1	2336683797
2024	1475848186	1311908860	1351577382	2513223839
2025	1265691696	1115032998	1464845180	2727796070
2026	970562618,2	934523596	1498734761	2958041895
2027	904348462,9	904314120,9	1525427090	3193998816
2028	707821593,9	707787251,9	1701079519	3406200616
2029	651232110,6	651197768,6	1827688952	3676296397
2030	427381133,2	427346791,2	2028471061	3962912155
2031	307011237,5	306976895,5	2278128617	4240623626
2032	299648124,3	299613782,3	2415068857	4544640321
2033	288262777,8	288228435,8	2482171236	4878344414
2034	289690496,1	289656154,1	2630198294	5260265710
2035	199028320,2	198993978,2	2824530398	5652212960
2036	183833120,2	183798778,2	3000333333	6018797257
2037	179619422,8	179585080,8	3182980270	6522685875
2038	137070910,8	137036568,8	3392819186	6981371534
2039	89717669,37	89683327,37	3617964020	7431002864
2040	78312086,83	78277744,83	3843178939	7965755345
2041	75518558,47	75484216,47	4079813236	8551946469
2042	63155655,63	63121313,63	4336078016	9081655083
2043	55562799,06	55528457,06	4607589030	9820839870
2044	59582302,18	59547960,18	4892801002	10580983948
2045	60873657,71	60839315,71	5198605266	11350830879
2046	64854952,06	64820610,06	5524363099	12365290387
2047	70808454,3	70774112,3	5871909322	13289568803
2048	77793114,98	77758772,98	6243310872	14293266738

Annexe XI. Les différents algorithmes programmés sur MATLAB :

XI.1 Le Programme, en matlab7, qui détermine le taux zéro coupon en utilisant les méthodes statistiques, à savoir, Neilson Seigle et Sevenssen :

Function y = BondYieldToMat2Ps (Q, c, t, Method, yLH, tol);

```
%BondYieldToMat3Ps est une fonction qui nous a permis de calculer les rendements à partir des prix des bons.
% les variables d'entrée:
% Q : vecteur nx1, des prix des bons (à titre d'exemple, 1.01)
% c: scalaire ou' vecteur nx1, c est écrit sous forme de taux, % % exp : 0.06, ou' 0.09/2.
% t: vecteur mx1, dates de payement des coupons.
% Exemple: t = [0.333; 0.333+1; 0.333+2]
% Method 1: Newton-Raphson; 2: bisection
% yLH: si Method==1: scalaire, yLH(1) valeur petite du frontière
% si Method==2: vecteur 2x1, la grande valeur du frontière
% tol: scalaire, la valeur critique de la convergence y,
% exp : 1e-7
% la variable de sortie:
% y : vecteur nx1, rendement à maturité estimé.
%-------------------------------------------------------------------
Q = Q(:); % vecteur colonne
c = c(:);
t = t(:);
n = length(Q);
nc = length(c);
m = length(t);
%--------------------------------------
if Method == 1; %Newton-Raphson
y0 = repmat(yLH(1),n,1);
Dy = 1E+198;
while max( abs(Dy) ) > tol;
J0 = BonddPricePs( c,t,y0 );
F0 = BondPricePs( c,t,y0 ); % nx1
Dy = (Q - F0)./J0; %nx1
y = y0 + Dy;
y0 = y;
end;
%--------------------------------------
elseif Method == 2; %bisection
yL = repmat(yLH(1),n,1);
yH = repmat(yLH(2),n,1);
if any(yL>yH)
error('la valeur petite du frontière est plus grande que la grande valeur');
end
QL = BondPricePs(c,t,yL); % nous appelons la fonction BondPricePs pour calculer les prix théoriques.
QH = BondPricePs(c,t,yH);
if any( (QL < Q) | (QH > Q));
error('les racines ne sont pas mises entre crochets');
end; %done checking for errors
```

```
while any( (yH-yL)>tol );
y = (yL + yH)/2;
%disp([yL,y,yH]);
Qs = BondPricePs(c,t,y);
vvH = find(Qs > Q); % la function indice si Qs > Q.
yL(vvH) = y(vvH);
vvL = find(Qs < Q); %indices si Qs < Q
yH(vvL) = y(vvL);
end;
end; % la fine des différentes méthodes.
%---------------------------------------------------------------
```

Function Q = BondPricePs(c, t, y);

```
%BondPricePs est une fonction qui calcule les prix à partir des rendements.
% variables d'entrée:
% c scalaire ou' nx1, taux coupon, exp : 0.06 or 0.09/2
% t vecteur mx1, dates des payements des coupons.
% y vecteur nx1, rendement à maturité, exp : 0.07.
% les variables de sortie:
% Q vecteur nx1 des prix des bons (exp. 1.01)
% Q = c/(1+y)^t(1) + c/(1+y)^t(2) + ... + (1+c)/(1+y)^t(m)
% ---------------------------------------------------------------
c = c(:); % vecteur colonne
t = t(:);
y = y(:);
nc = length(c);
m = length(t);
n = length(y);
y = repmat(y',m,1); %nx1 -> mxn
t = repmat(t ,1,n); %mx1 -> mxn matrice
if nc==1; % c scalaire
c = repmat(c,m,n);
elseif nc==n;
c = repmat(c',m,1);
else;
error('les dimensions de c, t et y ne sont pas corrects');
end;
cfac = c./((1+y).^t); %c/(1+y)^t1 + c/(1+y)^t2 + ...+ c/(1+y)^m
Q = sum(cfac,1) + 1./((1+y(m,:)).^t(m,:)); %prix théoriques
Q = Q';
%---------------------------------------------------------------
```

Function [s,f,d] = BondNSxPs(m,b0,b1,b2,tau,b3,tau2);

```
% cette fonction nous permet de calculer le taux zéro, taux à terme et la fonction discount.
% les variables d'entrée:
% m NxK matrice des maturités en année
% b0 scalaire, paramètre beta0 dans le modèle NS
% b1 scalaire, paramètre beta1 dans le modèle NS
% b2 scalaire, paramètre beta2 dans le modèle NS
% tau scalaire, paramètre tau dans le modèle NS
```

```
% b3 scalaire, paramètre beta3 dans le modèle NS
% tau2 scalaire, paramètre tau2 dans le modèle NS
% les variables de sortie:
% s NxK matrice, taux zéro
% f NxK matrice, taux à terme
% d NxK matrice, taux discount
%-------------------------------------------------------------
if nargin == 5; % Nelson-Siegel standard
b3 = 0;
tau2 = 1;
end;
f = b0 + b1*exp(-m/tau) + b2*(m/tau).*exp(-m/tau) + b3*(m/tau2).*exp(-m/tau2); %taux à
terme
s = b0 + b1*(1 - exp(-m/tau))./(m/tau)
+ b2*((1 - exp(-m/tau)) ./(m/tau) - exp(-m/tau))
+ b3*((1 - exp(-m/tau2))./(m/tau2) - exp(-m/tau2)); % taux zéro
d = exp( -s.*m ); % taux discount
%-------------------------------------------------------------
```

Function Loss = BondNSxLossPs (b, Qtc, s0);

```
%c'est une fonction qui calcule la somme des carrés des erreurs des prix (théorique – observe)
dans le modèle Nelson Siegel.
% les variables d'entrée:
% b: 3x1, 4x1, 5x1 ou' 6x1 vecteur des paramètres du Nelson % Siegel
% if 3x1: [b0,b2,tau], NS avec restriction b1 = s0 - b0
% if 4x1: [b0,b1,b2,tau], NS sans restriction
% if 5x1: [b0,b2,tau,b3,tau2], Svenssen avec restriction % b1 = s0 - b0
% if 6x1: [b0,b1,b2,tau,b3,tau2], Svenssen standard.
% les variables de sortie:
% Loss scalaire, somme des carrées des erreurs entre prix théorique et prix du marché
%-------------------------------------------------------------
Q = Qtc(:,1); % prix des bons
tm = Qtc(:,2); % maturités
c = Qtc(:,3); % les coupons
n = length(c); % nombre des bons
if length(b) == 3; % Nelson-Siegel extension b1 = s0-b0
b0 = abs(b(1));
b1 = s0 - b0;
b2 = b(2);
tau = abs(b(3));
b3 = 0;
tau2 = 1;
elseif length(b) == 4; % Nelson-Siegel standard
b0 = abs(b(1));
b1 = b(2);
b2 = b(3);
tau = abs(b(4));
b3 = 0;
tau2 = 1;
elseif length(b) == 5;% Svenssen extension b1 = s0-b0
```

```
b0 = abs(b(1));
b1 = s0 - b0;
b2 = b(2);
tau = abs(b(3));
b3 = b(4);
tau2 = abs(b(5));
elseif length(b) == 6; % Svenssen
b0 = abs(b(1));
b1 = b(2);
b2 = b(3);
tau = abs(b(4));
b3 = b(5);
tau2 = abs(b(6));
end;
QNS = repmat(NaN,n,1);
for i = 1:n;
ti = ( mod(tm(i),1):tm(i) )'; %
[s,f,d] = BondNSxPs(ti,b0,b1,b2,tau,b3,tau2);
QNS(i) = sum(d.*c(i)) + d(length(d)); %prix théoriques
end;
Loss = sum( (QNS - Q).^2 ); %somme des carrées des erreurs
end;
%---------------------------------------------------------------
```

Function NSb = BondNSxEstPs (par0, Q, tm, c, opt, s0);

%la function BondNSxEstPs estime les paramètres des quatre modèles en minimisant la somme des carrées des erreurs par le biais de la méthode mes moindre carrées non linaires.

les variables d'entrée:

```
% par0 : 4x1 ou' 6x1 vecteur des paramètres initiaux
% Si 4x1: modèle de Nelson Siegel avec par0 = [b0,b1,b2,tau]
% Si 6x1: le modèle de Svenssen par0 = [b0,b1,b2,tau,b3,tau2]
% Q : nx1 vecteur, prix des bons
% tm : nx1 vecteur, maturités en année, exp : 2.54
% c : nx1 vecteur, les coupons, exp : 0.06
% opt : 2x1 vecteur, [valeur critique de convergence, % max d'itérations],exp : [1e-
4,500].
% s0: scalaire, la valeur restreinte du taux court.
```

les variables de sortie:

```
% NSb: 1x4 ou' 1x6 vecteur, paramètres estimés.
%---------------------------------------------------------------
Qtc = [Q,tm,c];
if length(par0) == 4; % Nelson-Siegel standard.
if isempty(s0)==0; %b1 = s0 - b0
par0 = par0([1,3,4]);
end;
elseif length(par0) == 6; % Svenssen standard.
if isempty(s0)==0; %b1 = s0 - b0
par0 = par0([1,3,4,5,6]);
end;
end;
```

```
if isnan(opt(1));
opt(i)=NaN
tol = 1e-4;
else;
tol = opt(1);
end;
if isnan(opt(2));
MaxIter = 800;
else;
MaxIter = opt(2);
end;
options = optimset('Display','notify','TolX',tol,'MaxIter',MaxIter);
[NSb,fval,exitflag,output] = fminsearch('BondNSxLossPs',par0,options,Qtc,s0);
if output.iterations == MaxIter;
disp(' ');warning(Le nombre maximal d'itérations a atteint sans convergence ');
disp(' ');
end;
end;
if length(NSb) == 3; % Nelson Siegel extension
NSb = [NSb(1),g_s0-NSb(1),NSb(2),NSb(3)];
elseif length(NSb) == 5; % Svenssen extension
NSb = [NSb(1),s0-NSb(1),NSb(2),NSb(3),NSb(4),NSb(5)];
end;
%-----------------------------------------------------------------
```

Function dQ_dy = BonddPricePs(c,t,y);

```
%dBondPricePs calcule la dérivé des prix des bons.
% les variables d'entrée:
% c scalaire ou' nx1, taux coupon, exp : 0.06 or 0.09/2
% t vecteur mx1, dates des payements des coupons.
% y vecteur nx1, rendement à maturité, exp : 0.07.
% Output:
% dQ_dy : Nx1 vecteur des derives par rapport au rendement
%-----------------------------------------------------------------
c = c(:); % vecteur colonne
t = t(:);
y = y(:);
nc = length(c);
m = length(t);
n = length(y);
y = repmat(y',m,1); %nx1 -> mxn
t = repmat(t ,1,n); %mx1 -> mxn matrice
if nc==1; % c scalaire
c = repmat(c,m,n);
elseif nc==n;
c = repmat(c',m,1);
end;
cfac = c./((1+y).^t); %c/(1+y)^t1 + c/(1+y)^t2 + ...+ c/(1+y)^m
cfac = cfac .* (-t./(1+y));
dQ_dy = sum(cfac,1) + (t(m,:)./(1+y(m,:))./((1+y(m,:)).^t(m,:)); %prix théoriques
```

```
dQ_dy = dQ_dy';
%-------------------------------------------------------------
```

XI.2 Le Programme, en matlab7, qui détermine la frontière efficiente et l'allocation optimale :

Les variables d'entrée:

```
% cours : matrice des cours des actions
%x0: valeurs initiales
```

Les variables de sortie:

```
% r, c : nombre des colonnes et les lignes de la matrice des cours dans le workspace
% rend: rendements des cours
% rendatt : Rendement Espéré du portefeuille
% mvarcov : matrice Variance-Covariance
% x : l'allocation optimale
[r,c] = size(cours);
m = cours(1:r,1:c);
rend = ((m(2:r,:)-m(1:r-1,:))./m(1:r-1,:));
bb = c;
r_equity = rend(:,1:bb);
rendatt = mean(r_equity);
mvarcov = cov(r_equity);
rend_low = min(rendatt); rend_high = max(rendatt); nfac = 100;
step = (rend_high - rend_low)/nfac;
rendatt_por = rend_low:step:rend_high;
cc = length(rendatt_por);
n_equity = bb;
xstar = zeros(cc,bb);
for i = 1:cc
x0 = 1/bb.*ones(1,bb);
Aeq = [ones(1,bb); rendatt];
Beq = [1;rendatt_por(i)];
vlb = zeros(1,bb);
vub = ones(1,bb);
options = optimset('Display','off');
x = fmincon(@(x)funcov(x,mvarcov,n_equity),x0,...
[],[],Aeq,Beq,vlb,vub,[],options);
xstar(i,:) = x;
end
for i = 1:cc
devpor_eff(i) = sqrt(xstar(i,:)*mvarcov*xstar(i,:)');
end
hold on
ylabel('Rendement Espéré du portefeuille ','FontSize',10)
xlabel(' Variance du poretefeuille','FontSize',10)
title('\it{Frontière efficiente}')
plot(devpor_eff,rendatt_por,'.')
axis([min(devpor_eff),max(devpor_eff),min(rendatt_por),max(rendatt_por)]);
hold off
```

A

Action: (en anglais britannique : share, en anglais américain : stock) est un titre de propriété délivré par une société de capitaux (i.e. une société anonyme ou Société en commandite par actions). Elle confère à son détenteur la propriété d'une partie du capital, avec les droits qui y sont associés : intervenir dans la gestion de l'entreprise et en retirer un revenu appelé dividende. Le détenteur d'actions est qualifié d'actionnaire et l'ensemble des actionnaires constitue l'actionnariat

Actuaire : Spécialiste qui applique la théorie des probabilités à l'évaluation des risques et au calcul des primes, des provisions techniques ou des provisions mathématiques, son champ d'application est les compagnies d'assurance et de réassurance ainsi que les organismes de prévoyance sociale.

Assuré : Personne physique ou morale sur laquelle ou sur les intérêts de laquelle repose l'assurance.

Assureur : Entreprise agréée pour effectuer des opérations d'assurances

B

Bénéficiaire : Personne physique ou morale au profit de laquelle l'assurance a été contractée. Elle peut être nommément désignée aux conditions particulières du contrat ou bien apparaître dans les conditions générales sous les termes de: conjoint survivant, d'ayants droit, ou encore d'héritier né ou à naître... Le bénéficiaire recevra l'indemnité due par l'assureur en cas de réalisation du risque assuré.

C

Cash flow : C'est la différence des encaissements (recettes) et des décaissements (dépenses) générés par l'activité d'une organisation.

Chargement : Partie de la prime ou de la cotisation servant à couvrir les frais d'exploitation et de distribution de l'entreprise d'assurances.

Clause : Disposition particulière d'une police d'assurance détaillant le fonctionnement d'une garantie, ou bien précisant la nature des engagements réciproques de l'assureur et de l'assuré.

Commission : Rémunération, établie en pourcentage de la prime, attribuée à l'apporteur d'affaires ou au gestionnaire (agent général d'assurances ou courtier par exemple). On peut distinguer la "commission d'apport", part de la commission qui rémunère l'effort de commercialisation, de la "commission de gestion" qui rémunère le travail administratif.

Conditions d'assurance : Ensemble des clauses constituant les bases de l'accord intervenu entre le souscripteur et l'assureur.

Contrat d'assurance : Il s'agit d'un contrat par lequel un organisme dit « l'assureur », s'engage envers une ou plusieurs personnes déterminées ou un groupe de personnes, le ou les assurés, à couvrir, moyennant le paiement d'une somme d'argent dite « prime d'assurance », une catégorie de risques

déterminés par le contrat dit « police d'assurance » ou par des conventions additionnelles dites « avenants ».

Contrat d'assurance sur la vie : Contrat par lequel, en contrepartie de versements uniques ou périodiques, l'assureur garantit des prestations dont l'exécution dépend de la survie ou du décès de l'assuré.

D

Durée du contrat : Durée des engagements réciproques de l'assureur et de l'assuré dans le cadre du contrat d'assurance.

E

Échéance du contrat : Date à laquelle est prévue l'expiration du contrat d'assurance.

Effet du contrat : Date à partir de laquelle le risque est pris en charge par l'assureur.

Embedded Value (Valeur intrinsèque) : Valeur actuelle des flux futurs de trésorerie dont l'actionnaire peut disposer tout en permettant à la société d'assurer son autofinancement en matière d'investissement et de marge de solvabilité réglementaire.

G

Gestion Actif-Passif : (Asset and Liability Management en anglais, ALM). Elle s'apparente pour une banque à une direction financière. Elle revient à s'assurer que l'équilibre entre types de ressources financières et types d'emplois financiers est tel qu'il n'y pas de risque de solvabilité ou de liquidité tout en optimisant la rentabilité générale.

P

Participation aux bénéfices : Mécanisme selon lequel les entreprises d'assurance vie ou de capitalisation font participer leurs assurés aux bénéfices techniques et financiers qu'elles réalisent. Selon le Code des Assurances, les entreprises d'assurances doivent distribuer au minimum 90% de leurs bénéfices techniques et 85% de leurs bénéfices financiers.

Placements : Pour faire face à ses nombreuses engagements et les honorer dans les meilleures conditions, tant vis-à-vis de ses assurés, des victimes, que vis-à-vis des créanciers et autres, la loi fait obligation aux Compagnies d'Assurances et aux Mutuelles, en tant qu'organismes financiers, de placer une grande partie de leurs fonds dans des placements fructifiants: valeurs mobilières ou immobilières: actions, obligations bons du trésor, O.P.C.V.M., terrains, immeubles…

.**Police d'assurance :** Document matérialisant le contrat d'assurance. Il indique les conditions générales et particulières.

Prestation en Assurance : ce terme signifie l'obligation de l'Assureur vis-à-vis du Souscripteur et/ou de l'Assuré.

Prime : Contrepartie des garanties apportées par l'assureur. La prime peut être acquittée périodiquement (prime mensuelle, trimestrielle, semestrielle, annuelle) ou une seule fois (prime unique).

R

Rachat : Versement anticipé à l'assuré d'un pourcentage de l'épargne constituée au titre d'un contrat d'assurance sur la vie. Le rachat de la totalité de l'épargne met fin au contrat.

Rente : Somme fixée à l'avance, reçue périodiquement (par exemple chaque mois ou chaque année), pour une durée déterminée ou, éventuellement, pour le reste de sa vie (rente viagère).

Résultat technique : Différence entre les ressources (cotisations et produits financiers) et les dépenses (sommes attribuées aux assurés, frais de gestion et commissions).

Revalorisation : Réajustement des capitaux et/ou des primes dans un contrat d'assurance.

S

Simulation de Monte-Carlo : Les incertitudes affectant le succès d'un projet sont quantifiées par la distribution des probabilités. On crée un grand nombre de scénarios pendant la simulation à partir d'échantillons de ces probabilités, puis on évalue l'issue du projet en en fonction de chacun des scénarios. Grâce à cette analyse, on obtient une distribution de la probabilité du résultat (valeur actuelle nette, ou taux de rendement interne par exemple). Celle-ci nous fournit ainsi des informations sur la valeur anticipée, l'éventail des résultats possibles et les risques négatifs du projet.

Solvabilité I : Régime de solvabilité actuellement en vigueur dans d'Union Européenne.

Solvabilité II: Projet visant à réformer Solvabilité 1 grâce à une approche intégrée des risques.

Stress Testing : C'est un procédé d'analyse de la sensibilité du comportement d'une entité suite à une variation quelconque.

Souscripteur ou contractant : Personne morale ou physique qui contracte une assurance pour son propre compte ou pour le compte d'autrui et qui de ce fait, s'engage envers l'assureur pour le paiement de la prime. Le souscripteur est désigné sous ce nom aux conditions particulières, il demande l'établissement du contrat, le signe, et s'engage à en payer les primes.Toute personne qui lui serait substituée légalement ou par accord des parties, sera considérée comme Souscripteur.

T

Tables de mortalité TD 88-90 et TV 88-90 : Les deux tables ont été établies à partir des données de l'INSEE issues d'observations réalisées entre 1988 et 1990 sur la population masculine pour la TD 88-90 et la population féminine pour la TV 88-90. Elles ont été homologuées par l'arrêté du 27 avril 1993 et s'applique à la tarification des contrats d'assurance en cas de décès pour la TD 88-90 et les contrats d'assurance en cas de vie pour la TV.

V

. **VAN :** La Valeur Actuelle d'un actif financier est, par définition, la somme actualisée de tous les flux futurs qu'il engendre. Si les taux d'actualisation sont les taux de marché, on obtient une valeur de marché.

Ouvrages :

[1] Jørgensen P. L. *Fair Valuation of Life Insurance Liabilities in the Presence of Default Risk and Stochastic Interest Rates*. Conférence IME, Lyon,Juin 2003.

[2] Jørgensen P. L. On accounting standards and fair Valuation of Life Insurance and Pension Liabilities. *Scandinavian Actuarial Journal*, 5 : 372–394, 2004.

[3] Longstaff F. A. & Schwartz E. S. A Simple Approach to Valuing Risky Fixed and Floating Rate Dept. *The Journal of Finance*, 50(3) : 789–820, 1995.

[4] Magis C., Denuit M. & Walhin J.-F. La TPRV française : dépassée ? *Bulletin Français d'Actuariat*, 2005.

[5] Merton R. C. An analytic derivation of the cost of deposit insurance and loan guarantees : An application of modern pricing theory. *Journal of Banking and Finance*, 1 : 3–11, 1977.

[6] Merton R. C. On the cost of deposit insurance when there are surveillance costs. *Journal of Business*, 51 : 439–452, 1978.

[7] Merton R. C. On the application of the continous-time theory of finance to financial intermediation and insurance. *The Geneva Papers on Risk and Insurance Theory*, 14 : 225–262, 1989.

[8] Miltersen K. R. & Persson S.-A. Guaranteed investment contracts : distributed and undistributed excess return. *Scandinavian Actuarial Journal*, 4 : 257–279, 2003.

[9] Nielsen J. A. & Sandmann K. Equity-linked life insurance : A model with stochastic interest rates. *Insurance : Mathematics and Economics*, 16 : 225–253, 1995.

[10] Øksendal B. *Stochastic Differential Equations : An introduction with applications*. Springer Verlag, 2003.

Mémoires & Site web :

[11] *Fouzia AMGHAR & Sarra DADI, Exigence en capital sous Solvabilité II, INSEA, juin 2008.*

[12] *Diallo Cheick Oumar, Solvabilité II & IFRS : QIS 4 et impact bilantaire du passage aux normes IFRS pour une société d'assurance vie, INSEA, juin 2008.*

[13] *Fatima KARMEN & Nejoua JABER, Modélisation du passif et adéquation actif passif, INSEA, Juin 2006*

[14] *Delwarde : Modèle log-bilinéaire pour l'élaboration de tables de mortalité prospectives, Mémoire Université Catholique de Louvain (2004)*

[15] www.acam-france.fr
[16] www.ceiops.org
[17] www.ined.fr
[18] www.optimind.fr