



المندوبية السامية للتخطيط  
HAUT-COMMISSARIAT AU PLAN

ROYAUME DU MAROC  
\*.\*.\*.\*  
HAUT COMMISSARIAT AU PLAN  
\*.\*.\*.\*.\*.\*.\*.\*  
INSTITUT NATIONAL  
DE STATISTIQUE ET D'ECONOMIE APPLIQUEE



**INSEA**

## Projet de Fin d'Etudes

\*\*\*\*\*

### Calibrage de la formule standard du SCR pour le risque de souscription Non Vie

Préparé par : *Mme Moujeb Salma*

Sous la direction de : *M. Khalil Mohammed Said (INSEA)*  
*Mme Berrada Souni Salma (ACAPS)*

*Soutenu publiquement comme exigence partielle en vue de l'obtention du*

*Diplôme d'Ingénieur d'Etat*

**Filière : Actuariat Finance**

Devant le jury composé de :

- *M. Khalil Mohammed Said (INSEA)*
- *M. Fouad Marri (INSEA)*
- *Mme Berrada Souni Salma (ACAPS)*

Juin 2019 / PFE N 26



## Résumé

Solvabilité basée sur les risques est la déclinaison retenue pour la nouvelle réglementation prudentielle qui s'imposera sur les entreprises d'assurance et de réassurance marocaines. Les assureurs doivent en effet respecter des règles dites « prudentielles » qui les contraignent notamment à mettre en adéquation leur niveau de fonds propres avec les risques auxquels ils sont confrontés. Ainsi, aujourd'hui, les compagnies doivent justifier d'un Capital de Solvabilité Requis, ce capital est destiné à garantir les engagements vis-à-vis des assurés et à leur permettre de faire face aux aléas inhérents à l'activité d'assurance. Le calibrage de la formule standard du calcul du CSR est fixé de manière à avoir une probabilité de ruine de 0,5% à un horizon de un an.

Ce mémoire présentera l'approche retenue pour l'élaboration de la formule standard, nous insisterons en particulier sur les modèles sous-jacents aux risques de souscription non-vie, à savoir le risque de primes et de provisions. Notre travail consistera essentiellement au calibrage des volatilités à horizon un an de ces risques. La première capture le risque que le coût des futurs sinistres soit supérieur aux primes perçues. La volatilité du risque de provisionnement à un an représente quant à elle l'erreur commise lors de l'estimation des provisions de sinistres.

## **Mots clés**

Solvabilité Basée sur les Risques, calibrage, risque de primes, risque de provisions, Merz and Wuthrich.

## Dédicaces

*Je dédie ce travail,*

***A l'âme de mes chers grands-pères, mon oncle et ma tante,***

*Qui me manquent.*

***A mes très chers parents,***

*Qui n'ont économisé aucun effort pour que je puisse être ce que je suis.*

*Aucun mot n'exprimera ma profonde gratitude pour tout l'amour, le soutien, les sacrifices et la confiance qu'ils me font.*

***A mes chers frères Abdellah et Mohammed,***

*Que j'aime profondément.*

***A toutes mes tantes,***

*Pour leur amour et soutien.*

***A toute ma famille,***

***Et à tous mes amis,***

*Pour leurs encouragements et leur soutien. .*

**MOUJEB SALMA**

## Remerciements

Qu'il me soit permis, au terme de ce travail, d'exprimer ma gratitude et vifs remerciements à mon encadrante de stage **Mme. Salma Berrada Souni**, Chargée de mission auprès du Président de l'ACAPS. Qu'elle trouve ici le témoignage de mon estime et de ma profonde reconnaissance pour son accueil, sa générosité, ses orientations et ses qualités humaines qu'elle a su me prodiguer tout au long de mon stage. L'effort considérable pour m'intégrer au sein de son équipe en me permettant de participer aux ateliers technique de la SBR, avoir accès aux différentes informations concernant le sujet ont constitué un apport considérable sans lequel ce travail n'aurait pas pu être mené à bon part.

Mes remerciements, les plus sincères, vont à toute l'équipe technique chargée du projet SBR, en particulier **M. Anass Ahayan** pour l'accueil et le suivi. Qu'il trouve ici l'expression de ma profonde reconnaissance pour l'intérêt et l'effort qu'il a déployé afin de m'accompagner et me soutenir durant la période de stage.

Je tiens aussi à remercier Monsieur **M. Mohammed Khalil Said** pour avoir accepté mon encadrement et pour le suivi dans la réalisation de ce mémoire.

Je remercie également **M. Fouad Marri** pour l'intérêt qu'il a porté à ce travail en acceptant de siéger parmi les membres du jury.

Pour clôturer, j'adresse mes remerciements à tous ceux qui, de près ou de loin, ont contribué au bon déroulement et à l'aboutissement de ce modeste travail.

## Table des matières

Résumé.....	- 4 -
Dédicaces .....	- 5 -
Remerciements.....	- 6 -
Liste de figures.....	- 9 -
Liste des tableaux .....	- 10 -
Abréviations .....	- 11 -
Introduction.....	- 12 -
Partie I : Contexte .....	- 14 -
Chapitre I : Le marché des assurances au Maroc .....	- 15 -
I. Emission d'assurances par sous-catégorie en 2016-2017 .....	- 15 -
II. Indicateurs des entreprises d'assurance et de réassurance en 2016-2017.....	- 17 -
Chapitre II : L'ACAPS.....	- 18 -
I. Création de l'ACAPS.....	- 18 -
II. Organismes contrôlés .....	- 18 -
III. Missions de l'ACAPS.....	- 19 -
IV. Organigramme de l'Autorité .....	- 20 -
Chapitre III : Le cadre prudentiel en devenir SBR Vs le cadre prudentiel actuel .....	- 21 -
I. Piliers I : Exigences quantitatives .....	- 22 -
II. Pilier II : Gouvernance et exigences qualitatives.....	- 26 -
III. Piliers II : Informations .....	- 27 -
Partie II : Modélisation de l'exigence en capital relative au risque de souscription Non Vie .....	- 29 -
Chapitre I : La formule standard en risque de souscription Non-vie .....	- 30 -
I. Vue d'ensemble sur le risque de souscription Non Vie .....	- 30 -
II. Présentation de la formule standard :.....	- 31 -
Chapitre III : Mesure de la volatilité des provisions à horizon un an .....	- 35 -
Chapitre II : Revue de littérature des méthodes de calibrage.....	- 39 -
I. Risque de primes .....	- 39 -
II. Risque de provisions.....	- 44 -
Partie III : Application.....	- 50 -
Chapitre I : Présentation des données .....	- 52 -
I. Risque de primes .....	- 52 -

II. Risque de provisions .....	- 53 -
Chapitre II : Validation des hypothèses.....	- 55 -
I. Risque de primes .....	- 55 -
II. Risque de provisions : .....	- 57 -
Chapitre III : Retraitements des données/ traitements préalables .....	<b>Error! Bookmark not defined.</b>
Chapitre IV : Calibrage des volatilités .....	- 62 -
<b>I. Calcul de volatilités liées au risque de primes</b> .....	- 62 -
II. Calcul des volatilités liés au risque de provisions.....	- 66 -
Conclusion .....	- 71 -
Bibliographie .....	- 73 -
Annexes.....	- 74 -
La fonction $\phi$ .....	- 74 -
La loi log-normale .....	- 76 -
Estimation par maximum de vraisemblance .....	- 77 -
L'erreur quadratique moyenne .....	- 78 -

## Liste de figures

## Liste des tableaux

## **Abréviations**

ACAPS

EAR

SBR

CSR

## Introduction

L'assurance est un vecteur de développement socio-économique, il s'agit d'une fonction essentielle de sécurisation des individus, des ménages et des entreprises contre des risques divers. L'activité renforce le système de protection sociale et rend les bénéficiaires de ce service résilients aux conséquences économiques que peut induire des dommages aux biens (habitation, outil de production, véhicule...). Cette activité prend part également au développement économique, sa fonction dans ce sens est d'autant plus importante. L'assurance favorise l'entrepreneuriat et contribue fortement au financement de l'économie du pays, en plaçant les fonds collectés (les primes).

Afin de préserver cet impact social et économique, ce secteur doit être soumis à un contrôle spécifique. Cette spécificité résulte de la nature de l'activité d'assurance qui se caractérise par l'inversion de cycle de production. En effet, L'assureur fixe à priori ses primes et connaît son chiffre d'affaire avant de constater à postériori le montant des prestations qu'il devra servir, ce qui rend cette activité complexe et aléatoire. Il importe ainsi pour les assurés aussi bien que pour les partenaires et les actionnaires, que l'entreprise d'assurance soit solvable et ce jusqu'à ce qu'elle ait fini de remplir ses engagements.

La notion de solvabilité est par conséquent essentielle dans l'exercice de l'activité d'assurance. Celle-ci repose sur trois points importants, en premier lieu, la compagnie doit évaluer correctement ses dettes vis-à-vis des assurés, c'est à dire constituer à son passif une provision technique et veille à ce que son montant soit suffisant. En second lieu, face à ses engagements, elle doit posséder d'un montant suffisant d'actifs sûrs, liquides et rentables. En troisième lieu, elle doit posséder plus d'actifs réels que de dettes et engagements, c'est à dire une « marge de solvabilité » permettant à la compagnie de rester solvable même dans l'éventualité d'une perte future. Ces points sont régis par la réglementation prudentielle fixée par l'ACAPS qui exerce une surveillance régulière de la solvabilité des assureurs.

Le contrôle prudentiel vise à réduire ou à mieux maîtriser les risques gérés par les entreprises d'assurance. Il se traduit en pratique par une surveillance financière basée sur la vérification, pour l'ensemble des entreprises, de l'état de solvabilité, de la constitution des provisions techniques et de la représentation de celles-ci par des actifs et leur conformité aux règles mises en place par le législateur. Le cadre réglementaire actuel exige que les provisions soient suffisantes et prudentes pour le règlement intégral des engagements. Il impose également aux compagnies de posséder une marge de solvabilité, cette marge constitue un montant de fonds propres qui doit être supérieur à un niveau minimal « l'exigence de la marge de solvabilité », elle est calculé par une formule forfaitaire se basant sur les primes, la charge des sinistres et les dispositifs de réassurance. Ce cadre fixe également des règles d'investissement, les assureurs doivent en effet détenir des actifs de bonne qualité en représentation de leurs engagements.

Ces éléments constituent une gage de la solidité financière de l'entreprise, ils nécessitent alors toute la vigilance. Les règles adoptées par le cadre actuel révèlent un aspect de prudence mais restent relativement simple et non adéquats au regard des meilleures pratiques à l'international. Ainsi né le projet « Solvabilité Basée sur les Risques », ce cadre prudentiel apporte de nombreux changements significatifs. Parmi eux, une valorisation économique du bilan, en particulier des provisions techniques, afin d'obtenir une vision juste de la situation de l'entreprise. Aussi modifie-t-elle considérablement la détermination de l'exigence de capital règlementaire. Auparavant, cette exigence a été définie d'une façon simpliste à l'aide des primes et des provisions, elle prendra en compte désormais l'ensemble des risques portés par l'assureur. Ce mémoire s'intéresse alors à ces aspects de la nouvelle réglementation qui forment son premier pilier. Le travail qui a été effectué consiste principalement au calibrage de la formule standard pour le calcul du Capital de Solvabilité Requis (CSR), le risque de souscription non vie de façon particulière.

Dans la première partie, nous exposerons le contexte de la mise en place de la Solvabilité Basée sur les Risques. Cette première section devrait permettre au lecteur de prendre connaissance du marché marocain des assurances, de l'ACAPS et des différents éléments qui composent la SBR afin de mieux apprécier la suite.

Nous détaillerons dans la deuxième partie la structure de la formule standard, notamment pour le risque de souscription en non-vie. Le deuxième chapitre de cette partie est une version théorique des méthodes utilisées pour le calibrage de la formule standard, à savoir l'écart-type pour le risque de primes et le risque de provisions. Le modèle Merz and Wuthrich que nous aborderons dans le troisième chapitre sera la base pour construire certaines méthodes permettant d'estimer la volatilité à un an de la provision.

La troisième partie de ce mémoire est consacrée à la mise en pratique de la partie théorique présentée dans ce qui précède, à savoir, les méthodes de calibrage. Pour ce faire, les données utilisées seront brièvement présentées, les hypothèses et les résultats découlant des calculs effectués seront exhibés tour à tour. C'est sur la base des résultats obtenus que sont effectués ses arbitrages qui ont abouti à la conclusion des facteurs finaux.

# Partie I : Contexte

## Chapitre I : Le marché des assurances au Maroc

Le marché marocain est classé 3<sup>ème</sup> dans la région MENA, 2<sup>ème</sup> en Afrique et 50<sup>ème</sup> au monde, avec un montant de primes émises de 38.7 milliards de dirhams, réalisant ainsi une progression de 10.8% par rapport à l'exercice de 2016. Il compte actuellement vingt-trois entreprises d'assurances et de réassurance dont 2 réassureurs.

91,5% des primes émises sont captées par 10 entreprises et les cinq premières collectent, à elles seules, près de 69,6% du chiffre d'affaire. Le podium des compagnies d'assurance reste partagé par Wafa Assurance (20,9% de parts de marché), RMA Assurance (16%) et Saham Assurance (12,4%).

L'assurance Non-vie occupe la première place avec de part de 56,4%. Toutefois, il est à noter que le chiffre d'affaire de la branche Vie a enregistré un taux de croissance annuel moyen de 18,6% entre 2013-2017.

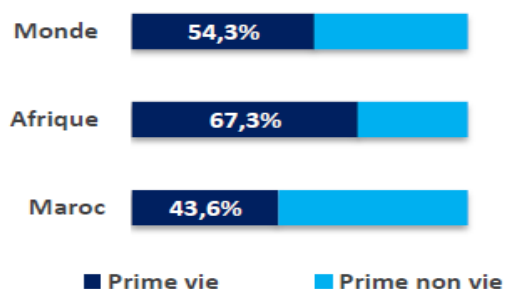


Figure : Ventilation des Primes émises par branche dans le monde, en Afrique et au Maroc en 2017.

### I. Emission d'assurances par sous-catégorie en 2016-2017

Les opérations non vie sont en progression de 5,5% et représentent 56,1% du total de ces affaires. Les opérations vie et capitalisation affichent également un taux d'évolution important (18,8%).

En millions de dirhams	2016	2017	Part dans le total	Variation 2017/2016
<b>Opérations non-vie</b>	<b>20 622,1</b>	<b>21 751,0</b>	<b>56,1%</b>	<b>5,5%</b>
Véhicules terrestres à moteur	9 953,8	10 481,7	27,1%	5,3%
Dont Responsabilité civile	8 543,8	8 908,8	23,0%	4,3%
Accidents corporels - Maladie - maternité	3 652,8	3 922,2	10,1%	7,4%
Dont Maladie – maternité	3 022,0	3 257,8	8,4%	7,8%
Accidents du travail et maladies et professionnelles (AT & MP)	2 174,1	2 222,5	5,7%	2,2%
Incendie et éléments naturels	1 318,4	1 331,7	3,4%	1,0%
Assistance - crédit – caution	1 331,1	1 415,1	3,7%	6,3%
Transport	578,0	604,9	1,6%	4,7%
Responsabilité civile générale	550,2	548,9	1,4%	-0,2%
Assurances des risques techniques	329,3	242,3	0,6%	-26,4%
Autres opérations	734,5	979,4	2,5%	33,3%
<b>Opérations vie et capitalisation</b>	<b>14 292,8</b>	<b>16 984,7</b>	<b>43,9%</b>	<b>18,8%</b>
Epargne	11 087,0	13 617,4	35,2%	22,8%
Décès	2 685,0	2 751,6	7,1%	2,5%
Contrats à capital variable (UC)	493,6	584,9	1,5%	18,5%
Autres opérations vie	27,2	30,8	0,1%	14,2%
<b>TOTAL</b>	<b>34 914,8</b>	<b>38 735,7</b>	<b>100,0%</b>	<b>10,9%</b>

La répartition des émissions d'assurances montre que la branche Epargne préserve une place prépondérante, soit 35,2% du total des primes émises sur les affaires directes. La contribution de l'assurance automobile dans le chiffre d'affaires global vient au deuxième rang avec une part de 27,1%, suivi de l'assurance maladie maternité (10,1%) et de l'assurance accidents du travail (5,7%).

## II. Indicateurs des entreprises d'assurance et de réassurance en 2016-2017

En millions de dirhams	2016	2017	Variation
<b>Primes émises *</b>	<b>35 101,9</b>	<b>38 920,4</b>	<b>10,9%</b>
Vie	14 295,7	16 985,1	18,8%
Non vie	20 806,1	21 935,3	5,4%
<b>Prestations et frais payés *</b>	<b>22 059,3</b>	<b>24 364,3</b>	<b>10,4%</b>
Vie	8 742,8	10 648,6	21,8%
Non vie	13 316,5	13 715,7	3,0%
<b>Charges techniques d'exploitation</b>	<b>7 680,4</b>	<b>7 858,1</b>	<b>2,3%</b>
Charges d'acquisition	3 110,8	3 355,5	7,9%
Autres charges techniques d'exploitation	3 644,8	3 674,2	0,8%
Dotations d'exploitation	924,8	828,4	-10,4%
<b>Marge d'exploitation</b>	<b>615,0</b>	<b>1 365,9</b>	<b>122%</b>
Vie	-162,0	-482,4	-198,0%
Non vie	776,8	1 848,3	138%
<b>Solde de réassurance</b>	<b>-194,0</b>	<b>-1 413,2</b>	<b>-628,0%</b>
Vie	13,9	-15,9	-214,0%
Non vie	-207,9	-1 397,2	-572,0%
<b>Solde Financier</b>	<b>4 589,0</b>	<b>4 937,2</b>	<b>7,6%</b>
Vie	1 106,5	1 410,8	27,5%
Non vie	3 482,7	3 526,3	1,3%
<b>Résultat technique net</b>	<b>5 010,0</b>	<b>4 889,9</b>	<b>-2,4%</b>
Vie	958,4	912,5	-4,8%
Non vie	4 051,6	3 977,4	-1,8%
<b>Résultat Net global</b>	<b>3 191,0</b>	<b>3 835,8</b>	<b>20,2%</b>
<b>Provisions techniques</b>	<b>131 544,6</b>	<b>139 382,9</b>	<b>6,0%</b>
<b>Placements affectés aux opérations d'assurances nets</b>	<b>134 757,6</b>	<b>144 448,8</b>	<b>7,0%</b>
<b>Capital social</b>	<b>5 533,1</b>	<b>5 590,0</b>	<b>1,0%</b>
<b>Fonds Propres</b>	<b>34 075,3</b>	<b>36 013,4</b>	<b>5,7%</b>

\* Brutes de cessions

L'ensemble des compagnies d'assurance et de réassurance ont réalisé en 2017 un résultat net de 3,83 MMDH, en amélioration de 20,2% par rapport à l'exercice précédent. A son niveau, Le résultat net du secteur d'assurances a connu une nette amélioration d'une année à l'autre.

## Chapitre II : L'Autorité de contrôle des Assurance et de la Prévoyance Sociale (ACAPS)

### I. Création de l'ACAPS

L'Autorité de Contrôle des Assurances et de la Prévoyance Sociale (ACAPS) est un établissement public marocain, créé par la loi n° 64-12. Il est doté de la personnalité morale de droit commun et jouit de l'autonomie financière. Créée en remplacement de la Direction des Assurances et de la Prévoyance Sociale (Ministère de l'Economie et des Finances), plusieurs missions relèvent de sa responsabilité et toutes concourent à la réalisation d'objectifs prioritaires que sont ceux de la protection des assurés, adhérents et affiliés et de veille au bon fonctionnement des secteurs soumis à son contrôle.

### II. Organismes contrôlés

L'Autorité exerce son contrôle, conformément au code des assurances, sur les entités suivantes :

-**Entreprises d'assurance** : l'ACAPS est chargée du contrôle de la solvabilité des entreprises d'assurances et de réassurance (EAR), avec pour finalité de protéger les droits des assurés et des bénéficiaires de contrats d'assurance.

-**Réseau de distribution** : L'Autorité étend également son champ de compétences au réseau de distribution (agents, courtiers et des bureaux de gestion directe relevant directement des entreprises d'assurance et de réassurance), et à l'activité de la bancassurance (les banques, les sociétés de financement et les associations de microcrédit qui sont agréées pour la présentation des opérations d'assurances de personnes, d'assistance et de crédit).

-**Retraite** : L'ACAPS est en charge de la définition des modalités de supervision des opérateurs du secteur de la retraite, l'examen des demandes d'approbation de statuts et de règlements des Sociétés Mutuelles de Retraite (SMR) et du contrôle technique et prudentiel permanent des différents régimes de retraite existants.

-**Mutuelle** : Le contrôle de l'ACAPS couvre les volets techniques et prudentiels des sociétés mutualistes portant statut de la mutualité.

-**AMO** : L'ACAPS opère un contrôle sur les activités des organismes gestionnaires de l'Assurance Maladie Obligatoire (les deux caisses CNOPS et CNSS). Son action consiste

également à veiller aux dispositions de la loi n°65-00 relative au Code de la Couverture Médicale de Base.

### III. Missions de l'ACAPS

L'Autorité, dont la mission principale est de structurer le marché des assurances, dispose de larges compétences en matière de régulation et de supervision des secteurs qui lui sont assujettis, et ce dans l'intérêt des assurés, affiliés et bénéficiaires de droits. Elle est ainsi en charge :

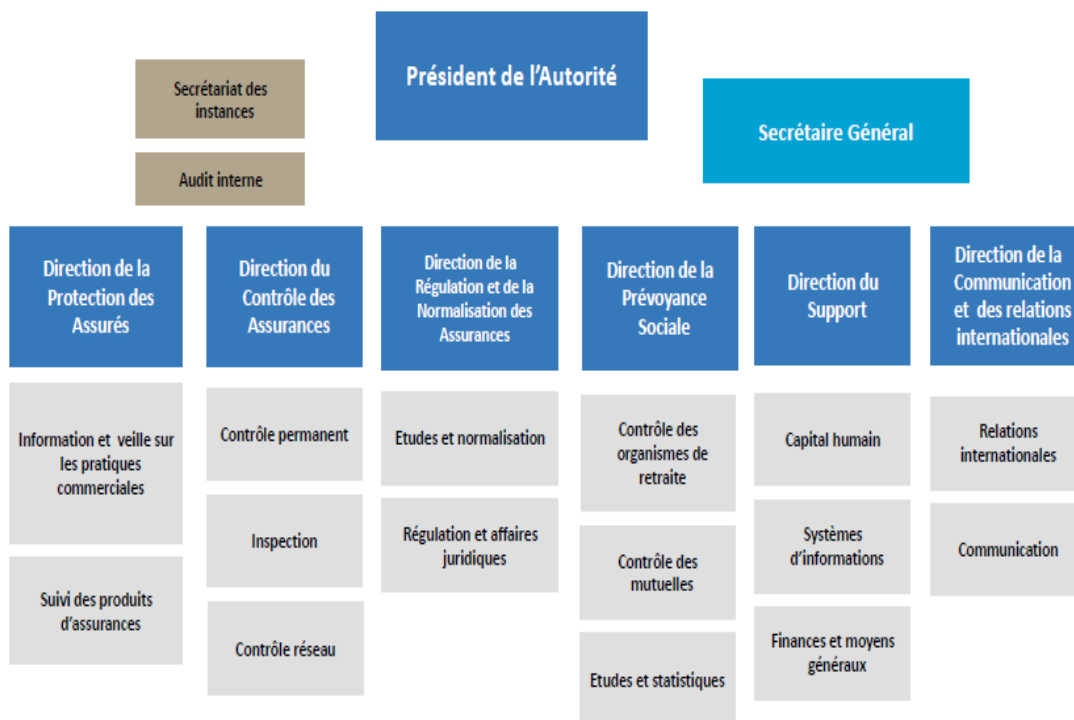
- De la régulation et de la normalisation à travers l'octroi des agréments ou autorisations et la mise en place des règles et normes de fonctionnement du marché.
- Du contrôle de la solvabilité des entreprises d'assurances et de réassurance et de la pérennité financière des régimes et organismes de prévoyance sociale.
- De la veille au respect des règles applicables à chaque secteur par les opérateurs soumis à son contrôle.
- De la protection des assurés, affiliés, adhérents et bénéficiaires de droits.
- Du suivi des pratiques commerciales et l'instruction de toutes les réclamations relatives aux opérations pratiquées par les entités soumises à son contrôle.

L'ACAPS est le représentant du Maroc au sein de l'International Association of Insurance Supervisors (IAIS). C'est un organe normatif en assurance fondé en 1994. Il a pour objectif de promouvoir une supervision des assurances efficaces et cohérentes dans le monde et ce, dans le but de maintenir les marchés d'assurance stables, justes et pérennes pour les assurés et de contribuer à la stabilité financière globalement. L'IAIS regroupe les autorités de contrôle de quelques 200 juridictions dans près de 140 pays, représentant une part de près de 97% des primes d'assurances mondiales.

En coordonnant ses travaux avec des entités responsables de la politique financière internationale et d'autres associations de régulateurs, l'IAIS développe des principes, standards internationaux et orientations relatifs à la supervision du secteur des assurances. Parmi ses normes, on retrouve les « ICP » (International Core Principles) ou autrement les Principes de Base de l'Assurance (PBA). Les ICP s'appliquent dans toutes les juridictions, quel que soit le niveau de développement ou de sophistication des marchés de l'assurance et le type de produits ou de services d'assurance contrôlés. Toutefois, les mesures de contrôle

doivent être appropriées pour atteindre les objectifs fixés en la matière par une juridiction et ne doivent pas aller au-delà de ce qui est nécessaire pour y parvenir. Ceci justifie la flexibilité dont a droit chaque marché afin de se conformer aux exigences internationales.

#### IV. Organigramme de l'Autorité



## Chapitre III : Le cadre prudentiel en devenir SBR Vs le cadre prudentiel actuel

La Solvabilité basée sur les risques est le nouveau cadre réglementaire marocain de la solvabilité des compagnies d'assurance et de réassurance. Il a été mis en place à travers l'amendement de l'article 239 par le projet de loi n° 059-13 modifiant et complétant la loi n° 17-99 portant code des assurances. Ce nouveau cadre prudentiel est né d'une volonté de subvenir aux besoins du marché marocain des assurances en termes de résilience aux risques encourus, mécanismes de gouvernance, conformité aux normes internationales mais également afin de combler les insuffisances du cadre prudentiel actuel.

En fait, la réglementation prudentielle marocaine en vigueur est fondée sur quatre volets :

- Évaluer prudemment les provisions techniques et les placements.
- Avoir des actifs de bonne qualité en représentation des engagements.
- Calcul d'une marge de solvabilité.
- Déterminer des ressources permettant de couvrir cette marge de solvabilité.

Cette approche est relativement simple à appliquer et intuitif pour la prise de décision. Cependant, elle est complètement inadaptée à la situation réelle d'une compagnie d'assurance vis-à-vis des différents risques, ce qui génère des insuffisances liées à ce régime :

- Basé sur des éléments comptables et non économiques.
- Trop simpliste : la marge de solvabilité est basée sur une formule forfaitaire qui ne prend pas en compte de la diversité des risques portés par l'assureur et leurs spécificités.
- Réglementation non cohérente avec la réglementation bancaire (Bâle III).
- Risques associés aux placements mal appréhendés.
- Quasi absence de normes en matière de gouvernance.
- Non prise en compte de la réalité des groupes d'assurance.

Dans l'objectif de remédier à ces insuffisances, et afin de se conformer aux normes internationales de façon structurée, le projet SBR a été introduit en s'organisant en trois niveaux de textes :

- Articles 239 et 239-2 de la loi n°17-99 portant code des assurances.

- Circulaire d'application : projet en consultation.
- Instructions et décisions éventuelles.

La future réglementation se base sur les principes suivants :

- **Proportionnalité & simplicité** : les exigences du nouveau cadre prudentiel doivent tenir compte de la nature, de la taille et de la complexité du secteur des assurances et des différents acteurs du marché.
- **Dialogue** : Il est crucial pour l'Autorité d'être dans une démarche de concertation et de dialogue avec les parties prenantes : à l'écoute des suggestions et des préoccupations des acteurs.
- **Progressivité** : L'Autorité doit tenir compte de la réalité du marché actuelle notamment en termes d'allocation d'actifs (45% des placements en actions). La convergence vers le nouveau dispositif doit ainsi pouvoir se faire progressivement.

Les nouvelles exigences contenues dans le projet s'articulent autour de trois piliers, en l'occurrence des exigences quantitatives de solvabilité (Pilier I), de gouvernance (Pilier II) et d'information (Pilier III) :

## I. Piliers I : Exigences quantitatives

Ce pilier détermine une approche quantitative pour l'appréciation des niveaux de solvabilité des entreprises d'assurance et de réassurance. Il définit une nouvelle vision du bilan, les règles de détermination du Capital de solvabilité requis et le calcul du niveau de Fonds propres Prudentiels.

### 1) Le bilan prudentiel

La SBR s'appuie sur une nouvelle vision du Bilan, les compagnies doivent établir un bilan distinct appelé « Bilan Prudentiel », base préalable au contrôle prudentiel. Alors que le régime actuel repose sur des bilans comptables ; (la valeur des biens est comptabilisée à la valeur d'acquisition) et des provisions réglementaires, cette nouvelle vision prend en considération l'état du marché et des risques.

Le bilan prudentiel comprend outre les rubriques «impôt différé actif», «impôt différé passif»<sup>1</sup> et «Réserve de réconciliation»<sup>2</sup>, les mêmes rubriques du Bilan comptable. En plus, les postes «provisions techniques brutes» et la «part des cessionnaires dans les provisions techniques» ont été remplacés respectivement par «provisions techniques prudentielles» et «part des cessionnaires dans les provisions techniques prudentielles».

Les provisions techniques prudentielles y sont évaluées selon le principe de la meilleure estimation des engagements, le « Best Estimate », en plus d'une évaluation d'une « marge de risque » représentant un coût du capital. Les autres actifs et passifs sont valorisés en suivant une hiérarchie de valorisation qui priorise la valeur de marché. Le but ultime étant, bien évidemment, d'assurer leur solvabilité.

Ce nouveau régime est caractérisé par une prise en compte de tous les risques encourus par les assureurs. Afin de posséder une marge de solvabilité au regard de ces risques, les assureurs devront détenir des garanties sous forme de capital de solvabilité. Ainsi la somme du Capital de Solvabilité Requis et de l'exigence de capital supplémentaire remplacera le montant minimum de la marge de solvabilité dans la réglementation actuelle.

## 2) Le capital de solvabilité requis

Le Capital de Solvabilité Requis (CSR) est l'équivalent de la marge de solvabilité dans la réglementation actuelle. Il capture la perte inattendue à supporter dans le cas d'un scénario catastrophe avec une probabilité d'occurrence très faible. Ce scénario peut résulter de plusieurs risques, ceux-ci sont schématisés ainsi :

---

<sup>1</sup> L'impôt différé actif/passif est calculé en tenant compte des opérations réalisées au cours d'un exercice et qui n'auront d'incidences fiscales que sur un exercice ultérieur.

<sup>2</sup> La réserve de réconciliation correspond à la différence entre l'actif net SBR ajusté et le capital pur. Elle inclut le montant correspondant aux bénéfices futurs attendus.

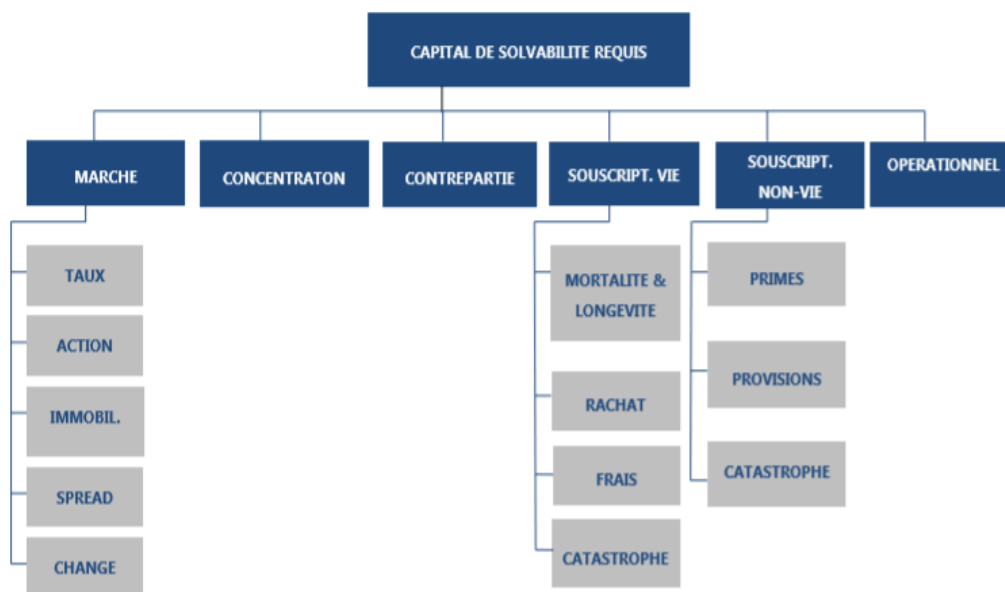


Figure : Cartographie des risques considérés dans le CSR

Nous définissons ci-après chacun de ces modules de risque :

**Risque de souscription** : le risque de perte ou de changement défavorable de la situation financière, en raison d'hypothèses inadéquates en matière de sinistralité, de tarification et de provisionnement ;

- Le risque de souscription en vie tient compte du risque de mortalité ou de longévité, risque de rachat, risque de frais de gestion et risque de catastrophe.
- Le risque de souscription en non vie est mesuré en fonction du risque de primes, du risque de provisions, et du risque catastrophe.

**Risque de marché** : le risque de perte ou de changement défavorable de la situation financière résultant, directement ou indirectement, de fluctuations affectant le niveau de la valeur des actifs, des passifs et des instruments financiers. Il est déterminé en fonction du risque immobilier, risque action, risque de taux, risque de spread et risque de change ;

**Risque de spread** (marge de crédit): le risque de perte ou de changement défavorable de la situation financière résultant des changements touchant les marges additionnelles par rapport aux taux de référence exigées par les investisseurs sur les emprunts émis par des entités autres que l'État ;

**Risque de contrepartie** : le risque de perte ou de changement défavorable de la situation financière résultant d'un défaut de paiement d'une contrepartie ou d'une dégradation de sa qualité de crédit. Il correspond à la somme du risque de contrepartie des cessionnaires et risque de contrepartie des assurés ;

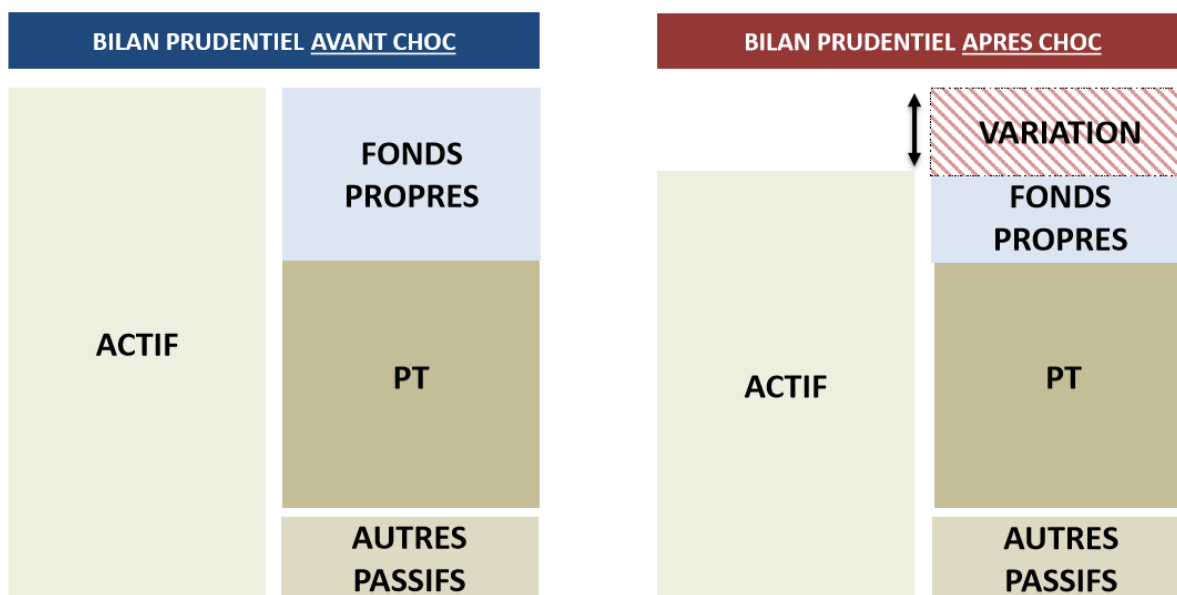
**Risque opérationnel** : le risque de perte ou de changement défavorable de la situation financière résultant de procédures internes, de membres du personnel, de systèmes inadéquats ou défectueux, ou d'événements extérieurs ;

**Risque de concentration** : le risque de perte ou de changement défavorable de la situation financière résultant d'un manque de diversité des émetteurs auxquels l'entreprise d'assurances et de réassurance est exposée. Autrement, il correspond à la perte des fonds

propres qui résulterait de la baisse des actifs associés à un ensemble d'émetteurs appartenant au même groupe.

On envisage deux approche de pour le calcul du CSR :

- Approche par scénario : la charge en capital sera calculée sur la base du bilan prudentiel. Elle est égale à la variation de fonds propres correspondant à la réalisation du choc défavorable.



- Approche forfaitaire: la charge en capital est calculée à partir d'une formule mathématique (application d'un facteur à une assiette).

Nous nous attarderons plus tard sur les modalités de son calcul qui nous intéressent dans ce rapport.

### 3) L'exigence de capital supplémentaire

L'Autorité peut exiger un capital supplémentaire au capital de solvabilité, lorsqu'elle constate que les hypothèses de détermination du capital de solvabilité définies auparavant s'écartent du profil de risque de l'entreprise d'assurances et de réassurance ou lorsque son système de gouvernance ne répond pas aux exigences prévues au circulaire.

### 4) Les fonds propres

Les entreprises d'assurance étaient obligées de constituer une marge de solvabilité, les éléments constitutifs de cette marge seront les fonds propres dans SBR. Ceux-ci

constitueront les éléments éligibles à la couverture du capital de solvabilité requis et de l'exigence de capital supplémentaire.

Les fonds propres sous SBR sont constitués de fonds propres de catégorie 1 et de fonds propres de catégorie 2 selon leur niveau de qualité en se basant sur les cinq critères suivants : subordination, capacité d'absorption, permanence, perpétuité et absence de charges financières.

Fonds propres de catégorie 1	Fonds propres de catégorie 2
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Capital social appelé et versé</li> <li>• Fonds d'établissement</li> <li>• Emprunts pour augmentation du fonds d'établissement</li> <li>• Primes d'émission, de fusion, d'apport</li> <li>• Ecart de réévaluation</li> <li>• Réserve légale</li> <li>• Autres réserves non liées à des engagements</li> <li>• Report à nouveau</li> <li>• Fonds social complémentaire</li> <li>• Résultats nets en instance d'affectation</li> <li>• Résultat net de l'exercice</li> <li>• Les dettes subordonnées dans certaines conditions</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• <b>Reserve de réconciliation si positive</b></li> <li>• Capitaux appelés non versés</li> <li>• Dettes subordonnées dans certaines conditions</li> </ul>
<ul style="list-style-type: none"> <li>– Le montant de la valeur de ses propres actions que détient l'entreprise d'assurance et de réassurance ;</li> <li>– Les dividendes, distributions et charges prévisibles ;</li> <li>– Les engagements donnés hors bilan, au cas par cas ;</li> <li>– <b>La réserve de réconciliation lorsque celle-ci est négative ;</b></li> <li>– <b>Les participations de l'entreprise d'assurance et de réassurance dans certaines conditions.</b></li> </ul>	

Figure 1 : Décomposition des fonds propres

Ces fonds propres doivent toujours être supérieurs au Capital de Solvabilité Requis, et 70% au minimum de ce dernier doit être représenté par des fonds propres de catégorie 1.

## II. Pilier II : Gouvernance et exigences qualitatives

La gouvernance des compagnies d'assurance fait également partie des volets modifiés par la nouvelle réforme. En effet, les assureurs devront disposer d'un manuel général de gouvernance décrivant les principaux organes décisionnels, d'administration et de gestion, leurs responsabilités, leur fonctionnement, leur composition ainsi que les principes et les règles de l'élection, de la nomination ou de la désignation de leurs membres. Les principes de gouvernance devront être écrits et validés par le Conseil et transmis à l'ACAPS.

Les compagnies devront alors adopter un système de gouvernance et une gestion appropriées, qui prennent en compte la nature, le volume et la complexité de leur activité,

ainsi que des risques y afférents. Outre ce système de gouvernance, l'Autorité envisage aussi un système d'audit, de contrôle interne et de gestion des risques performants via la mise en place d'un manuel de procédures de contrôle interne, révisé à intervalles réguliers et tenant compte des audits internes et externes.

L'objectif étant d'introduire une vraie culture de risque au sein du secteur de l'assurance, ce pilier s'avère aussi structurant que le premier car à travers ses exigences qualitatives, il permet d'appliquer l'approche quantitative en renforçant les fonctions clés suivantes :

-**La fonction de gestion des risques** : assiste et conseille la direction générale à la mise en œuvre du système de gestion des risques, donne un avis sur la suffisance des provisions techniques et identifie les risques émergents.

-**La fonction actuarielle** : coordonne les calculs actuariels et prudentiels, garantit le caractère approprié des méthodes et émet un avis sur la politique globale de souscription. Elle établit un rapport actuariel qu'elle soumet à la direction générale.

-**La fonction de vérification de la conformité** : garantit la conformité à la réglementation et aux politiques fixées par le conseil ou la direction générale. Elle conseille cette dernière et informe le conseil d'administration de tout manquement important.

-**La fonction d'audit interne** : complètement indépendante et non influençable par la direction générale, elle met en œuvre le plan d'audit interne approuvé par le conseil d'administration. Elle établit un rapport annuel d'audit interne destiné au conseil d'administration et contenant les actions de contrôle effectués et les insuffisances relevées ainsi que les mesures correctrices y afférentes.

### III. Piliers II : Informations

Le projet est né avec l'ambition de mesurer la solvabilité d'un organisme assureur en fonction de son profil de risque. Mais il vise également le renforcement du contrôle et de l'obligation pour les assureurs de justifier de leur solvabilité, et ce à travers une communication transparente avec l'ACAPS et avec le public en élaborant des états prudentiels et statistiques et des rapports narratifs. La mise en œuvre de cette communication repose sur :

- Une politique de qualité des données qui en assure l'exhaustivité, la pertinence et l'exactitude.
- Un système d'information moderne et sécurisé produisant des informations complètes, fiables et à jour.
- Des programmes d'extraction de données suffisamment sécurisés et intègres dont les responsables sont clairement identifiés.

Concernant les risques liés au système d'information, le régulateur va exiger des compagnies la mise en place de PCA (plan de continuité d'activité), et d'assurer un audit externe des SI au moins tous les cinq ans.

**Partie II : L'exigence en capital  
relative au risque de souscription  
Non Vie**

## Chapitre I : La formule standard en risque de souscription Non-vie

Le cadre prudentiel actuel se base sur des formules forfaitaires pour définir la marge de solvabilité. Cette marge ne tient pas en compte tous les risques portés par l'assureur, elle ne reflète pas, par conséquent, les risques qu'il encourt réellement. La nouvelle vision de la SBR retient un modèle additif, le Capital de Solvabilité Requis y est calculé, selon la formule standard, comme la somme des CSR de chaque module de risque. Ce chapitre explicite la nouvelle vision de la SBR en termes de marge de solvabilité et le calibrage de la formule standard pour le risque de souscription Non vie.

### I. Vue d'ensemble sur le risque de souscription Non Vie (primes et provisions)

Par définition, le risque désigne tout événement aléatoire pouvant réduire la capacité de l'assureur à faire face à ses engagements. Le risque peut avoir une source commerciale et une source financière. Le risque commercial est lié à la vente des contrats, aux différents problèmes techniques, juridiques et administratifs. Le risque financier provient de l'incertitude sur la valeur des placements et leurs rendements.

L'assureur doit alors constituer un capital de solvabilité requis, celui-ci est constitué de la somme des exigences de capital relatives aux différents risques dont le risque de souscription Non Vie. Ce risque représente la contribution la plus importante en termes de besoin de capital dans le calcul du CSR. Il découle des engagements d'assurance non-vie de l'entreprise et reflète le risque de perte ou de variation défavorable de la valeur des passifs d'assurance, dû à une tarification ou un approvisionnement inadéquats.

Le capital de solvabilité requis y afférent tient compte de l'incertitude pesant sur les résultats le cadre des engagements existants, ainsi que du nouveau portefeuille dont la souscription est attendue dans les douze mois à venir. Dans le cadre de la SBR, ce capital est calculé comme une somme des exigences de capital relatives aux sous-modules de risque suivants:

- **Risque de primes** : le risque de perte, ou de changement défavorable de la valeur des passifs d'assurance, résultant des fluctuations affectant la date de survenance, la fréquence et la gravité des événements assurés.

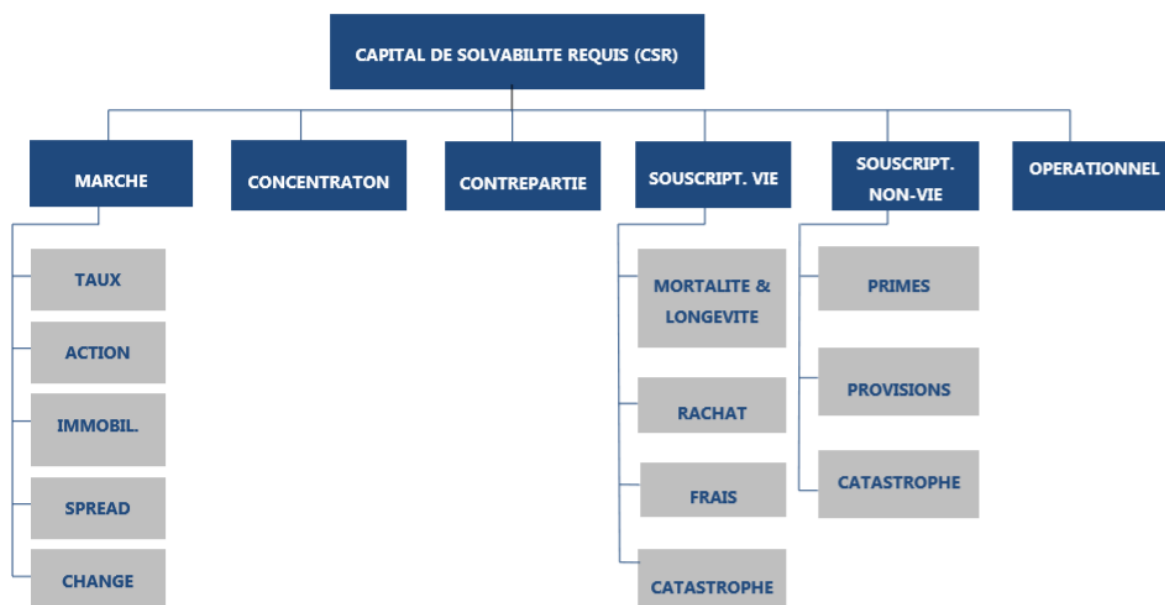
- **Risque de provisions** : le risque de perte, ou de changement défavorable de la valeur des passifs d'assurance, résultant des fluctuations affectant la date et le montant des règlements de sinistres.

## II. Présentation de la formule standard :

Le SCR (Solvency Capital Requirement : Capital de Solvabilité Requis) correspond à un niveau de capitaux propres, évalué sur une base réaliste, et nécessaire pour assurer la solvabilité économique d'une entreprise d'assurances à un niveau de probabilité et un horizon de temps donné. Dans le cadre de la SBR :

- l'horizon est de **1 an** ;
- le niveau de confiance est de **99.5 %** ;
- la mesure du risque est une mesure de type **Value-at-Risk (VaR)**.

La détermination du capital de solvabilité requis en formule standard s'établit sur la base des différents modules et sous-modules des risques présents dans la figure ci-dessous :



Chaque module de risque est calibré sur la base d'une mesure de la valeur en risque (Value-at-Risk), avec un niveau de confiance de 99,5% à l'horizon d'un an.

Le capital de solvabilité requis regroupe le capital requis pour couvrir ces six catégories de risques, il est calculé comme l'agrégation des exigences en capital pour chacun des risques selon la formule suivante :

$$SCR = \sum_i SCR_i$$

Où :

- $SCR_i$  : L'exigence de capital relative au module de module de risque  $i$ .

Dans le cadre de ce mémoire, nous nous intéresserons au module « Souscription Non Vie ». Le Capital de Solvabilité y afférent noté  $SCR_{non\ vie}$  regroupe le capital requis pour couvrir les risques de primes, provisions et catastrophe. Il est calculé selon la formule suivante :

$$SCR_{non\ vie} = SCR_{primes} + SCR_{provisions} + SCR_{catastrophe}$$

Où :

- $SCR_{primes}$  : L'exigence de capital relative au risque de primes.
- $SCR_{provisions}$  : L'exigence de capital relative au risque de provisions.
- $SCR_{catastrophe}$  : L'exigence de capital relative au risque de catastrophe.

L'exigence de capital relative à chaque sous-module de risque  $SCR_i$  est le produit d'une fonction de la volatilité et d'un volume  $V$ .

$$SCR_i = \rho(\sigma).V$$

Où :

- $V$  : le volume pour le risque de primes et provisions. Il correspond à la somme des volumes de primes et provisions des différentes branches notées « lob » :

$$V = \sum_{lob} V_{lob}$$

Pour chaque ligne d'activité « lob », le volume pour le risque de primes et provisions  $V_{lob}$  est défini comme la somme du volume de primes et du volume de provisions :

$$V_{lob} = V_{primes,lob} + V_{provisions,lob}$$

Avec :

- $V_{provisions,lob}$  : Best Estimate de sinistres net de réassurance.
- $V_{primes,lob} = \max(P_{lob}; P_{last,lob}) + FP_{existing,lob} + FP_{future,lob}$

Où :

- $P_{lob}$  : prévision de primes acquises nettes des 12 prochains mois ;
  - $P_{last,lob}$  : primes acquises nettes des 12 derniers mois ;
  - $FP_{existing,lob}$  : prévisions de primes acquises nettes au-delà des 12 prochains mois pour des contrats déjà existants (valeur actuelle)
  - $FP_{future,lob}$  : prévisions de primes acquises nettes au-delà des 12 prochains mois pour des contrats souscrits dans les 12 prochains mois (valeur actuelle)
- Pour simplifier, on considère que pour chaque ligne d'activité lob :

$$V_{prime,lob} = P_{last,lob}$$

- $\sigma$  : Ecart-type combiné des risques de primes et provisions. Il est calculé comme suit :

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{V^2} \sum CorrLob_{r,c} \cdot \sigma_r \cdot \sigma_c \cdot V_r \cdot V_c}$$

Avec :

- $r, c$  : indices qui désignent les lignes d'activité ;
- $V_r$  et  $V_c$  : les volumes pour le risque de primes et provisions des lignes d'activité  $r$  et  $c$  ;
- $CorrLob_{r,c}$  : Les corrélations entre les lignes d'activité  $r$  et  $c$  ;
- Pour chaque ligne d'activité « lob », l'écart-type combiné de primes et provisions  $\sigma_{lob}$  se calcule en fonction de l'écart-type lié au risque de primes  $\sigma_{primes,lob}$ , de l'écart-type lié au risque de provisions  $\sigma_{provisions,lob}$  et de la corrélation entre le risque de primes et le risque de provisions  $Corr_{primes,provisions}$  comme suit :

$$\sigma_{lob} = \frac{\sqrt{\sigma_{prime,lob}^2 \cdot V_{prime,lob}^2 + 2 \cdot Corr_{prime,provisions} \cdot \sigma_{prime,lob} \cdot \sigma_{provisions,lob} \cdot V_{prime,lob} \cdot V_{provisions,lob} + \sigma_{provisions,lob}^2 \cdot V_{provisions,lob}^2}}{V_{prime,lob} + V_{provisions,lob}}$$

- $\rho(\sigma)$  est la fonction de l'écart-type combiné. Son expression correspond à l'hypothèse que le risque sous-jacent suit une loi log normale :

$$\rho(\sigma) = \frac{\exp(N_{0,995} \cdot \sqrt{\log(\sigma^2 + 1)})}{\sqrt{\sigma^2 + 1}} - 1 \approx 3 \cdot \sigma$$

Avec :

- $N_{0,995}$  est le quantile d'ordre 99.5% de la loi normal centrée réduite.

En retenant une VaR à 99.5% la fonction  $\rho(\sigma)$  pourrait être approximée à  $3\sigma$ . Son expression est démontrée en annexe.

Vu la méthode retenu pour le calcul de l'exigence de capital relative, il en ressort que les paramètres à calibrer pour chaque ligne d'activité « lob » sont :

1. L'écart-type lié au risque de primes  $\sigma_{prime,lob}$
2. L'écart-type lié au risque de provisions  $\sigma_{provisions,lob}$

Il est également nécessaire de calibrer :

3. La corrélation entre le risque de primes et le risque de provisions  $Corr_{prime,reserve}$
4. Les corrélations entre les différentes lignes d'activité  $r,c$  :  $CorrLob_{r,c}$

Dans le cadre de ce mémoire, nous nous intéresserons plus particulièrement au calibrage des paramètres 1 et 2 ci-dessus. Nous présentons dans les chapitres suivants les méthodes utilisées ainsi que leur soubassement théorique, notamment le modèle de Merz and Wuthrich que nous aborderons dans le chapitre suivant.

## Chapitre II : Mesure de la volatilité des provisions à horizon un an

Habituellement, le risque de provisionnement étudié est le risque à l'ultime. Il s'agit de la différence entre la charge finale estimée aujourd'hui et sa valeur réelle à l'ultime. SBR adopte une vision à court terme, en appréhendant le risque de provisionnement à un horizon d'un an. Ce dernier correspond en fait au risque portant sur la ré-estimation du Best Estimate entre deux années.

Le modèle de Merz-Wuthrich propose une formule fermée pour l'estimation de ce risque décrite dans « Uncertainty in the claim development result in the chain ladder method », nous l'introduisons en se basant sur une simplification décrite par les mêmes auteurs dans « Modelling the Claims Development Result for Solvency Purposes » (Casualty Actuarial Society EForum, 542-568).

De manière très simple, ce modèle n'est autre qu'une extension du modèle de Mack dont le but est d'estimer la volatilité des provisions à l'ultime. En plus d'une modélisation probabiliste de la réserve ultime fondée sur la méthode Chain Ladder, il permet de quantifier la marge d'erreur existante pour chaque estimation faite, c'est-à-dire l'erreur de prédiction concernant les résultats du développement des sinistres sur la période d'un an.

### **Méthodologie :**

Nous nous plaçons à l'année  $n$  et considérons l'année suivante  $n + 1$ .

On définit la variable aléatoire « *Claims Development Result* » ou *CDR* qui correspond à la différence entre deux estimations successives du Best Estimate en  $n$  et  $n + 1$ . Le Claims Development Result réel pour l'année  $]n, n + 1]$  est donné par :

$$\begin{aligned} CDR_i(n + 1) &= \mathbb{E}(C_{i,ult}|\mathcal{D}_n) - \mathbb{E}(C_{i,ult}|\mathcal{D}_{n+1}) \\ &= \mathbb{E}(R_i|\mathcal{D}_n) - (X_{i,n-i+2} + \mathbb{E}(R_i|\mathcal{D}_{n+1})) \end{aligned}$$

Où :

- $X_{i,n-i+2} = C_{i,n-i+2} - C_{i,n-i+1}$  : Paiements incrémentaux
- $(R_i|\mathcal{D}_n)$  : Provisions pour l'exercice de survenance  $i$  constituées en  $n$
- $D_n = \{C_{ij} ; i + j \leq n + 1\}$  : Information disponible en  $t = n$  (le triangle de développement connu à cet instant).
- $D_{n+1} = \{C_{ij} ; i + j \leq n + 2\}$  : Information disponible en  $t = n + 1$

Le Claims Development Result réel agrégé est la somme des Claims Development Result par année de survenance, soit :

$$CDR = \sum_{i=2}^N CDR_i(n + 1)$$

Les informations connues en  $n$  étant également disponibles en  $n + 1$ , il vient  $\mathcal{D}_n \subset \mathcal{D}_{n+1}$  et en utilisant la propriété martingale de  $(E([C_{i,n}/D_n]))$ , il est possible de trouver :

$$\mathbb{E}(CDR(N + 1)|\mathcal{D}_n) = 0$$

Cette mesure est également appelée boni-mali en pratique. Nous ne connaissons pas sa vraie valeur, il est estimé pour une année de survenance par :

$$\begin{aligned} \overline{CDR}_i(n + 1) &= \hat{C}_{i,ult}^n - \hat{C}_{i,ult}^{n+1} \\ &= \hat{R}_i^n - (\hat{X}_{i,n-i+2} + \hat{R}_i^{n+1}) \end{aligned}$$

Où :

- $\hat{R}_i^n = \hat{C}_{i,ult}^n - C_{i,n-i+1}$  : Estimateur sans biais de  $\mathbb{E}(R_i|\mathcal{D}_n)$
- $\hat{R}_i^{n+1} = \hat{C}_{i,ult}^{n+1} - C_{i,n-i+2}$  : Estimateur sans biais de  $\mathbb{E}(R_i|\mathcal{D}_{n+1})$

L'objectif est de déterminer l'erreur de prédiction du  $CDR_i(n + 1)$ . Nous utilisons ainsi l'erreur quadratique moyenne (*MSEP*), cette erreur mesure l'incertitude entre la valeur nulle et le *CDR* observable à la fin de l'année comptable  $n$ , elle est définie par :

$$MSEP_{\overline{CDR}_i(n+1)|\mathcal{D}_n}(0) = \mathbb{E}\left(\left(\overline{CDR}_i(n + 1) - 0\right)^2|\mathcal{D}_n\right)$$

L'estimateur de cette erreur est donné par :

$$\widehat{MSEP}_{\overline{CDR}_i(n+1)|\mathcal{D}_n}(0) = (\hat{C}_{i,n}^n)^2 (\hat{\Gamma}_{i,n}^n + \hat{\Delta}_{i,n}^n)$$

Où :  $\forall i \in \{2, \dots, n\}$

$$\hat{\Delta}_{i,n}^n = \frac{\hat{\sigma}_{n-i+1}^2}{(\hat{f}_{n-i+1}^n)^2 S_{n-i+1}^n} + \sum_{j=n-i+1}^{n-1} \left(\frac{C_{n-j,j}}{S_j^{n+1}}\right)^2 \frac{\hat{\sigma}_j^2}{(\hat{f}_j^n)^2 S_j^n}$$

$$\hat{\Gamma}_{i,n}^n = \hat{\Phi}_{i,n}^n + \hat{\Psi}_{i,n}^n$$

$$\hat{\Phi}_{i,n}^n = \sum_{j=n-i+1}^{n-1} \left(\frac{C_{n-j,j}}{S_j^{n+1}}\right)^2 \frac{\hat{\sigma}_j^2}{(\hat{f}_j^n)^2 C_{n-j,j}}$$

$$\widehat{\Psi}_{i,n}^n = \frac{\widehat{\sigma}_{n-i+1}^2}{(\widehat{f}_{n-i+1}^n)^2 C_{i,n-i+1}}$$

$$\widehat{f}_j^n = \frac{\sum_{i=1}^{n-j} C_{i,j+1}}{S_j^n} \quad \text{où } S_j^n = \sum_{i=1}^{n-j} C_{i,j}$$

$$\widehat{f}_j^{n+1} = \frac{\sum_{i=1}^{n-j+1} C_{i,j+1}}{S_j^{n+1}} \quad \text{où } S_j^{n+1} = \sum_{i=1}^{n-j+1} C_{i,j}$$

$$\widehat{\sigma}_j^2 = \begin{cases} \frac{1}{n-j} \sum_{i=1}^{n-j} C_{i,j} \cdot \left( \frac{C_{i,j+1}}{C_{i,j}} - \widehat{f}_j^n \right)^2 & ; \text{Pour } j = 1, \dots, n-2 \\ \min(\widehat{\sigma}_{n-2}^2; \widehat{\sigma}_{n-3}^2; \frac{\widehat{\sigma}_{n-2}^4}{\widehat{\sigma}_{n-3}^2}) & ; \text{Pour } j = n-1 \end{cases}$$

Pour agréger tous les exercices de survénance, Merz propose dans son article la formule suivante :

$$\widehat{MSEP}_{\sum_{i=1}^n CDR_i(n+1)|\mathcal{D}_n}(0) = \sum_{i=1}^n \widehat{MSEP}_{CDR_i(n+1)|\mathcal{D}_n}(0) + 2 * \sum_{k>i>0} \widehat{C}_{i,n}^n \cdot \widehat{C}_{k,n}^n \cdot (\widehat{Y}_{i,n}^n + \widehat{\Lambda}_{i,n}^n)$$

Où :

$$\widehat{\Lambda}_{i,n}^n = \frac{C_{i,n-i+1}}{S_{n-i+1}^{n+1}} * \frac{\widehat{\sigma}_{n-j+1}^2}{(\widehat{f}_{n-i+1}^n)^2 S_{n-j+1}^n} + \sum_{j=n-i+1}^{n-1} \left( \frac{C_{n-j,j}}{S_j^{n+1}} \right)^2 \frac{\widehat{\sigma}_j^2}{(\widehat{f}_j^n)^2 S_j^n}$$

$$\widehat{Y}_{i,n}^n = \widehat{\Phi}_{i,n}^n + \frac{\widehat{\sigma}_{n-i+1}^2}{(\widehat{f}_{n-i+1}^n)^2 S_{n-i+1}^n}$$

En effet, le biais de l'estimation du  $CDR$  observable pour tous les exercices de survénance vu en  $n$  est estimé par :

$$(u - \text{biais})^2 = \widehat{E}_{\mathcal{D}_n} \left( E \left( \sum_{i=1}^n CDR_i(n+1) | \mathcal{D}_n \right)^2 \right) = \sum_{i=2}^N (\widehat{C}_{i,j}^n)^2 \widehat{\Delta}_{i,n}^n + 2 \sum_{k>i>0} \widehat{C}_{i,n}^n \cdot \widehat{C}_{k,n}^n \cdot \widehat{\Lambda}_{i,n}^n$$

La variance de processus des  $CDR$  observables pour tous les exercices de survénance, avec l'information  $\mathcal{D}_n$  est estimée par :

$$\widehat{Var} \left( \sum_{i=1}^n CDR_i(n+1) | \mathcal{D}_n \right) = \sum_{i=2}^N \widehat{\Gamma}_{i,n}^n + 2 \sum_{k>i>0} \widehat{Y}_{i,n}^n$$

L'erreur de prédiction autour de 0 du  $CDR$  observable est alors donnée par :

$$\widehat{MSEP}_{\widehat{CDR}_i(n+1)|\mathcal{D}_n}(0) = (u - \text{biais})^2 + \widehat{\text{Var}} \left( \sum_{i=1}^n CDR_i(n+1) | \mathcal{D}_n \right)$$

## Chapitre III : Revue de littérature des méthodes de calibrage

Ce chapitre évoque une multitude de méthodes qui ont été développées pour calibrer les volatilités liées aux risques de primes et de provisions. Ces méthodes sont inspirées de la cinquième étude d'impact QIS5.

### I. Risque de primes

Puisque notre indicateur d'exposition au risque est une prime, le facteur de risque lié à la prime est calculé en tant qu'écart-type des ratios de sinistralité par année de survenance pour chaque entreprise. Il s'agit du ratio Sinistres à Primes de l'année  $i$  (dit encore Loss Ratio) qui est très utilisé en assurance non-vie.

Les méthodes de calibrage sont établies par branche d'activité représentée par l'indice  $lob$ . Pour but de simplification, il est supposée que la branche «  $lob$  » est figée.

#### a) Méthode 1

##### **Notations :**

- $U_{lob,i,e}$  : Charge ultime par ligne d'activité, année de survenance et entreprise (estimées à la fin de la première année de développement).
- $V_{lob,i,e}$  : Primes acquises par ligne d'activité, année de survenance et entreprise.
- $N_{lob,e}$  : Profondeur d'historique par ligne d'activité et entreprise.
- $V_{lob,e} = \frac{1}{N_{lob,e}} \sum_i V_{lob,i,e}$  : Prime acquise moyenne par ligne d'activité et entreprise.
- $\sigma_{lob,e}$  : Ecart-type du ratio de sinistralité par ligne d'activité et entreprise.

##### **Calculs intermédiaires :**

Cette première méthode consiste à prendre l'historique des charges ultimes et des primes acquises par année de survenance pour chaque entreprise, calculer ensuite les primes acquises moyennes et le Bonis/Malis par année de survenance. Un estimateur de la variance du Bonis/Malis est donné par :

$$Var_{Bonis/Malis}(lob, e) = \frac{1}{N_{lob,e} - 1} \times \frac{1}{V_{lob,e}} \times \sum_i \frac{1}{V_{lob,i,e}} (Bonis/Malis_{lob,i,e})^2$$

Avec :

$$Bonis/Malis_{lob,i,e} = U_{lob,i,e} - V_{lob,i,e} \cdot S/P_{lob,e}$$

$$S/P_{lob,e} = \frac{\sum_i U_{lob,i,e}}{\sum_i V_{lob,i,e}}$$

$$V_{lob,e} = \frac{1}{N_{lob,e}} \sum_i V_{lob,i,e}$$

On obtient ainsi :

$$\sigma_{lob,e} = \sqrt{Var_{Bonis/Malis}(lob, e)}$$

### **Calcul final de l'écart-type lié au risque de primes**

Pour chaque ligne d'activité, l'écart-type lié au risque de primes est obtenu comme une moyenne des écarts-type par entreprise pondérée par le poids du volume défini comme suit :

$$\sigma_{lob} = \sum_e \frac{V_{lob,e}}{\sum_e V_{lob,e}} \cdot \sigma_{lob,e}$$

### **b) Méthode 2**

#### **Notations :**

- $U_{lob,i,e}$  : Charge ultime par ligne d'activité, année de survenance et entreprise (estimées à la fin de la première année de développement).
- $V_{lob,i,e}$  : Volume des primes acquises par ligne d'activité, année de survenance et entreprise.
- $N_{lob,e}$  : Profondeur d'historique par ligne d'activité et entreprise.
- $V_{lob,e} = \frac{1}{N_{lob,e}} \sum_i V_{lob,i,e}$  : Prime acquise moyenne par ligne d'activité et entreprise.
- $\sigma_{lob,e}$  : Ecart-type du ratio de sinistralité par ligne d'activité et entreprise.
- $\mu_{lob,e}$  : S/P par ligne d'activité et entreprise.
- $\beta_{lob}^2$  : Constante de proportionnalité de la variance des S/P par ligne d'activité.
- $\varepsilon_{lob,i,e}$  : Une distribution aléatoire centrée réduite non spécifiée.
- $M_{lob,i,e}$  : Moyenne du logarithme de la variable  $U_{lob,i,e}$ .
- $S_{lob,i,e}$  : Ecart-type du logarithme de la variable  $U_{lob,i,e}$ .

#### **Hypothèses :**

Pour toutes les entreprises, toutes les années et toutes les lignes d'activité (Lob) :

- La charge ultime prévue est proportionnelle aux primes acquises
- Pour chaque entreprise, le ratio S/P reste constant pour toutes les années de survenance. Il peut être différent d'une entreprise à l'autre.
- La variance de la charge ultime est proportionnelle aux primes acquises
- La distribution de la charge ultime est log normale ;
- L'approche par maximum de vraisemblance est appropriée.

#### **Calculs intermédiaires :**

La distribution de la charge ultime étant log normale par hypothèse, on peut la modéliser comme suit :

$$U_{lob,i,e} \sim V_{lob,i,e} \mu_{lob,e} + \sqrt{V_{lob,i,e}} \beta_{lob} \cdot \varepsilon_{lob,i,e}$$

A partir de cette distribution, nous déduisons l'espérance et la variance de  $U_{lob,i,e}$  :

$$E(U_{lob,i,e}) = V_{lob,i,e} \mu_{lob,e} \quad \text{et} \quad V(U_{lob,i,e}) = V_{lob,i,e} \beta_{lob}^2$$

Ceci nous permet de formuler les paramètres de la distribution log normale suivants :

$$S_{lob,i,e} = \sqrt{\log\left(1 + \frac{\beta_{lob}^2}{V_{lob,i,e}\mu_{lob,e}^2}\right)}$$

$$M_{lob,i,e} = \log(V_{lob,i,e} \cdot \mu_{lob,e}) - \frac{1}{2} S_{lob,i,e}^2$$

$$L = \prod_e \prod_{i=1}^n f(U_{lob,i,e}; M_{lob,i,e}, S_{lob,i,e})$$

$$L = \prod_e \prod_{i=1}^n \frac{1}{U_{lob,i,e} \sqrt{2\pi S_{lob,i,e}^2}} \exp\left(-\frac{(\log(U_{lob,i,e}) - M_{lob,i,e})^2}{2S_{lob,i,e}^2}\right)$$

$$\text{Log } L = \sum_e \sum_i -\log(U_{lob,i,e}) - \frac{1}{2} \log(2\pi) - \log(S_{lob,i,e}) - \frac{(\log(U_{lob,i,e}) - M_{lob,i,e})^2}{2S_{lob,i,e}^2}$$

La résultante simplifiée de la log-vraisemblance s'écrit alors :

$$\text{Log } L = \sum_{i,e} \left(-\log(S_{lob,i,e}) - \frac{(\log(U_{lob,i,e}) - M_{lob,i,e})^2}{2S_{lob,i,e}^2}\right)$$

A l'optimum global de la fonction log vraisemblance, il est obtenu des estimations de  $\mu_{lob,e}$  et  $\beta_{lob}^2$  que nous utiliserons pour obtenir le paramètre  $\sigma_{lob,e}$

$$\sigma_{lob,e} = \frac{\widehat{\beta}_{lob}}{\sqrt{V_{lob,e}}}$$

Où :

$$V_{lob,e} = \frac{1}{N_{lob,e}} \sum_i V_{lob,i,e}$$

Pour chaque ligne d'activité, l'écart-type lié au risque de primes est obtenu comme une moyenne pondérée des écarts-type par entreprise.

### **Calcul final de l'écart-type lié au risque de primes**

$$\sigma_{lob} = \frac{\sum_e V_{lob,e} \cdot \sigma_{lob,e}}{\sum_e V_{lob,e}}$$

### **c) Méthode 3**

Ici, nous sommes en présence d'une autre variante de la méthode 2, elle consiste à supposer que les ratios de sinistralité  $\mu$  ne varient que sensiblement.

### **Notations :**

- $U_{lob,i,e}$  : Charge ultime par ligne d'activité, année de survenance et entreprise .
- $V_{lob,i,e}$  : Volume des primes acquises par ligne d'activité, année de survenance et entreprise.
- $N_{lob,e}$  : Profondeur d'historique par ligne d'activité et entreprise.
- $V_{lob,e} = \frac{1}{N_{lob,e}} \sum_i V_{lob,i,e}$  : Prime acquise moyenne par ligne d'activité et entreprise.
- $\sigma_{lob,e}$  : Ecart-type du ratio de sinistralité par ligne d'activité et entreprise.
- $\mu_{lob}$  : S/P par ligne d'activité pour toutes les entreprises.
- $\beta_{lob}^2$  : Constante de proportionnalité de la variance des S/P par ligne d'activité.
- $\varepsilon_{lob,i,e}$  : Erreur d'estimation suivant une loi normale centrée réduite.
- $M_{lob,i,e}$  : Moyenne du logarithme de la variable  $U_{lob,i,e}$ .
- $S_{lob,i,e}$  : Ecart-type du logarithme de la variable  $U_{lob,i,e}$ .

### **Hypothèses :**

Les hypothèses sous-jacentes à cette méthode sont celles sous-jacentes à la méthode à l'exception de celle relative au ratio S/P ; nous supposons ici qu'il ne varie pas d'une entreprise à l'autre.

### **Calculs intermédiaires :**

La distribution de la charge ultime étant log normale par hypothèse, on peut la modéliser comme suit :

$$U_{lob,i,e} \sim V_{lob,i,e} \mu_{lob} + \sqrt{V_{lob,i,e}} \beta_{lob} \cdot \varepsilon_{lob,i,e}$$

Ceci nous permet de formuler les paramètres de la distribution log normale suivants :

$$S_{lob,i,e} = \sqrt{\log\left(1 + \frac{\beta_{lob}^2}{V_{lob,i,e} \mu_{lob}^2}\right)}$$

$$M_{lob,i,e} = \log(V_{lob,i,e} \cdot \mu_{lob}) - \frac{1}{2} S_{lob,i,e}^2$$

Le principe de calcul est le même, le log- vraisemblance simplifié peut s'écrire ainsi :

$$\text{Log } L = \sum_{i,e} \left( -\log(S_{lob,i,e}) - \frac{(\log(U_{lob,i,e}) - M_{lob,i,e})^2}{2S_{lob,i,e}^2} \right)$$

Les valeurs de  $\mu_{lob}$  et  $\beta_{lob}^2$  sont calculées de telle façon qu'elles maximisent la fonction Log L.

$$\sigma_{lob,e} = \frac{\widehat{\beta_{lob}}}{\sqrt{V_{lob,e}}}$$

Où :

$$V_{lob,e} = \frac{1}{N_{lob,e}} \sum_i V_{lob,i,e}$$

### **Calcul final de l'écart-type lié au risque de primes**

$$\sigma_{lob} = \frac{\sum_e V_{lob,e} \cdot \sigma_{lob,e}}{\sum_e V_{lob,e}}$$

#### d) Méthode 4

Cette méthode est identique à la deuxième méthode, la seule différence est qu'ici, on suppose que la variance de la charge ultime est proportionnelle au carré de la prime acquise.

#### **Notations :**

- $U_{lob,i,e}$  : Charge ultime par ligne d'activité, année de survenance et entreprise (estimées à la fin de la première année de développement).
- $V_{lob,i,e}$  : Primes acquises par ligne d'activité, année de survenance et entreprise.
- $N_{lob,e}$  : Profondeur d'historique par ligne d'activité et entreprise.
- $\sigma_{lob,e}$  : Ecart-type pour le risque de prime par ligne d'activité et entreprise.
- $\mu_{lob,e}$  : S/P ultime par ligne d'activité.
- $\beta_{lob}^2$  : Constante de proportionnalité de la variance des S/P par ligne d'activité.
- $\varepsilon_{lob,i,e}$  : Erreur d'estimation suivant une loi normale centrée réduite.
- $M_{lob,i,e}$  : Moyenne du logarithme de la variable  $U_{lob,i,e}$ .
- $S_{lob,i,e}$  : Ecart-type du logarithme de la variable  $U_{lob,i,e}$ .

#### **Calculs intermédiaires :**

La distribution de la charge ultime étant log normale par hypothèse, on peut la modéliser comme suit :

$$U_{lob,i,e} \sim V_{lob,i,e} \mu_{lob,e} + V_{lob,i,e} \beta_{lob} \cdot \varepsilon_{lob,i,e}$$

Les paramètres de la distribution log normale s'écrivent alors :

$$S_{lob,i,e} = \sqrt{\log\left(1 + \frac{\beta_{lob}^2}{\mu_{lob,e}^2}\right)}$$

$$M_{lob,i,e} = \log(V_{lob,i,e} \cdot \mu_{lob,e}) - \frac{1}{2} S_{lob,i,e}^2$$

Ainsi, le log- vraisemblance peut s'écrire de cette façon :

$$\text{Log } L = \sum_{i,e} \left( -\log(S_{lob,i,e}) - \frac{(\log(U_{lob,i,e}) - M_{lob,i,e})^2}{2S_{lob,i,e}^2} \right)$$

Les valeurs de  $\mu_{lob,e}$  et  $\beta_{lob}^2$  sont calculées de telle façon qu'elles maximisent la fonction LogL.

#### **Calcul final de l'écart-type lié au risque de primes**

$$\sigma_{lob,e} = \widehat{\beta}_{lob}$$

## II. Risque de provisions

L'objectif est d'éviter la ruine à un an des entreprises d'assurance dans 99.5% des cas. Nous allons donc chercher pour le risque de provisions à estimer la volatilité des provisions à horizon un an.

Nous adopterons méthodes analogues à celles utilisées pour le calibrage du risque de primes, avec une redéfinition et une interprétation des différentes notations. L'analyse est effectuée en utilisant le montant des provisions d'ouverture comme mesure de volume et le résultat du développement des sinistres après un an pour ces expositions pour obtenir un écart-type.

### Notations communes aux méthodes :

- $Lob$  : Indice référant à ligne d'activité.
- $e$  : Indice référant à entreprise.
- $PCO_{lob,i,j,e}$  : Best Estimate des provisions de sinistres pour l'année de survenance  $i$  et l'année de développement  $j$ .
- $I_{lob,i,j,e}$  : Les paiements incrémentaux des sinistres pour l'année de survenance  $i$  et l'année de développement  $j$ .
- $V_{lob,k,e}$  : Le montant des réserves Best Estimate des sinistres constituée pour l'année calendaire  $k$ .

$$V_{lob,k,e} = \sum_{i+j=k+1} PCO_{lob,i,j,e}$$

- $R_{lob,k,e}$  : La somme des paiements incrémentaux au titre des exercices antérieurs et des réserves Best Estimate à la fin de l'année.

$$R_{lob,k,e} = \sum_{\substack{i+j=k+2 \\ i \neq k+1}} PCO_{lob,i,j,e} + \sum_{\substack{i+j=k+2 \\ i \neq k+1}} I_{lob,i,j,e}$$

- $N_{lob,e}$  : Nombre d'années calendaires où  $V_{lob,k,e}$  et  $R_{lob,k,e}$  sont disponibles.
- $V_{lob,e}$  : Volume de réserve moyen par entreprise.

$$V_{lob,e} = V_{lob,max(k),e}$$

- $\sigma_{lob,e}$  : Volatilité de la réserve par ligne d'activité et entreprise.

### a) Méthode 1

Cette première méthode part de la supposition que:  $E\left(\frac{R_{lob,k,e}}{V_{lob,k,e}}\right) = 1$ . Elle consiste ensuite à regarder la volatilité du Boni/Mali des provisions de sinistres. Pour une année calendaire donnée, les provisions de sinistres estimées au début de l'année sont comparées à

la somme des provisions de sinistres à la fin de l'année plus les sinistres payés dans l'année. On en déduit l'expression de l'écart type :

$$\sigma_{lob,e} = \sqrt{\frac{1}{N_{lob,e} - 1} \frac{1}{V_{lob,e}} \left( \sum_k \frac{1}{V_{lob,k,e}} (R_{lob,k,e} - V_{lob,k,e})^2 \right)}$$

Cette méthode produit un  $\sigma_{lob,e}$  d'autant plus élevé que l'écart entre la prévision de sinistres pour l'année en cours et le montant payé dans l'année plus la ré-estimation des réserves est élevée. On notera également qu'un écart positif (favorable) ou négatif (défavorable) produit le même résultat.

### **Calcul final :**

$$\sigma_{lob} = \frac{\sum_e V_{lob,e} \cdot \sigma_{lob,e}}{\sum_e V_{lob,e}}$$

Les deux méthodes suivantes sont rétrospectives et supposent que la variance de la somme entre le Best Estimate à un an et les paiements incrémentaux à un an est proportionnelle au Best Estimate (au carré du Best Estimate respectivement). L'approche d'ajustement du maximum de vraisemblance est supposée appropriée.

### **b) Méthode 2**

Nous cherchons à mesurer l'incertitude liée à l'estimation a priori des réserves par rapport aux paiements incrémentaux observés plus la nouvelle estimation des réserves. Le modèle retenu est :

$$R_{lob,k,e} \sim V_{lob,k,e} + \sqrt{V_{lob,k,e}} \beta_{lob} \varepsilon_{lob,i,e}$$

Avec :

- $\beta_{lob}^2$  : Constante de proportionnalité de la variance du Best Estimate dans un an augmenté des paiements incrémentaux par ligne d'activité.
- $\varepsilon_{lob,i,e}$  : Erreur d'estimation suivant la loi normale centrée réduite.

Les paramètres de la loi log normale peuvent être exprimés comme suit :

$$S_{lob,k,e} = \sqrt{\log\left(1 + \frac{\beta_{lob}^2}{V_{lob,k,e}}\right)}$$

$$M_{lob,k,e} = \log(V_{lob,k,e}) - \frac{1}{2} \cdot S_{lob,k,e}^2$$

Le paramètre  $\beta_{lob}$  est obtenu en maximisant la fonction de vraisemblance suivante :

$$\text{Log } L = \sum_{k,e} \left( -\log(S_{lob,k,e}) - \frac{(\log(R_{lob,k,e}) - M_{lob,k,e})^2}{2S_{lob,k,e}^2} \right)$$

Ainsi,

$$\sigma_{lob,e} = \frac{\widehat{\beta}_{lob}}{\sqrt{V_{lob,e}}}$$

Calcul final :

$$\widehat{\sigma}_{lob} = \frac{\sum_e V_{lob,e} \cdot \sigma_{lob,e}}{\sum_e V_{lob,e}}$$

### c) Méthode 3

Cette méthode est identique à la méthode 2 à l'exception de l'hypothèse de base où nous supposons que :

$$R_{lob,k,e} \sim V_{lob,k,e} + V_{lob,k,e} \beta_{lob} \varepsilon_{lob,i,e}$$

Les paramètres de la loi log normale peuvent être exprimés comme suit :

$$S_{lob,k,e} = \sqrt{\log(1 + \beta_{lob}^2)}$$

$$M_{lob,k,e} = \log(V_{lob,k,e}) - \frac{1}{2} \cdot S_{lob,k,e}^2$$

Le paramètre  $\beta_{lob}$  est obtenu en maximisant la fonction de vraisemblance suivante :

$$\text{Log } L = \sum_{k,e} \left( -\log(S_{lob,k,e}) - \frac{(\log(R_{lob,k,e}) - M_{lob,k,e})^2}{2S_{lob,k,e}^2} \right)$$

Calcul final :

$$\sigma_{lob,e} = \widehat{\beta}_{lob}$$

Les trois méthodes qui suivent constitueront une deuxième famille pour le calibrage du risque de provisions. Elles s'inscrivent dans la même logique que les précédentes, celle d'estimer l'erreur de la prédiction à horizon un an, cette fois en se basant sur l'erreur moyenne quadratique de prédiction (*MSEP*) du Claims Development Result (CDR) telle que définie par le modèle de Merz-Wuthrich introduit dans le chapitre précédent.

### Hypothèses communes aux méthodes :

Ces méthodes reposent sur des hypothèses relatives aux calculs des MSEP :

- $MSEP$  est calculé selon l'approche de Merz & Wuthrich par la formule suivante :

$$MSEP = E((C_{i,j} - \widehat{C}_{i,j})^2 / D_i)$$

- Les paiements cumulés sont indépendants d'une année de survénance à l'autre.
- Pour chaque année de survénance les paiements cumulés sont un processus de Markov et il existe des constantes  $f_j$  et  $s_j$  telles que :

$$E(C_{i,j}/C_{i,j-1}) = f_j C_{i,j-1} \text{ et } Var\left(\frac{C_{i,j}}{C_{i,j-1}}\right) = s_j^2 C_{i,j-1}$$

#### **Notations communes aux méthodes :**

- $V_{lob,e} = PCO_{lob,e}$  : Volume de réserve par ligne d'activité et entreprise.
- $\beta_{lob}^2$  : Constante de proportionnalité de la variance du  $CDR$  par ligne d'activité.
- $MSEP_{lob,e}$  : L'erreur quadratique moyenne de prédiction.

#### **d) Méthode 4**

##### **Hypothèses :**

- La meilleure estimation obtenue par la méthode Chain-Ladder standard est la mesure de volume la plus appropriée.
- Pour une ligne d'activité et une compagnie, la variance du  $CDR$  est proportionnelle au montant de la provision pour sinistres
- L'approche des moindres carrés est appropriée pour le calcul de l'écart type de chaque entreprise.

##### **Calculs intermédiaires :**

L'estimateur des moindres carrés du coefficient de variation est la valeur de  $\beta_{lob}$  qui minimise la fonction suivante :

$$S = \sum_e \left( \frac{\beta_{lob}}{\sqrt{V_{lob,e}}} - \frac{\sqrt{MSEP_{lob,e}}}{V_{lob,e}} \right)^2$$

En supposant que  $\frac{\partial S}{\partial \beta} = 0$ , on obtient l'expression de l'estimateur de  $\widehat{\beta}_{lob}$

$$\widehat{\beta}_{lob} = \frac{\sum_e \frac{\sqrt{MSEP_{lob,e}}}{V_{lob,e}^{3/2}}}{\sum_e 1/V_{lob,e}}$$

Ainsi,

$$\sigma_{lob,e} = \frac{\widehat{\beta}_{lob}}{\sqrt{V_{lob,e}}}$$

##### **Calcul final:**

$$\widehat{\sigma}_{lob} = \frac{\sum_e V'_{lob,e} \cdot \sigma_{lob,e}}{\sum_e V'_{lob,e}}$$

Où

- $V'_{lob,e}$  : Le Best Estimate des sinistres par entreprise et ligne d'activité (qui peut être différent du résultat de Chain Ladder)

### e) Méthode 5

#### Hypothèses:

- La meilleure estimation obtenue par la méthode Chain-Ladder standard est la mesure de volume la plus appropriée.
- Pour une ligne d'activité et une compagnie, la variance du CDR est proportionnelle au carré du montant de la provision pour sinistres
- L'approche des moindres carrés est appropriée pour le calcul de l'écart type de chaque entreprise.

#### Calculs intermédiaires

L'estimateur des moindres carrés du coefficient de variation est la valeur de  $\sigma_{lob,e}$  qui minimise la fonction suivante :

$$S = \sum_e (V_{lob,e} \sigma_{lob,e} - \sqrt{MSEP_{lob,e}})^2$$

#### Calcul final

En supposant que  $\frac{\partial S}{\partial \sigma} = 0$ , on obtient l'expression de l'estimateur de  $\widehat{\sigma}_{lob,e}$

$$\widehat{\sigma}_{lob} = \widehat{\sigma}_{lob,e} = \frac{\sum_e V_{lob,e} \sqrt{MSEP_{lob,e}}}{\sum_e V_{lob,e}^2}$$

### f) Méthode 6

#### Hypothèses:

- La meilleure estimation obtenue par la méthode Chain-Ladder standard est la mesure de volume la plus appropriée.
- Pour une ligne d'activité et une compagnie, la variance du CDR est proportionnelle au carré du montant de la provision pour sinistres
- L'approche des moindres carrés est appropriée pour le calcul de l'écart type de chaque entreprise.

#### Calculs intermédiaires

L'estimateur des moindres carrés du coefficient de variation est la valeur de  $\sigma_{lob,e}$  qui minimise la fonction suivante :

$$S = \sum_e \left( \sigma_{lob,e} - \frac{\sqrt{MSEP_{lob,e}}}{V_{lob,e}} \right)^2$$

### **Calcul final**

En supposant que  $\frac{\partial S}{\partial \sigma} = 0$ , on obtient l'expression de l'estimateur de  $\widehat{\sigma}_{lob,e}$

$$\widehat{\sigma}_{lob,e} = \frac{\sum_e \frac{\sqrt{MSEP_{lob,e}}}{V_{lob,e}}}{N_{lob}}$$

Où :

- $N_{lob}$  : Le nombre d'entreprise par ligne d'activité où les valeurs de  $PCO$  et de  $MSEP$  sont à la fois non nulles.

# Partie III : Application

Cette partie a pour objet de présenter une mise en application des méthodes précédentes, via le calibrage des écarts-types sur les branches suivantes :

- Véhicules à usage de tourisme – Corporel
- Véhicules à usage de tourisme – Matériel
- Accidents de travail et maladies professionnelles
- Assurances des risques techniques

Nous commençons par une présentation des données sous notre disposition. Par la suite, chaque chapitre est fidèle à une certaine logique dans la construction du modèle. En effet, la vérification des hypothèses de base viennent en premier lieu, la construction du modèle et l'estimation de ces paramètres viennent ensuite pour permettre le calcul des volatilités. La phase finale est sans doute la validation du modèle par la vérification du degré de la véracité des hypothèses énoncées au tout début de la modélisation.

Chaque branche est constituée de portefeuilles de plusieurs entreprises d'assurance et de réassurance marocaines à savoir : Wafa, RMA, SAHAM, AXA, Atlanta, Sanad, MCMA, Allianz, MAMDA, MATU.

Les paragraphes qui suivent détaillent les étapes de ce calibrage et présentent les hypothèses retenues. Le terme de « branche » correspond toujours à la notion de « Lob : Line Of Business ».

Les calculs et analyses qui vont suivre et qui ont été appliqués sur notre base de données ont été élaborés avec le logiciel R.

## Chapitre I : Présentation des données

Pour l'estimation des volatilités liées au risque de primes et de réserve, il est nécessaire de disposer pour chaque branche de données relatives aux : primes acquises, charges ultimes et les différentes provisions présentées précédemment. Nous avons utilisé des données issues des états règlementaires communiqués par les compagnies d'assurance et de réassurance à l'Autorité. Il s'agit d'un entrepôt de données historiques dont la restitution est réalisée lors de l'étude d'impact quantitative (EIQ1) de la SBR.

La profondeur d'historique disponible varie d'une branche à l'autre et d'une entreprise à l'autre dans la même branche.

Par souci de confidentialité, les données utilisées ont été intégrales. Ces données peuvent donc être qualifiées de fictives

### I. Risque de primes

Les données qui feront la matière première du calibrage sont principalement telles qu'énoncé dans la partie précédente :

- Des primes acquises pour chaque exercice de survenance.
- De la charge ultime de chaque exercice de survenance de l'historique.

	Primes acquises	Charges ultimes
2001	78 896 637	113 235 516
2002	102 046 987	134 748 321
2003	177 687 859	172 952 361
2004	160 469 205	169 821 844
2005	184 556 031	174 129 467
2006	202 376 362	173 441 526
2007	215 672 521	180 600 919
2008	225 042 625	208 817 696
2009	213 945 480	192 090 986
2010	207 667 345	164 037 721
2011	207 649 013	156 090 623
2012	225 935 815	169 259 590
2013	227 778 600	179 853 018
2014	227 737 006	168 601 532
2015	224 234 092	167 356 726
2016	237 820 720	179 356 287
2017	236 370 013	175 259 289

Tableau 1: Exemple d'historique de primes acquises et charges ultimes pour une entreprise

Les charges ultimes sont estimées après un an de déroulement des sinistres par la méthode Chain Ladder.

## II. Risque de provisions

Notre objectif étant d'appréhender une mesure de la volatilité dans les provisions pour sinistres, nous partons des triangles de liquidation :

- ✓ Triangles de paiements cumulés : Comme son nom l'indique, contient les montants des paiements cumulés des années de survenance retenus pour chaque année de développement. On retient toujours la notation  $C_{i,j}$  pour indiquer ces montants avec :  $i$  l'année de survenance,  $j$  l'année de développement.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	8 238 192	29 886 702	44 732 341	52 729 876	59 349 931	63 569 573	69 842 053	71 658 949	72 524 625	73 826 744
1	7 114 187	32 603 846	49 125 776	64 152 010	73 735 632	79 662 638	82 619 836	86 249 054	89 494 828	
2	10 132 549	41 005 906	86 098 769	107 223 029	122 170 687	130 069 344	137 429 912	140 194 938		
3	11 467 057	58 678 934	102 380 221	127 574 559	149 856 358	163 297 534	169 912 713			
4	14 950 889	60 316 014	103 197 335	133 068 751	155 645 388	168 534 138				
5	12 298 169	54 875 159	112 205 590	153 573 264	172 960 292					
6	13 567 334	59 500 735	119 891 430	165 419 192						
7	16 991 024	61 406 821	115 846 458							
8	21 169 431	72 963 949								
9	23 735 706									

- ✓ Triangles de charges : Contient le montant des paiements décumulés augmentés des provisions Dossier par Dossier.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	116 054 939	131 566 048	131 278 043	133 774 624	131 103 249	111 629 727	92 679 662	89 758 105	84 459 352	81 474 616
1	136 994 221	160 106 119	154 755 819	157 005 134	158 717 780	146 874 530	112 360 895	112 844 989	105 065 943	
2	180 779 901	204 411 616	202 850 559	207 040 987	205 325 523	204 721 912	203 736 247	188 280 123		
3	207 180 257	252 329 828	251 298 543	250 044 211	258 274 375	259 373 564	256 615 140			
4	209 322 319	255 334 678	259 085 074	271 804 018	271 959 599	264 089 702				
5	222 862 698	277 512 563	290 121 166	284 895 840	279 881 716					
6	252 697 891	319 069 349	319 669 443	306 872 788						
7	251 679 076	308 820 488	310 999 433							
8	225 315 968	284 141 313								
9	246 255 967									

Ces deux types de triangles de liquidation constituent l'information nécessaire en provisionnement Non-Vie. Ils comprennent l'ensemble des charges et des paiements effectués relativement aux sinistres déclarés dans la période s'étalant de 1993 jusqu'à 2017.

Le déroulement total varie d'une entreprise à l'autre de 10 à 25 années selon la disponibilité des données. Nous supposons que 10 ans est une durée suffisante pour la liquidation de la grande majorité des sinistres.

Les applications numériques relatives au calcul du risque de provisions ont été réalisées à partir des triangles de charges pour les trois premières méthodes. Pour les méthodes basées sur le modèle Merz and Wüthrich, l'estimation de la MSEP est obtenue à travers les triangles de paiements cumulés.

## Chapitre II : Validation des hypothèses

### I. Risque de primes

Les données utilisées pour calibrer le risque de primes doivent respecter les conditions suivantes :

- Distribution log-normale de la charge ultime

Les charges ultimes sont supposées suivre une distribution log-normale. Pour vérifier cette hypothèse, nous avons utilisé le test de Shapiro Wilk sur la variable  $\log(\text{Charges ultimes})$ .

Plus la statistique du test **W** est petite, plus la distribution s'éloigne d'une distribution normale. Sous R, nous avons obtenu une grande valeur de **W** pour la plupart des entreprises, ainsi qu'une p-value dépassant largement le seuil de signification fixé à  $\alpha = 5\%$ . C'est-à-dire que l'hypothèse de la normalité est bien vérifiée. Un exemple de sortie du test générée par R est représenté ci-dessous :

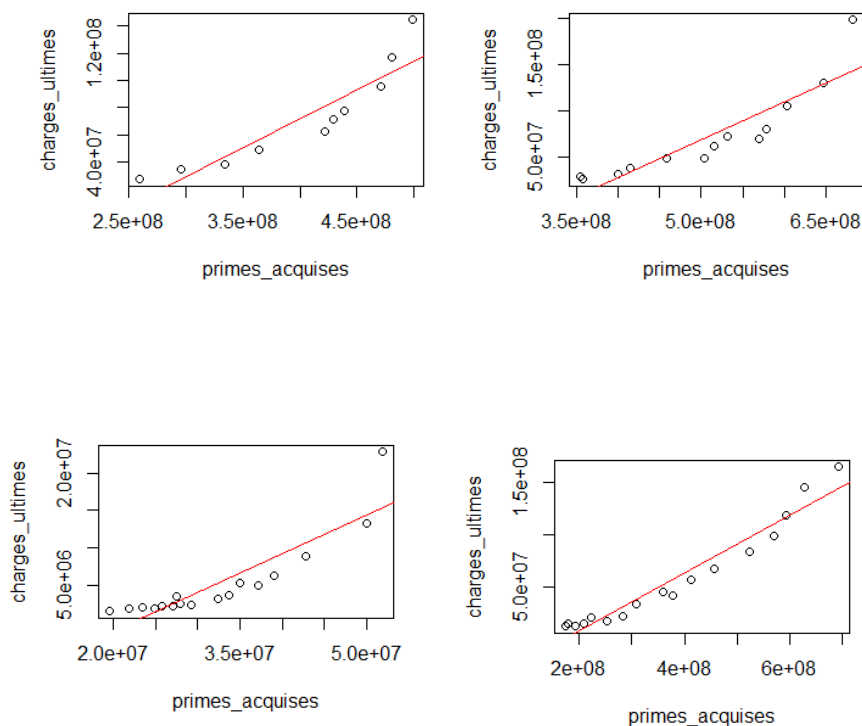
```
> shapiro.test(log(charges_ultimes))  
  
Shapiro-Wilk normality test  
  
data:  log(charges_ultimes)  
W = 0.95708, p-value = 0.5775
```

Figure 2: Primes-ChargesUltimes-2311-C/ k=2

Néanmoins, il s'est avéré que cette hypothèse est assez forte et qu'elle ne peut être vérifiée sur tous les jeux de données.

- La charge ultime est proportionnelle à la prime acquise

Les méthodes 2 et 4 supposent que la charge ultime est proportionnelle à la prime acquise pour chaque entreprise. À partir de l'historique des charges ultimes et des primes acquises par année de survenance, nous représentons ces données par un nuage de points celui-ci permet de visualiser cette proportionnalité, pour chaque entreprise, la figure ci-dessous en est un exemple :



Les différents graphiques obtenus montrent une corrélation positive. Dans l'exemple illustré dans la figure, nous observons des points aberrants, ceux-ci reflètent à une sinistralité exceptionnelle pour l'entreprise concernée durant cette année.

- L'espérance de la charge ultime est proportionnelle à la prime acquise par branche

Pour vérifier l'hypothèse de base de la méthode 3, à savoir la stabilité relative des ratios de sinistralité pour chaque branche, nous calculons ces ratios pour chacune des entreprises et nous évaluons ensuite le coefficient de variation de ces derniers.

L'idéal serait de pouvoir affirmer avoir une volatilité très faible grâce à un coefficient de variation insignifiant.

Branches Entreprises	Branches			
	1	2	3	4
1	0,609258	0,683757	0,351515	0,179778
2	0,503139	0,83586	0,492611	0,077627
3	0,25226	0,58443	0,475699	0,141965
4	0,229514	0,85809	0,385502	0,150298
5	0,377101	0,732997	0,409099	0,139056
6	0,418714	0,696058	0,469957	0,125444
7	0,687858	0,76825	0,476317	0,142312
8	-	1,095753	0,445851	0,154317
9	-	0,629123	0,488431	0,142765
10	-	0,689257	0,565635	0,161181

<b>Moyenne</b>	0,439692	0,757357	0,456062	0,141474
<b>Ecart-type</b>	0,172254	0,145943	0,061099	0,02675
<b>cv</b>	0,39176	0,1927	0,13397	0,189084

Le coefficient de variation est relativement petit pour les trois dernières branches. Il est donc clair que nous avons une dispersion négligeable et que par conséquent, la stabilité des ratios de sinistralité est établie. Toutefois, ces ratios varient considérablement d'une entreprise à l'autre pour la première branche où le cv atteint 39%.

## II. Risque de provisions :

Afin d'adopter le modèle Merz and wuthrich, nous devons en amont vérifier les trois hypothèses sous-jacentes au modèle :

### H1 : L'existence d'une relation linéaire entre les montants cumulés $(C_{i,j})_{\geq 1}$ de deux années de développement consécutives :

La deuxième hypothèse prévoit l'existence d'une relation linéaire entre les montants  $C_{i,j}$  de deux années de développement consécutives  $j$  et  $j + 1$ .

$$E(C_{i,j+1}/C_{i,j}) = f_j C_{i,j}$$

Nous pouvons vérifier l'existence de cette relation linéaire à travers le coefficient de corrélation de Pearson. Ce coefficient permet de détecter la présence ou l'absence d'une relation linéaire entre deux caractères quantitatifs  $X$  et  $Y$ .

Soit  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires, le coefficient de corrélation de Pearson est défini par :

$$r(X, Y) = \frac{Cov(X, Y)}{\sigma(X) \times \sigma(Y)}$$

Le calcul du coefficient de corrélation constitue une première étape dans l'analyse de la relation entre deux caractères, sa valeur absolue indique l'intensité de la relation. Cette étape doit être validée par un test de la significativité de la relation. Pour cela, nous utilisons un test statistique dont les hypothèses sont :

- $H_0: r(X, Y) = 0$
- $H_1: r(X, Y) \neq 0$

La statistique du test est caractérisée par la variable aléatoire :

$$T_{n-2} = \sqrt{n-2} \times \frac{r(\widehat{X}, \widehat{Y})}{\sqrt{1 - r(\widehat{X}, \widehat{Y})}}$$

Cette statistique suit une loi de Student à  $n - 2$  degré de liberté. Pour prendre une décision au seuil  $\alpha$ , il suffit de trouver la valeur critique de la loi de Student  $t(n - 2)$  pour  $\alpha/2$  dans le cas bilatéral.

### Application du test

Nous examinerons la corrélation entre les paiements cumulés des deux premières années de développement. La sortie du test générée par R est représentée ci-dessous :

```
Pearson's product-moment correlation

data: Cum_2 and Cum_1
t = 1.1375, df = 12, p-value = 0.2775
alternative hypothesis: true correlation is not equal to 0
95 percent confidence interval:
 -0.2619673  0.7228954
sample estimates:
      cor
0.311975
```

Le coefficient de corrélation entre ces deux années consécutives de développement 1 et 2 est non significatif. Le p-value est supérieur à 5%. Nous acceptons donc  $H_0$ .

Nous faisons de même pour les autres années de développement et nous résumons les résultats du test dans le tableau ci-dessous :

Année de développement	Coefficient de corrélation	P-value
1 et 2	0,311975	0,277538692
2 et 3	0,948873	7,61973E-07
3 et 4	0,995801	1,02085E-11
4 et 5	0,995047	2,46079E-10
5 et 6	0,999878	9,70533E-16
6 et 7	0,999883	5,7719E-14
7 et 8	0,999998	1,29382E-17
8 et 9	0,999999	5,75466E-13
9 et 10	1	1,84889E-32
10 et 11	1	0
11 et 12	0,999999	6,25516E-07
12 et 13	0,999898	0,009075133

Nous sommes en présence d'une corrélation positive forte entre chaque deux années de développement consécutives, à l'exception des deux premières. Ceci confirme l'existence d'une relation linéaire reliant les paiements cumulés pour différentes années de développement consécutives.

Nous remarquons un coefficient de corrélation égal à 1 entre les années de développement 9 et 10, 10 et 11. En effet, la 9<sup>ième</sup> et la 10<sup>ième</sup> colonne sont identiques dans le triangle utilisé,

c'est-à-dire qu'il n'y avait pas de paiements pour les différentes années de survenance durant l'année de développement 9 et 10. Ce qui justifie la valeur de 1 obtenu pour  $r$ .

L'existence d'une corrélation est maintenant vérifiée, nous devons ensuite examiner le caractère linéaire en procédant à une régression linéaire entre les paiements cumulés.

Afin d'évaluer la qualité d'une régression linéaire simple, il est intéressant d'étudier le coefficient de détermination  $R^2$ .

Soit  $X$  une variable aléatoire et soit  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$   $n$  observations de cette variable. Nous noterons  $\hat{x}_i$  les  $n$  estimations des  $x_i$  calculées selon le modèle et  $\bar{x}$  la moyenne empirique des  $x_i$ . Le  $R^2$  est défini par :

$$R^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (\hat{x}_i - \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$$

C'est le rapport entre la variation expliquée et la variation totale, il prend des valeurs entre 0 et 1. On s'attend à une bonne adéquation du modèle aux données autant qu'il s'approche de 1.

Nous cherchons à modéliser les montants de paiements cumulés par une relation de type :

$$C_{i,j+1} = a \times C_{i,j} + b + \varepsilon_{ij} / \varepsilon_{ij} \sim N(0, \sigma^2)$$

Nous présentons ci-dessous, les sorties générées par R de la régression linéaire entre les paiements de la première et la deuxième année de développement. Ensuite les deux autres années de développement qui suivent.

```
Call:
lm(formula = Cum_2 ~ Cum_1)

Residuals:
    Min       1Q   Median       3Q      Max
-1302706 -990892 -648898  842854 3132715

Coefficients:
              Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept) 1.355e+06  4.860e+05  2.789  0.0164 *
Cum_1       6.973e-01  6.130e-01  1.137  0.2775
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 1498000 on 12 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.09733,    Adjusted R-squared:  0.02211
F-statistic: 1.294 on 1 and 12 DF,  p-value: 0.2775
```

Figure 3 :  $Reg(C_{i,2}, C_{i,1})$

Le coefficient de corrélation linéaire est très faible et le p-value dépasse le seuil de confiance. Nous acceptons alors la nullité du coefficient  $a$  pour les deux premières années de développement, l'hypothèse n'est donc pas vérifiée.

```
Call:
lm(formula = Cum_2 ~ Cum_1)

Residuals:
    Min       1Q   Median       3Q      Max
-1173120 -369560  -72920   201327  1781946

Coefficients:
            Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept) -2.773e+04  3.090e+05  -0.09    0.93
Cum_1        1.365e+00  1.369e-01   9.97 7.62e-07 ***
---
Signif. codes:
  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 748100 on 11 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.9004,    Adjusted R-squared:  0.8913
F-statistic:  99.4 on 1 and 11 DF,  p-value: 7.62e-07
```

Figure 4 :  $Reg(C_{i,3}, C_{i,2})$

```
Call:
lm(formula = Cum_2 ~ Cum_1)

Residuals:
    Min       1Q   Median       3Q      Max
-397262 -125843  -14845   30518   542170

Coefficients:
            Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept) 1.104e+04  1.044e+05   0.106   0.918
Cum_1       1.110e+00  3.228e-02  34.398 1.02e-11 ***
---
Signif. codes:
  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 252500 on 10 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.9916,    Adjusted R-squared:  0.9908
F-statistic: 1183 on 1 and 10 DF,  p-value: 1.021e-11
```

Figure 5 :  $Reg(C_{i,4}, C_{i,3})$

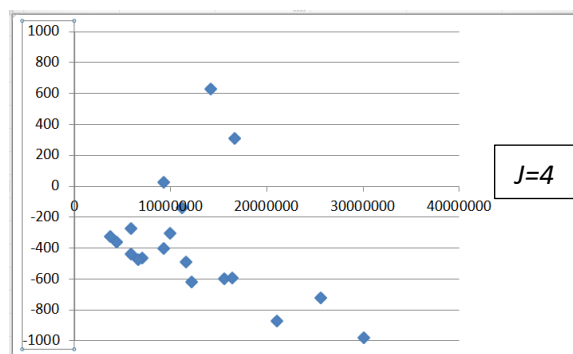
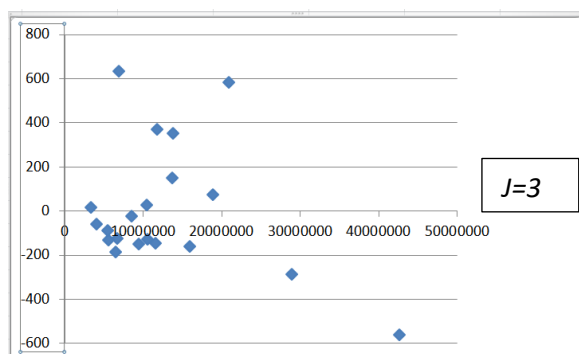
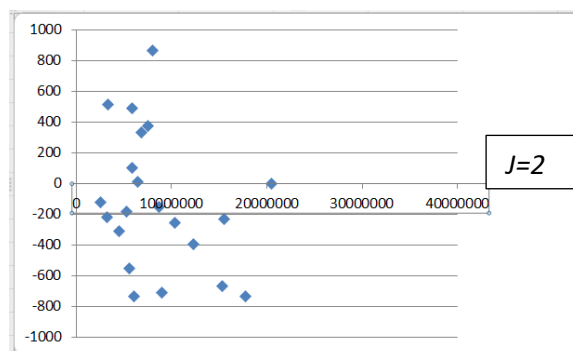
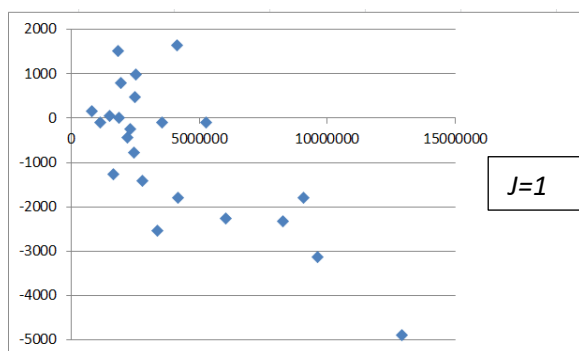
La régression linéaire pour les deux derniers exemples est satisfaisante avec un  $R^2$  élevé, l'hypothèse de nullité du paramètre  $a$  ne peut pas être rejetée car la valeur p-value est significativement inférieure au risque  $\alpha=5\%$ . Nous concluons que l'hypothèse est bien vérifiée.

H2 : Les paiements cumulés  $(C_{i,j})_{j \geq 1}$  suivent une chaîne de Markov et il existe des constantes  $s_j$  telles que :

$$\text{Var}(C_{i,j+1}/C_{i,j}) = s_j^2 C_{i,j}$$

Pour vérifier cette troisième hypothèse, nous avons eu recours aux résidus normalisés  $r_{ij} = \frac{C_{i,j+1} - \hat{f}_j C_{i,j}}{\sqrt{C_{i,j}}}$  pour  $j = 0 \dots n - 1$  et  $i = 0 \dots n - j - 1$ . Nous traçons par la suite le graphe de ces résidus en fonction des montants cumulés  $C_{i,j}$  pour chacune des années de développement. Pour valider l'hypothèse, le nuage obtenu ne doit pas laisser entrevoir l'existence d'une composante déterministe et surtout une tendance.

Voici les nuages de points obtenus pour  $j = 1, 2, 3$  et  $4$  :



Dans chacun des nuages de points représentés ci-dessus, nous remarquons un éparpillement et donc l'absence de toute tendance. Conséquemment, nous considérons que l'hypothèse concernant la variance conditionnelle est vérifiée. Toutefois ceci n'est pas le cas pour tous les triangles, dans certains cas, Les résidus forment une structure qui ne semble pas être aléatoire.

## Chapitre III : Calibrage des volatilités

### I. Calcul de volatilités liées au risque de primes

Conformément à ce qui a été décrit dans la partie consacrée à la méthodologie de calibrage pour le risque de primes, nous commençons dans la première méthode par le calcul pour chaque entreprise du volume de primes acquises moyen, le ratio de sinistralité puis le **Bonis/Malis** par année de survenance.

Nous considérons un exemple de calibrage de la volatilité d'une entreprise dans la branche « Accidents de travail et maladies professionnelles », nous disposons de l'historique de primes acquises et charges ultimes par année de survenance comme le montre le tableau suivant, nous calculons ensuite le ratio de sinistralité pour cette entreprise ainsi que l'historique des Bonis/Malis. Nous rappelons que ce dernier se calcule, pour chaque entreprise, par année de survenance selon la formule suivante :

$$Bonis/Malis_i = U_i - V_i \cdot S/P$$

- $U_i$  : Charge ultime année de survenance  $i$ .
- $V_i$  : Primes acquises des exercices de survenance .
- $S/P$  :ratio de sinistralité

	Primes acquises	Charges ultimes	Bonis-Malis
2001	78 896 637	113 235 516	45 535 079
2002	102 046 987	134 748 321	47 182 794
2003	177 687 859	172 952 361	20 480 136
2004	160 469 205	169 821 844	32 124 778
2005	184 556 031	174 129 467	15 763 731
2006	202 376 362	173 441 526	-215 662
2007	215 672 521	180 600 919	-4 465 575
2008	225 042 625	208 817 696	15 710 807
2009	213 945 480	192 090 986	8 506 450
2010	207 667 345	164 037 721	-14 159 609
2011	207 649 013	156 090 623	-22 090 976
2012	225 935 815	169 259 590	-24 613 736
2013	227 778 600	179 853 018	-15 601 585
2014	227 737 006	168 601 532	-26 817 379
2015	224 234 092	167 356 726	-25 056 369
2016	237 820 720	179 356 287	-24 715 362
2017	236 370 013	175 259 289	-27 567 522

Volume Primes Moyen	197405077
S/P	85,81%

Le calcul de la volatilité par la formule fermée décrite précédemment donne les volatilités  $\sigma_{lob,e}$  suivantes :

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Méthode 1	4,28%	13,82%	15,77%	4,09%	10,50%	13,09%	61,39%	5,03%	14,34%	26,39%

Tableau 2: volatilités par entreprise obtenus par la méthode 1

Nous rappelons que la volatilité du secteur liée au risque de prime est une moyenne des  $\sigma_{lob,e}$  pondérée par les poids  $\frac{V_{lob,e}}{\sum_e V_{lob,e}}$ , nous obtenons ainsi pour la ligne d'activité « Véhicules à usage de tourisme – Matériel » selon la première méthode :  $\sigma_{lob} = 10,63\%$

Les méthodes 2,3 et 4 se basent sur le même principe de calcul néanmoins qu'elles proposent des hypothèses et des modèles différents.

Nous commençons tout d'abord par définir les fonctions de log-vraisemblance relatives à chacune des méthodes sous R. Les paramètres  $(\hat{\mu}, \hat{\beta})$  sont ensuite choisis de manière à maximiser cette vraisemblance. Une solution littérale à ce problème de maximisation n'étant pas immédiate, la résolution a été faite à l'aide la fonction *optim*.

Une fois l'estimation de obtenue, l'écart-type est donné par  $\sigma_{lob,e} = \frac{\widehat{\beta}_{lob}}{\sqrt{V_{lob,e}}}$  pour les méthodes 2 et 3 et directement par  $\widehat{\beta}_{lob}$  pour la quatrième méthode,  $V_{lob,e}$  étant le volume de primes acquises moyen par entreprise.

La table suivante est un récapitulatif des différentes paramètres obtenus selon chaque méthode :

	$\widehat{\beta}_{lob}$
Méthode 2	1206,851
Méthode 3	1838,364
Méthode 4	0,052813

Les paramètres  $\sigma_{lob,e}$  associés à cette branche obtenus par ces trois méthodes sont les suivants :

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Méthode 2	7,10%	6,69%	8,59%	7,35%	10,86%	11,12%	22,04%	11,90%	15,90%	45,05%
Méthode 3	10,81%	10,19%	13,08%	11,19%	16,55%	16,94%	33,57%	18,13%	24,22%	68,63%
Méthode 4	5,28%	5,28%	5,28%	5,28%	5,28%	5,28%	5,28%	5,28%	5,28%	5,28%

Le tableau suivant résume les écarts-types liés au risque de prime  $\sigma_{lob}$  pour cette ligne d'activité selon les quatre méthodes:

Méthode N°1	Méthode N°2	Méthode N°3	Méthode N°4
-------------	-------------	-------------	-------------

10,63%	9,00%	13,71%	5,28%
--------	-------	--------	-------

Tableau 3 : Volatilités du secteur liées au risque de primes

Nous constatons une différence significative entre les différentes méthodes, et entre les entreprises bien évidemment. Nous remarquons à première vue que la troisième méthode donne le plus grand résultat. En particulier pour l'entreprise 10 où la volatilité atteint 68%.

Nous remarquons pour cette même entreprise des volatilités importantes en comparaison avec les autres entreprises. En effet, cette entreprise a enregistré une forte évolution de son ratio de sinistralité fluctuant entre 30% et 104% .

De nombreuses méthodes ont été étudiées dans la partie précédente. Afin de mieux observer les effets de chacune d'elle, il nous a semblé intéressant de récapituler les principaux résultats relatifs à chaque branche :

	Méthode N°1	Méthode N°2	Méthode N°3	Méthode N°4
Assurances des risques techniques	34,77%	8,87%	58,31%	35,54%
Assurance accidents de travail et maladies professionnelles	10,63%	9,00%	13,71%	5,28%
Véhicules à usage de tourisme – Corporel	6,20%	6,28%	7,30%	6,55%
Véhicules à usage de tourisme – Matériel	5,69%	5,22%	6,56%	4,49%

A ce stade, une petite comparaison des résultats obtenus s'impose. Pour la branche « Assurance des risque techniques », les estimations obtenues s'écartent largement de ceux des autres branches, nous pouvons expliquer la forte volatilité enregistrée par la nature même de la branche ; un seul sinistre peut s'avérer particulièrement élevé et difficile à quantifier.

Pour les 3 autres branches, les deux premières méthodes procurent des résultats très proches. Ces méthodes ont l'avantage d'être très simples à la fois en termes de compréhension et d'application, elles consistent à mesurer l'erreur de tarification historique par comparaison de la charge de sinistres observée avec une charge de sinistre théorique, estimée à partir du volume de primes.

La troisième méthode, quant à elle, donne des volatilités relativement plus importantes. Celle-là est fondée sur l'hypothèse d'un ratio de sinistralité régulier aux cours des années et commun à toutes les compagnies, ce qui n'est pas nécessairement le cas selon les risques considérés.

La première méthode repose sur l'estimation de la volatilité du Boni/Mali par une formule fermée simple, les résultats ainsi obtenus sont considérés fiables. Dans le but de tester l'adéquation entre les autres méthodes et les données utilisées, et par conséquent la

validité et la pertinence des résultats, nous avons considéré des indicateurs en se basant sur les  $\sigma_{lob,e}$  obtenus par la première méthode :

**Corrélation ( $\sigma_{lob,e}, V_{lob,e}$ ) :**

La deuxième méthode est censée produire des volatilités faibles pour les entreprises ayant un fort volume de primes, nous avons tester ce constat à travers le coefficient de corrélation entre les volatilités  $\sigma_{lob,e}$  et les primes  $V_{lob,e}$ .

**Coefficient de variation ( $S/P_{lob,e}$ ) :**

La troisième méthode part d'une forte hypothèse, elle considère que par branche, toutes les entreprises sont supposées avoir le même ratio de sinistralité. Nous verrons son adéquation aux branchées étudiées en analysant la variation de ce ratio entre les entreprises. Cette méthode ne serait valable que pour les branches où l'on obtient une variation insignifiante du S/P.

**Coefficient de variation ( $\sigma_{lob,e}$ ) :**

Les valeurs attendues de  $\sigma_{lob,e}$  par la méthode 4 sont supposées être identiques pour toutes les entreprises considérées, nous étudierons leur variation dans chaque branche afin de confirmer ou pas la validité de la méthode 4.

Nous disposons ainsi d'un ensemble de critères résumés dans le tableau suivant :

	<b>Corr(<math>\sigma_{lob,e}, V_{lob,e}</math>)</b>	<b>cv (<math>S/P_{lob,e}</math>)</b>	<b>cv(<math>\sigma_{lob,e}</math>)</b>
Assurances des risques techniques	0,04	6,7%	5,7%
Assurance accidents de travail et maladies professionnelles	-0,55	2,8%	17,2%
Véhicules à usage de tourisme – Corporel	-0,66	0,8%	2,6%
Véhicules à usage de tourisme – Matériel	-0,29	0,5%	0,9%

A l'exception de la première branche, les corrélations entre les volatilités obtenues et les volumes de mesure sont négatives. Le signe négatif de cette mesure confirme la tendance décroissante de  $\sigma_{lob,e}$  en fonction de  $V_{lob,e}$ . La corrélation positive obtenue pour la branche « Assurance des risques techniques » remet en cause la fiabilité de l'estimation obtenue par la deuxième méthode.

Le ratio  $S/P_{lob,e}$  ainsi que les  $\sigma_{lob,e}$  ne varie pas considérablement entre les entreprises pour les différentes branches, ceci montre que la validité des résultats obtenus par les méthodes 3 et 4.

Globalement, nous pouvons conclure que les méthodes donnent des résultats acceptables. Toutefois, nous ne considérons pour la branche « Risques Techniques » que les volatilités obtenues par la première et la quatrième méthode et nous excluons la quatrième méthode pour la branche « Véhicules à usage de tourisme-Matériel » vu que le coefficient de variation est relativement signifiant.

## II. Calcul des volatilités liés au risque de provisions

Le calcul de la mesure de volume par année calendaire (total de la provision Best Estimate des sinistres) est la première chose à réaliser, nous l'estimons au début et à la fin de chaque exercice. Les schémas suivants détaillent la démarche de calcul, pour une entreprise dans une branche donnée, des mesures suivantes :

- $V_{lob,k,e}$  : Le montant des réserves Best Estimate des sinistres constituée pour l'année calendaire  $k$ .

$$V_{lob,k,e} = \sum_{i+j=k+1} PCO_{lob,i,j,e}$$

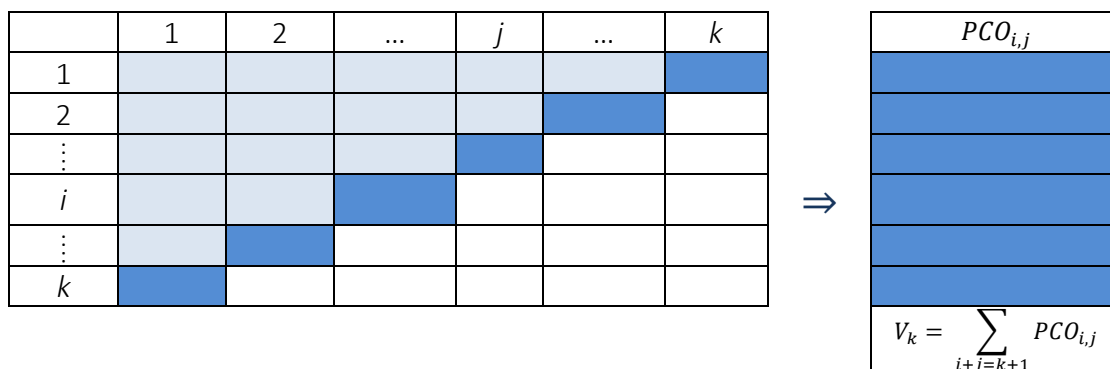
- $R_{lob,k,e}$  : La somme des paiements incrémentaux au titre des exercices antérieurs et des réserves Best Estimate à la fin de l'année.

$$R_{lob,k,e} = \sum_{\substack{i+j=k+2 \\ i \neq k+1}} PCO_{lob,i,j,e} + \sum_{\substack{i+j=k+2 \\ i \neq k+1}} I_{lob,i,j,e}$$

Avec :

- $PCO_{lob,i,j,e}$  : Best Estimate des provisions de sinistres pour l'année de survenance  $i$  et l'année de développement  $j$ .
- $I_{lob,i,j,e}$  : Les paiements incrémentaux des sinistres pour l'année de survenance  $i$  et l'année de développement  $j$ .

Provision d'ouverture pour l'exercice  $k$  :

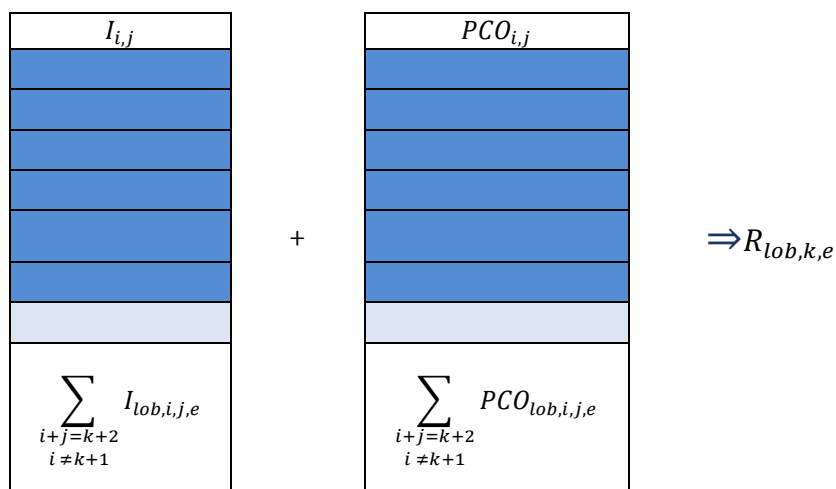
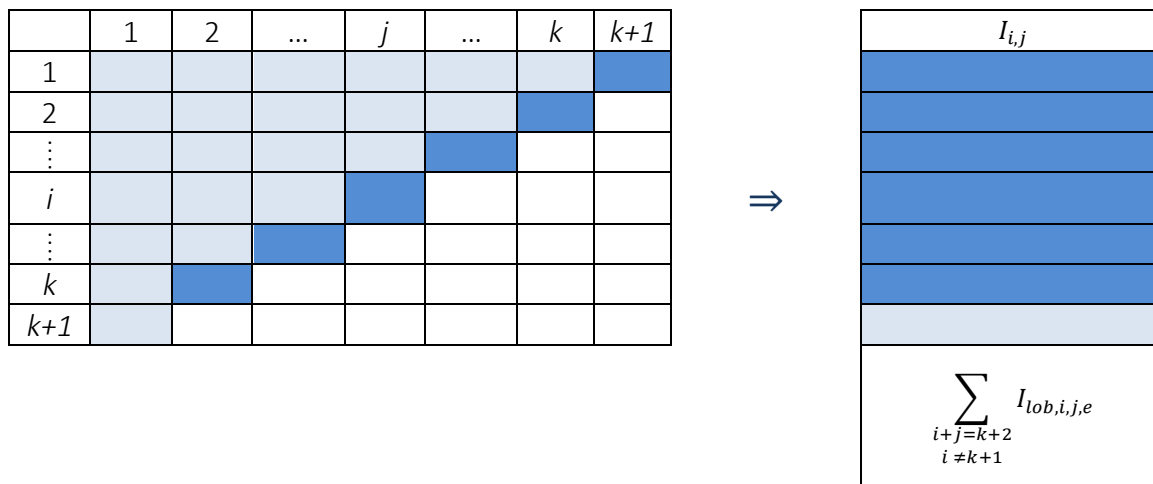


La provision d'ouverture pour un exercice comptable correspond à la somme des provisions au titre de chaque exercice de survenance.

La somme des paiements incrémentaux et des BE-sinistres, après un an :

Le résultat du déroulement des sinistres sur un an pour un exercice comptable est obtenu en sommant les paiements versés au cours de cet exercice comptable ( $\sum_{\substack{i+j=k+2 \\ i \neq k+1}} I_{i,j}$ ) et les provisions constituées à sa clôture au titre des exercices de survenance antérieurs uniquement ( $PCO_{i,j}$  tels que  $i + j = k + 2$  et  $i \neq k + 1$ ).

Triangle de paiements décumulés



Par la suite, nous utilisons la formule fermée pour la première méthode. Nous procédons pour les méthodes 2 et 3 selon la même démarche utilisée pour le risque de primes :

- Calcul de la fonction de vraisemblance et estimation du paramètre  $\widehat{\beta}_{lob}$ .
- Conclusion des volatilités pour chaque entreprise.
- Déduction de la volatilité pour tout le secteur en moyennant les volatilités individuelles.

Voici donc une table résumant les volatilités obtenues par branches selon les trois premières méthodes :

	Méthode N°1	Méthode N°2	Méthode N°3
Assurances des risques techniques	6,08%	5,63%	28,92%
Assurance accidents de travail et maladies professionnelles	4,40%	4,12%	12,34%
Véhicules à usage de tourisme – Corporel	5,86%	5,27%	14,79%
Véhicules à usage de tourisme – Matériel	3,20%	4,91%	11,78%

Il s'avère que la méthode 3 sur-estime le risque de provisions, les volatilités obtenues dépassent celles des deux premières méthodes.

La notion de Claim Development Result permet de prendre en considération la définition fixée de la volatilité à un an. Elle mesure directement l'erreur commise entre l'estimation des provisions de sinistres vue au temps  $t = n$  et  $t = n + 1$ .

Pour estimer cette volatilité, nous utilisons nos triangles de liquidation vus en 2017. Nous les complétons à l'aide de la méthode Chain Ladder. L'application stricte des formules permet d'obtenir un estimateur de l'erreur de prédiction du  $\widehat{CDR}$  total autour de la valeur prédite (égale à 0) qui correspond à la volatilité à horizon un an. Ci-après, un exemple des *MSEP* obtenues pour la branche « Accidents de Travail et Maladies Professionnelles » :

Entreprises	$\sqrt{MSEP_{Lob,e}}$
1	54992870
2	41577570
3	40371421
4	71222329
5	20051214
6	51410872
7	20221487
8	38981618
9	12205383

Afin d'exprimer la volatilité en pourcentage, nous divisons l'erreur de prédiction conditionnelle estimée par la mesure du volume tel que définies précédemment. Nous employons cette méthode pour l'ensemble des branches, le tableau suivant fournit les résultats par branche :

	Méthode N°4	Méthode N°5	Méthode N°6
Assurances des risques techniques	167,14%	70,27%	195,74%

<b>Assurance accidents de travail et maladies professionnelles</b>	5,86%	5,87%	7,29%
<b>Véhicules à usage de tourisme – Corporel</b>	0,52%	0,73%	1,33%
<b>Véhicules à usage de tourisme – Matériel</b>	52,64%	9,74%	56,54%

### Analyse des résultats :

Avant tout développement, le mieux serait de dresser un tableau récapitulatif de l'ensemble des volatilités estimées par toutes les méthodes :

	Méthode N°1	Méthode N°2	Méthode N°3	Méthode N°4	Méthode N°5	Méthode N°6
<b>Assurances des risques techniques</b>	6,08%	5,63%	28,92%	167,14%	70,27%	195,74%
<b>Assurance accidents de travail et maladies professionnelles</b>	4,40%	4,12%	12,34%	5,86%	5,87%	7,29%
<b>Véhicules à usage de tourisme – Corporel</b>	5,86%	5,27%	14,79%	0,52%	0,73%	1,33%
<b>Véhicules à usage de tourisme – Matériel</b>	3,20%	4,91%	11,78%	52,64%	9,74%	56,54%

### Assurances des risques techniques

Concernant cette branche, nous ne pouvons pas conclure. Les méthodes procurent des résultats divergents.

### Accidents de travail et maladies professionnelles

Les différentes volatilités obtenues sont relativement proches, nous pourrions considérer la volatilité la plus élevée, qui est obtenue par la méthode 3.

### Véhicules à usage de tourisme – Corporel

Globalement, les méthodes du Claims Development Result produisent les estimations des volatilités à horizon un an les plus basses. Il s'en suit que celles-ci n'est pas adaptées à cette branche. Le mieux serait de ne considérer que les 3 premières méthodes, les volatilités  $\widehat{\sigma}_{lob}$  obtenues par celle-ci étant rapprochées, nous pourrions considérer leur moyenne et conclure une seule valeur pour cette branche.

### Véhicules à usage de tourisme – Matériel

Nous constatons des écarts importants entre les méthodes, ceux-ci pourraient être justifiés par la qualité d'ajustement des données aux hypothèses sous-jacentes des différentes modélisations.

Afin d'évaluer la validité des méthodes 2 et 3, nous considérons des critères similaires à ceux déjà vus au risque de primes (corrélation et coefficient de variation du Boni-Mali).

Le tableau ci-dessus résume les  $Corr(\sigma_{lob,e}, V_{lob,e})$  ainsi que les **coefficient de variation (Boni – Mali)** obtenus pour les différentes branches :

	$Corr(\sigma_{lob,e}, V_{lob,e})$	$cv (Boni - Mali)$
Assurances des risques techniques	-59,3%	3,1%
Assurance accidents de travail et maladies professionnelles	-26,7%	0,6%
Véhicules à usage de tourisme – Corporel	-36,9%	1,1%
Véhicules à usage de tourisme – Matériel	-72,6%	0,9%

Nous confirmons ainsi l'adéquation des méthodes 2 et 3 pour toutes les branches.

Ensuite, nous considérons les méthodes 4,5 et 6 valables pour la deuxième branche, la cinquième méthode pour la branche Véhicules à usage de tourisme – Matériel. Les autres cas ne seront pas tenus en compte car ils procurent des résultats très divergent, ces méthodes se révèlent donc inadéquates.

Nous disposons ainsi d'un jeu de volatilité estimées selon les différentes méthodes pour le risque de primes et le risque de provisions. Nous devons maintenant en choisir une pour chaque branche afin de conclure l'écart-type combiné et en déduire le capital de Solvabilité Requis. Nous proposons une moyenne par branches des volatilités jugées fiables. Ainsi les résultats finaux  $\sigma_{lob,primes}$  et  $\sigma_{lob,provisions}$  :

	Risque de primes	Risque de provisions
Assurances des risques techniques	35,2%	13,5%
Assurance accidents de travail et maladies professionnelles	11,1%	6,6%
Véhicules à usage de tourisme – Corporel	6,6%	8,6%
Véhicules à usage de tourisme – Matériel	5,5%	7,4%

Nous avons obtenu ces résultats par un simple calcul de la moyenne, ceci a permis d'avoir des résultats proches de ceux retenus par la réglementation prudentielle européenne « Solvabilité II ». Cependant, cette démarche ne tient pas compte du nombre d'entreprise ayant des volatilités  $\sigma_{lob,e}$  qui dépassent ce résultat final.

Nous terminons cette partie par un exemple de calcul du capital de solvabilité requis (SCR) pour l'une des entreprises, nous le déterminons en appliquant la formule standard en incorporant nos volatilités estimées. Nous considérons le cas le plus prudent en retenant une corrélation entre le risque de prime et de provisions égale à 1.

	BE-Primes	BE-provisions	Volume <sub>Lob</sub>	Volatilité <sub>Lob</sub>	CSR
<b>Assurances des risques techniques</b>	26 260 107	77 503 480	103 763 587	16,5%	51 289 508
<b>Assurance accidents de travail et maladies professionnelles</b>	288 997 697	840 554 085	1 129 551 782	6,8%	231 350 841
<b>Véhicules à usage de tourisme – Corporel</b>	464 993 582	795 095 254	1 260 088 836	7,0%	264 309 205
<b>Véhicules à usage de tourisme – Matériel</b>	399 480 563	58 509 898	457 990 461	5,3%	73 150 213

Si l'on modifie la corrélation entre le risque de primes et de provisions en prenant  $Corr_{prime,provisions} = 0,5$ . L'écart-type combiné du risque de primes et de provisions est modifié et par conséquent le montant du CSR. Le tableau suivant présente les variations obtenues de ce dernier pour chaque branche :

CSR ( $Corr_{prime,provisions} = 1$ )	CSR ( $Corr_{prime,provisions} = 0,5$ )	Variation du CSR
51 289 508	46 846 313	-8,66%
231 350 841	213 187 226	-7,85%
264 309 205	245 750 314	-7,02%
73 150 213	70 166 828	-4,08%

Les assureurs doivent désormais maîtriser les modalités de calcul de l'exigence en capital imposée dans ce nouveau cadre réglementaire, c'est l'occasion de mener des analyses par produit pour comprendre leur contribution à l'exigence en capital globale de la compagnie. Ces études permettent dans un premier temps d'acquérir une connaissance plus approfondie des risques auxquels est exposé chaque produit puis dans un deuxième temps d'identifier, le cas échéant, des leviers de rentabilité pour adapter les politiques de souscription.

## Conclusion

La réforme SBR initié par l'ACAPS est un projet d'ampleur, cette future réglementation prudentielle s'est assigné des objectifs ambitieux en incitant les compagnies d'assurance à améliorer la connaissance et la gestion de leurs risques. Avec le calcul du SCR notamment, elles sont amenées à estimer au mieux leurs engagements et il est donc important que ce calcul reflète autant que possible leurs profils de risque. L'exigence de capital est déterminée de sorte à limiter la probabilité de ruine à horizon un an à 0,5%.

Nous avons proposé dans le cadre de ce mémoire une multitude de méthodes pour le calibrage de la formule standard du calcul du CSR. Après avoir exposé les éléments principaux de ce nouveau cadre prudentiel, en se concentrant sur le bilan et le calcul de l'exigence de capital, nous avons présenté une justification théorique du calibrage proposée de la formule standard. Nous constatons après mise en application de ces méthodes que chacune d'elles semble s'adapter à un type de branche et des spécificités des données. Nous ne considérons donc pas une méthode parfaite mais nous proposons diverses méthodes pour estimer les volatilités. Nous avons néanmoins fait des hypothèses fortes concernant la distribution des charges, des provisions et leur estimation, Il serait intéressant d'étudier l'impact que pourrait engendrer leur modification. Ceci permettra aussi de bénéficier de retours quantitatifs et qualitatifs, base préalable à la deuxième étude d'impact « EIQ2 » portant sur le « Calcul du Capital de Solvabilité Requis » qui sera lancée prochainement.

Finalement, le niveau du CSR dépend fortement de la forme de dépendance entre les risques que l'on agrège, nous avons considéré dans un premier temps le cas le plus prudent de risques comonotones, ensuite nous avons modifié cette dépendance et constaté une variation importante au niveau du CSR. Ainsi, plusieurs axes pourraient compléter l'étude présentée dans ce mémoire. En effet, le choix de la dépendance entre le risques peut engendrer une économie significative en termes de besoin en capital.

## Bibliographie

## Annexes

### La fonction gho

$$\rho(\sigma) = \frac{\exp(N_{0,995} \cdot \sqrt{\log(1 + \sigma^2)})}{\sqrt{1 + \sigma^2}} - 1$$

Soit  $X$  la variable aléatoire représentant le ratio de sinistralité (la charge totale rapportée aux primes).

$X$  est à valeurs dans  $]0, \infty[$ . L'hypothèse est de considérer que  $X \sim \text{LogN}(\mu_X, \sigma_X^2)$ . Par définition :

$$P(X < \text{VaR}_{0,995}(X)) = 0,995$$

La fonction logarithme étant croissante, le terme précédent est équivalent à :

$$P(\log(X) < \log \text{VaR}_{0,995}(X)) = 0,995$$

Posons alors  $Y = \log(X)$ . La variable aléatoire  $Y \sim N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$ . Nous obtenons alors :

$$P\left(\frac{Y - \mu_Y}{\sigma_Y} < \frac{\log \text{VaR}_{0,995}(X) - \mu_Y}{\sigma_Y}\right) = 0,995$$

On en déduit :

$$\frac{\log \text{VaR}_{0,995}(X) - \mu_Y}{\sigma_Y} = N_{0,995}$$

$$\Leftrightarrow \log \text{VaR}_{0,995}(X) = N_{0,995} * \sigma_Y + \mu_Y$$

$$\Leftrightarrow \text{VaR}_{0,995}(X) = \exp(N_{0,995} * \sigma_Y + \mu_Y)$$

$$\Leftrightarrow \text{VaR}_{0,995}(X) = \exp(N_{0,995} * \sigma_Y) \exp(\mu_Y) \quad (\text{a})$$

En remarquant que

$$\mu_Y = \log(\mu_X) - 0,5 * \log\left(\frac{1 + \sigma_X^2}{\mu_X^2}\right)$$

$$\sigma_Y = \sqrt{\log\left(\frac{1 + \sigma_X^2}{\mu_X^2}\right)}$$

En remplaçant les deux précédents termes dans la formule (a) :

$$VaR_{0,995}(X) = \exp\left(N_{0,995} * \sqrt{\log\left(\frac{1 + \sigma_X^2}{\mu_X^2}\right)}\right) \exp\left(\log(\mu_X) - 0,5 * \log\left(\frac{1 + \sigma_X^2}{\mu_X^2}\right)\right)$$

En supposant que le profit moyen comptable est nul (ceci correspond à un ratio combiné de 100%), et donc  $\mu_X = 1$ , la formule suivante est obtenue :

$$VaR_{0,995}(X) = \exp\left(\frac{N_{0,995} * \sqrt{\log(1 + \sigma_X^2)}}{\sqrt{1 + \sigma_X^2}}\right)$$

Autrement dit  $\rho(\sigma)$ , représente l'écart entre la valeur at risk à 99,5%, du ratio combiné et sa moyenne supposée égale à 1. Elle représente donc bien, une fois appliquée au volume d'affaire, le risque non vie.

## La loi log-normale

Une variable aléatoire  $X$  suit une loi log-normale de paramètres  $M$  et  $S^2$  si la variable  $\ln(X)$  suit une loi normale de paramètres de paramètres  $M$  et  $S^2$ .

La densité de probabilité de la variable aléatoire  $X$  suivant une loi log-normale est définie alors sur  $R^+$  par :

$$f_X(x; M, S^2) = \frac{1}{x\sqrt{2\pi S^2}} \exp\left(-\frac{(\ln(x) - M)^2}{2S^2}\right)$$

Son espérance et sa variance sont définies par :

$$\begin{cases} E(X) = e^{M+\frac{S^2}{2}} \\ V(X) = (e^{S^2} - 1)e^{2M+S^2} \end{cases}$$

Il est possible d'isoler les paramètres  $M$  et  $S^2$  de la loi log-normale :

$$\begin{cases} M = \ln(E(X)) - \frac{\ln\left(1 + \frac{V(X)}{E(X)^2}\right)}{2} \\ S^2 = \ln\left(1 + \frac{V(X)}{E(X)^2}\right) \end{cases}$$

## Estimation par maximum de vraisemblance

Dans certains cas, le choix de l'estimateur n'est pas évident. Il est alors possible d'en construire un avec la méthode de maximum de vraisemblance. Le principe est intuitivement évident : On choisit comme estimateur le paramètre de la distribution pour lequel l'observation est la plus probable, ou la plus vraisemblable.

La vraisemblance est une fonction des paramètres d'un modèle statistique calculée à partir des données observées. Elle mesure l'adéquation entre la distribution sur un échantillon aléatoire  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  et une loi de probabilité  $P_\theta$  supposée décrire la population dont cet échantillon est issu.

Etant donné un échantillon  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  et une distribution de probabilité de paramètre  $\theta$ , la vraisemblance est définie par :

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n; \theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i; \theta)$$

Avec :

$$f(x_i; \theta) = \begin{cases} f_\theta(x_i) & ; \text{si } X \text{ est une v. a continue} \\ P_\theta(x_i) & ; \text{si } X \text{ est une v. a discrète} \end{cases}$$

La vraisemblance quantifie alors la probabilité que les observations proviennent effectivement d'une distribution théorique de paramètre  $\theta$ . Dans le cas où ce paramètre est inconnu, on cherche alors à l'estimer de telle façon qu'il maximise la vraisemblance.

Un estimateur de maximum de vraisemblance est une fonction  $\widehat{\theta}_n$  de  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  vérifiant :

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n; \widehat{\theta}_n) = \text{Max}_\theta L(x_1, x_2, \dots, x_n; \theta)$$

La recherche d'un tel estimateur se fait par maximisation de la fonction  $L$ . La solution est obtenue par :

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \text{ qui vérifie } \frac{\partial^2 L}{\partial \theta^2} < 0$$

Pratiquement, il est préférable de remplacer  $L$  par la Log Vraisemblance  $\text{Log}(L)$ . La vraisemblance se calculant à partir d'un produit et la fonction  $\ln$  étant croissante,  $\frac{\partial \ln(L)}{\partial \theta} = 0$  qui vérifie  $\frac{\partial^2 \ln(L)}{\partial \theta^2} < 0$  donne une expression simplifiée de l'estimateur.

## L'erreur quadratique moyenne

Soit  $\theta$  une variable aléatoire et  $D$  l'ensemble de l'information. Soit  $\hat{\theta}$  un estimateur  $D$  – *mesurable* de  $E(\theta|D)$  et un prédicteur  $D$  – *mesurable* de  $\theta$ . L'erreur quadratique conditionnelle moyenne d'un estimateur quelconque  $\hat{\theta}$  est :

$$MSEP_{\hat{\theta}}(\theta) = E[(\hat{\theta} - \theta)^2 | D]$$

C'est une mesure de la précision de l'estimateur. Le risque présent dans la prédiction de  $\theta$  par  $\hat{\theta}$  peut se mesurer par la « *Mean square error of prediction* » associée.

Il représente la distance quadratique moyenne entre la variable aléatoire  $\theta$  et sa prédiction. Nous pouvons montrer que l'erreur quadratique moyenne est la somme de la variance de l'estimateur et du biais de l'estimateur au carré. Autrement dit,

$$MSEP_{\hat{\theta}}(\theta) = V[\theta | D] + (E[\theta | D] - \hat{\theta})^2$$

En effet, pour une variable aléatoire quelconque  $\theta$  :

$$V(\theta) = E(\theta^2) - (E(\theta))^2$$

Cette formule s'applique aussi à la variable aléatoire  $(\hat{\theta} - \theta)$ . Donc nous avons

$$\begin{aligned} V(\hat{\theta} - \theta) &= E((\hat{\theta} - \theta)^2) - (E(\hat{\theta} - \theta))^2 \\ \Rightarrow E((\hat{\theta} - \theta)^2) &= V(\hat{\theta} - \theta) + (E(\hat{\theta} - \theta))^2 \\ \Rightarrow E((\hat{\theta} - \theta)^2) &= V(\hat{\theta}) + (E(\hat{\theta} - \theta))^2 \end{aligned}$$

C'est ce qu'il fallait démontrer.