ROYAUME DU MAROC
--*-*-*
HAUT COMMISSARIAT AU PLAN
--*-*-*-*-*-*
INSTITUT NATIONAL
DE STATISTIQUE ET D'ECONOMIE APPLIQUEE
INSEA

Projet de Fin d'Etudes

*****

Estimation de la structure par terme des taux d'intérêt

Préparé par : ***M. Salim MANSOURI***

Sous la direction de : ***M. Kamal BENCHEKROUN (INSEA)***

Mme Mariam ZRIHNI (WAFA Gestion)

Soutenu publiquement comme exigence partielle en vue de l'obtention du

Diplôme d'Ingénieur d'Etat

Filière : ACTUARIAT-FINANCE

Devant le jury composé de :

- **M. Kamal BENCHEKROUN (INSEA)**
- **M. Said Ramadan NSIRI (INSEA)**
- **Mme Mariam ZRIHNI (WAFA Gestion)**

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail

A mes très chers parents pour leur amour, leur affection, et

Leurs prières,

A mon frère,

A toute ma grande famille,

A tous mes amis

Sachez que vous êtes très chers à mon cœur et que je suis très reconnaissant pour tout l'amour et le soutien dont vous faites preuve à mon égard.

Du fond du cœur, je vous dis MERCI

Remerciements

C'est une tâche très agréable, mais bien délicate, de présenter mes remerciements à tous ceux qui m'ont aidé dans la réalisation de ce travail.

J'adresse mes remerciements en premier lieu à mon éminent encadrant, monsieur **Kamal Benchekroun**, qui n'a ménagé aucun effort pour la réussite de ce stage. Ses conseils pertinents, sa sympathie et sa constante disponibilité ont constitué autant d'atouts dans ma formation qu'un facteur déterminant dans le bon déroulement de mon stage.

Qu'il me soit permis d'exprimer ma gratitude à madame **Mariam Zrihni**, qui a proposé le sujet, a accepté de m'encadrer et m'a fait profiter de son savoir et de sa grande expérience. Qu'elle trouve, ici, le témoignage de mon sincère reconnaissance et de mes vifs remerciements.

Je tiens à exprimer ma gratitude à mon Professeur monsieur **Said Ramadan NSIRI**, pour m'avoir honoré en acceptant de juger ce travail. Veuillez, ainsi que tout le corps professoral de l'*INSEA*, retrouver ici le témoignage du respect le plus profond.

Ce travail a été réalisé au sein de Wafa Gestion, du groupe Attijariwafa Bank. Je tiens donc à témoigner toute ma reconnaissance à tous les employés et cadres de *Wafa Gestion* pour leur aide et assistance.

Table des matières

Liste des tableaux :

Liste des figures :

Abréviations

TMP : Taux moyen pondéré
TBB : taux de base bancaire
OPCVM : Organisme de placement collectif en valeurs mobilières
CIR : Cox Ingersoll et Ross
MCO: Moindre carré ordinaire
EDS : Equation différentielle stochastique
AOA : Absence d'opportunité d'arbitrage
BAM: Bank Al Maghrib
OAT : Obligation assimilable au trésor
OCA : Obligation convertible en action
BDT : Bon de trésor
VBA: Visual Basic for Application
DF: Discount factor
ZC : zéro-coupon
Taux JJ : taux le jour le jour
i.e : C'est à dire

Introduction

Les marchés de taux d'intérêt sont les marchés de capitaux les plus importants du monde, loin devant le marché des changes et très loin devant celui des actions, non seulement par les volumes traités mais aussi par leur importance économique. Il est habituel de les séparer en marché monétaire pour le court terme et marché obligataire pour le moyen et long terme.

Dans ce présent mémoire, nous examinerons l'une des plus grandes théories des taux d'intérêt. Connu sous le nom de structure par terme des taux d'intérêt, cette théorie offre un cadre de reconstitution et de prévision de la courbe des taux d'intérêt.

Cette théorie est représentée par une multitude de modèle. Nous traiterons au cours de ce travail le modèle de Vasicek. Ce modèle s'appuie sur le processus d'Ornstein Uhlenbeck qui modélise l'évolution du taux court que nous allons utiliser par la suite pour l'implémenter dans l'équation de la structure par terme.

Le présent mémoire s'organisera en six chapitres ; les deux premiers chapitres vont servir à présenter certaines notions nécessaires à une bonne initiation au sujet. Nous étalerons, à la fin du deuxième chapitre, une méthodologie pour la réalisation d'un Pricer d'obligation à taux fixe. Au troisième chapitre, nous nous intéresserons aux méthodes de reconstitution de la structure par terme des taux d'intérêt. Nous aborderons ensuite, dans le quatrième et cinquième chapitre, deux modèles de taux stochastiques dans l'univers risque neutre : le modèle de Vasicek et le modèle de Cox Ingersoll Ross. Nous ferons une présentation théorique détaillée de ces modèles, suivie d'une implémentation informatique. Le dernier chapitre sera consacré à la validation de ces modèles dans le cas marocain.

Chapitre I : Mathématiques financières

Avant toute chose, il est tout d'abord nécessaire de présenter quelques outils du calcul financier basique. Il n'existe pas de pré-requis particulier pour cette section, si ce n'est la "maîtrise" de l'addition, de la multiplication et d'un minimum de bon sens.

Il sera principalement question de taux d'intérêt dans ce qui suit. L'intérêt est fréquemment appelé la valeur temps de l'argent, c'est à dire la valeur accordée aujourd'hui au fait de ne pas utiliser l'argent dont on dispose pour une utilisation immédiate (i.e. la consommation). Le fait de renoncer à consommer aujourd'hui pour prêter de l'argent a un prix, et ce prix peut être assimilé au taux d'intérêt.

Nous verrons par la suite les principes de capitalisation, d'actualisation et de critères de décisions (à partir de quel niveau de taux choisit-on de ne pas consommer ? Comment choisir entre différents projets d'investissement ?).

I.1 Principal et Intérêts

L'idée de base de cette section est extrêmement simple. Imaginons que vous investissez un montant de 100 dirhams sur une durée d'un an dans un placement qui rapporte 3% par an. A la fin de cette année d'investissement, vous serez alors l'heureux détenteur de 103 dirhams. Vous avez ainsi augmenté votre capital de 3%. De façon générale, en investissant un montant M à un taux r%, vous vous retrouvez avec M(1 + r%) à la fin de l'année. Ce principe relativement simple, se complexifie légèrement lorsque l'on dépasse l'horizon d'investissement d'un an. Nous distinguons alors les intérêts simples des intérêts composés.

I.1.1 Intérêts Simples

Les intérêts simples constituent la méthode la plus simple de calcul des intérêts. Il s'agit d'une règle de proportionnalité: les intérêts au bout de ***n*** années sont égaux à ***n*** fois les intérêts au bout d'une période.

Plus précisément, en reprenant l'exemple précédent, et en investissant dans un projet d'horizon 3 ans, on obtient :

– des intérêts de Mr% la première année
– des intérêts de Mr% la deuxième année
– des intérêts de Mr% la troisième année

Soit $3 \times Mr\%$ au terme des trois ans (la somme des trois versements d'intérêts). Le capital au bout de 3 ans est ainsi égal à M(1 + 3r%).

L'idée ici est que les intérêts perçus chaque année ne donnent pas lieu à la perception d'intérêts sur les intérêts. Ceci expliquant la dénomination d'intérêts simples: nous nous contentons de calculer les intérêts chaque année comme s'il s'agissait d'un nouveau projet d'investissement d'un horizon d'un an.

Notez que jusqu'ici les taux d'intérêts sont exprimés en base annuelle : il s'agit des intérêts liés à des projets d'un horizon d'un an. Il s'agit d'une pratique extrêmement courante et généralisée à l'ensemble des marchés.

I.1.2 Intérêts Composés

Par opposition aux intérêts simples, les intérêts composés permettent de percevoir à la fois les intérêts et les intérêts sur les intérêts. En reprenant l'exemple précédent, nous investissons M au taux annuel r% sur 3 ans, avec des intérêts composés. Nous obtenons alors :

–des intérêts égaux à Mr% au bout d'un an.
–au bout de deux ans, nous obtenons à la fois Mr%, comme dans le cas précédent. Nous ajoutons à cela le fait que nous avons réinvesti les intérêts de la première année au même taux, soit : Mr%(1 + r%)
– il y va de même pour la dernière année : nous obtenons classiquement les Mr%, auxquels s'ajoutent les intérêts des intérêts perçus au cours de la première et deuxième année : soit Mr%(1+r%)(1 + r%) pour ceux de la première année et Mr%(1 + r%) pour la deuxième année.

Au total, nous obtenons alors :

$$M(1 + r\%)^3$$

Ainsi, dans le cas des intérêts composés, le capital accumulé s'écrit à l'aide de puissances et non du produit comme c'était le cas pour les intérêts simples. Encore une fois, il s'agit pour le moment de capitalisation annuelle. Nous verrons plus loin une méthode permettant de capitaliser sur des intervalles situés dans R_*^+ .

I.2 Taux proportionnels et taux équivalents

Il arrive très souvent de devoir capitaliser des intérêts sur des périodes différentes de l'année: capitalisation sur une semaine, un mois, trois mois ou pour des périodes plus complexes telles que deux mois, trois semaines et deux jours. Il est alors nécessaire de déterminer le taux qui s'applique à cette capitalisation, à partir du taux annuel de capitalisation. Il est possible d'utiliser les taux proportionnels ou les taux équivalents, selon l'approximation que l'on souhaite mettre en œuvre.

I.2.1 Taux proportionnels

Comme nous l'avons fait remarquer, les taux d'intérêt sont fréquemment exprimés en base annuelle (plus rarement en base semestrielle). Lorsque nous considérons une période de capitalisation inférieure à l'année (par exemple le mois ou le trimestre), le taux d'intérêt prévalant pour cette période doit être calculé de manière proportionnelle :

r : taux en base annuelle
r_m : taux périodique si nous considérons qu'il y a $\boldsymbol{m}$ périodes de capitalisation pendant l'année

Nous avons alors :

$$r_m = \frac{r}{m}$$

I.2.2 Taux équivalents

Dans le cas où nous travaillons sur un intervalle de temps supérieur à l'année, nous avons généralement recours aux taux équivalents. Deux taux correspondant à des périodes de capitalisation différentes sont équivalents quand ils donnent à intérêts composés la même valeur acquise au bout du même temps de placement. Autrement dit, l'équivalent annuel de ces deux taux doit être le même. Nous détaillerons la méthode et nous présenterons là encore un exemple numérique simple.

Ainsi, considérons :

$\boldsymbol{r}$ le taux d'intérêt en base annuelle pour $\boldsymbol{m}$ périodes de capitalisation
$\boldsymbol{r_a}$ le taux annuel équivalent (avec période annuelle de capitalisation)

L'égalité des valeurs acquises au bout d'un an entre les deux placements s'écrit :

$$(1 + r_a) = (1 + \frac{r}{m})^m$$
$$r_a = (1 + \frac{r}{m})^m - 1$$
$$r = m(\sqrt[m]{r_a + 1} - 1)$$

La méthode de calcul est ici légèrement plus complexe que pour les intérêts proportionnels, mais l'approximation est meilleure.

Remarque :

Nous noterons qu'intuitivement, les intérêts proportionnels correspondent à une capitalisation à intérêts simples, alors que les taux équivalents correspondent à une capitalisation à intérêts composés. Nous utilisons ainsi davantage les intérêts simples pour des périodes inférieures à l'année et les intérêts composés pour des périodes supérieures à l'année.

I.3 Intérêts en temps continu

Imaginons qu'il soit possible d'augmenter toujours davantage ***m***, le nombre de périodes composant une année : il serait possible en théorie d'utiliser le mois comme intervalle, ou la semaine, les jours, l'heure, voire la minute et de déterminer ainsi le taux équivalent pour une unité de temps tendant vers 0 (et par conséquent un nombre de périodes tendant vers +1). Considérer une composition continue revient à considérer qu'il soit possible de capitaliser sur une période de temps infinitésimale. Ainsi, à partir de la capitalisation suivante :

$$(1+\frac{1}{m})^m$$

Une capitalisation continue revient à faire tendre *n* vers l'infini : nous obtenons un intervalle de taux infiniment petit. La limite de cette expression est alors :

$$\lim_{m\to\infty}(1+\frac{1}{m})^m = e$$

Une autre façon de le voir est de faire un développement limité de eu au voisinage de 0. Nous avons alors e^u est équivalent à (1+u). Nous obtenons de même cette approximation pour $(e^u)^n$ qui est équivalent à $(1+u)^n$.

I.4 Conventions de calcul

Tous les calculs précédents font intervenir la durée du placement. Il existe des conventions précises pour la calculer, qui diffèrent selon les marchés et les produits. Voici quelques unes de ces règles de calcul :
-La base renseigne sur la durée entre deux paiements et sur le nombre de jours considérés dans une année.
-Un placement sur une période d'intérêt entre deux dates d1 et d2 est supposé inclure la date d1 et exclure la date d2.
-Les intérêts sont perçus en fin de période de capitalisation, i.e. pour une capitalisation annuelle, à la fin de chaque année. On parle parfois d'intérêts post-comptés.

Les principales bases sont :

-Base Exact/360 (Actual/360) : nombre exact de jours calendaires entre deux dates divisé par 360 ; elle est utilisée sur le marché monétaire avec des taux proportionnels.

-Base Exact/Exact (Actual/Actual) : nombre exact de jours calendaires entre les deux dates. La base comprend 365 ou 366 jours selon les années calendaires ; elle est utilisée pour le calcul des coupons courus des obligations.
-Base 30/360 : année divisée en 12 mois de 30 jours. On compte le nombre de mois calendaires pleins + les fractions de mois ; elle est utilisée sur le marché des swaps.

Chapitre II: Marché des taux d'intérêt

II.1 Types de taux d'intérêt

Un taux d'intérêt est défini comme étant la rémunération, ramenée à une base annuelle, d'un placement pendant une période déterminée. En effet, différentes caractéristiques entrent dans la définition d'un taux. Il s'agit de :

- la durée de la transaction,
- la fréquence de paiement des intérêts,
- la base annuelle et le mode de calcul des durées,
- la méthode de calcul des intérêts.

En pratique la diversité des taux est telle qu'il soit indispensable de définir les différentes notions de taux d'intérêt. Nous préciserons dans l'ordre les notions suivantes : taux nominal et taux réel, taux court et taux long, taux de rendement actuariel, taux zéro-coupon, taux à terme et enfin les taux de base bancaire, taux interbancaire et taux de pension.

II.1.1 Taux nominal et taux réel

Si nous prenons le cas d'un placement d'une année dans un instrument financier à échéance d'une année au taux nominal R. Un capital d'une unité monétaire génère, à échéance, une somme de (1+R) unités monétaires.

Le taux de rendement réel de placement est défini comme étant la différence du taux de rendement R et celui de l'inflation durant la durée de portage de cet instrument qu'on note π

$$R=r-\pi \text{ (relation de Fisher)}$$

Le taux réel n'est pas observable directement sur le marché

II.1.2 Taux court et taux long

Comme nous l'avons déjà mentionné la notion du taux varie selon plusieurs caractéristiques, en fonction de la maturité nous pouvons distinguer trois types de taux :

- ***Taux court terme*** : les taux appliqués aux opérations sur des périodes allant jusqu'à 2 ans;
- ***Taux moyen terme*** : les taux appliqués aux opérations de 2 à 5ans ;

- ***Taux long terme*** : les taux appliqués aux opérations au-delà de 5ans ;

II.1.3 Taux de rendement actuariel

C'est le rendement véritable du placement. Il est défini comme étant le taux permettant d'égaliser la valeur actuelle de la suite des « cash-flows » générés par un titre à son prix de marché. Son calcul utilise la méthode des intérêts composés et tient compte de toutes les modalités de l'émission.

Le taux de rendement actuariel r est donc la solution de l'équation :

$$P = \sum_{i=1}^{n} \frac{CF_i}{(1+r)^i}$$

Avec P : le prix du titre, CF_i : le flux reçu en i et n : la maturité du titre.

Le taux de rendement actuariel apparaît comme un outil commode pour évaluer le rendement une obligation à un instant donné (Taux unique, il dépend du nombre et des flux futurs, facilement calculable et il a une apparence de sens économique et financier).

II.1.4 Taux zéro-coupon

Un instrument financier "zéro-coupon" est un instrument qui ne donne lieu à aucun paiement intermédiaire d'intérêts. Nous disons aussi qu'il n'y a pas de détachement de coupon intermédiaire.

Nous ne disposons donc que de 2 flux :

- Un flux initial.
- Un flux final de remboursement.

Nous appelons taux zéro-coupon, le ***taux actuariel*** de cet instrument.

II.1.5 Taux forward ou taux à terme

La notion du taux forward ou taux à terme est basée sur l'idée qu'il soit possible de construire, à un instant donnée, un portefeuille d'obligations permettant de déterminer à l'avance le taux de rendement d'un prêt sur une période future quelconque.

Considérant trois dates t, T1 et T2 telles que t<T1<T2, et construisant une opération d'achat et de vente fixant à l'instant t le taux de rendement d'un prêt de maturité T2 - T1 en T1. La procédure est la suivante : nous achetons en t un bon d'échéance T2, de prix P(t, T2) et nous vendons au même moment « $\frac{P(t,T_2)}{P(t,T_1)}$ » bons d'échéance T1, de prix unitaire $P(t,T_1)$.

Le tableau 1 résume les différentes opérations générées par ce portefeuille :

Opérations			Flux financiers générés		
sens	Quantité	Bon	En t	En T_1	En T_2
Achat	1	T_2	$-P(t,T_2)$	0	1
Vente	$P(t,T_2)/P(t,T_1)$	T_1	$P(t,T_2)$	$P(t,T_2)/P(t,T_1)$	0
Solde			0	$-P(t,T_2)/P(t,T_1)$	1

Figure 1 : opérations

A l'instant T_1 il faudra rembourser $\frac{P(t,T_2)}{P(t,T_1)}$ dirhams sur le bon vendu, et nous recevrons en T_2 un dirham du bon acheté. Au total nous construisons à l'instant t un bon fictif, de maturité T_2-T_1 en T_1, et de prix $\frac{P(t,T_2)}{P(t,T_1)}$, connu en t.

Le taux de rendement noté $f(t, T_1, T_2)$ de cette obligation future fictive, calculable à partir de la structure des taux en t, est donné par :

$$f(t, T_1, T_2) = -\frac{1}{T_2 - T_1} \ln(\frac{P(t, T_2)}{P(t, T_1)})$$

II.1.6 Taux de base bancaire, taux interbancaire et taux de pension.

Le taux de base bancaire (TBB) est un taux spécifique à chaque banque (la concurrence fait cependant que les principaux établissements s'alignent), lui servant de référence pour les crédits qu'elle accorde. Le TBB est étroitement lié aux coûts des ressources et des taux auxquels la banque peut se refinancer sur le marché.

Le taux interbancaire est le taux d'intérêt avec lequel les banques peuvent se prêter ou s'emprunter des fonds. Les pensions sont des moyens de refinancement des banques, à court terme, auprès de la banque centrale (Bank Al Maghrib).

Sur le marché monétaire national, nous avons des pensions à une semaine sur appel d'offre de BAM, à 5 jours et à 24 heures pouvant être demandé par les banques une fois par semaine pour leurs besoins supplémentaires en liquidité. Les taux d'intérêt correspondants à chacune de ces pensions sont appelés taux de pension 7 jours, taux de pension 5 jours et taux de pension 24 h. A signaler que les taux de pensions 24h sont plus élevés que ceux de 5 jours qui, à leur tour, sont supérieurs à ceux de 7 jours. Ces taux de pensions sont aussi appelés les taux directeurs de la banque centrale.

II.2 Construction de la courbe

Pour bien comprendre comment nous construisons la courbe des taux, nous allons détailler les modalités depuis la soumission des institutions financières jusqu' à la construction de la courbe.

Appel d'offre :

Le trésor fait appel à l'offre des soumissionnaires à travers des communiqués et un calendrier hebdomadaire.

Nous allons nous concentrer sur la maturité (appelé aussi une ligne d'adjudication) 52 semaines (1 ans) comme exemple, et nous allons prendre comme institutions financières qui vont soumissionner Attijariwafa Bank, la BMCE et la BMCI.

Supposons par exemple que l'état a besoin de l'argent sur 52 semaines, (c'est-à-dire il veut emprunter de l'argent et ne la rembourser qu'après 1 ans). Le montant voulu n'est pas connu au départ.

La soumission :

La BMCE propose au trésor : 100 MDH avec un taux de 3,2%.

La BMCI propose 120 MDH avec un taux de 3,4 %.

Attijariwafa Bank propose 300 MDH avec un taux de 4 %.

Technique d'adjudication :

Supposons que le trésor a besoin de 200 MDH. Evidement en premier lieu il va commencer par le taux minimum et donc il va commencer par la proposition de la banque Attijariwafa Bank, mais cette dernière n'offre que 100 MDH, il va falloir après, prendre le taux minimum des propositions restantes, ainsi il va prendre 100 MDH de la BMCI avec le taux 3,4 %.

Publication des résultats des soumissions :

Le bon de trésor après chaque soumission publie ces résultats sous formes d'un tableau qui se présente comme suit :

Maturité	Caractéristiques	Mt proposé	Taux ou prix proposé		Montant adjugé	T ou p limite	T ou P moyen pondéré
			Min	Max			
552 semaines	02/05/2006;2.90%	520	3,2%	4 %	200	3,4%	3,3%

Tableau 1 : Publication des résultats

-

Montant proposé = la somme des montants proposés.

Taux ou prix (T P) moyen pondéré = (100*3,2+100*3,4) /200

Taux limite (T L) est le taux de rendement du bon de trésor 52 semaines et c'est le taux sur lequel le trésor s'est arrêté.

Ainsi le taux de rendement du bon de trésor pour chaque ligne est considéré dans la courbe des taux.

Remarque :

Il se peut que lors d'une séance d'adjudication le trésor ne prend pas de l'argent pour une ligne donnée et donc pour la construction de la courbe à cet instant nous allons prendre celui de la séance précédente.

II.3 Le marché obligataire

Les obligations sont des valeurs mobilières représentatives de titres de créances négociables, à moyen ou long terme, remboursables à échéance et rapportant à leur détenteur un intérêt fixe ou variable.

Le marché obligataire est le marché sur lequel sont échangées les obligations. Il permet donc le placement des émissions nouvelles d'obligations (marché primaire) et la vente sur le marché secondaire, avant leur échéance prévue de remboursement, des obligations déjà émises.

Au Maroc, les émissions d'emprunts obligataires sont réservées à l'Etat, aux entreprises publiques ou semi-publiques autorisées ou garanties par l'Etat et, au niveau des entreprises privées, aux seules sociétés anonymes ayant deux années d'existence et un capital entièrement libéré.

II.3.1 Avantages et Inconvénients

L'avantage du placement en obligation est la sécurité du placement : en effet, le rendement est garanti et la mise de fonds est assurée d'être récupérée à l'échéance.

Cependant, il existe certains risques : ainsi, si l'émetteur est en faillite, il ne pourra ni payer les intérêts ni rembourser l'obligation. C'est ce que nous appelons le risque de signature. Mais ce risque peut être évité en choisissant des obligations sûres comme les obligations d'Etat ou de sociétés renommées. Le revers de la médaille est la faiblesse des taux alors offerts.

Aussi, il y a le risque de taux : lorsque les taux d'intérêt augmentent, le cours des obligations anciennes baisse puisque les obligations nouvellement émises sont plus attractives. Inversement, lorsque les taux d'intérêt diminuent, le cours des obligations anciennes augmente car leurs rendements sont supérieurs à ceux des nouvelles obligations.

Enfin, il y a le risque de perte en capital lorsqu'à la fois les taux d'intérêt augmentent et le titulaire d'obligations décide de les céder : en effet, ces obligations ne prendront pas toujours preneurs. Mais dans le cas où les taux d'intérêt baissent, le titulaire d'obligations peut s'attendre à réaliser des plus-values s'il vend les obligations avant leurs échéances.

- ***Avantages***
    - Rendement garanti
    - Mise de fonds assurée d'être récupérée à l'échéance
    - En cas de diminution des taux d'intérêt, possibilité de réaliser des gains en cas de vente des obligations avant leurs échéances

- ***Inconvénients***
    - Risque de signature
    - Risque de taux
    - Risque de perte de capital si les obligations ne sont pas conservées jusqu'à l'échéance

II.3.2 La gestion des obligations

Le titulaire d'obligation reçoit chaque année un intérêt que nous appelons le coupon. Ce coupon est versé généralement en une seule fois mais il peut y avoir des versements trimestriels.

Si l'obligation est à taux fixe, le coupon sera chaque année du même montant. Mais le coupon annuel peut varier d'une année à l'autre lorsque en cas d'obligations à taux variable ou à taux révisable.

L'achat des obligations lors de leur émission se fait sur le marché primaire *(C'est le marché d'émission des titres (introductions en bourse))* et le règlement des titres est réalisé trois semaines après l'annonce de l'emprunt. Aussi, l'acquisition des obligations plus anciennes s'effectue sur le marché secondaire *(C'est le marché ou se négocient et s'échangent les titres en bourse)* où s'échangent les obligations cotées en Bourse : c'est en particulier sur ce marché que les obligations sont revendues avant leurs échéances.

II.3.3 Quelques obligations particulières

- ***Les obligations assimilables au Trésor (OAT)*** *:* ce sont des titres de créance qui représentent une part d'un emprunt à long terme émis par l'Etat. L'Etat s'engage alors à rembourser à l'obligataire en une seule fois cette part d'emprunt à une échéance de sept à trente ans et dont la rémunération est un intérêt annuel. Les OAT sont cotées en Bourse pendant toute la durée de leur vie, ce qui permet d'ailleurs à leur porteur de s'en défaire facilement. La valeur nominale est celle qui sera remboursée à échéance et sur laquelle sont calculés les intérêts. Le prix d'émission est le prix d'achat de l'obligation, il peut être différent de la valeur nominale. Depuis octobre

1994, les OAT à dix ans à un prix fixe peuvent être achetées chaque mois chez un intermédiaire financier du premier jeudi au vingt quatre du mois. Le prix inclue une commission d'achat de 2 % de la valeur nominale.

- ***Les obligations convertibles en actions (OCA)** :* ce sont des obligations ayant la possibilité d'être converties en actions à tout moment ou plusieurs époques déterminées à l'avance par l'émetteur. Cependant, ces obligations sont émises à un taux inférieur aux obligations classiques. Cela permet néanmoins au porteur de ce type d'obligation de bénéficier d'une gestion flexible et attractive : en effet, lorsque le cours de l'action augmente et devient supérieur à la valeur de remboursement de l'obligation, le porteur convertira son obligation en action afin de profiter d'un meilleur rendement.

- ***Les obligations à coupon zéro** :* ce sont des obligations émises à un prix bas et remboursées à un prix élevé, ce qui permet au porteur de ce type d'obligation de réaliser une plus-value intéressante. En revanche, ces obligations ne rapportent aucun intérêt.

II.3.4 Réalisation d'un « Pricer » de BDT à taux fixe

L'évaluation des titres de créances émis ou garantis par l'Etat, à coupons annuels et à taux fixe remboursables « *in fine* » est régie par la circulaire de la BAM.

Evaluation des titres de créances de maturité initiale inférieure ou égale à 1 an :

Le prix des titres de créances à taux fixe dont la maturité initiale est inférieur ou égale à 365 jours, est calculé de la manière suivante :

$$P = N\frac{1 + t_f\frac{M_i}{360}}{1 + t_r\frac{M_r}{360}}$$

Où :

P : le prix du titre, en DH ;
N : le nominal, en DH ;
Mi : la maturité initiale, en jours ;
Mr : maturité résiduelle, en jours ;
tf : le taux facial ;

tr : le taux de rendement, simple (il devient constant pour toute maturité résiduelle inférieure ou égale à 8 semaines, avec une condition de continuité du taux à la maturité précitée).

Evaluation des titres de créances de maturité initiale supérieure à 1 an :

Titres de créances de maturités résiduelles inférieures à 1 an :

Le prix des titres de créances à taux fixe dont la maturité initiale est supérieur à 1 an et dont la maturité résiduelle est inférieure ou égale à 365 jours, est calculé de la manière suivante :

$$P = N \frac{1 + t_f}{1 + t_r \frac{M_r}{360}}$$

Sauf dans le cas des lignes postérieures à un seul flux où la formule s'écrit :

$$P = N \frac{1 + t_f \frac{M_i}{A}}{1 + t_r \frac{M_r}{360}}$$

Où :

P, N , Mr , Mi , tf et tr : tels que définis précédemment ;
A : égale à 366 jours si l'année en cours est une année bissextile et 365 sinon.

Titres de créances de maturité résiduelle supérieure à 1 an :

Le prix des titres de créances à taux fixe dont les maturités initiales et résiduelles sont supérieures à 365 jours, est calculé de la manière suivante :

$$P = \frac{1}{(1 + t_r)^{\frac{n_j}{A}}} \sum_{i=1}^{n} \frac{F_i}{(1 + t_r)^{(i-1)}}$$

Où :

P : prix du titre ;
tr : le taux de rendement au moment de l'évaluation
Fi : flux monétaire à la date i (coupon ou coupon plus nominal) ;
n : nombre de coupons à venir ;
nj : nombre de jours restant à courir jusqu'à la date du prochain coupon ;
A : égale à 366 jours si l'année en cours est une année bissextile ou 365 sinon ;

Remarque :

-Cette dernière formule s'écrit différemment suivant que la ligne à évaluer est normale ou postérieure.

-Le code (VBA) du Pricer est en Annexe.

Chapitre III: Structure par terme des taux d'intérêt

III.1 Définition de la courbe des taux

La structure par terme des taux d'intérêt (ou courbe des taux ou encore gamme des taux) est la fonction qui, à une date donnée et pour chaque maturité en abscisse, indique le niveau du taux d'intérêt associé en ordonnée.

III.2 La multitude de courbes des taux

A une date donnée et dans un pays ou dans une zone économique unifiée, il existe une multitude de courbes de taux.

Nous distinguons les courbes de marché et les courbes implicites.

Les courbes de marché sont construites directement à partir des cotations de marché d'instruments comme les obligations et les swaps.
Exemple :
La courbe des taux de rendement à maturité : elle est construite à partir des taux de rendement des obligations ;
La courbe des taux de swaps : elle est construite à partir des taux de swaps.

Les courbes implicites sont dérivées indirectement à partir des cotations de marché d'instruments comme les obligations et les swaps.
Exemple :
La courbe des taux zéro-coupon ;
La (les) courbe(s) de taux forwards ;
La courbe des taux forwards instantanés ;
La courbe des taux de rendement au pair.

Remarque :

Nous distinguons les courbes de taux selon l'émetteur, le secteur auquel il appartient et son niveau de rating.

III.3 Construction de la structure par terme des taux d'intérêt

La connaissance de la courbe des taux zéro-coupon est indispensable pour les professionnels de marché pour différentes raisons :
- Evaluer les produits de taux délivrant des flux futurs à finalité de couverture.
- Détecter les produits sur ou sous évalués sur le marché pour tenter d'en tirer profit.
- Calculer d'autres courbes implicites comme, par exemple, la courbe des taux forward.

• Mettre en place des modèles stochastiques de déformation de celle-ci dans le temps afin, entre autres, d'évaluer les options cachées des produits financiers.
La reconstitution de cette courbe est nécessaire car il n'existe pas suffisamment d'obligations zéro-coupon cotées sur le marché.

III.3.1 Taux zéro-coupon / Taux de rendement actuariel

Afin de calculer la valeur de la plupart des instruments financiers, il est nécessaire de connaître la somme des montants actualisés aujourd'hui des flux générés par ceux-ci. Ces actualisations se font à l'aide des *taux zéro-coupon*.

« Un produit financier dit « zéro-coupon » est un instrument qui ne comporte aucun détachement de coupon et ne donne lieu qu'à un flux initial I (prix d'achat) et un flux final de remboursement N (nominal). Le taux de rendement actuariel de cet instrument est son taux zéro-coupon ».

De façon plus formelle, un zéro-coupon d'échéance T (ou « *obligation zéro-coupon* ») est un contrat qui garantit à son détenteur le paiement d'une seule unité monétaire à la date T, sans coupons intermédiaires.
Son prix à la date ***t*** est noté ***B (t,T).*** On a ***B (T, T)=1.***

Nous l'appellerons également *facteur d'actualisation* ou « *discount factor* » (DF).

A partir des prix de zéro-coupon, nous pourrons déduire le prix de nombreux taux d'intérêt en temps discret et en temps continu (en particulier les taux « in fine », précomptés et actuariels). Nous travaillerons avec les taux actuariels définis de la manière suivante :

En temps discret, le *taux actuariel* à la date t (ou «*taux zéro-coupon*»), d'échéance T, *noté r (t, T)* est défini par :

$$B(t,T) = \frac{1}{(1+r(t,T))^{T-t}}$$

Ainsi la ***courbe des taux zéro-coupon*** est la représentation graphique des taux actuariels *r (t, T)* en fonction de T pour un t donné (ou en fonction de T-t). La courbe de taux peut s'obtenir quelle que soit la courbe de prix pour l'obligation ZC. Elle s'appelle également « Structure par terme des taux d'intérêts ».

L'écriture en temps continu d'une obligation ZC devient :

$$B(t,T) = e^{-r(t,T)(T-t)}$$

Le taux implicite à ce prix d'obligation est $r(t,T) = \frac{-\ln(B(t,T))}{T-t}$, appelé également *« rendement à échéance »*. Nous le noterons aussi $Y(t,T)$ ou $Y(t,T-t)$. Ainsi, pour t fixé et T variable, $Y(t,T)$ décrit la courbe de taux, également appelée « courbe des rendements à l'échéance ».

Enfin, nous définissons le ***taux instantané*** ou ***taux sans risque*** $r(t)$, non observable, par la formule suivante :

$$r(t) = \lim_{T\to t} Y(t,T)$$

III.3.2 Homogénéisation et interpolation de la courbe des taux

III.3.2.1 Base de données

Afin de construire la courbe des taux zéro-coupon nous avons utilisé les données de taux de bons de trésor fournies par la BAM.

Voici un extrait de la courbe des taux publiée par la BAM.

03/01/2012	47	3,360%
03/01/2012	60	3,340%
03/01/2012	146	3,431%
03/01/2012	230	3,490%
03/01/2012	473	3,620%
03/01/2012	703	3,700%
03/01/2012	733	3,750%
03/01/2012	824	3,780%
03/01/2012	867	3,790%
03/01/2012	1750	3,960%
03/01/2012	2589	4,095%
03/01/2012	3395	4,182%
:l03/01/2012	5586	4,450%
03/01/2012	6699	4,510%
03/01/2012	9107	4,626%
04/01/2012	46	3,360%
04/01/2012	60	3,340%
04/01/2012	91	3,370%
04/01/2012	142	3,430%
04/01/2012	230	3,490%
04/01/2012	473	3,620%

04/01/2012	703	3,700%
04/01/2012	770	3,783%
04/01/2012	1750	3,960%
04/01/2012	2589	4,095%
04/01/2012	3395	4,182%
04/01/2012	5586	4,450%
04/01/2012	6699	4,510%
04/01/2012	9107	4,626%

Tableau2

Dans la première colonne nous avons les dates de publication, dans la deuxième colonne nous avons les maturités et dans la troisième colonne nous avons les taux.

Remarque :

Il faudrait noter que pour les maturités inférieures à 365 jours, les taux publiés par BAM sont des taux monétaires. Tandis que pour les taux de maturités supérieures à 365 jours les taux sont des taux actuariels.
Nous voulons une courbe ***homogène*** i.e. placement in fine et même base de calcul. Il est donc préférable de transformer tous ces taux en base actuarielle Exact/Exact.

Voici un extrait de la courbe des taux, du **06/03/2012,** dont ses taux sont transformés en base actuarielle.

Maturité	taux BAM	taux actuariel
47	3,360%	3,410%
60	3,340%	3,387%
146	3,431%	3,466%
230	3,490%	3,513%
473	3,620%	3,620%
703	3,700%	3,700%
733	3,750%	3,750%
824	3,780%	3,780%
867	3,790%	3,790%
1750	3,960%	3,960%
2589	4,095%	4,095%
3395	4,182%	4,182%
5586	4,450%	4,450%
6699	4,510%	4,510%
9107	4,626%	4,626%

Tableau 3

Méthode de calcul des taux zéro-coupon sur le cours terme :

Sur le court terme, les instruments sont généralement de type zéro-coupon. En effet sur le moins d'un an, le remboursement du capital intervient en même temps que le paiement des intérêts. Nous avons donc bien 2 flux. Le problème se situe uniquement au niveau de la conversion du taux monétaire en base actuarielle :

$$t_a = (1 + \frac{t_m * n}{360})^{\frac{1}{f}} - 1$$

Avec :
t_m, le taux monétaire,
t_a, le taux actuariel,
n, le nombre de jours du placement,
f, la fraction d'année du placement (base exact/exact).

Méthode de calcul des taux zéro-coupon sur le long terme

A partir du moment où nous raisonnons sur le plus d'un an, nous ne retrouvons confronté au fait qu'interviennent généralement des règlements intermédiaires d'intérêts (détachement de coupons) généralement annuels.

La méthode analytique itérative permet de résoudre ce problème :

Le taux zéro-coupon d'un instrument de maturité un an et distribuant un coupon C_1 au bout d'un an est égal au taux de ce placement puisque celui ci est déjà un zéro-coupon. Nous avons donc : $C_1 = r_1$.
Le taux zéro-coupon d'un instrument de maturité 2 ans et distribuant un coupon C_2 annuellement se calcule en replaçant le coupon intermédiaire C_2 distribué au bout d'un an au taux zéro-coupon 1 an r_1.
Si nous procédons aux deux opérations suivantes : prêt d'un montant unitaire sur deux ans et emprunt d'un montant $\frac{C_2}{(1+r_1)}$ au taux $r_1$sur un an .
Nous avons le bilan des flux de ces deux opérations est donnée *dans* le tableau suivant :

Date	Emprunt	Prêt	Total
0	$C_2/(1+r_1)$	-1	$C_2/(1+r_1)$ -1
1an	$-C_3$	C_2	0
2 ans	0	$1+C_2$	$1+C_2$

Figure 2 : Bilan des flux des deux opérations

Nous avons par cette opération créée un instrument synthétique ne détachant pas de coupon intermédiaire. Le taux de rendement interne de cette opération est donc le même que celui d'un prêt zéro-coupon. Nous déduisons donc le taux zéro-coupon 2 r_2 du 2 ans :

$$r_2 = \left(\frac{1 + C_2}{1 - \frac{C_2}{1 + r_1}}\right)^{\frac{1}{2}} - 1$$

Nous procédons ainsi par itérations successives pour les années suivantes en utilisant chaque fois les taux zéro-coupon déterminés précédemment. Ce mécanisme peut être résumé par la formule récursive du taux zéro-coupon n en fonction des n-1 taux zéro-coupon précédents :

$$\boxed{r_n = \left(\frac{1 + C_n}{1 - C_n \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{(1 + r_i)^i}}\right)^{\frac{1}{n}} - 1}$$

Voici un extrait des taux zéro-coupon calculés :

taux inf	taux sup	taux actu	Facteur d'actualisation	Taux zéro coupon
0,03386985	0,03466461	0,03415633		3,416%
0,03466461	0,03512563	0,03486219		3,486%
0,03512563	0,0362	0,03571808	0,965513705	3,572%
0,037	0,0375	0,03745	0,92904864	3,759%
0,0379	0,0396	0,03833896	0,893123047	3,850%
0,0379	0,0396	0,03904168	0,857678869	3,924%
0,0396	0,04095	0,03972068	0,82253212	3,996%
0,0396	0,04095	0,04030799	0,78813977	4,059%
0,0396	0,04095	0,04089529	0,754209259	4,124%
0,04095	0,04182	0,04130728	0,721912835	4,169%
0,04095	0,04182	0,04170127	0,690467129	4,213%
0,04182	0,0445	0,04213191	0,659485225	4,263%
0,04182	0,0445	0,04257838	0,629091182	4,316%
0,04182	0,0445	0,04302484	0,599412336	4,370%
0,04182	0,0445	0,0434713	0,570456986	4,425%
0,04182	0,0445	0,04391776	0,542231845	4,481%
0,04182	0,0445	0,04436423	0,514742094	4,539%
0,0445	0,0451	0,04463693	0,489892006	4,574%
0,0445	0,0451	0,04483369	0,466718661	4,597%

0,0445	0,0451	0,04503046	0,444368104	4,622%
0,0451	0,04626	0,04521369	0,422982626	4,646%
0,0451	0,04626	0,04538952	0,402470723	4,669%

Tableau 4 : Courbe zéro-coupon du 06/03/2012

III.3.2.2 Interpolation de la courbe des taux :

Il existe plusieurs méthodes permettant d'interpoler, de trouver à une date donnée le taux correspondant pour différentes maturités, la courbe des taux zéro-coupon. Dans les lignes qui suivent, nous allons présenter la méthode d'interpolation linéaire avec laquelle nous avons construit la structure par terme des taux d'intérêt.

Méthode d'interpolation linéaire :

Le fait d'effectuer une interpolation linéaire entre deux points de la courbe d'une fonction consiste à supposer qu'entre ces deux points, la fonction peut être remplacée par une fonction affine. Dans ce cas nous construisons une courbe d'interpolation qui est une succession de segments.

Dans notre cas, nous connaissons le taux zéro-coupon Z_i de maturité t_i et le taux zéro-coupon Z_j de maturité t_j. Nous souhaitons interpoler le taux Z_K de maturité t_K, avec $t_K \in [t_i, t_j]$.

Nous calculons alors le taux Z_K par la formule suivante :

$$Z_K = \frac{(t_j - t_k)*Z_{i} + (t_j - t_k)*Z_j}{t_j - t_i}$$

Remarque :

-Nous avons utilisé sur Excel une fonction qui s'appelle « Tendance » afin de construire ma courbe. Cette commande nous permet de faire une interpolation linéaire entre deux points de la courbe d'une fonction (courbe de taux).

-Du fait que la base de données contenait des taux allant de 01/01/2009 jusqu'au 03/03 2012, nous avons conçu un programme sous VBA (Le code est en annexe) qui permet d'automatiser les taches. En effet, ce programme nous permet d'interpoler jour par jour la courbe des taux zéro-coupon pour différentes maturités.

Voici un extrait de la courbe des taux zéro-coupon, obtenue après interpolation linéaire.

Maturité en jours	29/02/2012	01/03/2012	02/03/2012	05/03/2012
91	3,495%	3,495%	3,516%	3,516%
182	3,554%	3,554%	3,578%	3,578%
364	3,669%	3,671%	3,671%	3,680%
730	3,912%	3,928%	3,928%	3,937%
1 095	3,976%	3,972%	3,998%	4,016%
1 460	4,006%	3,998%	4,051%	4,065%
1 825	4,061%	4,064%	4,106%	4,115%
2 190	4,118%	4,134%	4,163%	4,164%
2 555	4,176%	4,205%	4,220%	4,199%
2 920	4,242%	4,277%	4,279%	4,269%
3 285	4,324%	4,315%	4,339%	4,339%
3 650	4,408%	4,401%	4,403%	4,403%
4 015	4,466%	4,464%	4,459%	4,460%
4 380	4,522%	4,520%	4,515%	4,517%
4 745	4,579%	4,577%	4,572%	4,576%
5 110	4,584%	4,583%	4,578%	4,576%
5 475	4,590%	4,588%	4,584%	4,577%
5 840	4,589%	4,588%	4,584%	4,578%
6 205	4,588%	4,586%	4,583%	4,580%
6 570	4,587%	4,586%	4,582%	4,582%
6 935	4,602%	4,601%	4,598%	4,599%
7 300	4,627%	4,626%	4,623%	4,624%

Tableau 5

Chapitre IV : Introduction à la modélisation des taux

Le modèle de taux idéal doit avoir, d'après les critères de ROGERS, les caractéristiques suivantes :

1. Réaliste en ce sens qu'il permet de prendre en compte les propriétés empiriques de la courbe des taux.

L'étude historique des mouvements de la courbe des taux met en relief les points suivants :

a. les taux d'intérêt ne sont pas négatifs.
b. les taux d'intérêt sont affectés par des effets de retour à la moyenne.
c. les taux n'évoluent pas de façon parfaitement corrélée.
d. les taux à court terme sont plus volatiles que les taux à long terme.
e. 3 facteurs : niveau, pente et courbure, sont à l'origine de plus de 95% des mouvements de la courbe des taux.

2. Bien construit en ce sens que les paramètres du modèle sont observables sur le marché, facilement estimables, et en outre fréquemment ré ajustables.

3. Compatible avec les prix de marché de produits (obligations à taux fixe ou variable, swaps standards, swaptions, caplets...).

4. Suffisamment simple pour permettre des calculs rapides et intuitifs.

5. Un modèle qui n'oublie pas un facteur de risque.

6. Cohérent d'un point de vue théorique, c'est-à-dire satisfaisant l'absence d'opportunité d'arbitrage.

7. Offrant une méthode de couverture du produit de taux qui permet au vendeur de dupliquer aisément le produit, et par conséquent de sécuriser tout au long de la vie du produit la marge dégagée initialement lors de la vente.

Ce modèle idéal n'existe pas, une multitude de modèles se sont donc développés. Ils peuvent être déterministes (pendant longtemps le taux à été modélisé de façon simpliste par une constante) ou stochastiques, à discrétisation exacte ou approximative, mono ou multifactoriels, reposant sur la théorie de l'absence d'opportunité d'arbitrage ou sur l'équilibre du marché offre/demande.

IV.1 Choix du modèle

Comme nous l'avons expliqué précédemment, il existe une multitude de modèles de taux d'intérêt. Dans la pratique nous pouvons distinguer deux familles de modèles stochastiques.

Ceux reposant sur une approche dite d'évaluation d'équilibre :

En effet Nous parlons d'équilibre général quand il s'applique à l'ensemble de l'économie (consommation/production, offre/demande). Mais une telle approche implique de poser des hypothèses restrictives qui peuvent entraîner un biais dans la modélisation.

Et ceux reposant sur une approche dite d'évaluation d'arbitrage :

Cette approche est moins restrictive mais il faut noter que l'approche précédente, basée sur une économie globale en équilibre, implique toujours l'absence d'opportunité d'arbitrage, la réciproque n'est pas toujours vérifiée.

Les modèles de taux que nous étudierons par la suite, modélisent de façon générale le taux court instantané à l'aide de l'équation différentielle stochastique (EDS) suivante :

$$dr(t) = \mu(r(t),t)dt + \sigma(r(t),t)dB(t)$$

Sous les hypothèses de marché parfait (absence de coût de transaction, titre parfaitement divisible, agents rationnels et disposant du même niveau d'information, marché efficient, taux d'emprunt et de prêt identique), nous présenterons deux modèles classiques:

- VASICEK.
- COX, INGERSOLL, ROSS.

IV.2 Le modèle de VASICEK

IV.2.1 Présentation du modèle

Le modèle de VASICEK (1977) est l'un des premiers modèles stochastiques de taux d'intérêt. Il s'agit d'un processus Gaussien se référant au processus d'ORNSTEIN UHLENBECK pour expliquer l'effet de retour à la moyenne empiriquement observé sur les courbes de taux.

Il s'écrit *:* $dr_t = a(b - r_t)dt + \sigma dW_t$

Où :
r_t : Taux d'intérêt instantané.
a : Vitesse de retour à la moyenne.

b : Moyenne long terme du taux autour de laquelle évolue le taux court instantané.
σ : Volatilité.
W_t : Processus de WIENER.
Cette équation différentielle stochastique dispose d'une solution explicite, il existe donc une discrétisation exacte de ce processus.

IV.2.2 Avantages et inconvénients

Cette modélisation a l'avantage d'être simple de compréhension et intuitive du fait de l'interprétation de ses paramètres, conformément à la caractéristique du modèle de taux idéal.

De plus elle admet une solution explicite et donc une discrétisation exacte (les étapes de discrétisation sont en annexe) :

$$r_{t+\delta t} = r_t exp^{(-a\delta t)} + b\left(1 - exp^{(-a\delta t)}\right) + \sigma\sqrt{\frac{1 - \exp^{(-2a\delta t)}}{2a}}\varepsilon$$

Où : ε suit une loi normale centrée réduite.

Elle est donc simple d'utilisation et d'implémentation d'un point de vue informatique. Elle dispose également d'expressions analytiques pour les produits de taux standards comme les zéro-coupons et les obligations.

Elle permet de prendre en compte l'effet de retour à la moyenne constatée sur les taux d'intérêt, ce qui correspond aux observations empiriques. En effet, des valeurs élevées des taux ont tendance à être suivies plus fréquemment par des baisses que par des hausses. L'effet inverse est également constaté pour des niveaux de taux inhabituellement bas.

Mais ce modèle simple d'utilisation possède plusieurs inconvénients.

Les différents paramètres du processus de diffusion sont constants. Tout se passe comme si un seul facteur (le taux instantané) était à l'origine des déformations de la courbe des taux ; ce qui suppose que les taux soient parfaitement corrélés.

Le modèle est dit non compatible avec la courbe des taux. En effet, bien qu'il soit possible d'obtenir la plupart des formes de la courbes des taux (croissante, décroissante, "bosselée"), on ne peut obtenir une forme de courbe en "creux" : décroissante sur le court terme puis croissante sur le long terme.

De plus cette modélisation du taux suit un processus gaussien, donc est négatif avec une probabilité non nulle. Ce qui est incompatible avec l'hypothèse d'absence d'opportunité d'arbitrage. En effet, un agent économique rationnel préférera toujours garder son argent plutôt que de le prêter à un taux négatif. L'AOA (Absence d'Opportunité d'Arbitrage) est vérifiée si les agents ne peuvent pas investir dans le compte d'épargne court terme, bien que cette hypothèse ne soit pas réaliste.

IV.3 Le modèle Cox, Ingersoll, Ross

IV.3.1 Présentation du modèle

Un autre modèle, COX, INGERSOLL, ROSS (1985) a ensuite été proposé. Il possède toujours cette propriété de retour à la moyenne des taux mais n'a pas l'inconvénient de modéliser des taux négatifs. Il est ainsi plus souvent employé par les professionnels que le modèle de VASICEK.

Il s'écrit : $$dr_t = a(b - r_t)dt + \sigma\sqrt{r_t}dW_t$$

Où :
r_t: Taux d'intérêt instantané
a : Vitesse de retour à la moyenne
b : Moyenne sur le long terme du taux instantané
σ : Volatilité
W_t: Processus de WIENER

Il n'existe pas de solution fermée à cet EDS, La discrétisation ne peut se faire que par approximation. Plusieurs méthodes sont envisageables, comme les schémas d'EULER ou de MILSTEIN qui sont des développements de TAYLOR à des ordres plus ou moins importants de l'EDS.

Discrétisation de premier ordre (les étapes de discrétisation sont en annexe):

$$r_{t+\delta t} = r_t + \mathrm{a}(\mathrm{b} - \mathrm{r_t})\delta \mathrm{t} + \sigma\sqrt{\mathrm{r_t}\delta t}\ \varepsilon$$

Où : ε suit une loi normale centrée réduite.

IV.3.2 Avantages et inconvénients

Cette modélisation est simple d'implémentation et intuitive du fait de l'interprétation de ses paramètres. Elle est également simple d'utilisation et de calcul d'un point de vue informatique, et dispose aussi d'expressions analytiques pour les produits de taux standards comme les zéro-coupons et les obligations.

Elle permet de prendre en compte l'effet de retour à la moyenne constatée sur les taux d'intérêt, qui correspond aux observations empiriques.

Contrairement au modèle de VASICEK, les taux ne peuvent devenir négatifs. En effet, Ce modèle de taux n'a plus le caractère Gaussien.

Les différents paramètres du processus de diffusion sont constants. Tout se passe comme si un seul facteur (le taux court) était à l'origine des déformations de la courbe des taux. Ce qui suppose que les taux sont parfaitement corrélés.

Chapitre V : Absence d'arbitrage et modélisation des taux

Après avoir eu une idée sur la modélisation des taux d'intérêt, nous allons appliquer les modèles cités dans le chapitre précédent aux zéro-coupons. C'est d'ailleurs l'objet de ce projet de fin d'études.

Dans cette section, la section d'absence d'opportunité d'arbitrage ou encore « no free lunch », nous allons mettre en exergue l'expression analytique des modèles, Vasicek et CIR, dans un contexte d'obligations zéro-coupons.

V.1 Modèles déterministes et anticipations rationnelles

Si les taux d'intérêt sont déterministes, l'absence d'arbitrage dit que les prix des zéro-coupons, qui correspondent au prix d'une unité monétaire payée dans le futur doivent vérifier :

$$\frac{dB(t,T)}{B(t,T)} = r_t dt$$

Avec : $B(t,T)$ est le prix en t d'une unité monétaire payée en T, un zéro-coupon d'une unité monétaire.

Soit encore, puisque $B(T,T) = 1$

$$B(t,T) = exp^{\left(-\int_t^T r_s ds\right)}$$

De cette équation on peut déduire le taux actuariel d'une obligation zéro-coupon d'un montant d'une unité monétaire et de maturité θ :

$$R(t,\theta) = \frac{1}{\theta}\int_t^{t+\theta} r_u du$$

V.2 Les modèles aléatoires

Dans les modèles aléatoires, l'absence d'opportunité d'arbitrage entre les prix $B(t,T)$ des zéro-coupons de différentes maturités conduit à des résultats très similaires à ceux du cas déterministe. Cette hypothèse permet encore de reconstruire le prix des zéro-coupon à partir de la dynamique du taux court.

Pour décrire cette liaison, nous supposons que pour toutes les maturités T, les prix des zéro-coupons suivent des processus d'**Ito**. D'autre part, on sait que l'absence d'opportunité d'arbitrage se traduit par l'existence d'un vecteur λ_t de primes de risque tel que les prix des zéro-coupons évoluent comme suit :

$$\frac{dB(t,T)}{B(t,T)} = r_t dt + < \Gamma(t,T), dW_t + \lambda_t dt >$$

Dans ce cas, W_t est un mouvement brownien vectoriel et la famille [t -> $\Gamma(t,T)$] définit une fonction aléatoire de volatilités.

Il est possible d'exprimer différemment cette propriété en introduisant la probabilité Q risque-neutre, pour traduire que $B(t,T)$ est le prix en t d'une unité monétaire payée en T. En effet, si λ_t et les volatilités sont bornées alors il existe une probabilité risque neutre Q équivalente à P telle que les prix des zéro-coupon vérifient :

$$B(t,T) = E_Q[exp - \int_t^T r_s ds / F_t]$$

Avec : F_t l'information à l'instant t.

C'est la transformation classique que nous avons utilisée pour calculer le prix d'un produit financier dans le futur. Il est donc naturel, pour modéliser les déformations de la courbe des taux, de proposer une dynamique pour le taux court. C'est ce qui est proposé dans la suite du chapitre.

V.3 Le modèle de Vasicek

Vasicek suppose qu'il y a un seul aléa W_t, qui influe sur le taux spot, dont la dynamique, dans l'univers risque-neutre, est de la forme :

$$dr_t = a(b - r_t)dt + \sigma dW_t$$

L'équation suivie par le taux court est celle d'un processus d'Ornstein-Uhlenbeck, c'est à dire d'un processus Gaussien, qui oscille autour d'une tendance centrale b, avec une force de rappel d'intensité a. On appréhende l'équation comme une équation différentielle ordinaire, bien que son second membre soit aléatoire.

La solution de l'équation est donnée par :

$$r_t = r_0 e^{-at} + b(1 - e^{-at}) + \sigma \int_0^t e^{-a(t-s)} dW_s$$

C'est donc un processus Gaussien, dont la distribution est stationnaire si r_0 est une variable gaussienne, de moyenne b et de variance $\frac{\sigma^2}{2a}$, indépendante du mouvement brownien. La variable $I(t,T)$, définie par $I(t,T) = \int_t^T r_s ds$, est gaussienne de moyenne $m(t,T)$ et de variance $\Sigma^2(T-t)$, où :

$$m(t,T) = b(T-t) + (r_t - b)\frac{1-e^{-a(T-t)}}{a}$$

$$\text{et } \Sigma^2(T-t) = -\frac{\sigma^2}{2a^3}(1-e^{-a(T-t)})^2 + \frac{\sigma^2}{a^2}(T-t-\frac{1-e^{-a(T-t)}}{a})$$

Les prix des zéro-coupons et la forme générale des taux actuariels continus se déduisent alors aisément du caractère Gaussien de $I(t,T)$.

Dans le modèle de Vasicek, le prix d'un zéro-coupon de maturité T est donné par :

$$B(t,T) = \exp\begin{bmatrix} (e^{-(T-t)a}-1)r(t) + \frac{\sigma^2}{4a^3}(1-e^{-2(T-t)a}) \\ +\frac{1}{K}\left\{b-\frac{\lambda}{K}-\frac{\sigma^2}{K^2}\right\}(1-e^{-(T-t)K}) - \left\{b-\frac{\lambda}{a}-\frac{\sigma^2}{2a^2}\right\}(T-t) \end{bmatrix}$$

et sa volatilité :

$$\Gamma(t,T) = \frac{\sigma}{a}(1-e^{-(T-t)a})$$

La courbe des taux de la date t est donnée par :

$$R(t,T) = -\frac{1}{T-t}\begin{bmatrix} (e^{-(T-t)a}-1)r(t) + \frac{\sigma^2}{4a^3}(1-e^{-2(T-t)a}) \\ +\frac{1}{a}\left\{b-\frac{\lambda}{a}-\frac{\sigma^2}{a^2}\right\}(1-e^{-(T-t)a}) - \left\{b-\frac{\lambda}{a}-\frac{\sigma^2}{2a^2}\right\}(T-t) \end{bmatrix}$$

Avec : λ la prime de risque.

Remarque :

La représentation des zéro-coupons est essentiellement une conséquence des calculs précédents et des propriétés de la transformée de Laplace d'une variable aléatoire Gaussienne. Il suffit de calculer $B(t,T)$ comme :

$$B(t,T) = E_Q[exp - I(t,T)/F_t]$$

En effet, la variable I(t; T) étant gaussienne, sa transformée de Laplace ne dépend que son espérance et de sa variance. La formule explicite est obtenue en regroupant les termes de même nature. L'équation des taux s'en déduit aisément à partir de la formule suivante:

$$R(t,T-t) = -\frac{1}{T-t}\ln((B(t,T-t))$$

Le modèle de Vasicek donne la forme analytique de la courbe des taux d'aujourd'hui et plus généralement de n'importe quelle date. Le graphe de la fonction, qui a *t* on lui associe $R(t, T-t)$, ressemble effectivement à de nombreuses courbes de taux observées sur le marché. Toutefois, certaines d'entre elles, notamment les courbes dites « inversées », où le taux court « r » est plus haut que le taux long, et où apparait un creux ne peuvent être atteintes par un modèle de ce genre.

V.4 Le modèle de CIR

Afin de lever l'objection liée au caractère négatif possible des taux d'intérêt issus du modèle Gaussien de Vasicek, Cox, Ingersoll et Ross ont introduit le modèle dit en racine carrée", sur le taux spot, dans l'univers risque-neutre. La dynamique du taux court est de la forme :

$$dr_t = a(b-r_t)dt + \sigma\sqrt{r_t}dW_t$$

Remarque :

Pour calculer le prix des zéro-coupons, il est nécessaire de procéder un peu différemment que dans le cas du modèle de Vasicek, puisqu'il n'existe pas de formule explicite pour l'équation stochastique. Nous allons plutôt utiliser l'équation aux dérivées partielles d'évaluation. Cette dernière nous permet d'obtenir les formules de prix comme solution d'une équation aux dérivées partielles. Nous allons citer directement, dans les lignes qui suivent, la formule explicite des prix des zéro-coupon du modèle de CIR.

Les prix des zéro-coupons en *t* s'écrivent comme :

$$B(t,T) = A(t,T)e^{-r_t C(t,T)}$$

où $C(t,T) = C(T-t)$ et $A(t,T) = A(T-t)$ sont données par :

$$C(t) = \frac{2(e^{\rho t}-1)}{(\rho+a)(e^{\rho t}-1)+2\rho} \qquad \rho = [a^2+2\sigma^2]^{\frac{1}{2}}$$

$$A(t) = \varphi(t)^{\frac{ab}{\sigma^2}}$$

et φ est définie par : $\varphi(t) = \frac{2\rho e^{\frac{(\rho+a)}{2}t}}{(\rho+a)(e^{\rho t}-1)+2\rho}$

La courbe des taux à la date *t* est donnée par :

$$R(t, T-t) = r_t \frac{C_{T-t}}{T-t} - \frac{2ab}{\sigma^2(T-t)} ln\, \varphi(T-t)$$

Comme dans le modèle de Vasicek, la forme analytique de la courbe des taux aujourd'hui est une des conséquences du modèle. La structure des formes a priori possibles est mieux décrite par ce modèle.

Chapitre VI : Estimation de la structure par terme des taux d'intérêt

A présent, nous allons estimer les paramètres de la dynamique des facteurs retenus pour les modèles cités auparavant (Vasicek et CIR). La dynamique du taux court est induite par une équation différentielle stochastique. Donc, Nous nous trouvons confronté au problème d'estimation d'un processus de diffusion à partir des données en temps discret. Toutefois, la connaissance des versions discrètes exactes permet d'utiliser la méthode des moindres carrés afin d'estimer les paramètres en question.

VI.1 Estimation des paramètres des processus

Dans le modèle de VASICEK, le taux court suit un processus d'Ornstein-Uhlenbeck : sa dynamique est alors représentée par la différentielle stochastique :

$$dr_t = k(\theta - r_t)dt + \sigma dW_t$$

Tandis que dans le modèle de Cox, Ingersoll et Ross le taux spot suit un processus de la forme :

$$dr_t = k(\theta - r_t)dt + \sigma\sqrt{r_t}dW_t$$

Afin estimer les paramètres du processus d'Ornstein Uhlenbeck, a b et σ, nous allons utiliser la discrétisation exacte proposée par Gouriéroux, Monfort et Renault (1993) qui est donnée sous la forme suivante :

$$r_t - r_{t-1} = \theta(1 - e^{-kt}) + (e^{-k} - 1)r_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$\varepsilon_t \text{ suit } N(o, \frac{\sigma^2}{2K}(1 - e^{-2k})$$

Nous pourrons alors, en utilisant les données discrètes du taux court, estimer à l'aide de la Méthode des Moindres Carrées Ordinaires (MCO) les paramètres du processus d'Ornstein-Uhlenbeck via l'équation suivante :

$$r_t = ar_{t-1} + b + \varepsilon_t$$

Où :

$a = \theta(1 - e^{-k)}$

$b = e^{-K}$

Pour estimer les paramètres désirés (a et b), nous avons choisi comme taux court terme, le taux moyen pondéré (TMP) qui est un taux au jour le jour du marché monétaire. C'est un taux moyen pondéré par les montants des transactions déclarées, pour un échantillon représentatif d'établissements admis au marché interbancaire.

Nous avons utilisé des données journalières du TMP allant du 01/08/2009 au 01/02/2012. Voici les résultats d'estimation à l'aide du logiciel SPSS :

Récapitulatif des modèles

Modèle	R	R-deux	R-deux ajusté	Erreur standard de l'estimation
1	,768[a]	,590	,568	,00029

Tableau 6

Coefficients[a]

Modèle		Coefficients non standardisés		Coefficients standardisés	T	Sig.
		A	Erreur standard	Bêta		
1	(Constante)	,006	,001		8,257	,000
	TMP_1	,839	,043	,839	15,188	,000

Tableau 7

Statistiques des résidus[a]

	Minimum	Maximum	Moyenne	Ecart-type	N
Prévision	,0331	,0340	,0335	,00333	881
Résidu	-,0059	,0066	,00000	,00287	881
Erreur Prévision	-1,184	1,513	,000	1,000	881
Erreur Résidu	-2,063	2,303	,000	,975	881

Tableau 8

Nous avons des statistiques de Student de respectivement 8,257 et 15,188 qui sont largement supérieur à la valeur critique de Student 1.96

(pour un niveau de confiance de 95% et un degré de liberté de 881). Donc on rejette l'hypothèse de la nullité des coefficients a et b.

Nous obtenons donc après calcul les estimations du processus de diffusion d'Ornstein-Uhlenbeck comme suit :

$$k = -\ln(b) = 1{,}755$$

$$\theta = \frac{a}{1-b} = 0{,}037$$

$$\sigma = \sigma_{\varepsilon}\sqrt{-\frac{\ln b^2}{1-b^2}} = 0{,}003$$

On peut déduire les paramètres du processus de diffusion du CIR comme suit :

$$K_{CIR} = K_{Vasicek} = 1{,}755$$

$$\theta_{Vaicek} = \theta_{CIR} = 0{,}037$$

$$\sigma_{Vasicek} = \frac{\sigma_{CIR}}{{r_0}^2} = 0{,}0165$$

VI.2 Simulation du TMP

Après avoir estimé les paramètres des modèles, nous allons faire des simulations sur le taux spot (TMP) avec les deux processus. Voici un extrait de l'implémentation des versions, dans le cas discret, des processus sous Excel :

	Vasicek	***CIR***
Rate r_0 at t=0	***3,30%***	***3,30%***
Total simulation time	***3***	***3***
"Pullback" α	***0,17***	***0,17***
Equilibrium b	***3,72%***	***3,72%***
Volatility σ	***0,30%***	***1,65%***
Δ t	***0,0019***	***0,0019***

Tableau 9

			Vasicek	CIR
Period	**Time**	**E**	r + Δr	r + Δr
0	0		3,30%	3,30%
1	0,0019	0,49239145	3,31%	3,3065%
2	0,0038	0,16033187	3,31%	3,3087%
3	0,0056	-0,12296508	3,31%	3,3073%
4	0,0075	0,71227031	3,32%	3,3167%
5	0,0094	0,4644815	3,32%	3,3229%
6	0,0113	-0,09625486	3,32%	3,3217%
7	0,0131	0,65768932	3,33%	3,3304%
8	0,0150	-0,05794369	3,33%	3,3298%
9	0,0169	-0,03263306	3,33%	3,3295%
10	0,0188	-0,65141362	3,32%	3,3211%
11	0,0206	-0,20589805	3,32%	3,3186%
12	0,0225	-1,66760567	3,30%	3,2970%
13	0,0244	-0,46001474	3,29%	3,2911%
14	0,0263	-0,78835927	3,28%	3,2810%
15	0,0281	0,11583569	3,28%	3,2827%
16	0,0300	0,67542668	3,29%	3,2916%
17	0,0319	-1,23144018	3,28%	3,2757%
18	0,0338	-0,28999143	3,27%	3,2721%
19	0,0356	-0,60611023	3,26%	3,2644%
20	0,0375	-1,69889892	3,24%	3,2426%
21	0,0394	0,8833128	3,25%	3,2541%
22	0,0413	0,20218399	3,26%	3,2569%

Tableau 10 : Simulation du TMP

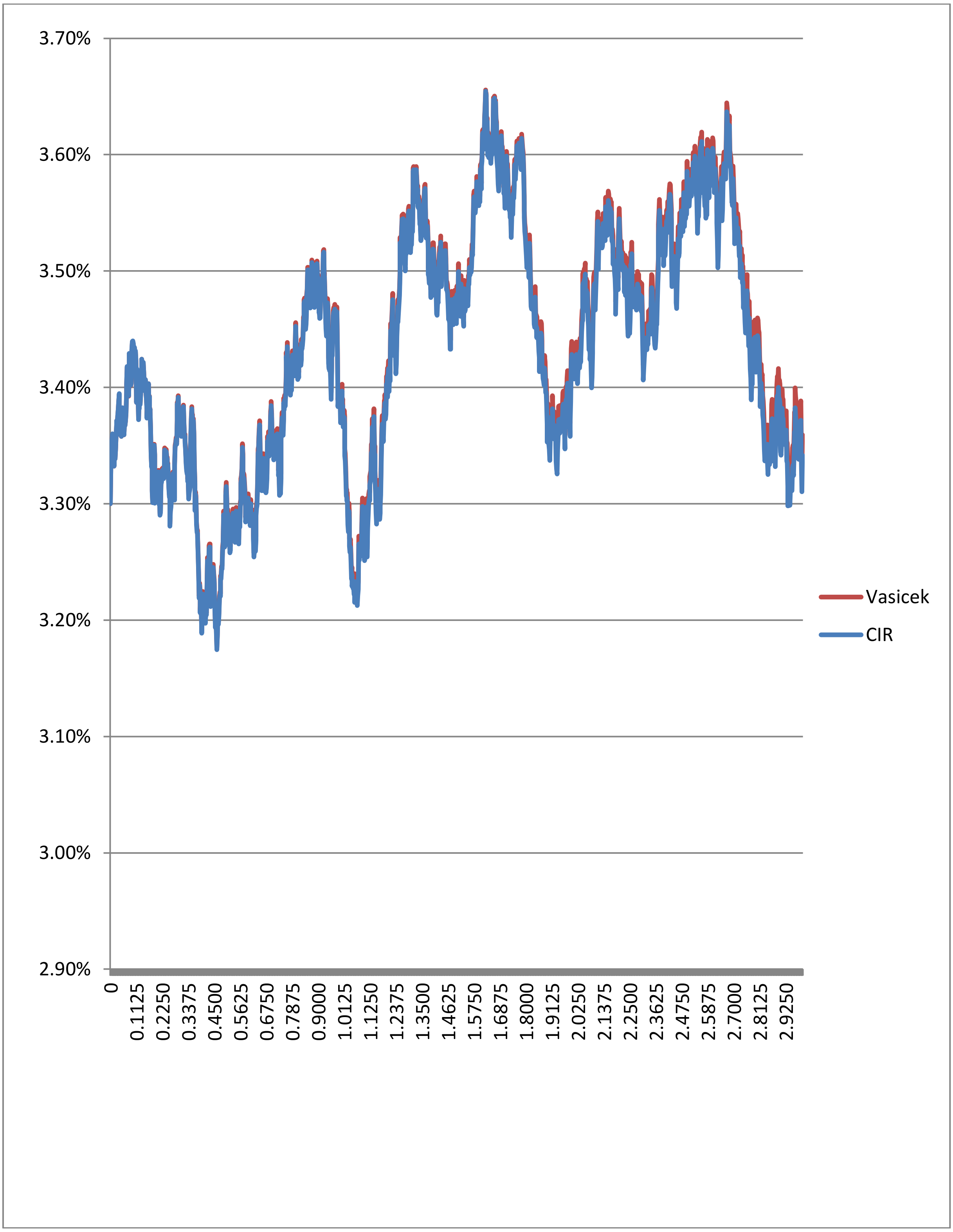

Figure 3 : Simulation du taux court

Nous remarquons alors que le modèle de Vasicek ne donne pas des taux négatifs. De plus la dynamique du taux court est la même pour le deux modèles (VASICEK et CIR). Par conséquent, les deux modèles vont donner les mêmes résultats.

VI.3 Estimation de la structure de taux avec le modèle de Vasicek

Nous rappelons que dans le modèle de Vasicek, le prix d'un zéro-coupon de maturité T est donné par :

$$B(t,T) = \exp\left[\begin{array}{c} (e^{-(T-t)a} - 1)r(t) + \dfrac{\sigma^2}{4a^3}(1 - e^{-2(T-t)a}) \\ + \dfrac{1}{K}\left\{b - \dfrac{\lambda}{K} - \dfrac{\sigma^2}{K^2}\right\}(1 - e^{-(T-t)K}) - \left\{b - \dfrac{\lambda}{a} - \dfrac{\sigma^2}{2a^2}\right\}(T-t) \end{array}\right]$$

et sa volatilité :

$$\Gamma(t,T) = \frac{\sigma}{a}(1 - e^{-(T-t)a})$$

L'équation suivante lie les prix des zéro-coupon à leurs taux:

$$R(t,T) = \frac{1}{T-t}\ln\left(\frac{1}{B(t,T)}\right)$$

A ce stade, seuls les paramètres du processus de diffusion sont estimés. Il reste donc un seul paramètre à déterminer afin de pouvoir déterminer les prix des zéro-coupon. Ce paramètre est le prix du risque du marché exprimé en fonction de la constante λ. Cette variable mesure le point auquel les investisseurs exigent des rendements plus élevés pour les compenser du risque auquel ils seront exposés en détenant cette obligation.

Le prix du marché du risque peut être trouvé comme la valeur qui réduit au minimum le carrée des erreurs entre les prix des obligations réels et les prix théoriques qui dépendent de lui. A l'aide du « Solver » sur Excel, on estime le paramètre λ.

A présent, nous allons comparer la courbe obtenue par le modèle de Vasicek et celle du marché. Cette courbe de taux est obtenue en interpolant pour des maturités manquantes, vu que, d'une part, les bons du trésor existant sur le marché sont presque tous couponés, d'autre part, ces bons n'existent pas pour toutes les maturités. Les calculs étant faits par un programme en VBA dont le CODE est dans l'annexe.

Présentation de la courbe des taux zéro-coupon de marché du 02/01/2012 :

MATURITE	lundi 2 janvier 2012
91	3,416%
182	3,486%
364	3,572%
730	3,730%
1 095	3,867%
1 460	3,935%
1 825	4,001%
2 190	4,057%
2 555	4,113%
2 920	4,171%
3 285	4,230%
3 650	4,278%
4 015	4,328%
4 380	4,379%
4 745	4,430%
5 110	4,484%
5 475	4,538%
5 840	4,571%
6 205	4,595%
6 570	4,620%
6 935	4,644%
7 300	4,667%

Tableau 11

Le tableau ci-dessus contient les données relatives à la courbe des taux de marché du 02/01/2012. Ces taux on été obtenus par interpolation des taux zéro-coupon.

Implémentation du modèle de Vasicek sous Excel :

Dans les tableaux et figures ci-dessous, nous allons décortiquer la mise en pratique du modèle de Vasicek sous EXCEL/VBA.

Term structure in Vasicek Model	
T	0,008
Rate r_0 at t=0	3,5%
Maturity time (T)	20,0
"Pullback" a	0,17
Equilibrium b	3,7%
Instanteanous StDev. of short rate (σ)	0,3%

Tableau 12 : Les inputs de Vasicek

Le tableau ci-dessus a été pris d'Excel. Il contient les inputs de notre modèle, le modèle de Vasicek. La deuxième ligne représente l'instant auquel on veut avoir nos résultats. Elle est exprimée en fraction d'année. La troisième représente le taux court à l'instant d'estimation (l'instant initial). Les autres lignes représentent les paramètres du processus de diffusion.

Results	
B in Vasicek Model	5,69
A in Vasicek Model	0,478632417
Infinitely-long Rate	3,68%
Vasicek Discount Factor	0,393379092
Solution with VBA Function	0,484817
Vasicek Zero Rate	4,667%
Vasicek volatitility of zero rate $\sigma_{Y(t,T)}$	0,085%
Prime de risque	-0,829

Tableau 13 :

Ce tableau contient des calculs intermédiaires nécessaires pour la mise en place du modèle. Nous avons, encore une fois, utilisé les notations figurants sur l'ouvrage de *« Jhon Hull ; options, futures and other derivatives »*.

Le prix des zéro-coupons est écrit sous la forme suivante :

$$P(t,T) = A(t,T)exp^{-B(t,T)r(t)}$$

Avec :

$$A(t,T) = \exp[(B(t,T) - T + t)\left(\frac{a^2 b - \frac{\sigma^2}{2}}{a^2}\right) - \frac{\sigma^2 B(t,T)^2}{4a}]$$

$$B(t,T) = \frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a}$$

B in Vasicek Model	5,69
A in Vasicek Model	0,478632417

Ces deux lignes du tableau contiennent les paramètres, $B(t,T)\ et\ A(t,T)$, définis précédemment.

Infinitely-long Rate	3,68%
Vasicek Discount Factor	0,39
Solution (DF) with VBA Function	0,484817

Dans cette partie du tableau, nous avons le taux long (Y_∞) et le facteur d'actualisation (Discount factor). Le « Discount Factor » ($P(t,T)$) est calculé en premier lieu à la main (0,39) puis à l'aide de VBA (le code est en annexe).

Nous rappelons l'écriture du taux long :

$$Y_\infty = b - \frac{\sigma^2}{2a^2} + \frac{\lambda\sigma}{a}$$

Vasicek Zero Rate	4,667%
Vasicek volatitility of zero rate $\sigma_{Y(t,T)}$	0,085%

Ici nous avons les taux zéro-coupons obtenus par Vasicek ainsi que sa volatilité. Voici l'équation qui lie le taux zéro-coupon à son prix *:* $R(t,T) = \frac{1}{T-t} ln(\frac{1}{P(t,T)})$

Après avoir effectué tous les calculs intermédiaires, nous allons tracer la structure par terme des taux d'intérêt obtenu par le modèle de Vasicek.

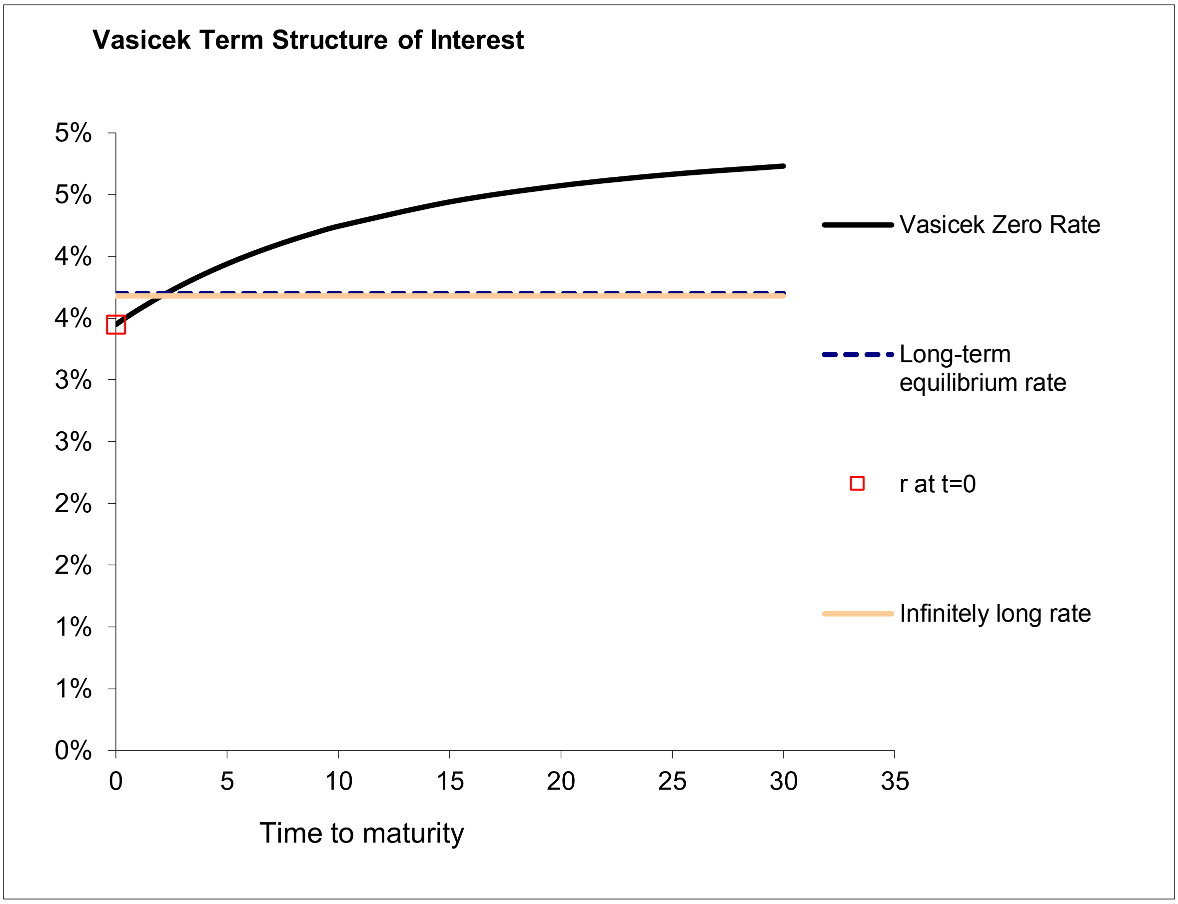

Figure 4 : La courbe des taux obtenue par le modèle de Vasicek

VI.4 Comparaison de la courbe des taux du marché et celle théorique :

Dans cette section, nous allons comparer la structure par terme de taux, avec prime de risque du marché non nulle, à la courbe des taux zéro-coupons du marché au 02/01/2012.

La courbe des taux zéro-coupon théorique et celle du marché sont représentées sur la figure ci-dessous :

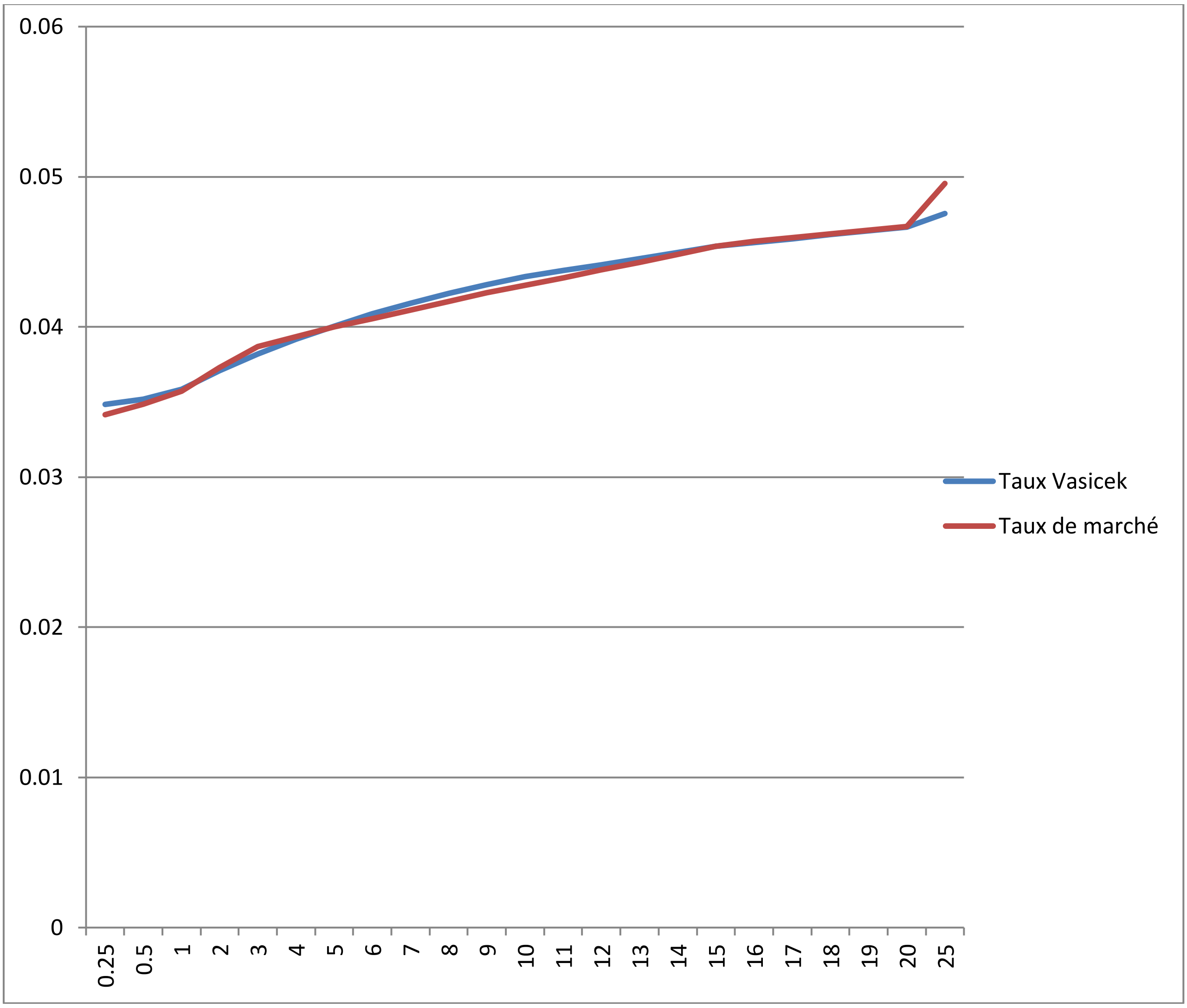

Figure 5 : Comparaison entre la courbe des taux théorique et celle du marché

Le cas idéal est quand la courbe des taux du marché coïncide parfaitement avec celle du modèle de Vasicek, mais dans la figure ci-dessus nous observons que les courbes ne coïncident que pour une certaines gammes de maturités. Certes, le modèle à un facteur ne reflète pas la réalité mais le résultat obtenu reste beaucoup plus favorable des points de vues tendance et de valeurs des taux.

Cette différence observée au niveau de la courbe peut aussi être expliquée par les erreurs d'estimation des paramètres de diffusion de Vasicek, et celle de λ. Toutefois, n'oublions pas qu'en réalité, la courbe des taux n'existe pas pour toutes les maturités. Les autres points ont été obtenus par les méthodes d'interpolations classiques, et ces méthodes représentent des erreurs qui sont à prendre en considération. En sus, il n'est pas si évident de décrire les mouvements de taux par une seule source de risque du marché.

Conclusion

Au terme de ce mémoire, nous avons donné un large aperçu sur les différentes approches de modélisation de la structure par terme des taux d'intérêt en explicitant quelques modèles appartenant à chacune des approches. Nous avons aussi présenté deux méthodes utilisées pour estimer les différents modèles de la structure de taux, puis nous avons choisi, le modèle de Vasicek, comme approche d'estimation de la structure de taux d'intérêt.

L'estimation obtenue, par le modèle de Vasicek, de la courbe des taux n'est pas tout à fait correcte. Ceci est du au biais de la discrétisation du processus de diffusion du taux court, des biais d'estimations des paramètres du processus d'Ornstein Uhlenbeck et du coefficient λ de la prime de risque, dû à l'utilisation la méthode des moindres carrées ordinaires. Ces biais de discrétisation et d'estimation pourraient être corrigés, mais faute de temps et de logiciels spécifiques aux simulations, ceci n'a pas pu être réalisé.

Pour conclure, nous pourrions dire que ce travail pourrait, en premier temps, être étendu en corrigeant les biais d'estimations et de discrétisation. Dans un deuxième temps, on pourrions estimer plusieurs modèles de structure par terme des taux d'intérêt à savoir ceux d'arbitrage classique à trois facteurs. Et puis, par la suite, faire une comparaison entre les courbes de taux théoriques obtenues via ces différents modèles pour déterminer celui qui modélise le mieux la courbe des taux du marché marocain.

Annexes

Annexe 1

Présentation de l'organisme d'accueil :

WAFA GESTION est la première société à avoir commercialisée des OPCVM au Maroc, et ce en décembre 1995. Son objet social est la gestion exclusive des organismes de placement collectif en valeurs mobilières (OPCVM).

Adossée à deux actionnaires de référence internationale - Attijariwafa Bank (66%) et Amundi (34%) - **Wafa Gestion** renforce de manière permanente sa position de leader de la gestion collective de l'épargne, aussi bien par sa taille, son approche multi expertise que par le transfert de savoir-faire unique qui s'opère avec Amundi.

Structure de la société :

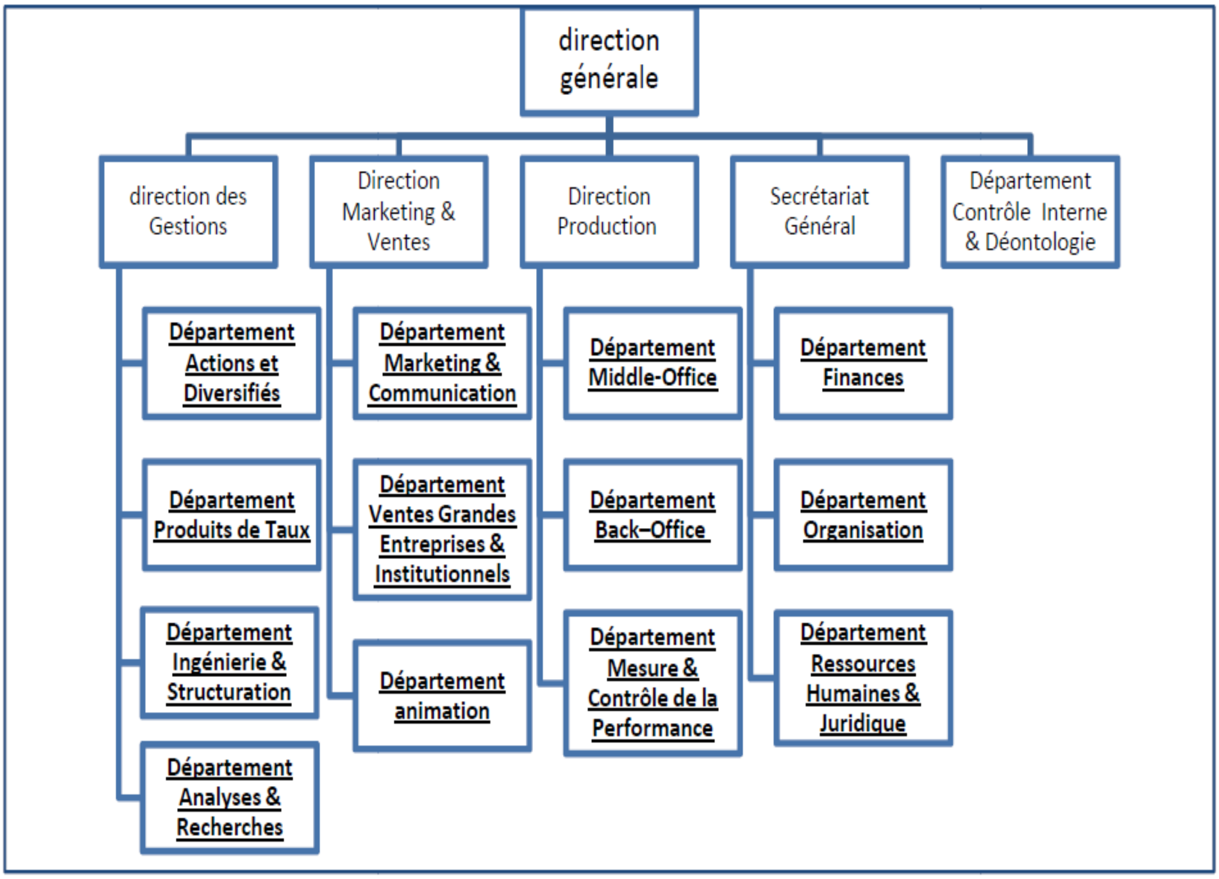

Figure 6 : Organigramme de Wafa Gestion

Annexe 2

Code du Pricer :

```
Function price(date_liquidation As Date, date_échéance As Date, taux As Double, nominal As Double, rendement As Double, date_emmission As Date) As Double
Dim flux(), maturit, p As Double
Dim i, nbr_flux, n As Integer
Dim date_flux, echeancier(), reference As Date
maturit = CDate(date_échéance - date_emmission)
If CDate(date_échéance) > CDate(date_liquidation) Then
'***************** Cas des maturités <= 365 ***************
 If maturit <= 365 Then

  price = (nominal * (1 + taux * (maturit / 360))) / (1 + rendement * (CDate(date_échéance - date_liquidation) / 360))

  Else
'***************** Cas des maturités >= 365 ***************
  If CDate(date_échéance - date_liquidation) <= 365 Then
   If CDate(Day(CDate(date_échéance)) - Day(CDate(date_emmission))) = 0 And CDate(Month(CDate(date_échéance)) - Month(CDate(date_emmission))) = 0 Then
   price = (nominal * (1 + taux)) / (1 + rendement * (CDate(date_échéance - date_liquidation) / 360))
   Else
 ReDim flux(1 To nbr_flux)
   ReDim echeancier(1 To nbr_flux)
  For i = 1 To nbr_flux
    echeancier(i) = ajouter(CDate(date_échéance), i - nbr_flux)
Next i
For i = 2 To nbr_flux - 1
    flux(1) = (nominal * taux) / (1 + rendement) ^ ((echeancier(1) - date_liquidation) / IsBisextil(date_liquidation))
    flux(nbr_flux) = (nominal * (1 + taux)) / (1 + rendement) ^ ((echeancier(1) - date_liquidation) / IsBisextil(date_liquidation) + nbr_flux - 1)
    flux(i) = (nominal * taux) / (1 + rendement) ^ ((echeancier(1) - date_liquidation) / IsBisextil(date_liquidation) + i - 1)
Next i
p = 0
For i = 1 To nbr_flux
```

```
p = p + flux(i)
Next i
      price = p
    End If
  End If
End If
End Function
Function IsBisextil(date_liquidation As Date) As Double
If Month(date_liquidation) >= 3 Then
    IsBisextil = 365
    Else
    If Year(date_liquidation) Mod 4 = 0 And (Year(date_liquidation) Mod 100 
<> 0 Or Year(date_liquidation) Mod 400 = 0) Then
        IsBisextil = 366
    Else
        IsBisextil = 365
    End If
    End If
End Function
Function ajouter(ByVal d As Date, ByVal n As Integer) As Date
Dim y, m, j As Integer
j = Day(CDate(d))
m = Month(CDate(d))
y = Year(CDate(d))
ajouter = CDate(CStr(j) & "/" & CStr(m) & "/" & CStr(y + n))
End Function
      date_flux = CDate(date_échéance)
      Do While date_flux >= CDate(date_liquidation)
      nbr_flux = nbr_flux + 1
      date_flux = ajouter(date_flux, -1)
      Loop
      ReDim echeancier(1 To nbr_flux)
    For i = 1 To nbr_flux
        echeancier(i) = ajouter(CDate(date_échéance), i - nbr_flux)
Next i
      echeance = echeancier(c)
End Function
Function jouissance(date_emmission As Date, date_échéance As Date) As Date
    n = 0
      Loop
        jouissance = ajouter(CDate(date_échéance), 1 - n)
End Function
```

Annexe 3

Code relatif à la construction de la courbe des taux :

```
Sub ZERO()
Dim i, k, j As Integer
Dim d1, d2 As Date
For i = 2 + compteur To 10912
  d1 = Feuil1.Cells(i, 1)
  d2 = Feuil1.Cells(i + 1, 1)

  If d1 <> d2 Then
    Exit For
  End If
Next
For k = 2 To compteur
 Feuil2.Cells(k + 2, 2) = ""
  Feuil2.Cells(k + 2, 3) = ""
Next
Feuil2.Cells(1, 3) = d1
For k = 1 + compteur To i
 Feuil2.Cells(k - compteur + 4, 2) = Feuil1.Cells(k, 2)
  Feuil2.Cells(k - compteur + 4, 3) = Feuil1.Cells(k, 3)
Next
Feuil4.Cells(2, col + 1) = d1
For j = 4 To 30
 Feuil4.Cells(j, col + 1) = Feuil2.Cells(j, 15)
Next
col = col + 1
compteur = i + 1
End Sub
Sub intialiserNOUVEAUcompteur()
compteur = 0
col = 0
End Sub

Sub EFFACERR()
Feuil4.Cells = ""
End Sub
```

Annexe 4

Code Vasicek :

```
Public Function Vasicek_DF(r, R_inf As Double, alpha As Double, sigma As
Double, T_Mat, Optional t = 0)
Dim A As Double, B As Double

B = (1 - Exp(-alpha * (T_Mat - t))) / alpha
A = Exp( _
    ((B - T_Mat + t) * (alpha ^ 2 * R_inf - sigma ^ 2 / 2) / alpha ^ 2) - _
    ((sigma ^ 2 * B ^ 2) / (4 * alpha)) _
   )

Vasicek_DF = A * Exp(-B * r)
End Function
```

Code CIR :

```
Public Function CIR_DF(r, R_inf As Double, alpha As Double, sigma As
Double, T_Mat, Optional t = 0)
Dim Gamma As Double, A As Double, B As Double
Gamma = Sqr(alpha ^ 2 + 2 * sigma ^ 2)
B = 2 * (Exp(Gamma * (T_Mat - t)) - 1) / _
  ((Gamma + alpha) * (Exp(Gamma * (T_Mat - t)) - 1) + 2 * Gamma)
A = ( _
  (2 * Gamma * Exp(alpha + Gamma) * (T_Mat - t) * 0.5) / _
  ((Gamma + alpha) * (Exp((Gamma * (T_Mat - t)) - 1) + 2 * Gamma)) _
  ) ^ (2 * alpha * R_inf / sigma ^ 2)

CIR_DF = A * Exp(-B * r)
End Function
```

Bibliographie

Nicole El Karoui, « Couverture des risques dans les marchés financiers », Ecole Polytechnique, 2004.

John Hull, « Options, futures et autres actifs dérivés », 6^{e} *édition*.

Béatrice de Severac, « Etude empirique du modèle de Vasicek sur le marché des obligations françaises », 1997.

Mr Fayçal HITMI, « Estimation de la Structure par Terme des Taux d'Intérêt », mémoire de fin d'étude, 2002.

Cours de Philippe Priaulet « Modèles de La Courbe des Taux D'intérêt ». ENSAE.

Rochet et Demange, « Méthodes Mathématiques de la Finance », Economica, Paris, 1992.