



المندوبية السامية للتخطيط  
HAUT-COMMISSARIAT AU PLAN



ROYAUME DU MAROC  
\*.\*.\*.\*.\*  
HAUT COMMISSARIAT AU PLAN  
\*.\*.\*.\*.\*  
INSTITUT NATIONAL  
DE STATISTIQUE ET D'ECONOMIE APPLIQUEE

## Projet de fin d'études

Organisme d'accueil : SAHAM Assurance



### Sujet :

Application de la directive Solvency II sur les branches  
d'assurance non vie

Préparé par : M. Idrissi Messnaoui Anas  
M.Lhioui Anas

Sous la direction de : M.Chaoubi Abdelaziz (INSEA)  
Mme.Eljamali Mariam (SAHAM)

Soutenu publiquement comme exigence partielle en vue de l'obtention du  
*Diplôme d'Ingénieur d'Etat*

Option : Actuariat-Finance.

Devant le jury composé de :

M.Fouad MARRI (INSEA)  
M.Abdelaziz CHAOUBI (INSEA)  
Mme.Mariam ELJAMALI (SAHAM)  
M.Anas AHAYAN (SAHAM)

Jun 2015



## **Résumé :**

La solvabilité d'une compagnie d'assurance n'est d'autre que sa capacité à honorer ses engagements face aux tiers, notamment ses assurés et ce par la couverture de leur sinistralité, ainsi qu'assurer un équilibre entre son portefeuille de placements et la constitution des provisions pour être en norme auprès de la tutelle (la DAPS) et assurer sa pérennité.

La réglementation actuelle, nommée Solvabilité I permet, certes, d'évaluer prudemment le passif et de détenir des actifs sûrs et liquides mais ne prend pas en considération tous les risques supportés par l'assureur durant son activité, et se limite sur le risque de souscription manifesté par le risques de primes (sous estimation) et le risque de provisionnement qui sera le cadre de notre étude.

Suivant les traces de la réforme bancaire Bâle II , la Solvabilité II privilégie le rôle des fonds propres au sein de la compagnie d'assurance, et donc a apporté des modifications au niveau des techniques d'évaluation de la compagnie, à savoir la valorisation à la valeur de marché de l'actif liquide ,qui est disponible, et du passif illiquide manifestée par des niveaux de provisions incorporant le Best Estimate ainsi que des marges de risques adéquates ou Risk Margin, puis le calcul d'un capital de solvabilité pour remédier aux évolutions défavorables de sinistralité et maîtriser le risque.

D'autre part, le nouveau référentiel de solvabilité se focalise aussi sur la dimension stochastique dans le calcul des provisions techniques et ce pour cerner tous les scénarios, y compris les catastrophiques, mesurer l'incertitude dans nos calculs pour mieux constituer nos provisions à l'ultime et être en harmonie avec les données. Mais cette dimension n'est pas en phase avec l'horizon de la solvabilité II qui est réduit à un an.

C'est pourquoi on quantifiera le risque de provisionnement sous le référentiel de solvabilité II, qui stipule le risque de déviation défavorable des charges finales prévisibles dans l'année comptable ou calendaire, et ce à travers de nouvelles méthodes à savoir Merz & Wüthrich et Bootstrap Modifiée tout en posant des hypothèses sur la loi suivie par les règlements cumulés.

## **Mots clés :**

Solvabilité II, Best Estimate, Marge de Risque, Capital de solvabilité requis, GLM, Bootstrap, Mack, Merz & Wüthrich, Bootstrap Modifiée.

## Dédicace :

*Je tiens tout d'abord et avant toute autre chose à dédier ce modeste travail à ma chère petite famille comme expression d'un éternel Remerciement de l'éducation qu'elle m'a prodiguée ainsi que les efforts consentis à mon égard, puis à mes chères amis pour les plus beaux moments qu'on a passé ensemble.*

**LHIOUI ANAS**

*Mes grands Remerciements à mon frère Salim et ma sœur Salwa ainsi que mes parents pour leur soutien au quotidien malgré que ces mots restent insuffisants pour exprimer ma reconnaissance à leurs efforts et amour. Un grand Remerciement à mes amis pour tout ce qu'on a passé ensemble dans ces trois années.*

**IDRISSI MESSNAOUI ANAS**

## **Remerciements :**

Nous voulons remercier M.Chaoubi pour ses précieux conseils et orientations qui nous ont été d'une grande importance et soutien dans la constitution de notre application.

Ainsi, nous profitons de l'occasion pour exprimer notre grande reconnaissance envers Mme Eljamali Mariam, encadrante et Responsable non vie ainsi que M.Ahayan Anas, Actuaire au sein de la compagnie SAHAM Assurance, pour leur encadrement au quotidien tout en assurant les conditions de réussite.

Dans le même cadre, nous remercions le directeur du département d'Actuariat M.Elouali de sa confiance en nous confiant un sujet de telle ampleur ainsi que le personnel de SAHAM Assurance qui nous a offert un climat accueillant.

Pour clôturer, nous adressons nos remerciements au corps professoral de l'INSEA pour son professionnalisme et de nous avoir assuré les connaissances et pré requis nécessaires permettant de s'insérer avec succès dans le monde professionnel et d'assurer notre stage de fin d'études .

# Sommaire

Résumé : .....	3
Dédicace : .....	4
Remerciements : .....	5
Liste des abréviations : .....	9
Liste des tableaux: .....	10
Liste des figures : .....	12
Introduction générale: .....	13
Partie I : Sur les normes de la directive « Solvabilité II » .....	14
I.1 De la « Solvabilité I » à la « Solvabilité II »: .....	14
I.1.1 Critiques de la « Solvabilité I » .....	14
I.1.2 Pourquoi la « Solvabilité II » ? .....	15
II.2 Les trois piliers de la « Solvabilité II » : .....	17
II.2.1 Présentation : .....	17
II.2.2 Normes quantitatives du calcul des provisions et fonds propres : .....	18
Partie II : le cadre théorique de l'évaluation des provisions .....	20
Chapitre I : Méthodes déterministes .....	20
I.1 Données utilisées : .....	20
I.2 Méthode de Chain Ladder .....	21
I.2.1 Hypothèses .....	22
I.2.2 Méthode .....	22
I.2.3 Critiques .....	23
I.3 Méthode de London Chain .....	24
I.4 Méthode de Taylor .....	25
Chapitre II : Méthodes stochastiques .....	26
II.1 Méthode de GLM .....	26
II.2 Méthode de Mack .....	29
II.2.1 Hypothèses .....	29
II.2.2 Méthode .....	30
II.3 Méthode de Bootstrap .....	33
Partie III : le cadre Pratique de l'évaluation des provisions .....	35
Chapitre I : Méthodes déterministes .....	35
I.1 Vérification de l'hypothèse des méthodes déterministes .....	35
I.2 Méthode de Chain Ladder .....	36
I.2.1 test des hypothèses de la méthode .....	36
I.2.2 Application de Chain Ladder .....	39
I.3 Application de London Chain .....	41

I.4 Application de Taylor.....	42
<b>Chapitre II : Méthodes stochastiques .....</b>	<b>45</b>
II.1 Application de GLM.....	45
II.2 Méthode de Mack .....	55
II.2.1 Test des hypothèses.....	55
II.2.2 Application.....	56
II.2.3 Construction des Intervalles de confiance.....	58
II.2.3.1 Distribution normale de la réserve : .....	59
II.2.3.2 Distribution lognormale de la réserve : .....	59
II.2.3.3 Comparaison des résultats : .....	61
II.3 Application de Bootstrap .....	61
II.4 Branches longues : Méthodes pour estimer le « Tail Factor » .....	69
II.4.1 Extrapolation des facteurs de développement .....	69
II.4.2 Extrapolation des paramètres des années de développement.....	72
II.5.3 Application des critères de choix du modèle .....	76
<b>Chapitre III : Actualisation .....</b>	<b>78</b>
III.1 Sous Solvabilité I.....	78
III.2 Avec la nouvelle réglementation de Solvabilité II.....	78
III.3 Application sur le calcul de la BE .....	78
<b>Partie IV : Le risque de provisionnement dans le cadre du SCR.....</b>	<b>80</b>
<b>Chapitre I : Définition du risque de provisionnement à un an et SCR .....</b>	<b>80</b>
I.1 Pourquoi changer d'horizon ? .....	80
I.2 Définition formelle de ce risque.....	80
I.3 Formule standard- Modèle interne (SCR) .....	82
I.3.1 Formule standard.....	82
I.3.2 Modèle interne .....	82
I.3.3 Choix du modèle .....	82
<b>Chapitre II : CDR selon Merz &amp; Wuthrich .....</b>	<b>83</b>
II.1. Principe de la méthode.....	83
II.2. Comparaison aux résultats de Mack .....	85
II.3.Critiques de M&W.....	85
II.4.Application.....	86
<b>Chapitre III : Simulation de la diagonale de paiement.....</b>	<b>90</b>
III.1 Principe.....	90
III.2 Simulation par Bootstrap modifiée à un an .....	91
III.2.1 Principe.....	91
III.2.2 Application .....	92
<b>Chapitre IV : Calcul du SCR et de la Marge de risque .....</b>	<b>98</b>
IV.1 Calcul du SCR.....	98
IV.2 Calcul de la MR.....	99

Partie V : Automatisation de la quantification du risque de provisionnement	
à 1 an : .....	102
Introduction : .....	102
I. Choix de l'outil informatique : .....	102
II. Présentation de la réalisation : .....	103
II.1 Réalisation du Modèle de M&W : .....	103
II.2 Réalisation du Modèle de Simulation de diagonale de paiements : .....	105
Conclusion générale : .....	108
Bibliographie .....	109
Annexes .....	110

*Annexe A : Présentation du secteur et de l'organisme d'accueil*

*Annexe B : Nuages des points des années de développements  $j=3 \dots 9$ .*

*Annexe C : Loi normale – loi log normale.*

*Annexe D : Principe du QQ-Plot.*

*Annexe E : Principe et calcul de la distance K-S.*

*Annexe F : Sur la VAR et la TVAR.*

## Liste des abréviations :

*DAPS* : Direction des assurances et prévoyance sociale.

*CEIOPS*: Committee of European Insurance and Occupational Pension Supervisors

*FMSAR*: Fédération Marocaine des sociétés d'assurance et de réassurance

*CFP*: Charge finale prévisible

*MR* : Marge de risque

*Coc* : Cout de Capital

*BE* : Best Estimate

*CL* : Chain Ladder

*LC* : London Chain

*i.i.d* : Indépendants identiquement distribués

*SCR* : Solvency Capital requirement (Capital de solvabilité requis)

*MCR* : Minimum Capital requirement

*PSAP* : Provision pour Sinistres à Payer.

*M &W*: Merz &Wüthrich

*AT*: Accident de Travail

*IBNR*: Incurred But Not Reported

*GLM*: Generalized Linear Models

*MSEP*: Mean Squared Errors Predicted

*CDR*: Claims development result

*VAR*: Value At Risk, *TVAR*: Tail Value At Risk

## Liste des tableaux:

Tableau 1: Paiements cumulés de la branche Accident de Travail.....	21
Tableau 2 : quelques exemples de famille de lois exponentielles .....	27
Tableau 3 : Triangle des coefficients de passage.....	36
Tableau 4 : Coefficients de Passage selon le modèle de Chain Ladder .....	39
Tableau 5 : Tableau des règlements prédits par le modèle de Chain Ladder .....	40
Tableau 6 : Provision Totale sous le modèle de Chain Ladder.....	40
Tableau 7 : Estimation des paramètres de régression .....	41
Tableau 8 : Provision Totale sous le modèle de London Chain .....	41
Tableau 9 : Calcul des $\mu(\mathbf{n})$ actuels et futurs ainsi que $P_j, n=i+j=0 \dots 15$ et $j=0 \dots 15$ .....	42
Tableau 10: Calcul des règlements futurs ( $z(i,j)$ ) par la méthode de Taylor, avec $i+j=16 \dots 30$ et $i=0 \dots 15, j=0 \dots 15$ .....	43
Tableau 11 : Provision Totale sous le modèle de Taylor .....	44
Tableau 12 : Extrait de la base servant comme support de calcul des paramètres de GLM .....	45
Tableau 13: Test de Kolmogorov Smirnov de la distribution Gamma .....	48
Tableau 14: Test de Kolmogorov Smirnov de la distribution LogNormale .....	48
Tableau 15 : Test de Kolmogorov Smirnov de la distribution Normale .....	48
Tableau 16 : Paramètres de la loi Gamma.....	51
Tableau 17 : Sortie informant sur la statistique de la déviance du modèle .....	52
Tableau 18 : Calcul de la P-value pour la statistique de Déviance .....	53
Tableau 19 : Calcul des règlements estimés par la méthode de GLM-Gamma .....	53
Tableau 20 : Provision Totale sous le modèle de GLM-Gamma.....	54
Tableau 21 : Volatilités du triangle des règlements, $j=0 \dots 14$ .....	56
Tableau 22 : Erreur quadratique moyenne par année de survenance et Totale .....	57
Tableau 23 : Coefficients de variation par année de survenance .....	58
Tableau 24 : Intervalles de Confiance selon la loi normale.....	59
Tableau 25 : Intervalles de Confiance selon la loi lognormale.....	60
Tableau 26 : Règlements estimés non cumulés par année de survenance et année de développement.....	61
Tableau 27: les résidus de Pearson par année de survenance et de développement ..	62
Tableau 28 : Extrait du tableau des résidus ré-échantillonnés par ligne.....	63
Tableau 29 : Extrait du tableau des chargements bootstrappés décumulés.....	64
Tableau 30 : Extrait du Bootstrapping des provisions sous le modèle de Gamma .....	65
Tableau 31: Quantiles de la distribution des réserves .....	65
Tableau 32 : Test de Kolmogorov-Smirnov de la distribution normale .....	68
Tableau 33 : Test de Kolmogorov-Smirnov de la distribution lognormale .....	69
Tableau 34 : Les trois lois principalement utilisées pour l'ajustement des facteurs de développement.....	70
Tableau 35: Extrapolation des facteurs de développement par la loi exponentielle...	70
Tableau 36 : Extrait du tableau d'extrapolation des coefficients des années de développement.....	73
Tableau 37 : extrapolation des facteurs de développement GLM .....	73
Tableau 38: Avantages et inconvénients des méthodes de calcul de la réserve .....	75
Tableau 39 : Choix de la méthode par SSE .....	77
Tableau 40 : Calcul du BE selon à partir de la méthode GLM-Gamma .....	79
Tableau 41 : Calcul des rapports $a(j), j=0 \dots 14$ .....	86
Tableau 42 : Erreur quadratique moyenne par année de survenance et Totale .....	87

<i>Tableau 43 : Calcul des coefficients de variations de M&amp;W et ceux par rapport à Mack par année de survenance et totale.....</i>	<i>87</i>
<i>Tableau 44 : Intervalles de confiances, selon la loi normale, des CDR.....</i>	<i>89</i>
<i>Tableau 45 : Résidus de Pearson jusqu'à l'année calendaire 2015.....</i>	<i>92</i>
<i>Tableau 46 : Extrait des 1000 itérations des règlements bootstrappés.....</i>	<i>93</i>
<i>Tableau 47 : Simulation du calcul de la CFPi2015, i=1 ....1000.....</i>	<i>94</i>
<i>Tableau 48 : Extrait du vecteur des CDRi, i=1 .....1000.....</i>	<i>95</i>
<i>Tableau 49 : test de Kolmogorov- Smirnov de normalité des CDRi , i=1 ...1000.....</i>	<i>96</i>
<i>Tableau 50 : Démarche de calcul de la MR par la méthode du Cout de Capital .....</i>	<i>101</i>
<i>Tableau 51 : Evolution du chiffre d'affaires par branche d'activité en MDhs .....</i>	<i>111</i>
<i>Tableau 52 : Evolution du chiffre d'affaires du marché d'assurance non vie par compagnie en MDhs .....</i>	<i>112</i>

## Liste des figures :

Figure 1 : Répartition du SCR selon les risques touchant au bilan d'une assurance en non vie -----	15
Figure 2 : Les trois piliers de la solvabilité II-----	17
Figure 3: Bilan économique d'une assurance sous la Solvabilité II-----	19
Figure 4 : Schéma illustratif du principe du Bootstrap, détermination d'intervalle de confiance des réserves IBNR -----	33
Figure 5 :Evolution des cadences de paiements par année de survenance -----	35
Figure 6: Comparaison des $f_{ij}$ à $\bar{f} \cdot j$ pour $j=0, \dots, 14$ -----	37
Figure 7 Représentation des nuages de points $(C_{ij}, C_{ij} + 1)$ , $j=0, 1, 2$ -----	38
Figure 8 : Extrapolation des $\log(u(i+j))$ linéairement, avec $i+j=0, \dots, 15$ -----	43
Figure 9: QQ-Plot selon la distribution gamma -----	46
Figure 10 : QQ-Plot selon la distribution logNormale-----	47
Figure 11: QQ-Plot selon la distribution normale-----	47
Figure 12: Nuage de points $(C(i,j), D(i,j))$ , $j=0, 1$ -----	56
Figure 13 : Distribution des réserves selon la loi normale-----	66
Figure 14 :Distribution des réserves selon la loi lognormale-----	67
Figure 15 Illustration des QQ-Plots de la réserve selon les lois normale et lognormale. -----	68
Figure 16 : Coefficients de Chain Ladder et leur extrapolation-----	71
Figure 17 : Paramètres de développements et leur extrapolation-----	72
Figure 18 : Diagramme comparatif des réserves des différentes méthodes sans Tail Factor-----	74
Figure 19 : Méthode par sous triangle -----	76
Figure 20 : Illustration d'une itération de la simulation de la diagonale suivante des paiements (étape 2 et 3)-----	90
Figure 21 : test de QQ-Plot de normalité des $CDR_i$ , $i=1 \dots 1000$ -----	96
Figure 22 : L'approximation normale de l'évolution empirique des $CDR_i$ , $i=1 \dots 1000$ -----	97
Figure 23 : Statistiques descriptives de l'évolution des $(-CDR_i)$ , $i=1 \dots 1000$ -----	98
Figure 24 : Illustration de la méthode du cout de Capital pour la détermination de la MR. -----	100
Figure 25 : Répartition du chiffre d'affaires de Saham par branche -----	113
Figure 26 : Evolution du chiffre d'affaires de Saham en MDhs -----	114
Figure 27 : Evolution du résultat net de Saham en MDhs-----	115
Figure 28 : Evolution des fonds propres de Saham en MDhs-----	115
Figure 29 : Nuage des points de $C(i,j+1)=f(C(i,j))$ de l'année de développement $j=3$ à $j=9$ . -----	119

## **Introduction générale:**

De façon générale, une compagnie d'assurance se distingue par rapport à une entreprise traditionnelle par son cycle de production inversé, l'assuré paie une prime pour être couvert en cas de survenance du sinistre, et donc une constitution prudente des réserves est indispensable pour que l'assureur puisse honorer ses engagements envers ses assurés, d'où l'importance revêtue par les normes de solvabilité

Avant d'aborder notre travail qu'on a élaboré pour la branche pilote de Saham Assurance : « AT » nous avons jugé nécessaire de présenter le secteur assurantiel du Maroc et ses chiffres clés ainsi que ceux de l'organisme d'accueil, puis de contextualiser la notion de la Solvabilité II qui ne cesse de constituer un débat actuel au sein des compagnies d'assurances, son introduction devient primordiale vu la sensibilité et la position stratégique de ce thème.

Notre conception de travail commence par l'introduction des méthodes déterministes pour calcul du Best Estimate puis la mesure d'incertitude des résultats obtenus à travers la dimension stochastique ; l'introduction du Tail Factor dans la méthode de Chain Ladder ainsi que celle de GLM pour choisir le modèle optimal à travers la méthode par sous triangles. En outre, on quantifiera le risque de provisionnement à travers le modèle de Merz & Wuthrich permettant le calcul du CDR ainsi que son MSEP sous les hypothèses de MACK, puis la simulation de la diagonale par Bootstrap Modifiée et ce pour obtenir le SCR. Pour clôturer, on calculera la MR et ce par l'approche du Cout de Capital.

Il est à noter que divers sont les consultations menées par la CEIOPS, autorité Européenne chargée de la mise en place de cette réforme, tout en regroupant l'ensemble des acteurs de l'assurance afin de souligner les obstacles de la Solvabilité I et garantir la compréhension des enjeux de cette réforme pour préparer une bonne introduction et mise en vigueur de la directive.

## **Partie I : Sur les normes de la directive « Solvabilité II »**

### *I.1 De la « Solvabilité I » à la « Solvabilité II »:*

#### I.1.1 Critiques de la « Solvabilité I »

La Solvabilité I se caractérise par sa simplicité d'utilisation, elle a été beaucoup critiquée pour les raisons suivantes :

-Le calcul des mobilisations des fonds propres se base sur les provisions constituées, c'est ainsi que s'il y a un sous provisionnement on engage moins de fonds propres. De plus, la solvabilité I est très prudente en ce qui concerne la constitution des fonds propres ce qui freine et pénalise les activités sous jacentes de l'assureur à savoir les placements.

- Le calcul de la MS est simpliste et ne prend pas en considération la taille ou l'activité de la compagnie même les risques sous-jacents à l'activité d'assurance. En effet, prenons l'exemple de deux compagnies d'assurance ayant des périmètres d'activité différents :

- la première disposant d'un portefeuille diversifié
- la seconde, d'un portefeuille plus concentré. La marge de solvabilité sera identique pour ces deux entreprises alors qu'elles présentent des profils de risque très différents. Le risque de concentration n'est pas quantifié dans la MS. De plus, cet aspect n'est pas pris en compte dans le calcul des fonds propres dans le cadre de Solvabilité I.

-L'approche actuelle ne prend en considération que le risque du passif (de souscription) dans le calcul des capitaux à constituer, or divers sont les risques sous-jacents à l'activité de la compagnie et figurent dans l'actif à savoir le risque de marché ... (voir figure1).

-Actif et passif sont évalués au cout historique, ce qui n'est pas conforme aux nouvelles normes comptables internationales qui incitent à la comptabilisation à la valeur de marché.

### I.1.2 Pourquoi la « Solvabilité II » ?

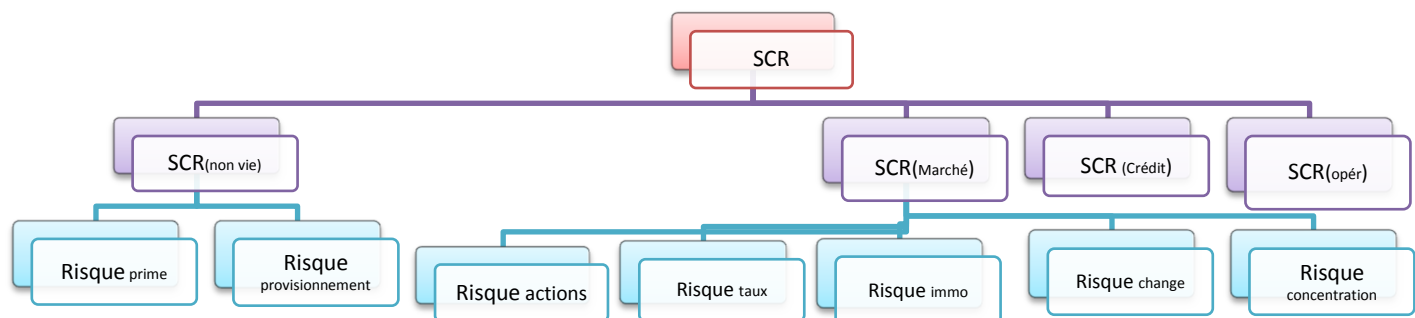
Cette nouvelle réforme permet une harmonisation des normes de solvabilité des compagnies d'assurance, et ce à travers ce qui suit :

-permettre un équilibre entre protection des assurés et moins de cout de capital pour les assurés ; les provisions techniques sont couvertes par une MR permettant de faire face aux situations d'insuffisance de ces provisions ainsi qu'un calcul précis et prudent du SCR, figurant dans le Capital de la compagnie, permettant plus de liberté de placement que dans la Solvabilité I.

-Donner une certaine transparence dans la situation financière de la compagnie, qui est mieux contrôlée et suivi par la tutelle qu'auparavant.

-L'évaluation du bilan de l'assurance est selon la valeur de marché ; pour les actifs le calcul est possible tout en se basant sur l'information de marché, pour le passif on fait appel à des modèles internes pour calculer ce que nous appellerons la « juste valeur ».

-L'intégration des différents risques qui touchent à tout le bilan de la compagnie et qui sont quantifiés par des SCR comme le montre la figure suivante



*Figure 1 : Répartition du SCR selon les risques touchant au bilan d'une assurance en non vie*

Ainsi, on peut définir les différents risques comme suit :

- Risque de prime : Autrement dit, le risque de sous tarification qui traduit l'insuffisance de la prime payée par l'assuré à couvrir sa sinistralité. Ce genre de risque est du principalement à une faible segmentation.
- Risque de provisionnement : En général, ce risque traduit l'insuffisance des réserves constituées pour couvrir la sinistralité des assurés. Dans le cadre de la « Solvabilité II » ce risque traduit aussi la déviation défavorable de la CFP de l'année comptable (l'horizon d'étude est réduit à un an au lieu de l'ultime).
- Risque de marché : n'est d'autre que l'impact de la volatilité des instruments financiers sur la valeur de marché des actifs et passifs de la compagnie ; dans ce cadre on distingue :
  - risque d'actions : l'impact de la volatilité du cours des actions sur les actifs et passifs dont la valeur de marché dépend.
  - risque de taux : existe pour tous les actifs et passifs dont la valeur est sensible aux changements de taux d'intérêt notamment le portefeuille obligataire.
  - risque d'immobilier : c'est la volatilité des prix de marché de l'immobilier.
  - risque de change : c'est la volatilité du taux de change. Au cas où la compagnie désire s'acheter de la devise pour des activités extérieures, ce risque doit être pris en considération.
  - risque de concentration : c'est le risque de la non diversification du portefeuille des actifs de la compagnie par rapport aux éléments suivants :
    - Emetteur
    - Secteur d'activité
    - Zone géographique
  - Et donc la volatilité du portefeuille augmente avec sa concentration sur ces éléments.
- Risque de crédit : ce sont les pertes possibles à l'issue du risque de défaut de la contrepartie.
- Risque opérationnel : c'est le risque de la défaillance interne de la compagnie à savoir le système informatique ou même le personnel. Il est difficile à être quantifié.

Ainsi, il y a une panoplie de risques auxquels une compagnie d'assurance non vie est soumise. Nous limiterons notre étude sur le risque de provisionnement qui figure dans le risque de souscription-non vie. Ce risque est le plus important à traiter

pour une compagnie d'assurance non vie. Et donc on ne constituera à la fin que le SCR lié à ce risque.

## *II.2 Les trois piliers de la « Solvabilité II » :*

### II.2.1 Présentation :

Les normes de solvabilité II, ayant suivi les traces de Bale II, s'appuient sur les trois piliers suivants :

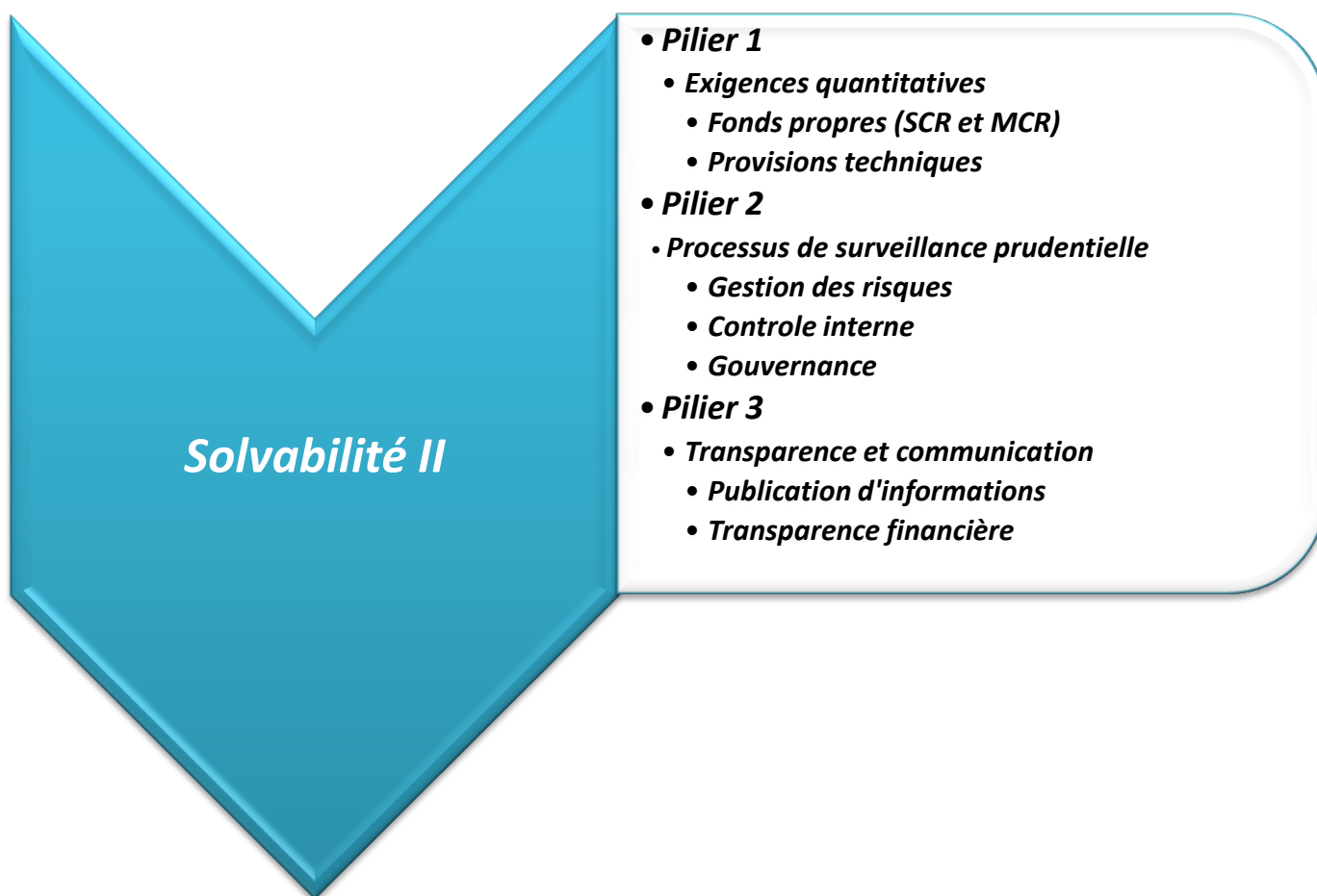


Figure 2 : Les trois piliers de la solvabilité II

## II.2.2 Normes quantitatives du calcul des provisions et fonds propres :

La Solvabilité II a pris en considération des paramètres fondamentaux et indispensables qui étaient négligés par la directive « Solvabilité I » à savoir les piliers 2 et 3.

Dans notre étude, on se limitera sur le premier pilier qui constitue la base de la pérennité d'une compagnie d'assurance. Ses composantes sont les suivantes :

+**SCR** : Traduit le niveau de fonds propres pour lequel le risque de ruine est limité à 0.5%, en d'autres termes 99.5% de chance que la perte pouvant être subie par la compagnie puisse être couvrable par les fonds propres. Ce capital peut être calculé par des formules standards communiquées par les autorités ou des modèles internes validés par ces dernières.

+**MCR** : c'est le minimum de capital à constituer par la compagnie, ne pas l'atteindre signifie l'intervention des autorités pour exiger la mise en place de certaines directives. Son calcul devra être simple et ne sera pas abordé dans ce mémoire. On peut prendre simplement :

$$\text{MCR} = (1/3) * \text{SCR}$$

+**BE** : Comme son nom l'indique, c'est le meilleur estimateur des réserves que doit constituer l'assureur qui n'est d'autre que la valeur actuelle probable des flux futurs.

+**MR** : Constitue une couche supplémentaire des provisions techniques en BE, pour remédier au risque d'insuffisance ou d'extinction de ces provisions. Elle permet de communiquer un niveau de confiance important à l'assureur en cas de liquidation de son portefeuille d'assurés. Il est à noter que l'assureur n'envisage pas ou n'est pas en mesure de liquider son portefeuille, il s'agit de l'aspect prudentiel du calcul de la **MR**.

Il est à noter que le **BE** et la **MR** constitue la juste valeur ou la valeur de marché des provisions techniques. La figure suivante montre le bilan d'une compagnie d'assurance sous la directive de Solvabilité II

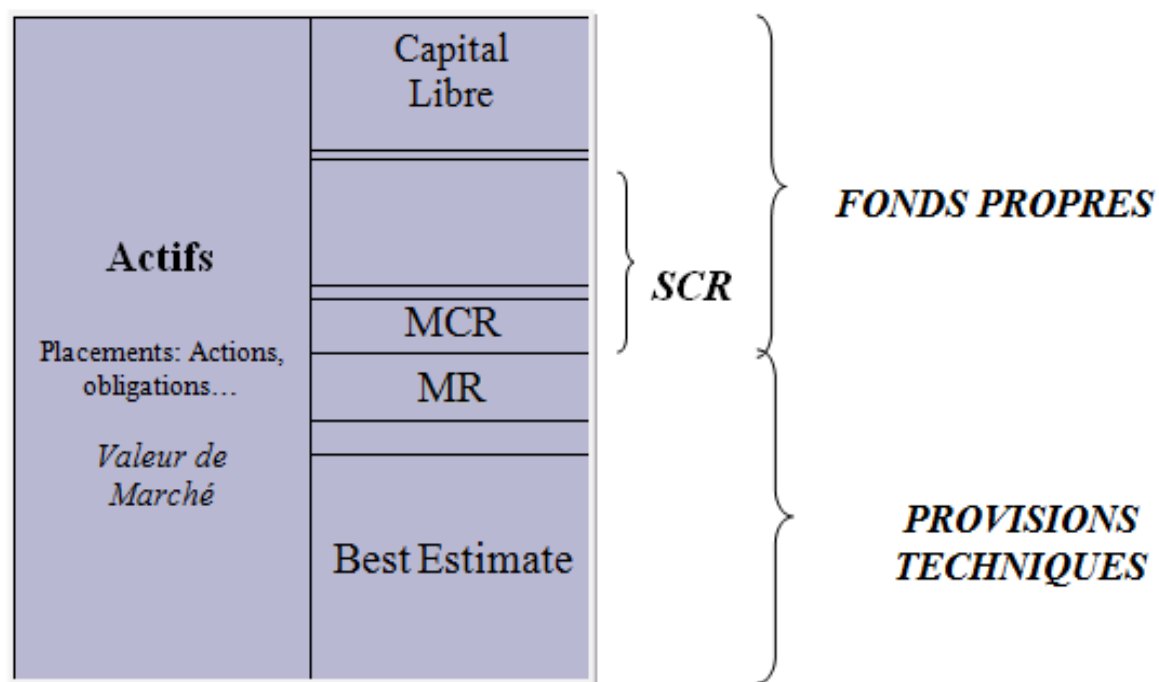


Figure 3: Bilan économique d'une assurance sous la Solvabilité II

## **Partie II : le cadre théorique de l'évaluation des provisions**

### **Chapitre I : Méthodes déterministes**

Dans cette partie nous présenterons l'application des différentes méthodes pour calcul de la BE. Nous ne nous limiterons pas aux résultats classiques de la méthode bien connue de Chain Ladder mais chercherons à comparer différentes méthodes, sans toutefois avoir la prétention d'en faire une liste exhaustive.

Ces méthodes reposent sur une hypothèse indispensable à vérifier qui est la stabilité des cadences de paiement qui est défini comme rapport entre le règlement cumulé effectué après  $j$  années au comptes des sinistres survenus à l'année  $i$ , et la charge ultime estimée (somme de règlement et la PSAP) pour la même catégorie des sinistres avec :  $i=0\dots n$  et  $j=0\dots n$ . La stabilité de ces cadences traduit la convergence de leur comportement par année de survenance (voir plus loin dans la partie du cadre pratique de l'évaluation des provisions).

Commençons donc par présenter quelques méthodes déterministes classiques d'évaluation des provisions. Nous étudierons des approches stochastiques dans le chapitre suivant.

#### *1.1 Données utilisées :*

Dans la société Saham Assurance, le triangle de liquidation de la branche pilote est actuellement disponible sur 16 ans.

Cependant, chaque règlement constitue un cumul de paiements des années de développements antérieures. L'objectif est d'avoir une richesse des résultats et de calculer la réserve totale par une panoplie de méthodes et ce pour retenir celle qui s'ajuste mieux à notre branche et qui servira comme outil principal pour obtenir notre BE.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1999	5 590 200	24 850 800	36 825 000	46 195 913	53 675 513	59 957 349	65 727 240	68 919 163	72 002 026	73 227 616	75 484 833	77 751 084	78 298 578	78 311 814	78 697 570	78 780 647
2000	6 016 800	21 767 400	36 436 922	48 069 122	56 409 701	63 869 840	72 094 511	74 551 216	75 985 141	79 778 734	83 863 604	84 021 570	84 099 134	84 126 022	84 311 531	
2001	6 022 800	21 044 147	32 939 147	44 016 804	54 517 415	63 496 979	68 670 465	70 862 463	74 585 446	77 535 289	78 062 310	78 264 645	78 743 354	79 013 531		
2002	6 399 000	21 020 400	36 161 434	50 764 444	68 458 258	75 198 238	78 436 200	85 417 019	89 460 417	90 916 670	91 814 855	93 096 616	93 464 691			
2003	6 142 800	28 969 271	50 647 455	82 904 508	97 313 996	103 236 588	111 238 770	116 691 609	118 069 595	119 041 006	119 693 066	120 385 084				
2004	6 984 307	25 617 789	54 438 372	80 077 370	91 219 921	98 759 004	108 858 018	112 209 421	114 238 706	116 137 482	117 116 428					
2005	7 219 848	28 937 047	67 360 911	88 135 741	97 588 076	106 834 884	109 941 095	113 729 171	116 090 493	117 357 530						
2006	7 787 917	36 487 823	66 505 399	84 130 417	95 585 622	102 003 195	108 010 791	112 406 640	114 591 139							
2007	7 988 513	41 066 148	69 166 048	87 019 913	99 049 986	106 807 682	112 844 097	116 682 606								
2008	11 303 765	43 774 535	74 428 249	98 840 080	116 778 234	127 820 523	133 603 209									
2009	6 858 216	32 152 625	58 338 646	85 072 172	101 399 757	110 469 533										
2010	5 500 928	25 788 492	51 703 512	71 588 139	85 378 573											
2011	7 504 970	27 972 616	51 732 867	71 669 437												
2012	7 850 791	27 168 401	57 979 265													
2013	8 649 699	29 484 899														
2014	8 458 092															

Tableau 1: Paiements cumulés de la branche Accident de Travail

## 1.2 Méthode de Chain Ladder

Cette méthode de calcul de provision (que l'on appelle aussi cadence de règlement) est relativement ancienne puisqu'on peut trouver la trace de ses premières apparitions dans des livres de droit des assurances des années 1930, comme par exemple Astesan [1938]. C'est une méthode générique qui peut s'appliquer sur tous les types de triangles (de développement, de charges etc.)

La méthode de Chain Ladder est de loin la plus couramment utilisée par les compagnies d'assurance du fait notamment de sa facilité de mise en œuvre. Elle s'applique aux montants cumulés  $C_{i,j}$  et suppose que la cadence des paiements dépend de l'année de développement des sinistres. Cela revient à écrire :

$$C_{i,j+1} = f_j \cdot C_{i,j} \quad , \text{ avec :}$$

-  $C_{i,j}$  : Chargement cumulé associé à la  $i^{\text{ème}}$  année de survenance et la  $j^{\text{ème}}$  année de développement,  $i=0, \dots, n$  et  $j=0, \dots, n$

-  $f_j$  est le facteur de développement de l'année de développement  $j$  à  $j + 1$ .

-  $Z_{i,j}$  : Les paiements non cumulés (incrément) associés à la  $i^{\text{ème}}$  année de survenance et la  $j^{\text{ème}}$  année de développement,  $i=0, \dots, n$  et  $j=0, \dots, n$

$$\text{On a donc } C_{i,j+1} = C_{i,j} + Z_{i,j+1} \quad , \forall j \geq 0 \text{ et } C_{i,0} = Z_{i,0}$$

Donc il est possible d'estimer les paiements futurs. En d'autres termes, remplir le triangle inférieur de nos règlements à estimer et ce à partir du triangle de liquidation cumulé initial :

$i, j$	0	1	...	$j$	...	$n$
0	$C_{0,0}$	$C_{0,1}$	...	$C_{0,j}$	...	$C_{0,n}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\ddots$	
$i$	$C_{i,0}$	$C_{i,1}$	...	$C_{i,j}$		
$\vdots$	$\vdots$					
$n$	$C_{n,0}$					

Ce triangle peut être lu de trois façons :

- Les lignes correspondent aux années de survenance  $i$  des sinistres,
- Les colonnes aux années de développement  $j$ ,
- Les diagonales aux années calendaires  $i+j$ ,

### I.2.1 Hypothèses

La méthode de CL repose sur deux hypothèses, à savoir :

- (H1) les années de survenance sont indépendantes ;
- (H2) les années de développement sont des variables explicatives du comportement des paiements cumulés

### I.2.2 Méthode

Sous ces hypothèses, les facteurs de développement sont estimés par :

$$\hat{f}_j = \frac{\sum_{i=0}^{n-j-1} C_{i,j+1}}{\sum_{i=0}^{n-j-1} C_{i,j}} \quad \text{Pour } j=0 \text{ à } n-1$$

Les facteurs de développement permettent de compléter le triangle inférieur. On estime alors :

$$\widehat{C}_{i,j+1} = \hat{f}_j \cdot \widehat{C}_{i,j} \quad \text{pour } i+j > n$$

La provision de l'année de survenance  $i$ , notée  $\hat{R}_i$  s'estime alors par la relation :

$$\hat{R}_i = \widehat{C}_{i,n} - C_{i,n-i}$$

Enfin, l'estimation du montant total de la provision, notée R est obtenu en sommant les provisions de chaque année de survénance :

$$\hat{R} = \sum_{i=1}^n \hat{R}_i$$

### I.2.3 Critiques

Nous avons vu que cette méthode a l'avantage d'être aisée à appliquer. Cependant, elle repose sur des hypothèses qui peuvent ne pas s'avérer réalistes dans la pratique :

– (H1) Il s'agit d'une hypothèse forte qui suppose en particulier une stabilité des années calendaires, c'est-à-dire pas de changement dans la législation, la gestion des sinistres, le management, l'inflation. En effet, ces phénomènes peuvent affecter plusieurs années de survénances et donc entraîner la non-satisfaction de l'hypothèse d'indépendance des années de survénance. De plus, les sinistres survenus au cours d'une année donnée sont censés n'avoir aucune influence sur les sinistres pouvant survenir l'année suivante.

– (H2) Cette hypothèse suppose que la seule explication de l'évolution du montant des sinistres au cours des années de développement est justement la durée de ce développement. Cela implique une non-corrélation des facteurs de développement successifs.

Il est à noter que le test de ces hypothèses aura lieu dans le cadre pratique de la méthode

Une autre critique provient du dernier facteur de développement qui n'est estimé que sur une seule observation

$$f_{n-1} = C_{0,n} / C_{0,n-1} .$$

De plus ces données-là ( $C_{0,n}$  et  $C_{0,n-1}$ ) sont des données très anciennes (n années avant l'année courante). Pour les années de survénance récentes, l'estimation de la charge finale dépend des n facteurs de développement estimés sur les n années de survénance précédentes et repose sur le premier paiement effectué. L'incertitude de l'estimation est donc très forte.

### 1.3 Méthode de London Chain

Cette méthode a été introduite par Benjamin et Eagles [1986] afin de calculer des provisions aux Lloyd's, elle est moins utilisée, mais permet d'étudier les résultats obtenus lorsqu'on ne se contraint plus à avoir une relation linéaire entre  $C_{i,j}$  et  $C_{i,j+1}$  comme la méthode de Chain Ladder. En effet cette méthode suppose qu'il existe une fonction affine entre les paiements cumulés de deux années de développement successives, telle que :

$$\begin{aligned} C_{i,j+1} &= f_j * C_{i,j} + \alpha_j \quad \text{pour } j < n-1 \\ C_{i,n} &= f_{n-1} * C_{i,n-1} \quad \text{et } \alpha_{n-1} = 0 \end{aligned}$$

Par la méthode des moindres carrés on cherche à résoudre l'équation suivante :

$$(\hat{f}_j, \hat{\alpha}_j) = \operatorname{argmin} \left\{ \sum_{i=0}^{n-j-1} (C_{i,j+1} - \alpha_j - f_j \cdot C_{i,j})^2 \right\} \quad \text{Pour } j=0 \text{ à } n-1$$

Ainsi, on obtient par cette formule :

$$\hat{f}_j = \frac{\frac{1}{n-j-1} \sum_{i=0}^{n-j-1} C_{i,j} \cdot C_{i,j+1} - \bar{C}_j \cdot \bar{C}_{j+1}}{\frac{1}{n-j-1} \sum_{i=0}^{n-j-1} C_{i,j}^2 - (\bar{C}_j)^2} \quad \text{Et} \quad \hat{\alpha}_j = \bar{C}_{j+1} - \hat{f}_j \cdot \bar{C}_j$$

Avec :

$$\bar{C}_j = \frac{1}{n-j-1} \cdot \sum_{i=0}^{n-j-1} C_{i,j} \quad \text{Et} \quad \bar{C}_{j+1} = \frac{1}{n-j-1} \cdot \sum_{i=0}^{n-j-1} C_{i,j} + 1$$

Il est à noter que si l'hypothèse (H2) de la méthode de Chain Ladder est vérifiée, à savoir les points  $(C_{i,j}, C_{i,j+1})$  pour chaque année  $j$  sensiblement alignés, ils le seront aussi par une droite non contrainte à l'origine.

### 1.4 Méthode de Taylor

Cette méthode suppose :  $z_{i,j} = P_j * \mu_{i+j}$  où  $P_j$  est la part payée la  $j^{\text{ème}}$  année de développement et  $\mu_{i+j}$  est le coût total payé lors de l'année calendaire  $i + j$ . Cette méthode permet d'intégrer des hypothèses d'inflation

	0	...	j	...	n
0	$\mu_0 \cdot P_0$	...	$\mu_j \cdot P_j$	...	$\mu_n \cdot P_n$
⋮				⋮	
i	$\mu_i \cdot P_0$	...	$\mu_n \cdot P_j$		
⋮		⋮			
n	$\mu_n \cdot P_0$				

On obtient :

$$\widehat{u}_n = \sum_{i=0}^n Z_{i,n-i} \quad \widehat{P}_n = \frac{Z_{0,n}}{\widehat{u}_n} \quad \widehat{P}_{n-k} = \frac{\sum_{i=0}^k Z_{i,n-k} \widehat{u}_i}{\sum_{l=n-k}^n \widehat{u}_l} \quad \widehat{u}_{n-k} = \frac{\sum_{i=0}^{n-k} Z_{i,(n-k)-i}}{1 - \sum_{j=n-k+1}^n \widehat{P}_j}$$

Il s'agit ensuite d'extrapoler les coefficients  $\mu_k$  avec  $k=n+1$  à  $2n$ . Pour cela il faut estimer l'inflation future. Il est possible de se baser sur l'inflation observée sur les années calendaires 0 à n. Différentes méthodes sont possibles pour cela mais on se limitera à l'extrapolation exponentielle.

$$\widehat{Z}_{i,j} = \widehat{P}_j * \widehat{u}_{i+j}$$

## Chapitre II : Méthodes stochastiques

Dans une optique de gestion des risques, il peut être plus judicieux d'utiliser les méthodes stochastiques permettant de quantifier le risque d'estimation des provisions à l'ultime ainsi que mesurer leur incertitude et ce pour la branche pilote de la compagnie afin de faire face à nos engagements vis-à-vis des assurés.

### II.1 Méthode de GLM

Cette méthode se base sur des modèles qui sont formés de trois composantes : la composante aléatoire, la composante systématique et la fonction de lien.

• La composante aléatoire :

On cherche à expliquer les variables aléatoires réelles ( $Z_{i,j}$ ) indépendantes et dont la loi de probabilité est de type exponentiel. On se situe donc dans le cadre suivant :

(H1) Les paiements annuels non cumulés ( $Z_{i,j}$ ) sont indépendants.

(H2) Les paiements annuels non cumulés ( $Z_{i,j}$ ) appartiennent à la famille exponentielle, de densité :

$$f(Z_{i,j} / \theta_{i,j}; \varphi) = \exp\left(\frac{w_{i,j}}{\varphi} (Z_{i,j} \theta_{i,j} - b(\theta_{i,j})) + c(Z_{i,j}; \varphi)\right);$$

Où :

–  $\theta_{i,j}$  est un paramètre réel, appelé paramètre canonique ou paramètre de la moyenne,

–  $\varphi$  est un paramètre de dispersion strictement positif,

–  $w_{i,j}$  est une pondération (=1 par la suite),

–  $b$  et  $c$  sont des fonctions spécifiques de la distribution,

$b$  étant deux fois dérivable à valeurs dans  $\mathbb{R}$  et  $c$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^2$

Les lois les plus utilisées sont : Poisson, Gamma, normal (qui donne des règlements estimés négatives et donc non appropriée à notre cas), log normal (qui ne fait partie de la famille exponentielle mais simulable tout en prenant le log (règlements) suivant la normale), Inverse gaussien.

Lois	$\vartheta$	$b(\vartheta)$	$\varphi$
Poisson( $\gamma$ )	$\log(\gamma)$	$\exp(\vartheta)=\gamma$	1
Binomiale( $n,p$ )	$\log(p/(1-p))$	$n\log(1+\exp(\vartheta))$	1
Bernouilli( $p$ )	$\log(p/(1-p))$	$\log(1+\exp(\vartheta))$	1
Binomiale négative	$\log(p)$	$-r\log(p)$	1
Normale( $\mu,\sigma^2$ )	$\mu$	$(\vartheta^2)/2$	$\sigma^2$
Gamma( $\alpha,\beta$ )	$1/\alpha$	$-\log(-\vartheta)$	$1/\beta$

Tableau 2 : quelques exemples de famille de lois exponentielles

Pour avoir une idée en avance sur le comportement des règlements, il suffit de tracer le QQ\_Plot qui traduit la loi qui s'ajuste mieux aux quantiles empiriques.

Les propriétés remarquables de la famille exponentielle :

1-On obtient l'espérance (si elle existe) en dérivant la fonction  $b$

$$E(Z_{i,j}) = b'(\theta_{i,j})$$

2-On obtient la variance (si elle existe) assez simplement :

$$Var(Z_{i,j}) = b''(\theta_{i,j}) \frac{\varphi}{w_{i,j}}$$

D'où la raison de l'appellation de  $\varphi$  du paramètre de dispersion

• La composante systématique :

C'est une combinaison linéaire des variables explicatives des  $Z_{i,j}$  ; dans le cas du provisionnement à deux variables exogènes qualitatives, cette composante peut s'écrire comme suit :

$$\rho_{i,j} = \mu + \alpha_i + \beta_j ;$$

Où:

- $\alpha_i$  est le paramètre lié à la  $i^{\text{ème}}$  année de survenance
- $\beta_j$  est le paramètre lié à la  $j^{\text{ème}}$  année de développement tel que

$1 \leq i, j \leq n$  ; Avec  $n$  est l'horizon du triangle de liquidation.

Ainsi,  $\alpha_i$  et  $\beta_j$  ne sont d'autres que les coefficients de régression qu'on vise à estimer pour calculer les prédicteurs linéaires  $g(E(Z_{i,j}))$ . Les deux variables qualitatives contiennent  $n$  modalités. Par hypothèse, on prend  $\alpha_n = \beta_n = 0$  et ce pour raison d'identifiabilité du modèle.

• La fonction de lien :

C'est la fonction qui fait le lien entre la composante aléatoire et la composante systématique. Il s'agit d'une fonction réelle  $g$ , strictement monotone et dérivable telle que :

$$E(Z_{i,j}) = \mu_{i,j} = g^{-1}(\rho_{i,j}) \text{ ou bien } g(E(Z_{i,j})) = g(\mu_{i,j}) = \rho_{i,j}$$

Nous allons utiliser la méthode du maximum de vraisemblance. La vraisemblance d'un échantillon indépendant  $(z_{i,j})$  comme étant des réalisations de la variable aléatoire  $Z$  s'écrit :

$$L((z_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}) = \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^n \exp\left(\frac{w_{i,j}}{\varphi} (Z_{i,j} \theta_{i,j} - b(\theta_{i,j})) + c(Z_{i,j}; \varphi)\right)$$

Il est à noter que le vecteur  $(\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_n, \varphi)$  est celui qui maximise cette fonction. Pour ajuster l'écriture de cette fonction, on a :

$$\theta_{i,j} = b'^{-1}(E(Z_{i,j})) = b'^{-1}(g^{-1}(\rho_{i,j})) = b'^{-1}(g^{-1}(\mu + \alpha_i + \beta_j))$$

Ainsi, la fonction de log vraisemblance à maximiser pour obtenir nos paramètres estimés  $\hat{\alpha}_i, \hat{\beta}_j$  et  $\hat{\varphi}$  est la suivante :

$$l((z_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{w_{i,j}}{\varphi} (Z_{i,j} b'^{-1}(g^{-1}(\mu + \alpha_i + \beta_j)) - b(b'^{-1}(g^{-1}(\mu + \alpha_i + \beta_j))) + c(Z_{i,j}, \varphi)]$$

Pratiquement, on obtient ces estimations par la procédure « GENMOD » sur le logiciel SAS, comme on le montrera dans la partie suivante.

Dans la plupart des cas, on a tendance à prendre la fonction de lien comme étant « log » et ce pour obtenir un modèle multiplicatif. Brokman et Wright (1992) ont motivé ce choix vu qu'il ne donne pas des règlements estimés négatives ou nuls comme le cas du modèle additif.

## II.2 Méthode de Mack

C'est la version stochastique de la méthode de CL, ayant été introduite en 1993 par Mack. Elle se base sur la réserve de CL puis le calcul de l'estimation de l'erreur de provisionnement à l'ultime traduisant l'impact de la volatilité du montant des provisions sur le bilan de la compagnie d'assurance. Il s'agit d'un modèle paramétrique vu qu'il ne communique aucune distribution des chargements cumulés, ni des réserves totales et donc pas de quantiles (notamment la value at Risk), mais fournit les moments d'ordre 1 et 2.

### II.2.1 Hypothèses

Ce modèle se base sur trois hypothèses ; la première étant vérifiée par CL et qui traduit l'indépendance des années de survenance tandis que la deuxième a été réintroduite pour prendre en considération l'aspect stochastique de la méthode mais qui est aussi vérifiée par CL. Ainsi, la méthode déterministe de CL devient :

$$E(C_{i,j+1}) = f_j * E(C_{i,j}) ; \forall i, j = 1, \dots, n$$

Avec  $f_j$  est le coefficient de développement de CL associé à la  $j^{\text{ème}}$  année de développement

Puis la dernière qui concerne la volatilité des données du triangle. Ainsi, on peut reformuler ces hypothèses comme suit :

- (H1) les années de survenance sont indépendantes, c'est-à-dire que les sinistres survenant ultérieurement n'expliquent pas ceux d'avant :

$$(C_{i,j}) \text{ Indépendant de } (C_{i',j}) \text{ pour } i \neq i'$$

- (H2)  $E(C_{i,j+1}/C_{i,j}) = f_j * C_{i,j} ; \forall j = 1, \dots, n$

- (H3)  $V(C_{i,j+1}/C_{i,j}) = \sigma_j^2 * C_{i,j}$

Sous les deux premières hypothèses, le modèle de Mack fournit les mêmes estimations des facteurs de développement que CL. Ainsi, on obtient une estimation de la réserve annuelle  $\hat{R}_i$ .

Nous avons vérifié les deux premières hypothèses lors de l'introduction de la méthode de CL. Il reste à vérifier que la troisième.

Dans ce cadre, on définit les résidus comme suit :

$$\varepsilon_{i,j} = \frac{C_{i,j+1} - f_j * C_{i,j}}{\sigma_j * \sqrt{C_{i,j}}},$$

Puis les résidus standardisés :

$$D_{i,j} = \frac{\varepsilon_{i,j}}{\sigma_j} = \frac{C_{i,j+1} - f_j * C_{i,j}}{\sqrt{C_{i,j}}}$$

Afin de vérifier (H3), il suffit de prouver que les points de coordonnées  $(C_{i,j}, D_{i,j})$  ne présentent aucune « structure », c'est-à-dire que les deux dernières hypothèses de Mack incorporent toute l'information traduisant le comportement et l'évolution des  $(C_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$  et qui ne peut être expliquée hors le cadre de Mack.

## II.2.2 Méthode

Ces hypothèses permettent d'estimer l'erreur de prévision, commise dans le calcul des réserves annuelles, que nous mesurons par l'erreur quadratique moyenne **msep** (mean squared error of prediction) :

$$\begin{aligned} \text{Msep}(\hat{R}_i) &= E[(R_i - \hat{R}_i)^2 / D] \\ &= E[(C_{i,n} - \hat{C}_{i,n})^2 / D] \end{aligned}$$

$$\text{Puisque } R_i = C_{i,n} - C_{i,n-i+1} \text{ et } \hat{R}_i = \hat{C}_{i,n} - \hat{C}_{i,n-i+1}$$

Avec  $D$  est l'information dont on dispose du triangle des règlements cumulés, d'où  $D = \{C_{i,j} ; i + j \leq n ; 1 \leq i, j\}$

Cette formule est décomposable sous la forme suivante :

$$\text{Msep}(\hat{R}_i) = \underbrace{\text{Var}(C_{i,n} / D)}_{\text{Erreur de processus}} + \underbrace{[E[(C_{i,n} / D)] - \hat{C}_{i,n}]^2}_{\text{Erreur d'estimation}}$$

-La première erreur traduit la variance du processus, c'est-à-dire la variabilité autour de la moyenne, due au processus stochastique. Cette erreur ne peut donc être supprimée.

-La deuxième erreur provient de l'incertitude de l'estimation que l'on fait des paramètres servant à déterminer  $\hat{C}_{i,n}$ . En général, ce type d'erreur diminue avec l'augmentation de l'information disponible.

Mack propose alors une estimation de l'erreur quadratique moyenne et ce pour  $i=2$  à  $n$  :

$$\begin{aligned} \widehat{\text{Msep}}(\widehat{R}_i) &= \widehat{C}_{i,n}^2 \cdot \sum_{j=n-i+1}^{n-1} (\widehat{\sigma}_j^2 / \widehat{f}_j^2) \cdot \left( \frac{1}{\widehat{C}_{i,j}} + \frac{1}{\sum_{k=1}^{n-j} C_{k,j}} \right) \\ &= \underbrace{\widehat{C}_{i,n}^2 \cdot \sum_{j=n-i+1}^{n-1} (\widehat{\sigma}_j^2 / \widehat{f}_j^2 * \widehat{C}_{i,j})}_{\text{Erreur de processus}} + \underbrace{\widehat{C}_{i,n}^2 \cdot \sum_{j=n-i+1}^{n-1} (\widehat{\sigma}_j^2 / \widehat{f}_j^2 * \sum_{k=1}^{n-j} C_{k,j})}_{\text{Erreur d'estimation}} \end{aligned}$$

Avec  $\widehat{C}_{i,n-i+1} = C_{i,n-i+1}$

On définit, dans le même cadre,  $\widehat{\sigma}_j^2$  comme étant la volatilité du triangle par année de développement  $j$  :

$$\widehat{\sigma}_j^2 = \left( \frac{1}{n-j-1} \right) * \left( \sum_{i=1}^{n-j} C_{i,j} * \left( \frac{C_{i,j+1}}{C_{i,j}} - \widehat{f}_j \right)^2 \right) \quad \text{pour } j \leq n-2;$$

Pour  $j=n-1$ , nous disposons d'une seule observation, de plus il faut s'assurer qu'il y ait une stabilité des règlements tout en s'approchant de la clôture des sinistres :

$$\frac{\widehat{\sigma}_{n-1}^2}{\widehat{\sigma}_{n-2}^2} = \frac{\widehat{\sigma}_{n-2}^2}{\widehat{\sigma}_{n-3}^2} ; \text{ ceci revient à prendre :}$$

$$\widehat{\sigma}_{n-1}^2 = \min \left( \frac{\widehat{\sigma}_{n-2}^4}{\widehat{\sigma}_{n-3}^2}, \widehat{\sigma}_{n-2}^2, \widehat{\sigma}_{n-3}^2 \right)$$

D'autre part, pour estimer l'erreur de prédiction de toutes les provisions de la branche,  $\widehat{\text{Msep}}(\widehat{R}) = \widehat{\text{Msep}}(\sum_{i=1}^n \widehat{R}_i)$ , on ne peut pas simplement sommer les  $\widehat{\text{Msep}}(\widehat{R}_i)$  relatifs à chaque année de survenance du fait que celles-ci sont estimées à l'aide des mêmes facteurs de développement. Il faut donc tenir compte d'une corrélation entre elles. Mack estime alors erreur de provision pour toute la réserve par :

$$\widehat{\text{Msep}}(\widehat{R}) = \sum_{i=2}^n (\widehat{\text{Msep}}(\widehat{R}_i) + \widehat{C}_{i,n} \cdot (\sum_{k=i+1}^n \widehat{C}_{k,n}) \cdot (\sum_{j=n-i+1}^{n-1} (2 \cdot \widehat{\sigma}_j^2 / \widehat{f}_j^2 * \sum_{k=1}^{n-j} C_{k,j})))$$

On dispose à présent d'un prédicteur de  $R_i$  ( $\hat{R}_i$ ) et de l'écart-type de celui-ci ( $se(\hat{R}_i) = \sqrt{Msep(\hat{R}_i)}$ ) ; qui servent comme paramètres pour la loi suivie par les provisions et ce pour détecter les quantiles de la distribution des réserves totales. Deux lois sont souvent utilisées en assurance non-vie : la loi normale et lognormale qu'on justifiera par le biais du cadre pratique de Bootstrap. Cependant, l'usage de la loi normale est critiqué vu qu'elle peut prendre des valeurs négatives, ce qui n'est pas le cas des provisions.

### II.3 Méthode de Bootstrap

Le principe de la méthode du Bootstrap est de "créer" un plus grand nombre de données à partir de celles qui sont disponibles. Cela se fait en ré-échantillonnant nos données sur la base d'un tirage aléatoire avec remise. Cette méthode est habituellement définie par l'expression « se hisser en tirant sur ses propres lacets ».

L'hypothèse fondamentale est de supposer que les éléments qui sont ré-échantillonnés sont des variables aléatoires i.i.d.

Dans cette section nous appliquerons la méthode de ré-échantillonnage du Bootstrap afin d'étudier la distribution suivie par le montant des provisions estimées.

L'hypothèse d'indépendance n'est pas vérifiée sur les incréments de paiements, c'est pourquoi nous utilisons les résidus dits de Pearson calculés à partir de ces incréments de paiements observés, afin que l'hypothèse d'indépendance soit vérifiée

#### Les différentes étapes à effectuer sont :

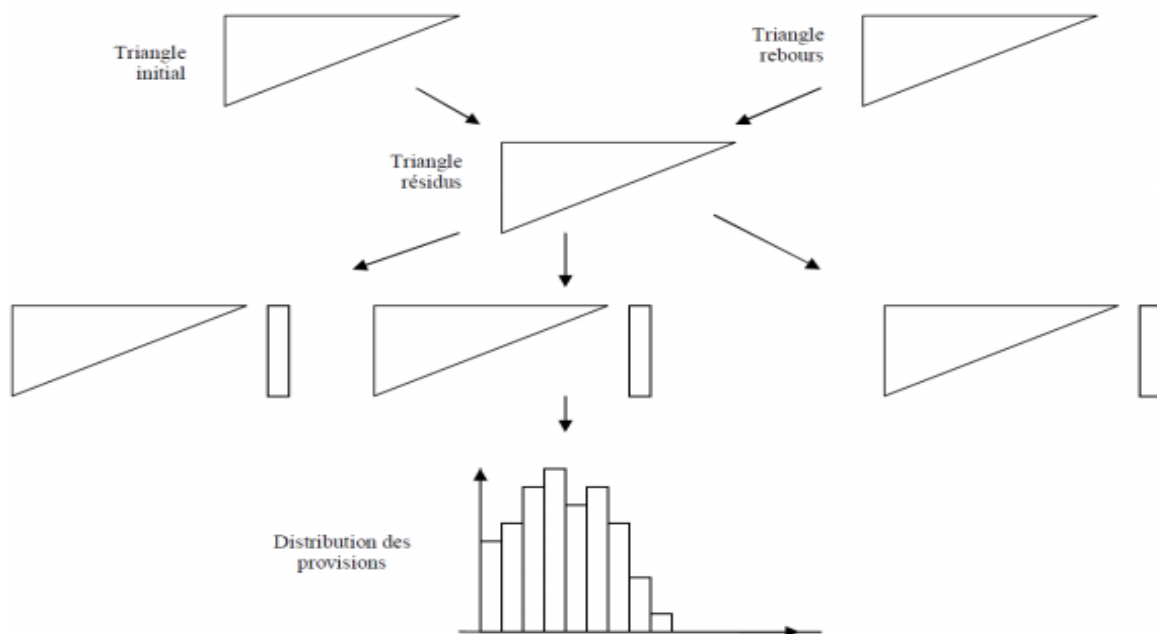


Figure 4 : Schéma illustratif du principe du Bootstrap, détermination d'intervalle de confiance des réserves IBNR

Phase 1 : Remplir le triangle inférieur avec la méthode CL

- Triangle de paiements non cumulés
- Triangle de paiements cumulés
- Identification des facteurs de transition
- Déroulement du triangle

Phase 2 : Obtenir les résidus non standardisés

- Calcul des valeurs prédites par le modèle pour le triangle supérieur
- Calcul du triangle des résidus de Pearson qui correspondent aux résidus bruts standardisés

$$r_{ij} = \frac{C_{ij} - \widehat{u}_{ij}}{\sqrt{\widehat{u}_{ij}}}$$

Phase 3 : Identifier N triangles de résidus par tirage uniforme des résidus initiaux

Phase 4 : reconstituer le triangle de paiement pour chaque triangle de résidus

$$C_{i,j} = \widehat{\mu}_{i,j} + r_{i,j} * \sqrt{\widehat{\mu}_{i,j}}$$

Phase 5 : Appliquer la méthode CL pour calculer les provisions

Phase 6 : Obtenir ainsi, un N-échantillon de réalisation de la variable provision et donc une distribution empirique de l'estimation de la provision.

## Partie III : le cadre Pratique de l'évaluation des provisions

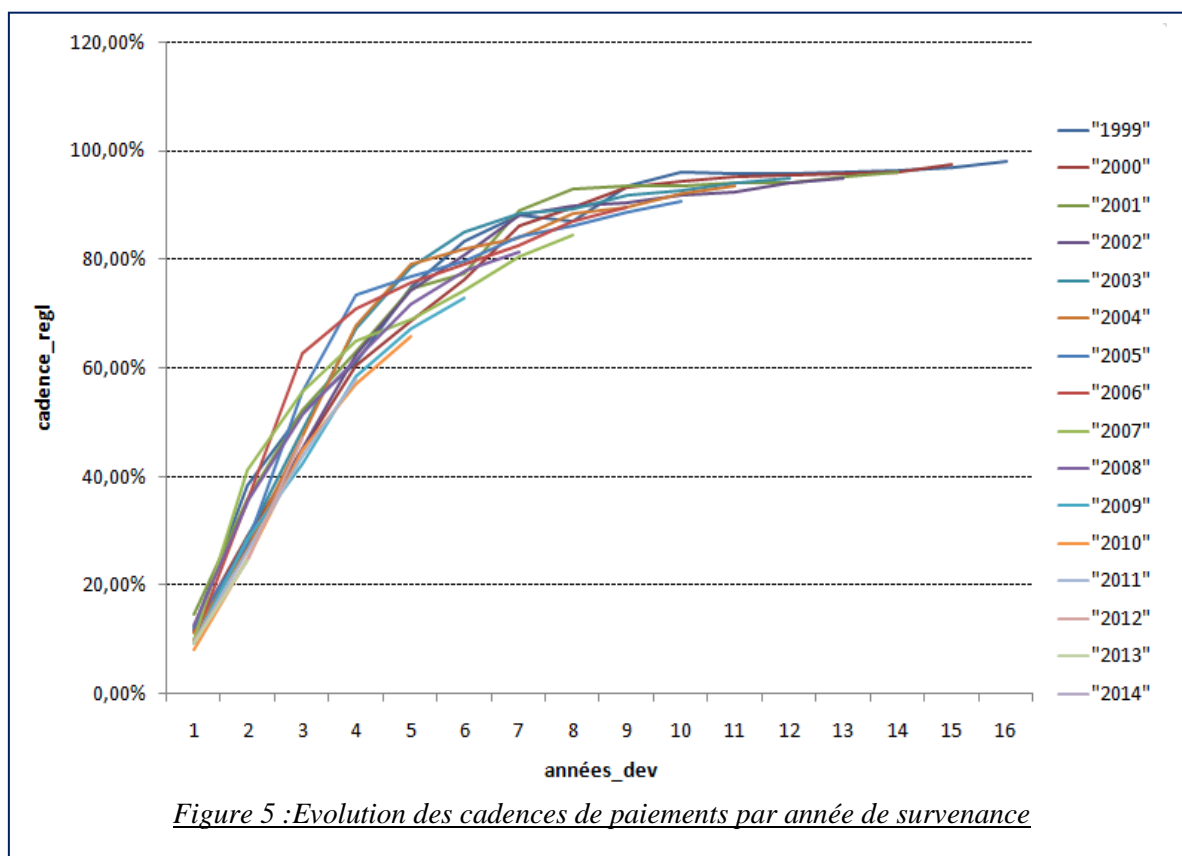
### Chapitre I : Méthodes déterministes

#### I.1 Vérification de l'hypothèse des méthodes déterministes

Toute méthode déterministe repose sur l'hypothèse de la stabilité de la cadence de règlements, c'est pour cela qu'il est nécessaire de la vérifier avant d'appliquer la méthode de Chain Ladder Standard.

La cadence de règlement est le rapport entre le règlement cumulé effectué après  $j$  années au comptes des sinistres survenus à l'année  $i$ , et la charge ultime estimée (somme de règlement et la PSAP) pour la même catégorie des sinistres avec :  $i=1999 \dots 2014$  et  $j=0 \dots 15$ .

Ainsi, on a tracé le graphique des cadences de règlement des sinistres qui a donné l'allure suivante :



Ainsi, notre hypothèse s'avère vérifiée, vu qu'il y a convergence des comportements des cadences de paiements par année de survenance et une stabilisation à partir de la 8<sup>ème</sup> année de développement. La tendance croissante remarquée au début peut être expliquée par le fait qu'on charge notre PSAP dans les premières années de développement pour liquider le maximum possibles des sinistres et avoir une maîtrise de risque et ce pour honorer le maximum des engagements de l'assureur. La décroissance de la PSAP signifie la croissance de la cadence des paiements et son rapprochement vers 1.

## I.2 Méthode de Chain Ladder

Avant d'appliquer le modèle de Chain Ladder, il est indispensable de vérifier les hypothèses spécifiques à cette méthode

### I.2.1 test des hypothèses de la méthode

La première hypothèse est celle de l'indépendance des années de survenance entre elles, elle signifie que les sinistres survenus auparavant ne doivent influencer l'incidence des sinistres des années d'après. En pratique, cette hypothèse est généralement admise.

Afin de nous assurer de la véracité de cette hypothèse, il est nécessaire de voir le triangle des coefficients de développement  $f_{ij}$  tel que  $f_{ij} = \frac{C_{ij+1}}{C_{ij}}$ , et de les comparer à  $\bar{f}_j = \left(\frac{1}{I}\right) \sum_{i=1}^I f_{ij}$ , avec I est le nombre des coefficients de développement  $f_{ij}$  par année de développement.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
0	4,44542235	1,48184364	1,25447149	1,16191043	1,11703355	1,09623327	1,04856315	1,04473158	1,01702161	1,03082467	1,03002261	1,00704161	1,00016905	1,0049259	1,00105565
1	3,61777024	1,67392163	1,31924212	1,17351222	1,13224921	1,12877237	1,03407618	1,01923409	1,04992546	1,05120248	1,00188361	1,00092314	1,00031972	1,00220514	
2	3,49408034	1,5652403	1,33630675	1,23855914	1,16471001	1,08147609	1,03192054	1,05253815	1,03954984	1,00679717	1,00259198	1,00611654	1,00343111		
3	3,28495077	1,72030191	1,40382829	1,34854738	1,09845385	1,04305902	1,08899996	1,04733715	1,01627818	1,00987921	1,01396028	1,00395369			
4	4,71597171	1,74831652	1,63689384	1,17380826	1,06086064	1,07751304	1,04901923	1,01180879	1,00822744	1,00547761	1,0057816				
5	3,66790715	2,12502226	1,4709729	1,13914732	1,08264733	1,10225917	1,03078692	1,0180848	1,01662113	1,0084292					
6	4,00798537	2,32784331	1,30841075	1,10724747	1,09475346	1,02907488	1,0344555	1,02076268	1,01091422						
7	4,68518373	1,82267379	1,26501635	1,13616008	1,06713952	1,05889615	1,04069824	1,0194339							
8	5,14065001	1,68425946	1,25813049	1,13824506	1,07832102	1,05651667	1,03401604								
9	3,87256228	1,70026363	1,32799147	1,18148663	1,09455777	1,04524067									
10	4,68819053	1,81442873	1,45824728	1,19192627	1,08944574										
11	4,68802532	2,0049064	1,38458947	1,19263575											
12	3,72721221	1,84941114	1,38537532												
13	3,4605941	2,13406987													
14	3,40877732														
Mean	4,06035223	1,83232161	1,36995973	1,18193217	1,09819746	1,07190413	1,04361508	1,02924139	1,02264827	1,01876839	1,01084802	1,00450874	1,00130663	1,00356552	1,00105565
Std.dévi	0,60526149	0,23712752	0,10683389	0,06261836	0,03005914	0,03100846	0,01833827	0,01606562	0,01572641	0,01845641	0,01174247	0,00271815	0,0018414	0,00192387	
Coef_Var	14,91%	12,94%	7,80%	5,30%	2,74%	2,89%	1,76%	1,56%	1,54%	1,81%	1,16%	0,27%	0,18%	0,19%	

Calculer

Supprimer

Tableau 3 : Triangle des coefficients de passage.

On remarque que pour la première année, l'hypothèse d'égalité des coefficients sur les années de survenance n'est pas réaliste vu qu'il y'a une volatilité importante des  $f_{i0}$  par rapport à  $\overline{f_0}$ . Malgré que le coefficient de variation est inférieur à 30% pour toute ces années ce qui traduit une stabilité des  $(f_{ij})$  et donc c'est un bon indicateur. De plus, une moyenne de 4,06 traduit que pour passer de la première année de développement à la deuxième, les chargements cumulés sont en moyenne multipliés par 4,06. Mais, cette hypothèse paraît plus vraisemblable pour les années de développement qui suivent comme le montre les trois graphes suivants :

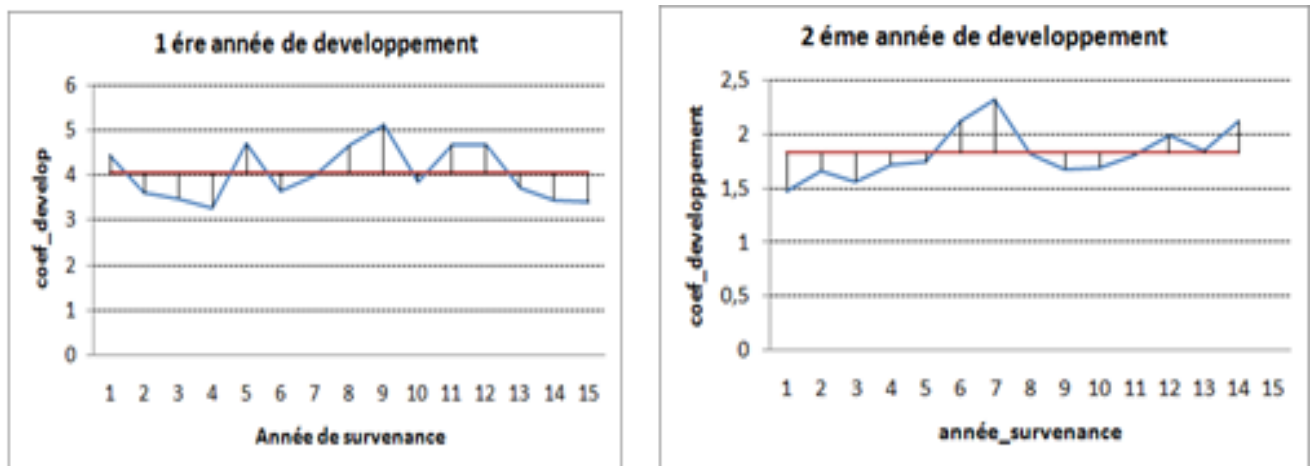
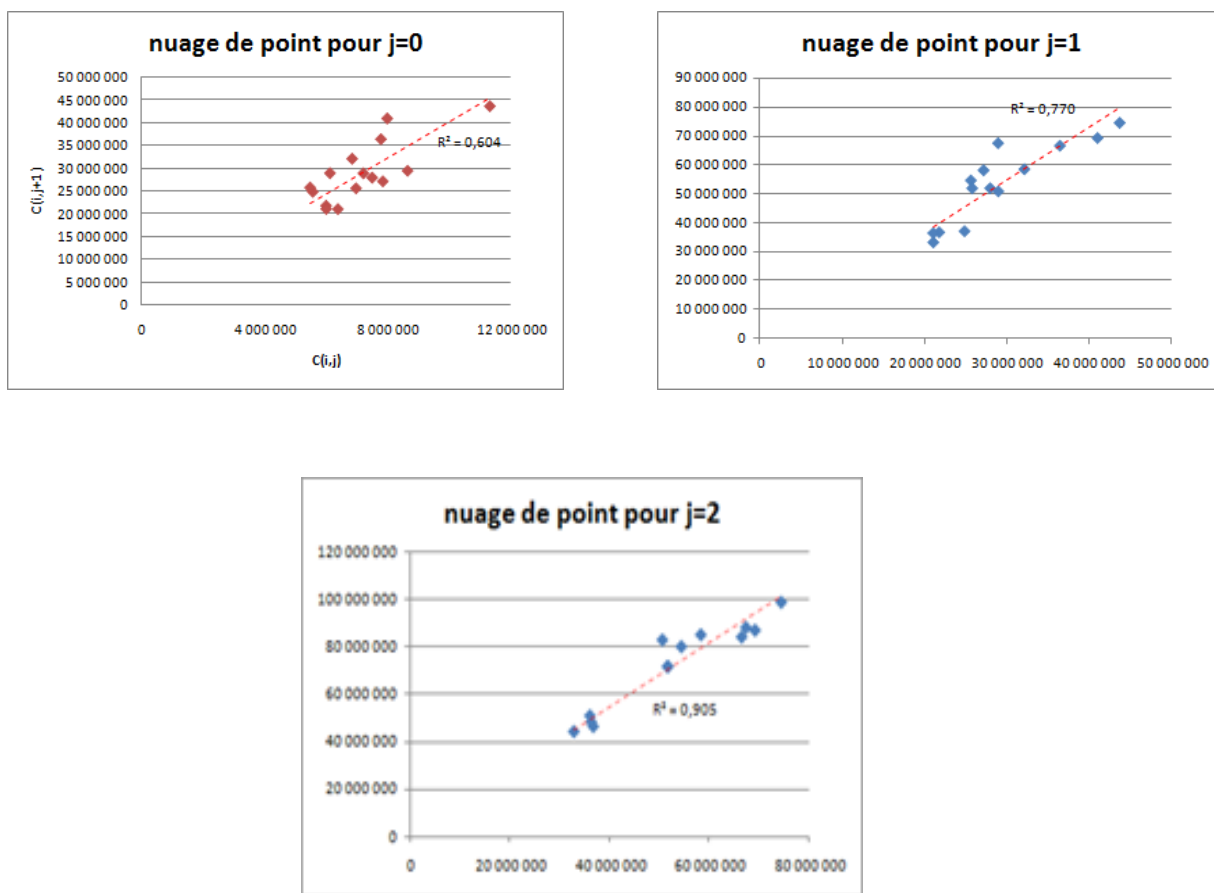


Figure 6: Comparaison des  $f_{ij}$  à  $\overline{f_j}$  pour  $j=0.....14$

Ainsi, on remarque un recul de l'écart maximal par rapport à la moyenne tout en avançant dans les années de développement. Cet écart est de 1 pour  $j=0$  puis 0.2 pour  $j=2$  ce qui nous laisse vraisemblablement accepter la première hypothèse de Chain Ladder.

La deuxième hypothèse repose sur le fait que les années de déroulement sont les seules variables explicatives du comportement des sinistres futures, ce qui veut dire qu'il existe vraisemblablement  $f_j$  tel que  $C_{ij+1} = f_j * C_{ij}$ . Ceci sous-entend qu'en traçant l'évolution des  $(C_{ij}, C_{ij+1})$ , il faut obtenir des droites linéaires sans origine.

Ainsi, on a vérifié ceci pour toutes les années de développement, sauf qu'on a relaté que les 10 premières années dans notre rapport. Les 3 premières sont les suivantes tandis que les sept restantes sont élaborées dans l'annexe B.



*Figure 7 Représentation des nuages de points  $(C_{ij}, C_{ij+1})$ ,  $j=0, 1, 2$*

On remarque que la part de la variabilité expliquée par les années de déroulement antérieures devient de plus en plus importante des règlements postérieurs tout en avançant dans ces années, et ce à travers les coefficients de détermination traduisant la qualité de nos ajustements.

De plus, les droites d'ajustements sont linéaires et passe par l'origine, d'où l'acceptation de la deuxième hypothèse.

## I.2.2 Application de Chain Ladder

Après avoir vérifié nos hypothèses, il est indispensable de passer à la modélisation de notre triangle de liquidation et ce à travers la méthode de Chain Ladder. Tout d'abord, on commencera par le calcul de nos coefficients de passage par année de déroulement, dont la formule est mentionnée dans la partie précédente, comme étant une moyenne pondérée de la charge sinistre :

Coef Chain Ladder	4,044706	1,831361	1,366690	1,173694	1,092766	1,067666	1,042650	1,026811	1,020536	1,016884	1,010248	1,004418	1,001287	1,003517	1,001056
-------------------	----------	----------	----------	----------	----------	----------	----------	----------	----------	----------	----------	----------	----------	----------	----------

Tableau 4 : Coefficients de Passage selon le modèle de Chain Ladder

Grace à ces estimateurs  $\hat{f}_j$  avec  $j=1 \dots 15$ , nous pouvons estimer :

- Les IBNR qui traduisent les tardifs que la compagnie n'a pas encore payée au compte des sinistres anciens et dont les montants de règlements figurent dans le triangle inférieur de la table qui suit
- Les  $(CFP_i)$  par année de survenance qui sont les éléments de la dernière colonne du tableau des règlements prédits.
- Les provisions par exercice de survenance  
 $\hat{R}_i = \widehat{C}_{i,n} - C_{i,n-i+1}$  avec  $C_{i,n-i+1}$  est le règlement cumulé de la diagonale ainsi que la  $i^{\text{ème}}$  ligne.
- La provision totale à constituer pour toutes les années de survenance agrégées.

Partie III. Le cadre Pratique de l'évaluation des provisions

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
0	5 590 200	24 850 800	36 825 000	46 195 913	53 675 513	59 957 349	65 727 241	68 919 163	72 002 026	73 227 616	75 484 833	77 751 085	78 298 578	78 311 814	78 697 571	78 780 648
1	6 016 800	21 767 400	36 436 922	48 069 122	56 409 702	63 869 841	72 094 512	74 551 217	75 985 142	79 778 735	83 863 604	84 021 570	84 099 134	84 126 022	84 311 532	84 400 535
2	6 022 800	21 044 147	32 939 147	44 016 804	54 517 415	63 496 979	68 670 465	70 862 463	74 585 446	77 535 289	78 062 309	78 264 645	78 743 354	79 013 531	79 291 409	79 375 112
3	6 399 000	21 020 400	36 161 434	50 764 444	68 458 258	75 198 237	78 436 199	85 417 018	89 460 416	90 916 669	91 814 854	93 096 615	93 464 690	93 584 961	93 914 083	94 013 224
4	6 142 800	28 969 271	50 647 455	82 904 507	97 313 995	103 236 587	111 238 769	116 691 608	118 069 594	119 041 005	119 693 066	120 385 084	120 916 965	121 072 562	121 498 354	121 626 613
5	6 984 307	25 617 789	54 438 372	80 077 370	91 219 921	98 759 004	108 858 018	112 209 421	114 238 706	116 137 482	117 116 428	118 316 589	118 839 331	118 992 254	119 410 730	119 536 786
6	7 219 848	28 937 046	67 360 910	88 135 739	97 588 074	106 834 882	109 941 094	113 729 169	116 090 492	117 357 529	119 339 002	120 561 939	121 094 602	121 250 427	121 676 844	121 805 293
7	7 787 917	36 487 823	66 505 399	84 130 417	95 585 621	102 003 194	108 010 790	112 406 639	114 591 138	116 944 360	118 918 857	120 137 489	120 668 276	120 823 552	121 248 469	121 376 465
8	7 988 513	41 066 148	69 166 048	87 019 914	99 049 987	106 807 683	112 844 098	116 682 608	119 810 935	122 271 350	124 335 789	125 609 931	126 164 896	126 327 245	126 771 517	126 905 344
9	11 303 765	43 774 534	74 428 249	98 840 080	116 778 233	127 820 523	133 603 209	139 301 441	143 036 192	145 973 557	148 438 185	149 959 318	150 621 864	150 815 684	151 346 078	151 505 846
10	6 858 216	32 152 624	58 338 645	85 072 171	101 399 756	110 469 532	117 944 618	122 975 005	126 272 035	128 865 134	131 040 903	132 383 756	132 968 649	133 139 753	133 607 984	133 749 027
11	5 500 928	25 788 491	51 703 511	71 588 137	85 378 572	93 298 778	99 611 979	103 860 472	106 645 030	108 835 072	110 672 652	111 806 779	112 300 760	112 445 269	112 840 721	112 959 841
12	7 504 970	27 972 616	51 732 867	71 669 437	84 117 982	91 921 249	98 141 238	102 327 002	105 070 447	107 228 154	109 038 603	110 155 985	110 642 673	110 785 048	111 174 661	111 292 022
13	7 850 791	27 168 401	57 979 266	79 239 679	93 003 130	101 630 633	108 507 622	113 135 517	116 168 745	118 554 364	120 556 045	121 791 454	122 329 549	122 486 963	122 917 729	123 047 487
14	8 649 699	29 484 898	53 997 479	73 797 811	86 616 042	94 651 042	101 055 747	105 365 816	108 190 734	110 412 518	112 276 732	113 427 297	113 928 438	114 075 041	114 476 224	114 597 071
15	8 458 092	34 210 491	62 651 744	85 625 507	100 498 137	109 820 921	117 252 118	122 252 969	125 530 641	128 108 515	130 271 509	131 606 477	132 187 936	132 358 036	132 823 518	132 963 733

Tableau 5 : Tableau des règlements prédits par le modèle de Chain Ladder

Suite à cette table, on a tous les ingrédients pour déduire les provisions par année de survenance ainsi que la provision totale :

Année	Reserve
1999	.
2000	89 003,37
2001	361 581,40
2002	548 533,75
2003	1 241 529,37
2004	2 420 357,77
2005	4 447 763,51
2006	6 785 326,64
2007	10 222 735,69
2008	17 902 637,32
2009	23 279 495,07
2010	27 581 268,89
2011	39 622 585,02
2012	65 068 221,15
2013	85 112 172,96
2014	124 505 640,60
<b>RESERVE TOTALE</b>	<b>409 188 852,49</b>

Tableau 6 : Provision Totale sous le modèle de Chain Ladder

Ainsi, la valeur de la Provision totale selon Chain Ladder Standard est de 409 188 852,49 DHS.

### 1.3 Application de London Chain

Selon le modèle de London Chain, les chargements cumulés ( $C_{ij}, C_{ij+1}$ ) s'alignent selon une droite d'ajustement mais en présence d'une constante comme mentionné dans le cadre théorique de la méthode. Le tableau suivant traduit les résultats qu'on a obtenus tout en appliquant ce modèle :

Coef_London Chain	4,0313	1,8225	1,3605	1,1673	1,0890	1,0644	1,0418	1,0247	1,0188	1,0153	1,0099	1,0044	1,0010	1,0039	1,0011
Constante	-358 963,76	604 631,15	99 169,24	151 042,59	4 261,76	- 245 209,17	- 97 905,74	- 74 329,05	- 130 471,27	- 132 771,64	- 99 065,49	- 9 516,60	63 593,65	-72 570,45	-

*Tableau 7 : Estimation des paramètres de régression*

Suite au tableau précédent, on peut calculer les ( $CFP_i$ ) et donc les provisions par année de survenance ainsi que la réserve totale.

Année	Reserve
1999	0
2000	89 003,37
2001	321 647,97
2002	552 383,13
2003	1 232 769,64
2004	2 272 564,79
2005	3 972 863,12
2006	5 967 747,23
2007	9 050 200,25
2008	16 368 213,35
2009	21 177 849,98
2010	25 292 009,22
2011	36 955 012,15
2012	61 787 291,24
2013	82 734 785,57
2014	119 839 460,96
<b>RESERVE TOTALE</b>	<b>387 613 801,98</b>

*Tableau 8 : Provision Totale sous le modèle de London Chain*

Ainsi, la valeur de la Provision totale selon London Chain est de **387 613 801,98** DHS.

### 1.4 Application de Taylor

Ce modèle suppose que chaque règlement estimé constitue une proportion  $P_j$  du cout total payé dans l'année calendaire  $i+j$  :  $\mu_{i+j}$ , c'est-à-dire  $z_{i,j} = P_j * \mu_{i+j}$ . Il s'agit d'un modèle qui intègre les hypothèses d'inflation.

En se basant sur les formules introduites dans le cadre théorique du modèle de Taylor, on a calculé les  $P_j$  et les  $\mu_{i+j}$  pour les 16(n) premières années calendaires. Puis, on a extrapolé ceux des années futures (de  $n+1$  à  $2n$ ).

$n$	$\mu(n)$	$P(j)$	$j$
0	80 036 725,56	0,0695095	0
1	91 602 064,25	0,2061025	1
2	67 342 921,76	0,2251827	2
3	67 176 127,68	0,1756095	3
4	65 790 693,18	0,1101645	4
5	82 792 163,29	0,0664598	5
6	95 004 240,23	0,0504391	6
7	137 537 814,31	0,0317408	7
8	138 706 190,20	0,0205327	8
9	123 782 941,24	0,0160151	9
10	128 721 370,97	0,0129977	10
11	129 832 048,97	0,0077401	11
12	108 357 933,99	0,0031685	12
13	121 029 378,82	0,0008712	13
14	116 581 295,78	0,0024295	14
15	118 551 470,13	0,0007008	15
16	141 810 185,57		
17	147 597 569,03		
18	153 621 140,09		
19	159 890 537,75		
20	166 415 794,38		
21	173 207 351,79		
22	180 276 077,91		
23	187 633 284,22		
24	195 290 743,81		
25	203 260 710,26		
26	211 555 937,21		
27	220 189 698,79		
28	229 175 810,87		
29	238 528 653,13		
30	248 263 192,13		
31	258 395 005,21		

Tableau 9 : Calcul des  $\mu(n)$  actuels et futurs ainsi que  $P_j$ ,  $n=i+j=0.....15$  et  $j=0.....15$

Il est à noter que l'extrapolation a été effectuée selon le modèle exponentielle ( $\log(u_n)=f(n)$ ) vu qu'il avait le coefficient de détermination le plus important, avec n signifie les années calendaires.

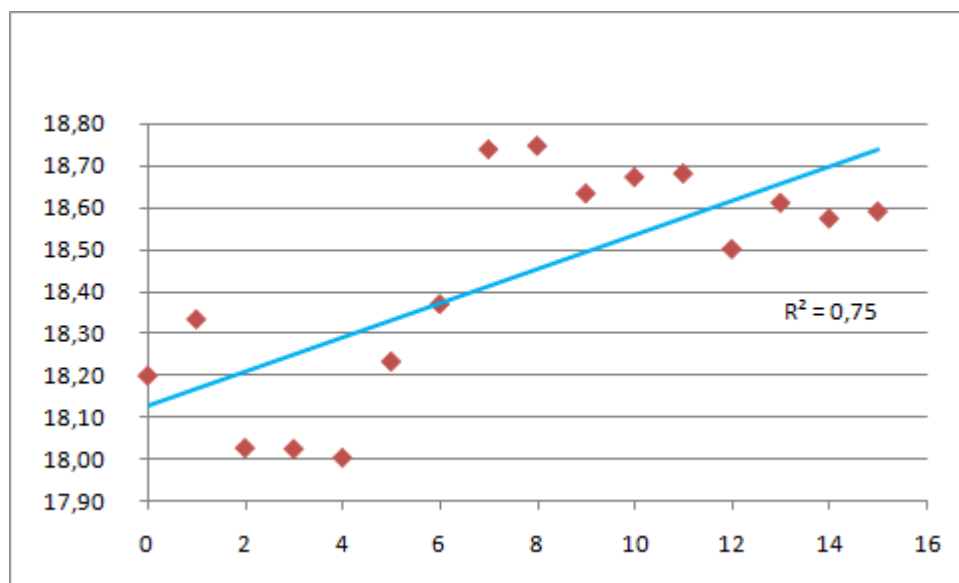


Figure 8 : Extrapolation des  $\log(u(i+j))$  linéairement, avec  $i+j=0, \dots, 15$

Il est à noter qu'il faut travailler avec un triangle de règlements décumulés pour élaborer le modèle de Taylor. Ainsi, on peut maintenant calculer les  $\widehat{z}_{i,j} = P_j * \widehat{\mu}_{i+j}$ , avec  $i+j=16, \dots, 30$ .

P0	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7	P8	P9	P10	P11	P12	P13	P14	P15
0,069509501	0,206102494	0,225182688	0,175609511	0,110164485	0,066459793	0,050439109	0,031740812	0,020532701	0,01601511	0,012997708	0,007740079	0,0031685	0,000871	0,0024295	0,000701

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	
1999	5 590 200	19 260 600	11 974 200	9 370 913	7 479 600	6 281 836	5 769 892	3 191 922	3 082 863	1 225 590	2 257 217	2 266 252	547 493	13 236	385 757	83 077	
2000	6 016 800	15 750 600	14 669 522	11 632 200	8 340 580	7 460 139	8 224 671	2 456 705	1 433 925	3 793 593	4 084 869	157 966	77 564	26 888	185 510	99 376	141 810 185,57 U16
2001	6 022 800	15 021 347	11 895 000	11 077 657	10 500 611	8 979 564	5 173 486	2 191 998	3 722 983	2 949 843	527 020	202 336	478 709	270 177	344 535	103 432	147 597 569,03 U17
2002	6 399 000	14 621 400	15 141 034	14 603 010	17 693 814	6 739 979	3 237 962	6 980 819	4 043 398	1 456 253	898 185	1 281 761	368 075	123 550	358 595	107 653	153 621 140,09 U18
2003	6 142 800	22 826 471	21 678 184	32 257 052	14 409 488	5 922 592	8 002 182	5 452 839	1 377 986	971 411	652 061	692 018	449 328	128 592	373 230	112 046	159 890 537,75 U19
2004	6 984 307	18 633 482	28 820 583	25 638 998	11 142 551	7 539 083	10 099 014	3 351 403	2 029 285	1 898 776	978 946	1 097 622	467 666	133 840	388 462	116 619	166 415 794,38 U20
2005	7 219 848	21 717 198	38 423 864	20 774 829	9 452 335	9 246 808	3 106 212	3 788 075	2 361 323	1 267 037	1 843 207	1 142 417	486 751	139 302	404 315	121 378	173 207 351,79 U21
2006	7 787 917	28 699 906	30 017 576	17 625 018	11 455 204	6 417 573	6 007 596	4 395 849	2 184 499	2 271 106	1 918 430	1 189 040	506 616	144 987	420 816	126 332	180 276 077,91 U22
2007	7 988 513	33 077 635	28 099 900	17 853 866	12 030 073	7 757 696	6 036 415	3 838 510	2 911 746	2 363 792	1 996 723	1 237 565	527 291	150 904	437 989	131 487	187 633 284,22 U23
2008	11 303 765	32 470 769	30 653 715	24 411 831	17 938 153	11 042 290	5 782 686	4 501 170	3 030 577	2 460 260	2 078 210	1 288 071	548 811	157 063	455 864	136 853	195 290 743,81 U24
2009	6 858 216	25 294 408	26 186 021	26 733 526	16 327 585	9 069 776	7 152 779	4 684 867	3 154 257	2 560 665	2 163 024	1 340 639	571 208	163 473	474 468	142 439	203 260 710,26 U25
2010	5 500 928	20 287 563	25 915 020	19 884 626	13 790 435	9 424 676	7 444 690	4 876 060	3 282 985	2 665 168	2 251 299	1 395 351	594 519	170 144	493 832	148 252	211 555 937,21 U26
2011	7 504 970	20 467 646	23 760 251	19 936 570	15 622 446	9 809 304	7 748 513	5 075 056	3 416 966	2 773 936	2 343 176	1 452 296	618 782	177 088	513 985	154 302	220 189 698,79 U27
2012	7 850 791	19 317 610	30 810 865	24 903 217	16 260 010	10 209 629	8 064 736	5 282 172	3 556 415	2 887 142	2 438 803	1 511 566	644 035	184 315	534 961	160 599	229 175 810,87 U28
2013	8 649 699	20 835 199	31 933 199	25 919 537	16 923 594	10 626 292	8 393 864	5 497 742	3 701 555	3 004 969	2 538 332	1 573 254	670 319	191 837	556 794	167 153	238 528 653,13 U29
2014	8 458 092	29 227 433	33 236 417	26 977 333	17 614 259	11 059 959	8 736 424	5 722 109	3 852 618	3 127 604	2 641 923	1 637 460	697 675	199 666	579 517	173 975	248 263 192,13 U30

Tableau 10: Calcul des règlements futurs ( $z(i,j)$ ) par la méthode de Taylor, avec  $i+j=16, \dots, 30$  et  $i=0, \dots, 15, j=0, \dots, 15$

Puis, en cumulant on trouve nos ( $CFP_i$ ) et donc nos provisions par année de survenance et donc la provision totale.

<b>Année</b>	<b>Réserves</b>
1999	-
2000	99 376,04
2001	447 966,25
2002	589 798,22
2003	1 063 196,51
2004	2 204 208,43
2005	4 137 371,21
2006	6 577 326,93
2007	9 757 498,85
2008	14 656 880,40
2009	22 407 818,43
2010	32 746 974,46
2011	49 705 849,91
2012	76 637 601,41
2013	111 698 440,04
2014	145 484 372,74
<b>RESERVE TOTALE</b>	<b>478 214 679,84</b>

Tableau 11 : Provision Totale sous le modèle de Taylor

## Chapitre II : Méthodes stochastiques

De manière générale, les méthodes stochastiques supposent que les chargements cumulés  $(C_{i,j})_{0 \leq i,j \leq n}$  sont des variables aléatoires et ce pour mesurer l'incertitude qui frappe le calcul de la réserve à constituer pour faire face aux engagements de l'assureur.

### II.1 Application de GLM

Dans ce cadre, on se basera sur le triangle des règlements décumulés  $(Z_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ , devant vérifier les hypothèses du modèle GLM et qu'on estimera tout en se basant sur nos variables explicatives qui sont les années de survénance et de développement.

Année de survénance	Année de développement	charges non cumulées
0	0	5590200
0	1	19260600
0	2	11974200
0	3	9370912,596
0	4	7479600
0	5	6281835,948
0	6	5769891,938
0	7	3191922,026
0	8	3082862,994
0	9	1225590,144
0	10	2257217,22
0	11	2266251,57
0	12	547493,178
0	13	13236,144
0	14	385756,53
0	15	83077,074
1	0	6016800
1	1	15750600
1	2	14669521,61
1	3	11632200
1	4	8340579,816
1	5	7460138,587
1	6	8224670,862
1	7	2456705,49
1	8	1433924,94
1	9	3793593,144
1	10	4084869,33
1	11	157966,056
1	12	77563,854

Tableau 12 : Extrait de la base servant comme support de calcul des paramètres de GLM

Cette base nous permettra de calculer les paramètres associés aux variables explicatives du modèle et ce dans le cadre du GLM. Mais avant, il faut voir le comportement de nos règlements et ce pour détecter la loi, figurant dans la famille exponentielle, qui s'ajuste mieux.

Dans ce cadre, notre recherche à travers le principe du Q-Q plot, a abouti à 3 lois : Gamma, Normal et log normal.

Il est à noter qu'en cas d'usage de la log normale, on régressera le  $\log(\text{règlements})$  (qui suivent une loi normale) sur les années de survenance et développement et ce pour obtenir les paramètres de régression ( $E(\log(\text{règlements})) = \mu + \alpha_i + \beta_j$ ) puis on déduit les valeurs des règlements moyens suivant la log normale à travers la propriété de l'annexe C.

### Distribution selon la loi gamma

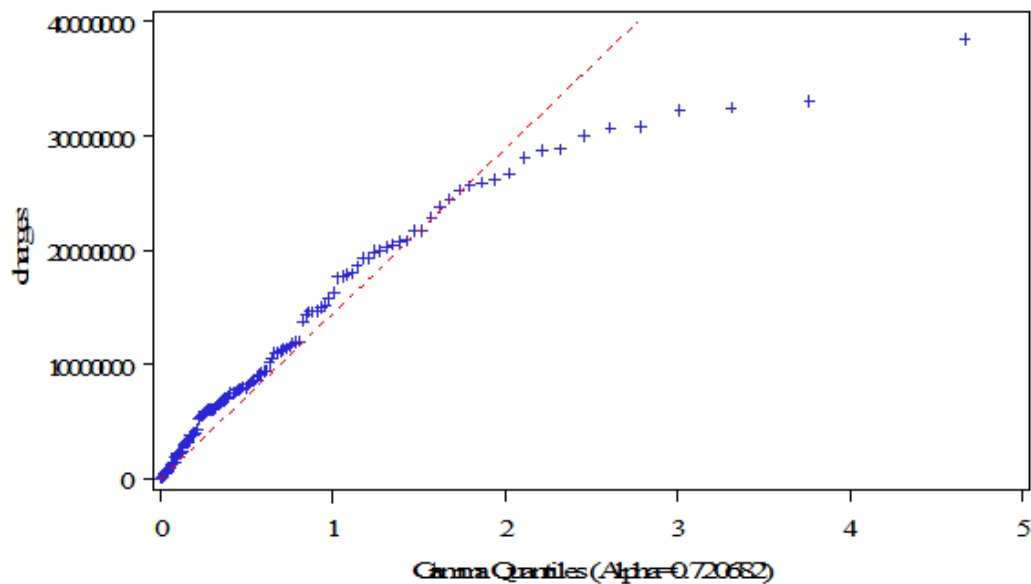


Figure 9: Q-Q-Plot selon la distribution gamma

## Distribution selon la loi lognormal

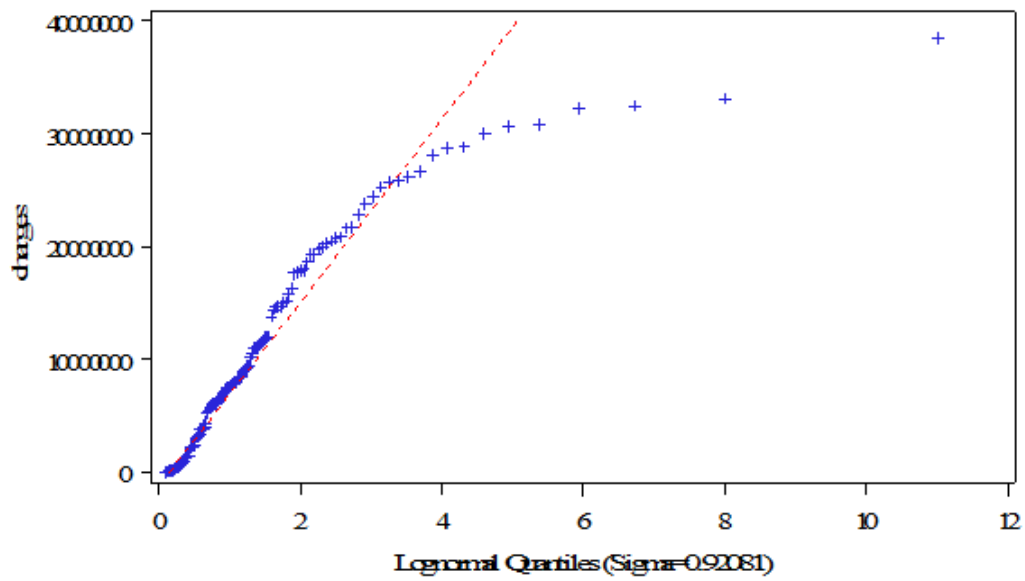


Figure 10 : QQ-Plot selon la distribution logNormale

## Distribution selon la loi normale

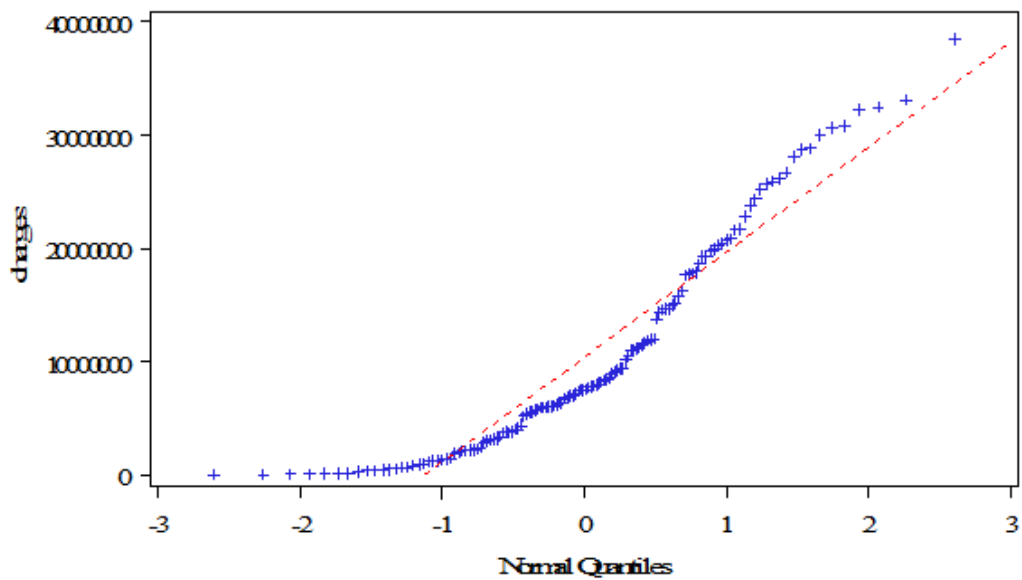


Figure 11: QQ-Plot selon la distribution normale

On remarque que pour les trois distributions, les nuages de points s'ajuste vraisemblablement à leurs droites de références, c'est ainsi qu'il faut trancher par un test plus fort, il s'agit du test de Kolmogorov Smirnov (Annexe E). L'implémentation de ce test est effectuée sur le logiciel SAS comme le montre les sorties suivantes :

Goodness-of-Fit Tests for Gamma Distribution				
Test	Statistique		p Value	
Kolmogorov-Smirnov	D	0.06885032	Pr > D	>0.250
Cramer-von Mises	W-Sq	0.10432308	Pr > W-Sq	>0.250
Anderson-Darling	A-Sq	0.93533519	Pr > A-Sq	0.142

*Tableau 13: Test de Kolmogorov Smirnov de la distribution Gamma*

Goodness-of-Fit Tests for Lognormal Distribution				
Test	Statistique		p Value	
Kolmogorov-Smirnov	D	0.07902786	Pr > D	0.020
Cramer-von Mises	W-Sq	0.17471287	Pr > W-Sq	0.004
Anderson-Darling	A-Sq	1.31837200	Pr > A-Sq	<0.001

*Tableau 14: Test de Kolmogorov Smirnov de la distribution LogNormale*

Goodness-of-Fit Tests for Normal Distribution				
Test	Statistique		p-Value	
Kolmogorov-Smirnov	D	0.15240299	Pr > D	<0.010
Cramer-von Mises	W-Sq	0.82467408	Pr > W-Sq	<0.005
Anderson-Darling	A-Sq	4.82727322	Pr > A-Sq	<0.005

*Tableau 15 : Test de Kolmogorov Smirnov de la distribution Normale*

Il est clair que la distribution Gamma qui s'ajuste mieux à notre distribution vu qu'elle a une  $P\_value > 0.05$ . En général, cette loi s'adapte avec les phénomènes d'ordre de grandeur positive.

Pour résumer, la loi exponentielle prise est la loi gamma, la fonction de lien est la fonction logarithme et ce pour avoir un modèle multiplicatif, les variables explicatives sont :

- L'année de survenance : notée sous SAS par « annee-surv »
- L'année de développement : notée sous SAS par « annee-develop »

Ainsi, et par le moyen de la procédure « Genmod » sur SAS, on obtient nos paramètres  $\alpha_i$  et  $\beta_j$  associés respectivement aux variables explicatives précédentes :

Partie III. Le cadre Pratique de l'évaluation des provisions

Analyse des valeurs estimées du paramètre de vraisemblance maximum								
Paramètre		DDL	Valeur estimée	Erreur type	Intervalle de confiance de Wald à 95 %		Khi-2 de Wald	Pr > Khi-2
<b>Intercept</b>		1	11.6095	0.6107	10.4125	12.8065	361.35	<.0001
<b>annee_surv</b>	1	1	-0.2819	0.4469	-1.1579	0.5940	0.40	<.0001
<b>annee_surv</b>	2	1	-0.4075	0.4456	-1.2809	0.4659	0.84	<.0001
<b>annee_surv</b>	3	1	-0.2809	0.4482	-1.1593	0.5975	0.39	<.0001
<b>annee_surv</b>	4	1	-0.2401	0.4467	-1.1157	0.6355	0.29	<.0001
<b>annee_surv</b>	5	1	-0.2701	0.4470	-1.1461	0.6059	0.37	<.0001
<b>annee_surv</b>	6	1	-0.2006	0.4481	-1.0789	0.6776	0.20	<.0001
<b>annee_surv</b>	7	1	-0.2324	0.4493	-1.1130	0.6482	0.27	<.0001
<b>annee_surv</b>	8	1	-0.1654	0.4511	-1.0495	0.7187	0.13	<.0001
<b>annee_surv</b>	9	1	-0.1096	0.4535	-0.9984	0.7792	0.06	<.0001
<b>annee_surv</b>	10	1	0.1155	0.4560	-0.7783	1.0093	0.06	<.0001
<b>annee_surv</b>	11	1	-0.0125	0.4617	-0.9175	0.8924	0.00	<.0001
<b>annee_surv</b>	12	1	-0.1903	0.4677	-1.1070	0.7265	0.17	<.0001
<b>annee_surv</b>	13	1	-0.1679	0.4747	-1.0982	0.7624	0.13	<.0001
<b>annee_surv</b>	14	1	-0.0826	0.4888	-1.0407	0.8755	0.03	<.0001
<b>annee_surv</b>	15	1	-0.0870	0.5142	-1.0948	0.9207	0.03	<.0001
<b>annee_surv</b>	16	0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	.	.
<b>annee_develop</b>	1	1	4.3412	0.4469	3.4652	5.2172	94.35	<.0001
<b>annee_develop</b>	2	1	5.4527	0.4466	4.5773	6.3280	149.06	<.0001
<b>annee_develop</b>	3	1	5.5548	0.4486	4.6756	6.4340	153.34	<.0001
<b>annee_develop</b>	4	1	5.3453	0.4491	4.4650	6.2256	141.64	<.0001
<b>annee_develop</b>	5	1	4.9108	0.4495	4.0299	5.7918	119.37	<.0001
<b>annee_develop</b>	6	1	4.4515	0.4499	3.5697	5.3333	97.89	<.0001
<b>annee_develop</b>	7	1	4.2434	0.4510	3.3594	5.1274	88.51	<.0001
<b>annee_develop</b>	8	1	3.8197	0.4534	2.9311	4.7083	70.98	<.0001
<b>annee_develop</b>	9	1	3.3907	0.4541	2.5007	4.2807	55.75	<.0001
<b>annee_develop</b>	10	1	3.1658	0.4598	2.2646	4.0669	47.41	<.0001
<b>annee_develop</b>	11	1	2.9810	0.4614	2.0767	3.8853	41.74	<.0001
<b>annee_develop</b>	12	1	2.3960	0.4610	1.4925	3.2995	27.01	<.0001
<b>annee_develop</b>	13	1	1.4847	0.4733	0.5570	2.4123	9.84	<.0001
<b>annee_develop</b>	14	1	0.2298	0.5042	-0.7583	1.2179	0.21	<.0001
<b>annee_develop</b>	15	1	1.2775	0.5128	0.2723	2.2826	6.21	<.0001

<b>annee_develop</b>	16	0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	.	.
<b>Scale</b>		1	5.7725	0.6808	4.5812	7.2736		

*Tableau 16 : Paramètres de la loi Gamma*

Ainsi, on déduit que le test de Wald rejette la nullité de tous les paramètres de la modélisation et donc ces variables sont significatives au seuil de 5%.

Pour le cas de la loi gamma( $\alpha, \beta$ ), le scale n'est d'autre que le  $1/\varphi$  tel que  $\varphi = (1/\beta)$ , ce qui revient à dire que le scale est  $\beta$ . Pour les autres lois, le scale est  $\sqrt{\varphi}$ .

Il est à noter qu'on a  $\alpha_{16} = \beta_{16} = 0$ , pour permettre l'identifiabilité du modèle, mais aussi le logiciel SAS prend par défaut une classe de référence qui est dans notre cas l'ensemble des sinistres survenus à la 16<sup>ème</sup> année (2014) et réglés après 16 ans, et dont le règlement décumulé estimé sera :

$$E(z_{2014,16}) = \exp(\text{intercept} + \alpha_{16} + \beta_{16}) = \exp(\text{intercept}).$$

Jusqu'à maintenant, on a obtenu la significativité des paramètres non celle du modèle. Pour ce faire, on se basera sur la statistique de la déviance :

$$D = 2(\widetilde{l}_{satur} - \hat{l}) = 2 \sum_{i=1}^n \left( \frac{z_{i,j}(\widetilde{\theta}_{i,j} - \widehat{\theta}_{i,j}) - b(\widetilde{\theta}_{i,j}) + b(\widehat{\theta}_{i,j})}{\varphi} \right) = \sum_{i=1}^n (r_i^D)^2 \sim X_{n-p}^2$$

Avec :

- n est le nombre des règlements observés
- p est le nombre de paramètres du modèle considéré

$$-r_i^D \text{ est le résidu de déviance } \left( \sqrt{2 \left( \frac{z_{i,j}(\widetilde{\theta}_{i,j} - \widehat{\theta}_{i,j}) - b(\widetilde{\theta}_{i,j}) + b(\widehat{\theta}_{i,j})}{\varphi} \right)} \right)$$

-  $\widetilde{l}_{satur}$  est la log-vraisemblance du modèle saturé qui est parfait et pour lequel les règlements prédits sont les mêmes que les règlements observés et qui ne détient pas forcément les paramètres prises dans le modèle considéré

- $\hat{l}$  est la log-vraisemblance du modèle considéré.
- $\widetilde{\theta}_{i,j}$  le paramètre obtenu par le modèle parfait.
- $\widehat{\theta}_{i,j}$  le paramètre obtenu par le modèle considéré.

On rappelle que la fonction de densité d'une loi exponentielle est comme suit :

$$f(Z_{i,j}/\theta_{i,j}; \varphi) = \exp\left(-\frac{w_{i,j}}{\varphi}(Z_{i,j} \theta_{i,j} - b(\theta_{i,j})) + c(Z_{i,j}; \varphi)\right)$$

Pour le cas de la loi gamma, on a :  $\theta = (1/\alpha)$  et  $\varphi = (1/\beta)$ .

Ainsi, pour que le modèle soit validé, il faut que :

$D_{observé} < X_{n-p,0.95}^2$  , ou bien  $P\_value > 0.05$  (on suppose qu'on travaille avec un niveau de confiance de 95%) et ce pour accepter  $H_0$  tel que :

$H_0$  : Le modèle considéré à p paramètres est adéquat.

Dans ce cadre, on obtient la sortie suivante et ce sur le logiciel SAS :

Critère d'évaluation de l'adéquation			
Critère	DDL	Valeur	Valeur/DDL
Deviance	105	21.8223	0.2078
Scaled Deviance	105	125.9150	1.1991
Pearson Chi-Square	105	21.0419	0.2003
Scaled Pearson X2	105	121.4123	1.1563
Log Likelihood		-2186.8704	
Full Log Likelihood		-2186.8704	
AIC (smaller is better)		4437.7408	
AICC (smaller is better)		4458.2457	
BIC (smaller is better)		4530.9458	

*Tableau 17 : Sortie informant sur la statistique de la déviance du modèle*

Il est à noter que la valeur  $D_{observé}$  est le « scaled » « Deviance » et non « Deviance » qui traduit  $\varphi D_{observé}$ . Dans notre cas, on a 136 observations et 31 paramètres (un paramètre regroupe  $\alpha_{16}$  et  $\beta_{16}$  et l'intercept ce qui laisse 30 autres paramètres pour les divers variables explicatives).

Suite à cette sortie, on s'est ramené au calcul de la P-value pour avoir le droit de valider statistiquement le modèle :

Critère d'évaluation de l'adéquation				
Criterion	DF	Valeur	Value/DF	P_value
Deviance	105	21.8223	0.2078	1
Scaled Deviance	105	125.9150	1.1991	0.072893
Pearson Chi-Square	105	23.2849	0.2003	1
Scaled Pearson X2	105	134.4123	1.1563	0.091471
Log Likelihood		-2186.8704		
Full Log Likelihood		-2186.8704		
AIC (smaller is better)		4437.7408		
AICC (smaller is better)		4458.2457		
BIC (smaller is better)		4530.9458		

Tableau 18 : Calcul de la P-value pour la statistique de Déviance

Etant donné qu'on a trouvé une P-value > 0.05, alors on accepte H0, ce qui revient à dire que notre modèle est statistiquement valide.

Ainsi, on peut calculer nos règlements estimés et ce comme suit :

$$E(z_{i,j}) = \exp(\text{intercept} + \alpha_i + \beta_j), \text{ avec } i=1999\dots 2014 \text{ et } j=1 \dots 16$$

		Beta1	Beta2	Beta3	Beta4	Beta5	Beta6	Beta7	Beta8	Beta9	Beta10	Beta11	Beta12	Beta13	Beta14	Beta15	Beta16	
Intercept	11,6095	4,341174	5,452655	5,554805	5,345285	4,910826	4,451507	4,243378	3,819730	3,390668	3,165756	2,980979	2,396012	1,484677	0,229805	1,277459	-	
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	
alpha1	-0,281937	1999	5590 200	19 260 600	11 974 200	9 370 913	7 479 600	6 281 836	5 769 892	3 191 922	3 082 863	1 225 590	2 257 217	2 266 252	547 493	13 236	385 757	83 077
alpha2	-0,407470	2000	6 016 800	15 750 600	14 669 522	11 632 200	8 340 580	7 460 139	8 224 671	2 456 705	1 433 925	3 793 593	4 084 869	157 966	77 564	26 888	185 510	73 276
alpha3	-0,280913	2001	6 022 800	15 021 347	11 895 000	11 077 657	10 500 611	8 979 564	5 173 486	2 191 998	3 722 983	2 949 843	527 020	202 336	478 709	270 177	298 345	83 162
alpha4	-0,240127	2002	6 399 000	14 621 400	15 141 034	14 603 010	17 693 814	6 739 979	3 237 962	6 980 819	4 043 398	1 456 253	898 185	1 281 761	368 075	109 004	310 765	86 624
alpha5	-0,270118	2003	6 142 800	22 826 471	21 678 184	32 257 052	14 409 488	5 922 592	8 002 182	5 452 839	1 377 986	971 411	652 061	692 018	371 023	105 783	301 583	84 065
alpha6	-0,200639	2004	6 984 307	18 633 482	28 820 583	25 638 998	11 142 551	7 539 083	10 099 014	3 351 403	2 029 285	1 898 776	978 946	989 380	397 718	113 394	323 282	90 113
alpha7	-0,232392	2005	7 219 848	21 717 198	38 423 864	20 774 829	9 452 335	9 246 808	3 106 212	3 788 075	2 361 323	1 267 037	1 720 365	958 457	385 287	109 850	313 178	87 297
alpha8	-0,165425	2006	7 787 917	28 699 906	30 017 576	17 625 018	11 455 204	6 417 573	6 007 596	4 395 849	2 184 499	2 212 847	1 839 518	1 024 840	411 972	117 458	334 869	93 343
alpha9	-0,109629	2007	7 988 513	33 077 635	28 099 900	17 853 866	12 030 073	7 757 696	6 036 415	3 838 510	2 929 959	2 339 824	1 945 073	1 083 647	435 612	124 198	354 084	98 699
alpha10	-0,115477	2008	11 303 765	32 470 769	30 653 715	24 411 831	17 938 153	11 042 290	5 782 686	5 635 898	3 669 643	2 930 526	2 436 117	1 357 220	545 585	155 553	443 475	123 616
alpha11	-0,012548	2009	6 858 216	25 294 408	26 186 021	26 733 526	16 327 585	9 069 776	7 574 437	4 958 642	3 228 669	2 578 369	2 143 373	1 194 125	480 023	136 860	390 183	108 761
alpha12	-0,190258	2010	5 500 928	20 287 563	25 915 020	19 884 626	13 790 435	7 808 390	6 341 206	4 151 301	2 702 993	2 158 573	1 794 400	999 704	401 868	114 578	326 655	91 053
alpha13	-0,167871	2011	7 504 970	20 467 646	23 760 251	19 936 570	12 640 487	7 985 170	6 484 769	4 245 285	2 764 188	2 207 442	1 835 025	1 022 337	410 966	117 172	334 051	93 115
alpha14	-0,082621	2012	7 850 791	19 317 610	30 810 865	21 255 433	13 765 343	8 695 756	7 061 838	4 623 066	3 010 169	2 403 879	1 998 321	1 113 313	447 537	127 598	363 777	101 401
alpha15	-0,087046	2013	8 649 699	20 835 199	26 094 076	21 161 600	13 704 575	8 657 369	7 030 663	4 602 657	2 996 880	2 393 267	1 989 499	1 108 398	445 562	127 035	362 171	100 953
alpha16	-	2014	8 458 092	25 702 900	28 467 242	23 086 174	14 950 959	9 444 726	7 670 078	5 021 253	3 269 436	2 610 926	2 170 437	1 209 203	486 084	138 589	395 110	110 135

Tableau 19 : Calcul des règlements estimés par la méthode de GLM-Gamma

Vu que notre table est décumulée, il faut alors cumuler pour obtenir nos ( $CFP_i$ ) et donc nos provisions par année de survenance et donc la provision totale pour le cas du modèle de GLM :

<b>Année</b>	<b>Réserves</b>
1999	.
2000	73 276,11
2001	381 506,97
2002	506 392,53
2003	862 453,91
2004	1 913 886,67
2005	3 574 433,08
2006	6 034 848,17
2007	9 311 097,92
2008	17 297 632,30
2009	22 793 442,58
2010	26 890 720,32
2011	40 140 006,93
2012	64 967 431,73
2013	90 774 704,95
2014	124 733 252,75
<b>RESERVE TOTALE</b>	<b>410 255 086,91</b>

Tableau 20 : Provision Totale sous le modèle de GLM-Gamma

## II.2 Méthode de Mack

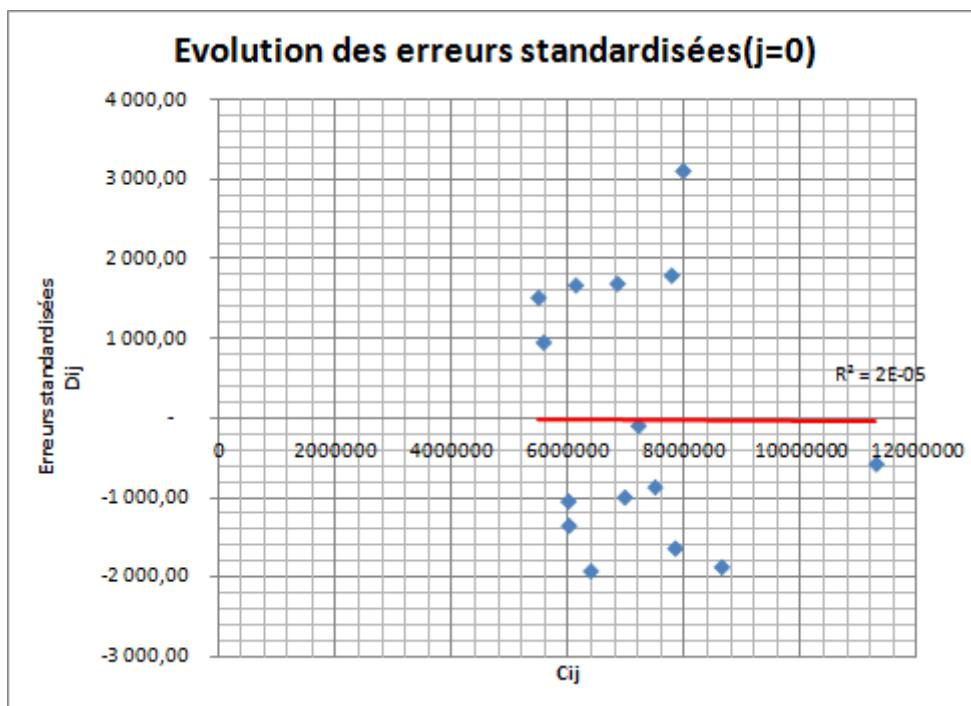
Après avoir calculé la réserve de la branche pilote de la compagnie et ce à travers divers méthodes, il est temps de mesurer l'incertitude qui frappe le calcul de nos réserves annuelles et même totale et ce pour quantifier le risque de provisionnement à l'ultime et de constituer les intervalles de confiance permettant de cerner leur évolution.

### II.2.1 Test des hypothèses

Comme mentionné auparavant, ce n'est que la version stochastique de la méthode de CL, ce qui sous-entend qu'elles ont la même réserve, sauf que Mack s'applique dans une optique de gestion des risques.

Etant donné que les deux premières hypothèses se sont vérifiées auparavant, alors on ne testera que la troisième tout en visualisant le nuage de point  $(C_{i,j}, D_{i,j})$  qui ne doit présenter aucune structure surtout celle linéaire.

Ceci a été effectué pour les différentes années de développement, mais on n'a mentionné dans le rapport que les premières années :



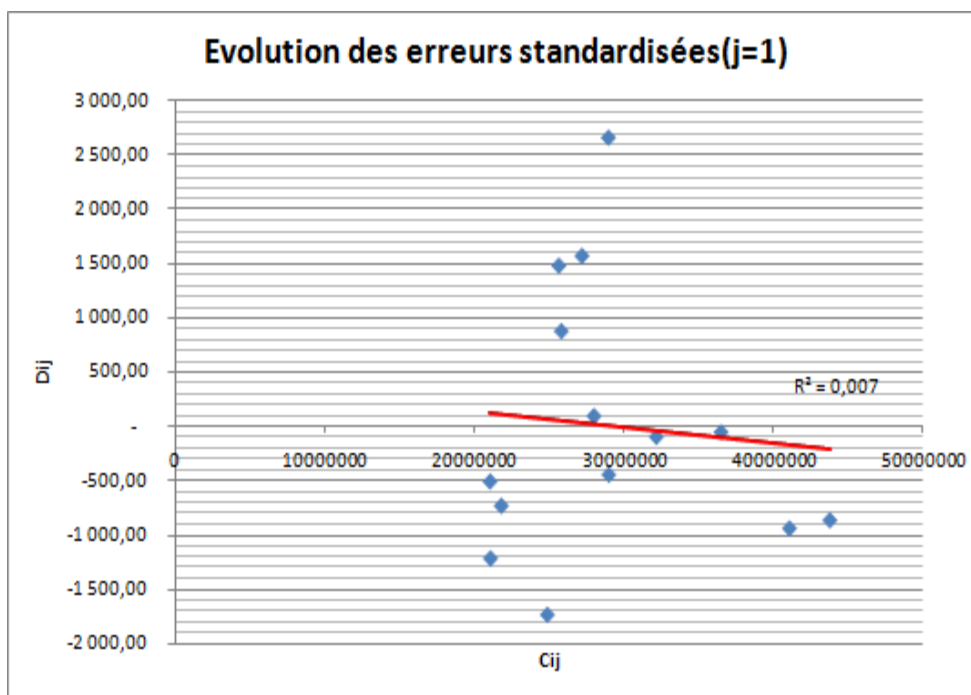


Figure 12: Nuage de points  $(C(i,j), D(i,j))$ ,  $j=0,1$

Ainsi, Aucune structure n'est prise par nos nuages de points, ce qui ne pourra que traduire la robustesse et l'exhaustivité des hypothèses de Mack permettant d'incorporer l'information expliquant l'évolution des  $(C_{i,j})$ .

## II.2.2 Application

En premier lieu, on calculera nos volatilités du triangle de règlements par année de déroulement qui serviront comme outil de calculs ultérieurs, accompagnées des coefficients de passage calculés avec CL auparavant:

$f(j)$	4,04471	1,831361	1,366690	1,173694	1,092766	1,067666	1,042650	1,026811	1,020536	1,016884	1,010248	1,004418	1,001287	1,003517	1,001056
$\sigma(j)^2$	2 604 104,61	1 522 697,63	606 865,97	228 747,00	59 766,15	79 751,72	27 505,98	22 055,67	20 915,52	28 866,18	10 903,30	602,43	269,27	300,23	269,27

Tableau 21 : Volatilités du triangle des règlements,  $j=0...14$

Il est à noter que la dernière volatilité n'est pas définie vu qu'elle nécessite l'information de l'année de déroulement qui suit ce qui n'est pas disponible.

Puis, nous avons calculé les erreurs quadratiques moyennes par année de survenance ainsi que pour toute la réserve :

Année	MSEP(Ri)
1999	.
2000	47 025 032 378,8
2001	78 198 737 230,7
2002	135 087 001 722,8
2003	296 030 694 395,0
2004	1 932 383 014 539,2
2005	6 251 072 565 205,1
2006	9 254 610 425 238,8
2007	13 088 774 425 995,6
2008	21 190 540 762 146,0
2009	31 009 842 174 720,7
2010	33 773 720 208 745,1
2011	64 289 086 018 917,1
2012	163 801 250 494 462,0
2013	368 494 733 114 161,0
2014	791 460 023 127 133,0
<b>MSEP(R_Totale)</b>	<b>1 875 632 401 711 310,0</b>

Tableau 22 : Erreur quadratique moyenne par année de survenance et Totale

Dans le même cadre, il est intéressant de calculer une grandeur importante dite le coefficient de variation qui est défini comme suit :

$$CV_i = \frac{SE(\widehat{R}_i)}{\widehat{R}_i}, \text{ avec } SE(\widehat{R}_i) = \sqrt{MSEP(R_i)} \text{ et } i=1999 \dots\dots 2014$$

Ce coefficient renseigne sur la stabilité des réserves par année de survenance et même pour la réserve totale, s'il est inférieur à 15% alors on dit qu'il y a une stabilité de nos réserves sinon ce n'est pas le cas.

Année	Coef_varia
1999	.
2000	244%
2001	77%
2002	67%
2003	44%
2004	57%
2005	56%
2006	45%
2007	35%
2008	26%
2009	24%
2010	21%
2011	20%
2012	20%
2013	23%
2014	23%
<b>Coef_varia_Totale</b>	<b>11%</b>

Tableau 23 : Coefficients de variation par année de survenance

Ainsi, on remarque qu'il y'a une instabilité totale au niveau des premières années de survenance, mais avec un degré moins tout en avançant dans les années de survenance. On commence à s'approcher de la stabilité des réserves, par année de survenance, à partir de 2011, malgré qu'on ait toujours un coefficient de variation de supérieur à 15 %. Le plus important c'est la stabilité de la réserve totale avec un coefficient de variation de 11%, ce qui montre que nos calculs sont dans le bon sens.

### II.2.3 Construction des Intervalles de confiance

Dans ce cadre, deux lois sont les plus utilisées pour l'approximation de l'évolution de la réserve et donc pour la constitution des intervalles de confiance dans l'assurance non vie : la loi lognormale et normale. Cette dernière n'est pas toujours souhaitable vu qu'elle communique des valeurs négatives que ceci concerne les réserves ou les bornes des intervalles de confiance.

Il est à noter qu'on justifiera notre choix de ces deux lois dans le chapitre de Bootstrap, tout en passant par les tests de QQ-Plot et de Kolmogorov Smirnov. Ces distributions sont indispensables vu que Mack ne donne que les moments d'ordre 1 et 2 et non pas la distribution de la réserve.

### II.2.3.1 Distribution normale de la réserve :

Dans un premier lieu, on supposera une évolution normale des réserves, ce qui veut dire que l'intervalle de confiance sera de la forme suivante :

$$IC_{95\%}(R_i) = [\widehat{R}_i \pm 1.96 * SE(\widehat{R}_i)]$$

Année de survenance	Intervalle de confiance	
	Borne inférieure	Borne supérieure
1999	.	.
2000	- 336 027,64	514 034,39
2001	- 186 513,73	909 676,53
2002	- 171 848,25	1 268 915,75
2003	- 175 118,79	2 307 939,94
2004	- 304 241,76	5 144 957,30
2005	- 452 656,92	9 348 183,93
2006	822 733,97	12 747 919,32
2007	3 131 767,07	17 313 704,30
2008	8 880 133,16	26 925 141,49
2009	12 364 944,70	34 194 045,44
2010	16 190 697,19	38 971 840,58
2011	23 907 211,88	55 337 958,16
2012	39 983 188,09	90 153 254,22
2013	47 487 588,35	122 736 757,57
2014	69 365 157,96	179 646 123,23
Total	324 304 051,54	494 073 653,46

Tableau 24 : Intervalles de Confiance selon la loi normale

### II.2.3.2 Distribution lognormale de la réserve :

Dans ce cas là, on constituera des intervalles de confiance estimés tout en se basant sur la propriété de la loi lognormale mentionnée dans l'annexe C.

Si on suppose que la réserve  $R_i$  suit une loi lognormale de paramètres  $\widehat{R}_i$  et  $SE(\widehat{R}_i)^2$ , alors  $\ln(R_i)$  suit une normale de paramètres  $\mu'_i$  et  $\sigma'^2_i$ . L'objectif étant de calculer ces deux derniers paramètres suivant le système de l'annexe C, on obtient ainsi :

$$\mu'_i = \ln(\widehat{R}_i) - \frac{\sigma'^2_i}{2}$$

$$\sigma'^2_i = \ln\left(1 + \left(\frac{SE(\widehat{R}_i)}{\widehat{R}_i}\right)^2\right)$$

Du coup, l'intervalle de confiance de  $\ln(R_i)$  est comme suit :

$$IC_{95\%}(\ln(R_i)) = [\mu'_i \pm 1.96 * \sigma'_i]$$

Ainsi, on a tous les ingrédients pour calculer l'intervalle de confiance estimé de notre réserve:

$$IC_{95\%}(R_i) = IC_{95\%}(\exp(\ln(R_i))) = [\exp(\mu'_i \pm 1.96 * \sigma'_i)]$$

Année de survenance	Intervalle de confiance	
	Borne inférieure	Borne supérieure
1999	.	.
2000	2 209,13	516 967,29
2001	74 742,04	1 094 556,40
2002	138 136,62	1 503 286,39
2003	500 069,79	2 585 756,03
2004	737 037,67	5 976 713,34
2005	1 388 251,26	10 828 373,60
2006	2 676 073,22	14 325 080,72
2007	4 915 167,13	18 895 065,50
2008	10 559 280,93	28 470 502,48
2009	14 259 305,90	35 948 693,24
2010	17 937 827,66	40 606 275,61
2011	26 224 095,05	57 511 582,93
2012	43 579 662,98	93 533 841,69
2013	53 655 005,39	128 476 822,90
2014	78 420 037,96	188 072 349,11
<b>Total</b>	<b>330 874 059,97</b>	<b>500 434 101,47</b>

Tableau 25 : Intervalles de Confiance selon la loi lognormale

### II.2.3.3 Comparaison des résultats :

Suite aux résultats obtenus, on remarque que les intervalles de confiance communiqués par la loi lognormale sont plus fiables, raisonnables et précis surtout que la loi normale nous donne quelques intervalles dans lesquelles les bornes inférieures sont négatives ce qui n'est pas le cas des réserves de la branche pilote de la compagnie.

### II.3 Application de Bootstrap

Comme mentionné dans la méthode de Mack, nous aurons besoin de vérifier l'hypothèse stipulant que les règlements sont bien ajustés par la loi Lognormale et Normale.

On va appliquer la méthode de Bootstrap sur le modèle Gamma qui est élu comme meilleur méthode s'ajustant à notre branche pilote. Nous aurons besoin dans un premier temps des règlements non cumulés estimés par le modèle de Gamma :

Intercept																	
11,60946	Beta	4,341174451	5,452654659	5,554804874	5,345284763	4,910826304	4,451507375	4,24337759	3,81973039	3,390668376	3,16575575	2,980979469	2,396012207	1,484676694	0,229805086	1,277458983	0
Alpha		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
-0,281937	1999	6380120,985	19388251,09	21473454,2	17414398,65	11277830,69	7124360,62	5785704,87	3787639,491	2466206,118	1969477,66	1637207,553	912127,7852	366663,5179	104540,3347	298039,7515	83077
-0,40747	2000	5627435,138	17100949,29	18940153,48	15359959,34	9947344,395	6283874,142	5103144,44	3340798,021	2175258,901	1737131,29	1444060,282	804520,7858	323406,9023	92207,33493	262878,9288	
-0,280913	2001	6386653,425	19408102,21	21495440,31	17432228,8	11289377,77	7131655,067	5791628,71	3791517,557	2468731,202	1971494,16	1638883,847	913061,6891	367038,9351	104647,3708		
-0,240127	2002	6652524,359	20216044,95	22390277,15	18157917,62	11759344,94	7428539,784	6032729,27	3949355,198	2571502,376	2053565,78	1707109,184	951071,6684	382318,4529			
-0,270118	2003	6455974,761	19618759,58	21728753,84	17621439,85	11411913,74	7209062,721	5854491,59	3832671,044	2495527,043	1992892,94	1656672,446	922972,1464				
-0,200639	2004	6920479,269	21030320,59	23292127,99	18889294,6	12232995,85	7727751,571	6275719,65	4108430,018	2675079,101	2136280,7	1775869,291					
-0,232392	2005	6704180,517	20373020,43	22564135,32	18298911,95	11850655,02	7486221,621	6079572,78	3980021,529	2591469,824	2069511,5						
-0,165425	2006	7168516,794	21784070,21	24126943,27	19566307,52	12671439,76	8004722,616	6500648,29	4255680,631	2770956,854							
-0,109629	2007	7579859,16	23034079,28	25511390,6	20689057,38	13398549,73	8464047,975	6873667,16	4499879,228								
0,1154769	2008	9493435,2	28849155,96	31951877,78	25912120,72	16781085,36	10600842,22	8608961,25									
-0,012548	2009	8352625,355	25382402,31	28112275,36	22798305,56	14764531,08	9326957,167										
-0,190258	2010	6992693,558	21249769,21	23535178,28	19086401,9	12360645,55											
-0,167871	2011	7151006,383	21730858,65	24068008,8	19518513,24												
-0,082621	2012	7787362,437	23664651,28	26209780,5													
-0,087046	2013	7752984,657	23560182,25														
0	2014	8458092															

Tableau 26 : Règlements estimés non cumulés par année de survenance et année de développement

*Partie III. Le cadre Pratique de l'évaluation des provisions*

A partir du tableau ci-dessus et la formule mentionné dans le cadre théorique des résidus de Pearson, nous avons calculé ces derniers comme suit :

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1999	- 312,73	- 28,99	- 2 049,93	- 1 927,48	- 1 131,02	- 315,65	- 6,57	- 306,09	392,67	- 530,07	484,56	1 417,85	298,63	- 282,39	160,67	0,00
2000	164,14	- 326,54	- 981,30	- 951,16	- 509,45	469,24	1 381,81	- 483,70	- 502,64	1 560,29	2 197,58	- 720,84	- 432,30	- 215,11	- 150,90	
2001	- 143,98	- 995,75	- 2 070,70	- 1 521,98	- 234,75	691,97	- 256,86	- 821,45	798,27	696,78	- 868,52	- 743,79	184,32	511,70		
2002	- 98,29	- 1 244,30	- 1 532,01	- 834,25	1 730,57	- 252,63	- 1 137,86	1 525,42	917,88	- 416,82	- 619,12	339,09	- 23,04			
2003	- 123,26	724,20	- 10,85	3 486,50	887,34	- 479,14	887,62	827,58	- 707,43	- 723,58	- 780,51	- 240,40				
2004	24,26	- 522,66	1 145,51	1 553,02	- 311,77	- 67,87	1 526,18	- 373,49	- 394,84	- 162,50	- 598,01					
2005	199,16	297,80	3 338,77	578,79	- 696,68	643,47	- 1 205,90	- 96,21	- 142,97	- 557,82						
2006	231,34	1 481,75	1 199,25	- 438,87	- 341,67	- 560,98	- 193,38	67,95	- 352,31							
2007	148,43	2 092,68	512,49	- 623,32	- 373,86	- 242,79	- 319,35	- 311,78								
2008	587,55	674,27	- 229,66	- 294,73	282,45	135,58	- 963,25									
2009	- 517,08	- 17,47	- 363,30	824,17	406,78	- 84,21										
2010	- 564,13	- 208,73	490,56	182,71	406,68											
2011	132,37	- 270,98	- 62,73	94,63												
2012	22,73	- 893,60	898,73													
2013	322,05	- 561,40														
2014	- 0,00															

Tableau 27: les résidus de Pearson par année de survenance et de développement

Les résidus  $r_{2014,0}$  et  $r_{1999,15}$  sont nuls par construction, donc ces observations ne sont pas indépendantes, ils seront omis dans l'échantillon du tirage.

Nous avons ensuite procédé à une distribution avec remise de ces résidus grâce à Excel. On a classé sur chaque ligne des résidus bootstrappés ;

Partie III. Le cadre Pratique de l'évaluation des provisions

Ordre	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Résidus	-312,7297477	-28,99046638	-2049,927749	-1927,480852	-1131,015492	-315,6528247	-6,574070863	-306,0948447	392,6710584	-530,0681877	484,5589184	1417,850771	298,6316374	-282,389645	160,6739893
1	1199,252962	-557,8244059	-394,8444232	-84,21106976	917,8753096	-868,5151465	1417,850771	-6,574070863	406,6786713	-868,5151465	-963,2502185	-416,818898	1481,750782	-483,696129	-162,495813
2	-311,7768388	-242,7908549	-1137,859558	-821,4533647	297,8030176	-1244,298087	-723,5837852	-352,3072472	1730,574533	-2049,927749	-1927,480852	-215,109777	132,3655491	-123,255368	1145,510804
3	-150,9003649	-483,6961289	-598,0136652	-530,0681877	-319,3464077	-432,2980634	-561,4026297	-707,4278508	1199,252962	-62,73189797	827,5784328	282,4547155	-868,515146	-143,975897	512,4868052
4	406,6786713	691,9670462	-416,8188976	-326,5397159	-294,7294916	1526,180649	-17,46570655	887,6200539	-363,3001548	-315,6528247	490,5569147	-951,158369	824,1718782	-479,137796	643,4665663
5	-6,574070863	-326,5397159	-229,6577584	1730,574533	-598,0136652	643,4665663	184,3228495	1526,180649	469,2358992	-17,46570655	587,5516468	-326,539716	-6,57407086	164,1351164	132,3655491
6	-341,6682582	94,62629625	512,4868052	-363,3001548	-530,0681877	-522,6558366	392,6710584	1560,286451	-696,6841238	-696,6841238	199,1577796	512,4868052	1560,286451	322,0473908	1199,252962
7	-723,5837852	392,6710584	67,94628109	-1521,983009	587,5516468	887,3413437	-560,9765771	-557,8244059	917,8753096	297,8030176	2092,676317	-438,869991	-0,00014648	184,3228495	22,72945579
8	-208,7328907	160,6739893	164,1351164	-294,7294916	406,78422	587,5516468	-1521,983009	-1205,899545	-963,2502185	-234,7543522	1381,809219	2092,676317	-256,855417	-1521,98301	-696,684124
9	-951,158369	587,5516468	-352,3072472	3486,504313	-311,7768388	490,5569147	587,5516468	182,7102993	-720,8363162	1730,574533	-821,4533647	1199,252962	-240,398468	-363,300155	-98,2938752
10	-234,7543522	490,5569147	22,72945579	-229,6577584	322,0473908	2197,578197	-17,46570655	-162,4958133	917,8753096	587,5516468	1145,510804	484,5589184	1417,850771	724,2016686	231,3432813
11	-282,3896455	643,4665663	-215,1097768	-98,29387521	-142,9659796	148,4310017	24,26276863	917,8753096	1199,252962	-150,9003649	-242,7908549	-319,346408	-720,836316	-373,859611	578,7933264
12	-394,8444232	-723,5837852	-17,46570655	887,3413437	148,4310017	-270,9805713	297,8030176	-162,4958133	-557,8244059	-319,3464077	-142,9659796	490,5569147	1145,510804	674,2726499	1525,419262
13	-341,6682582	887,6200539	-256,8554171	578,7933264	1560,286451	674,2726499	643,4665663	-1521,983009	22,72945579	1553,019155	-282,3896455	-834,248215	-780,512743	-2049,92775	-2049,92775
14	-28,99046638	-981,2968153	-598,0136652	-341,6682582	-373,8596109	-311,7768388	406,6786713	-326,5397159	182,7102993	-252,633202	-995,7535389	-720,836316	-373,859611	-509,446604	-995,753539
15	-315,6528247	164,1351164	-373,8596109	-517,0802966	1553,019155	-564,1287052	2092,676317	0,000256739	696,7803776	511,6963527	-17,46570655	1145,510804	696,7803776	-270,980571	-208,732891
16	-373,8596109	724,2016686	-780,5127433	-294,7294916	-373,8596109	-1131,015492	-557,8244059	-834,2482152	-432,2980634	-150,9003649	-743,7931139	-1137,85956	184,3228495	3338,769322	-1927,48085
17	-564,1287052	184,3228495	-311,7721046	-2049,927749	1381,809219	-2049,927749	824,1718782	674,2726499	298,6316374	322,0473908	-981,2968153	-62,731898	392,6710584	-96,2137639	132,3655491
18	484,5589184	-479,1377961	-373,8596109	-522,6558366	-373,8596109	-868,5151465	-67,86920171	-479,1377961	-1521,983009	827,5784328	2092,676317	-432,298063	-311,776839	-1521,98301	-311,776839
19	1730,574533	-282,3896455	-502,6415881	-868,5151465	587,5516468	-252,633202	3338,769322	-2070,703793	1381,809219	135,5841496	-981,2968153	724,2016686	917,8753096	-363,300155	1560,286451
20	-707,4278508	-363,3001548	-868,5151465	-432,2980634	-743,7931139	-561,4026297	-373,8596109	-240,398468	-252,633202	164,1351164	-294,7294916	512,4868052	-10,8485818	1199,252962	917,8753096
21	-1205,899545	-821,4533647	674,2726499	-23,03620567	-394,8444232	674,2726499	-326,5397159	-720,8363162	898,7284279	-483,6961289	-438,8699909	231,3432813	-150,900365	297,8030176	-0,00014648
22	-502,6415881	-509,4466045	-951,158369	1526,180649	-394,8444232	406,78422	-707,4278508	-252,633202	-96,21376391	231,3432813	-352,3072472	298,6316374	1553,019155	-1521,98301	1417,850771
23	-96,21376391	724,2016686	511,6963527	-373,8596109	-306,0948447	-311,7721046	643,4665663	199,1577796	1526,180649	-373,8596109	-707,4278508	-963,250218	339,0891474	1560,286451	587,5516468
24	182,7102993	1381,809219	-0,000146478	-252,633202	1199,252962	-215,1097768	-352,3072472	827,5784328	-312,7297477	148,4310017	-208,7328907	406,78422	-598,013665	887,6200539	282,4547155
25	-1927,480852	-373,8596109	-67,86920171	3486,504313	406,6786713	182,7102993	-294,7294916	3338,769322	-479,1377961	2197,578197	696,7803776	-530,068188	2092,676317	-10,8485818	298,6316374
26	-821,4533647	322,0473908	-432,2980634	-123,2553681	587,5516468	148,4310017	-62,73189797	674,2726499	-517,0802966	-312,7297477	-951,158369	-123,255368	67,94628109	-234,754352	-282,389645
27	182,7102993	2092,676317	469,2358992	-1521,983009	1526,180649	-821,4533647	-341,6682582	-598,0136652	-723,5837852	-1244,298087	-294,7294916	-312,729748	-0,00014648	-193,381438	-438,869991
28	-557,8244059	-834,2482152	-509,4466045	-373,8596109	469,2358992	406,6786713	1525,419262	1199,252962	297,8030176	-319,3464077	-208,7328907	406,78422	-868,515146	-294,729492	-242,790855
29	1560,286451	-234,7543522	-509,4466045	887,3413437	339,0891474	-623,3214379	696,7803776	-416,8188976	724,2016686	-6,574070863	1553,019155	182,7102993	-743,793114	132,3655491	148,4310017

Tableau 28 : Extrait du tableau des résidus ré-échantillonnés par ligne

Puis, on a passé à simuler les triangles des chargements décumulés bootstrappés. Chaque ligne traduit une itération qu'il suffit de positionner pour obtenir notre triangle simulé décumulé Bootstrappé.

Partie III. Le cadre Pratique de l'évaluation des provisions

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
Placer les règlements estimés	6380121	19388251	21473454	17414399	11277831	7124360,6	5785704,9	3787639,5	2466206,1	1969477,7	1637207,6	912127,79	366663,52	104540,33	298039,75	83077	5627435,1	17100949	18940153
Calcul des chargements boot,	9409302,2	16932034	19643767	17062981	14360284	4806163,6	9196131,1	3774845,1	3104860,8	750620,18	404696,04	514043,31	1263904,3	0	209328,38	55345,229	6060864,4	17056087	17126146
	5592606,9	18319192	16200675	13986428	12277927	3803142,6	4045233,2	3101984,1	5183927,9	0	0	706686,37	446814,49	64688,549	923408,66	0	3917451,7	16752709	20649069
	5998963,2	17258436	18702291	15202394	10205386	5970492,3	4435335,5	2410853,4	4349532	1881440,9	2696122,4	1181887,2	0	57989,043	577821,76	510163,23	4418914,9	15980355	18864142
	7407346,6	22435127	19541938	16051730	10288056	11197965	5743693,8	5515113,1	1895673,8	1526496,5	2264891,9	3720,3584	865722,23	0	649327,56	0	9732741,4	19962461	21874607
	6363515,6	17950428	20409233	24636184	9269552,4	8841869,3	6229065,7	6757870,7	3203101,6	1944966,6	2388999,9	600264,78	362682,74	157609,65	370302,1	121228,83	2944415,8	17028723	13988156
	5517104,5	19804910	23848290	15898327	9497730,2	5729313,9	6730215,9	6824247	1372122,3	991764,54	1892036,7	1401580,3	1311459,8	208666,94	952748,13	36240,7	5558663,3	18335889	19586129
	4552427,8	21117264	21788314	11063078	13250975	9492807,6	4436360,3	2702009,5	3907652,1	2387408,7	4314858,3	492983,33	366663,43	164136,88	310448,45	230563,65	4791684,3	18432721	21075071
	5852884,6	20095732	22234047	16184476	12643913	8692624	2124804,2	1440734,8	953502,65	1640027,9	3405279,6	2910746,3	211130,51	0	0	10260,327	7759418,1	17028723	19654474
	3977599,4	21975364	19840881	31963777	10230807	8433730,5	7198971,8	4143227,7	1334193,3	4398132,7	586129,95	2057478,9	221095,64	0	244378,16	230563,65	5427667,8	13873272	18573664
	5787157,3	21548276	21578781	16456024	12359346	12990026	5743693,8	3471392,4	3907652,1	2794036,4	3102927,7	1374907,6	1225211,1	338694,27	424337,03	0	5168691,5	16301253	17566423
	5666835,8	22221569	20476647	17004213	10797715	7520545,2	5844065,3	5573995,5	4349532	1757707	1326548,4	607134,78	0	0	614020,49	102661,21	6592167,1	18335889	20710490
	5382787,4	16202160	21392519	21117324	11776299	6401072,9	6502025,1	3471392,4	1590189,8	1521313	1454277,7	1380636	1060301,8	322550,87	1130812,2	291814,23	2766774,2	16237770	17940676
	5517104,5	23296628	20283200	19829736	16517660	8924095,3	7333466,7	825577,64	2501900,8	4148954,9	1275880,4	115375,85	0	0	0	0	3974746	16820288	20236201
	6306894,3	15067396	18702291	15988598	10023575	6292181,5	6763909,1	3152132,5	2753137,3	1614937,1	363106,93	223690,31	140281,25	0	0	0	7733066,6	15933175	19039073
	5582816,6	20110972	19741009	15256593	16493254	5618616,6	10819322	3787640	3560441,1	2687582,5	1614859,6	2006152,2	788583,18	16925,005	184086,17	0	2944415,8	16841532	17313106
	5436738,9	22577063	17856600	16184476	10022317	4105510,9	4443942,4	2164037,4	1787318,4	1757707	685498,89	0	478276,07	1184054,5	0	224470,62	10840578	19220251	19742332
	4955193,9	20199863	20028719	8859934,8	15918289	1652796,4	7768126,1	5099899,4	2935182	2421432,8	381604,8	852215,45	604436,63	73431,829	370302,1	313161,97	9328780,3	17005687	16689805
	7604063,6	17278507	19741009	15233326	10022317	4806163,6	5622455,7	2855148,3	76059,791	3130885,3	4314858,3	499259,87	177874,08	0	127831,37	277423,15	5586002,6	15795621	22091900
	10751362	18144830	19144240	13790036	13250975	6450044,8	13816611	0	4636221,3	2159753,9	381604,8	1603779,4	922462,23	0	1149847,2	0	7582553,4	18268993	25730565
	4593236	17788565	17448802	15610395	8779988,8	5625892,9	4887343	3319779,4	2069466,9	2199821,7	1260091,1	1401580,3	360094,4	492291,17	799135,58	686250,79	6841292,3	17856517	19742332
	3334151,2	15771220	24597997	17318267	9951845,1	8924095,3	5000262,8	2384758	3877583,5	1290667,8	1075658,4	1133073,1	275289,2	200828,08	298039,67	130385,8	6740566,7	17779702	34113520
	5110503,6	17145051	17065838	23783236	9951845,1	8210128,6	4084093,8	3295968,3	2315110,5	2294140,4	1186418,4	1197337,1	1307059,3	0	1072087,3	36240,7	6060864,4	14627966	14748061
	6137095,6	22577063	23844627	15854261	10249888	6292194,2	7333466,7	4175237,6	4862944,5	1444810,3	732029,48	0	571991,31	609023,04	618801,92	0	4369996	17648324	19516212
	6841627,1	25472646	21473454	16360146	15305220	6550200,4	4938282,9	5398261	1975090,3	2177782,9	1370126,7	1300628,6	4549,8157	391531,84	452240,3	0	4901310,3	14120054	22934773
	1511516,1	17742069	21158952	31963777	12643559	7612041,8	5076777,5	10285505	1713760,5	5053516,7	2528761,8	405884,14	1633836,5	101032,7	461071,77	0	7280352,6	20817487	22851445
	4305220	20806293	19470208	16900047	13250975	7520545,2	5634812,8	5099899,4	1654175	1530598,7	420167,97	794412,28	407806,86	28637,919	143874,72	22913,75	4869874,7	13509353	18911543
	6841627,1	28602743	23647868	11063078	16403124	4931778,5	4963873,4	2623793,7	1329878,6	223253,62	1260091,1	613454,05	366663,43	42014,899	58447,382	54745,677	6843167,4	15554917	19039073

Tableau 29 : Extrait du tableau des chargements bootstrappés décumulés

Le nombre de lignes du tableau des chargements bootstrappés, dont le tableau précédent n'est qu'un extrait, est le nombre d'itérations qui est de mille dans notre cas.

Il est à noter que dans nos simulations, il y a des règlements caduc vu que le ré-échantillonnage des résidus engendre des situations pour lesquelles les règlements bootstrappés sont négatives, et donc on est obligé de les remplacer par des zéros pour se placer dans le cadre du provisionnement.

Ainsi, on a placé ces lignes sous forme de triangles bootstrappés qu'on a cumulé puis calculé les provisions totales comme le montre l'extrait du tableau suivant :

<b>Reserve totale</b>
323 469 804,13
444 119 893,93
375 485 092,08
471 772 146,36
451 340 829,35
413 596 909,77
355 841 685,37
490 075 523,48
400 937 711,08
423 966 847,11
345 873 537,25
392 188 055,15
561 456 469,66
407 193 036,68
360 860 756,54
384 585 677,92
398 352 032,36
405 115 110,06
406 107 056,07
429 919 596,34
382 738 011,56
433 574 172,92
452 363 117,04
376 975 456,40
460 137 757,35

*Tableau 30 : Extrait du Bootstrapping des provisions sous le modèle de Gamma*

Ainsi, il y a des scénarios pour lesquels les réserves sont supérieures à celle obtenue par la méthode Glm-Gamma, d'autre le contraire, ce qui permet d'enrichir notre étude et de la rendre plus exhaustive.

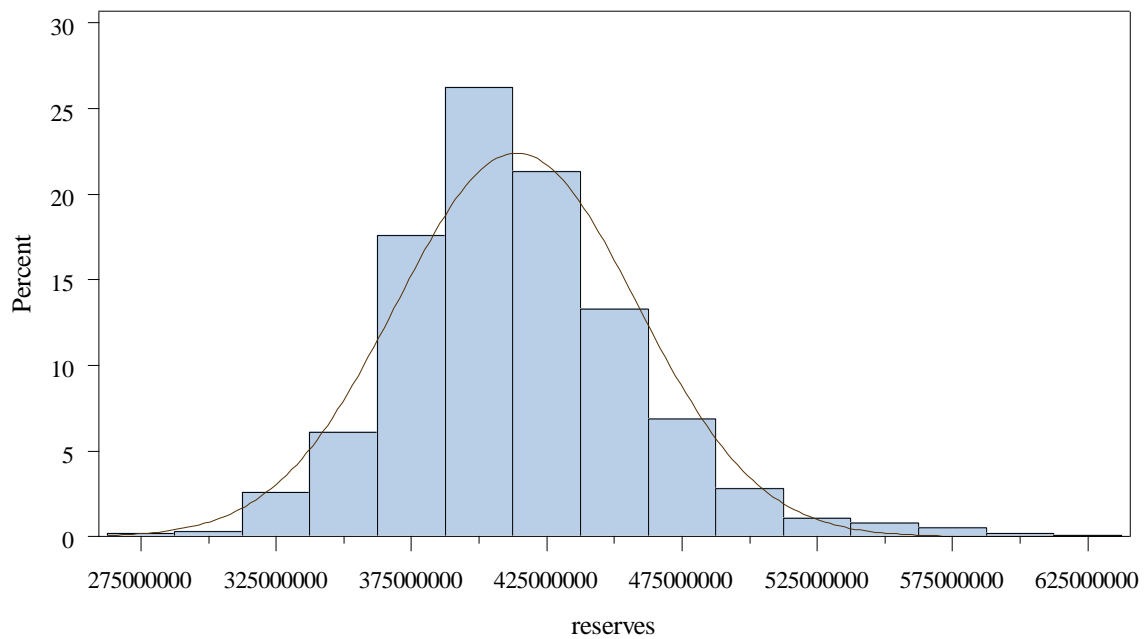
Pour s'approcher du résultat, voici les quantiles de la distribution des réserves bootstrappées :

	<b>Glm(Gamma)</b>
<b>Reserves</b>	<b>410 255 086,91</b>
<b>Erreur Standard</b>	<b>44 534 601,329</b>
<b>25% Q1</b>	<b>385 266 209</b>
<b>50% Median</b>	<b>409 930 430</b>
<b>75% Q3</b>	<b>438 404 193</b>
<b>Value At Risk(95%)</b>	<b>490 588 710</b>
<b>Value At Risk(99,5%)</b>	<b>568 771 875,32</b>
<b>Tail Value At Risk(99,5%)</b>	<b>592 791 252,85</b>

*Tableau 31: Quantiles de la distribution des réserves*

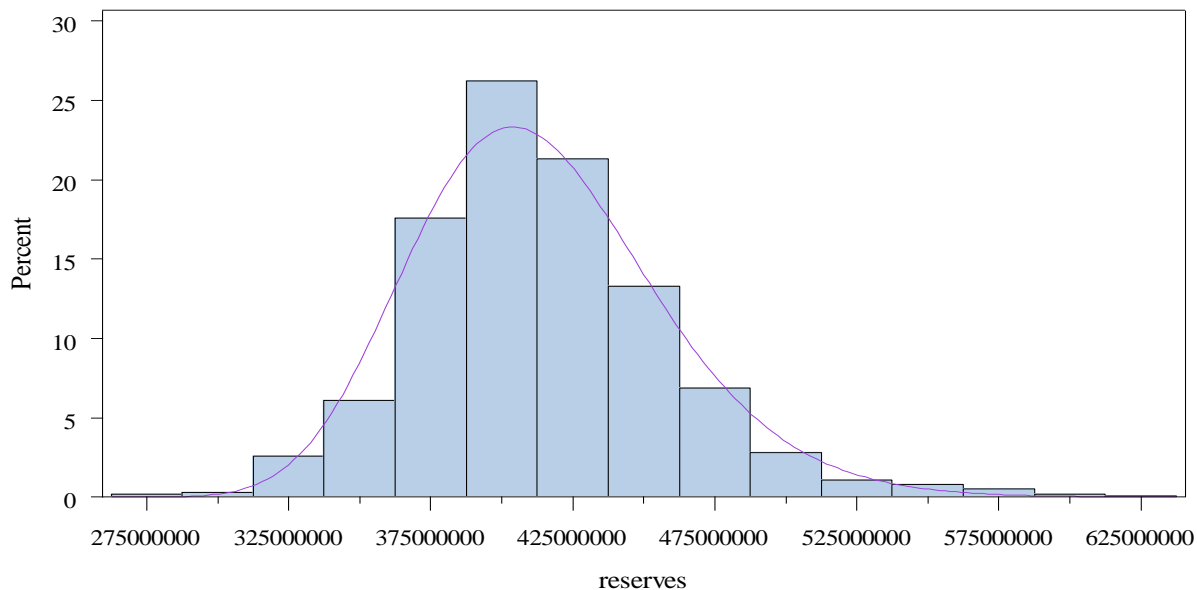
Dans le cadre de notre projet, notamment dans le modèle de Mack, nous nous sommes intéressés à loi normale et lognormale pour construire nos intervalles confiance. Pour ce faire, il est indispensable de vérifier si la distribution des réserves est ajustable par ces lois ou pas. Ainsi, on a commencé par le traçage de l'évolution de notre distribution de réserves et ce à travers un histogramme accompagnés de l'évolution de ces deux lois :

## Distribution selon la loi normal



*Figure 13 : Distribution des réserves selon la loi normale*

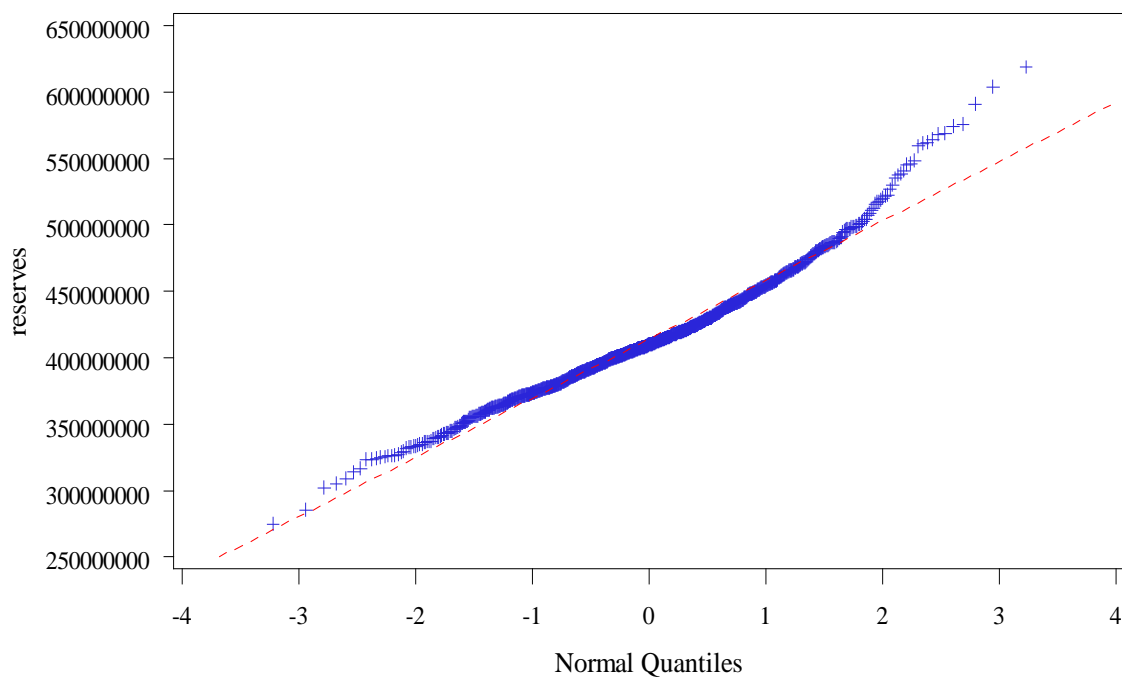
## Distribution selon la loi lognormal



*Figure 14 : Distribution des réserves selon la loi lognormal*

Nous avons procédé dans un premier temps à des Q-Q plots que nous validerons grâce au Statistiques de Kolmogorov-Smirnov :

## Distribution selon la loi normal



## Distribution selon la loi lognormal

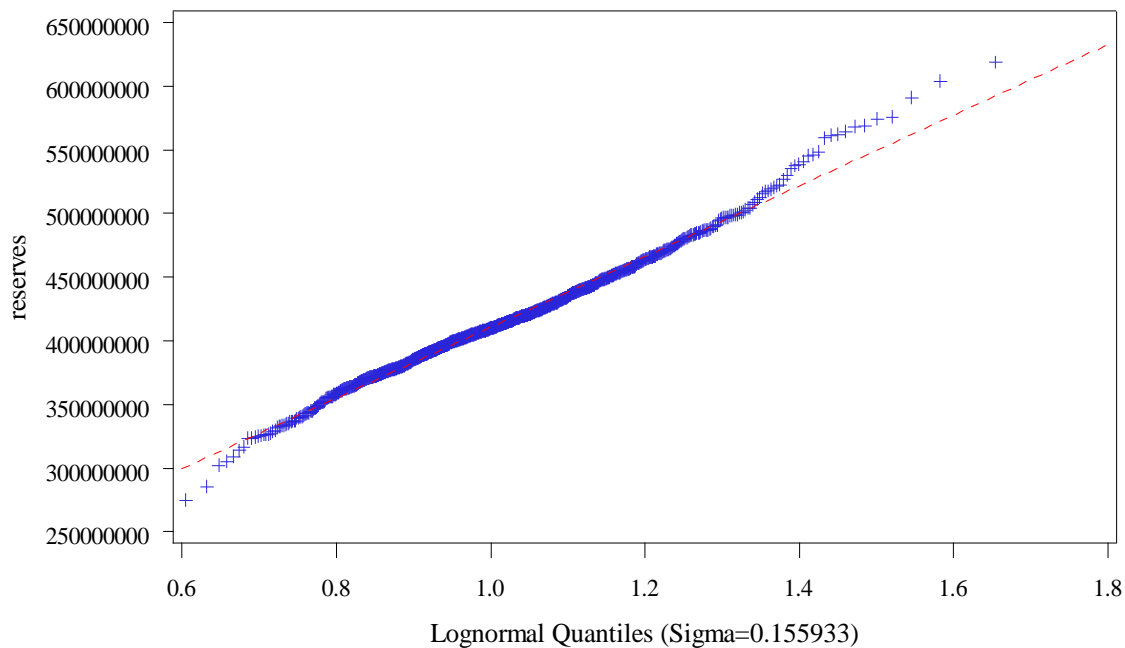


Figure 15 Illustration des QQ-Plots de la réserve selon les lois normale et lognormale.

Pour mieux apprécier le modèle à privilégier, nous nous sommes basés sur la statistique de Kolmogorov-Smirnov qui donne les résultats suivant :

Goodness-of-Fit Tests for Normal Distribution				
Test	Statistique		p Value	
Kolmogorov-Smirnov	D	0.06486455	Pr > D	>0.05
Cramer-von Mises	W-Sq	1.04923148	Pr > W-Sq	>0.02
Anderson-Darling	A-Sq	6.18188000	Pr > A-Sq	>0.01

Tableau 32 : Test de Kolmogorov-Smirnov de la distribution normale

Goodness-of-Fit Tests for Lognormal Distribution				
Test	Statistique		p Value	
Kolmogorov-Smirnov	D	0.03512574	Pr > D	>0.07
Cramer-von Mises	W-Sq	0.10547255	Pr > W-Sq	>0.05
Anderson-Darling	A-Sq	1.23829461	Pr > A-Sq	>0.01

*Tableau 33 : Test de Kolmogorov-Smirnov de la distribution lognormale*

Il est clair que la statistique de Kolmogorov-Smirnov confirme les résultats obtenus par les Q-Q plots et les histogrammes. Ainsi, les deux lois ajustent la distribution des réserves malgré que les intervalles de confiance selon la loi lognormale soient plus fiables, précis et rationnels.

#### *II.4 Branches longues : Méthodes pour estimer le « Tail Factor »*

Les méthodes de provisionnement présentées jusqu'ici ne sont pas suffisantes pour l'estimation des charges finales et donc des provisions pour les branches à déroulement long. Elles permettent uniquement d'estimer les paiements cumulés jusqu'à la dernière année de développement  $n$  du triangle. Il est nécessaire d'avoir recours à une estimation des facteurs de queue de développement pour estimer la charge à l'ultime.

##### II.4.1 Extrapolation des facteurs de développement

Dans cette méthode, les facteurs sont extrapolés par l'utilisation de lois permettant l'ajustement des facteurs de développement et ainsi l'estimation des facteurs pour les années de développement  $j > n$ .

Quatre lois sont habituellement utilisées : exponentielle, puissance, puissance inverse et Weibull.

	$f_j$	$f$
Exponentielle	$1 + b \cdot \exp(-a \cdot j)$	$f(j, \ln(f_j - 1))$
Puissance	$b^{a^j}$	$f(j, \ln(\ln(f_j)))$
Weibull	$1/(1 - \exp(-b \cdot j^a))$	$f(\ln(j), \ln(\ln((f_j - 1)/f_j)))$

Tableau 34 : Les trois lois principalement utilisées pour l'ajustement des facteurs de développement

Ainsi, on commence par une extrapolation linéaire par la loi exponentielle des facteurs de développement pour la méthode de CL pour assurer l'hypothèse de l'extinction de la charge, Pour mettre en pratique la méthode du tail factor, nous avons fait l'hypothèse que la clôture du triangle aurait lieu dès lors que le coefficient de passage serait inférieur ou égal à 1,00001.

exponentiel			
i	f(i)	ln(f-1)	estimé
0	4,044705	1,113404	2,50203
1	1,831361	-0,18469	1,870244
2	1,36669	-1,00324	1,5042
3	1,173694	-1,75046	1,292123
4	1,092766	-2,37768	1,16925
5	1,067666	-2,69316	1,09806
6	1,173694	-1,75046	1,056814
7	1,026811	-3,61896	1,032917
8	1,020536	-3,88559	1,019071
9	1,016884	-4,08138	1,011049
10	1,010248	-4,58071	1,006402
11	1,001287	-6,65559	1,003709
12	1,003517	-5,6502	1,002149
13	1,001056	-6,8536	1,001245
14			1,000721
15			1,000418
16			1,000242
17			1,00014
18			1,000081
19			1,000047
20			1,000027
21			1,000016
22			1,000009
23			1,000005
24			1,000003
25			1,000002
26			1,000001
27			1,000001

Tableau 35: Extrapolation des facteurs de développement par la loi exponentielle

Appliquée sur nos données, l'extrapolation exponentielle nous donne une estimation des coefficients qui semble passer en dessous du seuil de 1,000001 au bout de vingt-sept années, l'introduction des facteurs de queue influence la réserve totale, puisque la nouvelle réserve vaut **411 851 924,54** DHS.

Voici la représentation des coefficients issus de la méthode Chain-Ladder d'une part, et de ceux déterminés par extrapolation exponentielle d'autre part, que nous avons obtenus :

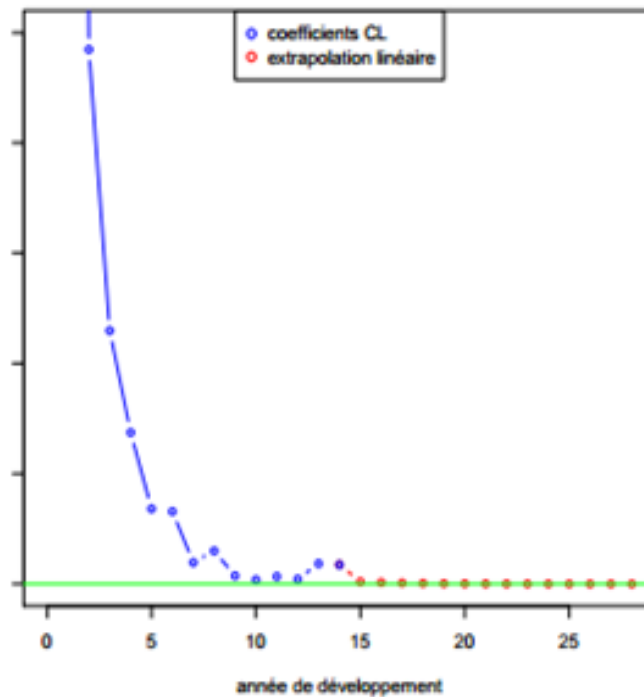


Figure 16 : Coefficients de Chain Ladder et leur extrapolation

## II.4.2 Extrapolation des paramètres des années de développement

Dans le cadre des modèles GLM, le passage d'une année de développement à l'autre est représenté par les paramètres ( $\beta_j$ ) (voir le cadre pratique du modèle GLM). Ce sont donc ces coefficients qu'il faut chercher à extrapoler. Au regard de ces coefficients, on peut observer une relation linéaire entre ces derniers et les années de déroulement. Une régression linéaire simple de type  $y = ax + b$  semble donc bien adaptée à l'ajustement des ( $\beta_j$ ) ; ils seront donc estimés ainsi pour  $j > n$ .

Théoriquement, la clôture d'un triangle de liquidation se traduit par le fait que les incréments de paiements de chaque année de déroulement sont nuls (ainsi, les paiements cumulés restent constants). Dans cette application, nous faisons l'hypothèse que le développement est terminé dès lors que la moyenne des incréments associés à l'année de développement  $j$  est inférieure à 1. En effet, le modèle ne permettant pas d'avoir des incréments nuls (car ils s'expriment comme une exponentielle), nous avons fixé le seuil à l'entier positif le plus proche de 0. Il faut donc estimer les paramètres jusqu'à cette date.

Voici la représentation des paramètres représentant l'effet des années de développement issus de la méthode GLM d'une part, et de ceux déterminés par extrapolation linéaire d'autre part, que nous avons obtenue :

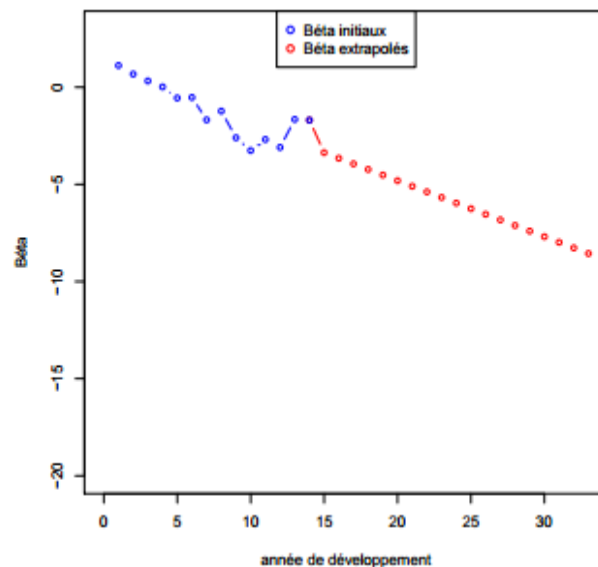


Figure 17 : Paramètres de développements et leur extrapolation

Pratiquement, l'extrapolation est effectuée comme suit :

	GLM(Gamma)	
	coef(beta)	estimé
	4,3412	0,0351608
beta	5,4527	-0,319742
-0,3549028	5,5548	-0,6746448
0,0351608	5,3453	-1,0295476
	4,9108	-1,3844504
	4,4515	-1,7393532
	4,2434	-2,094256
	3,8197	-2,4491588
	3,3907	-2,8040616
	3,1658	-3,1589644
	2,981	-3,5138672
	2,396	-3,86877
	1,4847	-4,2236728
	0,2298	-4,5785756
	1,2775	-4,9334784
	0	-5,2883812
		-5,643284
		-5,9981867
		-6,3530895
		-6,7079923

Tableau 36 : Extrait du tableau d'extrapolation des coefficients des années de développement

L'extrapolation nous a conduit à ce que les sinistres sont entièrement réglés après 33 ans vu que la moyenne des règlements par année de développement est devenue inférieur à 1 comme le montre le tableau suivant :

	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33
	1,2775	0	-5,64328	-5,99819	-6,35309	-6,70799	-7,0629	-7,4178	-7,7727	-8,1276	-8,48251	-8,83741	-9,19231	-9,54721	-9,90212	-10,257	-10,6119	-10,9668	-11,3217	-11,6766
		294,2165	206,3169	144,678	101,4542	71,14332	49,88908	34,9843	24,53244	17,20317	12,06358	8,459483	5,932142	4,159865	2,91707	2,045571	1,434439	1,005889	0,705371	
		73276,85	259,4894	181,9648	127,6013	89,47933	62,74663	44,00055	30,85501	21,63682	15,17264	10,63969	7,46039	5,231957	3,688866	2,572761	1,804127	1,265129	0,887161	0,622114
298373,1	83166,51	294,5109	206,5233	144,8227	101,5557	71,2151	49,93899	35,0193	24,55699	17,22038	12,07565	8,467947	5,938077	4,164027	2,919989	2,047618	1,435875	1,006895	0,706077	
310798,5	86629,87	306,7754	215,1237	150,8537	105,7849	74,98076	52,01864	36,47763	25,57963	17,9375	12,57852	8,820584	6,185361	4,337432	3,041588	2,132888	1,49567	1,048826	0,73548	
301613	84069,57	297,7089	208,7658	146,3953	102,6585	71,98839	50,48125	35,39956	24,82364	17,40737	12,20677	8,559897	6,002556	4,209242	2,951695	2,069852	1,451466	1,017828	0,713744	
323320,7	90120,23	319,1356	223,7912	156,9317	110,047	77,16954	54,11449	37,94734	26,61025	18,66021	13,08532	9,17597	6,434572	4,51219	3,164135	2,218823	1,555931	1,091084	0,785113	
313200,9	87239,5	309,1467	216,7866	152,0198	106,6026	74,75416	52,42073	36,7596	25,77736	18,07616	12,67575	8,888785	6,233172	4,370959	3,065099	2,149375	1,507231	1,056333	0,741165	
334904,3	93348,96	330,5692	231,8089	162,554	113,9897	79,93429	56,05325	39,30687	27,56361	19,32875	13,55412	9,504716	6,665102	4,673847	3,277496	2,298317	1,611675	1,130174	0,792525	
354123,1	98705,9	349,5393	245,1115	171,8824	120,5311	84,52141	59,26993	41,56254	29,14538	20,43795	14,33194	10,05016	7,047587	4,942061	3,465579	2,430208	1,704163	1,19503	0,838005	
443520,8	123624	437,7798	306,9894	215,2737	150,9589	105,8587	74,2325	52,05492	36,50307	25,59747	17,95001	12,5873	8,826736	6,189675	4,340457	3,043709	2,134376	1,496713	1,049557	
390233,3	108771	385,182	270,1057	189,4093	132,8217	93,14011	65,31372	45,8007	32,11735	22,52202	15,79338	11,07498	7,766234	5,446006	3,818966	2,678018	1,877938	1,316888	0,923457	
326668,1	91053,27	322,4397	226,1081	158,5564	111,1864	77,9685	54,67475	38,34021	26,88575	18,85341	13,22079	9,270971	6,50119	4,558905	3,196894	2,241795	1,57204	1,10238	0,773035	
334068,1	93115,88	329,7438	231,2301	162,1482	113,705	79,7347	55,91329	39,20872	27,49479	19,28049	13,52028	9,480984	6,64846	4,662177	3,269313	2,292578	1,607651	1,127352	0,790546	
363814,7	101407,3	359,1054	251,8197	176,5864	123,8298	86,83457	60,89202	42,70002	29,94303	20,9973	14,72418	10,32521	7,240464	5,077315	3,560424	2,496718	1,750802	1,227735	0,860939	
362217,4	100962,1	357,5288	250,7141	175,8112	123,2861	86,45334	60,62468	42,51255	29,81157	20,90511	14,65953	10,27988	7,208676	5,055024	3,544733	2,485756	1,743116	1,222345	0,857159	
395141,8	110139,2	390,027	273,5032	191,7918	134,4924	94,31166	66,13526	46,3768	32,52134	22,80532	15,99204	11,21428	7,863921	5,514508	3,867003	2,711703	1,901559	1,333452	0,935072	
																			1,141668	0,800585

Tableau 37 : extrapolation des facteurs de développement GLM

Finalement, en tenant compte de l'extrapolation et donc en considérant que les sinistres sont entièrement réglés après 33 ans, le montant estimé des réserves est de **410 297 059,43** DH. La différence relative des réserves par rapport à celles obtenues par la méthode GLM sans calcul du Tail Factor est de **0,004352%**.

## II.5 Choix du modèle optimal de provisionnement

### II.5.1 Récapitulatif sur les résultats des méthodes utilisées

Nous avons jusque-là évoqué et appliqué plusieurs méthodes de provisionnement stochastiques et déterministes, mais sur un seul et même triangle. Nous avons remarqué qu'elles n'aboutissent pas aux mêmes montants de réserves finales.

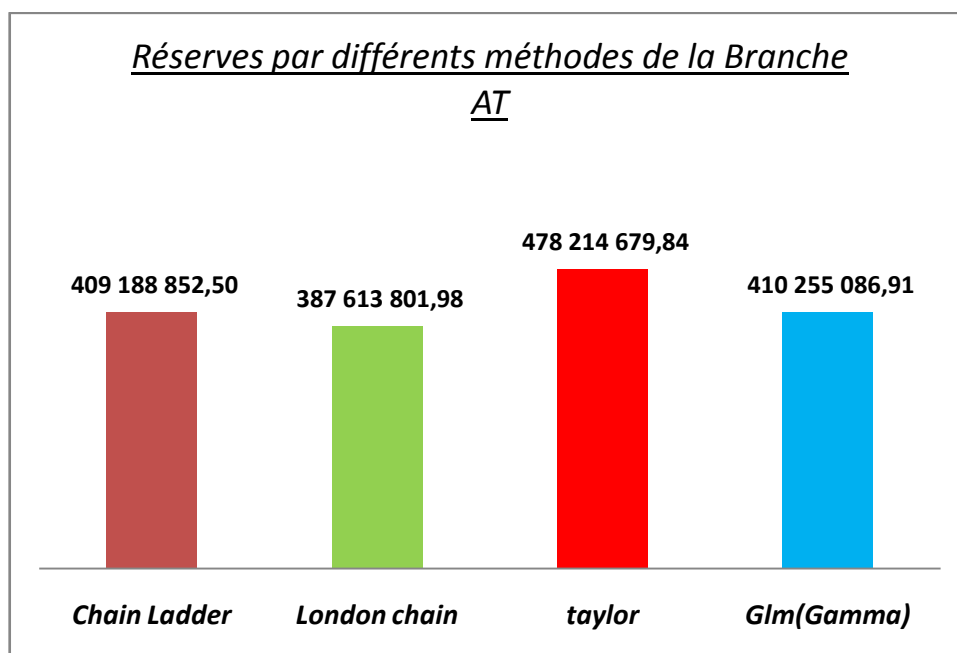


Figure 18 : Diagramme comparatif des réserves des différentes méthodes sans Tail Factor

Au regard du diagramme comparatif, la méthode qui frappe aux yeux est celle de Taylor vu qu'elle procure un montant plus élevé de réserves. Le provisionnement est dit plus « prudent », mais ce n'est nullement un indice de qualité du modèle puisqu'un sur-provisionnement reflète une mauvaise gestion des ressources financières face au risque.

## II.5.2 Avantages et inconvénients des méthodes utilisées

Après la comparaison des résultats précédents, on a vu qu'il est intéressant de tracer un tableau récapitulatif traduisant les avantages et inconvénients des divers modèles formulés auparavant :

Méthodes	Avantages	Inconvénients
Chain Ladder	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Application Simple</li> <li>• Méthode de référence</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Hypothèses fortes</li> <li>• Sensibilité forte des estimations des provisions</li> </ul>
London Chain	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Application Simple</li> <li>• Moins contraint que Chain Ladder</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Sensibilité forte des estimations des provisions</li> </ul>
Taylor	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Prise en compte des effets calendaires (inflation)</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Lourdeur d'estimation des paramètres</li> </ul>
GLM	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Choix de la distribution des incréments</li> <li>• Mêmes résultats que Chain Ladder (cas de Gamma)</li> <li>• Utilisé lors des procédures de Bootstrap</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Hypothèses paramétriques</li> <li>• Lourdeur de l'estimation des paramètres</li> </ul>
Mack	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Mêmes résultats que Chain Ladder</li> <li>• Modèle utilisé par M&amp;W pour le calcul de l'incertitude en 1 an.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Hypothèses fortes</li> <li>• Sensibilité forte des estimations des provisions.</li> </ul>

*Tableau 38: Avantages et inconvénients des méthodes de calcul de la réserve*

### II.5.3 Application des critères de choix du modèle

C'est ainsi qu'on a proposé la méthode par sous triangle pour trancher dans la méthode la plus convenable pour la branche pilote et surtout apporter une nouvelle méthode à l'organisme d'accueil.

Cette méthode met en évidence l'erreur d'estimation des provisions faites dans le passé de chacune des méthodes par rapport aux vraies valeurs observées dans le passé. Il suffit pour cela de prendre un sous-triangle qui, complété, reste inclus dans le triangle de base. La méthode la plus adaptée au triangle sera celle qui fournira la somme des carrés des erreurs minimale. Pour améliorer cet outil de comparaison, nous ne choisirons pas qu'un sous-triangle mais tous les sous-triangles possibles du triangle de départ, au nombre de  $[(I \wedge J)/2] - 1$ .

Ainsi, pour chacune des méthodes, la somme des carrés des erreurs se calcule comme suit :

$$SSE = \sum_{m=2}^{[\min(I,J)/2]} \sum_{i=2}^m \sum_{j=m-i+1}^m (\hat{C}_{i,j} - C_{i,j})^2$$

L'illustration graphique des calculs effectués est dans la figure suivante :

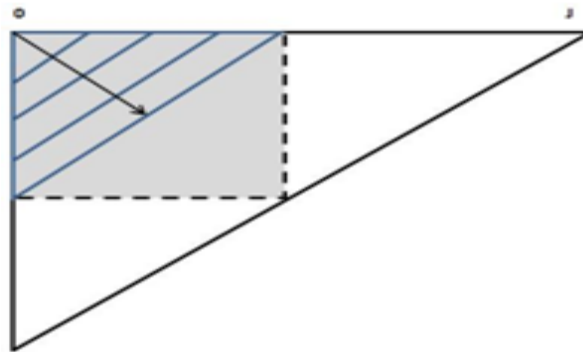


Figure 19 : Méthode par sous triangle

Suite aux différents calculs effectués, on a obtenu les différents SSE des méthodes énoncées avant :

<b>Méthode</b>	<b>SSE</b>
<b>Chain ladder</b>	<b>1,76214E+16</b>
<b>London Chain</b>	<b>1,75097E+16</b>
<b>Taylor</b>	<b>2,02632E+16</b>
<b>GLM_gamma</b>	<b>9,19264E+15</b>
<b>Mack</b>	<b>1,76214E+16</b>

Tableau 39 : Choix de la méthode par SSE

Par conséquent, la méthode qui semble appropriée à notre branche pilote est celle de GLM (Gamma). Ainsi, la réserve totale de notre Branche est :

$$R= 410\ 255\ 086,91 \text{ Dhs}$$

Il est à noter que le calcul de la BE se fera à travers la méthode de GLM – Gamma vu qu'elle est élue comme meilleure méthode de calcul de provisionnement.

## Chapitre III : Actualisation

### III.1 Sous Solvabilité I

Avant l'entrée en vigueur de la *Solvabilité II*, on ne travaillait en provisionnement qu'avec la réserve totale pour les années de survenance agrégées, et donc l'actualisation des flux futurs a été interdite par prudence.

### III.2 Avec la nouvelle réglementation de Solvabilité II

Sous la directive de la *Solvabilité II*, l'étape de l'actualisation est devenue indispensable au calcul de la BE comme étant la valeur actuelle probable des flux futurs et ce pour veiller sur le calcul à la valeur de marché du bilan de la compagnie.

### III.3 Application sur le calcul de la BE

Pour déterminer la provision BE, il suffit de sommer les diagonales de paiement obtenues par la méthode par sous triangles (Glm-Gamma pour notre cas), du triangle décumulé. Ensuite, il s'agit d'actualiser ces flux futurs avec les taux zéro coupon.

Ainsi, si on suppose  $Z_k$  la somme des paiements futurs effectués à la  $k^{\text{ème}}$  année calendaire, et  $r(0,k)$  le taux zéro coupon d'échéance  $k$  tiré de la courbe des taux zéro coupon, alors le BE de notre réserve est comme suit :

$$BE = \sum_{k=n-i+2}^{\infty} \frac{Z_k}{(1+r(0,k))^k}, \text{ avec:}$$

- $n-i+2$  renseigne sur la diagonale qui suit celle principale du triangle de paiements décumulés ( $i=2 \dots n$ ).

- $\infty$  traduit la dernière diagonale de notre triangle, pour notre cas, c'est la 29<sup>ème</sup> diagonale

En appliquant ceci sur la branche pilote de la compagnie, tout en se basant sur le triangle des paiements obtenus par le modèle Glm-Gamma vu auparavant, on obtient les résultats suivants :

*Partie III. Le cadre Pratique de l'évaluation des provisions*

<b>Année futures</b>	<b>Flux futures Actualisés</b>
2 015	112461631,12
2 016	87498772,76
2 017	60743445,14
2 018	39555854,75
2 019	25977311,24
2 020	17761570,23
2 021	11396195,12
2 022	7482455,32
2 023	4985001,06
2 024	3041196,93
2 025	1497013,05
2 026	686058,84
2 027	363544,76
2 028	280763,47
2 029	58524,34
<b>BE</b>	<b>373 789 338</b>

*Tableau 40 : Calcul du BE selon à partir de la méthode GLM-Gamma*

Ainsi, on a obtenu la BE de notre réserve, respectant les conditions de la directive de la *Solvabilité II*, d'une valeur : **373 789 338** DHS

## Partie IV : Le risque de provisionnement dans le cadre du SCR

### Chapitre I : Définition du risque de provisionnement à un an et SCR

#### 1.1 Pourquoi changer d'horizon ?

Dans ce cadre, l'horizon de notre travail est réduit en un an du fait que si la compagnie n'est pas solvable sur un horizon d'un an, a fortiori elle ne le sera pas sur un horizon à plus long terme. Par ailleurs, de nombreuses décisions (d'augmentation de tarif par exemple), actions, projets (mise en place de nouveaux produits) sont établis sur un horizon de court et moyen terme (exigences des actionnaires à court terme). La compagnie se doit également de maintenir sa performance à court terme du fait de l'impact qu'elle a sur sa réputation et sur sa solidité financière. Cet horizon temporel est donc essentiel à l'étude de la solvabilité d'une compagnie.

Toutefois, le positionnement sur un horizon d'un an a reçu de nombreuses critiques de la part des professionnels, eu égard aux engagements longs termes d'un assureur.

Avant d'aborder notre étude, il est à noter qu'on a quantifié avant cette tâche l'erreur de provisionnement à l'ultime traduisant l'impact de la volatilité au niveau du calcul de la réserve sur le bilan de la compagnie, c'est-à-dire de combien peut fluctuer la valeur estimée de la charge finale prévisible par rapport à la vraie valeur. Ce risque a été abordé par Mack et Bootstrap dans ce qui précède.

#### 1.2 Définition formelle de ce risque

D'autre part, le risque de provisionnement en un an traduit la déviation défavorable de la charge finale prévisible sachant qu'on détient l'information jusqu'à l'année calendaire et actuelle  $n$  :  $\hat{C}_{i,n}^n$  par rapport à la CFP sachant qu'on détient l'information jusqu'à  $(n+1)$   $\hat{C}_{i,n}^{n+1}$ . Il est à noter que pour notre cas, l'année calendaire actuelle  $n$  est 2014. Ainsi, cet écart est appelé **CDR** (**Claim Development Result**) pour l'année calendaire  $[n,n+1]$ . Ce qui revient à dire que le risque de provisionnement à un an est la variance ou la volatilité du CDR.

C'est ainsi qu'on cherche à étudier la fluctuation possible du CDR observable autour du 0. Cette possible fluctuation se mesure par :

$$\begin{aligned} \text{Msep}(0) &= E[(\widehat{CDR}_i(n+1) - 0)^2/D] \\ &= E[(\hat{C}_{i,n}^n - \hat{C}_{i,n}^{n+1})^2/D] \\ &= E[(\hat{R}_i^n - (\hat{R}_i^{n+1} + Z_{i,n-i+1}))^2/D] \end{aligned}$$

Avec: -D est l'information dont on dispose du triangle des règlements cumulés, d'où  $D = \{ C(i, j) ; i+j \leq n ; 1 \leq i, j \leq n \}$

$-Z_{i,n-i+1}$  : le paiement effectué à l'année calendaire  $[n, n+1]$  pour les sinistres survenus à  $i$ .

Il est à noter qu'en général le CDR n'est observable qu'en  $n+1$  pour l'année comptable  $[n, n+1]$ . On prédit sa valeur à la date  $n$  par :

$$E[\widehat{CDR}_i(n+1)/D]=0.$$

Le montant  $CDR(n+1)$  traduit le boni-mali observable dans le compte de résultats de la branche pilote de la compagnie tout en ayant un impact direct sur le résultat de l'année  $n+1$ .

Les boni- mali sont définis comme le gain (perte) lié au sur-provisionnement (respectivement sous-provisionnement) lors du passage d'une année calendaire à l'année suivante. On parle de :

- Boni si pour l'année de survenance  $i$  :  $\widehat{CDR}_i(n+1) > 0$ .
- Et donc mali si  $\widehat{CDR}_i(n+1) < 0$ .

Si l'estimation de la CFP ou bien de la réserve est au plus juste à l'année calendaire actuelle alors, la compagnie a autant de chance de faire un boni qu'un mali. Mais de combien l'espérance de l'écart entre les CFP des deux années calendaires successives peut s'écarter du zéro ; c'est l'objet du modèle de Merz & Wuthrich.

### I.3 Formule standard- Modèle interne (SCR)

Dans ce cadre, le SCR peut être obtenu soit par une formule applicable à toutes les compagnies ou par l'élaboration d'un modèle interne à la compagnie. L'avantage de ce dernier est le fait qu'il est plus adapté aux risques auxquels la compagnie est soumise.

Quelque soit le modèle qu'on adoptera, l'objectif est la constitution d'un niveau de fonds propres ou de capital pour lequel il y'a 99.5% de chance qu'il ne soit dépassé.

#### I.3.1 Formule standard

L'objectif de la formule standard du SCR est de fournir une méthode de calcul prenant en considération tous les risques auxquels les compagnies d'assurance sont susceptibles d'être soumises.

#### I.3.2 Modèle interne

L'objectif de ce modèle est de calculer l'exigence des fonds propres le plus fidèlement possible aux risques auxquels la compagnie est soumise.

#### I.3.3 Choix du modèle

Etant donné que le modèle interne nécessite l'approbation de la tutelle(DAPS), et vu que la directive de la *Solvabilité II* n'est pas encore mise en vigueur au Maroc, alors on est amené à passer par un modèle standard. De plus, on ne traitera pas tous les risques auxquels la compagnie est soumise, tout en se limitant sur le risque de provisionnement, ce qui laisse le modèle standard plus pratique et accessible.

## Chapitre II : CDR selon Merz & Wuthrich

### II.1. Principe de la méthode

Suivant le même principe que Mack, Merz & Wuthrich ont quantifié la volatilité du CDR et ont montré que :

$$Msep(0)_{\widehat{CDR}_i(n+1)/D} = \underbrace{\text{Var}(\widehat{CDR}_i(n+1)/D)}_{\text{Erreur processus}} + \underbrace{Msep(\widehat{CDR}_i(n+1))_{(CDR(n+1)/D)}}_{\text{Erreur d'estimation}}$$

Tel que :

$$Msep(\widehat{CDR}_i(n+1))_{(CDR(n+1)/D)} = E[(\widehat{CDR}_i(n+1) - \overline{CDR}_i(n+1))^2/D]$$

Ainsi, Merz & Wuthrich ont estimé cette formule comme suit :

$$Msep(0)_{\left(\frac{CDR_i(n+1)}{D}\right)} = \hat{C}_{i,n}^2 \cdot \left[ \left( \frac{\widehat{\sigma}_{n-i}^2}{\widehat{f}_{n-i}^2 * \hat{C}_{i,n-i}} \right) + \left( \frac{\widehat{\sigma}_{n-i}^2}{\widehat{f}_{n-i}^2 * S_{n-i}^n} \right) + \sum_{j=n-i+1}^{n-1} (\widehat{\sigma}_j^2 / \widehat{f}_j^2) \cdot \left( \frac{C_{n-j,j}}{S_j^{n+1}} \right)^2 \cdot \left( \frac{1}{C_{n-j,j}} + \frac{1}{S_j^n} \right) \right]$$

Tel que :

$$S_j^n = \sum_{i=0}^{n-j-1} C_{i,j}$$

Il est à noter que si on avait les vraies valeurs des facteurs de développement de CL, on aurait :

$$E[\overline{CDR}_i(n+1)/D] = 0.$$

C'est pour cela qu'on adopte cette estimation, par hypothèse, dans le modèle de M&W.

On définit, dans le même cadre,  $\widehat{\sigma}_j^2$  comme étant la volatilité du triangle par année de développement j :

$$\widehat{\sigma}_j^2 = \left( \frac{1}{n-j-1} \right) * \left( \sum_{i=1}^{n-j} C_{i,j} * \left( \frac{C_{i,j+1}}{C_{i,j}} - \widehat{f}_j \right)^2 \right) \quad \text{pour } j \leq n-2;$$

Pour  $j=n-1$ , nous disposons d'une seule observation, de plus il faut s'assurer qu'il y ait une stabilité des règlements tout en s'approchant de la clôture des sinistres :

$$\frac{\widehat{\sigma_{n-1}^2}}{\widehat{\sigma_{n-2}^2}} = \frac{\widehat{\sigma_{n-2}^2}}{\widehat{\sigma_{n-3}^2}} ; \text{ ceci revient à prendre :}$$

$$\widehat{\sigma_{n-1}^2} = \min \left( \frac{\widehat{\sigma_{n-2}^4}}{\widehat{\sigma_{n-3}^2}}, \widehat{\sigma_{n-2}^2}, \widehat{\sigma_{n-3}^2} \right)$$

En ce qui concerne les estimateurs des msep pour les années de survenance agrégées, on a :

$$\begin{aligned} Msep(0)_{(\sum_{i=2}^n CDR_i(n+1)/D)} &= \sum_{i=2}^n Msep(0)_{(CDR_i(n+1)/D)} + \\ & 2. [\sum_{k>i>1} \hat{C}_{i,n}^n * \hat{C}_{k,n}^n (\sum_{j=n-i+1}^{n-1} (\widehat{\sigma}_j^2 / \widehat{f}_j^2) \cdot (\frac{C_{n-j,j}}{S_j^{n+1}})^2 \cdot (\frac{1}{C_{n-j,j}} + \frac{1}{S_j^n}) + \\ & (\frac{\widehat{\sigma_{n-i}^2}}{\widehat{f}_{n-i}^2 * S_{n-i}^{n+1}}) + (\frac{C_{i,n-i}}{S_{n-i}^{n+1}}) * (\frac{\widehat{\sigma_{n-i}^2}}{\widehat{f}_{n-i}^2 * S_{n-i}^n}))] \end{aligned}$$

Ces volatilités par années de survenance ou même agrégées servent principalement à traduire respectivement le comportement des  $CDR_i$  et CDR sans donner leur distribution, ce qui laisse cette méthode paramétrique comme Mack.

Ainsi, les moments d'ordre 1 et 2 peuvent servir comme paramètres de la loi de distribution des CDR. La loi la plus utilisée pour simuler la fluctuation des CDR autour de zéro est la loi normale (on montrera ceci à travers le Bootstrap modifié). Du coup, on peut calculer leurs intervalles de confiance et ce pour cerner leur comportement par année de survenance ou même agrégées.

## II.2. Comparaison aux résultats de Mack

Il sera intéressant de comparer la formule obtenue par M&W de l'erreur quadratique moyenne à celle de Mack. Rappelons brièvement les deux formules :

-Mack a proposé :

$$\widehat{Msep}(\widehat{R}_i) = \underbrace{\widehat{C}_{i,n}^2 \cdot \sum_{j=n-i+1}^{n-1} (\widehat{\sigma}_j^2 / \widehat{f}_j^2 * \widehat{C}_{i,j})}_{\text{Erreur de processus}} + \underbrace{\widehat{C}_{i,n}^2 \cdot \sum_{j=n-i+1}^{n-1} (\widehat{\sigma}_j^2 / (\widehat{f}_j^2 \sum_{k=1}^{n-j} C_{k,j}))}_{\text{Erreur d'estimation}}$$

-M&W quand à eux ont proposé :

$$Msep(0)_{(CDR_i(n+1)/D)} = \widehat{C}_{i,n}^2 \cdot \left[ \left( \frac{\widehat{\sigma}_{n-i}^2}{\widehat{f}_{n-i}^2 * \widehat{C}_{i,n-i}} \right) + \left( \frac{\widehat{\sigma}_{n-i}^2}{\widehat{f}_{n-i}^2 * S_{n-i}^n} \right) + \sum_{j=n-i+1}^{n-1} (\widehat{\sigma}_j^2 / \widehat{f}_j^2) \cdot \left( \frac{C_{n-j,j}}{S_j^{n+1}} \right)^2 \cdot \left( \frac{1}{C_{n-j,j}} + \frac{1}{S_j^n} \right) \right]$$

Dans la dernière formule, seul le premier terme de la diagonale principale (n-i) concernant l'erreur de processus de Mack est maintenue. Concernant l'erreur d'estimation, elle est également maintenue pour la diagonale (n-i), mais toutes les diagonales ultérieures (c'est-à-dire  $j \geq n-i+1$ ) sont écrasées par le facteur :

$$\left( \frac{C_{n-j,j}}{S_j^{n+1}} \right)^2 \leq 1$$

## II.3. Critiques de M&W

Les formules pour estimer la volatilité des CDR de M&W reposent sur la méthode de Mack. Il faut donc que les triangles de paiements satisfassent les hypothèses de cette méthode.

La méthode de M&W donne une évaluation analytique du risque de provisionnement à un an sans aucune distribution des CDR. De plus, elle ne prend pas en considération le facteur de queue qui stipule la prise en considération du faite que les sinistres ne sont pas clos à la fin du triangle de liquidation.

Enfin, l'estimation de M&W repose sur l'approximation

$$\prod_{j=1}^n (1 + a_j) = 1 + \sum_{j=1}^n a_j \quad \text{Ou } a_j \ll 1$$

Dans le cas de M&W, il faut qu'il y ait  $\frac{\widehat{\sigma}_j^2}{\widehat{f}_j^2 * C_{i,n-i}} \ll 1$ , du coup il faut vérifier pratiquement cette condition avant d'adopter les formules de M&W précédentes.

### II.4.Application

Avant d'appliquer la formule de M&W pour le calcul des erreurs quadratiques moyennes, il est important de vérifier la condition d'usage de la formule approchée de M&W qui stipule que :

$$a_j = \frac{\widehat{\sigma}_j^2}{\widehat{f}_j^2 * C_{i,n-i}} \ll 1, \text{ avec } i=0 \dots 15$$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$a(j)$	0,01882	0,01540	0,00560	0,00232	0,00059	0,00063	0,00019	0,00018	0,00018	0,00024	0,00009	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	.

Tableau 41 : Calcul des rapports  $a(j)$ ,  $j=0 \dots 14$

Il est clair que la condition est vérifiée pour avoir la possibilité d'utiliser la formule de M&W. La 16<sup>ème</sup> valeur n'existe pas vu que les coefficients  $\widehat{f}_j$  de CL et  $\widehat{\sigma}_j^2$  ne sont pas définis pour la dernière année de déroulement (voir méthode de Mack). En se basant sur ces dernières valeurs, on calcule les erreurs quadratiques moyennes pour les CDR par année de survenance ainsi que le CDR totale et ce comme suit :

Année	MSEPi(0)
1 999	.
2 000	34 445 069 787,6
2 001	42 678 100 630,4
2 002	53 409 907 039,3
2 003	132 466 856 210,2
2 004	1 618 179 298 760,6
2 005	4 263 472 217 625,5
2 006	3 211 228 703 976,3
2 007	3 617 023 986 786,5
2 008	5 520 341 103 725,6
2 009	13 080 441 654 009,4
2 010	8 586 790 055 827,6
2 011	31 409 607 017 730,7
2 012	92 309 073 922 359,0
2 013	217 114 934 734 566,0
2 014	359 909 774 489 423,0
<b>MSEP_totale(0)</b>	<b>903 854 358 121 981,0</b>

*Tableau 42 : Erreur quadratique moyenne par année de survenance et Totale*

Dans le même cadre, on calculera les coefficients de variations renseignant sur la stabilité des réserves à un an ainsi que les coefficients de variation relatifs dont l'expression est comme suit :

$$\text{Coef\_relatif} = \frac{CV_{M\&W}}{CV_{Mack}} ;$$

L'implémentation de tout ceci est comme suit :

Année	Coef varia	% de la volatilité de Mack
1 999	.	.
2 000	208,5%	85,6%
2 001	57,1%	73,9%
2 002	42,1%	62,9%
2 003	29,3%	66,9%
2 004	52,6%	91,5%
2 005	46,4%	82,6%
2 006	26,4%	58,9%
2 007	18,6%	52,6%
2 008	13,1%	51,0%
2 009	15,5%	64,9%
2 010	10,6%	50,4%
2 011	14,1%	69,9%
2 012	14,8%	75,1%
2 013	17,3%	76,8%
2 014	15,2%	67,4%
<b>Coef varia total</b>	<b>7,35%</b>	<b>69,42%</b>

*Tableau 43 : Calcul des coefficients de variations de M&W et ceux par rapport à Mack par année de survenance et totale*

De même qu'à l'ultime (Mack), on remarque qu'il ya une instabilité à un an des réserves surtout pour les premières années de survenance. Mais cette fois, la stabilité commence à partir de 2008 sans qu'il y' a une tendance croissante. Le plus important c'est la stabilité de la réserve totale à l'horizon d'un an et ce avec un coefficient de 7.35%.

D'autrepart, on remarque que la part de la volatilité à un an de celle à l'ultime est importante, et ce pour toutes les années de survenance et même agrégées. Par exemple, une part de 69,42% traduit que si on arrive à maîtriser la volatilité de notre réserve ou bien le risque de provisionnement pour un horizon d'un an, on est sûr à 69,42% qu'on maîtrisera le risque de provisionnement à l'ultime, ce qui constitue une donnée importante permettant de clarifier la vision à l'ultime et ce à partir de l'année calendaire actuelle.

Pour finir, il sera intéressant de cerner le comportement des CDR par année de survenance et même pour le CDR de toutes les années, surtout que le modèle de M&W ne communique pas une distribution des CDR. Pour ce faire, on construira des intervalles de confiance avec la loi normale qui, comme on le verra dans la partie de Bootstrap modifié, ajuste mieux l'évolution des CDR. La forme de ces intervalles de confiance est comme suit :

$$IC_{95\%}(CDR_i) = [\pm 1.96 * SE_{\widehat{CDR}_i}(0) ], \text{ avec } SE_{\widehat{CDR}_i}(0) = \sqrt{MSEP_{\widehat{CDR}_i}(0)}$$

Cette formule est justifiée car  $E[\widehat{CDR}_i(n+1)/D]=0$  , qui est une hypothèse dans le modèle de M&W.

Année	Intervalle de confiance selon la normale	
	Borne inférieure	Borne inférieure
1 999	.	.
2 000	- 363 763,91	363 763,91
2 001	- 404 910,10	404 910,10
2 002	- 452 967,44	452 967,44
2 003	- 713 361,53	713 361,53
2 004	- 2 493 270,46	2 493 270,46
2 005	- 4 047 042,73	4 047 042,73
2 006	- 3 512 300,70	3 512 300,70
2 007	- 3 727 621,14	3 727 621,14
2 008	- 4 605 099,61	4 605 099,61
2 009	- 7 088 711,07	7 088 711,07
2 010	- 5 743 432,13	5 743 432,13
2 011	- 10 984 677,80	10 984 677,80
2 012	- 18 831 211,81	18 831 211,81
2 013	- 28 880 248,15	28 880 248,15
2 014	- 37 183 724,80	37 183 724,80
<b>TOTAL</b>	<b>-58925774,51</b>	<b>58925774,51</b>

*Tableau 44 : Intervalles de confiances, selon la loi normale, des CDR.*

## Chapitre III : Simulation de la diagonale de paiement

L'objectif de ce chapitre est de parvenir à constituer une distribution des CDR empirique et ce pour remédier à la lacune de M&W, ainsi que calculer notre CSR.

### III.1 Principe

L'évaluation empirique des CDR se réalise en quatre étapes :

1. Provision d'ouverture : Il nous faut tout d'abord déterminer la provision Best Estimate d'ouverture de l'année calendaire  $n$ ,  $R^n$  à partir de l'information disponible à la date  $n$  (triangle supérieur). A cet effet, nous appliquons une méthode M que l'on pourra exécuter de manière répétée lors des simulations.

2. Simulation de nouveaux paiements : Cette deuxième étape consiste à générer des paiements pour la nouvelle diagonale  $Z_{i,n-i+1} \quad \forall i = 1 \text{ à } n$ . Pour ce faire, nous simulons selon la méthode de bootstrap modifiée, conditionnellement aux données observées dans le triangle supérieur

3. Provision de clôture : Une fois cette nouvelle diagonale simulée, nous sommes en possession d'une nouvelle information. Nous appliquons alors, pour chaque simulation, la méthode choisie M en tenant compte de cette nouvelle information disponible afin d'obtenir la provision de fin d'année  $n$  :  $R^{n+1}$ .

4. Distribution : Finalement, à partir de  $N$  simulations, on obtient  $N$  valeurs de CDR, ce qui permet d'en déterminer une distribution empirique, et d'en déduire des percentiles (Var, et plus particulièrement à 99,5% celle qui nous intéresse dans le cadre de *Solvabilité II* pour calculer notre CSR).

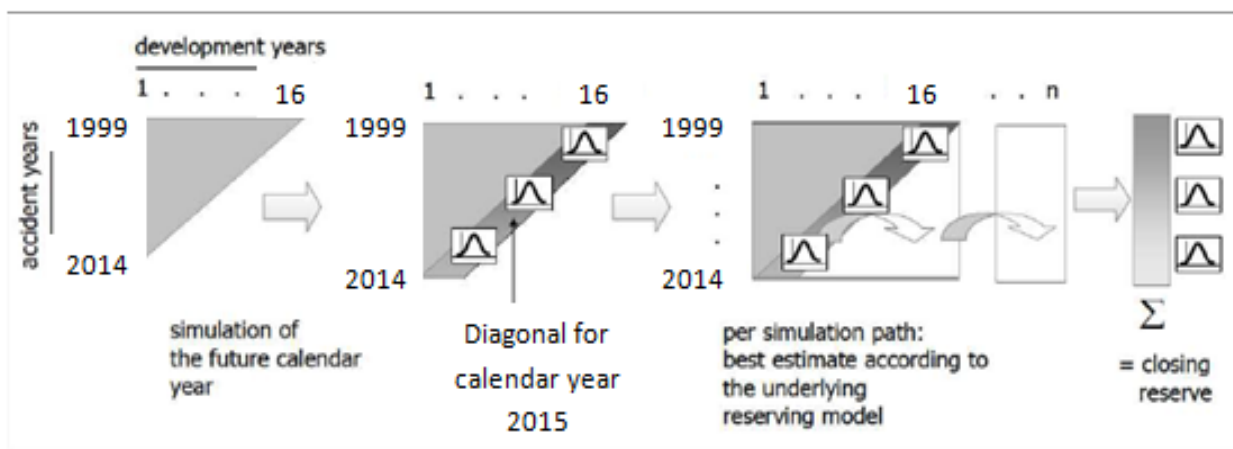


Figure 20 : Illustration d'une itération de la simulation de la diagonale suivante des paiements (étape 2 et 3)

Il est à noter qu'on choisira la méthode de Chain Ladder pour M. Etant donné que dans notre cas on a trouvé que la méthode de GLM est celle qui s'ajuste le mieux au calcul de la Best Estimate, alors nos règlements estimés, servant pour déduire les résidus de Pearson à ré-échantillonner, seront calculés par GLM (Gamma).

### III.2 Simulation par Bootstrap modifiée à un an

#### III.2.1 Principe

Dans l'étape2, le bootstrapping modifié ou la simulation de la diagonale de paiement est comme suit :

Boucle sur N simulations :

1. Application des étapes de la méthode classique du Bootstrap ;
2. Conservation de la diagonale des incréments de l'année calendaire  $[n,n+1]$  obtenue par la méthode du Bootstrap
3. Concaténation des incréments du triangle observé à la date  $n$  et de la diagonale obtenue à l'étape précédente
4. Calcul du triangle des paiements cumulés
5. Calcul des  $\hat{f}_j$  sur le triangle obtenu grâce à la nouvelle information disponible et calcul de  $R^{n+1} + Z_{[n,n+1]}$ , où  $Z_{[n,n+1]} = \sum_{i=1}^n Z_{i,n-i+1}$  ou bien  $CFP_{n+1}$ .
6. Calcul des CDR.

Pour notre cas, on a simulé les CDR 1000 fois tout en obtenant une distribution empirique qui stagne à partir d'un certain rang et qui est proche d'une normale comme prévu (le test de Kolmogorov-Smirnov est indispensable pour juger de la qualité de l'ajustement par cette loi).

### III.2.2 Application

Tout d'abord on commencera par l'application de la méthode classique de Bootstrap. Ainsi, on a calculé notre diagonale de paiements, sous forme d'incrément, associé à l'année calendaire n+1, qui coïncide dans notre cas avec 2015, et qui sera simulée.

Puis, tout en se basant sur les règlements estimés selon Glm-Gamma, associés au triangle supérieur mais aussi l'année calendaire 2015, on a constitué nos résidus de Pearson servant principalement au ré-échantillonnage et ce pour obtenir nos règlements bootstrappés.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1999	-312,72975	-28,990466	-2049,9277	-1927,4809	-1131,0155	-315,65282	-6,5740709	-306,09484	392,671058	-530,06819	484,558918	1417,85077	298,631637	-282,38965	160,673989	0,00025674
2000	164,135116	-326,53972	-981,29682	-951,15837	-509,4466	469,235899	1381,80922	-483,69613	-502,64159	1560,28645	2197,5782	-720,83632	-432,29806	-215,10978	-150,90036	58,0997388
2001	-143,9759	-995,75354	-2070,7038	-1521,983	-234,75435	691,967046	-256,85542	-821,45336	798,266409	696,780378	-868,51515	-743,79311	184,32285	511,696353	-37,472343	
2002	-98,293875	-1244,2981	-1532,0146	-834,24822	1730,57453	-252,6332	-1137,8596	1525,41926	917,87531	-416,8189	-619,12356	339,089147	-23,036206	34,1260942		
2003	-123,25537	724,201669	-10,848582	3486,50431	887,341344	-479,1378	887,620054	827,578433	-707,42785	-723,58379	-780,51274	-240,39847	264,084605			
2004	24,2627686	-522,65584	1145,5108	1553,01915	-311,7721	-67,869202	1526,18065	-373,48502	-394,84442	-162,49581	-598,01367	211,909317				
2005	199,15778	297,803018	3338,76932	578,793326	-696,68412	643,466566	-1205,8995	-96,213764	-142,96598	-557,82441	199,072438					
2006	231,343281	1481,75078	1199,25296	-438,86999	-341,66826	-560,97658	-193,38144	67,9462811	-352,30725	94,3654325						
2007	148,431002	2092,67632	512,486805	-623,32144	-373,85961	-242,79085	-319,34641	-311,77684	115,888628							
2008	587,551647	674,27265	-229,65776	-294,72949	282,454716	135,58415	-963,25022	26,2570867								
2009	-517,0803	-17,465707	-363,30015	824,171878	406,78422	-84,21107	-36,09912									
2010	-564,12871	-208,73289	490,556915	182,710299	406,678671	40,0151045										
2011	132,365549	-270,98057	-62,731898	94,6262963	-53,98688											
2012	22,7294558	-893,60118	898,728428	1,08017546												
2013	322,047391	-561,40263	-309,59703													
2014	-0,0001465	9,76326691														

*Tableau 45 : Résidus de Pearson jusqu'à l'année calendaire 2015*

*Partie IV. Le risque de provisionnement dans le cadre du SCR*

On remarque qu'il y'a des résidus de Pearson associé à l'année calendaire 2015 vu que notre objectif principal est d'isoler les incréments des règlements bootstrappés associés à cette année calendaire après ré-échantillonnage.

Pour notre cas et comme mentionné au début, on a simulé 1000 fois et ce pour obtenir une distribution exhaustive et s'approcher de plus en plus de la vraie valeur de notre SCR.

	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1	-	303 677,85	109 003,70	180 533,99	272 381,27	2 392 556,11	1 560 000,03	2 069 581,50	13 562 151,57	13 622 544,87	8 905 649,85	12 291 018,69	12 369 049,50	24 894 895,20	28 189 926,76
2	541 735,02	123 914,84	339 050,78	-	935 680,17	472 799,96	1 830 758,40	3 733 156,24	2 681 928,46	6 172 353,70	10 120 933,10	11 552 214,27	30 903 427,25	25 363 771,88	27 765 215,72
3	321 740,91	-	-	319 728,47	905 616,88	4 465 174,93	1 625 490,89	3 935 678,77	6 025 555,36	7 387 649,57	7 759 584,35	11 539 762,45	19 844 225,09	24 530 471,12	23 807 505,47
4	-	62 219,56	-	6 762,87	249 546,71	3 757 346,16	2 933 659,84	2 514 371,22	3 782 957,00	5 583 011,87	9 425 740,54	9 100 238,77	14 192 291,66	26 143 950,39	24 612 335,82
5	289 363,31	1 072 788,58	19 537,58	1 709 603,77	1 660 062,14	1 931 109,01	3 578 245,80	3 439 712,45	7 290 057,66	4 833 954,57	7 657 531,48	10 439 288,78	23 614 538,12	24 481 646,70	24 151 059,47
6	206 067,70	264 080,14	25 595,09	387 016,42	2 399 681,17	433 269,56	1 851 680,34	3 626 256,93	6 073 481,13	7 636 992,44	12 148 068,08	11 636 494,47	18 811 627,01	25 323 241,16	23 273 765,84
7	153 890,07	349 888,20	33 180,60	468 891,97	628 013,78	2 924 274,51	2 817 807,97	3 128 327,29	3 782 957,00	9 167 374,48	2 022 119,34	13 785 477,46	23 130 855,27	27 275 831,95	23 120 106,16
8	-	-	96 632,21	1 101 507,48	1 379 959,91	-	418 994,30	2 102 010,67	6 073 481,13	4 255 597,14	10 111 413,99	20 453 639,01	20 867 189,50	23 212 373,25	22 048 402,02
9	541 735,02	-	153 767,83	-	1 872 273,60	88 310,06	1 871 216,66	1 281 151,99	2 934 614,02	6 912 819,78	17 550 901,55	12 761 816,45	19 533 532,03	23 228 475,06	26 373 967,18
10	165 066,05	386 106,58	158 009,31	930 115,73	1 629 420,08	1 042 148,36	1 988 373,34	3 510 382,43	7 278 630,79	5 313 658,20	8 640 555,38	11 387 913,18	15 518 769,00	37 319 824,09	22 116 380,29
11	75 919,06	748 515,48	-	162 907,06	475 052,42	2 110 971,11	2 132 538,40	5 356 912,08	5 402 547,73	8 982 712,23	6 363 486,53	12 341 087,94	21 691 694,40	29 653 394,52	30 202 958,55
12	122 734,98	-	-	52 664,56	2 463 240,95	138 674,62	2 910 865,87	4 031 389,03	5 296 495,95	7 636 992,44	6 600 397,72	5 352 284,37	30 903 427,25	26 143 950,39	25 384 861,61
13	200 296,20	167 036,96	215 330,00	371 022,97	2 182 247,26	4 602 767,04	2 605 690,70	2 761 708,49	5 693 497,76	6 713 751,84	7 876 188,30	9 100 238,77	22 628 412,53	30 321 541,86	27 335 616,71
14	-	350 030,70	31 497,92	723 575,33	574 779,99	1 981 585,38	990 882,69	2 974 903,88	3 981 966,52	7 511 037,58	7 408 892,71	12 882 060,01	16 009 489,10	22 480 367,38	23 273 765,84
15	486 200,39	-	37 983,72	223 134,91	1 871 996,38	1 960 012,42	4 321 991,41	3 920 687,05	6 601 605,45	2 269 683,05	7 408 892,71	13 168 211,07	22 097 793,49	33 336 792,32	25 555 924,01
16	-	424 706,82	28 844,61	353 364,24	475 052,42	2 627 967,19	2 132 538,40	4 296 361,84	4 698 535,36	11 652 466,47	17 138 078,33	15 582 815,39	19 680 218,79	26 686 062,19	25 752 399,25
17	84 108,02	-	-	930 115,73	671 733,50	3 663 868,66	1 455 012,78	2 785 814,20	6 786 242,94	6 384 679,56	6 934 513,40	12 975 989,17	21 789 721,31	24 077 117,32	20 880 714,64
18	247 459,67	1 131 543,52	59 182,92	-	-	1 844 479,09	1 837 039,21	1 443 311,19	7 278 630,79	7 180 970,51	9 755 437,60	15 215 275,19	22 105 227,93	24 512 580,65	28 081 833,41
19	154 114,38	1 441 384,76	-	-	827 748,96	1 754 804,18	1 051 784,49	2 389 652,48	7 163 490,43	4 149 917,84	6 705 056,29	18 187 846,15	29 234 007,13	24 588 528,03	43 378 789,13
20	-	62 219,56	131 436,70	-	1 013 513,17	414 307,74	2 414 537,46	2 561 753,26	4 304 136,86	6 906 235,53	7 408 892,71	16 713 175,08	18 683 660,82	25 591 967,53	25 836 018,11
21	-	-	163 194,14	552 924,24	989 379,44	-	1 855 239,17	2 389 652,48	3 782 957,00	8 301 243,76	9 755 437,60	11 875 697,70	21 690 491,63	23 452 707,63	42 629 801,86
22	135 899,72	386 106,58	-	1 709 603,77	43 285,54	1 310 180,01	731 599,99	4 122 646,95	7 355 155,93	6 695 541,67	6 469 511,14	15 215 275,19	19 533 532,03	25 106 237,81	27 134 889,65
23	1 017 057,48	311 597,46	-	79 172,11	2 534 129,87	1 711 741,98	3 916 868,22	4 296 361,84	7 592 485,67	7 574 436,72	3 527 405,14	14 459 745,20	20 966 216,24	28 172 025,68	26 290 432,31
24	639 754,38	649 812,51	88 292,37	441 612,46	893 678,10	771 292,87	2 796 970,75	4 890 744,38	6 342 883,57	7 342 673,98	7 152 403,91	14 459 745,20	16 814 501,27	23 244 577,10	23 809 404,59
25	-	298 345,05	278 204,94	180 533,99	159 573,22	1 671 215,86	2 000 176,25	5 892 205,22	5 296 495,95	6 716 374,40	6 249 633,24	9 552 615,32	18 401 049,56	27 110 984,88	26 629 205,14
26	486 200,39	512 825,60	243 306,48	149 730,72	512 792,90	935 993,99	2 069 723,17	2 044 866,58	6 800 482,21	9 842 697,85	8 597 666,86	10 853 422,53	22 818 756,51	25 773 626,51	20 819 411,35
27	316 557,94	220 255,52	81 200,86	371 022,72	1 187 476,97	1 389 004,24	1 569 776,19	1 281 151,99	5 716 912,62	8 655 134,44	7 406 070,65	10 514 341,77	25 055 163,25	15 516 432,03	32 891 123,70
28	269 314,31	924 033,88	-	253 231,00	1 379 959,91	1 649 554,10	1 625 490,89	4 296 361,84	6 069 652,93	5 590 573,38	7 998 255,30	15 570 703,91	21 439 917,01	30 171 809,13	24 329 081,91

*Tableau 46 : Extrait des 1000 itérations des règlements bootstrappés*

Les premières remarques à tirer sont les suivantes :

-Il existe des règlements nuls, ceci est du au faite que notre ré-échantillonnage induit des valeurs négatives des règlements bootstrappés ce qui nous amène à les annuler pour se placer dans le cadre rationnel de Provisionnement.

-Le nombre des règlements bootstrappés par simulation n'est que de 15, ce qui est logique vu que notre diagonale de paiements de l'année 2015 est privée des règlements des sinistres de 2015 (c'est-à-dire le dernier terme de la diagonale  $n+1$ ) qui ne sont disponible sachant l'information qu'on détient jusqu'à 2014.

L'étape la plus importante est la constitution des 1000 triangles des incréments de règlements contenant chacun le triangle de liquidation de départ et les règlements bootstrappés superposés au niveau de la diagonale de l'année calendaire 2015 et ce pour chaque simulation. Puis on cumulera ces triangles pour lesquels on calculera les coefficients de passage ainsi que les chargements cumulés des années calendaires ultérieures pour but de calculer les différentes valeurs des  $CFP^{n+1}$ . Le tableau suivant traduit une itération résumant l'opération venant d'être mentionnée.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
5 590 200	24 850 800	36 825 000	46 195 913	53 675 513	59 957 349	65 727 240	68 919 163	72 002 026	73 227 616	75 484 833	77 751 084	78 298 578	78 311 814	78 697 570	78 780 647
6 016 800	21 767 400	36 436 922	48 069 122	56 409 701	63 869 840	72 094 511	74 551 216	75 985 141	79 778 734	83 863 604	84 021 570	84 099 134	84 126 022	84 311 531	84 311 531
6 022 800	21 044 147	32 939 147	44 016 804	54 517 415	63 496 979	68 670 465	70 862 463	74 585 446	77 535 289	78 062 310	78 264 645	78 743 354	79 013 531	79 317 209	79 357 633
6 399 000	21 020 400	36 161 434	50 764 444	68 458 258	75 198 238	78 436 200	85 417 019	89 460 417	90 916 670	91 814 855	93 096 616	93 464 691	93 573 695	93 912 776	93 960 639
6 142 800	28 969 271	50 647 455	82 904 508	97 313 996	103 236 588	111 238 770	116 691 609	118 069 595	119 041 006	119 693 066	120 385 084	120 565 618	120 716 703	121 154 142	121 215 888
6 984 307	25 617 789	54 438 372	80 077 370	91 219 921	98 759 004	108 858 018	112 209 421	114 238 706	116 137 482	117 116 428	117 388 810	117 816 510	117 964 149	118 391 615	118 451 952
7 219 848	28 937 047	67 360 911	88 135 741	97 588 076	106 834 884	109 941 095	113 729 171	116 090 493	117 357 530	119 750 086	120 780 955	121 221 014	121 372 920	121 812 737	121 874 819
7 787 917	36 487 823	66 505 399	84 130 417	95 585 622	102 003 195	108 010 791	112 406 640	114 591 139	116 151 139	118 183 087	119 200 466	119 634 767	119 784 685	120 218 747	120 280 016
7 988 513	41 066 148	69 166 048	87 019 913	99 049 986	106 807 682	112 844 097	116 682 606	118 752 188	121 069 320	123 187 306	124 247 764	124 700 455	124 856 721	125 309 162	125 373 026
11 303 765	43 774 535	74 428 249	98 840 080	116 778 234	127 820 523	133 603 209	147 165 361	150 932 157	153 877 195	156 569 122	157 916 948	158 492 310	158 690 922	159 265 968	159 347 138
6 858 216	32 152 625	58 338 646	85 072 172	101 399 757	110 469 533	124 092 078	130 391 285	133 728 738	136 338 097	138 723 195	139 917 394	140 427 176	140 603 149	141 112 651	141 184 569
5 500 928	25 788 492	51 703 512	71 588 139	85 378 573	94 284 223	101 233 212	106 372 049	109 094 713	111 223 405	113 169 147	114 143 364	114 559 240	114 702 798	115 118 445	115 177 114
7 504 970	27 972 616	51 732 867	71 669 437	83 960 456	91 830 434	98 598 573	103 603 669	106 255 475	108 328 767	110 223 870	111 172 732	111 577 784	111 717 606	112 122 436	112 179 578
7 850 791	27 168 401	57 979 265	70 348 315	82 555 581	90 293 875	96 948 765	101 870 113	104 477 547	106 516 148	108 379 541	109 312 526	109 710 801	109 848 283	110 246 339	110 302 525
8 649 699	29 484 899	54 379 794	73 671 016	86 454 858	94 558 647	101 527 862	106 681 656	109 412 245	111 547 133	113 498 538	114 475 590	114 892 677	115 036 652	115 453 509	115 512 349
8 458 092	36 648 018	67 147 862	90 968 554	106 753 970	116 760 483	125 366 031	131 729 907	135 101 622	137 737 770	140 147 354	141 353 812	141 868 828	142 046 608	142 561 341	142 633 997
<b>Coefficients</b>	1,83224	1,35475	1,17353	1,09373	1,07370	1,05076	1,02560	1,01951	1,01749	1,00861	1,00364	1,00125	1,00362	1,00051	

Tableau 47 : Simulation du calcul de la  $CFP_i^{2015}$ ,  $i=1 \dots 1000$

Il est à noter que le calcul de la  $CFP^{2014}$  se fait de manière usuelle, tout en se basant sur le triangle de règlements cumulés de base sur lequel on appliquera la méthode de CL (voir méthode de Chain Ladder dans la partie III).

Ainsi, on a tous les ingrédients pour calculer le CDR, observable en 2015, et ce pour chaque itération selon la formule suivante :

$$CDR_i = CFP_i^{2015} - CFP^{2014}$$

<u>CDR</u>
- 12 008 388,96
- 19 683 164,78
6 758 530,97
26 606 293,56
- 9 806 606,83
5 994 789,17
6 410 577,16
18 183 210,86
81 734,01
- 5 474 415,08
- 32 590 149,76
- 3 045 291,40
- 25 324 836,92
32 283 788,97
- 23 093 700,61
- 28 000 445,06
20 771 052,42
- 17 482 611,52
- 88 708 316,42
9 568 801,57
- 52 102 542,90
- 5 700 666,08
- 27 491 005,45
6 610 528,58
6 081 934,44
11 629 922,55
- 5 644 004,79
- 16 065 312,15

Tableau 48 : Extrait du vecteur des  $CDR_i$ ,  $i=1 \dots 1000$

Il est usuel que pour des scénarios on obtient des malis ( $CDR_i < 0$ ) et d'autres des bonis ( $CDR_i > 0$ ).

Pour clôturer cette partie, il est important de tester le comportement normal des  $CDR_i$  sur lequel on s'est basé pour constituer les intervalles de confiance de ces derniers dans le modèle de M&W.

Pour ce faire, on a effectué son QQ-Plot ainsi que le test de Kolmogorov-Smirnov pour s'assurer de notre approximation comme le montre les figures suivantes :

## Distribution selon la loi normal

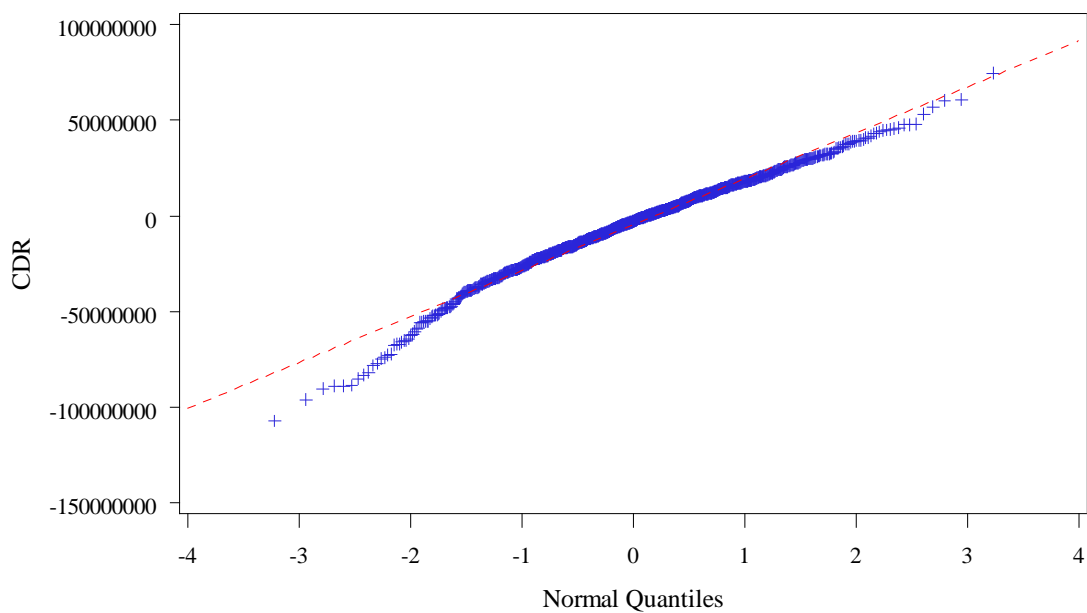


Figure 21 : test de QQ-Plot de normalité des  $CDR_i, i=1 \dots 1000$

Goodness-of-Fit Tests for Normal Distribution				
Test	Statistique		p Value	
Kolmogorov-Smirnov	D	0.03868883	Pr > D	>0.05
Cramer-von Mises	W-Sq	0.05006104	Pr > W-Sq	>0.010
Anderson-Darling	A-Sq	1.53665738	Pr > A-Sq	>0.010

Tableau 49 : test de Kolmogorov- Smirnov de normalité des  $CDR_i, i=1 \dots 1000$

Suite à ces résultats, le choix de l'approximation par la loi normale des  $CDR_i$  est justifié.

Ainsi, on a tracé l'évolution des  $CDR_i$  empirique et celle théorique selon la loi normale tout en s'assurant de la fiabilité des intervalles de confiance de M&W. Pour ce faire, on a dégagé le pourcentage des  $CDR_i$  inclus dans ces intervalles comme le montre le graphe suivant :

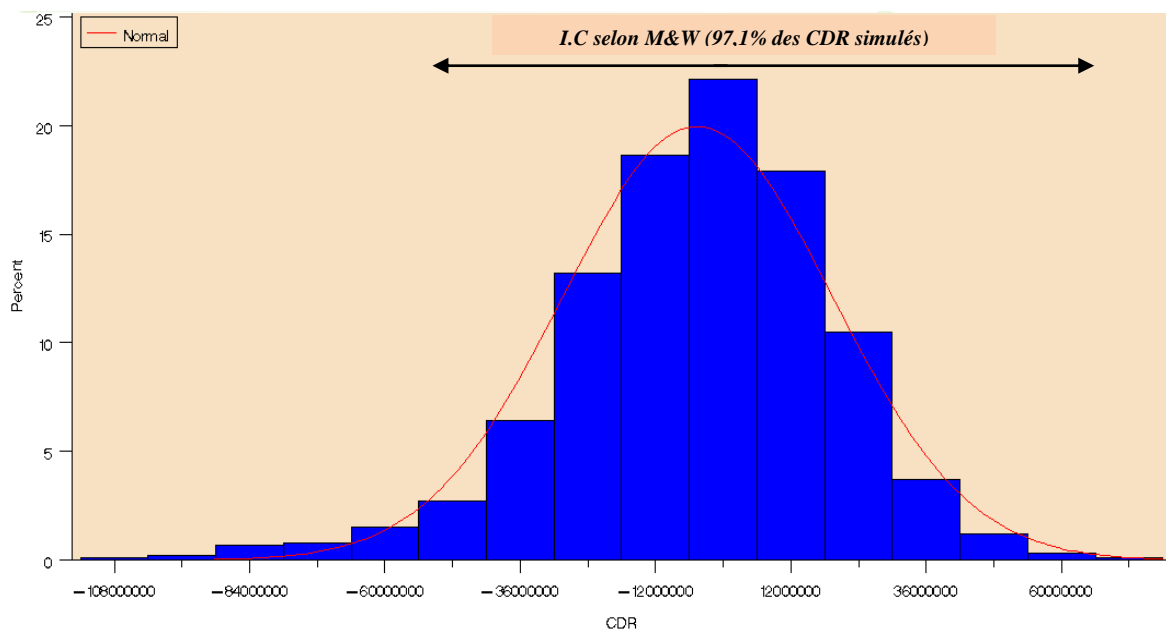


Figure 22 : L'approximation normale de l'évolution empirique des  $CDR_i, i=1, \dots, 1000$

Une part de 97.1% ne peut que traduire la fiabilité, précision ainsi que rationalité des intervalles de confiance. L'interprétation à dire c'est qu'il y'a 97,1% de chance que le boni-mali qui frappera les comptes de résultats de la compagnie à l'année calendaire [2014,2015] serait inclu dans l'intervalle de confiance calculé par M&W, et ce pour la branche pilote.

## Chapitre IV : Calcul du SCR et de la Marge de risque

### IV.1 Calcul du SCR

Après l'élaboration des modèles précédents (c'est-à-dire M&W et Bootstrap modifié), on a tous les ingrédients pour calculer le SCR et ce dans le cadre du modèle standard :

$$- \text{CSR} = \text{VAR}_{99,5\%}(-\text{CDR}) = \text{VAR}_{99,5\%}(\text{R}-\text{CDR})-\text{R}$$

(Propriété d'une mesure de risque).

Par application de cette formule à notre distribution obtenue selon la méthode de Bootstrap modifiée, on a obtenu le résultat suivant :

Quantiles	-CDR
75% Q3	18 224 859
90%	33 576 488
95%	47 332 729
99%	77 735 803
Var(99,5%)	88 708 793,60
100%	107 198 565,00

*Figure 23 : Statistiques descriptives de l'évolution des  $(-\text{CDR}_i)$   $i=1 \dots 1000$*

Ainsi, on déduit que le SCR adéquat pour la branche pilote de la compagnie est : **88 708 793.60** DHS.

## IV.2 Calcul de la MR

Notre choix est tombé sur l'approche du cout de capital qui stipule que la MR se calcule comme suit :

$$MR = CoC * \left( \frac{CSR_1}{1+r_1^{(0)}} + \frac{CSR_2}{(1+r_2^{(0)})^2} + \dots + \frac{CSR_T}{(1+r_T^{(0)})^T} \right)$$

Avec :

-**CoC**: le cout de capital qui est le taux de rendement qu'exige les investisseurs pour insérer les fonds propres dans la compagnie et ce pour se priver d'investir au marché. De manière général, il est de 6%. Il ne faut oublier que la MR est destinée à couvrir les provisions de la compagnie et donc dédiée aux assurés.

- **$r_i^{(0)}$**  : taux d'intérêt associé à l'année calendaire  $i$  et tiré de la courbe zéro coupon.

-**T** traduit l'horizon de liquidation ou d'extinction des engagements de l'assureur.

-**Les CSR** sont calculés jusqu'à l'horizon de liquidation de la compagnie de son portefeuille, ce qui laisse l'application de cette méthode approximative de la valeur réelle de la MR.

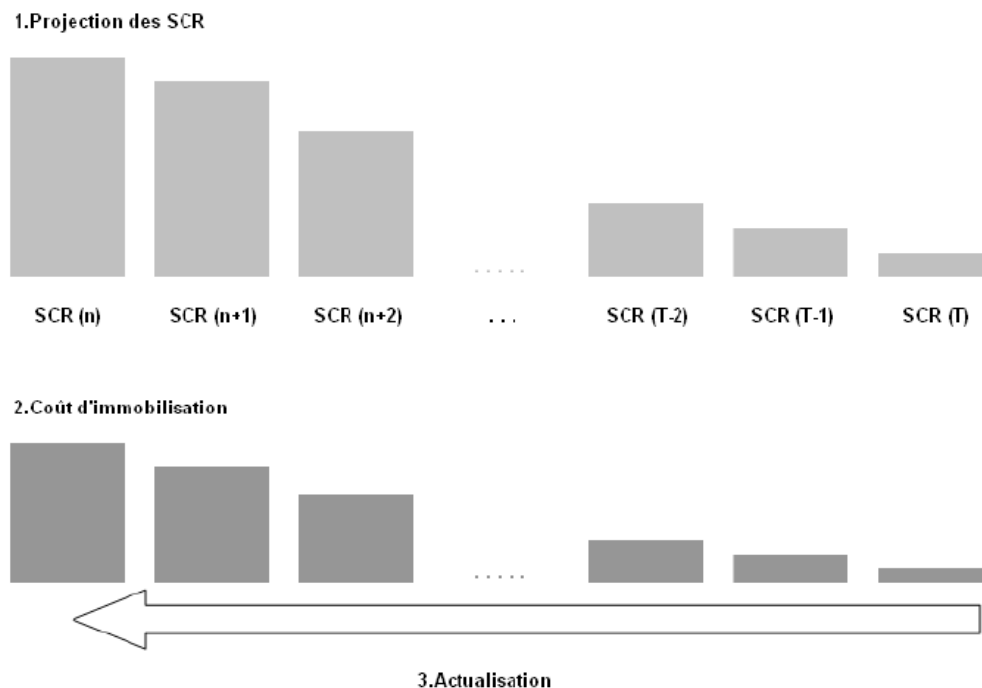


Figure 24 : Illustration de la méthode du coût de Capital pour la détermination de la MR.

Il est à noter que pour notre cas, on supposera l'extinction des SCR jusqu'à la dernière année calendaire du triangle de liquidation, c'est-à-dire après 15 ans de notre année comptable.

D'autrepart, le calcul des SCR futurs s'est effectué tout en se basant sur l'approximation par utilisation de la proportionnalité avec le BE, et ce selon la formule suivante :

$$SCR_i = \left( \frac{SCR_0}{BE_0} \right) * BE_i$$

Ou  $SCR_0$  traduit le SCR calculé en  $i=0$ . Il s'agit pour notre cas de l'année calendaire [2014,2015]. Tandis que le  $BE_0$  est le BE calculé en 0 et  $BE_i$  est le BE de l'année calendaire  $i$  (il s'agit du flux futur de l'année  $i$ ).

Par conséquent, la formule finale de la MR à appliquer est la suivante :

$$MR = 6\% \cdot \left( \frac{SCR_0}{BE_0} \right) \cdot \sum_{i \geq 1} \frac{BE_i}{(1+r_i^{(0)})^i}$$

Année futures(i)	Flux futures Actualisés	SCR(i)	SCR(i) actualisés
[2015-2016]	84 203 087	67 734 523,52	66 000 787,76
[2016-2017]	57 410 404	46 181 992,54	43 739 873,52
[2017-2018]	36 848 080	29 641 277,87	27 223 347,43
[2018-2019]	23 879 080	19 208 774,35	17 018 854,60
[2019-2020]	16 017 144	12 884 487,42	10 981 772,46
[2020-2021]	10 075 027	8 104 538,61	6 673 336,21
[2021-2022]	6 480 794	5 213 270,86	4 143 132,16
[2022-2023]	4 227 397	3 400 596,54	2 605 912,40
[2023-2024]	2 522 267	2 028 957,92	1 497 739,81
[2024-2025]	1 223 288	984 035,16	699 385,88
[2025-2026]	556 551	447 700,19	303 611,79
[2026-2027]	293 504	236 099,96	151 380,15
[2027-2028]	226 217	181 973,07	109 863,24
[2028-2029]	46 914	37 738,53	21 359,38
		MR	10 870 221,41

*Tableau 50 : Démarche de calcul de la MR par la méthode du Cout de Capital*

Ainsi, on déduit que la valeur de la MR selon la méthode du cout de Capital est de **10 870 221.41** DHS, ce qui constitue une part de **2.65%** de notre BE.

Cette grandeur s'ajoute à celles calculées auparavant (BE et SCR) pour compléter le passif de la compagnie d'assurance respectant la vision de la Solvabilité II et ce pour la branche pilote.

## **Partie V : Automatisation de la quantification du risque de provisionnement à 1 an :**

### *Introduction :*

Dans le but de rendre la quantification du risque de provisionnement à un an accessible aux actuaires de Saham Assurance, et ce dans le cadre de la directive de la solvabilité II, on a développé deux applications sur VBA :

- Une application du modèle de M&W, permettant de mesurer la volatilité du Boni-Mali passant de l'année calendaire actuelle à la suivante.
- Une application du modèle de la simulation de la diagonale de paiements permettant le calcul du SCR comme obligation pour le bilan de la compagnie sous cette nouvelle directive.

Il est à noter que ces deux applications sont adaptables à n'importe quel triangle de liquidation suivant une branche de l'assurance non vie.

### *I. Choix de l'outil informatique :*

Notre choix est tombé sur le VBA vu son attachement avec Excel. Ce dernier est le plus utilisé comme outil de représentation des bases de données dans les compagnies d'assurances en parallèle avec le SAS, ce qui justifie ce choix judicieux.

De plus, c'est un langage simple de programmation permettant d'élaborer des interfaces à savoir des « userforms » ou même graphiques sophistiquées et esthétisées permettant de donner plus d'accessibilité à son utilisateur.

Il contient :

- Un éditeur de texte pour écrire le code des procédures événementielles et des procédures et fonctions personnelles, et ce au niveau des projets liés aux feuilles ou bien des modules.
- Un éditeur pour créer une interface de l'application (Userform)

## II. Présentation de la réalisation :

### II.1 Réalisation du Modèle de M&W :

Pour plus d'interactions avec l'utilisateur, on a choisi l'interface suivante :



Tout d'abord, Il suffit que l'utilisateur insère son triangle de liquidation dans une feuille du même classeur, le premier bouton en bleu importe la base automatiquement pour la rendre prédisposée aux opérations suivantes :

-« Chain Ladder » : Calculer les coefficients de développement par année de déroulement ainsi que les règlements estimés des sinistres non encore déclarés.

-« Réserve » : Calculer La réserve totale sous la méthode de CL.

-« MSEP » : Calculer les erreurs quadratiques moyennes par année de survenance ainsi que les années agrégées. Il est à noter que ces valeurs ne doivent dépasser les volatilités déduites selon le modèle de Mack vu que ce dernier communique l'incertitude des réserves à l'ultime et de M&W à un an.

-« Coef de Variation » : Calculer les coefficients de variation des ( $CDR_i$ ),  $i=1.....15$  ainsi que le Boni-Mali total. Il est à noter que ces coefficients doivent être inférieurs à 15% pour juger de leur stabilité, ce qui est le cas (Voir l'application de M&W dans la partie IV)

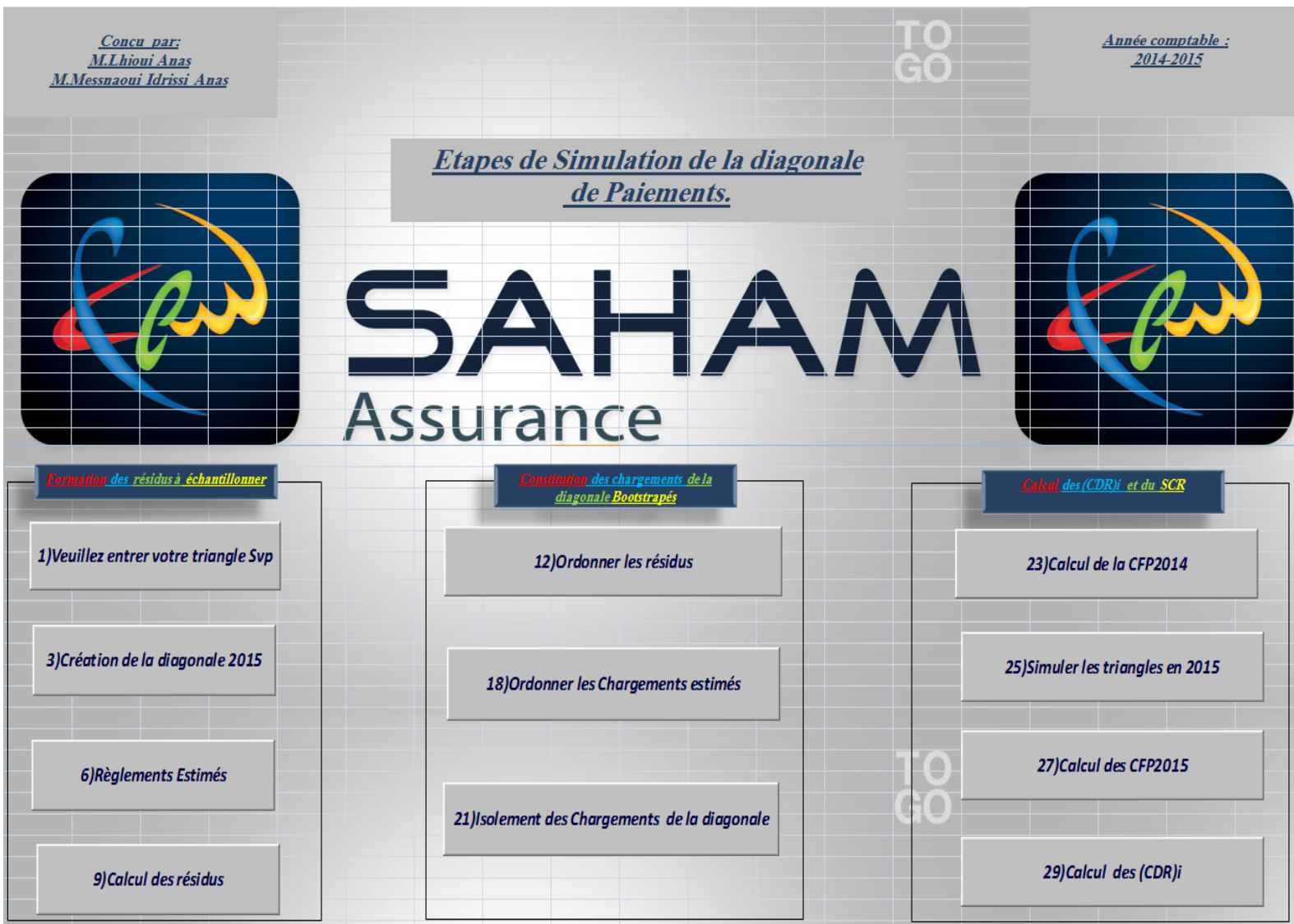
-« Best Estimate » : Calculer le Best Estimate de notre réserve et ce en se basant sur la méthode de GLM-Gamma obtenue comme meilleure méthode.

-« Effacer » : Vider la feuille de calcul pour permettre l'insertion d'un nouveau triangle support des opérations précédentes en cas de besoin de placement dans une nouvelle branche.

## II.2 Réalisation du Modèle de Simulation de diagonale de paiements :

L'importance de ce modèle provient du fait qu'on a besoin de la distribution des  $(CDR_i)$  pour calculer notre SCR comme étant le niveau des fonds propres exigé de la directive de la Solvabilité II.

Pour ce faire, on a suggéré l'interface suivante comme départ de notre travail :



Chaque étape est traduite par un ensemble de boutons traduisant des instructions hiérarchisées et ce comme suit :

### Etape1 : Formation des résidus à échantillonner

Tout d'abord, l'utilisateur doit insérer le triangle de liquidation dans une feuille du même classeur. L'importation se fait automatiquement tout en cliquant sur le premier bouton (« Veuillez entrer votre triangle SVP »).

Puis, il est indispensable de créer la diagonale qu'on simulera selon la méthode de Bootstrap Modifiée et ce tout en ayant l'information jusqu'à l'année calendaire 2014 (Le bouton « Création de la diagonale 2015 »).

Ensuite, on génère les règlements estimés par la méthode de GLM-gamma (le bouton « Règlements estimés »), élue comme meilleure méthode de calcul de la branche pilote de la compagnie qu'on exploitera pour le calcul des résidus de Pearson. (Le bouton « Calcul des résidus »)

### Etape2 : Constitution des chargements de la diagonale bootstrappés :

Pour ce faire, on commence par ordonner les résidus de Pearson (le bouton « Ordonner les résidus ») desquels on tirera les résidus bootstrappés par simulation, vu que la normalité est assurée par ces résidus.

D'autrepart, on placera les chargements estimés en un autre coté (Le bouton « Ordonner les chargements estimés ») desquels on tirera les chargements bootstrappés, y compris ceux de la diagonale, tout en appliquant la formule suivante :

$$c_{i,j} = \widehat{\mu}_{i,j} + r_{i,j} * \sqrt{\widehat{\mu}_{i,j}} ; \text{ avec :}$$

$\widehat{\mu}_{i,j}$  : Chargements estimés placés.

$r_{i,j}$  : Les résidus de Pearson bootstrappés.

Pour finir, on isole les chargements bootstrappés de la diagonale en chaque ligne pour faciliter leur usage. (Le bouton « Isolement des chargements de la diagonale »)

Il est à noter que ces chargements constituent le flux futur de l'année calendaire 2015 (n+1).

### Etape3 : Calcul des $(CDR_i)$ et du SCR:

Au début, on calcule la  $CFP_{2014}$  (Le bouton «Calcul de la CFP2014 ») qui est unique, vu qu'elle se base sur l'information jusqu'à aujourd'hui (voir, plus explicitement, la méthode de calcul dans la partie III, en particulier le cadre pratique de CL).

En deuxième lieu, on simule 1000 triangles de liquidation, dont chacun se distingue par une diagonale (année 2015) tirée des lignes simulées à l'étape 2. (Le bouton «Simuler les triangles en 2015 »)

Ainsi, on cumule ces triangles, on calcule leurs différents  $CFP_{2015}^i$  ( $i=1.....1000$ ). (Le bouton «Calcul des CFP2015 »)

Enfin, on a tous les ingrédients pour obtenir une distribution des  $(CDR_i) = CFP_{2015}^i - CFP_{2014}$ . (Le bouton « Calcul des  $(CDR_i)$  »)

Selon la définition du SCR du modèle standard, on calcule ce niveau de fonds propres qui est l'objectif de toute la démarche de l'application.

## **Conclusion générale :**

Solvency II constitue un tournant pour les compagnies d'assurance, qui commencent à ne pas se limiter sur la prudence procurée par le système déterministe tout en se référant à la prudence et l'exhaustivité des modèles stochastiques permettant aux assureurs de prévoir les scénarios les plus défavorables menaçant leur solvabilité et pérennité à l'ultime ainsi qu'au cours d'un an.

Le pilier I de cette nouvelle directive a apporté des exigences quantitatives pour les assurances, notamment en termes des provisions techniques et fonds pour permettre à l'assureur d'honorer ses engagements vis-à-vis de ses assurés. Les modèles stochastiques utilisés dans ce qui précède sont conformes à ces exigences surtout qu'ils visent la détermination des intervalles de confiance délimitant et la réserve constituée et le CDR traduisant le boni-mali pouvant impacté le compte des résultats de la compagnie pendant l'année calendaire actuelle.

Au final, et dans le cadre du nouveau référentiel de Solvabilité, on est parvenu à la constitution de la réserve dictée par le modèle GLM, considérée comme la méthode la plus accommodée à la branche pilote de la compagnie, ainsi que sa marge de risque correspondante sans oublier le CSR permettant de faire face au risque de ruine à 99.5 % de confiance, ce qui est considéré comme niveau acceptable par l'assureur.

## Bibliographie

### Ouvrages :

- ARNAUD LACOURNE [2009] Risque de réserve sous *Solvabilité II*
- M. DENUIT, A.CHARPENTIER [2005] Mathématiques de l'assurance non-vie, Tarification et provisionnement, Tome 2. Economica.

### Mémoires d'Actuariat :

- MARIE LOUIS [2010] : « Evaluation des provisions techniques non-vie dans le contexte de *Solvabilité II* » Mémoire FSEG Strasbourg.
- ILAN HABIB, STEPHANE RIBAN [2012] : « Quelle méthode de provisionnement pour des engagements non-vie dans *Solvabilité II* » Mémoire ENSAE ParisTech.
- Y.ZAKI [2014] : « Evaluation économique des provisions pour sinistres à payer sous la référentiel *Solvabilité II* » Mémoire INSEA.

### Sites internet

- Site de la FMSAR (Fédération Marocaine des Sociétés d'Assurance et de Réassurance) : <http://www.fmsar.org.ma/>
- Site de Ressources actuarielles : <http://www.ressources-actuariales.net/>

## **Annexes**

### **Annexe A : Présentation du secteur et de l'organisme d'accueil**

#### **Aperçu sur le secteur Assurantiel**

Le secteur marocain de l'assurance connaît une tendance haussière qui lui a permis d'être « le plus mature » au Maghreb selon l'agence de notation internationale Standard and Poor's. Classé deuxième après celui de l'Afrique du Sud, il est considéré l'un des secteurs les plus dynamiques de l'économie nationale, vu sa croissance significative et son important chiffre d'affaire annuel qui a atteint 28421.6 Millions de Dhs dont 19022.5 Millions de Dhs en assurance non vie et 9399.1 Millions de DHS en assurance vie et capitalisation selon la FMSAR.

Avec l'amorce du nouveau millénaire, le secteur des assurances au Maroc à l'instar des autres pays connaît de profondes mutations et se trouve ainsi confronté aux grands défis (libéralisation, concentration, assurance maladie obligatoire, bancassurance, système de refonte des retraites ) qui vont certainement affecter le processus de sa croissance, des défis qui une fois relevés, le secteur sortira certainement plus solide et plus apte à mener à bien sa principale mission, qui est celle de permettre à l'économie marocaine à mieux intégrer le nouveau siècle.

Parmi les secteurs de l'assurance qui ont vu une grande évolution, la branche non vie ou en particulier l'IARD paraît comme l'acteur principal sur le podium de l'assurance.

#### **Structure du chiffre d'affaires du secteur**

Selon la FMSAR, l'assurance non vie, ne cesse de présenter une évolution importante pendant ces dernières années, comme le montre le tableau suivant :

	2012	2013	2014	Evolution 2013/2014	Evolution 2012/2013
<b>Assurances Vie &amp; Capitalisation</b>	<b>8 839,1</b>	<b>8 598,6</b>	<b>9 399,1</b>	<b>9,3%</b>	<b>-2,7%</b>
Assurances Individuelles	5 596,8	5 192,3	5 641,3	8,6%	-7,2%
Assurances de Groupes	2 026,9	1 987,8	2 061,4	3,7%	-1,9%
Assurances Populaires	0,2	0,02	0,02	NS	NS
Capitalisation	933,5	1 257,7	1 368,2	8,8%	34,7%
Contrats à Capital Variable	218,9	152,7	326,7	114,0%	-30%
Acceptations Vie	62,8	8,1	1,4	-82,2%	-87,1%
<b>Assurances Non Vie</b>	<b>17 188,6</b>	<b>18 135,0</b>	<b>19 022,5</b>	<b>4,9%</b>	<b>5,5%</b>
Accidents Corporels	2 941,2	3 068,8	3 224,0	5,1%	4,3%
Accidents du Travail	2 039,5	2 140,4	2 213,5	3,4%	4,9%
Automobile	8 020,9	8 497,1	9 033,7	6,3%	5,9%
Responsabilité Civile Générale	477,0	509,5	509,3	0,0%	6,8%
Incendie	1 223,6	1 255,4	1 159,3	-7,7%	2,6%
Risques Techniques	337,7	377,1	416,0	10,3%	11,7%
Transport	657,5	587,4	568,5	-3,2%	-10,7%
Autres Opérations Non Vie	525,8	606,7	606,3	-0,1%	15,4%
Assistance - Crédit - Caution	840,6	968,9	1 091,1	12,6%	15,3%
Acceptations Non Vie	124,9	123,8	200,9	62,2%	-0,9%
<b>Total</b>	<b>26 027,7</b>	<b>26 733,6</b>	<b>28 421,6</b>	<b>6,3%</b>	<b>2,7%</b>

*Tableau 51 : Evolution du chiffre d'affaires par branche d'activité en MDhs*

*Source : FMSAR- Mars 2015*

### **Le marché des assurances par compagnie**

Le marché marocain se compose d'une quinzaine d'assurance, qui offrent des produits vie et non vie, la grande part du marché d'assurance est dominée par quatre assurances à savoir: SAHAM Assurance, Wafa Assurance, RMA WATANYA et AXA assurance.

	2012	2013	2014	Evolution 2013/2014	Part marché
Atlanta	1 182,3	1 271,4	1 410,8	11,0%	7,4%
Axa Assistance Maroc	47,4	88,4	125,2	41,6%	0,7%
Axa Assurance Maroc	2 691,6	2 793,5	2 762,0	-1,1%	14,5%
CAT	657,1	648,7	636,1	-2,0%	3,3%
Euler Hermes ACMAR	73,5	90,5	96,3	6,4%	0,5%
MAMDA	628,9	725,2	759,9	4,8%	4,0%
Maroc Assistance Internationale	357,0	391,4	436,5	11,5%	2,3%
Marocaine Vie	57,3	62,7	68,5	9,2%	0,4%
MATU	214,1	221,3	247,0	11,6%	1,3%
MCMA	408,0	423,1	471,2	11,4%	2,5%
Rma Watanya	2 739,4	2 625,0	2 726,2	3,9%	14,3%
Saham Assurance	2 772,4	3 108,5	3 309,0	6,5%	17,4%
Saham Assistance	297,3	297,6	298,4	0,2%	1,6%
Sanad	1 229,4	1 282,7	1 337,8	4,3%	7,0%
Wafa Assurance	2 708,5	2 919,2	3 059,0	4,8%	16,1%
Wafa IMA Assistance	65,1	106,6	133,8	25,5%	0,7%
Zurich Assurance Maroc	1 059,3	1 079,1	1 144,7	6,1%	6,0%
<b>Total</b>	<b>17 188,6</b>	<b>18 135,0</b>	<b>19 022,5</b>	<b>4,9%</b>	<b>100,0%</b>

*Tableau 52 : Evolution du chiffre d'affaires du marché d'assurance non vie par compagnie en MDhs*

*Source : FMSAR- Mars 2015*

### **Présentation de Saham Assurance :**

Saham assurance (ex-CNIA SAADA Assurance) a été créée en 1949 sous le nom de Compagnie Nord-africaine et Intercontinentale d'Assurance. Ce n'est qu'en 2001 que la Compagnie change de nom pour devenir CNIA Assurance et entreprend un vaste chantier de restructuration.

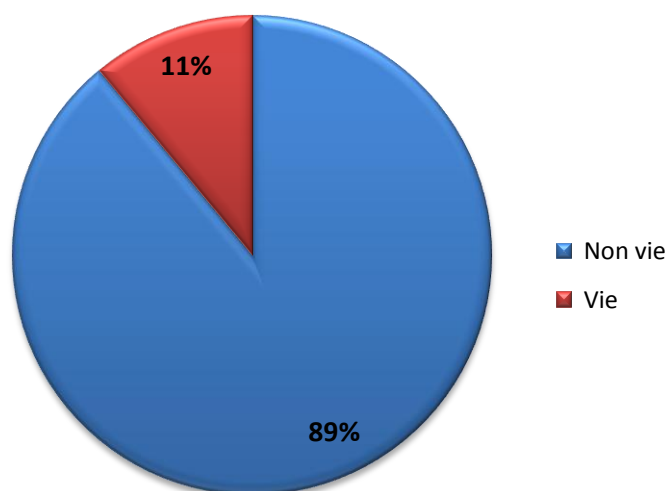
Rachetée en 2005 par le Groupe Saham, CNIA Assurance aspire à devenir un des acteurs majeurs de l'assurance au Maroc, dans ce sens, elle rachètera en 2006 l'assureur marocain ES SAADA.

En juin 2009, CNIA Assurance fusionne avec les assurances ES SAADA et devient CNIA SAADA Assurance.

En mars 2014, la compagnie et l'ensemble de ses filiales en Afrique et au Moyen-Orient (excepté au Liban) changent de nom pour devenir Saham assurance. Avec un chiffre d'affaires consolidé de 1.01 milliard USD, ses pays d'implantation sont les suivantes: Maroc, Algérie, Angola, Arabie saoudite, Bénin, Burkina Faso, Cameroun, Congo, Côte d'Ivoire,

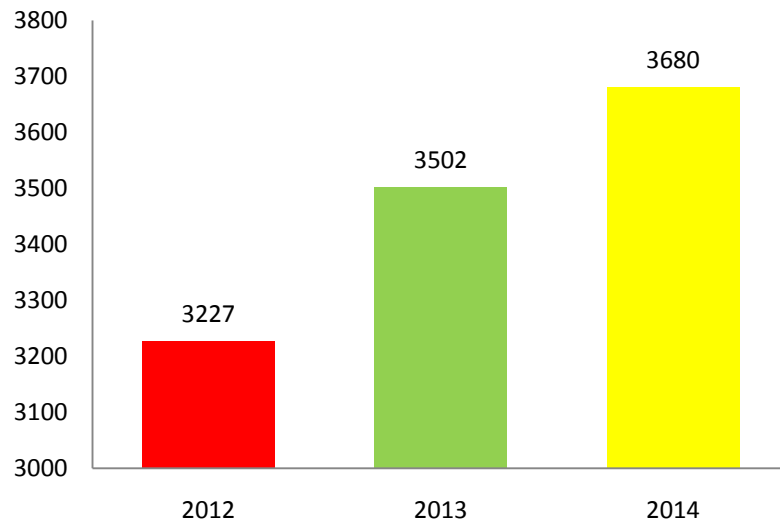
Gabon, Ghana, Guinée, ile Maurice, Kenya, Liban, Madagascar, Mali, Niger, Rwanda, Sénégal, Togo.

Concernant l'activité de La compagnie au Maroc, Saham Assurance est considérée comme un Leader en non vie avec une part de 17,4% du marché assurantiel marocain comme le montre le tableau précédent mais aussi une part de 89% de son chiffre d'affaires global.



*Figure 25 : Répartition du chiffre d'affaires de Saham par branche*

Dans un contexte fortement concurrentiel, SAHAM Assurance Maroc a réalisé, au terme de l'exercice 2014, un chiffre d'affaires global de 3 680 MDH, marquant une progression de 5,1% par rapport à 2013. Cette performance est due à la forte contribution de l'activité Non-Vie, qui s'établit à 3 309 MDH, en hausse de 6,5% par rapport à 2013, tandis que le chiffre d'affaires de l'activité Vie s'établit à 371 MDH en baisse de 5,7% par rapport à l'exercice 2013.

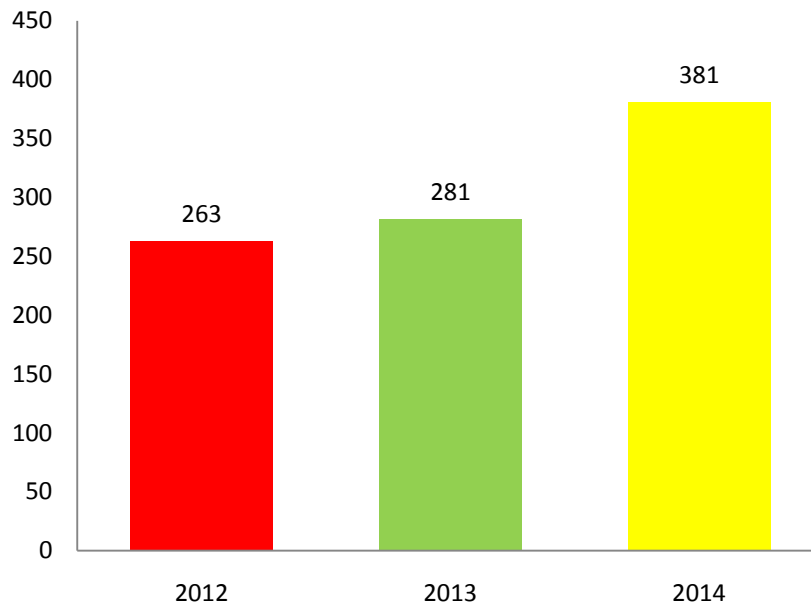


*Figure 26 : Evolution du chiffre d'affaires de Saham en MDhs*

D'autrepart, le résultat technique Non Vie affiche un bénéfice de 409 MDH contre 361 MDH en 2013 soit une évolution de +13,2%. L'activité Non-Vie est marquée principalement par la forte croissance des indicateurs techniques et par une amélioration du résultat financier.

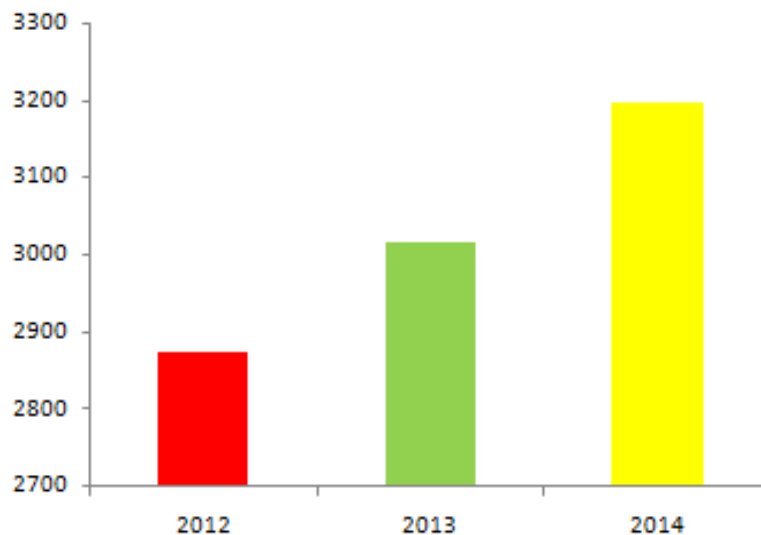
Le résultat technique Vie s'établit en 2014 à 44 MDH contre 15 MDH en 2013. Cette progression résulte de la hausse du résultat financier.

La Compagnie dégage un bénéfice net sur l'exercice 2014 de 321 MDH contre 281 MDH en 2013, soit une hausse de 14,5%, comme le montre la figure suivante :



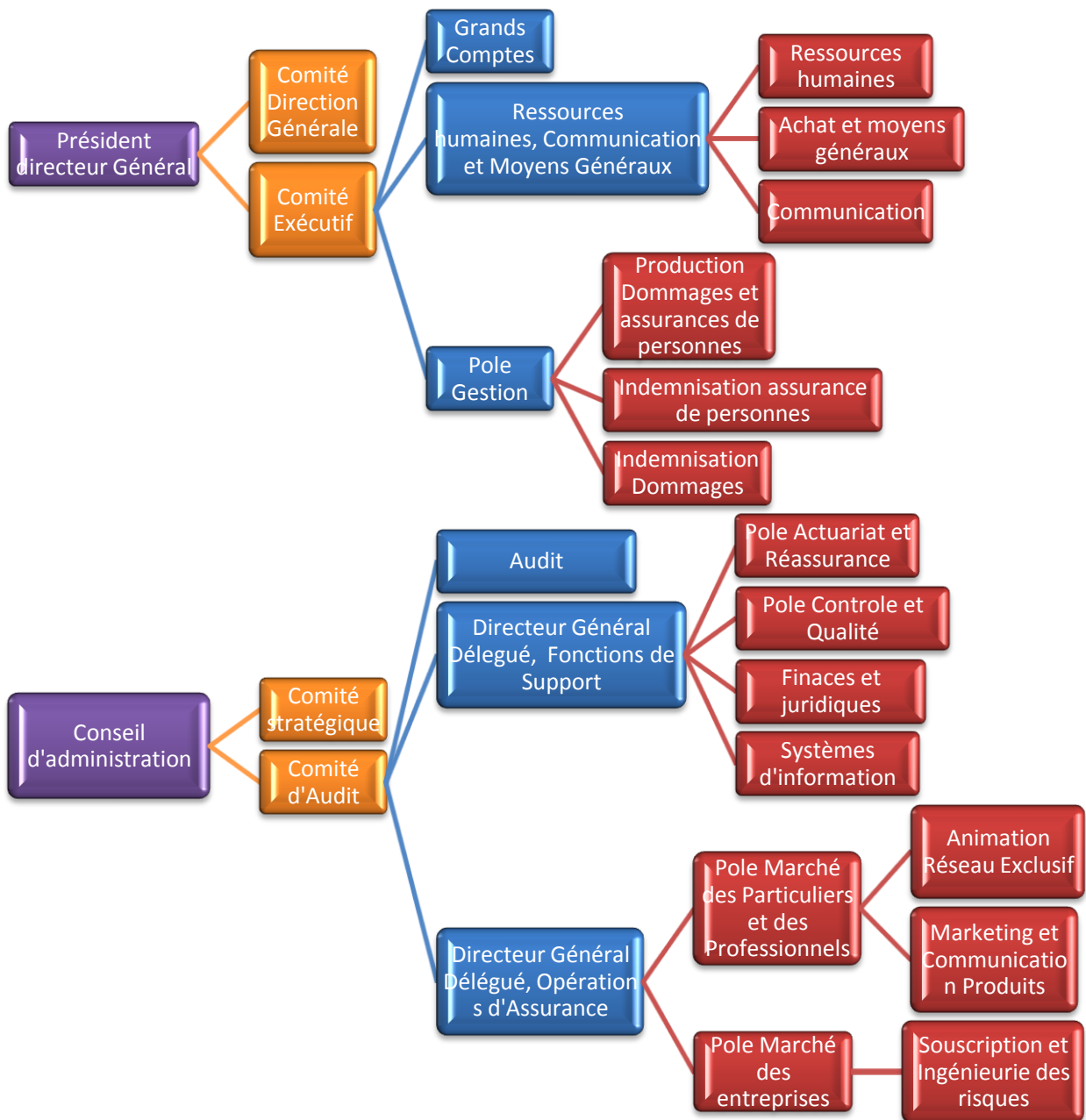
*Figure 27 : Evolution du résultat net de Saham en MDhs*

Les fonds propres de la compagnie s'élèvent à 3 197 MDH en 2014 contre 3016 MDH en 2013 soit une augmentation de 6%.

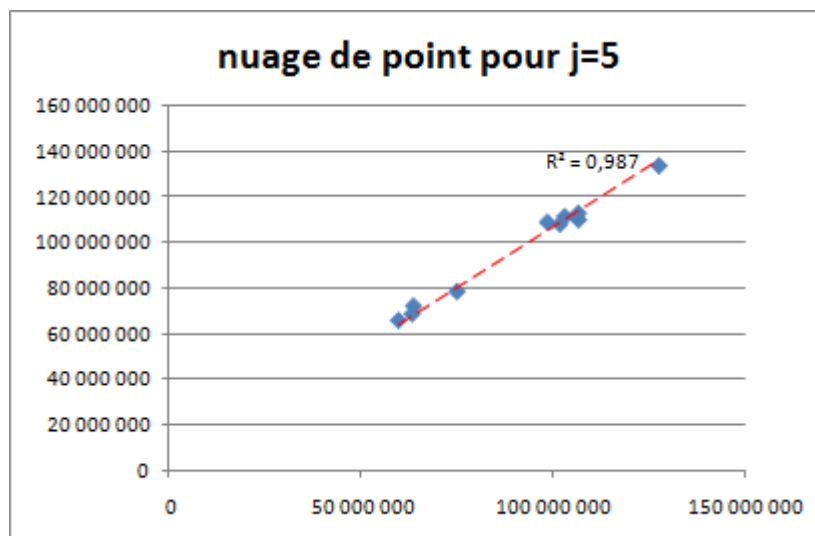
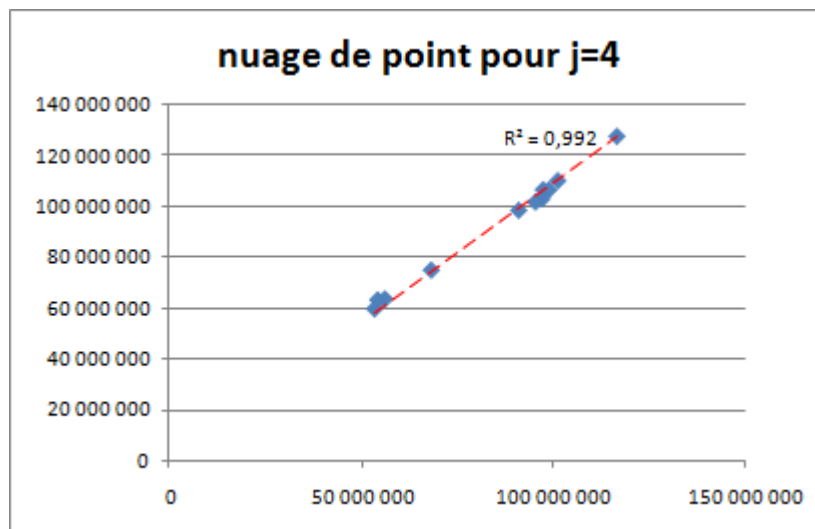
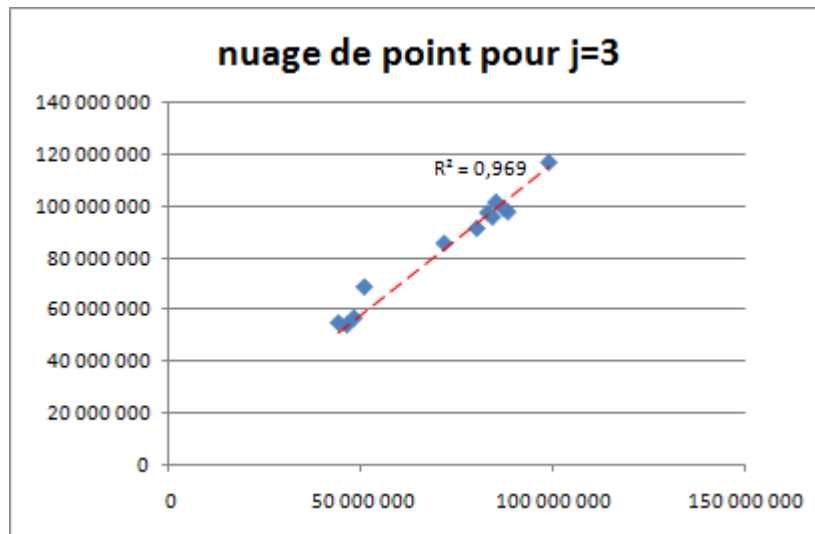


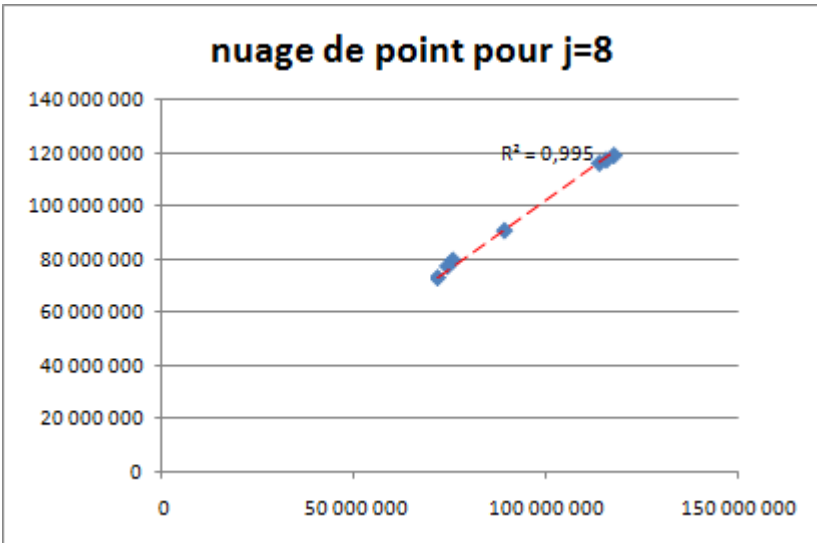
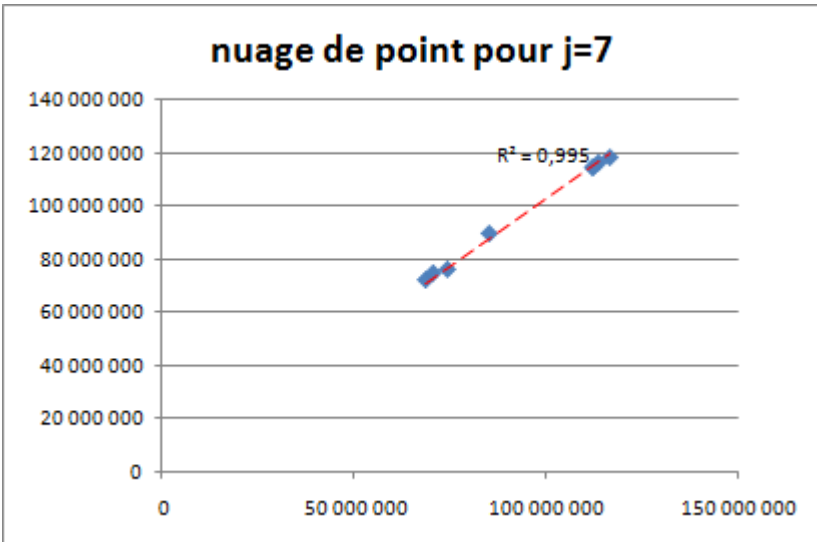
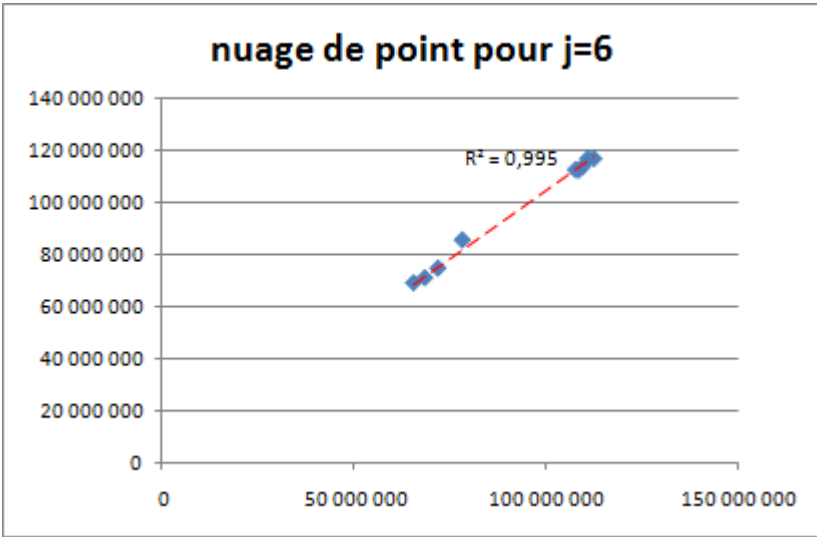
*Figure 28 : Evolution des fonds propres de Saham en MDhs*

**Organigramme de Saham Assurance :**



**Annexe B : Nuages des points des années de développements j=3...9.**





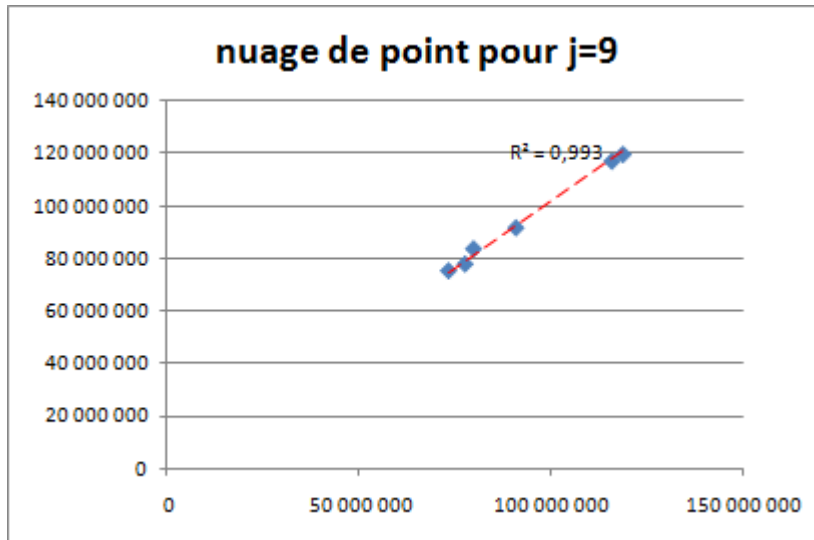


Figure 29 : Nuage des points de  $C(i,j+1)=f(C(i,j))$  de l'année de développement  $j=3$  à  $j=9$ .

Annexe C : Loi normale – loi log normale.

Une variable aléatoire  $X$  suit une loi log-normale de paramètres  $\mu$  et  $\sigma^2$  si la variable aléatoire  $Y = \ln(X)$  suit une loi normale de paramètres  $\mu'$  et  $\sigma'^2$ . On pose ainsi :

$$E(X) = \exp\left(\mu' + \frac{\sigma'^2}{2}\right) = \mu$$
$$\text{Var}(X) = \exp(2\mu' + \sigma'^2) * \exp(\sigma'^2 - 1) = \sigma^2$$

Ainsi on obtient :

$$\mu' = \ln(\mu) - \frac{\sigma'^2}{2}$$
$$\sigma'^2 = \ln\left(1 + \left(\frac{\sigma^2}{\mu}\right)^2\right)$$

Étant donné qu' $Y$  suit la loi normale, alors l'intervalle de confiance de cette variable est comme suit :

$$IC_{95\%}(Y) = [\mu' \pm z_{2.5\%} * \sigma'] ;$$

Avec  $z_{2.5\%} = 1.96$  ; c'est le quantile de la loi normale associé à la probabilité de rejet de 2.5%.

Donc, on obtient une estimation de l'intervalle de confiance de  $X$  suivant la loi log-normale qui est comme suit :

$$IC_{95\%}(X) = IC_{95\%}(\exp(Y)) = [\exp(\mu' \pm z_{2.5\%} * \sigma')]$$

(Propriétés de la fonction exponentielle)

#### Annexe D : Principe du QQ-Plot.

Le QQ-Plot ou le diagramme Quantile to Quantile est un outil graphique permettant de juger de l'adéquation d'une distribution théorique à un échantillon ou en général si deux distributions sont identiques.

Ce test repose sur la comparaison et la juxtaposition des quantiles théoriques (axe des abscisses) et les quantiles empiriques de l'échantillon (axe des ordonnées). Ainsi on obtient un nuage de point qui doit être aux alentours d'une droite dite de référence pour juger de la qualité de l'ajustement par la loi considérée.

Si le QQ Plot donne une droite de référence qui ne passe pas par l'origine, alors la distribution est adéquate mais les paramètres choisis ne le sont pas et doivent être modifiés.

### Annexe E : Principe et calcul de la distance K-S.

Le test de Kolmogorov Smirnov traduit une mesure descriptive de l'ajustement. Ce test évalue la distance entre les fonctions de répartition de deux variables aléatoires ou entre une loi théorique et celle d'une présupposée d'un échantillon.

Ainsi, pour X et Y deux variables aléatoires, cette distance de K-S se formule ainsi :

$$D_{X-Y} = \sup_x |F_X(x) - F_Y(x)|$$

Sinon, s'il s'agit de la comparaison d'une loi de probabilité à une distribution empirique, qui est notre cas, alors cette distance s'écrit comme suit :

$$D_{X-Y} = \sup_x |F_X(x) - F^*(x)|$$

Avec :-  $F^*$  fonction de répartition théorique.

-  $F_X(x) = \sum_{i=1}^N \left(\frac{1}{N}\right) \cdot 1_{\{x_i \leq x\}}$ , fonction de répartition empirique et N est le nombre d'observations (chargements décumulés pour notre cas). Il est à noter qu'il faut ordonner de manière croissante, les observations avant de calculer cette fonction.

L'étape suivante est de calculer cette distance pour les N quantiles ordonnés, puis prendre la valeur supérieure de toutes les N distances. Ceci s'opère pour toutes les lois théoriques susceptibles d'ajuster notre distribution et donc celles que le QQ Plot a donné des résultats amélioratifs. Pour notre cas, on a restreint le champ sur les lois gamma, normal (malgré qu'elle prend des valeurs négatives) et log-normale.

La loi la plus convenable est celle qui a la distance  $D_{X-Y}$  la plus faible entre elles mais aussi par rapport à  $D_{5\% (cri)}$  figurant dans la table de Kolmogorov Smirnov, en d'autres termes la p\_value la plus grande d'elles mais aussi par rapport à 5%.

Dans notre cas, le logiciel Sas nous épargne de ces calculs tout en donnant la distance  $D_{X-Y}$  ainsi que la p-value qu'on compare directement à 5% qui doit être supérieur à zéro pour accepter  $H_0$ , avec :

*$H_0$ : la loi théorique s'ajuste avec la distribution empirique.*

Annexe F : Sur la VAR et la TVAR.

Tout d'abord, on parlera de la notion de mesure de risque  $\rho$  dont la qualité peut être appréciée par la notion de cohérence. Celle-ci repose sur les quatre propriétés suivantes :

-Invariance par translation :

$$\forall c \in R : \rho(x + c) = \rho(x) + c$$

-Sous-additivité :

$$\rho(X + Y) \leq \rho(X) + \rho(Y)$$

-Homogénéité positive :

$$\forall \gamma \in R^+, \quad \rho(\gamma X) = \gamma \rho(X)$$

-Monotonie :

$$P(X \leq Y) = 1 \rightarrow \rho(X) \leq \rho(Y)$$

Dans ce cadre, la Value At Risk est la mesure de risque conseillée par le CEIOPS dans le cadre de la *Solvabilité II*, dont la définition est la suivante :

$$Var_{\alpha}(X) = \inf\{x \in R ; F_X(x) \geq \alpha = F_X^{-1}(\alpha)\}$$

Ainsi, la  $Var_{\alpha}$  traduit le quantile pour lequel il y'a  $\alpha\%$  de chance de ne pas être dépassé, en d'autres termes  $(1 - \alpha) \%$  de risque qu'il soit dépassé. Cette mesure n'est d'autre qu'un quantile pour les lois continues, n'étant pas qualifiée de cohérente vu qu'elle ne vérifie pas la condition de la sous-additivité, mais surtout ne donne aucune information sur la queue de distribution, c'est-à-dire ce qui passe en cas de dépassement de la  $Var_{\alpha}$ .

Par conséquent, on utilise (notamment dans le calcul de la MR) la  $TVar_{\alpha}$  qui est qualifiée de cohérente et qui vaut :

$$\begin{aligned} TVar_{\alpha}(X) &= (1/1 - \alpha) \cdot \int_{\alpha}^1 F_X^{-1}(q) dq \\ &= E\{X/X > Var_{\alpha}(X)\} \end{aligned}$$

Il est clair que  $TVar_{\alpha}(X) \geq Var_{\alpha}(X)$ , à niveau de confiance égal. Elle représente tous les avantages non vérifié par la  $Var_{\alpha}(X)$ , à savoir plus de

stabilité et de prudence du fait qu'elle n'est pas basée que sur un quantile, donne une idée sur la queue de distribution et vérifie la condition de sous additivité qui stipule que la  $TVar_\alpha$  de plusieurs branches à la fois est inférieur à la somme des  $TVar_\alpha$  de chacune.

$$TVar_\alpha(X+Y) \leq TVar_\alpha(X) + TVar_\alpha(Y)$$