

INSEA

Projet de Fin d'Etudes

Modélisation de la mémoire longue de la volatilité
du pétrole et valorisation de ses dérivés

Préparé par : *M. Haytem ZAHIR*
M. Mouad LHIMER

Sous la direction de : *M. Yassine EL QALLI* (INSEA)
Mme. Hind ACHERGUI OFKIR (Attijariwafa Bank)

Soutenu publiquement comme exigence partielle en vue de l'obtention du

Diplôme d'Ingénieur d'Etat

Option : Actuariat-Finance

Devant le jury composé de :

M. Yassine EL QALLI (INSEA)
M. Mohamed EL HAJ TIRARI (INSEA)
Mme. Hind ACHERGUI OFKIR (Attijariwafa Bank)

Résumé

Le présent rapport met en évidence la modélisation de la structure par terme des matières premières, plus particulièrement celles du pétrole, et met en place un dispositif de couverture contre la fluctuation des prix de ce dernier. L'intérêt de ce travail est de proposer un modèle qui permettrait de valoriser en juste valeur les contrats futures sur pétrole.

Après une description des caractéristiques des marchés de matières premières en mettant l'accent sur le marché du pétrole, un vif intérêt a été porté à l'étude et l'analyse des spécificités statistiques intrinsèques au marché du pétrole.

Ensuite, après avoir décrit les fondements théoriques des différents modèles de structure par terme, le modèle de Schwartz à deux facteurs a été adopté en s'imposant comme étant le modèle qui permet de reproduire de façon plus précise la structure par terme observée au niveau du marché.

Pour pallier à l'hypothèse simplificatrice d'une volatilité déterministe au niveau de ces modèles, des processus à volatilité stochastique ont été étudiés. Le processus FIGARCH s'est avéré beaucoup plus approprié puisqu'il permet de capter le phénomène de la mémoire longue de la volatilité.

Finalement, les swaps standards et asiatiques ainsi que les options (vanilles et exotiques) ont été valorisés, mettant en exergue leur rôle dans la couverture du risque de fluctuation des prix du pétrole.

Mots clés : Convenience yield, structure par terme, effet de retour à la moyenne, volatilité, mémoire longue, swaps, options.

Dédicace

À la mémoire de Mariam Azzouzi, que Dieu ait son âme ;

À ma mère, aucun mot ne pourra t'exprimer mon amour, mon respect et ma reconnaissance pour ta tendresse et les sacrifices que t'as consentis pour mon instruction et mon bien être ;

À mon père, en guise d'amour, de reconnaissance et de gratitude, pour tous les soins administrés et pour m'avoir inculqué la bonne éducation et les bonnes manières ;

À mes soeurs : Mariam et Zineb

Pour l'amour et l'affection sans mesure qu'elles m'ont procurée tout au long de ma vie. Pour leur sacrifice, leur confiance ainsi que leur patience. Qu'elles trouvent ici le témoignage de mon entière gratitude et que dieu les protège ;

À mes meilleurs amis, Hamza, Iliass, Anass, Ayoub bssila, les deux Mohammed Amine, Sakrouhi, El Mahdy, Ibrahim, Abdelwahab, Jaber ... pour n'avoir cessé de me combler de support et béatitude ;

À mon binôme Haytem ;

À toute personne qui m'a appris à apprécier l'essence de la vie ;

Je dédie ce modeste travail...

Mouad LHIMER

Dédicace

À ma petite soeur yasmine que Dieu soulage sa souffrance

À ma famille qui m'a toujours soutenu

À tout ceux qui ont fait de moi ce que je suis

Je dédie ce modeste travail...

ZAHIR Haytem

Remerciement

Nous tenons à exprimer toute notre gratitude et reconnaissance à **Mme Hind ACHER-GUI OFKIR**, Corporate Trader FX & Commodities à la salle des marchés d'Attijariwafa Bank, pour la qualité du savoir qu'elle nous a transmis, et qui, malgré les occupations et les responsabilités qu'elle assume, a toujours eu le temps pour nous écouter et nous conseiller tout au long de notre stage.

Ce projet de fin d'études n'aurait pas été réalisable sans les directives précieuses de **Mr. Yassine ELQALLI**, professeur chercheur à l'Institut National de Statistiques et d'Économie Appliquée. Nous garderons éternellement en mémoire son humble assistance, ses conseils constructifs et ses encouragements multiples. Que ce travail soit le modeste témoignage de notre haute considération et notre profond respect.

Nos remerciements vont également vers **Mr. Chakib ERQUIZI**, Directeur de la banque des marchés et investissements d'Attijariwafa bank, de nous avoir accueillis au sein de sa direction. Nos sentiments de gratitude s'adressent également à **Mr. Jaouad Oumlil**, responsable des ressources humaines, à **Adrae BOURKADI** et **Yassine Madfoune**, Analystes middle office, ainsi que l'ensemble du personnel travaillant au sein de la salle des marchés, pour leur aide, leur sympathie et leur accueil.

Nous ne saurons terminer sans remercier l'ensemble des professeurs de l'Institut National de Statistiques et d'Économie Appliquée qui ont su nous inculquer durant notre formation à l'INSEA des valeurs intellectuelles, professionnelles et humaines.

Nous remercions d'avance tous les membres du jury pour le temps qu'ils vont consacrer à l'appréciation du présent rapport.

Pour finir, nous remercions tous ceux qui de près ou de loin ont contribué à la réalisation de ce projet.

Table des matières

Introduction générale	12
0.1 Présentation de l'organismme	14
0.1.1 Aperçu du Groupe Attijariwafa Bank	14
0.1.2 Présentation de la salle des marchés	14
0.1.2.1 Le Front Office :	15
0.1.2.2 Middle Office :	15
0.1.2.3 Back Office :	15
1 Marchés de matières premières	17
1.1 Caractéristiques des marchés de matières premières :	18
1.1.1 Origine :	18
1.1.2 Principales catégories de matières premières :	18
1.1.3 Principales bourses de matières premières :	19
1.1.4 Acteurs des marchés de matières premières :	20
1.1.5 Les indices boursiers sur matières premières :	21
1.1.6 Cadre réglementaire au Maroc :	21
1.2 Marché du pétrole :	22
1.3 Produits dérivés traités :	24
1.3.1 Les produits dérivés fermes : forwards, futures, swaps	24
1.3.1.1 Les contrats forward :	24
1.3.1.2 Les contrats future :	24
1.3.1.3 Swap sur matières premières :	25
1.3.2 Les produits dérivés optionnels :	25
2 Analyse statistique des données	27
2.1 Description des données sur le marché du Brent :	27
2.1.1 Données :	27
2.1.2 Indicateurs standards :	28
2.2 Faits stylisés des rendements d'actifs :	29
2.2.1 Distribution des rendements :	29
2.2.2 Analyse de la volatilité :	30
2.2.3 Analyse de la saisonnalité :	31
2.2.4 Stationnarité des rendements logarithmiques :	31
2.2.5 Auto-corrélation des rendements logarithmiques :	33
2.2.6 Volatilité réalisée :	34
2.2.7 Corrélation entre le rendement et la volatilité instantanée :	35

2.2.8	Mémoire longue de la volatilité des rendements :	36
2.2.9	Effet de retour à la moyenne des rendements logarithmiques : . . .	37
2.2.10	Récapitulatif :	37
3	Modélisation des prix à terme du Brent	38
3.1	Mécanismes des marchés à terme sur matières premières	38
3.1.1	Opérations de marge :	39
3.1.1.1	Margin requirements :	39
3.1.1.2	Chambre de compensation :	39
3.1.2	Analyse des prix :	39
3.1.2.1	Arbitrage cash-and-carry :	40
3.1.2.2	Rendement d'opportunité (<i>convenience yield</i>) :	40
3.1.2.3	Report (contango) et déport (backwardation) :	41
3.2	L'origine de l'analyse de la structure par terme des prix des commodités : les théories traditionnelles :	41
3.2.1	La théorie du déport normal :	41
3.2.2	La théorie du stockage :	41
3.3	Modèles de structure par terme des prix des matières premières :	42
3.3.1	Modèles à un facteur :	43
3.3.1.1	Modèles à base du mouvement brownien géométrique : . .	43
3.3.1.2	Modèles à base du processus de retour à la moyenne : . . .	44
3.3.2	Modèles à deux facteurs :	45
3.3.2.1	Modèles à base du <i>convenience yield</i> :	46
3.4	Calibration des modèles :	47
3.4.1	Estimation des paramètres du modèle de Schwartz à un facteur : . .	48
3.4.2	Estimation des paramètres du modèle de Schwartz à deux facteurs : 49	
3.4.2.1	Résultats de l'estimation :	49
3.4.3	Application des modèles :	50
3.4.3.1	Modèle de Benrnan & Schwartz :	51
3.4.3.2	Modèle de Schwartz à un facteur :	52
3.4.3.3	Modèle de Schwartz à deux facteurs :	52
3.4.4	Comparaison des modèles :	53
3.4.4.1	Résultats de la comparaison :	53
4	Modélisation de la mémoire longue de la volatilité	56
4.1	Volatilité stochastique : ARCH/GARCH	56
4.1.1	Estimation des paramètres du modèle GARCH(p,q)	58
4.1.1.1	Identification des paramètres du modèle GARCH	58
4.1.1.2	Résultats de l'estimation des paramètres GARCH(1,1) . .	59
4.1.1.3	Comparaison des résultats	62
4.1.2	Prévision de la variance conditionnelle du modèle GARCH(1,1) . .	63
4.1.3	Utilisation du modèle GARCH(1,1) pour la prévision de la volatilité future	64
4.1.3.1	Structures par terme des volatilités	64
4.1.3.2	BackTesting	66
4.1.3.3	Récapitulatif	69
4.2	Mémoire longue de la volatilité du marché de Brent	70

4.2.1	Mémoire longue de la volatilité : Processus FIGARCH	70
4.2.2	Estimation du Processus FIGARCH	72
4.2.3	Analyse empirique de la persistance des chocs :	73
4.2.4	Récapitulatif	74
4.3	Discussion	74
5	Pricing des swaps sur matières premières	76
5.1	Définition et présentation générale des swaps matières premières	76
5.2	Valorisation du Swap	77
5.2.1	Swaps Standard	78
5.2.2	Swap asiatique	79
6	Pricing des options vanilles et exotiques sur matières premières	81
6.1	Aperçu sur les options	81
6.1.1	Définition d'une option	81
6.1.2	Stratégies de base sur options	81
6.1.3	La valeur de l'option et ses déterminants :	82
6.1.3.1	La relation de la parité Put-Call :	83
6.2	Pricing des options vanilles :	84
6.2.1	Modèle de Black et Scholes standard	84
6.2.1.1	Les grecs du modèle de Black et Scholes standard	85
6.2.2	Options sur Spot : Modèle de Merton	87
6.2.3	Options sur Futures	88
6.2.3.1	Modèle de Black	89
6.2.3.2	Modèle de Schwartz à deux facteurs :	90
6.3	Pricing des options exotiques	91
6.3.1	Options barrières :	91
6.3.2	Options lookback :	93
6.3.3	Les options asiatiques	94
6.3.3.1	Les problèmes liés à la valorisation :	94
6.3.3.2	La méthode Monte Carlo :	95
6.3.4	Application :	96
	Conclusion générale	97
	Bibliographie	98
	A Rappel Statistique	99
	B Rappels de calcul stochastique	102
	C Représentations État-Mesure et Filtre de Kalman	105
	D Problème d'interpolation	108
	E Simulation de Monte Carlo	110
	F Sortie R	111

Listes des abréviations

ARCH : Auto Regressive Conditional Heteroscedasticity

AWB : Attijariwafa Bank

CBOT : Chicago Bord of Trade

CME : Chicago Mercantile Exchange

COMEX : New York Commodities Exchange

CY : Convenience Yield

FIGARCH : Fractionnary Integrated GARCH

GARCH : Generalized Auto Regressive Conditional Heterosedasticity

IPE : International Petroleum Exchange

LIFFE : London International Financial Futures and Options Exchange

LME : London Metal Exchange

NYMEX : New York Mercantile Exchange

OPEP : Organisation des pays exportateurs de pétrole

WTI : West Texas Intermediate

Table des figures

1.1	Principaux flux pétroliers dans le monde	23
2.1	Évolution du prix spot du Brent du 03/01/2012 jusqu'au 10/03/2014 . . .	27
2.2	Évolution des rendements quotidiens du prix spot du 03/01/2012 jusqu'au 10/03/2014	27
2.3	Histogramme des rendements	28
2.4	Diagramme Q-Q normale des rendements journaliers du Brent.	29
2.5	Courbes de contrats à terme de maturité à différentes dates de l'année 2013.	30
2.6	Densité spectrale de la série journalière des rendements du pétrole -Source R-	31
2.7	Auto-corrélogramme des rendements du pétrole.	32
2.8	Auto-corrélogramme de la série des rendements logarithmiques.	33
2.9	Volatilité réalisée des rendements logarithmiques.	35
2.10	Auto-corrélogramme de la valeur absolue des rendements logarithmiques. .	36
2.11	Auto-corrélogramme de la valeur absolue des rendements logarithmiques. .	36
3.1	Interpolation des taux d'intérêts par Spline cubique et linéaire	51
3.2	Pricer des contrats futures par le modèle <i>Bernnan & Schwartz</i>	51
3.3	Pricer des contrats futures par le modèle de <i>Schwartz</i> à un facteur	52
3.4	Pricer des contrats futures par le modèle de <i>Schwartz</i> à deux facteurs . . .	52
3.5	Performance du modèle de Bernnan & Schwartz	54
3.6	Performance du modèle de Schwartz à un facteur	54
3.7	Performance du modèle de Schwartz à deux facteurs	54
4.1	Variance conditionnelle calculée par le modèle GARCH(1,1) pour bruit blanc gaussien. Sortie R	60
4.2	Variance conditionnelle calculée par le modèle GARCH(1,1) pour bruit blanc t-Student. Sortie R	60
4.3	Interface du modèle GARCH(1,1) -Application VBA-EXCEL-	60
4.4	Variance conditionnelle calculée par le modèle GARCH(1,1). Sortie R . . .	61
4.5	Interface Sortie -Application VBA-Excel-	62
4.6	Comparaison des résultats obtenus. Sortie R	62
4.7	Interface VBA/Excel pour la prévision de la variance conditionnelle	64
4.8	Comparaison entre volatilité estimée et la volatilité cotée sur Bloomberg .	66
4.9	Backtesting pour une durée de vie 1 mois	67
4.10	Backtesting pour une durée de vie 2 mois	67
4.11	Backtesting pour une durée de vie 3 mois	67
4.12	Backtesting pour une durée de vie de 6 mois	67

4.13	Backtesting pour une durée de vie de 12 mois	68
5.1	Pricer Swap Standard sur matières premières :Brent	78
5.2	Pricer Swap asiatique sur matières premières : Brent	79
6.1	Pricer des options sur spot de matières premières par le modèle de Merton	88
6.2	Pricer des options sur futures par le modèle de Black	89
6.3	Pricer des options sur futures par le modèle de Schwartz à deux facteurs .	90
6.4	Pricer des options exotiques	96
F.1	Test CADF-Trend-	111
F.2	Test CADF-Drift-	111
F.3	Test CADF-None-	112
F.4	Sorties R de l'estimation des paramètres de l'équation	112
F.5	Sorties R de l'estimation des paramètres non observables du modèle de Schwartz à deux facteurs	113
F.6	Garch(1,1). BB Gaussien	113
F.7	Garch(1,1). BB Student	114
F.8	FIGARCH(1,d,1)	115
F.9	FIGARCH(1,d,1)-Suite-	116

Liste des tableaux

1.1	Principales bourses de matières premières	20
1.2	Différences majeures entre Future et Forward	25
2.1	Statistiques descriptives des rendements quotidiens des prix spot du pétrole.	28
2.2	Tests statistiques de normalité.	29
2.3	Tests statistiques de stationnarité.	32
2.4	Tests statistiques de Box & Pierce.	33
2.5	Tests statistiques d'effet de retour à la moyenne.	37
3.1	Sorties R de l'estimation des paramètres de l'équation	49
3.2	Sorties R de l'estimation des paramètres non observables du modèle de Schwartz à deux facteurs	50
3.3	Résultats de la performance des modèles	53
4.1	Sortie R. Résultats de l'estimation de paramètres des modèles GARCH(1,1) gaussien (à gauche) et Student (à droite).	59
4.2	Paramètres initiaux du modèle GARCH(1,1). Source R	61
4.3	Paramètres finaux du modèle GARCH(1,1). Source "VBA-EXCEL"	61
4.4	Erreurs moyennes calculées pour les différents résultats.	63
4.5	Paramètres estimés du modèle GARCH(1,1).	65
4.6	Structure par termes des volatilités du prix de Brent construite avec un Garch(1,1) pour différentes maturités à la date du 10/03/2014.	65
4.7	Volatilités du prix de Brent cotée sur Bloomberg pour différente maturité à la date du 10/03/2014.	65
4.8	Erreurs calculées pour différentes maturités.	68
4.9	Estimation par Quasi-Maximum de vraisemblance d'un modèle FIGARCH. Sortie R	73
6.1	Types de valeurs intrinsèques	83

Introduction générale

Les prix des produits pétroliers ont augmenté à un rythme sans précédent au cours des dernières années, et apparaissent à l'heure actuelle de plus en plus volatils, laissant ainsi perplexes de nombreux analystes et chercheurs, sur les explications sous-jacentes à la formation des prix.

En effet, le marché pétrolier est par nature instable, de même qu'un excès de la demande en millions de barils par jour conduit à des mouvements erratiques à la hausse et un déficit de la demande se traduit par les mêmes mouvements à la baisse. De plus, la dépendance au pétrole se pose comme un enjeu stratégique dans la plupart des pays, et les obligent de plus en plus à planifier des couvertures pour garantir des approvisionnements réguliers à des coûts acceptables.

Notre projet de fin d'études s'inscrit parfaitement dans ce cadre dans la mesure où il propose une modélisation pertinente du cours du pétrole, visant à plus de précision et de cohérence au niveau de la valorisation des contrats futures, ainsi qu'une réponse au besoin exprimé au niveau de la couverture des risques inhérents à la fluctuations des prix des matières premières, et en particulier ceux du pétrole qui constitue la matière première directrice dans la catégorie énergétique.

Il est à noter que les points les plus importants dans la modélisation des matières premières sont la détection de la saisonnalité, l'effet de retour à la moyenne, ainsi que la prise en compte de la mémoire longue de la volatilité.

La démarche retenue pour cette étude consiste, dans un premier temps, à étudier de manière fondamentale, les caractéristiques des marchés des matières premières et particulièrement celui du pétrole : c'est l'objet du premier chapitre. Le deuxième chapitre quant à lui, a pour objectif d'étudier les différentes propriétés statistiques propres au marché du pétrole et d'en retenir les caractéristiques essentielles.

Le troisième chapitre a pour vocation de proposer un modèle adéquat de structure par terme des prix du pétrole. Pour ce faire, nous allons décrire les fondements théoriques des différents modèles de structure par termes, nous allons également présenter les méthodes de calibration des modèles pour l'estimation des paramètres de chaque modèle et enfin nous proposerons des critères pour l'étude des performances des modèles élaborés.

Le quatrième chapitre, qui est au cœur de ce projet, sera consacré à l'étude et l'analyse de la volatilité des prix sur le marché du pétrole. L'objectif étant d'explorer les processus à volatilité stochastique en mettant l'accent sur le processus FIGARCH qui permet de capter le phénomène de la mémoire longue de la volatilité, ainsi que de proposer un modèle qui permettra d'inclure toutes les caractéristiques énoncées auparavant.

Enfin, les chapitres 5 et 6 seront consacrés à la valorisation des Swap standards et asiatiques, ainsi que la valorisation des options vanilles et d'autres exotiques. L'objectif étant de mettre en valeur le rôle de ces instruments dans la couverture des risques de fluctuation des prix des matières premières énergétiques.

0.1 Présentation de l'organismme

0.1.1 Aperçu du Groupe Attijariwafa Bank

Le Groupe Attijariwafa Bank, premier groupe bancaire et financier du Maghreb, avec **6,2 millions de clients et 15 289 collaborateurs**, est une multinationale panafricaine. Présent dans 22 pays, le Groupe se donne pour priorité la proximité avec ses clients et les met au cœur de sa stratégie via son ambitieux programme de bancarisation et ses efforts d'innovation continus. En plus de l'activité bancaire, le Groupe opère, à travers des filiales spécialisées, dans tous les métiers financiers : assurance, crédit immobilier, crédit à la consommation, leasing, gestion d'actifs, intermédiation boursière, conseil, location longue durée, factoring...

Doté d'une assise financière solide, d'un capital de savoir-faire diversifié et d'outils d'expertise modernes, le Groupe a réussi à se hisser en leader national incontesté des crédits à l'économie et des crédits à la consommation, des activités de corporate banking et de banque d'investissement, de la gestion d'actifs et des métiers de la bourse, du leasing et de la bancassurance.

Attijariwafa Bank est basé au Maroc et opère dans 21 pays : en Afrique (Tunisie, Sénégal, Burkina-Faso, Guinée Bissau, Mali, Mauritanie, Côte-d'Ivoire, Congo, Gabon et Cameroun) et en Europe (Belgique, France, Allemagne, Pays-Bas, Italie et Espagne) à travers des filiales bancaires contrôlées majoritairement par la banque. À Dubaï, Riyadh, Londres, Shanghai et Tripoli à travers des bureaux de représentation.

0.1.2 Présentation de la salle des marchés

La salle des marchés d'Attijariwafa Bank, inaugurée officiellement au début de l'année 2007, est un lieu qui regroupe différents services spécialisés à fin d'offrir une palette élargie et novatrice en termes de produits de couverture de change, de taux, de matières premières ainsi que des produits d'investissements. La Salle des Marchés est également active sur ces sous-jacents pour le compte propre de la banque. Son objectif est de trouver des ressources à coût réduit et des emplois rémunérateurs tout en minimisant les risques de marché.

la salle des marchés est composée de trois pôles distincts à savoir le front office chargé de la négociation avec les clients, le middle office chargé de contrôler les risques et d'analyser les résultats et le back office, chargé des saisies, des contrôles comptables et du contrôle interne.

0.1.2.1 Le Front Office :

Le front office constitue l'interface de la banque avec le marché. Il centralise et traite tous les besoins de la salle des marchés et de ses clients en termes de couverture, financement, investissement, gestion de position, trading et arbitrage.

Le front office d'Attijariwafa Bank est organisé en centres opératoires appelés « Desks ». Chaque Desk résulte du croisement d'une stratégie donnée et d'une famille d'instruments. Ils sont au nombre de quatre :

-Desk Trading Compte propre Fx & Commodities : Ce desk a pour mission de veiller à la bonne gestion des prises de positions en matière de Change et de Commodities (soft, métaux précieux, métaux de base, énergies) et d'intervenir sur ces différents sous jacents financiers afin de profiter des opportunités d'arbitrage qu'offrent les marchés essentiellement anglo-saxon, londonien et américain.

-Desk Taux & Intermédiation : Chargé des activités de Trading et d'arbitrage sur les produits de taux, ce desk assure la gestion du portefeuille de négociation, de placement et d'investissement. Il s'occupe également des opérations de placement de titres sur le marché.

-Desk Trésorerie MAD : Ce desk opère sur les marchés monétaire et interbancaire nationaux pour la gestion et l'optimisation de la trésorerie dirham de la Banque. Il fixe également les cotations internes de taux pour les autres desks de la Salle des Marchés.

-Desk Actions : Il assure les activités de Trading et d'arbitrage pour compte propre sur les actions et dérivés actions aussi bien sur le marché national que sur les marchés étrangers.

Les opérations conclues en front office engagent la banque de manière irrévocable vis-à-vis de ses contreparties.

0.1.2.2 Middle Office :

Le middle office est le service chargé de nommer les opérations initiées par les traders dans la salle des marchés, plus exactement dans le Front Office, après avoir vérifié qu'elles sont conformes à la réglementation. Il est chargé de faire la jonction entre le front et le back office. Il saisit sur une base de données toutes les transactions effectuées par les traders et les sales. Et enfin, il met en place avec le front et le back office des méthodes d'analyse des risques et définit les procédures homogènes par lignes de produits.

0.1.2.3 Back Office :

Le Back Office est chargé d'assurer le suivi administratif et comptable des opérations conclues au Front Office. Il enregistre les transactions, informe les clients (entreprises ou institutions), effectue le règlement et la livraison des titres, gère le versement des dividendes des actions et des intérêts des obligations. Il participe aussi à la mise en place et

à l'évaluation des procédures et des systèmes informatiques.

Le Back Office est équipé de système de traitement transactionnel permettant de sécuriser la comptabilisation des opérations et l'initiation des moyens de paiement. Certains systèmes permettent de générer la comptabilisation à partir de la saisie en Front Office, le rôle du back office est alors limité à la validation des opérations et à la saisie des instructions de paiement (numéro de compte, correspondant bancaire).

Chapitre 1

Marchés de matières premières

Crise liée aux matières premières, flambée des cours, augmentation significative de la demande et développement durable sont autant de thèmes qui défraient la chronique des quotidiens internationaux et qui semblent concerner aussi bien le simple agriculteur ou consommateur de carburant à la pompe à essence que le banquier new-yorkais.

La place de la finance dans le fonctionnement des marchés de matières premières s'explique par leurs particularités, qu'il s'agisse des marchés de matières agricoles comme le blé et les grandes céréales ou de matières premières énergétiques comme le pétrole, le gaz naturel ou encore l'électricité.

Au cours des 30 dernières années, les matières premières se sont imposées graduellement comme instrument de diversification des placements financiers de la part des fonds de gestion et autres investisseurs institutionnels. Les contrats à terme (futures, etc.), contrats d'options et autres dérivés, pour lesquels les sous-jacents ne sont pas livrés, s'étant d'autre part fortement développés dans un objectif de couverture des risques de volatilité des cours par les investisseurs.

Un effondrement généralisé des cours des matières premières a été observé à partir de juillet 2008 dans le sillage de la baisse des marchés d'actions sur une tendance pourtant structurellement haussière à long terme : ainsi le développement rapide des pays émergents (Chine, Inde, etc.) et la croissance démographique mondiale suscitent inévitablement une croissance de la demande de matières premières, qu'il s'agisse de produits agricoles, de métaux destinés à l'industrie ou encore bien sûr de sources d'énergie comme le gaz et le pétrole.

L'objectif de ce chapitre est de présenter les marchés de matières premières mondiaux de façon générale et particulièrement le marché du pétrole. Pour ce faire, nous allons commencer par consacrer une première section aux caractéristiques des marchés de matières premières avant de nous focaliser sur le marché du pétrole. Finalement nous mettrons en exergue les différents produits dérivés traités dans ce marché.

1.1 Caractéristiques des marchés de matières premières :

1.1.1 Origine :

En réponse à l'instabilité « naturelle » due aux conditions climatiques, les céréales furent les premières matières premières à servir de sous-jacents aux contrats du Chicago Board of Trade, dès 1850. Vinrent ensuite les produits tropicaux (sucre, café et cacao), supports aux transactions sur les marchés de New York et de Londres. Les produits oléagineux furent introduits sur les marchés de Chicago quelques années avant la fin de la seconde guerre mondiale.

L'émergence des premiers marchés à terme sur les produits pétroliers fut une réponse à l'instabilité qui s'est instaurée à la suite des deux chocs pétroliers. Les marchés ont été ouverts à New York entre novembre 1978 et mars 1983. Par la suite, de nouveaux contrats ont été introduits à Londres, à Singapour et à Tokyo, mais ceux de New York demeurent les plus actifs. La déréglementation a ensuite conduit les responsables du New York Mercantile Exchange à développer de nouveaux marchés dérivés de produits énergétiques. Ceci s'est concrétisé par l'ouverture en avril 1990 d'un marché sur le gaz naturel et en mars 1996 d'un marché sur l'électricité.

Si les marchés à terme de matières premières existent depuis le milieu du XIX^e siècle, l'industrie des produits dérivés était cependant très peu développée jusqu'au début de la décennie 1960. Le véritable essor des marchés a coïncidé avec l'introduction des instruments assurant une protection contre le risque de fluctuation associé à des actifs financiers. Ce développement s'est appuyé sur les connaissances et les techniques acquises dans le domaine des matières premières. Il n'y a, en effet, pas la moindre différence de nature entre les marchés à terme financiers et les marchés à terme de matières premières.

1.1.2 Principales catégories de matières premières :

Énergie : Les matières premières énergétiques comme le pétrole et le gaz naturel sont utilisées pour générer de l'énergie et des matières premières chimiques. Au cours des 40 dernières années, la consommation mondiale en énergie a plus que doublé. Le pétrole reste l'une des sources d'énergie les plus importantes. Plus que 50% des réserves mondiales de pétrole se trouvent au Proche-Orient qui est donc un important exportateur du pétrole, alors que les États-Unis et la Chine sont d'importants importateurs. Les prix de l'énergie sont fortement dépendants de la croissance et donc très sensibles aux événements géopolitiques.

Métaux précieux : L'or, l'argent, le platine et le palladium sont les principaux métaux précieux. On distingue au sein de la demande en métaux précieux, la demande physique (industrie et bijouterie) et la demande pour le placement de capitaux (demande des investisseurs). La demande physique dépend surtout de la croissance économique, alors que la demande des investisseurs est surtout déterminée par l'évolution des taux, par les fluc-

tuations des monnaies (principalement le dollar américain en raison d'importants volumes commerciaux en USD) et par le niveau d'inflation.

Métaux de base : L'aluminium, le cuivre, le nickel, le zinc, le plomb et l'étain sont les métaux de base les plus connus. Appelés aussi métaux industriels, ils ne contiennent pas de fer et sont principalement utilisés par des branches cycliques, comme l'industrie automobile, l'aéronautique ou la construction. Les indicateurs avancés de la conjoncture sont donc déterminants pour l'évolution des cours. La demande en métaux industriels vient principalement de la Chine, les données de la conjoncture chinoise sont donc aussi des facteurs clés.

Soft commodities : A l'inverse des matières premières fossiles, les matières premières agricoles sont renouvelables. elles regroupent les céréales comme le maïs, le blé ou les graines de soja, l'huile alimentaire, l'huile de palme ainsi que d'autres plantes/fibres comme le sucre ou le coton. Les cours s'établissent en fonction de l'offre et de la demande. Si la demande dépasse l'offre, il faut puiser dans les stocks. Les cours grimpent en général en cas de pénurie d'une matière première, en particulier si les réserves sont peu importantes. La plupart des matières premières agricoles sont des produits de première nécessité et sont donc moins dépendants de la croissance que d'autres matières premières plus cycliques. Comme les matières premières agricoles sont renouvelables, les cycles de cours sont en général plus courts que pour les autres matières premières. En outre, les cours des soft commodities dépendent des conditions climatiques et de la disponibilité de l'eau.

1.1.3 Principales bourses de matières premières :

La grande partie des marchés des matières premières est aujourd'hui localisée dans les zones les plus industrialisées, en Amérique du Nord et Europe principalement.

Ces marchés sont des places d'échange des différentes matières premières d'une manière organisée. Dans un sens plus étendu, ce sont des bourses organisées où les échanges/flux, avec ou sans la matière première physique, sont canalisés par le biais d'un mécanisme de prix unique, permettant ainsi une concurrence effective et maximale parmi vendeurs et acheteurs. En effet, avoir un mécanisme de marché permettant à tout moment de confronter offre et demande des matières premières se traduit par un mécanisme efficace et transparent de fixation des prix de la matière échangée.

Principaux marchés		
Énergie	INTERCONTINENTAL EXCHANGE (ICE)	Brent- Gasoil
	NEW YORK MERCANTILE EXCHANGE (NYMEX)	Light Sweet Crude (WTI) - Natural Gaz- Heating oil
Métaux de base	LONDON METAL EXCHANGE (LME)	Cuivre-Plomb-Zinc- Aluminium- Etain
Métaux précieux	NEW YORK MERCANTILE EXCHANGE (NYMEX/COMEX)	Or-Argent-Platinum
Soft	CHICAGO BOARD OF TRADE (CBOT)	Blé – Maïs – Complexe soja
	KANSAS CITY BOARD OF TRADE	Blé
	EURONEXT-PARIS	Blé-Maïs
	NEW YORK BOARD OF TRADE (NYBOT)	Sucre – Café – Coton – Jus d’orange
	EURONEXT	Café – Sucre blanc - Cacao

TABLE 1.1 – Principales bourses de matières premières

Aujourd’hui, la plupart des grandes familles des matières premières sont traitées sur les différentes bourses majeures. Certains produits se traitent également dans plusieurs places financières dans le but de refléter au mieux les caractéristiques de chaque région de production. Par exemple, chaque grand pays producteur de blé possède sa propre bourse. C’est le cas du blé américain (CBOT), du blé européen (MATIF) ou encore le blé Mer Noire (CME Black Sea).

1.1.4 Acteurs des marchés de matières premières :

Nous recensons trois catégories d’intervenants :

-Les opérateurs en couverture « hedgers » : Pour cette catégorie, les marchés à terme sont utilisés uniquement pour neutraliser le risque de fluctuation des prix. Ils ont également recours aux options listées car elles procurent un moyen de se protéger contre des mouvements défavorables des cours, tout en se laissant la possibilité de profiter des mouvements favorables.

-Les spéculateurs : L’idée d’investissement pour ces opérateurs est d’utiliser des options et

contrats Futures pour leur effet de levier. La part de la spéculation peut être très importante pour certaines matières premières comme le pétrole et le maïs. Pour ces deux produits, la part de spéculation a déjà dépassé les 50%. Une trop forte activité de spéculation peut s'avérer extrêmement néfaste en cas de désengagement important.

-Les arbitragistes : Ces derniers cherchent à profiter des incohérences des prix relatifs de plusieurs actifs entre différentes places (même sous-jacent coté sur deux places financières différentes). L'existence de possibilité d'arbitrage est très éphémère d'autant plus que la théorie des marchés financiers considère qu'il y'a une absence d'opportunité d'arbitrage.

Ces trois catégories d'investisseurs prennent des positions différentes sur les marchés, soit acheteuses (dites long) ou vendeuses (dites short), avec des durées plus ou moins importantes.

1.1.5 Les indices boursiers sur matières premières :

Les indices qui servent de référence pour les matières premières sont le « Goldman Sachs Commodities Index », le « Reuters/Jeffreys CRB Index » ainsi que le « Deutsche Bank Liquid Commodity Index », ou encore le « Dow Jones AIG Commodities Index ». De par leur composition, ils relatent fidèlement les évolutions des commodities, et sont de ce fait suivis par les intervenants sur les marchés afin de déceler les tendances de hausse et de baisse.

1.1.6 Cadre réglementaire au Maroc :

En vertu de la circulaire n°1699 datant du 13 Janvier 2004 de l'office des changes, les opérateurs économiques marocains sont autorisés à se couvrir sur le marché international contre le risque de fluctuation des prix de certains produits de base d'origine agricole, minière ou énergétique qui sont, ou peuvent être, négociés sur un marché secondaire.

La délégation est donnée aux intermédiaires agréés pour effectuer les transferts relatifs aux instruments de couverture sur le marché international et cela, dans le respect de certaines conditions clairement énoncées dans ladite circulaire.

On cite principalement que les opérations de couverture, excluent impérativement tout caractère spéculatif, et qu'elles doivent être adossées, de ce fait, à des transactions commerciales réelles dûment justifiées par la souscription de titres d'importation ou d'exportation.

Le montant global des opérations de couverture ne doit pas dépasser la moyenne des chiffres d'affaires à l'importation ou à l'exportation du produit concerné au cours des trois dernières années.

Au cas où les opérations de couverture nécessiteraient l'ouverture de comptes en devises sur les livres d'un intermédiaire agréé marocain ou auprès d'intermédiaires étrangers, il est requis que ces comptes, ouverts au Maroc ou à l'étranger, soient dédiés exclusivement à la gestion des opérations de couverture.

1.2 Marché du pétrole :

Considéré comme la source d'énergie la plus importante au monde depuis les 20 dernières années, le pétrole, qui a connu une expansion due principalement à la croissance économique particulièrement rapide des pays émergents, exerce une influence majeure sur l'économie mondiale.

D'un composé chimique indispensable aux sociétés, le pétrole est maintenant un sous-jacent de produits financiers très élaborés. De nombreux participants agissent sur le marché financier du pétrole : les banques d'investissement (Morgan Stanley, Goldman Sachs...), les compagnies d'assurance (AIG,...), les hedge funds (Citadel, Tudor Jones,...), et bien sûr les compagnies pétrolières (Total, Shell,...). Parallèlement, la volatilité du prix du pétrole et les besoins de couverture ont accéléré le développement des produits dérivés qui influent maintenant sur la formation du prix du pétrole.

C'est aux États-Unis qu'est née l'industrie pétrolière. Ce pays qui représente le troisième producteur mondial (avec une production d'environ 9 Millions de baril/jour en 2012, soit 10,6% de la production mondiale) derrière la Russie (10,3 Mb/j soit 12,2%) et l'Arabie saoudite (10 Mb/j soit 11,8%). De plus, sa grande consommation (environ 18,6 Mb/j soit près du quart de la consommation mondiale) a fait des États-Unis le premier importateur mondial.

La consommation mondiale du pétrole brut a d'ailleurs connu une augmentation remarquable passant de 7,5 millions de barils par jour (Mb/j) en 1945 à 20 Mb/j en 1960 à près de 60 Mb/j en 1973 au moment du premier choc pétrolier. Après avoir stagné dans les années 1980 à cause de la crise économique due aux chocs pétroliers de 1973 et 1979, la consommation mondiale de pétrole s'est vue à la hausse dans les années 1990. Elle atteint aujourd'hui à peu près 86 Mb/j, une consommation due à la forte demande asiatique et plus spécialement celle de la Chine, du Japon et de l'Inde.

D'autre part, le prix du baril a plus que doublé depuis 2007 et à même dépassé les 135\$. La hausse du prix du brut résulte de l'adéquation entre l'offre et la demande. Alors que les besoins en pétrole continuent de s'accroître à un rythme important dans le monde (tirés par la forte croissance économique des pays émergents comme la Chine et l'Inde), l'approvisionnement a du mal à suivre. Par conséquent, l'équilibrage entre consommation et production induit un renchérissement des produits pétroliers. Toutefois, les variations du cours du baril sont très amorties avant d'atteindre le consommateur final, notamment à cause des taxes, mais aussi des subventions. Une augmentation très marquée du prix du brut est donc nécessaire pour freiner significativement la demande. La situation géopolitique accentue régulièrement la pression à la hausse et constitue une source de volatilité importante.

Nous relatons dans la figure ci-dessous, les principaux flux pétroliers pour mieux comprendre les enjeux des échanges pétroliers à l'échelle internationale.

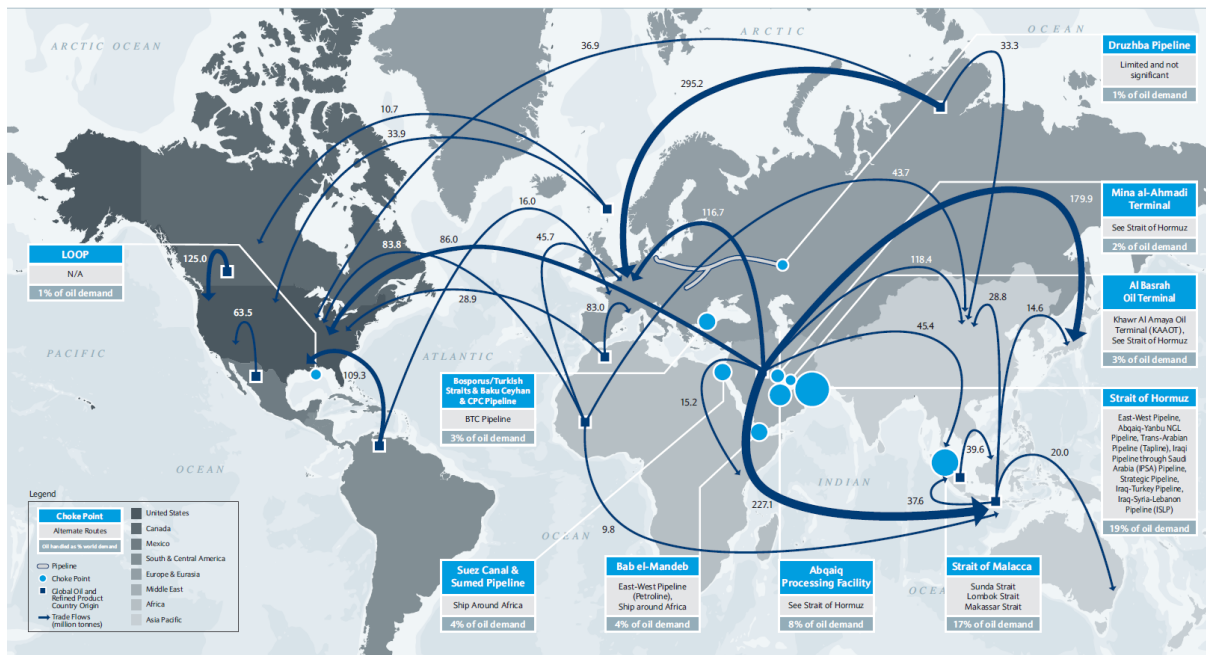


FIGURE 1.1 – Principaux flux pétroliers dans le monde

Le pétrole a aujourd'hui quatre indices de référence majeurs : le WTI (West Texas Intermediate) qui est la référence américaine, le Brent de la mer du Nord, le Brut de Dubaï et le panier de référence de l'OPEP¹. Les plus représentatifs des prix mondiaux sont les deux premiers.

Le prix du pétrole connaît une forte disparité entre ces deux indices de référence ICE Brent et WTI. Traditionnellement très proches, le Brent se négocie actuellement à près de 8\$ au dessus du WTI. Cet écart pourrait surprendre étant donné que le WTI est de meilleure qualité que le Brent, car plus léger, et structurellement plus cher que l'ICE Brent.

Plusieurs facteurs expliquent cette différence :

-Facteur physique : La production de Brent, le pétrole de la mer du Nord, est en baisse structurelle.

-Facteur géopolitique : L'ICE Brent est particulièrement sensible aux incidents qui perturbent la production de brut de qualité équivalente, comme les pétroles au Moyen-Orient et en Afrique.

-Facteur financier : La cotation du Brent ne comprend pas de livraison physique et ne subit donc pas les mêmes contraintes que le pétrole américain. Ceci élimine les risques de Contango

1. OPEP : Organisation des pays exportateurs de pétrole.

(report) excessif, ce qui incite les investisseurs « long-only » (ne détenant que des positions d'achats) à privilégier les contrats sur le Brent.

-Facteur logistique : Le lieu de livraison des contrats de WTI est totalement saturé avec notamment de nouveaux pipelines en provenance du Canada. Il s'agit de Cushing, Oklahoma, où convergent de très nombreux pipelines. A noter qu'à Cushing les stocks ne dépassent pas les 10% du stock national américain hors réserve stratégique.

Le contrat de référence sur les produits pétroliers est celui du Brent. En effet, pendant des années, la référence américaine WTI a été utilisée comme Benchmark par l'ensemble des opérateurs mondiaux. Mais compte tenu des pressions exercées sur les prix du WTI depuis 3 ans pour cause de saturation du point de stockage à Cushing, le marché s'est peu à peu tourné vers le Brent de la mer du Nord.

1.3 Produits dérivés traités :

1.3.1 Les produits dérivés fermes : forwards, futures, swaps

1.3.1.1 Les contrats forward :

Un contrat forward est un actif dérivé simple. C'est un engagement entre deux parties à acheter ou vendre un actif (appelé sous-jacent) à une date donnée pour un prix donné. Il se distingue d'un contrat au comptant (spot) dans lequel la transaction est réalisée immédiatement.

Un contrat forward est échangé le plus souvent entre deux établissements financiers ou entre un établissement financier et un client. La partie qui s'engage à acheter l'actif prend une position dite longue, alors que celle qui s'engage à le vendre prend une position dite courte.

1.3.1.2 Les contrats future :

C'est un contrat entre deux parties pour acheter ou vendre une certaine quantité d'actif donné, le sous-jacent, à une date future pour un prix convenu à l'avance. Ce prix d'exercice est appelé strike. Il est possible de déboucler son opération avant l'échéance en revendant son contrat au prix du marché. C'est l'évolution du prix spot en fonction du prix future qui détermine les stratégies des vendeurs et des acheteurs.

Les contrats engagent irrévocablement autant d'acheteurs que de vendeurs à respecter le contrat qui sera dénoué soit à l'échéance par livraison et règlement (pour un actif physique), soit par règlement en cash de l'écart du prix spot et du prix future, soit à tout moment avant l'échéance du contrat par cession de la position longue ou courte, au prix du marché. Il s'agit dans ce dernier cas d'une clôture de position et non de la fin du contrat qui existe jusqu'à son échéance, même en passant par plusieurs mains.

Contrairement aux contrats forwards, les futures s'échangent sur des marchés organisés, qui respectent les caractéristiques communes suivantes :

-Les contrats futures sont très standardisés, réglementés et rigides.

-Les contrats futures sont la plupart du temps des contrats liquides, la liquidité étant assurée par les teneurs de marché (market makers).

-Les cotations de ces contrats font l'objet d'une large diffusion auprès des organismes de contrôle et de la presse spécialisée.

-Les risques de défaut de paiement sont assurés par une chambre de compensation : celle-ci exige des donneurs d'ordres un dépôt de garantie, le *deposit*, à verser dès l'ouverture du contrat. Le *deposit* est systématiquement constitué par des appels de marge et est restitué lors de la clôture du contrat.

Les différences majeures entre les deux types de contrats sont résumées dans le tableau suivant :

Future	Forward
-Marché organisé (Bourse)	-Marché de gré à gré (Négociation bilatérale)
-Standardisé	-Personnalisé
-Liquide	-Peu liquide
-Deposit et appel de marge (moins de risque de contrepartie)	-Plus de risque de contrepartie
-Durée limitée	-Durée allant de quelques jours, jusqu'à plusieurs années

TABLE 1.2 – Différences majeures entre Future et Forward

1.3.1.3 Swap sur matières premières :

Le swap est un produit dérivé financier. Il s'agit d'un contrat d'échange de flux financiers entre deux contreparties, qui sont généralement des banques ou des institutions financières.

Un swap matière première est un achat (vente) de matière première à dates fixes et pour une certaine durée à un prix fixé, contre vente (achat) de la même matière première à un prix variable déterminé périodiquement sur le marché.

Le cours d'un swap est déterminé de manière à égaliser la jambe fixe et la jambe variable. Ainsi, la valeur d'un swap est nulle au départ et évolue au fur et à mesure que les facteurs d'évaluation du swap varient dans le temps (cours futures, taux,...)

1.3.2 Les produits dérivés optionnels :

Ce sont des produits pour lesquels la réalisation des opérations de transaction est laissée au choix des parties. Ces options donnent le droit d'acheter ou de vendre un sous-jacent à un prix déterminé à l'avance et pendant une durée fixe ou à une date précise.

Contrairement à la première catégorie des produits dérivés, les options ne sont pas des engagements fermes et définitifs, mais ce sont des droits d'achat ou de vente d'un actif sous-jacent.

On distingue deux types d'options :

-Les options vanilles : les plus simples, et généralement les plus liquides, comme les options européennes ou américaines.

-Les options exotiques : généralement beaucoup plus compliquées, comme les options asiatiques, lookback, barrière...

Chapitre 2

Analyse statistique des données

L'objectif de ce chapitre est de procéder à une analyse détaillée des données du marché du Brent afin d'identifier ses spécificités « distribution, stationnarité, saisonnalité, retour à la moyenne, mémoire longue... », ce qui nous permettra de choisir les modèles les plus pertinents.

2.1 Description des données sur le marché du Brent :

2.1.1 Données :

Les données utilisées sont des données d'ICE BRENT. Les prix spot correspondent au prix à terme de plus petite maturité (1 mois), ils sont cotés en \$/baril et sont considérés comme la référence de prix du marché. Il est à noter que les données utilisées sont les prix de clôture du marché, excepté les week-end et les jours fériés.

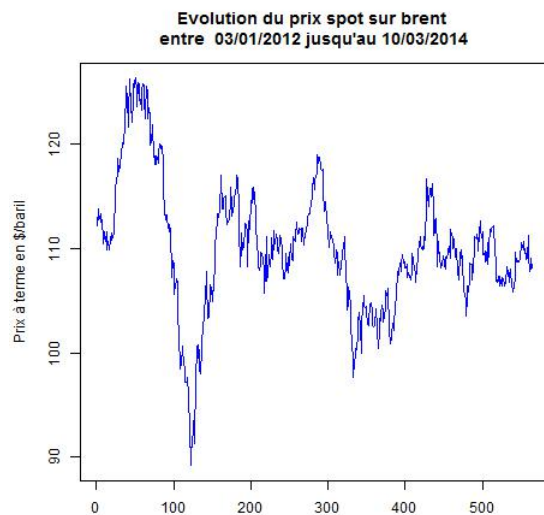


FIGURE 2.1 – Évolution du prix spot du Brent du 03/01/2012 jusqu'au 10/03/2014

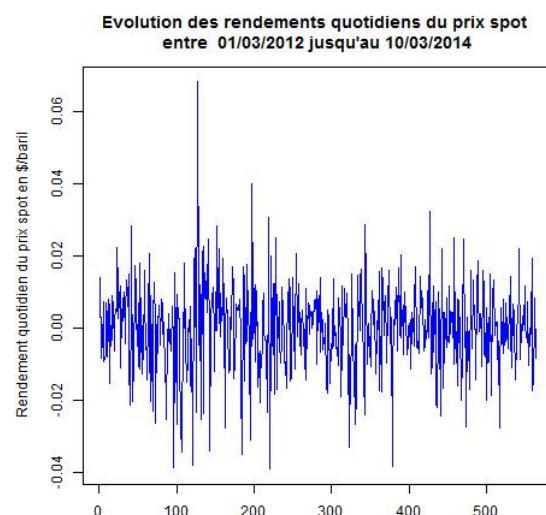


FIGURE 2.2 – Évolution des rendements quotidiens du prix spot du 03/01/2012 jusqu'au 10/03/2014

2.1.2 Indicateurs standards :

Nous noterons $S(t)$ le cours en fonction du temps t d'un contrat à terme sur pétrole. Nous définissons le rendement logarithmique du cours pour une échelle de temps égale à 1 jours par :

$$R(t) = \ln \frac{S(t)}{S(t-1)}$$

Sur une période de 26 mois « 03/01/2012-10/03/2014 », nous réalisons une étude statistique descriptive de la série temporelle reflétant les rendements quotidiens des prix spot du pétrole.

Δt	N	Min	Max	Moyenne	Médiane	Variance	Skewness	Kurtosis
1 jour	563	-3.902e-2	6.812e-2	-6.534e-5	7.147e-4	0.00015017	-0.023144	5.1639

TABLE 2.1 – Statistiques descriptives des rendements quotidiens des prix spot du pétrole.

Afin d'illustrer ces résultats, nous analysons l'histogramme de la distribution des rendements quotidiens du pétrole :

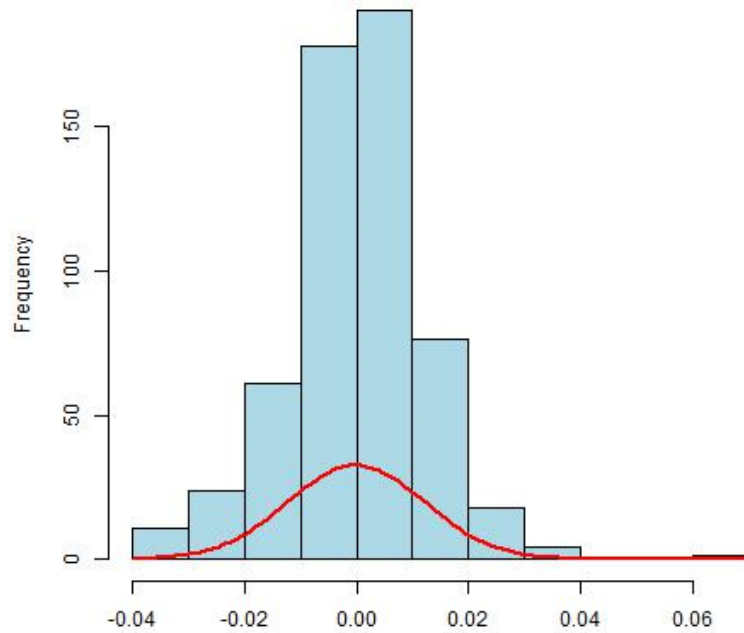


FIGURE 2.3 – Histogramme des rendements

Nous constatons que la moyenne des rendements est proche de zéro (ce qui peut-être déduit à partir du tableau précédent et même à partir de la figure de l'évolution des rendements qui tourne autour de zéro). Par ailleurs, nous observons un excès du kurtosis qui est directement lié à la queue de la distribution, défini comme le rapport entre le moment centré d'ordre 4 et le carré du moment centré d'ordre 2 et qui vaut 5.1639 au lieu de 3 pour une distribution gaussienne, traduisant une distribution à queues épaisses.

2.2 Faits stylisés des rendements d'actifs :

2.2.1 Distribution des rendements :

Pour tester l'adéquation à une loi normale de la série temporelle des rendements $R(t)$, Nous nous basons sur les tests non paramétriques de normalité de Kolmogorov-Smirnov, Anderson-Darling et Shapiro-Wilk (Ces tests sont décrits dans l'annexe A).

Une autre façon de tester, visuellement, l'adéquation ou non des rendements à une distribution gaussienne, est de faire une analyse des quantiles, en traçant les quantiles empiriques contre les quantiles théoriques de la loi normale. Le tracé doit coïncider approximativement avec la droite $y = x$. Si au contraire elles sont différentes, on doit observer des déviations.

La figure ci-dessous des *QQ-plot* permet de déceler rapidement l'inadéquation de la série à une distribution gaussienne. Ainsi nous remarquons que les queues de la distribution sont épaisses dû au fait que les fortes baisses ou les hausses sont plus fréquentes et de plus grande ampleur ce qui traduit un risque plus élevé.

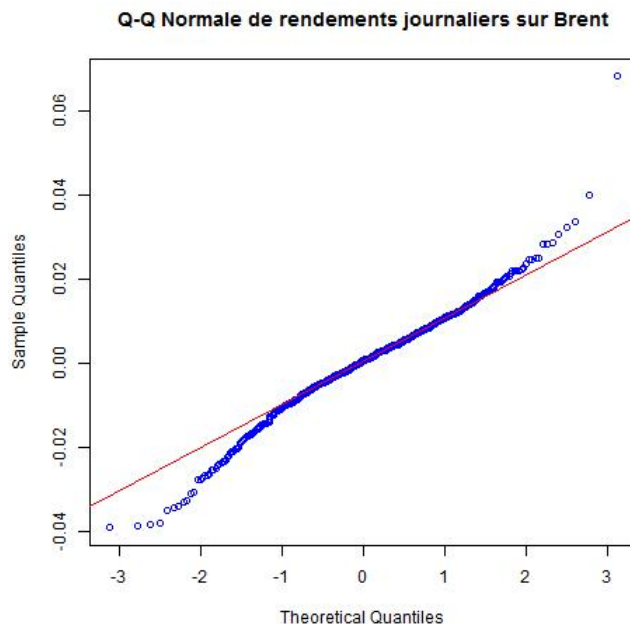


FIGURE 2.4 – Diagramme Q-Q normale des rendements journaliers du Brent.

Les résultats obtenus par les tests confirment ce constat et conduisent à rejeter l'hypothèse de normalité des rendements.

Test	Statistique	p-value
Kolmogorov-Smirnov	0.4844	$< 2.2e - 16$
Anderson-Darling	2.6257	1.255e-06
Shapiro-Wilk	0.9763	6.568e-08

TABLE 2.2 – Tests statistiques de normalité.

De façon générale, il existe des modèles différents pour les distributions des rendements. Certains pensent que les séries financières ont des rendements assez proches de distributions

stables, d'autres prônent que les rendements sont proches des distributions de *Student* (qui ne font pas partie de la classe des distributions stables). Il y a également la classe des modèles conditionnels hétéroscédastiques (ARCH-GARCH, FIGARCH), et beaucoup d'auteurs pensent que ces modèles décrivent mieux les données que des modèles non conditionnels. Les chercheurs sont néanmoins d'accord sur le caractère à queue lourde des distributions des rendements. On est donc loin d'une modélisation par un processus gaussien.

2.2.2 Analyse de la volatilité :

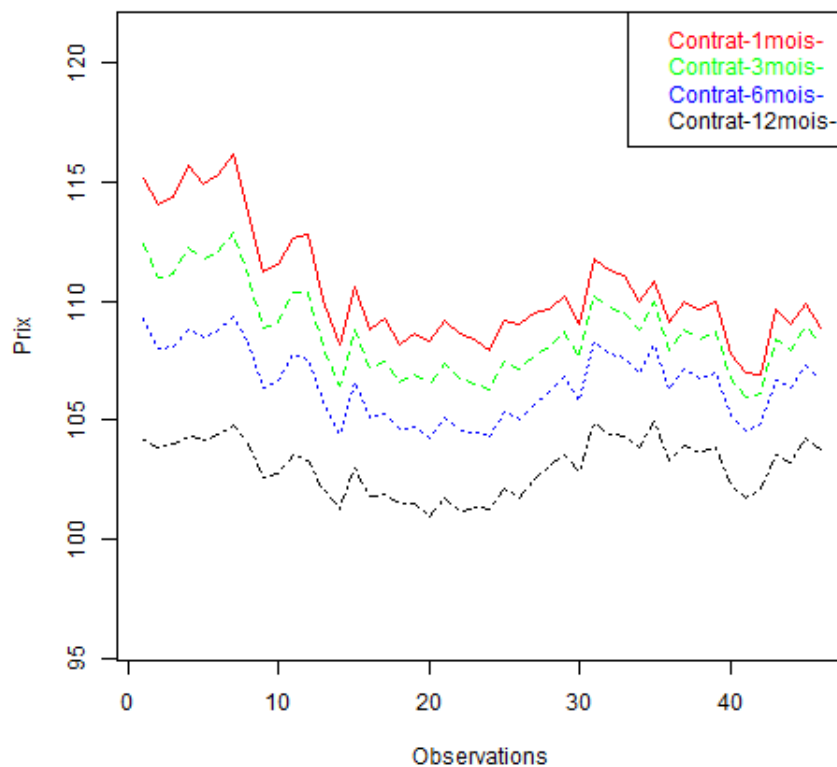


FIGURE 2.5 – Courbes de contrats à terme de maturité à différentes dates de l'année 2013.

Effet Samuelson La figure (2.5) représente les courbes de contrats à terme à différentes dates de l'année 2013. Nous remarquons que la short end (extrémité gauche des courbes) présente plus de volatilité que la long end (extrémité droite). Cet effet est appelé 'effet Samuelson' ou effet maturité. Ceci s'explique par le fait que les acteurs du marché s'intéressent plus à des gains de court terme qu'à des gains de long terme. En d'autres termes, la multiplication des transactions à court terme entraîne une plus forte volatilité à court terme qu'à long terme.

2.2.3 Analyse de la saisonnalité :

La figure (2.1) représentant l'évolution du prix spot du pétrole entre 03/01/2012 et 10/03/2014, met en évidence une éventuelle saisonnalité des prix spot du pétrole. On vérifie cette propriété et ainsi on détermine sa périodicité, en recherchant les modes propres de la série des rendements quotidiens sur la période considérée.

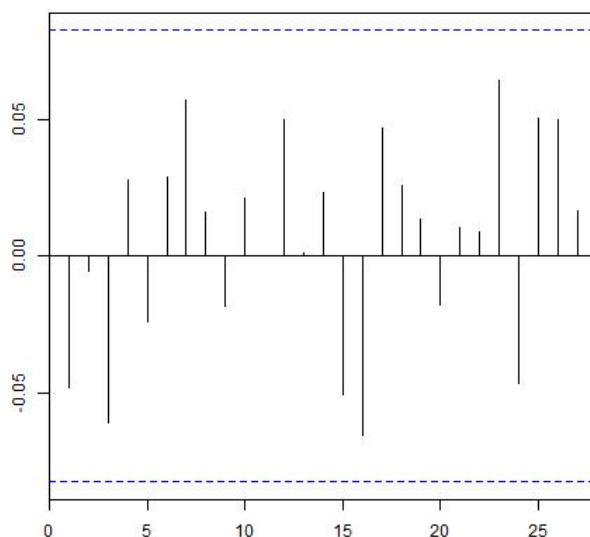


FIGURE 2.6 – Densité spectrale de la série journalière des rendements du pétrole -Source R-

Nous concluons à partir de la figure (2.6) que notre série temporelle **ne présente pas de saisonnalité** considérable.

2.2.4 Stationnarité des rendements logarithmiques :

Nous devons souligner que la plupart des études statistiques des séries chronologiques sont basées sur les hypothèses de stationnarité. En termes simples, le problème est de savoir si les propriétés probabilistes des séries financières que nous étudions restent stables dans le temps et si chaque réalisation contient toute l'information statistique.

A partir de la figure représentant l'évolution des rendements des prix spot du pétrole entre 03/01/2012 et 10/03/2014, nous remarquons que notre série présente des tendances baissières et haussières, ce qui nous conduit du point de vue économique à considérer que notre série n'est pas stationnaire. Reste à confirmer ou infirmer cette propriété par des tests statistiques. Une première approche de l'étude de la stationnarité repose sur l'auto-corrélogramme de la série.

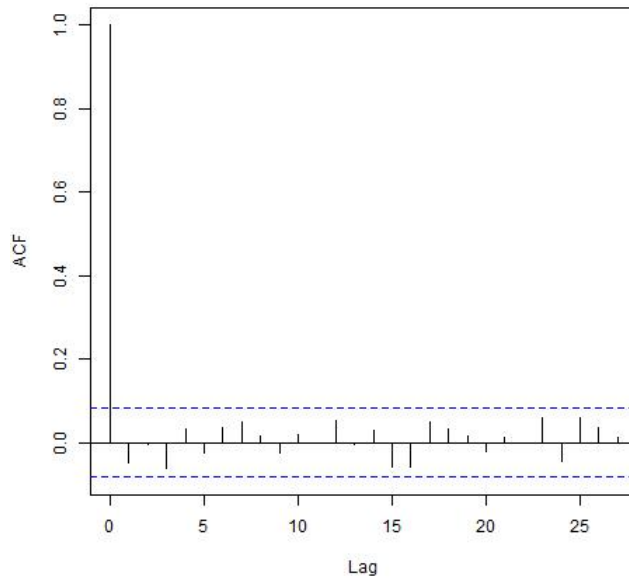


FIGURE 2.7 – Auto-corrélogramme des rendements du pétrole.

l'analyse du corrélogramme des rendements montre que la série est stationnaire. En effet, sa variance est constante et sa moyenne est nulle.

Pour la validation de la stationnarité, la démarche statistique consiste à appliquer les tests *KPSS*, *Phillips-Perron* et de *Dickey-Fuller augmenté* sur notre série. Les résultats sont :

Test	Statistique	p-value
KPSS	0.04	0.1
Augmented Dickey-Fuller	-7.5044	0.01
Phillips-Perron	-573.8626	0.01

TABLE 2.3 – Tests statistiques de stationnarité.

Le test de KPSS a comme hypothèse alternative la non-stationnarité de la série alors que les tests de Phillips-Perron et de Dickey-Fuller augmenté ont comme hypothèse alternative la stationnarité de la série.

Les trois tests nous ramènent à l'acceptation de l'hypothèse de stationnarité de la série des rendements à un seuil de 5%.

2.2.5 Auto-corrélation des rendements logarithmiques :

Il est naturel de s'intéresser à la fonction d'autocorrélation des rendements logarithmiques puisqu'elle traduit l'indépendance ou non des rendements.

$$\rho_k = \frac{\text{cov}(y_t, y_{t-k})}{\sigma(y_t)\sigma(y_{t-k})} = \frac{E[(y_t - \mu)(y_{t-k} - \mu)]}{E[(y_t - \mu)^2]} \quad (2.1)$$

Nous avons représenté la fonction d'autocorrélation empirique des rendements logarithmiques journaliers des prix à terme sur la figure (2.8). Sur ce tracé, la fonction d'autocorrélation décroît rapidement avec le temps et peut être significativement considérée comme nulle.

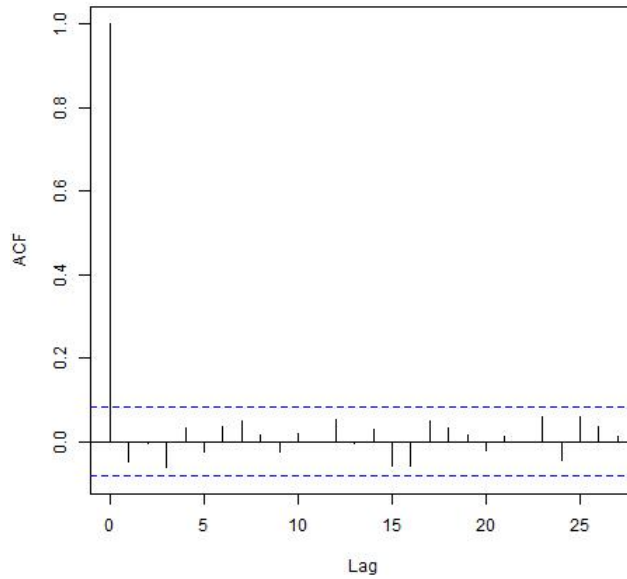


FIGURE 2.8 – Auto-corrélogramme de la série des rendements logarithmiques.

Ce résultat est affirmé par le test statistique de Box & Pierce qui nous ramène à l'acceptation de l'absence d'autocorrélation des rendements à un seuil critique de 5%.

Statistic	Parameter	p.value	Method
1.3164	1	0.2513	Box-Pierce test

TABLE 2.4 – Tests statistiques de Box & Pierce.

C'est la traduction la plus immédiate de l'Hypothèse des Marchés Efficents (EMH). En effet, la justification la plus fréquente de cette absence de corrélation invoque le principe d'absence d'arbitrage des marchés liquides. Si de telles corrélations, faciles à détecter, existaient, il serait aisé pour un intervenant de concevoir une stratégie d'arbitrage qui, en moyenne, lui permettrait de gagner de l'argent. Or la mise en œuvre de ces stratégies devrait éliminer mécaniquement ces corrélations, au moins pour des temps supérieurs au temps de réaction du marché, qui typiquement est de l'ordre de quelques minutes, pour revenir à l'équilibre.

2.2.6 Volatilité réalisée :

Notion de volatilité réalisée :

Une mesure de l'agitation du marché au cours du temps peut-être obtenue grâce à la volatilité réalisée définie comme suit.

Définition 2.2.6.1. *Supposons donnée, une série chronologique homogène (i.e. espacée régulièrement dans le temps, pour une certaine échelle de temps) de rendements $r(t_i, \Delta t)$. La volatilité réalisée (ou volatilité historique) au temps t_i est définie par :*

$$v'(t_i) = v(\Delta t, n, p; t_i) = \left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n |r(t_{i-n+j}, \Delta t)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad (2.2)$$

Pour calculer cette volatilité, on a donc besoin de fixer :

1. l'intervalle de temps Δt sur lequel on considère les rendements (avec $t_i - t_{i-1} = \Delta t$) ;
2. le nombre n d'observations que l'on fait intervenir ;
3. l'exposant p (souvent, on choisit $p = 1$ ou 2).

On peut encore faire un changement d'échelle de temps dans les volatilités (et considérer alors les volatilités annuelles, mensuelles, . . .). En général, les praticiens utilisent toujours la volatilité annualisée.

Pour chaque instant t_i , on peut donc calculer la volatilité réalisée $v(t_i)$ pour ainsi obtenir une nouvelle série chronologique.

On pourrait également centrer la volatilité réalisée en la définissant par :

$$v'(t_i) := \left\{ \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n \left| r(t_{i-n+j}, \Delta t) - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n r(t_{i-n+j}, \Delta t) \right|^p \right\}^{\frac{1}{p}} \quad (2.3)$$

Si $p = 2$, on retrouve l'écart-type (échantillon) des rendements. Les deux définitions données ci-dessus sont réellement différentes en pratique si les rendements ont une moyenne fort différente de 0, c'est-à-dire en présence d'un trend.

En général, on mesure la volatilité du marché par des rendements carrés (cas où $p = 2$).

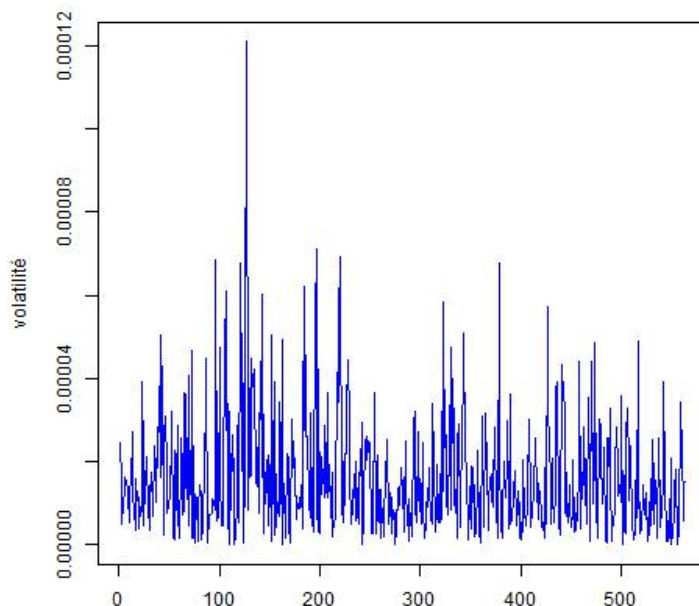


FIGURE 2.9 – Volatilité réalisée des rendements logarithmiques.

2.2.7 Corrélation entre le rendement et la volatilité instantanée :

Les asymétries dans la dynamique de la volatilité sont souvent référencées dans la littérature sous le vocable **effet de levier** depuis que *Black* avait noté que les rendements sont négativement corrélés avec les variations de leur volatilité, au sens où la volatilité a tendance à augmenter en réponse à des « mauvaises nouvelles » (rendements nets moins élevés que prévu) et à chuter en réponse à des bonnes nouvelles (rendements nets plus élevés que prévu).

Le levier financier peut en effet expliquer cette corrélation négative entre rendement d'aujourd'hui et volatilité de demain mais quel que soit le signe de cette corrélation, celle-ci introduira un certain type d'asymétrie dans la distribution observée. L'existence d'un effet de levier introduit souvent un effet de skewness dans la distribution des rendements, ce qui est **vérifié dans notre série des rendements**.

2.2.8 Mémoire longue de la volatilité des rendements :

La présence de la mémoire longue se manifeste par une décroissance hyperbolique de la fonction d'autocorrélation de la série des rendements logarithmiques des prix sur Brent.

À présent, afin de confirmer de manière visuelle l'hypothèse de la présence de la mémoire dans la volatilité de la série des rendements, nous traçons la fonction d'autocorrélation des rendements journaliers afin d'observer sa décroissance figure (2.10). Celle-ci nous renseignera sur la présence ou pas de mémoire. À titre de comparaison, nous avons tracer la fonction d'autocorrélation de la valeur absolue des rendements.

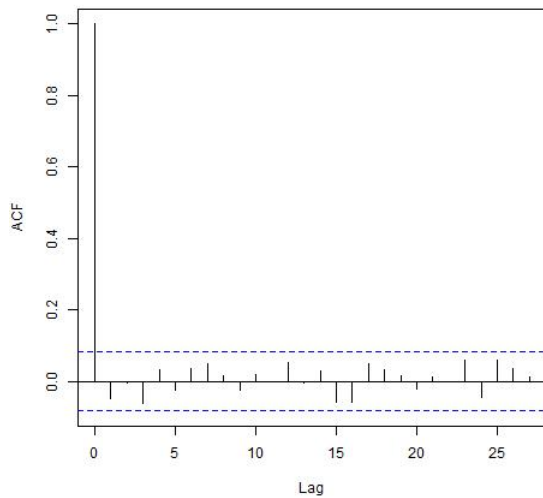


FIGURE 2.10 – Auto-corrélogramme de la valeur absolue des rendements logarithmiques.

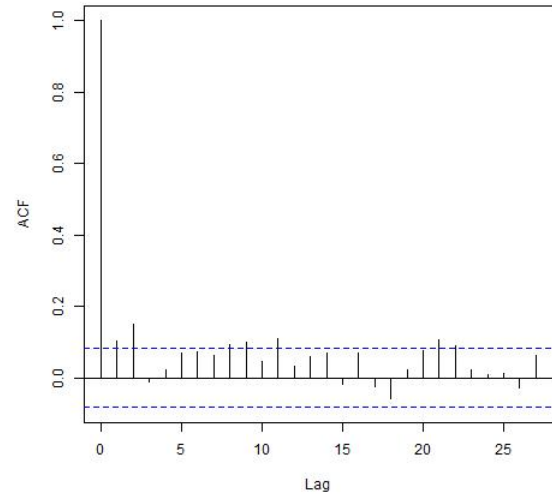


FIGURE 2.11 – Auto-corrélogramme de la valeur absolue des rendements logarithmiques.

À partir de la figure (2.10), nous observons que l'autocorrélation des rendements chute brutalement dès le premier lag : l'autocorrélation devient nulle au bout d'un jour et est maintenue à ce niveau sur toute la période considérée. Par ailleurs, quant à la fonction d'autocorrélation de la valeur absolue de rendements journaliers, son comportement n'est pas le même. Certes, la chute au premier lag est brutale, l'autocorrélation passant de 1 à environ 0.18, mais par la suite la décroissance devient très lente.

Si le processus des rendements logarithmiques semble effectivement non auto-corrélé, ce qui est mis en évidence dans la section (2.2.5), il n'est pas de même pour celui des rendements logarithmiques absolus (c-à-d. la valeur absolue des rendements logarithmiques) dont la fonction d'autocorrélation semble faiblement décroître dans le temps. Cela montre clairement la présence de **mémoire longue**.

2.2.9 Effet de retour à la moyenne des rendements logarithmiques :

L'effet de retour à la moyenne se traduit par l'existence d'une tendance qui incite le niveau de prix à revenir à un niveau antérieur. Les investisseurs seraient alors capables de prédire les rendements futurs en se basant sur les rendements passés.

L'estimation des effets du retour à la moyenne peut être faite de différentes manières et dépend bien sûr du choix du modèle et de la présence ou non de sauts et de volatilité stochastique. Ici, nous utilisons un test simple fondé sur une volatilité constante sans auto-corrélation. Considérons le modèle suivant, constitué par une simple régression décalée de 1 (*AR1*).

$$X_t = a + bX_{t-1} + \sigma_t \epsilon_t \quad (2.4)$$

avec X_t la valeur de la série temporelle des prix à terme à l'instant t .

Puisqu'il n'y a pas de volatilité stochastique, $\sigma_t = \sigma$. L'estimation du coefficient de retour à la moyenne est donné par $\mu = b - 1$. Pour que le modèle ne soit pas explosif, on peut ajouter la condition selon laquelle $b - 1 < 0$, soit $b < 1$.

La régression donne finalement :

$$\Delta X_t = a + \mu X_{t-1} + \sigma_t \epsilon_t \quad (2.5)$$

On retrouve donc un cas particulier de l'analyse de la stationnarité, avec un test de *Dickey-Fuller* et un retard pris égal à 0.

En effectuant le test, le retour à la moyenne de la série des prix du pétrole apparaît clairement dans les tests de *Dickey-Fuller* (voir annexe A). En effet, la valeur empirique (*ADF Test Statistic*) est inférieure à la valeur critique de 5% pour les trois tests.

Test	t-test statistic	p-value
<i>Dickey-Fuller</i> trend	-2.46300e+01	1.12904e-54
<i>Dickey-Fuller</i> drift	-2.465216e+01	2.523036e-37
<i>Dickey-Fuller</i> none	-2.467319e+01	1.004561e-39

TABLE 2.5 – Tests statistiques d'effet de retour à la moyenne.

2.2.10 Récapitulatif :

Conformément aux résultats de l'analyse statistique des données relatives aux prix spot du marché de pétrole, la série des rendements journaliers des prix ne vérifie pas l'hypothèse indispensable à la valorisation des instruments financiers de couverture, qui est la normalité. Cependant, la série présente de fortes propriétés statistiques comme la **stationnarité**, le **retour à la moyenne** et la **mémoire longue de la volatilité**. Par ailleurs et suite à l'analyse de la volatilité des prix à terme, il convient de mentionner la présence de l'**effet Samuelson** dans ce marché.

Chapitre 3

Modélisation des prix à terme du Brent

3.1 Mécanismes des marchés à terme sur matières premières

Ces deux dernières décennies ont connu des changements dramatiques dans les marchés mondiaux des matières premières. Les bouleversements politiques dans certains pays, les mutations économiques, la nouvelle réglementation environnementale, une énorme augmentation de la consommation de matières premières dans des pays comme la Chine et d'autres changements structurels ont contribué à augmenter la volatilité de l'offre et des prix. Cela a rendu les activités de couverture (par contrats à terme-Futures & Forwards et options) indispensables pour de nombreux secteurs de l'économie, l'énergie en particulier, étant un exemple important.

Le prix à terme (futures price) fait immédiatement intervenir la notion de temps, car il représente la valeur d'une transaction fixée à une date antérieure à la livraison de la marchandise. De ce fait, il est souvent considéré comme une anticipation du prix au comptant. Naturellement, cette anticipation est formulée compte tenu de l'information disponible à une date donnée. Elle est donc susceptible d'évoluer dans le temps, au fur et à mesure que de nouvelles informations surgissent, et ce d'autant plus que l'horizon d'analyse est éloigné. Ainsi, un prix à terme apporte une estimation du prix au comptant futur d'autant plus fiable que l'échéance du contrat est rapprochée. En effet, plus l'échéance d'un contrat à terme approche, et plus diminue l'incertitude concernant les conditions de l'offre et de la demande lors de la livraison. Ce phénomène est dû à la présence d'une passerelle entre le marché du sous-jacent et le marché futures, qui crée un lien entre le prix au comptant et le prix à terme, et rend de ce fait possibles des phénomènes de propagation de chocs d'un marché à l'autre, le long de la courbe des prix.

3.1.1 Opérations de marge :

3.1.1.1 Margin requirements :

Lorsqu'on prend une position, longue ou courte, sur les contrats futures, un broker membre de la chambre de compensation de la bourse où la transaction a lieu, se place en contrepartie. Il faut donc effectuer un dépôt d'argent, appelé marge initiale, auprès de ce broker.

Cette marge correspond généralement à 5% du prix du contrat. A la fin de chaque journée de trading, et pendant toute la période d'échange de ce contrat, ce dépôt sera ajusté en fonction de l'évolution du prix dudit contrat. Concrètement, si on est acheteur, et que le prix du contrat a baissé, le broker versera la différence sur notre compte, en revanche, si le cours a augmenté, la différence sera retranchée.

On appelle marge de maintenance, le seuil en deçà duquel le niveau de notre compte ne doit descendre, elle représente près de 30% de la marge initiale. Si cela venait à arriver, le broker procède à un appel de marge, le client doit alors alimenter son compte pour ramener son niveau à celui de la marge initiale. Si le client ne répond pas à l'appel de marge, le broker liquide sa position.

L'objectif derrière ce mécanisme de dépôts de marge, qui fait la particularité des marchés organisés, est de remédier au risque de contrepartie. Ainsi, le client ne peut se désengager lorsque le marché n'évolue pas en la faveur de la position qu'il a prise.

3.1.1.2 Chambre de compensation :

Chaque marché de futures dispose de sa propre chambre de compensation. Tous les membres de l'échange (les brokers) sont, eux aussi comme leurs clients, tenus de rapporter leurs transactions à la chambre de compensation à la fin de chaque session de trading. Le même procédé de dépôt de marge se tient entre le broker et la chambre de compensation. Cela dit, les marges exigées peuvent être différentes de celles requises des particuliers.

3.1.2 Analyse des prix :

Les courbes de prix à terme sur matières premières présentent des formes différentes suivant les produits et suivant les périodes. Nous présentons ici les notions de base qui permettent d'analyser l'état et les variations de cette courbe.

A une date donnée t et pour une unité du sous-jacent, on note $S(t)$ le prix au comptant et $F(t, T)$ le prix d'un contrat à terme livrant le sous-jacent à une date future T . On note $C(t1, t2)$ le coût de détention d'une unité du produit physique entre deux dates $t1$ et $t2$ (rassemblant les coûts de stockage, de transport et de financement).

3.1.2.1 Arbitrage cash-and-carry :

Considérons une matière première stockable. On a la relation :

$$F(t, T) \leq S(t) + C(t, T) \quad (3.1)$$

En effet, si cette relation était violée, un arbitrage, dit cash-and-carry, consisterait à acheter le produit physique et à vendre le contrat à terme simultanément en t , le produit serait alors livré à échéance du contrat en T .

Contrairement aux instruments financiers classiques, l'opération inverse (reverse cash-and-carry) est très rarement réalisable en pratique et c'est pourquoi on n'a qu'une relation d'inégalité.

La notion de prix au comptant est en fait théorique pour la plupart des marchés, car il est rarement possible d'obtenir la livraison le jour même. Mais la relation peut être étendue à un arbitrage entre deux contrats à terme :

$$F(t, T2) \leq F(t, T1) + C(T1, T2) \quad (3.2)$$

Les intérêts financiers, inclus dans C , sont supposés voisins du taux d'intérêt sans risque car le produit physique stocké peut être utilisé comme collatéral. Bien qu'étant un arbitrage, une telle opération n'est pas sans risque dans la réalité : la livraison finale du produit est soumise au risque de transport, très présente dans le cas du pétrole et du gaz. Certains produits sont de plus périssables et l'arbitragiste doit s'assurer que son état au moment de la livraison remplit les conditions du contrat à terme, auquel cas il devra payer un coût d'ajustement. Tenant compte de ces réalités, la relation (3.1) peut cependant être validée en ajoutant les coûts d'assurance dans C . Une telle relation n'est cependant plus valide dans le cas d'un produit non stockable comme l'électricité.

3.1.2.2 Rendement d'opportunité (*convenience yield*) :

Le rendement d'opportunité est défini comme le bénéfice associé à la détention du produit physique entre deux dates t et T ; nous le notons $Y(t, T)$. En termes d'option réelle, il peut être formulé comme étant la valeur de l'option de consommation du produit à tout instant, pendant cette période. Il est défini par :

$$F(t, T) = S(t) + C(t, T) - Y(t, T) \quad (3.3)$$

Le rendement d'opportunité net est $Y - C$. Sa structure par terme peut être déduite directement de celle des prix à terme. Le rendement d'opportunité peut aussi s'interpréter comme le revenu tiré du prêt du produit physique. Y est, de ce fait, souvent exprimé proportionnellement au prix, sous la forme $Y(t, T) := \delta(t, T)S(t)$, d'où le terme de rendement. Remarquons que, dans le cas de l'or, ce rendement est directement observable, on l'appelle le *lease rate*, qui correspond en fait à la différence entre le rendement d'opportunité et le coût de stockage, et c'est de cette manière que les prix à terme de l'or sont cotés à Londres.

3.1.2.3 Report (contango) et déport (backwardation) :

Une courbe de prix de contrats à terme est dite en report (contango en anglais) si les prix à terme sont supérieurs au prix au comptant. Elle est dite en déport (backwardation) dans le cas contraire, i.e. lorsque le rendement d'opportunité est supérieur aux coûts de stockage (pour un produit stockable). Le deuxième membre de l'équation (3.1) correspond à la courbe "maximale" des prix à terme, on l'appelle le report maximum ou maximum contango, ou encore full carry. Par contre, il n'y a pas de déport maximum, le rendement d'opportunité peut être très élevé (la limite correspondant à des prix à terme à zéro). Notons qu'une telle définition n'est pas directement applicable dans le cas de courbes exhibant une saisonnalité forte, comme le gaz naturel, où il est plus judicieux de comparer des prix correspondant au même mois de livraison.

Une courbe en déport correspond en général à une situation de pénurie : en effet, la détention du produit physique a alors plus de valeur que sa détention dans le futur, d'où un rendement d'opportunité élevé.

C'est typiquement le cas du pétrole en périodes de tensions géopolitiques. A l'inverse, une courbe en report correspond à une situation de surplus. Deux théories s'affrontent pour expliquer le report et le déport : la théorie du déport normal et la théorie du stockage.

3.2 L'origine de l'analyse de la structure par terme des prix des commodités : les théories traditionnelles :

3.2.1 La théorie du déport normal :

Introduite par Keynes en 1930, elle avance que dans des conditions normales de fonctionnement, le marché à terme des matières premières est caractérisé par un prix forward inférieur au prix au comptant, car le prix au comptant comprend une rémunération pour le risque de fluctuation des prix durant la période de production, alors que le prix forward l'exclut.

La première hypothèse de la théorie est que les positions courtes sont inférieures aux positions longues. La présence de spéculateurs est alors nécessaire pour pallier ce déséquilibre. Cette intervention suppose une différence entre le prix à terme et le prix au comptant futur anticipé à la date de livraison du contrat (il s'agit là de la seconde hypothèse de la théorie). La présence d'une prime de risque positive associée au prix au comptant futur explique la différence entre le prix au comptant et le prix à terme (rémunération des spéculateurs pour le risque qu'ils prennent).

A ce jour, cette théorie n'a pas pu être totalement acceptée ou rejetée. Les travaux conduits ont mené à des résultats contradictoires.

3.2.2 La théorie du stockage :

Lorsque les stocks physiques sont invoqués pour expliquer la relation entre le prix au comptant et le prix à terme, l'interprétation du déport devient délicate. Si le prix à terme correspond

au prix au comptant augmenté des coûts du stockage, comment alors expliquer le fait que le prix à terme soit inférieur au prix au comptant dans certains cas ?

C'est alors que le concept de *convenience yield* est introduit pour apporter une réponse. Défini brièvement comme le revenu implicite associé à la détention de stocks, il est élevé lorsque les stocks sont rares, parce que la détention de stocks est plus appréciée, inversement, le *convenience yield* est faible lorsque les stocks sont abondants. Enfin, le *convenience yield* est positivement corrélé au prix au comptant, qui est lui-même élevé lorsqu'il y a pénurie de stocks et inversement.

3.3 Modèles de structure par terme des prix des matières premières :

Les modèles de structure par terme des prix des matières premières ont pour objectif de reproduire, le plus fidèlement possible, les prix observés sur le marché. Ils offrent également un moyen de découvrir les prix pour un horizon excédant celui des maturités négociées.

Avant d'aborder cet exposé, les modèles de structure par terme des matières premières étant inspirés de la méthodologie de l'évaluation relative aux taux d'intérêt, il n'est donc pas inutile d'en rappeler les principes fondamentaux.

Ces modèles partagent tout d'abord trois hypothèses. Premièrement, le marché est exempt de frictions, de taxes, ou de coûts de transaction. Deuxièmement, les échanges ont lieu en continu. Troisièmement, les taux de prêt et d'emprunt sont égaux et il n'y a pas de contraintes sur les ventes à découvert.

Quatre étapes caractérisent la méthode présidant à l'élaboration des modèles. En premier lieu, les variables d'état (c'est-à-dire les sources d'incertitudes affectant la valeur de l'actif dérivé) sont sélectionnées et leur dynamique est spécifiée. En deuxième lieu, sachant que le prix de l'actif dérivé est une fonction des variables d'état, du temps, et de l'échéance, l'application du lemme d'Itô permet d'obtenir le comportement dynamique du prix de l'actif dérivé. En troisième lieu, un raisonnement d'arbitrage et l'élaboration d'un portefeuille de couverture conduisent à la prime de terme et à l'équation fondamentale de valorisation caractérisant le modèle. En dernier lieu, lorsque c'est possible, la solution du modèle est obtenue.

La littérature permet de recenser quatre facteurs sous-jacents différents dans les modèles de structure par terme des prix des matières premières : le prix au comptant, le *convenience yield*, le taux d'intérêt, et le prix à long terme. Lorsqu'un modèle ne comporte qu'un seul facteur, le choix se porte presque systématiquement sur le prix au comptant. La raison en est simple : le prix à terme étant défini comme l'anticipation du prix au comptant futur, conditionnellement à l'information disponible à une date donnée, le prix au comptant est considéré comme le principal déterminant du prix à terme.

L'homogénéité dans le choix des variables d'état disparaît en revanche lorsqu'une seconde variable stochastique est introduite. La plupart du temps, le second facteur est alors le *convenience yield*. Cependant, des modèles utilisant le prix à long terme ont également été développés. Quelques modèles à trois facteurs ont été proposés, mais ils sont plus rares. Dans ce cas, le troisième facteur est soit le taux d'intérêt, soit le prix à long terme.

3.3.1 Modèles à un facteur :

Plusieurs modèles à un facteur ont été proposés dans la littérature. Ces modèles peuvent tous être distingués les uns des autres selon le comportement dynamique qu'ils retiennent pour le prix comptant : le mouvement brownien géométrique ou le processus de retour vers une valeur moyenne. Par ailleurs, une autre distinction peut être établie en fonction du rôle accordé au *convenience yield*.

3.3.1.1 Modèles à base du mouvement brownien géométrique :

Les modèles à un facteur retenant un mouvement brownien géométrique pour le prix au comptant sont ceux de Brennan et Schwartz (1985), de Gibson et Schwartz (1989 et 1990), de Brennan (1991), et de Gabillon (1992 et 1995). Parmi ces modèles, le plus célèbre est clairement celui de Brennan et Schwartz (1985).

Le mouvement brownien géométrique est une dynamique couramment utilisée pour représenter le comportement des prix des actions. Dans le cas des matières premières, le processus du prix au comptant est le suivant :

$$dS(t) = \mu S(t)dt + \sigma_s S(t)dZ_s \quad (3.4)$$

avec :

- S : le prix spot,

- μ : la tendance du prix spot,

- σ_s : la volatilité du prix spot,

- dz : incrément du mouvement brownien standard associé au prix spot.

L'utilisation de cette représentation implique que les variations du prix au comptant en t sont supposées être indépendantes des variations antérieures, et que la tendance μ guide l'évolution du prix.

L'incertitude affectant cette évolution est proportionnelle au niveau du prix au comptant : comme nous avons vu précédemment, lorsque les stocks sont rares, S est élevé ; dans cette situation, toute modification de la demande a un impact important sur le prix, car les stocks ne sont pas suffisamment abondants pour absorber ces fluctuations.

Un raisonnement d'arbitrage et la construction d'un portefeuille de couverture conduisent à l'équation fondamentale de valorisation des prix à terme, qui est :

$$\frac{1}{2}\sigma_s^2 S^2 F_{ss} + (r - c)SF_s - F_T = 0 \quad (3.5)$$

où c est le *convenience yield* et r est le taux d'intérêt sans risque. Ces deux paramètres sont supposés être constants. L'équation montre que le *convenience yield* joue ici le rôle d'un dividende stochastique dans le processus du prix au comptant.

La condition frontière associée à cette équation est :

$$F(T, T) = S(T)$$

Elle représente le processus de convergence des prix au comptant et à terme à l'expiration du contrat. Cette convergence est due à la possibilité de livrer la marchandise à l'échéance. Elle

est assurée par les opérations d'arbitrage entre le marché physique et le marché papier.

La solution du modèle, qui peut être obtenue en utilisant une solution de type *Feynman–kac*, exprime la relation en t entre un prix à terme observable F pour une livraison en T et la variable d'état S :

$$F(t, T) = Se^{(r-c)\tau} \quad (3.6)$$

où τ est la maturité du contrat : $\tau = T - t$.

Le modèle de Brennan et Schwartz est très populaire car il constitue probablement la version la plus simple de modèle de structure par terme des prix des matières premières. Cependant, une critique majeure peut lui être adressée. En effet, le mouvement brownien géométrique n'est certainement pas le meilleur moyen de représenter la dynamique du prix au comptant. La théorie du stockage, l'effet Samuelson et l'analyse en composantes principales des courbes de prix indiquent que le processus de retour vers une valeur moyenne est probablement plus pertinent.

3.3.1.2 Modèles à base du processus de retour à la moyenne :

Les modèles à un facteur retenant un processus de retour vers une valeur moyenne pour le prix au comptant sont ceux de Schwartz (1997), de Cortazar (1997), et de Routledge, Seppi & Spatt (2000) ; Parmi eux, celui de Schwartz (1997), inspiré de Ross (1995), est le plus connu.

Le modèle de Schwartz (1997) suppose que la dynamique du prix au comptant est la suivante :

$$dS(t) = S(t)\kappa(\alpha - \ln S(t))dt + \sigma_s S(t)dZ_s \quad (3.7)$$

avec :

- S : le prix spot,
- κ : force de rappel agissant sur le prix spot,
- α : la valeur moyenne à long terme du logarithme prix spot,
- σ_s : la volatilité du prix spot,
- dZ : incrément du mouvement brownien standard associé au prix spot.

Dans cette situation, le prix au comptant fluctue autour de sa valeur moyenne à long terme. La présence d'une force de rappel κ assure que la variable d'état retournera vers cette valeur. Par conséquent, le comportement du prix au comptant est soumis à deux tendances : il a une propension à revenir vers sa valeur à long terme, mais simultanément, des chocs aléatoires peuvent l'en éloigner.

L'utilisation d'un processus de retour vers une valeur moyenne pour le prix au comptant autorise une analyse plus réaliste des marchés de matières premières que le mouvement brownien géométrique, car elle permet de prendre en considération le comportement des opérateurs sur le marché physique.

Ce comportement est le suivant : Lorsque le prix au comptant est inférieur à sa valeur moyenne à long terme, les industriels, s'attendent à une hausse du prix au comptant, reconstituent leurs stocks, tandis que les producteurs réduisent leur production. La demande croissante sur le marché au comptant et la réduction simultanée de l'offre ont un impact haussier sur le prix au comptant. Inversement, lorsque le prix au comptant est plus élevé que sa valeur moyenne

à long terme, les industriels cherchent à réduire leurs stocks excédentaires et les producteurs augmentent leur production, poussant ainsi le prix au comptant vers des niveaux plus faibles.

Si cette représentation du comportement du prix est préférable au mouvement brownien géométrique, elle n'est toutefois pas parfaite. On peut tout d'abord lui reprocher le fait que le processus de retour vers une valeur moyenne n'exclut pas la possibilité que la variable d'état devienne négative (la même critique a été formulée dans le cas des taux d'intérêt).

En définissant $x = \ln S$ et en appliquant le *lemme d'Itô*, le logarithme du prix au comptant suit le processus d'*Ornstein-Uhlenbeck* :

$$dx = \kappa(\alpha - x)dt + \sigma dZ \quad (3.8)$$

où α est le niveau à long terme du logarithme du prix spot.

Sous la mesure martingale, la dynamique du processus d'Ornstein-Uhlenbeck devient :

$$dx = \kappa(\alpha^* - x)dt + \sigma dZ^* \quad (3.9)$$

où :

$-\alpha^* = \alpha - \lambda$,

$-\lambda$: la prime du risque du marché (supposée constante),

$-dZ^*$: un incrément du mouvement brownien standard associé au logarithme du prix au comptant sous la mesure martingale.

A partir de cette dernière équation, la distribution conditionnelle de x au temps T , sous la mesure martingale, est normale, ses paramètres sont :

$$\mathbb{E}[x(T)] = e^{-\kappa T} x(0) + (1 - e^{-\kappa T}) \alpha^*$$

$$\mathbb{V}[x(T)] = \frac{\sigma^2}{2\kappa} (1 - e^{-2\kappa T})$$

Puisque $x = \ln S$, le prix au comptant est distribué à la date T , sous la mesure martingale, suivant une loi log normale avec les mêmes paramètres. Et puisqu'on sait que le prix à terme de maturité T n'est autre que le prix au comptant prédict à l'instant T , on a :

$$F(S, T) = \mathbb{E}[S(T)] = \exp(\mathbb{E}[x(T)] + \frac{1}{2}\mathbb{V}[x(T)]) \quad (3.10)$$

On obtient par la suite la formule close de calcul du prix à terme de maturité T :

$$F(S, T) = \exp[e^{-\kappa T} \ln S + (1 - e^{-\kappa T}) \alpha^* + \frac{\sigma^2}{4\kappa} (1 - e^{-2\kappa T})] \quad (3.11)$$

3.3.2 Modèles à deux facteurs :

Les modèles à deux facteurs peuvent être séparés en deux catégories : ceux qui, en s'appuyant sur la théorie du stockage, retiennent le *convenience yield* comme second facteur et ceux qui, sur la base de *l'effet de Samuelson*, choisissent le prix à terme pour une échéance éloignée. Les premiers sont beaucoup plus nombreux que les seconds.

3.3.2.1 Modèles à base du *convenience yield* :

Considérer le *convenience yield* comme une source d'incertitude affectant le prix à terme, c'est supposer, contrairement à ce qui est fait dans la plupart des modèles mono-factoriels, qu'il apporte une information non intégralement contenue dans la première variable d'état qu'est le prix au comptant. En d'autres termes, le *convenience yield* n'est pas totalement corrélé au prix au comptant. Cette corrélation imparfaite peut être expliquée de la façon suivante : dans un marché de matières premières, une variation du rythme de transport ou de transformation d'une marchandise peut avoir un impact sur le revenu implicite associé à la détention de stocks (le *convenience yield*) sans pour autant se traduire immédiatement par une transaction sur le marché physique et donc par une modification du prix au comptant.

Parmi les modèles à deux facteurs retenant le *convenience yield* comme variable d'état, celui de *Schwartz(1997)* est le plus célèbre. Il a été utilisé comme référence pour développer plusieurs modèles plus sophistiqués (*Hilliard & Reis(1998)*, *Schwartz(1998)*, *Neuberger(1999)*, *Schwartz & Smith (2000)*...).

Le modèle de *Schwartz(1997)* est inspiré de celui proposé par *Gibson & Schwartz* en 1990. Comparé à sa version antérieure, le dernier modèle est plus simple d'utilisation car il possède une solution analytique. Ce modèle suppose que le prix au comptant S et le *convenience yield* c expliquent le comportement du prix à terme F . La dynamique de ces variables d'état est :

$$\begin{cases} dS = (\mu - c)Sdt + \sigma_s S dZ_s \\ dc = [\kappa(\alpha - c)]dt + \sigma_c dZ_c \end{cases} \quad (3.12)$$

avec : $\kappa, \sigma_s, \sigma_c > 0$ où :

- μ : la tendance du prix spot,

- σ_s : la volatilité du prix spot,

- dZ_s : un incrément du mouvement brownien standard associé au prix spot,

- α : la valeur moyenne à long terme du prix spot,

- κ : la force de rappel agissant sur le *convenience yield*,

- σ_c : la volatilité du *convenience yield*,

- dZ_c : un incrément du mouvement brownien standard associé au *convenience yield*.

Dans ce modèle, *Schwartz* reprend l'idée d'un comportement de retour vers une valeur moyenne, mais l'applique cette fois au *convenience yield*. Ce choix n'est pas incohérent avec ce qui avait été fait dans le cadre de modèles mono factoriels, car le *convenience yield* intervient dans la dynamique du prix au comptant, imprimant à son tour à ce dernier- de façon marginale toutefois- un comportement de retour vers une valeur moyenne. Le *convenience yield* devient alors un dividende stochastique affectant la dynamique du prix au comptant. Une telle représentation illustre bien le fait que le *convenience yield* est un revenu implicite associé aux stocks. Elle autorise par ailleurs des comparaisons avec d'autres actifs financiers, tels que les actions ou les obligations.

Le processus d'*Ornstein-Uhlenbeck*, appliqué au *convenience yield*, suppose que les stocks ont une capacité à se régénérer, et qu'il existe un niveau de stocks satisfaisant les besoins de l'industrie dans les conditions de fonctionnement normales. C'est, là encore, le comportement des opérateurs sur le marché physique qui garantit le maintien de ce niveau ; comme on vient de voir dans la section des théories traditionnelles : lorsque le *convenience yield* est faible, les stocks sont abondants et les opérateurs supportent un coût de stockage élevé au regard des bénéfices

associés à la détention de la marchandise. Par conséquent, s'ils sont rationnels, ils vont chercher à réduire ces stocks excédentaires ; Inversement, en cas de pénurie, les opérateurs tendent à reconstituer les stocks.

Par ailleurs, conformément aux enseignements de la théorie du stockage, le modèle suppose que le prix au comptant et le *convenience yield* sont corrélés. En effet, ces variables d'état sont toutes deux une fonction inverse du niveau des stocks.

Néanmoins, comme l'ont montré *Gibson et Schwartz(1990)*, la corrélation entre ces deux variables n'est pas parfaite. Leurs mouvements browniens géométriques sont donc corrélés avec :

$$\mathbb{E}[dZ_s dZ_c] = \rho dt$$

où ρ est le coefficient de corrélation.

Un raisonnement d'arbitrage et la construction d'un portefeuille de couverture conduisent à la solution du modèle. Elle exprime la relation en t entre un prix à terme observable F pour une livraison en T et les variables d'état S et c :

$$F(S(t), c(t), t, T) = S(t)e^{A(\tau)+B(\tau)} \quad (3.13)$$

$$\text{avec : } A(\tau) = \left[\left(r - \hat{\alpha} + \frac{\sigma_c^2}{2\kappa^2} - \frac{\sigma_s \sigma_c \rho}{\kappa} \right) \tau \right] + \left[\frac{\sigma_c^2}{4} \frac{1 - e^{-2\kappa\tau}}{\kappa^3} \right] + \left[\left(\hat{\alpha}\kappa + \sigma_s \sigma_c \rho - \frac{\sigma_c^2}{\kappa} \right) \left(\frac{1 - e^{-2\kappa\tau}}{\kappa^2} \right) \right]$$

$$\text{et : } B(\tau) = -\frac{1 - e^{-\kappa\tau}}{\kappa}, \quad \hat{\alpha} = \alpha - \left(\frac{\lambda}{\kappa} \right)$$

où :

- r : le taux d'intérêt sans risque, supposé constant,

- λ : la prime du risque du *convenience yield*,

- τ : la maturité du contrat à terme.

3.4 Calibration des modèles :

Les performances d'un modèle mesurent sa capacité à reproduire la structure par terme des prix. Pour établir ces performances, il est donc nécessaire d'avoir les valeurs de ses paramètres. Les valeurs des paramètres servent à calculer les prix à terme estimés et à les comparer avec les données du marché. L'estimation des paramètres n'est cependant pas évidente, car de nombreux modèles de structure par terme reposent sur des variables d'état non observables.

En effet, une des principales difficultés rencontrées lors de l'implémentation des modèles de structure par terme, réside dans l'absence de facteurs ou de variables d'état directement observables. Dans la plupart des cas, le prix au comptant est tellement incertain que c'est le prix à terme correspondant, avec la plus courte maturité, qui est utilisé comme une approximation du prix spot. Quant aux contrats à terme, ceux-ci sont transigés sur la plupart des marchés et leurs prix sont donc plus facilement observables.

Pour le modèle de *Bernnan & Schwartz*, deux prix à terme de différentes maturités sont utilisés pour déterminer le *convenience yield*. Si l'on note les maturités de ces prix T_1 et T_2 , le *convenience yield* c est alors :

$$c = r - \frac{\ln F(t, T_1) - \ln F(t, T_2)}{T_1 - T_2}$$

Alors que pour le modèle de Schwartz à deux facteurs, l'estimation du *convenience yield* est encore plus complexe.

Pour déterminer les prix à terme théoriques et pour estimer les paramètres du modèles en présence d'une ou de plusieurs variables non observables, il faut reconstituer des séries temporelles pour ces variables. Les méthodes de filtrage, utilisées depuis longtemps en contrôle automatique et en traitement du signal, peuvent être employées à cet effet. Notons que le filtrage est un processus itératif permettant d'estimer les paramètres d'un modèle lorsque ce dernier repose sur une grande quantité de variables, observables ou non. La plus célèbre méthode de filtrage est clairement celle de *Kalman*, appelée communément le filtre de *Kalman*.

Le principe du filtre de *Kalman* est d'utiliser des séries temporelles de variables observables pour reconstituer les valeurs des variables non observables. L'utilisation d'un filtre de *Kalman* requiert d'exprimer le modèle sous la forme espace-états-mesure. Une fois que le modèle a été projeté dans l'espace État-Mesure, le filtre de *Kalman* peut y être appliqué afin d'estimer les paramètres du modèle et déterminer la série des variables d'état non observables.

3.4.1 Estimation des paramètres du modèle de Schwartz à un facteur :

Pour l'estimation des paramètres du modèle de *Schwartz* à un facteur à savoir : κ, α, σ , nous avons fait recours à une approche simple basée sur la méthode des moindres carrés ordinaires puisqu'on connaît la discrétisation exacte du processus de retour à la moyenne. Notons que l'application du filtre de *Kalman* sera réservée au modèle de *Schwartz* à deux facteurs.

Nous avons vu que la dynamique du processus du logarithme du prix spot est donnée par :

$$dx_t = \kappa(\alpha - x_t)dt + \sigma dZ_t \quad (3.14)$$

La version discrète du processus est donnée par :

$$x_{t+\delta} = x_t e^{-\kappa\delta} + \alpha(1 - e^{-\kappa\delta}) + \sigma \sqrt{\frac{1 - e^{-2\kappa\delta}}{2\kappa}} \epsilon \quad (3.15)$$

avec :

$-\delta$: un pas de discrétisation.

$-\epsilon \sim N(0, 1)$

Ainsi, nous pouvons estimer les paramètres du processus par la méthode des moindres carrés ordinaires en nous référant aux données du prix au comptant par l'estimation de l'équation suivante :

$$x_t = a + bx_{t-1} + c\epsilon \quad (3.16)$$

Avec laquelle nous pourrions calculer les paramètres κ, α, σ qui sont respectivement :

$$\begin{aligned} \kappa &= -\ln b \\ \alpha &= \frac{a}{1-b} \\ \sigma &= \sqrt{\frac{-2\ln b}{1-b^2}} c \end{aligned}$$

Les résultats de cette régression sont présentés dans le tableau ci-dessous :

	Coefficients	Std. Error	t-value	t-prob
Intercept	0.110918	0.042885	2.586	0.00995
log(spot_{t-1})	0.936409	0.009126	106.994	$< 2e^{-16}$
Residual standar error	0.01219	-	-	-
R-squared	0.9533	-	-	-
Adjusted R-squared	0.9532	-	-	-
F-statistic	$1.145e^4$	-	-	-
p-value	$2.2e^{-16}$	-	-	-

TABLE 3.1 – Sorties R de l'estimation des paramètres de l'équation

Les résultats de la régression semblent être satisfaisants avec une *p-value* inférieure à n'importe quel seuil critique et un R^2 de 84.29%. Ainsi nous obtenons : $\hat{a} = 0.110918$, $\hat{b} = 0.936409$, $\hat{c} = 0.01219$.

Par ailleurs les paramètres du modèle de Schwartz à un facteur se présentent comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \kappa = -\ln \hat{b} = 0.065702932 \\ \alpha = \frac{\hat{a}}{1-\hat{b}} = 1.744240537 \\ \sigma = \sqrt{\frac{-2\ln \hat{b}}{1-\hat{b}^2} \hat{c}} = 0.01259258 \end{array} \right.$$

3.4.2 Estimation des paramètres du modèle de Schwartz à deux facteurs :

Comme cité plus haut, estimer les paramètres du modèle de Schwartz à deux facteurs revient à exprimer le modèle sous la forme espace-états-mesure avant d'estimer la valeur de la fonction de vraisemblance via le filtre de *Kalman*. (Ces derniers sont donnés en annexe C)

3.4.2.1 Résultats de l'estimation :

Les paramètres non observables de notre modèle ont été estimés et optimisés à l'aide du package *Schwartz97* du logiciel R, publié le 11 Février 2014 qui effectue le filtrage de *Kalman* ainsi que la procédure d'optimisation.

Pour l'estimation, nous avons considéré un taux d'intérêt sans risque annuel constant égal à 0.277% relatif aux bonds du trésor américain.

Les résultats obtenus sont présentés dans le tableau suivant :

Parameters of the fitted Schwartz97 two-factors model	
μ	0.3879
κ	2.0287
α	0.0552
σ_s	0.2539
σ_c	0.4023
λ	0
$\hat{\alpha}$	0.0552
ρ	0.9364
Optimisation informations	
Converged :	TRUE
Log-likelihood :	-143115179
Nbr. of iterations :	7001

TABLE 3.2 – Sorties R de l'estimation des paramètres non observables du modèle de Schwartz à deux facteurs

3.4.3 Application des modèles :

Cette section est dédiée à la présentation des Pricers des contrats Futures sur pétrole (ICE Brent), relatifs aux modèles à un et deux facteurs à savoir : celui de *Bernnan & Schwartz*, celui de *Schwartz* à un facteur et finalement celui de *Schwartz* à deux facteurs.

A noter que :

-La date de valorisation est le 10/03/2014.

-Le prix spot est approximé par le prix futures avec la plus courte maturité.

-Pour l'implémentation du modèle de Schwartz à un facteur nous avons utilisé le taux zero coupon "US" annuel quelque soit la maturité du contrat puisqu'il n'est utile que pour le calcul de la prime du risque de marché qui est supposée être constante.

-Les prix futures de différentes maturités sont facilement observables sur le marché à terme.

-L'utilisateur de ces Pricers doit tout d'abord actualiser la courbe des taux d'intérêts zéro coupon "US" et changer la date de valorisation avant de saisir les inputs pour valoriser.

3.4.3.1 Modèle de Brennan & Schwartz :

Une interpolation des taux d'intérêts zero coupon "US" par Spline cubique et linéaire a été mise en place pour connaître les taux à maturité intermédiaire (maturité non publiée), qui sera nécessaire pour l'implémentation du modèle de *Brennan & Schwartz*. (Consulter l'annexe D pour la méthodologie de l'interpolation).

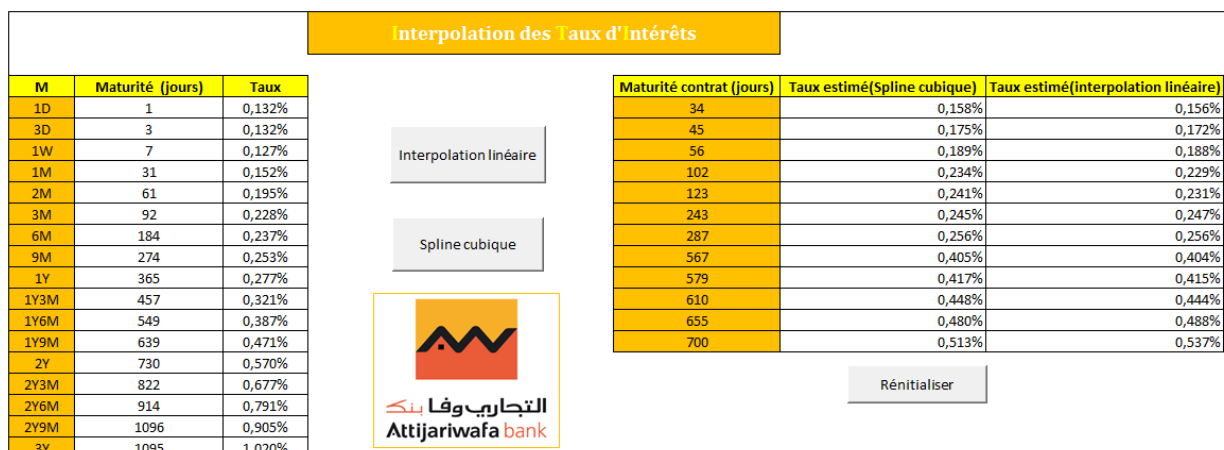


FIGURE 3.1 – Interpolation des taux d'intérêts par Spline cubique et linéaire

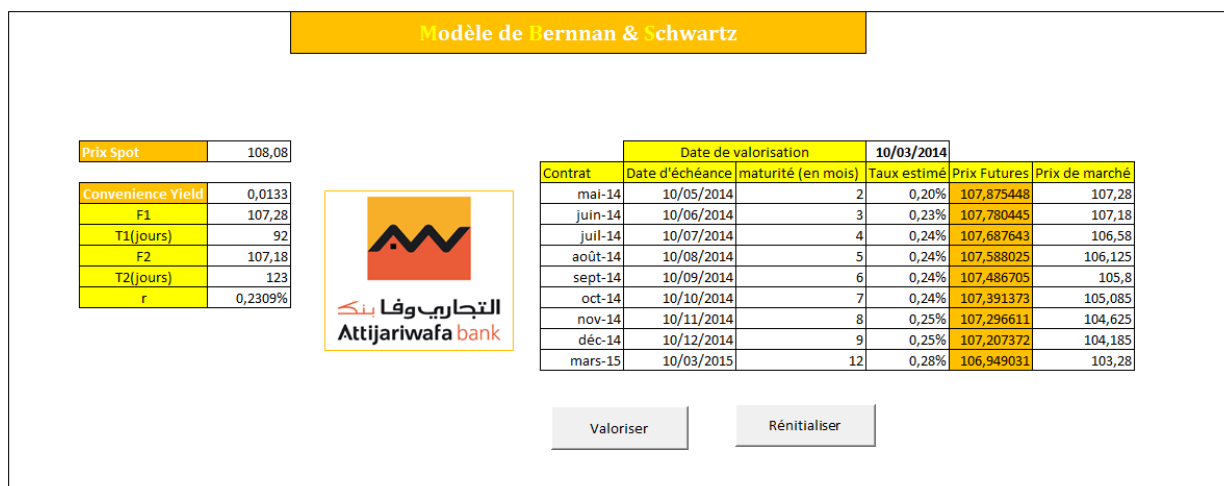


FIGURE 3.2 – Pricer des contrats futures par le modèle *Brennan & Schwartz*

Ce pricer permet de calculer pour chaque contrat à date de valorisation le 10/03/2014, sa maturité mensuelle, le taux correspondant à chaque maturité par interpolation, et son prix à terme.

3.4.3.2 Modèle de Schwartz à un facteur :

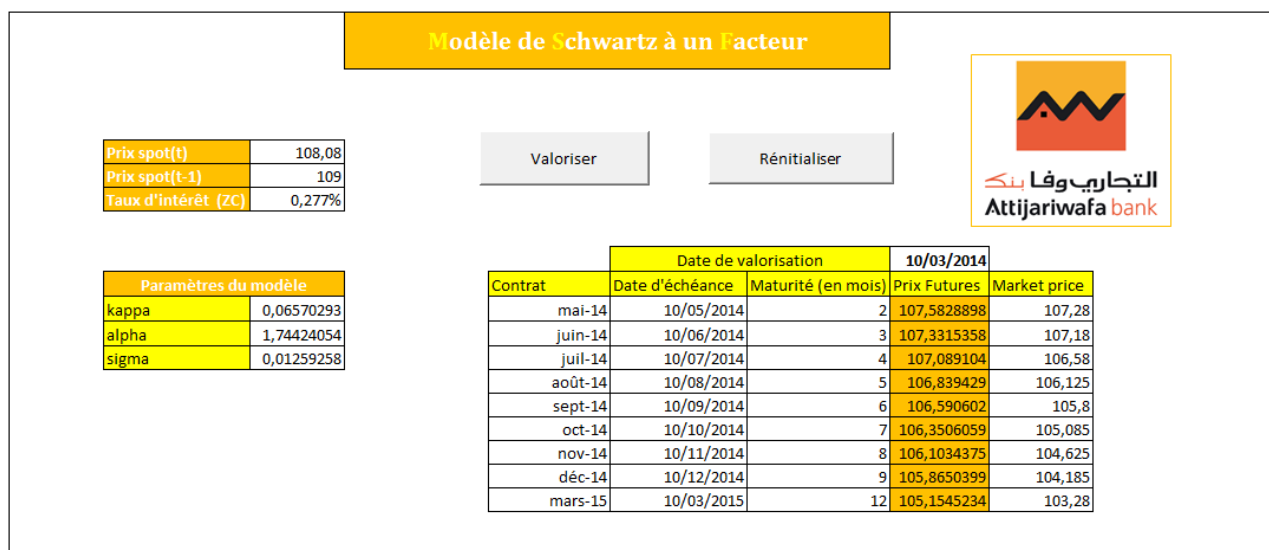


FIGURE 3.3 – Pricer des contrats futures par le modèle de *Schwartz* à un facteur

Ce pricer permet de calculer pour chaque contrat à date de valorisation le 10/03/2014, sa maturité mensuelle et son prix à terme.

3.4.3.3 Modèle de Schwartz à deux facteurs :

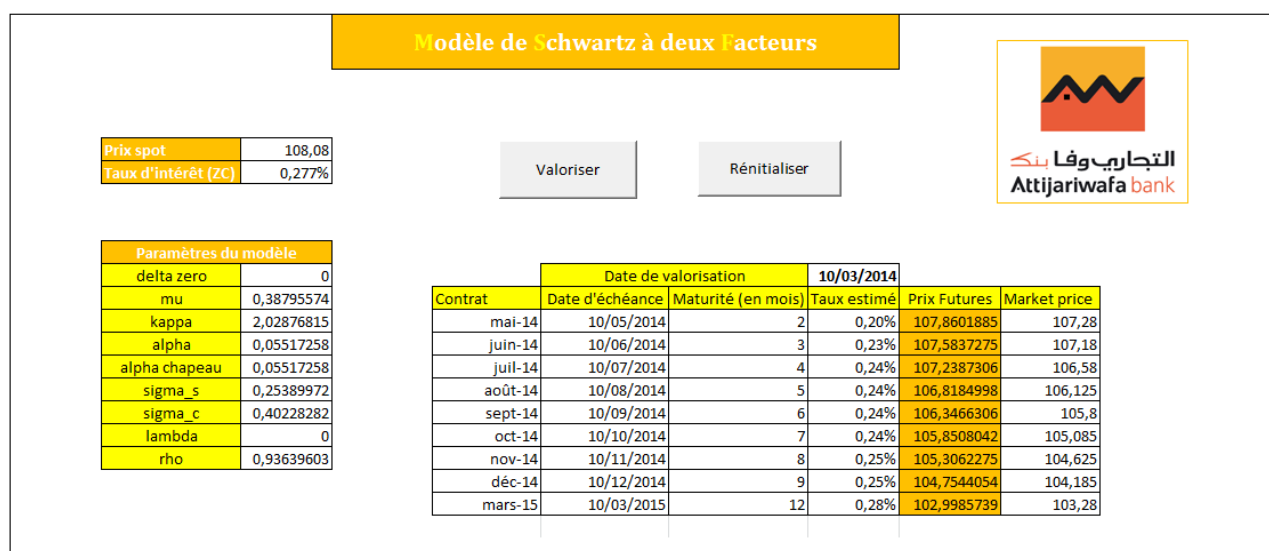


FIGURE 3.4 – Pricer des contrats futures par le modèle de *Schwartz* à deux facteurs

Ce pricer permet de calculer pour chaque contrat à date de valorisation le 10/03/2014, sa maturité mensuelle, et son prix à terme.

3.4.4 Comparaison des modèles :

Trois critères sont retenus pour mesurer les performances d'un tel modèle de structure par terme : l'écart moyen des erreurs des prix (**Mean Pricing Error**), l'écart moyen des erreurs quadratiques des prix (**Root Mean Squared Error**), et l'erreur maximale des prix (**Max Pricing Error**)

L'écart moyen des erreurs des prix (MPE) est défini de la façon suivante :

$$MPE = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N [\hat{F}(n, T) - F(n, T)] \quad (3.17)$$

Où N est le nombre d'observations, $\hat{F}(n, T)$ est le prix à terme de maturité T estimé, et $F(n, T)$ est le prix à terme observé. L'erreur moyenne de prix mesure le biais d'estimation pour une maturité donnée. Si l'estimation est correcte, ce critère doit être proche de zéro.

En retenant les mêmes notations, l'écart moyen des erreurs quadratiques des prix (**RMSE**) est, pour une maturité T :

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N [\hat{F}(n, T) - F(n, T)]^2} \quad (3.18)$$

Le **RMSE** mesure la stabilité de l'estimation. Ce second critère est considéré plus représentatif que le premier parce que les erreurs des prix peuvent se compenser et l'écart moyen des erreurs des prix peut être faible même en présence de fortes erreurs.

De même, l'erreur maximale des prix (**MaxPE**) est définie de la façon suivante :

$$MaxPE = Max\{\hat{F}_i - F_i\}_{1 \leq i \leq N} \quad (3.19)$$

3.4.4.1 Résultats de la comparaison :

Nous avons calculé pour chaque modèle son **Mean Pricing Error**, son **Root Mean Squared Error** ainsi que son **Max Pricing Error** et nous avons obtenu les résultats suivants :

	MPE	RMSE	MaxPE
Bernnan & Schwartz	0.158726118	0.623826534	3.669031109
Schwartz one factor	0.081342839	0.328534317	1.874523416
Schwartz two factors	0.07229265	0.17149734	0.765804182

TABLE 3.3 – Résultats de la performance des modèles

A partir du tableau ci-dessus qui reproduit les performances des modèles de structure par terme, nous remarquons que les résultats obtenus par le modèle de Bernnan & Schwartz ne sont pas fidèles à la réalité. Nous constatons aussi que ce modèle n'est pas capable de reproduire la structure par terme des prix observés sur le marché à terme comme l'illustre la figure (3.5).

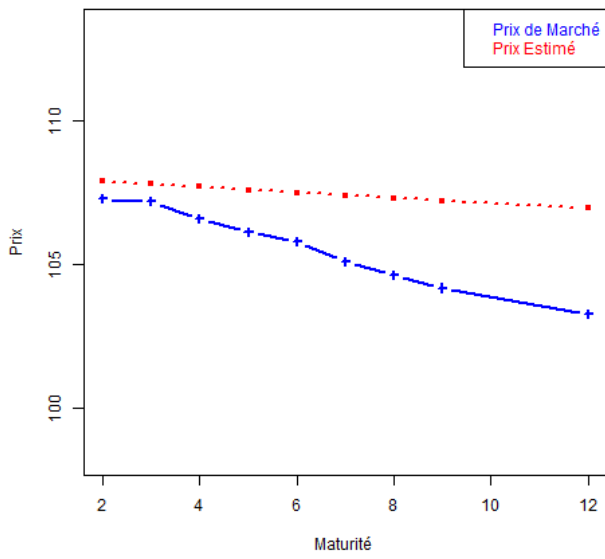


FIGURE 3.5 – Performance du modèle de Bernnan & Schwartz

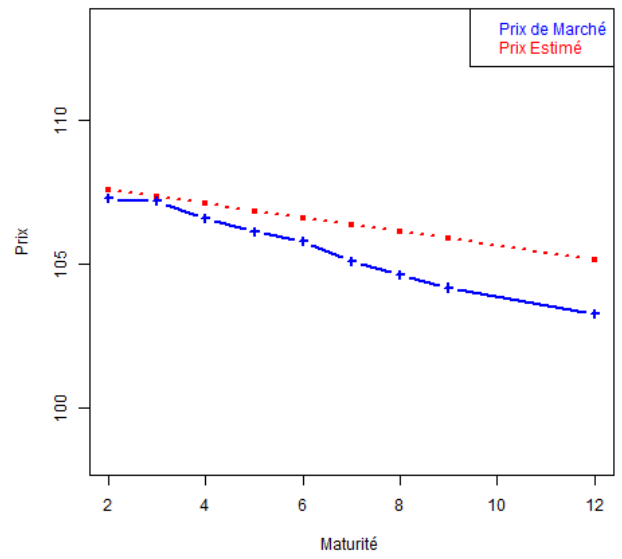


FIGURE 3.6 – Performance du modèle de Schwartz à un facteur

Alors que pour le modèle de Schwartz à un facteur, nous avons obtenu des résultats plus ou moins satisfaisants, et cela est dû nécessairement à l'inclusion, dans la modélisation, de l'effet de retour à la moyenne qui a relativement ajusté la structure par terme des prix.

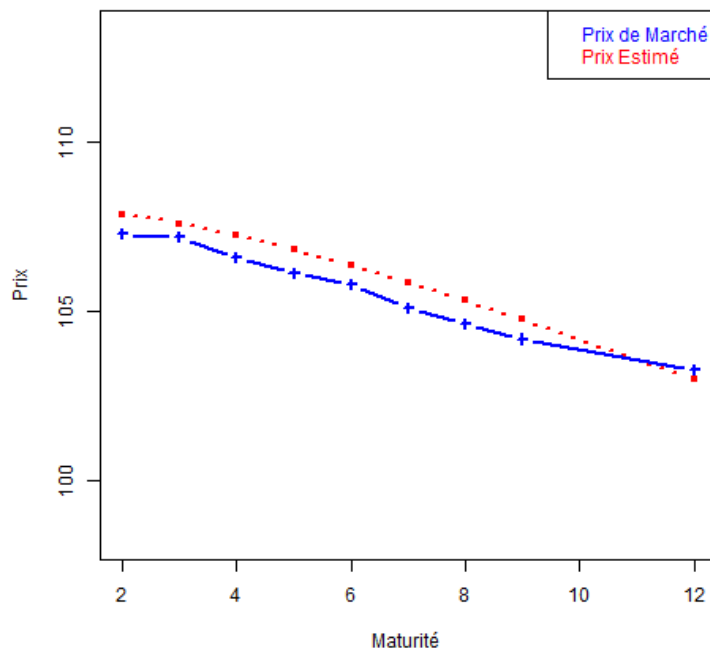


FIGURE 3.7 – Performance du modèle de Schwartz à deux facteurs

Les résultats obtenus à partir du modèle de Schwartz à deux facteurs sont particulièrement riches d'enseignements. Ce modèle s'est imposé comme étant capable de reproduire exactement la structure par terme des prix observés sur le marché à terme du pétrole, comme l'illustre la figure précédente. De plus, son Mean Pricing error, son RMSE ainsi que son MaxPE sont les plus petits comparés aux autres modèles.

Ainsi, les trois critères retenus pour la mesure des performances des modèles de structure par terme, ont confirmé la supériorité du modèle de Schwartz à deux facteurs. Cependant, cette modélisation fait toujours l'hypothèse d'une **volatilité déterministe** et néglige le phénomène de **mémoire longue** mis en évidence dans la section (2.2.8).

Chapitre 4

Modélisation de la mémoire longue de la volatilité

Nous avons observé dans le chapitre 2 concernant les propriétés de la série financière étudiée que les modèles de type ARCH (AutoRegressive Conditional Heteroscedasticity) sont les plus adéquats pour la modélisation de la volatilité des rendements logarithmiques, contrairement au modèle linéaire de type ARMA qui ne prend pas en compte les propriétés précitées et qui sont incapables de prendre en considération l'information passée contenue dans la série.

Les modèles de type ARCH qui prennent en considération ces propriétés sont les modèles à hétéroscédasticité conditionnelle (ARCH/GARCH) introduits par Engle (1982) puis généralisés par Bollerslev (1986). Sauf que ces deux modèles sont à mémoire courte et ne permettent pas la prise en compte du phénomène de mémoire longue mis en évidence ci-avant et qui est un aspect capital de la modélisation de la volatilité. En effet, elle va contribuer à une meilleure modélisation, et par conséquent une meilleure prédiction de la volatilité, à long terme. En effet, pour mettre en évidence le phénomène de mémoire longue, on mesure la persistance des chocs de volatilité. Pour ce faire, on fait généralement appel au processus FIGARCH (Fractionnally Integrated GARCH) introduit par Baillie, Bollerslev et Mikkelsen (1996) qui fournit une mesure directe et finie de cette persistance à travers le paramètre d'intégration fractionnelle.

L'objectif de cette section est d'identifier au premier lieu les modèles ARCH/GARCH, avant de se pencher sur l'étude de la mémoire longue de notre série financière par l'évaluation de la persistance des chocs de volatilité à l'aide du modèle FIGARCH.

4.1 Volatilité stochastique : ARCH/GARCH

Dans la définition qui suit, nous supposons que la variance conditionnelle σ_t du processus R_t peut prendre des valeurs dans l'ensemble \mathbb{R}^+ que nous supposerons muni d'une probabilité \mathbb{P} et d'une filtration \mathcal{F}_t . Typiquement, cet ensemble d'information contient tous les éléments indicés par t et par les périodes précédentes, (i.e $\mathcal{F}_t = \sigma(R_1, \dots, R_t)$)

Modèle ARCH

L'absence de corrélation des rendements logarithmiques et la présence de structures de dépendance non linéaires conduit naturellement à une classe de modèle où les rendements loga-

rithmiques $\{R_t\}_t$ s'écrivent comme le produit de deux variables aléatoires

$$R_t = \sigma_t \varepsilon_t$$

Le processus $\{\varepsilon_t\}_t$ est un bruit blanc, non obligatoirement gaussien, qui assure la décorrélation des rendements

$$\varepsilon_t \rightsquigarrow i.i.d(0, 1)$$

le processus de la variance conditionnelle $\{\sigma_t\}_t$, indépendant de $\{\varepsilon_t\}_t$, contrôle la volatilité et, à travers lui, toute la complexité de la structure de dépendance.

Définition 4.1.0.1. le modèle linéaire ARCH(q), introduit par Engle(1982), s'écrit comme suit :

$$\begin{cases} R_t &= \sigma_t \varepsilon_t \\ \varepsilon_t &\rightsquigarrow i.i.d(0, 1) \\ \sigma_t^2 &= \alpha_0 + \sum_{k=1}^q \alpha_k R_{t-k}^2 \end{cases}$$

où les paramètres satisfont $\alpha_0 > 0$ et $\alpha_j \geq 0$ pour tout $j \in [1, q]$

le processus ARCH(1) s'écrit :

$$\begin{cases} R_t &= \sigma_t \varepsilon_t \\ \varepsilon_t &\rightsquigarrow i.i.d(0, 1) \\ \sigma_t^2 &= \alpha_0 + \alpha_1 R_{t-1}^2 \end{cases}$$

Propriété 4.1. Si $\{R_t\}_t$ est un processus ARCH(q) alors :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[R_t] &= 0 \\ \mathbb{E}[R_t / \mathcal{F}_{t-1}] &= 0 \\ \text{Var}[R_t / \mathcal{F}_{t-1}] &= \alpha_0 + \sum_{k=1}^q \alpha_k R_{t-k}^2 \\ \text{cov}(R_t, R_{t+h}) &= \gamma_h = 0 \\ \text{cov}(R_t, R_{t+h} / \mathcal{F}_{t-1}) &= 0 \end{aligned}$$

Proposition 4.1. Si $\sum_{k=1}^q \alpha_k < 1$ alors le processus ARCH(q) est asymptotiquement stationnaire.

Remarque 4.1. Si $|\sum_{k=1}^q \alpha_k| < 1$, alors la variance non conditionnelle du processus existe et est de la forme suivante :

$$\text{Var}[R_t] = \frac{\alpha_0}{1 - \sum_{k=1}^q \alpha_k}$$

Une autre caractéristique essentielle de ce processus est la Leptokurticité, c'est le cas où le coefficient d'aplatissement Kurtosis est supérieur à 3. Ce processus génère des séries leptokurtiques donc une distribution plus épaisse qu'une gaussienne.

Le processus ARCH est donc leptokurtiques, son kurtosis est :

$$K_u = \frac{\mathbb{E}[R_t^4]}{\mathbb{E}[R_t^2]^2} > 3$$

Ce processus serait parfaitement adapté à la finance s'il était capable de générer l'asymétrie, ce qui n'est pas le cas.

Modèle GARCH

Le modèle ARCH a parfois du mal à se calibrer sur les données réelles et le nombre de paramètres α_j nécessaires est souvent trop important. Plusieurs variantes du modèle ARCH ont été proposées. Une variante particulièrement populaire est le modèle **GARCH** (*Generalized AutoRegressive Conditional Heteroscedasticity*), suggéré par Bollerslev (1986).

Définition 4.1.0.2. *Le modèle GARCH(p,q) peut s'écrire :*

$$\begin{cases} R_t &= \sigma_t \varepsilon_t \\ \varepsilon_t &\rightsquigarrow i.i.d(0, 1) \\ \sigma_t^2 &= \alpha_0 + \sum_{k=1}^q \alpha_k R_{t-k}^2 + \sum_{i=1}^p \beta_i \sigma_{t-i}^2 \end{cases}$$

Dans le modèle GARCH, la variance conditionnelle σ_t^2 dépend aussi bien de ses propres valeurs passées que des valeurs retardées de R_t^2 . Cela signifie que σ_t^2 dépend effectivement de toutes les valeurs passées de R_t^2 .

Le modèle GARCH avec très peu de paramètres permet de prendre compte des principaux faits stylisés souvent aussi bien qu'un modèle ARCH ayant de nombreux paramètres. En particulier, un modèle simple souvent utilisé est le modèle GARCH(1,1) :

$$\begin{cases} R_t &= \sigma_t \varepsilon_t \\ \varepsilon_t &\rightsquigarrow i.i.d(0, 1) \\ \sigma_t^2 &= \alpha_0 + \alpha_1 R_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2 \end{cases}$$

Remarque 4.2. *Nous retrouvons les propriétés de Leptokurticité et de non asymétrie comme dans le modèle ARCH.*

Il est possible de démontrer que sous la condition $\alpha_1 + \beta_1 < 1$ le processus GARCH(1,1) est asymptotiquement stationnaire au sens faible. De plus, la variance non conditionnelle est donnée par :

$$V_L = \frac{\alpha_0}{1 - \alpha_1 + \beta_1}$$

4.1.1 Estimation des paramètres du modèle GARCH(p,q)

Les modèles ARCH/GARCH sont classiquement estimés par la méthode de quasi-maximum de vraisemblance, mais tout d'abord nous devons déterminer les ordres p et q du modèle GARCH.

4.1.1.1 Identification des paramètres du modèle GARCH

Pour l'identification du modèle GARCH(p,q), nous nous basons sur le critère AIC ainsi nous faisons varier p entre 1 et 3 et q entre 1 et 3, nous obtenons alors une matrice 3*3 contenant l'AIC de 9 modèles GARCH(p,q), Telle que : $(p, q) \in [1, 3]^2$

Matrice AIC		
-3067.563	-3058.162	-3047.197
-3054.624	-3055.863	-3045.032
-3050.501	-3051.668	-3044.766

Le plus petit AIC correspond au modèle GARCH(1,1). En effet, le modèle GARCH(1,1) est sans doute le modèle de la famille GARCH le plus approprié pour décrire les séries financières. Ce qui rejoint les études faites par plusieurs chercheurs du domaine. Nous procédons à l'estimation des paramètres de notre modèle GARCH(1,1) dans le paragraphe suivant :

4.1.1.2 Résultats de l'estimation des paramètres GARCH(1,1)

En supposant que le bruit blanc $\{\varepsilon_t\}_t$ est gaussien, la fonction de vraisemblance s'écrit :

$$L(w, \alpha_1, \beta_1) = \prod_{t=1}^T \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_t^2}} \exp\left(-\frac{y_t^2}{2\sigma_t^2}\right) \quad (4.1)$$

Si le bruit blanc $\{\varepsilon_t\}_t$ suit une loi de Student à $v > 2$ degrés de liberté, la fonction de vraisemblance prend la forme suivante :

$$L(v, w, \alpha_1, \beta_1) = \prod_{t=1}^T \Gamma\left(\frac{v+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{v}{2}\right)^{-1} \frac{1}{\sqrt{(v-2)\sigma_t^2}} \left(1 + \frac{y_t^2}{(v-2)\sigma_t^2}\right)^{-\frac{v+1}{2}} \quad (4.2)$$

Notons que lorsque v tend vers l'infini, la distribution de Student (4.2) converge vers la distribution gaussienne(4.1)

Dans le tableau (1.4) nous présentons les résultats de l'estimation des paramètres des modèles GARCH(1,1) avec un bruit blanc gaussien et T-Student par la méthode de quasi-maximum de vraisemblance pour la série des rendements logarithmiques journaliers. Pour réaliser ces estimations nous avons utilisé toutes les données disponibles.

	GARCH(1,1) Gaussien		GARCH(1,1) Student	
	Coefficient	t-prob	Coefficient	t-prob
$Cst * 10^4$	0.074161	0.1392	0.071334	0.1814
α_1	0.062980	0.0105	0.064862	0.0247
β_1	0.887789	0.000	0.889620	0.0000
$\alpha_1 + \beta_1$	0.950769	—	0.954769	—

TABLE 4.1 – Sortie R. Résultats de l'estimation de paramètres des modèles GARCH(1,1) gaussien (à gauche) et Student (à droite).

Nous constatons que la somme $\alpha_1 + \beta_1$ est toujours assez proche de 1, qui correspond à la limite de stabilité, ainsi les p-values sont inférieures au seuil critique(0.05) et les paramètres sont donc significatifs.

Par conséquent, le modèle GARCH(1,1) des rendements s'écrit :

$$\sigma_t^2 = 0.074161E - 4 + 0.06298 r_{t-1}^2 + 0.887789 \sigma_{t-1}^2, \text{ pour bruit blanc gaussien} \quad (4.3)$$

$$\sigma_t^2 = 0.071334E - 4 + 0.064862 r_{t-1}^2 + 0.889620 \sigma_{t-1}^2, \text{ pour bruit blanc } t - \text{Student} \quad (4.4)$$

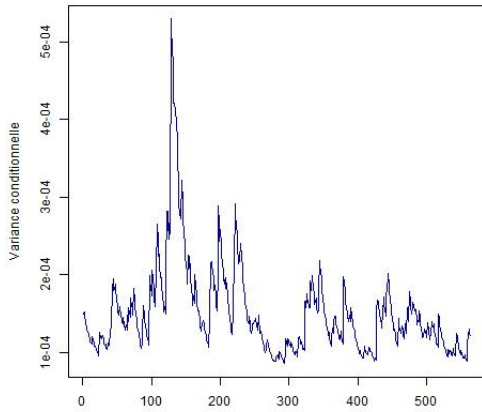


FIGURE 4.1 – Variance conditionnelle calculée par le modèle GARCH(1,1) pour bruit blanc gaussien. Sortie R

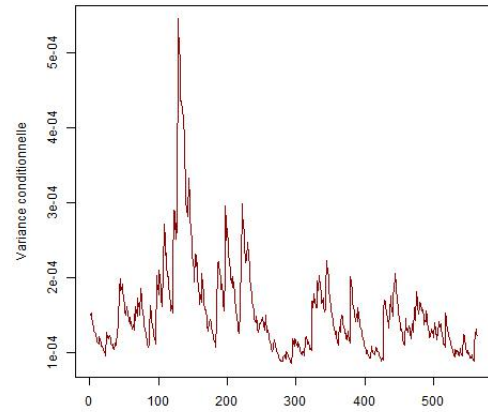


FIGURE 4.2 – Variance conditionnelle calculée par le modèle GARCH(1,1) pour bruit blanc t-Student. Sortie R

Application VBA-Excel

Cette section traite le modèle GARCH(1,1), en utilisant VBA-EXCEL. La seule différence qui existe entre celle-là et la précédente est que les paramètres initiaux seront d'ordre 3 (oméga, alpha et bêta). Ceci dit, l'avantage d'utiliser le code est de pouvoir contrôler les contraintes du modèle. Les paramètres doivent être strictement positifs et la somme de alpha et bêta doit être inférieure à 1.

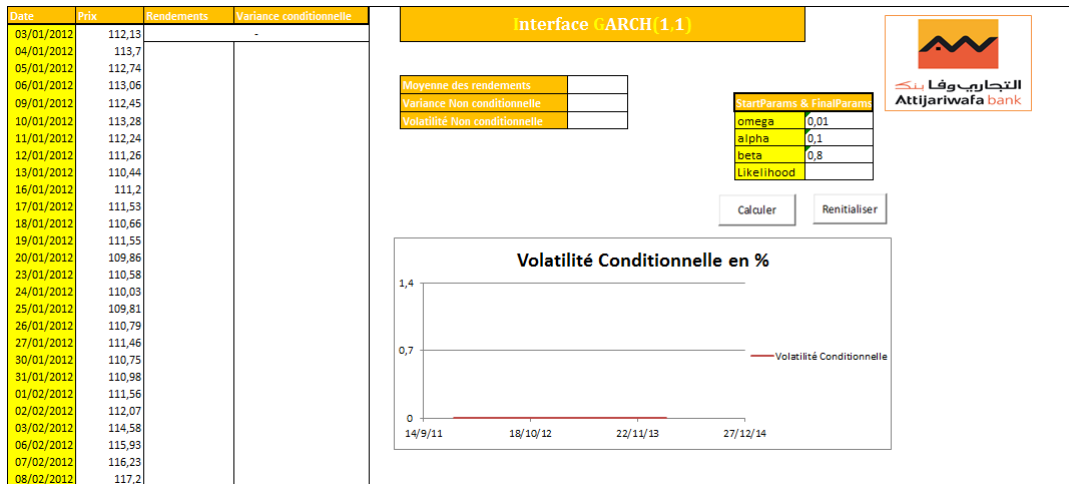


FIGURE 4.3 – Interface du modèle GARCH(1,1) -Application VBA-EXCEL-

Nous avons pris comme valeurs initiales :

Paramètres initiaux	
Omega	0.01
Alpha	0.1
Beta	0.8

TABLE 4.2 – Paramètres initiaux du modèle GARCH(1,1). Source R

Après le lancement de l'application, Nous obtenons :

Estimations des paramètres	
Omega	$8,63489E - 06$
Alpha	0,0682
Beta	0,8744
LikeLihood	-4426,2243

TABLE 4.3 – Paramètres finaux du modèle GARCH(1,1). Source "VBA-EXCEL"

Par conséquent, le modèle GARCH(1,1) de notre série des rendements s'écrit :

$$\sigma_t^2 = 8,63489E - 06 + 0,0682r_{t-1}^2 + 0,8745\sigma_{t-1}^2 \quad (4.5)$$

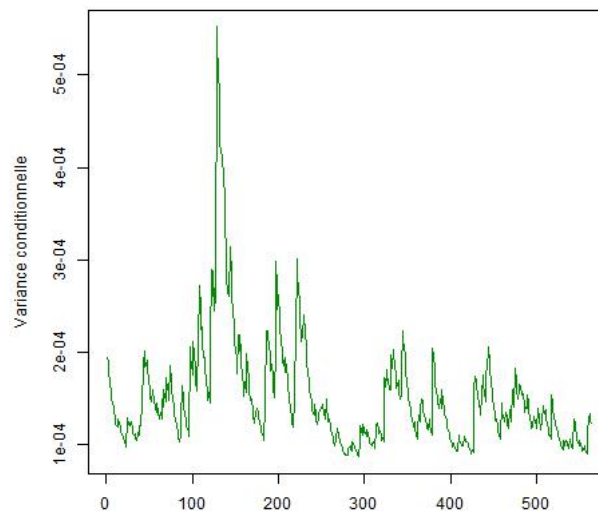


FIGURE 4.4 – Variance conditionnelle calculée par le modèle GARCH(1,1). Sortie R

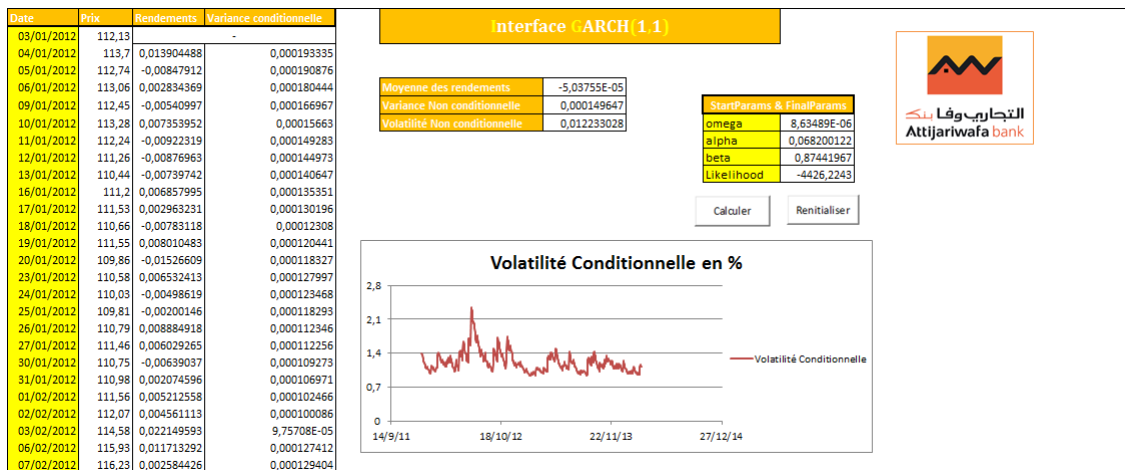


FIGURE 4.5 – Interface Sortie -Application VBA-Excel-

4.1.1.3 Comparaison des résultats

L'objectif de cette partie est de faire la comparaison des résultats fournis par le logiciel R et l'application VBA-Excel, en nous basant sur l'erreur moyenne. Nous calculons l'erreur (et par conséquent l'erreur moyenne) entre la volatilité réalisée et les volatilités conditionnelles estimées par GARCH(1,1) (avec l'application VBA-EXCEL et R).

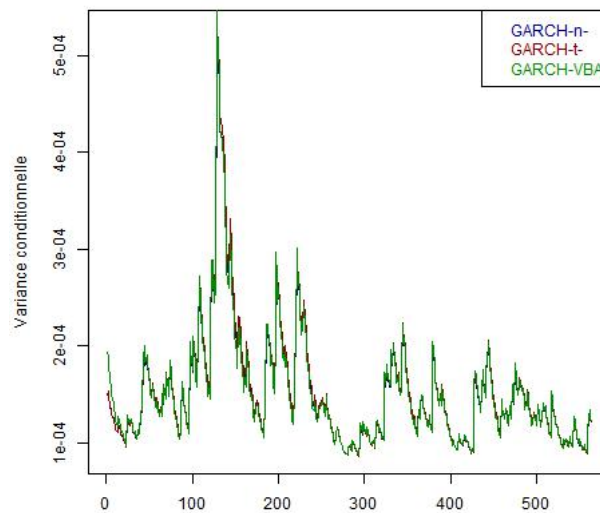


FIGURE 4.6 – Comparaison des résultats obtenus. Sortie R

ERROR MOY (GARCH-VBA)	0.01173
ERROR MOY (GARCH-R) Gaussien	0.01171
ERROR MOY (GARCH-R) T-Student	0.01179

TABLE 4.4 – Erreurs moyennes calculées pour les différents résultats.

Les deux outils sont performants, le meilleur résultat est GARCH(1,1) avec bruit blanc gaussien sous R.

4.1.2 Prédiction de la variance conditionnelle du modèle GARCH(1,1)

Le taux de variance estimé à la fin de la journée (n-1) pour la journée n avec le modèle GARCH(1,1) :

$$\sigma_n^2 = (1 - \alpha_1 - \beta_1)V_L + \alpha_1 R_{n-1}^2 + \beta_1 \sigma_{n-1}^2 \quad (4.6)$$

ce qui donne :

$$\sigma_n^2 - V_L = \alpha_1 (R_{n-1}^2 - V_L) + \beta_1 (\sigma_{n-1}^2 - V_L)$$

Pour la journée (n+t) à venir ; nous avons :

$$\sigma_{n+t}^2 - V_L = \alpha_1 (R_{n+t-1}^2 - V_L) + \beta_1 (\sigma_{n+t-1}^2 - V_L)$$

L'espérance de R_{n+t-1}^2 est σ_{n+t-1}^2 , ce qui permet d'écrire :

$$\mathbb{E}(\sigma_{n+t}^2 - V_L) = (\alpha_1 + \beta_1) \mathbb{E}(R_{n+t-1}^2 - V_L)$$

d'où :

$$\mathbb{E}(\sigma_{n+t}^2 - V_L) = (\alpha_1 + \beta_1) (\sigma_{n+t-1}^2 - V_L)$$

L'utilisation répétée de cette équation nous conduit à :

$$\mathbb{E}(\sigma_{n+t}^2 - V_L) = (\alpha_1 + \beta_1)^t (\sigma_n^2 - V_L)$$

ou encore :

$$\mathbb{E}(\sigma_{n+t}^2) = V_L + (\alpha_1 + \beta_1)^t (\sigma_n^2 - V_L) \quad (4.7)$$

Cette équation nous donne une prédiction de la variance conditionnelle pour la journée (n+t) à partir des seules informations disponibles à la fin de la journée (n-1). Comme on peut remarquer dans Eq(), quand $\alpha_1 + \beta_1 < 1$, le dernier terme de l'équation diminue à mesure que t augmente. Comme nous l'avons déjà mentionné, le taux de variance montre une tendance au retour à la moyenne, avec un niveau de retour V_L et un taux de retour de $1 - \alpha_1 + \beta_1$. Plus nous nous projetons dans le futur et plus les prévisions du taux de variance tendent vers V_L .

Application VBA/EXCEL :

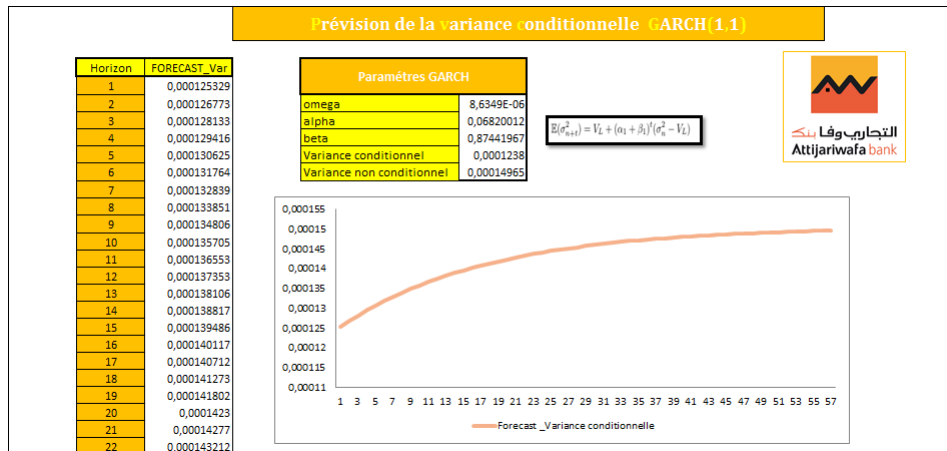


FIGURE 4.7 – Interface VBA/Excel pour la prévision de la variance conditionnelle

4.1.3 Utilisation du modèle GARCH(1,1) pour la prévision de la volatilité future

Étant donné que l'évaluation des produits dérivés nécessite le recours à des volatilités anticipées pour la durée de vie des contrats à évaluer, l'opérateur de marché recourt à des volatilités cotées sur le marché. Cependant ces volatilités ne sont pas disponibles pour toute maturité. Afin de répondre à ce problème, cette section sera consacrée à l'anticipation de la volatilité du marché de Brent par le modèle GARCH(1,1) et à la réalisation d'un Backtesting afin de vérifier la pertinence du modèle GARCH(1,1) pour la prévision de la volatilité future.

4.1.3.1 Structures par terme des volatilités

Plaçons nous au jour n . On a :

$$V_t = \mathbb{E}(\sigma_{n+t}^2)$$

Posons maintenant :

$$a = \ln(1/\alpha_1 + \beta_1)$$

l'équation () devient :

$$V_t = V_L + \exp(-at)[V_0 - V_L]$$

Ici, V_t est une estimation du taux de variance instantané dans t jours. le taux de variance moyen entre aujourd'hui et la date T est alors :

$$\frac{1}{T} \int_0^T V_t dt = V_L + \frac{1 - \exp(-aT)}{aT} [V_0 - V_L]$$

Prenons l'exemple d'une option, on remarque que plus l'option a une échéance éloignée, plus cette expression est proche de V_L . Notons $\sigma(T)$ la volatilité en base annuelle qui devrait être utilisée pour évaluer une option d'échéance T sous l'hypothèse d'un processus GARCH(1,1).

En supposant que le nombre des jours ouvrables pour le marché du Brent est de 260 jours par an, σ_T^2 vaut 260 fois le taux de variance moyen journalier, alors :

$$\sigma^2(T) = 260[V_L + \frac{1 - \exp(-aT)}{aT}(V_0 - V_L)] \quad (4.8)$$

À travers cette dernière équation, on peut estimer une structure par termes des volatilités à partir du modèle GARCH(1,1). en utilisant les paramètres estimés du modèle GARCH(1,1), on calcule la volatilité future pour les différentes maturités par l'équation(4.8).

Paramètres Estimés	
Omega	8,63489E - 06
Alpha	0,0682
Beta	0,8744
V_0	0,00013
V_L	0,00015

TABLE 4.5 – Paramètres estimés du modèle GARCH(1,1).

Après tout calcul, nous obtenons :

Durée de vie de l'option (jours)	21	43	65	130	260
Volatilité (% annuel)	18,749	19,134	19,328	19,55	19,665

TABLE 4.6 – Structure par termes des volatilités du prix de Brent construite avec un Garch(1,1) pour différentes maturités à la date du 10/03/2014.

Cependant la volatilité cotée sur Bloomberg au 10/03/2014 était :

Durée de vie de l'option (jours)	21	43	65	130	260
Volatilité (% annuel)	14,975	14,137	13,830	15,945	16,854

TABLE 4.7 – Volatilités du prix de Brent cotée sur Bloomberg pour différente maturité à la date du 10/03/2014.

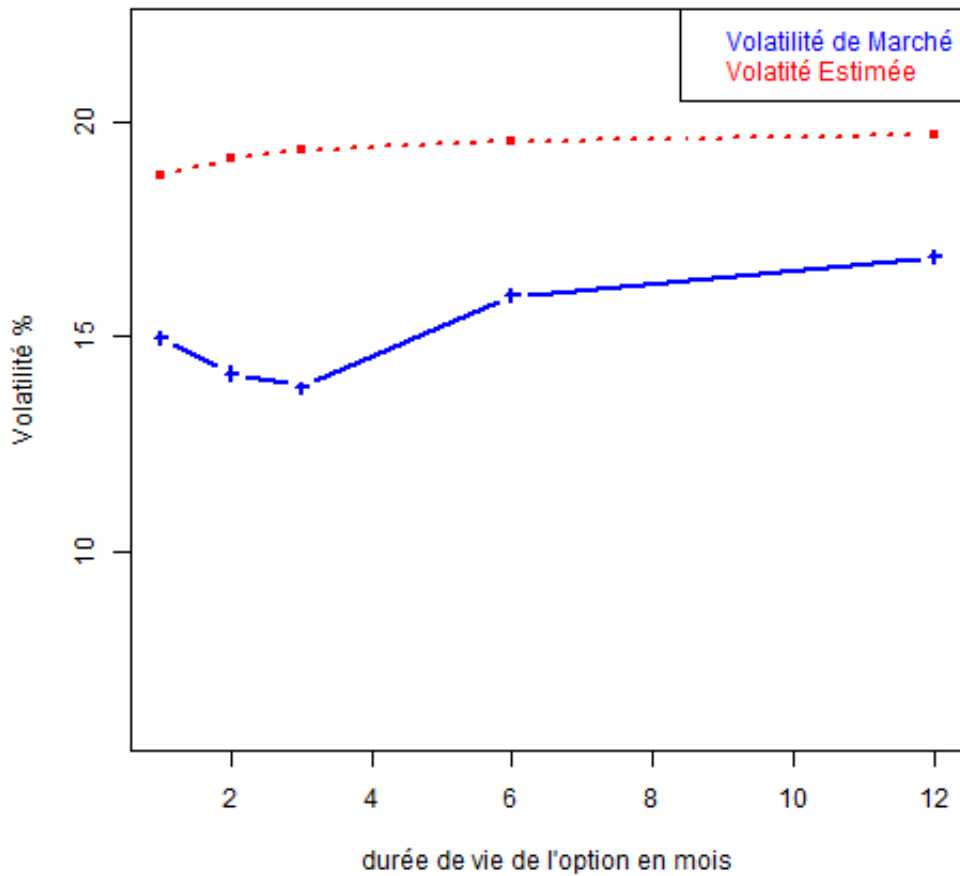


FIGURE 4.8 – Comparaison entre volatilité estimée et la volatilité cotée sur Bloomberg

4.1.3.2 BackTesting

Le Backtesting ou test rétro-actif de validité consiste à tester la pertinence d'une modélisation en s'appuyant sur un large ensemble de données historiques empiriques. Le Backtesting repose sur la notion du nombre d'exceptions, c'est-à-dire le nombre de fois où la volatilité réelle observée est différente à la volatilité prévue calculée par le modèle GARCH(1,1). Ainsi, on juge un modèle invalide, si après Backtesting, le nombre d'exceptions enregistrées dépasse une limite fixée. Le Backtesting est donc une technique pour tester la validité du modèle GARCH(1,1) pour la prévision de la volatilité future.

Résultats du Backtesting :

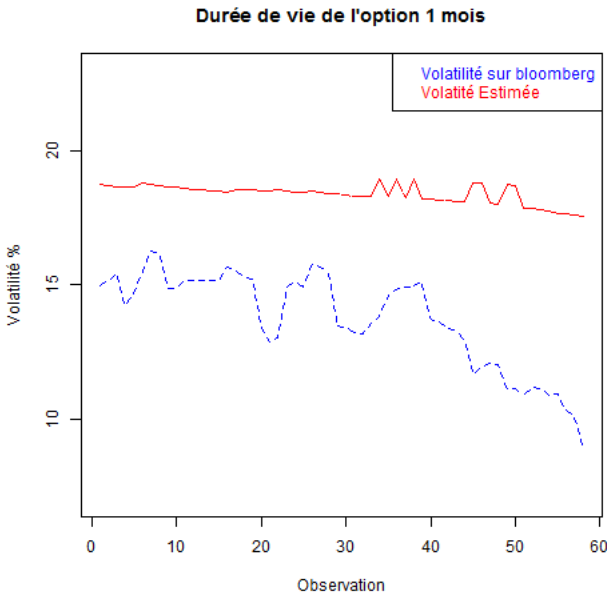


FIGURE 4.9 – Backtesting pour une durée de vie 1 mois

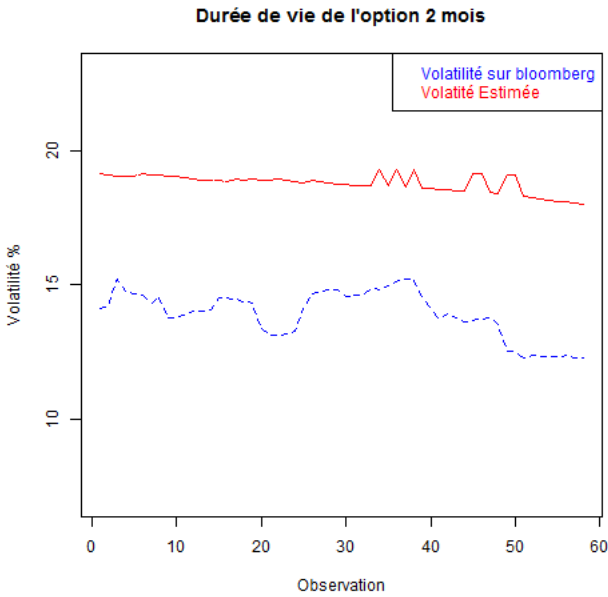


FIGURE 4.10 – Backtesting pour une durée de vie 2 mois

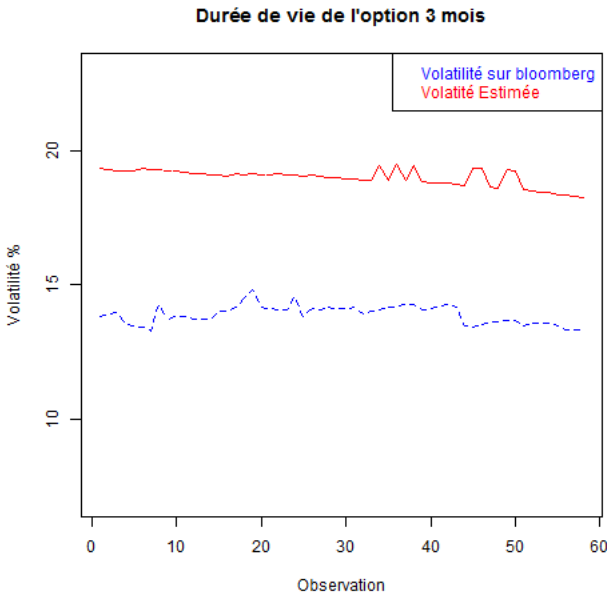


FIGURE 4.11 – Backtesting pour une durée de vie 3 mois

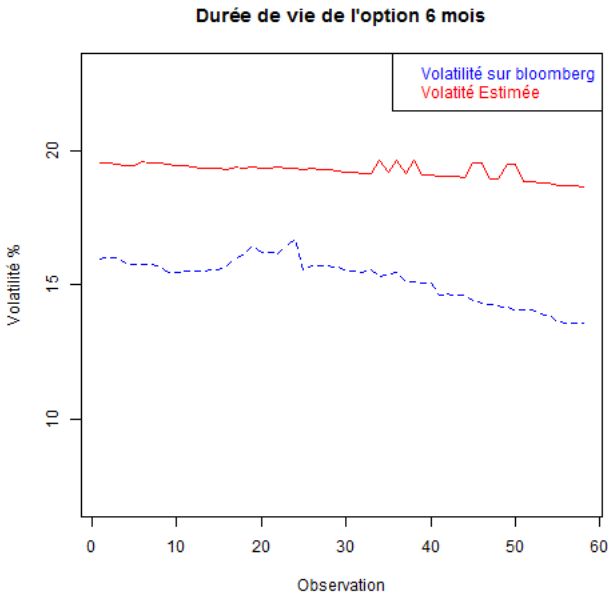


FIGURE 4.12 – Backtesting pour une durée de vie de 6 mois

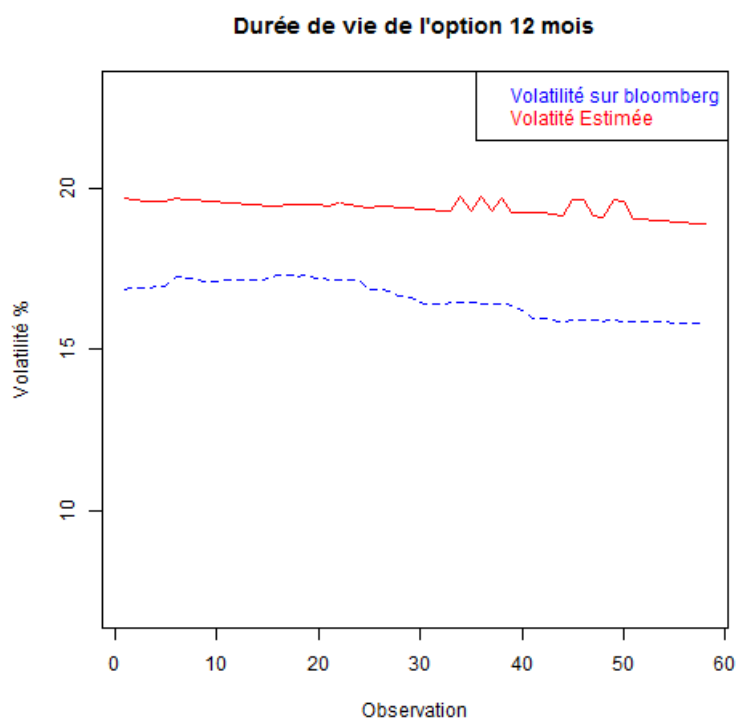


FIGURE 4.13 – Backtesting pour une durée de vie de 12 mois

Maturité en mois	1	2	3	6	12
ERROR MEAN	0,0465	0,0486	0,051	0,0403	0,0282
ERROR MIN	0,0245	0,0346	0,0434	0,0264	0,0213
ERROR MAX	0,086	0,0659	0,0605	0,0544	0,0375
RMSE	0,049	0,0491	0,0512	0,0409	0,0285

TABLE 4.8 – Erreurs calculées pour différentes maturités.

Nous remarquons que plus la maturité est élevée plus la volatilité estimée suit la tendance de la volatilité observée sur le marché. Ainsi les erreurs calculées sont non significatives.

La volatilité estimée calculée par le modèle Garch(1,1) semble donc correcte mais pas très précise.

4.1.3.3 Récapitulatif

Les modèles ARCH/GARCH ont joué (et jouent encore) un rôle important dans la modélisation des séries financières. Ces modèles peuvent reproduire l'absence de corrélation temporelle (section 2.2.5).

Cependant, les processus de type ARCH sont mal adaptés à la modélisation de longues séries. En particulier, ils ne permettent de reproduire que partiellement la longue dépendance observée dans les séries financières. En effet, ils présentent des corrélations à courte portée, qui décroissent exponentiellement avec le temps. Ils sont donc incapables de reproduire le phénomène de mémoire longue (section 2.2.8). Par ailleurs, ces modèles ne permettent pas aussi de reproduire l'effet de levier (section 2.2.7).

On peut voir dans les tableaux : (Table 4.1 & 4.3) que la somme des paramètres estimés $\alpha_1 + \beta_1$ est toujours assez proche de 1. Cela se traduit par une grande sensibilité des prédictions de la volatilité à une variation des paramètres.

Lorsque l'on utilise des séries chronologiques sur de longues périodes, les chocs de volatilité semblent être fortement persistants, et la somme $\alpha_1 + \beta_1$ du modèle est proche de 1. Si cette somme est égale à 1, alors le modèle GARCH est appelé IGARCH, qui est à la frontière de la non stationnarité.

En effet, un choc sur la variance conditionnelle a un effet qui ne s'élimine pas asymptotiquement, de même la variance non conditionnelle n'existe pas. Par ailleurs, sur de courtes périodes, les paramètres du modèle GARCH semblent être sensiblement plus faible. De même, les modèles de type ARCH ne rendent pas compte des comportements des queues de distribution en fonction de l'échelle. Pour tenter de résoudre ces imperfections, de nombreuses généralisations ont été proposées à savoir FIGARCH introduit par Baillie, Boilerslev, Mikkelsen en 1996.

4.2 Mémoire longue de la volatilité du marché de Brent

Plusieurs récents travaux en économétrie de la finance et en analyse empirique portant sur la modélisation de la variation temporelle de la volatilité des marchés financiers se sont intéressés à l'étude de la persistance des chocs sur la volatilité en testant la présence de la mémoire longue de la volatilité (section 2.2.8) des rendements logarithmiques. Pour modéliser ce phénomène, Baillie, Bollerslev et Mikkelsen (1996) ont introduit le modèle FIGARCH (Fractionnally Integrated GARCH) qui fournit une mesure directe de cette persistance à travers le paramètre d'intégration fractionnelle.

4.2.1 Mémoire longue de la volatilité : Processus FIGARCH

On note $\{z_t\}_t$ un processus stochastique à temps discret de valeur réelle, $\mathbb{E}_{t-1}(\cdot)$ et $Var_{t-1}(\cdot)$ sont respectivement l'espérance mathématique conditionnelle sur l'information disponible au temps (t-1) et la variance sur la même information \mathcal{F}_t et qui incorporent le passé du processus $\{z_t\}_{t=t-1, t-2, \dots}$, $\{\sigma_t\}_t$ le processus de la variance conditionnelle, indépendant de $\{z_t\}_t$ qui contrôle la volatilité et, à travers lui, toute la complexité de la structure de dépendance.

D'après Engel (1982) le processus $\{z_t\}_t$ suit un modèle ARCH si :

$$\begin{cases} z_t = \sigma_t \varepsilon_t \\ \varepsilon_t / \mathcal{F}_t \rightsquigarrow i.i.d(0, 1) \end{cases}$$

Dans le modèle GARCH, la variance conditionnelle est paramétrées comme un décalage distribué des dernières innovations au carré,

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{k=1}^q \alpha_k z_{t-k}^2 + \sum_{i=1}^p \beta_i \sigma_{t-i}^2 \equiv \alpha_0 + \alpha(L)z_t^2 + \beta(L)\sigma_t^2 \quad (4.9)$$

Tel que L est l'opérateur de retard, i.e, $L^i x_t = x_{t-i}$. Pour que la variance conditionnelle soit bien définie dans Eq.(4.1), tous les coefficients dans le polynôme de retard qui correspondent à la représentation d'un ARCH infini, $[1 - \beta(L)]^{-1}\alpha(l)$, doivent être positifs. Ainsi, en arrangeant les termes dans Eq.(4.1) on retrouve :

$$[1 - \alpha(L) - \beta(L)]\sigma_t^2 = \alpha_0 + (1 - \beta(L))v_t \quad (4.10)$$

Tel que $v_t = z_t^2 - \sigma_t^2$. Ainsi, $\mathbb{E}_{t-1}(v_t) = 0$

Dans plusieurs applications du modèle GARCH(p,q) l'estimation du polynôme de retard $1 - \hat{\alpha}(l) - \hat{\beta}(l) = 0$ a une racine qui est statistiquement indiscernable de l'unité. Motivés par cette régularité empirique, Engle et Bollerslev(1986) ont introduit le modèle IGARCH (Integrad GARCH) dont le polynôme autoregressif Eq.(4.2) a une racine unitaire. La factorisation de ce polynôme $1 - \alpha(l) - \beta(l) = (1 - L)\phi(L)$, Tel que $\phi(Z) = 0$ a toutes les racines proches du cercle unitaire, le modèle IGARCH(p,q) s'écrit :

$$\phi(L)(1 - L)z_t^2 = \alpha_0 + [1 - \beta(L)]v_t \quad (4.11)$$

Bien que l'estimation empirique des paramètres du modèle GARCH(p, q) Eq.(4.1) peut ne pas rejeter l'hypothèse nulle d'un modèle IGARCH(p, q), l'intuition suggère que dans la plupart des situations, le processus de la volatilité à un retour à la moyenne. Une réconciliation possible

entre ces éléments de preuve contradictoires peut-être disponible en tenant compte de l'ordre fractionnaire d'intégration. Pour cette fin, Baillie, Bollerslev, and Mikkelsen (1996) ont introduit la classe des modèles Fractionally Integrated GARCH, FIGARCH(p, d, q) :

$$\phi(L)(1-L)^d z_t = \alpha_0 + [1 - \beta(L)]v_t \quad (4.12)$$

où les racines de $\phi(z) = 0$ ne relèvent pas du cercle unité. L'opérateur de différenciation fractionnaire est défini par son expansion de série de Maclaurin,

$$(1-L)^d = 1 - d \sum_{k=1}^{\infty} \Gamma(k-d)^{-1} \Gamma(1-d)^{-1} \Gamma(k+1)^{-1} L^k \equiv 1 - \delta_d(L), \quad (4.13)$$

Dans laquelle $\Gamma(\cdot)$ est la fonction Gamma. De même et par définition $(1-L)^0 \equiv 1$. Ainsi, le modèle FIGARCH(p, d, q) est le modèle GARCH(p, q) dans Eq.(4.4) pour d=0 et le modèle IGARCH(p, q) pour d=1. Ce qui permet pour les valeurs de d entre zéro et l'unité de donner une flexibilité supplémentaire qui peut être importante lorsqu'on modélise la dépendance à long terme dans la variance conditionnelle. Cependant, un choc pour les prévisions optimales de la variance conditionnelle future se désintègre à un rythme exponentiel pour le modèle GARCH(p, q) de covariance stationnaire et reste important pour les prévisions de tous les horizons pour le modèle IGARCH(p, q). Pour le modèle FIGARCH(p, d, q) l'effet du choc pour les prévisions des variances conditionnelles futures se désintègre à un rythme hyperbolique lent. C'est pourquoi le paramètre de différenciation fractionnaire est identifié par la vitesse de décroissance d'un choc à la variance conditionnelle et non par l'impact final sur les prévisions pour la variance conditionnelle à long terme. Afin de mieux comprendre les propriétés statistiques et la stratégie d'estimation proposée à la Section 3 ci-dessous, il est commode de réécrire le modèle FIGARCH (p, d, q) dans l'équation (4.5) en terme de l'observation équivalente à la représentation d'un ARCH infini,

$$\sigma_t^2 = [1 - \beta(1)]^{-1} \alpha_0 + [1 - [1 - \beta(1)]^{-1} \phi(L)(1-L)^d] z_t^2 \equiv [1 - \beta(1)]^{-1} \alpha_0 + \lambda(L) z_t^2 \quad (4.14)$$

Depuis $\delta_d(1) = 1$ pour tout $d > 0$, il s'ensuit immédiatement auprès de la représentation dans Eq.(4.6) que le modèle FIGARCH (p, d, q) n'est pas de covariance stationnaire. Bien sûr, pour que le modèle FIGARCH (p, d, q) soit bien défini et que la variance conditionnelle soit positive presque sûrement pour tout t, tout les coefficients dans Eq.(4.6) doivent être non négatifs.

4.2.2 Estimation du Processus FIGARCH

L'approche la plus courante pour l'estimation des modèles ARCH suppose la normalité conditionnelle du processus. Sous cette hypothèse, l'estimation du Maximum de vraisemblance (MLE) pour les paramètres du processus FIGARCH (p, d, q) basée sur l'exemple z_1, z_2, \dots, z_T peut être obtenue en maximisant l'expression :

$$\log L(\theta; z_1, z_2, \dots, z_T / f_0) = -0.5T \log(2\pi) - 0.5 \sum_{t=1}^T [\log(\sigma_t^2) + z_t^2 \sigma_t^{-2}],$$

où les conditions initiales, F_0 , sont utilisées pour démarrer les récurrences pour les fonctions moyenne et variance conditionnelle.

Dans de nombreuses applications avec les données financières de haute fréquence, l'hypothèse de la normalité de la distribution conditionnelle des innovations standardisées, $z_t \equiv z_t \sigma_t^{-1}$, est violée (section 2.2.1). Cependant, les procédures de Quasi-MLE dites robustes invoquées par Weiss (1986), Bollerslev et Wooldrige (1992) permettent une inférence asymptotiquement valide. En particulier, une matrice de covariance robuste asymptotique pour les estimations des paramètres est toujours estimée par $A(\hat{O})^{-1} B(\hat{O}) A(\hat{O})^{-1}$, tel que $A(\hat{O})$ et $B(\hat{O})$ désignent respectivement la Hessienne et le produit extérieur des gradients, évalués à \hat{O} .

Une autre complication qui se pose dans l'estimation des modèles de type ARCH, concernant le traitement de la condition initiale F_0 . L'approche retenue pour le modèle fractionnaire intégré est basée sur la représentation infinie de type ARCH pour le modèle FIGARCH(p, d, q) dans Eq.(8), avec $z_t \equiv 0$ pour $t = 0, -1, -2, \dots$, et les valeurs des observations de z_t^2 et σ_t^2 sont égales à la variance inconditionnelle. Cette approche décrit directement la manière conventionnelle d'estimation des modèles GARCH et IGARCH. Cependant, à la différence du retard fini dans la représentation du modèle GARCH(p, q) Eq.(4.1), l'approximation à la technique de Maximum de vraisemblance pour le modèle fractionnaire intégré nécessite aussi la troncature de la distribution infinie des retards dans Eq.(4.6). Puisque l'opérateur de différenciation fractionnaire est conçu pour capter la présence et les caractéristiques de la mémoire longue du processus, tronquant à trop bas un décalage peut détruire une importante dépendance à long terme. Par exemple, Baillie, Bollerslev et Mikkelsen (1996) s'appuient sur une commande de troncature égale à 1000.

4.2.3 Analyse empirique de la persistance des chocs :

En tenant compte des faits stylisés précités (Chapitre.2) et afin de tester la présence de la mémoire longue, Nous modélisons la volatilité de notre série des rendements logarithmiques du prix du Brent r_t par un processus FIGARCH(1,d,1).

Notre modèle s'écrit :

$$\begin{cases} r_t = \sigma_t \varepsilon_t \\ \varepsilon_t / \mathcal{F}_t \rightsquigarrow i.i.d(0, 1) \\ \sigma_t^2 = \alpha_0 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2 + [1 - \beta_1 L - (1 - \alpha_1 L)(1 - L)^d] r_t^2 \end{cases}$$

Paramètres estimés	Coefficient	P-value
α_0	0.157122	0.1105
d	0.236504	0.0490
α_1	0.616459	0.0001
β_1	0.713351	0.0000
log-vraisemblance	1697.532	
$M_3(\varepsilon_t \sigma_t^{-1})$	-0.02314	
$M_4(\varepsilon_t \sigma_t^{-1})$	5.16395	
Statistique de Ljung Box		
$Q_{10}(\varepsilon_t \sigma_t^{-2})$	7.98351	0.6304
$Q_{15}(\varepsilon_t \sigma_t^{-2})$	11.8609	0.6895
$Q_{20}(\varepsilon_t \sigma_t^{-2})$	15.3699	0.7548
$Q_{10}(\varepsilon_t^2 \sigma_t^{-2})$	8.776	0.3614
$Q_{15}(\varepsilon_t^2 \sigma_t^{-2})$	12.5958	0.4794
$Q_{20}(\varepsilon_t^2 \sigma_t^{-2})$	18.2905	0.4366

TABLE 4.9 – Estimation par Quasi-Maximum de vraisemblance d'un modèle FIGARCH. Sortie R

Le tableau reporte l'estimation par Quasi-Maximum de Vraisemblance d'un modèle FIGARCH(1,d,1) pour les rendements quotidiens du Brent sur la période étudiées, sous l'hypothèse que les innovations standardisées sont distribuées selon une loi normale. $M_3(\varepsilon_t \sigma_t^{-1})$ et $M_4(\varepsilon_t \sigma_t^{-1})$ désignent respectivement le skewness et le Kurtosis de la série des rendements standardisés. $Q(\varepsilon_t \sigma_t^{-2})$ et $Q(\varepsilon_t^2 \sigma_t^{-2})$ désignent les statistiques de ljung-Box pour l'autocorrélation d'un nombre de décalage de 10 à 20 pour les résidus standardisés et les résidus standardisés au carré. Chacune des p-values de ces statistiques est supérieure au seuil critique de 5%, l'absence de corrélation est acceptée. Ce qui nous laisse penser que l'autocorrélation a été largement atténuée par le modèle FIGARCH. Ainsi le paramètre d'intégration fractionnaire d est significativement différent de 0 et 1, conduisant au rejet de la validité des modèles GARCH et IGARCH.

4.2.4 Récapitulatif

À travers les résultats obtenus, l'existence de la mémoire longue de la volatilité est confirmée et quantifiée par le paramètre d'intégration fractionnaire. le modèle FIGARCH s'est avéré beaucoup plus approprié que le modèle GARCH conduisant à établir des rendements standardisés qui ne sont pas autocorrélés et pour lesquels l'effet ARCH est très largement réduit et n'est plus significatif.

4.3 Discussion

Les résultats obtenus dans la section (3.4.4) ont décrit l'avantage de prendre en compte les spécificités de notre série financière décrites dans le chapitre 2.

Cependant les modèles proposés supposent que la volatilité est déterministe et négligent le phénomène de la mémoire longue étudié dans le chapitre 4.

Il sera donc judicieux de proposer un modèle dont la dynamique prend en compte l'effet de retour à la moyenne des prix et la mémoire longue de la volatilité.

Cette proposition peut être mise en œuvre en s'inspirant du modèle de *Heston*, mais cette fois-ci avec une volatilité stochastique dirigée par un mouvement Brownien **Fractionnaire** afin de prendre en compte la mémoire longue de la volatilité .

Ainsi le modèle s'écrira :

$$\begin{cases} dS = \kappa_1(\mu - \ln S)Sdt + \sqrt{v}SdZ_1 \\ dv = \kappa_2(\alpha - v)dt + \xi\sqrt{v}dZ_2^H \\ dZ_1dZ_2^H = \rho dt \end{cases} \quad (4.15)$$

avec : $\kappa_1, \sigma, \kappa_2, \xi > 0$ où :

- S : le prix spot,

- κ_1 : la force de rappel agissant sur le prix spot ,

- μ : la valeur moyenne à long terme du logarithme prix spot,

- v : la variance du prix spot,

- dZ_1 : un incrément du mouvement brownien standard associé au prix spot,

- κ_2 : la force de rappel agissant sur la variance,

- α : la valeur moyenne à long terme de la variance,

- ξ : la volatilité de la volatilité,

- dZ_2^H : un incrément du mouvement brownien **fractionnaire** associé à la volatilité,

- H : Paramètre de *Hurst* associé au mouvement brownien **fractionnaire**,

- ρ : coefficient de corrélation entre Z_1 et Z_2^H .

À la lumière des résultats empiriques obtenus, cette dynamique de prix nous permettra de prendre en compte toutes les spécificités de notre série financière et nous garantira ainsi une valorisation en juste valeur des contrats futurs sur pétrole.

Cependant, la résolution de ce modèle reste un sujet épineux et fait couler beaucoup d'ancre dans de nombreux laboratoires de recherche s'intéressant à la structure par terme des prix des matières premières énergétiques.

Bien que les futures nous permettent de savoir le prix avec lequel un produit va être échangé dans le futur, ils ne permettent pas de bénéficier des mouvements favorables des prix. Ainsi, pour une entreprise (importatrice ou exportatrice de matières premières) cherchant à se couvrir contre la hausse ou la baisse des cours, les swaps et les options s'avèrent plus fructueuses que le terme. Nous ne pouvons réaliser ce mémoire, sans décrire et modéliser quelques uns de ces nouveaux instruments de couverture.

Chapitre 5

Pricing des swaps sur matières premières

5.1 Définition et présentation générale des swaps matières premières

Le swap est un produit dérivé de couverture et non d'investissement qui consiste à un échange de flux financiers entre deux contrepartie .

Un commodity swap ou swap de matières premières correspond à un contrat entre deux parties, la première s'engage à acheter (ou à vendre) à échéances fixes et durant une période déterminée une matière première à un prix fixe et la deuxième s'engage quant à elle à vendre (ou à acheter) dans les mêmes conditions la même matière première à un prix de marché variable, qui sera déterminé à chaque échéance.

Le cours d'un swap est déterminé de manière à égaliser la jambe fixe et la jambe variable. Ainsi, la valeur d'un swap est nulle au départ et évolue au fur et à mesure que les facteurs d'évaluation du swap varient dans le temps (cours futures, taux ...)

Dans le cas d'un importateur souhaitant se couvrir contre la hausse du cours du sous-jacent, le schéma est comme suit :



Dans le cas d'un exportateur souhaitant se couvrir contre la baisse du cours du sous-jacent, le schéma est le suivant :



Contrairement aux Options, les swaps ne comportent pas de coûts initiaux. Le swap est conclu « en dehors » de tout marché et de toute bourse de commerce. Pour cette raison, les swaps sont souvent qualifiés de produit de gré à gré, d'autant plus qu'ils sont « ajustés » de sorte à correspondre aux besoins spécifiques du client, en respectant les contraintes de volumes et de cycles de l'offre et de la demande.

Les Swaps sont une opération financière pure :

- Quand les prix du marché sont plus élevés que le prix du swap, AWB paye au consommateur la différence (Prix marché – Prix du swap) ;
- Quand les prix du marché sont plus bas que le prix du swap, le consommateur paye à AWB la différence (Prix du swap - Prix marché) ;

Présentons leur principe à travers un exemple :

Une compagnie aérienne s'approvisionne tous les jours en carburant et souhaite éliminer l'incertitude quant à son coût, en payant un prix fixe. Elle va donc contracter un swap d'une durée d'un an pendant lequel, à la fin de chaque mois et pour un volume fixé :

- elle paie un prix fixe (jambe fixe) ;
- elle reçoit une partie flottante (jambe flottante) correspondant au prix de la matière première à la date de règlement ;

5.2 Valorisation du Swap

Valoriser un swap consiste à déterminer le montant fixe qui sera payé à chaque période à la contrepartie qui verse le variable.

Estimer le versement fixe périodique, nécessite la connaissance du montant flottant qui constitue la jambe variable du swap. Ce montant flottant correspond, comme cela a été expliqué dans l'exemple précédent, au prix de la matière première à la date du règlement (Swap Standard), ou bien à la moyenne des prix sur une période donnée (Swap Asiatique).

La valorisation du swap s'effectue à la date d'initiation du contrat, et non à sa date effective (date qui correspond au début des versements).

En l'absence d'opportunité d'arbitrage, à la date d'initiation du swap, la valeur actualisée des prix flottants doit être égale à la somme actualisée des paiements fixes.

Il est donc impératif d'estimer, à la date d'initiation du swap, la somme actualisée des prix flottants qui seront en vigueur aux différentes dates de règlement lorsqu'il s'agit d'un swap standard, ou alors la moyenne de ces prix, sur la période servant de base de calcul si l'on désire pricer un swap asiatique.

Estimer ces prix revient à reprendre le modèle de structure par terme des prix des matières premières de Bernnan & Schwartz développé lors de la partie précédente. Le modèle permettra de calculer les prix des contrats à terme dont la maturité coïncide avec les différentes dates de paiements.


5.2.1 Swaps Standard

Dans le cas du Swaps Standard, l'égalisation entre la jambe flottante et la jambe fixe est décrite par la relation suivante :

$$\sum_{i=1}^N X \exp[-r(t_i, T_i)T_i] = \sum_{i=1}^N F(t_0, T_i) \exp[-r(t_i, T_i)T_i]$$

On déduit que :

$$X = \frac{\sum_{i=1}^N F(t_0, T_i) \exp[-r(t_i, T_i)T_i]}{\sum_{i=1}^N \exp[-r(t_i, T_i)T_i]}$$



التجاري وفا بنك
Attijariwafa bank

Swap Standard

Date d'échange	Maturité	Taux Zero Coupon	Prix Futures	Valeur Swap
22/06/2014	17	0,14%	110,486284	136,4756054
21/08/2014	77	0,21%	115,61433	85,19514446
20/10/2014	137	0,23%	120,985346	31,48498606
19/12/2014	197	0,24%	126,605252	-24,71406986
17/02/2015	257	0,25%	132,492507	-83,58662565
18/04/2015	317	0,26%	138,663091	-145,2924651

Nominal	10
Date de valorisation	06/06/2014
Date du premier échange	22/06/2014
Durée Swap (1)	360
F	60
Spot(0)	109,08

F1	108,08
T1	60
F2	109,56
T2	78
r	0,2132%
Cy	-0,2737

Valorisation du Swap	-0,43742473
Prix Swap	124,133845

Payeur de Fixe
 Receveur de Fixe

Evaluer

Réinitialiser

FIGURE 5.1 – Pricer Swap Standard sur matières premières :Brent

5.2.2 Swap asiatique

Pour valoriser les swaps asiatiques (sur moyennes), Nous calculons sur une période donnée, des prix à termes journaliers pour ensuite retenir leur moyenne arithmétique. Cette dernière constituera le prix flottant à payer à la date de règlement. Nous aurons donc autant de moyennes arithmétiques à calculer que de dates de paiement.

Notant que Moy_i est la moyenne, sur la période i , des prix des futures dont la maturité est T_i , date de fin de période i .

Dans le cas du Swaps asiatique, l'égalisation entre la jambe flottante et la jambe fixe est décrite par la relation suivante :

$$\sum_{i=1}^N X \exp[-r(t_i, T_i)T_i] = \sum_{i=1}^N Moy_i \exp[-r(t_i, T_i)T_i]$$

On déduit que :

$$X = \frac{\sum_{i=1}^N Moy_i \exp[-r(t_i, T_i)T_i]}{\sum_{i=1}^N \exp[-r(t_i, T_i)T_i]}$$

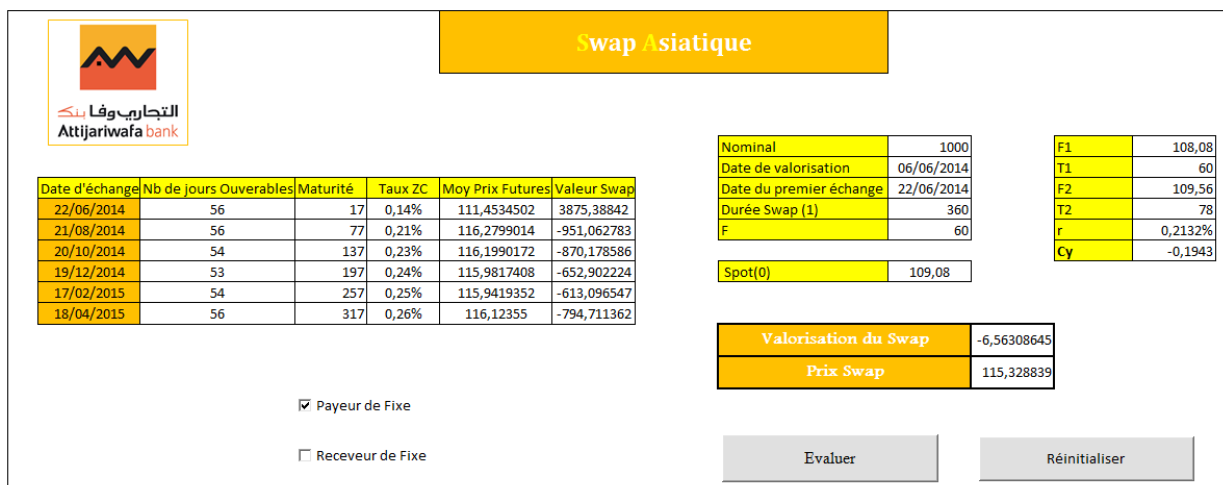


FIGURE 5.2 – Pricer Swap asiatique sur matières premières : Brent

Les swaps sur matières premières sont fréquemment utilisés par les entreprises industrielles qui se fournissent régulièrement en matières premières. Ces commodity swaps contractés généralement auprès des banques leur offrent une couverture contre le risque de fluctuations des prix et leur permettent de conserver leur marge bénéficiaire. Comme pour les contrats à terme, forwards et les instruments dérivés, les Commodity swap sont les plus courants sur les matières premières.

Cependant le swap présente l'inconvénient de bloquer définitivement les prix pour toute la durée de contrat. Il prive ainsi l'opérateur du bénéfice d'une évolution favorable des cours.

Afin de permettre aux producteurs de s'assurer un prix de vente minimal sans perdre la possibilité de tirer profit d'une hausse des cours, et aux utilisateurs de s'assurer un prix d'achat maximal sans perdre la possibilité de bénéficier d'une baisse de cours, les **produits dérivés optionnels** ont été développés.

Chapitre 6

Pricing des options vanilles et exotiques sur matières premières

6.1 Aperçu sur les options

6.1.1 Définition d'une option

Une option est un contrat à terme par lequel l'acheteur de l'option obtient du vendeur, moyennant le paiement d'une prime (premium), le droit, mais non l'obligation, d'acheter (call) ou de vendre (put) une quantité déterminée d'actifs sous-jacent, à un prix convenu à l'avance (dit prix d'exercice, ou strike) au cours d'une période ou à une date déterminée. N'importe quel support peut servir de sous-jacent : actions, indices boursiers, devises, titres à revenu fixe, matières premières, options (on parle alors d'options sur option)... Les options dites européennes ne peuvent être exercées qu'à l'échéance, alors que les options dites américaines peuvent être exercées à n'importe quelle date jusqu'à l'échéance.

6.1.2 Stratégies de base sur options

Il existe quatre stratégies de base en ce qui concerne les options.

L'achat d'un call :

L'acheteur d'un call acquiert un droit, celui d'acheter, s'il le désire, l'actif sous-jacent au prix K à (ou jusqu'à) la date prévue T par le contrat. Pour acquérir ce droit, il paye la prime p . Si, à l'échéance, le prix de l'actif sous-jacent S est supérieur au prix d'exercice de l'option ($S > K$), l'acheteur de l'option exerce son contrat puisqu'il réalise un gain ($S - K$). Si, au contraire, le prix de l'actif sous-jacent est inférieur ou égal au prix d'exercice de l'option ($S \leq K$) le détenteur de l'option n'exerce pas son option ; il est en effet préférable d'acheter directement sur le marché au prix S . L'acheteur du call est donc couvert contre une hausse du prix de l'actif sous-jacent (au pire, l'actif sous-jacent lui coûte K), mais bénéficie des baisses éventuelles. Mathématiquement, son profil de gain ou le Pay-off net s'écrit $Max(0, S - K) - p$.

La vente d'un call :

Le vendeur d'un call est soumis à la volonté de l'acheteur. Il est obligé de livrer le sous-jacent au prix d'exercice ou de payer la différence entre le prix au comptant et le prix d'exercice si l'acheteur de l'option en décide ainsi. Le profit du vendeur est limité au montant de la prime perçue, alors que ses pertes sont illimitées. Son profil de gain net est symétrique au précédent ; il s'écrit $p - \text{Max}(0, S - K)$.

L'achat d'un put :

L'acheteur d'un put a le droit, mais pas l'obligation, de vendre l'actif sous-jacent S au prix d'exercice K . Il espère une hausse du cours du sous-jacent. Si ces anticipations se confirment, il réalise un gain ; gain d'autant plus élevé que le prix de l'actif sous-jacent est faible. Contrairement à l'achat d'un call, les gains sont ici limités au montant K (parce que le prix de l'actif sous-jacent a pour limite inférieure zéro). En outre, puisque l'acheteur de l'option de vente décide d'exercer, ou non, son option, le montant de ses pertes est limité à la prime. En effet, il n'exerce que si $K > S$. L'acheteur d'un put est donc couvert contre une baisse éventuelle de l'actif sous-jacent tout en profitant des opportunités de hausse. Précisément, sa fonction de gain net s'écrit $\text{Max}(0, K - S) - p$.

La vente d'un put :

Le vendeur d'un put est soumis à la volonté de l'acheteur. De ce fait, il se retrouve dans une situation où ses gains sont limités (au montant de la prime) alors que ses pertes peuvent être très importantes. Sa fonction de gain net est symétrique à celle de l'acheteur d'un put ; elle s'écrit $p - \text{Max}(0, K - S)$.

6.1.3 La valeur de l'option et ses déterminants :

La valeur d'une option, c'est-à-dire aussi le montant de la prime exigée par le vendeur de l'option, est fonction de deux composantes additives :

$$\text{Valeur d'une option} = \text{Valeur intrinsèque} + \text{Valeur temps}$$

- La valeur d'une option est, au minimum, égale au profit de l'acheteur si l'option était exercée immédiatement : on parle de valeur intrinsèque. La valeur intrinsèque d'une option ne dépend que de la différence entre le cours du support et le prix d'exercice. Celle-ci ne peut être négative puisque l'exercice de l'option est un droit et non une obligation.

- En outre, il existe toujours une probabilité non nulle pour que, d'ici l'échéance, l'évolution des cours du sous-jacent soit favorable au détenteur de l'option ; c'est ce que mesure la valeur temps. La valeur temps se mesure par la différence entre le prix de marché de l'option et sa valeur intrinsèque. Plus l'échéance de l'option est éloignée et plus la valeur temps est importante car l'incertitude quant au potentiel d'évolution de la valeur intrinsèque augmente. Toutes choses égales par ailleurs, la valeur temps est maximale lorsque le prix de l'actif sous-jacent est égal au prix d'exercice de l'option.

A l'échéance, la valeur d'une option est égale à sa seule valeur intrinsèque puisque la valeur temps est nulle.

Type de l'option	Option dans la monnaie (In the money)	Option à la monnaie (At the money)	Options en dehors de la monnaie (Out of the money)
Call	$S > K$ (Valeur intrinsèque > 0)	$S = K$ (Valeur intrinsèque $= 0$)	$S < K$ (Valeur intrinsèque < 0)
Put	$S < K$ (Valeur intrinsèque > 0)	$S = K$ (Valeur intrinsèque $= 0$)	$S > K$ (Valeur intrinsèque < 0)

TABLE 6.1 – Types de valeurs intrinsèques

On dit qu'une option est à la monnaie ou à parité (at the money) si le cours de l'actif sous-jacent est égal au prix d'exercice, i.e. $S = K$; elle est dans la monnaie (in the money) si sa valeur intrinsèque est positive, i.e. $S > K$ pour un call et $K > S$ pour un put, enfin elle est en dehors de la monnaie (out the money) si sa valeur intrinsèque est nulle, i.e. $S < K$ pour un call et $K < S$ pour un put.

Les déterminants de la valeur de l'option :

La valeur d'une option est fonction des caractéristiques du contrat (échéance et prix d'exercice), du taux d'intérêt sans risque et des caractéristiques de l'actif sous-jacent, plus précisément de sa fonction de distribution à l'échéance :

- plus le cours de l'actif sous-jacent est élevé, plus la prime exigée pour une option d'achat (de vente) est élevée (faible).
- plus le prix d'exercice est élevé, moins (plus) l'option d'achat (de vente) a de chance d'être exercée et moins (plus) elle est chère.
- plus l'actif sous-jacent est volatil, plus la probabilité d'exercice est importante et plus le prix à payer pour se couvrir est élevé, qu'il s'agisse d'une option d'achat ou de vente.
- l'option ayant une durée de vie limitée, le temps qui passe a un impact négatif sur la valeur temps de l'option (d'achat ou de vente) et, in fine, sur le prix de l'option.
- plus le taux d'intérêt est élevé, plus la valeur d'une option d'achat (de vente) est élevée (faible) : l'achat d'un call est toujours moins coûteux que l'achat du sous-jacent, le montant "économisé" peut alors être placé au taux sans risque ; l'achat d'un put diffère la vente (éventuelle) du sous-jacent ce qui s'interprète comme un coût d'opportunité subi par l'acheteur. En pratique toutefois, les variations de taux d'intérêt ont un effet limité et ambigu.

6.1.3.1 La relation de la parité Put-Call :

Considérons un call et un put européens, écrits sur le même sous-jacent de prix S , de même maturité T et de même prix d'exercice K . Nous appelons "cas standard" celui des options écrites

sur des *titres au comptant ne distribuant pas de dividendes ou coupons* d'ici à l'échéance T . Alors il existe une relation entre le put et le call dite *parité Put-Call* :

$$C - P = S_t - Ke^{-r(T-t)} \quad (6.1)$$

En dehors du cas standard, soit parce que le titre sous-jacent verse une rémunération pendant la durée de vie restante de l'option, soit parce qu'il ne s'agit pas d'un titre au comptant, la relation de parité put-call standard doit être amendée.

Parité Put-Call dans le cas d'options écrites sur un sous-jacent au comptant versant des dividendes :

La perspective d'une distribution de dividendes ou de coupons avant l'échéance de l'option (qui se traduira par une chute de la valeur du support) diminue la valeur du call, augmente celle du put et affecte la relation de la parité put-call :

$$C - P = (S_t - D) - Ke^{-r(T-t)} \quad (6.2)$$

Parité Put-Call dans le cas d'options sur contrats à terme :

Rappelons que le contrat forward constitue pour l'acheteur un droit et une obligation d'acheter à la date T' un bien déterminé (le sous-jacent) à un prix fixé initialement, et pour le vendeur le droit et l'obligation, symétriques de ceux de l'acheteur, de vendre le sous-jacent à ce prix. Nous considérons dans la suite un contrat forward d'échéance T' , dont le prix de cotation en date t sera noté F_t et des options européennes d'échéance $T \leq T'$.

Considérons un call et un put européens, de même prix et date d'exercice K et T , écrits sur le même contrat forward d'échéance $T' \geq T$, dont le prix coté est F_t en date t . En absence d'opportunité d'arbitrage, la relation de parité suivante est satisfaite en t :

$$C - P = (F_t - K)e^{-r(T-t)} \quad (6.3)$$

Remarque 6.1. -La raison pour laquelle le cours F_t est comme K , actualisé, alors que S_t ne l'était pas dans l'équation (6.1), est que l'acheteur du contrat ne décaisse pas F_t aujourd'hui : la valeur présente de F_t est $F_t e^{-r(T-t)}$.

-Contrairement au cas des options européennes sur support au comptant ne versant pas de dividendes, le call et le put européens écrits sur un contrat à terme ont la même valeur s'ils sont à la monnaie ($F_t = K \Rightarrow C = P$).

6.2 Pricing des options vanilles :

6.2.1 Modèle de Black et Scholes standard

Les mathématiciens ont longtemps essayé de résoudre les questions soulevées par le monde de la finance. Mais c'est sans aucun doute grâce aux travaux de Black, Merton et Scholes que ces questions sont devenues si populaires. Ceci est en partie dû à la simplicité des réponses qu'ils ont apportées.

En 1973, Myron Scholes et Fischer Black ont développé une formule mathématique afin de calculer le prix des options. Cette formule est très utilisée en pratique à tel point que la volatilité implicite qu'elle définit est devenue une véritable unité de mesure. Elle demeure aujourd'hui

encore une référence majeure dans le monde de la finance.

Ce modèle retient comme principe de base, qu'à la date de l'expiration, une option est égale à sa valeur intrinsèque. La prime de l'option s'obtient en prenant la valeur actualisée, à la date t des calculs, de la moyenne des valeurs intrinsèques possibles de cette dernière, pondérée par leur probabilité respective d'apparition.

La solution explicite du modèle de Black et Scholes est donnée par la formule suivante :

$$C = S_t N(d1) - K e^{-r(T-t)} N(d2) \quad (6.4)$$

avec :

$$d1 = \frac{\ln \frac{S_t}{K} + (r + \frac{1}{2} \sigma^2)(T-t)}{\sigma \sqrt{(T-t)}} \quad ; \quad d2 = d1 - \sigma \sqrt{(T-t)}$$

La parité Put-Call permet de déterminer la formule correspondante à un put européen :

$$\begin{aligned} P &= C - S_t + K e^{-r(T-t)} \\ &= K e^{-r(T-t)} N(-d2) - S_t N(-d1) \end{aligned} \quad (6.5)$$

Black et Sholes considèrent que le marché est ouvert en continu, exempt de coûts de transaction et est constitué de deux actifs de base : un actif risqué, l'action, et un actif sans risque, c'est à dire un contrat de prêt ou d'emprunt négocié à un taux continu constant noté r .

S_t est la valeur en date t de l'action cotée sur le marché. cette dernière ne distribue pas de dividende et sa valeur initiale S_0 est connue en date 0. L'évolution aléatoire du prix S_t , à partir de la condition initiale S_0 , est régie par un mouvement brownien géométrique :

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dW_t \quad (6.6)$$

Les paramètres μ et σ , qui représentent respectivement la tendance et la volatilité de l'action, sont supposés constants et $(W_t)_{t \geq 0}$ est un mouvement brownien standard, de ce fait, les cours sont supposés être distribués suivant la loi log normale (les rendements sont normaux).

6.2.1.1 Les grecs du modèle de Black et Scholes standard

Un portefeuille contenant des options est exposé à des risques spécifiques qu'il convient de gérer. Le modèle de Black et Scholes sert de base à la gestion des options, néanmoins, leur mise en œuvre pose nombre de problèmes délicats, liés notamment aux hypothèses restrictives sur lesquelles le modèle de Black et Scholes est fondé. Les praticiens ont donc été conduits à élaborer, à partir de ce modèle, des outils supplémentaires appelés "**Grecs**", qui pallient plus ou moins les insuffisances du modèle, facilitent les applications et servent de support à des stratégies de portefeuilles et des risques.

Ces Grecs calculent l'impact sur le prix de l'option d'une variation des paramètres qui le forment :

- le prix du sous-jacent (ou spot) ;
- la volatilité ;
- le temps ;

-le taux d'intérêt.

Delta δ (dérivée par rapport à S) :

Le delta mesure la sensibilité de la valeur de l'option à la variation du cours du sous-jacent.

$$\delta_C \equiv \frac{\partial C}{\partial S} = N(d1) \quad \text{donc : } 0 < \delta_C < 1$$

$$\delta_P \equiv \frac{\partial P}{\partial S} = -1 + N(d1) \quad \text{donc : } -1 < \delta_P < 0$$

Gamma Γ (dérivée seconde par rapport à S) :

Le gamma mesure la sensibilité du delta aux variations du prix du support, il est lié à la courbure de la courbe représentative du prix de l'option en fonction de S .

$$\Gamma_C \equiv \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} = \frac{\partial^2 P}{\partial S^2} = \frac{\partial \delta_C}{\partial S} = \frac{\partial \delta_P}{\partial S} = \frac{N'(d1)}{S\sigma\sqrt{T-t}} = \Gamma_P$$

Véga ϑ (dérivée par rapport à la volatilité σ) :

Contrairement à l'une des hypothèses sous-tendant les modèles de base, la volatilité σ du support n'est pas constante en pratique, ni même déterministe. Les opérateurs doivent tenir compte, dans l'élaboration de leurs stratégies, de cette autre source de risque que constitue l'aléa affectant la volatilité future. C'est pourquoi il est utile de calculer la sensibilité de la valeur des options à un changement de σ .

$$\vartheta_C \equiv \frac{\partial C}{\partial \sigma} = \frac{\partial P}{\partial \sigma} = \sqrt{T-t}SN'(d1) = \vartheta_P$$

Thêta θ (dérivée par rapport à la maturité T) :

Le thêta mesure la sensibilité de la valeur de l'option à la variation du temps.

$$\theta_C \equiv \frac{\partial C}{\partial t} \equiv -\frac{\partial C}{\partial T} = -\left(\frac{S\sigma}{2\sqrt{T-t}}N'(d1) + rKe^{-r(T-t)}N(d2)\right) < 0$$

$$\theta_P \equiv \frac{\partial P}{\partial t} \equiv -\frac{\partial P}{\partial T} = -\frac{S\sigma}{2\sqrt{T-t}}N'(d1) + rKe^{-r(T-t)}(1 - N(d2)) < \text{ou } > 0$$

Rho ρ (dérivée par rapport à r , le taux d'actualisation) :

Le rho mesure l'influence d'une variation du taux d'intérêt r sur la valeur des options.

$$\rho_C \equiv \frac{\partial C}{\partial r} = (T-t)Ke^{-r(T-t)}N(d2) > 0$$

$$\rho_P \equiv \frac{\partial P}{\partial r} = (N(d2) - 1)(T-t)Ke^{-r(T-t)} < 0$$

6.2.2 Options sur Spot : Modèle de Merton

Le *convenience yield*, notion qu'on a introduit au chapitre 3 et qui traduit l'éventuel avantage de disposer physiquement de la matière première, le coût de son stockage et la liquidité du marché (Stock attendu dans le futur...), fonctionne techniquement exactement comme un dividende qui diminuerait (lorsqu'il est positif) l'espérance de la croissance du prix de la matière première sur le marché au comptant. Le cas des matières première peut donc être facilement traité à l'aide du Modèle de Merton qui n'est autre qu'une extension du modèle de Black et Scholes publiée en Juin 1973, juste après celui de Black et Scholes paru en Mai.

Modèle de Merton :

Soient un call et un put européens, de prix d'exercice K , de maturité T , écrits sur une matière première cotée au comptant de prix S , prenant en compte un *convenience yield* continu et constant c ; par ailleurs, r , le taux sans risque, est supposé constant, de même que la volatilité σ de S .

La valeur du call est donnée par :

$$C = S_t e^{-c(T-t)} N(d1) - K e^{-r(T-t)} N(d2) \quad (6.7)$$

La valeur du put est donnée par :

$$P = K e^{-r(T-t)} N(-d2) - S_t e^{-c(T-t)} N(-d1) \quad (6.8)$$

où $N(u)$ dénote la fonction de répartition de la loi normale centrée et réduite et :

$$d1 = \frac{\ln \frac{S_t}{K} + \left(r - c + \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}} \quad ; \quad d2 = d1 - \sigma\sqrt{(T-t)}$$

Dès lors :

$$\delta_C = e^{-c(T-t)} N(d1) \quad ; \quad \Gamma_C = e^{-c(T-t)} \frac{N'(d1)}{S\sigma\sqrt{T}}$$

$$\vartheta_C = S e^{-c(T-t)} \sqrt{T} N'(d1) \quad ; \quad \theta_C = -\frac{S e^{-c(T-t)} \sigma}{2\sqrt{T}} N'(d1) - r K e^{-r(T-t)} N(d2) + c S e^{-c(T-t)} N(d1)$$

Et les paramètres grecs relatifs à un put s'obtiennent, à partir de ceux du call, à l'aide de la relation de parité qui s'écrit ici : $P = C - (S e^{-c(T-t)} - K e^{-r(T-t)})$

Le pricer du modèle de Merton implémenté sous VBA se présente comme suit :

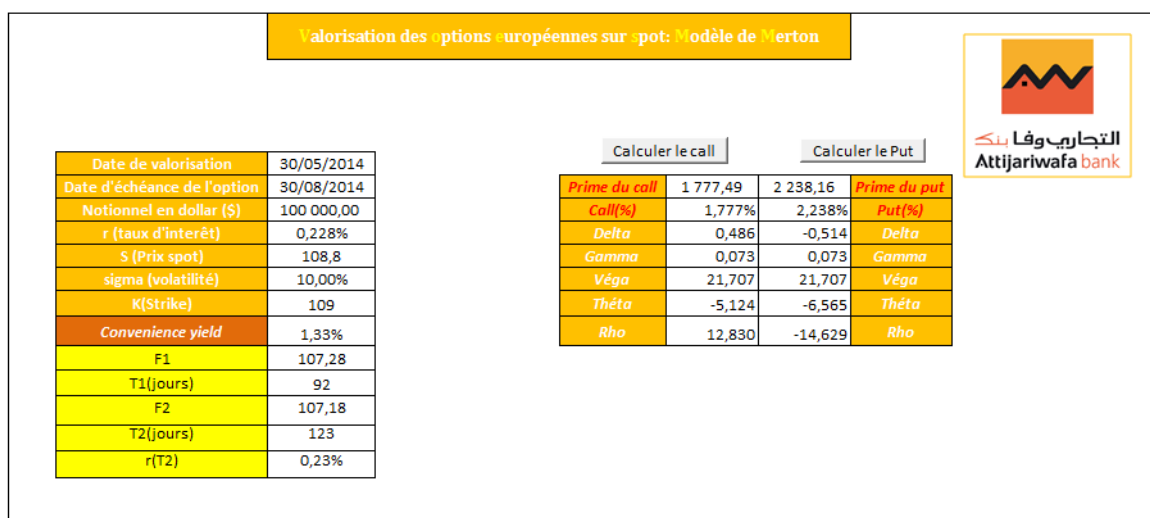


FIGURE 6.1 – Pricer des options sur spot de matières premières par le modèle de Merton

Notons que pour avoir une prime en pourcentage, nous avons divisé la valeur théorique donnée par le modèle par le cours du sous-jacent.

6.2.3 Options sur Futures

Les options sur contrats à terme sont très fréquemment utilisées sur les marchés organisés, les produits optionnels étant souvent définis sur les contrats futures. Ceci est particulièrement vrai des matières premières, pour lesquelles il n'existe pratiquement pas de marché d'options écrites sur le prix au comptant (pour des raisons évidentes de temps de livraison).

Les options sur futures donnent, en cas d'exercice, une position sur un contrat future. Ainsi un call sur future donne le droit à son détenteur de prendre, à la date convenue, une position longue sur un future à un certain prix, un put sur futures donne le droit à une position courte sur un contrat future.

L'investisseur qui vend (écrit) un call sur options futures reçoit la prime de l'option mais assume le risque que le contrat soit exercé. Lorsque l'option est exercée, l'investisseur entre dans une position courte sur futures. Un montant équivalent à $F - K$ est déduit de son compte de marge, F étant le prix de règlement le plus récent, et K le strike de son option. Bien entendu, la chambre de compensation s'arrange pour transférer cette somme sur le compte de celui qui a exercé l'option. Mentionnons que dans le marché des options sur futures, on y fait référence par le mois au cours duquel le contrat à terme sous-jacent arrive à maturité, et non par le mois auquel va expirer l'option. La date de maturité de l'option sur futures coïncide, sinon précède de peu, la première date de livraison du futures sous-jacent.

6.2.3.1 Modèle de Black

Soient un call et un put européens, de prix d'exercice K , de maturité T , écrits sur un contrat à terme d'échéance T' dont le prix de cotation en t est F_t . Le taux sans risque r et la volatilité σ du prix à terme (futures ou forward) sont supposés constants. Les valeurs du call et du put sont alors respectivement :

$$C = e^{-r(T-t)}[F_t N(d1) - KN(d2)] \quad (6.9)$$

$$P = e^{-r(T-t)}[KN(-d2) - F_t N(-d1)] \quad (6.10)$$

où :

$$d1 = \frac{\ln \frac{F_t}{K} + \frac{1}{2}\sigma^2(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \quad ; \quad d2 = d1 - \sigma\sqrt{T-t}$$

Dès lors :

$$\delta_C = e^{-r(T-t)}N(d1) \quad ; \quad \Gamma_C = e^{-r(T-t)}\frac{N'(d1)}{F\sigma\sqrt{T}}$$

$$\vartheta_C = Fe^{-r(T-t)}\sqrt{T}N'(d1) \quad ; \quad \theta_C = -\frac{Fe^{-r(T-t)}\sigma}{2\sqrt{T}}N'(d1) - rKe^{-r(T-t)}N(d2) + Fre^{-r(T-t)}N(d1)$$

Les paramètres grecs relatifs au put s'obtiennent à partir de ceux du call homologue à l'aide de la relation de parité put-call qui s'écrit ici :

$$P = C - e^{-r(T-t)}(F - K)$$

Notons que les deux termes des primes du call et du put sont actualisés au taux sans risque r . Le taux r fonctionne en effet comme un dividende versé par le contrat à terme. Il faut donc actualiser le prix futures F_t dans le premier terme de la prime du call (de même pour le second terme de la prime du put). Remarquons par ailleurs que le taux r a disparu dans les quantités $d1$ et $d2$. En effet, la densité de probabilité du prix futures en date T ne dépend ni du taux d'intérêt, ni du taux de dividende versé par le titre support.

Le pricer du modèle de Black se présente comme suit :

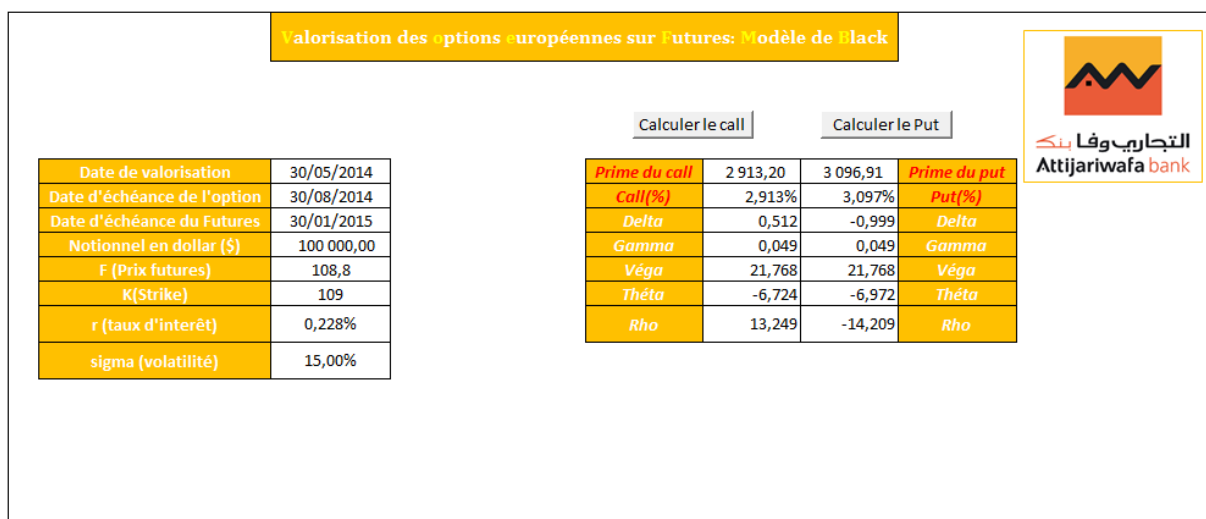


FIGURE 6.2 – Pricer des options sur futures par le modèle de Black

6.2.3.2 Modèle de Schwartz à deux facteurs :

Nous avons conclu un peu plus haut que le modèle de Schwartz à deux facteurs est le mieux adapté à la modélisation des contrats futures sur pétrole. De plus ce modèle, grâce aux travaux de **Miltersen & Schwartz (1998)**, permet de calculer le juste prix d'une option européenne écrit sur un contrat à terme de matières premières.

Nous donnons ici la formule de valorisation des options européennes pour le modèle à deux facteurs. Dans ce cadre, le prix d'une option européenne C au temps zéro avec maturité t , avec un prix d'exercice K , écrit sur un contrat à terme de matières premières avec maturité T est donné par :

$$C = \mathbb{E}^Q[e^{-rt}(F - K)^+]$$

Tant que les prix futures sont log-normalement distribués on obtient une formule de type Black et Scholes pour le prix du call :

$$C = e^{-rt}[FN(d_+) - KN(d_-)] \quad (6.11)$$

Et à partir de la parité put-call on obtient la valeur du put :

$$P = e^{-rt}[KN(-d_-) - FN(-d_+)] \quad (6.12)$$

avec :

$$d_{\pm} = \frac{\ln \frac{F}{K} \pm \frac{1}{2}\sigma^2}{\sigma}$$

et :

$$\sigma^2 = \sigma_s^2 t + \frac{2\sigma_s \sigma_c \rho}{\kappa} \left(\frac{1}{\kappa} e^{-\kappa T} (e^{\kappa t} - 1) - t \right) + \frac{\sigma_c^2}{\kappa^2} \left(t + \frac{1}{2\kappa} e^{-2\kappa T} (e^{2\kappa t} - 1) - \frac{2}{\kappa} e^{-\kappa T} (e^{\kappa t} - 1) \right)$$

Le pricer des options du modèle de Schwartz à deux facteurs se présente comme suit :

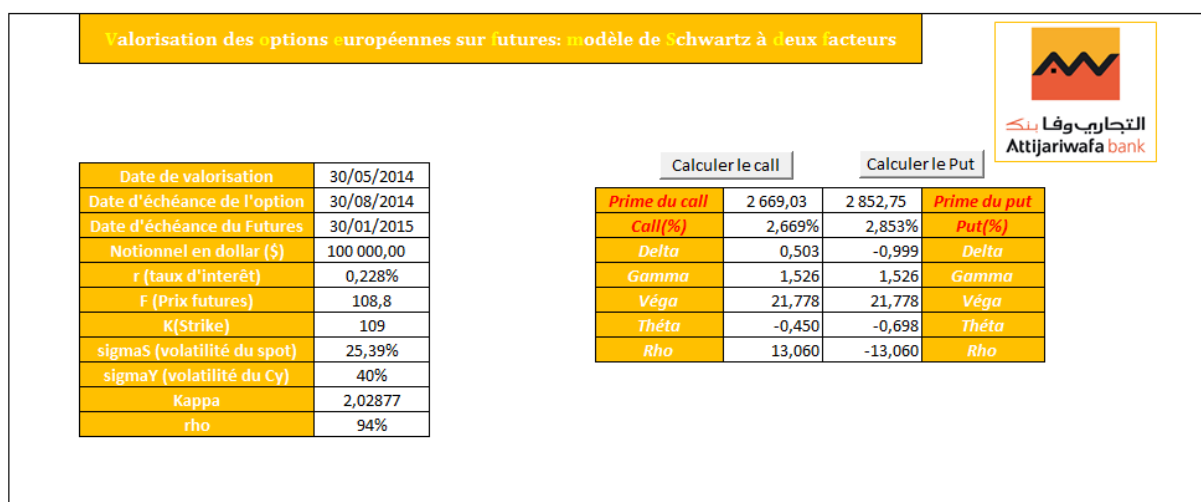


FIGURE 6.3 – Pricer des options sur futures par le modèle de Schwartz à deux facteurs

Une comparaison entre le modèle de Black et celui de Schwartz ne serait pas commode puisque chacun d'entre eux estime la volatilité de manière différente. De plus, le modèle de Schwartz inclut la maturité du contrat futures dans la valorisation des options, contrairement à Black.

Les produits dérivés comme les calls et les puts européens sont si classiques que les professionnels les qualifient de "vanille", produits au goût simple et connu de tous. Ils ont des propriétés standardisées, clairement spécifiées, et sont activement échangés. L'une des facettes les plus passionnantes des marchés dérivés de gré à gré est sans nul doute l'existence d'une foule de produits non standards, dits aussi exotiques, créés par l'ingénierie financière. Ces produits exotiques, qui ne représentent qu'une proportion relativement faible des portefeuilles des banques d'investissement, ont pourtant un intérêt particulier dans le sens où ils sont généralement bien plus profitables que les produits classiques.

6.3 Pricing des options exotiques

La notion d'exotisme est bien sûr toute relative, car au fur et à mesure qu'un produit financier devient très liquide il perd progressivement son caractère d'exotisme. La palette de ces instruments est extrêmement riche et concerne tous les types de supports (actions, indices boursiers, taux d'intérêt et de change, matières premières, et même des actifs non négociables comme un indice des prix à la consommation, un niveau de température...) tant les besoins spécifiques des investisseurs et des opérateurs de marché se sont développés.

Il existe de nombreuses raisons au développement des dérivés exotiques. Dans certains cas, ils répondent à un réel besoin de couverture sur le marché ; dans d'autres cas, ils sont attractifs pour cause de réduction de l'investissement par rapport à l'option classique qu'elles offrent souvent. Les options barrières sont un exemple d'une telle réduction, puisque l'option pourra être exercée dans un nombre de configurations moindre que l'option classique, par exemple seulement si le sous-jacent est passé en dessous d'une barrière définie dans le contrat.

Il n'y a pas de nomenclature qui s'impose en matière d'options exotiques. Celle que nous adoptons consiste à distinguer les options *path-independent* dont le payoff ne dépend que de la valeur terminale du sous-jacent, et les options *path-dependent* dont le payoff dépend de sa trajectoire. Nous nous intéresserons particulièrement dans ce chapitre aux options *path-dependent* à savoir : les **options barrières**, les **options lookback** et les **options asiatiques**.

6.3.1 Options barrières :

Les options à barrière sont les plus anciennes et les plus traitées sur les marchés des options exotiques. Comme une option vanille, la valeur à l'échéance d'une option à barrière dépend de la différence entre le cours du sous-jacent à maturité et le Strike fixé à l'avance. Or, le contrat qui définit ce type d'option stipule une condition qui assujettit l'exercice de l'option au franchissement, ou au contraire à l'absence de franchissement, par le cours du sous-jacent d'une barrière déterminée. On parle ainsi d'une :

- Option à barrière activante (**Knock-in**) qui n'existe que lorsque le cours de l'actif sous-jacent atteint la barrière. Si celui-ci ne touche jamais la barrière, l'option expire à maturité sans valeur et l'acheteur n'a par conséquent droit à aucun flux. Dans le cas contraire, l'option devient vanille.

-Option à barrière désactivante (**Knock-out**) qui disparaît définitivement lorsque la barrière est touchée. Elle présente le caractère inverse des Knock-in.

Le fait que ces options présentent une condition supplémentaire pour être valide entraîne donc une baisse de la prime de celles-ci par rapport à leurs homologues sans barrières. Cela vient du fait que lorsqu'un risque se rajoute la valeur diminue.

C'est précisément leur caractère relativement bon marché qui rend ces options si populaires. L'acheteur tente de profiter d'une anticipation assez fine concernant l'évolution du cours du sous-jacent pour diminuer le coût de son investissement. Ainsi, ces options ne permettent pas une couverture parfaite mais elles sont plutôt adaptées à la vision globale de l'investisseur.

On distingue entre 8 types d'options à barrière. Il y a les Calls et les Puts, des barrières In et des barrières Out et celles-ci peuvent être atteintes soit par la hausse ou par la baisse du cours d'où le Down et le Up.

Propriétés :

Il n'est pas nécessaire de dériver de façon analytique la valeur de toutes les options. Il suffit de connaître en plus de la formule de B&S d'une option vanille, le prix de deux d'entre elles et certaines relations de parité :

$$C = C_{down.in} + C_{down.out} = C_{up.in} + C_{up.out} \quad (6.13)$$

$$P = P_{down.in} + P_{down.out} = P_{up.in} + P_{up.out} \quad (6.14)$$

Ces relations découlent de la définition même d'une barrière. Par exemple, l'achat d'un $P_{up.in}$ et d'un $P_{up.out}$, de même date d'échéance, strike et barrière, équivaut à un put standard car soit la barrière est atteinte (hausse suffisante du cours de devise) et le $P_{up.out}$ expire sans valeur mais le $P_{up.in}$ est activé, soit elle ne l'est pas, et le $P_{up.out}$ reste en vie mais le $P_{up.in}$ n'est pas activé.

Formules :

Il est à signaler que les options à barrières sont valorisées de la même manière que les vanilles avec la seule différence d'une fonction de densité restreinte.

Nous donnons ici les expressions des options **Knock-in**. Rappelons que pour obtenir les expressions des options Knock-out, il suffit d'utiliser la relation de parité exposée plus haut.

Call :

- Down and In :

$$C_{down.in} = Se^{-cT} \left(\frac{L}{S}\right)^{2\lambda} N(y) - Ke^{-rT} \left(\frac{L}{S}\right)^{2\lambda-2} N(y - \sigma\sqrt{T})$$

- Up and In :

$$C_{up.in} = Se^{-cT} N(x_1) - Ke^{-rT} N(x_1 - \sigma\sqrt{T}) - Se^{-cT} \left(\frac{L}{S}\right)^{2\lambda} (N(-y) - N(-y_1)) \\ + Ke^{-rT} \left(\frac{L}{S}\right)^{2\lambda-2} (N(-y + \sigma\sqrt{T}) - N(-y_1 + \sigma\sqrt{T}))$$

Put :

- Down and In :

$$P_{down.in} = -Se^{-cT}N(-x_1) - Ke^{-rT}N(-x_1 + \sigma\sqrt{T}) + Se^{-cT}\left(\frac{L}{S}\right)^{2\lambda}(N(y) - N(y_1)) - Ke^{-rT}\left(\frac{L}{S}\right)^{2\lambda-2}(N(y - \sigma\sqrt{T}) - N(y_1 - \sigma\sqrt{T}))$$

- Up and In :

$$P_{up.in} = -Se^{-cT}\left(\frac{L}{S}\right)^{2\lambda}N(-y) + Ke^{-rT}\left(\frac{L}{S}\right)^{2\lambda-2}N(-y + \sigma\sqrt{T})$$

avec :

$$\lambda = \frac{r - c + \sigma^2/2}{\sigma^2} \quad ; \quad y = \frac{\ln[L^2/(SK)]}{\sigma\sqrt{T}} + \lambda\sigma\sqrt{T}$$

et :

$$x_1 = \frac{\ln(S/L)}{\sigma\sqrt{T}} + \lambda\sigma\sqrt{T} \quad ; \quad y_1 = \frac{\ln(L/S)}{\sigma\sqrt{T}} + \lambda\sigma\sqrt{T}$$

6.3.2 Options lookback :

Les options lookback constituent l'un des archétypes des options path-dépendant. Le profil de performance de ces options est extrêmement intéressant pour leur détenteur, car elles procurent à ce dernier le niveau le plus favorable atteint par le cours de l'actif sous-jacent, sur une période définie à l'origine. En contrepartie, la prime est inévitablement très chère, conduisant à un effet de levier souvent assez bas. Cependant, ces options résolvent totalement le problème de la détermination du moment optimal d'acquisition d'un actif sur un marché donné (« market timing »).

Les payoffs délivrés par les options lookback dépendent du niveau maximal ou minimal atteint par le prix du sous-jacent pendant la durée de vie de l'option. Le payoff d'un call lookback est égal au montant duquel le prix terminal du sous-jacent dépasse le prix minimal atteint par ce même actif pendant la durée de vie de l'option. Le payoff d'un put lookback est égal au montant duquel le prix maximal du sous-jacent atteint pendant la durée de vie de l'option dépasse le prix terminal du sous-jacent.

Formules :

Nous présentons ci-dessous les formules des options lookback :

- Lookback Call :

$$C_{lookback} = S.e^{-cT}N(a_1) - Se^{-cT}\frac{\sigma^2}{2(r-c)}N(-a_1) - S_{min}e^{-rT}\left[N(a_2) - \frac{\sigma^2}{2(r-c)}e^{-y_1}N(a_3)\right]$$

avec :

$$a_1 = \frac{\ln(S/S_{min}) + \left(r - c + \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}} \quad ; \quad a_2 = a_1 - \sigma\sqrt{T}$$

et :

$$a_3 = \frac{\ln(S/S_{min}) + \left(-r + c + \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}} \quad ; \quad y_1 = \frac{2\left(r - c + \frac{\sigma^2}{2}\right)\ln(S/S_{min})}{\sigma^2}$$

• Lookback Put :

$$P_{lookback} = S_{max} \cdot e^{-rT} \left[N(b_1) - \frac{\sigma^2}{2(r-c)} e^{y_2} N(-b_3) \right] + S e^{-cT} \frac{\sigma^2}{2(r-c)} N(-b_2) - S e^{-cT} N(b_2)$$

avec :

$$b_1 = \frac{\ln(S_{max}/S) + \left(-r + c + \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}} \quad ; \quad b_2 = b_1 - \sigma\sqrt{T}$$

et :

$$b_3 = \frac{\ln(S_{max}/S) + \left(r - c + \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}} \quad ; \quad y_2 = \frac{2\left(r - c + \frac{\sigma^2}{2}\right)\ln(S_{max}/S)}{\sigma^2}$$

6.3.3 Les options asiatiques

Les options asiatiques sont des options dont le gain dépend de la moyenne, généralement arithmétique, des prix de l'actif sous-jacent pendant la durée de l'option. Le payoff d'un Call asiatique s'écrit $\max(0 ; S_{moy} - K)$ et celui d'un Put asiatique s'écrit $\max(0 ; K - S_{moy})$, avec S_{moy} le prix moyen de l'actif sous-jacent. Ces options sont moins chers que les options vanilles et répondent mieux que ces dernières à un certain nombre de besoins des trésoriers d'entreprise.

L'utilisation de ce type d'option dans le cas des matières premières peut être justifiée par le fait que de nombreux indices sont donnés sous forme de moyennes arithmétiques des prix, et ce, pour empêcher les fluctuations momentanément sauvages d'avoir des répercussions sur les transactions liées aux grandes quantités ou volumes échangés.

6.3.3.1 Les problèmes liés à la valorisation :

Plaçons nous dans la configuration de Black-Scholes. La dynamique des prix est donnée par la formule suivante :

$$\frac{dS_t}{S_t} = (r - c)dt + \sigma dW_t$$

Nous savons que, depuis la date 0, les valeurs de S en des dates futures (t_1, t_2, \dots, t_n) peuvent être obtenues en intégrant l'équation précédente :

$$S(t_i) = S(0) \exp \left(\left(r - c - \frac{\sigma^2}{2} \right) t_i + \sigma W(t_i) \right) \quad (6.15)$$

Par conséquent, la moyenne S_{moy} sur la période n , est définie par :

$$S_{moy} = \frac{S(t_1) + S(t_2) + \dots + S(t_n)}{n}$$

Il n'existe aucune formule analytique exacte pour le calcul des options asiatiques définies sur la base de moyenne arithmétique. Il est important de se rappeler que c'est la simple distribution de

$S(t)$ dans le cadre de Black-Scholes (à savoir une distribution log-normale) qui est responsable de la simplicité de la valorisation des options européennes. La situation est très différente ici, puisqu'une somme (ou moyenne) de variables log-normales n'est pas log-normale. Pour cela, il convient de recourir à la simulation de Monte Carlo.

6.3.3.2 La méthode Monte Carlo :

La méthode de Monte Carlo est l'une des méthodes les plus populaires utilisées aujourd'hui par les praticiens pour calculer le prix des options asiatiques. En effet, il suffirait de produire N simulations indépendantes de la valeur terminale $S(T)$ d'un Call européen pour obtenir le prix de l'option. Dans ce cas, nous aurons besoin de n trajectoires des prix du pétrole au cours de la période $[0, T]$. Ces n trajectoires mèneront à une moyenne simulée a_1 et à son tour à un payoff simulé p_1 de l'option asiatique. La partition (t_1, t_2, \dots, t_n) doit être très fine pour qu'elle puisse intégrer toutes les dates incluses dans le calcul de la moyenne. Nous aurons donc :

$$\hat{S}(t_i) = S(0) \exp \left(\left(r - y - \frac{\sigma^2}{2} \right) t_i + \sigma W(t_i) \right)$$

Pour avoir une construction consistante de la trajectoire, nous avons :

$$\hat{S}(t_2) = S(t_1) \exp \left(\left(r - y - \frac{\sigma^2}{2} \right) (t_2 - t_1) + \sigma W(t_2 - t_1) \right)$$

et ainsi de suite jusqu'à l'obtention de n simulations du prix. A ce stade, nous calculons la moyenne simulée a_1 :

$$a_1 = \frac{S(t_1) + S(t_2) + \dots + S(t_n)}{n}$$

et un payoff simulé :

$$p_1 = \max(0, a_1 - K)$$

Nous répétons cette procédure N fois et nous obtenons une approximation du prix d'un Call asiatique à la date 0 :

$$C_{Asiatique} \approx e^{-rT} \frac{p_1 + p_2 + \dots + p_N}{N}$$

Et selon la parité Put-Call, nous obtenons la valeur du put :

$$P_{Asiatique} \approx C_{Asiatique} + Ke^{-rT} - Se^{-cT}$$

6.3.4 Application :

Nous présentons ci-dessous les différents pricers relatifs aux options exotiques :

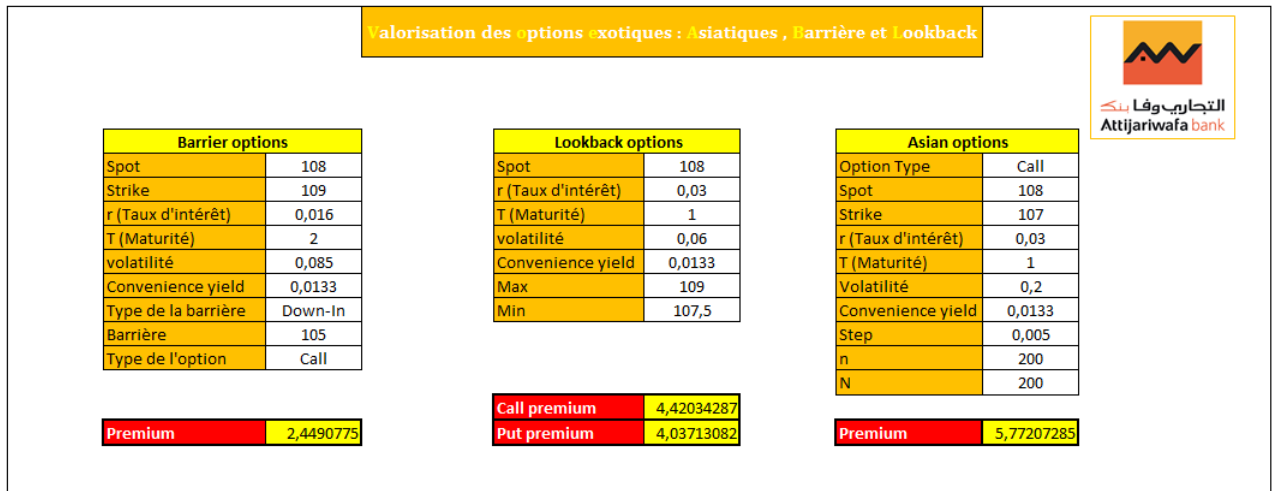


FIGURE 6.4 – Pricer des options exotiques

Conclusion générale

Tout au long de ce projet, palliant entre théorie et pratique, nous avons essayé de mettre l'accent sur les concepts clés essentiels à la compréhension et à la modélisation des matières premières, plus particulièrement à la modélisation du prix du pétrole et à la couverture des risques de fluctuation liés à ce dernier.

Cette étude a permis de dresser un panorama aussi complet que possible des modèles liés aux valeurs énergétiques, et a permis en particulier, d'adopter un modèle adéquat pour la valorisation d'un contrat à terme sur pétrole, qui n'est autre que le modèle de Schwartz à deux facteurs.

Les modèles de structure par terme étudiés, sont soit ceux retenant un mouvement brownien géométrique pour le prix au comptant, soit ceux inspirés du modèle de Schwartz, dont le principe est de supposer que le prix au comptant revient à long terme à sa valeur moyenne. Ces derniers reproduisent les propriétés essentielles des prix du pétrole hormis celle relative au phénomène de la mémoire longue de la volatilité.

Dans cet état d'esprit, et en s'inspirant du modèle de *Heston*, nous avons jugé judicieux de proposer un modèle à volatilité stochastique dirigé par un mouvement brownien fractionnaire, qui permettrait de prendre en compte toutes les spécificités du marché du pétrole et garantirait ainsi une valorisation en juste valeur des contrats futures sur pétrole.

Une partie de ce projet a mis l'accent sur les nouveaux instruments financiers de couverture des matières premières énergétiques, à savoir les swaps et les options (vanilles et exotiques). Ces produits dérivés constituent pour ces matières premières, en particulier pour le pétrole, un dispositif permettant la couverture contre la fluctuation des prix de cette commodité.

Certes, les marchés de matières premières sont entachés d'imperfections, mais constituent un domaine actif de la recherche dans les plus prestigieux laboratoires de finance quantitative...

Bibliographie

- [1] Yassine EL QALLI , *Finance Stochastique : Valorisation et Couverture*. INSEA 2013.
- [2] E.S. SCHWARTZ, *The Stochastic Behavior of Commodity Prices : Implications for Valuation and Hedging*. The Journal of Finance, January 1997.
- [3] Delphine LAUTIER, *La Structure par terme des prix des commodités : Analyse théoriques et Applications aux marché pétrolier*. Janvier 2000.
- [4] Zaizhi WANG, *Produits dérivés des matières premières : Modélisation et Évaluation*. Décembre 2011.
- [5] John HULL, *Options, Futures & other Derivatives*. Pearson Education, Sixth Edition.
- [6] Paul WILMOT, *Quantitative Finance*. Second Edition, Wiley 2007.
- [7] R. PORTAIT et P. PONCET *Finance de marché*. Coll. "Daloz gestion", Third Edition, 2011.
- [8] I. LOTFI et H.CHHAIBA, « *Contrôle et gestion des risques marchés énergie de l'Office National d'Electricité* » Rapport de Projet de Fin d'études, Institut National de Statistique et d'Économie Appliquée, Rabat, 2011.
- [9] L. MARGUERITTE et J.B. NESSI, « *Modélisation des Marchés de Matière Premières* » Rapport de Projet de Fin d'études, Ecole Nationale de Statistique et de l'Administration Économique , ParisTech, France, 2009.
- [10] Tim BOLLERSLEV, Hans Ole MIKKELSEN, « *Modeling and pricing long memory in stock market volatility* » Journal of Econometrics 73 (1996) 151-184.
- [11] Michel BEINE, Sébastien LAURENT, « *La persistance des chocs de volatilité sur le marché des changes s'est-elle modifiée depuis le début des années quatre-vingts ?* ».
- [12] Zhuanxin DINE, Clive W.J. GRANGER, « *Modeling volatility persistence of speculative returns : A new approach* » Journal of Econometrics 73 (1996) 185-215.
- [13] Dean FANTAZZINI, « *Fractionally Integrated Models for Volatility : A Review - Empirical Appendix : Some Examples with R interfaced with the Ox package G@RCH* ».
- [14] Richard T. BAILLIE, Tim BOLLERSLEV, Hans Ole MIKKELSEN, « *Fractionally integrated generalized autoregressive conditional heteroskedasticity* » Journal of Econometrics 74 (1996) 3-30.
- [15] Elizabeth HOWARD, « *La volatilité selon les modèles Garch* ».
- [16] Alexey KOZHEMYAK, « *Modélisation de séries financières à l'aide de processus invariants d'échelle. Application à la prédiction du risque* » Thèse pour l'obtention du titre de Docteur de l'École POLYTECHNIQUE, 7-décembre-2009.
- [17] Charlotte LESPAGNOL, Jérôme TEILETCHE, « *La dynamique de la volatilité à très haute fréquence des taux longs euro* » Septembre-2004.
- [18] Turhan KORKMAZ, Emrah İsmail ÇEVİK, Nesrin ÖZATAC, « *Testing for Long Memory in ISE Using ARFIMA-FIGARCH Model and Structural Break Test* » International Research Journal of Finance and Economics ISSN 1450-2887 Issue 26 (2009).

Annexe A

Rappel Statistique

Tests de normalité

Test de Kolmogorov-Smirnov

En statistique, le test de Kolmogorov-Smirnov est un test d'hypothèse utilisé pour déterminer si un échantillon suit bien une loi donnée connue par sa fonction de répartition continue, ou bien si deux échantillons suivent la même loi. Ce test repose sur les propriétés des fonctions de répartition empirique : si (x_1, \dots, x_n) est un échantillon de n variables aléatoires indépendantes à valeurs réelles, alors la fonction de répartition empirique de cet échantillon est définie par :

$$n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \delta_{x_i \leq x} = \begin{cases} 1 & \text{si } x_i \leq x \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

La fonction de répartition empirique est un processus qui prend ses valeurs dans l'espace des fonctions croissantes comprises entre 0 et 1. Grâce à ses propriétés, on a la convergence suivante :

$$\mathbb{P}[\sup_x |F_n(x) - F(x)| > \frac{c}{\sqrt{n}}] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \alpha(c) = 2 \sum_{r=1}^{\infty} (-1)^{r-1} \exp(-2r^2 c^2)$$

pour toute constante $c > 0$. Le terme $\alpha(c)$ vaut 0.05 pour $c = 1,36$. Remarquons que la limite à droite ne dépend pas de F . Il est ainsi facile de proposer un test d'hypothèse pour décider si un échantillon provient bien d'une loi donnée, ou si deux échantillons ont la même loi, lorsque leur fonction de répartition sont continues.

Test de Shapiro-Wilk

Le test de Shapiro-Wilk teste l'hypothèse nulle selon laquelle un échantillon x_1, \dots, x_n est issu d'une population normalement distribuée.

La statistique de test est :

$$W = \frac{(\sum_{i=1}^n a_i x_i)^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \tilde{x})^2}$$

où

– la constante a_i est donnée par

$$(a_1, \dots, a_n) = \frac{m^T V^{-1}}{(m^T V^{-1} V^{-1} m)^{1/2}}$$

Tel que :

$$m = (m_1, \dots, m_n)^T$$

avec m_1, \dots, m_n sont les espérances des statistiques d'ordre d'un échantillon de variables indépendantes et identiquement distribuée suivant une loi normale, et V est la matrice de variance-covariance de ces statistiques d'ordre. Ainsi, on rejette l'hypothèse nulle si W est trop petit.

Test d'Anderson-Darling

Le test de Anderson-Darling est une troisième alternative pour tester l'adéquation d'un échantillon à une distribution spécifique. Cette alternative donne plus de poids aux queues de distribution que pour le test de Kolmogorov-Smirnov.

Nous calculons la statistique $A^2 = -N - S$ où $S = \sum_{i=1}^N \frac{2i-1}{N} [\ln F(Y_i) + \ln(1 - F(Y_{N+1-i}))]$.

F est la fonction de répartition de la distribution spécifiée et les Y_i sont ordonnés. Afin de conclure au rejet ou non de l'hypothèse nulle nous comparons la valeur de la statistique aux tables disponibles.

Interprétation de la p-value

Il est alors possible de contrôler α , l'erreur de première espèce :

- Si $p - value < \alpha$: On rejette H_0 .
- Si $p - value > \alpha$: On accepte H_0 .

La p-value est le niveau significatif le plus bas où l'hypothèse nulle peut-être rejetée ainsi donc si $p - value > \alpha$ (niveau du test, souvent égale à 5 %), alors on ne rejette pas l'hypothèse nulle.

Tests de racines unitaire (tests de Dickey-Fuller et Dickey-Fuller augmenté)

La pratique des tests de racine unitaire repose sur la modélisation d'une série par un processus AR(p) :

$$y_t = \sum_{i=1}^p \alpha_i y_{t-i} + \epsilon_t$$

Le cas le plus simple est celui d'une marche aléatoire :

$$y_t = \rho y_{t-1} + \epsilon_t$$

Quand $\rho < 1$, le processus est stationnaire, explosif si $\rho > 1$ et intégré dans le cas $\rho = \pm 1$.

Il est essentiel de déterminer a priori si les séries temporelles présentent une racine unitaire. Pour ce faire, divers tests existent. Le test de Dickey-Fuller a pour hypothèses $H_0 = 1$ et $H_1 < 1$. Sous l'hypothèse H_0 , on peut réécrire $\Delta y_t = y_t - y_{t-1} = \epsilon_t$, et donc en régressant Δy_t sur y_{t-1} dans $\Delta y_t = d_t + \alpha y_{t-1} + \epsilon_t$, on doit trouver un estimateur α proche de zéro. d_t contient les termes déterministes :

- soit zéro
- soit une constante
- soit une tendance linéaire

Soit :

$$\begin{cases} 0 \\ a \\ a + b_t \end{cases}$$

Cependant, le test de Student associé ne suit pas une distribution habituelle. Il faut donc se reporter aux tables de Fuller, mais les valeurs dépendent des composantes de d_t . Le test de Dickey-Fuller : c'est le cas le plus simple de marche aléatoire avec ou sans tendance déterministe. Le test de Dickey-Fuller augmenté (souvent noté ADF) permet de prendre en compte l'autocorrélation possible de la série différenciée via une correction utilisant les valeurs retardées, sur la base du test :

$$\Delta y_t = d_t + \alpha y_{t-1} + \sum_{i=1}^p \Delta y_{t-i} + \epsilon_t$$

Annexe B

Rappels de calcul stochastique

Processus stochastique

Un processus stochastique X_t est une suite de variables aléatoires. Nous interprétons t comme une date et appelons X_t l'état du processus au temps t . Si t est défini par un ensemble dénombrable, le processus stochastique sera à temps discret sinon il sera à temps continu. Nous définissons la trajectoire comme étant la réalisation de X_t .

Processus de Wiener

L'un des processus stochastiques les plus importants est le processus de Wiener (couramment appelé mouvement brownien). Celui-ci est défini comme un processus stochastique en temps continu vérifiant les propriétés suivantes :

- 1 $W_0 = 0$,
- 2 $W_t \sim N(0, t)$ pour tout $t \geq 0$,
- 3 Tous les incréments non recouvrants sont indépendants $\forall 0 \leq t_1 < t_2 \leq t_3 < t_4$,
- 4 $W_{t_2} - W_{t_1}$ est indépendant de $W_{t_4} - W_{t_3}$
- 5 La trajectoire de W_t est une fonction continue de t .

Intégrale d'Itô

Supposons que la variable aléatoire $\sigma(X_t, t)$ est non-anticipative, dans le sens où elle est indépendante du futur, et non explosive i.e. $\mathbb{E}[\int_0^T \sigma(X_t, t)^2 dt] < \infty$, alors l'intégrale d'Itô,

$$\int_0^T \sigma(X_t, t) dW_t,$$

est définie par

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_0^{n-1} \sigma(x_{\tau_k}, \tau_k) (W_{\tau_{k+1}} - W_{\tau_k})$$

Où $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T, \tau_k \in [\tau_k, \tau_{k+1}]$ et $\delta = \max_k \{t_{k+1} - t_k\}$. il y a convergence en probabilité.

Processus d'Itô et équation différentielle stochastique :

Un processus d'Itô X_t est régi par une équation différentielle stochastique (EDS) de la forme suivante :

$$dX_t = a(X_t, t)dt + b(X_t, t)dW_t$$

L'intégration de cette équation donne :

$$X_t = X_{t_0} + \int_{t_0}^t a(X_s, s)ds + \int_{t_0}^t b(X_s, s)dW_s$$

Où W_t est un processus de Wiener et $\int_{t_0}^t b(X_s, s)dW_s$ est une intégrale d'Itô. Le terme $a(X_t, t)$ est un terme de tendance (on emploie souvent le terme anglais drift) et $b(X_t, t)$ un terme de diffusion ou de volatilité.

- Lemme d'Itô :

Le lemme d'Itô est un outil fondamental pour l'étude des processus stochastiques. Il faut comprendre la formule d'Itô comme une nouvelle formule de Taylor adaptée aux processus stochastiques. Soit $V(X, t)$ une fonction suffisamment régulière, alors :

$$dV_t = \left(\frac{\partial V}{\partial t} + a(X_t, t) \frac{\partial V}{\partial X} + \frac{1}{2} b^2(X_t, t) \frac{\partial^2 V}{\partial X^2} \right) dt + b(X_t, t) \frac{\partial V}{\partial X} dW_t$$

Quelques EDS spécifiques :

Passons en revue les dynamiques couramment utilisées dans la modélisation stochastique.

- Processus de Wiener généralisé :

L'EDS la plus simple correspond au cas où les termes de tendance et de diffusion sont indépendants de l'information reçue au cours du temps :

$$dS_t = \mu dt + \sigma dW_t$$

Où W_t est un mouvement brownien, μ et σ deux constantes. Ce modèle n'est pas utilisé en pratique pour modéliser directement des actifs car elle peut générer des valeurs négatives de S_t .

- Le mouvement brownien géométrique :

Cette dynamique a d'abord été proposée par Samuelson puis exploitée par Black, Scholes et Merton. Elle est la plus répandue pour la modélisation d'actifs financiers. Sa dynamique est la suivante :

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t$$

Où W_t est un mouvement brownien, μ et σ deux constantes.

En définissant $X_t = \ln(S_t)$, le lemme d'Itô donne :

$$dX_t = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) dt + \sigma dW_t$$

Ceci implique que $X_t \sim N(X_0 + (\mu - \frac{\sigma^2}{2})t, \sigma^2 t)$
 S_t suit une loi log-normale capturant la positivité d'un actif financier.

– **Le processus racine carré :**

Un modèle proche du précédent est la dynamique racine carré :

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma \sqrt{S_t} dW_t$$

Où W_t est un mouvement brownien, μ et σ deux constantes. Dans cette dynamique, la variance croît proportionnellement à S_t et non $\sqrt{S_t}$.

– **Les processus de retour à la moyenne :**

Dans un marché de matières premières, les prix fluctuent autour de la tendance. Les modèles présentés dans ce paragraphe capturent cet effet de retour à la moyenne. Le processus d'Itô décrivant cette dynamique s'écrit sous la forme :

$$dS_t = \alpha(L - S_t)dt + \sigma S_t dW_t$$

Où α mesure la vitesse de retour à la moyenne vers le niveau de long terme L . σ est le terme de diffusion qui gouverne l'amplitude du bruit. Ces trois termes peuvent être constants, dépendants du temps ou aléatoires, ce qui offre une grande variété de modèles. Ci-dessous, on donne les dynamiques les plus utilisées :

– **Le processus d'Ornstein-Uhlenbeck**

$$dS_t = \alpha(L - S_t)dt + \sigma S_t dW_t$$

– **Le processus de Cox-Ingersoll-Ross**

$$dS_t = \alpha(L - S_t)dt + \sigma \sqrt{S_t} dW_t$$

Annexe C

Représentations État-Mesure et Filtre de Kalman

La vraisemblance du modèle espace-états s'obtient à partir de la densité des observations y_0, y_1, \dots, y_t . La densité à la date t se décompose en un produit de densités conditionnelles. En supposant la normalité pour les erreurs et les variables inobservables, le logarithme de la fonction de vraisemblance de l'innovation v_t s'exprime par :

$$\text{Log}L = -\frac{NM}{2} \log 2\pi - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^M \log(\det(\Sigma_t)) - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^M v_t' \Sigma_t^{-1} v_t \quad (\text{C.1})$$

où Σ_t symbolise la matrice des covariances de l'innovation v_t et $\det \Sigma_t$ son déterminant.

Représentation État-Mesure :

L'approche État-Mesure est vu comme une formulation où la variable observée est une fonction linéaire de variables d'état à laquelle on rajoute une perturbation de moyenne nulle et de variance constante. Les variables d'état suivent à leur tour une équation aux différences d'ordre p dont les paramètres sont inconnus. Le profil temporel des variables d'états ainsi que les paramètres qui les lient sont inférés à partir des observations disponibles.

L'espace État-Mesure s'applique donc à une série temporelle multivariée de variables observables, dans notre cas des prix à terme de différentes maturités, reliée à un vecteur de variables d'état non observables, soit, toujours dans notre cas, un prix au comptant et un *convinience yield*, via une équation de mesure qui est obtenue à partir de l'équation (3.13) pour les prix à terme.

Posons $\hat{y}_{t|t-1}$ un vecteur $(n \times 1)$ des prix futures observés à la date t et $\tilde{\alpha}_{t/t-1}$ un vecteur d'état (2×1) du prix au comptant et du *convinience yield* au temps t . La représentation Espace-État de la dynamique de y est donnée par les équations linéaires suivantes :

Équation de mesure :

$$y_{t|t-1} = Z_t \tilde{\alpha}_{t/t-1} + d_t + \epsilon_t \quad (\text{C.2})$$

où Z_t et d_t sont des fonctions déterministes dépendant de θ et t ;
Et $\epsilon_t \sim N(0, H_t)$.

Équation de transition :

$$\alpha_{t|t-1} = T_t \tilde{\alpha}_{t-1} + C_t + \eta_t \quad (\text{C.3})$$

où : T_t et C_t sont des fonctions déterministes dépendant de θ et t ;
Et $\eta_t \sim N(0, Q_t)$.

En utilisant les expressions de $A(\cdot)$ et $B(\cdot)$ définies plus haut, qui dépendent d'un vecteur θ de paramètres inconnus, les composantes de la représentation Espace-État sont :

$$\begin{aligned} \alpha_{t+\Delta t|t-1} &= \begin{pmatrix} X_{t+\Delta t} \\ c_{t+\Delta t} \end{pmatrix} \\ T_t &= \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{\kappa}(e^{\kappa\Delta t}-1) \\ 0 & e^{-\kappa\Delta t} \end{pmatrix} \\ C_t &= \begin{pmatrix} (\mu - \frac{1}{2}\sigma_s^2 - \alpha)\Delta t + \frac{\alpha}{\kappa}(1 - e^{-\kappa\Delta t}) \\ \alpha(1 - e^{-\kappa\Delta t}) \end{pmatrix} \\ QQ' &= \begin{pmatrix} \sigma_X^2(\Delta t) & \sigma_{Xc}(\Delta t) \\ \sigma_{Xc}(\Delta t) & \sigma_c^2(\Delta t) \end{pmatrix} \\ y_{t|t-1} &= \begin{pmatrix} \log F_t(1) \\ \vdots \\ \log F_t(n) \end{pmatrix} \\ d_t &= \begin{pmatrix} A(m_t(1)) \\ \vdots \\ A(m_t(n)) \end{pmatrix} \\ Z_t &= \begin{pmatrix} 1 & B(m_t(1)) \\ \vdots & \vdots \\ 1 & B(m_t(1)) \end{pmatrix} \\ HH' &= \begin{pmatrix} h_{11}^2 & & \\ & \ddots & \\ & & h_{nn}^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

où :

$$-X_t = \log S_t$$

$$-\Delta t = t_{k+} - t_k$$

$-m_t(i)$ correspond au temps de maturité relatif au $i^{\text{ème}}$ Futures $F_t(i)$.

Filtre de Kalman :

Le filtre de Kalman est une procédure récursive permettant de déterminer l'estimateur optimal d'un vecteur d'état au temps t à partir de l'information disponible à ce même temps t . Le filtre assure la mise à jour de l'estimé du vecteur d'état à chaque fois qu'une nouvelle information devient disponible. Il permet également d'obtenir, à partir du maximum de vraisemblance, l'estimation des paramètres inconnus d'un modèle en décomposant conditionnellement l'erreur de prévision par rapport à l'ensemble de l'information disponible.

Les phases du filtrage :

Phase de prédiction : On note $\tilde{\alpha}_{t-1}$ l'estimateur de α_{t-1} , basé sur l'observation de y_{t-1} , et on note P_{t-1} , la matrice de covariance des erreurs d'estimation :

$$P_{t-1} = \mathbb{E}[(\alpha_{t-1} - \tilde{\alpha}_{t-1})(\alpha_{t-1} - \tilde{\alpha}_{t-1})']$$

On calcule $\tilde{\alpha}_{t|t-1}$ et $P_{t|t-1}$ par les formules suivantes :

$$\begin{cases} \tilde{\alpha}_{t|t-1} = T_t \tilde{\alpha}_{t-1} + C_t \\ P_{t|t-1} = T_t P_{t-1} T_t' + Q_t \end{cases} \quad (\text{C.4})$$

Phase d'innovation : On note $\hat{y}_{t|t-1}$, l'espérance de y à l'instant $t-1$. On calcule $\hat{y}_{t|t-1}$, v_t et Σ_t par les formules suivantes :

$$\begin{cases} \hat{y}_{t|t-1} = Z_t \tilde{\alpha}_{t|t-1} + d_t \\ v_t = y_t - \hat{y}_{t|t-1} \\ \Sigma_t = Z_t P_{t|t-1} Z_t' + H_t \end{cases} \quad (\text{C.5})$$

Phase de mise à jour : On calcule $\tilde{\alpha}_t$ et P_t par les formules suivantes :

$$\begin{cases} \tilde{\alpha}_t = \tilde{\alpha}_{t|t-1} + P_{t|t-1} Z_t' \Sigma_t^{-1} v_t \\ P_t = (I - P_{t|t-1} Z_t' \Sigma_t^{-1} Z_t) P_{t|t-1} \end{cases} \quad (\text{C.6})$$

Le processus d'estimation commence donc par l'introduction dans le filtre de *Kalman* des paramètres initiaux du modèle de prix à terme afin de calculer le logarithme de la fonction de vraisemblance. C'est alors qu'entre en jeu la procédure d'optimisation qui va modifier de façon itérative les paramètres initiaux du modèle de prix à terme jusqu'à l'atteinte du maximum du logarithme de la fonction de vraisemblance.

Annexe D

Problème d'interpolation

Interpolation par splines cubiques :

L'interpolation renvoie à une large classe de modèles qui permet de rassembler et joindre ensembles les valeurs d'une fonction donnée, de sorte à obtenir un graphe continu. Partant d'un ensemble de points $\{x_i, a_i\}_{i=1}^n$, la fonction d'interpolation en splines cubiques est une série de polynômes définie telle que :

$$S_j(x) = a_j + b_j(x - x_j) + c_j(x - x_j)^2 + d_j(x - x_j)^3$$

Chaque $S_j(x)$ est défini pour les valeurs de x appartenant au sous intervalle $[x_j, x_{j+1}]$, et $n - 1$ est le nombre de sous intervalles. On obtient les coefficients b_j , c_j et d_j en résolvant un système linéaire d'équation que l'on peut représenter par $Ax = b$, et A une matrice diagonale de dimension trois.

On obtient des splines cubiques naturelles lorsque les conditions à la limite sont $S''(x_1) = S''(x_n) = 0$. Afin d'obtenir des splines cubiques naturelles, on définit :

$$h_j = x_{j+1} - x_j \quad \text{pour } j = 1, \dots, n-1$$

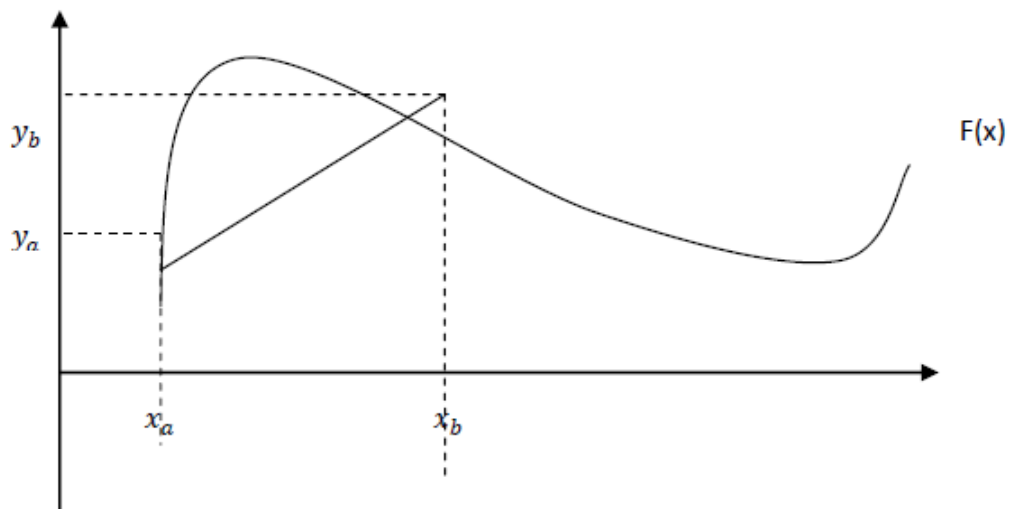
En revanche, pour tout $j = 2, \dots, n-1$, considérons $\alpha_j = \frac{3}{h_j}(a_{j+1} - a_j) - \frac{3}{h_{j-1}}(a_j - a_{j-1})$

Ensuite, on initialise $l_1 = l_n = 1$, $\mu_1 = \mu_n = 0$ et $z_1 = z_n = 0$.

Pour $j = 2, \dots, n-1$, nous définissons : $l_j = 2(x_{j+1} - x_{j-1}) - h_{j-1} \times \mu_{j-1}$ avec $\mu_j = \frac{h_j}{l_j}$ et $z_j = \frac{(\alpha_j - h_{j-1} \times z_{j-1})}{l_j}$

Finalement, par induction arrière, on obtient les coefficients suivants :

$$\begin{aligned} c_j &= z_j - \mu_j c_{j+1} \\ b_j &= \frac{a_{j+1} - a_j}{h_j} - \frac{(h_j(c_{j+1} + 2c_j))}{3} \\ d_j &= \frac{c_{j+1} - c_j}{3h_j} \quad \text{avec } j = n-1, n-2, \dots, 1 \end{aligned}$$



Interpolation linéaire

$$f(x) = y_a + (x - x_a) \frac{y_b - y_a}{x_b - x_a}$$

Annexe E

Simulation de Monte Carlo

Définition :

La méthode de simulation de Monte Carlo est une technique numérique pour solutionner des problèmes mathématiques en simulant des variables aléatoires. Il n'y a pas un consensus absolu sur une définition précise de ce qu'est une technique de type Monte Carlo, mais la description la plus habituelle consiste à dire que les méthodes de ce type se caractérisent par l'utilisation du hasard pour résoudre des problèmes centrés sur un calcul. Elles sont en général applicables à des problèmes de type numérique, ou bien à des problèmes de nature probabiliste.

On a recours à une simulation de Monte-Carlo lorsque le problème est :

- trop complexe pour qu'une résolution par voie purement mathématique soit envisageable.
- trop volumineux (en particulier, contient un trop grand nombre de variables) pour que les techniques d'approximation numérique puissent conduire à un résultat précis dans un temps acceptable.

Méthodologie d'exécution :

La Simulation de Monte Carlo est une méthode habituelle pour l'évaluation d'un modèle déterministe utilisant un ensemble de nombres aléatoires comme intrants. Cette méthode est souvent utilisée lorsque le modèle est complexe, non linéaire, ou implique quelques paramètres incertains. Elle peut généralement faire intervenir plus de 10000 évaluations du modèle, tâche qui dans le passé était seulement pratiquée en utilisant des super calculateurs.

Les étapes à suivre sont les suivantes :

1. Créer un modèle paramétrique $y = f(x_1, x_2, \dots, x_q)$;
2. Générer un ensemble de données aléatoires $x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{iq}$;
3. Évaluer le modèle y ;
4. Répéter l'expérience n fois.

Annexe F

Sortie R

```
Augmented DF test
                                ADF test
t-test statistic:                -2.46300e+01
p-value:                        1.12904e-54
Max lag of the diff. dependent variable:  0.00000e+00

Call:
dynlm(formula = formula(model), start = obs.1, end = obs.T)

Residuals:
    Min       1Q   Median       3Q      Max
-4.2301 -0.6976  0.0603  0.8182  6.3621

Coefficients:
              Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept) -1.371e-02  1.128e-01  -0.122   0.903
trnd         1.788e-05  3.460e-04   0.052   0.959
L(y, 1)     -1.042e+00  4.230e-02 -24.630 <2e-16 ***
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 1.327 on 558 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.5209,    Adjusted R-squared:  0.5192
```

FIGURE F.1 – Test CADF-Trend-

```
Augmented DF test
                                ADF test
t-test statistic:                -2.465216e+01
p-value:                        2.523036e-37
Max lag of the diff. dependent variable:  0.000000e+00

Call:
dynlm(formula = formula(model), start = obs.1, end = obs.T)

Residuals:
    Min       1Q   Median       3Q      Max
-4.2335 -0.7010  0.0624  0.8132  6.3594

Coefficients:
              Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept) -0.008656   0.055986  -0.155   0.877
L(y, 1)     -1.041728   0.042257 -24.652 <2e-16 ***
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 1.326 on 559 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.5209,    Adjusted R-squared:  0.52
```

FIGURE F.2 – Test CADF-Drift-

```

Augmented DF test
                                ADF test
t-test statistic:                -2.467319e+01
p-value:                        1.004561e-39
Max lag of the diff. dependent variable: 0.000000e+00

Call:
dynlm(formula = formula(model), start = obs.1, end = obs.T)

Residuals:
    Min       1Q   Median       3Q      Max
-4.2421 -0.7096  0.0537  0.8046  6.3508

Coefficients:
            Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
L(y, 1) -1.04169      0.04222  -24.67  <2e-16 ***
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 1.325 on 560 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.5209,    Adjusted R-squared:  0.52

```

FIGURE F.3 – Test CADF-None-

```

Call:
lm(formula = log(a) ~ log(b))

Residuals:
    Min       1Q   Median       3Q      Max
-0.070919 -0.007008 -0.000440  0.006496  0.038294

Coefficients:
            Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept) 0.110918   0.042885   2.586  0.00995 **
log(b)      0.936409   0.009126 106.994 < 2e-16 ***
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 0.01219 on 561 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.9533,    Adjusted R-squared:  0.9532
F-statistic: 1.145e+04 on 1 and 561 DF, p-value: < 2.2e-16

```

FIGURE F.4 – Sorties R de l'estimation des paramètres de l'équation

```

-----
Fitted Schwartz97 two-factor model:

SDE (P-dynamics)
d S_t = S_t * (mu - delta_t) * dt + S_t * sigmaS * dW_1
d delta_t = kappa * (alpha - delta_t) * dt + sigmaE * dW_2
E(dW_1 * dW_2) = rho * dt

SDE (Q-dynamics)
d S_t = S_t * (r - delta_t) * dt + S_t * sigmaS * dW*_1
d delta_t = kappa * (alphaT - delta_t) * dt + sigmaE * dW*_2
alphaT = alpha - lambda/kappa

Parameters
s0 : 108.08
delta0: 0
mu : 0.387957383200116
sigmaS: 0.25389971801106
kappa : 2.02876814699886
alpha : 0.0551725825859524
sigmaE: 0.402282820607221
rho : 0.936396025138878
r : 0.03
lambda: 0
alphaT: 0.0551725825859524
-----

Optimization information
Converged: TRUE
Fitted parameters: mu, sigmaS, kappa, alpha, sigmaE, rho, meas.sd1; (Number: 7)
log-Likelihood: -143115179
Nbr. of iterations: 7001
-----

```

FIGURE F.5 – Sorties R de l'estimation des paramètres non observables du modèle de Schwartz à deux facteurs

```

*****
** SPECIFICATIONS **
*****
Dependent variable : X
Mean Equation : ARMA (0, 0) model.
No regressor in the conditional mean
Variance Equation : GARCH (1, 1) model.
No regressor in the conditional variance
Normal distribution.

Strong convergence using numerical derivatives
Log-likelihood = 1696.34
Please wait : Computing the Std Errors ...

Maximum Likelihood Estimation (Std.Errors based on Second derivatives)
Coefficient Std.Error t-value t-prob
Cst(V) x 10^4 0.074161 0.050079 1.481 0.1392
ARCH(Alpha) 0.062980 0.024522 2.568 0.0105
GARCH(Beta1) 0.887789 0.052130 17.03 0.0000

No. Observations : 563 No. Parameters : 3
Mean (Y) : -0.00007 Variance (Y) : 0.00015
Skewness (Y) : -0.02314 Kurtosis (Y) : 5.16395
Log Likelihood : 1696.341 Alpha[1]+Beta[1]: 0.95057

```

FIGURE F.6 – Garch(1,1). BB Gaussien

```

*****
** SPECIFICATIONS **
*****
Dependent variable : X
Mean Equation : ARMA (0, 0) model.
No regressor in the conditional mean
Variance Equation : GARCH (1, 1) model.
No regressor in the conditional variance
Student distribution, with 6.37024 degrees of freedom.

Strong convergence using numerical derivatives
Log-likelihood = 1706.85
Please wait : Computing the Std Errors ...

Maximum Likelihood Estimation (Std.Errors based on Second derivatives)
      Coefficient  Std.Error  t-value  t-prob
Cst(V) x 10^4      0.071334   0.053305   1.338   0.1814
ARCH(Alpha1)      0.064862   0.028801   2.252   0.0247
GARCH(Beta1)      0.889620   0.054717   16.26   0.0000
Student(DF)       6.370245    1.7183    3.707   0.0002

No. Observations :      563  No. Parameters :      4
Mean (Y)          : -0.00007  Variance (Y)       : 0.00015
Skewness (Y)     : -0.02314  Kurtosis (Y)      : 5.16395
Log Likelihood   : 1706.855  Alpha[1]+Beta[1] : 0.95448

```

FIGURE F.7 – Garch(1,1). BB Student

```

*****
** SPECIFICATIONS **
*****
Dependent variable : X
Mean Equation : ARMA (0, 0) model.
No regressor in the conditional mean
Variance Equation : FIGARCH (1, d, 1) model estimated with ENM's method (Truncation order : 100).
No regressor in the conditional variance
Normal distribution.

Strong convergence using numerical derivatives
Log-likelihood = 1697.52
Please wait : Computing the Std Errors ...

Maximum Likelihood Estimation (Std.Errors based on Second derivatives)
      Coefficient  Std.Error  t-value  t-prob
Cat(Y) x 10^4    -0.159491  0.099670   1.600  0.1101
d-Figarch        0.234510  0.11898   1.972  0.0491
ARCH(Phi1)       0.614756  0.16300   3.771  0.0002
GARCH(Beta1)     0.710335  0.13622   5.215  0.0000

No. Observations :      563  No. Parameters :      4
Mean (Y)           : -0.00007  Variance (Y)       :  0.00015
Skewness (Y)      : -0.02314  Kurtosis (Y)       :  5.16395
Log Likelihood    : 1697.516

The sample mean of squared residuals was used to start recursion.
The positivity constraint for the FIGARCH (1,d,1) is
not observed (0.475625<0.614756<0.0544057<0.0988015 not valid).
=> See Bollerslev and Mikkelsen (1996) for more details.

Estimated Parameters Vector :
0.159491; 0.234510; 0.614756; 0.710335

*****
** FORECASTS **
*****
Number of Forecasts: 15

Horizon      Mean      Variance
  1           0  0.0001096
  2           0  0.0001145
  3           0  0.0001164
  4           0  0.0001176
  5           0  0.0001182
  6           0  0.0001188
  7           0  0.0001193
  8           0  0.0001198
  9           0  0.0001203
 10           0  0.0001209
 11           0  0.0001214
 12           0  0.0001219
 13           0  0.000122
 14           0  0.0001224
 15           0  0.0001229

-----
Elapsed Time : 0.125 seconds (or 0.00208333 minutes).

*****
** TESTS **
*****

TESTS :
-----

Q-Statistics on Standardized Residuals
Q( 10) =  7.96112  [0.6326350]
Q( 15) = 11.8414  [0.6909894]
Q( 20) = 15.3598  [0.7554626]
HO : No serial correlation ==> Accept HO when prob. is High [Q < Chisq(Lag)]
-----

```

FIGURE F.8 – FIGARCH(1,d,1)

```

Q-Statistics on Squared Standardized Residuals
--> P-values adjusted by 2 degree(s) of freedom
Q( 10) =  8.76670  [0.3623574]
Q( 15) = 12.6077  [0.4785480]
Q( 20) = 18.3046  [0.4357614]
H0 : No serial correlation ==> Accept H0 when prob. is High [Q < Chisq(lag)]
-----

Diagnostic test based on the news impact curve (EGARCH vs. GARCH)
                                Test  P-value
Sign Bias t-Test                1.00620  0.31432
Negative Size Bias t-Test       0.32310  0.74662
Positive Size Bias t-Test       0.94674  0.34377
Joint Test for the Three Effects  7.40964  0.05993
-----
ARCH 1-2 test:   F(2,556) = 0.85373 [0.4264]
ARCH 1-5 test:   F(5,550) = 0.80714 [0.5448]
ARCH 1-10 test:  F(10,540) = 0.82651 [0.6032]
-----

Joint Statistic of the Nyblom test of stability: 0.593832

Individual Nyblom Statistics:
Est(V) x 10^4    0.18033
d-Figarch        0.35582
ARCH(Phi1)       0.31020
GARCH(Beta1)     0.08997

Rem: Asymptotic 1% critical value for individual statistics = 0.75.
      Asymptotic 5% critical value for individual statistics = 0.47.
-----

Adjusted Pearson Chi-square Goodness-of-fit test

# Cells(g)  Statistic    P-Value(g-1)    P-Value(g-k-1)
    40      49.3623      0.123626        0.054453
    50      72.7904      0.015303        0.005433
    60      63.3233      0.326456        0.206217
Rem.: k = 4 = # estimated parameters
-----

Residual-Based Diagnostic for Conditional Heteroskedasticity of Tse (2002)
RBD(10) =  9.47595  [0.4676065]
RBD(15) = 14.3729  [0.4974567]
RBD(20) = 23.6290  [0.2592471]
-----
P-values in brackets

Variance-Covariance Matrix using Inverse of computed Hessian:

    0.0099341  -0.0088994  -0.0050534  -0.011662
   -0.0088994    0.014144  -0.0067380  0.0061708
   -0.0050534  -0.0067380  0.026570  0.015618
   -0.011662   0.0061708  0.015618  0.018556

Correlation matrix
    1.0000  -0.75077  -0.31105  -0.85899
   -0.75077   1.0000  -0.34758  0.38091
   -0.31105  -0.34758   1.0000  0.70340
   -0.85899  0.38091  0.70340   1.0000

```

FIGURE F.9 – FIGARCH(1,d,1)-Suite-