المندوبية السامية للتخطيط
HAUT-COMMISSARIAT AU PLAN

ROYAUME DU MAROC

--*-*-*

HAUT COMMISSARIAT AU PLAN

--*-*-*-*-*-*

INSTITUT NATIONAL
DE STATISTIQUE ET D'ECONOMIE APPLIQUEE

INSEA

INSEA

Projet de Fin d'Etudes

*****

Pricing et hedging des swaptions: La mise en place d'un pricer des swaptions de taux d'intérêt

Préparé par : Mlle Kouaiba Ghizlane
M. Malloum Goni Ali

Sous la direction de : ***M. Ahmed Doghmi*** **(INSEA)**
M. Yassine Roki Chaoui **(Attijariwafa bank)**

Soutenu publiquement comme exigence partielle en vue de l'obtention du

Diplôme d'Ingénieur d'Etat

Option : Actuariat-finance

Devant le jury composé de :

M. Ahmed Doghmi (INSEA)
M. Mohamed Ouzineb (INSEA)
M. Yassine Roki Chaoui (Attijariwafa bank)

Juin 2014 **N° 4**

Résumé

L'objectif de notre projet de fin d'étude, effectué au sein du middle office de la salle des marchés d'Attijariwafa Bank [1], consiste à élaborer un pricer des swaptions sous vba excel. La mise en place de ce pricer au sein de la salle des marchés ne vient pas au hasard. En effet, l'implémentation d'un tel pricer répond au besoin de la banque. A cet effet, une banque doit avoir un pricer interne pour chaque produit traité par son catalogue commercial, afin que la banque soit indépendante vis-à-vis du pricer externe.

Dans un premier lieu, nous définissons les swaps de taux et ses différents types afin de mieux comprendre leur fonctionnement. L'utilité derrière cette définition réside dans le fait qu'on doit valoriser les swaps pour qu'on puisse valoriser par la suite les swaptions. Dans un second lieu, nous avons besoin de savoir comment on peut construire la courbe de taux ZC Libor/Euribor considéré comme un outil de calcul de notre pricer, d'où l'utilité d'interpoler et étudier le comportement de cette courbe à chaque fois qu'on utilise une méthode d'interpolation particulière.

Pour la valorisation des swaptions, on fait recours à deux modèles à savoir : le **modèle de Black** fondé en 1976, qui a pour objectif de valoriser les options sur des taux, ce modèle demeure le plus utilisé sur le marché financier et le **modèle de Hull-White** qui consiste d'abord à valoriser les taux courts, et ensuite pour évaluer les options sur des taux, en tenant compte de l'évolution de la volatilité en fonction du temps, celle-ci ne figure pas dans le modèle de Black.

Notre projet ne vise pas seulement à mettre en place ce pricer. Néanmoins, notre travail met sous lumière les différentes stratégies de couverture que l'investisseur doit adopter pour faire face aux plusieurs risques liés au marché en utilisant les swaptions.

Mots-clés

Black 76, Hull-White, Grecques, Jambe fixe/jambe variable , Zc Libor/ Euribor

1. Annexe I

Dédicace

A ceux qui m'ont soutenu tout au long de ma vie

A ma mère, ma sœur

A mes grands parents

A mes oncles et tantes

A toute ma famille

Je vous souhaite beaucoup de bonheur et de réussite.

Que Dieu vous protège et me permet d'être celui dont vous serai, Inch'Allah, toujours fiers.

A toutes mes amis et tous ceux qui me sont chers ...

Avec tout mon amour et mon affection, je vous souhaite une vie pleine de bonheur, de réussite et que vous puissiez, Inch'Allah, réaliser tout ce dont vous rêvez.

A tous ceux qui m'aiment

Je dédie ce modeste travail

A Oussama

A l'âme de mon très cher père ;

Accepte ce mémoire comme le témoignage de ma profonde gratitude et amour.

A l'âme de ma chère collègue Meriem Azzouzi ;

Tu va rester toujours dans nos mémoires et dans nos souvenirs.

KOUAIBA GHIZLANE

Dédicace

je dédie ce travail

A mes chers parents, ma mère **Mariam Abakar**, je vous remercie de vos efforts que vous m'avez fait depuis ma naissance. Et sans oublié aussi mon défunt père **Malloum Goni Sabi**.

A mon grand frère **Malloum Soultan**, je vous remercie de tous vos conseils et vos soutiens durant toutes mes études.

A ma grande Sœur **Fatimata Malloum Goni**,

A tous les restes de mes frères et sœurs,

A ma défunte amie **Meriam Azzouzi**,

A tous mes chers amis sans distinctement .

ALI MALLOUM GONI

Remerciements

Tout d'abord, Nous tenons à exprimer nos vifs remerciements et notre profonde gratitude à Monsieur **Jawad Oumlil**, Responsable Organisation et Ressources Humaines chez Banque de Marchés et Capitaux Groupe Attijariwafa Bank, pour nous avoir permis d'effectuer notre stage de fin d'études dans des meilleures conditions.

Nous remercions également notre encadrant Monsieur **Yassine Roki Chaoui**, analyste Middle Office de la Banque de Marchés et Capitaux Groupe Attijariwafa Bank, pour l'intérêt qu'il a accordé à notre travail, sa disponibilité constante, sa générosité, ses compétences, ainsi que pour ses conseils et ses encouragements tout au long de notre stage.

Nous tenons à remercier vivement Monsieur **Amine Bouhout**, analyste Middle Office de la Banque de Marchés et Capitaux Groupe Attijariwafa Bank.
Aussi à tous les membres de l'équipe du Middle Office, pour leur sympathie, leur explication et leur soutient moral.

Nous tiendrons à remercier, Monsieur **Ahmed Doghmi**, notre encadrant interne de l'INSEA, pour son encadrement continu, ses explications et ses remarques pertinentes .

Nous exprimons toutes nos gratitudes aux membres du jury qui nous ont honoré en acceptant de juger ce travail, et tous nos professeurs de notre institut.

Enfin, nous remercions vivement tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à la réalisation de ce travail, trouvent ici l'expression de nos sentiments les plus distingués.

KOUAIBA GHIZLANE & ALI MALLOUM GONI

Table des matières

Liste des abréviations

ATM : At The Money

AWB : Attijariwafa Bank

BS : Black-Scholes

CPO : Contingent Premium Option

EONIA : Euro OverNight Index Average

EUR : Euro

EURIBOR : Euro Interbank Bid Rate

FRA : Forward Rate Agreement

LIBOR : London Interbank Bid Rate

MAS : Modified American Swaption

OTC : Over the Counter

TAM : Taux Annuel Monétaire

T4M : Taux Moyen Mensuel du Marché Monétaire

USD : United States Dollar

ZC : Zéro Coupon

Table des figures

Liste des tableaux

Introduction générale

Les marchés dérivés sont des marchés sur les marchés. Dans ce type de marchés , on achète pas directement un produit , mais il y'a des possibilités d'achat ou de vente à terme différé avec des conditions prédéfinies. Donc ils permettent de prendre des positions importantes à l'achat ou à la vente avec une mise de fonds limité. A cet effet, le marché à terme et les marchés optionnels sont des marchés dérivés. Cependant, le marché des dérivés sur taux d'intérêt se positionne parmi les plus vastes et les plus liquides des marchés dérivés.

Étant donné que sur le marché financier, le taux d'intérêt constitue un risque que ce soit pour un prêt ou bien un emprunt, d'où la naissance des produits dérivés sur taux d'intérêt entre autres **CAP**, **FlOOR**, **COLLAR**, **SWAP**, **SWAPTION**... pourront être des moyens adéquats pour la couverture du risque.

Le swap est défini comme un produit dérivé qui permet de faire des échanges des flux de trésorerie futurs entre deux parties. Généralement, c'est l'échange d'un taux variable contre un taux fixe. Ce dernier est considéré comme un instrument de couverture ferme qui génère un risque en cas de mauvaise anticipation d'où le recours à la swaption. Ainsi, une Swaption est une option sur Swap de taux d'intérêt, c'est-à-dire le droit de mettre en place le swap de taux dont les caractéristiques sont fixées d'avance en payant une prime s'il s'agit d'un acheteur .

Dans cette optique, notre projet de fin d'études consistera à mettre en place un outil nécessaire pour déterminer et vérifier la prime de l'acheteur de swaption pour le compte de l'entité **Middle Office** de la salle des marchés d'Attijariwafa Bank, afin de vérifier les positions prises par les Traders du Front Office.

Nous allons premièrement définir les swaps dans ce rapport, ensuite on évoquera des différents types de swaps. En second lieu, on fera une présentation des options d'une manière générale. Puis nous allons aborder les options des swaps appelées swaptions. Qu'est ce qu'une swaption ? quel sont les différents types de valorisations des swaptions utilisés dans ce rapport ? et on verra à la fin, a quel moment doit-on faire appel à la swaption pour la couverture contre le risque de taux ?

Chapitre 1

Les swaps de taux d'intérêt

1.1 Présentation générale des swaps de taux d'intérêt

1.1.1 Définition

Le swap est un produit dérivé qui permet d'échanger des flux de trésorerie futurs entre deux parties selon un montant appelé **le notionnel** et un échéancier déterminé. Généralement, l'échange se fait entre un taux fixe et un taux variable, mais parfois tout autre type d'échange peut être envisagé par exemple le taux variable contre variable .

Le type du Swap le plus utilisé est le swap de taux standard appelé aussi le swap de taux « Vanille ». Dans ce cas, une entreprise s'engage à payer des cash-flows aux intérêts égaux à taux fixe sur un principal donné , durant un certain nombre d'années. Et en retour , elle reçoit le produit des intérêts à taux variable sur le même principal avec la même durée.

On parle du :

- **swap payeur** : On paye le taux fixe et on reçoit le taux variable.
- **swap receveur** : L'opération s'effectue dans le sens contraire, c'est à dire on paye le taux variable et on reçoit le taux fixe.

L'utilisation des swaps de taux d'intérêt est liée à un besoin de couverture, c'est à dire rechercher à compenser une perte potentielle sur un marché par un gain sur un autre marché.

1.1.2 Fonctionnement des swaps

On suppose qu'on a deux entreprises **A** et **B**, chacune détient une dette. **A** détient une dette à taux variable et **B** détient une dette à taux fixe. **A** souhaite de transformer sa dette à taux fixe et **B** à taux variable.
A cet effet, Elles vont essayer de mettre en place un swap pour cette transformation. Donc **A** paiera sur un notionnel donné un taux fixe et doit recevoir un taux variable et Pour **B** l'opération s'effectuera dans le sens contraire. **La figure 1.1** illustre le mécanisme d'échange des flux entre **A** et **B**.

Le taux fixe est déterminé lors de la mise en place du contrat et le taux variable est constaté à chaque période d'intérêt.

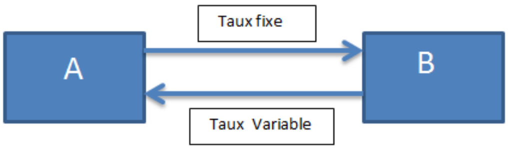


FIGURE 1.1 – Mécanisme du swap de taux standard

En général, pour le taux variable on utilise le taux interbancaire qui peut être **Libor** pour la devise américaine (Dollar) et **Euribor** pour la devise européenne(Euro).

On note que le taux interbancaire (T.I.O) ou ***I.B.O.R*** [1] en anglais ; c'est le taux d'intérêt que les banques offrent pour leurs prêts à des banques de premier rang , sur une place donnée , dans une monnaie et pour une échéance définie.

Ainsi, les taux ***IBOR*** sont des taux interbancaires calculés à *FrancFort* pour l'Euro appelé ***Euribor***. Et à ***Londres*** pour le dollar US,la livre sterling, le franc suisse ...,appelé ***Libor***. Ces taux sont Calculés chaque jour ouvré, ces derniers ont des échéances allant de *1 semaine* à *12 mois* et sont établis avec un décompte des jours exact et sur une base annuelle de *360 jours*. Les échéances publiées sont *1 semaine*, *2 semaines*, *3 semaines*, *1 mois*, *2 mois* jusqu'à *12 mois*.

Ces taux jouent le rôle de taux sans risque par le fait que les grandes banques et les institutions financières placent leurs excédents de trésorerie sur ce marché. Et en plus de cela, les taux d'États considérés souvent comme les taux sans risque, peuvent artificiellement bas, du fait de la réglementation et de la fiscalité qui imposent plus ou moins directement à certaines institutions ou Entreprises de détenir des titres d'État.

En général , A et B ne contractant pas directement comme on a vu à la ***figure 1.1*** . Les deux entreprises vont faire appel à un intermédiaire comme illustre ***la figure 1.2***, qui est généralement une banque.

FIGURE 1.2 – Mécanisme du swap de taux standard avec intermédiaire

1. Interbank Offered Rate

Ainsi , le profit de l'intermédiaire dépendra du défaut des parties prenantes. Il faut noter que l'intermédiaire signe deux contrats séparés : l'un avec A, l'autre avec B, sans que les deux entreprises soient même informées qu'il existe une contrepartie autre que l'intermédiaire si l'une de deux entreprises fait défaut, l'intermédiaire doit faire face à ses engagement vis-à-vis de l'autre.

1.2 Les différents types de swaps

On distingues deux type des swaps à savoir :les swaps Standards , ce sont les plus utilisés et les Swaps Non-Standards.

1.2.1 Les swaps standards

-Swap de taux vanille : c'est un accord d'échange des flux d'intérêt à taux fixe contre des flux d'intérêt à taux variable dans une même devise. Ce type est le plus courant et le plus utilisé. Par la suite, on va se contenter de ce type pour notre étude.

- Swap de devises : c'est un échange d'un principal et d'intérêt dans une devise contre un principal et d'intérêts dans une autre. Chaque devise a son propre principal. Mais, en général les montants sont choisis de sorte qu'ils sont équivalents au début du contrat.

- Swap de base (basis swap) : c'est un swap de taux ou un swap de devises portant sur deux indices de taux différents. Par exemple, l'échange du libor-3 mois contre libor-6 mois. Les **basis swaps** sont aussi appelés **swaps de courbe de taux**.

1.2.2 Les swaps non standards

Généralement, on distingue entre plusieurs types de swap non standard dont on va citer quelques exemples représentatifs.

-Swaps à départ différé (swap Forward) : Ce type de swap démarre à une date t ultérieure par rapport à la date d'initiation $t = 0$ ou le taux fixe est déterminé. Ce taux est fixé en$t = 0$ pour une mise ne place du swap à une date futur e T_0 qui s'interprète comme le taux forward du swap généralement noté $f_0(0)$.

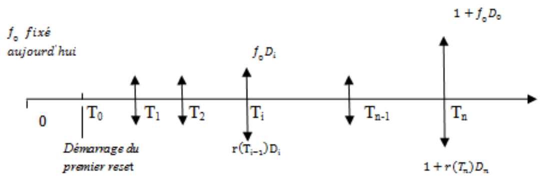


FIGURE 1.3 – Mécanisme du swap à départ différé

$r(T_{i-1})D_i$ est le coupon de la jambe variable.
$f_0 D_i$ est le coupon de la jambe fixe.

-Swap step up ou down : Danc ce type de swaps, le taux fixe n'est pas constant durant la période du swap mais peut augmenter (step up) ou diminuer (step down) pour répondre à un besoin de trésorerie particulier.

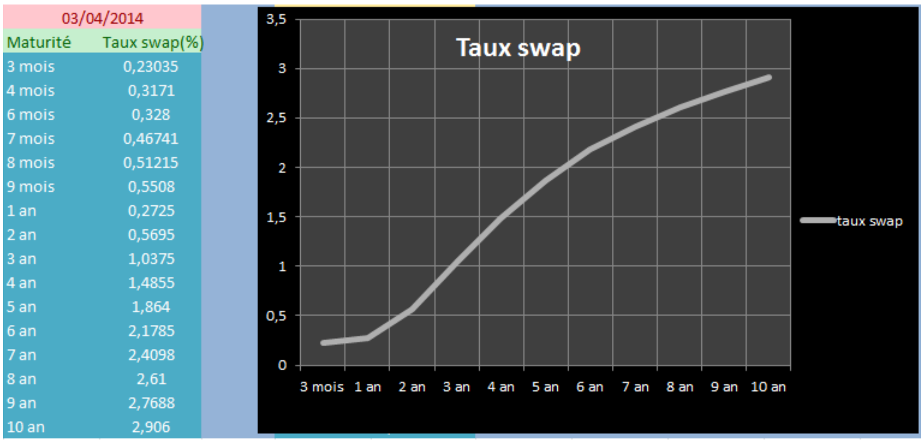
Sur le marché financier, Il y a eu un certain nombre d'émissions obligataires où un coupon a augmenté ou a diminué pour répondre aux exigences particulières d'un groupe d'investisseurs. .

- Swap quantos (swap différentiel) : le swap quanto est une variante du swap de base, et donc d'un swap variable contre variable. La particularité réside dans le fait que les flux payés et reçus sont exprimés dans la même devise, alors que les références de taux sont issues de 2 devises différentes.

1.3 Construction de la courbe des taux zéro-coupon à partir des taux swap

Les taux swap de maturité inférieure à un an sont les taux d'emprunt sur le marché interbancaire c'est à dire **les taux Libor / Euribor**.

Pour de maturité supérieure à un an, on égalise la jambe fixe contre la jambe variable ensuite on déterminera le taux fixe qui sera notre taux swap, ainsi de suite on construira une courbe de taux swap.



03/04/2014	
Maturité	Taux swap(%)
3 mois	0,23035
4 mois	0,3171
6 mois	0,328
7 mois	0,46741
8 mois	0,51215
9 mois	0,5508
1 an	0,2725
2 an	0,5695
3 an	1,0375
4 an	1,4855
5 an	1,864
6 an	2,1785
7 an	2,4098
8 an	2,61
9 an	2,7688
10 an	2,906

FIGURE 1.4 – Taux swap 03/04/2014 USD,Source Bloomberg

On va faire le recours à une courbe de taux particulier :la courbe des taux zéro-coupon qui a pour but de rendre la courbe plus homogène. Le calcul des taux zéro-coupon s'effectue sur le court et long terme avec deux méthodes distinctes.

1.3.1 Calcul sur le court terme

Le calcul du taux zéro-coupon revient à une simple conversion des taux monétaires en base actuarielle à des fins d'homogénéisation car un prêt monétaire est remboursé à l'échéance en même temps que les intérêts et s'apparente donc déjà à un zéro-coupon. Si l'on note Tm le taux de dépôt monétaire et Tzc le taux transformé en base actuarielle (taux zéro-coupon actuariel), alors la valeur du taux zéro-coupon est :

$$Tzc = \left(1 + \frac{Tm * nbrejoursdeplacement}{360}\right)^{\frac{1}{f}} - 1 \tag{1.1}$$

f correspond à la fraction d'année du placement en base Exact/Exact, soit pour un taux de dépôt monétaire de maturité 6 mois, f = 0,5.

1.3.2 Calcul sur le long terme

Pour calculer ces taux zéro-coupon sur le long terme, on procède par itération : ainsi au rang n, nous avons besoin des taux de tous les rangs précédents.
Notons C_i le taux du swap de maturité i années et r_i les taux zéro-coupon associés.
- Le swap de maturité 1 an, n'entraînant pas de versement de flux fixe intermédiaire, coïncide avec le taux zéro-coupon 1 an, donc on a $r_1 = C_1$.
- A partir du taux zéro-coupon 1 an, on crée le taux zéro-coupon 2 ans. On réalise deux opérations : le prêt d'un montant unitaire sur 2 ans et l'emprunt d'un montant $\frac{c_2}{1+c_1}$ au taux r_1 sur un an.

Le bilan des flux de ces opérations est donné par le tableau suivant :
Cette opération crée un instrument synthétique ne détachant pas de coupon intermédiaire. on en

Date	Emptunt	prêt	Total
0	$\dfrac{C_2}{1+C_1}$	-1	$\frac{C_2}{1+C_1} - 1$
1 an	$-C_2$	C_2	0
2 ans	0	$1+C_2$	$1+C_2$

TABLE 1.1 – *Bilan des opérations*

déduit le taux zéro-coupon r_2 en écrivant qu'en l'absence d'opportunité d'arbitrage , la somme actualisée des flux de la colonne « Total » est nulle :

$$\frac{C_2}{1+r_1} - 1 + \frac{1+C_2}{(1+r_2)^2} = 0 \Longrightarrow r_2 = \left(\frac{1+C_2}{1-\frac{C_2}{1+r_1}}\right)^{\frac{1}{2}} - 1 \tag{1.2}$$

On généralise la formule en procédant d'une manière récursive, on obtient la formule suivante :

$$r_n = \left(\frac{1+C_n}{1-C_n\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{(1+r_i)^i}}\right)^{\frac{1}{n}} - 1 \tag{1.3}$$

Ainsi, on obtient la courbe suivante :

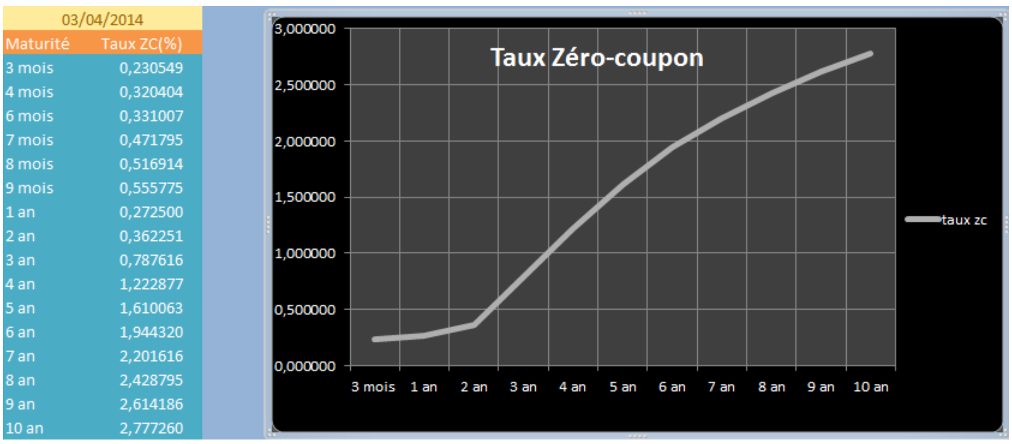

03/04/2014	
Maturité	Taux ZC(%)
3 mois	0,230549
4 mois	0,320404
6 mois	0,331007
7 mois	0,471795
8 mois	0,516914
9 mois	0,555775
1 an	0,272500
2 an	0,362251
3 an	0,787616
4 an	1,222877
5 an	1,610063
6 an	1,944320
7 an	2,201616
8 an	2,428795
9 an	2,614186
10 an	2,777260

FIGURE 1.5 – Taux Zéro-coupon

Donc on utilisera la courbe de type zéro-coupon par la suite pour valoriser Les swaps et aussi les swaptions.

1.4 Interpolation des courbes de taux

l'interpolation nous sert à chercher les points manquants sur la courbe de taux., A cet effet, on va essayer d'élucider les deux méthodes d'interpolation qu'on a utilisé et en plus de les comparer en terme de différences.

1.4.1 Interpolation linéaire

L'interpolation linéaire est la méthode la plus simple pour estimer la valeur prise par une fonction continue entre deux points déterminés.

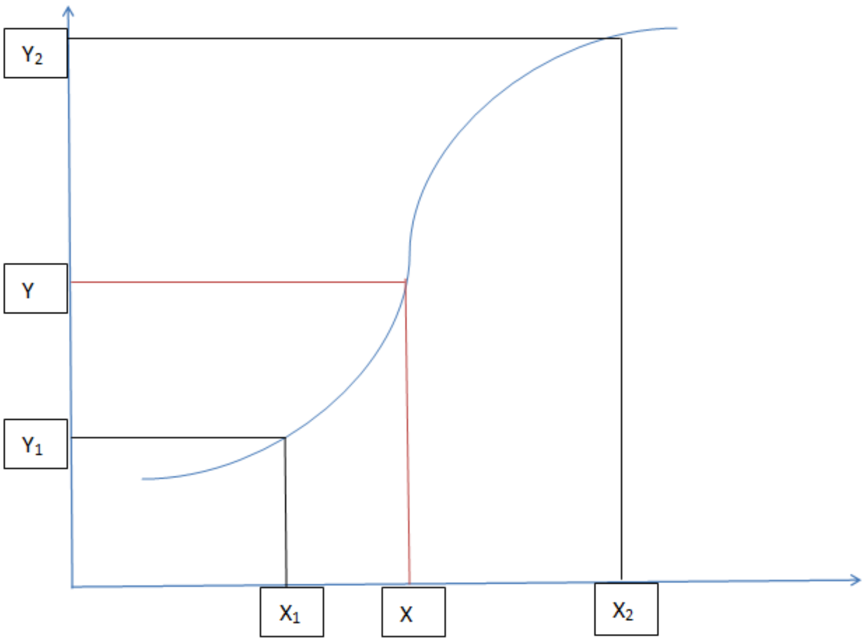


FIGURE 1.6 – L'interpolation linéaire

Sur ce schéma, en connaissant la valeur de l'abscisse x_1 avec son ordonnée correspondante y_1 et aussi x_2 et y_2. Si, on a une valeur x qui se situe entre x_1 et x_2 et on va essayer de chercher son ordonnée correspondante y. la relation est donnée par l'équation suivante :

$$y = y_1 + (x - x_1)\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \tag{1.4}$$

On a le Taux swap USD suivant, on va essayer d'interpoler pour chercher les taux correspondants à des maturités manquantes.

Swap [USD]

Maturity	Price	+/-	Time	Date
1 Yr	0.27	0.00	23:22	2014-04-10
2 Yr	0.50	0.00 ↑	11:39	2014-04-11
3 Yr	0.91	0.01 ↑	11:39	2014-04-11
4 Yr	1.33	0.01 ↑	11:41	2014-04-11
5 Yr	1.69	0.01 ↑	11:40	2014-04-11
6 Yr	1.99	0.01 ↑	11:41	2014-04-11
7 Yr	2.24	0.01 ↑	11:41	2014-04-11
8 Yr	2.45	0.01 ↑	11:41	2014-04-11
9 Yr	2.61	0.01 ↑	11:41	2014-04-11
10 Yr	2.75	0.01 ↑	11:40	2014-04-11
12 Yr	2.97	0.00 ↑	11:41	2014-04-11
15 Yr	3.18	-0.01 ↓	11:41	2014-04-11
20 Yr	3.36	-0.01 ↓	11:41	2014-04-11
25 Yr	3.44	-0.02 ↓	11:40	2014-04-11
30 Yr	3.48	-0.02 ↓	11:40	2014-04-11

FIGURE 1.7 – Taux swap USD du 11 avril 2014,source : www.sebgroup.com

Swap rate(USD)	
anneé	taux
1	0,27%
2	0,50%
3	0,91%
4	1,33%
5	1,69%
6	1,99%
7	2,24%
8	2,45%
9	2,61%
10	2,75%
12	2,97%
15	3,18%
20	3,36%
25	3,44%
30	3,48%

Interpolation Lineaire	
11	2,86%
13	3,04%
16	3,22%
17	3,25%
22	3,39%
26	3,45%
28	3,46%

FIGURE 1.8 – Interpolation linéaire

1.4.2 Interpolation splines cubiques

Dans un grand nombre d'application, il est impératif d'avoir des courbes très régulières passant par un très grand nombre de point f_i. D'où l'utilité de faire l'appel à l'interpolation spline cubiques qui a été développée pour les points de données séquentiels inégalement espacées. L'idée de base est de relier entre deux points d'observations par des fonctions polynomiales de degré 3, et donc il fallait déterminer sur chaque intervalle, les coefficients de la fonction polynomiale correspondante.

Ainsi, le système revient à résoudre l'équation suivante [2] :

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) = a_1 x^3 + b_1 x^2 + c_1 x + d_1 & \text{si} x \in [x_1, x_2] \\ f_2(x) = a_2 x^3 + b_2 x^2 + c_2 x + d_2 & \text{si} x \in [x_2, x_3] \\ f_3(x) = a_3 x^3 + b_3 x^2 + c_3 x + d_3 & \text{si} x \in [x_1, x_2] \\ \vdots & \vdots \\ f_{n-1}(x) = a_{n-1} x^3 + b_{n-1} x^2 + c_{n-1} x + d_{n-1} & \text{si} x \in [x_{n-1}, x_n] \end{cases}$$

Ainsi, en interpolant avec cette méthode on obtient les points suivants :

2. Annexe II

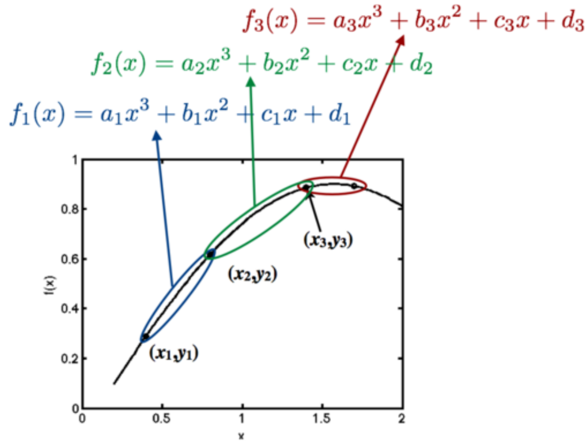


FIGURE 1.9 – Illustration de l'interpolation splines cubiques

Swap rate(USD)	
anneé	taux
1	0,27%
2	0,50%
3	0,91%
4	1,33%
5	1,69%
6	1,99%
7	2,24%
8	2,45%
9	2,61%
10	2,75%
12	2,97%
15	3,18%
20	3,36%
25	3,44%
30	3,48%

Interpolation Cubique	
11	2,87%
13	3,05%
16	3,23%
17	3,27%
22	3,40%
26	3,45%
28	3,47%

FIGURE 1.10 – Illustration de l'interpolation spline cubique

1.4.3 Comparaison entre l'interpolation linéaire et cubique

On a le taux swap du 11/04/2014 :

Swap rate(USD)	
anneé	taux
1	0,27%
2	0,50%
3	0,91%
4	1,33%
5	1,69%
6	1,99%
7	2,24%
8	2,45%
9	2,61%
10	2,75%
12	2,97%
15	3,18%
20	3,36%
25	3,44%
30	3,48%

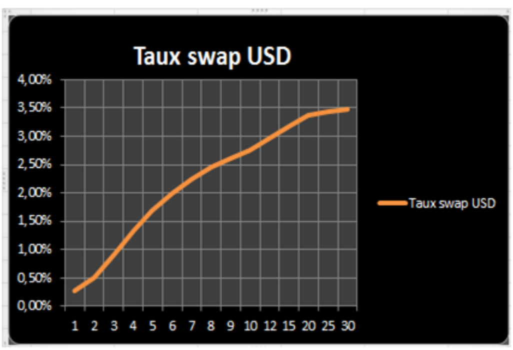


FIGURE 1.11 – Taux swap 11/04/2014

On va essayer d'interpoler cette courbe du taux swap en utilisant les deux méthodes d'interpolation à savoir l'interpolation linéaire et cubique pour voir la différence entre ces deux interpolations, on aura la courbe suivante :

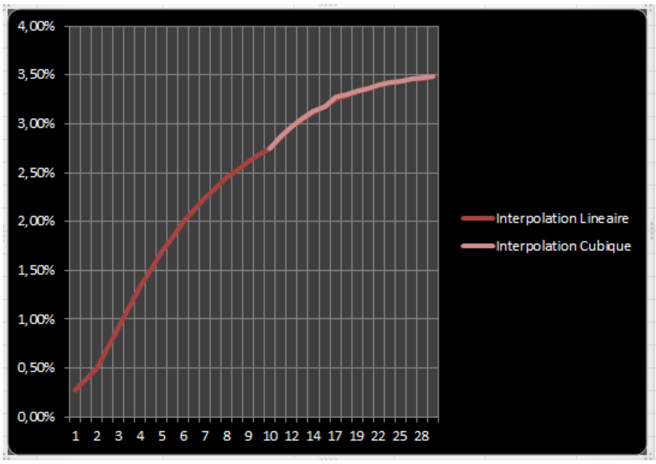


FIGURE 1.12 – Interpolation linéaire et cubique

On remarque clairement que les deux interpolations sont à peu près la même chose. Toutefois ,les études ont montré que pour un certain nombre des courbes, l'interpolation linéaire est meilleure par rapport à l'interpolation cubique pour des taux inférieurs à un an tandis que pour les taux supérieurs à un an l'interpolation cubique remporte par rapport à l'interpolation linéaire.

1.5 La valorisation des swaps par la méthode obligataire actuarielle

Cette méthode consiste à considérer le swap comme un portefeuille d'obligations c'est à dire, une combinaison de deux obligations, l'une sur la partie fixe et l'autre sur la partie variable. Puisqu'on peut calculer la valeur de la jambe fixe et celle de la jambe variable, on peut définir la valeur du swap comme suit :

-Dans le cas d'un swap Payeur du fixe

$$V = B_{var} - B_{fixe}$$

-Dans le cas d'un swap Receveur du fixe

$$V = B_{fixe} - B_{var}$$

Avec

B_{fixe} **:** La valeur de l'obligation à taux fixe associé au swap

B_{var} **:** La valeur de l'obligation à taux variable associé au swap

B_{fixe} est défini par :

$$B_{fixe} = \sum_{i=1}^{n} k e^{-r_i t_i} + L e^{-r_n t_n}$$

Avec

t_i **:** la durée jusqu'au i-ème paiement (contenant n paiements au total)

L : le principal du swap

r_i **:** le taux ZC LIBOR pour la maturité t_i

k **:** le paiement de la jambe fixe à chaque date

En contrepartie, l'obligation à taux variable est considérée comme une obligation avec une maturité moins longue. Juste avant le paiement, le prix de cette obligation est par la suite vaut $L + K^*$, avec K^* est le paiement effectué sur la jambe variable du swap. Si on considère t_1 le délai jusqu'au prochain paiement on aura donc :

$$B_{var} = (L + k^*) e^{-r_1 t_1}$$

Il faut noter le montant notionnel **L** nous sert comme un outil de calcul car le principe de swap consiste à échanger les taux mais non le montant notionnel.

Pour bien cerner ce type de valorisation, on va essayer de le mettre en pratique par l'exemple suivant.

Application : Une entreprise X qui paie Libor 6 mois et reçoit un taux fixe 2.5% semestriellement sur un swap de 1 000 000 $. La courbe ZC Libor est obtenue sur le marché financier. Celle-ci est obtenue à partir des données de **Bloomberg.**

Date d'opération : 03/04/2014
Date de valeur : 31/12/2014
Date d'échéance : 31/12/2018

Le mécanisme d'échange des flux variables contre des flux fixes est élucidée par le schéma suivant . La valeur du swap donnée par notre Pricer est : 58 402.74$

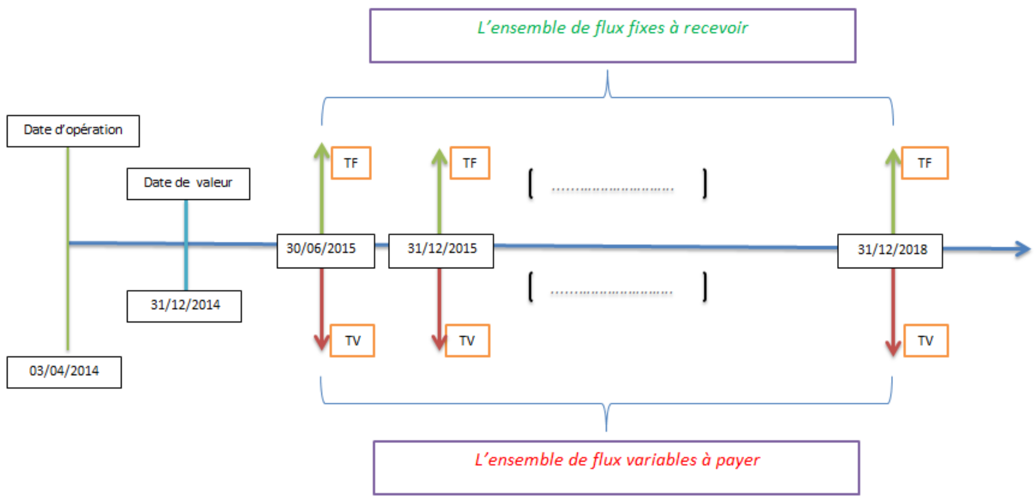


FIGURE 1.13 – Échange de flux variables contre fixes

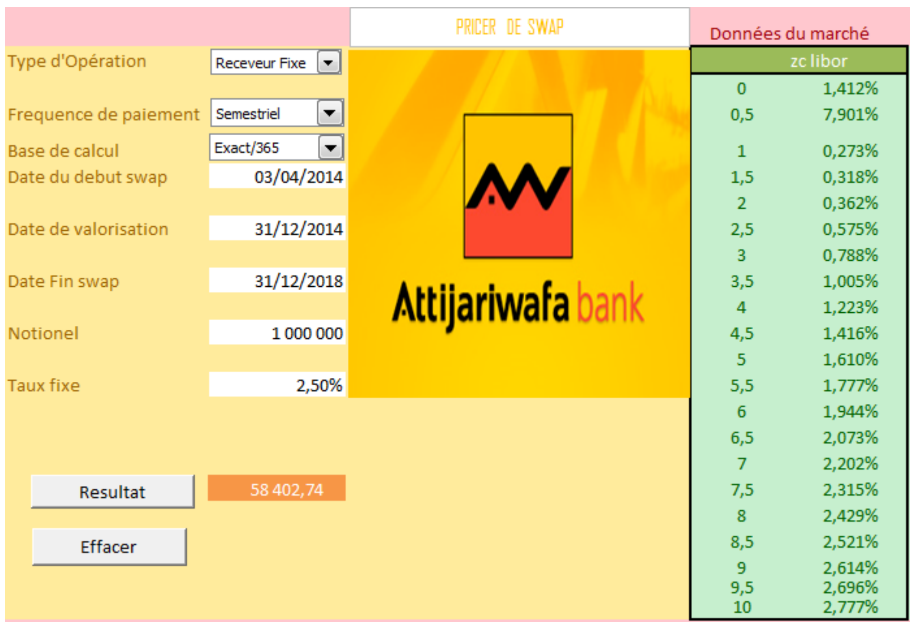


FIGURE 1.14 – Pricer d'un Swap

1.6 Les limites des swaps sur le plan financier

Dans le cas d'un swap de couverture(d'une dette ou d'un placement) :

- le passage d'un taux variable à un taux fixe génère un risque de perte d'opportunité, (correspondant au risque de baisse des taux dans le cas d'une dette, de hausse dans le cas d'un placement) ;
- le passage d'un taux fixe à un taux variable génère un risque financier (correspondant à un scénario de hausse des taux dans le cas d'une dette, à un scénario de baisse dans le cas d'un placement).

Dans une optique de réévaluation en **Mark to Market**, un swap génère un risque financier : en cas de mouvement défavorable des taux, l'entreprise doit enregistrer une perte immédiate.

Dans le cas d'un swap spéculatif :

l'opérateur s'expose à un risque illimité en cas de mouvement défavorable des taux.Un endettement initialement cher le restera même une fois le swap conclu, car celui-ci ne peut agir sur le passé.

Chapitre 2

Présentation des options

Après avoir défini le concept des swaps dans le chapitre précédent, cette fois-ci on s'intéressera à une présentation générale des options afin de mieux cerner le concept des swaptions qui ne sont autre que les options des swaps.

2.1 Définition et concept

La théorie des options, qui s'est construite à partir des années 70 suite aux travaux de **Black**, **Scholes** et **Merton**, constitue une avancée majeure de la théorie économique et financière. Ces options sont échangées sur les marchés gré-à-gré (OTC) et sur les marchés organisés.

On note que :

- Un *marché organisé*, ou bourse, est une plateforme permettant aux acheteurs et aux vendeurs de produits financiers d'effectuer des transactions, d'exécuter des ordres de bourses, via un intermédiaire qui transmet l'ordre à un membre officiel de la bourse. La chambre de compensation est un pilier central dans la bourse, elle intervient comme contrepartie entre acheteurs et vendeurs en garantissant la bonne fin des opérations. Il ne s'agit ni plus ni moins que de l'acheteur de tous les vendeurs et du vendeur de tous les acheteurs.
- Un *marché de gré à gré* ou *Other-The-Counter (OTC)* est un marché sur lequel les transactions se font directement entre un acheteur et un vendeur. La principale différence avec la bourse est donc qu'il n'existe pas de chambre de compensation permettant d'éviter le risque de contrepartie. Les raisons de l'existence de cette place sont multiples. Notons déjà q'une partie des sociétés qui y sont présentes le sont car elles sont trop petites, ne remplissent pas les critères pour être cotées sur les marchés organisés. De plus, comme les contrats sont établis directement entre les deux parties, cela permet d'acheter (ou vendre) un produit correspondant bien plus à ses besoins, comme par exemple pour couvrir un risque de change. Par construction, ce marché est moins transparent que la bourse.

Une option est un produit dérivé donnant à son détenteur le droit , et *non l'obligation* d'acheter ou de vendre une certaine quantité d'un actif financier appelé actif sous-jacent , à une date future convenue et à un prix fixé d'avance.
Ainsi ,une option d'achat est appelée *call* et *put* pour une option de vente .

Les éléments caractéristiques d'une option sont les suivants :

-La nature de l'option : ***Call*** s'il s'agit d'une option d'achat et ***put*** pour une option de vente.

-L'actif sous-jacent noté $(S_t)_{t\in[0,T]}$, sur lequel porte l'option : dans la pratique, il peut s'agir d'une action, d'une obligation, d'une devise etc.

-Le montant , c'est-à-dire la quantité d'actif sous-jacent à acheter ou à vendre.

-L'échéance ou date d'expiration notée T, qui limite la durée de vie de l'option ; si l'option peut-être exercée à n'importe quel instant précédant l'échéance, on parle d'option **américaine**, si l'option ne peut être qu'à l'échéance, on parle d'option **européenne**.

-Le prix d'exercice , appelé aussi **Strike** noté K : c'est un prix fixé d'avance auquel se fait la transaction en cas d'exercice de l'option.

L'option a un prix appelé la prime. Lorsque l'option est cotée sur un marché organisé, la prime est donnée par le marché. En l'absence de cotation , le problème du calcul de la prime se pose. Et, même pour une option cotée, il peut être intéressant de disposer d'une formule pour évaluer l'option ,ou bien d'un modèle permettant de détecter d'éventuelles anomalies de marché.

2.2 Les différents types des options

On distingue deux types d'option à savoir les **options vanilles** et les **options exotiques**. Par la suite de notre projet, on s'intéressa uniquement aux options vanilles de type européen.

2.2.1 Les options vanilles

Les options classiques correspondent aux options standards les plus simples. Elles sont les plus utilisées et liquides, c'est-à-dire les plus vendues. En pratique, les options vanilles sont réparties entre options *européennes* et *américaines*.
On rappelle que :

- Une option est dite *européenne* lorsque le contrat ne peut être exécuté qu'à la maturité T.
- Une option est dite *américaine* lorsque le contrat peut être exécuté à toute date entre 0 et T.

Les options européennes sont plus faciles à analyser et, dans un certain nombre de cas, les propriétés des options américaines sont déduites de celles des options européennes.

Le mécanisme du fonctionnement des options vanilles de type européen est illustré pour le call et le put par les schémas suivants :

Pour un Call de type européen

Le pay-off qui est aussi le flux de trésorerie à l'instant T est égale : $C = max(S_T - K, 0) = (S_T - K)_+$

Celui-ci est illustré par le schéma suivant :

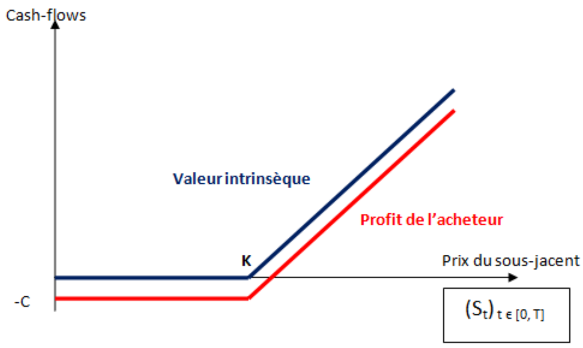


FIGURE 2.1 – l'évolution du pay-off et profit d'un call

- Une option d'achat est dite

*** dans la monnaie(In The Money)** si $S_T > K$

*** à la monnaie(At The Money)** si $S_T = K$

*** en dehors de la monnaie(Out The Money)** si $S_T < K$

celle-ci s'explique par le fait que :

- **Si** $S_T > K$, le détenteur de l'option a donc intérêt à l'exercer car, en effet, il peut acheter un actif (une action,une devise ...) au prix K et la revendre immédiatement.**Le bénéfice est** $S_T - K$.
- **Si** $S_T = K$, on fait ce que l'on veut. **Le bénéfice est 0**.
- **Si** $S_T < K$, le détenteur de l'option a intérêt à ne pas l'exercer. **Le bénéfice est 0**.

D'où le payoff d'un call est égal : $C = max(S_T - K, 0) = (S_T - K)_+$

Pour un Put de type européen

Le payoff est égale : $p = max(K - S_T, 0) = (K - S_T)_+$
De la même manière, son payoff est illustré par le schéma suivant :

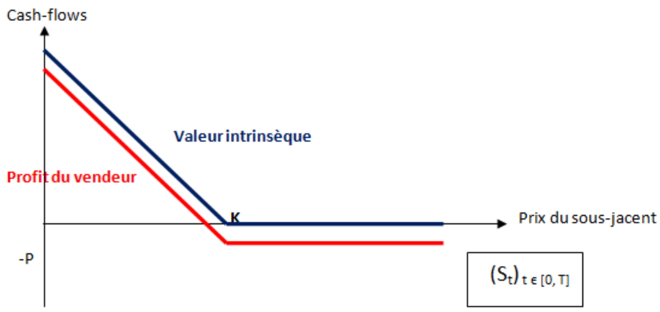


FIGURE 2.2 – l'évolution du pay-off et profit d'un put

2.2.2 Les options exotiques

Une option exotique est un produit dérivé qui présente des caractéristiques plus complexes que les options classiques, nommées options vanilles. Elle s'échange en général sur le marché de gré à gré.

Voici quelques-unes de ces options :

- **Les options asiatiques :** Une option asiatique est une option à moyenne sur le prix.C'est une option de type européen donnant droit à son détenteur de recevoir à l'échéance de l'option la différence positive entre le prix d'exercice de cette option et la moyenne arithmétique (ou éventuellement géométrique) des cours du sous-jacent.
  Ainsi,

$$\text{le payoff du call} : V(t) = (Moy(S_{t,t\in[0,T]}) - K)_+$$

$$\text{Et celui du put} : V(t) = (K - Moy(S_{t,t\in[0,T]}))_+$$

-**Les options lookback :** Ces options dépendant du maximum ou du minimum des cours. Par exemple pour un **call lookback** donne à son détenteur le droit d'acheter à une date future fixée une quantité d'actif financier à son **prix minimum** atteint tout au long de la période.

$$\textit{payoff du call} : (S_T - S_{min})_+$$

-**Les options à barrière :** Ce sont des options qui peuvent être activées ou désactivées c'est-à-dire on peut les créer ou les annuler par le passage du sous-jacent au dessus ou en dessous d'une valeur limite appelée **la barrière.** Ceci permet de réduire le risque du vendeur et donc le prix pour l'acheteur puisqu'elle ne produit ses effets que dans un nombre plus limité de situation.

2.3 La valorisation des options

L'achat ou la vente d'une option se fait à la Prime, ce prix, est donné par le marché lorsqu'on est dans un marché structuré. Il est plus difficile de le définir lorsque nous nous situons sur un marché de gré à gré. Notamment, plusieurs modèles ont été fournis pour modéliser les options financières sous des conditions liées au marché financier et le modèle le plus connu est celui de **Black Scholes**. Le but principal de ces modèles, est de limiter l'incertain, et se prémunir d'un risque financier.

Voici un bref aperçu sur quelques modèles de la valorisation et on donnera plus des détails lorsqu'on abordera des modèles de la valorisation des swaptions.

2.3.1 Modèle de Cox-Ross-Rubinstein

Le modèle binomial a été proposé pour la première fois par Cox, Ross et Rubinstein en 1979. Ce modèle discret est destiné pour étudier la dynamique du sous-jacent. Autrement dit, l'évaluation d'une option dans ce cadre procède par les trois étapes suivantes :

- La recherche d'une stratégie de duplication.
- L'égalisation de la prime de l'option avec le cout de mise en place du portefeuille dupliquant
- l'interprétation de la prime comme l'espérance risque-neutre des flux actualisés.

2.3.2 Modèle de Black Scholes

Ce modèle est utilisé pour le temps continu. Il suppose que, dans un court intervalle de temps, les variations en pourcentage par exemple des cours des actions sont distribuées selon une loi normale.

La formule de black et Scholes permettant de calculer, à la date zéro, la valeur d'un call ou d'un put européen sur une action qui ne verse pas de dividende est la suivante :

$$C = S_o N(d_1) - Ke^{-rT} N(d_2)$$

$$P = Ke^{-rT} N(-d_2) - S_0 N(d_1)$$

Avec

$$d_1 = \frac{ln(\frac{S_0}{K}) + (r + \frac{\sigma^2}{2})}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$d_2 = \frac{ln(\frac{S_0}{K}) + (r - \frac{\sigma^2}{2})}{\sigma\sqrt{T}}$$

Notons :

C : Call

P : Put

S_0 **:** L'actif sous-jacent

K : Prix d'exercice ou Strike

r : Taux sans risque

T : Maturité de l'option

σ **:** Volatilité de l'option

N(d) : la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite

On donnera plus des détails pour ce modèle lorsqu'on abordera la valorisation des swaptions par le modèle de Black.

2.4 La sensibilité des options et la volatilité implicite

2.4.1 La sensibilité des options

Pour voir la sensibilité des options , il suffit de calculer ce qu'on appelle « **les grecques** ». Chaque **grecque** mesure une dimension différente du risque d'une position en options, et l'objectif du trader est de gérer les **grecques** de telle manière que les risques pris soient acceptables. Donc les **grecques** jouent le rôle de couverture généralement appelé « **Hedging** ».

⋇ **Le delta**(δ)

Le paramètre delta est défini comme la dérivée partielle première de la prime par rapport au sous-jacent S et par conséquent, le delta mesure la sensibilité de la valeur de l'option suite à la variation du cours du sous-jacent. Dans un modèle de Black scholes, on aura les deux formules suivantes :

$$\delta_c = \frac{\partial C}{\partial S} = N(d_1) \Rightarrow 0 < \delta_c < 1$$

$$\delta_p = \frac{\partial P}{\partial S} = -1 + N(d_1) \Rightarrow 0 < \delta_p < -1$$

avec C la valeur du Call et P la valeur du Put.

Prenons par exemple le cas du call dont son delta vaut **0.4**. Cela signifie que lorsque l'actif sous-jacent varie d'un faible montant, la valeur du call varie de 0.4 fois ce montant. Le graphique suivant illustre la relation entre le call et l'évolution du sous-jacent. Lorsque la valeur du call est au point **B**, la valeur du sous-jacent est au point **A**, et δ_c est la pente de la tangente illustrée dans le graphique suivant :

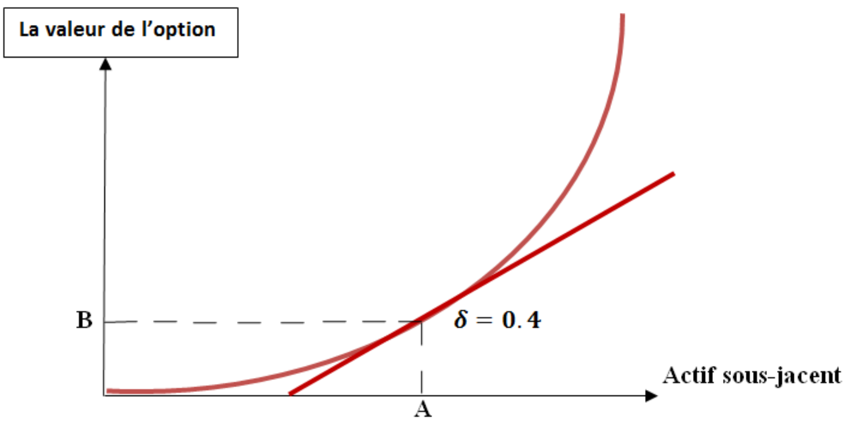


FIGURE 2.3 – L'évolution du delta par rapport au sous-jacent

Et donc la valeur de delta n'est rien autre que la tangente à la courbe représentant le prix de l'option en fonction de cours du sous-jacent.

De même, on peut tracer la courbe du delta du call et du put en fonction du prix du sous-jacent pour un Strike donné, ces courbes sont représentées sur les graphiques suivants :

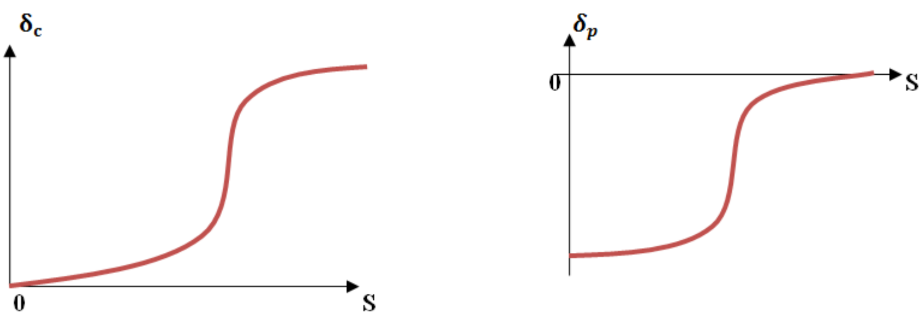


FIGURE 2.4 – L'évolution du delta par rapport au sous-jacent pour un Call et pour Un put

Il est important de retenir quelques points fondamentaux pour ce paramètre de sensibilité :

- Un call a un delta positif compris entre 0 et 1.
- Un put a un delta négatif compris entre 0 et -1.
- Le sous-jacent a un delta de 1, l'actif sans risque a un delta nul.

⁕ **Le gamma(Γ)**

Le paramètre gamma noté Γ est le seul paramètre grec qui ne soit pas une dérivée partielle première de l'option. En effet, le gamma est la seconde dérivée de la valeur de l'option par rapport au cours du sous-jacent. Ou en d'autre terme, la dérivé du delta qui s'interprète comme la sensibilité du delta suite à la variation du cours.
Dans le cadre du modèle de Black Scholes, le gamma est expliqué comme suit :

$$\Gamma_c = \frac{\partial^2 C}{\partial^2 S} = \frac{\partial \delta_c}{\partial S} = \frac{N'(d_1)}{S\sigma\sqrt{(T-t)}}$$

$$\Gamma_p = \frac{\partial^2 P}{\partial^2 S} = \frac{\partial \delta_p}{\partial S} = \frac{N'(d_1)}{S\sigma\sqrt{(T-t)}} = \Gamma_c$$

Avec $N'(z)$ est la dérivée de la fonction de densité gaussienne.

Conformément au graphe suivant, la courbe représentant le gamma en fonction du sous-jacent a généralement une forme en cloche présentant un maximum pour S proche du prix d'exercice.

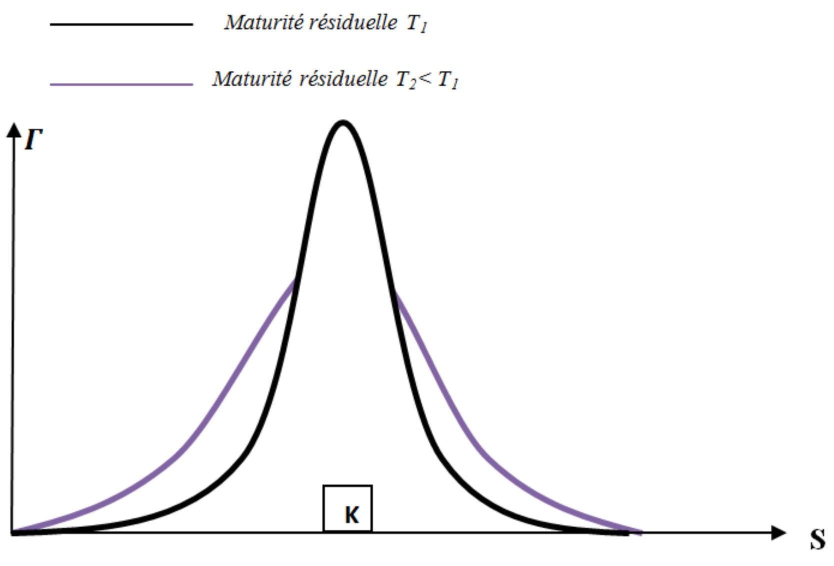


FIGURE 2.5 – L'évolution du Gamma en fonction du sous-jacent

Le gamma d'un portefeuille d'option joue un rôle important et conditionne largement sa gestion. En effet, un portefeuille dont la valeur est une fonction convexe du cours S du sous-jacent aura un gamma positif. Inversement, la valeur négative de gamma représente une fonction concave de S.

⋇ **Le véga(υ)**

Lorsqu'on a utilisé le modèle de Black Scholes , nous avons implicitement supposé que la volatilité de l'actif sous-jacent d'un produit dérivé était constante. En pratique, les volatilités varient au fil du temps. Cela signifie que la valeur d'un produit dérivé est susceptible de changer simplement à cause des variations de la volatilité d'où l'intérêt de faire recours au Véga pour voir ces variations de la volatilité.

En outre, le véga est la dérivée partielle de l'option par rapport à volatilité σ. Donc il représente le taux de variation de la valeur du portefeuille en fonction de la volatilité de l'actif sous-jacent.

En utilisant le modèle de Black Scholes, et sous l'hypothèse de la constance de la volatilité on aura :

$$\upsilon_c = \frac{\partial C}{\partial \sigma} = \sqrt{(T-t)}SN'(d_1)$$

$$\upsilon_p = \frac{\partial P}{\partial \sigma} = \sqrt{(T-t)}SN'(d_1) = \upsilon_c$$

Si la valeur absolue du véga est importante, la valeur du portefeuille est très sensible au moindre changement de la volatilité. Si le véga est faible, en valeur absolue, un changement de la volatilité n'aura qu'un léger impact sur la valeur du portefeuille.

Il est nécessaire de retenir que :

- Le véga du sous-jacent est nul.
- Le véga d'une option standard est positif.
- Le véga d'une option augmente avec sa maturité.

En pratique, la courbe de cette sensibilité prend la forme d'une cloche quand est elle est exprimée en fonction du cours du sous-jacent comme le montre le graphique suivant :

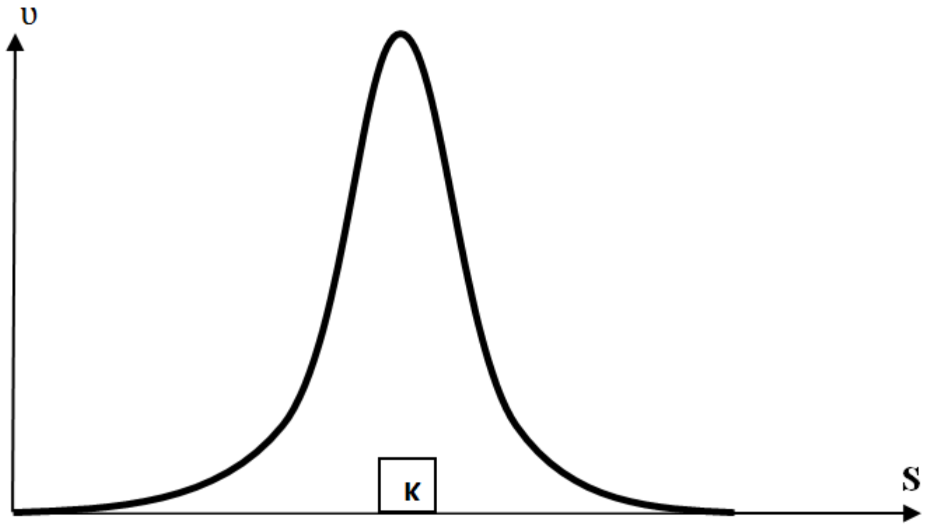


FIGURE 2.6 – L'évolution du véga en fonction du sous-jacent

On trouve aussi deux autres grecques à savoir le **thêta** θ et le **rho** ρ qu'on a pas utilisé pour notre étude des swaptions mais toutefois leurs utilisations demeurent nécessaires pour les options.
On définit :

- Le **thêta** noté θ est la dérivée partielle de l'option par rapport à la maturité de l'option, donc il mesure le taux de variation de la valeur du portefeuille par rapport à la durée de vie de l'option.
- Le **rho** noté ρ est la dérivée partielle de l'option par rapport au taux qui est le taux sans risque , ce taux nous sert pour l'actualisation . Donc le rho mesure le taux de variation de la valeur de la position en fonction du taux sans risque.

Application :

Au niveau de notre Pricer de swaption , on obtient directement les grecques en montant et en pourcentage(voir la partie encadrée en vert de la figure suivante).

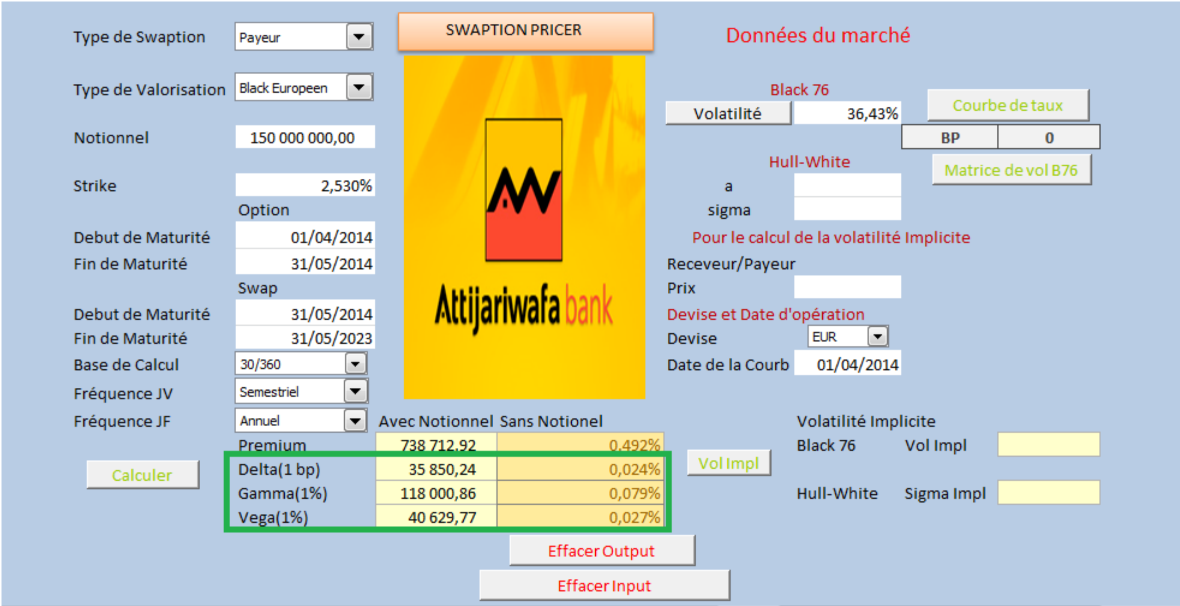


FIGURE 2.7 – La sensibilité de l'option par les grecques

On remarque que :

- *Delta(1 bp)=0,024%,* c'est à dire si *le sous-jacent* varie d'un **bp(0,01%)** alors cela implique une variation de **0,024%** du prix de la swaption soit une augmentation **35 850,24 EUR** dont le montant principal est égal **150 000 000 EUR.**
- *Gamma(1%)=0,079%* cela veut dire que lorsque le *Delta* varie de **1%** alors le prix varie de **0,079%** soit **118 000,86 EUR** .
- *Vega(1%)=0,027%*,qui veut dire lorsque la *volatilité* de la swaption varie de **1%** implique que le prix de la swaption varie **0,027%** soit **40 629,77 EUR** .

2.4.2 La volatilité implicite

La volatilité implicite peut se définir comme la valeur de σ, telle que si on la remplace dans l'expression du call déduit à partir par exemple du modèle de Black Scholes, on retrouvera la valeur numérique du call ou bien du put donné par le marché.

Tout d'abord Sur des marchés d'options, les primes s'échangent régulièrement, cotées en prix. On achète et on vend des options en payant ou en encaissant des euros, des dollars, etc.... Il reste cependant très intéressant de savoir, ayant le prix, quelle aurait été la volatilité qu'il aurait fallu entrer dans un modèle théorique pour obtenir le prix tel qu'il est sur le marché. Ainsi , on pourra calculer la volatilité.

Cependant, et vu que l'inverse de l'expression d'une option Européenne définit par Black Scholes apparait difficile, on se réfère à un procédé de recherche itératif tel que l'algorithme de Newton-Raphson. Cet algorithme permet d'avoir la valeur numérique de la volatilité implicite.

Dans le cas pratique et dans un premier temps, on initialise la valeur de σ par une valeur donnée pour la remplacer par σ_n pour une itération n afin de passer à l'itération n+1. Et donc on aura :

$$\sigma_{n+1} = \sigma_n + \frac{(C_{marché} - C^{BS})}{\frac{\partial C}{\partial \sigma}}$$

Autrement dit, si la valeur absolue de l'écart entre $\sigma_{(n+1)}$ et σ_n est supérieur à une précision donnée, on refait l'algorithme sachant que σ_n reçoit la valeur de $\sigma_{(n+1)}$.Sinon, on retient la valeur de la volatilité dont la valeur de l'option du modèle de Black Scholes est presque égale à la valeur de l'option déjà donnée par le marché.

De même et au niveau de notre pricer des swaptions, on peut avoir la volatilité implicite en connaissant le prix de la swaption , par exemple si le prix cote **750 000 euro** avec les caractéristiques précises alors la volatilité correspondante est **36,97%** :

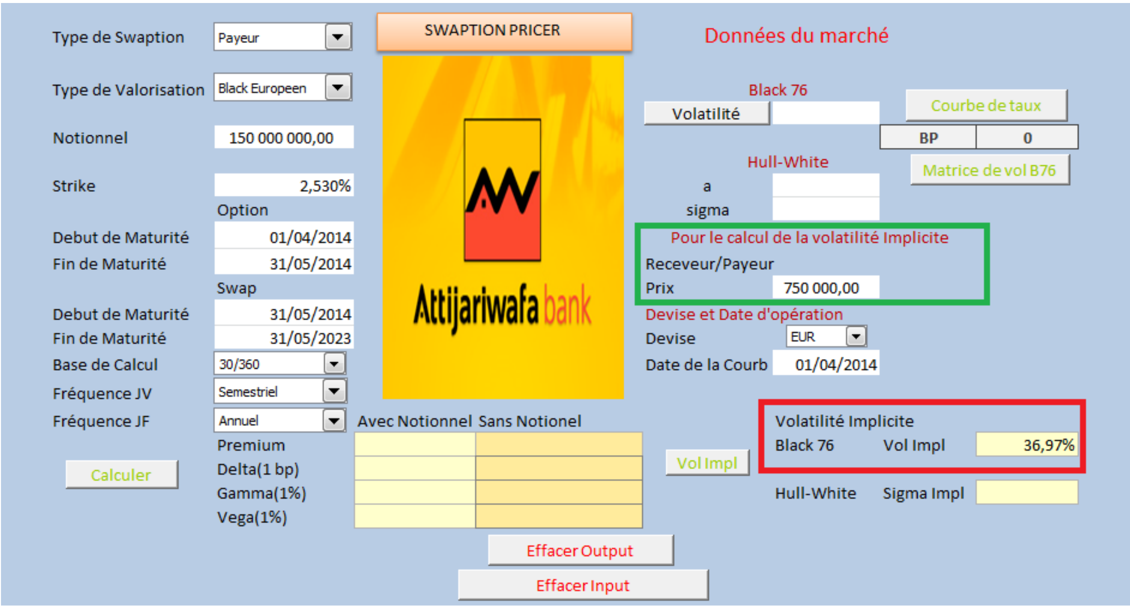


FIGURE 2.8 – La volatilité implicite

Ainsi de suite on obtiendra une matrice de la volatilité en fonction de la maturité de l'option et celle du swap, cette matrice nous permettra de tracer la surface de la volatilité en fonction de la maturité de l'option et celle du swap. Il faut aussi noter que pour presque tous les strikes, la volatilité implicite décroît en fonction de strike ce qu'on appelle **phénomène de skew**. Mais toutefois pour des très grands strikes on observe parfois une légère remontée de la volatilité implicite ce qu'on appelle **phénomène du smile**.

Maturité\Tenor	1 YR	2 YR	3 YR	4 YR	5 YR	6 YR	7 YR	8 YR	9 YR	10 YR
1 MO	74,265	70,4	55,705	45,705	39,855	33,64	30,405	26,84	24,73	23,015
3 MO	65,865	63,035	52,8	42,15	36,33	31,385	28,22	25,925	24,02	22,54
6 MO	70,09	63,015	51,31	41,24	35,705	31,305	28,38	26,315	24,535	23,16
9 MO	72,61	60,42	48,51	39,89	35,4379	31,06	28,41	26,37	24,77	23,46
1 YR	67,21	56,245	45,995	38,72	34,01	30,455	28,065	26,365	24,795	23,54
2 YR	49,99	42,49	37,26	32,625	29,285	27,385	25,88	24,73	23,64	22,64
3 YR	37,68	33,72	30,67	28,305	26,335	25,23	24,25	23,355	22,49	21,83
4 YR	30,83	28,59	26,86	25,44	24,21	23,44	22,735	22,09	21,51	20,98
5 YR	27,22	25,8	24,84	23,87	22,965	22,325	21,755	21,275	20,86	20,48
6 YR	25,21	24,12	23,37	22,63	21,88	21,34	20,83	20,47	20,13	19,82
7 YR	23,82	22,98	22,265	21,58	20,935	20,535	20,185	19,87	19,575	19,3
8 YR	22,73	21,72	21,04	20,58	20,15	19,82	19,51	19,24	18,99	18,74
9 YR	21,56	20,54	20,04	19,69	19,44	19,18	18,92	18,7	18,48	18,27
10 YR	20,32	19,655	19,275	19,04	18,795	18,595	18,405	18,23	18,05	17,865
15 YR	16,81	16,59	16,47	16,37	16,23	16,18	16,13	16,07	16	15,94
20 YR	15,055	14,79	14,825	14,86	14,765	14,755	14,745	14,735	14,72	14,655
25 YR	14,27	14,37	14,555	14,74	14,83	14,81	14,76	14,705	14,65	14,585
30 YR	13,62	13,79	14,02	14,26	14,46	14,465	14,47	14,49	14,51	14,505

FIGURE 2.9 – Matrice de la volatilité implicite

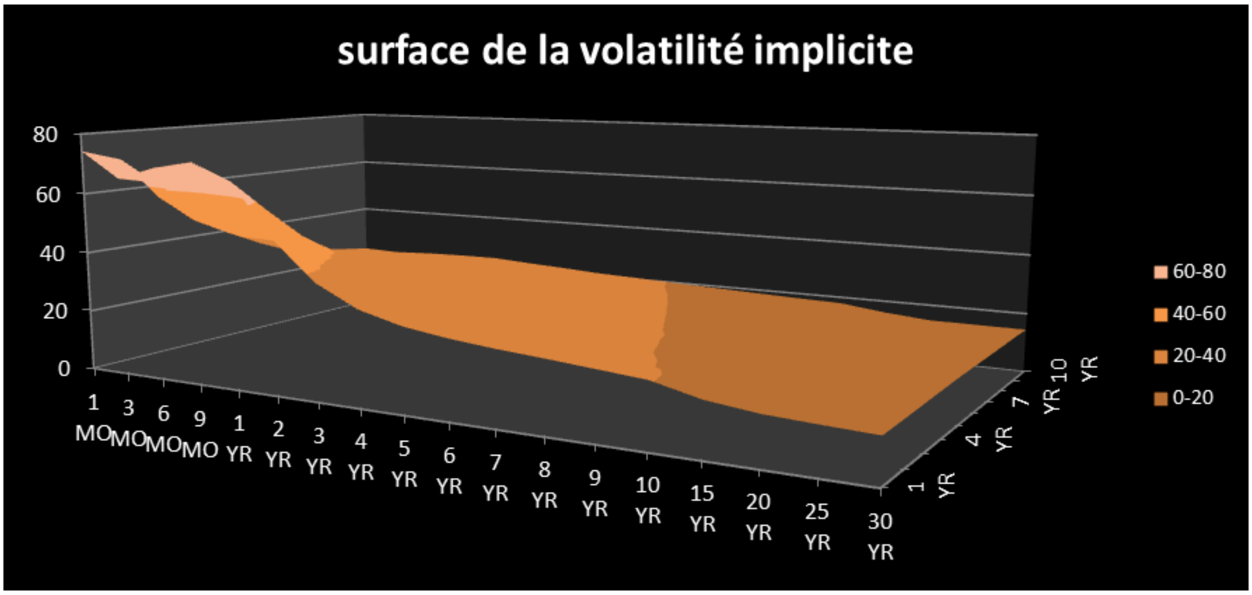


FIGURE 2.10 – Surface de la Volatilité Implicite en fonction du tenor et maturité de l'option

Chapitre 3

Les swaptions de taux d'intérêt

3.1 Les définitions

L'option sur swap de taux d'intérêt, ou swaption, est un contrat entre le vendeur et l'acheteur qui confère à l'acheteur, le droit mais pas l'obligation d'entrer, à une date donnée, dans un swap de taux d'intérêt de caractéristiques fixées à l'avance. En contrepartie, l'acheteur verse une prime au vendeur.
La swaption est négociée sur le marché gré à gré. Le montant de la prime est en fonction des caractéristiques de l'option (type, durée, taux d'exercice) et des caractéristiques du sous-jacent (type et durée du swap, payeur ou receveur) et comme toute option, de la volatilité et des taux d'intérêt.

On distingue deux types de swaptions :

- **La swaption payeuse :** donne le droit à son détenteur d'entrer dans un swap et de payer un taux fixe en échange d'un taux flottant
- **La swaption receveuse :** s'effectue dans le sens contraire, c'est-à-dire elle donne le droit d'entrer dans un swap et de recevoir un taux fixe en échange d'un taux flottant.

Et en plus de cela ,à la maturité de l'option, il existe **2 façons** de dénouer une swaption à savoir :

- **La swaption "swap settlement" :** En cas d'exercice, il y'a la mise en place effective du swap jacent dont l'exercice est au gré de l'acheteur de l'option.
- **La swaption "cash settlement" :** l'exercice est automatique et donne lieu au versement du vendeur à l'acheteur d'une soulte correspondant à l'actualisation de la différence entre le strike et le taux de swap du marché.

3.2 Fonctionnement des swaptions de taux d'intérêt

Pour bien cerner le fonctionnement d'une swaption , commençons par le schéma suivant :

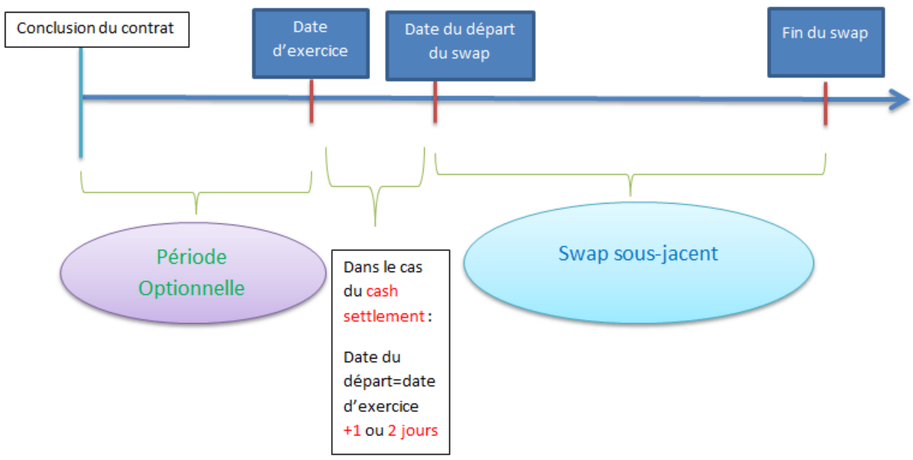


FIGURE 3.1 – Fonctionnement d'une swaption

On remarque clairement qu'il existe deux maturités , celle de l'option et celle du swap appelée **Ténor**. Et c'est à la fin de la maturité de l'option qu'on entrera dans un swap. Toutefois cette entrée dépendra s'il s'agit de swaption "swap settlment " ou " cash settlement". Il aussi nécessaire de savoir les caractéristiques du contrat à savoir :

* **Caractéristiques du swap d'intérêt sous jacent** au contrat d'option, à savoir :
  - le **montant notionnel** du swap ;
  - la **date de début** de swap. Cette date est le plus souvent égale à la date de fin de l'option, elle peut éventuellement être postérieure dans le cas d'une swaption "swap settlement" ;
  - **la durée du swap** ;
  - la **référence** du taux variable (Euribor, Libor, T4M, TAM, etc.) ;
  - **l'échéancier** des versements des intérêts.Cela peut être annuel,semestriel,trimestriel ou enfin mensuel.

* **le type de la swaption :** "swap settlement" ou "cash settlement"

* **le sens de la swaption :** "swaption payeuse" ou "swaption receveuse"

* **le prix d'exercice (ou strike) de l'option :** Il correspond au taux fixe du swap qui sera mis en place en cas d'exercice pour une swaption "swap settlement", et au taux servant au calcul du différentiel versé par le vendeur pour une swaption "cash settlement" ;

* **la date d'échéance** de l'option

Il faut noter aussi que le vendeur convient avec l'acheteur du montant de la prime que versera ce dernier en contrepartie du droit qui lui est accordé. Son montant sera fixé en fonction :
- du swap sous-jacent ;
- de la durée de la période optionnelle ;
- des conditions de marché (taux et volatilité).

3.3 Pricing des swaptions

Lorsqu'un acheteur de swaption veut acheter une swaption , le souci majeur est le prix de cette swaption, c'est-à-dire à quel prix doit-il acheter cette swpation ? , c'est aussi le cas pour le vendeur de swaption d'où l'intérêt de "**Pricing**" qui veut dire tout simplement les différentes méthodes de valorisation pour obtenir la prime. A cet effet, nous étudierons deux modèles de pricing des swaptions à savoir **Black 76** et **Hull-White**. Et tout sera regroupé dans un seul Pricer pour le compte du **desk d'Attijariwafa Bank** .

3.3.1 Modèle Black 76

Au départ la formule de black et scholes (1973) servait pour valoriser les options sur indices. Ainsi, en 1976 Fischer Black prolongea ce modèle pour valoriser les options du taux d'intérêt et qui servira surtout pour valoriser le cap, floor, swaption...
A cet effet, la swaption européenne utilise comme sous-jacent le taux de swap forward. On rappelle que le taux de swap pour une maturité donnée à un instant t, est le taux fixe qui serait échangé contre le **Libor** ou **Euribor** dans un swap émis en date t. Ainsi, pour valoriser les swaptions on suppose que le taux de swap à la maturité suit une distribution log-normal. Considérons$r_f(t)$ *le taux de swap forward*. Et posons $r_f^o(t) = E[r_f(t)]$.

On rappelle qu'une swaption payeuse est une swaption dont le détenteur paye la jambe fixe si l'option est exercée, c'est-à-dire le taux de swap forward est supérieur à r_k , le prix d'exercice ou Strike. Et on note son payoff de la manière suivante :

$$\frac{L}{m} max(r_f(t) - r_k, 0)$$

Avec
- L : montant principal ou notionnel
- m : fréquence de paiements par an
- $r_f(t)$: Le taux de swap forward
- r_k : Le prix d'exercice ou Strike

L'hypothèse de log-normalité de taux swap selon le modèle de Black nous donne : [1]

La valeur de cash-flow reçue à l'instant T_i est donnée par :

$$\frac{L}{m} P(0, T_i)[r_f^o(T_i)N(d_1) - r_k N(d_2)]$$

Avec
- N(d) : La fonction de répartition de la loi normale centre réduite :$\int_{-\infty}^{d} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$
- $d_1 = \frac{ln\left(\frac{r_f^o(T_i}{r_k}\right) + \sigma^2 \frac{T}{2}}{\sigma\sqrt{T}}$ et $d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$
- **P(0,T) :** Le prix d'une obligation zéro-coupon couvrant la période **[0 ; T]** .Par exemple, si j'investis **P(T)** en 0, je vais recevoir **1** au bout de **T** années avec **r(T)** comme taux d'intérêt à l'instant T. On aura :
  $P(0, T) = P(T) = \frac{1}{(1+r(T))^T}$ ou $P(T) = e^{(-R(T)*T)}$ en cas continu

1. Annexe II

Donc la valeur totale de la **swaption payeuse** au bout de **n années** et **m fréquence** de paiements est :

$$\sum_{i=1}^{mn} \frac{L}{m} P(0, Ti)[r_f^o(T_i)N(d_1) - r_k N(d_2)]$$

Application :
Prenons un exemple d'une swaption réalisée au sein de la salle des marchés d'Attijariwafa Bank avec les caractéristiques suivantes :

Caractéristiques swaption :

Date d'opération : 05/09/2013

Date de valeur : 09/09/2013

Acheteur : Partie A

Vendeur : Partie B

Notionnel : 25 200 000,00 EUR

Type : Receveur

Strike : 1,6900%

Dénouement : 27/12/2013

Caractéristiques Swap sous-jacent

Date de Valeur : 31/12/2013

Date d'échéance : 31/12/2020

Partie A paye : Contrepartie A verse à contrepartie B à chacune des dates finales de l'échéancier le taux de Référence

Partie B paye : Contrepartie B paie à contrepartie A à chacune des dates finales de l'échéancier le taux swap annuellement à partir de date de fin.

Taux de Référence : Euribor 6 mois ,base 30/360 [2]

Quelle est la prime que la partie A doit-elle verser à la partie B ?

Le pricer de **Bloomberg** [3] nous donne **0,32946%** soit **83 024,8 EUR** pour la prime.

2. Annexe II
3. Annexe II

FIGURE 3.2 – Pricer de bloomberg

Notre pricer nous donne une prime de **0,317%** soit **79 854,86 EUR**. Cette différence de valeur avec celle de Bloomberg s'explique souvent par la méthode d'interpolation utilisée.

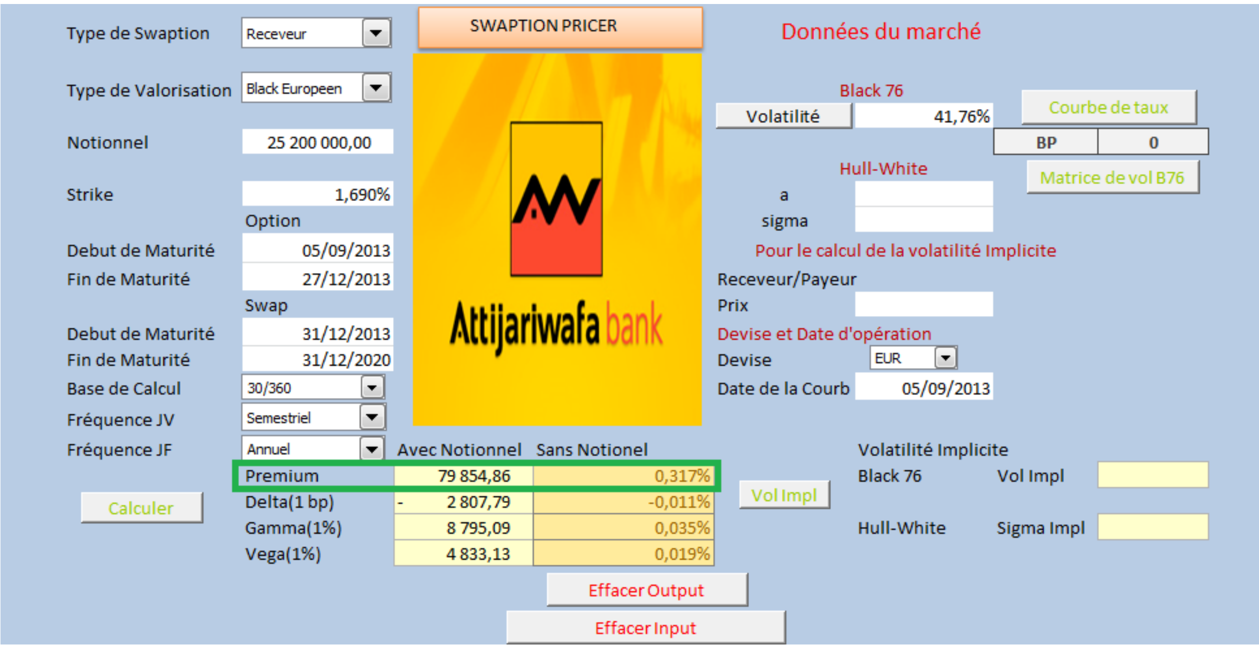


FIGURE 3.3 – Pricer de swaption

Il faut noter que notre pricer est relié en ligne pour tenir compte des données du marché au fur et à mesure grâce un générateur de données de marché, permettant de récupérer de manière automatisée pour les valorisations avec les données du Bloomberg. Ce générateur des données du marché est un fichier Excel relié avec Bloomberg. Lorsqu'on rentre la date souhaitée avec la devise, Bloomberg met les données de marché à jour, puis les courbes de taux sont calculées tout comme la matrice de la volatilité.

Pour notre pricer au niveau du marché, on aura besoin de la courbe de taux et de la matrice de la volatilité,elles sont données par les deux tableaux suivantes. Celles-ci sont automatisées sur Bloomberg avec une maturité de 50 ans pour la courbe de taux, et une maturité de 30 ans pour la matrice de la volatilité.

Devise	45				
date debut	05/09/2013				
date fin	05/09/2013		Retour		
	LAST_PRICE				
S00	45	Z 1D BLC2 Curncy	S0045Z 1D BLC2 Curncy	05/09/2013	0,069
S00	45	Z 2D BLC2 Curncy	S0045Z 2D BLC2 Curncy	05/09/2013	0,07367
S00	45	Z 1W BLC2 Curncy	S0045Z 1W BLC2 Curncy	05/09/2013	0,097
S00	45	Z 2W BLC2 Curncy	S0045Z 2W BLC2 Curncy	05/09/2013	0,10674
S00	45	Z 1M BLC2 Curncy	S0045Z 1M BLC2 Curncy	05/09/2013	0,129
S00	45	Z 2M BLC2 Curncy	S0045Z 2M BLC2 Curncy	05/09/2013	0,176
S00	45	Z 3M BLC2 Curncy	S0045Z 3M BLC2 Curncy	05/09/2013	0,225
S00	45	Z 4M BLC2 Curncy	S0045Z 4M BLC2 Curncy	05/09/2013	0,259
S00	45	Z 5M BLC2 Curncy	S0045Z 5M BLC2 Curncy	05/09/2013	0,298
S00	45	Z 6M BLC2 Curncy	S0045Z 6M BLC2 Curncy	05/09/2013	0,344
S00	45	Z 7M BLC2 Curncy	S0045Z 7M BLC2 Curncy	05/09/2013	0,37262
S00	45	Z 8M BLC2 Curncy	S0045Z 8M BLC2 Curncy	05/09/2013	0,39011
S00	45	Z 9M BLC2 Curncy	S0045Z 9M BLC2 Curncy	05/09/2013	0,40611
S00	45	Z 10M BLC2 Curncy	S0045Z 10M BLC2 Curncy	05/09/2013	0,42237
S00	45	Z 11M BLC2 Curncy	S0045Z 11M BLC2 Curncy	05/09/2013	0,44331
S00	45	Z 1Y BLC2 Curncy	S0045Z 1Y BLC2 Curncy	05/09/2013	0,45245
S00	45	Z 15M BLC2 Curncy	S0045Z 15M BLC2 Curncy	05/09/2013	0,50795
S00	45	Z 18M BLC2 Curncy	S0045Z 18M BLC2 Curncy	05/09/2013	0,56481
S00	45	Z 21M BLC2 Curncy	S0045Z 21M BLC2 Curncy	05/09/2013	0,63342

FIGURE 3.4 – Extrait de la courbe de taux utilisée

Expir.	1Yr	2Yr	3Yr	4Yr	5Yr	6Yr	7Yr	8Yr	9Yr	10Yr	15Yr	20Yr	25Yr	30Yr
1Mo	70,69	76,2	71,4	61	54,75	47,8	43	39,45	36,75	34,55	28,55	26,35	25,45	24,7
3Mo	63,03	69,75	64,9	57,85	52,55	46,35	41,95	38,7	36,15	34,1	28,7	26,8	26,1	25,6
6Mo	63,89	65,85	60,5	54,3	49,45	44,1	40,3	37,4	35,1	33,25	28,45	26,8	26,25	25,8
9Mo	61,92	62,51	57,13	51,55	47,3	42,57	39,15	36,47	34,32	32,6	28,17	26,62	26,2	25,85
1Yr	59,88	59,15	53,75	48,8	45,15	41,05	38	35,55	33,55	31,95	27,9	26,45	26,15	25,9
2Yr	52,04	48,4	44,05	40,65	38,2	35,75	33,7	32	30,6	29,5	26,4	25,65	25,6	25,4
3Yr	44,75	41,5	38,65	36,1	34,05	32,35	30,85	29,6	28,55	27,75	25,45	24,9	25	24,8
4Yr	38,4	36,35	34,15	32,35	30,75	29,55	28,55	27,8	27,15	26,6	24,7	24,15	24,25	24
5Yr	33,1	32,2	30,7	29,4	28,25	27,45	26,85	26,4	26	25,65	24,1	23,45	23,55	23,2
6Yr	31,08	29,62	28,35	27,34	26,46	25,92	25,53	25,25	25,02	24,87	23,5	22,82	22,82	22,45
7Yr	28,75	26,9	25,95	25,25	24,7	24,4	24,2	24,1	24,1	24,1	22,9	22,2	22,1	21,7
8Yr	26,71	25,47	24,74	24,24	23,86	23,69	23,59	23,63	23,7	23,75	22,55	21,75	21,49	20,99
9Yr	24,75	24,08	23,61	23,28	23,05	22,99	23,05	23,18	23,31	23,41	22,22	21,32	20,89	20,29
10Yr	22,8	22,8	22,55	22,35	22,25	22,4	22,55	22,75	22,95	23,1	21,9	20,9	20,3	19,6
15Yr	21,08	22,65	22,8	22,9	23,05	23,15	23,2	23,25	23,35	23,3	21,3	19,35	18,25	17,7
20Yr	21,96	24,05	24	24	23,9	23,8	23,65	23,5	23,3	23	19,8	17,45	16,8	15,45
25Yr	24,32	24,8	24,45	24,15	23,65	23,15	22,55	22	21,4	20,75	17,45	15,8	14,25	13,55
30Yr	22,09	22,05	21,4	20,75	20,1	19,45	18,85	18,4	18	17,7	16,05	13,45	12,65	12,05

FIGURE 3.5 – La matrice de la volatilité

Concernant la courbe de taux, celle-ci est codée en fonction d'une devise précise, par exemple 45 désigne Euro et 23 désigne le Dollar US. Pour la matrice de la volatilité, la ligne désigne la maturité de l'option et la colonne celle du swap appelé ténor.

3.3.2 Modèle de Hull-White

Le modèle précédent à savoir le modèle de Black utilisé pour la valorisation de swaption est fondé sur l'hypothèse de log-normalité du sous-jacent qui est notre taux swap.Cependant ,leur intérêt est limité par le fait qu'il ne fournit aucune description de l'évolution des taux au cours du temps car il considère la volatilité est constante. D'où l'intérêt des modèles stochastiques qui tiennent de cette évolution.

Pour bien comprendre le modèle de Hull-White, on verra un bref aperçu entre le modèle d'équilibre et les modèles fondés sur l'absence d'arbitrage.

4.3.2.1 Modèle d'équilibre

Tout d'abord, dans un modèle à un facteur, le taux dépend d'une seule source d'incertitude c'est à dire elle impose que tous les taux évoluent dans la même direction, mais les variations peuvent être d'amplitudes différentes.

Les modèles d'équilibre s'appuient sur un ensemble d'hypothèses concernant certaines variables économiques pour en déduire le comportement du taux court.

- Modèle de Rendleman et Bartter

Le modèle suppose que le taux suit un processus stochastique de la manière suivante :

$$dr = \mu r dt + \sigma r dw$$

où μ et σ sont des constantes

Cette formulation implique que r suit un mouvement brownien géométrique .
L'hypothèse de Rendleman et Bartter suppose qu'un taux court se comporte comme un prix d'action. Mais le problème en est qu'un taux semble poussé au cours du temps, à revenir vers une moyenne de long terme lorsqu'il s'en éloigne. C'est le phénomène de **retour à la moyenne(mean reversion)**. Donc le modèle de Rendleman et Barttter ne prend pas en compte cet effet de retour à la moyenne.

Concernant l'effet de retour à la moyenne, il y'a des arguments macroéconomiques. Quand les taux sont élevés, l'économie tend à ralentir et la demande de fonds de la part des emprunteurs est faible , ce qui à la baisse des taux. Quand les taux sont peu élevés, les emprunteurs seront plus nombreux, ce qui aura tendance à faire remonter les taux.

- Modèle de Vasicek

le modèle du taux est le suivant :

$$dr = a(b-r)dt + \sigma dw$$

où a et b sont des constantes.
Ce modèle prend en compte le retour à la moyenne puisque le taux court est poussé vers b à un rythme défini par a.
De plus, le terme stochastique σdw implique des variations de taux gaussiens.

- Modèle de Cox-Ingersoll-Ross

Dans le modèle de Vasicek , le taux court r peut devenir négatif car l'écart-type instantané ne dépend pas du niveau atteint par r.
Donc Cox-Ingersoll-Ross propose une alternative dans laquelle le taux court et toujours positif.Le processus suivi par r est donné par :

$$dr = a(b-r)dt + \sigma\sqrt{r}dw$$

Le drift c'est à dire l'expression a(b-r) est identique à celui du modèle de Vasicek, mais l'écart-type instantané est proportionnel à $\sqrt{r}$.
Par conséquent,lorsque le taux court diminue,l'écart fait de même. A la limite , lorsque ce taux est nul, il reste un drift positif égal à $abdt$, sans terme stochastique et le taux repart vers des valeurs positives.

4.3.2.2 Modèles sans opportunité d'arbitrage

L'inconvénient des modèles d'équilibres, ce qu'ils ne s'ajustent pas automatiquement à la structure par termes observés sur le marché aujourd'hui.Donc il faut un calibrage assez judicieux pour aboutir à la plupart des structures observées en pratique. Cependant, l'ajustement aux observations n'est pas toujours exact.D'où le recours aux modèles fondés sur l'absence. Ces modèles sont construits de façon à être cohérents avec la structure par termes observés aujourd'hui.

- Modèle de Ho et Lee

C'est un modèle sans arbitrage et s'écrit de la manière suivante :

$$dr = \theta(t)dt + \sigma dw$$

avec σ une constante et $\theta(t)$ une fonction du temps ,calibrée pour que le modèle s'ajuste parfaitement à la courbe ZC initiale.

$\theta(t)$ définit donc la variation moyenne du taux court à la date t et ne dépend pas du niveau atteint par r à cette date. Mais ce modèle ne tient pas en compte l'effet du retour à la moyenne.

- Modèle de Hull-white à un facteur

Ce modèle tient de l'absence d'arbitrage et aussi du retour à la moyenne.le processus du taux s'écrit de la manière suivante :

$$dr = (\theta(t) - ar)dt + \sigma dw$$

$$dr = a\left(\frac{\theta(t)}{a} - r\right)dt + \sigma dw$$

avec a et σ des constantes.
On remarque clairement que le modèle de Hull-white n'est qu'une extension du modèle de HO et Lee incorporant un retour à la moyenne au rythme a , ou encore un modèle de vasicek avec

un niveau de retour à la moyenne variable en fonction du temps ,puisque à la date t le taux court est attiré vers $\frac{\theta(t)}{a}$ au rythme a.
Le prix de zéro-coupon sera de la forme suivante :

$$P(t,T) = A(t,T)e^{-B(t,T)r(t)}$$

avec

$$B(t,T) = \frac{1-e^{-a(T-t)}}{a}$$

et

$$Ln(A(t,T)) = Ln\frac{P(0,T)}{P(0,t)} + B(t,T)F(0,T) - \frac{1}{4a^2}\sigma^2(e^{-aT}-e^{-at})(e^{at}-1)$$

où $F(0,t)$ est le taux forward instantané pour l'horizon t, vu à la date 0.

le prix en date **0** d'un call d'échéance **T** et de prix d'exercie **K** sur un **ZC** d'échéance **s** et de nominal **L** s'écrit :

$$LP(0,s)N(h) - KP(0,T)N(h-\sigma_p) \tag{3.1}$$

avec

$$h = \frac{1}{\sigma_p}Ln\left(\frac{LP(0,s)}{KP(0,T)}\right) + \frac{\sigma_p}{2}$$

$$\sigma_p = \frac{\sigma}{a}\left[1-e^{-a(s-T)}\right]\sqrt{\frac{1-e^{-2aT}}{2a}}$$

L'équation (3.1) est équivalente à celles déduites du modèle du Black. La volatilité du logarithme du prix de l'obligation en date T est σ_p et la volatilité du prix de l'obligation dans le modèle de Black est, $\frac{\sigma_p}{\sqrt{T}}$.

Pour obtenir a et σ, il faut un calibrage, cela consiste dans une première étape à chercher des paramètres qui minimisent :

$$\sum_{i=1}^{n}(U_i - V_i)^2$$

où U_i est le prix de marché de l'instrument i et V_i le prix calculé par le modèle. on suppose ici que n actifs liquides sont utilisés pour le calibrage.

Les actifs qui servent au calibrage doivent être choisis aussi proches que possible des actifs qui seront évalués par le modèle.

Application :

Le pricer de Bloomberg avec l'exemple précédent nous donne : la prime est égale **0.32850%** soit **82 782,91 EUR**.

FIGURE 3.6 – Pricer du modèle Hull-white de Bloomberg

On remarque que la valeur de la prime obtenue au niveau de Bloomberg, par le modèle de Hull-White **0.32850%**, **figure 3.6**, est proche de celle du modèle Black **0,32946%**, **figure 3.2**.

Au niveau de notre Pricer **figure 3.7**, en reprenant l'exemple précédent et en prenant σ =1.30% et a=0.15 après un calibrage , la prime sera **0.327% soit 82 347,87 $.**

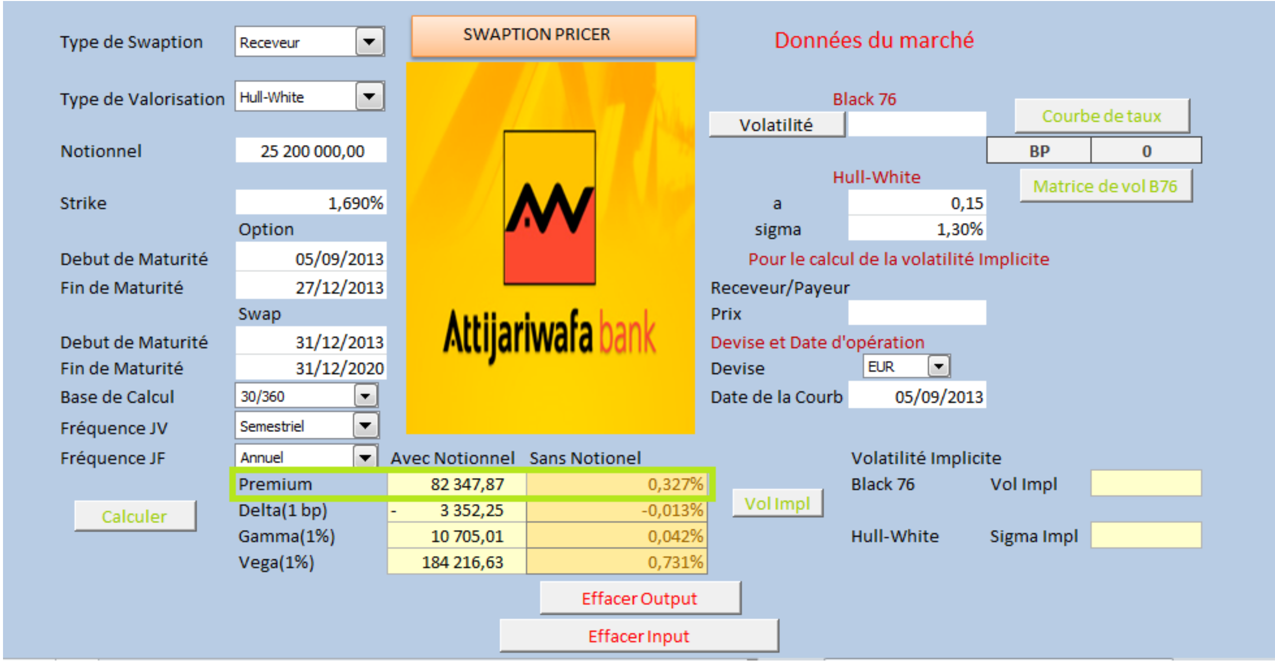


FIGURE 3.7 – Pricer par le modéle de Hull-white

On remarque clairement que la valeur obtenue par le modèle de Hull-White de notre pricer **figure 3.7** : **0.327%** est très proche de celle obtenue par le pricer de Bloomberg **0.32850%**, **figure 3.6** .

3.4 La valorisation mark to market

Une valorisation mark to market consiste à avoir recours à cette méthode pour évaluer le prix actuel prévalant pour un produit financier sur le marché. Pour cela, l'on prend en compte la valeur des différents éléments qui influent sur le prix du marché ainsi que les différents facteurs qui influent sur le marché lui-même.

En ce qui concerne la swaption, le calcul prend en compte la valeur de la swaption le jour où elle a été conclue et celle de la veille pour, par la suite, faire la différence.si on constate que cette différence est négative a travers le temps, on annule notre swaption en la vendant pour une autre contrepartie puisque cette dernière génère que des pertes.

Le mark to market peut ainsi se définir comme une méthode d'évaluation de la valeur actuelle des actifs. Cette technique est utilisé tant en finance qu'en comptabilité. Dans le premier cadre, elle permet de valoriser un contrat ou tout autre produit financier tandis que dans le second, elle permet de déterminer la valeur d'un actif au prix du marché.

Prenons le cas de notre swaption ci-dessus.On peut remarquer que les valeurs de mark to market sont positives et ceci signifie que notre swaption achetée le 05/09/2013 n'enregistre aucune perte pour une période allant jusqu'au le 12/09/2012, et donc et à cette date on peut toujours garder notre swaption.les résultats sont données dans le tableau ci-dessous.

date de valorisation	valeur du swaption	mark to market
05/09/2013	0,317%	0,000%
06/09/2013	0,324%	0,007%
07/09/2013	0,478%	0,161%
10/09/2013	0,445%	0,128%
11/09/2013	0,358%	0,041%
12/09/2013	0,447%	0,130%

FIGURE 3.8 – Valorisation mark to market

3.5 Les swaptions de la seconde génération

3.5.1 Modified American Swaption

3.5.1.1 Descriptif

Une Modified American Swaption (ou MAS, encore parfois appelée Bermuda Swaption) est une option sur swap qui peut être exercée à différentes dates durant la vie de l'option.

La date de maturité du swap sous-jacent est fixe, contrairement aux True American Swaptions, pour lesquelles la durée du swap sous-jacent est fixe. Comme pour une swaption européenne classique, l'acheteur de l'option choisit le niveau du taux de swap auquel il peut exercer son option, et paie une prime lors de l'achat de la MAS. L'acheteur d'une Modified American Swaption doit préciser les dates d'exercice parmi les dates de fixing des flux d'intérêt variable. Il peut choisir de pouvoir exercer sur toutes les dates de fixing possibles (tous les trois mois si le taux variable est un Libor 3 mois, etc.). Il peut également choisir de ne pouvoir exercer que sur certaines dates, en reculant la première date d'exercice, ou en ne pouvant plus exercer à partir d'une certaine période par exemple. Dans ce cas, la prime de l'option sera moins chère que pour une MAS classique à départ immédiat.

3.5.1.2 Utilisations

Les Modified American Swaptions, tout comme les swaptions européennes, offrent la possibilité de profiter d'une évolution favorable des taux tout en constituant une assurance contre un éventuel mouvement défavorable, en limitant le coût à la prime de l'option.

Une Modified American Swaption est cependant plus souple qu'une swaption européenne. Elle permet en effet aux entreprises d'exercer l'option sur toute une période et non pas à une date unique. L'échéancier du swap sous-jacent peut correspondre à une opération de prêt ou d'emprunt particulière avec tirages et/ou amortissements.

3.5.1.3 Pricing

- La prime d'une Modified American Swaption est toujours plus élevée que celle d'une option européenne car elle offre plus de souplesse d'utilisation.
- Une MAS peut être amortissable, à capitalisation croissante, ou avec un taux fixe zéro coupon. Des strikes différents peuvent être choisis pour chaque date possible d'exercice (on parle alors de "strike amortissable").

3.5.2 La swaption à prime conditionnelle (ou swaption CPO)

3.5.2.1 Descriptif

La swaption à prime conditionnelle (ou swaption CPO, "Contingent Premium Option") est une swaption européenne pour laquelle l'acheteur ne paie la prime que si la swaption est exercée. Si à l'échéance l'option est "dans la monnaie", le vendeur exerce l'option automatiquement. L'acheteur verse le montant de la prime, et reçoit une soulte (cash settlement), ou met en place un swap avec le vendeur (swap settlement).

3.5.2.2 Utilisations

Si la swaption n'est pas exercée, l'acheteur n'aura jamais eu à payer de prime tout en bénéficiant d'un mouvement favorable des taux. D'autre part, la swaption CPO protège l'acheteur contre un mouvement très défavorable des taux et peut être utilisée comme une assurance catastrophe. Dans la mesure où l'exercice est automatique, le niveau de marché du swap sous-jacent doit pouvoir être déterminé simplement, généralement en demandant des cotations à des teneurs de marché ("Market Makers") et en en faisant la moyenne. Le swap sous-jacent est alors d'une durée standard, à départ immédiat, et non amortissable.

3.5.2.3 Pricing

Les deux contreparties s'accordent sur un mode de constatation du taux de swap à l'échéance (interrogation de market makers ou page de référence, heure, documents à produire...).

La prime d'une swaption CPO est toujours plus élevée que celle d'une swaption classique de mêmes caractéristiques : en effet le vendeur ne touchera pas la prime si l'option n'est pas exercée.

Contrairement au comportement d'une swaption classique, lorsque les taux sont proches du strike, la valeur de l'option baisse si la volatilité des taux augmente. En cas de swap settlement, la prime peut être intégrée au taux du swap sous-jacent sous forme d'une marge sur le taux variable ou le taux fixe.

3.5.3 L'option sur swaption

3.5.3.1 Descriptif

Une option sur swaption est une option dont l'actif sous-jacent est lui-même une option sur swap.

A l'échéance de l'option sur swaption, son acheteur a la possibilité d'acheter (call) ou de vendre (put) la swaption sous-jacente au prix convenu à l'avance (strike de l'option sur swaption). Cette option sur swap pourra elle-même faire l'objet d'un exercice à l'échéance au taux convenu (strike de la swaption), en fonction des conditions de marché. On remarque que l'option sur swaption comporte deux strikes :

- Le taux d'exercice de la swaption européenne sous-jacente.
- Le niveau de prime auquel on peut l'acheter (call) ou le vendre (put). La prime payée au départ de l'option sur swaption est toujours inférieure à la prime d'une swaption européenne standard de mêmes caractéristiques qui serait achetée directement.

3.5.3.2 Utilisations

Une option sur swaption peut être utilisée pour couvrir le risque de taux lié à une opération incertaine, notamment en cas d'appel d'offre.

On pourra également utiliser une option sur swaption si l'on anticipe une crise de marché : elle constitue alors une “assurance catastrophe” contre un éventuel mouvement très défavorable de la courbe des taux.

Ce produit fait partie de la famille des options sur options. D'une manière générale, les options sur options permettent de couvrir les risques de taux et de volatilité en une seule opération.

3.5.3.3 Pricing

1. Huit combinaisons peuvent être envisagées : (achat/vente) d'un (call/put) sur swaption droit de (payer/recevoir) le taux fixe dans un swap.
2. L'option sur swaption est toujours de type européen (l'exercice n'est possible qu'à l'échéance), ainsi que la swaption sous-jacente.
3. Dans un call sur swaption droit de payer (exemple ci-dessus) la prime croît avec la maturité du call, la maturité de la swaption, la volatilité des taux, et décroît avec le prix d'exercice du call et le prix d'exercice de la swaption.
4. En terme de prix, plus la durée de l'option initiale est courte par rapport à celle de la swaption, plus la décote par rapport à une swaption classique est intéressante.

Chapitre 4

La structure de couverture avec la Swaption

Dans cette partie, on évoquera de l'utilité de la swaption, c'est à dire à quel moment doit-on faire appel à la swaption ?

Et quelle stratégie doit-on adapter une fois achetée une swaption ?

4.1 Utilisation d'une swaption

Généralement, on fait appel à la swaption lorsqu'on détient des obligations ou bien des eurobonds(les obligations libellées dans une monnaie différente de celle de pays de l'émetteur). Et ces obligations sont évaluées par une courbe Zéro coupon. Cette dernière dépendra de la devise avec laquelle les obligations sont émises, qui peut être par exemple une courbe ZC Euribor s'il s'agit de l'Euro et ZC Libor s'agit du dollar. Lorsqu'on contraint les risques de taux pour ces obligations, on pourra mettre en place une swaption pour se protéger.

Ainsi, le contrat de la swaption de taux d'intérêt présente un double avantage, donc cela permet à l'acheteur de l'option de se couvrir contre une évolution défavorable du marché tout en bénéficiant d' une éventuelle évolution favorable.

Donc on pourra résumer l'intérêt de l'utilisation de la swaption pour le cas d'un emprunt et prêt et avec son stratégie adoptée dans le tableau suivant :

Opération du swap	**Protection recherchée contre**	**Stratégie de la swaption**
Emprunt à taux variable ou Prêt à taux fixe	Une hausse des taux d'intérêt	Achat d'un droit de payer un taux fixe
Prêt à taux variable ou emprunt à taux fixe	Une baisse des taux d'intérêt	Achat d'un droit de recevoir un taux fixe

TABLE 4.1 – *Tableau de la stratégie adoptée par la swaption*

4.2 Application

Une entreprise est endettée le 01 Avril 2014 sur 9 ans et 6 mois au taux variable Libor 6 mois pour un montant de 150 000 000 EUR. Le Risk-manager de l'entreprise anticipe une hausse des taux au cours des trois 6 mois à venir. Une telle hausse des taux entraînerait l'augmentation du coût de son endettement contre lequel le trésorier souhaite se prémunir.

Donc le 01 Avril 2014, l'entreprise achète à la banque le droit de payer le taux fixe sur swap c'est-à-dire une couverture contre une hausse des taux aux caractéristiques suivantes :

- Durée : 6 mois
- Option : Européenne
- Taux d'exercice à la monnaie spot, soit 2,53%
- Taux variable : Libor 6 mois
- Durée du swap : 9 ans
- Montant notionnel : 150 000 000 EUR

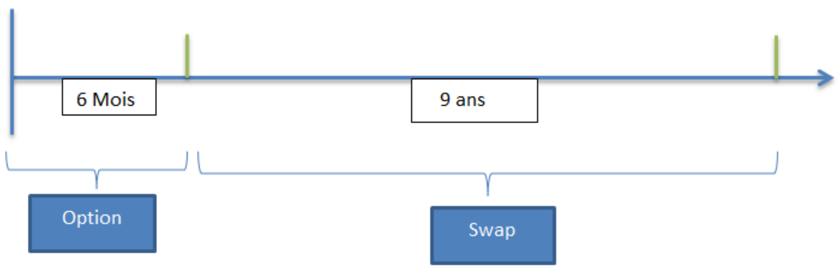


FIGURE 4.1 – Schéma élucidant l'opération

- Prime : 0,997% soit 1 495 849,88 EUR

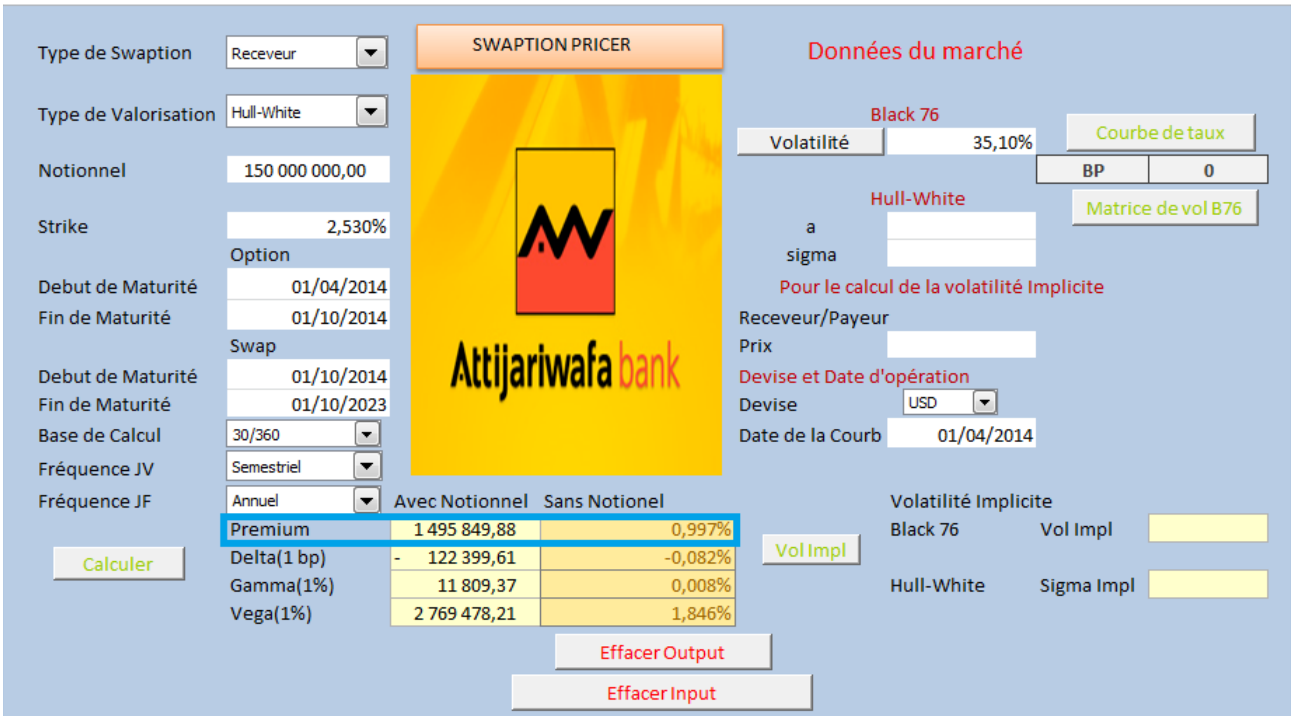


FIGURE 4.2 – Le prix de la swaption

Donc on aura deux hypothèses possibles :

Hypothèse 1 : Hausse des taux

Si Le 01 Octobre 2014 le taux de swap à 9 ans contre Euribor 6 mois cote 3,15% - 3,18%

FIGURE 4.3 – La stratégie de couverture dans le cas de la hausse des taux

Dans ce cas :

- Si le Risk-manager pense que les taux vont continuer à monter, il exercice son option. Il met en place un swap avec la banque, dans lequel il paiera un taux fixe de 2.53% au lieu de 3,20% offert sur le marché et recevra Euribor 6 mois pendant 9 ans.

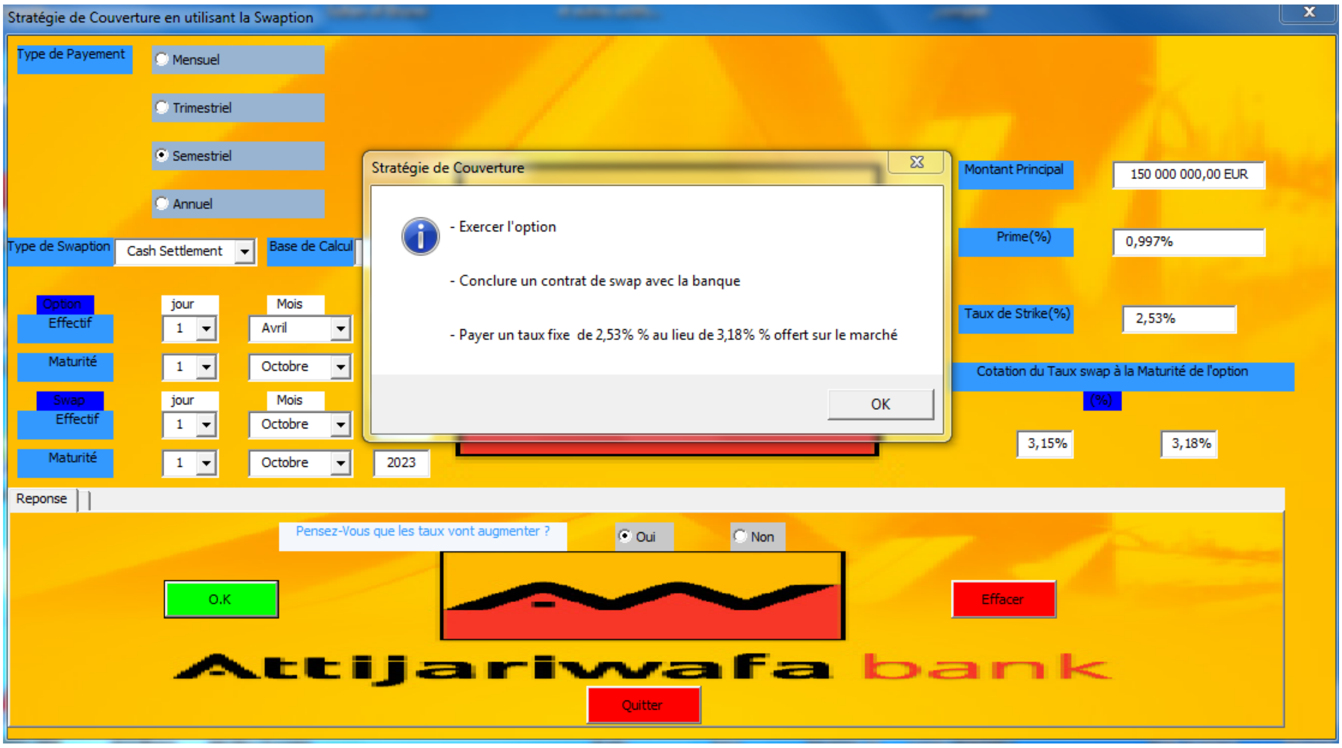


FIGURE 4.4 – La stratégie de couverture dans le cas de la hausse des taux

S'il pense que les taux vont diminuer, dans ce cas il gagnera sur l'option

- En exerçant son option
- En débouclant sa position, soit par annulation du swap, soit par la conclusion immédiate d'un swap dans lequel il recevra un taux fixe de 3,15% et paiera Libor 6 mois. Dans ce cas, l'entreprise réalisera un gain de 0.63% c'est-à-dire en payant sur 150 000 000 € pendant 9 ans.

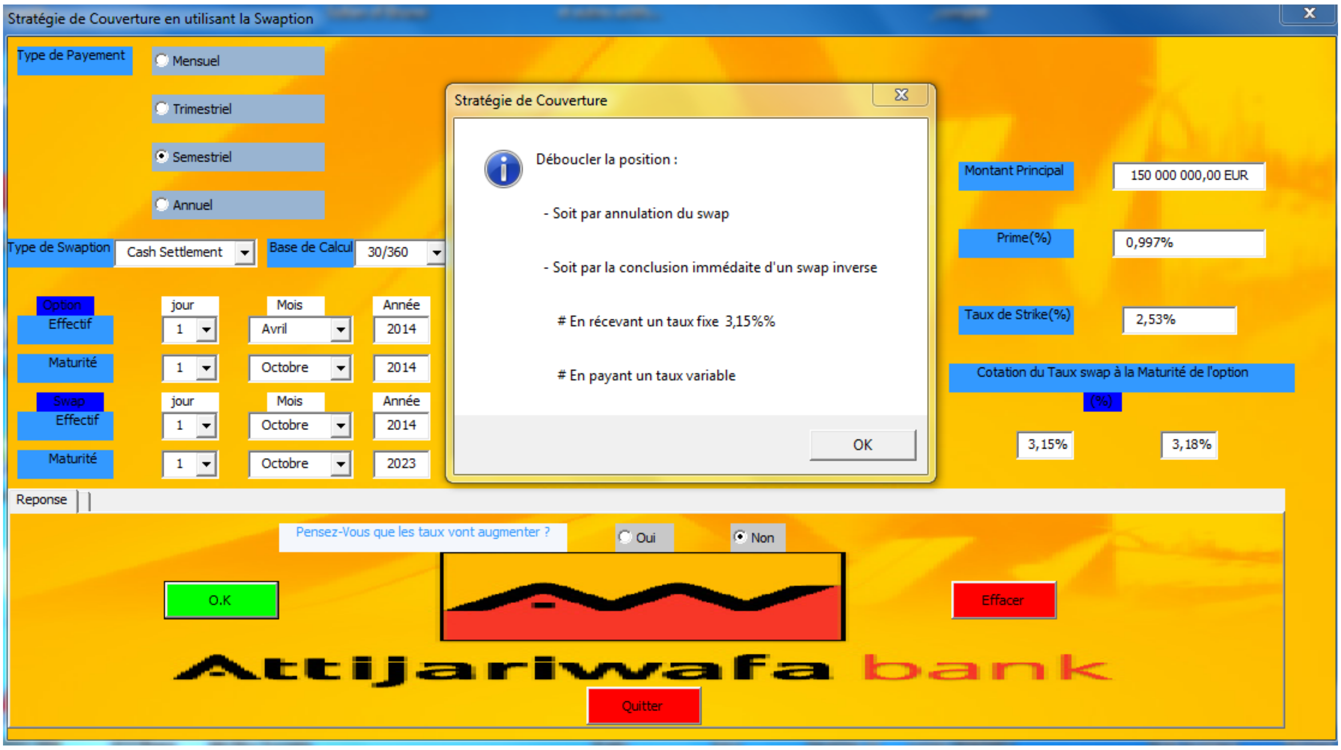


FIGURE 4.5 – La stratégie de couverture dans le cas de la hausse des taux

Hypothèse 2 : Baisse des taux

Si Le 01 Octobre 2014 le taux de swap à 9 ans contre Euribor 6 mois cote 2,12% - 2,19%.

FIGURE 4.6 – La stratégie de couverture dans le cas de la baisse des taux

Dans ce cas ,l'entreprise abandonnera son option et achètera éventuellement son swap au comptant s'il pense que le mouvement des taux vont augmenter.

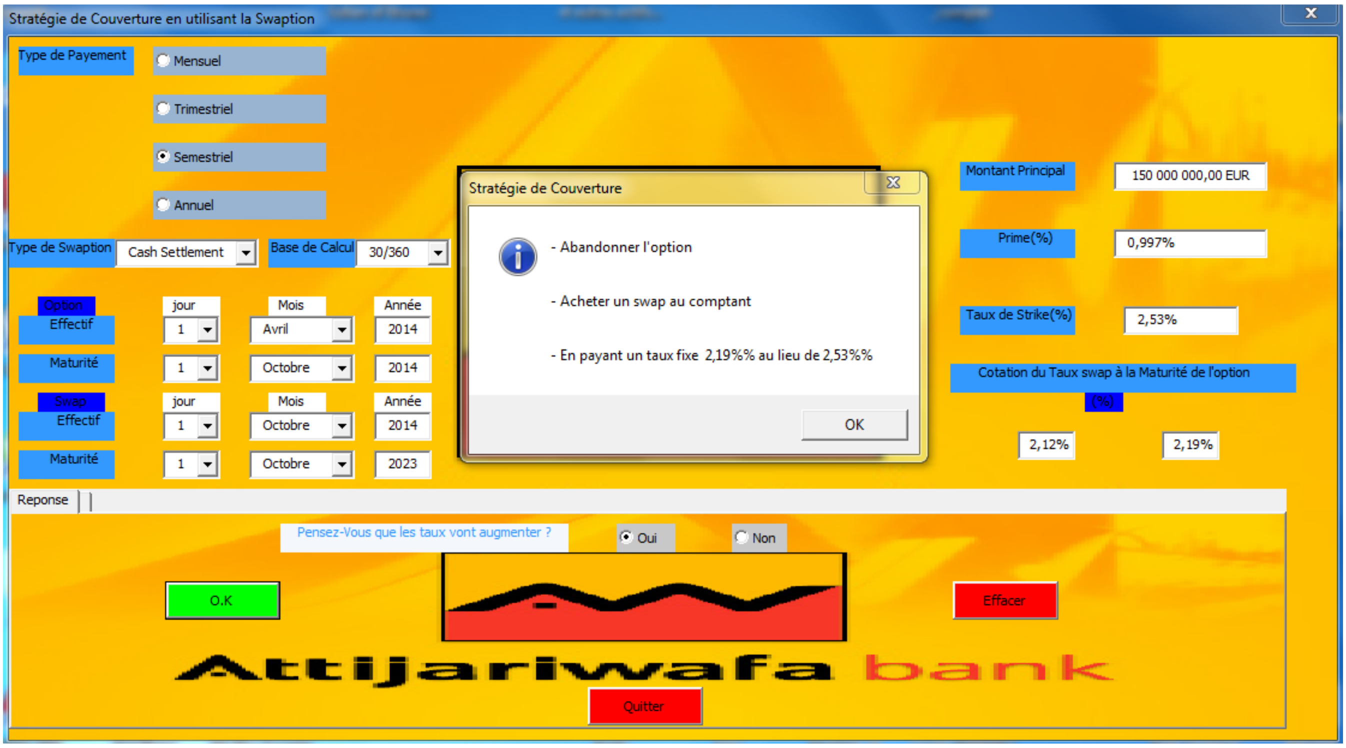


FIGURE 4.7 – La stratégie de couverture dans le cas de la baisse des taux

Conclusion : Le droit de payer le taux fixe sur swap acheté dès le octobre 2014 permet à l'entreprise :

- Dans l'hypothèse d'une hausse des taux, de payer un taux fixe 2,53% au lieu de 3,20% pour un swap contracté le 01 octobre 2014

- Dans l'hypothèse d'une baisse des taux, de limiter sa perte au montant de la prime et de bénéficier au comptant du taux fixe 2,23% contre un taux de 2.53% pour un swap contracté le 01 Avril 2014 .

Conclusion

A la lumière de ce qui précède, nous pouvons dire que les swaptions sont des outils nécessaires de couverture contre le risque des taux mieux que les swaps, vu que ces derniers pourraient générer de risque de contrepartie en cas de mauvaise anticipation.

Tout d'abord , les deux méthodes d'interpolations étudiées à savoir : l'interpolation linéaire et celle de Splines Cubiques, convergent presque aux mêmes résultats. Néanmoins, l'interpolation Splines Cubiques est la plus robuste du fait qu'elle interpole des données dans des intervalles irréguliers.

Cependant, on a utilisé deux modèles pour valoriser les options des swaps : le modèle de black 76 et celui de Hull-White. Nos deux modèles utilisés convergent presque aux mêmes résultats que ceux de Bloomberg. Le modèle de Hull-White nous donne le meilleur résultat par rapport à celui du Black, même si ce modèle de Hull-White n'est pas un outil référentiel du marché financier. Donc notre pricer est un outil qui pourrait servir pour l'entité du Middle Office à contrôler sans aucun doute la prime donnée par les traders du Front office. Et aussi une utilité majeure dans l'optique de mark to market, afin d'évaluer la swaption durant sa période de vie pour voir le moment opportun et risqué de la swaption .

Le modèle de Hull-White, malgré qui est théoriquement bien fondé, utilise les données du marché offertes par le modèle de black, car ce dernier est le plus utilisé sur le marché.

Bibliographie

1. **John Hull**, Options futures et autres actifs dérivés, 6ème édition , 2007
2. **Roland Portait et Patrice Poncet** ,Finance de marché : instrument de base, produits dérivés, portefeuille de risque, 3ème édition Dalloz, 2012
3. **Grégoire Jauvion**, Adaption de la structure par des taux aux conditions de marché actuelles, Mémoire d'Actuariat, 2009
4. **Crédit Lyonnais**, Les produits dérivés de Taux,working paper, 1995
5. **Peter Tankov**, Calibration de modèle et couverture de Produit dérivés, Université Paris VII, Edition 2008
6. **Florent WilHelmy**, Analyse des modèles de taux d'intérêts pour la gestion actif-passif, 2010
7. **Asmaa BOUARAFA**, Etude et mise en place d'un outil d'aide à la décision pour l'évaluation et le pricing des produits de couverture du risque et taux d'intérêt : Swap de taux, juin 2009
8. **D.Akume, B. Luderer, G.-W. Weber**, Pricing and hedging of swaptions. TOM 8 , 2003
9. **Jean-Babtiste Desquilbet**, Valorisation des options, Université d'Atrois,*working paper*, Pages : 4-6.
10. **Alexis Fauth** ,Modèle de taux, surface de volatilité et introduction au risque de crédit, Université Lille I, *working paper* ,pages : 10-19.
11. **Nabil Saimi**, Estimation de la volatilité et filtrations non linéaire, *mémoire présentée à l'Université du Québec à Trois-Rivières*, 2004

Annexe I

Attijariwafa Bank

I.1 Aperçu sur Attijariwafa Bank

Le Groupe Attijariwafa bank, premier groupe bancaire et financier du Maghreb, avec **6,8 millions de clients** et **16 081 collaborateurs**, est une multinationale panafricaine. Présent dans **24 pays**, le Groupe se donne pour priorité la proximité avec ses clients et les met au cœur de sa stratégie via son ambitieux programme de bancarisation et ses efforts d'innovation continus. En plus de l'activité bancaire, le Groupe opère, à travers des filiales spécialisées, dans tous les métiers financiers : assurance, crédit immobilier, crédit à la consommation, leasing, gestion d'actifs, intermédiation boursière, conseil, location longue durée, factoring. . .

Doté d'une assise financière solide, d'un capital de savoir-faire diversifié et d'outils d'expertise modernes, le Groupe a réussi à se hisser en leader national incontesté des crédits à l'économie et des crédits à la consommation, des activités de corporate banking et de banque d'investissement, de la gestion d'actifs et des métiers de la bourse, du leasing et de la bancassurance.

Attijariwafa bank est basé au Maroc et opère dans 23 pays : en Afrique (Tunisie, Sénégal, Burkina-Faso, Guinée Bissau, Mali, Mauritanie, Côte-d'Ivoire, Congo, Gabon,Cameroun, Togo et Niger) et en Europe (Belgique, France, Allemagne, Pays-Bas, Italie et Espagne) à travers des filiales bancaires contrôlées majoritairement par la banque à Dubaï, Riyadh, Londres, Shanghaï et Tripoli à travers des bureaux de représentation. Pour l'exercice 2013, elle a réalisé un produit net bancaire de 17,87 milliards de dirhams (en hausse de 4,9 % comparé à 2012).

Les deux figures suivantes , nous donnent la répartition de l'actionnariat et l'organigramme d'Attijariwafa bank.

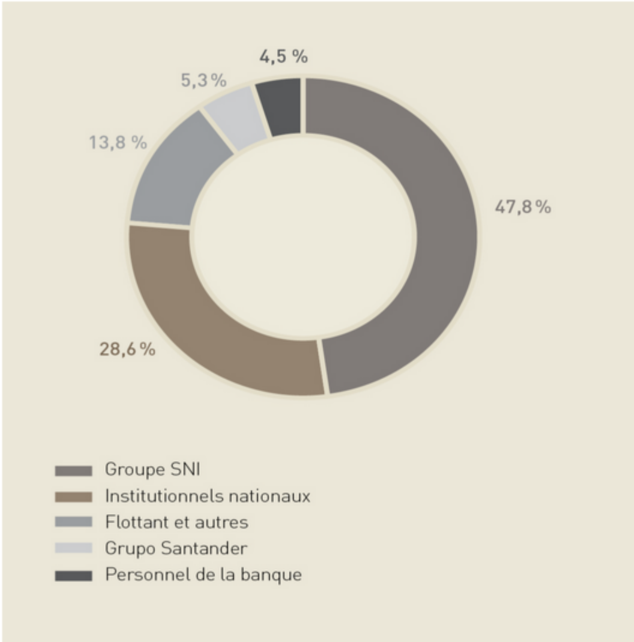


FIGURE I.1 – *La répartition du capital au 30 juin 2013*

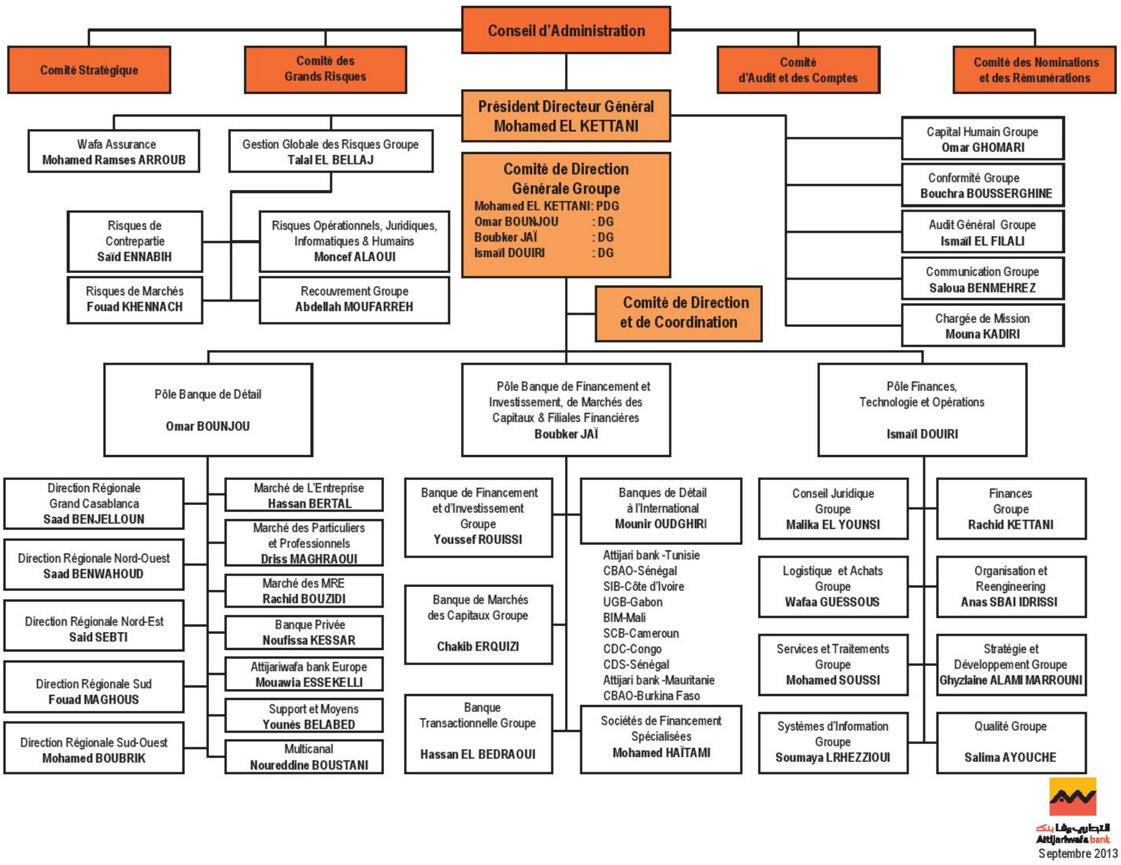


FIGURE I.2 – *Organigramme du groupe Attijariwafa bank, Septembre 2013*

I.2 Organisation de la Salle des Marchés

I.2.1 Le Front Office

Le front office appelé aussi dealing room ou trading room, celui-ci regroupe les opérateurs (Sales et Traders) des différents marchés.
Il est généralement divisé en unités plus ou moins homogènes, appelées desks, regroupées selon différents critères, par exemple,

-Type de marché : Comptant, Options, Futures, trésorerie, papiers, swaps ...

-Type d'opérateurs : Opérateurs de marché(Traders) qui assurent le gestion des positions et l'activité de centre de profit ou opérateurs(sales) qui ont pour vocation de développer la vente des produits et de stratégies à la clientèle. Les premiers sont jugés sur base de la marge dégagée par le trading, les seconds sur le volume d'affaires généré par leur activité.

-Type d'activité : **Cash** (change, marchés monétaires et obligataires), **dérivés** (taux, change) et dérivés actions

-Échéance des opérations de trésorerie : Court terme (change, swap, Options, futures. . .) ou opérations financières à long terme (marché obligataire, swap de dettes. . .)

I.2.2 Le Middle Office

Le middle office joue un rôle charnière, au sens propre comme au sens figuré. Proche culturellement et géographiquement du front office, il assure en particulier les responsabilités :

- Il assiste les traders (saisie additionnelle des deals complexes, par exemple)
- Il suit les limites et indicateurs de risques établis par la Direction des risques de Marché de la banque et s'assure que les traders s'y conforment scrupuleusement.
- Il participe activement à l'élaboration du résultat de gestion des activités de marché, effectue les rapprochements nécessaires avec le résultat comptable, analyse et corrige les résiduels.

I.2.3 Le Back office

Le back office réalise la majeure partie du traitement administratif des opérations. Il est souvent divisé en deux sections l'interbancaire, d'une part et le suivi clientèle, d'autre part. Cette distinction s'explique par des différences de procédures administratives sur ces deux types de contreparties.
La première fonction du back office est de connaître et comptabiliser les positions de la banque sur les différents marchés. La seconde fonction est de procéder aux paiements engendrés par les opérations.
Le back office a ainsi la charge de s'assurer de la conformité des opérations à la réglementation en vigueur et de réaliser le suivi administratif.

Annexe II

Définitions et Démonstrations nécessaires

II.1 Base de Calcul

Il existe différentes conventions pour calculer une fraction d'année :

- la convention **Exact/Exact** : la fraction d'année entre deux dates est égale au nombre exact de jours entre ces deux dates, divisé par le nombre exact de jours de l'année en cours (365 ou 366).
- La convention **Exact/360** : la fraction d'année entre deux dates est égale au nombre exact de jours entre ces deux dates divisé par 360.
- la convention **Exact/365** : la fraction d'année entre deux dates est égale au nombre exact de jours entre ces deux dates divisé par 365.
- la convention **30/360** : on fait comme si tous les mois comptaient 30 jours (pour calculer le nombre de jours entre deux dates), et on divise ce nombre par 360.

II.2 Les principaux taux fixes et variables

Les taux fixes

T.M.P :Le Taux Moyen Pondéré ,Il est calculés par la Banque de France qui recense toutes les opérations de prêts effectués le jour J et d'une durée de 1 jour. Leur échéance est donc en J+1. Ces opérations sont faites par les Opérateurs Principaux de Marché(OPM). La Banque de France en déduit un Taux Moyen Pondéré des montants, arrondi au 1/16 le plus proche. Ce taux est publié en J+1 à 11h30. le passage à l'EURO, le TMP - Taux Moyen Pondéré - est remplacé par **l'EONIA** - Euro OverNight Index Average .

T4M : Le Taux Moyen Mensuel du Marché Monétaire (ou TMM) est la moyenne arithmétique des TMP du mois civil considéré. Les TMP des jours fériés sont calculés avec les taux au TMP de la veille ouvrée. Le T4M du mois i est publié le premier jour ouvré du mois i+1.

TAM : Le Taux Annuel Monétaire correspond au taux de rendement d'un placement mensuel à intérêts composés, renouvelé chaque fin de mois au T4M, sur les 12 derniers mois écoulés. Le TAM se calcule en fonction du nombre de jours exact de chaque mois et d'une année de 360 jours.

THO : Le Taux Hebdomadaire Obligataire sur le marché primaire est calculé à partir des taux actuariels bruts (unitaires et sans frais) des émissions obligataires à taux fixe d'une semaine. Les taux sont pondérés par les volumes de chaque émission (en valeur nominale).

TMO : Le Taux Mensuel Obligataire sur le marché primaire est calculé à partir des émissions intervenant dans les THO de tous les jeudis appartenant au mois considéré.

II.2.1 Les taux Libor / Euribor

Les grandes banques négocient en permanence entre elles des prêts et des emprunts dans toutes les devises, et ce pour des durées inférieures à un an. Ce marché court terme, sur lequel sont présents à la fois les institutions financières et les grandes entreprises, est le marché monétaire. Le taux auquel se prêtent les institutions financières bien notées par les agences de notation (nous ne rentrerons pas plus dans les détails) pour des maturités courtes est appelé taux LIBOR (London InterBank Offer Rate). Pour chaque devise, les taux Libor sont déterminés par le jeu de l'offre et la demande. Ils évoluent donc en fonction des conditions économiques, et sont donc des références largement utilisées sur les marchés. Par voie de conséquence, les taux Libor sont aujourd'hui les sous-jacents de la plupart des produits de taux. C'est donc l'évolution des taux Libor que nous allons chercher à modéliser par la suite.

Un taux Libor est toujours associé à une durée, appelée tenor du taux. Par exemple, le Libor 3 mois (noté Libor 3M) est le taux interbancaire pour une durée de 3 mois.

Le taux Libor associé à la zone euro est appelé Euribor ; pour une devise notée DEV, le taux Libor est appelé DEV-Libor (USD-Libor pour le dollar américain par exemple).

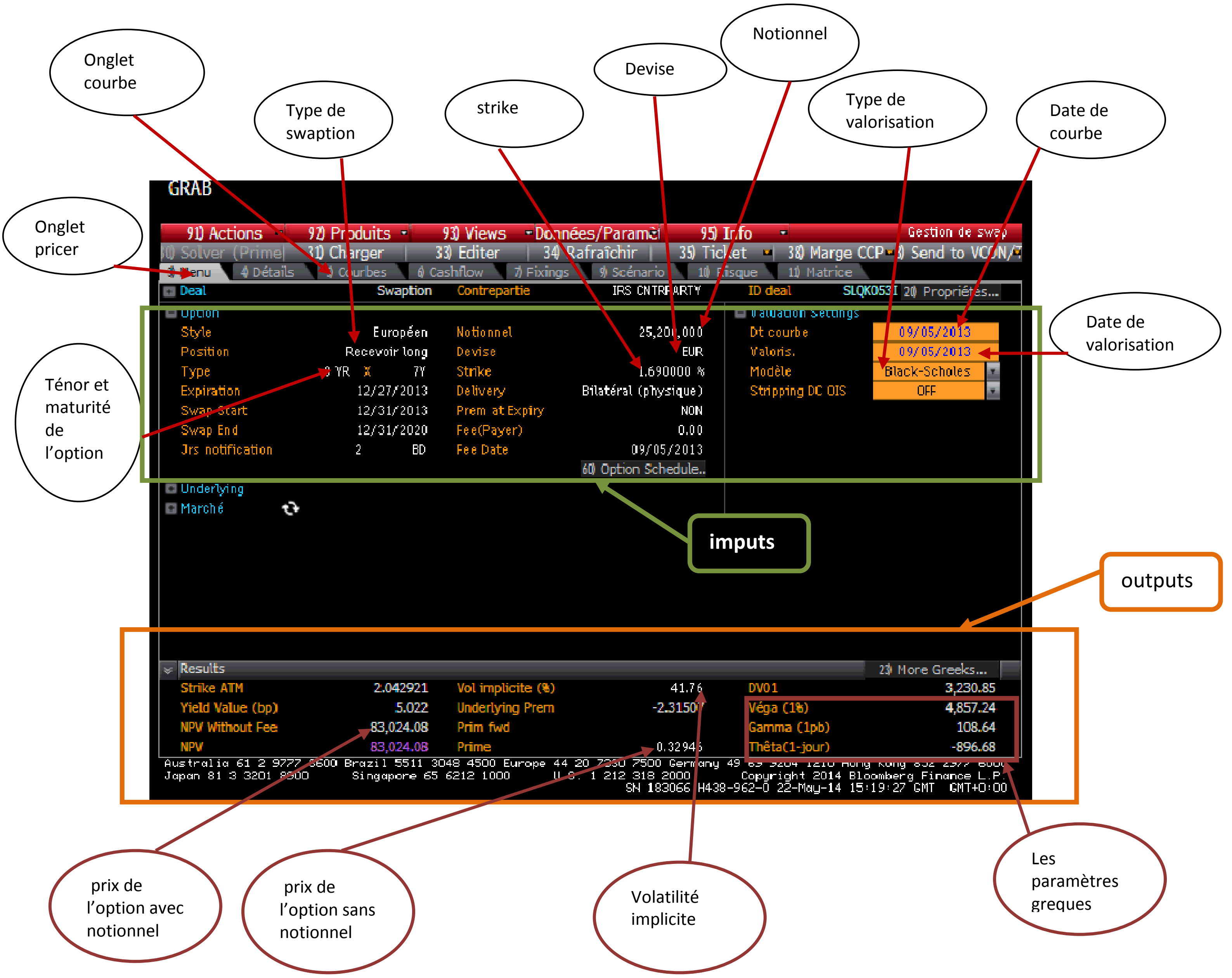
II.3 Bloomberg

Bloomberg LP est un groupe financier américain spécialisé dans les services aux professionnels des marchés financiers et dans l'information économique et financière aussi bien en tant qu'agence de presse que directement, via de nombreux médias (télévision, radio, presse, internet et livres) dont les plus connus sont probablement ses propres chaînes de télévision par câble/satellite.Créé en 1981 par Michael Bloomberg, maire de New York depuis janvier 2002, ce groupe qui a commencé à opérer en 1983, emploie en 2008, plus de 10 000 employés répartis dans plus de 130 pays.

Activité :

Son activité d'origine était strictement limitée aux taux d'intérêt et reposait sur l'exploitation d'une base de données historiques sur les courbes de taux des emprunts d'État du Trésor américain, rachetée par Michael Bloomberg à son ancien employeur, la banque d'investissement Salomon Brothers. Le trait de génie a consisté à ajouter, sur les terminaux dédiés à la consultation de cette base de données, bien avant le développement d'Internet et de ses fonctionnalités, un système de messagerie entre professionnels, ainsi que des nouvelles et des retransmissions de cours d'instruments financiers, qui allaient à leur tour enrichir la base de données. Ces terminaux multi-fonctions se sont rapidement imposés, malgré leur coût élevé, sur les postes de travail de presque tous les opérateurs des marchés financiers.

Explication détaillée du Pricer de Bloomberg



<u>Démonstration :</u> Interpolation par Splines cubiques

Avec une telle méthode, la fonction d'interpolation à chaque intervalle (x_i , x_{i+1}) est donnée comme suit :

$$S_i(x) = a_i x^3 + b_i x^2 + c_i x + d_i \quad \forall\, i = 1,2 \ldots \ldots, n-1.$$

Cette équation permet d'avoir le système suivant :

$$S(x) = \begin{cases} a_1x^3 + b_1x^2 + c_1x + d_1 & si \;\; x \in [x_1, x_2] \\ a_2x^3 + b_2x^2 + c_2x + d_2 & si \;\; x \in [x_2, x_3] \\ \vdots & \\ \vdots & \\ a_{n-1}x^3 + b_{n-1}x^2 + c_{n-1}x + d_{n-1} & si \;\; x \in [x_{n-1}, x_n] \end{cases}$$

Hypothèses de splines cubiques :

Nous supposons que S_{i-1} et S_i sont reliée au point de contrôle x_i et donc on aura :

$$S_{i-1} = f(x_i) = y_i.$$

Les dérivées première et seconde S' et S'' sont supposées continues aux points x_i.

Posons :

$$Z_i = S_i''(x_i).$$

$$Z_{i+1} = S_i''(x_{i+1}).$$

$$S_i''(x) = \frac{Z_i}{h_i}(x_{i+1} - x) + \frac{Z_{i+1}}{h_i}(x - x_i).$$

$$h_i = x_{i+1} - x_i.$$

En intégrant deux fois $S_i''(x)$ on aura la formule suivante :

$$S_i(x) = \frac{Z_i}{6h_i}(x_{i+1} - x)^3 + \frac{Z_{i+1}}{h_i}(x - x_i)^3 + c\,(x - x_i) + d(x_{i+1} - x).$$

Sachant $S_i(x_i) = y_i$ et $S_i(x_{i+1}) = y_{i+1}$, on peut déterminer les constantes c et d.

Nous pouvons réécrire que :

$$S_i(x) = \frac{Z_i}{6h_i}(x_{i+1} - x)^3 + \frac{Z_{i+1}}{6h_i}(x - x_i)^3 + (\frac{\mathrm{y_{i+1}}}{\mathrm{h_i}} - \frac{\mathrm{Z_{i+1}h_i}}{6})(\mathrm{x} - x_i) + (\frac{\mathrm{y_i}}{\mathrm{h_i}} - \frac{\mathrm{Z_ih_i}}{6})(x_{i+1} - x).$$

Cherchons maintenant les inconnues Z_i.

$$S'_{i-1}(x_i) = \frac{Z_{i-1}h_{i-1}}{6} + \frac{Z_ih_{i-1}}{3} + \frac{\mathrm{y_i}}{\mathrm{h_{i-1}}} - \frac{\mathrm{y_{i-1}}}{\mathrm{h_{i-1}}}.$$

$$S'_i(x_i) = -\frac{h_iZ_i}{3} - \frac{h_iZ_{i+1}}{6} - \frac{\mathrm{y_i}}{\mathrm{h_i}} + \frac{\mathrm{y_{i+1}}}{\mathrm{h_i}}.$$

En égalant les deux expressions dérivées nous aurons :

$$Z_{i-1}h_{i-1} + 2Z_i(h_{i-1} + h_i) + h_iZ_{i+1} = \frac{6}{h_i}(y_{i+1} - y_i) - \frac{6}{h_i}(y_i - y_{i-1}).$$

Puisque le système d'équation admet n-2 équation et n inconnues $(Z_1, \dots\dots\dots\dots, Z_n)$, nous pouvons mettre que $Z_1 = Z_n = 0$.

Finalement, le système s'écrit sous la forme suivante :

$$\begin{bmatrix} u_2 & h_2 & & & & \\ h_2 & u_3 & h_3 & & & \\ & & & & & \\ & & & h_{n-3} & u_{n-2} & h_{n-2} \\ & & & & h_{n-2} & u_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_2 \\ Z_3 \\ \\ Z_{n-2} \\ Z_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_2 \\ v_3 \\ \\ v_{n-2} \\ v_{n-1} \end{bmatrix}$$

Avec :

$$h_i = x_{i+1} - x_i.$$

$$u_i = 2(h_i + h_{i-1}).$$

$$b_i = \frac{6}{h_i}(y_{i+1} - y_i).$$

$$v_i = b_i - b_{i-1}.$$

Démonstration : Black 76

Hypothèses :

Il y'a absence d'opportunité d'arbitrage.

L'évolution de l'actif sous-jacent suit le processus suivant $df_t = f_t(\sigma dw_t)$.

Le marché fonctionne en temps continu.

Aucune dividende n'est versée par l'actif sous-jacent.

σ est supposée constante.

Les éléments du travail :

T: La maturité du swap.

T_i : La date du iième paiement.

$P(0, T_i)$: Le prix zéro-coupon à l'instant i.

r_k : Le taux strick.

f_T : Le taux fordward à l'instant T .

L : Le notionnel

m : La fréquence du paiement.

w_t : Le mouvement broniew à l'instant t.

σ : La volatilité du marché.

Propositions admises :

Sous la probabilité risque-neutre Q , la valeur d'une swaption payeuse à chaque instant de paiement T_i est martingale : $payoff - swaption - payeuse = \frac{L}{m}\max(f_T - r_k, 0)$.
La solution de l'EDP $df_t = f_t(\sigma dw_t)$ est donnée par$f_T = f_0 \exp(\left(-\frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma w_T)$.

Démonstration :

Si on considère que les paiements de la swaption est se fait sur m fréquences et n années On aura :

$$swaption - payeuse = \sum_{i=1}^{mn} \frac{L}{m} P(0,T_i) E_Q[\max(f_T - r_k, 0)].$$

$$= \sum_{i=1}^{mn} \frac{L}{m} P(0,T_i) E_Q\left[(f_T - r_k) 1_{\{f_T \geq r_k\}}\right].$$

$$= \sum_{i=1}^{mn} \frac{L}{m} P(0,T_i) E_Q\left[f_T 1_{\{f_T \geq r_k\}} - r_k 1_{\{f_T \geq r_k\}}\right].$$

On sait bien que $E_Q\left[1_{\{f_T \geq r_k\}}\right] = Q(f_T \geq r_k)$ et donc on aura :

$$swaption - payeuse = \sum_{i=1}^{mn} \frac{L}{m} P(0,T_i)(E_Q\left[(f_T 1_{\{f_T \geq r_k\}}\right] - r_k Q(f_T \geq r_k)).$$

On a: $$f_T \geq r_k \rightarrow f_0 \exp\left(\left(-\frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma w_T\right) \geq r_k.$$

Ceci nous donne que $$w_T \geq \frac{1}{\sigma}[\ln\left(\frac{r_k}{f_0}\right) - \left(-\frac{\sigma^2}{2}\right)T].$$

Puisque $w_T \sim N(0,T)$, donc $\frac{w_T}{\sqrt{T}} = U \sim N(0,1)$. ceci nous donne que :

$$U \geq \frac{1}{\sigma\sqrt{T}}[\ln\left(\frac{r_k}{f_0}\right) - \left(-\frac{\sigma^2}{2}\right)T].$$

$$Q(f_T \geq r_k) = 1 - \varphi\left(U \leq \frac{1}{\sigma\sqrt{T}}\left[\ln\left(\frac{r_k}{f_0}\right) - \left(-\frac{\sigma^2}{2}\right)T\right]\right).$$

$$= 1 - \varphi(\frac{1}{\sigma\sqrt{T}}\left[\ln\left(\frac{r_k}{f_0}\right) - \left(-\frac{\sigma^2}{2}\right)T\right]).$$

$$= \varphi(-\frac{1}{\sigma\sqrt{T}}\left[\ln\left(\frac{r_k}{f_0}\right) - \left(-\frac{\sigma^2}{2}\right)T\right]).$$

$$= \varphi(\frac{1}{\sigma\sqrt{T}}\left[\ln\left(\frac{f_0}{r_k}\right) + \left(-\frac{\sigma^2}{2}\right)T\right]).$$

Et donc $$Q(f_T \geq r_k) = \varphi(d_2). \quad (*)$$

De même on a : $E_Q\left[(f_T 1_{\{f_T \geq r_k\}}\right] = \int_{f_T \geq r_k} f_T \varphi(u) du.$

$$= \int_{-d_2}^{\infty} f_0 \exp(\left(-\frac{\sigma^2}{2}\right) T + \sigma\sqrt{T} U) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{U^2}{2}} du.$$

Posons $V = U - \sigma\sqrt{T_i}$. et donc $dV = dU$.

$$E_Q\left[(f_T 1_{\{f_T \geq r_k\}}\right] = f_0 \int_{-d_2 - \sigma\sqrt{T_i}}^{\infty} e^{-\frac{V^2}{2}} dv.$$

$$= f_0(1 - \varphi\left(-d_2 - \sigma\sqrt{T}\right))$$

$$E_Q\left[(f_T 1_{\left\{f_{T_i} \geq r_k\right\}}\right] = f_0 \varphi\left(d_2 + \sigma\sqrt{T}\right)$$

$$= f_0 \varphi(d_1) \quad (**)$$

Finalement on aura la formule suivante :

$$swaption - payeuse = \sum_{i=1}^{mn} \frac{L}{m} P(0, T_i)[E_Q\left[(f_T 1_{\{f_T \geq r_k\}}\right] - e^{-rT} r_k Q(f_T \geq r_k)].$$

(*) et (**) nous donne :

$$swaption - payeuse = \sum_{i=1}^{mn} \frac{L}{m} P(0, T_i)(f_0 \varphi(d_1) - r_k \varphi(d_2)).$$

De la même manière, on peut montrer que la valeur d'une swaption receveuse est donnée par :

$$swaption - receveuse = \sum_{i=1}^{mn} \frac{L}{m} P(0, T_i)\left(r_k \varphi(-d_2) - f_0 \varphi(-d_1)\right).$$

Mais dans ce cas, au lieu de travailler avec $\max(f_T - r_k, 0)$ on travaille avec $\max(r_k - f_T, 0)$.