

INSTITUT NATIONAL
DE STATISTIQUE ET D'ECONOMIE APPLIQUEE
INSEA

PROJET DE FIN D'ETUDES
Organisme d'accueil : ACAPS

Allocation d'actifs selon le critère de maximisation
des fonds propres économiques dans le cas d'une
assurance non vie marocaine

Préparé par : **Mr. Jmoula Alaeeddine**
Mr. Taleb Iliass

Sous la direction de : **Mr. Chaoubi Abdelaziz (INSEA)**
Mr Elfakir Said (ACAPS)

Soutenu publiquement comme exigence partielle en vue de l'obtention du

Diplôme d'Ingénieur d'Etat

Option : **Actuariat Finance**

Devant le jury composé de :

- **Mr. Chaoubi Abdelaziz (INSEA)**
- **Mr. Guedira Faiçal (INSEA)**
- **Mr Elfakir Said (ACAPS)**

Dédicace

Je dédie cet humble travail

A Mes très chers parents pour les sacrifices, l'affection, l'amour et le soutien que vous m'avez apportés. Vous êtes ma fierté et ma raison d'être,

Aucune dédicace ne saurait exprimer à sa juste valeur le profond amour que je vous porte.

Je vous aime.

A mes chères sœurs, je suis très fier de vous, et je souhaite que vous réalisiez vos rêves et que vous alliez au-delà de vos ambitions.

Je vous aime.

A mes chers grands parents, à ma grande famille, ce travail est le vôtre.

A mon cher binôme et cher Iliass, merci pour ta compréhension, ta patience et pour tous les moments joyeux et parfois difficiles que nous avons partagés ensemble durant ces trois ans.

A mes amis, Brahim, Bahae, Mohammed, Charafeddine, Yassine, Driss, Anwar...

A tous ceux qui m'aiment.

Alaeeddine

Je dédie ce travail à toute personne qui a participé de près ou de loin à ma formation

Iliass

Remerciements

Nous avons l'honneur d'exprimer nos sincères et nos vifs remerciements à notre grand et respectueux professeur, Mr. Chaoubi Abdelaziz, d'avoir accepté de nous encadrer et de nous aider par ses fructueux conseils et son précieux soutien.

Nous devons également remercier notre encadrant externe, Mr. El fakir Said, responsable département statistique, de nous avoir orienté et accompagné tout au long de la période de stage.

Nous remercions toute l'équipe de l'autorité de contrôle des assurances et de la prévoyance sociale (ACAPS) pour leur accueil, leur disponibilité et leur écoute.

Nos remerciements les plus distingués vont également à notre professeur Monsieur EL QALLI Yassine qui a contribué à l'avancement de ce travail.

Et finalement, nous tenons à remercier toutes les personnes qui ont participé de près ou de loin à la réussite de ce modeste travail.

Résumé

Dans le domaine de l'assurance, il y a plusieurs critères proposant des techniques pour trouver la stratégie d'allocation d'actifs optimale. Le présent travail traite justement de cette question, plus précisément, nous avons essayé d'adapter l'un des plus innovants parmi ces critères, au cas particulier d'une compagnie d'assurance IARD se conformant à la réglementation marocaine. Ce critère est appelé : « le critère de maximisation des fonds propres économiques ». Signalons qu'il a été étudié pour la première fois par, *Frédéric PLANCHET* et *Pierre THEROND*[2004].

Mais de quoi s'agit-il exactement?

Il s'agit d'un critère qui revient à déterminer, l'allocation d'actifs maximisant, l'espérance de la valeur actualisée au taux de rendement du portefeuille des actifs financiers de la compagnie d'assurance rapportée au niveau de ses fonds propres comptables initiaux. Ce critère permet, à l'encontre du modèle de Markowitz traditionnel et ses dérivées, d'inclure les contraintes réglementaires propres au secteur.

Dans ce mémoire, nous avons effectué une présentation théorique du critère pour les deux cas: mono-périodique et multi-périodique, puis nous l'avons suivi, pour chaque cas, d'une application permettant son illustration. Ainsi, nous avons trouvé que pour le cas de deux actifs financiers : une action de BMCE et un zéro coupon bond, le critère propose une allocation optimale de 65% dans l'action pour le cas mono-périodique, contre une allocation de 63,2 % pour le cas multi-périodique, ce qui nous a permis de conclure, d'un côté, que l'allocation optimale ne change presque pas avec la durée d'investissement considérée, en effet elle ne dépend que des caractéristiques de l'actif , et d'autre cote que le critère mérite bien l'importance qu'on lui accorde du fait de sa simplicité et objectivité.

Mots clés : allocation optimale, maximisation des fonds propres économiques, bilan, portefeuille financier, probabilité de ruine, simulation de Monte Carlo.

Liste des abréviations

MSR : Marge de solvabilité réglementaire.

ACAPS : Autorité de contrôle des assurances et de la prévoyance sociale.

K-S: Le test de kolmogorov smirnov.

AIC: Critère d'information d'Akaike.

MFPE : Le critère de maximisation des fonds propres économiques.

LN : Loi log normale.

CL : Chain ladder.

BMCE : Banque marocaine du Commerce extérieur.

TMP : Taux moyen pondéré.

T.r : Taux de rétention.

FD : Facteur de développement.

AR : Auto régressif.

PAC : Coefficient d'autocorrélation partielle.

DB : Statistique de Darbin Watson.

Table de figures

FIGURE 1 : HISTORIQUE DU PRIX DE L'ACTION DE BMCE	20
FIGURE 2 : HISTORIQUE DU RENDEMENT LOGARITHMIQUE JOURNALIER DE L'ACTION	20
FIGURE 3 : HISTORIQUE DU TAUX ANNUEL COURT	23
FIGURE 4 : HISTOGRAMME ET STATISTIQUE DESCRIPTIVE DU TMP ANNUEL	24
FIGURE 5 : TEST DE STATIONNARITE DE DFA (MODELE AVEC TENDANCE ET CONSTANTE)	24
FIGURE 6 : TEST DE STATIONNARITE DE DFA (MODELE AVEC CONSTANTE)	25
FIGURE 7 : RESULTAT DU TEST DE DFA CONCERNANT LA STATIONNARITE	25
FIGURE 8 : TEST D'AUTO CORRELATION	25
FIGURE 9 : L'ESTIMATION DES PARAMETRES DU MODELE	26
FIGURE 10 : TEST DE LA NORMALITE DES RESIDUS	26
FIGURE 11 : EVOLUTION ANNUELLE DU TMP ENTRE 2017 ET 2024	27
FIGURE 12 : ILLUSTRATION DE LA SITUATION DE LA COMPAGNIE DANS LE CAS MONO-PERIODIQUE	33
FIGURE 13 : HISTOGRAMME DES FREQUENCES	40
FIGURE 14 : DENSITES DE PROBABILITE D'UNE LOI GAMMA ET D'UNE LOI LOG-NORMALE	40
FIGURE 15 : LES FONCTIONS DE REPARTITIONS DES LOIS UTILISEES	40
FIGURE 16 : LE GRAPHE DE LA FONCTION-OBJECTIF EN FONCTION DE L'ALLOCATION	42
FIGURE 17 : L'ALLOCATION OPTIMALE EN FONCTION DE LA VOLATILITE DE L'ACTION	43
FIGURE 18 : LA PROBABILITE DE RUINE EN FONCTION DE LA PART INVESTIE DANS L'ACTION EN %	45
FIGURE 19 : L'ESPERANCE DE LA VALEUR ACTUALISEE DES PRESTATIONS AU TAUX DE RENDEMENT DU PORTEFEUILLE EN FONCTION DE L'ALLOCATION	53
FIGURE 20 : LES STATISTIQUES DE BASE	66
FIGURE 21 : LES PARAMETRES DES LOIS D'AJUSTEMENT	66
FIGURE 22 : LE TEST DE KOLMOGOROV-SMIRNOV	67
FIGURE 23 LE CRITERE AIC	68

Liste des tables

TABLE 1 : VALEURS PREVUES DU TAUX D'INTERET ANNUEL ENTRE 2017 ET 2024	27
TABLE 2 : EXEMPLE D'UN TRIANGLE INCREMENTAL DE DEVELOPPEMENT 'RUN-OFF TRIANGLE'	29
TABLE 3 : REPRESENTATION D'UN TABLEAU DE DEVELOPPEMENT CUMULATIF	29
TABLE 4 : UTILISATION DES FACTEURS DE DEVELOPPEMENT POUR REMPLIR LE TABLEAU INFERIEUR	30
TABLE 5 : LE MODELE DE L'ACTIF RISQUE	38
TABLE 6 : LES DEUX PREMIERES DERIVEES DE LA FONCTION-OBJECTIF DU MODELE MONO-PERIODIQUE AVEC 2 ACTIFS	38
TABLE 7 : LES CONDITIONS D'EXISTENCE D'UNE SOLUTION NON TRIVIALE	38
TABLE 8 : LE BILAN SIMPLIFIE A T=0	41
TABLE 9 : LE MODELE DE BLACK ET SCHOLES DE L'ACTION DE BMCE	42
TABLE 10 : LE BILAN SIMPLIFIE DANS LE CAS MULTI-PERIODIQUE A LA DATE T=0	46
TABLE 11 : LES ENTREES ET SORTIES DE LA COMPAGNIE A T DIFFERENT DE 0 DANS LE CAS MULTI-PERIODIQUE	47
TABLE 12 : ILLUSTRATION DE L'OPERATION D'ACTUALISATION DANS LE CAS DE T=3	49
TABLE 13 : LA PROJECTION DU TAUX D'INTERET POUR LES 8 PROCHAINES ANNEES.	51
TABLE 14 : LE TRIANGLE DE DEVELOPPEMENT POUR SINISTRES, PAYEES, INCREMENTAUX EN MILLIERS DE DHS	52
TABLE 15 : LES VALEURS ESTIMEES DES FACTEURS DE DEVELOPPEMENT	52
TABLE 16 : ESTIMATION PAR PROJECTION DES PRESTATIONS ANNUELLES A PAYER EN MILLIERS DE DHS	52
TABLE 17 : LES PRESTATIONS PAYEES PAR ANNEE COMPTABLE EN MILLIERS DE DHS	53

Table de matières

DEDICACE	I
REMERCIEMENTS	II
RESUME	III
LISTE DES ABREVIATIONS	IV
TABLE DE FIGURES	V
LISTE DES TABLES	VI
TABLE DE MATIERES	VII
INTRODUCTION	13
CHAPITRE I. PRESENTATION DE L'ORGANISME D'ACCUEIL	14
I.1. Présentation générale	14
I.2. Activités de L'ACAPS	14
I.2.1. Division de l'organisation du marché et des opérations financières.	14
A. Service de l'organisation du marché et des relations internationales.	14
B. Service des opérations financières.	14
C. Service des statistiques	15
I.2.2. Division de contrôle des intermédiaires	15
I.2.3. Division des régimes de retraite	16
I.2.4. Division des assurances de personnes	16
I.2.5. Division du contrôle des entreprises	17
CHAPITRE II. MODELISATION DES ELEMENTS DU BILAN	18
II.1. L'actif	18
II.1.1. Les actions	18
A. Présentation	18
B. Modélisation de Black et Scholes	18
C. Application	20
C.1. Résultats	21
II.1.2. Obligation à coupon zéro	21
A. Présentation	21
B. Modélisation du taux d'intérêt	22

C.	Application du modèle de Vasicek	22
C.1.	La Discrétisation	22
C.2.	Présentation des données	23
C.3.	Statistique descriptive de la série TMP annuel	24
C.4.	Test de racine unitaire.	24
C.5.	L'auto corrélation	25
C.6.	Les paramètres du modèle	26
C.7.	Normalité des résidus	26
C.8.	Projection des valeurs	26
II.2.	Le passif	27
II.2.1.	Présentation	27
II.2.2.	Les méthodes de modélisation	28
A.	Méthodes déterministes	28
A.1.	Chain ladder	28
B.	Méthodes stochastiques	30
CHAPITRE III. LE CRITERE DE MAXIMISATION DES FONDS PROPRES ECONOMIQUES		32
III.1.	Le critère dans le cas Mono-périodique	32
III.1.1.	Enoncé du critère de maximisation des fonds propres économiques (MFPE)	33
A.	Provisions économiques	33
B.	Fonds propres économiques	34
C.	Le critère	34
III.1.2.	Le critère de MFPE dans le cas de la réglementation marocaine	35
A.	Présentation de la réglementation marocaine	35
B.	Le critère	36
B.1.	Le passif	37
B.2.	L'actif	37
C.	La solution du programme d'optimisation	38
III.1.3.	Application	39
A.	L'actif & passif de la compagnie	39
A.1.	Structure du passif	39
A.2.	Structure de l'actif	41
B.	Le critère de MFPE	42
B.1.	La solution optimale	42
B.2.	La solution optimale en fonction de la volatilité de l'action	43
B.3.	La probabilité de ruine en fonction de l'allocation	43
III.2.	Le critère dans le cas Multi-périodique	45
III.2.1.	Le bilan de la compagnie	45
A.	Le bilan à $t=0$	45
B.	Le bilan à t supérieur à 1	46
III.2.2.	La valorisation de la compagnie à l'instant initial	47
A.	Valeur du surplus de la compagnie à la fin de la période	47
B.	La valeur actualisée du surplus de la compagnie à $t=0$	48
III.2.3.	Le critère	49
A.	Le critère dans le cas général	49

B.	Le critère dans le cas de la réglementation marocaine	50
III.2.4.	Application	50
A.	Cadre générale & formulation du critère	50
B.	L'actif de la compagnie	51
B.1.	L'action de BMCE	51
B.2.	Le bon de capitalisation	51
C.	Le passif de la compagnie	51
D.	Résultats	53
CONCLUSION		54
BIBLIOGRAPHIE ET WEBOGRAPHIE		55
ANNEXE		56
Définitions générales		56
A.	L'inégalité de Jensen	56
B.	Simulation de Monte-Carlo	56
C.	Principe de la valeur espérée	57
Le code pour les cas mono et multi-périodique		58
A.	Les bibliothèques utilisées	58
B.	Le code dans le cas mono-périodique	58
C.	Le code pour le calcul de la solution optimale en fonction de la volatilité de l'action dans le cas mono-périodique	60
D.	Le code pour la recherche de la probabilité de ruine en fonction de la part investie dans l'action dans le cas mono-périodique	61
E.	Le code utilisé pour la recherche de la solution optimale dans le cas multi-périodique	63
La probabilité de ruine et Le code R pour la modélisation des sinistres.		66
A.	Le code R utilisé pour la modélisation de la loi du coût annuel par police	66
B.	L'approximation de Fenton Wilkinson	68
C.	La loi log normale	68

Introduction

L'inversion du cycle de production des compagnies d'assurance est l'une des caractéristiques majeures de ce secteur. La perception des primes au début de chaque période avant de payer les prestations à sa fin, oblige l'assureur d'estimer la sinistralité à laquelle il devrait faire face à la fin de la période, dans le but de déterminer avec la moindre erreur, le montant de cette prime, c'est ce qu'on appelle la tarification.

Grâce à ce délai entre l'encaissement des primes et le paiement effectif des prestations, l'assureur dispose d'une marge de manœuvre incontestable. En fait il peut, tout en respectant les contraintes réglementaires, investir les montants de ses fonds propres et de ses provisions techniques constituées en partie, avec les primes qu'il a encaissé, dans des actifs financiers (des actions, immobilier, bon de trésor...), d'une manière qui lui permet à la fois, d'optimiser ses gains à la fin de la période, et de fortifier ainsi sa place dans le marché concurrentiel. Ainsi on déduit la nécessité d'existence d'outils de gestion et de critères pour la recherche de cette allocation optimale.

Le nombre des travaux essayant de déterminer cette allocation optimale ne manque pas dans la littérature actuarielle, en fait, on trouve une multitude de critères, ainsi par exemple : il y a, d'une part, le modèle de Markowitz et ses dérivées, et d'autre part, les critères dits subjectifs qui se basent sur des mesures de risques, tel que la probabilité de ruine. Au sens ainsi défini, le critère de maximisation des fonds propres économiques qui sera étudié dans ce travail, est considéré comme étant objectif, car il ne fait pas appel à des mesures de risque.

Ce mémoire est divisé en trois grands chapitres. Le premier chapitre présentera le cadre général du stage qui a permis de réaliser ce travail, le deuxième évoquera la question du bilan simplifié d'une compagnie d'assurance non vie et sa modélisation, en particulier nous parlons de la modélisation des actions, du taux d'intérêt et des montants des sinistres, finalement, dans le dernier chapitre, nous évoquons le critère de maximisation des fonds propres économiques, pour ce faire nous commençons tout d'abord par présenter les variables et les hypothèses caractérisant le cadre général de la compagnie d'assurance non vie sur laquelle nous fondons nos résultats, et nous passons ensuite à la présentation du critère dans les deux cas de figure : le cas mono-périodique et celui multi-périodique.

Nous illustrons le critère, pour chacun des deux cas, en l'appliquant sur une compagnie d'assurance non vie réelle soumise à la réglementation marocaine, et pouvant investir dans deux actifs financiers : des actions de BMCE et des obligations à zéro coupon.

Le présent travail est inspiré des travaux de recherche réalisés par Norbert GAUTRON, Frédéric PLANCHET et Pierre THEROND [2004] dans le domaine de l'assurance vie.

Chapitre I. Présentation de l'organisme d'accueil

I.1. Présentation générale

L'Autorité de contrôle des assurances et de la prévoyance sociale et une autorité qui fait partie du ministère de l'économie et de finance. La mission principale de l'ACAPS est : la réglementation, le contrôle et le suivi de l'activité et de la situation financière des organismes d'assurances, de réassurances, de prévoyances sociales et des intermédiaires. Elle veille au :

- Respect des droits des assurés et bénéficiaires de contrats d'assurances (l'ayant droit), et la protection des sinistrés.
- Le contrôle technique des organismes ou services de prévoyances sociales publiques, semi-publiques ou privés.
- L'élaboration des lois et des règles qui régissent le secteur des assurances et de la prévoyance sociale.
- La réalisation des enquêtes et des études actuarielles.
- L'octroi et le retrait d'agrément des entreprises et des intermédiaires d'assurances.

Pour mieux comprendre les missions inhérentes à la responsabilité de l'ACAPS, nous allons présenter les attributions des divisions et services que nous avons eu la chance de visiter.

I.2. Activités de L'ACAPS

I.2.1. Division de l'organisation du marché et des opérations financières.

Le rôle principale de cette division, créée le 28 janvier 1993, est la réglementation du marché financier ainsi que de faire un suivi de son évolution et de ses performances, et aussi la consolidation des données statistiques et comptables relatives aux secteurs des assurances et de la prévoyance sociale, pour les publier dans des rapports d'activités, et probablement, pour les fournir aux demandeurs d'informations qu'ils soient externes ou internes à l'organisme. Cette division contient 4 importants services, en voici les détails.

A. *Service de l'organisation du marché et des relations internationales.*

Les attributions de ce service sont :

- L'élaboration et la contribution dans l'élaboration de l'arsenal juridique régissant le secteur des assurances et le secteur de la prévoyance sociale, et ce par la création des lois et par la détermination des sanctions.
- L'attribution et retrait des agréments aux entreprises d'assurance et de réassurance.
- Etablir des liens et des relations d'information et de coopération avec les organisations internationales et régionales intervenant dans le domaine des assurances.

B. *Service des opérations financières.*

L'attribution principale de ce service est la réglementation du marché financier ainsi que la surveillance, le suivi et le contrôle des opérations effectuées par les entreprises d'assurances et de réassurances sur les marchés financiers.

Les attributions sont détaillées comme suit :

- Le suivi des instruments financiers et la Participation à l'élaboration des textes législatifs et réglementaires relatifs aux marchés financiers.

- L'étude de la stabilité du système financier par le suivi des organismes de réassurance et d'assurance.
- L'assurance de la coordination avec les autres autorités de contrôle financier par exemple : Bank al Maghreb.

C. *Service des statistiques*

Voici les attributions de ce service :

- La Consolidation des données financières, comptables et statistiques, collectionnées à partir du contrôle sur pièce que l'autorité organise sur le secteur des assurances.
- Elaboration des reportings annuels/trimestriels/semestriels, ainsi que l'élaboration du rapport d'activité de l'ACAPS.
- Réception des demandes d'information de l'extérieur ainsi que de l'intérieur.
- Traitement des réclamations reçues des victimes, ayants droits ou avocats, concernant les sinistres qui font appel à l'intervention du Fonds de garantie des accidents de la circulation.

I.2.2. *Division de contrôle des intermédiaires*

L'attribution principale de cette division est : le contrôle ainsi que le suivi des intermédiaires d'assurance, à savoir : les agents, les courtiers et les banques d'assurances.

Ce contrôle se concrétise dans les actions suivantes :

- L'établissement des décisions d'octroi ou de retrait des agréments d'agent, de courtier ou de banque d'assurance.
- La réponse à la demande du changement d'extension d'agent ou du courtier à une autre branche d'assurance.
- La réponse à la demande du changement de l'adresse d'agent ou du courtier d'assurance.

Les services de cette division procèdent presque de la même façon, sauf que chacun contrôle et suit seulement les intermédiaires appartenant à la branche qui porte son nom. Prenons par exemple le service des agents d'assurance, ce service veille au respect des conditions d'obtention d'agrément d'agent d'assurance, à titre d'exemple nous citons :

- ✓ le candidat doit être de nationalité marocaine.
- ✓ Licence ou diplôme équivalent.
- ✓ Un stage au minimum de 6 mois.

Ajoutons à cela qu'elle organise sur instructions du ministre des finances, l'examen professionnel des agents d'assurances, par la suite elle reçoit les demandes d'octroi d'agrément d'agent d'assurance, et lorsque les conditions sont vérifiées par le demandeur, il est convoqué à l'examen, si ce dernier réussit l'examen, il doit respecter quelques règles, par exemple : il ne doit pas dépasser un an pour lancer sa société(ou son bureau), sinon on peut lui retirer l'agrément, aussi il est suivi et Contrôlé :

- i. Sur pièce : en fait, à la fin de chaque exercice il doit envoyer un rapport aux responsables de cette division pour qu'ils puissent chercher s'il n'y a pas de conformités.

- ii. Sur place : par une visite inopinée, pour voir s'il fait son travail ou pas. En cas de problèmes la division peut présenter des avertissements, des blâmes ou même retirer l'agrément à l'agent.

I.2.3. Division des régimes de retraite

La création de cette division a coïncidé avec lesancements du dossier de réforme des régimes de retraite. Cette réforme qui entend obvier au chaos que la caisse de retraite peut rencontrer en 2020 si les choses continuent à se dérouler sans aucune intervention, parmi les réformes on cite :

- ✓ Augmenter l'âge de retraite à 65ans.
- ✓ Diminuer le salaire de sortie en retraite, c'est-à-dire que ce dernier est inférieur strictement à 100% du dernier salaire du retraité.
- ✓ Augmenter les cotisations imposées aux fonctionnaires pour mieux alimenter la caisse de retraite.

Parmi les missions de cette division :

- L'étude des dossiers de retraite, elle peut demander des dossiers à la caisse de retraite mais elle ne peut pas lui imposer des sanctions (elle fait seulement le suivi).
- L'assistance aux conseils des administrations des grandes caisses.
- Elaboration des études nécessaires pour répondre à un texte (de loi) donné.
- Réalisation ou participation à la réalisation des études actuarielles.
- Réception des réclamations des affiliés aux organismes de la prévoyance sociale et de leurs ayants-droit.
- Participation à l'élaboration des textes législatifs ou réglementaires.

I.2.4. Division des assurances de personnes

Le rôle principal de cette division est le contrôle des organismes de la mutuelle et de la prévoyance sociale.

Le contrôle, comme l'on a déjà précisé, se fait en deux étapes :

- Un contrôle sur pièce : effectué par l'administration, sur la base des dossiers dont elle dispose ou des éléments d'information qu'elle a pu recueillir, mais sans procéder à des investigations sur place. Très souvent, le contrôle sur pièces se déroule sans que l'organisme soit informé.
- Contrôle sur place : une visite inopinée par l'ACAPS à l'organisme, pour mesurer la fiabilité de ce dernier, et pour s'assurer qu'il mène à bien son travail et qu'il respecte les règles qui lui sont imposées par la loi.

Ce contrôle a pour but de répondre à ces deux questions :

- Est ce que ces organismes respectent la loi et les réglementations qui encadrent le secteur ?
- Est ce qu'ils dédommagent les sinistrés ?

Aussi cette division fait un travail d'analyse, pour empêcher la survenue des problèmes dans le futur, donc elle détermine, à partir de son historique, si l'organisme de la prévoyance sociale protège les assurés, et s'il a une marge de solvabilité et des provisions techniques suffisantes.

I.2.5. Division du contrôle des entreprises

Cette dernière division vielle sur la restructuration et la liquidation des sociétés en difficultés financières, elle fait aussi le contrôle des entreprises, quelque soit le statut de ces entreprises :

- ✓ De toute branche
- ✓ Des entreprises spécialisées dans l'assurance vie ou crédit.
- ✓ Des entreprises d'assistance.

Ce contrôle ainsi effectué par cette division se déroule comme suit :

- ✓ Elle détermine si l'entreprise est solvable
- ✓ Aussi elle met en comparaison son passif et son actif pour s'assurer de la supériorité de ce dernier sur le premier, en cas de problèmes elle donne des recommandations.
- ✓ Finalement elle détermine la marge de solvabilité pour ses entreprises.

Quelle que soit les décisions prises par cette organisme à l'égard des pratiquants d'assurance, La finalité est toujours la même, à savoir la protection des assurés.

Chapitre II. Modélisation des éléments du bilan

II.1. L'actif

II.1.1. Les actions

A. Présentation

Les actions sont des titres de propriété émis par les entreprises de tout type et de toute taille. En achetant une action, l'investisseur devient propriétaire d'une partie (*fraction*) de cette entreprise, et il acquiert ainsi—*par le biais de ce titre*— un pouvoir sur tout ce qu'elle possède, et devient même décideur si le nombre d'actions qu'il détient est très grand. En contre partie du prix payé pour l'acquisition d'une action, l'investisseur bénéficie des dividendes distribuées périodiquement par la société émettrice, cette période peut varier le plus souvent elle est égale à une année comptable parce que c'est à la fin de chaque exercice comptable que les bénéfices sont dégagés.

A part ces dividendes, l'investisseur possède une autre source de revenu, en effet il peut mettre en œuvre des stratégies d'investissement qui lui permettent de réaliser des gains incroyables, la stratégie la plus répandue et la plus intuitive consiste à acheter les actions quand leur prix diminue et les vendre quand ce dernier augmente, cette stratégie n'est fructueuse que si on connaît d'avance¹ les mouvements que va effectuer le prix de l'action, sinon, il s'agit d'une simple loterie avec des chances de pertes ou du gain égales. D'où la nécessité de la modélisation du prix de cet actif.

B. Modélisation de Black et Scholes

Aujourd'hui le modèle de référence pour la modélisation du cours d'une action reste le modèle de Black et Scholes (1973). Il a l'avantage d'être un modèle simple et facile à estimer, il est basé sur l'hypothèse suivante : le rendement du prix de l'action décrit un mouvement brownien.

Ce modèle a pour inconvénient le nombre d'hypothèses assez restrictives qu'il nécessite pour être appliqué. Ces hypothèses sont contredites par les observations empiriques, ce qui incite les financiers de plus en plus à le critiquer.

En réalité les queues de distribution des rendements empiriques sont souvent plus épaisses que celles d'une loi log normale. Cet écart est lié en grande partie aux éléments suivants non pris en compte par ce modèle :

- i. Le cours d'une action n'est pas forcément continu : les cours des actions peuvent présenter des discontinuités.
- ii. La volatilité n'est pas réellement constante

Plusieurs autres modèles ont été développés pour mieux rendre compte de la réalité du marché :

- i. Des modèles à sauts, qui permettent d'intégrer des éventuelles discontinuités des cours, par exemple le modèle de Merton ou le modèle de Kou qui introduisent un processus de Poisson qui calcul le nombre de sauts pendant une période.

¹ Cette connaissance n'est pas exacte car le prix des actions est aléatoire, mais on peut construire des intervalles de confiance pour le prix de l'action.

$$S(t) = S_0 \exp \left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma B_t + \sum_{i=1}^{N_t} U_i \right)$$

- $S(t)$ le prix de l'action à l'instant t ;
 - S_0 le prix de l'action à $t=0$;
 - μ : Le drift de l'action
 - σ : La volatilité de l'action
 - B_t : Un mouvement brownien de moyenne 0 et de volatilité égale à t
 - U_i : Une variable aléatoire distribuées selon $N(0, \sigma_U)$, signalons que les U_i sont indépendantes et identiquement distribuées.
 - N_t : Un processus de poisson d'intensité λ , il présente le nombre de sauts dans l'intervalle $[0, t]$
 - Signalons que les processus $(B_t)_t, (U_i)_i, (N)_t$ sont indépendants.
- ii. D'autres modèles utilisent une volatilité stochastique, le modèle de Heston par exemple.

Malgré tout, le modèle de Black et Scholes reste le modèle le plus utilisé et le plus étudié.

➤ Black et Scholes

Ce modèle repose sur la résolution d'une équation différentielle stochastique (EDS), en supposant que le cours d'une action suit un mouvement brownien géométrique. Cette EDS s'écrit pour tout instant $t > 0$:

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = \mu \cdot dt + \sigma dB_t \text{ avec } B_t \text{ est un processus de Wiener}$$

En utilisant le lemme d'Itô et la condition à l'origine $S(0) = S_0$, la solution de cette équation s'écrit :

$$S(t) = S_0 \exp \left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma B_t \right)$$

Puisque le processus de Wiener suit une loi normale $N(0, t)$, le cours d'une action¹ suit une loi log-normale :

$$LN \left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t, \sigma^2 t \right)$$

Pour estimer les paramètres μ et σ on utilise le fait que :

$$R(t) = \ln \left(\frac{S(t)}{S(t-1)} \right) = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) + \sigma B \text{ avec } B \sim N(0,1)$$

La grandeur $R(t)$ est appelée le rendement logarithmique de l'action, ainsi nous déduisons que si nous disposons de l'historique des prix de l'action pour un grand nombre de périodes consécutives, on peut proposer l'estimation célèbre suivante :

¹ En supposant que le prix à l'origine est unitaire.

$$\begin{cases} \mu - \frac{\sigma^2}{2} = \frac{\sum_{t=1}^n R(t)}{n} = \bar{R} \\ \sigma^2 = \frac{\sum_{t=1}^n (R(t) - \bar{R})^2}{n - 1} \end{cases}$$

Signalons que l'erreur de cette approximation diminue quand le nombre n d'observations augmente.

C. Application

Appliquons le modèle ci-dessus pour trouver les paramètres de Black et Scholes de l'action de BMCE cotée en bourse marocaine

- Historique des prix

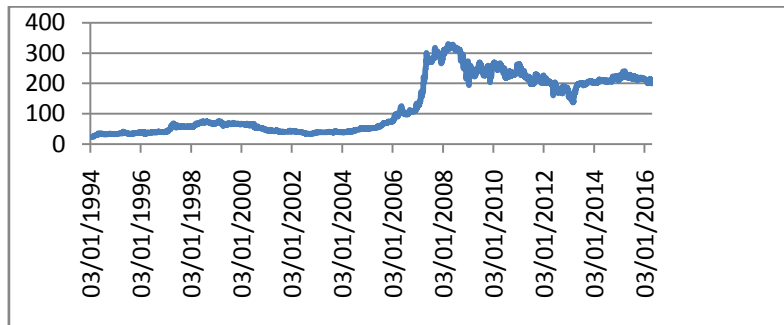


Figure 1 : historique du prix de l'action de BMCE

Nous remarquons que les actions de BMCE ont aussi été des victimes de la crise financière mondiale de 2008, en effet le prix a basculé fortement en cette année et il a continué de baisser jusqu'à l'année 2013, puis il a commencé d'augmenter légèrement.

- Historique du rendement logarithmique

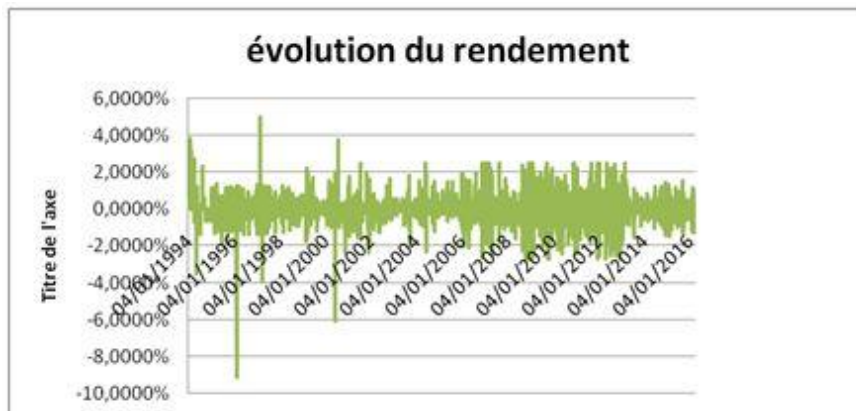


Figure 2 : historique du rendement logarithmique journalier de l'action

La remarque la plus importante que nous pouvons faire sur ce graphe est que le rendement logarithmique journalier de notre action est faible, en fait il oscille autour de zéro, et parfois il fait des mouvements d'une amplitude relativement grande, mais généralement nous pouvons dire que les mouvements sont d'une amplitude négligeable, ainsi nous arrivons à prévoir une valeur faible de la moyenne et de la volatilité car le rendement reste au voisinage de l'axe des abscisses, c'est ce qui est confirmé par les calculs :

$$\bar{R} = 0.0167\% \text{ et } Var(R) = 0.0036\%$$

C.1. Résultats

En appliquant la méthode d'approximation des paramètres présentée en haut, nous obtenons les valeurs suivantes pour le drift et la volatilité journalière de l'action de BMCE :

$$\sigma_{journalier}^2 = 0.0036\% \text{ et } \mu_{journalier} = 0.01852$$

Maintenant pour trouver l'estimation annuelle de la volatilité et du drift, et en considérant que l'année contient 260 jours ouverts, il suffit d'utiliser la relation suivante :

$$\frac{\mu}{260} = \mu_{journalier} \text{ et } \frac{\sigma^2}{260} = \sigma_{journalier}^2$$

En fait, en remarquant qu'un jour est égal, en année à $\frac{1}{260}$:

$$t = 1 \text{ jour} \Rightarrow t = \frac{1}{260} \text{ année}$$

Et en remplaçant, dans l'équation différentielle vérifiée par le prix annuel de l'action de BMCE la valeur du temps par $\frac{1}{260}t$, avec toujours t exprimé en année, nous obtenons la modélisation de Black et Scholes pour le prix journalier de l'action :

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = \frac{\mu}{260} \cdot dt + \frac{\sigma}{\sqrt{260}} \sqrt{t} dB$$

Maintenant, et par identification nous trouvons facilement les paramètres annuels suivants :

$$\mu = 0.042 \text{ et } \sigma = 0.0972$$

II.1.2. Obligation à coupon zéro

A. Présentation

Dans le domaine financier, une obligation est un titre de dette, en effet elle représente une créance sur son émetteur, cet émetteur qui lorsqu'il se trouve en difficultés financières (*besoins de financement, manque de liquidité, ...*) procède à l'émission de ladite obligation, signalons qu'il s'agit dans la majorité des cas d'une entreprise d'état ou d'une collectivité locale.

Un zéro coupon bond est un exemple d'obligation, il ne donne lieu à aucun flux monétaire pendant toute sa durée de vie, autrement dit aucun paiement n'est effectué avant sa date d'échéance T , ainsi l'acheteur de ce titre ne reçoit plus d'intérêts avant la date T . Dans ce travail nous nous intéressons seulement aux obligations à zéro coupon d'une maturité égale à une année, $T=1$. Ce type d'obligation possède une caractéristique très importante, en effet il permet d'éliminer complètement le risque du taux entre les deux dates d'achat et de maturité, c'est pour cette raison qu'il est considéré dans le marché financier comme étant un actif non risqué.

Soit r_1 le taux d'intérêt pour la période de $[0,1]$, et soit 'Valeur' la variable représentant le revenu qu'un zéro coupon bond va générer pour l'investisseur à la fin de la période, alors le prix de cet actif à tout $t \in [0,1]$ est :

$$Prix(t, T = 1) = Valeur \cdot e^{-r_1 \cdot t}$$

D'après cette formule nous remarquons que la détermination du prix de cet actif nécessite la connaissance du taux d'intérêt¹. La connaissance de la valeur exacte du taux d'intérêt pour différentes périodes est impossible, en effet il s'agit d'une variable macro-économique donc nous pouvons le considérer comme étant aléatoire du fait de l'environnement incertain dans lequel il évolue, c'est justement pour cette raison qu'on cherche à le modéliser.

B. Modélisation du taux d'intérêt

Le modèle de Vasicek, est parmi les premiers modèles stochastiques utilisés pour modéliser la courbe des taux, il permet de prendre en compte l'effet de retour à la moyenne que représente le taux d'intérêt. Ce modèle se base sur le fait que le taux court suit un processus d'Ornstein - Uhlenbeck :

$$dr(t) = \beta[\alpha - r(t)dt] + \sigma dw(t)$$

Equation 1 : L'équation différentielle du modèle de Vasicek

$r(t)$: est le taux court à l'instant t .

α : La moyenne sur le long terme du taux court.

β : La vitesse d'ajustement du taux court actuel vers sa moyenne de long terme.

σ : La volatilité.

$w(t)$: Un mouvement brownien standard.

La solution exacte de ce processus est la suivante :

$$r(t) = r_0 e^{-\beta t} + \alpha(1 - e^{-\beta t}) + \sigma e^{-\beta t} \int_0^t e^{\beta s} dw(s)$$

Equation 2 : La solution de l'équation différentielle de Vasicek

L'espérance du taux court est :

$$E[r(t)] = r_0 e^{-\beta t} + \alpha(1 - e^{-\beta t}) \text{ avec } \lim_{t \rightarrow \infty} E[r(t)] = \alpha \text{ "retour à la moyenne"}$$

Sa variance est:

$$\text{var}[r(t)] = \text{var}[r(t)] = \frac{\sigma^2}{2\beta} (1 - e^{-2\beta t})$$

C. Application du modèle de Vasicek

L'application du modèle cité précédemment nécessite la discrétisation du processus d'Ornstein-Uhlenbeck pour pouvoir donner les estimations de ses paramètres. Dans la suite nous essayons, en appliquant cette discrétisation, de modéliser la série du taux moyen pondéré TMP marocain qui s'étend de 01/01/2001 au 10/06/2016

C.1. La Discrétisation

L'équation de notre modèle est :

$$dr(t) = \beta[\alpha - r(t)dt] + \sigma dw(t)$$

Pour l'estimation des paramètres α , β et σ nous allons appliquer la discrétisation exacte définie comme suit :

¹ Valeur' Est une variable propre à l'émetteur de l'obligation, par contre r_1 est une variable macro-économique

$$r_t - r_{t-1} = \alpha(1 - e^{-\beta}) + (e^{-\beta} - 1)r_{t-1} + \varepsilon_t \text{ avec } \varepsilon_t \sim N\left(0, \frac{\sigma^2}{2\beta} * (1 - e^{-2\beta})\right)$$

Soit alors :

$$r_t = e^{-\beta} * r_{t-1} + \alpha(1 - e^{-\beta}) + \varepsilon_t$$

Autrement dit :

$$r_t = ar_{t-1} + b + \varepsilon_t \text{ avec } a = e^{-\beta} \text{ et } b = \alpha(1 - e^{-\beta})$$

Equation 3 : L'équation du processus autorégressif que le taux court suit

Cette équation montre que les taux courts suivent un processus autorégressif d'ordre 1 :AR(1).

➤ Processus autorégressif d'ordre 1

Un processus autorégressif est un modèle de régression pour des séries temporelles pour lequel la série temporelle est expliquée par ses valeurs antérieures, en particulier, un processus AR(1) est un processus qui dépend seulement de la dernière valeur qu'il a pris :

$$X_{t+1} = Cte_1.X_t + Cte_2 + \varepsilon_t, \text{ } Cte_2 \text{ et } Cte_1 \text{ sont les paramètres du modèle} \\ \text{et } \varepsilon_t \text{ un bruit blanc}$$

A l'aide de la méthode des moindres carrés ordinaires(MCO) nous allons estimer les paramètres du modèle en utilisant les relations suivantes :

$$\hat{\beta} = -\ln(\hat{a}) \text{ et } \hat{\alpha} = \frac{\hat{b}}{1-\hat{a}} \text{ et } \hat{\sigma} = \hat{\sigma}_\varepsilon * \sqrt{\frac{-\ln \hat{a}^2}{1-\hat{a}^2}}$$

Signalons que \hat{a} , \hat{b} et $\hat{\sigma}_\varepsilon$ sont les paramètres estimés, avec $\hat{\sigma}_\varepsilon$ est l'écart type estimé de ε_t

C.2. Présentation des données

Nous nous baserons dans notre étude sur des données journalières du Taux Moyen Pondéré (TMP), qui sont transformées dans la suite à des données annuelles, qui s'étalent du 2001 au 2016, soit donc 16 observations.

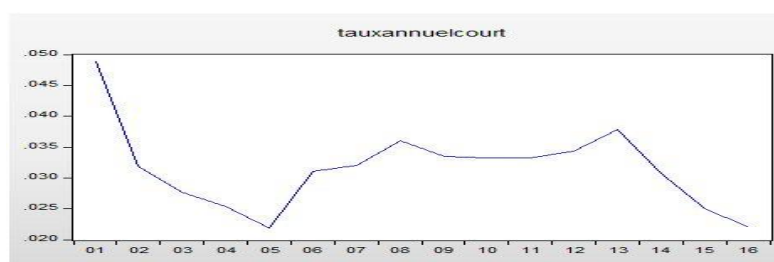


Figure 3 : Historique du taux annuel court

Nous remarquons que la série est stationnaire, mais, il faut faire les tests de Dickey-Fuller pour confirmer un tel résultat. Le logiciel qu'on utilisera dans cette enquête est Eviews.

C.3. Statistique descriptive de la série TMP annuel

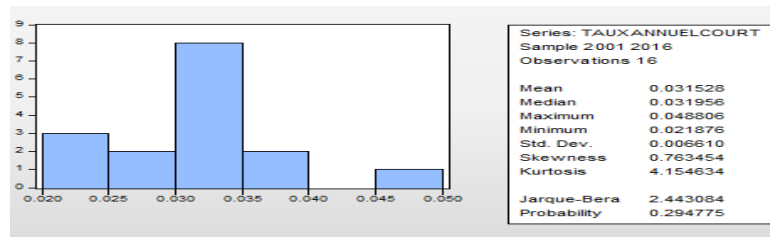


Figure 4 : Histogramme et statistique descriptive du TMP annuel

D’après les statistiques, le TMP est borné entre une valeur minimale de 2.1876% et une valeur maximale de 4.8806%, avec un écart-type de 0,006610.

➤ Le test Jarque-Bera

Ce test permet de tester l’hypothèse

$$H_0: \text{skewness} = 0 \text{ et } \text{kurtosis} - 3 = 0$$

La statistique du test est

$$J.B = \frac{n - k}{6} \left(S^2 + \frac{(K - 3)^2}{4} \right) \sim \chi^2_{2; 0.05}$$

Avec:

- n = Nombre d'observations
- k = Nombre de variables explicatives.
- S = Skewness, K = Kurtosis

Afin de tester la normalité de notre série, nous comparons la valeur de Jarque-Bera du tableau ci-dessus, à la valeur critique de la table de la loi khi-deux. Puisque $J.B = 2.44308 < 5,99$ ($\chi^2_{2;0,05}$), on accepte l’hypothèse H_0 , la distribution est ainsi bien normale.

C.4. Test de racine unitaire.

Afin d’identifier les caractéristiques d’une série chronologique, il faut nécessairement étudier sa stationnarité. Pour ce faire nous allons utiliser le test célèbre de Dickey-Fuller appelé test de racine unitaire, il permet de détecter, l’existence ou non d’une tendance dans une série temporelle. La démarche consiste à étudier un à un les modèles suivants:

1. $r_t = \varphi r_{t-1} + \varepsilon_t$ « modèle autorégressif d’ordre 1 »
2. $r_t = \varphi r_{t-1} + \alpha + \varepsilon_t$ « modèle autorégressif d’ordre 1 avec constante »
3. $r_t = \varphi r_{t-1} + bt + \alpha + \varepsilon_t$ « modèle autorégressif d’ordre 1 avec constante et tendance »

➤ test du 3^{ème} modèle

Included observations: 15 after adjustments				
Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
TAUXANNUELCOURT(-1)	-0.624603	0.197854	-3.156882	0.0083
C	0.017376	0.007095	2.449119	0.0306
@TREND("2001")	0.000116	0.000279	0.414366	0.6859
R-squared	0.469089	Mean dependent var		-0.001787
Adjusted R-squared	0.380604	S.D. dependent var		0.005898
S.E. of regression	0.004642	Akaike info criterion		-7.730402
Sum squared resid	0.000259	Schwarz criterion		-7.588792
Log likelihood	60.97801	Hannan-Quinn criter.		-7.731910
F-statistic	5.301340	Durbin-Watson stat		0.966987
Prob(F-statistic)	0.022394			

Figure 5 : Test de stationnarité de DFA (modèle avec tendance et constante)

Nous testons l'hypothèse de l'inexistence d'une tendance, c'est-à-dire $H_0: b = 0$, la t-statistic correspondante à la tendance : $t_{\hat{b}} = 0.414366$, est inférieure à la valeur critique qui est de 2.78, ainsi au seuil de 5% nous acceptons l'hypothèse de l'inexistence d'une tendance, donc il ne reste maintenant que de tester les deux premiers modèles : 1 et 2.

➤ Test du modèle 2

Included observations: 15 after adjustments

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
TAUXANNUELCOURT(-1)	-0.634416	0.190071	-3.337787	0.0053
C	0.018618	0.006222	2.992086	0.0104
R-squared	0.461493	Mean dependent var		-0.001787
Adjusted R-squared	0.420069	S.D. dependent var		0.005898
S.E. of regression	0.004492	Akaike info criterion		-7.849528
Sum squared resid	0.000262	Schwarz criterion		-7.755121
Log likelihood	60.87146	Hannan-Quinn criter.		-7.850534
F-statistic	11.14082	Durbin-Watson stat		0.944452
Prob(F-statistic)	0.005345			

Figure 6 : Test de stationnarité de DFA (modèle avec constante)

La statistique de student correspondante à la constante : 2.992086, est supérieure à la valeur critique égale à 2.52, donc au seuil de 5% nous rejetons l'hypothèse H_0 , donc il existe une constante dans notre modèle.

➤ Test de $\varphi = 1$

	t-Statistic	Prob.*
Augmented Dickey-Fuller test statistic	-3.337787	0.0315
Test critical values:		
1% level	-3.959148	
5% level	-3.081002	
10% level	-2.681330	

Figure 7 : Résultat du test de DFA concernant la stationnarité

Nous remarquons que la statistique du test de Dickey-Fuller Augmenté : -3.337787, est inférieure à la valeur critique du test : -3.081002. Donc nous déduisons en faveur de la stationnarité de notre série.

C.5. L'auto corrélation

Après avoir confirmé la stationnarité de notre série et l'existence d'une constante, nous essayerons d'identifier son modèle.

Autocorrelation	Partial Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob	
		1	0.295	0.295	1.6686	0.196
		2	-0.067	-0.169	1.7623	0.414
		3	-0.320	-0.278	4.0244	0.259
		4	-0.350	-0.217	6.9640	0.138
		5	-0.081	0.029	7.1377	0.211
		6	-0.082	-0.234	7.3310	0.291
		7	-0.025	-0.149	7.3507	0.393
		8	-0.147	-0.310	8.1307	0.421
		9	-0.021	-0.079	8.1493	0.519
		10	0.121	-0.098	8.6464	0.547
		11	0.282	0.090	13.428	0.266
		12	0.292	0.052	19.579	0.075

Figure 8 : Test d'auto corrélation

Soit PAC_i , le coefficient d'auto-corrélation partielle d'ordre i , nous allons tester l'hypothèse $H_0 : PAC_i = 0, i = 1 \dots 12$.

L'intervalle de confiance qui correspond à ce test, au niveau de confiance 95% est :

$$\left[\mp 1.96 \sqrt{\frac{1}{16}} \right] = \left[\mp 1.96 \sqrt{\frac{1}{16}} \right] = [-0.49 ; 0.49]$$

Nous remarquons qu'à partir du second ordre presque tous les PAC rentrent dans l'intervalle de confiance, d'où le non rejet de H_0 . Ce qui signifie que notre processus se rapproche d'un processus autorégressif d'ordre 1.

Puisque la série est stationnaire et qu'elle suit un processus AR(1), nous pouvons faire l'estimation de ses paramètres.

C.6. Les paramètres du modèle

L'estimation par la méthode des MCO du modèle permet d'obtenir les résultats ci-dessous :

$$r_t = b + ar_{t-1} + \varepsilon_t$$

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	0.032168	0.003770	8.531924	0.0000
AR(1)	0.612691	0.176268	3.475914	0.0041
SIGMASQ	3.23E-05	1.37E-05	2.355512	0.0349
R-squared	0.210655	Mean dependent var		0.031528
Adjusted R-squared	0.089217	S.D. dependent var		0.006610
S.E. of regression	0.006308	Akaike info criterion		-7.097167
Sum squared resid	0.000517	Schwarz criterion		-6.952307
Log likelihood	59.77734	Hannan-Quinn criter.		-7.089749
F-statistic	1.734670	Durbin-Watson stat		1.713311
Prob(F-statistic)	0.214900			

Figure 9 :L'estimation des paramètres du modèle

- i. Les valeurs des paramètres a et b sont :

$$b = 0.032168 \text{ et } \hat{a} = 0.612691 \text{ et } \hat{\sigma}_\varepsilon = 0.006610$$

- ii. Nous déduisons alors les valeurs estimés de α , β et $\hat{\sigma}$ comme suit :

$$\hat{\alpha} = 0.083055 \text{ et } \hat{\beta} = 0,4898945 \text{ et } \hat{\sigma} = 0.0082787$$

Concernant l'auto-corrélation des résidus, La statistique de Durbin-Watson montre son absence car elle est proche de $2(DB = 1.71)$.

C.7. Normalité des résidus

Passons maintenant au test d'hypothèse de la normalité des résidus, à l'aide du logiciel Eviews nous arrivons à tracer le graphe suivant donnant l'histogramme de la distribution (*empirique*) des résidus :

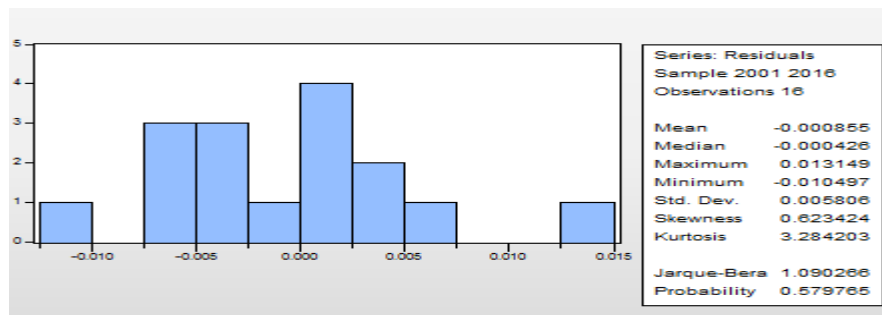


Figure 10 : Test de la normalité des résidus

Graphiquement nous pouvons dire que la probabilité que les résidus aient une distribution normale est très grande, les statistiques proposées par le test de Jarque-Bera est supérieure à 5% ce qui confirme ce que nous venons de dire, ainsi nous déduisons en faveur d'une distribution normale des résidus.

C.8. Projection des valeurs

La projection des valeurs du taux court annuel pour les 8 prochaines années donne la figure suivante :

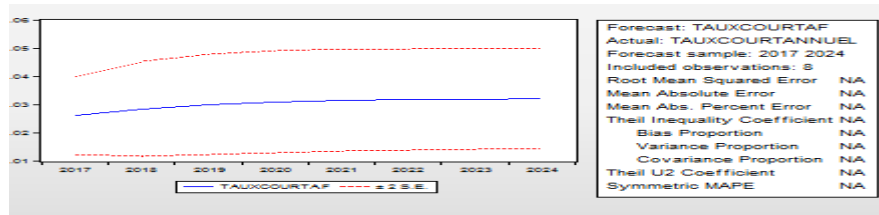


Figure 11 : Evolution annuelle du TMP entre 2017 et 2024

Voici les valeurs numériques des prévisions :

les années	2016	2017	2018	2019	2020	2021	2022	2023	2024
Taux d'intérêt annuel	0.022	0.026	0.028	0.0298	0.0307	0.0313	0.0316	0.0318	0.032

Table 1 : Valeurs prévues du taux d'intérêt annuel entre 2017 et 2024

Passons maintenant à la modélisation du passif et plus précisément à la modélisation des coûts des sinistres.

II.2. Le passif

II.2.1. Présentation

En assurance, la modélisation de toute grandeur ayant une relation directe avec l'assuré, et faisant appel à l'assureur, est l'étape la plus importante que l'assureur doit franchir avant de passer aux autres choses, en fait, c'est la tâche à la quelle les actuaires à travers le monde, accordent la majorité du temps et d'attention. C'est pour cette raison qu'on cherche à modéliser et évaluer les variables suivantes :

- i. Nombre de sinistres par assuré durant l'année.
- ii. Le montant des charges occasionnées par un sinistre.
- iii. Montant des prestations.
- iv. La durée nécessaire pour le remboursement intégral d'un sinistre, et bien d'autre variable.

Dans cette partie, nous nous intéressons aux méthodes les plus utilisées pour l'évaluation, et pour la modélisation du montant des prestations que l'assureur doit payer à la fin de chaque année, notre choix est motivé par le fait que les prestations sont la variable la plus souvent évoquée dans le domaine de l'assurance, en effet c'est grâce à cette variable que l'assureur fait l'évaluation des provisions pour sinistres à payer, lesquelles sont considérées comme étant le poste le plus important du passif du bilan de la compagnie, aussi elle est utilisée pour le calcul de la probabilité de ruine et pour la détermination des primes d'assurances à payer par les assurés (*tarification*).

Il existe deux méthodes d'évaluation et de modélisation des prestations, celle dite stochastique et l'autre déterministe. Ces deux méthodes seront présentées brièvement¹ dans la partie suivante, ainsi on se contentera de donner au lecteur les définitions rudimentaires et les approches basiques que nous utilisons pour modéliser le montant des prestations.

¹ Pour plus d'information on invite le lecteur à visiter le papier : Mathématiques de l'assurance non vie cité dans la partie références

II.2.2. Les méthodes de modélisation

A. Méthodes déterministes

A.1. Chain ladder

Les méthodes déterministes reposent sur l'historique des paiements, ainsi pour qu'elles puissent être utilisées, l'assureur doit être suffisamment ancien sur le marché pour qu'il puisse avoir une base de données importante. Ces méthodes sont multiples, ici on va aborder celle que nous utilisons le plus dans la pratique, à savoir la méthode de Chain ladder.

La méthode Chain Ladder est considérée comme la plus simple des méthodes de triangle run-off, c'est une méthode standard, couramment utilisée par les assureurs depuis les années 30. Elle est applicable à toute sorte de triangles (de dépenses, de charges, de nombre de sinistres). Cependant, au cours de notre étude, nous l'appliquons au triangle des paiements cumulés : $C = (C_{i,j})_{i,j}$

Considérant alors une seule branche d'assurance, pour cette branche dont les sinistres se déroulent sur $n+1$ années, nous retenons les notations suivantes :

- L'année d'origine est notée i , elle peut avoir différentes significations :
 - i. Année de survenance.
 - ii. Année de souscription.
 - iii. Année de déclaration.
- Le délai de développement est noté j .
- $X_{i,j}$ correspondant à l'intersection de la ligne i et de la colonne j , dans notre cas elle représente les paiements incrémentaux des sinistres.

Signalons également que la méthode CL nécessite les hypothèses suivantes :

➤ Hypothèses

- Indépendance entre les paiements par année :

$$C_i, \text{ et } C_k, \text{ sont indépendants pour tous } i, k \in \{0, \dots, n\} \quad (H_1)$$

- Si on note par F_t toute l'information disponible jusqu'au moment t , plus précisément F_t est la filtration générée par $\{C_{i,j} \text{ avec } i + j \leq t\}$, alors il existe des \hat{f}_j avec cette fois-ci $j \in \{0, \dots, n - 1\}$ qui vérifient l'équation suivante:

$$E(C_{i,j+1} / F_{i+j}) = \hat{f}_j \cdot C_{i,j} \quad (H_2)$$

Une autre façon pour exprimer cette hypothèse consiste à dire que pour

$j = 0, 1, \dots, (n - 1)$, les ratios des facteurs adjacents $\frac{C_{i,j+1}}{C_{i,j}}$ sont indépendants de l'année d'origine i . Ainsi, pour tout $j \in [0, n - 1]$ on a :

$$\frac{C_{i,j+1}}{C_{i,j}} = \frac{C_{n-j,j+1}}{C_{n-1-j,j}}$$

- Il existe des σ^2_j tel que :

$$Var(C_{i,j+1} / F_{i+j}) = \sigma^2_j \cdot C_{i,j} \quad (H_3)$$

Année d'origine	Délai de règlement								
	0	1	...	j	...	n-i	...	n-1	n
0	$X_{0,0}$	$X_{0,1}$...	$X_{0,j}$...	$X_{0,n-i}$...	$X_{0,n-1}$	$X_{0,n}$
1	$X_{1,0}$	$X_{1,1}$...	$X_{1,j}$...	$X_{1,n-i}$...	$X_{1,n-1}$	
...		
...		
i	$X_{i,0}$	$X_{i,1}$...	$X_{i,j}$...				
...				
...				
n-1	$X_{n-1,0}$	$X_{n-1,1}$							
n	$X_{n,0}$								

Table 2 : Exemple d'un triangle incrémental de développement 'run-off triangle'

Les années comptables se confondent avec les diagonales du triangle et chaque une donne lieu au paiement total : $\sum_{i=0}^n X_{i,n-i}$

A partir du triangle des incréments $X_{i,j}$, il est possible de constituer un triangle des montants cumulés $C_{i,j}$. Les deux relations ci-dessous établissent les liens entre les deux représentations :

$$C_{i,j} = \sum_k X_{i,k} \text{ avec } k \in \{0,1, \dots, j\} \text{ ou bien } X_{i,j} = C_{i,j} - C_{i,j-1}$$

Année d'origine	Délai de règlement								
	0	1	...	j	...	n-i	...	n-1	n
0	$C_{0,0}$	$C_{0,1}$...	$C_{0,j}$...	$C_{0,n-i}$...	$C_{0,n-1}$	$C_{0,n}$
1	$C_{1,0}$	$C_{1,1}$...	$C_{1,j}$...	$C_{1,n-i}$...	$C_{1,n-1}$	
...		
...		
i	$C_{i,0}$	$C_{i,1}$...	$C_{i,j}$...				
...				
...				
n-1	$C_{n-1,0}$	$C_{n-1,1}$							
n	$C_{n,0}$								

Table 3 : Représentation d'un tableau de développement cumulatif

La méthode Chain-Ladder repose sur le calcul des différents facteurs de développement \hat{f}_k également appelés Link ratios. Cette méthode de provisionnement suggère d'approcher ces FD par l'estimateur naturel suivant

$$\forall j \in \{0,1, \dots, n-1\} / \hat{f}_j = \frac{\sum_{i=0}^{n-j-1} C_{i,j+1}}{\sum_{i=0}^{n-j-1} C_{i,j}}$$

Ainsi, à partir de cette estimation des facteurs de développement, nous pouvons maintenant faire des prévisions en complétant le triangle inférieur des paiements cumulés, voici la formule utilisée :

$$\forall i, j \in \{0,1, \dots, n\} / C_{i,j} = C_{i,n-i} \hat{f}_{n-i} \dots \hat{f}_{j-1} = C_{i,n-i} \prod_{k=n-i}^{j-1} \hat{f}_k$$

En particulier, nous calculons alors les charges ultimes S_i pour chaque année i d'accident :

$$\forall i \in \{0,1, \dots, n\} \text{ on a } S_i = C_{i,n} = C_{i,n-i} \prod_{k=n-i}^{n-1} \hat{f}_k$$

Et finalement, nous déduisons respectivement les provisions par année d'accident notées R_i , et la provision totale notée R :

$\forall i \in \{0,1, \dots, n\}$ on a :

$$R_i = S_i - C_{i,n-i} \text{ et } R = \sum_{i=1}^n R_i$$

Année d'origine	Délai de règlement								
	0	1	...	j	n-1	n
0	$C_{0,0}$	$C_{0,1}$...	$C_{0,j}$	$C_{0,n-1}$	$C_{0,n}$
1	$C_{1,0}$	$C_{1,1}$...	$C_{1,j}$	$C_{1,n-1}$	
...		
...		
i	$C_{i,0}$	$C_{i,1}$...	$C_{i,j}$...				
...					
...						
n-1	$C_{n-1,0}$	$C_{n-1,1}$							
n	$C_{n,0}$								

Table 4 : Utilisation des facteurs de développement pour remplir le tableau inférieur

B. Méthodes stochastiques

Dans cette partie nous abordons brièvement la démarche usuelle utilisée par les actuaires pour modéliser—en adoptant la méthode stochastique— la loi du montant total des sinistres occasionnés par le portefeuille de l’assureur.

Pour l’instant, soit P un portefeuille de risques individuels, supposons par exemple qu’il s’agit des coûts pour un contrat d’assurance IARD et définissant les variables suivantes :

- X_i : la variable aléatoire représentant les coûts liés a un risque individuel, elle représente les pertes éventuelles pouvant être engendrées par le contrat d’assurance numero i , autrement dit par le $i^{\text{ème}}$ assuré
- S : la variable représentant le coût totale du portefeuille :

$$S = \sum_{i=1}^n X_i \text{ avec } n \text{ le nombre des assurés}$$

La modélisation stochastique consiste à chercher tout d’abord la loi que les variables X_i supposées indépendantes et identiquement distribuées suivent, et puis de chercher dans un second temps la loi de la somme S .

Concernant la modélisation des coûts des sinistres par individu, il y a trois approches possibles : l’approche indemnitaire, l’approche forfaitaire et l’approche fréquence-sévérité; et les lois que nous choisissons pour approcher les sinistres individuels sont : loi gamma, loi pareto, loi Weibull, loi exponentielle et la loi log normale, ces choix se justifient d’un coté, par le fait que ces lois possèdent la propriété d’avoir un support égale à \mathbb{R}^+ , et d’un autre coté, par les préférences de modélisation que l’expérience des actuaires à travers le temps a défini. Ainsi nous déterminons la loi de X_i et nous passons à la recherche de celle de S , souvent la loi de la somme des X_i est délicate à trouver, pour résoudre ce problème deux solutions se présentent :

- Les méthodes de simulation de Monte Carlo : nous commençons par simuler des réalisations de la variable S , et puis nous cherchons la loi qui s’ajuste au mieux aux réalisations obtenues.
- L’algorithme de Panjer : il s’agit d’un algorithme récursif qui approche la loi de densité de S

Dans la suite de ce travail, un exemple d’illustration de la méthode stochastique sera étudié.

A ce stade du travail, nous disposons de toutes les informations nécessaires et suffisantes pour pouvoir modéliser les éléments les plus significatifs du bilan d'une compagnie d'assurance. Passons maintenant à la recherche de l'allocation optimale introduite au début de ce travail à l'aide du critère de maximisation des fonds propres.

Chapitre III. Le critère de maximisation des fonds propres économiques

a. Notations

Dans la suite de ce travail, Nous noterons:

- 1) $Pm_0(t)$: Les primes encaissées à la date t, $Pm_0(0) = Pm_0$.
- 2) $F_0(t)$: Le niveau des fonds propres à la date t, $F_0(0) = F_0$.
- 3) $P_0(t)$: Le niveau des provisions techniques à la date t, $P_0(0) = P_0$
- 4) j : Le taux d'escompte discret des prestations.
- 5) $S(t) = \sum_{i=1}^m S_i(t)$: Les prestations et frais payées à la date t, avec m le nombre de branches et $S_i(t)$ les prestations par branche, $S(1) = S$.
- 6) $\hat{A}_0(t)$: Le revenu du portefeuille de l'assureur à la date t, $\hat{A}_0(1) = \hat{A}_0$.
- 7) $\check{V}(t)$: La valeur du portefeuille des actifs financiers à la date t.
- 8) $A(t) = (A_1^t, \dots, A_n^t)^1$: Le vecteur des valeurs des actifs financiers détenus par l'assureur à la date t, $A(1) = A$ et $A_i^1 = A_i$.
- 9) $W = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)$: Le vecteur présentant la part en pourcentage, de chaque actif dans le portefeuille de l'assureur².

b. Les hypothèses

Dans la suite nous supposons que :

- 1) La période est constituée de T années, il y a n actifs financiers et m branches.
- 2) le nombre d'assurés reste constant pendant toute la période.
- 3) Les prestations et les frais ne sont payés qu'à la fin de chaque année.
- 4) Les primes sont encaissées au début de chaque année.
- 5) A t=0, l'assureur investit tout le montant qu'il détient.
- 6) Quand l'assureur veut payer les prestations&frais de la fin d'année, il vend l'intégralité des actifs qu'il détient, paye ce qu'il doit payer et réinvestit à nouveau le montant qu'il lui reste dans les n actifs en gardant la même distribution initiale i.e. les même proportions³.
- 7) Les deux vecteurs $S(t)$ et $A(t)$ sont indépendants.

III.1. Le critère dans le cas Mono-périodique

Dans le cas mono-périodique la période d'assurance est égale à une année (12 mois), au début de la période –à t = 0 – l'assureur reçoit des primes Pm_0 , avec ces primes il construit au passif des provisions techniques et ajoute le restant⁴ à ses fonds propres, en effet, la prime annuelle d'assurance qu'est par définition, le prix que l'assuré doit payer à l'assureur, pour bénéficier de la couverture en cas de réalisation de sinistres, est composée de trois parties :

¹ Pour simplifier on supposera que $A_i^0 = 1$

² W ne dépend pas du temps et les ω_i sont dans [0,1], donc il n'y a pas des ventes à découvert.

³ Cette hypothèse assure la constance du vecteur W dans le temps.

⁴ Si jamais il lui en reste quelque chose.

- i. La partie risque : cette partie sert à couvrir le coût estimé que provoquera une éventuelle réalisation du risque.
- ii. La partie frais : sert à couvrir les frais de gestion et les charges opérationnelles de la compagnie (électricité, loyers, rémunération des salariés ...)
- iii. La partie bénéfice : représente la rémunération de l'assureur.

Nous parlons aussi, de la prime pure qui est égale mathématiquement à l'espérance des pertes engendrées par la réalisation du risque, et du chargement de sécurité¹ qui, en l'ajoutant à la prime pure permet de mieux contrôler la probabilité de ruine en résistant à la volatilité des sinistres (les événements rares extrêmes).

Ainsi, nous déduisons que les primes sont incorporées dans le passif, et c'est justement pour cette raison que nous n'en parlerons pas souvent dans ce travail².

III.1.1. Enoncé du critère de maximisation des fonds propres économiques (MFPE)

Sous l'opérateur espérance, l'assureur doit payer à l'ensemble des assurés à la fin de la période le montant estimé des prestations : $E(S)$. Ce paiement est réalisé en exploitant d'une part, le montant des fonds propres plus les provisions qu'il détient, et d'autre part les produits financiers que ce montant a créés en le plaçant dans les n actifs définis précédemment.

Dans un modèle mono-périodique, et à la fin de la période, les ressources de l'assureur sont au montant de :

$$\check{V}(1) = (F_0 + P_0) * \sum_{i=1}^n w_i * A_i$$

Donc à $t = 1$ l'actif attendra en espérance: $(F_0 + P_0) * \sum_{i=1}^n w_i * E(A_i)$

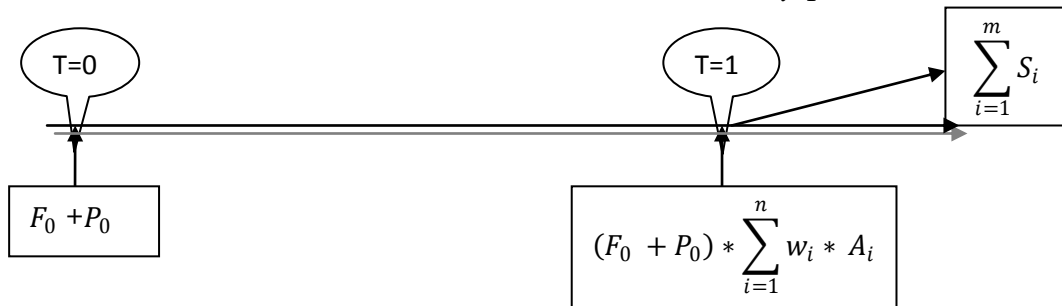


Figure 12 : Illustration de La situation de la compagnie dans le cas mono-périodique

Le critère de maximisation des fonds propres économiques donne naissance à deux nouvelles variables d'intérêt : les provisions économiques et les fonds propres économiques. Ces deux variables sont considérées comme étant la pierre angulaire de notre critère.

A. Provisions économiques

L'espérance de l'actualisation des prestations $\sum_{i=1}^m S_i$ au taux de rendement du portefeuille financier pendant la période $[0,1]$ qui est égal à $\sum_{i=1}^n w_i * A_i$, est appelée provisions économiques et elle est notée P_0^w :

$$P_0^w = E \left(\frac{\sum_{i=1}^m S_i}{\sum_{i=1}^n w_i * A_i} \right)$$

¹ Pour plus d'information, on invite le lecteur à visiter l'annexe.

² Les fonds propres et les provisions techniques suffisent pour décrire la compagnie d'assurance

Cette variable est d'une grande significativité pour l'assureur, en fait, quelque soit le choix du vecteur¹ W , le placement de cette quantité dans les n actifs financiers permet, en espérance, de payer les prestations à la fin de la période.

❖ Démonstration

Puisque la fonction inverse est convexe sur \mathbb{R}^{+*} , et en appliquant l'inégalité de Jensen² sur la variable $\sum_{i=1}^n w_i * A_i$ on déduit que³ :

$$E \left(\sum_{i=1}^m S_i * \left(\sum_{i=1}^n w_i * A_i \right)^{-1} \right) \geq \frac{E(\sum_{i=1}^m S_i)}{E(\sum_{i=1}^n w_i * A_i)}$$

D'où le résultat suivant :

$$P_0^W * E \left(\sum_{i=1}^n w_i * A_i \right) \geq E \left(\sum_{i=1}^m S_i \right)$$

B. Fonds propres économiques

L'espérance de la valeur actualisée, au taux de rendement du portefeuille financier, du surplus réalisé par la compagnie à la fin de la période, est appelée fonds propres économiques, elle est notée $E(F_0^W)$ avec :

$$F_0^W = (F_0 + P_0) - \frac{\sum_{i=1}^m S_i}{\sum_{i=1}^n w_i * A_i}$$

La variable aléatoire F_0^W est le profit aléatoire actualisé, au taux de rendement du portefeuille financier, et il est réalisé par l'assureur au cours de la période $[0,1]$, son espérance peut être interprétée comme la valeur (estimée et actualisée) de la compagnie d'assurance au début de la période, autrement dit si l'assureur veut vendre la compagnie à l'instant initial, il ne doit pas accepter un prix qui soit très⁴ inférieur à $E(F_0^W)$.

C. Le critère

Selon le critère de maximisation des fonds propres, une allocation W^* est optimale si, en respectant les contraintes réglementaires, elle maximise le ratio entre les fonds propres économiques et le fonds propres comptables, et puisque ce ratio dépend de l'allocation W , on le notera :

$$\Omega(W) = \frac{E(F_0^W)}{F_0}$$

Ou d'une manière équivalente W^* est optimale au sens du critère MFPE si elle est solution du programme suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Sup}_{w \in \Omega} [P_0 - P_0^W] / F_0 \\ s/c \end{array} \right.$$

Equation 4 : L'équation du critère de maximisation des fonds propres économiques

S/c fait allusion aux contraintes que la réglementation des assurances impose et que l'assureur doit respecter pour pouvoir exercer son métier, ces contraintes seront explicitées dans le paragraphe suivant.

¹ Autrement dit quelque soit le choix de l'allocation initiale de l'assureur.

² L'énoncé de l'inégalité de Jensen est disponible dans l'annexe.

³ A et S indépendants.

⁴ Pour estimer la marge de tolérance de l'assureur au prix de vente, il faut calculer la variance de F_0^W

III.1.2. Le critère de MFPE dans le cas de la réglementation marocaine

Essayons maintenant d'appliquer le critère de maximisation des fonds propres économiques, présenté en haut, au cas particulier de la réglementation marocaine. Pour cette raison, nous commençons d'abord par donner une brève présentation de la réglementation du secteur des assurances au Maroc et des contraintes s/c qu'elle impose, et passons ensuite à notre objectif.

A. Présentation de la réglementation marocaine

➤ Les fonds propres réglementaires

La valeur du montant réglementaire dont l'assureur doit se doter en matière de la marge de solvabilité est calculée selon deux approches : le calcul par rapport au montant annuel des primes MSR1, ou bien par rapport au coût espéré annuel des sinistres MSR2. Ce montant réglementaire, appelé *marge de solvabilité réglementaire*, est égal à la plus grande des deux valeurs obtenues par application de ces deux approches, et dont les formules respectives seront explicitées dans la suite.

$$MSR = \text{Max} [MSR1, MSR2]$$

- Méthode 1 : calcul par rapport aux primes¹

$$(18\% * \text{Max}(\text{primes}, 50\text{M d'€}) + 16\% * \text{Max}(\text{primes} - 50\text{M d'€}, 0)) * T.r$$

- Méthode 2 : calcul par rapport au cout moyen annuel des sinistres

$$(26\% * \text{Max}(\text{sinistres}, 35\text{M d'€}) + 23\% * \text{Max}(\text{sinistres} - 35\text{M d'€}, 0)) * T.r$$

Pour les deux méthodes T.r est le taux de rétention, en absence de réassurance il est égal à 100%, voici la formule générale servant à le calculer :

$$\text{Taux de rétention} = \text{Max} \left(50\%, \frac{\text{primes émises} - \text{primes cédées}}{\text{primes émises}} \right)$$

➤ La première contrainte :

Nous remarquons que dans le cas de la réglementation marocaine : solvabilité 1, le montant des fonds propres réglementaires MSR est indépendant de la structure de l'actif de la compagnie, pour cette raison il est indépendant aussi de l'allocation des actifs choisie W.

Nous déduisons que la première contrainte $F_0 \geq MSR$ peut être éliminée² de l'ensemble des contraintes que nous devons respecter pour résoudre l'équation 4 car elle n'est pas fonction de W.

➤ Les provisions techniques

L'article 238 du code des assurances marocain, précise que : Les entreprises d'assurance doivent, à toute époque, inscrire à leur bilan les provisions techniques (*en particulier les provisions pour sinistres à payer*) suffisantes pour le règlement intégral des engagements contractés à l'égard des assurés, souscripteurs et bénéficiaires de contrats, il signale aussi que ces provisions sont constituées selon la nature des opérations exercées par les entreprises d'assurance.

➤ Le portefeuille des actifs financiers

¹ Les montants sont exprimés en Euro car le Maroc se réfère aux directives de la réglementation européenne : solvabilité 1

² Mais l'assureur doit toujours la respecter.

Concernant le portefeuille financier de l'assureur, le législateur impose qu'il contient des actifs liquides, cette contrainte se justifie par le fait que l'assureur doit être capable à tout moment de convertir ses actifs en liquidité pour faire face à des événements imprévus. Voici des exemples d'actifs selon la liquidité :

- Les actifs les plus liquides sont : matières premières, stocks, des bons de trésor, ...
- Les actifs les moins liquides : immobilisations incorporelle : brevets ou fonds de commerce, des immobilisations corporelles par exemple des terrains ou des bâtiments, et des immobilisations financières

➤ **La deuxième contrainte :**

Puisque dans cette étude nous nous contenterons de présenter le critère dans le cas où l'assureur possède le choix d'investir seulement dans deux actifs : une action, et une obligation, et puisque, ces deux actifs sont liquides, nous déduisons donc que la deuxième contrainte est respectée.

➤ **Récapitulatif**

Dans le cas de notre étude, l'application du critère MFPE revient à résoudre l'équation d'optimisation suivante :

$$\text{Sup}_{w \in \Omega} [P_0 - P_0^w]/F_0$$

B. Le critère

Dans un premier temps, nous présentons le critère de MFPE dans le cadre général d'une compagnie d'assurance se conformant à la réglementation marocaine, cette compagnie possède une seule branche d'assurance et deux actifs financiers : un actif sans risque et l'autre risqué, et nous cherchons les conditions sur les différents paramètres de *l'actif et du passif* pour qu'une allocation optimale, non triviale – $\notin \{0,1\}$ – au sens du critère MFPE existe, puis nous appliquons le critère pour une compagnie d'assurance réelle.

- ❖ **Proposition :** Sous la réglementation marocaine, une allocation est optimale au sens du critère MFPE si elle est solution du programme :

$$\text{Inf}_{\omega \in [0,1]} E[((1 - \omega)A_1 + \omega A_2)^{-1}]$$

- ❖ **Démonstration**

Dans le cas de la réglementation marocaine on a les équivalences suivantes¹ :

$$\begin{aligned} \text{Sup}_{w \in \Omega} [P_0 + F_0 - E(P_0^w)]/F_0 &\Leftrightarrow \text{Sup}_{w \in \Omega} 1 + \text{Cte}_1 - \frac{E(P_0^w)}{F_0} \\ &\Leftrightarrow \text{Inf}_{w \in \Omega} \frac{E(P_0^w)}{F_0} \\ &\Leftrightarrow \text{Inf}_{w \in \Omega} E(P_0^w) \end{aligned}$$

Et puisque nous avons :

$$E(P_0^w) = E(S) * E[((1 - \omega)A_1 + \omega A_2)^{-1}] \text{ et } E(S) \text{ indépendante de } W$$

Nous déduisons la suivante formulation finale du critère :

$$\text{Inf}_{\omega \in [0,1]} E[((1 - \omega)A_1 + \omega A_2)^{-1}]$$

Equation 5 : Le critère de MFPE dans le cas de deux actifs d'un modèle mono-périodique

¹ Cte₁ est une constante puisque égale à P_0/F_0

B.1. Le passif

➤ Les fonds propres

Dans la suite, nous supposons que le niveau des fonds propre de la compagnie d'assurance en question est supérieur ou égal à la marge de solvabilité MSR exigée par la réglementation marocaine, cette supposition nous paraît légitime, puisque sans le respect de la contrainte réglementaire qu'elle évoque, la compagnie n'aura pas la permission d'exercer son métier d'assureur :

$$F_0 \geq MSR$$

➤ Les provisions techniques

Le calcul des provisions techniques nécessite la connaissance de la loi de probabilité des prestations¹ payées par l'assureur en fin de période, en fait, cette dépendance entre les prestations et les provisions est justifiée par la relation mathématique les réunissant, à savoir :

$$P_0 = \frac{E(S)}{1+j} \text{ avec } j \text{ le taux d'actualisation des prestations}$$

Le montant des prestations est une variable aléatoire positive, ainsi pour le modéliser il faut choisir, parmi les lois dont le support est égal à \mathbb{R}^+ . Parmi les lois les plus utilisées pour modéliser le montant des sinistres en assurance non vie nous trouvons :

Loi exponentielle, loi gamma et loi log normale

Pour choisir entre ces modèles il faut des critères, parmi ces critères nous citons ceux qu'on utilise le plus :

1. Kolmogorov-Smirnov : ce test d'hypothèse donne un critère de choix entre plusieurs modélisations (approximations) de la loi d'une variable aléatoire, la meilleure modélisation est celle dont la statistique en question est la plus petite.
2. AIC : donne une estimation de l'information perdue quand un modèle (loi) est utilisé pour modéliser une variable aléatoire, ainsi il permet de choisir entre plusieurs modèles, le meilleur est celui dont la statistique « AIC » est la plus petite.

B.2. L'actif

Dans cette partie nous présentons le modèle mathématique pour l'actif non risqué et pour l'actif risqué.

➤ L'actif non risqué

L'actif sans risque est modélisé par : $A_1(t) = e^{rt}$ avec r le taux d'intérêt continu sans risque. Puisque on travail sur une seule période, la valeur de cet actif à $t=1$ est :

$$A_1 = e^r$$

➤ L'actif risqué

L'actif risqué, est supposé représenter l'action d'une société cotée en bourse depuis des années², il est modélisé par le processus de Black et Scholes :

$$A_2(t) = e^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma B_t}$$

¹ Les prestations payées à la fin de la période sont aussi une variable aléatoire.

² L'action doit être suffisamment ancienne pour avoir un grand nombre de réalisation de son prix et pouvoir ainsi la modéliser avec un minimum d'erreur d'estimation

μ : Drift	σ : Volatilité	B_t : Mouvement brownien géométrique sa variance est : t
---------------	-----------------------	--

Table 5 : Le modèle de l'actif risqué

Le prix de l'actif à la fin de la période est la variable aléatoire suivante:

$$A_2 = e^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) + \sigma B}$$

C. La solution du programme d'optimisation

Cherchons la condition nécessaire et suffisante sur les paramètres : $\sigma, \mu, et r$ pour que notre programme admette une solution non triviale.

Soit $\Delta(\omega) = E \left[\left(\omega(-e^r + e^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) * e^{\sigma B}}) + e^r \right)^{-1} \right]$ notre fonction objective, posons¹

$Z = A_2 - A_1$ et calculons ensuite les deux dérivées d'ordre 1 et 2 de la fonction Δ .

Dérivée d'ordre 1	Dérivée d'ordre 2
$\frac{\partial \Delta}{\partial \omega}(\omega) = -E[Z * (\omega * Z + e^r)^{-2}]$	$\frac{\partial^2 \Delta}{\partial \omega^2}(\omega) = 2E[Z^2 * (\omega * Z + e^r)^{-3}] > 0$

Table 6 : les deux premières dérivées de la fonction-objectif du modèle mono-périodique avec 2 actifs

Puisque la dérivée d'ordre 2 est positive, la dérivée d'ordre 1 est strictement croissante, et donc pour qu'un minimum unique existe il faut que :

$$\begin{cases} \frac{\partial \Delta}{\partial \omega}(0) < 0 \\ \frac{\partial \Delta}{\partial \omega}(1) > 0 \end{cases}$$

En développant d'avantage ces deux conditions on arrive à démontrer que la condition d'existence d'une solution non triviale est la suivante :

$$\mu > r > \mu - \sigma^2$$

la première condition	la deuxième condition
$\frac{\partial \Delta}{\partial \omega}(0) < 0 \Rightarrow e^{-2r} * E(Z) > 0$ $\Rightarrow E(Z) > 0$ $\Rightarrow E(A_2 - e^r) > 0$ $\Rightarrow \exp(\mu) > \exp(r)$	<i>En suivant un raisonnement similaire on trouvera que cette condition est équivalente à :</i> $e^{r-2\mu+3\sigma^2} > e^{-\mu+\sigma^2}$
$\Rightarrow \mu > r$	$\Rightarrow r > \mu - \sigma^2$
<i>La condition d'existence d'une solution non triviale est : $\mu > r > \mu - \sigma^2$</i>	

Table 7 : les conditions d'existence d'une solution non triviale

Voici la démonstration des formules utilisées pour le calcul des espérances évoquées dans le tableau précédent :

$$\begin{aligned} \forall p \in \mathbb{Z} \quad E(A_2(t)^p) &= E \left[\exp\left(p * \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) * t + p\sigma B_t\right) \right] \\ &= \exp\left(p * \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) * t\right) * E[p * \sigma * B_t] \end{aligned}$$

¹ La variable Z est conçue ici dans le but d'isoler la variable ω pour calculer facilement les deux dérivées.

$$\begin{aligned}
 &= E \left[p * \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) * t \right] \exp \left[\frac{p^2 * \sigma^2}{2} * t \right] \\
 &= \exp \left[p * \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) * t + \frac{p^2 * \sigma^2}{2} * t \right]
 \end{aligned}$$

Ainsi, nous trouvons la condition globale portant sur les paramètres de l'actif pour qu'une solution non triviale du programme existe :

$$\mu > r > \mu - \sigma^2$$

Maintenant, si cette condition est non vérifiée, nous ne trouverons que deux solutions :

$$\omega^* = 0 \text{ ou } \omega^* = 1$$

i. $r > \mu$

Dans ce cas l'assureur, supposé être un agent rationnel, va investir en exclusivité dans l'actif non risqué car ce dernier présente un rendement plus grand que l'actif risqué et avec zéro risque : $\omega^* = 0$

ii. $\mu - \sigma^2 > r$

Si c'est la partie de droite de la condition qu'est non vérifiée, en raisonnant par élimination nous trouvons que l'assureur va investir tout dans l'actif risqué : $\omega^* = 1$.

III.1.3. Application

Pour l'application nous prenons la situation d'une compagnie d'assurance non vie (IARD) siégeant au Maroc, et ayant un seule branche, l'assureur peut investir dans deux actifs financiers : l'action de BMCE et une obligation zéro coupon, les caractéristiques de ces deux actifs ainsi que du passif seront exposées dans la suite.

Nous essayons dans un premier temps de modéliser le montant des prestations de fin d'année à l'aide des méthodes stochastiques, pour passer ensuite à la recherche de ω^*

A. L'actif & passif de la compagnie

A.1. Structure du passif

Premièrement le montant des sinistres est une variable continue positive, donc pour modéliser la sinistralité il faut choisir entre les lois suivantes :

Gamma, Exponentielle, Log normale

Les tests que nous utilisons pour choisir la loi qui s'adapte le plus à notre base de données sont : *Kolmogorov – Smirnov et AIC*.

Cherchons donc la loi qui s'ajuste au mieux à notre base de données, signalons que cette base contient le montant total annuel en dirhams des pertes individuelles engendrées par un groupe de 5000 assurés, d'une compagnie d'assurance auto, l'identité de cette compagnie ne nous a pas été proposée, mais nous signalons qu'elle a été tirée d'un projet que nous avons fait au cours de notre cursus académique au sein de notre institut de formation.

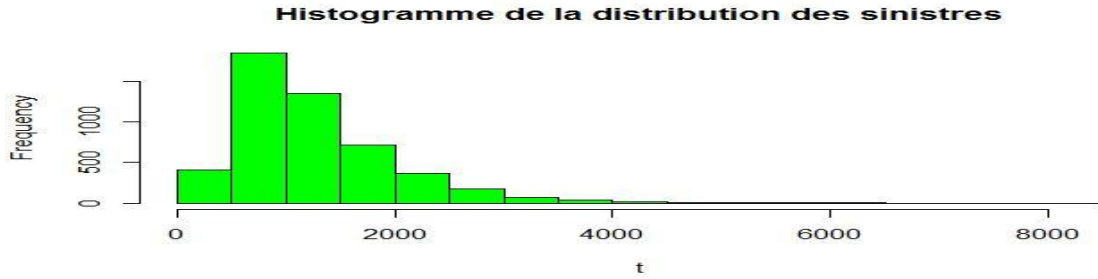


Figure 13 : Histogramme des fréquences

Ainsi, les deux lois : Log-normale et Gamma, sont des bons candidats pour modéliser le montant total annuel des pertes engendrées par individu, il suffit de voir le graphique ci-dessus pour consolider d'avantage nos doutes. Le choix des paramètres utilisés pour tracer ce graphique est justifié dans la suite du développement.

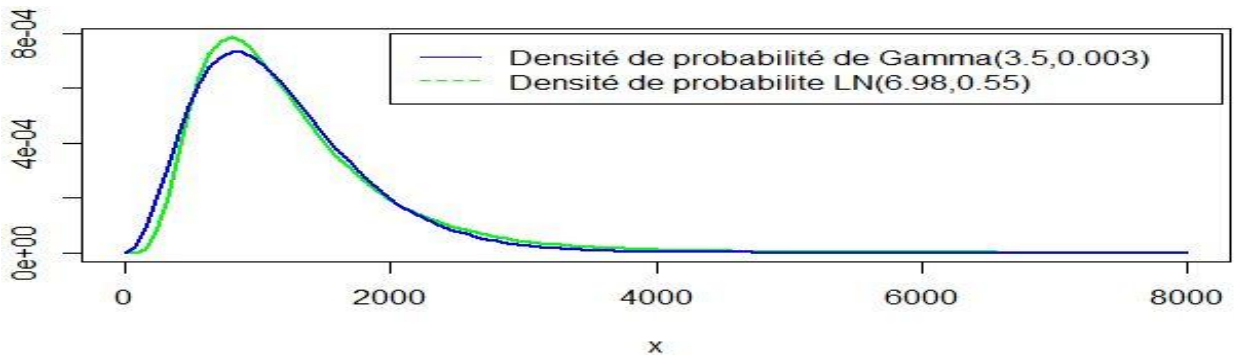


Figure 14 : Densités de probabilité d'une loi Gamma et d'une loi Log-normale

Voici maintenant le graphe présentant l'approximation de la fonction de répartition cumulative empirique de la variable "montant total annuel des sinistres par individu".

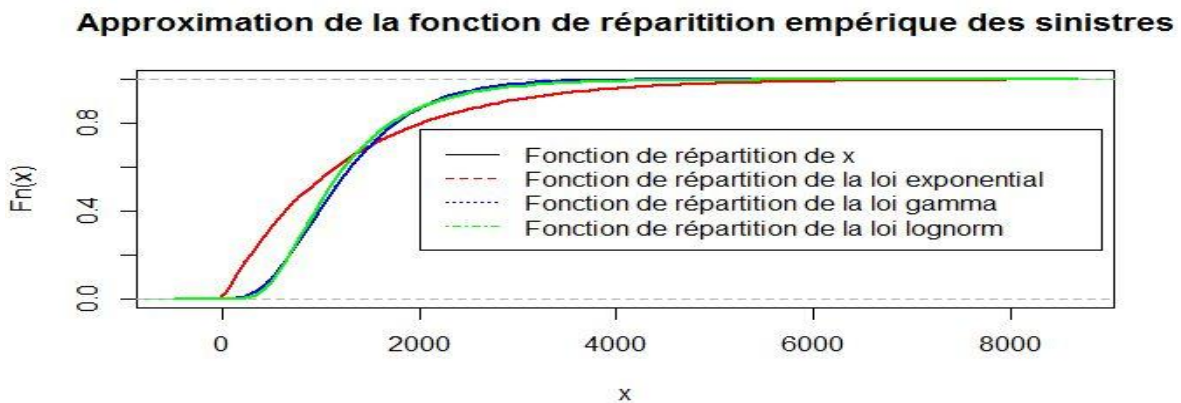


Figure 15 : Les fonctions de répartitions des lois utilisées

Graphiquement nous remarquons que les deux lois qui s'ajustent au mieux à notre base de données sont : *la loi gamma et la loi log – normale*, mais nous ne pouvons rien dire à propos de celle qui donne la meilleure modélisation, c'est pour cette raison qu'il faut faire le test de Kolmogorov Smirnov ou bien de calculer la statistique AIC. C'est justement ce que nous faisons, voici les résultats trouvés.

❖ Résultats

A l'issue de cette étude nous trouvons que la loi qui ajuste au mieux à notre base de données est la loi **Log normale**, les paramètres de cette loi sont :

$$LN(6.981, 0.299)$$

Maintenant que nous nous disposons de la modélisation des sinistres individuels, cherchons la loi modélisant la sinistralité totale collective présentée par le portefeuille de l'assureur, plus précisément trouvons la loi de :

$$X = \sum_{i=1}^n X_i \text{ avec } X_i \sim LN(6.98, 0.55^2) \text{ et } n = 5000 \text{ assurés}$$

Selon Fenton Wilkinson¹ X suit aussi une loi log normale, en effet, nous pouvons appliquer cette approximation puisque les assurés sont choisis d'une manière aléatoire et indépendante, donc les variables aléatoires X_i sont indépendantes et identiquement distribuées, voici les paramètres de cette modélisation :

$$X \sim LN(15.64, 0.0084^2)$$

Ainsi nous trouvons que l'espérance de la sinistralité totale à la fin de l'année est :

$$E(X) = \exp(15.64 + 0.5 * 7.06 * 10^{-5}) = 6252195 \text{ Dhs}$$

Nous déduisons donc que le montant des provisions techniques, ainsi que le montant de la prime majorée selon le principe de "la valeur espérée" se présentent comme suit :

$$P_0 = \frac{6252195}{1+0.03} = 6070092 \text{ Dhs, } j = 0.03$$

$$Pm_0 = (1 + 0.2) * 6252195 = 7502634 \text{ Dhs, le coefficient de chargement} = 0.2$$

Concernant le niveau des fonds propres réglementaires requis, signalons encore une fois, que dans le cas de la réglementation marocaine, il ne dépend que de la structure du passif : provisions, sinistralité, et primes, il est indépendant du risque de l'actif. Le législateur propose la formule suivante pour son évaluation :

$$F_0 \geq MSR \text{ avec } MSR = 1625571 \text{ Dhs}$$

Dans la suite nous considérons que le niveau des fonds propres² de la compagnie est égal au niveau des fonds propres réglementaire MSR , et nous cherchons l'allocation optimale ainsi que la probabilité de ruine associée à chaque allocation ω , et la relation entre la volatilité de l'action et l'allocation optimale au sens de MFPE.

❖ Récapitulatif

Actif	Passif
<i>Placements</i> = 7695663	<i>Fonds propres</i> = 1625571
	<i>Provisions techniques</i> = 6070092

Table 8 : Le bilan simplifié à t=0

A.2. Structure de l'actif

➤ Le bon de capitalisation

Le bon de capitalisation est tel que :

$$A_1^t = e^{rt} \text{ avec } r = 3\%$$

À la fin de la période le prix de cet actif est : $A_1 = e^r = 1.35$

➤ L'action

¹ Pour plus d'information sur le papier présentant cette approximation on invite le lecteur à visiter l'annexe.

² Cette supposition n'affecte en rien le cadre général de notre étude, puisque en pratique les assureurs se contentent souvent de constituer un niveau des fonds propres qu'est égal à la MSR

Le prix de L'action suit un processus de Black and Scholes de paramètres :

$Drift = 0.042$	$Volatilité=0.0972$	$A_2(t) = e^{0.037*t+0.0972*B_t}$
-----------------	---------------------	-----------------------------------

Table 9 : Le modèle de Black et Scholes de l'action de BMCE

A la fin de la période nous aurons donc:

$$A_2 = A_2(1) = e^{0.037+0.0972*B}$$

B. Le critère de MFPE

En se référant à la partie précédente nous trouvons que le programme à résoudre pour trouver l'allocation optimale est le suivant :

$$\text{Inf}_{\omega \in [0,1]} E \left[\left((1-\omega)e^r + \omega e^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) + \sigma B} \right)^{-1} \right]$$

i. Etape 1: Existence de la solution non triviale

La solution optimale existe, car la condition de son existence est vérifiée, en fait :

$$\mu > r > \mu - \sigma^2$$

ii. Etape 2: Recherche de ω^*

Le critère de MFPE se repose sur les techniques de simulation de Monte-Carlo¹ pour calculer l'espérance que le programme fait intervenir (équation 4), ce choix est justifié par le fait que cette espérance est généralement délicate à calculer analytiquement, ainsi et dans l'objectif d'illustrer au lecteur la méthode générale de résolution, nous essayons d'appliquer ces méthodes de simulations pour trouver la solution optimale de notre problème.

B.1. La solution optimale

Maintenant nous passons à la présentation des résultats trouvés lors de cette étude :

➤ Résultats

Nous trouvons que L'allocation optimale, notée par ω^* existe et elle est égale à : 65% donc l'assureur doit investir 65% de sa richesse initiale dans l'action, contre seulement 35% dans le bon de capitalisation :

La valeur d'investissement dans l'actif risqué : 5002181 Dhs

La valeur d'investissement dans l'actif non risqué : 2693482 Dhs

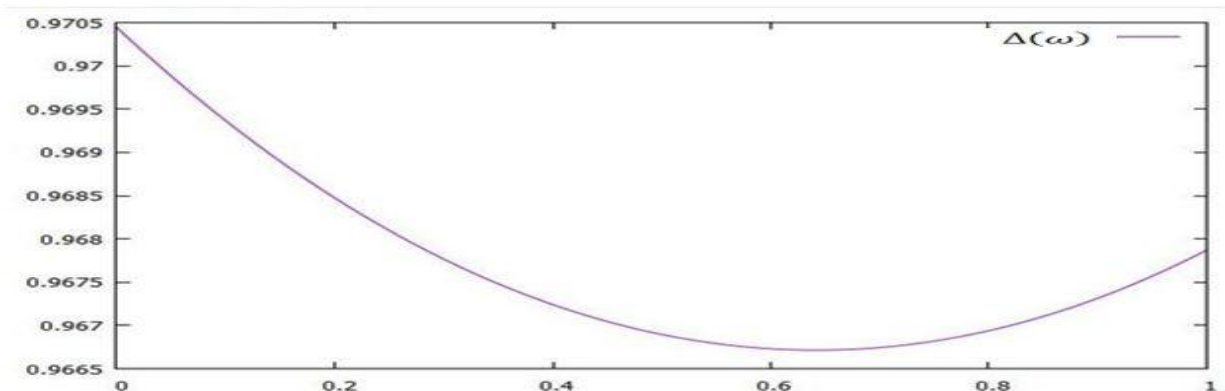


Figure 16 : Le graphe de la fonction-objectif en fonction de l'allocation

¹ Une introduction sur les méthodes de simulation de Monte Carlo est présentée dans l'annexe

La solution optimale ω^* est de l'ordre de 65%, cette valeur relativement grande de la part optimale investie dans l'actif risqué est due à la volatilité relativement petite de l'action ce qui incite l'assureur à l'ajouter à son panier d'actifs, mais quand ω dépasse ω^* ce que nous venons de dire tombe dans l'eau parce qu'il s'agit d'un risque supplémentaire non rémunéré : l'assureur prend du risque pour rien.

B.2. La solution optimale en fonction de la volatilité de l'action

La question qui se pose maintenant est très légitime et importante, parce qu'elle permet de mieux voir et expliquer les résultats obtenus, est la relation entre le niveau optimal de placement dans l'actif risqué et la volatilité du même actif, que se passe-t-il si cette dernière augmente ou diminue ?

Pour répondre à cette question on doit présenter ω^* en fonction de la volatilité σ , c'est ce que nous faisons justement. Voici le graphe répondant à cette tâche :

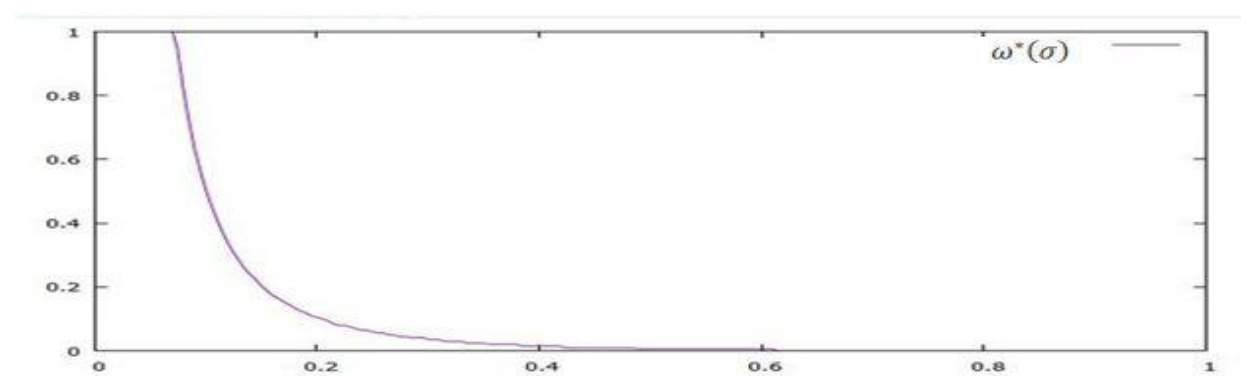


Figure 17 : L'allocation optimale en fonction de la volatilité de l'action

Ce graphe peut être divisé en trois parties selon la valeur de la volatilité, la première partie représente le cas où la volatilité est inférieure à presque 8%, la deuxième partie constitue la partie pour laquelle la volatilité est entre 8% et 60%, et la dernière est la partie restante.

Dans la première et la dernière partie la solution non triviale n'existe pas parce que la condition présentée en haut n'est pas vérifiée.

Nous remarquons que dans la deuxième partie du graphe, la part optimale investie dans l'action diminue au fur et à mesure que la volatilité augmente, en effet quand la volatilité augmente le risque de l'action augmente, donc un agent rationnel aura tendance à diminuer son investissement dans cette action car elle n'est pas bon marché.

B.3. La probabilité de ruine en fonction de l'allocation

Maintenant que nous avons trouvé à l'aide du critère de maximisation des fonds propres l'allocation optimale à choisir, il nous apparaît intéressant de vérifier la validité et l'efficacité de ce dernier en le comparant à un autre dont l'efficacité est garantie à savoir le critère de la probabilité de ruine. Si nous trouvons que le niveau de probabilité de ruine présenté par notre solution optimale est très grand par rapport à ce que la réglementation tolère soit un niveau de 0.5 (l'assureur doit payer ses engagements dans 99.5% des cas), alors l'application du critère serait sans aucune utilité. Calculons donc la probabilité de ruine associée à chaque allocation ω et en particulier celle associée à ω^* pour pouvoir comparer les deux critères. Le niveau de probabilité de ruine associé à une allocation ω et noté par $\Pi(\omega)$:

$$\Pi(\omega) = P\left(S \geq (F_0 + P_0) * \sum_{i=1}^n \omega_i * A_i\right)$$

Dans notre cas de deux actifs financiers il prend la forme suivante :

$$\Pi(\omega) = P\left(S > (F_0 + P_0) * \left(\omega * e^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)} e^{\sigma B} + (1 - \omega) * e^r\right)\right)$$

L'expression analytique de $\Pi(\omega)$ est délicate à trouver, mais nous pouvons l'estimer sans difficulté en utilisant des techniques de simulation. L'estimateur que nous utilisons pour approcher cette probabilité¹ est le suivant :

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathbf{1}_{]0, +\infty[} \left(S^{(i)} - \check{V}^{(i)} \right) \text{ avec } \check{V}^{(i)} = (F_0 + P_0) * \left(\omega * e^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)} e^{\sigma B_i} + (1 - \omega) * e^r \right)$$

$S^{(i)}$ et $\check{V}^{(i)}$ et B_i sont les i -ème réalisations des variables aléatoires S et \check{V} et B successivement, et $\mathbf{1}_{]0, +\infty[}$ la fonction indicatrice sur \mathbb{R}^{**} .

i. Simulation² de S

Pour simuler N réalisation d'une v.a X suivant une loi log normale :

$$X \sim LN(\mu, \sigma^2)$$

Il suffit de simuler le même nombre de réalisation d'une variable aléatoire normale centrée réduite $Y \sim N(0,1)$ et de se servir de la transformation suivante pour atteindre notre objectif :

- Si $\hat{Y} = (y_1, y_2, \dots, y_N)$ est le vecteur présentant les N réalisation de la variable Y , alors le vecteur $\hat{X} = (\exp(\mu + \sigma * y_1), \exp(\mu + \sigma * y_2), \dots, \exp(\mu + \sigma * y_N))$ est celui contenant les N réalisations de X .

ii. Simulation de \check{V}

Pour simuler \check{V} il suffit de simuler la variable aléatoire B , parce que à part cette dernière, tous les autres termes qui restent sont déterministes. Donc il suffit de générer des réalisations d'une variable aléatoire normale centrée réduite, chose que nous avons déjà faite auparavant.

iii. Résultats

Voici le graphe³ présentant l'évolution de la probabilité de ruine en fonction de la part ω investie dans l'action $BMCE$. Le nombre de trajectoires simuler pour réaliser ce graphe est de l'ordre de 1000000 simulations.

¹ C'est l'estimateur usuel de la probabilité de ruine, ses caractéristiques ne seront pas abordées dans ce travail

² Le code de simulation se trouve en annexe

³ Le code utilisé pour tracer ce graphe est présenté en détail dans l'annexe.

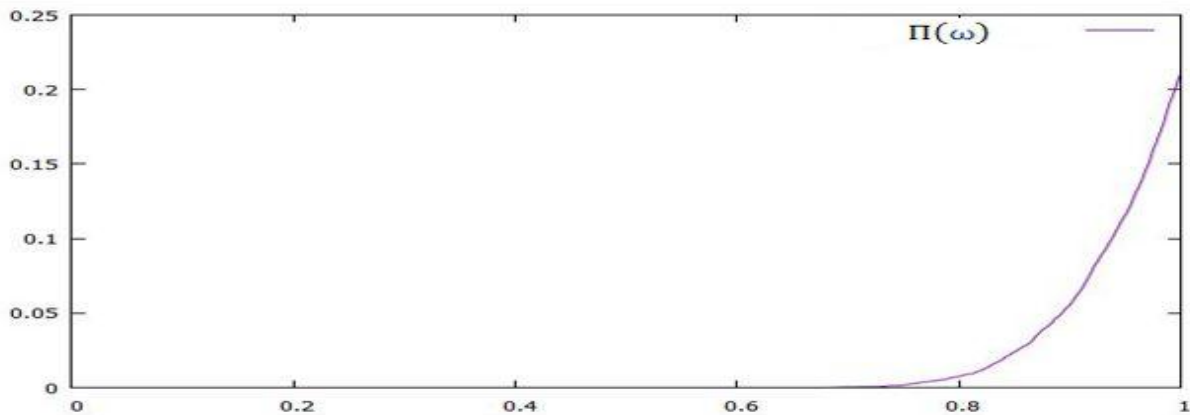


Figure 18 : La probabilité de ruine en fonction de la part investie dans l'action en %

La remarque la plus importante que nous pouvons faire sur ce graphe est que la probabilité de ruine est bien contrôlée par l'assureur, en fait elle ne dépasse pas 0.25%, et ce quelle que soit la part de l'action dans le portefeuille financier de l'assureur. Nous remarquons aussi qu'elle ne commence à prendre des valeurs strictement positives que lorsque la part ω investie dans l'action dépasse un seuil critique $\omega_c = 64,1\%$, au delà de ce seuil la probabilité de ruine augmente au fur et à mesure que ω augmente jusqu'à atteindre son maximum de 0.2104% pour un investissement exclusif en action.

Cette évolution s'explique par deux facteurs, d'une part il y a le niveau des fonds propres réglementaires qui contrôle surprenamment¹ la probabilité de ruine, et d'autre part il y a le niveau du risque globale, plus précisément celui de l'actif, qui augmente avec l'augmentation de la part de l'actif risqué dans le portefeuille de l'assureur c'est ce qui explique en particulier le maximum de la probabilité de ruine obtenu pour $\omega = 1$.

Pour $\omega = \omega^* = 65\%$ la probabilité de ruine est de l'ordre de 0.000001% ainsi on déduit que la solution fournie par le critère de maximisation des fonds propres est fiable.

III.2. Le critère dans le cas Multi-périodique

Dans la première partie, nous proposerons une généralisation du critère de maximisation des fonds propres évoqué dans la partie précédente. Pour cette raison nous devons franchir trois étapes :

- i. Déterminer le bilan de la compagnie aux différents moments
- ii. Calculer la valeur de la compagnie à la fin de la période, et l'actualiser ensuite en utilisant le taux de rendement du portefeuille des actifs durant toute la période.
- iii. Présenter le programme à résoudre pour trouver la solution optimale selon le critère de MFPE.

III.2.1. Le bilan de la compagnie

A. Le bilan à $t=0$

➤ Les provisions techniques

L'assureur doit avoir, à chaque instant de la période d'assurance, le montant de provisions qui lui permet d'honorer ses engagements envers les assurés pour le restant de la période. Ici nous supposons que l'assureur détermine les provisions au début de chaque année, c'est-à-dire aux instants $t \in \{0, 1, 2, \dots, T - 1\}$.

¹ En fait la MSR ne tient pas compte du risque de l'actif, et pourtant elle a pu contrôler la probabilité de ruine.

La formule mathématique usuelle pour le calcul des provisions à la date t est :

$$P_0(t) = \sum_{i=t+1}^T \frac{S(t)}{(1+j)^{i-t}} \text{ Ce qui donne } P_0 = \sum_{i=1}^T \frac{S(t)}{(1+j)^i}$$

➤ **Les fonds propres**

Le niveau des fonds propres à l'instant t=0 est supposé supérieur à la MSR.

➤ **Les placements**

Puisque le placement est effectué à t=0, la valeur du portefeuille d'actifs est égal tout simplement à la somme des provisions et fonds propres : $\hat{A}_0(0) = \hat{A}_0 = P_0 + F_0$

Actif	Passif
Placements = $P_0 + F_0$	Fonds propres = F_0
	Provisions techniques = P_0

Table 10 : Le bilan simplifié dans le cas multi-périodique à la date t=0

B. Le bilan à t supérieur à 1

Pour $t \geq 1$, la situation devient un peu complexe, en fait, voici les formules présentant les interactions entre les différentes variables :

$$\left\{ \begin{array}{l} P_0(t) = \sum_{i=t+1}^T \frac{S(t)}{(1+j)^{i-t}} \\ \hat{A}_0(t) = \hat{A}_0(t-1) * \sum_{i=1}^n w_i * A_i^t - S(t) \\ F_0(t) = \hat{A}_0(t) - P_0(t) \end{array} \right.$$

Equation 6 : L'évolution du bilan dans le temps dans le cas multi-périodique

❖ **Démonstration par récurrence**

1. Initialisation

A t=1, l'assureur doit payer des prestations d'un montant de S(1) aux assurés, il va recevoir des primes d'un montant de $Pm_0(1)$ pour couvrir la période [1,2], lequel sera utilisé pour construire les provisions techniques, et il aura le montant : $(P_0 + F_0) * \sum_{i=1}^n w_i * A_i^1$ des gains générés par ses placement initiaux. Après règlement des prestations et des frais, il lui restera le montant suivant :

$$\hat{A}_0(1) = (P_0 + F_0) * \sum_{i=1}^n w_i * A_i^1 - S(1)$$

Ce montant sera divisé en deux parties : des provisions techniques et des fonds propres, et puisque nous avons déjà calculé le niveau des provisions qu'il faut avoir, nous déduisons le niveau des fonds propres par soustraction :

$$F_0(1) = \hat{A}_0(1) - P_0(1) \text{ avec } P_0(1) = \sum_{i=2}^T \frac{S(t)}{(1+j)^{i-1}}$$

2. Généralisation

A t=x+1 :

<p><u>les entrées de l'assureur sont:</u> le montant du gain généré par le placement de l'instant t=x.</p>	<p><u>les sorties sont :</u> les prestations et les frais de gestion de la date t=x+1.</p>
--	--

Table 11 : Les entrées et sorties de la compagnie à t différent de 0 dans le cas multi-périodique

Nous en déduisons donc que la valeur du portefeuille de l'assureur à t=x+1 est égale à :

$$\hat{A}_0(x+1) = \hat{A}_0(x) * \sum_{i=1}^n w_i * A_i^{x+1} - S(x+1)$$

Et maintenant nous retranchons le niveau des provisions qu'il faut constituer de ce dernier montant pour trouver $F_0(x+1)$ qu'est égal à :

$$F_0(x+1) = \left[\hat{A}_0(x) * \sum_{i=1}^n w_i * A_i^{x+1} - S(x+1) \right] - \sum_{i=x+2}^T \frac{S(i)}{(1+j)^{i-x-1}}$$

III.2.2. La valorisation de la compagnie à l'instant initial

En s'inspirant du travail réalisé dans le cas mono-périodique évoqué dans la première partie, et en suivant la même logique, nous essayons dans une première étape d'exprimer la valeur de la compagnie à la fin de la période c'est-à-dire à t=T, puis, nous actualisons cette valeur avec le taux de rendement du portefeuille financier, et finalement nous maximiserons le rapport entre cette valeur actualisée et le niveau des fonds propres initial : F_0 .

A. Valeur du surplus de la compagnie à la fin de la période

A la fin de la période la valeur de la compagnie est par définition égale à $\hat{A}_0(T)$:

$$\hat{A}_0(T) = \hat{A}_0(T-1) * \sum_{i=1}^n w_i * A_i^T - S(T)$$

La conception de cette valorisation sous cette écriture, ne nous sera pas d'un grand usage dans la suite, en fait il n'est pas judicieux de la laisser sous cette forme, car d'une part, en l'implémentant sur la machine, le temps pour observer les résultats augmente considérablement à cause du caractère récursif qu'elle présente, et d'autre part puisque il est possible de l'alléger et de la présenter sous une forme plus simple, plus précisément on peut représenter $\hat{A}_0(x)$ en fonction de $\hat{A}_0 = F_0 + P_0$. Cherchant donc cette relation.

➤ La relation entre $\hat{A}_0(x)$ et \hat{A}_0

Dans la suite nous adoptons la notation suivante :

$$\Sigma_{0 \sim t} = \prod_{x=1}^t \left(\sum_{i=1}^n w_i * A_i^x \right)$$

En calculant $\hat{A}_0(x)$ en fonction de $F_0 + P_0$ pour x=0, 1,2 nous trouvons:

i. x=0 :

$$\hat{A}_0(0) = F_0 + P_0$$

ii. x=1 :

$$\hat{A}_0(1) = \left(\sum_{i=1}^n w_i * A_i^1 \right) * \left[P_0 + F_0 - \frac{S(1)}{\left(\sum_{i=1}^n w_i * A_i^1 \right)} \right]$$

iii. $x=2$

$$\hat{A}_0(2) = \Sigma_{0 \sim 2} * \left[P_0 + F_0 - \frac{S(1)}{\left(\sum_{i=1}^n w_i * A_i^1 \right)} - \frac{S(2)}{\left(\sum_{i=1}^n w_i * A_i^1 \right) * \left(\sum_{i=1}^n w_i * A_i^2 \right)} \right]$$

En analysant ces formules, nous pouvons soupçonner l'existence de la relation suivante, dont la validité sera vérifiée en utilisant une démonstration par récurrence :

$$\hat{A}_0(t) = \Sigma_{0 \sim t} * \left[P_0 + F_0 - \sum_{x=1}^t \frac{S(x)}{\Sigma_{0 \sim x}} \right]$$

❖ Démonstration par récurrence

1. Initialisation

Pour $t = 0, 1, 2$ la relation a déjà été vérifiée.

2. Généralisation

Supposons que la relation est vraie pour un certain $t \geq 2$ 'montrons qu'il en est de même pour " $t + 1$ " :

On a :

$$\hat{A}_0(t+1) = \hat{A}_0(t) * \left(\sum_{i=1}^n w_i * A_i^{t+1} \right) - S(t+1)$$

Mais puisque on a :

$$\hat{A}_0(t) = \Sigma_{0 \sim t} * \left[P_0 + F_0 - \sum_{x=1}^t \frac{S(x)}{\Sigma_{0 \sim x}} \right]$$

Il s'ensuit que :

$$\begin{aligned} \hat{A}_0(t+1) &= \Sigma_{0 \sim t} * \left(\sum_{i=1}^n w_i * A_i^{t+1} \right) * \left[P_0 + F_0 - \sum_{x=1}^t \frac{S(x)}{\Sigma_{0 \sim x}} \right] - S(t+1) \\ &= \Sigma_{0 \sim t+1} * \left[P_0 + F_0 - \sum_{x=1}^t \frac{S(x)}{\Sigma_{0 \sim x}} \right] - S(t+1) \\ &= \Sigma_{0 \sim t+1} * \left[P_0 + F_0 - \sum_{x=1}^t \frac{S(x)}{\Sigma_{0 \sim x}} - \frac{S(t+1)}{\Sigma_{0 \sim t+1}} \right] \\ &= \Sigma_{0 \sim t+1} * \left[P_0 + F_0 - \sum_{x=1}^{t+1} \frac{S(x)}{\Sigma_{0 \sim x}} \right] \end{aligned}$$

Ainsi on déduit que :

$$\forall t \in [1, T] / \hat{A}_0(t) = \Sigma_{0 \sim t} * \left[P_0 + F_0 - \sum_{x=1}^t \frac{S(x)}{\Sigma_{0 \sim x}} \right]$$

B. La valeur actualisée du surplus de la compagnie à $t=0$

Pour l'actualisation, et comme nous l'avons déjà signalé dans la première partie du travail, le taux utilisé est le taux de rendement du portefeuille des actifs financiers. Pendant deux dates successives ce taux est égal à :

$$\Sigma_{t \sim t+1} = \sum_{i=1}^n w_i * A_i^{t+1}$$

Ainsi le taux de rendement pour toute la période – de $t = 0$ à $t = T$ – est :

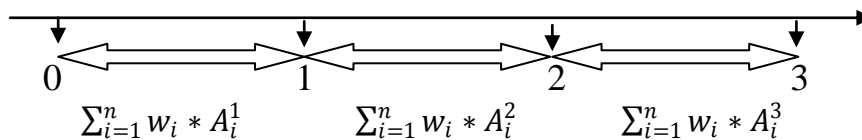
$$\prod_{t=0}^{T-1} \Sigma_{t \sim t+1} = \Sigma_{0 \sim T}$$

Donc la valeur actualisée est :

$$\overline{A}_0 = \frac{\hat{A}_0(t)}{\Sigma_{0 \sim T}} = P_0 + F_0 - \sum_{x=1}^T \frac{S(x)}{\Sigma_{0 \sim x}}$$

L'espérance de \overline{A}_0 est appelée conformément à ce que nous avons déjà annoncé dans le cas mono-périodique : fonds propres économiques.

➤ Exemple pour $t=3$



La valeur du portefeuille à $t=3$	Le taux d'actualisation	La valeur actualisée
$\Sigma_{0 \sim 3} * \left[P_0 + F_0 - \sum_{x=1}^3 \frac{S(x)}{\Sigma_{0 \sim x}} \right]$	$\Sigma_{0 \sim 3}$	$\overline{A}_0 = P_0 + F_0 - \sum_{x=1}^3 \frac{S(x)}{\Sigma_{0 \sim x}}$

Table 12 : Illustration de l'opération d'actualisation dans le cas de $T=3$

L'espérance de la valeur actualisée est :

$$E(\overline{A}_0) = E(P_0) + F_0 - \sum_{x=1}^3 E(S(x)) * E\left(\frac{1}{\Sigma_{0 \sim x}}\right)$$

III.2.3. Le critère

Maintenant, nous présentons le programme à résoudre, pour trouver l'allocation optimale selon le critère de maximisation des fonds propres, dans le cas général puis dans le cas de la réglementation marocaine

A. Le critère dans le cas général

En s'inspirant du travail réalisé dans la première partie de ce chapitre, et sans plus se tarder, nous pouvons énoncer le critère comme suit :

- Une allocation $\omega^* = (\omega^*_1, \omega^*_2, \dots, \omega^*_n)$ est optimale au sens du critère de MFPE si elle maximise la quantité suivante :

$$\frac{E(P_0) + F_0 - \sum_{x=1}^T E(S(x)) * E\left(\frac{1}{\prod_{t=1}^x (\sum_{i=1}^n w_i * A_i^t)}\right)}{F_0}$$

Ainsi pour trouver l'allocation optimale il faut résoudre le programme suivant :

$$\text{Sup}_{\omega \in [0,1]^n} \frac{E(P_0 + F_0) - \sum_{x=1}^T E(S(x)) * E\left(\frac{1}{\prod_{t=1}^x (\sum_{i=1}^n w_i * A_i^t)}\right)}{F_0}$$

Equation 7 : le programme à résoudre pour trouver l'allocation optimale dans le cas multi-périodique

B. Le critère dans le cas de la réglementation marocaine

Dans la réglementation marocaine, le niveau des fonds propres réglementaire imposé est indépendant du niveau du risque présenté par le portefeuille d'actifs financiers détenu par l'assureur (*indépendant de l'actif*), donc il est aussi indépendant de l'allocation choisie, il en est de même pour les prestations qui ne dépendent que du risque du passif et de ses caractéristiques, ainsi nous présentons la simplification naturelle du critère évoqué en haut comme suit :

- Une allocation ω^* est optimale au sens du critère de maximisation des fonds propres si elle maximise la quantité suivante :

$$- \sum_{x=1}^T E(S(x)) * E\left(\frac{1}{\prod_{t=1}^x (\sum_{i=1}^n w_i * A_i^t)}\right)$$

Ou d'une manière équivalente si elle vérifie l'équation suivante :

$$\omega^* = \text{argInf}_{\omega \in [0,1]^n} \sum_{x=1}^T E(S(x)) * E\left(\frac{1}{\prod_{t=1}^x (\sum_{i=1}^n w_i * A_i^t)}\right)$$

Nous supposons que les flux des prestations sont déterministes¹, autrement dit l'assureur connaît les prestations qu'il payera, donc le vecteur : $(S(1), S(2), \dots, S(T))$ est connu, il s'ensuit que : $\forall x \in [1, T]$ on a $E(S(x)) = S(x)$.

Le cas des flux aléatoires ne sera pas étudié dans ce travail. Sous cette hypothèse, l'allocation optimale ω^* vérifie l'équation suivante :

$$\omega^* = \text{argInf}_{\omega \in [0,1]^n} \sum_{x=1}^T (S(x)) * E\left(\frac{1}{\prod_{t=1}^x (\sum_{i=1}^n w_i * A_i^t)}\right)$$

Equation 8 : L'allocation optimale dans le cas des flux futurs déterministes

III.2.4. Application

A. Cadre générale & formulation du critère

Pour l'illustration du critère de maximisation des fonds propres économiques, nous considérons une compagnie d'assurance² non vie avec une seule branche, cette compagnie peut investir dans deux actifs financiers : un zéro coupon band dont la valeur à tout instant t sera notée par $A_1(t)$, et une action marocaine cotée en bourse à savoir *l'action de BMCE*, le prix de cette dernière sera noté par $A_2(t)$

Nous supposons aussi que les flux des prestations sont déterministes, et nous prenons une période d'assurance d'une durée égale à 9 années, $T = 9$, cette durée correspond à la durée que l'assureur espère couvrir en investissant dans les deux actifs évoqués précédemment.

Sous ces hypothèses, nous montrons que le critère de MFPE s'énonce ainsi :

¹ C'est le cas lorsque l'assureur utilise des méthodes d'estimation des prestations comme la méthode Chain Ladder

² L'identité ne nous a pas été indiquée par l'organisme d'accueil : ACAPS

► **Proposition** : une allocation ω^* est optimale au sens du critère de *MFPE* si elle vérifie l'équation suivante :

$$\omega^* = \operatorname{argInf}_{\omega \in [0,1]^2} \sum_{x=1}^9 (S(x)) * E \left(\frac{1}{\prod_{t=1}^x ((1 - \omega) * A_1^t + \omega * A_2^t)} \right)$$

Ou d'une manière équivalente, si elle est solution du programme d'optimisation suivant :

$$\operatorname{Inf}_{\omega \in [0,1]^2} \sum_{x=1}^9 (S(x)) * E \left(\frac{1}{\prod_{t=1}^x ((1 - \omega) * A_1^t + \omega * A_2^t)} \right)$$

B. L'actif de la compagnie

B.1. L'action de BMCE

L'action de *BMCE* est modélisée par un processus de *Black and Scholes* ordinaire dont les paramètres sont les suivant :

$$A_2^t = e^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) * t + \sigma * B_t} \text{ avec } \mu = 0.042 \text{ et } \sigma = 0.0972$$

B.2. Le bon de capitalisation

Concernant l'actif non risqué, il est modélisé par le processus suivant¹ :

$$A_1^t = \exp(r_{[t]}) \text{ Avec } t \in \{1, \dots, T\} \text{ et } r_{[t]} = \sum_{i=1}^t r_i \text{ les } r_i \text{ sont les taux d'intérêt annuels}$$

En fait, t ne peut pas prendre des valeurs dans \mathbb{R}^+ car il s'agit, comme nous l'avons déjà précisé, d'une suite de *zéro coupon bond d'une échéance = 1 année*, donc cette suite ne donne droit à des flux monétaire qu'à la fin de chaque année (*l'échéance*), ainsi le prix de cet actif n'a de signification que lorsque $t \in \mathbb{N}$.

Voici l'estimation des taux d'intérêt pour les années 2017, ..., 2024, signalant encore un fois que cette estimation à été faite en utilisant le modèle de Vasicek pour décrire l'évolution du taux d'intérêt au Maroc.

les années	2016	2017	2018	2019	2020	2021	2022	2023	2024
Taux d'intérêt annuel	0.022	0.026	0.028	0.0298	0.0307	0.0313	0.0316	0.0318	0.032

Table 13 : La projection du taux d'intérêt pour les 8 prochaines années.

C. Le passif de la compagnie

Pour l'application du critère, nous avons besoin des projections des prestations pour les 9 années prochaines

¹ Le prix de cet actif à $t=0$ est unitaire.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2006	1783	2525	3891	4264	6725	8801	12053	10925	7505	1599
2007	3534	6606	8272	7767	11686	12842	11652	8618	3190	
2008	4120	10291	11897	14595	13976	12730	8692	3672		
2009	5543	15529	14030	14358	10457	7537	2738			
2010	9634	16736	18532	8264	8240	2086				
2011	11302	13708	7993	5132	3012					
2012	14082	12704	6167	4190						
2013	11427	6947	3423							
2014	7813	3860								
2015	4014									

Table 14 : Le triangle de développement pour sinistres, payées, incrémentaux en milliers de Dhs

En se reposant sur ce triangle de règlement (*run – off triangle*) des sinistres incrémentaux de notre compagnie d'assurance pendant les dix dernières années : {2006, 2007, ..., 2015}, cherchons, en utilisant la méthode de *Chain Ladder* expliquée dans le chapitre 2, l'estimation des prestations annuelles à payer par l'assureur à la fin des années comptables suivantes :

$$\{2016, 2017, \dots, 2024\}$$

Pour ce faire, commençons par la recherche des facteurs de développement λ_i avec $i \in \{0, 1, \dots, 8\}$, les i représentent les années de développement, la dernière année étant non prise en compte. En appliquant ce qui a été expliqué dans le chapitre 2, nous trouvons les estimations suivantes de nos facteurs de développement

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8
λ_i	2.284063664	1.506619058	1.29450068	1.24554937	1.18861761	1.16436735	1.12990901	1.08770419	1.02734642

Table 15 : Les valeurs estimées des facteurs de développement

La remarque la plus importante que nous pouvons faire à l'égard de ces facteurs est que la dernière valeur $\lambda_8 = 1.027$, est encore supérieure à 1, ainsi nous ne pouvons certainement pas dire que les sinistres sont complètement développés, autrement dit, l'année 2024 n'est probablement pas la dernière année pour payer intégralement tous les assurés dont les années des survenances des sinistres appartiennent à {2006, 2007, ..., 2015}, car il faut encore quelques années.

Nous remarquons aussi que les facteurs de développement décroissent avec une grande vitesse pour les premières années (*en particulier pour la première année*), ceci signifie que la majorité des assurés sera dédommagée les premières années.

En appliquant ces facteurs à notre triangle de développement, nous trouvons les estimations suivantes des prestations à payer pour les prochaines années en fonction de l'année d'origine {2006, 2007, ..., 2015} et de l'année de développement, appelée aussi âge {0, 1, ..., 9}, ces prestations se trouvent dans la partie (*triangle inférieur*) colorée en bleu du tableau suivant.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2006	1783	2525	3891	4264	6725	8801	12053	10925	7505	1599
2007	3534	6606	8272	7767	11686	12842	11652	8618	3190	2028.2021
2008	4120	10291	11897	14595	13976	12730	8692	3672	7013.96735	2378.78234
2009	5543	15529	14030	14358	10457	7537	2738	9118.57327	6955.8698	2359.07857
2010	9634	16736	18532	8264	8240	2086	10436.0117	9603.91485	7326.10013	2484.64196
2011	11302	13708	7993	5132	3012	7761.04869	8038.8863	7397.91997	5643.31352	1913.926
2012	14082	12704	6167	4190	9120.44033	8726.09942	9038.48483	8317.81732	6345.03362	2151.91391
2013	11427	6947	3423	6419.231241	6928.47787	6628.91094	6866.21916	6318.75338	4820.09896	1634.73334
2014	7813	3860	5913.764261	5179.313968	5590.19622	5348.49264	5539.96319	5098.24408	3889.06474	1318.97371
2015	4014	5154.23155	4644.800828	4067.947377	4390.6634	4200.82403	4351.20923	4004.2733	3054.55719	1035.9510

Table 16 : Estimation par projection des prestations annuelles à payer en milliers de Dhs

Maintenant, nous arrivons à la partie essentielle de cette étude, à savoir l'estimation de la charge annuelle à payer pendant les 9 prochains exercices. En se référant au chapitre 2, ces charges sont obtenues en sommant les valeurs des diagonales du triangle inférieur du tableau ci-dessus, en effet, chaque diagonale présente l'activité d'une année comptable différente :

les années comptables	2016	2017	2018	2019	2020	2021	2022	2023	2024
les prestations à payées	62965.47047	52456.1453	42408.638	33051.1479	24318.5002	16421.4662	9528.07138	4373.53089	1035.95103

Table 17 : Les prestations payées par année comptable en milliers de Dhs

D. Résultats

La méthode de la recherche de la solution optimale est similaire à celle que nous avons adopté dans le cas mono-périodique, nous commençons tout d'abord par le calcul, pour chaque $\omega \in [0,1]$, de la quantité suivante par la méthode de simulation de Monte Carlo¹ :

$$\hat{\Delta}(\omega) = \sum_{x=1}^9 (S(x)) * E \left(\frac{1}{\prod_{t=1}^x ((1 - \omega) * A_1^t + \omega * A_2^t)} \right)$$

Puis nous cherchons la valeur de ω qui donne le minimum de cette quantité, cette valeur est bien entendu, la solution optimale au sens du critère de maximisation des fonds propres économiques de notre problème d'optimisation.

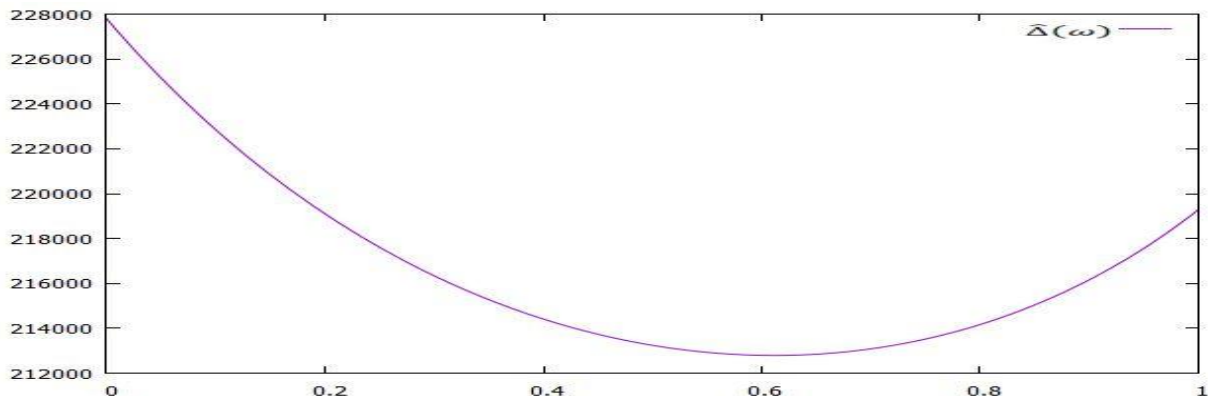


Figure 19 : L'espérance de la valeur actualisée des prestations au taux de rendement du portefeuille en fonction de l'allocation

D'après ce graphique nous remarquons que notre solution optimale ω^* au sens du critère de maximisation des fonds propres économiques, se trouve quelque part au voisinage de $\omega = 0.61$, c'est ce qui est confirmé par les sorties de notre code :

$$\omega^* = 63.2\%$$

En comparant cette allocation optimale avec celle obtenue dans le cas mono-périodique, nous constatons qu'elles ne sont pas trop différentes l'une de l'autre, nous concluons ainsi qu'au moins dans notre cas, les préférences d'investissement de l'assureur ne dépendent pas de la période d'assurance considérée, en fait elles ne dépendent que des caractéristiques des actifs qu'il détient.

¹ Le code utilisé pour cette simulation se trouve en annexe

Conclusion

Au cours de ce mémoire nous avons essayé de trouver l'allocation d'actif optimale qui permet à un assureur se conformant à la réglementation marocaine, d'améliorer la santé financière de son portefeuille. Le but de cette allocation était de contrôler et d'amortir, de la meilleure façon possible, l'évolution du passif en investissant de la manière la plus profitable que soit dans des actifs financiers présentant des caractéristiques particulières telle que la liquidité et le niveau de risque (*volatilité*) peu élevé.

Pour cette raison nous avons utilisé le critère de maximisation des fonds propres économiques. Ce critère qualifié d'innovant, robuste et objectif, consiste à choisir l'allocation d'actifs qui permet de maximiser le ratio entre, l'espérance de la valeur (*surplus*) actualisée au taux de rendement (*risqué*) du portefeuille des actifs financiers, et le niveau des fonds propres comptables, ce dernier doit être bien entendu supérieur à la marge de solvabilité réglementaire marocaine.

Le vrai défi que nous avons rencontré au cours de cette aventure mathématique était de calculer l'espérance que nous venons d'évoquer, ce qui nous a amené à utiliser les techniques efficaces de simulation de Monte Carlo et la programmation informatique pour écrire des codes répondant à nos besoins. Ces techniques sont considérées comme la pierre angulaire du critère étudié, car le plus souvent ce dernier fait intervenir des espérances incalculables analytiquement ou bien difficiles à calculer.

Et comme le critère nécessite la connaissance des caractéristiques de l'actif et du passif de la compagnie pour pouvoir s'appliquer, nous avons réservé un chapitre entier pour l'étude et la modélisation de ses derniers, ainsi par exemple, nous avons eu l'occasion de :

- ✓ Modéliser l'action marocaine de BMCE par un modèle de Black et Scholes d'un drift égal à 0.042 et d'une volatilité de 0.0972.
- ✓ Faire des projections sur le taux d'intérêt annuel marocain à l'aide d'un modèle de Vasicek présentant une moyenne de 0.08, une vitesse d'ajustement de 0.0489 et une volatilité de 0.006.
- ✓ Modéliser le montant des pertes occasionnées par un portefeuille d'assurés par la méthode de Chain ladder et par la méthode stochastique.

La mise en pratique du critère dans les deux cas mono et multi-périodique a permis de proposer un investissement optimal d'environ 64% dans l'action, ce qui nous conduit à se demander sur l'effet de l'horizon sur le choix d'investissement proposé par le critère, question qui ne semble pas facile à répondre pour le moment.

Ainsi nous pouvons dire que lorsqu'il est appliqué dans le cadre de la réglementation marocaine, le critère possède l'avantage d'être simple à comprendre et facile à appliquer, mais que se passerait-il si nous essayons d'appliquer le critère dans le référentielle de la nouvelle réglementation des assurances « solvabilité 2 » qui sera bientôt adoptée par le Maroc, que pouvons dire de sa simplicité et de son efficacité ?

Bibliographie et Webographie

Bibliographie :

- [1] Andre Farber, Marie-paul Laurent, Kim Oosterlinck ; Hugues Pirote. Finance 2^{ème} édition
- [2] Barry R. Cobb, Rafael Rumi, Antonio Salmeron .Approximating the Distribution of a Sum of Log-normal Random Variables
- [3] Ben Abdel Ouahab Alia, Imegri Meriem. Modélisation de la courbe de taux et valorization des dérivés de taux. INSEA 2014,page 47
- [4] Code des assurances, dahir N 1-02-238 du 25 rejev 1423 portant la promulgation de la loi 17-99 portant code des assurances
- [5] HULL, John. Options, futures et autres actifs dérivés. PEARSON Education, New Jersey, 6^{ème} Ed, 2007, page 348
- [6] PLANCHET Frédéric, THEROND Pierre Allocation d’actifs selon le critère de maximisation des fonds propres économiques en assurance non-vie : présentation et mise en œuvre dans la réglementation française et dans un référentiel de type Solvabilité 2,
- [7] PLANCHET Frédéric, Pierre THEROND. Allocation d’actifs d’un régime de rentes en cours de service
- [8] PLANCHET Frédéric, THEROND Pierre, GAUTRON Norbert, management in insurance
- [9] PLANCHET F GAUTRON N.,, THEROND P. [2004] “Méthodes financières et allocation d’actifs en assurance”.

Webographie

- [1] Site de banque al maghrib <http://www.bkam.ma>
- [2] CDVM. Obligations.[enligne]. <http://www.cdvm.gov.ma/espace-epargnants/obligations/> [01 /04/2014]

Annexe

Définitions générales**A.** *L'inégalité de Jensen*

Soit f une fonction convexe sur un intervalle I de \mathbb{R} , et soit X une variable aléatoire à valeurs dans I avec $E(X) \in \mathbb{R}$ son espérance, alors :

$$f(E(X)) \leq E(f(X))$$

B. *Simulation de Monte-Carlo*

La simulation de Monte-Carlo est une méthode mathématique utilisée principalement, pour approcher l'espérance des variables aléatoires lorsque celle-ci est difficile ou impossible à calculer analytiquement, elle permet aussi de calculer un certain nombre d'intégrales.

L'évaluation de la variance est cruciale pour mesurer l'efficacité de la méthode. En fait on montre que l'erreur de l'approximation, lorsque n est assez grand suit une loi normale :

$$\varepsilon_n \rightarrow N\left(0, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

C'est pour cette raison qu'il faut réduire cette variance pour avoir des résultats fiables. Il existe 2 principales méthodes de réduction de la variance : variable de contrôle, variable antithétique.

Les méthodes de Monte-Carlo reposent sur la capacité de simuler des variables aléatoires. Pour ce faire, on a recours à des générateurs de nombres aléatoires. Un ordinateur n'est en pratique capable que de générer des suites déterministes. Il existe néanmoins des procédés permettant de construire des suites de nombres qui se comportent statistiquement comme des suites aléatoires. Ces suites sont construites par récurrence :

$$U_{n+1} = f(U_n) \quad / n \in \mathbb{N}$$

La valeur de U_0 (le germe) doit alors être choisie par l'utilisateur sous peine de toujours obtenir la même suite de nombres. Souvent, on utilise l'horloge de l'ordinateur pour initialiser le germe. L'exemple le plus simple est celui du générateur congruentiel linéaire :

$$h(x) = (ax + b)[\text{mod. } m]$$

La méthode repose sur les deux théorèmes suivants :

1. Loi forte des grands nombres

Soit $(X_i)_{i \in [1, n]}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées (*i i d*) telles que $E(X_1) < +\infty$, alors :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} \right) = E(X_1)$$

2. Théorème central limite

Soit $(X_i)_{i \in [1, n]}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées (*i i d*) telles que $E(X_1^2) < +\infty$, on pose $\sigma^2 = \text{Var}(X_i)$ alors :

$$\frac{\sqrt{n}}{\sigma} \left(E(X_1) - \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} \right) \text{ converge en loi vers } G \text{ avec } G \rightarrow N(0,1)$$

C. *Principe de la valeur espérée*

Soit X une variable aléatoire représentant les coûts couverts par un contrat d'assurance et dont l'espérance est $E(X) < \infty$, il est connu que la prime pour un contrat d'assurance correspond à l'espérance $E(X)$ des couts associés à ce contrat, il est connu aussi que si jamais l'assureur se contente seulement de cette prime, il devrait s'attendre à une augmentation de la probabilité de ruine, sauf s'il alimente ses fonds propres proprement, d'où la nécessité de charger une prime dite la prime majorée $\Pi(X)$ qui est strictement supérieur à la prime pure, un des principes de calcul de cette prime majorée est le principe de la valeur espérée.

✓ **Définition du principe**

On définit la prime majorée $\Pi(X)$ par :

$$\Pi(X) = (1 + \kappa)E(X) = E(X) + \kappa E(X) \text{ avec } \kappa > 0 \text{ pour éviter la ruine certaine}$$

On en déduit que la marge de sécurité est égale à $\kappa E(X)$. ce principe simple à appliquer a pour inconvénient de ne pas tenir en compte la variabilité et la nature spécifique de la v.a. X .

Le code pour les cas mono et multi-périodique

A. *Les bibliothèques utilisées*

Tout au long de cet annexe, les bibliothèques suivantes seront appelées pour la compilation des codes qui y apparaîtront :

```
#include<stdio.h>
#include<stdlib.h>
#include<math.h>
#include<time.h>
#include<gsl/gsl_sf_erf.h>
#include<gsl/gsl_rng.h>
#include<gsl/gsl_randist.h>
#include<gsl/gsl_statistics_int.h>
#include<gsl/gsl_statistics_double.h>
#include<iostream>
#include <gsl/gsl_vector.h>
#include <gsl/gsl_matrix.h>
```

B. *Le code dans le cas mono-périodique*

1. Générer un tableau de taille n contenant des réalisations du prix de l'actif risqué à t=1

```
double *tableau(double *g,int n, double drift,double sig){ double a,G;
                                                    int i;
                                                    a=exp(drift-0.5*sig*sig);
                                                    g=(double *)malloc(n*sizeof(double));

gsl_rng *r;
r=gsl_rng_alloc(gsl_rng_mt19937);
gsl_rng_env_setup();
gsl_rng_set(r,time(NULL));
                for(i=0;i<n;i++){           G=gsl_ran_gaussian(r,1);
                                                    g[i]=a*exp(sig*G);
                }

return g;                                     }
```

2. Calcul de l'espérance proposée par le critère en fonction du niveau de l'allocation noté par x

```
double esper(double x,double *g,int n,double r){ double s=0;
                                                    int i;
                for(i=0;i<n;i++){           s=s+1/((1-x)*exp(r)+x*g[i]);
```

```

    }
s=s/n;
return s;
    }

```

3. Application

```

int main(){
FILE *stream;
double *g,*h , x=0,mini=0,imagemin, drift,sig,r;
int N;
printf("entrez le nombre de simulation \n"); scanf("%d",&N);
printf("entrez sigma \n"); scanf("%lf",&sig);
printf("entrez le drift \n"); scanf("%lf",&drift);
printf("entrez le taux de l'actif non risque \n "); scanf("%lf",&r);
h=tableau(g,N,drift,sig);
imagemin=esper(0,h,N,r);
// Ouverture en mode écriture du fichier mono
if ((stream=fopen("C:\\Users\\Iliass\\Desktop\\simulation\\mono\\test","w"))== NULL) {
fprintf(stderr,"cannot open input file.\n");
return 1;
}
// Recherche de  $\omega^*$ 
    do{
        if(esper(x,h,N,r)<imagemin){
            mini=x;
            imagemin=esper(x,h,N,r);
        }

fprintf(stream,"%f %f \n",x,esper(x,h,N,r));
x=x+0.001;
    }
    while(x<1.001);
fclose(stream);
printf("pour les parametres suivants :\n");
printf("drift= "); cout << drift<< "\n";
printf("volatilité= "); cout << sig<< "\n";
printf("taux d'interet="); cout << r<< "\n";
printf("la part optimale à investir dans l'action est :"); cout << mini<< "\n";
printf("l'esperance pour cette valeur est :"); cout << imagemin << "\n";
}

```

C. *Le code pour le calcul de la solution optimale en fonction de la volatilité de l'action dans le cas mono-périodique*

1. Générer un tableau de taille n contenant des réalisations d'une loi normale centrée réduite

```
double *tableau(double *g,int n) { double G;
                                int i;
                                g=(double *)malloc(n*sizeof(double));

    gsl_rng *r;
    r=gsl_rng_alloc(gsl_rng_mt19937);
    gsl_rng_env_setup();
    gsl_rng_set(r,time(NULL));

                                for(i=0;i<n;i++){ G=gsl_ran_gaussian(r,1);
                                                g[i]=G;
                                                }

    return g;
}
```

2. calcul de l'espérance proposée par le critère en fonction du niveau de l'allocation x et en fonction de la volatilité de l'actif risqué sig

```
double esper(double x,double *g,int n,double r, double drift,double sig){
double a,s=0;
a=exp(drift-0.5*sig*sig);
int i;

                                for(i=0;i<n;i++){ s=s+(1/((1-x)*exp(r)+x*a*exp(sig*g[i])));
                                                }

s=s/n;
return s;
}
```

3. Application

```
int main() {
FILE *stream;
double *g,*h, sig=0, r,drift,x,imagemin,minimum;
int N;
printf("entrez le nombre de simulations \n"); scanf("%d",&N);
printf("entrez le drift \n"); scanf("%lf",&drift);
printf("entrez le taux de l'actif non risque \n "); scanf("%lf",&r);
h=tableau(g,N);
if((stream=fopen("C:\\Users\\Iliass\\Desktop\\simulation\\multi\\test+++", "w"))==
NULL) {
```

```

fprintf(stderr,"cannot open input file.\n");
return 1;
}
fprintf(stream," sigma/omega \n");
\\ Pour chaque valeur de  $\sigma \in [0, 1]$  on cherche  $\omega^*$ 
    do{   minimum=0;
        x=0;
        imagemin=esper( x,h,N, r,drift,sig);
        x=0.001 ;
    do{   if(esper(x,h,N,r,drift,sig)<imagemin){
        minimum=x;
        imagemin=esper(x,h,N,r,drift,sig); }
    x=x+0.001;    }
    while(x<1.001);
    fprintf(stream,"%f %f \n",sig,minimum);
    sig=sig+0.001;    }
    while(sig<1.001);
    fclose(stream);
}

```

D. *Le code pour la recherche de la probabilité de ruine en fonction de la part investie dans l'action dans le cas mono-périodique*

1. Générer un tableau de taille n contenant des réalisations d'une loi normale centrée réduite

```

double *normal(double *g,int n){   double G;
                                   int i;
                                   g=(double *)malloc(n*sizeof(double));

    gsl_rng *r;
    r=gsl_rng_alloc(gsl_rng_mt19937);
    gsl_rng_env_setup();
    gsl_rng_set(r,time(NULL));
                                   for(i=0;i<n;i++){   G=gsl_ran_gaussian(r,1);
                                                         g[i]=G;
                                                         }
    return g;
}

```

2. Application

```

int main(){
FILE *stream;

```

```
double *g,*h;
double a,mu,sd,drift,sig,rate,prov,fonds,allocation,prob,ruine;
int i,N ;
```

// la détermination des valeurs des variables par l'utilisateur

```
printf("entrez le nombre de simulations \n"); scanf("%d",&N);
printf("entrez le 1er parametre de la loi log-normale 'mean' \n"); scanf("%lf",&mu);
printf("entrez le 2eme parametre de la loi log-normale 'standard deviation' \n");
scanf("%lf",&sd);
printf("entrez le drift \n"); scanf("%lf",&drift);
printf("entrez la volatilité \n"); scanf("%lf",&sig);
printf("entrez le taux d'interet \n"); scanf("%lf",&rate);
printf("entrez les provisions techniques \n"); scanf("%lf",&prov);
printf("entrez les fonds propres \n"); scanf("%lf",&fonds);
    a=exp(drift-0.5*sig*sig);
    allocation=0;
    h=lognormal(g,N);
```

// Ouverture du fichier *probabilité de ruine* en mode écriture

```
if ((stream=fopen("C:\\Users\\Iliass\\Desktop\\simulation\\probaruine\\probabilite de
ruine","w"))== NULL){
    fprintf(stderr,"cannot open input file.\n");
    return 1;
}
```

// Pour chaque niveau d'allocation dans l'actif risqué $\omega = allocation$, on calcul la probabilité de ruine qui y est associée en utilisant l'approximation présentée dans le chapitre 3.

```
    do{ prob=0;
        ruine=0;
        for(i=0;i<N;i++){
if( exp(mu+(sd*h[i]))>(prov+fonds)*((allocation*a*exp(sig*h[i]))+(1-
allocation)*exp(rate))){
                                prob=prob+1;
                                }
        }
        ruine=100*(prob/N);
        fprintf(stream,"%f %f \n",allocation,ruine);
        allocation=allocation+0.001;
    }
```

```

while(allocation<1.001);
fclose(stream);
return 0;
}

```

E. *Le code utilisé pour la recherche de la solution optimale dans le cas multi-périodique*

1. La fonction pour générer un tableau de N réalisations d'une v.a. normale centrée réduite

```

double *normal(double *g,int N){ double G;
                                int i;
                                g=(double *)malloc(N*sizeof(double));

gsl_rng *r;
r=gsl_rng_alloc(gsl_rng_mt19937);
gsl_rng_env_setup();
gsl_rng_set(r,time(NULL));

                                for(i=0;i<N;i++){ G=gsl_ran_gaussian(r,1);
                                                                g[i]=G;
                                                                }

return g;
                                }

```

2. La fonction pour estimer l'espérance pour une allocation donnée

```

double esperance(double *prestation,int T,double *normal,int N,double drift,double
sig,double alloc,double *taux){
    double a,somme,rendement,esperance,esper;
    a=drift-0.5*sig*sig;
    int i,t;

                                for(i=0;i<N;i++){ rendement=1;
                                                                somme=0;

for(t=1;t<=T;t++){
                                rendement=rendement*(((1-alloc)*exp(taux[t -
1]))+alloc*exp(a*t)*exp(sig*sqrt(t)*normal[i]));
                                somme=somme+(prestation[t-1]/rendement);
                                                                }

                                                                esper=esper+somme;
                                                                }

esperance=(esper/N);
return esperance;
}

```

3. Application

```

int main(){
FILE *stream;
double *gauss,*g,*prestation,*taux;
double prest,sig,drift,alloc,allocoptima,infesp,y,somme,rate;
int N,T,i,t;
printf("entrez le nombre de simulations \n"); scanf("%d",&N);
printf("entrez le nombre de periode \n"); scanf("%d",&T);
gauss=normal(g,N);
prestation=(double *)malloc(T*sizeof(double));
taux=(double *)malloc(T*sizeof(double));
printf("entrez sigma \n"); scanf("%lf",&sig);
printf("entrez le drift \n"); scanf("%lf",&drift);
printf("entrez le taux de l'actif non risque \n "); scanf("%lf",&r);
// Remplissage du tableau des prestations
for(i=0;i<T;i++){
printf("entrez prestations de la periode :%d \n",i+1);scanf("%lf",&prest);
prestation[i]=prest;
}
// Remplissage du tableau des taux
for(i=0;i<T;i++){
printf("entrez le taux de la periode :%d \n",i+1);scanf("%lf",&rate);
taux[i]=rate;
}
// Ouverture du fichier test pour l'écriture
if ((stream=fopen("C:\\Users\\Iliass\\Desktop\\simulation\\multi\\test","w"))== NULL){
printf(stderr,"cannot open input file.\n");
return 1;
}
alloc=0;
y=esperance(prestation,T,gauss,N,drift,sig, r,0);
fprintf(stream,"%f %f \n",alloc,y);
infesp=y;
allocoptima=alloc;
// Recherche de  $\omega^*$ 
do{
alloc=alloc+0.001;
y=esperance(prestation,T,gauss,N,drift,sig, r, alloc);
}

```

```
                fprintf(stream,"%f %f \n",alloc,y);
    if(y<infesp){    infesp=y;
                    allocoptima=alloc;
                }
    }
while(alloc < 1);
fclose(stream);
printf("la part optimale à investir dans l'action est :");
cout << allocoptima<< "\n";
printf("l'esperance pour cette valeur est :");
cout << y << "\n";
    }
```

La probabilité de ruine et Le code R pour la modélisation des sinistres.

A. Le code R utilisé pour la modélisation de la loi du coût annuel par police

1) Code pour lire la base de données *montant.csv*

```
getwd()
read.csv2("montant.csv")
m=read.csv2("montant.csv")
m
```

2) Code pour calculer les statistiques de base

```
t=m$x
t
summary(t)
mean(t)
var(t)
sd(t)
plot(hist(t),main="montant.csv",col="green")
```

```
> summary(t)
  Min. 1st Qu.  Median    Mean 3rd Qu.    Max.
 130.8   742.0  1071.0  1250.0  1560.0  8058.0
> mean(t)
[1] 1249.855
> var(t)
[1] 542073.8
> sd(t)
[1] 736.2566
```

Figure 20 : Les statistiques de base

3) Code pour le calcul des paramètres de chaque modèle proposé

```
library(MASS)
```

- **Ajustement par la loi Exponentielle**

```
fitexp<-fitdistr(t,"exponential")$estimate
fitexp
```

- **Ajustement par la loi Gamma**

```
fitgamma<-fitdistr(t,"gamma")$estimate
fitgamma
```

- **Ajustement par la loi Log normal**

```
fitlognormal<-fitdistr(t,"lognormal")$estimate
fitlognormal
```

```
> fitexp<-fitdistr(t,"exponential")$estimate
> fitexp
      rate
0.0008000928
> fitgamma<-fitdistr(t,"gamma")$estimate
> fitgamma
      shape      rate
3.496638771 0.002797637
> fitlognormal<-fitdistr(t,"lognormal")$estimate
> fitlognormal
      meanlog      sdlog
6.9810277 0.5472855
```

Figure 21 : Les paramètres des lois d'ajustement

4) Code pour la représentation graphique de la fonction de répartition empirique et les fonctions de répartition des autres lois utilisées

```
x=t
plot(ecdf(x))
curve(pexp(x,fitexp[1]),add=TRUE,lwd=2,col="red")
curve(pgamma(x,fitgamma[1],fitgamma[2]),add=TRUE,lwd=2,col="blue")
curve(plnorm(x,fitlognormal[1],fitlognormal[2]),add=TRUE,lwd=2,col="green")
legend(x=0,y=1,legend=c("Fonction de répartition de x","Fonction de répartition de la loi
exponential","Fonction de répartition de la loi gamma","Fonction de répartition de la loi
lognorm"),lty=1:4,col=c("black","red","blue","green"))
```

5) Code pour le test d'adéquation de Kolmogorov-Smirnov pour les trois modèles

```
library(MASS)
ks.test(x,pexp,fitexp[1])
ks.test(x,pgamma,fitgamma[1],fitgamma[2])
ks.test(x,plnorm,fitlognormal[1],fitlognormal[2])
> ks.test(x,pexp,fitexp[1])
      One-sample Kolmogorov-Smirnov test
data:  x
D = 0.24935, p-value < 2.2e-16
alternative hypothesis: two-sided
> ks.test(x,pgamma,fitgamma[1],fitgamma[2])
      One-sample Kolmogorov-Smirnov test
data:  x
D = 0.041114, p-value = 9.118e-08
alternative hypothesis: two-sided
> ks.test(x,plnorm,fitlognormal[1],fitlognormal[2])
      One-sample Kolmogorov-Smirnov test
data:  x
D = 0.0068499, p-value = 0.9731
alternative hypothesis: two-sided
```

Figure 22 : Le test de Kolmogorov-Smirnov

6) Code pour le calcul du critère AIC pour chaque modèle

- **Exponentiel**

```
loglikexp<-fitdistr(x,"exponential")$loglik
loglikexp
AICexp=-2*loglikexp+2
AICexp
```

- **Log normal**

```
logliklognorm<-fitdistr(x,"lognormal")$loglik
logliklognorm
AIClnorm=-2*logliklognorm+4
AIClnorm
```

- **Gamma**

```
loglikgamma<-fitdistr(x,"gamma")$loglik
loglikgamma
AICgamma=-2*loglikgamma+4
AICgamma
```

```

> loglikexp<-fitdistr(x,"exponential")$loglik
> loglikexp
[1] -40653.91
> AICexp=-2*loglikexp+2
> AICexp
[1] 81309.83
>
> logliklognorm<-fitdistr(x,"lognormal")$loglik
> logliklognorm
[1] -38985.91
> AIClnorm=-2*logliklognorm+4
> AIClnorm
[1] 77975.82
>
> loglikgamma<-fitdistr(x,"gamma")$loglik
> loglikgamma
[1] -39107.37
> AICgamma=-2*loglikgamma+4
> AICgamma
[1] 78218.74

```

Figure 23 Le critère AIC

B. L'approximation de Fenton Wilkinson

L'approximation de Fenton ou bien la méthode de Fenton Wilkinson, est une méthode simple à appliquer pour estimer la loi d'une somme de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées selon une loi log normale, la précision et l'efficacité de la méthodes ont été démontrées en la comparant à une autre méthode dont l'efficacité est déjà prouvée à savoir la méthode de Schwartz-Yeh (SY).

Soient X_1, X_2, \dots, X_n des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées selon un loi log normale de paramètres (μ, σ^2) :

$$X_i \sim LN(\mu, \sigma^2) \text{ avec } i \in [1, n]$$

Soit X la variable aléatoire représentant la somme de ces n variables :

$$X = \sum_{i=1}^n X_i$$

Alors selon Fenton-Wilkinson X suit une loi log normale de paramètres (μ_X, σ_X^2) tel que :

$$(\exp(\sigma_X^2) - 1) * \exp(2 * \mu_X + \sigma_X^2) = n * \text{Var}(X_1) \text{ et } \exp(\mu_X + 0.5 * \sigma_X^2) = n * E(X_1)$$

La résolution de ce système à deux inconnus (μ_X, σ_X^2) donne les solutions suivantes :

$$\begin{cases} \mu_X = \text{Ln}(n * \exp(\mu)) + 0.5(\sigma^2 - \sigma_X^2) \\ \sigma_X^2 = \text{Ln}\left(\frac{\exp(\sigma^2) - 1}{n} + 1\right) \end{cases}$$

C. La loi log normale

✓ Définition

On dit qu'une variable aléatoire X suit une loi *log - normale* de paramètres μ : paramètre de et σ^2 : :

$$X \sim LN(\mu, \sigma^2)$$

si la variable $Y = \ln(X)$, aussi aléatoire, suit une loi *normale* d'espérance μ et de variance σ^2 :

$$Y \sim N(\mu, \sigma^2)$$

Signalons que les deux paramètres (μ, σ^2) de notre loi log-normale n'ont pas la même signification usuelle que ceux d'une loi normale, en effet, si pour ce dernier cas μ représente l'espérance de Y et σ^2 représente sa variance :

$$E(Y) = \mu \text{ et } \text{Var}(Y) = \sigma^2$$

alors, pour une loi log-normale, l'esperance et la variance sont définies comme suit

$$E(X) = \exp\left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right) \text{ et } \text{Var}(X) = (\exp(\sigma^2) - 1) * \exp(2\mu + \sigma^2)$$

- La fonction de densité la loi *log - normale* est :

$$f_X(x, \mu, \sigma) = \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(\ln(x) - \mu)^2}{2\sigma^2}\right) = \frac{1}{x} f_Y(\ln(x), \mu, \sigma)$$

Avec $f_Y(x, \mu, \sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$ la fonction de densité de la loi de Y

✓ Simulation

Pour simuler une variable aléatoire suivant une loi *log – normale*, on propose le code suivant :

❖ Le code

1. Les bibliothèques utilisées

```
#include<stdio.h>
#include<stdlib.h>
#include<math.h>
#include<time.h>
#include<gsl/gsl_sf_erf.h>
#include<gsl/gsl_rng.h>
#include<gsl/gsl_randist.h>
#include<gsl/gsl_statistics_int.h>
#include<gsl/gsl_statistics_double.h>
#include<iostream>
#include <gsl/gsl_vector.h>
#include <gsl/gsl_matrix.h>
```

2. Code pour générer un vecteur de n v.a. distribuées selon $N(\mu, \sigma^2)$

```
double *normal(double *g,int n, double mu,double sd){ double G;
    int i;
    g=(double *)malloc(n*sizeof(double));

    gsl_rng *r;
    r=gsl_rng_alloc(gsl_rng_mt19937);
    gsl_rng_env_setup();
    gsl_rng_set(r,time(NULL));
    for(i=0;i<n;i++){ G=gsl_ran_gaussian(r,1);
        g[i]=exp(mu+sd*G);
    }

    return g;
}
```

3. Application

```
int main(){
    FILE *stream;
    double *g,*h;
    double mu,sd,moy=0;
    int i,N ;
    printf("entrez le nombre de simulations \n"); scanf("%d",&N);
    printf("entrez le 1er parametre de la loi log-normale 'mean' \n"); scanf("%lf",&mu);
    printf("le 2eme parametre de la loi log-normale 'standard deviation' \n"); scanf("%lf",&sd);
    h=normal(g,N,mu,sd);
    if ((stream=fopen("C:\\Users\\Iliass\\Desktop\\simulation\\lognormal\\realisation","w"))==
    NULL) { fprintf(stderr,"cannot open input file.\n");
```

```
        return 1;
    }
    printf(" voila les realisation de votre loi log-normale de parametres %f et %f : \n",mu,sd);
        for(i=0;i<N;i++){ printf("---%d---",i+1);
            printf("%f", h[i]);
            fprintf(stream,"%f \n",h[i]);
            printf("\n");
        }
    fclose(stream);
    return 0; }
```