



المندوبية السامية للتخطيط
HAUT-COMMISSARIAT AU PLAN

ROYAUME DU MAROC
..*.*
HAUT COMMISSARIAT AU PLAN
..*.*.*
INSTITUT NATIONAL
DE STATISTIQUE ET D'ECONOMIE APPLIQUEE



INSEA

Projet de Fin d'Etudes

**Les Provisions Techniques sous le cadre actuel,
SBR et S2 : Evaluation et comparaison**

Préparé par : **M. ICHRMAD Mohamed**

Sous la direction de : **M. Mustapha Elbbar (INSEA)**
Mme Fatima-Ezzahra Biyad (La MATU)

Soutenu publiquement comme exigence partielle en vue de l'obtention du

Diplôme d'Ingénieur d'Etat

Filière : Actuariat-Finance

Devant le jury composé de :

- **M. Mustapha Elbbar (INSEA)**
- **M. Abdellatif Mechrafi (INSEA)**
- **Mme Fatima-Ezzahra Biyad (La MATU)**

Juin 2018 / PFE N° 14

Résumé

Ce présent rapport constitue la trace écrite du travail que nous avons réalisé dans le cadre de notre Projet de Fin d'Etudes. Ce dernier est effectué au sein de la MATU et porte sur l'estimation du Best Estimate pour sinistres et l'évaluation de la provision pour sinistres à payer pour le portefeuille RC Auto de la branche TPV en utilisant plusieurs méthodes réglementaires et économiques tout en focalisant sur celle préconisée par le Projet circulaire de l'ACAPS SBR, à savoir la méthode de Chain Ladder Standard.

En effet, il était dans un premier temps une étude documentaire faite au sein de ladite compagnie. Ensuite, dans un deuxième temps, nous avons procédé à l'analyse des données et des méthodes de provisionnement cités par ledit Projet SBR et les normes Solvency 2. De ce fait, Cette phase préliminaire reste indispensable au bon avancement du projet dans la mesure où elle nous a donné des perspectives voire une idée assez précise sur les techniques de provisionnement recommandées.

Cependant, La technique de Chain Ladder ainsi que toutes ses variantes se sont avérées spécialement adaptées aux données tant que les hypothèses sous-jacentes à ces techniques sont vérifiées. Les résultats obtenus par le biais de ces méthodes sont ainsi crédibles. Celles qui satisfont le plus la représentativité des données sont la méthode Chain Ladder Standard et Chain Ladder basée sur la moyenne des facteurs de développement. Leur évaluation serait ainsi la plus appréciée.

Par ailleurs, l'accent serait mis aussi sur les méthodes stochastiques et sur le calcul du risque relatif à chaque estimation de provision dans le but de challenger les résultats obtenus par les méthodes déterministes. Enfin, dans le cas particulier, quelques techniques statistiques de simulation seraient abordées pour plus de vigilance dans les calculs.

Mots clés : SBR, Best Estimate, Provisions techniques, provisionnement stochastique, Bootstrap.

Dédicace

À mes très chers parents,

Qui m'ont tout donné pour que je puisse être ce que je suis. Je me permets à exprimer ma profonde gratitude pour tout l'amour, le soutien, les sacrifices et la confiance qu'ils m'ont offerts.

À mes frères et sœurs,

À toute ma famille, mes amis et toutes les personnes qui ont cru en moi et m'ont toujours fait

Je ne saurai terminer sans exprimer toute mon gratitude et mon respect le plus profond à mon établissement et à mes chers professeurs de l'INSEA.

Remerciements

Qu'elle nous soit permise, au terme de ce travail, d'exprimer notre gratitude et vifs remerciements à notre encadrante externe Mm. Fatima Ezzahra BIYAD, Responsable Actuariat et Contrôle de Gestion. Qu'elle trouve ici le témoignage de notre estime et de notre profonde pour sa constante disponibilité, ses conseils et sa compétence qu'elle a su nous prodiguer tout au long de notre stage, malgré ses occupations extrêmes. Et son soutien qui nous a été précieux afin de mener notre travail à bon port.

Nos remerciements s'adressent également à notre encadrante interne M. Mustapha Lebbar, Actuaire Consultant et Ingénieur Général Actuaire au sein de la société MUSTAPHA ATTAAMINAT, pour ses précieux conseils et son encouragement tout au long de notre stage.

Nous tenons également à remercier M. Mechrafi, pour avoir accepté d'évaluer ce travail.

Nos gratitude et estimes vont finalement au corps professoral de l'Institut National de Statistique et d'Économie Appliquée qui veille à nous assurer une formation de valeur et à nous inculquer les grandes valeurs du professionnalisme.

Liste des abréviations

| Abréviation | Désignation |
|--------------|---|
| IBNR | Incured But Not Reported |
| RBNP | Reported But Not Paid |
| PSAP | Provisions pour Sinistres A Payer |
| ACAPS | Autorité de Contrôle des Assurances et de la Prévoyance Sociale |
| SP | Sinistres Payés |
| PT | Provisions techniques |
| MCO | Moindres Carrés Ordinaires |
| MATU | Mutuelle d'Assurances des Transporteurs Unis |
| SBR | Solvabilité basée sur les risques |
| BE | Best Estimate |
| SI | Solvabilité 1 |
| S2 | Solvabilité 2 |
| CLS | Cain Ladder Standard |
| D/D | Dossier par Dossier |
| CM | Coût Moyen |
| GLM | Modèle Linéaire Généralisé |

Table des matières

| | |
|---|---------------|
| Résumé..... | - 3 - |
| Dédicace | - 4 - |
| Remerciements | - 5 - |
| Liste des abréviations..... | - 6 - |
| Liste des tableaux..... | - 10 - |
| Liste des figures..... | - 11 - |
| Introduction Générale..... | - 12 - |
| Chapitre I. Cadre Générale de l'Etude | - 14 - |
| I. Aperçu sur le secteur mutualiste | - 14 - |
| II. Présentation du la MATU | - 14 - |
| II.1 Création et description de l'entreprise..... | - 14 - |
| II.2 Mission et Produits | - 15 - |
| III. Contexte et objectifs | - 15 - |
| IV. Les provisions techniques | - 16 - |
| IV.1 Définition générale des provisions techniques | - 16 - |
| IV.2 Exemples de provisions pour les opérations d'assurances Non vie..... | - 17 - |
| IV.3 Justification statistique du choix des PSAP..... | - 18 - |
| V. <i>Présentation des données utilisées</i> | - 19 - |
| V.1 Descriptif de la base de données | - 19 - |
| V.2 Analyse des données :..... | - 20 - |
| V.2.1 Etude des paiements de sinistres : | - 20 - |
| Chapitre II. Le Projet de circulaire SBR | - 23 - |
| I. Les objectifs au projet SBR..... | - 23 - |
| II. Le pilier 1 : Bilan Prudentiel..... | - 24 - |
| II.1 Règles de valorisation de l'ACTIF : | - 25 - |
| II.2 Règles de valorisation du PASSIF : | - 25 - |
| III. Le pilier 1 : Provisions Techniques..... | - 26 - |
| III.1 PT Non Vie hors rentes | - 27 - |
| III.1.1 Meilleure estimation des engagements..... | - 27 - |
| III.1.2 BE pour Sinistres : | - 27 - |
| III.1.3 Méthode préconisée par le Projet : | - 29 - |
| III.1.4 Description de la méthode CL : | - 29 - |
| III.1.5 BE pour Primes : | - 29 - |
| III.1.6 Meilleure estimation des frais de gestion | - 30 - |
| III.2 Capital de Solvabilité Requis | - 30 - |
| III.3 Différences majeures avec la norme 52 : | - 32 - |
| III.4 Fonds Propres | - 33 - |
| Chapitre III. Méthodes réglementaires | - 35 - |
| I. Méthode dossier par dossier :..... | - 36 - |

| | | |
|--------|---|---------------|
| I.1 | Présentation..... | - 36 - |
| I.2 | Application : | - 38 - |
| I.3 | Critiques..... | - 39 - |
| II. | Méthode de la cadence de règlement : | - 40 - |
| II.1 | Présentation | - 40 - |
| II.2 | Application : | - 41 - |
| III. | Méthode du coût moyen : | - 45 - |
| III.1 | Présentation | - 45 - |
| III.2 | Application : | - 46 - |
| IV. | Réserves retenues par les méthodes réglementaires : | - 48 - |
| | Chapitre IV. Les méthodes déterministes du calcul des réserves et du BE..... | - 50 - |
| I. | Les méthodes de Chain Ladder | - 50 - |
| I.1 | La méthode de Chain Ladder Standard..... | - 51 - |
| I.1.1 | Les hypothèses de base | - 52 - |
| I.1.2 | L'estimation de la réserve | - 52 - |
| I.1.3 | La validation de l'hypothèse d'indépendance des coefficients de passage | - 54 - |
| I.2 | Les méthodes de Chain Ladder pondérées..... | - 55 - |
| I.2.1 | La moyenne des facteurs..... | - 55 - |
| I.2.2 | La moyenne des trois derniers facteurs | - 56 - |
| I.2.3 | Le dernier facteur | - 57 - |
| I.2.4 | Comparaison des résultats des méthodes de Chain Ladder | - 58 - |
| II. | Les méthodes autorégressives..... | - 61 - |
| II.1 | La méthode de London Chain | - 61 - |
| II.2 | La méthode de London Pivot..... | - 63 - |
| III. | Comparaison des résultats issus de chacune des méthodes déterministes et d'inventaire | - 63 - |
| | Chapitre V. Les méthodes stochastiques pour le calcul des provisions..... | - 66 - |
| I. | Le modèle de Mack..... | - 67 - |
| I.1 | Les hypothèses sous-jacentes au modèle | - 67 - |
| I.2 | L'estimation des paramètres du modèle..... | - 67 - |
| I.3 | L'estimation des erreurs de prédiction..... | - 68 - |
| I.3.1 | Le formalisme mathématique..... | - 68 - |
| I.3.2 | Application sur les estimations des réserves annuelles | - 69 - |
| I.3.3 | Application sur l'estimation de la réserve globale | - 70 - |
| I.4 | La validation des hypothèses du modèle..... | - 70 - |
| I.4.1 | La vérification de l'hypothèse d'indépendance H1 par le test non paramétrique de la médiane - 71 - | |
| I.4.2 | La vérification de l'hypothèse de volatilité H3 grâce aux résidus normalisés | - 71 - |
| II. | Le calcul de provisions par la modélisation GLM | - 72 - |
| II.1 | Présentation générale des modèles GLM | - 72 - |
| II.2 | Formalisme mathématique et construction du modèle | - 72 - |
| II.2.1 | Les composantes du modèle..... | - 72 - |
| II.3 | Application des modèles GLM aux triangles de liquidation | - 74 - |
| II.3.1 | Les différents éléments du modèle..... | - 75 - |

| | | |
|---------|---|--------|
| II.3.2 | Le choix de la distribution de la variable paiement des sinistres | - 76 - |
| II.3.3 | L'estimation et le risque d'estimation | - 77 - |
| III. | La technique du Bootstrap | - 83 - |
| III.1 | Idée et principe de base de la méthode du Bootstrap..... | - 83 - |
| III.1.1 | Présentation générale | - 83 - |
| III.1.2 | L'approche du Bootstrap..... | - 83 - |
| III.2 | Application du Bootstrap au triangle des règlements | - 84 - |
| III.2.1 | Les résidus de Pearson | - 84 - |
| III.2.2 | Les étapes du Bootstrap appliquées aux résidus de Pearson sous le modèle de Gamma- | - 84 - |
| IV. | Comparaison des méthodes stochastiques de provisionnement et calcul de Best-Estimate..... | - 86 - |
| | Conclusion Générale | - 89 - |
| | Bibliographie | 91 |
| | Annexe 1 : ARRETE RELATIF AUX ENTREPRISES D'ASSURANCES ET DE REASSURANCE | 92 |
| | Annexe 2 : C-C Plot pour la vérification de l'hypothèse d'indépendance des coefficients de passage pour la méthode Chain Ladder Standard et pour le modèle de Mack..... | 94 |
| | Annexe 3 : C-C L'indépendance des résidus pour le modèle de Mack..... | 96 |
| | Annexe 5 : A propos du Quantile-Quantile Plot | 97 |
| | Annexe 6 : Les algorithmes de Newton Raphson..... | 98 |

Liste des tableaux

| | |
|--|------|
| Tableau 1 : Modèles et méthodes utilisées | 16 - |
| Tableau 2 : Les provisions techniques par type pour la période 2014-2016 | 18 - |
| Tableau 3 : Quelques variables de la base de données | 19 - |
| Tableau 5 : Les cadences de règlement cumulées par année de survenance | 22 - |
| Tableau 6 : Fonds Propres de Base | 33 - |
| Tableau 7 : Fonds Propre Auxiliaires..... | 34 - |
| Tableau 8 : Eligibilité à la couverture de SCR pour les FPA..... | 34 - |
| Tableau 9 : Les réserves Dossier par Dossier..... | 38 - |
| Tableau 10 : Les paramètres de Chain-Ladder..... | 38 - |
| Tableau 11 : Le nombre des IBNR réglementaires | 39 - |
| Tableau 12 : Réserves Dossier par Dossier corrigées par les IBNR | 39 - |
| Tableau 14 : La charge totale des sinistres corporels pour l'exercice comptable 2017..... | 42 - |
| Tableau 15 : La cadence de liquidation..... | 43 - |
| Tableau 16 : réserves par année d'exercice..... | 45 - |
| Tableau 17 : La charge totale des sinistres soldés | 46 - |
| Tableau 18 : Nombre des sinistres soldés | 46 - |
| Tableau 19 : Le nombre total des sinistres | 47 - |
| Tableau 20 : Les règlements de l'année | 47 - |
| Tableau 21 : Réserve par la méthode Cout Moyen | 48 - |
| Tableau 22 : La réserve complémentaire des sinistres répartie par année de survenance | 49 - |
| Tableau 23 : Les réserves réglementaires retenues | 49 - |
| Tableau 24 : Les coefficients de passage | 53 - |
| Tableau 25 : les réserves annuelles estimé par CL..... | 53 - |
| Tableau 26 : les cash-flows estimé pas CL | 53 - |
| Tableau 28 : Les caractéristiques de dispersion D-triangle..... | 54 - |
| Tableau 29 : Les moyennes des facteurs par année de développement..... | 55 - |
| Tableau 30 : les réserves annuelles estimé par CLP1 | 56 - |
| Tableau 31 : les cash-flows estimé pas CLP1 | 56 - |
| Tableau 32 : La moyenne des trois derniers facteurs de développement | 56 - |
| Tableau 33 : les réserves annuelles estimé par CLP2 | 57 - |
| Tableau 34 : les cash-flows estimé pas CLP2 | 57 - |
| Tableau 35 : Le dernier facteur du d-triangle..... | 57 - |
| Tableau 36: les réserves annuelles estimé par CLP3 | 58 - |
| Tableau 37 : les cash-flows estimé pas CLP3 | 58 - |
| Tableau 38: Les caractéristiques statistiques des résultats Chain Ladder pour les réserves..... | 59 - |
| Tableau 39 : Les caractéristiques statistiques des résultats Chain Ladder pour les BE..... | 60 - |
| Tableau 40 : Les valeurs des couples (f_j, a_j) pour la méthode de London Chain | 62 - |
| Tableau 42: Les réserves données par la méthode de London Pivot..... | 63 - |
| Tableau 44 : Les caractéristiques de dispersion pour l'ensemble des méthodes déterministes | 64 - |
| Tableau 45 : Les valeurs des estimateurs non-biaisé de $(6j)^2$ | 68 - |
| Tableau 46: Les erreurs de prédiction de l'estimation des réserves pour le modèle de Mack | 69 - |
| Tableau 47: Les intervalles de confiance au seuil de 5% des réserves annuelles pour le modèle de Mack | 70 - |
| Tableau 48: Les erreurs de l'estimation de la réserve globale pour le modèle de Mack | 70 - |
| Tableau 49: Le test de la médiane pour le modèle de Mack | 71 - |
| Tableau 50: Le rectangle de liquidation | 75 - |
| Tableau 51: Les estimations des paramètres et des erreurs relatives pour le modèle de poisson | 78 - |
| Tableau 53: Les estimations des paramètres et des erreurs relatives pour le modèle Gamma | 79 - |
| Tableau 55: Les risques relatifs et les intervalles de confiances des réserves pour les modèles Gamma et poisson | 81 - |
| Tableau 56: Les statistiques relatives à la qualité d'ajustement du modèle de poisson | 82 - |
| Tableau 57: Les statistiques relatives à la qualité d'ajustement du modèle de Gamma | 83 - |
| Tableau 58: Les résidus de Pearson pour le modèle de Gamma | 85 - |
| Tableau 59: le premier échantillon des tirages avec remise du triangle des résidus de Pearson | 85 - |
| Tableau 60: Le triangle des paiements construit à partir des résidus simulés | 86 - |
| Tableau 61: Récapitulatif des résultats des méthodes stochastiques | 87 - |
| Tableau 62: les erreurs relatives aux réserves globales | 87 - |

Liste des figures

| | |
|---|------|
| Figure 1 : Quelques produits d'assurance de la MATU | 15 - |
| Figure 2 : Histogramme des provisions techniques par type pour la période 2014-2016 | 18 - |
| Figure 3 : le diagramme en secteur des provisions par type pour la période 2014-2016 | 19 - |
| Figure 4 : Le diagramme des montants des sinistres non cumulés pour quelques années de survenance | 20 - |
| Figure 5 : Evolution des règlements cumulés des sinistres par années de survenance..... | 21 - |
| Figure 6 : Les trois piliers de SBR | 23 - |
| Figure 7 : Comparaison entre le bilan actuel et celui de Projet SBR | 24 - |
| Figure 8 : Méthodologie de calcul du BE | 28 - |
| Figure 9 : Courbe des taux | 28 - |
| Figure 10 : Modèle des risques retenu dans le projet SBR..... | 31 - |
| Figure 11 : Modèle des risques retenu par S2 | 31 - |
| Figure 12 : Matrice de corrélation entre les modules de risque – le cadre SBR- | 32 - |
| Figure 13 : Matrice de corrélation entre les modules de risque – S2- | 32 - |
| Figure 14 : les matrices de corrélation (SBR+S2) des sous-modules du risque de marché | 32 - |
| Figure 15 : Classification des méthodes prévue par la réglementation en vigueur | 35 - |
| Figure 16 : Evolution des règlements cumulés..... | 42 - |
| Figure 17 : La cadence de liquidation | 43 - |
| Figure 18 : Graphe d'évolution de la cadence moyenne par année de développement..... | 44 - |
| Figure 19 : Evolution des règlements cumulés des sinistres par années de survenance (CLS)..... | 53 - |
| Figure 20 : Evolution des règlements cumulés des sinistres par années de survenance (CLP)..... | 56 - |
| Figure 21 : Evolution des règlements cumulés des sinistres estimés par CLP par la moyenne des 3 derniers facteurs | 57 - |
| Figure 22 : Evolution des règlements cumulés des sinistres estimés par CLP par le dernier facteur | 58 - |
| Figure 23 : comparaison des flux de réserves estimés par des méthodes Chain Ladder | 59 - |
| Figure 24 : Récapitulatif des résultats des estimations des PSAP par des méthodes Chain Ladder..... | 59 - |
| Figure 25 : comparaison des cash-flows estimés par des méthodes Chain Ladder | 60 - |
| Figure 26 : Récapitulatif des résultats des estimations des BE par des méthodes Chain Ladder | 60 - |
| Figure 27 : Evolution des règlements cumulés des sinistres par années de survenance estimés par LC..... | 62 - |
| Figure 28 : Représentation graphique des réserves par années de survenance..... | 64 - |
| Figure 29: Le diagramme Q-Q Plot pour la loi normale | 76 - |
| Figure 30: Le diagramme Q-Q Plot pour la loi Gamma..... | 77 - |
| Figure 31 : illustration graphique de l'évolution des règlements calculée par le modèle de poisson..... | 79 - |
| Figure 32 : Evolution des règlements des sinistres par années de survenance estimés par le modèle GLM..... | 80 - |
| Figure 33:Le diagramme des provisions globales | 87 - |
| Figure 34: L'histogramme des SeR(R) en pourcentage | 88 - |

Introduction Générale

L'assurance est avant tout affaire de confiance. En effet, l'assuré paie une prime et reçoit en échange la promesse que l'assureur paiera si un sinistre survient. Cette promesse, ou garantie, ne se matérialise que si un sinistre survient à une époque future. Ce mécanisme par lequel l'assuré paie d'abord et reçoit le produit après, dénommé inversion du cycle de production, a des conséquences à la fois sur la situation financière de la compagnie et sur le degré de connaissance qu'elle a de ses engagements.

L'assureur doit évaluer correctement le coût de la sinistralité future, afin d'encaisser suffisamment de primes pour couvrir ses engagements vis-à-vis de ses assurés et en définitive d'être solvable. C'est pourquoi l'État réglemente traditionnellement le secteur des assurances, pour assurer cette solvabilité.

Le décalage dans le temps implique également que la compagnie ne connaît pas a priori le coût exact de la garantie qu'elle donne à l'assuré. Les provisions techniques sont le résultat d'un calcul probabiliste d'évaluation des engagements et non un montant exact.

Les règles de solvabilité applicables aujourd'hui ont été définies dans des directives adoptées dans les années 1970 qui ne sont plus adaptées à la réalité économique actuelle.

Le projet de circulaire Solvabilité Basé sur le Risque (SBR) lancé par l'ACAPS en avril 2017, vise à une refonte en profondeur des règles existantes. Cette circulaire s'inspire de la réglementation européenne Solvabilité 2, mais n'a pas été transposée en l'état. Si la structure du nouveau système est définie, la proposition du Projet est en cours de rédaction et tous les détails ne sont pas connus aujourd'hui.

Notre projet consiste ainsi à évaluer les provisions pour sinistres à payer de la branche Responsabilité Civile en Automobile, et ce par des méthodes réglementaires, des méthodes déterministes, dont celles préconisés par le projet de circulaire SBR et évaluer la variabilité des réserves obtenues par des méthodes stochastiques. Ceci dans le cadre de la première phase de l'étude d'impacts quantitative consistant en la valorisation du bilan prudentiel.

Notons que les méthodes réglementaires en vigueur au Maroc sont la méthode dossier par dossier, la méthode du coût moyen et la méthode de cadence de règlement. Les méthodes déterministes appliquées sont la méthode préconisée par ledit projet SBR,

variantes de Chain Ladder, London Chain et London Pivot. A l'instar des méthodes réglementaires, les méthodes déterministes ne donnent aucune indication sur la variabilité de la réserve estimée, ce qui nous a poussé à introduire des modèles stochastiques permettant d'évaluer l'incertitude présente dans l'estimation des réserves.

Nous consacrerons alors le premier chapitre au cadre général de l'étude. Ensuite, nous allons entamer le deuxième chapitre par la présentation des dispositions du projet de circulaire SBR. Le troisième chapitre sera consacré au calcul des provisions sous le cadre actuel. Puis nous allons recalculer ces provisions en utilisant des méthodes déterministes, allant des méthodes recommandées par l'autorité de tutelle dans ledit projet jusqu'aux variantes de Chain Ladder. Le dernier chapitre retrace les diverses étapes de construction et de mise en œuvre des modèles stochastiques utilisées à savoir le modèle de Mack et le Modèle Linéaire Généralisé. L'évaluation de la variabilité des réserves dans ces méthodes est faite essentiellement la méthode de ré-échantillonnage Bootstrap. Finalement, une conclusion générale sera consacrée à rappeler les principaux résultats et constats établis tout au long de ce travail.

Chapitre I. Cadre Générale de l'Etude

I. Aperçu sur le secteur mutualiste

Une mutuelle désigne une personne morale de droit privé à but non lucratif. Elle ne rémunère pas d'actionnaires et se finance essentiellement au moyen des cotisations de ses membres. Fondée sur la solidarité, elle ne sélectionne pas ses clients ; son objet est d'établir une solidarité entre ses membres dans un domaine précis. Ainsi, elle offre à ses membres, appartenant à une même branche professionnelle, un système d'assurance.

La société mutuelle a des points communs avec les sociétés coopératives et les associations : leurs clients (et parfois leurs employés) sont en même temps leurs associés. Elle s'assimile aux sociétés coopératives et aux associations dans la mesure où ses clients voire même ses employés ne sont autres que ses sociétaires. Ainsi, une société mutuelle n'est ni une entreprise commerciale ni un organisme caritatif.

Le système mutualiste n'est apparu au Maroc qu'avec le Protectorat. La raison du recours à ce système est le besoin d'assurance ressenti par le personnel de l'administration du Protectorat français.

Au Maroc la mutuelle est régie par le Dahir n°1-57.187 du 12 Joumada II 1383 (14 Novembre 1963) portant statut de la Mutualité au Maroc, selon l'Article premier : « Les sociétés mutualistes sont des groupements à but non lucratif qui, au moyen de cotisations de leurs membres, se proposent de mener dans l'intérêt de ceux-ci ou de leur famille, une action de prévoyance, de solidarité et d'entraide tendant à la couverture des risques pouvant atteindre la personne humaine ».

II. Présentation du la MATU

II.1 Création et description de l'entreprise

Créée au 20 décembre 1984 par les professionnels du TPV pour prendre en charge les assurances des transporteurs. En fait, face aux contraintes de garanties d'assurances à des conditions améliorées, les syndicats et les coopératives des transporteurs, ont créé leur propre Mutuelle d'assurance (MATU). Celle-ci garantissait aussi bien leurs risques professionnels de transport. A cette époque, la conjonction sinistralité extrême du transport public voyageurs et blocage des tarifs d'assurance était à l'origine du déficit tel de l'assurance transport que les compagnies privées de la place refusaient de continuer d'assurer le secteur.

Depuis la fin des années 90, la MATU vit les conséquences de la privatisation des transports routiers de marchandises, suit les attermolements du processus de privatisation des transports voyageurs, reste à l'écoute des évolutions du transport urbain, est attentive à l'apparition, dans notre pays de nouvelles activités et de nouveaux métiers dans le secteur.

II.2 Mission et Produits

La mission de la MATU est de fournir à ses adhérents des produits de qualité, un niveau élevé de sécurité et de performance financière et une qualité de service capables de satisfaire pleinement leurs besoins, tout en maintenant la solidité financière de la Mutuelle.

S'assurer auprès de la MATU présente divers avantages, dans la mesure où l'assuré fait appel à une entreprise responsable et engagée, forte d'un personnel rodé au métier de l'assurance (Plus de 30 ans d'expérience), et d'un ensemble d'interlocuteurs qui connaissent bien le transport public de voyageurs. Afin de répondre aux besoins du secteur de transport et aux particuliers en matière d'assurances, la MATU offre à ses sociétaires une gamme complète de produits concernant l'ensemble des risques des particuliers et des entreprises. Le figure suivant présente une liste non exhaustive de quelques risques que la mutuelle couvre:

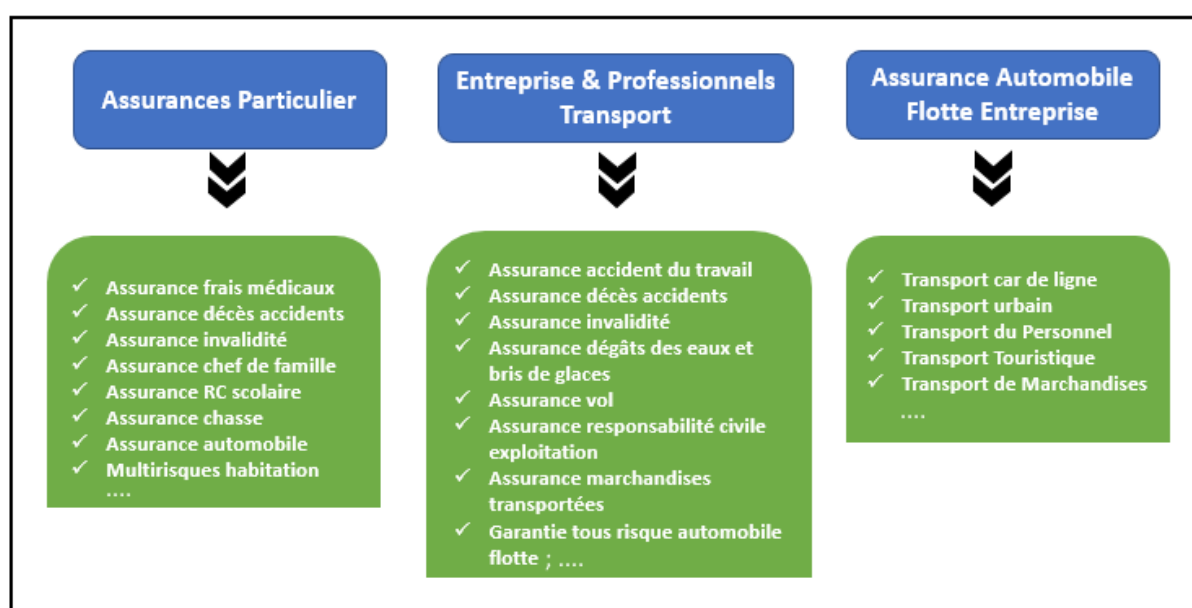


Figure 1 : Quelques produits d'assurance de la MATU

Cependant, l'assurance du Transport Public des Voyageurs représente le cœur de métier de la MATU, autour duquel elle a construit une offre très large qui s'adresse aux Grands et Petits Taxis, Autocars, Transports du personnel pour le compte des tiers et Transports scolaires...

Auxquels, elle offre une gamme complète de garanties d'assurance et des protections contre les sinistres matériels et corporels.

III. Contexte et objectifs

La MATU, comme nous avons vu, opère principalement en assurance Non Vie, plus particulièrement en assurance automobile. Ainsi notre mission au sein de ladite compagnie, dont le présent rapport détaille les conclusions, consiste à évaluer et émettre un avis motivé sur le montant des provisions pour sinistres à payer arrêtées au 31/12/2017 selon les

méthodes réglementaires et celles du Projet de circulaire de l'ACAPS SBR ainsi que la comparaison des résultats obtenus. L'autre objectif est d'évaluer ces provisions sous les dispositions de la directive Solvency 2. Cependant, les normes Solvency 2 ne décrivent pas les méthodes statistiques que doivent retenir les assureurs européens pour l'évaluation prudentielle des provisions de sinistres, au contraire du Projet de circulaire qui met en avant l'utilisation de la méthode Chain-Ladder applicable au triangle des règlements nets de recours. Mais ledit Projet donne la possibilité d'utiliser une autre méthode communément admise après accord de l'Autorité. Ce qui représente la seule différence en termes de calcul de Best Estimate entre les deux directives.

Ainsi, dans le cadre de ce projet, il nous a également été demandé, par la responsable d'actuariat et contrôle de gestion, de procéder à une analyse économique des PSAP, afin de situer les évaluations réglementaires par rapport à ses engagements réels estimés selon d'autres approches.

A cet effet, nous avons réalisé une revue économique des PSAP de la branche RC Auto. Nos évaluations économiques ont porté essentiellement sur les sinistres corporels de la branche RC-Auto.

Nous avons utilisé les méthodes suivantes, étant des plus répandues pour ce genre d'exercice, à savoir :

| Méthodes déterministes | Méthodes stochastiques |
|---|---|
| <ul style="list-style-type: none"> • Chain Ladder standards ; • Méthodes Chain Ladder pondérées ; • Méthodes autorégressives <ul style="list-style-type: none"> – Méthode de London Chain – Méthode de London Pivot | <ul style="list-style-type: none"> • Modèle de Mack • GLM <ul style="list-style-type: none"> – Loi de Poisson – Loi Gamma • Méthode Bootstrap |

Tableau 1 : Modèles et méthodes utilisées

IV. Les provisions techniques

IV.1 Définition générale des provisions techniques

Les provisions techniques est la désignation du montant que l'assureur doit mettre de côté en vue de faire face aux charges éventuelles de la sinistralité. Elles servent également à anticiper les prestations que l'assureur doit verser aux bénéficiaires suivant les termes du contrat. De façon générale, il s'agit de la somme affectée par l'entreprise d'assurances à la couverture d'une charge ou d'une perte virtuelle, future ou éventuelle relative à son engagement envers les assurés. Ce sont donc des engagements contractés envers les assurés.

Très vaguement, pour le cas de l'assurance non-vie, les provisions sont tributaires du décalage possible entre la survenance du fait dommageable, générateur du paiement de

l'indemnité et le règlement effectif de cette indemnité. Nous avons donc deux types principaux de provisions :

- Provisions pour sinistres connus ; reportés mais pas encore payés (RBNP).
- Provisions pour sinistres inconnus, survenus mais pas encore déclarés qu'on nomme tardifs (IBNR).

Ainsi, L'évaluation des provisions doit être suffisante et prudente, en tenant compte de l'ensemble des frais qui peuvent découler des garanties données. En pratique, cette évaluation doit être en moyenne supérieure au coût final des sinistres et l'appréciation définitive ne peut bien entendu être vérifiée qu'a posteriori, une fois tous les sinistres réglés et les contrats arrivés à échéance.

IV.2 Exemples de provisions pour les opérations d'assurances Non vie

Du fait que les provisions techniques constituent environ 80% et plus du passif des entreprises d'assurance et de réassurance, leur calcul avec le maximum de précision présente un enjeu majeur pour la compagnie.

Le code des assurances prescrit, aux sociétés d'assurances non vie, la tenue de plusieurs types de provisions techniques ; les plus essentielles sont :

- ⤴ **La provision pour sinistres à payer (PSAP)** : représente la valeur estimée des dépenses d'indemnisation et des frais nécessaires au règlement de tous les sinistres survenus et non payés ou non encore totalement payés.
- ⤴ **La provision pour primes non acquises (PPNA)** : permet d'évaluer la part des primes à acquérir entre la date de l'inventaire et l'échéance des primes parmi les primes émises.
- ⤴ **La provision pour risque en cours (PREC)** : représente la part des garanties couvertes par l'assureur entre la date d'inventaire et l'échéance de la prime pour ce qui n'est pas couvert au titre de la provision pour primes non acquises.
- ⤴ **La provision pour risques croissants (PRC)** : est une provision pour les risques de maladie et d'invalidité, dont l'indemnisation est susceptible d'augmenter avec le temps.
- ⤴ **La provision pour égalisation** : est destinée à faire face aux fluctuations de sinistralité exceptionnelles (catastrophes naturelles, risques nucléaires, risques spatiaux, responsabilité civile dus à la pollution, attentats et crédit)
- ⤴ **La réserve de capitalisation (RC)** est destinée à lisser les résultats financiers des placements obligataires à taux fixe en cas de variation des taux. Les plus-values réalisées en cas de cession d'obligations lui sont affectées. Les moins-values réalisées lui sont imputées. La réserve de capitalisation fait partie des éléments constitutifs de la marge de solvabilité.
- ⤴ **Les provisions pour risque d'exigibilité (PRE)** : provision destinée à faire face aux engagements dans le cas de moins-value latente de l'ensemble des actifs non obligataires.
- ⤴ **Provisions pour appareils de prothèse** : C'est le montant destiné à indemniser l'assuré en cas d'achat ou même de renouvellement d'appareils de prothèse.

Nous allons nous focaliser dans ce rapport, sur l'évaluation des Provisions pour Sinistres A Payer (PSAP), qui constituent la part la plus importante des provisions techniques

de la MATU. Et ce, en utilisant des méthodes réglementaires, déterministes puis stochastiques.

IV.3 Justification statistique du choix des PSAP

Pour justifier le choix des PSAP, nous avons pensé à comparer le volume de chacune des provisions constituées par la MATU pour la période s'étalant de l'année 2014 à l'année 2016.

| | 2014 | Poids (%) | 2015 | Poids (%) | 2016 | Poids (%) |
|---|----------|-----------|----------|-----------|----------|-----------|
| Provisions pour primes non acquises | 84,97 | 5% | 91,90 | 6% | 95,13 | 5% |
| Provisions pour sinistres à payer | 1 455,77 | 91% | 1 466,46 | 88% | 1 596,54 | 90% |
| Provisions pour fluctuation de sinistralité | 24,91 | 2% | 68,90 | 4% | 68,90 | 4% |
| Autres provisions techniques | 18,64 | 1% | 17,90 | 1% | 12,70 | 1% |
| Provisions techniques sur placement | 23,45 | 1% | 16,85 | 1% | 1,19 | 0,1% |

Tableau 2 : Les provisions techniques par type pour la période 2014-2016

Pour mieux illustrer notre comparaison, nous passons par un graphe représentatif des montants de ces provisions et ce, pour chacune des trois années :

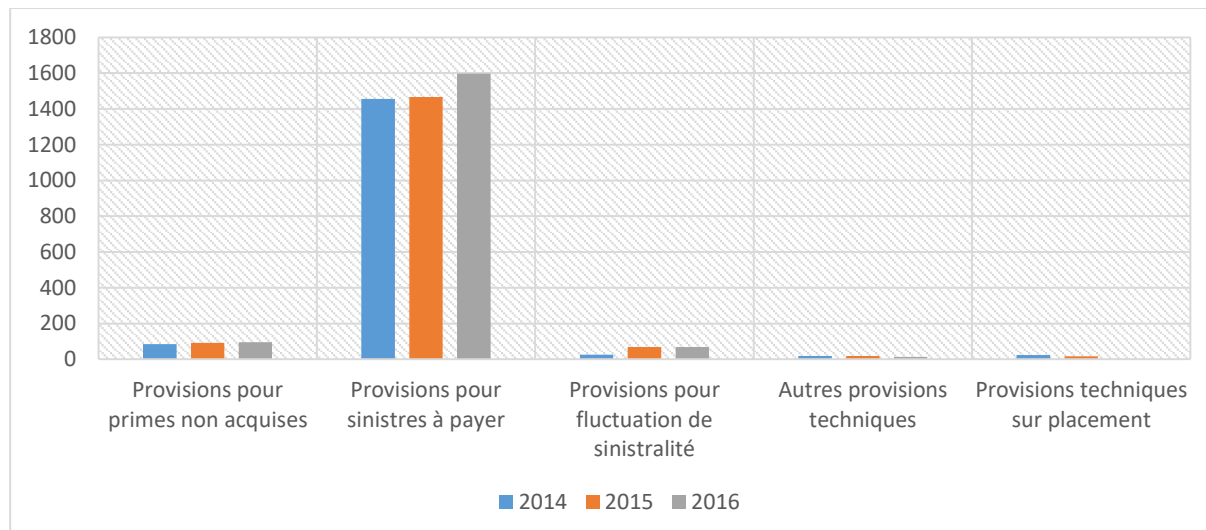


Figure 2 : Histogramme des provisions techniques par type pour la période 2014-2016

Le graphe ci-dessus montre d'une manière triviale la prédominance des provisions pour sinistres à payer sur le reste des provisions. En effet, le montant des PSAP à lui seul représente environ 90%. Le reste des provisions sont clairement négligeables devant le volume des PSAP.

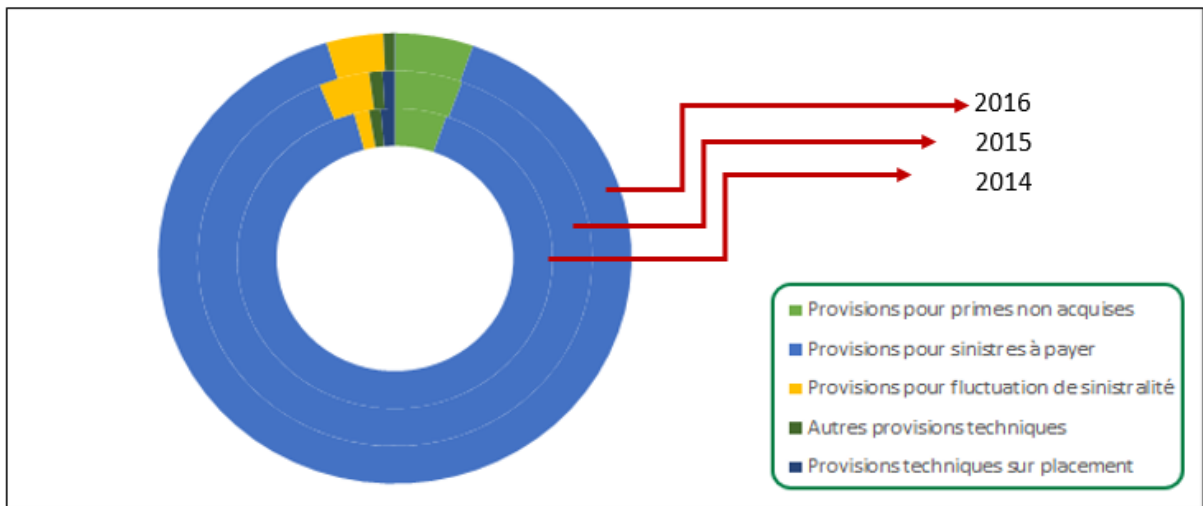


Figure 3 : le diagramme en secteur des provisions par type pour la période 2014-2016

Le diagramme en secteur de la moyenne sur les années 2014-2016 des montants des provisions, nous confirme l'idée déjà établie sur l'importance cruciale des PSAP. Ainsi, ces dernières détiennent environ 90% du montant global des provisions de tout le marché. Le reste des provisions techniques sont infinitésimales et, groupées ensemble, n'arrivent qu'à 10% du total.

Ainsi, vu leur importance, nous consacrons notre projet à l'étude des PSAP.

V. *Présentation des données utilisées*

V.1 *Descriptif de la base de données*

La base de données qui a servi pour élaborer ce projet, est constitué de 36724 enregistrements et permet de récupérer pour chaque enregistrement 33 variables, parmi ces variables nous trouvons :

| | |
|-------------------|-----------------------|
| - Référence | - Année Réouverture |
| - Catégorie | - Date Réouverture |
| - Sous-Catégorie | - Nature Sinistre |
| - Sociétaire | - Catégorie D03 |
| - Police | - Type Sinistre |
| - Véhicule | - Garantie sinistrée |
| - Date d'effet | - Sort Sinistre |
| - Année Sinistre | - Réserve d'ouverture |
| - Date Sinistre | - Réserve Exe. |
| - Année Ouverture | - Règlements Exe. |
| - Date Ouverture | - Charge Totale |

Tableau 3 : Quelques variables de la base de données

Pour des raisons de confidentialité, les données seront multipliées par des coefficients de tel sorte à ce que le lecteur du rapport ne puisse pas déduire les données de base. Tous les montants qui viennent dans la suite sont exprimés en milliers de dirhams.

V.2 Analyse des données :

V.2.1 Etude des paiements de sinistres :

Dans cette section, nous allons observer la manière dont varie le montant des règlements des sinistres en fonction du temps écoulé depuis la survenance des sinistres en question. Cet écart temporel de règlement est exprimé en 12 mois.

Après avoir exploiter la base de données que nous avons présenté, nous construisons le triangle des règlements des sinistres réglés. La représentation graphique de celui-ci est illustrée dans le figure ci-après. Chacune de courbes se réfère à une année de survenance. Ainsi, nous retrouvons sur l'ordonnée le montant des paiements des sinistres et sur l'abscisse le délai de règlement correspondant.

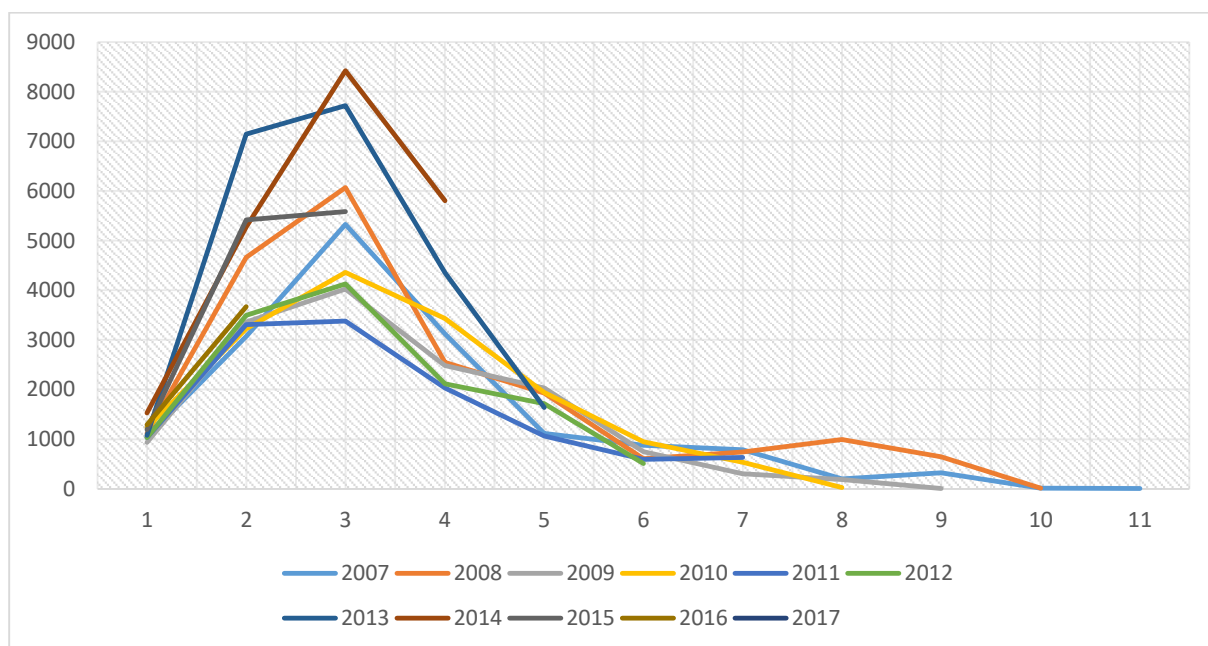


Figure 4 : Le diagramme des montants des sinistres non cumulés pour quelques années de survenance

Nous constatons que toutes les courbes ont une allure semblable. En effet, pour les deux premières années de déroulement, le montant de règlement est ascendant. Le paiement des sinistres connaît généralement son apogée durant la 3ème année d'après la survenance. Juste après, le montant chute brusquement avant de s'atténuer presque pour les années qui suivent la 5ème.

Nous faisons les mêmes observations en raisonnant en termes de paiements cumulés :

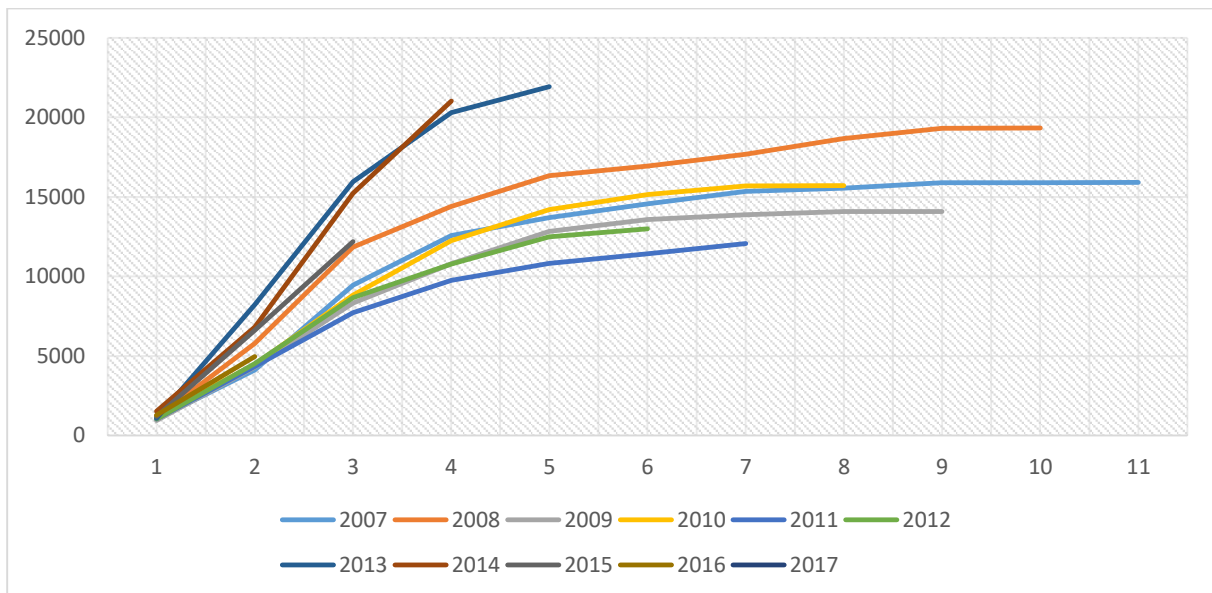


Figure 5 : Evolution des règlements cumulés des sinistres par années de survenance

Il est ainsi clair que le cumul des paiements s'accroît de façon remarquable durant les quatre premières années. Les paiements qui se font par la suite sont moins volumineux ; cela se voit à la petite pente que prend la courbe une fois la 4ème année dépassée.

Cette même analyse peut se faire à l'aide de la cadence de règlement ou des facteurs de développement mais avant d'entamer l'analyse à l'aide de ces facteurs, on se doit de définir les deux concepts qui s'y rapportent.

En effet, les facteurs de développement sont des ratios retraçant l'ampleur de l'évolution des paiements effectués entre deux délais consécutifs, toutes années de survenance confondues. Concrètement, le facteur de développement entre les deux délais j et $j+1$ est :

$$f_j = \left(\sum_{i=0}^{n-j-1} C_{i,j+1} \right) / \left(\sum_{i=0}^{n-j-1} C_{i,j} \right), \quad j = 0, \dots, n-1 \text{ avec } n=10 \text{ pour notre cas.}$$

C_{ij} Étant le paiement cumulé des sinistres survenus l'année i et qui est effectué au délai j , c'est-à-dire en l'année calendaire $i+j$.

Les cadences cumulées de règlement sont des rapports entre le cumul des paiements jusqu'à un délai j effectués pour les sinistres survenus au cours d'une même année i sur la charge ultime correspondant à cette même année d'origine. Si l'on note C_{in} la charge ultime correspondant à l'année de survenance i , alors on écrit :

$$C_{in} = C_{ij} * f_j * f_{j+1} * \dots * f_{n-1} \text{ pour } j=n-i \dots n-1.$$

Ce point sera détaillé par la suite quand on abordera la méthode de Chain Ladder. Pour l'instant nous allons nous contenter de la définition directe.

Ainsi, la cadence cumulée PC_j relative au délai j, est : $PC_j = \frac{C_{ij}}{C_{in}}$. Nous pouvons également trouver un lien entre les cadences de règlement et les facteurs de développement. En effet :

$$PC_j = 1 / (f_j * f_{j+1} * \dots * f_{n-1}) \text{ pour } j = n-i \dots n-1.$$

PC_j est de ce fait, pour toutes années d'origine confondues, le pourcentage réglé de la sinistralité correspondant à une année i complètement déroulée.

| j | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|-----------------|----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-------|--------|
| PC _j | 6% | 30% | 60% | 78% | 87% | 92% | 98% | 99% | 99,9% | 100,0% |

Tableau 4 : Les cadences de règlement cumulées par année de survenance

Suite aux résultats du tableau, nous sommes en mesure de confirmer les constats de l'analyse graphique. Comme nous l'avons cité auparavant, les quatre premières années renferment la part la plus importante de l'ensemble des paiements. En effet, presque 78% des règlements à effectuer sont faits durant les quatre premières années de déroulement. Il est par ailleurs constaté qu'un retard de règlement s'impose pour la première année où juste 6% des sinistres sont en règle. Même la 2ème année ne correspond qu'à 30% des règlements devant être effectués. Cela laisse penser à une lenteur dans la procédure d'indemnisation dont il faut examiner les causes.

Après avoir donné une plateforme permettant d'entamer la partie technique de notre projet, ce chapitre s'achève sur deux résultats majeurs :

- Les sinistres ne se règlent pas automatiquement après leur survenance. Le retard constaté est le résultat d'une déclaration tardive et d'une procédure d'indemnisation un peu lente.
- L'inversion du cycle de production et la longévité des engagements fait que la mise au point de la stratégie prudentielle de la MATU repose sur des estimations et prévisions économiques, notamment lorsqu'il s'agit de constituer ses réserves. Il se trouve que les plus importantes réserves sont les provisions techniques ; elles renvoient directement à la crédibilité de l'assureur et à sa capacité d'honorer ses engagements et promesses envers ses assurés. En particulier, la prédominance volumique des PSAP suscite une attention singulière.

Chapitre II. Le Projet de circulaire SBR

Le secteur prépare depuis un peu plus d'une année son passage vers les normes SBR, la Solvabilité Basée sur les Risques, selon la nomenclature retenue par l'ACAPS. Une nomenclature légitime vu que le nouveau référentiel réglementaire revisite les différents risques afférents à l'activité des compagnies du secteur. Ledit projet requiert des exigences quantitatives pointues. Bien que les détails ne soient pas encore révélés, l'on sait toutefois que le calcul des provisions techniques est concerné. Plus particulièrement, ce sont les exigences en matière de capital qui apportent des changements majeurs.

En effet, le nouveau régime prudentiel impose un ajustement des fonds propres chez les entreprises d'assurance et de réassurance, pour que ceux-ci soient en phase avec l'ensemble des risques auxquels elles sont confrontées. Le but ultime était bien évidemment d'assurer leur solvabilité. C'est ainsi que l'objectif de ce chapitre est de présenter un bref aperçu sur les principales dispositions de ce projet en focalisant sur celles qui concernent l'assurance non-vie.

I. Les objectifs au projet SBR

L'Autorité de Contrôle des Assurances et de la Prévoyance Sociale (ACAPS) a élaboré en avril 2017 le projet de circulaire « Solvabilité Basée sur les Risques (SBR) » qui décrit un nouveau référentiel réglementaire pour l'évaluation de la solvabilité.

Cette circulaire s'inspire de la réglementation européenne Solvabilité 2, mais n'a pas été transposée en l'état. Cette réglementation repose sur trois piliers :

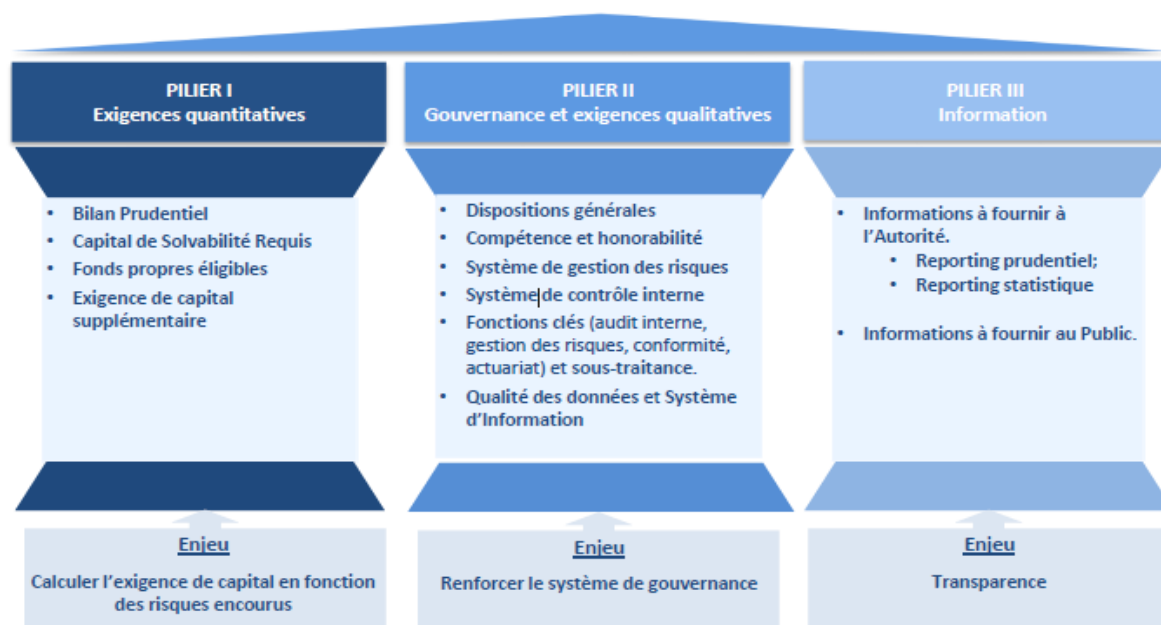


Figure 6 : Les trois piliers de SBR¹

¹ Présentation de l'ACAPS, Solvabilité basé sur les risques, 03 avril 2017

Les objectifs visés par l'ACAPS via cette nouvelle réglementation, sont les suivants :

- Renforcer la résilience du secteur des assurances face aux risques encourus
- Renforcer les systèmes de gouvernance et la culture de gestion des risques
- Se conformer aux normes internationales

Le projet de circulaire a été transmis à la profession pour échanges et discussion.

II. Le pilier 1 : Bilan Prudentiel

L'entreprise d'assurances et de réassurance doit établir annuellement un bilan prudentiel dans la perspective d'une poursuite normale de ses activités.

Ce nouveau bilan comprend, outre les rubriques « impôt différé actif », « impôt différé passif » et « Réserve de réconciliation », les mêmes rubriques de l'actif et du passif constituant le bilan comptable prévu par l'arrêté du ministre des finances et de la privatisation n° 1493-05. Il se caractérise par :

- ▲ Substitution des « PT brutes » et « PT cédées » par leurs évaluations prudentielles
- ▲ Modification des règles de valorisation des actifs.
- ▲ ...

Les provisions techniques sont valorisées en vision Best Estimate (BE) et sont actualisées pour tenir compte du coût du temps et du risque. Ces provisions sont complétées d'une marge de risque. Les autres actifs et passifs sont valorisés en valeur économique. La valorisation de l'actif et du passif étant différente entre le bilan actuel et le bilan économique, les fonds propres économiques diffèrent des fonds propres comptables. Des impôts différés sont calculés et sont à intégrer au passif ou à l'actif en fonction de la variation de FP entre le bilan actuel et le bilan économique.

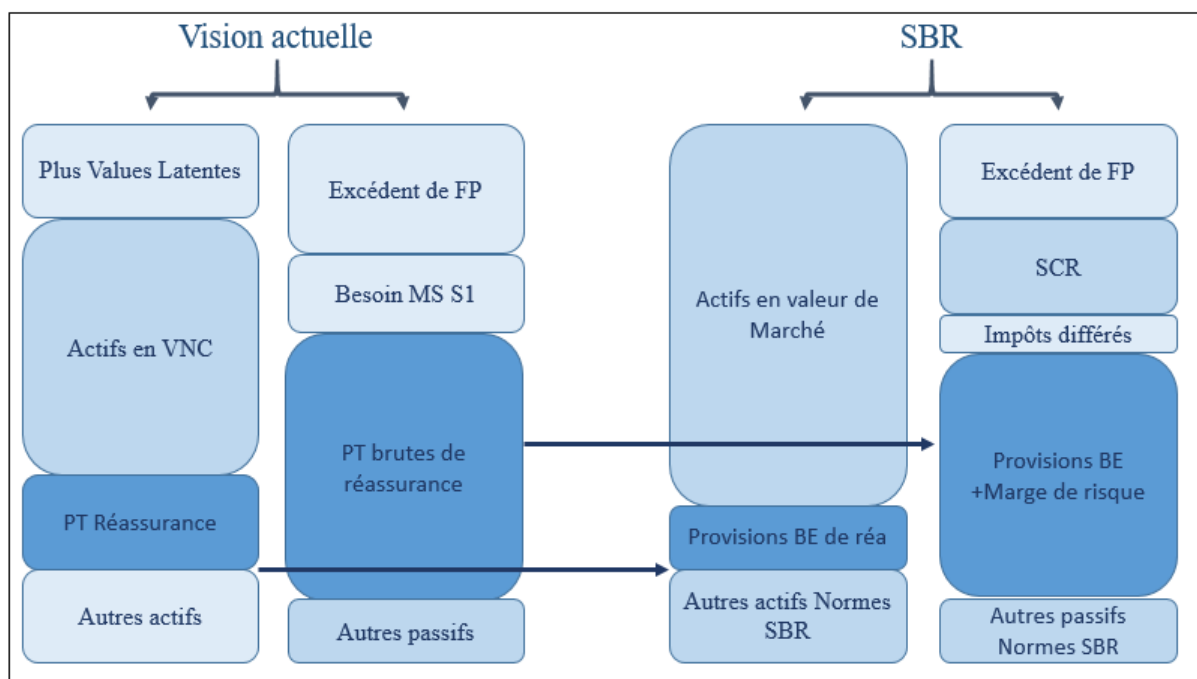


Figure 7 : Comparaison entre le bilan actuel et celui de Projet SBR

II.1 Règles de valorisation de l'ACTIF :

| Type | Valorisation |
|---|---|
| Actions cotées | Valeur de Marché au dernier cours avant la date d'inventaire |
| OPCVM | Valeur de Marché à la dernière VL avant la date d'inventaire |
| Obligations Et TCN | Valeur de Marché : actualisation des flux futurs aux derniers taux actuariels constatés avant la date d'inventaire (Prix Plein Coupon) |
| Actifs Immobiliers | - Valeur de transaction évaluée par un expert au moins une fois tous les 5 ans - Entre deux évaluations, mise à jour annuelle en fonction de l'évolution de l'indice des prix des actifs immobiliers (IPAI) publié par BAM. - Si absence d'évaluation par un expert : Valeur Comptable - Exigence de réévaluation si L'Autorité le juge nécessaire |
| Prêts, Dépôts et autres Créances financières | Valeur Comptable |
| Immobilisations en Non valeurs Et Incorporelles | Valeur Nulle |
| Ecarts de conversion - Actif | Valeur Nulle |
| Provisions Techniques cédées | Meilleure estimation des engagements cédés ajustée du défaut des contreparties |
| Charges d'acquisitions reportées | Valeur Nulle |
| Différence sur prix de remboursement à percevoir sur titres | Valeur Nulle |
| Autres Créances de l'actif circulant | Valeur Comptable |
| Trésorerie - Actif | Valeur Comptable |
| Autres actifs | Valorisation à dire d'expert. A défaut Valeur Comptable |
| E Impôts différés actif | Taux IS x (Différence de valorisation des actifs entre bilan prudentiel et bilan comptable + Report à nouveau des pertes cumulées sur 4 ans) |

II.2 Règles de valorisation du PASSIF :

| Type | Valorisation |
|--|---|
| Capitaux propres et assimilés | Valeur Comptable |
| Dettes de financement autres que les emprunts obligataires | Valeur Comptable |
| Emprunts obligataires | Actualisation des flux futurs aux derniers taux actuariels constatés avant la date d'inventaire |
| Provisions durables pour risques et charges | Valeur Comptable |

| | |
|---|--|
| Provisions Techniques prudentielles | Evaluation par canton en additionnant : Meilleure estimation des engagements Meilleure estimation des frais de gestion Marge de risque |
| Dettes pour espèces remises par les cessionnaires | Valeur Comptable |
| Dettes de passif circulant | Valeur Comptable |
| Autres passifs | Valeur Comptable |
| Impôts différés passif | Taux 1S x (Différence de valorisation des passifs entre bilan prudentiel et bilan comptable) |

III. Le pilier 1 : Provisions Techniques

Les Provisions Techniques prudentielles sont évaluées brutes de réassurance par nature de risque en additionnant :

- **Meilleure estimation des engagements** : valeur probabilisée et actualisée des engagements en cours, selon la nature des opérations d'assurance
- **Meilleure estimation des frais de gestion** : valeur probabilisée et actualisée des frais de gestion des contrats en cours, selon la nature des opérations d'assurance
- **Marge de risque** : coût d'immobilisation du capital de solvabilité requis afférent aux engagements garantis :
 - Vie hors UC : $X\% * \text{Meilleure estimation des engagements Vie}$
 - UC : $Y\% * \text{Meilleure estimation des engagements UC}$
 - Non Vie : $Z\% * \text{Meilleure estimation des engagements Non Vie}$

Les PT concernent tous les contrats dont l'engagement est en cours à la date d'inventaire. L'actualisation est effectuée sur la base d'une courbe des taux calculée et communiquée par l'Autorité selon la méthodologie suivante :

- 1) Choix de la courbe des taux de référence : taux actuariels des Bons du Trésor publiée par BAM.
- 2) Interpolation linéaire de la courbe de référence afin d'obtenir les taux actuariels de maturités pleines (1, 2,...)

- 3) Transformation en courbe de taux Zéro-Coupons en supposant que les prix des Bons du Trésor sont - au pair (Bootsraping).
- 4) Extrapolation par l'algorithme de Smith-Witson en retenant les paramètres suivants :
 - Dernier point liquide (LLP) : 20 ans (nombre de maturités de zéro-coupons disponibles avant extrapolation) ou plus
 - Taux Forward Ultime (UFR) : estimation du taux zéro-coupon des obligations à long terme. Il est calibré en faisant la somme de : moyenne des taux 20 ans au 31/12 de chaque année depuis 2005 ajustée de la moyenne des taux d'inflation annuels depuis 2005 et le taux d'inflation annuel dans 20 ans anticipé
 - Vitesse de Convergence (alpha) : calibrée de façon à ce que le taux Forward 20 ans dans 20 ans soit significativement proche de l'UFR

La fréquence de calcul de la courbe n'est pas mentionnée dans le projet de circulaire SBR. Dans S2, la courbe est communiquée mensuellement par l'EIOPA.

III.1 PT Non Vie hors rentes

III.1.1 *Meilleure estimation des engagements*

La meilleure estimation des engagements correspond à la somme probabilisée et actualisée de flux de trésorerie futurs afférents aux engagements de l'entreprise d'assurances et de réassurance au titre des contrats souscrits et déterminée, selon la nature des opérations d'assurance :

$$\text{Best Estimate Engagements Non Vie} = \text{BE pour sinistres} + \text{BE pour primes}$$

Toutes les provisions calculées dans le cadre actuel, sont « fusionnées » dans les Best Estimate Primes et Sinistres. La Provision Pour Prime Non Acquis (PPNA) et la Provision pour Risque En Cours (PREC) sont prises en compte dans le Best Estimate de primes. De manière analogue, on regroupe dans le Best Estimate de sinistres, les Provisions pour Sinistres À Payer (PSAP), les tardifs, les Provisions pour Risques Non Encore Manifestés, ...

III.1.2 *BE pour Sinistres :*

Best Estimate pour sinistre représente l'équivalent prudentiel des PSAP (y.c. IBNR). C'est l'engagement de l'assureur concernant les sinistres déjà survenus en actualisant des flux de règlements futurs probabilisés nets de recours relatifs aux sinistres survenus des dossiers en cours. Le projet de circulaire prévoit de retenir une segmentation par sous-catégories ministérielles (article 55 de l'arrêté).

Le BE représente l'espérance des cash flows futurs actualisés. Le graphique suivant illustre la méthodologie suivie pour estimer un Best Estimate sur base d'un triangle de liquidation.

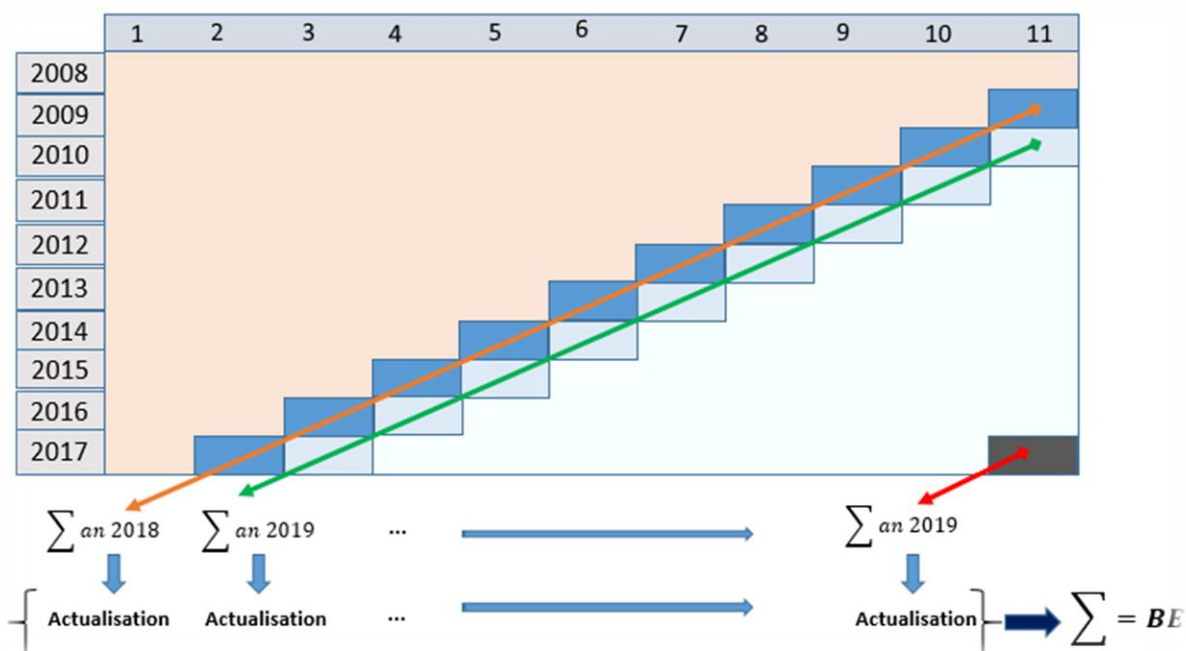


Figure 8 : Méthodologie de calcul du BE

En ligne figure les années de survenance, puis en colonne les années de décalage, c'est à dire le nombre d'années avec lequel l'évolution de la sinistralité est observée. Il faut extrapoler le triangle de liquidation afin de prévoir la partie inférieure du triangle qui est inconnue, pour ce faire plusieurs méthodes existent (voir Tableau 1). Puis il faut agréger et actualiser les résultats en diagonale, qui représentent les montants payés par arrête comptable. Le Best Estimate s'obtient en faisant l'addition de toutes ces valeurs. L'actualisation des paiements est réalisée en se basant sur les courbes des taux communiquées par l'ACAPS. La Figure 9 présente les courbes de taux qui ont été utilisées lors des dernières études d'impacts.

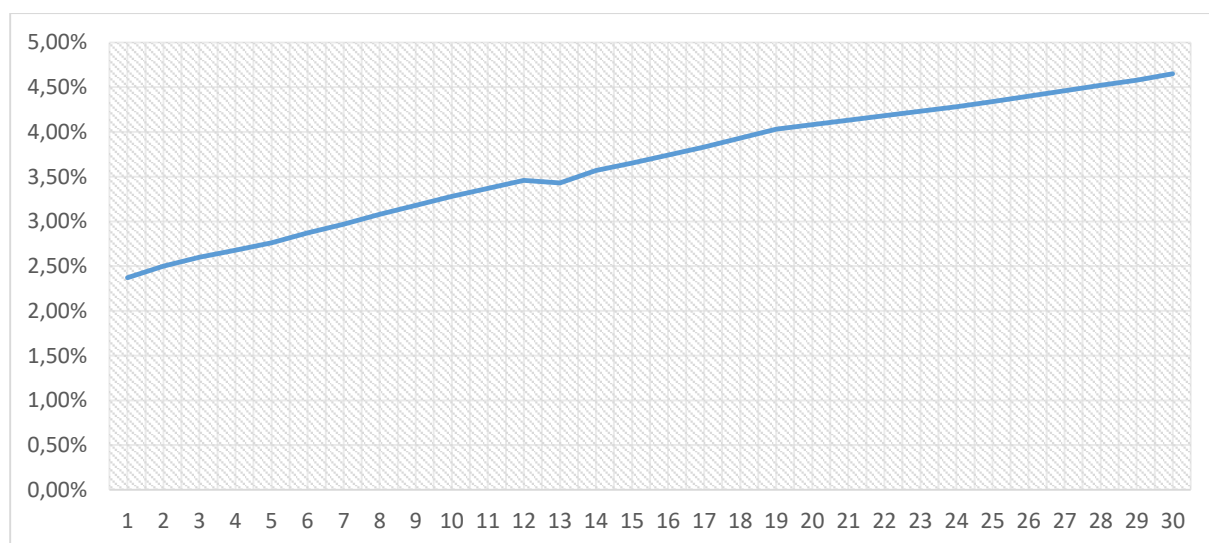


Figure 9 : Courbe des taux

III.1.3 Méthode préconisée par le Projet :

Le projet de circulaire met en avant l'utilisation de la méthode Chain Ladder (CL) déterministe sur triangle de règlements par année de survenance net de recours, avec la possibilité d'utiliser une autre méthode communément admise après accord de l'Autorité. Cette méthode sera présentée, avec plus de détail, dans le quatrième chapitre intitulé « Les méthodes déterministes du calcul des réserves et du BE ».

III.1.4 Description de la méthode CL :

La méthode Chain Ladder est la méthode la plus employée pour estimer les réserves. Sa simplicité en est la raison principale.

Cette méthode, compte tenu de sa large utilisation, servira de méthode de référence (puisque c'est la méthode préconisée par le Projet SBR) et de point de comparaison. Les étapes à suivre pour appliquer cette méthode sont :

- 1) Constitution du triangle des règlements cumulés net de recours par année de survenance : Profondeur d'historique adaptée à la nature du risque étudié.
- 2) Calcul des facteurs de développement individuels par année de survenance et par année de développement
- 3) Vérification d'hypothèses sur les facteurs de développement individuels :
 - Pour chaque année de développement, les facteurs sont indépendants de l'année de survenance
 - Les années de développement sont les seules variables explicatives des comportements des sinistres futurs
 - Les années de survenances sont indépendantes entre elles
- 4) Calcul des facteurs de développement communs à toutes les années de survenance.
- 5) Possibilité d'ajuster le triangle de règlements cumulés, après justification, en fonction des spécificités du portefeuille étudié.
- 6) Compléter le triangle des règlements cumulés à partir des facteurs de développement ajustés.
- 7) Constitution du triangle des règlements décumulés futurs par année de survenance.
- 8) Calcul des flux de règlements futurs nets de recours en sommant les diagonales.

III.1.5 BE pour Primes :

Best Estimate pour Primes représente l'équivalent prudentiel des PPNA et PREC : engagement de l'assureur relatif aux sinistres survenant après la date d'arrêté des comptes. Il est déterminé en multipliant la PPNA par le Ratio de Sinistralité Combiné (RSC).

$$RSC = \frac{\sum_{3 \text{ Ex. surv.}} \text{Charges ultimes}}{\sum_{3 \text{ Ex. surv.}} \text{Primes Acquisées}} + \frac{\sum_{3 \text{ Ex. clos.}} \text{Frais de gestion}}{\sum_{3 \text{ Ex. clos.}} \text{Primes Emises}}$$

La charge ultime est la somme des règlements cumulés et le BE pour Sinistres de l'année de survenance considérée (effet actualisation)

III.1.6 Meilleure estimation des frais de gestion

Le Best Estimate des frais de gestion se calcule par l'actualisation des frais de gestion futurs liés aux contrats en cours ; ces flux se déterminent par :

- Le calcul des BE pour Sinistres projetés : actualisation progressive des règlements de sinistres résiduels en utilisant la courbe de taux communiquée à la date d'évaluation par l'ACAPS.
- Le calcul du taux de frais de gestion moyen sur tes 3 derniers exercices clos par sous-catégorie, qui égale le rapport entre le montant des frais de gestion de l'exercice clos et le BE pour Sinistres de l'exercice précédent.
- Pour chaque année de projection, tes frais de gestion sont déterminés en multipliant le BE pour Sinistres projeté par te taux de frais de gestion moyen revalorisé de 2% annuellement.

III.2 Capital de Solvabilité Requis

C'est l'équivalent du besoin de marge de solvabilité en Solvabilité 1. A la différence de Solvabilité 1 où ce terme est calculé de manière forfaitaire, le SCR est calculé pour prendre en considération l'ensemble des risques auxquels la compagnie est exposée.

Le modèle retenu dans le projet SBR est additif : le Capital de Solvabilité Requis est la somme des SCR de chaque module de risque.

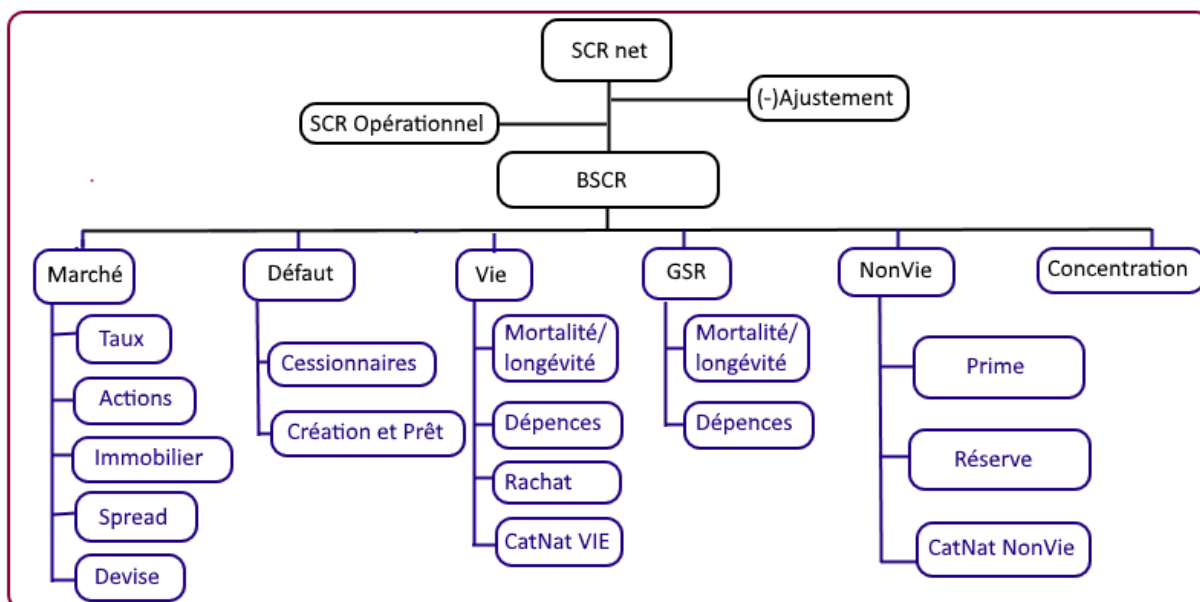


Figure 10 : Modèle des risques retenu dans le projet SBR

Les facteurs de risque n'ont pas encore été quantifiés par l'Autorité. Notons qu'actuellement, la marge de solvabilité des compagnies d'assurance ne tient compte que du risque de souscription. Ce qui explique les marges de solvabilité très confortables qu'affichent les entreprises du secteur.

Le modèle retenu par S2 est présenté dans le figure suivant :

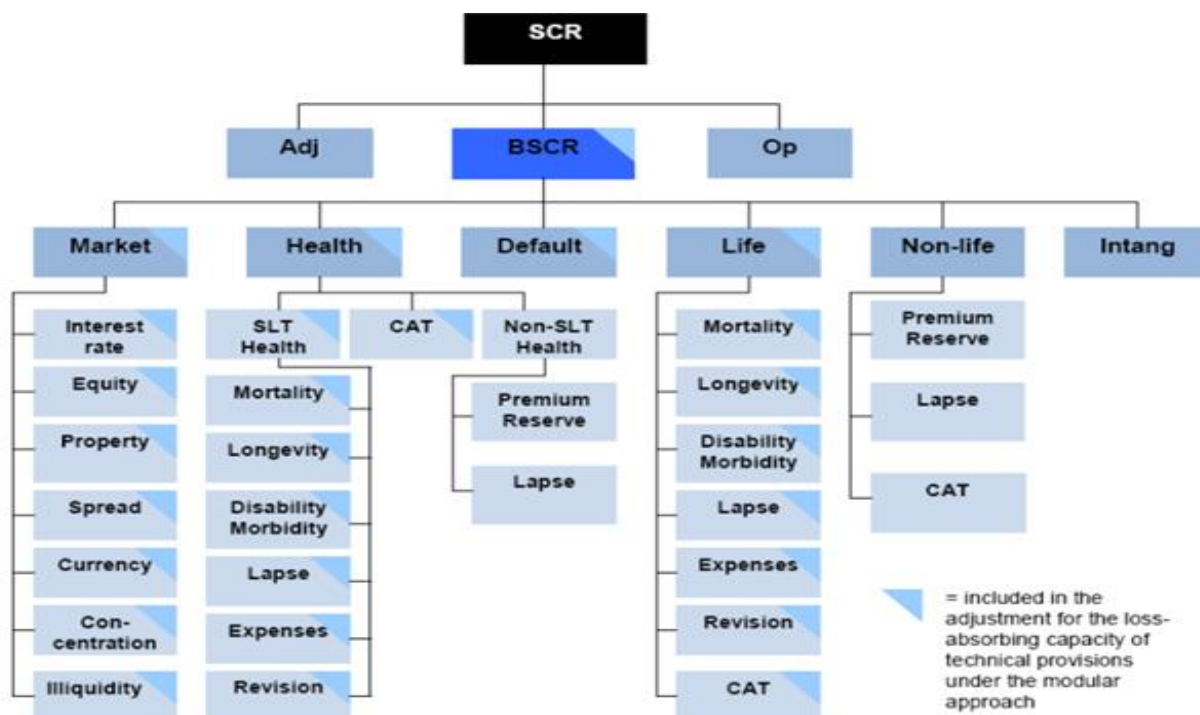


Figure 11² : Modèle des risques retenu par S2

² l'ACPR, Solvabilité 2 : principaux enseignements de la cinquième étude quantitative d'impact(QIS5), P.14

III.3 Différences majeures avec la norme S2 :

L'un des différences majeures entre le Projet SBR et la directive S2 est le calibrage de la matrice de corrélation entre les modules de risque. L'ACAPS estime que la corrélation entre les modules de risque est 100% :

| SBR | Marché | Défaut | Vie | Non Vie | Contrepartie |
|--------------|--------|--------|------|---------|--------------|
| Marché | 100% | 100% | 100% | 100% | 100% |
| Défaut | 100% | 100% | 100% | 100% | 100% |
| Vie | 100% | 100% | 100% | 100% | 100% |
| Non Vie | 100% | 100% | 100% | 100% | 100% |
| Contrepartie | 100% | 100% | 100% | 100% | 100% |

Figure 12 : Matrice de corrélation entre les modules de risque – le cadre SBR-

Alors que la directive S2 estime que la matrice de corrélation entre les modules est plutôt comme suit :

| S2 | Marché | Contrepartie | Vie | Santé | Non Vie |
|--------------|--------|--------------|------|-------|---------|
| Marché | 100% | 25% | 25% | 25% | 25% |
| Contrepartie | 25% | 100% | 25% | 25% | 50% |
| Vie | 25% | 25% | 100% | 25% | 0% |
| Santé | 25% | 25% | 25% | 100% | 0% |
| Non Vie | 25% | 50% | 0% | 0% | 100% |

Figure 13 : Matrice de corrélation entre les modules de risque – S2-

Pour le module Risque de Marché, SBR n'intègre pas le risque de Concentration (module de risque à part entière). Les sous-modules de ce Risque sont dé-corrélés et la corrélation entre les risques actions de type 1 et de type 2 est de 100% (vs 75% en S2).

| S2 | Taux | Action | Imm. | Spread | Change | Conc. |
|--------|------|--------|------|--------|--------|-------|
| Taux | 100% | 0% | 0% | 0% | 25% | 0% |
| Action | 0% | 100% | 75% | 75% | 25% | 0% |
| Imm. | 0% | 75% | 100% | 50% | 25% | 0% |
| Spread | 0% | 75% | 50% | 100% | 25% | 0% |
| Change | 25% | 25% | 25% | 25% | 100% | 0% |
| Conc. | 0% | 0% | 0% | 0% | 0% | 100% |

| SBR | Taux | Action | Imm. | Spread | Change |
|--------|------|--------|------|--------|--------|
| Taux | 100% | 0% | 0% | 0% | 0% |
| Action | 0% | 100% | 0% | 0% | 0% |
| Imm. | 0% | 0% | 100% | 0% | 0% |
| Spread | 0% | 0% | 0% | 100% | 0% |
| Change | 0% | 0% | 0% | 0% | 100% |

Figure 14 : les matrices de corrélation (SBR+S2) des sous-modules du risque de marché

Quant au module « Risque de Contrepartie », La corrélation retenue entre les risques des expositions de type 1 (cessionnaires) et celles de type 2 (Créances Et Prêts) est de 100% (vs 75% en S2). Le projet propose 3 qualités de créances : « douteuses », « pré-douteuses » et « autres » (vs 2 en S2 : « > » et « < » à 3 mois).

Concernant le module Risque de souscription Non Vie, le projet SBR retient :

- La segmentation réglementaire actuelle (Pas de séparation entre les branches Non Vie et la Santé)
- Une corrélation de 100% entre les risques de « Prime » et de « Réserve » (vs 50% en S2)
- Une corrélation de 100% entre le risque « Cat Nat Non Vie » et les autres sous-modules.
- Une corrélation de 100% entre les différentes branches.

Le calcul du risque de « Prime » est basé sur les Primes Acquisées (PA) de l'exercice, à l'inverse de la directive Solvency 2 dans laquelle le calcul est basé sur le max entre les PA de l'exercice N et celle attendues en N+1.

III.4 Fonds Propres

Le besoin en fonds propres d'un assureur non-vie dépend du point de vue :

- Assurés, organismes de contrôle, agences de notation
- Actionnaires, management de la compagnie, souscripteurs

Du point de vue interne de la compagnie, il représente le capital théorique jugé nécessaire par l'assureur pour maintenir son activité. Du point de vue externe, il représente le capital minimum réglementaire ou exigé par le marché.

Les Fonds Propres sont composés de FP de Base et de FP Auxiliaires. Le projet met en avant deux critères à respecter :

$$FPB + FPA \geq SCR \text{ et } FPA \geq 70\% * SCR$$

| Fonds Propres de Base | Eligibilité à la couverture de SCR |
|--|------------------------------------|
| (+) Capital social appelé et versé (+) Fonds d'établissement (+) Emprunts pour augmentation du fonds d'établissement (+) Primes d'émission, de fusion, d'apport (+) Ecarts de réévaluation (+) Réserve légale (+) Autres réserves non liées à des engagements (+) Report à nouveau (+) Fonds social complémentaire (+) Résultats nets en instance d'affectation (+) Résultat net de l'exercice | 100% |
| (-) Réserve de réconciliation (si négative) (-) Participation dans une entité financière dépassant un seuil fixé par l'Autorité (-) Montant minimum entre les détentions croisées avec une entité financière. | |

Tableau 5 : Fonds Propres de Base

| Fonds Propres Auxiliaires | Eligibilité à la couverture de SCR |
|---|------------------------------------|
| (+) Réserve de réconciliation (si positive) | 100% |
| (+) Aides financières subordonnées du Fonds de solidarité | XX% |
| (+) Capitaux appelés non versés | YY% |
| (+) Dettes subordonnées | XX% ou YY% |

Tableau 6 : Fonds Propre Auxiliaires

La réserve de réconciliation correspond à l'excédent des actifs par rapport aux passifs en valeur de marché, diminué des éléments suivants :

- Valeur de ses propres actions que détient l'entreprise d'assurances/réassurance
- Dividendes, distributions et charges prévisibles
- FPB en (+) (cf. tableau 6)
- Dettes subordonnées

Le choix de degré d'éligibilité à la couverture de SCR (XX% ou YY%) pour les Fonds Propres Auxiliaires est déterminé par les critères suivantes :

| XX% | YY% |
|--|---|
| - Durée indéterminée - Non financées directement ou indirectement par l'entreprise d'assurances - Non rémunérées sur les bénéfices distribuables de l'entreprise d'assurance - Ne font l'objet d'aucun dispositif de rehaussement du rang de subordination des créances | - Durée déterminée supérieure à 5 ans - Non financées directement ou indirectement par l'entreprise d'assurances - Ne font l'objet d'aucun dispositif de rehaussement du rang de subordination des créances |

Tableau 7 : Eligibilité à la couverture de SCR pour les FPA

Chapitre III. Méthodes réglementaires

Afin de quantifier l'impact de la nouvelle réforme SBR sur le portefeuille non-vie de la MATU, nous allons nous focaliser dans ce chapitre sur l'estimation des provisions des sinistres à payer (PSAP) en utilisant les méthodes réglementaires.

Selon l'article 245 du code des assurances, les compagnies d'assurances et de réassurance sont tenues de produire tout état, compte rendu, tableau ou document de nature à permettre de contrôler leurs situations financières, la marche de leurs opérations, l'émission des primes et cotisations, le règlement des sinistres, l'évaluation et la représentation des provisions techniques dans la forme et les délais fixés par voie réglementaire.

A cette fin, la tenue d'une comptabilité revêt une importance considérable pour toute entreprise d'assurance et /ou de réassurance, car tout en se servant de moyen de contrôle par les autorités de tutelle, elle permet à la compagnie d'évaluer succinctement sa situation financière et d'authentifier sa solvabilité.

Les entreprises d'assurances et/ou de réassurance sont tenues par la réglementation d'inscrire à tout moment à leur passif les provisions techniques suffisantes pour le règlement intégral des engagements pris vis à vis des assurés, souscripteurs et bénéficiaires de contrats.

Trois méthodes sont utilisées dans l'évaluation règlementaire :

- ▲ La méthode dossier par dossier.
- ▲ La méthode du coût moyen.
- ▲ La méthode de cadence de règlement.

Cependant, la réglementation prévoit une classification de ces méthodes selon les branches :

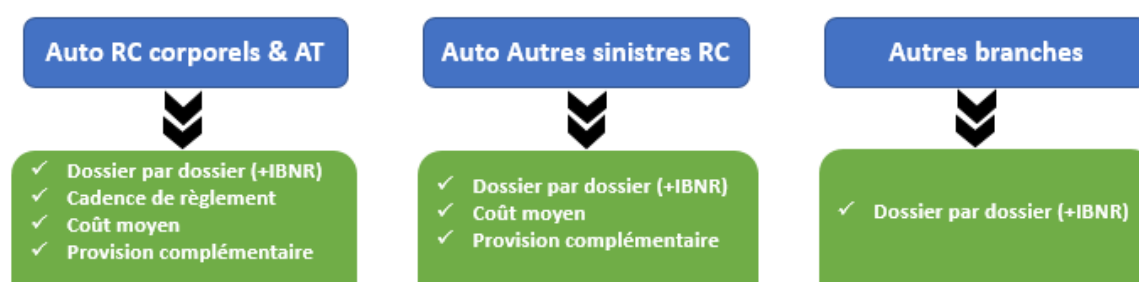


Figure 15 : Classification des méthodes prévue par la réglementation en vigueur

Ainsi, dans notre cas où nous avons étudié la branche RC Auto Corporels de la catégorie TPV ; nous serons amenés à évaluer les PSAP de cette branche par les trois méthodes ci-dessus.

La bonne qualité des évaluations est essentielle, car elle permet d'être certain d'assumer nos engagements à l'égard de nos assurés et des tiers et d'éviter le sur-

provisionnement tout comme le sous-provisionnement car ceux-ci sont sources d'erreur sur le pilotage de la compagnie.

Le sur-provisionnement entraînera un boni à venir, donc un résultat futur supplémentaire. Mais ce manque de résultat immédiat entraîne des réactions de la part de l'entité qui risquent d'être inappropriées comme :

- Augmentation trop forte des tarifs
- Surveillance du portefeuille accrue inutilement
- Participation bénéficiaire inférieure aux intermédiaires.

A l'inverse, le sous-provisionnement entraînera un malus à venir et donc à court terme:

- Les tarifs sont insuffisants.
- La surveillance du portefeuille est moins efficace.
- La participation bénéficiaire est trop importante et « induite » aux intermédiaires.

Ainsi, l'analyse des boni-mali de liquidation, définis comme l'évolution de la charge de sinistre d'un exercice de souscription (Cumul de règlements + PSAP) d'un exercice comptable au suivant, peut constituer un indicateur sur la qualité de la politique de provisionnement adoptée par la compagnie : En théorie, la charge de sinistres d'un exercice de survenance donné devrait rester stable lors du passage d'une année comptable à une autre.

Dans le cas d'une attitude de provisionnement prudente à l'ouverture ou pendant les premières années de développement, la compagnie dégagera par la suite des bonis de façon régulière. Dans le cas inverse d'une évaluation initiale insuffisante, la compagnie se retrouvera par la suite avec une chronique de malis.

I. Méthode dossier par dossier :

I.1 Présentation

Un sinistre est rarement réglé en totalité l'année même de sa survenance. D'où la nécessité, et même l'obligation, pour les compagnies d'assurance d'estimer le coût définitif des sinistres afin de provisionner la différence entre ce coût estimé définitif et les règlements déjà effectués. Ces provisions, renseignées pour chaque sinistre ouvert (et donc connu de l'assureur) s'appellent les provisions dossier/dossier (D/D). Pour les sinistres relevant des risques de fréquence ce coût définitif est souvent un coût moyen.

Cette méthode est la plus appliquée de toutes les méthodes d'estimation ; elle consiste à faire évaluer par le gestionnaire du dossier le coût de chaque sinistre en suspens, en tenant compte, à tout moment, de toute l'information disponible. Mais, en raison du délai existant souvent entre la date de survenance et la date de déclaration, un certain nombre de sinistres, déjà survenus, ne sont toujours pas connus de l'assureur à la fin de l'année calendaire de survenance. Il n'existe donc pas de provisions D/D à ce titre. Ces sinistres, pour lesquels l'année d'ouverture est postérieure à l'année de survenance, sont appelés tardifs (IBNR :

incurred but not reported). L'assureur doit alors constituer des provisions complémentaires pour y faire face.

La provision d'un dossier est égale à son coût final estimé diminué des paiements partiels déjà intervenus ; la provision pour sinistre déclaré à régler est la somme de toutes ces provisions individuelles

$$PSAP_{déclarés}^{D/D} = \sum_i (Charges_i - Réglement_i)$$

A cette provision, on rajoute le montant estimé pour la réserve des tardifs IBNR prend en charge les sinistres survenus mais non déclarés à la date de clôture de l'exercice.

$$PSAP^{D/D} = PSAP_{déclarés}^{D/D} + IBNR$$

La valeur estimée de la réserve des tardifs (le coût des sinistres survenus et non déclarés) est égale au produit du nombre des sinistres non déclarés et du coût moyen de ces derniers.

$$IBNR = CM \times N^{IBNR}$$

Donc, pour calculer cette provision, on sera amené à déterminer le nombre des sinistres survenus non déclarés par exercice de survenance ainsi que le coût moyen des sinistres. Le coût moyen (CM) s'obtient en divisant le coût des sinistres réglés et classés sans suite (fermés) au cours des cinq derniers exercices par leur nombre pour la même période.

$$CM = \frac{CSF}{NSF}$$

Avec :

CSF : Coût des sinistres fermés au cours des 5 dernières années.

NSF : Nombre des sinistres fermés au cours des 5 dernières années.

Pour estimer le nombre des sinistres survenus et non déclarés pendant la période de référence, l'ACAPS propose la méthode de Chain Ladder.

La méthode d'estimation dossier par dossier suppose que les gestionnaires des sinistres sont capables d'évaluer correctement les coûts finaux. Si ceux-ci sont confrontés avec un grand nombre de sinistres de même catégorie, on peut espérer que les sinistres sous-évalués et les sinistres sur évalués vont se compenser mutuellement aussi longtemps qu'il n'y a pas de biais ou d'erreur systématique dans les évaluations individuelles.

En pratique, les gestionnaires ont plutôt tendance à surévaluer les coûts des sinistres, notamment parce qu'ils craignent d'être accusés de mauvaise gestion si le sinistre venait à se terminer pour un montant supérieur à son évaluation. De plus, ils n'appliquent guère le calcul probabiliste.

I.2 Application :

A l'aide du tableur Excel et en utilisant la base de données des sinistres survenus entre 2008 et 2017, nous allons créer un tableau dans lequel nous avons pour chaque année de survenance la réserve à la fin de l'exercice comptable 2017.

| Réserves | | Exercice comptable |
|--------------|------------------------|--------------------|
| Catégorie | Exercice de survenance | 2017 |
| C | 2008 | 1652,64 |
| | 2009 | 1256,64 |
| | 2010 | 1271,16 |
| | 2011 | 1483,68 |
| | 2012 | 3900,6 |
| | 2013 | 12889,8 |
| | 2014 | 8968,08 |
| | 2015 | 12470,04 |
| | 2016 | 16258,44 |
| | 2017 | 27033,6 |
| Total | | 160743 |

Tableau 8 : Les réserves Dossier par Dossier

Pour les IBNR, nous estimons tout d'abord leur nombre par la méthode de Chain Ladder³, puis nous évaluons leurs montants par la méthode du coût moyen⁴. L'exposé de ces deux méthodes sera relaté dans les paragraphes qui suivent.

| Facteurs de développement | | | | |
|---------------------------|--------|--------|--------|--------|
| f1 | f2 | f3 | f4 | f5 |
| 1,1650 | 1,0170 | 1,0066 | 1,0053 | 1,0022 |

Tableau 9 : Les paramètres de Chain-Ladder

Ces coefficients de passage nous permettent de compléter le tableau mais surtout d'avoir la dernière colonne :

³ La méthode de Chaine-Ladder sera expliquée dans le Chapitre IV.

⁴ L'exposé de la méthode du coût moyen sera relaté dans le troisième point de ce chapitre

| Année de développement | | | | | | | Valeur Ultime | IBNR |
|------------------------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------------|------------|
| Année | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | | | |
| 2012 | 1090,32 | 1174,8 | 1186,68 | 1199,88 | 1203,84 | 1206,48 | 0 | |
| 2013 | 953,04 | 1234,2 | 1260,6 | 1268,52 | 1277,76 | 1280,4 | 2 | |
| 2014 | 1186,68 | 1341,12 | 1374,12 | 1378,08 | | 1388,64 | 10 | |
| 2015 | 946,44 | 1137,84 | 1149,72 | | | 1165,56 | 12 | |
| 2016 | 912,12 | 1040,16 | | | | 1073,16 | 25 | |
| 2017 | 1103,52 | | | | | 1326,6 | 169 | |
| Total IBNR | | | | | | | | 216 |

Tableau 10 : Le nombre des IBNR réglementaires

La réserve totale dossier par dossier sera donc la somme de la réserve dossier par dossier des sinistres déclarés et non conclus et de la réserve des IBNR.

| Année | Dossier / Dossier | Nombre IBNR | Les réserves des IBNR | D/D corrigé par les IBNR |
|-----------------------|-------------------|--------------|-----------------------|--------------------------|
| 2007 | 5173,08 | | | 5173 |
| 2008 | 1652,64 | | | 1653 |
| 2009 | 1256,64 | | | 1257 |
| 2010 | 1271,16 | | | 1271 |
| 2011 | 1483,68 | | | 1484 |
| 2012 | 3900,6 | 0 | | 3901 |
| 2013 | 12889,8 | 19 | 21 | 12911 |
| 2014 | 8968,08 | 57 | 84 | 9052 |
| 2015 | 12470,04 | 121 | 126 | 12596 |
| 2016 | 16258,44 | 275 | 263 | 16521 |
| 2017 | 27033,6 | 982 | 1 775 | 28809 |
| Réserve totale | 92357,76 | 1 455 | 2 269 | 94627 |

Tableau 11 : Réserves Dossier par Dossier corrigées par les IBNR

Donc la réserve totale s'élève à : 94 627.

I.3 Critiques

Cette méthode est la plus utilisée parmi les autres méthodes d'évaluation des provisions. Cependant elle est la plus critiquée ; elle est coûteuse, elle peut engendrer un biais dans l'estimation de la vraie réserve et repose presque exclusivement sur le jugement subjectif d'un gestionnaire de sinistres. Celui-ci pourrait par exemple estimer qu'il a « bien » géré un sinistre lorsqu'il le clôture pour un coût inférieur à l'estimation qu'il avait lui-même posée ; en se généralisant à l'échelle du département sinistre, une telle attitude conduit inévitablement à une surévaluation systématique et introduire ainsi un biais dans le calcul de la provision pour prestations à régler.

II. Méthode de la cadence de règlement :

II.1 *Présentation*

La méthode de cadence de règlement consiste à évaluer la charge de sinistres à payer dans le futur pour chaque exercice de survenance non encore totalement liquidé (c'est à dire pour lequel il est estimé que tous les sinistres ne sont pas encore connus ou traités). Cette méthode sous-entend que le futur ressemblera au passé, c'est à dire que l'ensemble des éléments de l'activité de la compagnie sont restés stables :

- Pas de modification de la politique de souscription.
- Pas de modification d'organisation.
- Pas de modification des outils et procédures de traitement des dossiers.
- Pas d'événements extérieurs perturbateurs.

Ainsi que cela est précisé dans les textes, la méthode considère une durée de développement de 5 ans. Cela signifie qu'il est considéré que tous les dossiers sinistres sont connus et liquidés au bout de 5 ans. La méthode présuppose que rien dans la compagnie n'a changé au cours de ces 5 années.

L'une des exigences de cette méthode est l'établissement d'un tableau triangulaire comportant pour chaque année et sur une période d'au moins dix ans :

- Les règlements cumulés par exercice comptable,
- Les évaluations successives dossier par dossier corrigées par les IBNR par année de survenance,
- L'évolution de la charge des sinistres.

Le tableau triangulaire est utilisé pour calculer la cadence de règlement pour chaque année de liquidation.

La cadence de règlement pour chaque année de liquidation, est calculée en divisant les règlements cumulés relatifs à cette année par la charge de sinistres relative aux exercices de survenance ayant atteint cette année de liquidation.

$$Cadence_j = \frac{Règlement_j}{Charge\ des\ sinistres\ qui\ ont\ atteints\ la\ période\ j}$$

- Avec j est la période de développement.
- Avec i est l'année de survenance.

Tous les règlements et les nombres de sinistres utilisés dans les méthodes réglementaires sont cumulés.

Dans la suite de cette étude, les données considérées seront représentées sous la forme d'un triangle dit triangle de **Run-Off** qui contient les paiements cumulés.

$$\begin{bmatrix} i / j & 1 & 2 & \cdot & j & \cdot & n \\ 1 & C_{11} & C_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & C_{1n} \\ 2 & C_{21} & C_{22} & \cdot & \cdot & C_{2,n-1} & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \\ i & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \\ \cdot & \cdot & C_{n-1,2} & & & & \\ n & C_{n1} & & & & & \end{bmatrix}$$

Où :

- i : année de survenance des sinistres (année d'accident) ;
- j : année de règlement des sinistres (de développement) ;
- C_{ij} : le montant cumulé des paiements à l'année de développement j relatifs à l'année de survenance i .

II.2 Application :

La méthode de la cadence des règlements repose sur le triangle de **Run-Off** qui contient les montants cumulés des règlements pour les sinistres corporels d'une année de survenance i et une année de règlement j . Nous commençons donc par le calcul des règlements cumulés ainsi que de la réserve dossier par dossier corrigée par les **IBNR**.

Le graphique ci-après présente le développement des règlements cumulés des divers exercices met en évidence l'aspect systématique et régulier du phénomène. Nous constatons une forte variation des règlements pour les sinistres survenus 2013 et 2014, et une progression sensible entre l'âge « 1 », l'âge « 2 » et l'âge « 3 ». Ensuite, les règlements ne se transforment que faiblement.

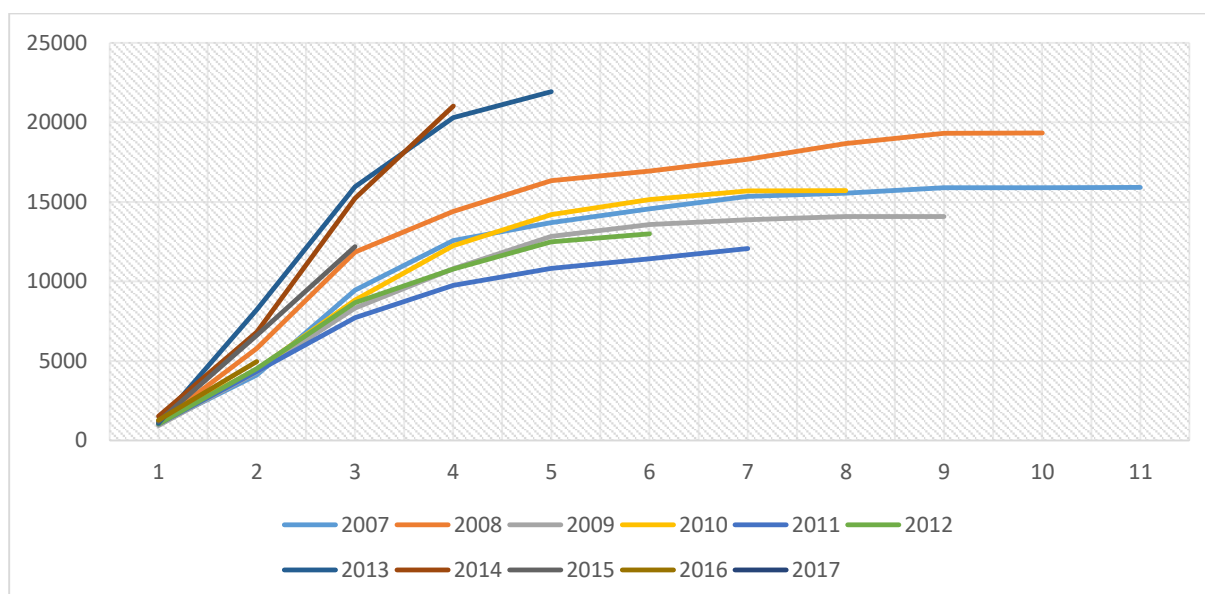


Figure 16 : Evolution des règlements cumulés

Ensuite, nous calculons le règlement total des sinistres pour chaque exercice de survenance à la fin de l'exercice comptable 2017 (la somme du total des règlements et de la réserve dossier par dossier à la fin de l'exercice comptable 2017).

| Année de survenance | Année comptable 2017 | | | |
|---------------------|----------------------|-------------|---------------|----------------|
| | Total règlement | Réserve D/D | Charge totale | Charge cumulée |
| 2007 | 15899 | 5173 | 21072 | 21072 |
| 2008 | 19329 | 1653 | 20981 | 42054 |
| 2009 | 14083 | 1257 | 15340 | 57394 |
| 2010 | 15711 | 1271 | 16982 | 74375 |
| 2011 | 12054 | 1484 | 13538 | 87913 |
| 2012 | 12995 | 3901 | 16896 | 104809 |
| 2013 | 21930 | 12918 | 34848 | 139657 |
| 2014 | 21028 | 9079 | 30107 | 169764 |
| 2015 | 12192 | 12636 | 24828 | 194592 |
| 2016 | 4961 | 16606 | 21566 | 216158 |
| 2017 | 1481 | 29377 | 30858 | 247016 |

Tableau 12 : La charge totale des sinistres corporels pour l'exercice comptable 2017

Nous obtenons donc les cadences suivantes :

| Cadence de règlement | |
|----------------------|-----|
| C0 | 5% |
| C1 | 26% |
| C2 | 51% |
| C3 | 67% |
| C4 | 74% |
| C5 | 84% |
| C6 | 89% |
| C7 | 91% |
| C8 | 92% |
| C9 | 92% |

Tableau 13 : La cadence de liquidation

Ce tableau montre une croissance de cadence dans le temps, un résultat qui est logique puisque en avançant dans le temps nous devrions rembourser tous les sinistres survenus. Le graphe ci-après illustre bien ce résultat :

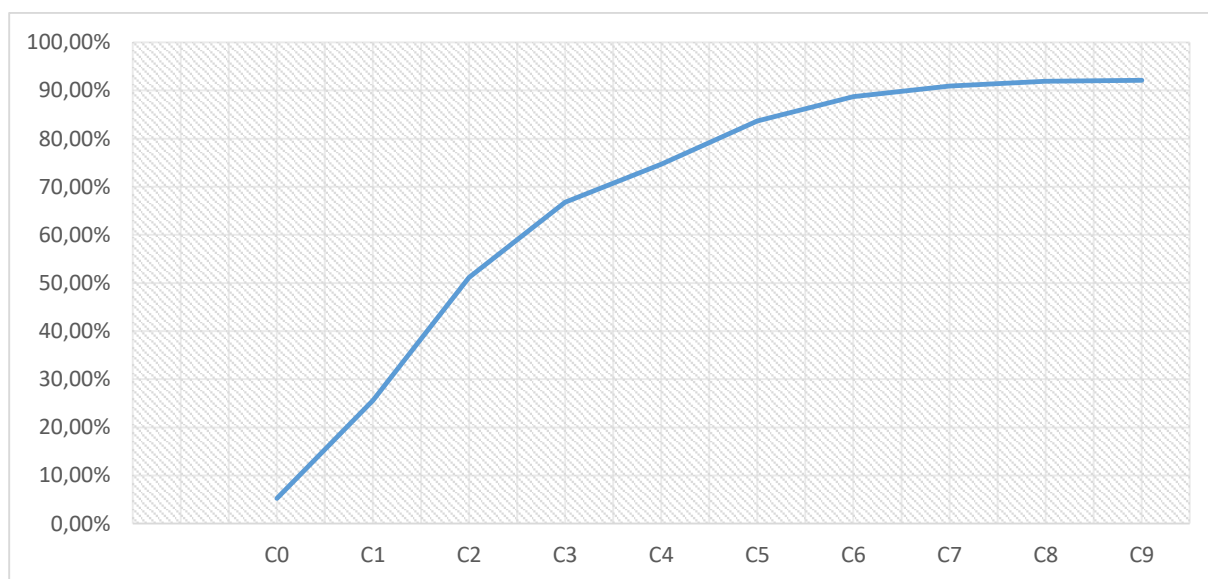


Figure 17 : La cadence de liquidation

Cependant, le déroulement des sinistres dépend de la branche en question (i.e. du type de risque). Le figure ci-après donne une idée des cadences de règlement pour trois branches :

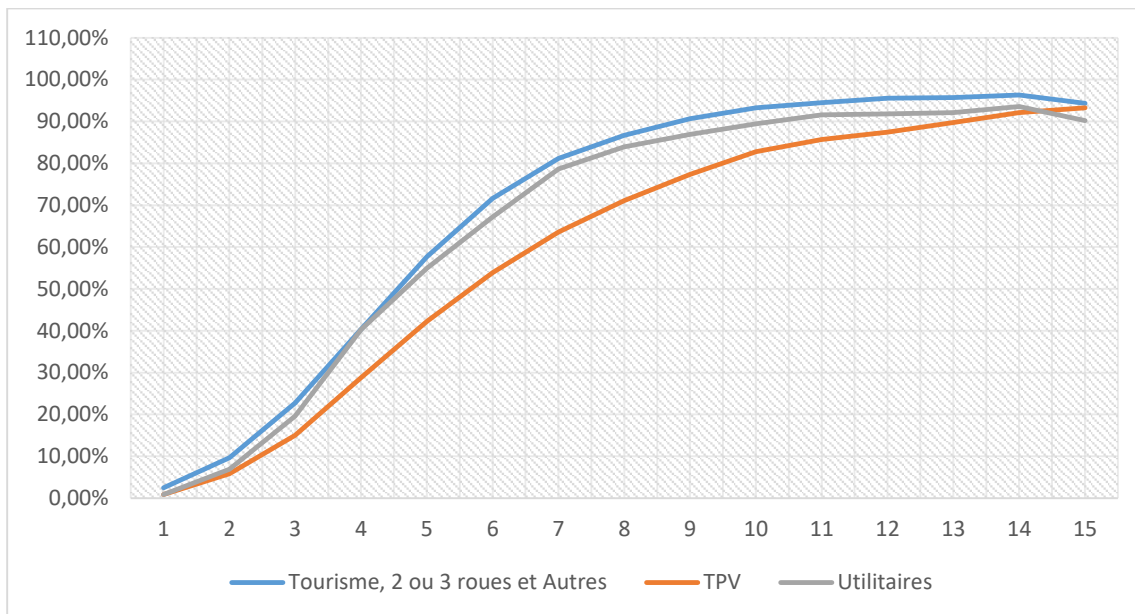


Figure 18 : Graphe d'évolution de la cadence moyenne par année de développement

Ce graphique représente la moyenne des cadences des règlements observées à fin 2017 sur 15 années de développement. L'axe horizontal représente les années de développement alors que l'axe vertical, représente le pourcentage de règlement par rapport à la charge sinistre estimée. Un premier constat permet rapidement de dire que le développement de la branche TPV est relativement long, alors que les deux autres branches représentées par les courbes ci-dessus sont dans les normes (pour des sinistres corporels).

En effet, pour atteindre 80%, la branche TPV a besoin de 9, 10 ans alors que les deux autres branches l'atteignent en 6, 7 ans.

Pour obtenir enfin la réserve de la cadence de règlement, nous appliquons pour chaque exercice de survénance la formule citée ci-dessous :

$$PSAP_i^{CR} = Règlement_i * \frac{1 - cadence_{n-1}}{Cadence_{n-1}}$$

Notons que la formule donnant la réserve ($PSAP_i^{CR}$) se base sur l'idée que le ratio des pourcentages est égal à celui des montants et on peut la réécrire comme suit :

$$\frac{\text{La réserve totale (ce qui reste à payer)}}{\text{Règlements cumulés(ce qui a été payé)}} = \frac{100 - cadence_{n-1}(\text{le pourcentage des non payés})}{Cadence_{n-1}(\text{le pourcentage des payés})}$$

La réserve totale se déduit par la somme de la réserve relative à chaque année de survénance.

| Année de survenance | Réserve |
|---------------------|---------|
| 2017 | 1653 |
| 2016 | 1233 |
| 2015 | 1572 |
| 2014 | 1534 |
| 2013 | 2533 |
| 2012 | 7425 |
| 2011 | 10461 |
| 2010 | 11653 |
| 2009 | 14395 |
| 2008 | 26599 |

Tableau 14 : réserves par année d'exercice

Donc la réserve totale s'élève à : 79 057.

III. Méthode du coût moyen :

III.1 Présentation

Cette méthode consiste à appliquer aux sinistres connus en nombre un coût moyen estimé à partir des données de la compagnie. Le coût moyen des sinistres réglés, est généralement interprété comme la moyenne des montant réglés au cours d'une année. Or ce n'est pas ce qui est recherché. Le but du provisionnement est de tenter d'estimer les coût futurs totaux pour la compagnie (ses engagements), et non le montant qu'elle est susceptible de payer l'année suivante.

En conséquence, le coût moyen à retenir est celui des dossiers définitivement réglés, ce qui constitue bien une estimation des engagements probables de la compagnie. Le coût moyen s'obtient en divisant le coût des sinistres réglés au cours des cinq derniers exercices par le nombre de sinistres réglés ou classés sans suite pour la même période.

Ce coût moyen est appliqué, pour chaque exercice, au nombre total des sinistres y compris l'estimation de ceux non déclarés appelés les tardifs ou IBNR. Pour estimer les tardifs, l'ACAPS propose la méthode de Chain Ladder présentée dans le chapitre suivant.

Il faut noter que le coût moyen est appliqué seulement aux exercices pour lesquels la provision pour sinistres à payer calculée dossier par dossier, est supérieure à 30% de la charge totale des sinistres. Toutefois, cette méthode n'est appliquée que pour les dix derniers exercices au plus.

$Réserve^{CM} = Nombre\ de\ sinistres\ survenus * CM - Cumul\ des\ règlements$
Ainsi, l'application de cette méthode nécessite trois étapes à suivre :

- Première étape : estimation des sinistres survenus et non déclarés
- Deuxième étape : estimation des coûts moyens
- Troisième étape : estimation des provisions

III.2 Application :

Nous commençons tout d'abord par le calcul du coût moyen. Pour ce faire, nous devons calculer la charge des sinistres soldés et le nombre de ces sinistres pour les cinq dernières années.

| La charge totale des sinistres soldés | Exercice comptable | | | | |
|---------------------------------------|--------------------|-------|-------|-------|-------|
| | 2017 | 2016 | 2015 | 2014 | 2013 |
| | 13740 | 20562 | 16322 | 12169 | 11071 |

Tableau 15 : La charge totale des sinistres soldés

| Nombre total des sinistres soldés | Exercice comptable | | | | |
|-----------------------------------|--------------------|------|------|------|------|
| | 2017 | 2016 | 2015 | 2014 | 2013 |
| | 1488 | 1973 | 1468 | 969 | 1139 |

Tableau 16 : Nombre des sinistres soldés

Le coût moyen sera donc égal au rapport entre la somme de la charge des sinistres soldés et le nombre total des sinistres soldés sur les cinq dernières années, soit :

$$CM = \frac{73863}{7037} = 10,49$$

Ainsi, nous obtenons la réserve coût moyen pour les sinistres déclarés en utilisant la formule suivante :

Réserve CM pour les sinistres déclarés

= (nombre total des sinistres survenus * CM) - (règlements antérieurs + règlements de l'année)

Pour cela, nous passons à l'élaboration des tableaux donnant le nombre total des sinistres de la branche étudiée, ainsi que ceux donnant le cumul des règlements (la somme des règlements antérieurs et des règlements de l'année), à la fin de l'exercice comptable 2017.

| Nombre des sinistres | Exercice comptable |
|-------------------------------|---------------------------|
| Exercice de survenance | 2017 |
| 2008 | 1267 |
| 2009 | 1249 |
| 2010 | 1357 |
| 2011 | 1150 |
| 2012 | 1206 |
| 2013 | 1280 |
| 2014 | 1389 |
| 2015 | 1166 |
| 2016 | 1073 |
| 2017 | 1327 |
| | 11137 |

Tableau 17 : Le nombre total des sinistres

| Règlements de l'année | Exercice comptable |
|-------------------------------|---------------------------|
| Exercice de survenance | 2017 |
| 2008 | 1 |
| 2009 | 6 |
| 2010 | 7 |
| 2011 | 34 |
| 2012 | 23 |
| 2013 | 53 |
| 2014 | 328 |
| 2015 | 521 |
| 2016 | 983 |
| 2017 | 898 |
| | 2 854 |

Tableau 18 : Les règlements de l'année

| AS | NSS | CM | NB * CM | Cumul des règlements | Provision CM | Réserve résiduelle | Charge sinistres | RES/CHG | Provision |
|------|------|-------|---------|----------------------|--------------|--------------------|------------------|---------|-----------|
| 2008 | 1267 | 10,49 | 13291 | 14643 | -4566,33 | 1653 | 15895 | - | 1653 |
| 2009 | 1249 | 10,49 | 13102 | 10669 | -739,28 | 1257 | 11621 | - | 1257 |
| 2010 | 1357 | 10,49 | 14235 | 11902 | -1111,57 | 1271 | 12865 | - | 1271 |
| 2011 | 1150 | 10,49 | 12064 | 9132 | 10,48 | 1484 | 10256 | 0,1096 | 1484 |
| 2012 | 1206 | 10,49 | 12651 | 9845 | -251,17 | 3901 | 12800 | - | 3901 |
| 2013 | 1280 | 10,49 | 13427 | 16614 | -6432,37 | 12918 | 26400 | - | 12918 |
| 2014 | 1389 | 10,49 | 14571 | 15930 | -4887,65 | 9079 | 22808 | - | 9079 |
| 2015 | 1166 | 10,49 | 12231 | 9236 | 43 | 9573 | 18809 | 0,509 | 43 |
| 2016 | 1073 | 10,49 | 11256 | 3758 | 6304 | 12579,5 | 16337 | 0,77 | 6304 |
| 2017 | 1327 | 10,49 | 13920 | 1122 | 12444 | 22254,5 | 23376 | 0,952 | 12444 |

Tableau 19 : Réserve par la méthode Cout Moyen

Notons que la réserve coût moyen dépendra de la valeur du taux obtenu (Réserve dossier par dossier / charge totale) « voir annexe 1 » :

- Si le taux obtenu est inférieur à 30% : la réserve coût moyen sera égale à la réserve D/D;
- Si le taux obtenu est supérieur à 30% : deux cas sont envisageables :
 - Si la réserve CM des sinistres déclarés < 0 : la réserve CM totale sera égale à la réserve D/D;
 - Sinon : la réserve CM totale sera égale à la somme de la réserve des sinistres déclarés et la réserve des IBNR

Donc la réserve totale égale à **50 351**.

IV. Réserves retenues par les méthodes réglementaires :

D'après la réglementation marocaine⁵, les sinistres sont évalués dossier par dossier augmentée d'une estimation du coût des sinistres survenus mais non déclarés à la date de l'inventaire. L'évaluation obtenue ne doit pas être inférieure à l'évaluation la plus élevée dégagée par les méthodes forfaitaires (coût moyen ou cadence de règlement).

En effet, pour les exercices où le montant de la provision calculée dossier par dossier corrigée par les IBNR est inférieur au montant le plus élevé calculé par les méthodes forfaitaires, un complément de provision (PC) est constitué comme suit :

$$PC = \text{Max} (\text{Max} (\text{réserve CM}, \text{réserve cadence de règlements}) - D/D + \text{tardifs}, 0)$$

⁵ Voir annexe 1

Nous obtenons ainsi, les résultats suivants :

| Année de survenance | 2 008 | 2 009 | 2 010 | 2 011 | 2 012 | 2 013 | 2 014 | 2 015 | 2 016 | 2 017 |
|---------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| Complément | 0 | 0 | 0 | 228 | 38 | 0 | 0 | 1047 | 0 | 0 |

Tableau 20 : La réserve complémentaire des sinistres répartie par année de survenance

Donc la réserve retenue pour chaque exercice de survenance est la somme de la réserve dossier par dossier corrigée par les IBNR et la réserve complémentaire.

| Année de survenance | D/D + tardifs | CM | Cadence |
|---------------------|---------------|--------|---------|
| 2007 | 5173 | 5173 | 5173 |
| 2008 | 1653 | 1653 | 1653 |
| 2009 | 1257 | 1257 | 1233 |
| 2010 | 1271 | 1271 | 1572 |
| 2011 | 1484 | 1484 | 1534 |
| 2012 | 3901 | 3901 | 2533 |
| 2013 | 12918 | 12918 | 7425 |
| 2014 | 9079 | 9079 | 10461 |
| 2015 | 12636 | 42 | 11653 |
| 2016 | 16606 | 6304 | 14395 |
| 2017 | 29377 | 12444 | 26599 |
| Total | 94 627 | 50 351 | 79 057 |

Tableau 21 : Les réserves réglementaires retenues

L'exposé théorique et numérique du schéma réglementaire marocain en matière de constitution des PSAP nous a menés à une estimation de la réserve de 94 627.

Notons que pour les autres sinistres RC, La démarche reste la même. Toutefois, seul la méthode Dossier/Dossier et coût moyen sont applicables (cadence exclue) comme nous l'avons présenté au début de ce chapitre dans la figure 16.

Tout au long de l'application des méthodes imposées par l'autorité de tutelle, on constate que ces techniques sont carrément comptables et visent avant tout à avoir une provision conforme aux exigences de réglementation. Cependant, il est à noter qu'une certaine marge d'appréciation subjective est laissée à l'assureur grâce à la méthode d'inventaire D/D. Ainsi, le calcul des PSAP donne lieu à une grande marge d'erreur en impliquant l'expérience personnelle du gestionnaire de risque et son habilité à évaluer avec acuité les risques futurs.

Chapitre IV. Les méthodes déterministes du calcul des réserves et du BE

Selon l'article 26 du projet SBR, La meilleure estimation (BE) des engagements pour sinistres nets de recours est déterminée en actualisant, les flux de règlements futurs probabilisés nets de recours relatifs aux sinistres survenus afférents aux contrats. Les flux de règlements futurs probabilisés nets de recours sont estimés sur la base de la partie supérieure du triangle de règlements. Afin de prévoir la partie inférieure du triangle qui est inconnue, l'ACAPS propose, dans ledit Projet, la méthode de Chain Ladder qui fait partie aux méthodes déterministes.

Ainsi, dans ce chapitre, nous étudions un package de ces méthodes pour pouvoir déterminer les avantages et les inconvénients de chaque méthode étudiée tout en focalisant sur celle de Chain-Ladder. Néanmoins, le Projet de circulaire dispose que l'entreprise d'assurances et/ou de réassurance doit vérifier le caractère approprié de la méthode précitée au regard des spécificités de son portefeuille d'engagements. Ainsi, les compagnies peuvent utiliser une autre méthode pour le calcul du BE et ce, après l'accord de l'Autorité.

Ces méthodes de provisionnement, qui dites agrégées (par opposition aux méthodes de provisionnement individuelles), reposent sur les hypothèses suivantes :

- Stabilité du délai s'écoulant entre la survenance d'un sinistre et le(s) règlements(s), quel que soit l'exercice de survenance ;
- Absence de changement de structure du portefeuille ;
- Les garanties des contrats, franchises restent les mêmes ;
- La gestion des sinistres ne change pas.

Si toutes ces hypothèses sont vérifiées sur une période suffisamment longue, les méthodes déterministes constituent un outil intéressant pour prévoir la charge finale. Pour chacune des variantes de Chain Ladder, des hypothèses de départ doivent être supposées. Cependant, après avoir abouti aux résultats voulus, il est nécessaire de revoir la justesse de nos suppositions, surtout lorsqu'il s'agit d'hypothèses fortes.

I. Les méthodes de Chain Ladder

Comme nous l'avons déjà expliqué, L'idée de base de cette méthode repose sur l'usage des facteurs de développement déjà définis et ce, dans le but de prédire les données futures manquantes rien qu'en se référant à celles déjà observées.

Tout au long de cette section, on reste fidèle aux notations suivantes :

- i est l'indice de l'année de survenance.
- j est l'indice du délai de déroulement.
- C_{ij} est le le montant des paiements cumulé jusqu'en l'année de développement j des sinistres survenus en l'année d'accident i .
- N est l'indice de l'exercice dont nous cherchons la provision. Puisque nos indices commencent avec un zéro, nous travaillons donc sur $n+1$ années.

Toutefois, il faut vérifier que, pour chaque exercice de déroulement, les éléments de la $j^{\text{ème}}$ colonne sont sensiblement constants et proches du facteur de développement estimé f_j . Si tel n'était pas le cas, il faudrait prendre d'autres valeurs pour les $(f_j)_{j=0..n-1}$

Ainsi, afin de pallier ce problème, il existe d'autres méthodes qui dérivent de la méthode de Chain Ladder standard et qui se nomment « méthode de Chain Ladder Pondéré ». Ces dernières déterminent les facteurs de développement $(f_j)_{j=0..n-1}$ à partir des éléments de la $j^{\text{ème}}$ colonne du triangle des facteurs grâce à la formule suivante :

$$f_j = \frac{\sum_{k=0}^{n-1} w_{i,k} * f_{i,k}}{\sum_{k=0}^{n-1} w_{i,k}}$$

Où les $W_{i,j}$ correspondent à une pondération choisie en fonction des spécificités des $f_{i,j}$.

Plusieurs pondérations sont fréquemment utilisées. En voici une liste non exhaustive :

- La moyenne : $W_{i,j} = 1$ d'où $f_j = (\sum_{k=0}^{n-1} f_{i,k}) / (n - j)$
- La moyenne des m derniers, (ie $w_{i,k} = 1$ si $k=n-m$ et $w_{i,k} = 0$ sinon)
- Le dernier $f_j = f_{n-j-1,j}$
- $w_{i,k} = f_{n-j-1,j}$
- $w_{i,k} = (i + j - 1)^2$
- $w_{i,k} = C_{i,k}$ qui revient à faire la méthode standard.

I.1 La méthode de Chain Ladder Standard

C'est probablement la méthode la plus connue pour ce qui est de l'estimation des réserves. C'est une estimation linéaire de la courbe des paiements. Cette méthode de type $AR(1)$, caractérisant un modèle linéaire avec constante nulle, applicable à toute sorte de triangles (de dépenses, de charges, de nombre de sinistres). Cependant, au cours de notre étude, nous nous contenterons de l'appliquer uniquement au triangle des paiements cumulés $C = (C_{i,j}) \quad j = 0,1,\dots, n - 1$

1.1.1 Les hypothèses de base

La méthode de Chain Ladder repose sur une première hypothèse d'indépendance des années de survenance des sinistres. En pratique, cette hypothèse est généralement admise et ne nécessite pas une vérification précise.

Par ailleurs, les facteurs de développement étant grandement impliqués dans la procédure utilisée par Chain Ladder Standard, ils font l'objet d'une forte hypothèse indispensable à la logique de cette méthode. En effet, implicitement, la méthode Chain Ladder Standard suppose que les facteurs de développement individuels (ou les ratios) $f_{i,j} = \frac{C_{i,j+1}}{C_{i,j}}$ sont indépendants de l'année d'origine i . Autrement, cela signifie que le pourcentage des sinistres liquidés entre deux années comptables successives ne dépend pas de l'année de survenance de ces sinistres. Ainsi, $\forall j \in (j = 0, 1, \dots, n-1)$:

$$\frac{C_{0,j+1}}{C_{0,j}} = \frac{C_{1,j+1}}{C_{1,j}} = \dots = \frac{C_{i,j+1}}{C_{i,j}} = \frac{C_{n-j-1,j+1}}{C_{n-j-1,j}}$$

Nous avons donc, pour j allant de 1 à n , $\frac{C_{i,j+1}}{C_{i,j}} = \text{cte}$, que nous notons f_j . Cela dit que les facteurs de développement individuels relatif à une année de développement j doivent être significativement proche de la moyenne des facteurs de développement individuels sur ladite année. Cette constatation fera certainement l'objet d'une vérification.

1.1.2 L'estimation de la réserve

Il s'agit de calculer les éléments manquants du tableau en estimant les paiements futurs pour aboutir à un rectangle complet de liquidation.

En pratique, l'hypothèse d'indépendance n'étant qu'approximativement vérifiée, nous avons recours à des facteurs plus synthétiques et communs. Il s'agit des facteurs définis tels que :

$$f_j = \frac{\sum_{i=0}^{i=n-j-1} C_{i,j+1}}{\sum_{i=0}^{i=n-j-1} C_{i,j}}$$

A l'aide de ces coefficients de passage communs, on procède à l'estimation des montants manquants comme suit :

$$C_{i,j} = C_{i,n-i} * f_{n-i} * \dots * f_{j-1} = C_{i,n-1} \prod_{h=n-i}^{j-1} f_h \quad \text{pour le cas où nous avons } i + j > n$$

Notons que la charge ultime $C_{i,n}$ est égale à la charge totale « Si » de tous les sinistres survenus dans la même année i .

L'étape suivante consiste à retrouver la provision globale pour l'année considérée. Elle est égale à la somme des réserves calculées par année de survenance. Si nous notons R la provision globale et R_i la provision relative à l'année i , nous aurons :

$$\begin{cases} R_i = C_{in} - C_{i,n-i} \\ R = \sum_{i=1}^n R_i \end{cases}$$

Les coefficients de développement se présentent ainsi :

| | | | | | | | | | | |
|-------|------|------|------|------|------|------|------|------|-------|------|
| j | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| f_j | 4,71 | 2,00 | 1,30 | 1,13 | 1,05 | 1,03 | 1,02 | 1,02 | 1,001 | 1,00 |

Tableau 22 : Les coefficients de passage

Suite à une application directe des formules précédentes, nous complétons les éléments manquants du tableau pour aboutir aux valeurs des réserves annuelles, à l'estimation de la valeur globale et à la valeur du Best Estimate.

Ainsi, Le compliment de la figure 5 dans la section V.2.1 est :

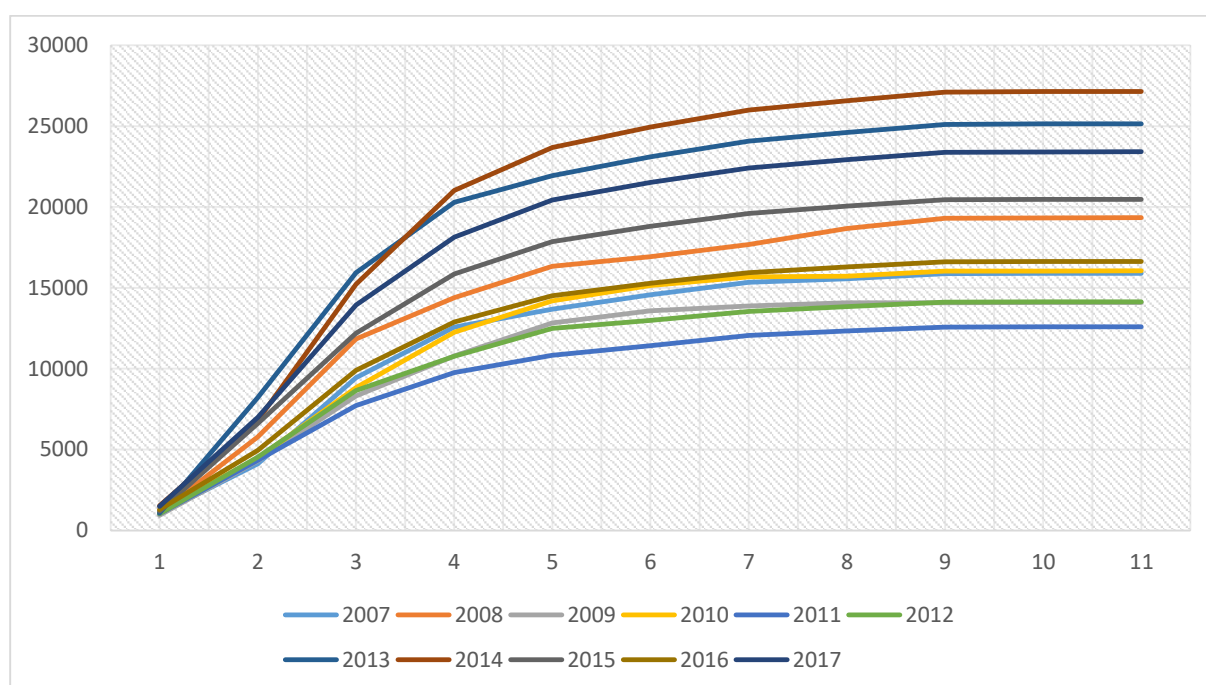


Figure 19 : Evolution des règlements cumulés des sinistres par années de survenance (CLS)

Les deux tableaux suivants présentent les réserves annuelles et les cash-flows estimés pour cette méthode :

| An | 2007 | 2008 | 2009 | 2010 | 2011 | 2012 | 2013 | 2014 | 2015 | 2016 | 2017 |
|-------------------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|-------|-------|
| PSAP _i | - | 6 | 17 | 338 | 537 | 1147 | 3212 | 6117 | 8286 | 11679 | 21934 |

Tableau 23 : les réserves annuelles estimé par CL

| An | 2018 | 2019 | 2020 | 2021 | 2022 | 2023 | 2024 | 2025 | 2026 | 2027 |
|-----------|-------|-------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| Cash-flow | 19091 | 14750 | 8662 | 4950 | 2739 | 1699 | 863 | 486 | 26 | 8 |

Tableau 24 : les cash-flows estimé pas CL

Nous obtenons donc le montant des réserves R globales : $R = \sum_{i=2008}^{2017} Ri = 53\,273$

Le BE est calculé en utilisant la méthodologie présentée dans le chapitre II (section III.1.2 et figure 9). Ainsi, après l'actualisation des cash-flows par la courbe des taux communiqué par l'autorité (figure 10) ; nous trouvons que le BE pour sinistres égal 50 230.

I.1.3 La validation de l'hypothèse d'indépendance des coefficients de passage

Il existe deux façons pour vérifier l'exactitude de l'hypothèse d'indépendance des facteurs de développement. La première est purement graphique alors que la deuxième repose plutôt sur le calcul et l'interprétation de quelques statistiques de base.

1) La vérification par C-C Plot

Suivant cette méthode, nous nous devons de générer, pour chaque j fixé, un graphe de couples $(C_{ij}, C_{i,j+1})$, i allant de 0 jusqu'à n-j-1. Pour valider l'hypothèse, il suffit de trouver un nuage de points s'alignant autour d'une droite fictive passant pas l'origine.

En effet, nous constatons sur les diagrammes C-C Plot générés que les nuages de points décrivent la silhouette d'une droite passant par l'origine (voir annexe 2). De ce fait, on confirme la justesse de notre hypothèse.

2) La vérification par le coefficients de variation

Une autre alternative pour tester l'hypothèse d'indépendance repose sur l'usage du D-triangle. Ce dernier n'est autre qu'un tableau triangulaire formé des coefficients de passage déjà définis. Pour être plus précis, notre objectif est de calculer sur chaque colonne du D-tableau que l'on va définir, quelques statistiques basiques, à savoir l'espérance (m), l'écart-type (σ) et le coefficient de variation (cv).

L'idéal serait de pouvoir affirmer avoir une volatilité très faible grâce à un cv décroissant et insignifiant.

Le tableau des statistiques sur lesquelles nous allons nous baser pour vérifier la véracité de l'hypothèse d'indépendance est le suivant :

| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|----------|------|------|------|------|------|------|------|--------|--------|--------|
| m | 4,74 | 1,99 | 1,30 | 1,13 | 1,05 | 1,04 | 1,02 | 1,02 | 1,0009 | 1,0003 |
| σ | 1,11 | 0,16 | 0,06 | 0,04 | 0,01 | 0,43 | 0,46 | 1,02 | 0,0001 | 0,0000 |
| cv | 0,24 | 0,08 | 0,05 | 0,03 | 0,01 | 0,41 | 0,45 | 1,0001 | 0,0001 | 0,0000 |

Tableau 25 : Les caractéristiques de dispersion D-triangle

Le coefficient de corrélation est relativement petit pour les premières colonnes et il continue à diminuer jusqu'à atteindre la valeur 0. Il est donc clair que nous avons une volatilité négligeable et que par conséquent, l'indépendance des facteurs de développement est établie.

I.2 Les méthodes de Chain Ladder pondérées

Dans cette section, nous sommes en présence d'une autre variante de la méthode de Chain Ladder. Le principe de calcul global est le même, seule diffère la procédure derrière le choix des facteurs de développement à retenir pour les calculs de la provision finale. Autrement dit, les méthodes de Chain Ladder pondérées gardent la même logique que Chain Ladder standard et suivent les mêmes étapes dans le calcul sauf que les facteurs de développement sont choisis d'une autre manière comme nous l'avons présenté au début de chapitre (section I).

L'étude commence par le D. triangle défini et construit dans le paragraphe précédent. Sur une même colonne de ce triangle, des opérations sont faites sur les facteurs de développement pour aboutir à un facteur ultime qui sera représentatif du passage entre les deux délais consécutifs en question. Selon l'aspiration de chaque méthode de calcul, nous choisissons la combinaison des coefficients qui sied le mieux :

- La moyenne : on peut avoir recours à la moyenne si l'on veut inclure toutes les données même les plus anciennes. Le calcul de cette moyenne s'avère particulièrement judicieux quand la gestion de la sinistralité a été constante durant toutes les années considérées.
- La moyenne des trois derniers : nous calculons ici la moyenne arithmétique des trois derniers facteurs de développement ; c'est-à-dire que, pour un même délai, on ne tient compte que des trois dernières années comptables disponibles. Le calcul en est ainsi plus abrégé mais la représentativité des données est moins présente, seules mises en valeur les données les plus actuelles.
- Le dernier facteur.

I.2.1 La moyenne des facteurs

Sur la base du D-triangle, nous calculons le tableau des moyennes par année de développement :

| j | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| m | 4,7388 | 1,9967 | 1,2994 | 1,1313 | 1,0538 | 1,0422 | 1,0212 | 1,0187 | 1,0009 | 1,0003 |

Tableau 26 : Les moyennes des facteurs par année de développement

Ainsi, la partie inférieure du triangle des règlements net de recours se complète. La figure suivante présente l'évolution des règlements estimés dans les années futures :

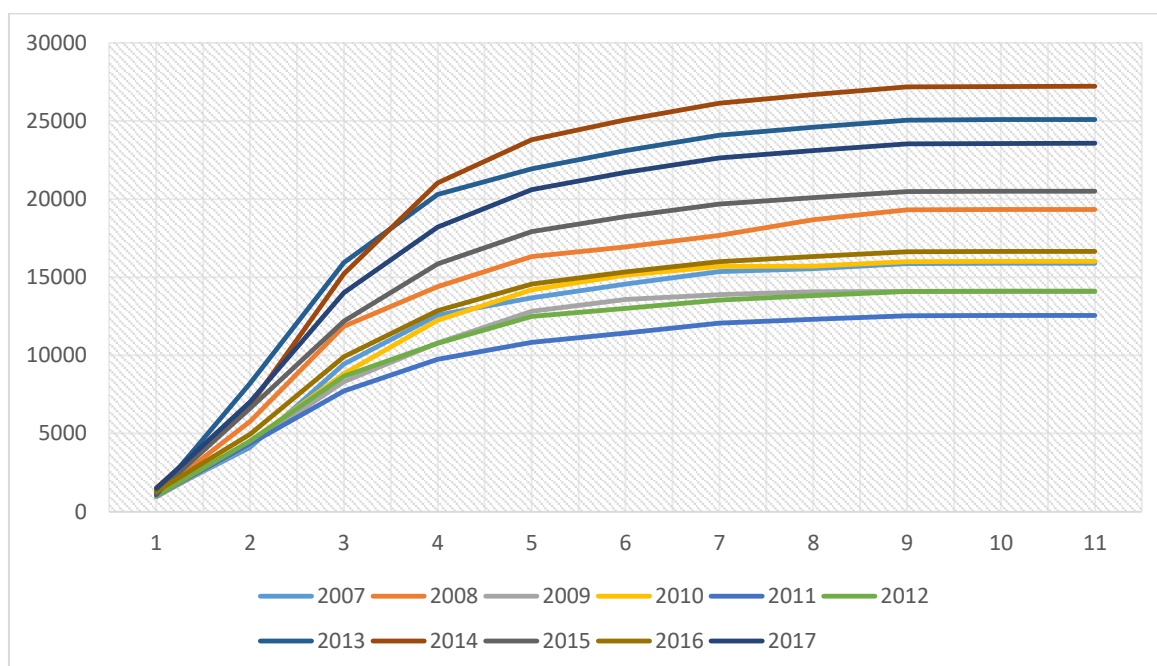


Figure 20 : Evolution des règlements cumulés des sinistres par années de survenance (CLP)

Prédire les montants de la partie inférieure du triangle, nous permet d'obtenir les tableaux suivants qui présentent les réserves annuelles et les cash-flows estimés :

| An | 2007 | 2008 | 2009 | 2010 | 2011 | 2012 | 2013 | 2014 | 2015 | 2016 | 2017 |
|----------------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|-------|-------|
| R _i | - | 6 | 17 | 313 | 501 | 1111 | 3156 | 6184 | 8309 | 11695 | 22082 |

Tableau 27 : les réserves annuelles estimé par CLP1

| An | 2018 | 2019 | 2020 | 2021 | 2022 | 2023 | 2024 | 2025 | 2026 | 2027 |
|-----------|-------|-------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| Cash-flow | 19190 | 14830 | 8694 | 5000 | 2698 | 1663 | 812 | 454 | 26 | 8 |

Tableau 28 : les cash-flows estimé pas CLP1

Ainsi, la réserve pour sinistres à payer donnée par cette variante de Chain Ladder est de **53 375** ; et le BE égale à **50 343**

1.2.2 La moyenne des trois derniers facteurs

Nous procédons de même que précédemment en calculant en premier lieu les facteurs de développement uniquement sur la base des trois dernières observations.

| j | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|----------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| M ₃ | 4,6166 | 2,0072 | 1,2995 | 1,1165 | 1,0543 | 1,0378 | 1,0239 | 1,0187 | 1,0009 | 1,0003 |

Tableau 29 : La moyenne des trois derniers facteurs de développement

L'illustration du tableau complété et les réserves calculées ainsi que les flux de cash-flows suite à ces facteurs se présentent comme suit :

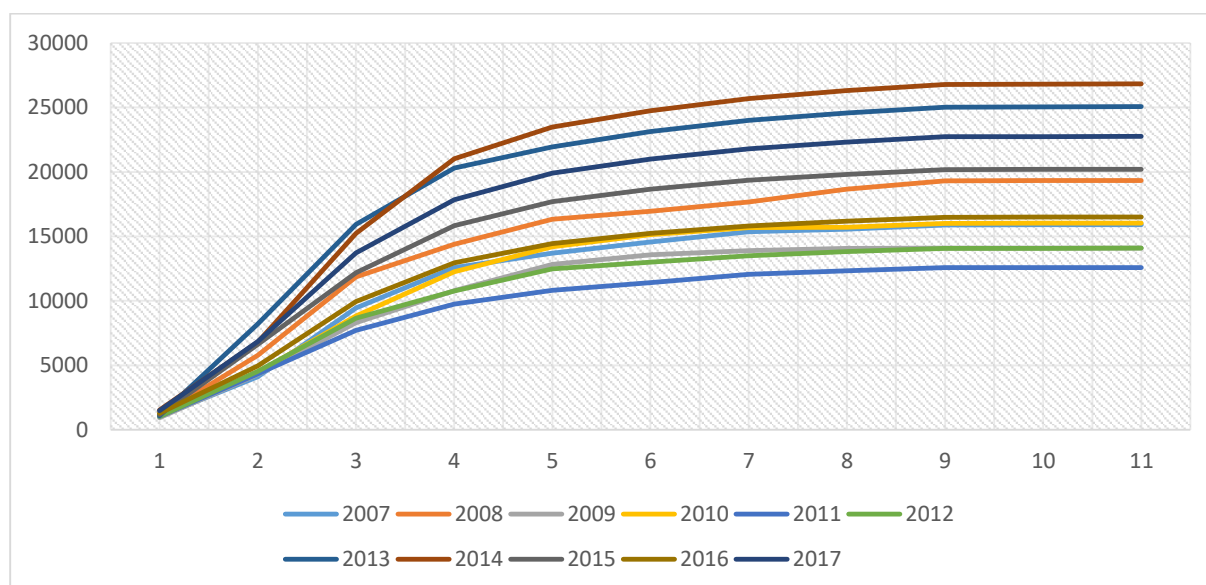


Figure 21 : Evolution des règlements cumulés des sinistres estimés par CLP par la moyenne des 3 derniers facteurs

| An | 2007 | 2008 | 2009 | 2010 | 2011 | 2012 | 2013 | 2014 | 2015 | 2016 | 2017 |
|----------------|------|------|------|-------|-------|--------|--------|--------|--------|---------|---------|
| R _i | - | 6,5 | 17,4 | 313,4 | 533,9 | 1088,1 | 3126,4 | 5796,1 | 8018,9 | 11545,0 | 21269,3 |

Tableau 30 : les réserves annuelles estimé par CLP2

| An | 2018 | 2019 | 2020 | 2021 | 2022 | 2023 | 2024 | 2025 | 2026 | 2027 |
|-----------|---------|---------|--------|--------|--------|--------|-------|-------|------|------|
| Cash-flow | 18736,1 | 14432,9 | 8359,6 | 4655,6 | 2636,0 | 1573,4 | 850,1 | 438,2 | 26,4 | 7,9 |

Tableau 31 : les cash-flows estimé pas CLP2

Ainsi, la réserve pour sinistres à payer donnée par cette variante de Chain Ladder est de **39 178,1** ; et le BE égale à **51 715**.

1.2.3 Le dernier facteur

Le tableau suivant regroupe les facteurs de développement au titre de la dernière année comptable et ce, pour chaque délai de déroulement :

| j | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|----------------|------|------|------|-------|-------|--------|-------|-------|--------|--------|
| F _j | 3,85 | 1,84 | 1,38 | 1,081 | 1,041 | 1,0554 | 1,002 | 1,001 | 1,0008 | 1,0003 |

Tableau 32 : Le dernier facteur du d-triangle

Ainsi, nous procédons la même démarche que précédemment, nous trouvons les résultats suivants :

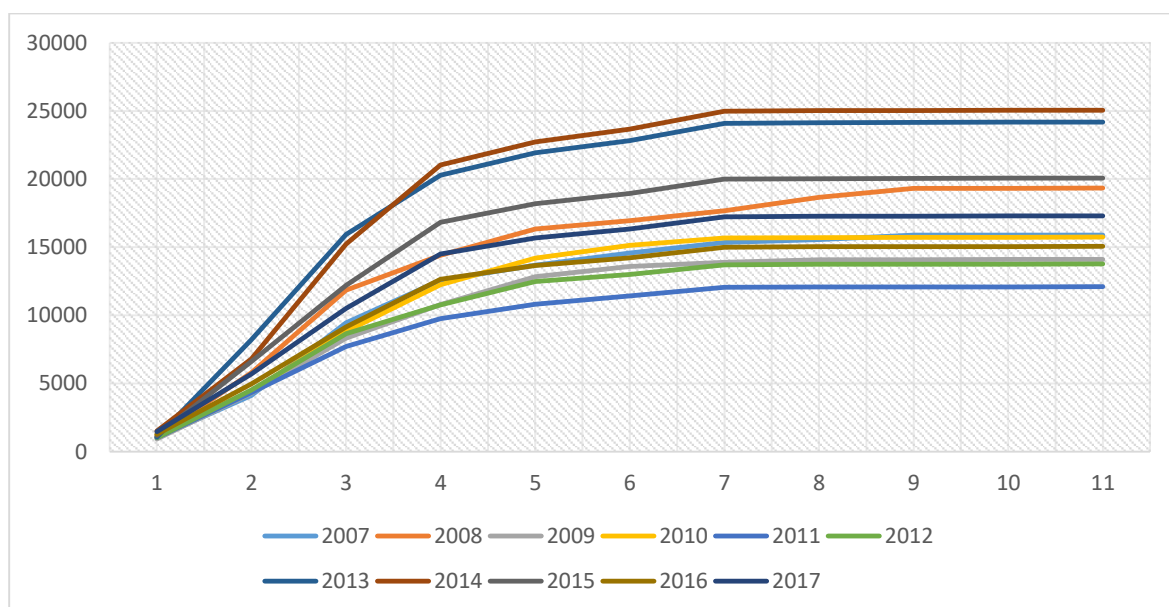


Figure 22 : Evolution des règlements cumulés des sinistres estimés par CLP par le dernier facteur

| An | 2007 | 2008 | 2009 | 2010 | 2011 | 2012 | 2013 | 2014 | 2015 | 2016 | 2017 |
|----------------|------|------|------|------|------|-------|--------|--------|--------|---------|---------|
| R _i | - | 6,5 | 16,2 | 28,4 | 44,2 | 769,7 | 2249,3 | 4030,0 | 7873,8 | 10099,3 | 15813,9 |

Tableau 33: les réserves annuelles estimé par CLP3

| An | 2018 | 2019 | 2020 | 2021 | 2022 | 2023 | 2024 | 2025 | 2026 | 2027 |
|-----------|----------|----------|---------|--------|---------|--------|------|-------|-------|------|
| Cash-flow | 16419,48 | 11903,76 | 7149,12 | 2857,8 | 1506,12 | 974,16 | 66 | 30,36 | 18,48 | 5,28 |

Tableau 34 : les cash-flows estimé pas CLP3

Ainsi, la réserve pour sinistres à payer donnée par cette variante de Chain Ladder est de **40 931** ; et le BE égale à **38 867**.

1.2.4 Comparaison des résultats des méthodes de Chain Ladder

A ce stade, une petite comparaison des résultats obtenus par les différentes méthodes s'impose. Effectivement, les graphes suivants sont un récapitulatif des différentes provisions fournies selon chaque méthode :

- ✓ Pour les provisions PSAP :

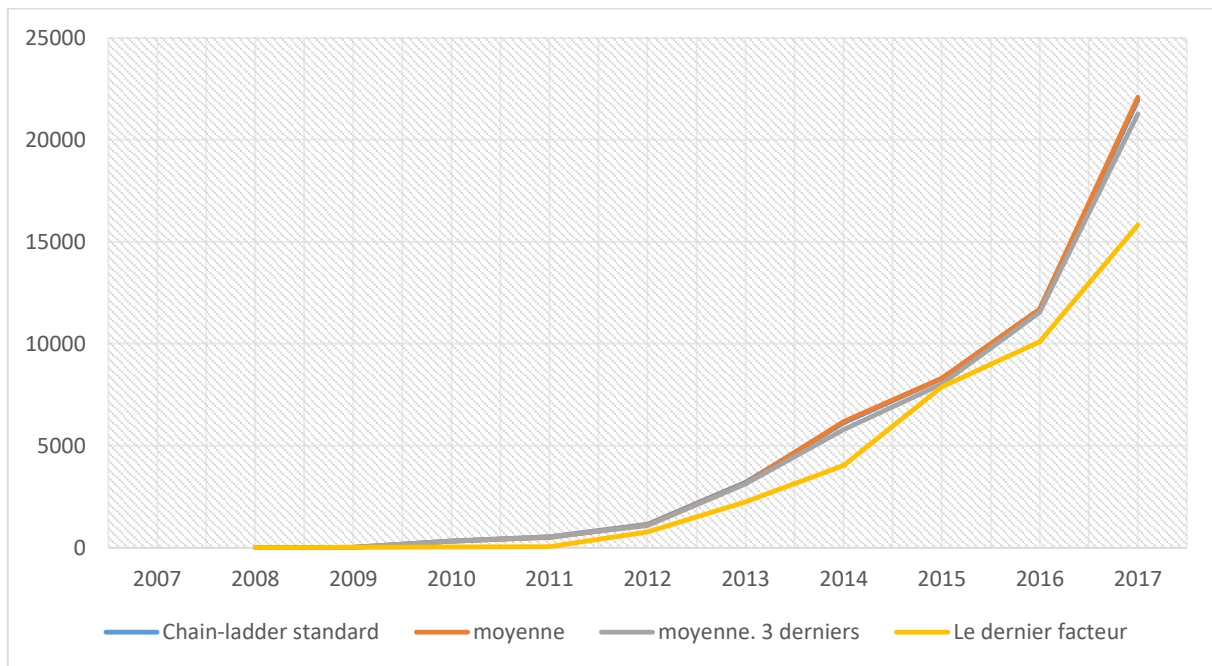


Figure 23 : comparaison des flux de réserves estimés par des méthodes Chain Ladder

Un bref coup d’œil sur le figure ci-dessus laisse entrevoir la surestimation des flux des réserves par la variante de CL Moyenne, par rapport aux autres variantes, le diagramme suivant quantifier ce constat :

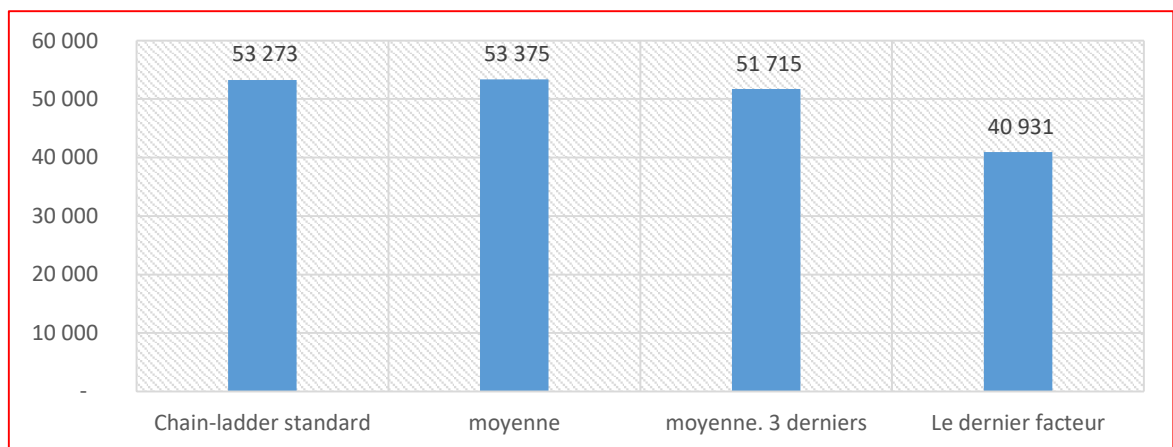


Figure 24 : Récapitulatif des résultats des estimations des PSAP par des méthodes Chain Ladder

Nous présentons dans ce diagramme quelques statistiques descriptives de ces quatre estimations :

| | |
|-------------------|----------|
| Provision moyenne | 49823,60 |
| Écart-type | 5176,14 |
| cv | 10,39% |

Tableau 35: Les caractéristiques statistiques des résultats Chain Ladder pour les réserves

✓ Pour les cash-flows :

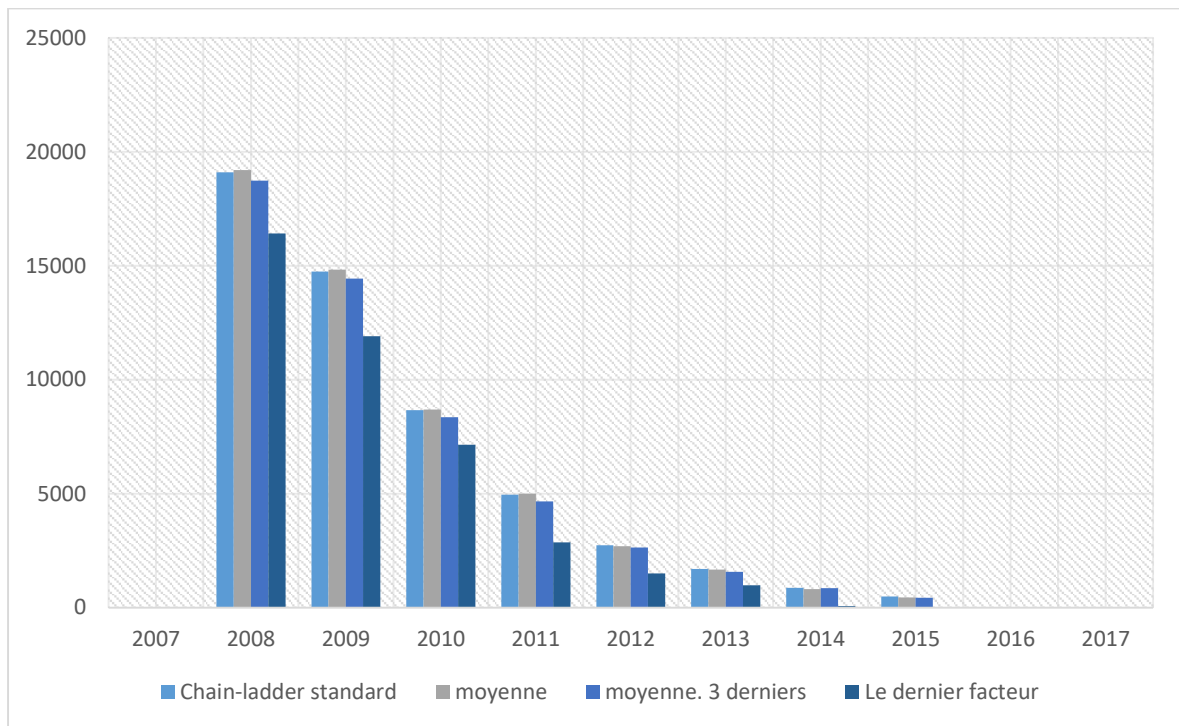


Figure 25 : comparaison des cash-flows estimés par des méthodes Chain Ladder

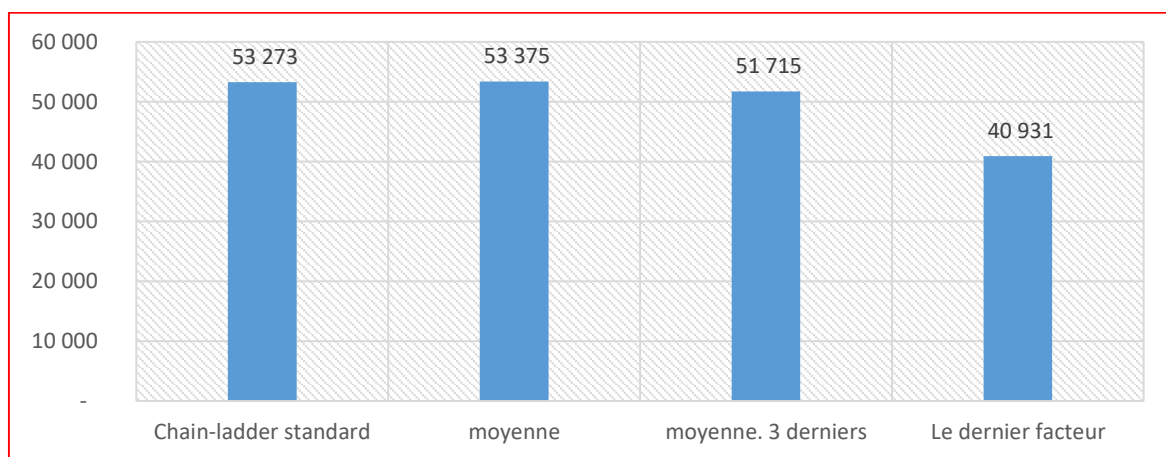


Figure 26 : Récapitulatif des résultats des estimations des BE par des méthodes Chain Ladder

Le diagramme suivant présente quelques statistiques descriptives de ces quatre estimations du BE :

| | |
|-------------------|-----------|
| Provision moyenne | 49 824 |
| Écart-type | 5176,1542 |
| cv | 10,39% |

Tableau 36 : Les caractéristiques statistiques des résultats Chain Ladder pour les BE

Nous remarquons d'après ces résultats que les provisions moyennes, soit des PSAP ou celles du BE, sont statistiquement presque égale. Même remarque pour l'écart type et le coefficient de variation (cv). Ce résultat intéressant, nous permet au cas du besoin

d'approcher le BE par les réserves. Mais cela reste une hypothèse à tester. Néanmoins, nous espérons que cette conclusion et les nombreuses questions qu'elle soulève fourniront une bonne base de départ pour de futures études et recherches.

II. Les méthodes autorégressives

Les méthodes de Chain Ladder supposent à l'unanimité que pour une année de déroulement fixée j dans $[0, n-1]$, le nuage des points $((C_{ij}, C_{i,j+1}))$, où i se trouve dans l'intervalle $[0, n-j-1]$ forme une droite passant par l'origine. Il s'avère en effet que cette hypothèse est assez forte et qu'elle ne peut être vérifiée sur tous les jeux de données.

Pour alléger cette supposition contraignante et pour élargir le nombre des bases de données sur lesquelles nous pouvons travailler, les méthodes autorégressives supposent judicieusement que pour un j fixé, $C_{i,j+1}$ est une fonction affine de C_{ij} .

II.1 La méthode de London Chain

Ce modèle suppose, contrairement à Chain Ladder, que les points $(C_{ij}, C_{i,j+1})$, sont sensiblement alignés autour d'une droite qui ne passe pas obligatoirement par l'origine. Cela signifie que la dynamique des $C_{i,j+1}$ est de la forme suivante : $c_{i,j+1} = f_j * c_{ij} + a_j$, avec i appartenant à $[0, n-j-1]$.

Cette relation s'assimile à une relation de régression linéaire simple où :

- f_j : est le paramètre de la régression linéaire simple.
- a_j : est la constante de régression.

Donc pour estimer le couple (f_j, a_j) , nous procédons par la méthode des Moindres Carrés Ordinaires (MCO). Dans ce sens, nous devons minimiser la fonction suivante :

$$S = \sum_{i=1}^{n-j} (c_{i,j+1} - a_j - f_j * c_{ij})^2$$

Ainsi les estimations de (f_j, a_j) , sont données en considérant que :

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n-j} (c_{i,j+1} - a_j - f_j * c_{ij}) = 0 \\ \sum_{i=1}^{n-j} c_{ij} (c_{i,j+1} - a_j - f_j * c_{ij}) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sum_{i=1}^{n-j} c_{i,j+1} - (n-j) * \hat{a}_j - \hat{f}_j * \sum_{i=1}^{n-j} c_{ij} = 0 \\ \sum_{i=1}^{n-j} c_{ij} c_{i,j+1} - \hat{a}_j * \sum_{i=1}^{n-j} c_{ij} - \hat{f}_j * \sum_{i=1}^{n-j} c_{ij}^2 = 0 \end{cases}$$

Nous déduisons alors les valeurs des estimateurs (\hat{f}_j, \hat{a}_j) :

$$\hat{f}_j = \frac{\frac{1}{n-j} \sum_{i=1}^{n-j} c_{ij} c_{i,j+1} - \bar{c}_j \bar{c}_{j+1}}{\frac{1}{n-j} \sum_{i=1}^{n-j} c_{ij}^2 - \bar{c}_j^2} \quad \text{et} \quad \hat{a}_j = \bar{c}_{j+1} - \hat{f}_j * \bar{c}_j$$

Avec :
$$c_j^{-(j)} = \frac{1}{n-j} \sum_{i=1}^{n-j} c_{ij}$$
 et
$$c_{j+1}^{-(j)} = \frac{1}{n-j} \sum_{i=1}^{n-j} c_{i,j+1}$$

En outre, on a convenu du fait que le dernier couple (f_{n-1}, a_{n-1}) ne respecte pas les formules de calcul ci-dessus. Donc, par convention $a_{n-1}=0$ et $f_{n-1} = \frac{c_n^{-(j)}}{c_{n-1}^{-(j)}}$

Le tableau suivant est un récapitulatif des valeurs des couples (f_j, a_j) , pour chaque j donné :

| j | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|-------|---------|--------|---------|---------|--------|--------|----------|----------|--------|--------|
| f_j | 3,1531 | 1,9963 | 1,3303 | 1,0161 | 1,0232 | 1,0295 | 1,2209 | 1,1327 | 1,0000 | 1,0003 |
| a_j | 1357,02 | 3,46 | -237,33 | 1080,60 | 306,66 | 134,87 | -2351,72 | -1371,14 | 12,00 | 0,00 |

Tableau 37 : Les valeurs des couples (f_j, a_j) pour la méthode de London Chain

Après avoir calculé les couples (f_j, a_j) , nous complétons le triangle de paiement en se basant sur l'équation du modèle déjà motionnée et nous en déduits les évolutions des règlements cumulés illustrés dans le graphe suivant :

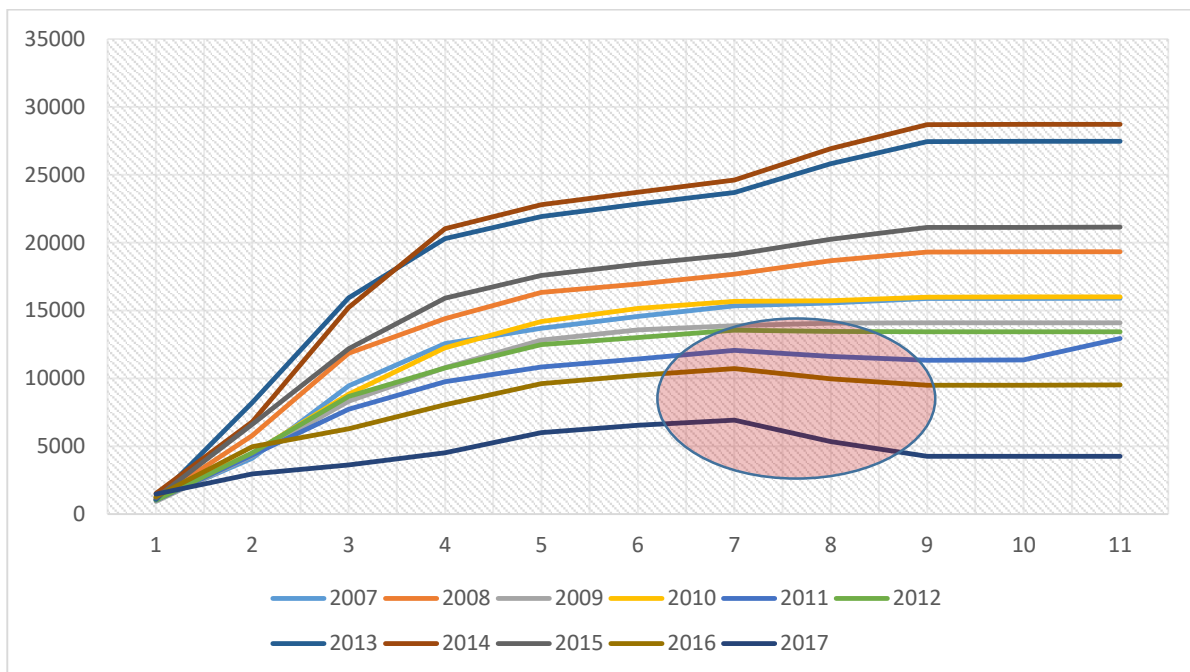


Figure 27 : Evolution des règlements cumulés des sinistres par années de survenance estimés par LC

Nous constatons que les valeurs des règlements cumulés de la 7ème année de développement sont inférieures aux valeurs de la 6ème année pour l'année de survenance 2011, 2016 et 2017, ce qui ne respecte pas le principe du triangle cumulé qui suppose que les valeurs de chaque ligne augmentent en passant d'une colonne à une autre.

Pour l'estimation des réserves, cette méthode nous donne un résultat de **31 161** ; Quant au BE, la valeur est à la hauteur de **29 841**

II.2 La méthode de London Pivot

Proposée par E. Straub pour réduire le paramétrage de la modélisation London Chain, ce modèle intermédiaire entre les modèles Chain Ladder et London Chain suppose l'existence de facteurs f_j d'un paramètre « a » indépendant de j qui vérifie pour chaque valeur i de l'intervalle [0, n-1] l'équation suivante :

$$c_{i,j+1} + a = f_j(c_{ij} + a) \text{ pour } i = 0, \dots, n - j - 1$$

Ce modèle est estimé par moindres carrés sur les données du triangle supérieur, en minimisant :

$$\Delta = \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{i=0}^{n-j-1} [(c_{i,j+1} + a) - f_j(c_{ij} + a)]^2$$

Ce problème, sans solution analytique, ce qui implique la mise en œuvre d'un algorithme itératif. Pour en résoudre le problème nous avons fait recours au solveur d'Excel qui utilise la méthode de Newton Raphson (voir annexe 6).

et les réserves qui en découlent sont :

| Année de survenance | Ri |
|---------------------|--------|
| 2007 | - |
| 2008 | 5 |
| 2009 | 21 |
| 2010 | 347 |
| 2011 | 700 |
| 2012 | 1 300 |
| 2013 | 2 016 |
| 2014 | 6 520 |
| 2015 | 6 520 |
| 2016 | 11 966 |
| 2017 | 16 229 |
| Total | 45 625 |

Tableau 38: Les réserves données par la méthode de London Pivot

La réserve pour sinistres à payer donnée par cette méthode est donc de **45 625**. Le BE estimé par cette méthode égal **42 982**.

III. Comparaison des résultats issus de chacune des méthodes déterministes et d'inventaire

Avant tout développement, le mieux serait de dresser un tableau récapitulatif de l'ensemble des réserves estimées par les méthodes et les techniques vues précédemment.

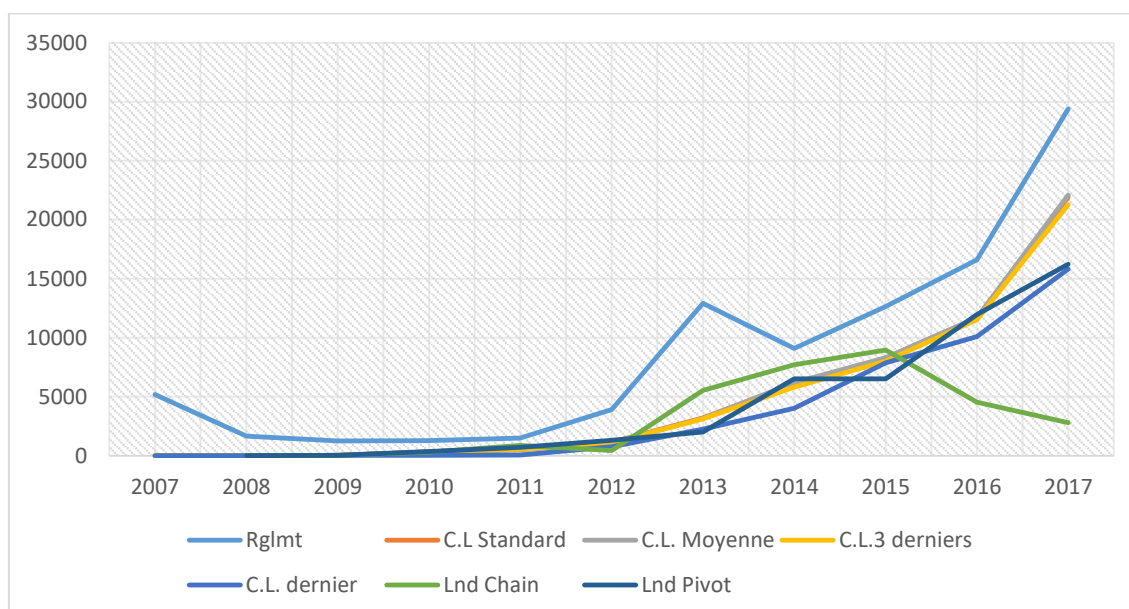


Figure 28 : Représentation graphique des réserves par années de survénance

L'analyse du graphique ci-dessus permet d'effectuer des comparaisons entre tous les modèles étudiés. Ainsi, les réserves suivent une tendance haussière.

La méthode de Chain Ladder standard et ses variantes donnent, des estimations bien plus optimistes, de l'ordre de 50 161 en moyenne.

La technique de London Chain donne un résultat très optimiste. Par ailleurs, toutes les méthodes déterministes, nous donnent des estimations moins importantes que la réserve réglementaire.

Pour plus de précision quant à la dispersion de l'ensemble des réserves calculées jusqu'ici, nous présentons les caractéristiques suivantes :

| | |
|--------------------------|--------|
| Moyenne | 53 062 |
| Ecart-type | 20 300 |
| Coefficient de variation | 38% |

Tableau 39 : Les caractéristiques de dispersion pour l'ensemble des méthodes déterministes

Nous disposons ainsi d'un jeu de provisions estimées. Le choix de la provision ultime dont nous tiendrons compte dépend de plusieurs considérations comme la définition de la problématique traitée. En effet, selon l'objectif ciblé, le BE ou la réserve choisie peut être la moyenne de toutes les estimations, la moyenne tronquée de la plus petite ou de la plus élevée... ou encore reposer sur l'expérience de l'actuaire.

Le large recours aux méthodes de Chain Ladder se justifie uniquement par le fait que le Projet de circulaire SBR mit en avant cette méthode. Chain Ladder doit sa popularité dans le monde de l'actuariat à sa capacité de manipulation des données triangulaires rien qu'en faisant appel à une régression linéaire simple.

Par ailleurs, bon nombre de méthodes déterministes font de la régression linéaire un pilier majeur. Ainsi, ces méthodes supposent que les éléments du triangle de liquidation

revêtent une certaine régularité, chose qui est nuancée dans le monde réel. En effet, plus la branche étudiée est à déroulement lent, plus il devient très difficile d'affirmer de telles hypothèses et de baser ses calculs sur des régressions simples. Cela peut engendrer de grands risques de paramétrisation entraînant des estimations moins robustes.

De ce fait, quoi que simples, les méthodes déterministes présentent plusieurs inconvénients qui limitent leur performance. En voici quelques-uns :

- ⤴ Elles ne sont pas habilitées à détecter les irrégularités potentielles du triangle étudié.
- ⤴ Elles rendent impossible toute prise en compte d'un changement de jurisprudence, une inflation non-constante, une innovation quant à la gestion de la sinistralité...
- ⤴ Elles ne permettent pas la modélisation par une loi de probabilité pour la provision globale.

Ces problèmes et bien d'autres poussent l'actuaire à chercher une méthodologie plus rigoureuse. C'est pourquoi et afin de bien cerner les incertitudes inhérentes à la procédure de provisionnement, il est nécessaire d'avoir recours aux méthodes stochastiques. En effet, ces dernières permettent, en plus d'une modélisation probabiliste de la réserve ultime, de quantifier la marge d'erreur existante pour chaque estimation faite.

Chapitre V. Les méthodes stochastiques pour le calcul des provisions

Ce chapitre est dédié aux méthodes stochastiques pour le calcul de la PSAP. Il est subdivisé en plusieurs sections, chacune traitant d'un modèle stochastique à part. Le recours aux techniques stochastiques pour le calcul des provisions en assurance est très recommandé comme nous l'avons expliqué. Ces méthodes requièrent une application de notions probabilistes et statistiques avancées. De ce fait, elles relèvent des compétences de l'actuaire.

L'adoption des modèles stochastiques en tant qu'outil efficace d'estimation de la réserve pour sinistre vient en réponse aux normes modernes d'évaluation du patrimoine d'une compagnie d'assurances. C'est dans ce sens qu'on parle du principe du « Best Estimate » des engagements techniques...

Les techniques probabilistes viennent certainement pallier à quelques lacunes présentes dans l'application des méthodes déterministes. En effet, l'usage des méthodes de calcul à caractère stochastique permet entre autres de quantifier quelques erreurs de prédiction, d'estimer plusieurs paramètres de provisionnement appropriés au type d'interprétation que l'on veut établir... Le plus important est qu'une méthode stochastique donne généralement une explication logique des procédés des techniques déterministes.

Classiquement, une technique stochastique part d'une ou plusieurs hypothèses faites sur la nature des données pour aboutir à un ensemble d'estimations des paramètres de provisionnement convoités. Les données, à savoir les éléments du triangle de liquidation sont pris pour des variables aléatoires. Nous passons généralement par l'attribution d'une distribution à la variable aléatoire provision notée R . Il se pourrait également que le modèle soit non paramétrique dans la mesure où il n'a pas recours à la loi de R . Bien entendu, une méthode stochastique s'achève sur une vérification des hypothèses de départ pour contrôler la robustesse du modèle, notamment grâce à une analyse des résidus...

Dans ce qui suit, nous allons essayer d'appliquer les méthodes stochastiques qui nous semblent les plus répandues et les plus pertinentes compte tenu des données dont nous disposons.

I. Le modèle de Mack

De manière très simple, le modèle de Mack n'est autre que le formalisme probabiliste qui justifie la technique déterministe Chain Ladder Standard. L'élaboration de ce modèle est plus ou moins récente ; elle remonte à l'année 1993. Elle est tributaire du grand souci des chercheurs de fournir un modèle stochastique dont les résultats coïncident avec ceux de la méthode de Chain Ladder.

Comme nous allons voir par la suite, ce modèle revêt un aspect conditionnel dans le sens où l'on construit les éléments manquants tout en tenant compte du triangle supérieur. De surcroît, ce modèle ne fait aucune hypothèse quant à la distribution qui s'ajuste aux données et par conséquent sur celle qui sied à la variable aléatoire provision globale R.

I.1 Les hypothèses sous-jacentes au modèle

Le modèle de Mack repose sur quelques hypothèses de départ. Elles sont au nombre de trois et peuvent être présentées ainsi :

- H1 : Hypothèse sur l'indépendance entre les lignes du triangle de liquidation. Ainsi, C_{ij} est indépendant de $C_{i'j}$ pour $i \neq i'$. Cette hypothèse peut être remise en question, notamment en cas d'un grand changement dans la gestion des sinistres d'une année à l'autre...
- H2 : Le processus $(C_{ij})_{j>0}$ est markovien. Nous introduisons les facteurs de développement déjà vus dans la méthode de Chain Ladder Standard f_j et nous avons, pour chaque $j=0, \dots, n-1$ un f_j tel que pour tout i allant de 0 à n :

$$E(C_{i,j+1} / C_{i1}, \dots, C_{ij}) = f_j C_{ij}$$

- H3 : Hypothèse relative à la volatilité des données. Le modèle suppose que pour une année d'origine définie nous avons, pour tout $j=0, \dots, n-1$ nous avons un $(\sigma_j)^2$ tel que :

$$V(C_{i,j+1} / C_{i1}, \dots, C_{ij}) = \sigma_j^2 C_{ij}$$

Cette égalité s'écrit $V(f_j / C_{i1}, \dots, C_{ij}) = \frac{\sigma_j^2}{C_{ij}}$ en termes de facteurs individuels.

Ces trois hypothèses conduisent au modèle hypothétique suivant :

$$C_{i,j+1} = f_j C_{ij} + \sigma_j \sqrt{C_{ij}} + \varepsilon_{ij} \text{ avec } \varepsilon_{ij} \text{ i.i.d et centrés.}$$

Ce modèle donne l'occasion pour estimer ses coefficients à l'aide des moindres carrés pondérés. Dans ce cas, nous serons amenés à minimiser la somme des carrés des écarts pondérés $\sum_{i=0}^{n-j-1} \frac{1}{C_{ij}} (C_{i,j+1} - f_j C_{ij})^2$.

I.2 L'estimation des paramètres du modèle

Après avoir exposé les hypothèses du modèle, il convient d'explicitier par la suite les résultats qui en découlent.

Notons $T = [C_{ij} / i+j \leq n]$ le triangle supérieur ou bien le triangle des valeurs observées. Les éléments diagonaux sont également compris dans T . Nous avons donc : $E(C_{in}/T) = f_{n-1} * f_{n-2} * \dots * f_{n-i} * C_{i,n-i}$. De façon générale, pour $i+j > n$,

$$E(C_{ij}/T) = f_{j-1} * f_{j-2} * \dots * f_{n-i} * C_{i,n-i}.$$

Egalement, nous avons pour tout $j=0 \dots n-1$, un estimateur sans biais de f_j est \hat{f}_j tel que : $\hat{f}_j = \frac{\sum_{i=0}^{n-j-1} C_{i,j+1}}{\sum_{i=0}^{n-j-1} C_{ij}}$. Les \hat{f}_j sont non corrélés. L'absence du biais permet de conclure qu'à partir de l'expression des espérances déjà établie : $\widehat{C}_{ij} = \hat{f}_{j-1} * \hat{f}_{j-2} * \dots * \hat{f}_{n-i} * C_{i,n-i}$ pour $i+j > n$ ou encore

$$\widehat{C}_{in} = \hat{f}_{n-1} * \hat{f}_{n-2} * \dots * \hat{f}_{n-i} * C_{i,n-i}.$$

Par extension de ce constat, nous écrivons encore $\widehat{R}_i = \widehat{C}_{in} - C_{i,n-i}$ et d'onc $\widehat{R} = \sum_{i=0}^n \widehat{R}_i$ au lieu des expressions avec les espérances conditionnelles sur T .

L'application numérique des résultats ci-dessus donne les mêmes aboutissements chiffrés que ceux de la méthode de Chain Ladder standard.

Un estimateur non-biaisé de $(\widehat{6}_j)^2$ est : $(\widehat{6}_j)^2 = \frac{1}{n-j-1} \sum_{i=0}^{n-j-1} C_{ij} \left(\frac{C_{i,j+1}}{C_{ij}} - \hat{f}_j \right)^2$

Pour le cas à problème de $j=n-1$, où l'estimateur proposé ne donne plus de valeur valable, Mack a proposé la formule alternative suivante :

$$(\widehat{6}_{n-1})^2 = \min \left(\left(\frac{\widehat{6}_{n-2}^2}{\widehat{6}_{n-3}^2} \right)^2, \widehat{6}_{n-2}^2, \widehat{6}_{n-3}^2 \right)$$

| j | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---------------------|---------|--------|-------|-------|------|------|-------|------|------|---|
| $(\widehat{6}_j)^2$ | 1316.34 | 131.78 | 39.53 | 20.75 | 2.05 | 2.82 | 11.05 | 7.06 | 4.51 | 0 |

Tableau 40 : Les valeurs des estimateurs non-biaisé de $(\widehat{6}_j)^2$

I.3 L'estimation des erreurs de prédiction

I.3.1 Le formalisme mathématique

Selon le besoin, nous serons amenés à calculer un type précis d'erreur de prédiction ou d'estimation. Les plus courantes de ces erreurs sont la moyenne quadratique des écarts de prédiction MSEP et l'erreur standard de prédiction SEP ou encore l'erreur standard relative.

De façon générale, si $\hat{\pi}$ est l'estimation du paramètre π , nous définissons les erreurs relatives à cette estimation à travers les formules qui suivent :

- $MSEP(\hat{\pi}) = E(\hat{\pi} - \pi)^2$
- $SEP(\hat{\pi}) = \sqrt{MSEP(\hat{\pi})}$
- $SER(\hat{\pi}) = \frac{SEP(\hat{\pi})}{\hat{\pi}}$

Le plus important est, bien entendu, de pouvoir calculer les erreurs d'estimation de la provision globale. Pour ce faire, nous devons calculer l'erreur d'estimation de la provision pour

chaque année d'origine. Ainsi, si nous posons $\widehat{C}_{i,n-i} = C_{i,n-i}$ nous aurons les deux résultats suivant :

1.
$$\widehat{MSEP}(\widehat{R}_i) = \widehat{C}_{in}^2 \sum_{j=n-i}^{n-1} \frac{(\widehat{\sigma}_j)^2}{(f_j)^2} \left[\frac{1}{\widehat{C}_{ij}} + \frac{1}{\sum_{k=0}^{n-j-1} c_{kj}} \right]$$
2.
$$\widehat{MSEP}(\widehat{R}) = \sum_{i=1}^n \left[\widehat{MSEP}(\widehat{R}_i) + \widehat{C}_{in} (\sum_{k=i+1}^n \widehat{C}_{kn}) \sum_{j=n-i}^{n-1} \frac{2(\widehat{\sigma}_j)^2}{(f_j)^2 \sum_{k=0}^{n-j} c_{kj}} \right]$$

Puisque $\widehat{R}_i = \widehat{C}_{in} - C_{i,n-i}$ et $R_i = C_{in} - C_{i,n-i}$, donc $\widehat{R}_i - R_i = \widehat{C}_{in} - C_{in}$. Les biais des deux estimateurs étant ainsi égaux, nous concluons directement que $\widehat{MSEP}(\widehat{R}_i) = \widehat{MSEP}(\widehat{C}_{in})$.

I.3.2 Application sur les estimations des réserves annuelles

| | $\widehat{MSEP}(\widehat{R}_i)$ | $\widehat{Se}(\widehat{R}_i)$ | $\widehat{SeR}(\widehat{R}_i)$ |
|------|---------------------------------|-------------------------------|--------------------------------|
| 2007 | - | - | - |
| 2008 | 0,55 | 0,74 | 0,15 |
| 2009 | 3,45 | 1,86 | 0,14 |
| 2010 | 55123,93 | 234,78 | 0,92 |
| 2011 | 124355,69 | 352,64 | 0,87 |
| 2012 | 166696,65 | 408,29 | 0,47 |
| 2013 | 380354,47 | 616,73 | 0,25 |
| 2014 | 828925,99 | 910,45 | 0,20 |
| 2015 | 1184588,69 | 1088,39 | 0,17 |
| 2016 | 2274917,17 | 1508,28 | 0,17 |
| 2017 | 19889861,70 | 4459,81 | 0,27 |

Tableau 41: Les erreurs de prédiction de l'estimation des réserves pour le modèle de Mack

La lecture directe du tableau des erreurs ci-dessus permet d'affirmer que le niveau du risque d'estimation des réserves est largement acceptable. Cela est surtout constatable à partir des valeurs prises par l'erreur standard relative des diverses réserves annuelles qui ne dépassent pas les 27% que pour les trois années : 2010, 2011 et 2012.

Nous pouvons effectuer un choix quant à la distribution de la variable aléatoire réelle R_i . Cela dit, ce choix demeure plus ou moins arbitraire : Il se pourrait bien que la loi votée ne soit pas aussi bien ajustée aux données. Nous préférons donc travailler à l'aide d'une approche non paramétrique.

Cependant, pour pouvoir estimer un intervalle de confiance pour les différentes réserves, Nous disposons une distribution normale et nous avons :

$$IC_{5\%}(\widehat{R}_i) = [\widehat{R}_i - 2 * SEP(\widehat{R}_i), \widehat{R}_i + 2 * SEP(\widehat{R}_i)]$$

Le tableau suivant fournit les différents intervalles de confiance au seuil de 5% pour toutes les réserves annuelles :

| i | R_i | borne inf | borne sup |
|------|----------|-----------|-----------|
| 2007 | - | - | - |
| 2008 | 6,42 | 4,49 | 8,35 |
| 2009 | 17,36 | 12,55 | 22,17 |
| 2010 | 337,94 | -269,50 | 945,37 |
| 2011 | 536,87 | -375,48 | 1449,22 |
| 2012 | 1147,21 | 90,90 | 2203,53 |
| 2013 | 3211,82 | 1616,22 | 4807,43 |
| 2014 | 6116,86 | 3761,33 | 8472,38 |
| 2015 | 8285,61 | 5469,73 | 11101,48 |
| 2016 | 11678,99 | 7776,76 | 15581,22 |
| 2017 | 21934,26 | 10395,85 | 33472,67 |

Tableau 42: Les intervalles de confiance au seuil de 5% des réserves annuelles pour le modèle de Mack

L'hypothèse faite sur la distribution des R_i nous fait tomber dans le cas où une partie de l'intervalle construit est négative puisque le domaine de la loi normale est l'ensemble des nombres réels. Cependant, nous pourrions détourner ce problème en munissant R_i d'une loi Log-normale.

I.3.3 Application sur l'estimation de la réserve globale

A l'instar de l'étude faite pour les réserves annuelles, nous analysons les erreurs pour l'estimation de la réserve globale R et nous construisons l'intervalle de confiance qui s'y rapporte :

| \hat{R} | MSEP(\hat{R}) | Se(\hat{R}) | SeR(\hat{R}) | borne inf | borne sup |
|-----------|-------------------|-----------------|------------------|-----------|-----------|
| 53273,35 | 38513446,26 | 7130,06 | 0,18 | 39013,23 | 67533,46 |

Tableau 43: Les erreurs de l'estimation de la réserve globale pour le modèle de Mack

L'estimation de la réserve globale R est très satisfaisante. L'erreur standard relative étant de 13,38%, nous pouvons largement affirmer que l'on est en présence d'une bonne approximation de la valeur réelle de la provision pour sinistres à constituer.

I.4 La validation des hypothèses du modèle

La deuxième hypothèse du modèle est vérifiée de la même manière que pour la méthode de Chain Ladder Standard. Autrement dit, L'hypothèse H2 peut être vue comme une hypothèse de régression linéaire entre les deux séries successives C_j et C_{j+1} . Cette droite ne doit pas avoir de constante. Sa courbe doit donc passer par l'origine. Ainsi, nous pouvons nous contenter d'une vérification graphique comme ce fût le cas lors de l'application de la méthode Chain Ladder (voir annexe 2).

1.4.1 La vérification de l'hypothèse d'indépendance H1 par le test non paramétrique de la médiane

Pour tester l'hypothèse H1, nous procédons par un test non paramétrique se basant sur le D-triangle et les médianes des éléments des diagonales. En effet, ce test consiste à calculer la médiane pour chaque colonne du D-triangle.

Notons par A_j le vecteur qui regroupe les éléments de la $j^{\text{ème}}$ diagonale du D-triangle pour $j=0... n$.

Il faut ensuite compter le nombre des éléments du vecteur A_j supérieurs à la médiane déjà calculée ainsi que le nombre des éléments du vecteur A_j qui lui sont inférieurs. Nous notons respectivement ces deux nombres par S_j et L_j .

On note également $Z_j = \min(S_j, L_j)$ et nous calculons l'espérance et la variance de Z_j par les formules suivantes :

- $E(Z_j) = \frac{n_j}{2} - \binom{n_j-1}{m_j} \frac{n_j}{2^{n_j}}$
- $\text{Var}(Z_j) = \frac{n_j(n_j-1)}{4} - \binom{n_j-1}{m_j} \frac{n_j((n_j-1))}{2^{n_j}} + E(Z_j) - E(Z_j)^2$

Avec $n_j = S_j + L_j$ et $m_j = \frac{n_j-1}{2}$

Prenons Z la somme des Z_j pour $j=1...n$. Donc l'espérance de Z est la somme des espérances des Z_j et la variance de Z est, sous l'hypothèse d'indépendance, égale est la somme des variances des Z_j .

nous suppose que Z suit une distribution normale et on accepte l'hypothèse au seuil 5% si Z appartient à l'intervalle $IC_{5\%}(Z) = [E(Z) - 1.96\sqrt{\text{VAR}(Z)}, E(Z) + 1.96\sqrt{\text{VAR}(Z)}]$.

| DIAG | S_j | L_j | Z_j | $E(Z_j)$ | $\sqrt{\text{VAR}(Z_j)}$ |
|-------|-------|-------|-----------|--------------|--------------------------|
| 1 | 0 | 4 | 0 | 0,50 | 0,25 |
| 2 | 6 | 2 | 2 | 0,75 | 0,19 |
| 3 | 3 | 0 | 0 | 1,25 | 0,44 |
| 4 | 3 | 1 | 2 | 1,25 | 0,44 |
| 5 | 2 | 7 | 2 | 2,06 | 0,62 |
| 6 | 3 | 3 | 3 | 2,06 | 0,62 |
| 7 | 3 | 3 | 3 | 2,06 | 0,62 |
| 8 | 3 | 0 | 0 | 2,91 | 0,80 |
| 9 | 3 | 3 | 3 | 3,27 | 0,74 |
| total | | | 15 | 16,11 | 4,72 |

Tableau 44: Le test de la médiane pour le modèle de Mack

L'intervalle de confiance est donc [11,39 ; 20,83] et $Z=15$ appartient à ce dernier. Nous acceptons donc l'hypothèse de la non-signification de l'effet de l'année de survenance.

1.4.2 La vérification de l'hypothèse de volatilité H3 grâce aux résidus normalisés

A ce stade, on procède à la vérification de l'hypothèse H3. Pour ce faire, nous avons recours aux résidus normalisés $r_{ij} = \frac{C_{i,j+1} - \hat{f}_j C_{ij}}{\sqrt{C_{ij}}}$ pour $j=0\dots n-1$ et $i=0\dots n-j-1$. Nous traçons par la suite le graphe de ces résidus. Pour valider l'hypothèse, la courbe obtenue (voir annexe 3) ne doit pas laisser entrevoir l'existence d'une composante déterministe et surtout une tendance.

Nous arrêtons la génération des graphes pour $j=7$ car à partir de ce stade où le diagramme regroupe trois points, nous ne pouvons plus juger de la tendance du nuage créé.

Dans chacun des nuages de points représentés, nous remarquons un parfait éparpillement et donc l'absence de toute tendance, excepté le dernier graphe où le pseudo-alignement des points pourrait s'assimiler à une tendance linéaire. Conséquemment, nous acceptons l'hypothèse H3.

II. Le calcul de provisions par la modélisation GLM

II.1 Présentation générale des modèles GLM

Les actuaires se sont longtemps limités à utiliser le modèle linéaire gaussien pour quantifier l'impact de variables explicatives sur les montants de sinistres.

Ce dernier impose cependant une série de limitations peu conciliables avec la réalité des coûts de sinistres :

- La densité de probabilité est gaussienne ;
- La moyenne est une fonction linéaire des variables explicatives.

Les modèles linéaires généralisés (GLM pour Generalized Linear Models) constituent une classe intéressante de méthodes statistiques. Ceux-ci généralisent les modèles linéaires traditionnels de deux manières.

Premièrement, au lieu de supposer la distribution Normale, les GLM travaillent avec une classe de distributions, qui contient en particulier les distributions Normale, Poisson et Gamma. Deuxièmement, au sein des GLM, c'est une transformation monotone de la moyenne qui est une fonction linéaire des variables explicatives, et non la moyenne elle-même.

Les GLM permettent de s'affranchir de l'hypothèse de normalité d'une part, et de la linéarité de la moyenne en les variables explicatives d'autre part.

Les avantages précités et d'autres encore font des modèles linéaires généralisés l'un des choix de modélisation statistique les plus populaires, notamment en matière de provisionnement.

II.2 Formalisme mathématique et construction du modèle

II.2.1 Les composantes du modèle

La construction d'un modèle linéaire généralisé requiert la disposition puis l'assemblage de deux composantes :

- La partie linéaire du modèle qui se résume en l'estimateur linéaire : $\omega = X\hat{\beta}$.
- La fonction lien notée g qui décrit l'obtention de \hat{Y} , la valeur prévue de Y , à partir de l'estimateur linéaire : $g(\hat{Y}) = \omega$.

1) Composante aléatoire

On dispose de v.a.r "réponses" $Y_i (i=1, \dots, v)$ indépendantes dont la loi de probabilité est de type « exponentiel ». La "densité" de $Y_i (i=1, \dots, v)$ a pour expression :

$$f(y_i; \theta_i, \phi) = \exp\left\{\left[\theta_i x_i - b(\theta_i)\right] / \phi + c(x_i, \phi)\right\}$$

où θ_i est un paramètre réel, appelé paramètre naturel, $\phi > 0$ (ϕ éventuellement donné) est un paramètre de dispersion, indépendant de i . b et c sont des fonctions spécifiques de la distribution, b étant « régulière ».

On montre que :

$$\mu_i = E(Y_i) = b'(\theta_i) \quad \text{et} \quad V(Y_i) = \phi b''(\theta_i) = \phi b''[b^{-1}(\mu_i)] = \phi V(\mu_i)$$

La fonction V est appelée fonction variance de la distribution et joue un rôle essentiel dans ces modèles.

On peut de plus obtenir les expressions des moments d'ordre supérieur de Y_i en fonction de V . Par exemple pour le moment centré d'ordre 3 et le coefficient d'asymétrie sont comme suit :

$$\begin{aligned} \mu_3(Y_i) &= \phi^2 V(\mu_i) V'(\mu_i) \\ \gamma_1(Y_i) &= \frac{\mu_3(Y_i)}{[V(Y_i)]^{3/2}} = \sqrt{\phi} \frac{V'(\mu_i)}{[V(\mu_i)]^{1/2}} \end{aligned}$$

Il est possible de prendre en compte des pondérations données $\omega_i (i=1, \dots, v)$. On remplacerait ϕ par $\frac{\phi}{\omega_i}$ dans l'expression de la densité et des résultats postérieurs.

2) Composante systématique, fonction lien

Dans le cas général, la composante systématique s'écrit, par analogie avec la régression Normale :

$$\eta_i = x_i' \beta = \sum_{j=1}^p x_{ij} \beta_j \quad (i=1, \dots, v)$$

La fonction lien établit un pont entre les composantes aléatoire et systématique sous la forme d'une fonction réelle g strictement monotone et dérivable telle que : $\eta_i = g(\mu_i)$ ou $\mu_i = g^{-1}(\eta_i)$.

Il en résulte le mode d'action des variables exogènes sur la réponse par $\mu_i = g^{-1}\left(\sum_{j=1}^p x_{ij} \beta_j\right)$

Les liens standard sont :

--> Lien identité : $\eta_i = \mu_i$, $\mu_i = \sum_{j=1}^p x_{ij} \beta_j$ (action additive)
 --> Lien log : $\eta_i = \ln \mu_i$ ou $\mu_i = e^{\eta_i}$ (action multiplicative)

1) La loi de poisson $P(\lambda)$

La loi de poisson décrit le dénombrement d'évènements dans un intervalle. Si λ est le nombre d'occurrences moyen ($\lambda > 0$) et Y la variable discrète à modéliser, nous aurons :

$$P(Y=y) = \frac{\lambda^y e^{-\lambda}}{y!}$$

Par passage à la forme générale de la famille exponentielle, nous aurons :

$$P(Y=y) = e^{\left(\frac{y \ln \lambda - \lambda}{\Phi} - \ln(y!)\right)}$$

Par analogie, nous identifions $\theta = \ln \lambda$, $b(\theta) = e^\theta$, $\Phi = 1$ et $c(y, \Phi) = -\ln(y!)$ et nous en déduisons l'espérance et la variance de la variable étudiée :

$$\begin{cases} \mu = E[Y] = b'(\theta) = \lambda \\ V(Y) = \Phi b''(\theta) = \Phi V(\mu) = \lambda \end{cases}$$

2) La loi Gamma $G(v, \frac{v}{\mu})$

La loi Gamma permet de modéliser une grande variété de phénomènes pour des grandeurs positives. Si Y suit une loi Gamma de paramètres a et b , alors la fonction de masse s'écrit comme suit :

$$f(y, a, b) = \frac{b^a}{\Gamma(a)} y^{a-1} e^{-by} \text{ pour } x > 0$$

Une simplification dans le cadre de l'écriture sous la forme exponentielle consiste à poser $a=v$ et $b=\frac{v}{\mu}$ et nous réécrivons la fonction de densité :

$$f(y) = e^{\left[\left(-\frac{v}{\mu} - \ln \mu\right)v + c(y, v)\right]} \text{ pour } y > 0$$

$$\text{Par identification, nous trouvons } \begin{cases} \Phi = \frac{1}{v} \\ \theta = -\frac{1}{\mu} \\ E[Y] = \mu \\ V(\mu) = \mu^2 \end{cases}$$

II.3 Application des modèles GLM aux triangles de liquidation

Dans le cadre des méthodes stochastiques dédiées au calcul des provisions pour sinistres, la modélisation GLM tente de fournir une estimation ponctuelle et par intervalle de confiance pour les différentes réserves annuelles ou globale. Ainsi, elle sélectionne le modèle probabiliste le plus adéquat aux incréments de paiement du triangle supérieur. Elle permet

également le calcul des différents risques d'estimation ainsi que les mesures de la qualité d'ajustement du modèle choisi.

Dans cette section, nous appliquerons l'approche GLM sur les éléments du triangle de liquidation supposés aléatoires.

II.3.1 Les différents éléments du modèle

La modélisation stochastique GLM part de la supposition que les incréments de paiements du rectangle de liquidation sont des variables aléatoires. Nous les notons $(Y_{ij})_{i,j=0,\dots,n}$.

| j \ i | 0 | 1 | | | | i | | l | | | n |
|-------|-----------------|-----------------|--|--|--|-----------------|--|-----------------|--|--|-----------------|
| 0 | y ₁₁ | y ₁₂ | | | | | | | | | |
| 1 | y ₂₁ | y ₂₂ | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | |
| l | | | | | | y _{ii} | | | | | |
| | | | | | | | | | | | |
| k | | | | | | | | Y _{kl} | | | |
| | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | |
| N | | | | | | | | | | | Y _{nn} |

Tableau 45: Le rectangle de liquidation

Les éléments du triangle supérieur ont été en effet observés. Il s'agit donc de réalisations bien connues qu'on note $(y_{ij})_{i+j \leq n}$.

Le triangle supérieur contient également les règlements calendaires (éléments de la diagonale) : quel que soit l'année d'origine, le paiement de la sinistralité a été effectué en l'année n. Ainsi, la somme des éléments diagonaux correspond au montant payé par l'assureur au cours de l'année comptable n toutes années de survenance confondues.

La partie inférieure, quant à elle, regroupe les règlements restant à effectuer pour les années de survenance de 0 à n. Les éléments du triangle inférieur sont donc des variables aléatoires et on les note $(Y_{ij})_{i+j > n}$.

Nous supposons par la suite que les $(Y_{ij})_{i,j=0\dots n}$ sont identiquement distribuées. Nous y rajoutons l'hypothèse d'indépendance pour pouvoir utiliser l'approche GLM.

En conséquence, le triangle supérieur, assimilé à un échantillon observé, sert principalement à retrouver les paramètres du modèle. La suite consiste à utiliser ces paramètres pour estimer les règlements futurs suivant le modèle retenu.

Le choix des variables explicatives est la phase suivante de la modélisation. Les variables sélectionnées pour leur influence explicite sur la variable dépendante Y_{ij} sont :

- ♣ L'année de survenance i: elle sera paramétrée par un coefficient α_i . Comme nous avons (n+1) années de survenance, il est normal d'avoir (n+1) paramètres chacun renvoyant à une année d'origine bien précise.
- ♣ Le délai de règlement j: sera représenté par un autre paramètre β_j . De même que pour l'année de survenance, le délai de règlement donne lieu à (n+1) autres paramètres.

- ▲ L'année calendaire (i+j): pour des données déflatées, chose que nous supposons ici, l'effet "année calendaire" est supposé constant. C'est ainsi que le paramètre correspondant à cette variable sera tenu pour constant μ .

La construction du modèle nécessite également la donnée d'une fonction f qui lie la moyenne $\mu_{ij}=E[Y_{ij}]$ à l'ensemble des paramètres de régression prédéfinis :

$$\mu_{ij}=g(\alpha_i, \beta_j, \mu)$$

Par référence à la méthode Chain Ladder et pour l'interprétation du paramétrage qu'il permet, le lien exponentiel est classiquement pris et on obtient:

$$\mu_{ij}=e^{\mu+\alpha_i+\beta_j}$$

II.3.2 Le choix de la distribution de la variable paiement des sinistres

La première étape consiste à choisir la distribution de la variable réponse. Plusieurs tests permettent de s'assurer de la pertinence de tel ou tel choix. Dans notre étude, nous aurons recours surtout aux diagrammes Quantile-Quantile et à la comparaison des distances de Kolmogorov-Smirnov.

Les distributions sur lesquelles nous focaliserons notre analyse sont la loi normale et la loi gamma. Ces deux lois feront l'objet d'une petite analyse de la qualité d'ajustement avant d'être choisie. Nous avons également décidé de travailler avec la loi de poisson pour pouvoir vérifier le constat selon lequel ses résultats convergent vers ceux de Chain ladder standard.

Les graphes suivant sont des Q-Q Plot⁶ respectivement pour la loi normale et pour la loi gamma :

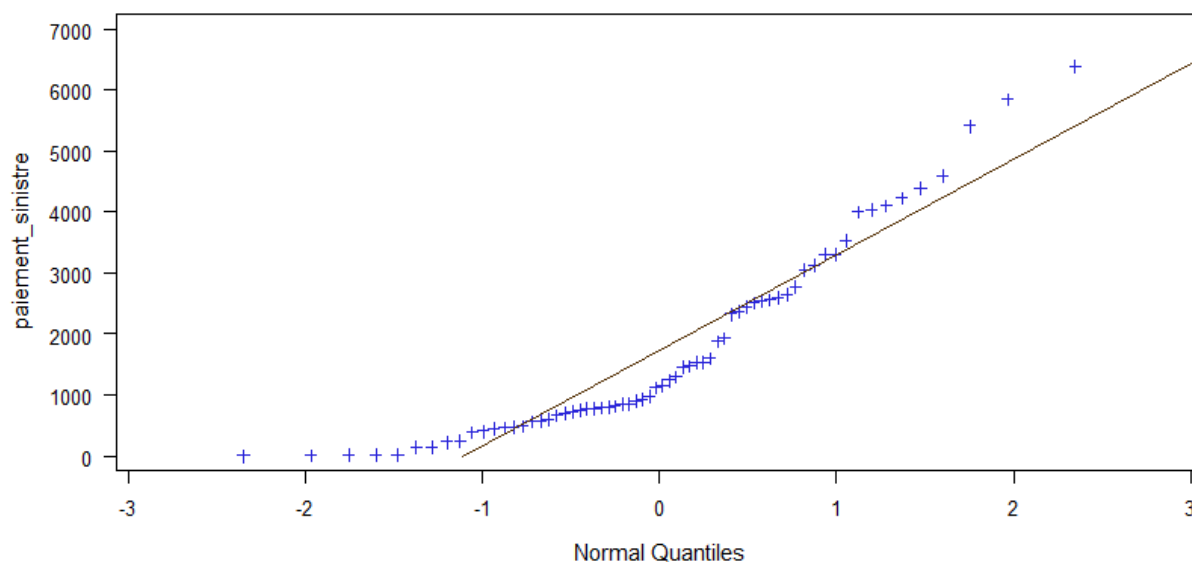


Figure 29: Le diagramme Q-Q Plot pour la loi normale

⁶ Voir annexe 5

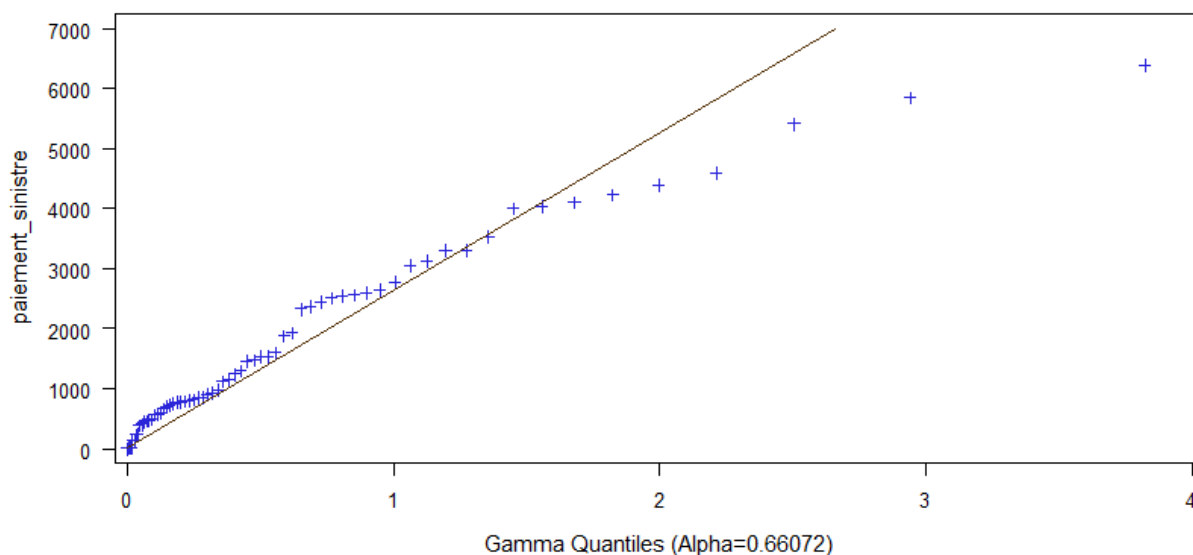


Figure 30: Le diagramme Q-Q Plot pour la loi Gamma

Sur le tracé relatif à la loi gamma, les points générés s'alignent assez bien autour de la droite. Ce constat n'est pas évident pour le graphe Q-Q plot de la loi normale. En conséquence, la distribution qui ajuste mieux les données du triangle supérieur est la loi gamma.

La comparaison des distances de Kolmogorov-Smirnov confirme également ce choix : quand $d=0,167$ pour la loi normale, sa valeur n'est que $0,089$ en ce qui concerne la loi gamma ; et comme le critère de sélection du modèle est d'avoir la plus petite valeur possible de la distance d , la distribution gamma est choisie.

Notons que l'analyse à l'aide de l'outil graphique Q-Q plot ou de la distance de K-S n'est que descriptive. Elle permet d'avoir une première idée sur la meilleure distribution à choisir sans pour autant confirmer définitivement ce choix, d'autant plus que notre jeu de données est assez réduit. Par la suite, et pour valider le modèle sélectionné, nous devons impérativement avoir recours à des tests statistiques plus rigoureux.

II.3.3 L'estimation et le risque d'estimation

1) L'estimation des paramètres du modèle et le calcul des réserves

a) Le formalisme théorique

Le premier objectif de cette section est de pouvoir trouver l'estimation du vecteur $((\alpha_i)_{i=0..n}, (\beta_j)_{j=0..n}, \mu)$. Pour cela, la méthode du maximum de vraisemblance est appliquée aux données du triangle supérieur $L((x_{ij})_{i+j \leq n}, (\alpha_i)_{i=0..n}, (\beta_j)_{j=0..n}, \mu)$ dans le but de donner l'estimateur du maximum de vraisemblance $((\hat{\alpha}_1)_{i=0..n}, (\hat{\beta}_1)_{j=0..n}, \hat{\mu})$.

La matrice X du modèle est construite à partir de valeurs binaires (0 et 1) de telle sorte à faire coïncider chaque valeur prévue de la variable à modéliser avec le paramétrage qui lui correspond.

Comme la méthode du maximum de vraisemblance permet l'invariance fonctionnelle, l'estimation des paramètres du modèle conduit directement à l'estimation ponctuelle des différentes valeurs $\hat{\mu}_{ij}$. En effet, la valeur prévue du modèle est donnée par :

$$\hat{\mu}_{ij} = e^{\hat{\alpha}_i + \hat{\beta}_j + \hat{\mu}} \quad \text{pour tout } i=0..n \text{ et } j>n-i$$

Une fois les paiements restant à effectuer estimés, l'étape qui suit consiste à trouver les réserves par année d'origine ainsi que la provision globale à retenir.

Le calcul de la réserve moyenne $E(\widehat{R}_i)$ pour l'année de survenance i ne requiert que les données du triangle inférieur. Il s'agit concrètement de sommer tous les éléments de la $i^{\text{ème}}$ ligne du triangle inférieur :

$$E(\widehat{R}_i) = \sum_{j=n-i+1}^n \hat{\mu}_{ij}$$

De même, nous déduisons la valeur prévue de la provision globale R :

$$E(\widehat{R}) = \sum_{i=0}^n E(\widehat{R}_i)$$

b) Application numérique

✓ Le modèle de poisson

Le tableau qui suit regroupe l'ensemble des estimations des paramètres du modèle :

Analyse des valeurs estimées du paramètre de vraisemblance maximum

| Paramètre | DDL | Valeur estimée | Erreur type | Intervalle de confiance de Wald à 95 % | | Khi-2 de Wald | Pr > Khi-2 |
|-----------|-----|----------------|-------------|--|---------|---------------|------------|
| Intercept | 1 | 1.7734 | 0.5011 | 0.7913 | 2.7555 | 12.53 | 0.0004 |
| A1 | 1 | -0.3871 | 0.0330 | -0.4517 | -0.3225 | 137.97 | <.0001 |
| A2 | 1 | -0.1915 | 0.0327 | -0.2556 | -0.1273 | 34.22 | <.0001 |
| A3 | 1 | -0.5072 | 0.0331 | -0.5721 | -0.4423 | 234.55 | <.0001 |
| A4 | 1 | -0.3778 | 0.0330 | -0.4424 | -0.3132 | 131.35 | <.0001 |
| A5 | 1 | -0.6204 | 0.0333 | -0.6857 | -0.5551 | 346.28 | <.0001 |
| A6 | 1 | -0.5042 | 0.0332 | -0.5693 | -0.4391 | 230.51 | <.0001 |
| A7 | 1 | 0.0712 | 0.0326 | 0.0073 | 0.1350 | 4.77 | 0.0289 |
| A8 | 1 | 0.1478 | 0.0326 | 0.0839 | 0.2116 | 20.57 | <.0001 |
| A9 | 1 | -0.1341 | 0.0332 | -0.1992 | -0.0690 | 16.29 | <.0001 |
| A10 | 1 | -0.3416 | 0.0353 | -0.4108 | -0.2724 | 93.51 | <.0001 |
| A11 | 0 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | . | . |
| B1 | 1 | 5.2495 | 0.5002 | 4.2691 | 6.2298 | 110.14 | <.0001 |
| B2 | 1 | 6.5614 | 0.5001 | 5.5812 | 7.5416 | 172.13 | <.0001 |
| B3 | 1 | 6.7969 | 0.5001 | 5.8168 | 7.7771 | 184.72 | <.0001 |
| B4 | 1 | 6.2913 | 0.5001 | 5.3111 | 7.2715 | 158.24 | <.0001 |
| B5 | 1 | 5.6832 | 0.5002 | 4.7029 | 6.6636 | 129.10 | <.0001 |
| B6 | 1 | 4.9446 | 0.5004 | 3.9638 | 5.9253 | 97.65 | <.0001 |
| B7 | 1 | 4.7525 | 0.5005 | 3.7715 | 5.7334 | 90.16 | <.0001 |
| B8 | 1 | 4.1742 | 0.5010 | 3.1923 | 5.1561 | 69.42 | <.0001 |
| B9 | 1 | 4.0894 | 0.5014 | 3.1066 | 5.0721 | 66.52 | <.0001 |
| B10 | 1 | 0.9960 | 0.5401 | -0.0626 | 2.0546 | 3.40 | 0.0652 |
| B11 | 0 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | . | . |
| Scale | 0 | 1.0000 | 0.0000 | 1.0000 | 1.0000 | . | . |

Tableau 46: Les estimations des paramètres et des erreurs relatives pour le modèle de poisson

L'erreur standard mesurant le degré de variabilité de l'estimation des paramètres se trouve à un niveau acceptable. Nous pouvons par conséquent retenir les valeurs estimées des paramètres du modèle.

Par la suite, nous extrayons le rectangle des valeurs prévues des incréments de paiements. La figure suivante illustre le résultat obtenu :

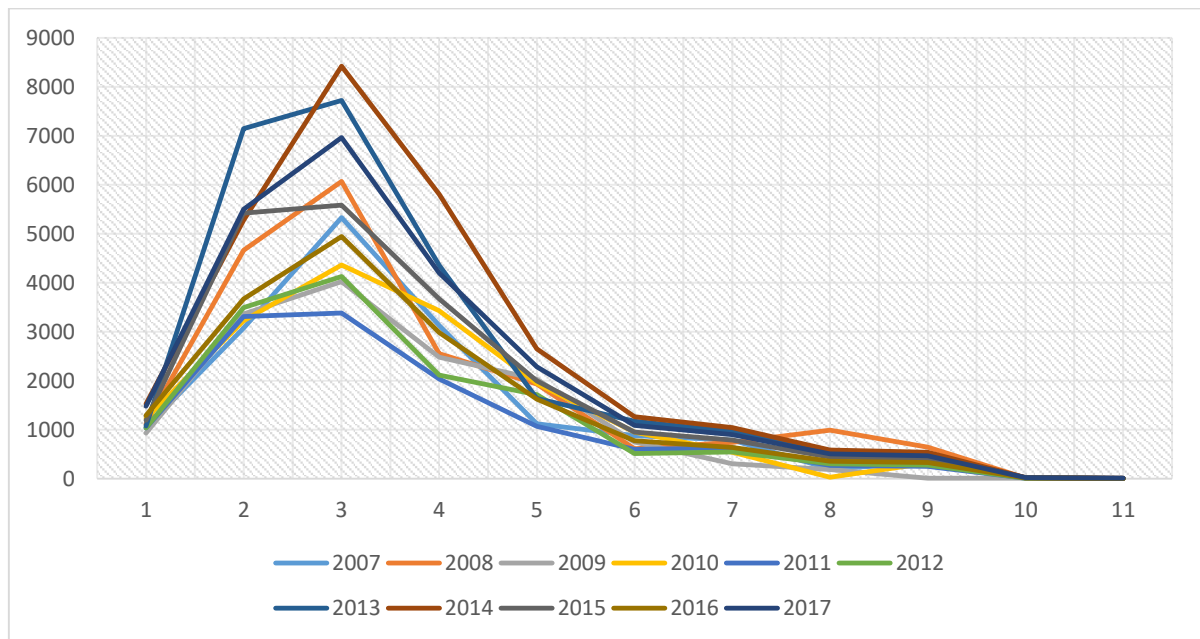


Figure 31 : illustration graphique de l'évolution des règlements calculée par le modèle de poisson

Ainsi, la valeur prévue de la réserve globale obtenue suite à cette modélisation est : $\widehat{E(R)} = 53\,273$.

Il est clair que les résultats obtenus par la modélisation poisson sont parfaitement identiques à ceux de la méthode déterministe Chain Ladder Standard avec les mêmes coefficients de développement déjà établis.

✓ Le modèle Gamma

Pareil que pour le modèle précédent, nous commençons par l'estimation des différentes valeurs des paramètres du modèle.

Analyse des valeurs estimées du paramètre de vraisemblance maximum

| Paramètre | DDL | Valeur estimée | Erreur type | Intervalle de confiance de Wald à 95 % | | Khi-2 de Wald | Pr > Khi-2 |
|-----------|-----|----------------|-------------|--|--------|---------------|------------|
| Intercept | 1 | 1.6891 | 0.6041 | 0.5050 | 2.8732 | 7.82 | 0.0052 |
| A1 | 1 | -0.3028 | 0.4478 | -1.1805 | 0.5748 | 0.46 | 0.4989 |
| A2 | 1 | 0.0614 | 0.4517 | -0.8238 | 0.9466 | 0.02 | 0.8919 |
| A3 | 1 | -0.6027 | 0.4463 | -1.4774 | 0.2719 | 1.82 | 0.1768 |
| A4 | 1 | -0.3964 | 0.4479 | -1.2742 | 0.4814 | 0.78 | 0.3761 |
| A5 | 1 | -0.5346 | 0.4506 | -1.4178 | 0.3486 | 1.41 | 0.2355 |
| A6 | 1 | -0.4796 | 0.4541 | -1.3697 | 0.4104 | 1.12 | 0.2909 |
| A7 | 1 | 0.0009 | 0.4621 | -0.9048 | 0.9066 | 0.00 | 0.9984 |
| A8 | 1 | 0.1633 | 0.4691 | -0.7562 | 1.0827 | 0.12 | 0.7279 |
| A9 | 1 | -0.1221 | 0.4814 | -1.0656 | 0.8213 | 0.06 | 0.7997 |
| A10 | 1 | -0.2481 | 0.5031 | -1.2342 | 0.7381 | 0.24 | 0.6220 |
| A11 | 0 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | . | . |
| B1 | 1 | 5.3338 | 0.4478 | 4.4561 | 6.2114 | 141.87 | <.0001 |
| B2 | 1 | 6.6128 | 0.4486 | 5.7335 | 7.4920 | 217.30 | <.0001 |
| B3 | 1 | 6.8442 | 0.4482 | 5.9658 | 7.7225 | 233.23 | <.0001 |
| B4 | 1 | 6.3405 | 0.4504 | 5.4577 | 7.2232 | 198.18 | <.0001 |
| B5 | 1 | 5.7776 | 0.4548 | 4.8862 | 6.6689 | 161.39 | <.0001 |
| B6 | 1 | 5.0038 | 0.4554 | 4.1111 | 5.8964 | 120.71 | <.0001 |
| B7 | 1 | 4.7653 | 0.4589 | 3.8660 | 5.6647 | 107.85 | <.0001 |
| B8 | 1 | 4.0212 | 0.4735 | 3.0932 | 4.9492 | 72.13 | <.0001 |
| B9 | 1 | 3.9028 | 0.4805 | 2.9610 | 4.8445 | 65.98 | <.0001 |
| B10 | 1 | 0.9330 | 0.5025 | -0.0519 | 1.9179 | 3.45 | 0.0634 |
| B11 | 0 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | . | . |
| Scale | 1 | 6.0808 | 1.0308 | 4.3618 | 8.4772 | . | . |

Tableau 47: Les estimations des paramètres et des erreurs relatives pour le modèle Gamma

Il est constaté que les erreurs standards représentent une part relativement faible des estimations des paramètres. Ces dernières sont par conséquent retenues.

Nous en venons par la suite à la figure qui représente le tableau complété des incréments de règlements.

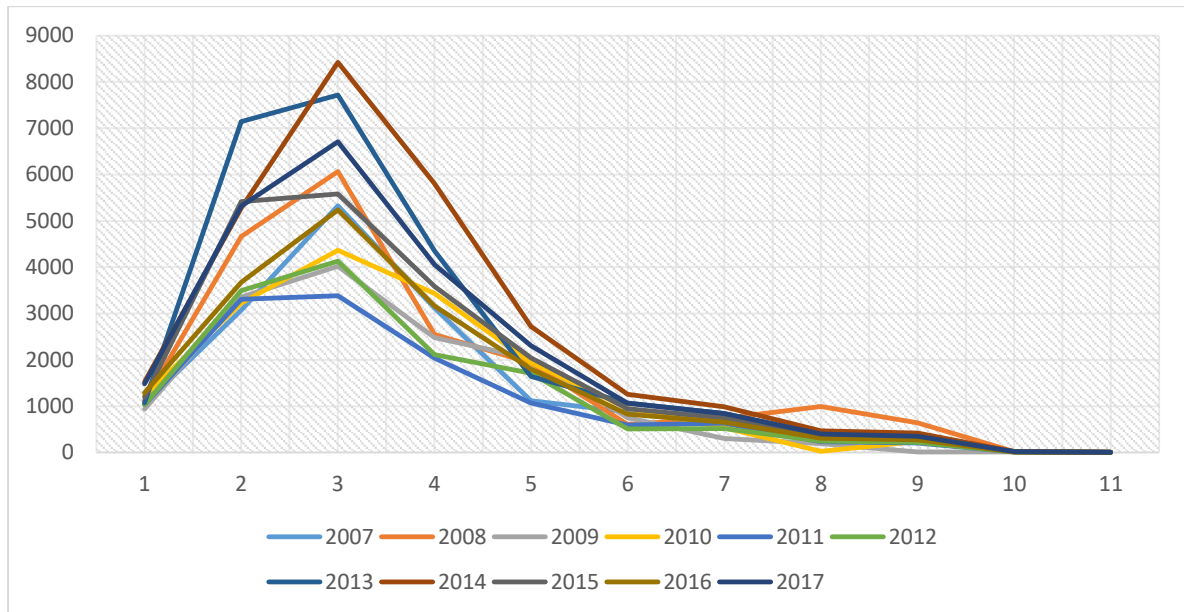


Figure 32 : Evolution des règlements des sinistres par années de survenance estimés par le modèle GLM

Le montant des provisions totales au titre de l'année 2017 calculée avec une modélisation Gamma est : $\bar{E}(\hat{R})=51\ 657$

2) L'ajustement des modèles et les risques d'estimation

a) Les risques d'estimation

L'incertitude relative à l'estimation des $E[\hat{R}_i]$ pour toute année de survenance et de $E[\hat{R}]$ se mesure principalement par la donnée des $V(E[\hat{R}_i])$ et de $V(E[\hat{R}])$ et nous avons pour tout $i=0\dots n$:

$$V(E[\hat{R}_i]) = \sum_{j=n-i+1}^n V(\hat{\mu}_{ij}) + \sum_{i=n-j+1}^n \sum_{k=n-j+1}^n Cov(\hat{\mu}_{ij}, \hat{\mu}_{kj})$$

$$V(E[\hat{R}]) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=n-i+1}^n V(\hat{\mu}_{ij}) + \sum_{i_1=1}^n \sum_{\substack{k \neq i \\ i_2=1}}^n \sum_{j_1=n-i_1+1}^n \sum_{j_2=n-i_2+1}^n cov(\hat{\mu}_{i_1 j_1}, \hat{\mu}_{i_2 j_2})$$

Ce qui est contraignant quant à l'usage de cette expression, c'est que le calcul des variances et des covariances impliquées dans la formule ci-dessus est souvent hors d'atteinte. Remédier à ce problème requiert l'usage de quelques techniques de simulation comme la méthode de bootstrap qui sera bien détaillée par la suite.

Le tableau qui suit regroupe l'ensemble des best estimates des provisions par exercice puis de la provision globale au 31/12/2017, pour chacun des deux modèles : Gamma et

poisson. Ce tableau est complété par les risques d'estimation correspondants sous la forme de l'erreur standard relative estimée.

| I | Modèle de Poisson | | | | Modèle de Gamma | | | |
|---------|----------------------|-----|---------|----------|----------------------|-----|---------|----------|
| | E[\widehat{R}_i] | SER | Inf | Sup | E[\widehat{R}_i] | SER | Inf | Sup |
| 2008 | 15,3 | 0,4 | 10,1 | 20,5 | 13,2 | 0,3 | 10,3 | 16,1 |
| 2009 | 27,7 | 0,7 | 12,2 | 43,2 | 34,3 | 0,6 | 18,5 | 50,1 |
| 2010 | 510,6 | 0,8 | 183,8 | 837,3 | 675,8 | 0,2 | 567,7 | 784,0 |
| 2011 | 911,6 | 0,2 | 747,5 | 1075,7 | 1074,5 | 0,3 | 816,6 | 1332,4 |
| 2012 | 2001,6 | 1,1 | 400,3 | 3603,0 | 2294,2 | 0,8 | 825,9 | 3762,4 |
| 2013 | 5368,2 | 1,8 | -1932,5 | 12668,9 | 6423,1 | 1,7 | -1798,5 | 14644,7 |
| 2014 | 11749,8 | 0,3 | 9164,9 | 14334,8 | 12233,8 | 1,4 | -978,7 | 25446,2 |
| 2015 | 16006,8 | 0,6 | 8643,7 | 23370,0 | 16571,3 | 0,6 | 8948,5 | 24194,1 |
| 2016 | 24579,5 | 0,2 | 20155,2 | 29003,8 | 23358,7 | 0,3 | 17752,6 | 28964,8 |
| 2017 | 42143,4 | 0,4 | 29500,4 | 54786,4 | 43868,9 | 0,3 | 35095,1 | 52642,7 |
| Globale | 103314,6 | 0,7 | 51657,3 | 154971,8 | 106547,8 | 0,6 | 59666,7 | 153428,8 |

Tableau 48: Les risques relatifs et les intervalles de confiances des réserves pour les modèles Gamma et poisson

La partie majeure des erreurs standards se trouvent à un niveau acceptable. Les estimations sont par conséquent fiables.

b) La mesure de la qualité d'ajustement

Un modèle statistique est une description mathématique servant à prédire les valeurs prises par une grandeur aléatoire. Il est donc nécessaire, après la construction d'un modèle, de calculer quelques mesures d'ajustement. Ces dernières servent notamment à quantifier l'écart entre les valeurs obtenues suite au modèle et celles appartenant à l'échantillon observé.

Dans le cadre de nos données, nous ciblerons l'étude de l'adéquation de chacun des modèles (poisson et Gamma) aux réalisations de règlements du triangle supérieur. Pour cela, nous aurons recours à quelques concepts statistiques : déviance, résidus...

c) Le formalisme mathématique

Si on note $\widehat{\theta}_{ij} = b'^{-1}(\widehat{\mu}_{ij})$ et $\widetilde{\theta}_{ij} = b'^{-1}(y_{ij})$, la statistique déviance se définit comme suit :

$$D = 2 \sum_{i+j \leq n} \left[y_{ij} (\widetilde{\theta}_{ij} - \widehat{\theta}_{ij}) - (b(\widetilde{\theta}_{ij}) - b(\widehat{\theta}_{ij})) \right].$$

Vu leur impertinence en GLM, les résidus bruts $r_{ij} = y_{ij} - \widehat{\mu}_{ij}$ sont remplacés par des résidus dits de déviance :

$$r_{ij}^D = \text{sgn}(y_{ij} - \widehat{\mu}_{ij}) \sqrt{2(y_{ij}(\widetilde{\theta}_{ij} - \widehat{\theta}_{ij}) - (b(\widetilde{\theta}_{ij}) - b(\widehat{\theta}_{ij})))}.$$

Ainsi, la déviance peut s'écrire en fonction des résidus r_{ij}^D et on a : $D = \sum_{i+j \leq n} (r_{ij}^D)^2$. Pour les distributions considérées, à savoir poisson et gamma, la déviance s'écrit :

| | |
|----------------------|--|
| Poisson $P(\lambda)$ | $D = 2 \sum_{i+j \leq n} \left[y_{ij} \ln \left(\frac{y_{ij}}{\widehat{\mu}_{ij}} \right) - (y_{ij} - \widehat{\mu}_{ij}) \right]$ |
|----------------------|--|

| | |
|----------------------------------|---|
| Gamma $\gamma(u, \frac{v}{\mu})$ | $D=2 \sum_{i+j \leq n} \left[\frac{y_{ij} - \hat{\mu}_{ij}}{\hat{\mu}_{ij}} - \ln\left(\frac{y_{ij}}{\hat{\mu}_{ij}}\right) \right]$ |
|----------------------------------|---|

La déviance sert également à construire un estimateur convergent pour le paramètre de dispersion Φ . Cette estimation est moins lourde que celle du maximum de vraisemblance. En effet, si nous posons t la taille de l'échantillon observé ou concrètement le nombre d'éléments du triangle supérieur et p le nombre de paramètres explicatifs du modèle, nous aurons :

$$\hat{\Phi} = \frac{D}{t-p}$$

Plus la valeur de D est faible, plus le modèle est crédible. Cependant, la comparaison avec D nécessite que les modèles aient la même composante aléatoire, ce qui est très limitatif pour nos interprétations.

d) Application numérique

La table qui suit donne les valeurs de quelques statistiques relatives à la qualité d'ajustement du modèle de poisson.

| Critère d'évaluation de l'adéquation | | | |
|--------------------------------------|-----|-------------|------------|
| Critère | DDL | Valeur | Valeur/DDL |
| Deviance | 45 | 3979,7601 | 88,4391 |
| Scaled Deviance | 45 | 3979,7601 | 88,4391 |
| Pearson Chi-square | 45 | 3810,7794 | 84,6840 |
| Scaled Pearson X2 | 45 | 3810,7794 | 84,6840 |
| Log Likelihood | | 784785,2772 | |
| Full log Likelihood | | -2275,0065 | |
| AIC (smaller is better) | | 4592,0129 | |
| AICC (smaller is better) | | 4613,0129 | |
| BIC (smaller is better) | | 4637,9957 | |

Tableau 49: Les statistiques relatives à la qualité d'ajustement du modèle de poisson

D'après le tableau ci-dessus, la valeur estimée du paramètre de dispersion du modèle de poisson est $\hat{\Phi} = 88,44$.

A l'instar du modèle de poisson, nous présentons le tableau relatif au calcul de quelques statistiques d'ajustement :

| Critère d'évaluation de l'adéquation | | | |
|--------------------------------------|-----|-----------|------------|
| Critère | DDL | Valeur | Valeur/DDL |
| Deviance | 45 | 11,1505 | 0,2478 |
| Scaled Deviance | 45 | 67,8041 | 1,5069 |
| Pearson Chi-square | 45 | 6,8356 | 0,1519 |
| Scaled Pearson X2 | 45 | 41,5661 | 0,9237 |
| Log Likelihood | | -404,7263 | |
| Full log Likelihood | | -404,7263 | |
| AIC (smaller is better) | | 1013,4526 | |
| AICC (smaller is better) | | 1036,9875 | |
| BIC (smaller is better) | | 1061,6250 | |

Tableau 50: Les statistiques relatives à la qualité d'ajustement du modèle de Gamma

D'après le tableau ci-dessus, la déviance du modèle est de l'ordre de 11,15 et la valeur estimée du paramètre de dispersion du modèle de Gamma est $\hat{\Phi} = 0.25$.

III. La technique du Bootstrap

III.1 Idée et principe de base de la méthode du Bootstrap

III.1.1 Présentation générale

La méthode du Bootstrap est une technique statistique de ré-échantillonnage utilisant des simulations de Monte-Carlo. Elle a été introduite par Efron⁷ en 1979 principalement pour réduire le biais d'une estimation ou bien pour donner la variabilité de l'estimateur d'un paramètre d'intérêt dans un contexte non paramétrique.

Etant une méthode de simulation par excellence, Bootstrap est une bonne alternative pour pallier à l'insuffisance des données en cas d'approches asymptotiques. Cependant, la mise en œuvre et l'application de cette technique nécessitent la disponibilité d'outils informatiques performants.

III.1.2 L'approche du Bootstrap

La technique de Bootstrap est une méthode particulière de ré-échantillonnage. Elle remplace les déductions théoriques de l'analyse statistique en répétant le ré-échantillonnage des données initiales et en faisant de l'inférence statistique sur ces échantillons bootstrapés.

Le Bootstrap est une technique qui doit être adaptée à chaque situation ; pour les modèles linéaires (classique ou généralisés), il est convenu d'adopter une des deux possibilités suivantes :

- **Le Bootstrap des paires** : Le ré-échantillonnage est fait directement sur l'échantillon initial (les valeurs de la variable dépendante du modèle étudié).

⁷ Bradley Efron est un statisticien américain né à Saint Paul dans le Minnesota le 24 mai 1938, professeur de statistiques à l'université de Stanford.

- **Le Bootstrap des résidus** : Le ré-échantillonnage est appliqué sur les résidus du modèle.

Malgré le fait que le Bootstrap des paires est plus robuste que celui des résidus, seul ce dernier peut être implémenté dans le contexte des réserves techniques représentant des dépendances entre les observations et leurs paramètres d'estimation. Pour implémenter une analyse de Bootstrap, nous avons besoin ainsi de spécifier un modèle, définir les résidus adéquats et utiliser la technique de prédiction de Bootstrap.

En effet, le ré-échantillonnage est basé sur les deux hypothèses suivantes :

-> H1 : Les résidus sont indépendants et identiquement distribués.

-> H2 : Il est indifférent de faire le ré-échantillonnage sur les résidus ou les résidus multipliés par une constante.

Dans le cas des modèles linéaires, nous pouvons utiliser plusieurs types de résidus (Pearson, déviance, Anscombe,...). Pour notre cas nous allons utiliser les résidus de Pearson standardisés définis comme suit :

$$r_{ij}^{(P)} = \frac{y_{ij} - \hat{\mu}_{ij}}{\sqrt{\hat{\text{var}}(Y_{ij})}} = \frac{y_{ij} - \hat{\mu}_{ij}}{\sqrt{\hat{\phi} \hat{V}(\mu_{ij})}}$$

III.2 Application du Bootstrap au triangle des règlements

Nous souhaitons ici calculer le degré d'imprécision dû à l'estimation de la provision dans le cadre d'un modèle statistique. Le principal objectif de cette section est l'estimation des intervalles de confiance pour chacune des provisions calculées pour le modèle Gamma.

III.2.1 Les résidus de Pearson

L'hypothèse de base de la technique de Bootstrap n'étant pas forcément toujours vérifiée, il faut chercher à la contourner en transformant les données du triangle de liquidation. En effet, afin de normaliser nos données, nous privilégions l'usage des résidus de Pearson ainsi construits : $r_{ij} = \frac{y_{ij} - \hat{\mu}_{ij}}{\sqrt{V(\hat{\mu}_{ij})}}$ pour les modèles GLM, quand $i+j \leq n$

y_{ij} : est la valeur réellement observée ou bien la valeur figurant dans la cellule (i,j) du triangle de liquidation de base.

$\hat{\mu}_{ij}$: est la valeur prévue par le modèle pris.

Notons que pour le cas d'une éventuelle application du Bootstrap sur le modèle de Mack, quand les coefficients de passage sont fixés au préalable par l'utilisateur, ré-échantillonner directement la donnée triangulaire est difficilement justifiable. Le recours aux résidus présente donc une alternative intéressante permettant d'éviter ce problème.

III.2.2 Les étapes du Bootstrap appliquées aux résidus de Pearson sous le modèle de Gamma

Nous estimons dans un premier temps les incréments de paiements du triangle supérieur par le modèle de Gamma déjà établi dans la partie de la modélisation GLM.

Les résidus de Pearson qui en résultent sont :

| I \ j | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|--------------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|-----------|
| 2007 | -0,05 | 0,29 | 0,56 | -0,46 | 0,19 | 0,18 | 0,52 | 0,81 | -1,19 | -0,85 | 0,00 |
| 2008 | -0,17 | 0,06 | -0,48 | -0,36 | -0,08 | -0,11 | 0,09 | -0,18 | 0,38 | 0,85 | |
| 2009 | 0,19 | 0,14 | -0,33 | -0,06 | -0,42 | 0,75 | -0,27 | -0,80 | 0,82 | | |
| 2010 | -0,01 | -0,14 | 0,11 | -0,20 | -0,14 | 0,68 | -0,46 | 0,17 | | | |
| 2011 | 0,19 | 0,22 | -0,22 | -0,04 | 0,65 | -0,91 | 0,12 | | | | |
| 2012 | 0,44 | 0,06 | -0,21 | 0,78 | -0,49 | -0,58 | | | | | |
| 2013 | 0,18 | -0,13 | -0,19 | -0,16 | 0,29 | | | | | | |
| 2014 | -0,19 | -0,66 | 0,34 | 0,50 | | | | | | | |
| 2015 | -0,29 | -0,13 | 0,42 | | | | | | | | |
| 2016 | -0,28 | 0,28 | | | | | | | | | |
| 2017 | 0,00 | | | | | | | | | | |

Tableau 51: Les résidus de Pearson pour le modèle de Gamma

Nous devons maintenant effectuer des tirages avec remise pour les éléments du triangle des résidus. Voici l'exemple d'un premier échantillon:

| I \ j | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|--------------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|-----------|
| 2007 | -0,02 | -0,41 | 0,17 | 0,06 | -0,27 | 0,04 | 0,07 | -0,05 | 0,03 | 0,01 | 0,0 |
| 2008 | -0,21 | -0,47 | -0,50 | -0,83 | -0,25 | -0,25 | -0,07 | 0,27 | 0,13 | -0,02 | - |
| 2009 | 0,05 | 0,21 | 0,16 | 0,12 | 0,36 | 0,08 | -0,07 | -0,02 | -0,08 | - | - |
| 2010 | 0,11 | -0,16 | -0,07 | 0,33 | 0,18 | 0,11 | -0,01 | -0,12 | - | - | - |
| 2011 | 0,07 | 0,09 | -0,26 | -0,16 | -0,13 | -0,01 | 0,07 | - | - | - | - |
| 2012 | 0,05 | 0,09 | -0,01 | -0,18 | 0,13 | -0,07 | - | - | - | - | - |
| 2013 | -0,19 | 0,86 | 0,47 | 0,14 | -0,32 | - | - | - | - | - | - |
| 2014 | -0,10 | -0,47 | 0,25 | 0,49 | - | - | - | - | - | - | - |
| 2015 | -0,05 | 0,33 | -0,16 | - | - | - | - | - | - | - | - |
| 2016 | 0,06 | -0,22 | - | - | - | - | - | - | - | - | - |
| 2017 | 0,00 | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - |

Tableau 52:le premier échantillon des tirages avec remise du triangle des résidus de Pearson

La construction du triangle de paiements simulé à partir des résidus est l'étape qui suit. La formule utilisée à cette fin est $C_{ij}^b = r_{ij}^b * \sqrt{V(\widehat{\mu}_{ij})} + \widehat{\mu}_{ij}$.

| i \ j | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|--------------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|-----------|
| 2007 | 927,59 | 3048,33 | 3682,50 | 2197,16 | 1291,88 | 595,89 | 469,48 | 122,91 | 555,65 | 743,65 | 801,81 |
| 2008 | 140,80 | 2952,95 | 4069,00 | 2867,38 | 1462,02 | 461,02 | 560,97 | 206,28 | 715,16 | 444,57 | - |
| 2009 | 812,51 | 2788,44 | 2908,46 | 1563,62 | 935,82 | 301,72 | 80,71 | 101,85 | 33,60 | - | - |
| 2010 | 641,61 | 3006,63 | 3595,55 | 2242,90 | 1155,96 | 284,77 | 169,64 | 181,51 | - | - | - |
| 2011 | 951,84 | 2539,34 | 3154,29 | 1778,45 | 766,71 | 214,71 | 350,72 | - | - | - | - |
| 2012 | 672,91 | 2602,27 | 3233,70 | 2051,08 | 1065,19 | 715,73 | - | - | - | - | - |
| 2013 | 1010,75 | 3922,89 | 4778,65 | 2766,18 | 3126,18 | - | - | - | - | - | - |
| 2014 | 2696,79 | 5507,74 | 6743,45 | 3839,76 | - | - | - | - | - | - | - |
| 2015 | 1217,82 | 3792,84 | 3988,60 | - | - | - | - | - | - | - | - |
| 2016 | 126,6 | 2397,18 | - | - | - | - | - | - | - | - | - |
| 2017 | 1519,81 | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - |

Tableau 53: Le triangle des paiements construit à partir des résidus simulés

Et la réserve correspondant à ce nouveau tableau d'incrémentés simulé est : 55 564,62

Ce traitement sera refait 1000 fois pour aboutir à un échantillon de 1000 réserves. Sur la base de ces réserves simulées, nous calculons la réserve finale retenue comme étant la moyenne de toutes les valeurs de l'échantillon. De même, on substitue aux formules analytiques de variance complexes déjà vues la formule directe du calcul de la variance à partir du même échantillon de réserves simulé :

$$R^B = \frac{1}{1000} \sum_{b=1}^{1000} R_b$$

$$V(R^B) = \frac{1}{1000} \sum_{b=1}^{1000} (R_b - R^B)^2$$

Nous trouvons donc : $R^B = 56\ 202$ et $\sigma^B = 7\ 551$. Pour construire un intervalle de confiance de la réserve globale obtenue par la technique du Bootstrap, nous supposons que R^B suit la loi normale. Donc, au seuil $\alpha=5\%$, $IC_{5\%}(R^B) = [41\ 101; 71\ 303]$.

IV. Comparaison des méthodes stochastiques de provisionnement et calcul de Best-Estimate

Quatre modèles stochastiques ont été étudiés dans ce chapitre afin de mieux observer les effets de chacun d'eux, il nous a semblé intéressant de récapituler les principaux résultats relatifs à chaque méthode.

Nous avons donc procédé à la comparaison de la réserve totale ainsi qu'à celle des intervalles de confiance associés à chacune des méthodes déjà vues. Le tableau suivant regroupe l'ensemble de ces résultats :

| Méthodes stochastiques | Comparaison des provisions | | Intervalle de confiance | | |
|------------------------|----------------------------|-----------------------------------|-------------------------|-----------------|-------------|
| | Provision | L'écart de la provision avec Mack | Borne inférieur | Borne supérieur | L'amplitude |
| Mack | 53 273,4 | - | 39 013,2 | 67 533,5 | 28 520,2 |
| GLM (poisson) | 53 273,9 | 0% | 25 828,6 | 77 485,9 | 51 657,3 |
| GLM (Gamma) | 51 657,2 | 4% | 29 833,4 | 76 714,4 | 46 881,0 |
| Bootstrap | 56 202,3 | 7% | 41 101,0 | 71 303,6 | 30 202,6 |

Tableau 54: Récapitulatif des résultats des méthodes stochastiques

La comparaison et le calcul des écarts furent établis en prenant le modèle de Mack comme référence vu l'importance cruciale qu'il revêt pour le provisionnement mais surtout parce que ce modèle est le mieux adapté aux jeux de données du portefeuille RC de la MATU.

Nous remarquons que les quatre méthodes qui se basent uniquement sur le triangle de liquidation des paiements sont très proches en matière d'évaluation de la PSAP. En effet, si nous calculons pour chaque méthode l'écart relatif de sa provision avec celle retrouvée par le modèle de Mack, nous constatons facilement que ce dernier ne dépasse guère les 7%.

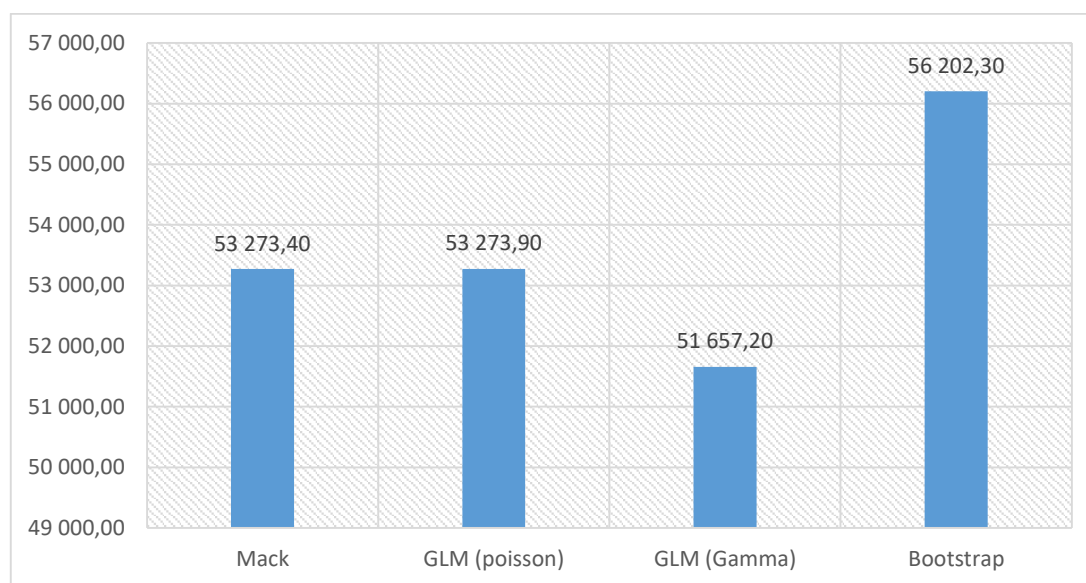


Figure 33: Le diagramme des provisions globales

Passant maintenant à la comparaison des erreurs standards relatives. Le tableau ci-dessous regroupe l'ensemble des valeurs de ce type d'erreur pour chaque méthode.

| Méthode stochastique | SeR(\hat{R}) |
|----------------------|------------------|
| Mack | 13,83% |
| GLM (poisson) | 25% |
| GLM (Gamma) | 22% |
| Bootstrap | 13,43% |

Tableau 55: les erreurs relatives aux réserves globales

La marge d'erreur pour chacune des estimations proposées est plus ou moins acceptable et elle ne dépasse pas 25%.

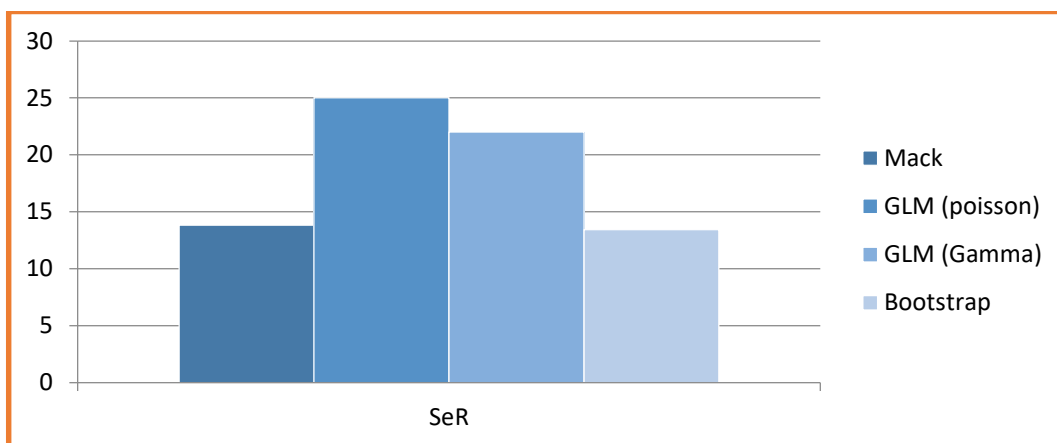
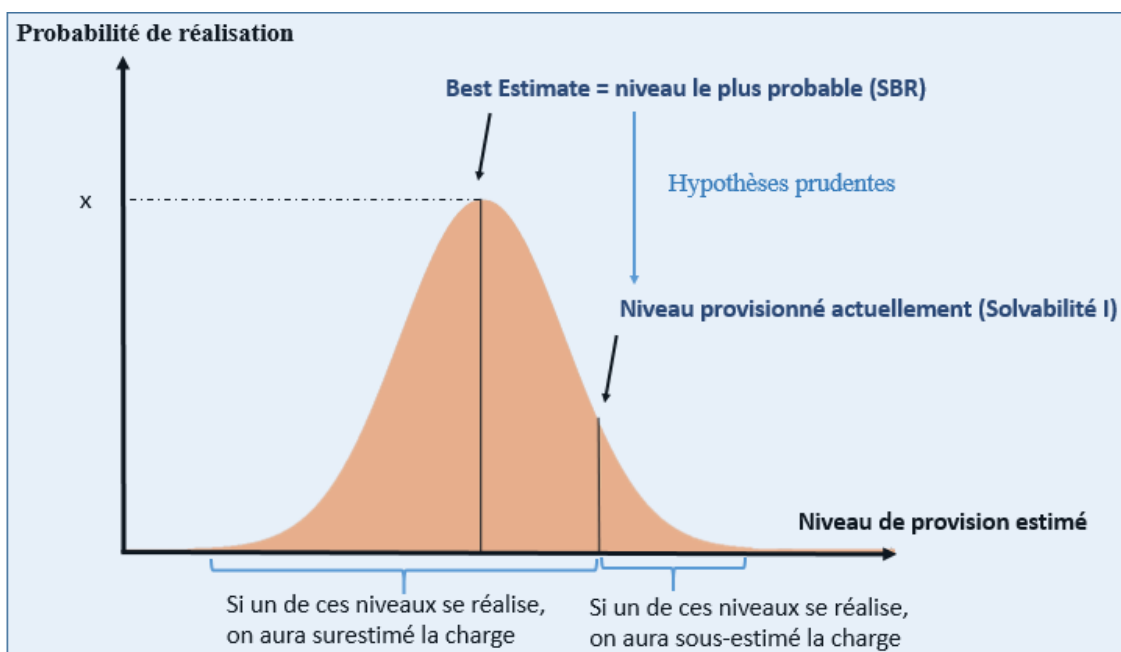


Figure 34: L'histogramme des $SeR(\hat{R})$ en pourcentage

Après avoir réalisé cette étude comparative des méthodes stochastiques, il reste à définir la meilleure provision finale à retenir compte tenu de la particularité du portefeuille étudié. Nous avons choisi pour notre démarche d'utiliser l'approche par la moyenne des provisions obtenues pour chaque méthode stochastique. Cette espérance vaut 53 601 et s'écarte elle-même de 1% par rapport au modèle de référence, à savoir Mack.

A ce stade, il est judicieux de mentionner que ce best-estimate est inférieur à la valeur obtenue par la méthode réglementaire. L'écart entre ces deux évaluations est 38 142 et leur écart relatif s'élève à 67% ce qui est normal puisque la provision issue par voie réglementaire veille à ce que la compagnie d'assurance soit capable en toutes circonstances de faire face à ses engagements techniques. Nous pouvons expliquer cet écart par le schéma suivant :



Conclusion Générale

Le monde des assurances au Maroc est une économie en plein essor. C'est une industrie en phase de métamorphose appuyée par l'ACAPS d'en faire un secteur libéralisé parfaitement capable de s'auto-maintenir face aux dilemmes et aux turbulences de la mondialisation des marchés financiers avec le Projet de circulaire SBR. Ainsi, La tutelle du secteur œuvre à normaliser la réglementation marocaine en la matière avec les exigences internationales.

L'actuariat et la statistique sont un univers parfait où règnent les lois de probabilités et triomphent les mathématiques appliquées. Cependant, la réalité des choses s'écarte considérablement par des suppositions sous-jacentes au recours à ces deux piliers scientifiques, qui connaît tant de bouleversements conjoncturels particulièrement dans un marché peu mature comme la nôtre.

La problématique de provisionnement se retrouve indéniablement au cœur des sciences actuarielles. Notre projet de fin d'études se limite à la modélisation statistique et à l'application de techniques qui dédie à la constitution des provisions pour sinistres, accompagnées d'un certain nombre de lectures directes ou profondes des chiffres qui s'y rapportent. Il est montré cependant que la nature de l'activité des assureurs veut que le provisionnement soit plus un problème de stratégie et de planification qu'un problème de modélisation mathématique.

Bien entendu, notre travail a suivi un certain enchaînement logique dans le choix des méthodes à utiliser. Le commencement était l'application des recommandations réglementaires en matière de constitution des PSAP. Ce premier contact chiffré avec les données nous a permis d'avoir une idée première sur la grandeur de la réserve à mettre de côté par la MATU afin d'honorer ses engagements techniques relatifs au portefeuille RC. Il est contestable que l'évaluation issue de cette méthode d'inventaire normalisée est fortement surestimée. Cela s'insère dans le cadre de la protection des droits des assurés.

Les méthodes déterministes ont un aspect plutôt comptable. Elles n'impliquent pas une connaissance avancée des mathématiques et des probabilités. Celles-ci ne nécessitent que des données triangulaires requises ainsi bien que l'application machinale de l'algorithmique approprié à la méthode en vigueur.

La technique de Chain Ladder, ainsi que toutes ses variantes se sont avérées spécialement adaptées aux données. Les méthodes autorégressives viennent en second lieu dans l'ordre de leur exposition, en ce qui concerne la méthode de London Chain, l'hypothèse de régression établie ne s'avère pas très bien ajustée à la nature de nos données.

De ce fait, cela a engendré effectivement bon nombre d'anomalies au niveau du triangle inférieur des paiements cumulés. Cette raison nous a dissuadées de ne pas tenir compte des résultats obtenus par cette technique.

Cependant, la méthode London pivot est particulièrement peu attrayante vu la complexité de son implémentation.

En effet, le processus de minimisation inhérent à cette méthode a été fait de manière manuelle, ce qui pousse à douter de la justesse et de la pertinence de l'évaluation de la réserve pour sinistres fournie par cette méthode.

Le besoin pressant d'avoir une idée précise de la qualité des estimations faites nous a poussées à recourir aux modèles stochastiques.

Le modèle de Mack fut spécialement adéquat et ses hypothèses s'ajustent parfaitement à nos données. En effet, cette « stochastisation » de la méthode de Chain Ladder Standard nous a permis d'avancer en matière d'appréciation du risque d'estimation.

La modélisation GLM fut également satisfaisante dans la mesure où l'on a été assez libre dans le choix de la loi qui sied le mieux aux incréments de règlements dont nous disposons.

Le souci d'avoir des estimations moins biaisées nous a conduits vers le choix de la technique Bootstrap, qui permet de simuler directement un nombre important de réserves obéissant à la modélisation couplée à la technique Bootstrap. Le constat établi est que cette méthode permet d'inclure dans l'expression de la meilleure réserve, les différents effets aléatoires.

Au stade final de l'étude, on se trouve confronté au grand nombre des résultats issus des différentes méthodes. Quoi que nous puissions éliminer quelques-unes à cause de l'inadéquation de leurs hypothèses de base, et malgré tous les efforts fournis pour cerner au mieux la vraie valeur de la réserve finale à constituer et à mettre de côté, l'évaluation exacte n'est sue que suite à sa réalisation. Le provisionnement est donc un art mystérieux dépendant de chaque firme, de son expérience et de sa vision stratégique.

Bibliographie

- C.Partrat : « **Evaluation stochastique de la provision pour sinistres** », *Conférence scientifique - Institut des Actuaire*s, (20 janvier 2004)
- Straub, Erwin : *NON-Life Insurance Mathematics*, 1988
- Bradley Efron: “**The jackknife, The bootstrap and Other resampling plans**”, *Department of statistics Stanford University*. 1982
- ACAPS, « **Solvabilité basé sur le risque(SBR)** », Projet de circulaire de l’ACAPS, version 25/04/2018
- Arrêté du ministre des finances et de la privatisation n° 1548-05 du 6 ramadan1426 (10 octobre 2005) relatif aux entreprises d’assurances et de réassurance
- P. D. England and R. J. Verrall : “**STOCHASTIC CLAIMS RESERVING IN GENERAL INSURANCE**”, Institut Canadien des Actuaires. (28 January 2002)
- Paulo J. R. Pinheiro .Andrade, Silva João Manuel, Centeno Maria de Lourdes: “ **Bootstrap methodology in claim reserving**”, *Centre for applied maths on forecasting and economic decision, Lisboa* . Juin 2000
- Thomas Mack (1993): “**Measuring the Variability of Chain Ladder Reserve Estimates**”, *Astin bulletin volume 23 N°2*.

Annexe 1 : ARRETE RELATIF AUX ENTREPRISES D'ASSURANCES ET DE REASSURANCE

Source : L'ACAPS.

Le ministre des finances et de la privatisation,

Vu la loi n°17-99 portant code des assurances promulguée par le dahir n°1-02-238 du 25 regeb 1423 (3 octobre 2002) telle qu'elle a été complétée ;

Vu le décret n° 2-04-355 du 19 ramadan 1425 (2 novembre 2004) pris en application de la loi n°17-99 portant code des assurances ;

Après avis du Comité consultatif des assurances réuni le ;

Section I Des provisions techniques

Article 19 : Provision pour sinistres à payer : c'est la valeur estimative des dépenses pour sinistres non réglés et le montant des dépenses pour sinistres réglés restant à payer à la date de l'inventaire y compris les capitaux constitutifs de rentes non encore mises à la charge de l'entreprise. Cette provision comprend, d'une part, la valeur estimative des dépenses à prévoir pour le service ou le rachat des rentes qui pourront être allouées par décision judiciaire ou qui ont déjà été allouées mais n'ont pas encore été constituées au titre des sinistres ayant entraîné le décès ou l'incapacité permanente des victimes et, d'autre part, la valeur estimative des dépenses restant à effectuer à titre d'indemnités journalières et à titre de frais, notamment : frais médicaux, frais pharmaceutiques, frais d'hospitalisation, frais funéraires, frais judiciaires, frais de déplacement et de rechute. Elle est calculée exercice par exercice pour son montant brut sans tenir compte des recours à exercer. Cette provision est évaluée dossier par dossier augmentée d'une estimation du coût des sinistres survenus mais non déclarés à la date de l'inventaire. Cette estimation est obtenue en appliquant au coût moyen des sinistres défini ci-dessous, l'estimation du nombre des sinistres survenus mais non déclarés. L'évaluation obtenue ne doit pas être inférieure à l'évaluation la plus élevée dégagée par les méthodes ci-après :

Première méthode : évaluation par référence au coût moyen des sinistres des exercices antérieurs. Le coût moyen est obtenu en divisant le coût total des sinistres terminés au cours des cinq dernières années par le nombre des sinistres définitivement réglés ou classés sans suite pendant ce temps.

Ce coût moyen est appliqué, pour chaque exercice, au nombre total des sinistres survenus (y compris l'estimation de ceux non déclarés à la date de l'inventaire) dont la provision résiduelle, calculée dossier par dossier, est supérieure ou égale à 30% de la charge de sinistres. Toutefois, cette méthode n'est applicable que pour les dix derniers exercices au plus.

L'estimation du nombre de sinistres survenus et non déclarés à la date de l'inventaire est basée sur les cadences de déclaration observées dans l'entreprise sur une période de cinq exercices au moins précédant l'exercice en cours.

Deuxième méthode : évaluation basée sur les cadences de règlement observées dans l'entreprise sur une période de dix exercices au moins y compris l'exercice en cours ;

Article 22 : La provision pour sinistres restant à payer afférente aux opérations d'assurances de responsabilité civile des véhicules terrestres à moteur visées au paragraphe 11°) de l'article premier ci-dessus est estimée en procédant à une évaluation distincte :

- 1°) des sinistres corporels ;
- 2°) des autres sinistres.

Dans chacune de ces deux évaluations, il est fait un calcul pour chacune des sous-catégories d'assurances énumérées à l'article 56 ci-dessous.

A – Pour les sinistres corporels : Les sinistres sont évalués dossier par dossier. Cette évaluation est augmentée d'une estimation du coût des sinistres survenus mais non déclarés à la date de l'inventaire. Cette estimation est obtenue en appliquant au coût moyen des sinistres défini ci-dessous, l'estimation du nombre des sinistres survenus mais non déclarés. L'évaluation obtenue ne doit pas être inférieure à l'évaluation la plus élevée dégagée par les méthodes ci-après :

Première méthode : évaluation par référence au coût moyen des sinistres des exercices antérieurs. Le coût moyen est obtenu en divisant le coût total des sinistres terminés au cours des cinq dernières années par le nombre des sinistres définitivement réglés ou classés sans suite pendant ce temps. Tout accident, même s'il ouvre droit à une indemnité à plusieurs victimes, est compté pour un seul sinistre.

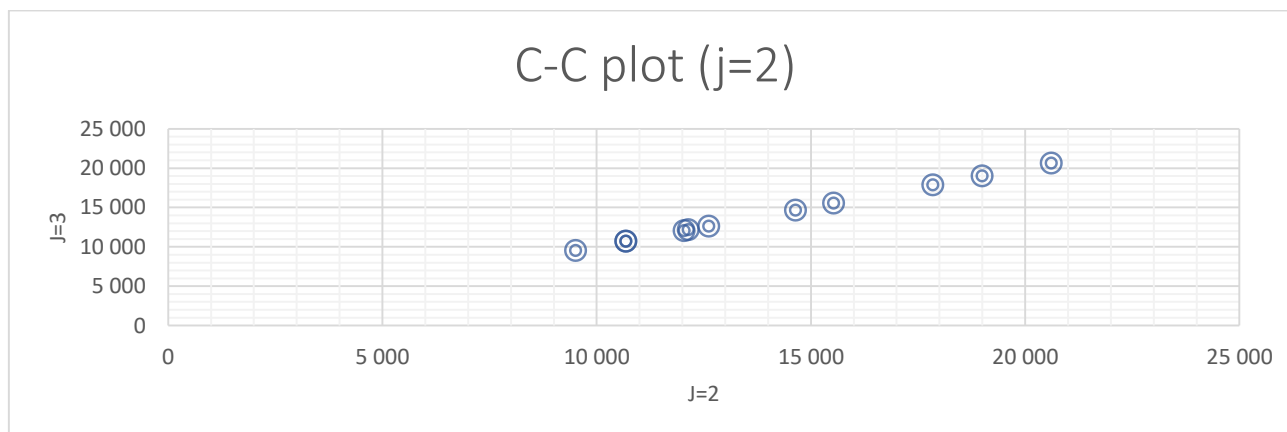
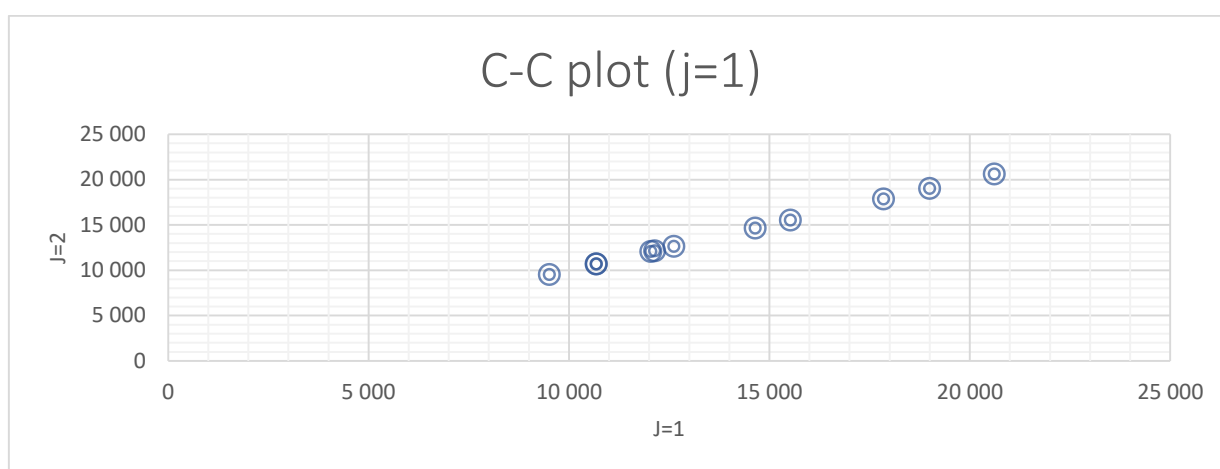
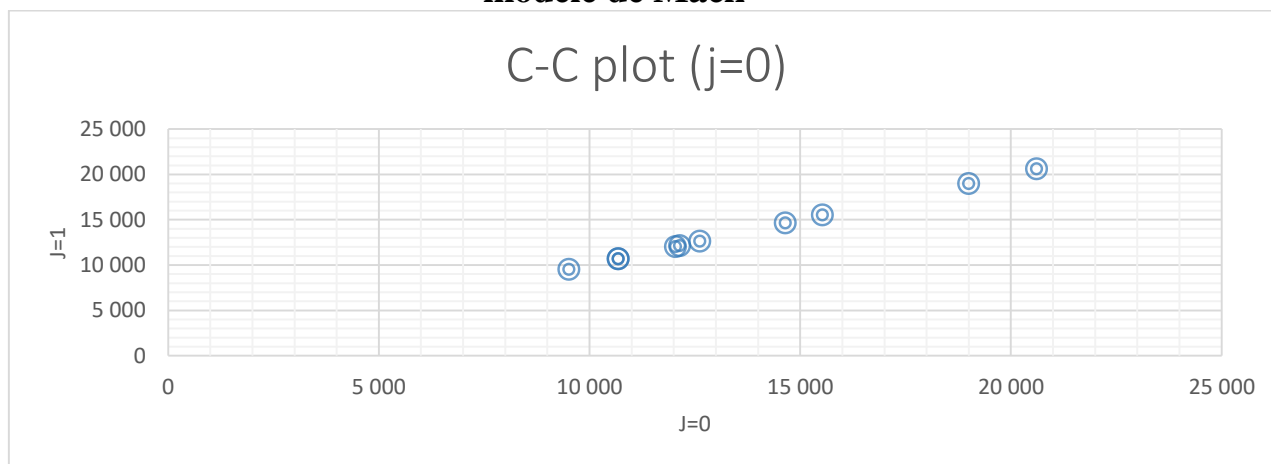
Ce coût moyen est appliqué, pour chaque exercice, au nombre total des sinistres survenus (y compris l'estimation de ceux non déclarés à la date de l'inventaire) dont la provision résiduelle, calculée dossier par dossier, est supérieure ou égale à 30% de la charge de sinistres. Toutefois, cette méthode n'est applicable que pour les dix derniers exercices au plus.

L'estimation du nombre de sinistres survenus et non déclarés à la date de l'inventaire est basée sur les cadences de déclaration observées dans l'entreprise sur une période de cinq exercices au moins précédant l'exercice en cours.

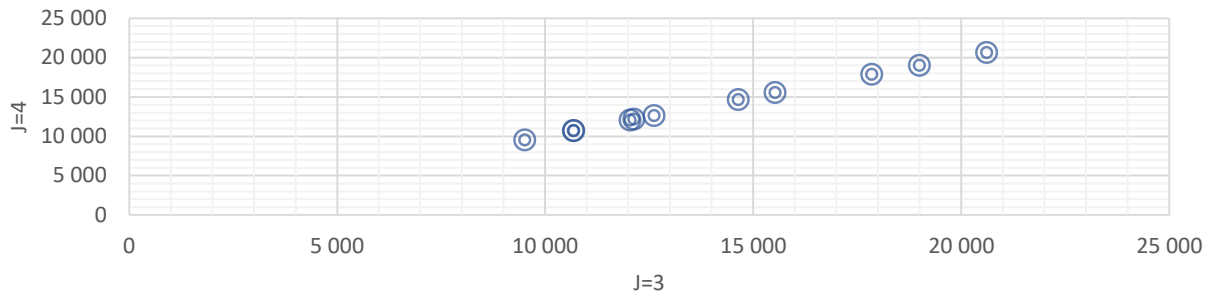
Deuxième méthode : évaluation basée sur les cadences de règlement observées dans l'entreprise sur une période de dix exercices au moins y compris l'exercice en cours.

B- Pour les autres sinistres : Les sinistres sont évalués dossier par dossier. Toutefois, l'utilisation de cette méthode n'est pas obligatoire pour les sinistres survenus au cours des deux derniers exercices. Cette évaluation est augmentée d'une estimation du coût des sinistres survenus mais non déclarés à la date de l'inventaire, déterminée de la même manière qu'au paragraphe A du présent article. L'évaluation obtenue ne doit pas être inférieure à l'évaluation dégagée par référence au coût moyen des sinistres des exercices antérieurs comme décrite au paragraphe A précité.

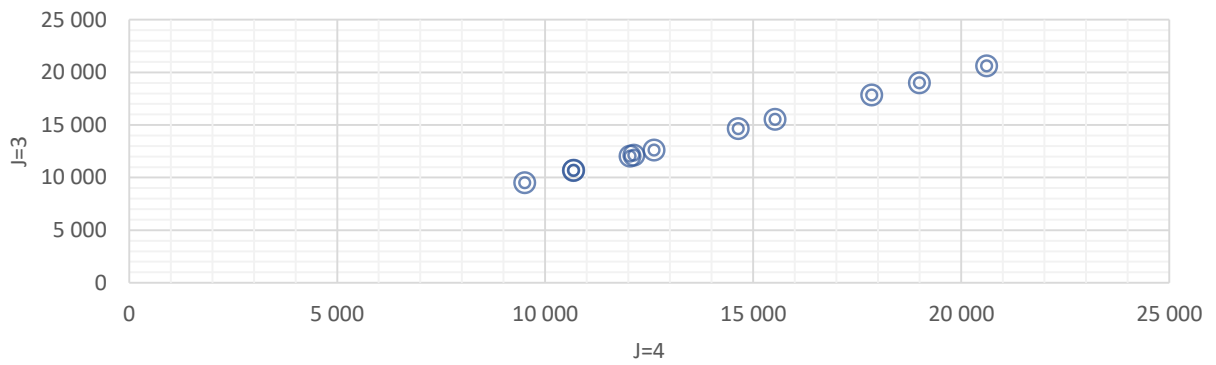
Annexe 2 : C-C Plot pour la vérification de l'hypothèse d'indépendance des coefficients de passage pour la méthode Chain Ladder Standard et pour le modèle de Mack



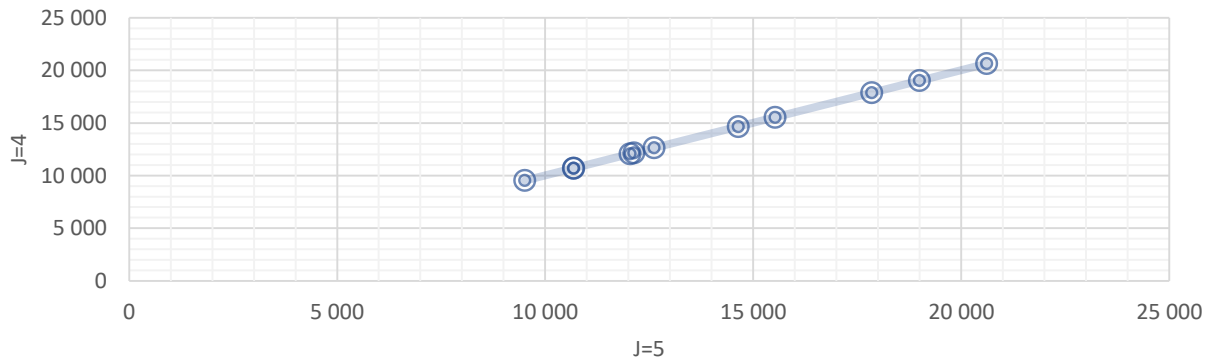
C-C plot (j=3)



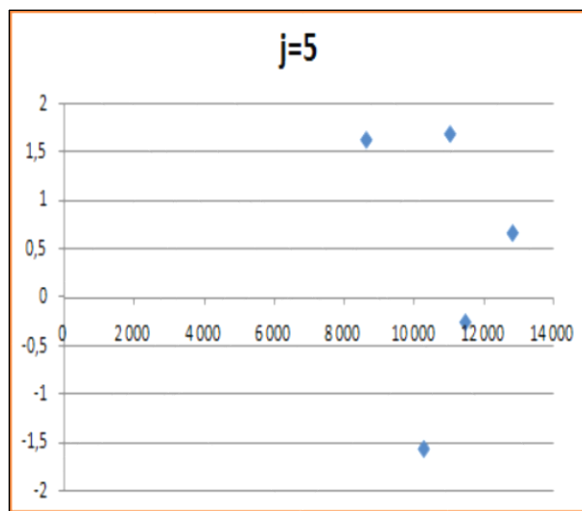
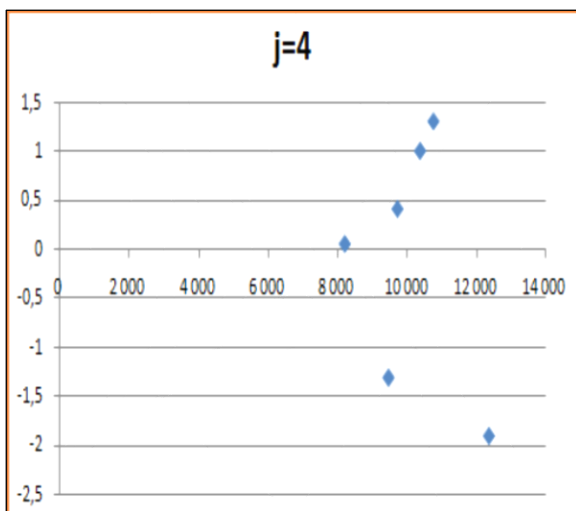
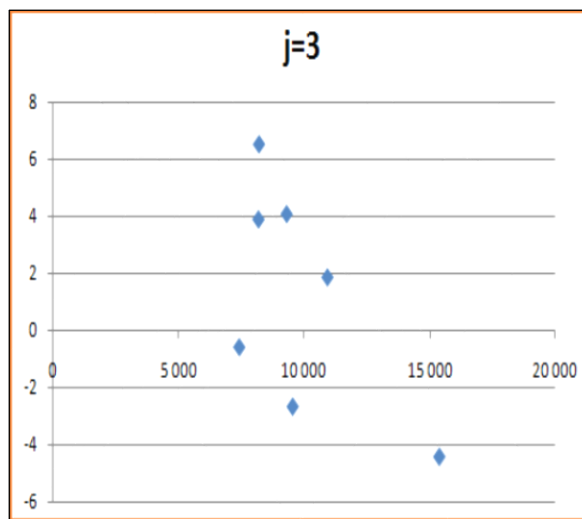
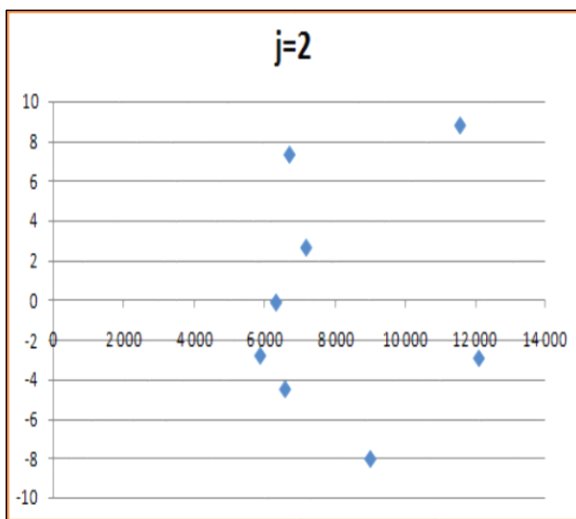
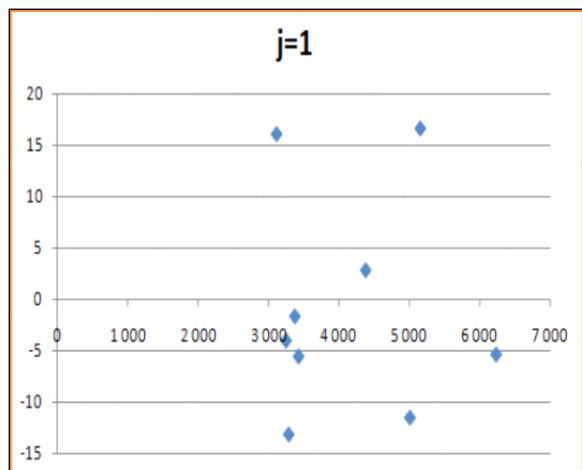
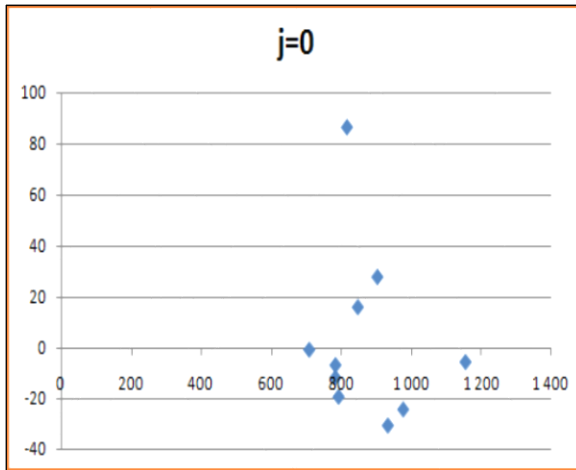
C-C plot (j=4)

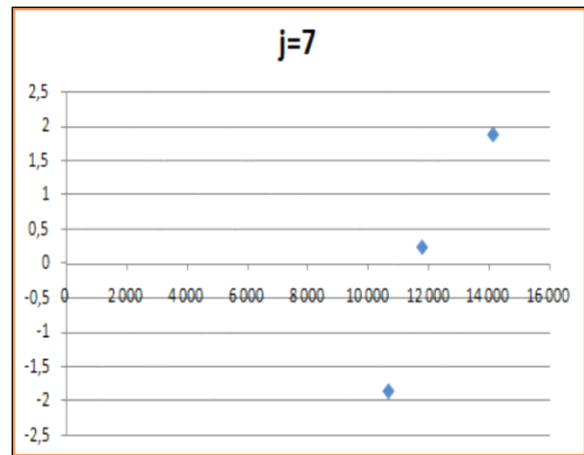
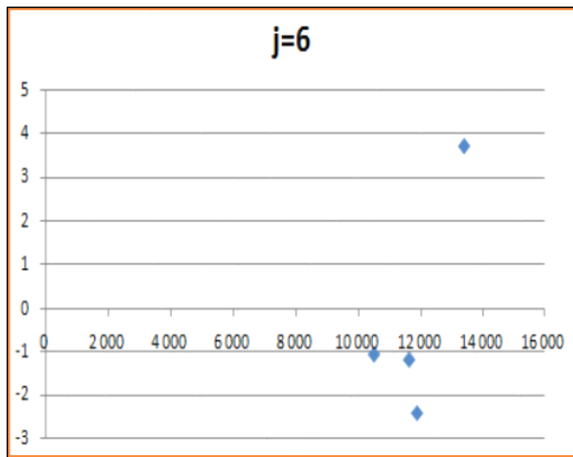


C-C plot (j=5)



Annexe 3 : C-C L'indépendance des résidus pour le modèle de Mack





Annexe 5 : A propos du Quantile-Quantile Plot

Le Q-Q Plot est un outil graphique qui, à travers un tracé, permet de juger du degré d'ajustement d'une distribution à un jeu de données. Il autorise également la comparaison de deux distributions jugées similaires.

Comme son nom l'indique, le principe du diagramme Quantile-Quantile repose sur la comparaison des positions des quantiles théoriques et des quantiles empiriques. Concrètement, il s'agit de dessiner le nuage de points $P_i(x_i^*, x_i)$ avec x_i^* est le quantile issu de la distribution théorique et x_i le quantile pris de l'échantillon empirique dont on veut chercher le modèle.

Si la loi sélectionnée s'ajuste bien aux données, le nuage des points P_i s'aligne de manière assez claire autour de la première bissectrice. A la rigueur, le nuage de points pourrait s'ajuster autour d'une droite d'équation : $x_i = ax_i^* + b$. Cela voudrait dire que la distribution choisie est adéquate aux données à une transformation près ; cela ne remet pas en question la forme de la loi mais plutôt ses paramètres.

Annexe 6 : Les algorithmes de Newton Raphson

Considérant par exemple une poutre verticale bloquée entre deux plaques rigides (supérieure et inférieure). Soit d le déplacement vers le bas imposé sur la plaque supérieure et P la force (inconnue) appliquée à la même plaque afin de garantir le déplacement d et $u(x)$ le champ de déplacement inconnu dans la poutre. Imaginons d'avoir à disposition seulement un outil de calcul qui, en fonction de P en entrée, donne en sortie d et sa dérivée par rapport à P .

La méthode de Newton-Raphson procède par linéarisations successives de $d(P)$ à partir d'une estimation initiale P_0 . On cherche un ΔP tel que $d(P_0 + \Delta P) = w$ avec w c'est le déplacement imposé. Mais, au lieu de résoudre l'équation non linéaire (on ne le sait pas faire !), on se limite à linéariser l'équation (développer au premier ordre) et à résoudre l'équation linéarisée :

$$d(P_0 + \Delta P) \approx d(P_0) + (dd/dP)(P_0) \Delta P = w$$



$$\Delta P = \frac{w - d(p_0)}{\frac{dd}{dp}(p_0)}$$

Géométriquement ceci revient à tracer la droite tangente à $d(P)$ en $P = P_0$ et à calculer P_1 comme intersection de cette droite avec la droite $d = w$. On répète maintenant la procédure avec une linéarisation autour de P_1 :

$$d(P_1 + \Delta P) \approx d(P_1) + (dd/dP)(P_1) \Delta P = w$$



$$\Delta P = \frac{w - d(p_1)}{\frac{dd}{dp}(p_1)}$$

On continue les itérations jusqu'à convergence, c'est à dire, par exemple, quand le résidu : $|w - d(P_i)| < \text{toll}$ est plus petit d'une tolérance fixée par l'utilisateur.

Notons que si $d(P)$ a concavité de signe constant et une continuité suffisante, la méthode converge nécessairement.