



المندوبية السامية للتخطيط
HAUT-COMMISSARIAT AU PLAN

ROYAUME DU MAROC

*_*_*_*_*

HAUT COMMISSARIAT AU PLAN

*_*_*_*_*_*_*_*



INSTITUT NATIONAL

DE STATISTIQUE ET D'ECONOMIE APPLIQUEE

INSEA

Projet de Fin d'Etudes

**Etude des méthodes d'estimation des provisions pour
sinistres à payer en assurance non-vie**

Préparé par : Melle Meriem BOUYSFI et Melle Fatima HAMMA

Sous la direction de : *M. Mustapha LEBBAR* (INSEA)

M. Abdelkarim KHIRAOUI (ARM Consultants)

Soutenu publiquement comme exigence partielle en vue de l'obtention du

Diplôme d'Ingénieur d'Etat

Filière : Actuariat-Finance

Devant le jury composé de :

- *M. Mustapha LEBBAR* (INSEA)
- *M. Amal EL ORAIBY* (INSEA)
- *M. Abdelkarim KHIRAOUI* (ARM Consultants)

Juin 2017, PFE 10

Résumé :

Ce rapport a pour objectif d'étudier les différentes méthodes déterministes et stochastiques d'évaluation de la provision des sinistres à payer en assurance Non-Vie. Puis citer les points de différence entre elles.

Pour ce faire, nous avons implémenté un outil informatique permettant le calcul automatique de la réserve selon la méthode demandée.

À travers ce mémoire, dans la première partie, nous avons donné une vue d'ensemble sur la nature de l'assurance non vie et présenté de façon théorique l'ensemble des méthodes déterministes et stochastiques.

Dans la deuxième partie, et par le biais d'application numérique sur un triangle issu de la branche RC auto et plus particulièrement la catégorie poids lourds, nous avons pu comparer les résultats donnés par les différentes méthodes et constater que les réserves estimées diffèrent d'une méthode à l'autre. Ainsi, la question qui se pose est la suivante : Existe-t-il une méthode générale à adopter ? Afin d'y répondre, nous avons décidé de faire l'application numérique sur un autre triangle issu de la même branche RC auto mais une différente catégorie, à savoir le Transport Public des Voyageurs. À l'aide de cette étude comparative nous avons pu conclure qu'on ne peut pas généraliser ou préciser un critère qui nous permettra de prendre une décision absolue.

Par conséquent, il est devenu important de trouver une statistique qui donne une idée sur la fiabilité de la méthode ou du moins son adaptation à l'historique des sinistres à étudier tout en insistant sur le fait que le futur peut évoluer différemment du passé.

Mots clés

Assurance non vie – provisionnement – méthodes déterministes – méthodes stochastiques – méthodes règlementaires.

Remerciements

Tout d'abord, nous tenons à remercier, tout particulièrement, M. Abdelkrim KHIRAOUI Président Fondateur d'A.R.M CONSULTANTS d'avoir accepté notre demande de stage, et d'avoir été notre encadrant et guide durant cette expérience professionnelle fructueuse. Ainsi que M. Mourad MANSSOURI et Madame Houria BENSALTANA qui nous ont éclairées tout au long de la période de stage.

Nos remerciements s'adressent également à M. Mustapha LEBBAR qui a supervisé notre stage de près, pour ses conseils lucides et pertinents ainsi que pour le maximum d'informations qu'il nous a présenté.

Nos vifs remerciements vont également aux membres du jury pour l'intérêt qu'ils ont porté à notre recherche en acceptant d'examiner notre travail et de l'enrichir par leurs propositions.

Enfin, nous tenons également à remercier toutes les personnes qui ont participé de près ou de loin à la réalisation de ce travail.

Dédicace 1 :

Je dédie ce modeste travail

A mes chers parents qui ont fait de leurs mieux et qui se sont sacrifiés pour que je puisse réaliser mes rêves, réussir ma vie professionnelle et aussi personnelle.

Je vous remercie pour tout le soutien et l'amour que vous me portez depuis mon enfance et j'espère que votre bénédiction m'accompagne toujours.

A tous les professeurs, qui font de leurs mieux afin de nous offrir le meilleur d'eux même, et participent de près ou de loin dans notre formation Veuillez trouver dans ce travail l'expression de mon respect le plus profond.

A une personne spéciale, mon conseiller et mon ami fidèle M. Mohammed EL YAHYAOUÏ, qui m'a assisté dans les moments difficiles et m'a pris doucement par la main pour traverser des épreuves pénibles.

Je te suis très reconnaissante, et je ne te remercierai jamais assez pour ton amabilité, ta générosité, ton aide précieux.

Aux étudiants de notre chère école.

A tous ceux qui ont contribué de près ou de Loin à la réalisation de ce modeste travail.

Meriem Bouysfi

Dédicace 2 :

Je dédie ce travail à

Mes chers parents, Vous êtes la source de mon bonheur, mon courage et mon espoir. Aucune dédicace ne saurait être assez éloquente pour exprimer ce que vous méritez pour tous les sacrifices que vous n'avez cessé de me donner depuis ma naissance, durant mon enfance et même à l'âge adulte.

A tous les membres de ma famille, petits et grands, veuillez trouver dans ce modeste travail l'expression de mon affection, mon amour et ma reconnaissance pour tous vos efforts.

A mes chers amis, Je ne peux trouver les mots justes et sincères pour vous exprimer mon affection et mes pensées, vous êtes pour moi des frères, sœurs et des amis sur qui je peux compter.

Je vous dédie tous ce travail en témoignage de mon profond amour. Puisse Dieu, le tout puissant, vous préserver et vous accorder santé, longue vie et bonheur.

Fatima Hamma

Table des matières

Résumé :	3
Mots clés	3
Remerciements	4
Dédicace 1 :	5
Dédicace 2 :	6
Liste des tableaux :	11
Liste des figures :	14
Introduction générale :	15
Partie I : le cadre théorique de l'évaluation des provisions :	16
Chapitre I : Généralités	16
Chapitre II : Les méthodes déterministes :	18
1. Description des données : Les triangles run-off :	18
2. Méthodes de Chain-Ladder :	19
2.1. Méthode de Chain-Ladder classique :	19
2.3. Méthode de Chain-Ladder pondérée :	20
2.3.1. Pondération « Min/Max » :	21
2.3.2. Pondération « par année calendaire » :	21
3. Méthodes autorégressives :	21
3.1. Méthode de London-Chain :	21
3.2. Méthode de London Pivot :	22
4. Méthodes factorielles :	22
4.1. Méthode de De Vylder :	22
4.2. Méthode de Taylor :	23
5. Méthode de Loss Ratio :	24
5.1. Méthode de Loss Ratio simple :	24
5.2. Méthode de Loss Ratio complémentaire :	24
6. Méthodes mixtes :	25
6.1. Méthode de Bornhuetter-Ferguson :	25
6.2. Cape Cod :	26
6.3. La méthode Benktander :	27
7. Conclusion sur les méthodes déterministes :	28
Chapitre III : Les méthodes stochastiques :	29
1. Modélisation GLM :	29
2. Mack :	32
3. Munich Chain Ladder :	35

Chapitre IV : Méthodes réglementaires	39
1. Dossier/dossier :	40
2. Cout moyen :	40
3. Méthode du « Cadence des règlements » :	41
Partie II : le cadre pratique de l'évaluation des provisions :	41
Présentation des données :	42
Présentation de l'outil informatique :	42
Chapitre I : poids lourds	44
1. Application des méthodes déterministes :	44
1.1. Application de la méthode Chain Ladder :	44
1.1.1. Test des hypothèses de la méthode :	44
1.1.2. Application de Chain Ladder-standard :	50
1.1.3. Application de CHAIN LADDER pondéré :	51
1.2. Application des Méthodes autorégressives :	55
1.2.1. Application de la méthode London-Chain :	55
1.2.2. Application de London-Pivot :	58
1.3. Application des méthodes factorielles :	62
1.3.1. Application DeVyllder :	62
1.3.2. Application de Taylor :	64
1.4. Application des méthodes basées sur les ratios :	70
1.4.1. Loss Ratio simple :	70
1.4.2. Loss Ratio complémentaire :	72
1.5. Application des méthodes mixtes :	76
1.5.1. Bornhuetter-Ferguson :	76
1.5.2. Application de Cape Cod :	80
1.5.3. Application de La méthode Benktander	85
2. Application des méthodes stochastiques :	85
2.1. Application de Mack :	85
2.2. Application de la méthode de Munich Chain Ladder :	90
2.3. Application de GLM :	102
2.3.1. Modèle Log-normal :	103
2.3.2. Modèle Gamma :	105
2.3.3. Choix du modèle :	107
3. Application de cadence de règlement :	108
4. Récapitulatif des résultats :	109
Chapitre II : TPV	111

1. Application des méthodes déterministes :	111
1.1. Application de Chain Ladder :	111
1.2. Application des Méthodes autorégressives :	114
1.2.1. Application de London-Chain :	114
1.2.2. Application de London-pivot :	115
1.3. Application des Méthodes factorielles :	116
1.3.1. Application de la méthode de Taylor :	116
1.3.2. Application de la méthode De Vylder :	117
1.4. Application des Méthodes basées sur le loss ratio :	118
1.4.1. Loss ratio simple :	118
1.4.2. Loss Ratio complémentaire :	119
1.5. Application des Méthodes mixtes :	120
1.5.1. Bornhuetter Ferguson :	120
1.5.2. Cape Cod :	121
1. 5. 3. Benktander:	122
2. Application des méthodes stochastiques :	123
2.1. Mack :	123
2.2. GLM :	124
2.3. Application de Munich Chain Ladder :	125
3. Méthode réglementaire / Cadence de règlements :	126
4. Récapitulatif des résultats :	126
Chapitre III : Comparaison des résultats et outils de choix :	128
1. Comparaison des résultats :	128
2. Outil de choix :	129
3. Conclusion sur les méthodes :	132
Conclusion	133
Bibliographie :	134
Annexe :	136
I. Présentation d'A. R.M CONSULTANTS :	136
II. Tests statistiques :	136
III. Détails de calcul de la provision de la catégorie :TPV	137
IV. Données initiales de la MATU RC auto :	144

Liste des abréviations :

PSAP : La provision pour sinistres à payer

IBNR : Incurred But Not Reported

TPV : transport public des voyageurs

MATU : Mutuelle d'assurances des transporteurs unis

$C_{i,j}$: Le Paiement cumulé où i est un indice représentant l'exercice de survenance et j un indice représentant l'année de développement

$S_{i,j}$: Les charges dites dossier/dossier où i est un indice représentant l'exercice de survenance et j un indice représentant l'année de développement

GLM : Generalized linear model

i.i.d : indépendants identiquement distribués

R_i : La provision à constituer pour couvrir les sinistres survenus en i

R : La provision totale à constituer pour couvrir les sinistres survenus pendant les n années

P_i : Le montant de primes acquises relatif à l'année de survenance i

Liste des tableaux :

Tableau 1:Les principales classifications de l'activité assurance non vie.....	16
Tableau 2:exemple de famille de lois exponentielles.....	30
Tableau 3:Exemples de fonction lien utilisé en GLM.....	31
Tableau 4:Triangle des coefficients de passage	46
Tableau 5:caractéristiques des coefficients de passage	47
Tableau 6:caractéristiques des coefficients de passage	47
Tableau 7:calcul des règlements estimés par la méthode de Chain-Ladder	50
Tableau 8: les provisions annuelles par Chain Ladder	51
Tableau 9:calcul de la cadence de règlement des sinistres	51
Tableau 10:calcul des règlements estimés par la méthode de Chain-Ladder pondération MIN/MAX .	53
Tableau 11:calcul des provisions annuelles par Chain Ladder pondérée MIN/MAX.....	53
Tableau 12:calcul des règlements estimés par la méthode de Chain-Ladder pondération par année calendaire	54
Tableau 13: calcul des provisions annuelles par Chain Ladder pondérée par année calendaire	55
Tableau 14:l'estimation des paramètres de la méthode de London Chain	56
Tableau 15:calcul des règlements estimés par la méthode de London Chain	56
Tableau 16:calcul des provisions annuelles par London Chain	57
Tableau 17:l'estimation des paramètres de la méthode de London pivot	58
Tableau 18:: calcul des règlements estimés par la méthode de London Pivot	58
Tableau 19:calcul des provisions annuelles par London Pivot.....	59
Tableau 20: l'estimation des paramètres de la méthode de De Vylder	62
Tableau 21:calcul des règlements estimés par la méthode de De Vylder.....	63
Tableau 22:calcul des provisions annuelles par De Vylder.....	63
Tableau 23:l'estimation des paramètres de la méthode de Taylor	64
Tableau 24:l'estimation des paramètres de la méthode de Taylor par extrapolation arithmétique	66
Tableau 25:calcul des règlements estimés par la méthode de Taylor arithmétique.....	67
Tableau 26:calcul des provisions annuelles par Taylor arithmétique.....	67
Tableau 27:l'estimation des paramètres de la méthode de Taylor par extrapolation géométrique	69
Tableau 28:calcul des règlements estimés par la méthode de Taylor géométrique.....	69
Tableau 29:calcul des provisions annuelles par Taylor géométrique.....	70
Tableau 30:Calcul des charges de la dernière année de développement pour chaque année de survenance	71
Tableau 31:calcul des provisions annuelles par Loss Ratio simple.....	71
Tableau 32: Calcul des Ratio pour chaque année de développement j.....	72
Tableau 33 : le loss ratio correspondant à l'année de développement j	74
Tableau 34:Calcul des $C_{i,n}$ pour chaque année de survenance i	75
Tableau 35:calcul des provisions annuelles par Loss ration complémentaire.....	75
Tableau 36 :calcul des règlements estimés par la méthode de Chain Ladder	76
Tableau 37:Calcul des estimations a priori des montants de charge ultime pour chaque année de survenance i.....	77
Tableau 38:Calcul de la L'estimateur C_i , nBF de la charge ultime par cette méthode pour l'année de survenance i :	78
Tableau 39:calcul des provisions annuelles par Bornhuetter-Ferguson	78
Tableau 40 : tableau des $R_i C_i, j$ pour chaque année de développement.....	79
Tableau 41:Calcul des cadences de paiement pour chaque année de développement	80
Tableau 42:La charge ultime pour chaque année de survenance i :	81
Tableau 43:calcul des provisions annuelles par Cape Cod.....	82

Tableau 44:Indépendance des sinistres cumulés non connus (ou non réglés) des sinistres déjà connus ou réglés	82
Tableau 45:calcul des provisions annuelles par La méthode Benktander	85
Tableau 46: Calcul des sigmas	88
Tableau 47:calcul des provisions annuelles par Mack	88
Tableau 48:Calcul de l'écart quadratique moyen pour chaque année de survenance	89
Tableau 49:test d'indépendance des années de survenance dans les règlements et dans les charges ...	90
Tableau 50:l'estimation des paramètres de la méthode de Munich Chain Ladder relatifs au triangle des paiements.....	95
Tableau 51:l'estimation des paramètres de la méthode de Munich Chain Ladder relatifs au triangle des charges.....	96
Tableau 52:les résidus standardisés des facteurs de paiements	97
Tableau 53:les résidus standardisés des facteurs de charge	97
Tableau 54:: calcul de l'espérance de $Q_{ij} - 1$ et $Q_{i,j}$, et de leurs variance	98
Tableau 55:les résidus standardisés du triangle de paiement ($Res(Q_{ij} - 1)/C_{i,j}$)	98
Tableau 56:des résidus standardisés du triangle de charge ($Res(Q_{ij}/C_{i,j})$).....	99
Tableau 57 :triangle de paiement complété par la méthode Munich-Chain Ladder.....	99
Tableau 58 :triangle des charges complétées par la méthode Munich-Chain Ladder	100
Tableau 59:résultat de provisions annuelles calculées par Munich Chain Ladder	100
Tableau 60:quantification de l'erreur de l'estimation des provisions annuelles par Munich Chain Ladder.....	101
Tableau 61:quantification de l'erreur de l'estimation par Munich Chain Ladder	101
Tableau 62:extrait de la base des données utilisée en GLM.....	102
Tableau 63:Triangle des incréments estimé par le modèle Log-normale.....	103
Tableau 64:les provisions annuelles confiance résultantes de la modélisation GLM (log normale) ..	103
Tableau 65:Triangle des incréments estimé par le modèle Gamma	105
Tableau 66:les provisions annuelles résultantes de la modélisation GLM (Gamma)	105
Tableau 67:les provisions annuelles et intervalles de confiance résultants de la modélisation GLM (log normale)	107
Tableau 68:calcul de cadence de règlement	108
Tableau 69:calcul des provisions annuelles par la méthode de cadence des règlements	108
Tableau 70:calcul de la provision par les différentes méthodes	109
Tableau 71:Ecart relatif entre le montant des provisions par les différentes méthodes et la méthode réglementaire de cadence de règlement.....	110
Tableau 72:les mesures de dispersion des facteurs de développement individuels.....	111
Tableau 73:calcul des provisions annuelles par Chain Ladder.....	113
Tableau 74:calcul des provisions annuelles par London Chain	114
Tableau 75:calcul des provisions annuelles par London Pivot.....	115
Tableau 76:calcul des provisions annuelles par Taylor.....	116
Tableau 77:calcul des provisions annuelles par De Vylder.....	117
Tableau 78:calcul des provisions annuelles par Loss Ratio	118
Tableau 79:calcul des provisions annuelles par Loss Ratio complémentaire.....	119
Tableau 80:calcul des provisions annuelles par Bornhuetter Ferguson :	120
Tableau 81: calcul des provisions annuelles par Cape Cod :	121
Tableau 82 : Provisions calculées par la méthode de Benktander.....	122
Tableau 83:calcul des provisions annuelles par Mack	123
Tableau 84:calcul des provisions annuelles par le modèle log normale.....	124

Tableau 85: quantification de l'erreur de l'estimation des provisions annuelles par Munich Chain Ladder.....	125
Tableau 86:quantification de l'erreur de l'estimation par Munich Chain Ladder	125
Tableau 87:calcul des provisions annuelles par la méthode de cadence des règlements	126
Tableau 88:récapitulatif des résultats	127
Tableau 89:L'écart relatif par rapport à la méthode de Cadence de règlements	127
Tableau 90: le montant de la réserve estimée par les différentes méthodes pour les deux catégories RC auto	128
Tableau 91:Ecart relatif entre le montant des provisions par les différentes méthodes et la méthode réglementaire de cadence des règlements des deux catégories	129
Tableau 92:calcul de l'erreur SCE fait par les méthodes déterministes en poids lourds.....	130
Tableau 93:calcul de l'erreur SCE fait par les méthodes économiques en TPV	131
Tableau 94: calcul de l'erreur SCE fait par les méthodes déterministes en TPV.....	131
Tableau 95:calcul de l'erreur SCE fait par les méthodes économiques en TPV	131
Tableau 96:avantages et inconvénients de chacune des méthodes déterministes.....	132

Liste des figures :

Figure 1: Comparaison des f_{ij} à $f. j$ pour $j=0, \dots, 11$	46
Figure 2: Représentation des nuages de points $(C_i, j, C_i, j + 1)$, $j=0, \dots, 11$	49
Figure 3: Représentation des nuages de points $(C_i, j + \alpha, C_i, j + 1 + \alpha)$, $j=0, \dots, 8$	61
Figure 4: Extrapolation linéaire	65
Figure 5: Extrapolation exponentielle	65
Figure 6: Extrapolation Logarithmique	65
Figure 7: courbe des L_j en fonction des années de développement j	73
Figure 8: La courbe des ratios en fonction du logarithme des années de développement.....	73
Figure 9 : courbes des Loss ratio pour chaque année de survenance en fonction des années de développement.....	76
Figure 10: courbe du rapport $RiCi, j$ en fonction de l'année survenance i	79
Figure 11: courbe du rapport $RiCi, j$ en fonction de l'année survenance i	83
Figure 12: courbes de $p_{ci, j}$ en fonction de l'année de survenance i	84
Figure 13: Les résidus estimés par la méthode des moindres carrées en fonction des paiements cumulés pour chaque année de développement j	87
Figure 14 :Représentation des nuages de points $(S_i, j, S_i, j + 1)$, $j=0, \dots, 9$	92
Figure 15 :Les résidus estimés par la méthode des moindres carrées en fonction des charges dossier/dossier pour chaque année de développement j	94
Figure 16: Représentation graphique des résidus des facteurs de développement du triangle des paiements en fonction des résidus des ratios S/C	94
Figure 17: Représentation graphique des résidus des facteurs de développement du triangle des charges en fonction des résidus des ratios C/S	95
Figure 25: les provisions estimées par les différentes méthodes	110
Figure 26: représentation des points $(C_i, j, C_i, j + 1)$ $i=0, \dots, n-j-1$	112

Introduction générale :

L'évaluation des coûts de la sinistralité est une phase importante avant la clôture des comptes. Elle impacte le résultat de l'entreprise et son bilan puisqu'elle représente la partie la plus importante du passif.

Ces provisions doivent être évaluées correctement, et l'assureur doit être au courant de l'incertitude autour de cette estimation.

En pratique les caractéristiques du risque ne sont pas connues à priori. Ainsi, pour évaluer son coût, on essaie de l'estimer à partir de l'observation des données historiques.

Notre travail traite l'estimation des provisions pour sinistres à payer par des méthodes statistiques (déterministes ou stochastiques), afin d'étudier la convergence de ces méthodes et leur fiabilité.

Ces méthodes présupposent des hypothèses de stabilité temporelle relativement lourdes. Pour cela et en se basant sur des données réelles, nous avons choisi de travailler en 2 étapes :

- ✓ Dans une première étape, nous évaluons les provisions pour sinistres à payer en utilisant les différentes méthodes après vérification des hypothèses introduites dans chacune.
- ✓ Dans une deuxième étape, nous comparons les évaluations faites. La comparaison nous permet de choisir la méthode la plus fiable.

Nous allons appliquer ces méthodes sur des données provenant de deux différentes catégories de la branche RC automobile de la MATU à savoir Poids Lourds et Transport Public des Voyageurs (TPV) pour orienter la comparaison sur la particularité de la nature du triangle.

Partie I : le cadre théorique de l'évaluation des provisions :

Chapitre I : Généralités

L'assurance est un contrat par lequel les individus se protègent contre un évènement aléatoire particulier, cela veut dire que moyennant le paiement des primes, ces individus se font promettre de recevoir des prestations en cas de réalisation d'un risque.

Dans le but de protéger ces individus, l'assureur les associe à une communauté des personnes qui cotisent eux aussi pour se protéger. Ainsi l'assurance est un système de gestion de risque basé sur la solidarité.

On distingue deux types d'assurance au Maroc ; assurance vie et assurance non vie, la distinction est faite principalement à cause de la différence du mode de gestion des primes. En effet, l'assurance vie gère les primes par capitalisation alors que l'assurance non vie les gère par répartition (les primes payées par tous les assurés financent les prestations versées à ceux qui subissent des sinistres)

L'assurance non vie regroupe :

- L'assurance des biens
- L'assurance de responsabilité
- L'assurance des dommages corporels

Les principales classifications de l'activité assurance non vie :

Assurances dommages		Assurances de personnes
- Assurances de choses	- Assurances de responsabilité	- Assurances dommages corporels - les assurances maladies

Tableau 1:Les principales classifications de l'activité assurance non vie

L'activité d'assurance diffère de celle des entreprises industrielles vu qu'elle se caractérise par un cycle de production inverse. En effet, l'assureur collecte les primes immédiatement alors que l'indemnisation se fait ultérieurement.

Par conséquent, chaque compagnie d'assurance est obligée par la loi de constituer des provisions techniques pour faire face à ses engagements vis-à-vis ses assurés.

Les types de provisions techniques :

Ce sont les provisions constituées par les entreprises d'assurance pour le règlement intégral de leur engagement technique vis à vis des assurés.

a) Provisions pour primes non acquises :

Il s'agit de la provision destinée à constater, pour l'ensemble des contrats en cours, la part des primes émises et des primes restant à émettre se rapportant à la période comprise entre la date d'inventaire et la date de la prochaine échéance de prime ou, à défaut, du terme du contrat.

b) Provision pour risques en cours :

C'est la provision que l'on doit constituer lorsque le montant attendu des primes pour les exercices suivants, ne permet pas de couvrir le montant des risques à survenir au cours de ces mêmes exercices.

c) Provision pour risques croissants:

Un risque croissant est un risque dont la probabilité de réalisation augmente dans le temps, comme l'invalidité par exemple.

Le montant à provisionner est égale à la différence des valeurs actuelles des engagements respectivement pris par l'assureur et par les assurés ;

d) La provision pour égalisation :

Elle est destinée à faire face aux fluctuations de sinistralité et couvrir les risques spéciaux.

e) La provision pour risque d'exigibilité (PRE) :

Elle a pour objet de permettre à l'assurance de faire face à ses engagements lorsqu'une moins-value de certains actifs est constatée, c'est-à-dire la valeur réelle de ces actifs est inférieure à leur valeur nette comptable.

f) La provision mathématique des rentes :

C'est la valeur actuelle probable des engagements de l'assurance, en ce qui concerne les rentes et les accessoires des rentes résultantes des événements réalisés à l'antérieur de l'exercice et dont les versements seront après sa clôture.

g) Provision pour sinistres à payer :

C'est une estimation du montant à verser après la clôture de l'exercice au titre d'un événement survenu antérieurement.

Les provisions comportent trois types de sinistres restant à payer :

- Les sinistres dont l'évaluation est définitive, connue et pour lesquels il ne demeure que le mouvement de trésorerie à générer,
- Les sinistres pour lesquels l'évaluation n'est pas définitive et ayant fait ou non l'objet de règlements partiels,
- Les sinistres survenus antérieurement à la clôture mais dont la survenance n'a pas été portée, à cette date, à la connaissance de l'entreprise. Il s'agit des sinistres tardifs (IBNR).

Cette catégorie de provisions, à savoir les provisions pour sinistres à payer, fera l'objet de notre étude.

On fait recours aux méthodes statistiques pour estimer le montant des PSAP auquel s'ajoute la provision IBNR.

Ces méthodes sont d'autant plus pertinentes que :

- L'historique des données est important et fiable,
- Le passé, le présent et le futur sont structurellement proches
- Le passé est régulier et peu volatile

Chapitre II : Les méthodes déterministes :

Dans cette partie nous présenterons différentes méthodes d'évaluation des provisions sans se limiter aux méthodes classiques, ces méthodes s'appuient sur l'étude des paiements et des charges, et puisque les méthodes déterministes ne permettent pas d'estimer l'erreur de prédiction, le chapitre qui va suivre sera consacré aux méthodes stochastiques.

1. Description des données : Les triangles run-off :

Un triangle run-off est une représentation des paiements ou des charges dans une table. Quand on a l'information complète, les données prennent la forme d'un triangle. Chaque cellule (i, j) contient une information à propos du sinistre survenu à l'année i à la fin de l'exercice $i+j$.

Afin de calculer et analyser Les provisions pour sinistres à payer, on a besoin de déterminer les triangles suivants :

- Le triangle contenant le nombre de sinistres
- Le triangle contenant les paiements réglés chaque année
- Le triangle contenant les paiements cumulés
- Le triangle contenant les charges estimées

De plus, on a besoin de savoir, pour chaque année de survenance, un indicateur de volume. En l'occurrence, la prime totale ou bien le nombre des risques assurés.

		Délai de règlement					
		0	1	...	j	...	J
Année de survenance	0	$C_{0,0}$	$C_{0,1}$...	$C_{0,j}$...	$C_{0,J}$
	1	$C_{1,0}$					
					
	i	$C_{i,1}$					
					
	I	$C_{I,0}$					

Montant cumulé des paiements pour l'année calendaire I

Le triangle des paiements cumulés

2. Méthodes de Chain-Ladder :

2.1. Méthode de Chain-Ladder classique :

La méthode Chain-Ladder suppose que l'évolution des paiements cumulés d'une année de développement à l'autre reste identique pour toutes les années de survénance. Cette évolution est gouvernée par des facteurs f_j appelés **facteurs de paiement**.

La méthode s'applique sur les paiements cumulés, notés $C_{i,j}$ où i est un indice représentant l'exercice de survénance et j un indice représentant l'année de développement. Le modèle est le suivant :

$$C_{i,j+1} = f_j * C_{i,j}; j= 0... n-2, i= 0... n-1$$

Comme f_j est indépendant de l'année de survénance i , on peut écrire :

$$\frac{C_{0,j+1}}{C_{0,j}} = \frac{C_{2,j+1}}{C_{2,j}} = \dots = \frac{C_{n-j-1,j+1}}{C_{n-j-1,j}}; j= 0, \dots, n-2$$

Donc l'**hypothèse centrale** de cette méthode est la stabilité des cadences de paiements. Pour chaque exercice de déroulement, on cherche à déterminer le coefficient de passage f_j indépendant de i

Celui-ci est estimé ainsi : pour $j = 0, \dots, n - 2$

$$\hat{f}_j = \frac{\sum_0^{n-j-2} C_{i,j+1}}{\sum_0^{n-j-2} C_{i,j}}$$

Cette formule donne plus d'importance aux années où les paiements cumulés sont élevés, c'est à dire l'exposition au risque est prise en compte dans Chain Ladder.

Le triangle inférieur peut être complété à partir de la formule suivante :

$$\hat{C}_{i,j} = (\hat{f}_{n-1-i} \times \dots \times \hat{f}_{j-1}) \times C_{i,n-1-i}$$

pour $i = 1, \dots, n - 1$ et $n - i \leq j \leq n - 1$

Les hypothèses de CHAIN LADDER sont :

H1 : Il existe une relation de proportionnalité entre les montants cumulés, d'une année de développement à la suivante. C'est à dire les années de développement sont les variables explicatives du comportement de sinistres futures.

H2 : il est supposé que le coefficient de proportionnalité d'une année de développement est identique pour toutes les années de survénance. C'est-à-dire les sinistres survenus au cours d'une année i n'ont aucune influence sur les sinistres pouvant survenir pendant l'année $i+1$.

Pour valider ces hypothèses nous allons retenir deux tests graphiques :

- **Représenter un cc-plot pour $i=0, 2, \dots, n-j-1$**

Les $n-j$ couples $(C_{i,j+1}, C_{i,j})$ doivent être sensiblement alignés par une droite passant par l'origine.

Car pour j fixé, nous avons supposé l'existence d'un coefficient tel que $C_{i,j+1} = f_{i,j} * C_{i,j}$

- **L'examen du triangle de développement qui est défini par les facteurs de développement Individuels $f_{i,j}$**

Les $f_{i,j} = \frac{C_{i,j+1}}{C_{i,j}}$ pour (i,j) tel que $i+j < n$, doivent être relativement stables dans chaque colonne.

D'où l'indépendance vis-à-vis l'année de survenance.

L'espoir de recouvrement pour chaque semestre de survenance est alors déduit en soustrayant du montant de recouvrement final probable, le dernier montant connu (montant figurant sur la diagonale).

$$\hat{R}_i = \hat{C}_{i,n-1} - C_{i,n-1-i} \text{ pour } i = 1, \dots, n-1$$

$$\hat{R}_0 = 0$$

Soit un montant total de réserve nécessaire s'élevant à :

$$\hat{R} = \sum_{i=1}^{n-1} \hat{R}_i = \sum_{i=1}^{n-1} (\hat{C}_{i,n} - C_{i,n-1-i})$$

2.3.Méthode de Chain-Ladder pondérée :

La méthode de Chain-Ladder pondérée n'est qu'une généralisation de la méthode précédente.

De façon générale les facteurs de développement sont définis de la manière suivante :

$$\hat{f}_j = \frac{\sum_0^{n-j-2} f_{i,j} * w_{i,j}}{\sum_0^{n-j-2} w_{i,j}} ; \text{ Pour } j = 0, \dots, n-2$$

Avec $f_{i,j} = \frac{C_{i,j+1}}{C_{i,j}}$

Les pondérations sont « judicieusement » choisies par l'actuaire de telle façon à ce que le poids $w_{i,j}$ représente la confiance en le facteur $f_{i,j}$ que lui accorde l'actuaire. Dans la plus part des il est égal à cas 0 ou 1.

Lors du calcul de la PSAP, l'actuaire souhaite écarter les sinistres qu'il reconnaît comme « anormaux ». En ce sens, la pondération sert à réduire l'importance de certaines données jugées non représentatives.

2.3.1. Pondération « Min/Max » :

Les facteurs de développement individuels maximum et minimum par année de développement sont pondérés par 0. Cette méthode permet ainsi de censurer les facteurs de développement « extrêmes ».

Formellement la pondération choisie pour j fixé s'écrit :

$$w_{i,j} = C_{i,j} \text{ si } f_{i,j} \neq \max_j(f_{i,j}) \cup f_{i,j} \neq \min_j(f_{i,j}) \\ w_{i,j} = 0 \text{ Sinon}$$

Si $w_{i,j} = C_{i,j}$ alors on retombe sur la méthode de Chain-Ladder classique

2.3.2. Pondération « par année calendaire » :

$$w_{i,j} = i + j + 1 ; \text{ Pour } j = 0, \dots, n - 2 \text{ et } i = 0, \dots, n - 2$$

Cette pondération donne plus d'importance aux années récentes

3. Méthodes autorégressives :

3.1. Méthode de London-Chain :

Cette méthode s'appuie sur une hypothèse moins contraignante que le modèle de Chain Ladder, à savoir $C_{i,j+1}$ est une fonction affine de $C_{i,j}$

On l'exprime ainsi :

$$\begin{cases} C_{i,j+1} = f_j * C_{i,j} + \alpha_j \text{ pour } 0 \leq j \leq n - 3 \\ C_{i,n-1} = f_{n-2} * C_{i,n-2} \text{ et } \alpha_{n-2} = 0 \end{cases}$$

Les estimateurs de f_j et α_j sont respectivement :

$$\text{pour } 0 \leq j \leq n - 2 \\ \hat{f}_j = \frac{COV(\text{colonne } j, \text{colonne}(j + 1))}{VAR(\text{colonne } j)} = \frac{\frac{1}{n-1-j} \sum_{i=0}^{n-1-j} C_{i,j} C_{i,j+1} - \bar{C}_j \bar{C}_{j+1}}{\frac{1}{n-1-j} \sum_{i=0}^{n-1-j} C_{i,j}^2 - \bar{C}_j^2}$$

Ce facteur est différent de celui déterminé par Chain-Ladder

$$\hat{\alpha}_j = \bar{C}_{j+1} - \hat{f}_j \cdot \bar{C}_j$$

Avec : $\text{pour } j = 0, \dots, n - 2$

$$\bar{C}_j = \frac{1}{n-1-j} \cdot \sum_{i=0}^{n-1-j} C_{i,j} \text{ et } \bar{C}_{j+1} = \frac{1}{n-1-j} \cdot \sum_{i=0}^{n-1-j} C_{i,j+1}$$

Enfin, l'estimation du montant total de la provision, notée R est obtenu en sommant les provisions de chaque année de survenance :

$$\hat{R} = \sum_{i=1}^{n-1} \hat{R}_i = \sum_{i=1}^{n-1} (\hat{C}_{i,n-1} - C_{i,n-1-i})$$

3.2.Méthode de London Pivot :

Il s'agit d'un modèle intermédiaire entre Chain-Ladder et London-Chain. Ce modèle se distingue par l'introduction d'une charge fixe de dépense sinistre qu'on notera α et des coefficients de passage f_j qui vérifie l'équation suivante :

$$C_{i,j+1} + \alpha = f_j(C_{i,j} + \alpha) \text{ pour tout } j = 0, \dots, n-2 \text{ et } i = 0, \dots, n-2$$

Graphiquement, l'hypothèse est vérifiée si les points $(C_{i,j}, C_{i,j+1})$ sont sensiblement alignés sur des droites concourantes. Le point d'intersection appelé point pivot est ici $(-\alpha, -\alpha)$. Il correspond à $(0,0)$ dans la méthode de Chain-Ladder.

Les n paramètres $[(f_j)_{j=0, \dots, n-2}, \alpha]$ sont estimés par moindres carrés sur les données du triangle supérieur. Il faut donc minimiser la somme des résidus aux carrés :

$$\sum_{j=0}^{n-2} \sum_{i=0}^{n-2-j} (C_{i,j+1} + \alpha - f_j * (C_{i,j} + \alpha))^2$$

Le problème n'a pas de solution analytique et peut être résolu en utilisant le solveur d'Excel sous VBA pour minimiser cette somme.

4. Méthodes factorielles :

4.1.Méthode de De Vylder :

La méthode des moindres carrés de De Vylder permet d'écrire les montants incrémentaux comme le produit de trois facteurs :

- α_i : facteur correspondant aux semestres d'origine $i \in \{0, \dots, n-1\}$
- β_j : facteur relatif aux délais de règlement $j \in \{0, \dots, n-1\}$
- μ_{i+j} : facteur représentant l'inflation (s'exprime en fonction du semestre calendaire)

Il est nécessaire d'introduire des contraintes pour que le modèle soit identifiable.

Le modèle des moindres carrés de De Vylder consiste à poser : $\mu_{i+j} = \text{Cte}$.

Le modèle De De Vylder s'écrit comme suit :

$$Y_{i,j} = \alpha_i' * \beta_j' \text{ pour tout } j = 0, \dots, n-1 \text{ et } i = 0, \dots, n-1$$

En posant la contrainte $\sum_{j=0}^{n-1} \beta_j' = \mathbf{1}$, les paramètres α_i' et β_j' seraient alors interprétables :

En effet, $\sum_{j=0}^{n-1} Y_{i,j} = \alpha_i' = C_{i,n-1}$ pour tout $i = 0, \dots, n-1$ ceci implique que le paramètre α_i' peut être interprété comme étant la charge ultime de l'année de survenance i .

De plus, le paramètre $\beta_j' = \frac{Y_{i,j}}{C_{i,n-1}}$ pour tout $j = 0, \dots, n-1$ peut être interprété comme la part de cette charge payée au cours de la j ème année de développement.

Les coefficients $C_{i,n-1}$ et β_j' sont obtenus en minimisant la somme des carrés des écarts entre les valeurs observées $Y_{i,j}$ et leur forme théorique $C_{i,n-1} * \beta_j'$, soit :

$$\left(\widehat{C}_{i,n-1}, \widehat{\beta}_j' \right)_{i,j=0,\dots,n-1} = \underset{(C_{i,n-1}, \beta_j')_{i,j=1,\dots,n-1}}{\operatorname{argmin}} \left\{ \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{i=0}^{n-j-1} (Y_{i,j} - C_{i,n-1} * \beta_j')^2 \right\}$$

Sous la contrainte $\sum_{j=0}^{n-1} \beta_j' = \mathbf{1}$.

La provision totale est estimée par :

$$\widehat{R} = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=n-i}^{n-1} \widehat{Y}_{i,j}$$

Le problème n'a pas de solution analytique et peut être résolu en utilisant le solveur d'Excel en VBA qui minimise cette somme.

4.2. Méthode de Taylor :

Cette méthode suppose :

$$Y_{i,j} = P_j * \mu_{i+j} \text{ pour tout } j = 0, \dots, n-1 \text{ et } i = 0, \dots, n-1$$

$$\sum_{j=0}^{n-1} P_j = \mathbf{1}$$

Où P_j est la part payée la j ème année de développement et μ_{i+j} est le coût total payé lors de l'année calendaire $i+j$. Cette méthode permet d'intégrer des hypothèses d'inflation.

On obtient :

$$\widehat{\mu}_{n-1} = \sum_{i=0}^{n-1} Y_{i,n-1-i} ; \widehat{P}_{n-1} = \frac{Y_{0,n-1}}{\widehat{\mu}_{n-1}} ; \widehat{\mu}_{n-k} = \frac{\sum_{i=0}^{n-k} Y_{i,n-k-i}}{\mathbf{1} - \sum_{l=n-k+1}^{n-1} \widehat{P}_l}$$

$$\text{Et } \widehat{P}_{n-k} = \frac{\sum_{i=0}^k Y_{i,n-k}}{\sum_{l=n-k}^{n-1} \widehat{\mu}_l} \text{ pour } k = 2, \dots, n-1$$

Il s'agit ensuite d'extrapoler les coefficients $\widehat{\mu}_{n-k}$ de n à $2n-2$. Pour cela il faut estimer l'inflation future. Il est possible de se baser sur l'inflation observée de 0 jusqu'à $n-1$.

On reconstitue ensuite le triangle inférieur par la formule

$$\hat{Y}_{i,j} = \hat{P}_j * \hat{\mu}_{i+j} \text{ pour } j = 1, \dots, n-1 \text{ et } i = n-j, \dots, n-1.$$

La provision totale est estimée par :

$$\hat{R} = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=n-i}^{n-1} \hat{Y}_{i,j}$$

5. Méthode de Loss Ratio :

Les méthodes basées sur des ratios utilisent en plus du triangle de liquidation, un supplément d'informations. En effet, la donnée d'un indicateur d'exposition au risque ou de sinistralité est indispensable pour l'application de telles méthodes. Dans le cas général, cet indicateur peut être le montant de primes, le nombre de sinistres, le nombre de contrats...

Dans notre étude, l'indicateur utilisé est le montant des primes acquises noté P_i . Par la suite, on adoptera les notations suivantes pour des ratios qu'on utilisera par la suite :

$$L_{i,j} = \frac{C_{i,j}}{P_i}$$

$$L_i = \frac{C_{i,n}}{P_i} = \frac{S_i}{P_i}$$

5.1. Méthode de Loss Ratio simple :

Cette méthode suppose que les Loss Ratios ultimes L_i sont constants. Elle suppose qu'on peut appliquer un unique ratio quel que soit l'année de survenance et on écrit : $L_i = L_0$ pour tout $0 \leq i \leq n-1$.

$$S_i = P_i * L_0$$

$$R_i = S_i - C_{i,n-i}$$

$$R = \sum_{i=0}^{n-1} R_i$$

5.2. Méthode de Loss Ratio complémentaire :

Cette méthode consiste à supposer que les Loss Ratios L_i ne varient que sensiblement. Donc, avant d'entamer le calcul, on doit d'abord estimer une valeur commune pour les L_i . Pour cela, on détermine un Loss Ratio $L(j)$ pour chaque délai de règlement j grâce à la formule suivante :

$$L_j = \frac{\sum_{i=0}^{n-j} C_{ij}}{\sum_{i=0}^{n-j} P_i} ; 0 \leq j \leq n - 1$$

L'étape suivante consiste à analyser la convergence de la suite L_j afin d'estimer le ratio final commun L .

Ensuite, on calcule la provision par les formules ci-dessous :

Pour $0 \leq i \leq n - 1$

$$\begin{aligned} S_i &= P_i * L \\ R_i &= S_i - C_{i,n-i} \\ R &= \sum_{i=0}^{n-1} R_i \end{aligned}$$

6. Méthodes mixtes :

6.1. *Méthode de Bornhuetter-Ferguson :*

On utilise la méthode Bornhuetter-Ferguson quand on dispose des données complémentaires au triangle de liquidation pour déterminer une estimation des provisions. Elle permet d'insérer un indicateur d'exposition au risque qui peut-être :

- un montant de primes,
- un nombre de sinistres,
- un nombre de contrats.

La propriété fondamentale :

Il y a indépendance entre la provision à constituer et le dernier montant connu des règlements :

$$C_{i,j} \text{ indépendant de } C_{i,n} - C_{i,j} ; \text{ Pour } 0 \leq i \leq n - 1 \text{ et } 0 \leq j \leq n - 1$$

Démarche :

Soit :

L^{BF} : Le ratio sinistres à primes (ou loss ratio) attendu pour l'année de survenance i

P_i : Le montant de primes acquises relatif à l'année de survenance i

z_j : La cadence de règlement cumulée après j années de développement. Cette cadence est le plus souvent issue de la méthode Chain Ladder.

On introduit une estimation a priori des montants de charge ultime \hat{U}_i , tel que :

$$\hat{U}_i = L^{BF} * P_i ; \text{ Pour } 0 \leq i \leq n - 1$$

L^{BF} est généralement estimé par la moyenne des $L_{i,j}$, tel que :

$$L_{i,j} = \frac{C_{i,j}}{p_i}; \text{ Pour } 0 \leq i \leq n-1 \text{ et } 0 \leq j \leq n-1$$

L'estimateur $C_{i,n}^{BF}$ de la charge ultime par cette méthode pour l'année de survenance i est :

$$C_{i,n}^{BF} = C_{i,n-i} + (1 - z_{n+1-i}) * \hat{U}_i; \text{ Pour } 0 \leq i \leq n-1$$

L'estimation de la charge ultime correspond à une pondération entre une estimation Chain Ladder et la charge de sinistres ultime supposée connue.

On déduit l'estimateur R_i^{BF} de la provision à constituer pour cette même année de survenance :

$$R_i^{BF} = C_{i,n}^{BF} - C_{i,j} = (1 - z_{n+1-i}) * \hat{U}_i; 0 \leq i \leq n-1$$

Et l'estimateur R^{BF} de la provision globale est :

$$R^{BF} = \sum_{i=0}^{n-1} R_i^{BF}$$

6.2. Cape Cod :

La méthode Cape Cod assume que les sinistres non déclarés (ou non payés) vont se développer selon les sinistres attendus.

Ceci étant dit, contrairement à la méthode BF, la sélection du Loss-ratio espéré ne se fera pas de façon arbitraire, mais selon une certaine méthode de calcul. Le calcul du Loss-ratio dépendra de l'expérience des sinistres ainsi que de la prime «utilisée».

La spécificité de cette méthode revient à l'application d'un unique Loss Ratio à un groupe d'années homogènes ou semblables.

Hypothèses du modèle :

Cette méthode repose sur plusieurs hypothèses :

- H1 : Indépendance des sinistres cumulés non connus (ou non réglés) des sinistres déjà connus ou réglés.
- H2 : Les cadences de paiement $pc_{i,j}$ sont tels que :

$$pc_{i,j} = \frac{E(C_{i,j})}{E(C_{i,n})}$$

- H3 : Indépendance entre les années d'origine au sein d'un même groupe A. On pose alors $pc_{i,j} = pc_j$

Etapes de calcul

1- Calcul des cadences de paiement pour la (n-i)ème année

$$pc_{n-i} = \frac{C_{i,n-i}}{C_{i,n}} ; \text{Pour } 0 \leq i \leq n - 1$$

$pc = (pc_0, pc_1, \dots, pc_{n-1})$ est un vecteur de cadences cumulées calculé par exemple avec la méthode Chain-Ladder.

2- La formule de la charge ultime

La charge ultime n'est que la somme des paiements réglés et de la partie non encore liquidé de la charge ultime.

Soit :

$$S_i = C_{i,n} = C_{i,n-i} + (1 - pc_{n-i}) * C_{i,n}$$

3- Calcul du Loss ratio

Le loss ratio $L_A^{CapeCode}$ associé à un groupe d'années d'origine « semblables » s'obtient comme suit :

$$L_A^{CapeCode} = \frac{\sum_{k \in A} C_{k,n-k}}{\sum_{k \in A} P_k * pc_{k,n-k}} ; \text{Pour } 0 \leq i \leq n - 1$$

Où :

- A est un groupe d'années d'origine comparable.
- $pc_{k,n-k}$ la cadence de paiement.
- P_k la prime ou l'aliment pour l'exercice k.
- $C_{k,n-k}$ la charge diagonale.

4- Calcul de la provision

Pour i fixé :

$$R_i^{CapeCod} = C_{i,n} - C_{i,n-i} = (1 - pc_{n-i}) * L_A^{CapeCode} * P_i ; \text{Pour } 0 \leq i \leq n - 1$$

Et l'estimateur $R^{CapeCod}$ de la provision globale est :

$$R^{CapeCod} = \sum_{i=0}^{n-1} R_i^{CapeCod}$$

6.3. La méthode Benktander :

Cette méthode est une dérivée de la méthode BF, et les deux sont similaires sauf que la méthode Benktander donne plus de poids à la méthode de Chain Ladder classique.

Elle sera donc à la fois plus représentative de l'expérience récente que la méthode BF et plus stable que la méthode de développement classique et elle sera aussi moins adéquate

que la méthode BF lorsque la méthode de développement classique n'est pas appropriée pour les années récentes. Par exemple, lorsque la façon dont les sinistres sont déclarés ou lorsque la distribution des paiements change d'une manière significative à travers le temps.

La provision s'écrit alors :

$$R_i^{BK} = \omega_i * R_i^{CL} + (1 - \omega_i)R_i^{BF}; \text{ Pour } 0 \leq i \leq n - 1$$

La pondération ω_i proposée dans la méthode correspond à la part déjà connue des sinistres :

$$pc_{n-i-1} = \omega_i = \frac{C_{i,n-i-1}}{C_{i,n-1}}; \text{ Pour } 0 \leq i \leq n - 1$$

$C_{i,n}$ Est estimé par la méthode de Chain-Ladder.

L'idée sous-jacente est qu'au fur et à mesure que l'expérience augmente, l'estimation réalisée par la méthode Chain-Ladder devient plus fiable.

Ainsi, la provision s'écrit :

$$R_i^{BK} = pc_{n-i-1} \cdot R_i^{CL} + (1 - pc_{n-i-1}) \cdot R_i^{BF}; \text{ Pour } 0 \leq i \leq n - 1$$

Et l'estimateur R^{BK} de la provision globale est :

$$R^{BK} = \sum_{i=0}^{n-1} R_i^{BK}$$

Il est à noter que les méthodes Loss Ratio et les méthodes mixtes prennent en considération les IBNR. Ainsi, le résultat donné par ces méthodes reflète l'estimation de la provision complète.

7. Conclusion sur les méthodes déterministes :

Ces méthodes déterministes permettent d'estimer les réserves de sinistres d'une façon simple à exécuter, mais présentent l'inconvénient d'être très sensibles à des variations dans les données observées. Pour mesurer cette incertitude de provisionnement, nous allons avoir recours aux méthodes stochastiques de provisionnement.

Chapitre III : Les méthodes stochastiques :

Dans ce chapitre, on cherche à déterminer la variabilité des provisions estimées. Et par conséquent, construire des intervalles de confiance. Pour ce faire, on fait recours à des méthodes dites stochastiques.

1. Modélisation GLM :

Le but principal de GLM sera de chercher une loi paramétrique suivie par les règlements incrémentaux en considérant les années d'origine et les années de développement autant que des variables explicatives.

Ces modèles ont trois composantes principales : une composante aléatoire, une composante systématique et une fonction de lien g .

- **La composante aléatoire du modèle :**

Représentées par les paiements annuels non cumulés $Y_{i,k}$ **Pour** $0 \leq i \leq n - 1$

et $0 \leq k \leq n-1$

Sous ces deux hypothèses :

H1 : Les paiements annuels non cumulés $Y_{i,k}$ sont indépendants.

H2 : Les paiements annuels non cumulés $Y_{i,k}$ appartiennent à la famille exponentielle, de densité :

$$f(Y_{i,k}/\theta_{i,k}; \phi) = \exp\left(\frac{Y_{i,k} * \theta_{i,k} - b(\theta_{i,k})}{\phi/w_{i,k}} + c(Y_{i,k}; \phi)\right)$$

$\theta_{i,k}$: Un paramètre réel, appelé paramètre naturel

ϕ : Un paramètre de dispersion strictement positif

$w_{i,k}$: Une pondération donnée (=1 par la suite)

b et c : des fonctions spécifiques de la distribution, b étant deux fois dérivable à valeurs dans \mathbb{R} et c à valeurs dans \mathbb{R}^2 .

Quelque exemple de familles de lois exponentielles :

Distribution	$\theta(\mu)$	$b(\theta)$	$a(\varphi_0)$
Normale $N(\mu, \sigma^2)$	μ	$\frac{\theta^2}{2}$	σ^2
Bernouilli $B(1, \mu)$	$\log \frac{\mu}{1-\mu}$	$\log(1+e^\theta)$	1
Poisson $P(\mu)$	$\log \mu$	e^θ	1
Gamma $G(\mu, \nu)$	$-\frac{1}{\mu}$	$-\log(-\theta)$	$\frac{1}{\nu}$
Gauss Inverse $I.G(\mu, \sigma^2)$	$-\frac{1}{2\mu^2}$	$-(2\theta)^k$	σ^2

Tableau 2: exemple de famille de lois exponentielles

On peut alors montrer que :

- L'espérance si elle existe est : $E(Y_{i,j}) = \mathbf{b}'(\theta_{i,j})$
- La variance si elle existe est : $\text{Var}(Y_{i,j}) = \mathbf{b}''(\theta_{i,j}) * \frac{\phi}{w_{i,k}}$

La composante systématique :

Représentée par les variables explicatives du modèle. Dans le cas de provisionnement, cette composante peut s'écrire :

$$\eta_{i,j} = \mu + \beta_j + \alpha_i$$

Avec :

α_i : Un paramètre lié à la $i^{\text{ème}}$ année de survenance

β_j : Un paramètre lié à la $j^{\text{ème}}$ année de développement

Pour $0 \leq i, j \leq n-1$

Où μ représente la moyenne générale (ou intercept), et les paramètres $(\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1})$

et $(\beta_0, \dots, \beta_{n-1})$ correspondent respectivement aux effets « lignes » et aux effets « colonnes » du modèle qu'on cherche à estimer.

La fonction lien :

Le troisième composant d'un GLM qui décrit la relation fonctionnelle entre les deux premiers éléments. L'espérance $\mu_{i,j}$ de $Y_{i,j}$ est liée au prédicteur linéaire $\eta_{i,j}$ par une fonction de lien :

$$g(Y_{i,j}) = g(\mu_{i,j}) = \eta_{i,j}$$

g est une fonction réelle, strictement monotone et dérivable, qui n'est pas nécessairement l'identité. Les prédictions sont obtenues en appliquant l'inverse de la fonction de lien g^{-1} appelée la fonction de réponse.

Exemples de fonction lien :

Nom du lien	Fonction de lien
Lien Identité	$g(\mu) = \mu$
Lien log	$g(\mu) = \ln(\mu)$
Lien cloglog	$g(\mu) = \ln(-\ln(1 - \mu))$
Lien logit	$g(\mu) = \ln\left(\frac{\mu}{1 - \mu}\right)$
Lien probit	$g(\mu) = \Phi(\mu)$ Φ fonction inverse de la fonction de répartition d'une loi Normale $\mathcal{N}(0,1)$
Lien réciproque	$g(\mu) = -1/\mu$
Lien puissance	$g(\mu) = \mu^\gamma$ avec $\gamma \neq 0$ $g(\mu) = \ln(\mu)$ avec $\gamma = 0$

Tableau 3: Exemples de fonction lien utilisé en GLM

Le choix de la fonction de lien n'est pas arbitraire, mais ce choix doit nous assurer que les valeurs obtenues par le modèle sont de même nature que les valeurs originales.

Par exemple, pour une variable de comptage, les valeurs négatives seront aberrantes, pour cela il faut chercher une fonction de lien g avec laquelle les valeurs prédites seront soit nulles soit positives, dans ce cas par exemple une fonction de lien g de type "logarithme" est appropriée.

Au cas où le choix de fonction de lien est varié, on choisira la fonction de lien, avec laquelle l'écart entre les valeurs prédites par le modèle et les valeurs réelles est minimum.

Si la variable est continue, on pourra utiliser les liens canoniques de la loi normale (elle donne des règlements estimés négatifs), gamma et log normale. Le choix du lien peut également être déterminé par l'existence d'études passées, par une connaissance préalable du problème.

Les coefficients sont estimés par maximum de vraisemblance

La vraisemblance d'un échantillon indépendant ($Y_{i,j}$) comme étant des réalisations de la variable aléatoire Y s'écrit :

$$L((Y_{i,k})_{1 \leq i, k \leq n}) = \prod_{i=0}^{n-1} \prod_{k=0}^{n-1} \exp\left(\frac{Y_{i,k} * \theta_{i,k} - b(\theta_{i,k})}{\phi / w_{i,k}} + c(Y_{i,k}; \phi)\right)$$

Qualité d'ajustement :

Il s'agit d'estimer la qualité d'ajustement du modèle sur la base des différences entre observations et estimations.

Les principaux critères existants pour cet ajustement sont :

- La déviance standardisée
- La statistique du Chi-deux de Pearson (on utilisera ce test par la suite)

Validation du modèle par examen des résidus :

Les résidus normalisés d'un modèle GLM doivent être distribués selon une loi normale.

Nous utiliserons un test de Shapiro-Wilk pour vérifier l'hypothèse de normalité des résidus.

Choix du modèle :

Le choix du meilleur modèle parmi ceux qui ajustent nos données est très important. Parmi les méthodes permettant de sélection du modèle le plus adéquat on trouve le critère AIC (Aikaike Information Criterium) :

$AIC = -2 \times \log(L) + 2 \times p$; où L est la vraisemblance maximisée et p est le nombre de paramètres du modèle.

Plus l'AIC est faible plus le modèle est meilleur.

2. Mack :

Le modèle de Mack est la version stochastique de la méthode de Chain Ladder. En effet, le montant des provisions estimé est identique. Il a cependant l'avantage d'estimer une erreur de prédiction des provisions.

Ce modèle repose sur trois hypothèses :

H1 : L'indépendance des années d'origine :

$\{C_{i,0}, \dots, C_{i,n}\}$ et $\{C_{k,0}, \dots, C_{k,n}\}$ sont indépendants pour $i \neq k$

H2: Pour $0 \leq i \leq n - 1$ et $0 \leq j \leq n - 1$

Il existe f_j tel que $E(C_{i,j+1}/C_{i,1}, \dots, C_{i,n}) = f_j * C_{i,j}$

H3: Pour $0 \leq i \leq n - 1$ et $0 \leq j \leq n - 1$

Il existe σ_j tel que $Var(C_{i,j+1}/C_{i,1}, \dots, C_{i,n}) = \sigma_j^2 * C_{i,j}$

Tests et Validation de ces hypothèses :

H1 :

Elle consiste à vérifier l'existence d'un effet calendaire. L'hypothèse sur l'indépendance peut se vérifier en testant la présence d'éléments qui seraient susceptibles d'affecter les données sur des années de survenance distinctes de manière analogue. Des changements dans la gestion des sinistres ou des influences externes telles que des modifications juridiques en sont des exemples. On parle alors d'effets calendaires. Cette hypothèse peut être validée graphiquement en utilisant les résidus, c'est-à-dire les différences entre les règlements connus a posteriori et leur estimation. Ces résidus ne doivent pas être corrélés, ni afficher une tendance nette.

Ou bien on peut utiliser le test d'indépendance suivant :

Etape 1 : Calcul des facteurs de développement individuels $f_{i,j}$

$$f_{i,j} = \frac{C_{i,j+1}}{C_{i,j}} ; 0 \leq i \leq n - 1 \text{ et } 0 \leq j \leq n - i + 1$$

Etape 2 : Pour chaque année de développement, déterminer le facteur de développement médian.

Etape 3 : Construire un nouveau triangle supérieur tel que, si $f_{i,j}$ est supérieur au facteur médian, la case correspondante est remplie d'un 1, sinon, elle est remplie d'un 0.

Etape 4 : Pour chaque année calendaire j , on calcule P_j et G_j tel que :

P_j : Nombre d'éléments notés 0 de la j ème diagonale.

G_j : Nombre d'éléments notés 1 de la j ème diagonale.

Etape 5 : Définir une variable aléatoire $Z_j = \text{Min}(G_j, P_j)$

Sous l'hypothèse d'indépendance, selon Mack, cette variable aléatoire suit asymptotiquement une loi binomiale de paramètres $(n_j; 0,5)$, tel que $n_j = P_j + G_j$

Etape 6 : Calcul des moments de Z_j :

L'espérance :

$$E(Z_j) = \frac{n_j}{2} - \binom{n_j - 1}{m_j} \frac{n_j}{2^{n_j}}$$

La variance :

$$V(Z_j) = \frac{n_j(n_j - 1)}{4} - \binom{n_j - 1}{m_j} \frac{n_j(n_j - 1)}{2^{n_j}} + E(Z_j) - E(Z_j)^2$$

Avec :

$$m_j = \left\lfloor \frac{n_j - 1}{2} \right\rfloor$$

Etape 7 : La statistique de test utilisée est définie par :

$$Z = \sum_{j=2}^{n-1} Z_j$$

Les variables Z_j sont non corrélées d'où :

$$E(Z) = \sum_{j=2}^{n-1} E(Z_j)$$

$$V(Z) = \sum_{j=2}^{n-1} V(Z_j)$$

Etape 8 : On a les variables Z_j suivent une loi binomiale, donc la variable Z suit, approximativement, la loi normale.

Par conséquent, la zone de rejet de ce test à 97,5% est définie par :

$$[E(Z) - 1,96 * \sqrt{V(Z)}; E(Z) + 1,96 * \sqrt{V(Z)}]$$

H2 :

Seul le montant des paiements $C_{i,j}$ réglé en j années de développement pour les sinistres survenus l'année i , sert à déterminer le montant $C_{i,j+1}$ réglé en $j + 1$ années de développement pour les sinistres survenus la même année. De plus, le facteur \hat{f}_j est indépendant de l'année de survenance i .

Cette hypothèse est validée en considérant toutefois que les $(C_{i,j}; C_{i,j+1})$ sont sensiblement alignés sur une droite passant par l'origine de pente: \hat{f}_j .

H3 :

Afin de tester sa validité, nous devons estimer les résidus de notre modèle. Par la suite, nous vérifions graphiquement l'existence d'une tendance spécifique de ces résidus. L'expression des résidus estimés par la méthode des moindres carrés est :

$$r_{ij}^{Mack} = \frac{C_{i,j+1} - \hat{f}_j C_{ij}}{\sqrt{C_{ij}}}, 0 \leq j \leq n - 1 \text{ et } 0 \leq i \leq n - j - 1$$

Graphiquement l'hypothèse H3 est validée si les points (C_{ij}, r_{ij}^{Mack}) ne présentent pas une tendance spécifique.

L'écart quadratique moyen de prédiction :

Soit $D = \{C_{i,j} / i + j \leq n\}$ l'ensemble des variables observables.

Sous les hypothèses ci-dessus, $E(C_{i,j+1}/D) = C_{i,n-i} * f_{i,n-i} * \dots * f_{i,n-1}$

Dans ce modèle, les facteurs f_j sont estimés par les facteurs de développement de Chain Ladder \hat{f}_j qui sont sans biais et non corrélés.

Les σ_j^2 sont estimés par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \widehat{\sigma_j^2} = \frac{1}{n-j-1} \sum_{i=0}^{n-j-1} C_{i,j} * \left(\frac{C_{i,j+1}}{C_{i,j}} - \hat{f}_j \right)^2, 0 \leq j \leq n-2 \\ \widehat{\sigma_{n-1}^2} = \min\left(\frac{\widehat{\sigma_{n-2}^4}}{\widehat{\sigma_{n-3}^2}}; \min(\widehat{\sigma_{n-3}^2}; \widehat{\sigma_{n-2}^2})\right) \end{array} \right.$$

Cet estimateur est également sans biais.

Nous pouvons alors calculer l'écart quadratique moyen (mean squared error of prediction) qui mesure l'incertitude de prédiction. Pour les provisions par années d'exercice, il est défini par :

$$MSEP(\hat{R}_i) = E[(\hat{R}_i - R_i)^2 / D]$$

Sous les hypothèses énoncées et si $\hat{C}_{i,n-i} = C_{i,n-i}$, on peut l'estimer par :

$$\widehat{MSEP}(\widehat{R}_i) = \widehat{C}_{i,n}^2 * \sum_{j=n-i}^{n-1} \frac{\widehat{\sigma}_j^2}{\widehat{f}_j} \left(\frac{1}{\widehat{C}_{i,j}} + \frac{1}{\sum_{k=1}^{n-j} C_{i,k}} \right); \text{Pour } 0 \leq i \leq n-1$$

L'estimation du MSEP de la provision totale est alors donnée par :

$$\widehat{MSEP}(\widehat{R}) = \sum_{i=1}^n \left\{ \widehat{MSEP}(\widehat{R}_i) + \widehat{C}_{i,n} \left(\sum_{k=i+1}^n \widehat{C}_{k,n} \right) \sum_{j=n-i}^{n-1} \frac{2\widehat{\sigma}_j^2}{\widehat{f}_j \sum_{u=0}^{n-j} C_{u,j}} \right\}$$

Pour $0 \leq i \leq n-1$

On peut aussi donner l'erreur standard relative i.e. l'écart-type rapporté au montant de charge ultime : $\frac{\sqrt{\widehat{MSEP}(\widehat{R})}}{\widehat{R}}$

3. Munich Chain Ladder :

Cette méthode n'est pas classique, car contrairement aux autres méthodes, elle utilise comme informations non seulement le triangle des paiements cumulés payés comme précédemment mais aussi celui de l'estimation des charges des différents sinistres faite par les gestionnaires de sinistres, car il est remarqué que les résultats des provisions issus de la projection de ces deux triangles sont différents (*), donc le but est de combiner les deux informations pour une estimation meilleure.

Dans la méthode Munich-Chain-Ladder, on dispose des triangles ($C_{i,j}$) correspondant aux paiements cumulés, et ($S_{i,j}$) les charges dites dossier/dossier.

On définit les ratios paiement/charge ($Q_{i,j} = \frac{C_{i,j}}{S_{i,j}}$), et charge/paiement ($Q_{i,j}^{-1} = \frac{S_{i,j}}{C_{i,j}}$)

Justification détaillée de(*)

Pour une année donnée i , la survenance d'un sinistre induit d'une part le développement des charges dites dossier/dossier ($S_{i,j}$), qui se stabilisent par la suite pendant la période de déroulement, et d'autre part la croissance des paiements cumulés ($C_{i,j}$), dont l'accroissement est moins rapide que celui de ($S_{i,j}$) pendant les premières années. Ceci veut dire que les suspens qui sont les montants en attente de paiement ($MS_{i,j} = S_{i,j} - C_{i,j}$) croissent parallèlement aux ($S_{i,j}$) et décroissent dès la stabilisation de ces derniers. Cela implique que les coefficients de développement calculés dans le triangle des paiements ont tendance d'être plus forts que ceux résultants de la projection de l'estimation des sinistres survenus faite par les gestionnaires de sinistres. Malgré cela, le sinistre ultime calculé par la dernière projection est surévalué, surtout avec la décroissance des montants de suspens ($MS_{i,j}$), ce qui n'est pas pris en compte dans le calcul.

Suivant le même raisonnement nous déduisons que le sinistre ultime calculé par la projection du triangle de paiement est sous-estimé du fait de la faible assiette de paiements dans les

années d'origines et la non-utilisation de l'information sur les montants suspendus ($MS_{i,j}$). D'où l'importance de l'information sur les sinistres suspendus.

Pour cela la méthode Munich Chain Ladder utilise les ratios Q_{ij} et Q_{ij}^{-1} avec ;

$$Q_{ij} = \frac{C_{ij}}{S_{ij}} = 1 + \frac{MS_{ij}}{S_{ij}};$$

Le terme $\frac{MS_{ij}}{S_{ij}}$ permet d'introduire une information sur les suspens et aussi de matérialiser la corrélation existante entre la diagonale d'un triangle et sa sur-diagonale (lorsque le montant de suspens est faible, il le sera automatiquement dans la prochaine année de déroulement, car il décroît avec la stabilisation de $S_{i,j}$ et l'accroissement des paiements cumulés), tout ceci est ignoré dans l'application de la méthode de Chain Ladder.

Conclusion : les ratios Munich Chain Ladder Q_{ij} et Q_{ij}^{-1} sont des facteurs exogènes permettant d'avoir une meilleure estimation des sinistres ultimes. Ainsi, au lieu d'appliquer la méthode de Chain Ladder pour déterminer un sinistre ultime, la méthode Munich Chain Ladder intègre les facteurs exogènes Q_{ij} et Q_{ij}^{-1} .

Les hypothèses de la méthode :

- Les différentes années de survenance sont supposées indépendantes pour les règlements et pour les charges
- Pour toute année de développement j appartenant à l'intervalle $[0, n-2]$, on suppose l'existence d'un paramètre $f_j^{(c)}$ et $f_j^{(s)}$ tel que :

$$E \left[\frac{C_{i,j+1}}{C_{i,j}} \right] = f_j^{(c)} \text{ pour } i=0 \dots n-1$$

Et de manière analogue, on a pour le triangle des charges :

$$E \left[\frac{S_{i,j+1}}{S_{i,j}} \right] = f_j^{(s)} \text{ pour } i=0 \dots n-1$$

- Pour toute année de développement j appartenant à l'intervalle $[0, n-2]$, on suppose l'existence des paramètres $\sigma_j^{(c)}$ et $\sigma_j^{(s)}$ tel que :

$$\text{VAR} \left[\frac{C_{i,j+1}}{C_{i,j}} \right] = \sigma_j^{(c)} \text{ pour } i=0 \dots n-1$$

Et de manière analogue, on a pour le triangle des charges :

$$\text{VAR} \left[\frac{S_{i,j+1}}{S_{i,j}} \right] = \sigma_j^{(s)} \text{ pour } i=0 \dots n-1$$

- Il existe des constantes $\lambda^{(s)}$ et $\lambda^{(c)}$ telle que, pour toute année de développement $1 \leq j \leq n-2$ et pour toute année de survenance $1 \leq i \leq n-1$, on a la relation :

$$- E \left[\text{RES} \left(\frac{S_{i,j+1}}{S_{i,j}} \right) / S_{i,j}, C_{i,j} \right] = \lambda^{(s)} \text{Res} (Q_{ij} / S_{i,j})$$

$$\text{Avec } \text{RES} \left(\frac{S_{i,j+1}}{S_{i,j}} \right) = \frac{S_{i,j+1} - f_j^{(s)} S_{i,j}}{\sigma_j^{(s)}} \sqrt{S_{i,j}}$$

Et

$$\text{RES}(Q_{ij}/S_{i,j}) = \frac{Q_{ij} - E((Q_{ij}/S_{i,j}))}{\sigma((Q_{ij}/S_{i,j}))}$$

$$- E[\text{RES}(\frac{C_{i,j+1}}{C_{i,j}}/C_{i,j})/C_{i,j}, S_{i,j}] = \lambda^{(c)} \text{Res}(Q_{ij}^{-1}/C_{i,j})$$

$$\text{Avec } \text{RES}(\frac{C_{i,j+1}}{C_{i,j}}/C_{i,j}) = \frac{\frac{C_{i,j+1}}{C_{i,j}} - f_j^{(c)}}{\sigma_j^{(c)}} \sqrt{C_{i,j}}$$

Et

$$\text{RES}(Q_{ij}^{-1}/C_{i,j}) = \frac{Q_{ij}^{-1} - E((Q_{ij}^{-1}/C_{i,j}))}{\sigma((Q_{ij}^{-1}/C_{i,j}))}$$

Les étapes de calcul pour compléter la partie inférieure du triangle des paiements

1) Estimation des paramètres $f_j^{(c)}$ et $\sigma_j^{(c)}$

Les paramètres $f_j^{(c)}$ et $\sigma_j^{(c)}$ sont estimés de la même manière que dans le modèle de Mack respectivement par :

$$f_j^{(c)} = \frac{\sum_{i=0}^{n-j-2} C_{i,j+1}}{\sum_{i=0}^{n-j-2} C_{i,j}}$$

$$\sigma_j^{(c)} = \frac{1}{n-j-1} \sum_{i=0}^{n-j-2} C_{i,j} \left(\frac{C_{i,j+1}}{C_{i,j}} - f_j^{(c)} \right)^2 \text{ avec } \sigma_{n-1}^{(c)} = \min \left(\left(\frac{\sigma_{n-2}^{(c)}}{\sigma_{n-3}^{(c)}} \right)^2, \sigma_{n-2}^{(c)2}, \sigma_{n-3}^{(c)2} \right)$$

2) Estimation des résidus standardisés des facteurs paiements

On calcule les estimateurs des résidus standardisés des facteurs des paiements grâce à la formule suivante :

$$\text{Res} \left(\frac{\widehat{C_{i,j+1}}}{\widehat{C_{i,j}}} / \widehat{C_{i,j}} \right) = \frac{\frac{C_{i,j+1}}{C_{i,j}} - \widehat{f_j^{(c)}}}{\widehat{\sigma_j^{(c)}}} \sqrt{C_{i,j}}$$

3) calcul des résidus standardisés du triangle Q_{ij}^{-1}

Pour ce, on estime les coefficients $E[Q_{ij}^{-1}/C_{i,j}]$ et $V[Q_{ij}^{-1}/C_{i,j}]$ du triangle Charge/Sinistre par :

$$E[Q_{ij}^{-1}/C_{i,j}] = \frac{\sum_{k=0}^{n-j-2} S_{k,j}}{\sum_{k=0}^{n-j-2} C_{k,j}} = \widehat{q_j^{-1}}$$

$$V[Q_{ij}^{-1}/C_{i,j}] = \frac{\widehat{\rho_j^{(c)}}}{\sqrt{C_{i,j}}} \text{ où } \widehat{\rho_j^{(p)}}^2 = \frac{1}{n-j-1} \sum_{k=0}^{n-j-2} C_{k,j} (Q_{k,j}^{-1} - \widehat{q_j^{-1}})^2$$

Par la suite, on déduit les résidus standardisés du triangle des Q_{ij}^{-1} selon la formule suivante :

$$\text{Res}(\widehat{Q_{ij}^{-1}} \setminus C_{i,j}) = \frac{Q_{ij}^{-1} - \widehat{q}_j^{-1}}{\widehat{\rho}_j^{(c)}} \sqrt{C_{i,j}}$$

4) calcul de $\widehat{\lambda}^{(c)}$

$$\widehat{\lambda}^{(c)} = \frac{\sum_{i,j} \text{Res}\left(\frac{C_{i,j+1}}{C_{i,j}}\right) \text{Res}(\widehat{Q_{ij}^{-1}} \setminus C_{i,j})}{\sum_{i,j} \text{Res}(\widehat{Q_{ij}^{-1}} \setminus C_{i,j})^2}.$$

5) Compléter la partie inférieure du triangle des paiements par Munich Chain Ladder

Pour ce, il suffit d'appliquer la formule suivante :

$$C_{i,j+1} = \widehat{C}_{i,j} [f_j^{(c)} + \widehat{\lambda}^{(c)} \frac{\widehat{\sigma}_j^{(c)}}{\widehat{\rho}_j^{(c)}} (\widehat{Q_{ij}^{-1}} - \widehat{q}_j^{-1})]$$

$$\text{Avec } \widehat{Q_{ij}^{-1}} = \frac{\widehat{S_{ij}}}{C_{ij}} \text{ et } C_{i,n-i+1} = C_{i,n-i+1}.$$

6) Calcul de la provision par exercice et du risque d'estimation des provisions

On calcule la provision par exercice et les valeurs des MSEP, SEP et SER

Les étapes de calcul pour compléter la partie inférieure du triangle des charges

1) Estimation des paramètres $f_j^{(s)}$ et $\sigma_j^{(s)}$

Les paramètres $f_j^{(s)}$ et $\sigma_j^{(s)}$ sont estimés de la même manière que dans le modèle de Mack respectivement par :

$$f_j^{(s)} = \frac{\sum_{i=0}^{n-j-2} S_{i,j+1}}{\sum_{i=0}^{n-j-2} S_{i,j}}$$

$$\sigma_j^{(s)} = \frac{1}{n-j-1} \sum_{i=0}^{n-j-2} S_{ij} \left(\frac{S_{i,j+1}}{S_{ij}} - f_j^{(s)} \right)^2 \text{ avec } \sigma_{n-1}^{(s)} = \min \left(\left(\frac{\sigma_{n-2}^{(s)}}{\sigma_{n-3}^{(s)}} \right)^2, \sigma_{n-2}^{(s)2}, \sigma_{n-3}^{(s)2} \right)$$

2) Estimation des résidus standardisés des facteurs paiements

On calcule les estimateurs des résidus standardisés des facteurs des paiements grâce à la formule suivante :

$$\text{Res}\left(\frac{\widehat{S_{i,j+1}}}{S_{i,j}} / S_{i(j)}\right) = \frac{\frac{S_{i,j+1}}{S_{i,j}} - f_j^{(s)}}{\sigma_j^{(s)}} \sqrt{S_{i,j}}$$

3) calcul des résidus standardisés du triangle Q_{ij}

Pour ce, on estime les coefficients $E [Q_{ij} / C_{i,j}]$ et $V [Q_{ij} / C_{i,j}]$ du triangle Paiement/Charge par :

$$E [Q_{ij} / S_{i,j}, C_{i,j}] = \frac{\sum_{k=0}^{n-j-2} C_{k,j}}{\sum_{k=0}^{n-j-2} S_{k,j}} = \hat{q}_j$$

$$V [Q_{ij} / S_{i,j}, C_{i,j}] = \frac{\hat{\rho}_j^{(s)}}{\sqrt{S_{i,j}}} \text{ où } \hat{\rho}_j^{(s)2} = \frac{1}{n-j-1} \sum_{k=0}^{n-j-2} S_{k,j} (Q_{ij} - \hat{q}_j)^2$$

Par la suite, on déduit les résidus standardisés du triangle des Q_{ij} selon la formule suivante :

$$\text{Res}(\widehat{Q_{i,j}} \setminus S_{i,j}) = \frac{Q_{i,j} - \hat{q}_j}{\rho_j^{(s)}} \sqrt{S_{i,j}}$$

4) calcul de $\widehat{\lambda}^{(s)}$

Pour finaliser cette première étape, on calcule :

$$\widehat{\lambda}^{(s)} = \frac{\sum_{i,j} \text{Res} \left(\frac{S_{i,j+1}}{S_{i,j}} \setminus S_{i,j} \right) \text{Res}(\widehat{Q_{i,j}} \setminus S_{i,j})}{\sum_{i,j} \text{Res}(\widehat{Q_{i,j}} \setminus S_{i,j})^2}.$$

5) Compléter la partie inférieure du triangle des charges par Munich Chain Ladder

Pour ce faire on applique la formule suivante :

$$\widehat{S}_{i,j+1} = \widehat{S}_{i,j} \left[\hat{f}^{(s)} + \widehat{\lambda}^{(s)} \frac{\hat{\sigma}_j^{(s)}}{\hat{\rho}_j^{(s)}} (\widehat{Q}_{i,j} - \hat{q}_j) \right]$$

$$\text{Avec } \widehat{S}_{i,n-i+1} = S_{i,n-i+1} \text{ et } \widehat{Q}_{i,j} = \frac{C_{i,j}}{S_{i,j}}.$$

La provision par exercice est obtenue en faisant la différence entre la charge ultime et le paiement cumulé.

Chapitre IV : Méthodes réglementaires

« La provision pour sinistre à payer est évaluée dossier par dossier augmentée d'une estimation du coût des sinistres survenus mais non déclarés à la date de l'inventaire. Cette estimation est obtenue en appliquant au coût moyen des sinistres défini ci-dessous, l'estimation du nombre des sinistres survenus mais non déclarés. L'évaluation obtenue ne doit pas être inférieure à l'évaluation la plus élevée dégagée par les méthodes indiquées ci-après. Dans le cas contraire, l'évaluation obtenue est complétée de la différence. Les méthodes utilisées sont les suivantes :

Première méthode : évaluation par référence au coût moyen des sinistres des exercices antérieurs. Le coût moyen est obtenu en divisant le coût total des sinistres terminés au cours des cinq dernières années par le nombre des sinistres définitivement réglés ou classés sans suite pendant ce temps.

Ce coût moyen est appliqué au nombre total des sinistres survenus (y compris l'estimation de ceux non déclarés à la date de l'inventaire), pour chaque exercice dont la provision

résiduelle, calculée dossier par dossier, est supérieure ou égale à 30% de la charge de sinistres. Toutefois, cette méthode n'est applicable que pour les dix derniers exercices au plus. L'estimation du nombre de sinistres survenus et non déclarés à la date de l'inventaire est basée sur les cadences de déclaration observées dans l'entreprise sur une période de cinq exercices au moins précédant l'exercice en cours »

Article 16 de l'Arrêté du ministre des finances et de la privatisation n° 1548-05 du 6 ramadan 1426 relatif aux entreprises d'assurances et de réassurance (B.O. n° 5384 du 5 janvier 2006).

1. Dossier/dossier :

Pour appliquer cette méthode, il faut qu'on dispose de l'évaluation du coût de chaque sinistre en suspens faite par le gestionnaire du dossier. Ainsi la provision d'un dossier est obtenue en soustrayant du cout final estimé l'ensemble des règlements déjà intervenus.

La provision pour sinistre déclaré à régler est la somme de toutes ces provisions individuelles.

$$PSAP_{déclarés}^{D/D} = \sum_i (\text{coût}_i^{\text{estimé par le gestionnaire}} - \text{Règlement}_i)$$

A cette provision, on rajoute l'IBNR (Incurred But Not Reported) (les réserves pour les sinistres tardifs) :

$$PSAP^{D/D} = PSAP_{déclarés}^{D/D} + IBNR$$

Avec :

$$IBNR = CM \times N^{IBNR}$$

$$CM = \frac{\text{Coût des sinistres terminés au cours des 5 dernières années}}{\text{Nombre des sinistres terminés au cours des 5 dernières années}}$$

Pour estimer le nombre des sinistres survenus et non déclarés pendant la période de référence, l'ACAPS (Autorité de Contrôle des Assurances et de la Prévoyance Sociale) propose la méthode de Chain Ladder. Ce nombre est égale à :

$$N^{IBNR} = \text{Nombre}_{\text{ultime chain ladder}} - \text{dernier nombre connu}$$

2. Cout moyen :

Cette méthode consiste à appliquer aux sinistres connus en nombre un coût moyen estimé dont le calcul est détaillé dans le paragraphe précédent. Cette méthode est appliquée seulement aux années pour lesquelles la PSAP calculée dossier par dossier, est supérieure à 30% de la charge totale des sinistres de chacune de ces années, cette charge est calculée comme suit:

$$\text{Charge}_i^{CM} = PSAP_i^{D/D} + \text{Règlement}_i$$

Formellement dit :

$$\text{Si } \frac{PSAP_i^{D/D}}{Charge_i^{CM}} < 30\% \text{ ou } \left(\frac{PSAP_i^{D/D}}{Charge_i^{CM}} > 30\% \text{ et } N_i^{\text{ouverts}} \times CM - \text{Règlement}_i^{\text{ouverts}} < 0 \right)$$

Alors

$$PSAP_i^{CM} = PSAP_i^{D/D}$$

Sinon, La provision CM est égale à la somme de la provision des sinistres ouverts et des IBNR :

$$PSAP_i^{CM} = N_i^{\text{ouverts}} \times CM - \text{Règlement}_i^{\text{ouverts}} + IBNR_i$$

3. Méthode du « Cadence des règlements » :

C'est une méthode déterministe qui suppose que le passé se reproduit, c'est-à-dire qu'il y a absence des perturbations de règlements dans le temps, afin d'utiliser les données historiques pour estimer les règlements futurs

- Pas de modification de la politique de souscription
- Pas de modification d'organisation
- Pas de modification des outils et procédures de traitement des dossiers
- Pas d'événements extérieurs perturbateurs (grève, ...)

La première étape consiste à calculer la cadence de règlement pour chaque année de liquidation, en se basant pour ce faire sur deux informations (un triangle des règlements cumulés par exercice comptable et un autre portant l'évolution des charges)

La cadence de règlement pour chaque année de liquidation est calculée en divisant les règlements cumulés relatifs à cette année par la charge de sinistres relative aux exercices de survenance ayant atteint cette année de liquidation.

$$\forall i = 0, \dots, n - 1 ; \text{Réserve}_i = \text{Règlements cumulés}_{i,n-1-i} * \frac{1 - \text{cadence}_{n-i-1}}{\text{cadence}_{n-i-1}}$$

Partie II : le cadre pratique de l'évaluation des provisions :

Présentation des données :

Les données utilisées sont des triangles des règlements et des charges estimées de la branche RC automobile (TPV et poids lourds) de la MATU.

Les années de survenance s'étalent de 2001 à 2015, les paiements et les charges sont exprimés en milliers Dirhams.

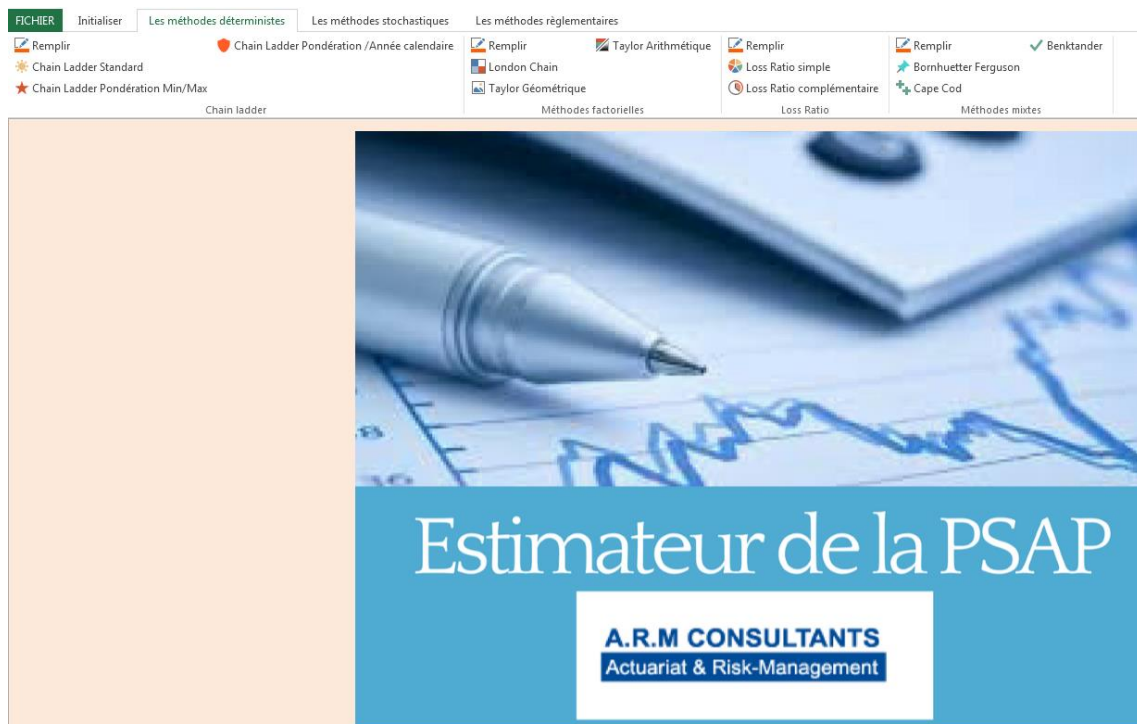
Les triangles sont présentés dans l'annexe.

Présentation de l'outil informatique :

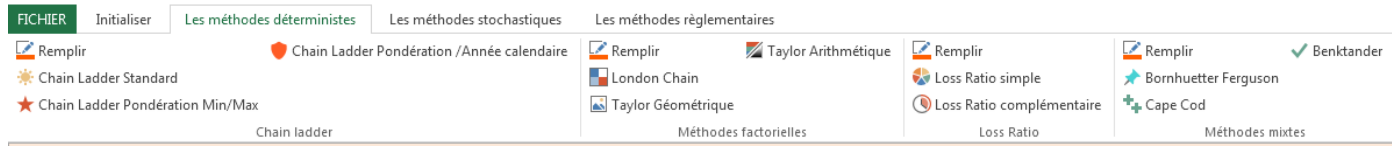
Après avoir construit les triangles des charges et des règlements, il est temps d'estimer la provision selon les méthodes présentées auparavant. Pour ce faire, nous avons développé une application VBA Excel. Les inputs de notre application sont les triangles, le nombre d'années de développement et d'autres paramètres qui diffèrent selon la méthode choisie.


L'interface de l'application est sous forme d'un ruban Excel qui affiche les noms des méthodes et l'utilisateur peut choisir laquelle appliquer.

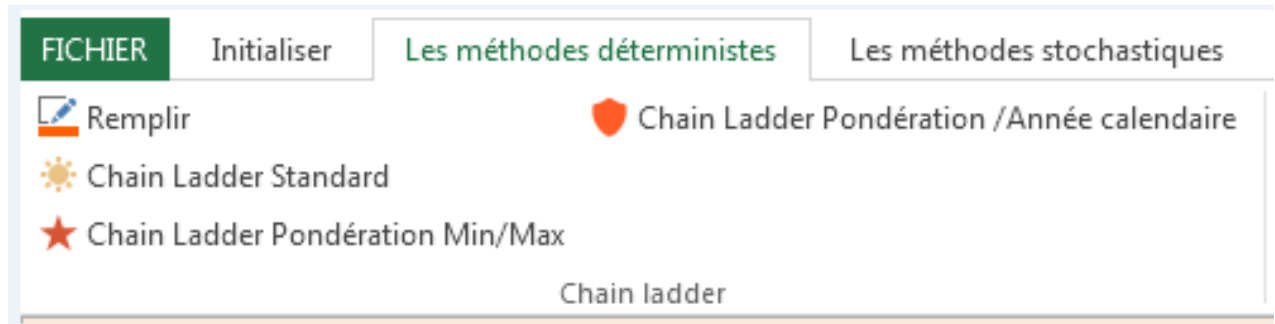
L'interface est de cette forme :



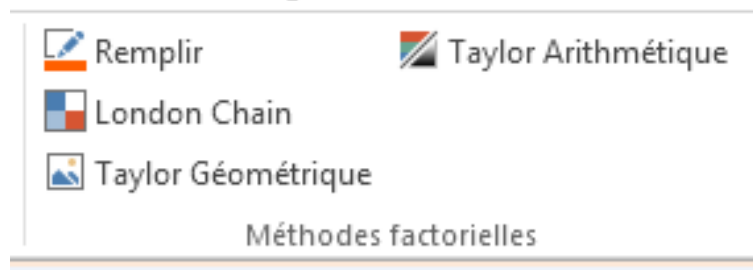
Les méthodes déterministes :




 Chain ladder :




 Méthodes factorielles :



 Loss Ratio



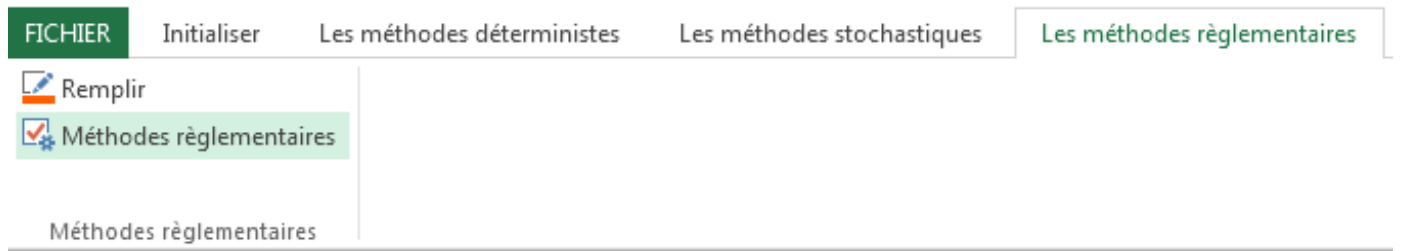
 Méthodes mixtes :



Les méthodes stochastiques :



Les méthodes règlementaires :



Chapitre I : poids lourds

1. Application des méthodes déterministes :

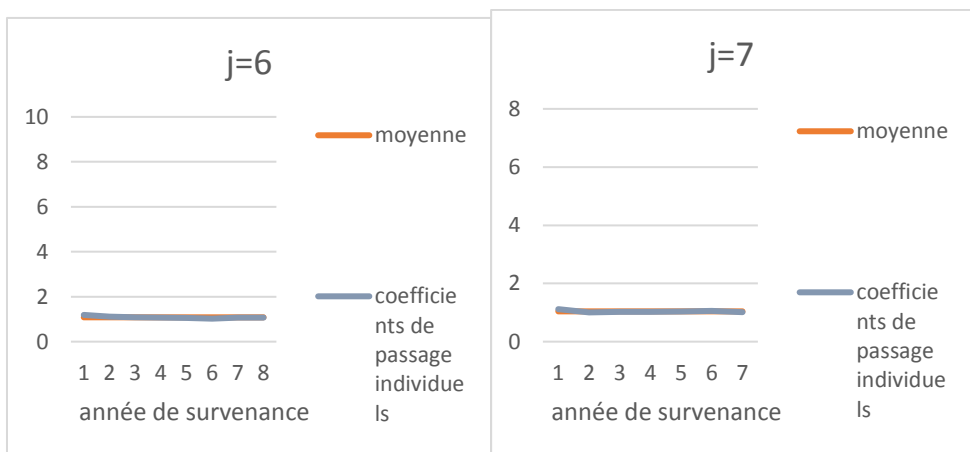
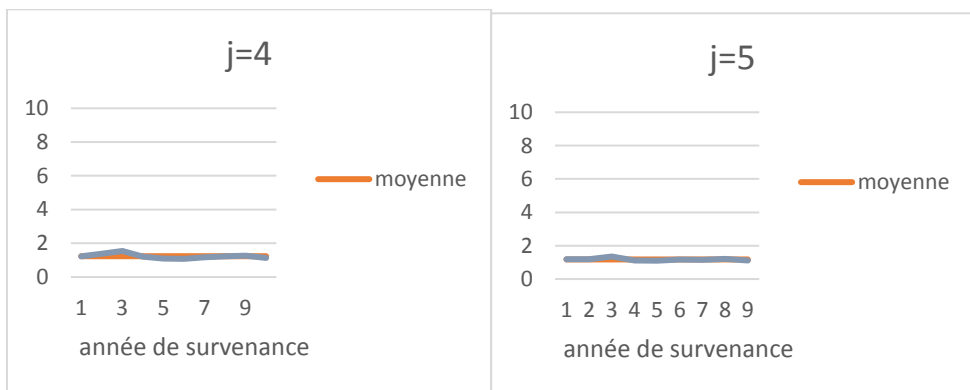
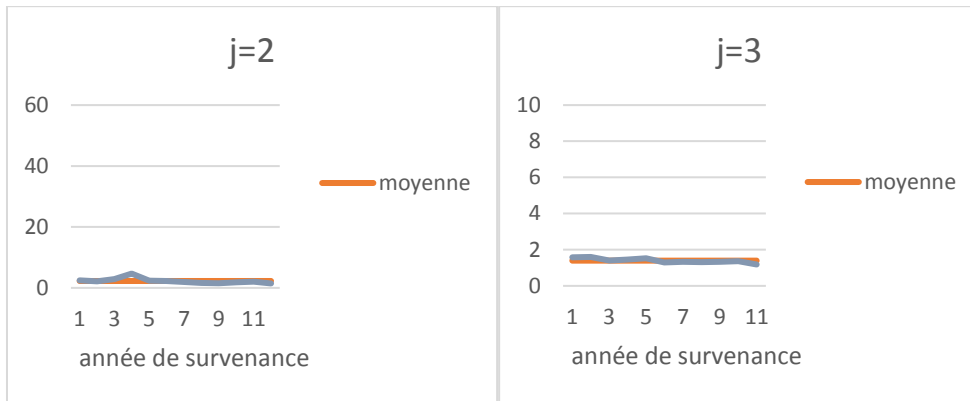
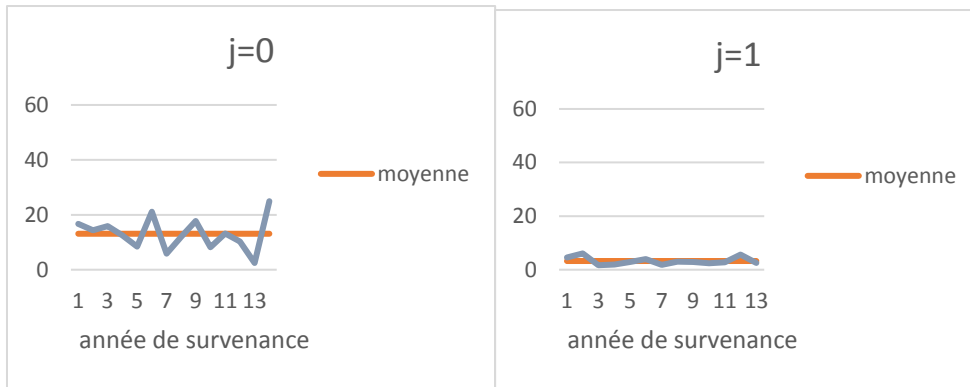
1.1. Application de la méthode Chain Ladder :

1.1.1. Test des hypothèses de la méthode :

H1- le coefficient de proportionnalité f_{ij} d'une année de développement j est identique pour toutes les années de survenance

Pour vérifier cette hypothèse on compare les $f_{ij} = \frac{C_{ij+1}}{C_{ij}}$ au $\bar{f}_{.j}$

Comparaison des f_{ij} à $\bar{f}_{.j}$ pour $j=0, \dots, 11$



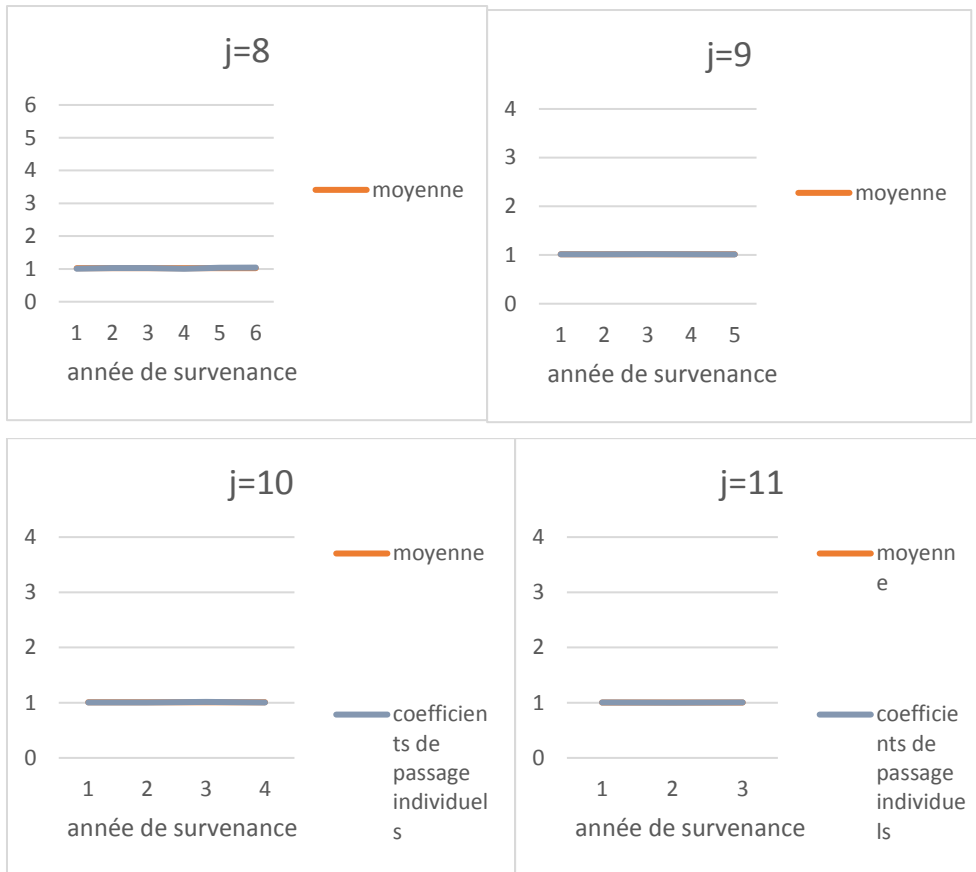


Figure 1: Comparaison des f_{ij} à \bar{f}_j pour $j=0, \dots, 11$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
2001	16,652	4,560	2,504	1,579	1,224	1,187	1,190	1,117	1,006	1,015	1,007	1,003	1,000	1,000
2002	14,347	6,073	2,120	1,600	1,371	1,182	1,106	1,005	1,024	1,015	1,007	1,001	1,000	
2003	15,828	1,673	2,838	1,398	1,542	1,349	1,079	1,028	1,026	1,018	1,014	1,005		
2004	12,439	1,973	4,686	1,457	1,216	1,109	1,069	1,029	1,005	1,017	1,004			
2005	8,409	2,932	2,331	1,522	1,093	1,100	1,053	1,039	1,036	1,012				
2006	21,060	3,908	2,207	1,296	1,076	1,175	1,023	1,053	1,040					
2007	5,897	1,849	1,893	1,324	1,179	1,145	1,074	1,019						
2008	11,995	2,980	1,654	1,306	1,226	1,212	1,072							
2009	17,694	2,897	1,486	1,326	1,263	1,110								
2010	8,145	2,392	1,871	1,371	1,139									
2011	13,193	2,754	2,039	1,183										
2012	10,257	5,631	1,451											
2013	2,447	2,561												
2014	24,942													
Moyenne	13,0931	3,2448	2,2568	1,3964	1,2329	1,1743	1,0833	1,0413	1,0228	1,0155	1,0078	1,0032	1,0001	1,0001

Tableau 4: Triangle des coefficients de passage

J	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
<i>moyenne</i>	13,09	3,24	2,26	1,40	1,23	1,17	1,08	1,04	1,02	1,015	1,008	1,003	1,000
<i>Ecart type</i>	6,00	1,40	0,87	0,13	0,14	0,08	0,05	0,04	0,01	0,002	0,005	0,002	0,000
<i>Coefficient De variation</i>	45,8%	43,2%	38,4%	9,3%	11,2%	6,5%	4,5%	3,5%	1,5%	0,2%	0,4%	0,2%	0,0%

Tableau 5:caractéristiques des coefficients de passage

Comme nous l'avons vu précédemment, la méthode Chain-Ladder s'appuie sur l'hypothèse forte de l'indépendance des années de survenance i .

Dans notre cas, nous nous intéressons à l'étude de la moyenne et de l'écart-type des colonnes du triangle des facteurs de développement.

Ainsi, pour $j=3, \dots, 12$, nous observons une variation maximale de 11.2% par rapport à la valeur moyenne (en valeur absolue), contrairement aux $j=0, 1, 2$ où la variation minimale est de 38.3%, et les écarts type sont relativement élevés.

Pour les trois premières années de développement l'hypothèse d'égalité des coefficients sur les années de survenance n'est pas réalisée, les coefficients dans ces années sont volatiles autour de la moyenne.

A partir de la quatrième année l'hypothèse est bien vérifiée car les facteurs sont relativement stables et les coefficients de variations sont inférieurs à 30%.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
coefficient de passage Max	24.9	6.1	4.7	1.6	1.5	1.3	1.2	1.1	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0
Coefficient de passage Min	2.4	1.7	1.5	1.2	1.1	1.1	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0
Moyenne	13.1	3.2	2.3	1.4	1.2	1.2	1.1	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0
Ecart maximal	11.8	2.8	2.4	0.2	0.3	0.2	0.1	0.1	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	-

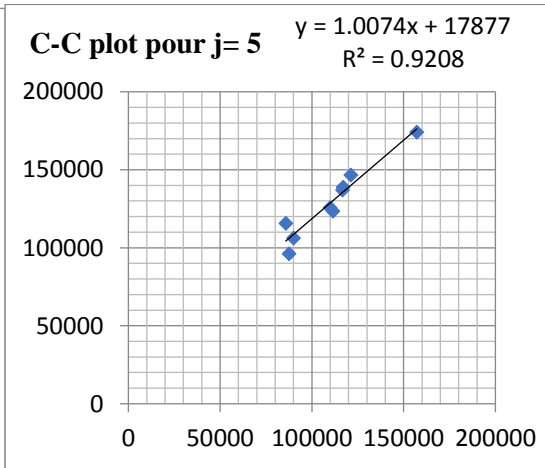
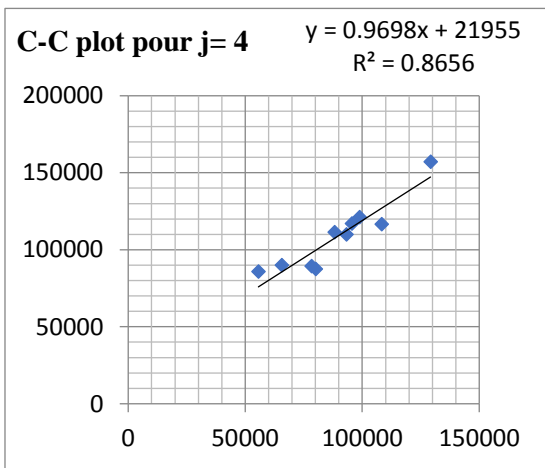
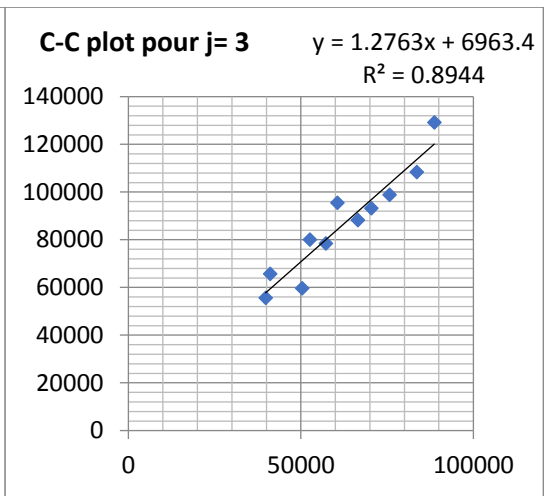
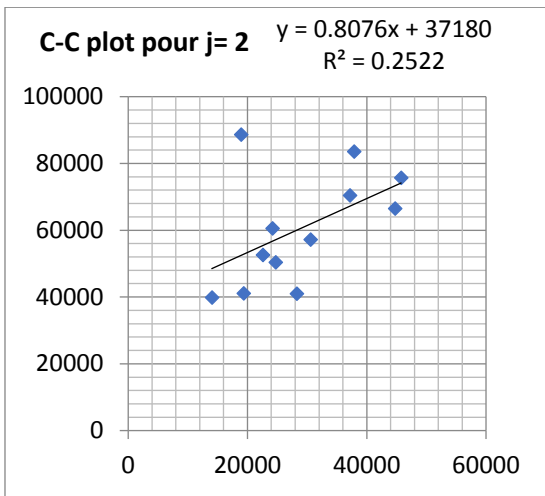
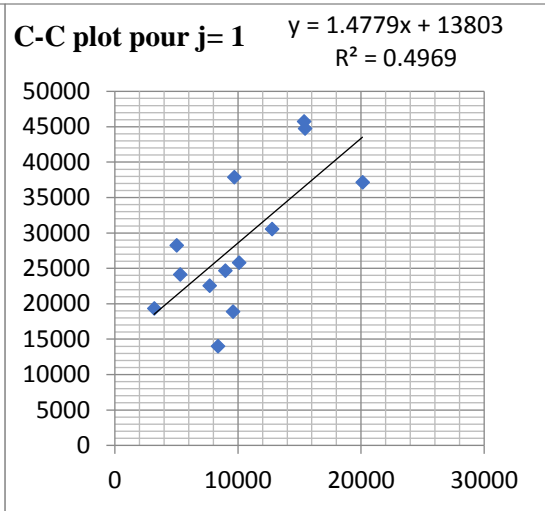
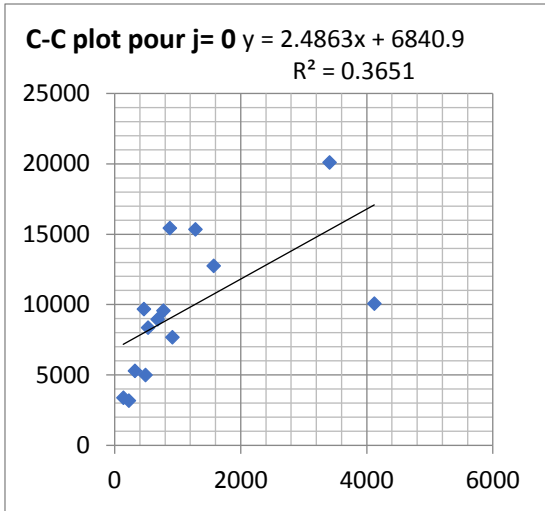
Tableau 6:caractéristiques des coefficients de passage

On remarque, d'après le tableau, que l'écart maximal, connaît un recul important en avançant dans le temps, cet écart est de 11.8 pour $j=0$, 2.8 en $j=1$ et 0.2 en $j=3$. Ceci nous permet d'accepter, à un certain degré, la stabilité des coefficients autour de la moyenne surtout que l'hypothèse n'est pas vérifiée seulement pendant les trois premières années.

La première hypothèse relative à l'indépendance des années de survenance est supposée vérifiée.

H2- validation de l'hypothèse suivante : les points $(C_{i,j}, C_{i,j+1})$ $i=0, \dots, n-j-1$ sont sensiblement alignés sur une droite passant par l'origine.

Représentation des nuages de points $(C_{i,j}, C_{i,j+1}), j=0, \dots, 11$



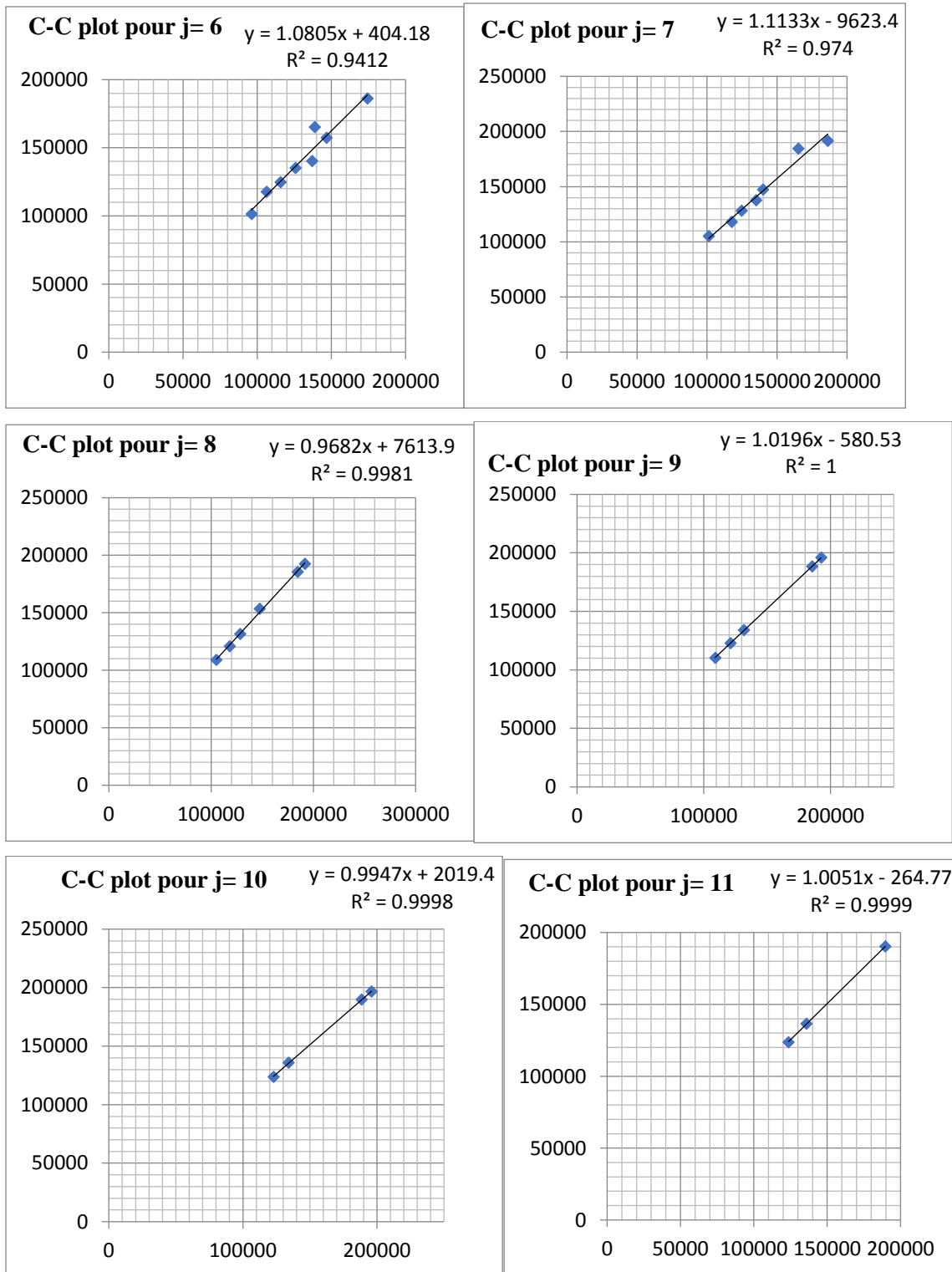


Figure 2: Représentation des nuages de points $(C_{i,j}, C_{i,j+1})$, $j=0, \dots, 11$

On remarque que les coefficients de déterminations sont supérieurs à 0.8 à partir de la troisième année de développement, donc la qualité de l'ajustement est bonne, et une part importante de la variabilité des règlements est expliquée par les règlements des années de développement antérieurs.

Les ordonnées à l'origine ne sont, pour la totalité, nuls.

A partir de la troisième année de développement, les couples sont sensiblement alignés sur une droite ne passant pas par l'origine. On peut accepter l'hypothèse si on considère comme négligeable la constante des huit régressions linéaires valant respectivement 6 963.4, 404.8, 9 623.4, 7 813, 580.53, 2 019.4, 264.77 et 69.17.

La deuxième hypothèse de Chain-Ladder ne semble pas vraiment être vérifiée.

1.1.2. Application de Chain Ladder-standard :

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
2001	318,2	5 298,9	24 165,4	60 509,1	95 530,0	116 957,3	138 849,3	165 253,0	184 522,2	185 604,7	188 467,1	189 721,7	190 370,8	190 373,9	190 385,0
2002	222,2	3 187,7	19 358,0	41 038,6	65 643,5	89 985,3	106 375,5	117 661,5	118 236,3	121 064,2	122 830,9	123 678,4	123 820,7	123 846,9	123 854,1
2003	529,5	8 380,4	14 021,7	39 799,8	55 629,3	85 772,3	115 665,6	124 750,2	128 258,8	131 603,3	133 936,4	135 838,9	136 535,4	136 548,1	136 556,1
2004	770,8	9 587,6	18 915,1	88 645,1	129 168,7	157 117,2	174 256,7	186 258,8	191 725,4	192 591,1	195 882,9	196 572,3	197 223,4	197 241,7	197 253,2
2005	914,8	7 692,7	22 552,7	52 574,1	80 043,9	87 456,0	96 166,9	101 296,1	105 200,9	109 004,4	110 359,1	111 167,1	111 535,3	111 545,7	111 552,2
2006	460,1	9 690,7	37 874,5	83 572,7	108 318,9	116 581,8	137 019,7	140 162,9	147 543,5	153 484,3	155 892,5	157 033,9	157 554,0	157 568,7	157 577,8
2007	3 410,1	20 110,1	37 190,1	70 401,1	93 191,0	109 852,6	125 826,8	135 166,1	137 678,9	140 488,3	142 692,6	143 737,3	144 213,4	144 226,8	144 235,2
2008	1 280,4	15 358,9	45 762,9	75 709,3	98 840,5	121 161,4	146 789,4	157 413,3	164 325,5	167 678,6	170 309,5	171 556,5	172 124,7	172 140,7	172 150,8
2009	873,4	15 453,4	44 765,6	66 521,7	88 180,8	111 373,9	123 605,1	133 937,1	139 818,4	142 671,5	144 910,0	145 971,0	146 454,4	146 468,1	146 476,6
2010	1 568,2	12 772,4	30 551,9	57 172,8	78 388,0	89 303,1	104 389,0	113 114,8	118 081,7	120 491,3	122 381,8	123 277,8	123 686,1	123 697,7	123 704,9
2011	679,8	8 968,4	24 701,0	50 369,7	59 583,5	72 437,0	84 673,7	91 751,5	95 780,4	97 734,9	99 268,3	99 995,2	100 326,3	100 335,7	100 341,5
2012	489,2	5 017,1	28 249,6	40 992,8	56 892,8	69 165,9	80 850,1	87 608,2	91 455,2	93 321,4	94 785,6	95 479,6	95 795,8	95 804,7	95 810,3
2013	4 118,7	10 078,6	25 807,2	53 919,3	74 833,3	90 976,5	106 345,1	115 234,4	120 294,4	122 749,1	124 675,0	125 587,9	126 003,8	126 015,6	126 022,9
2014	135,8	3 387,1	9 623,9	20 107,4	27 906,5	33 926,6	39 657,8	42 972,7	44 859,7	45 775,1	46 493,3	46 833,7	46 988,8	46 993,2	46 995,9
2015	100,3	858,5	2 439,5	5 096,8	7 073,7	8 599,7	10 052,4	10 892,7	11 371,0	11 603,0	11 785,0	11 871,3	11 910,6	11 911,8	11 912,5
facteur _j	8,6	2,8	2,1	1,4	1,2	1,2	1,1	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0

Tableau 7: calcul des règlements estimés par la méthode de Chain-Ladder

Suite à cette table on peut déduire les provisions par année de survenance ainsi que la provision totale :

i	PSAP
2001	-
2002	7,22
2003	20,69
2004	680,92
2005	1 193,09
2006	4 093,55
2007	6 556,36
2008	14 737,42
2009	22 871,53
2010	34 401,78
2011	40 758,05

2012	54 817,58
2013	100 215,69
2014	43 608,85
2015	11 812,14
réserve totale	335 774,88

Tableau 8: les provisions annuelles par Chain Ladder

La provision totale est :

$$R^{CL} = 335\ 775$$

j	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
les cadences de règlements des sinistres	0,84%	7,21%	20,48%	42,79%	59,38%	72,19%	84,39%	91,44%	95,45%	97,40%	98,93%	99,65%	99,98%	99,99%

Tableau 9:calcul de la cadence de règlement des sinistres

Ainsi, nous constatons que pour le triangle de la branche RC Auto, poids lourds, 84% des sinistres ne sont réglés qu'au bout de la septième année. Ainsi cette branche est de liquidation longue, il faut attendre jusqu'à la cinquième année pour effectuer 50% des paiements.

Pendant la première, deuxième et troisième année respectivement, le règlement ne dépasse pas 0.9%, 7.21% et 20.48%. Chose qui a rendu la validation des hypothèses de Chain Ladder difficile pour cette branche.

1.1.3. Application de CHAIN LADDER pondéré :

1.1.3.1.Pondération « Min/Max » :

Les facteurs de développement individuels maximum et minimum par année de développement sont pondérés par 0. Cette méthode permet ainsi de censurer les facteurs de développement « extrêmes ».

Triangle de développement :

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
2001	16,652	4,560	2,504	1,579	1,224	1,187	1,190	1,117	1,006	1,015	1,007	1,003	1,000	1,000
2002	14,347	6,073	2,120	1,600	1,371	1,182	1,106	1,005	1,024	1,015	1,007	1,001	1,000	
2003	15,828	1,673	2,838	1,398	1,542	1,349	1,079	1,028	1,026	1,018	1,014	1,005		
2004	12,439	1,973	4,686	1,457	1,216	1,109	1,069	1,029	1,005	1,017	1,004			
2005	8,409	2,932	2,331	1,522	1,093	1,100	1,053	1,039	1,036	1,012				
2006	21,060	3,908	2,207	1,296	1,076	1,175	1,023	1,053	1,040					
2007	5,897	1,849	1,893	1,324	1,179	1,145	1,074	1,019						
2008	11,995	2,980	1,654	1,306	1,226	1,212	1,072							
2009	17,694	2,897	1,486	1,326	1,263	1,110								
2010	8,145	2,392	1,871	1,371	1,139									
2011	13,193	2,754	2,039	1,183										
2012	10,257	5,631	1,451											
2013	2,447	2,561												
2014	24,942													



Poids associés au $C_{i,j}$ dans $W_{i,j}$:

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
2001	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1
2002	1	0	1	0	1	1	1	0	1	1	1	0	1	
2003	1	0	1	1	0	0	1	1	1	0	0	0		
2004	1	1	0	1	1	1	1	1	0	1	0			
2005	1	1	1	1	1	0	1	1	1	0				
2006	1	1	1	1	0	1	0	1	0					
2007	1	1	1	1	1	1	1	1						
2008	1	1	1	1	1	1	1							
2009	1	1	1	1	1	1								
2010	1	1	1	1	1									
2011	1	1	1	0										
2012	1	1	0											
2013	0	1												
2014	0													



	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
2001	318	5 299	24 165	60 509	95 530	116 957	138 849	165 253	184 522	185 605	188 467	189 722	190 371	190 374	190 385
2002	222	3 188	19 358	41 039	65 644	89 985	106 376	117 662	118 236	121 064	122 831	123 678	123 821	123 847	123 854
2003	529	8 380	14 022	39 800	55 629	85 772	115 666	124 750	128 259	131 603	133 936	135 839	136 535	136 548	136 556
2004	771	9 588	18 915	88 645	129 169	157 117	174 257	186 259	191 725	192 591	195 883	196 572	197 245	197 263	197 275
2005	915	7 693	22 553	52 574	80 044	87 456	96 167	101 296	105 201	109 004	110 359	111 104	111 484	111 495	111 501
2006	460	9 691	37 874	83 573	108 319	116 582	137 020	140 163	147 544	153 484	155 919	156 972	157 509	157 524	157 533
2007	3 410	20 110	37 190	70 401	93 191	109 853	125 827	135 166	137 679	140 518	142 748	143 712	144 203	144 217	144 225
2008	1 280	15 359	45 763	75 709	98 840	121 161	146 789	157 413	162 627	165 980	168 614	169 752	170 333	170 349	170 359
2009	873	15 453	44 766	66 522	88 181	111 374	123 605	132 889	137 290	140 121	142 345	143 306	143 796	143 809	143 818
2010	1 568	12 772	30 552	57 173	78 388	89 303	103 375	111 140	114 821	117 189	119 048	119 852	120 262	120 273	120 280
2011	680	8 968	24 701	50 370	59 583	72 189	83 564	89 841	92 816	94 730	96 233	96 883	97 214	97 223	97 229
2012	489	5 017	28 250	40 993	57 006	69 065	79 949	85 954	88 800	90 632	92 069	92 691	93 008	93 017	93 022
2013	4 119	10 079	25 807	51 253	71 273	86 351	99 959	107 467	111 026	113 315	115 113	115 891	116 287	116 298	116 305
2014	136	3 387	9 610	19 084	26 539	32 154	37 220	40 016	41 341	42 194	42 863	43 153	43 300	43 304	43 307
2015	100	1 058	3 003	5 964	8 293	10 048	11 631	12 505	12 919	13 185	13 394	13 485	13 531	13 532	13 533
facteur _j	10,55	2,84	1,99	1,39	1,21	1,16	1,08	1,03	1,02	1,02	1,01	1,00	1,00	1,00	1,00

Tableau 10:calcul des règlements estimés par la méthode de Chain-Ladder pondération
MIN/MAX

La provision pour chaque année de survenance i :

i	PSAP
2001	-
2002	7
2003	21
2004	70
2005	1 142
2006	4 040
2007	6 546
2008	12 946
2009	20 213
2010	30 977
2011	37 646
2012	52 030
2013	90 497
2014	39 9120
2015	13 433

Tableau 11:calcul des provisions annuelles par Chain Ladder pondérée MIN/MAX

La provision totale est :

$$R^{CL-P} = 310\ 128$$

1.1.3.2.Pondération « par année calendaire » :

$$w_{i,j} = i + j + 1$$

Cette pondération donne plus d'importance aux années récentes

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
2001	318	5 299	24 165	60 509	95 530	116 957	138 849	165 253	184 522	185 605	188 467	189 722	190 371	190 374	190 385
2002	222	3 188	19 358	41 039	65 644	89 985	106 376	117 662	118 236	121 064	122 831	123 678	123 821	123 847	123 854
2003	529	8 380	14 022	39 800	55 629	85 772	115 666	124 750	128 259	131 603	133 936	135 839	136 535	136 551	136 559
2004	771	9 588	18 915	88 645	129 169	157 117	174 257	186 259	191 725	192 591	195 883	196 572	197 216	197 240	197 251
2005	915	7 693	22 553	52 574	80 044	87 456	96 167	101 296	105 201	109 004	110 359	111 220	111 584	111 597	111 604
2006	460	9 691	37 874	83 573	108 319	116 582	137 020	140 163	147 544	153 484	155 847	157 063	157 577	157 596	157 605
2007	3 410	20 110	37 190	70 401	93 191	109 853	125 827	135 166	137 679	141 005	143 175	144 292	144 765	144 782	144 790
2008	1 280	15 359	45 763	75 709	98 840	121 161	146 789	157 413	163 522	167 472	170 050	171 377	171 938	171 958	171 968
2009	873	15 453	44 766	66 522	88 181	111 374	123 605	133 046	138 209	141 547	143 727	144 847	145 322	145 339	145 348
2010	1 568	12 772	30 552	57 173	78 388	89 303	104 311	112 278	116 635	119 452	121 291	122 237	122 638	122 652	122 659
2011	680	8 968	24 701	50 370	59 583	72 448	84 624	91 087	94 622	96 907	98 399	99 167	99 492	99 503	99 509
2012	489	5 017	28 250	40 993	55 748	67 784	79 176	85 223	88 530	90 669	92 065	92 783	93 087	93 098	93 103
2013	4 119	10 079	25 807	53 507	72 767	88 478	103 347	111 240	115 557	118 349	120 171	121 108	121 505	121 519	121 526
2014	136	3 387	10 677	22 137	30 105	36 605	42 756	46 022	47 808	48 963	49 716	50 104	50 268	50 274	50 277
2015	100	1 278	4 030	8 355	11 362	13 815	16 137	17 370	18 044	18 480	18 764	18 910	18 972	18 975	18 976
facteurj	12.74	3.15	2.07	1.36	1.22	1.17	1.08	1.04	1.02	1.02	1.01	1.00	1.00	1.00	

Tableau 12:calcul des règlements estimés par la méthode de Chain-Ladder pondération par année calendaire

La provision pour chaque année de survenance i :

i	PSAP
2001	-
2002	7
2003	24
2004	679
2005	1 245
2006	4 121

2007	7 111
2008	14 555
2009	21 743
2010	33 356
2011	39 926
2012	52 110
2013	95 719
2014	46 890
2015	18 875

Tableau 13: calcul des provisions annuelles par Chain Ladder pondérée par année calendaire

La provision globale est :

$$R^{CL-P} = 336\ 361$$

Le montant de provision annuel continue à augmenter de l'année 2001 jusqu'à 2014 où on observe une chute du montant de la PSAP, chose qui n'est pas logique. En effet, en 2014, il reste encore 13 ans de paiements à effectuer, donc on doit, normalement, constater une provision plus élevée. Cette anomalie est due à l'instabilité des règlements surtout pendant les deux premières années de déroulement (où les règlements sont faibles contrairement aux autres années). Par conséquent, on peut conclure que la méthode de Chain Ladder ne peut pas donner une bonne estimation des provisions.

1.2. Application des Méthodes autorégressives :

1.2.1. Application de la méthode London-Chain :

Cette méthode s'appuie sur une hypothèse moins contraignante que le modèle de Chain Ladder à savoir : $C_{i,j+1}$ est une fonction affine de $C_{i,j}$.

Les hypothèses de cette méthode sont bien vérifiées contrairement à la méthode de Chain Ladder dont sa deuxième hypothèse n'est pas valide que si on considère que les ordonnées à l'origine sont négligeables.

Le tableau suivant traduit les résultats obtenus lors de l'application de la méthode :

j	fj	aj
0	2,49	6 840,92
1	1,48	13 802,70
2	0,81	37 179,81
3	1,28	6 963,38
4	0,97	21 955,42
5	1,01	17 877,14
6	1,08	404,18
7	1,11	-9 623,37
8	0,97	7 613,92
9	1,02	-580,53
10	0,99	2 019,37
11	1,01	-264,77
12	1	69,18
13	1	0

Tableau 14:l'estimation des paramètres de la méthode de London Chain

Suite à ces paramètres on peut estimer les montants manquants du triangle :

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
2001	318	5 299	24 165	60 509	95 530	116 957	138 849	165 253	184 522	185 605	188 467	189 722	190 371	190 374	190 385
2002	222	3 188	19 358	41 039	65 644	89 985	106 376	117 662	118 236	121 064	122 831	123 678	123 821	123 847	123 854
2003	529	8 380	14 022	39 800	55 629	85 772	115 666	124 750	128 259	131 603	133 936	135 839	136 535	136 557	136 565
2004	771	9 588	18 915	88 645	129 169	157 117	174 257	186 259	191 725	192 591	195 883	196 572	197 306	197 307	197 318
2005	915	7 693	22 553	52 574	80 044	87 456	96 167	101 296	105 201	109 004	110 359	111 796	112 099	112 130	112 136
2006	460	9 691	37 874	83 573	108 319	116 582	137 020	140 163	147 544	153 484	155 914	157 111	157 644	157 658	157 668
2007	3 410	20 110	37 190	70 401	93 191	109 853	125 827	135 166	137 679	140 918	143 101	144 366	144 834	144 853	144 862
2008	1 280	15 359	45 763	75 709	98 840	121 161	146 789	157 413	165 628	167 979	170 693	171 812	172 420	172 429	172 439
2009	873	15 453	44 766	66 522	88 181	111 374	123 605	133 957	139 514	142 695	144 913	146 167	146 645	146 664	146 672
2010	1 568	12 772	30 552	57 173	78 388	89 303	107 844	116 928	120 554	124 338	126 196	127 549	127 932	127 957	127 965
2011	680	8 968	24 701	50 370	59 583	79 742	98 212	106 520	108 968	113 119	114 757	116 171	116 496	116 525	116 532
2012	489	5 017	28 250	40 993	59 281	79 449	97 916	106 201	108 612	112 775	114 406	115 822	116 146	116 174	116 181
2013	4 119	10 079	25 807	58 023	81 016	100 528	119 153	129 147	134 158	137 509	139 625	140 908	141 359	141 379	141 387
2014	136	3 387	18 808	52 370	73 802	93 532	112 104	121 530	125 679	129 299	131 255	132 581	132 990	133 013	133 021
2015	100	7 090	24 281	56 790	79 443	99 003	117 616	127 486	132 309	135 719	137 800	139 092	139 534	139 555	139 563

Tableau 15:calcul des règlements estimés par la méthode de London Chain

Ainsi les provisions par année de survenance sont :

i	PSAP
2001	-
2002	7
2003	30
2004	746
2005	1 777
2006	4 183
2007	7 183
2008	15 026
2009	23 067
2010	38 661
2011	56 948
2012	75 189
2013	115 580
2014	129 634
2015	139 463
réserve totale	607 494

Tableau 16:calcul des provisions annuelles par London Chain

La réserve totale est :

$$R^{LC} = 607\,494$$

Contrairement à la méthode de Chain Ladder, on constate que les provisions annuelles continuent à augmenter d'une année à l'autre. De plus, ses hypothèses sont vérifiées à 90%, donc cette méthode semble donner une bonne estimation de la réserve.

1.2.2. Application de London-Pivot :

L'estimation des paramètres de la méthode de London-Pivot :

<i>année de développement j</i>	<i>lambda j</i>	<i>alpha</i>	<i>delta</i>
0	1,029	301 993,68	5 397 063 653,68
1	1,060		
2	1,095		
3	1,067		
4	1,049		
5	1,045		
6	1,025		
7	1,014		
8	1,006		
9	1,005		
10	1,002		
11	1,001		
12	1,00003		
13	1,00002		

Tableau 17:l'estimation des paramètres de la méthode de London pivot

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
2001	318	5 299	24 165	60 509	95 530	116 957	138 849	165 253	184 522	185 605	188 467	189 722	190 371	190 374	190 385
2002	222	3 188	19 358	41 039	65 644	89 985	106 376	117 662	118 236	121 064	122 831	123 678	123 821	123 847	123 857
2003	529	8 380	14 022	39 800	55 629	85 772	115 666	124 750	128 259	131 603	133 936	135 839	136 535	136 548	136 559
2004	771	9 588	18 915	88 645	129 169	157 117	174 257	186 259	191 725	192 591	195 883	196 572	197 127	197 142	197 154
2005	915	7 693	22 553	52 574	80 044	87 456	96 167	101 296	105 201	109 004	110 359	111 390	111 850	111 862	111 872
2006	460	9 691	37 874	83 573	108 319	116 582	137 020	140 163	147 544	153 484	155 873	157 017	157 528	157 542	157 553
2007	3 410	20 110	37 190	70 401	93 191	109 853	125 827	135 166	137 679	140 513	142 833	143 945	144 442	144 455	144 465
2008	1 280	15 359	45 763	75 709	98 840	121 161	146 789	157 413	163 929	166 932	169 391	170 570	171 096	171 109	171 121
2009	873	15 453	44 766	66 522	88 181	111 374	123 605	134 385	140 574	143 426	145 762	146 881	147 381	147 394	147 405
2010	1 568	12 772	30 552	57 173	78 388	89 303	106 995	117 354	123 301	126 043	128 287	129 363	129 843	129 856	129 866
2011	680	8 968	24 701	50 370	59 583	77 309	94 458	104 500	110 265	112 922	115 098	116 141	116 606	116 618	116 628
2012	489	5 017	28 250	40 993	63 901	81 838	99 192	109 354	115 188	117 877	120 078	121 134	121 604	121 617	121 627
2013	4 119	10 079	25 807	57 017	80 995	99 770	117 935	128 571	134 678	137 492	139 797	140 901	141 394	141 407	141 418
2014	136	3 387	21 613	52 423	76 094	94 629	112 562	123 062	129 090	131 869	134 144	135 234	135 721	135 734	135 744
2015	100	8 862	27 414	58 777	82 873	101 740	119 994	130 682	136 819	139 647	141 963	143 073	143 568	143 581	143 592

Tableau 18:: calcul des règlements estimés par la méthode de London Pivot

La provision pour chaque année de survenance :

i	PSAP
2001	0
2002	10,21
2003	23,35
2004	581,49
2005	1 512,98
2006	4 068,34
2007	6 786,59
2008	13 707,38
2009	23 799,80
2010	40 562,98
2011	57 044,72
2012	80 634,28
2013	115 610,71
2014	132 356,96
2015	143 491,50

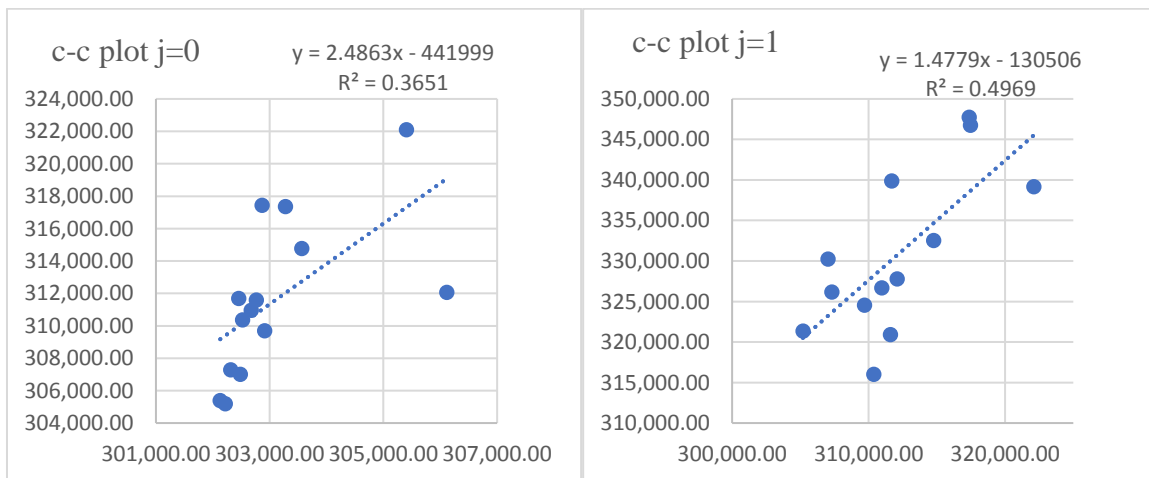
Tableau 19:calcul des provisions annuelles par London Pivot

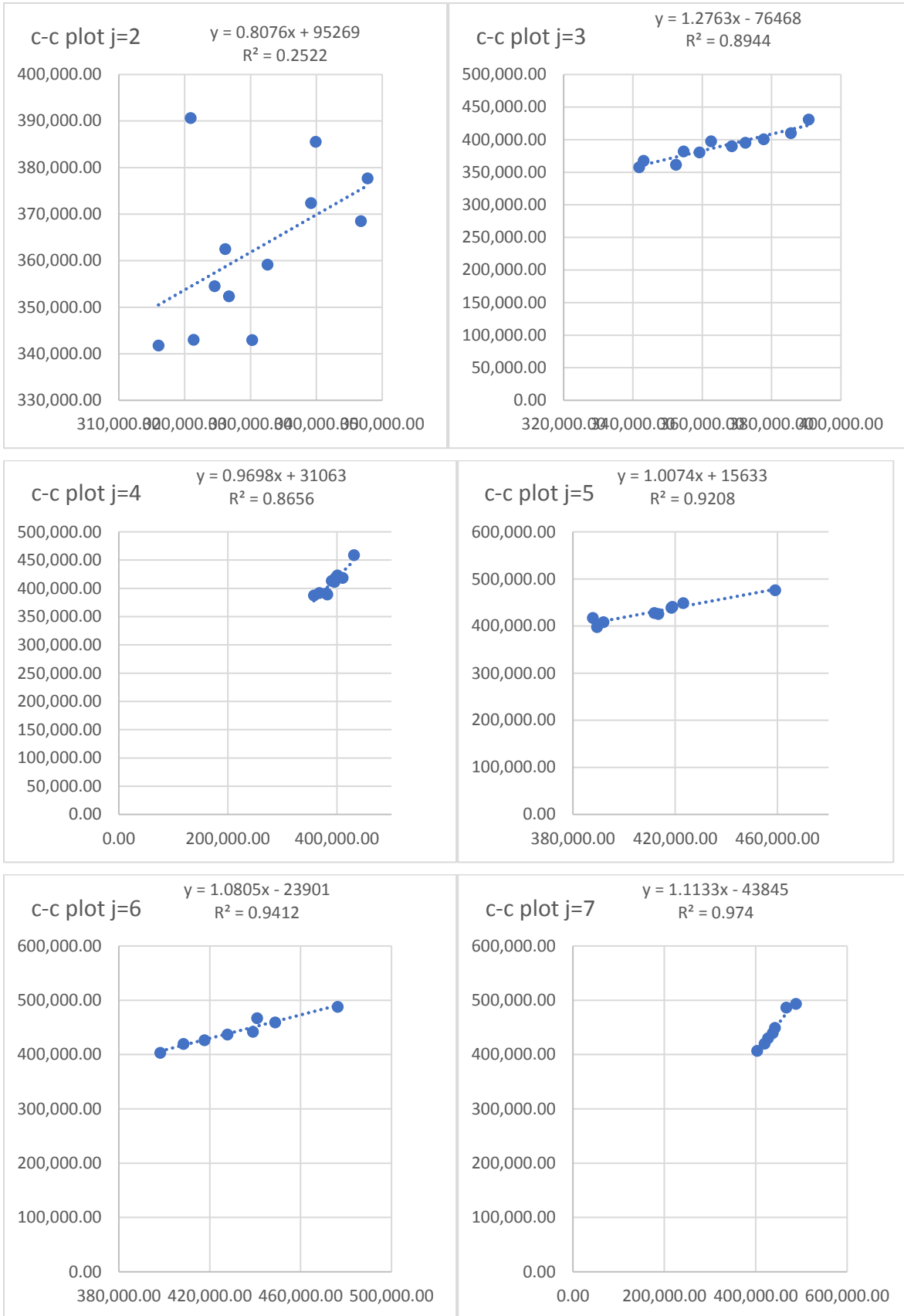
La provision globale est :

$$R^{LP} = 620\ 191$$

- validation de l'hypothèse : les points $(C_{i,j} + \alpha, C_{i,j+1} + \alpha)$, $i=0, \dots, n-j-1$ sont sensiblement alignés sur une droite passant par l'origine.

Représentation des nuages de points $(C_{i,j} + \alpha, C_{i,j+1} + \alpha)$, $j=0, \dots, 8$





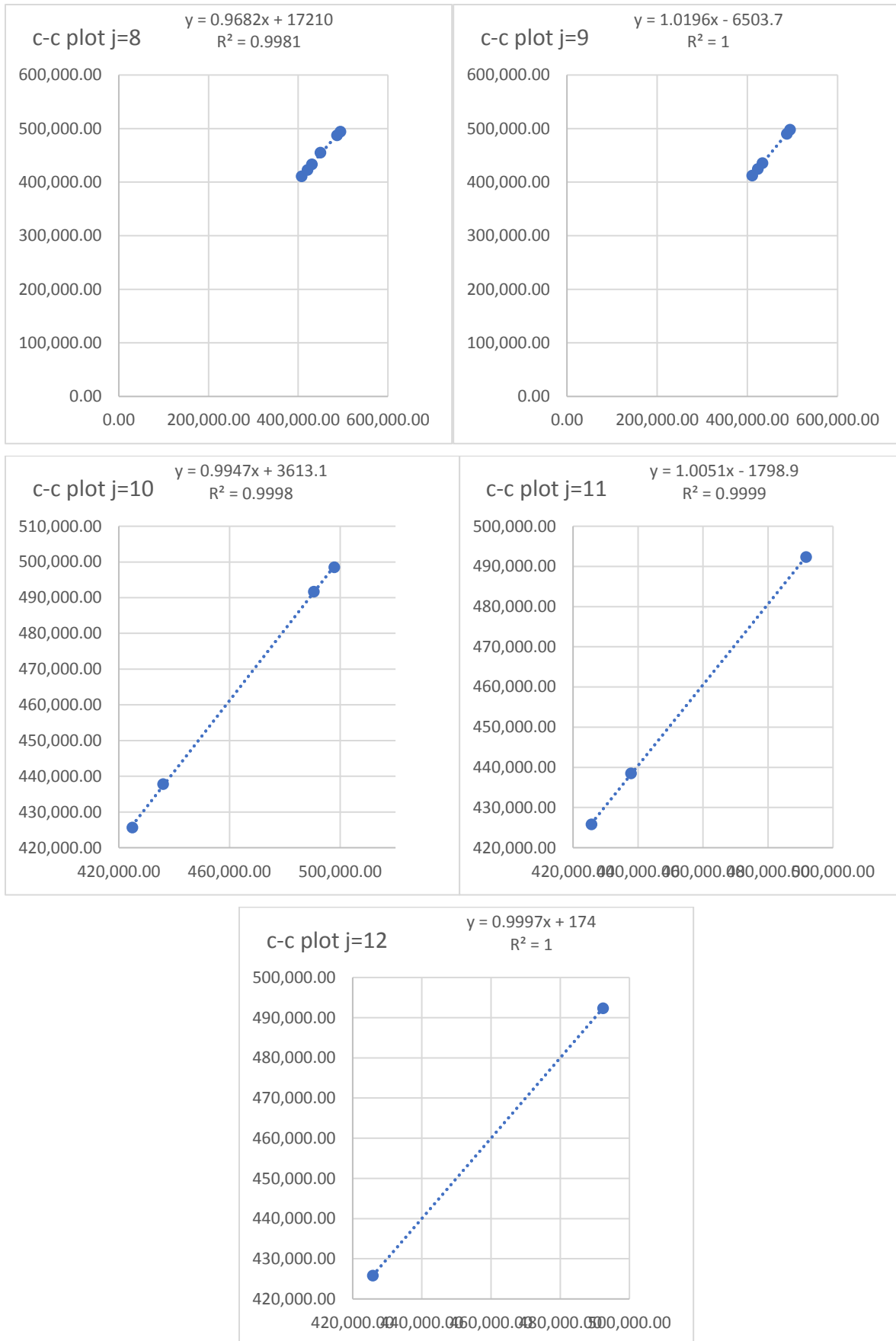


Figure 3: Représentation des nuages de points $(C_{i,j} + \alpha, C_{i,j+1} + \alpha)$, $j=0, \dots, 8$

Graphiquement, l'hypothèse ne semble vérifiée que dans les quatre dernières années de développement où les ordonnées à l'origine sont négligeables, les coefficients de déterminations sont supérieurs à 70% à partir de la troisième année de développement.

1.3. Application des méthodes factorielles :

1.3.1. Application DeVyllder :

L'estimation des paramètres de la méthode de DeVyllder

i	j	α_i	β_j	delta
2001	0	190 385.00	0.00167	6 384 613 233.21
2002	1	123 854.09	0.02616	
2003	2	136 545.58	0.0991	
2004	3	197 259.55	0.1909	
2005	4	111 482.17	0.18395	
2006	5	157 437.34	0.11255	
2007	6	142 053.28	0.11499	
2008	7	181 353.06	0.13869	
2009	8	169 482.72	0.10121	
2010	9	145 369.00	0.00569	
2011	10	118 745.96	0.01503	
2012	11	128 979.06	0.00659	
2013	12	158 668.53	0.00341	
2014	13	153 963.77	1.6E-05	
2015	14	60 015.34	5.8E-05	

Tableau 20:: l'estimation des paramètres de la méthode de De Vylder

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
2001	318.21	4 980.67	18 866.48	36 343.73	35 020.93	21 427.32	21 891.96	26 403.72	19 269.23	1 082.42	2 862.43	1 254.62	649.08	3.10	11.10
2002	222.18	2 965.52	16 170.31	21 680.58	24 604.96	24 341.74	16 390.25	11 285.98	574.78	2 827.92	1 766.66	847.58	142.24	26.20	7.22
2003	529.48	7 850.94	5 641.33	25 778.07	15 829.51	30 143.01	29 893.27	9 084.62	3 508.63	3 344.48	2 333.10	1 902.45	696.52	2.22	7.96
2004	770.79	8 816.80	9 327.54	69 729.94	40 523.66	27 948.43	17 139.56	12 002.09	5 466.61	865.71	3 291.78	689.41	672.51	3.21	11.50
2005	914.84	6 777.82	14 860.06	30 021.40	27 469.75	7 412.11	8 710.94	5 129.21	3 904.78	3 803.50	1 354.71	734.66	380.07	1.82	6.50
2006	460.14	9 230.57	28 183.77	45 698.17	24 746.27	8 262.88	20 437.94	3 143.11	7 380.66	5 940.79	2 367.07	1 037.49	536.75	2.56	9.18
2007	3 410.07	16 700.00	17 080.00	33 211.05	22 789.83	16 661.64	15 974.25	9 339.22	2 512.80	807.64	2 135.77	936.12	484.30	2.31	8.28
2008	1 280.43	14 078.47	30 404.00	29 946.41	23 131.15	22 320.96	25 627.99	10 623.94	18 355.09	1 031.07	2 726.64	1 195.10	618.28	2.95	10.57
2009	873.36	14 580.00	29 312.22	21 756.15	21 659.05	23 193.13	12 231.18	23 504.87	17 153.67	963.58	2 548.17	1 116.87	577.82	2.76	9.88
2010	1 568.15	11 204.26	17 779.50	26 620.85	21 215.26	10 915.08	16 715.67	20 160.64	14 713.08	826.49	2 185.62	957.97	495.60	2.37	8.48
2011	679.80	8 288.59	15 732.56	25 668.71	9 213.83	13 364.54	13 654.34	16 468.39	12 018.51	675.12	1 785.34	782.52	404.84	1.93	6.92
2012	489.16	4 527.94	23 232.49	12 743.16	23 725.43	14 516.25	14 831.02	17 887.58	13 054.22	733.30	1 939.20	849.96	439.73	2.10	7.52
2013	4 118.66	5 959.95	15 728.61	24 621.58	29 186.75	17 857.72	18 244.95	22 005.09	16 059.15	902.10	2 385.58	1 045.61	540.95	2.58	9.25
2014	135.80	3 251.26	15 257.27	30 289.18	28 321.32	17 328.21	17 703.96	21 352.61	15 582.97	875.35	2 314.84	1 014.60	524.91	2.51	8.98
2015	100.31	1 570.06	5 947.31	11 456.69	11 039.70	6 754.57	6 901.04	8 323.28	6 074.27	341.21	902.33	395.49	204.61	0.98	3.50

Tableau 21:calcul des règlements estimés par la méthode de De Vylder

La provision pour chaque année de développement :

i	PSAP
2001	-
2002	7.22
2003	10.18
2004	687.23
2005	1 123.04
2006	3 953.05
2007	4 374.41
2008	23 939.71
2009	45 877.63
2010	56 065.90
2011	59 162.47
2012	87 986.31
2013	132 861.31
2014	150 576.70
2015	59 915.03

Tableau 22:calcul des provisions annuelles par De Vylder

La provision globale est :

$$R^{DV} = 626\ 540$$

1.3.2. Application de Taylor :

Ce modèle, comme il est déjà mentionné, intègre l'hypothèse de l'inflation et suppose que chaque paiement constitue une proportion P_j du cout total payé lors de l'année calendaire $(i+j)$, où j l'année de développement et i l'année de survenance.

Estimation des paramètres P_j et μ_{i+j} :

K (année calendaire)	J	P_j	μ_k
0	0	0.00792816	40 136.73
1	1	0.06076818	75 736.85
2	2	0.12848117	113 407.85
3	3	0.21391981	148 713.61
4	4	0.16392845	125 341.28
5	5	0.12854062	125 611.24
6	6	0.12258061	192 815.37
7	7	0.07373033	210 746.77
8	8	0.04396319	205 115.86
9	9	0.02337489	144 541.72
10	10	0.01873177	133 990.35
11	11	0.00966366	126 059.01
12	12	0.0041365	122 728.65
13	13	0.00012365	150 915.73
14	14	0.00012901	86 038.90

Tableau 23:l'estimation des paramètres de la méthode de Taylor

Le prolongement des μ_k ; $k = 16, \dots, 30$ se fait par extrapolation. Pour cela on essaie de chercher le modèle donnant un coefficient de détermination important pour effectuer l'extrapolation.

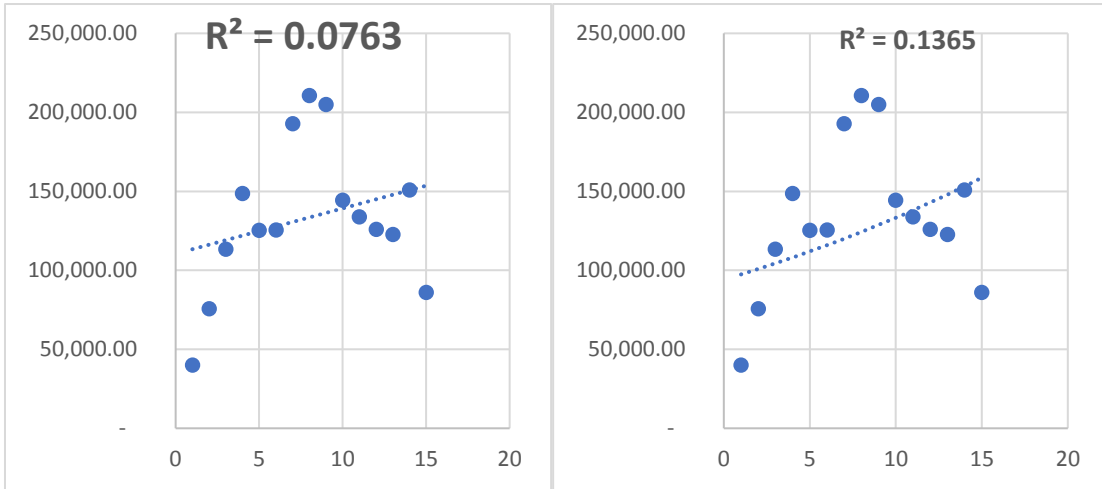


Figure 4: Extrapolation linéaire

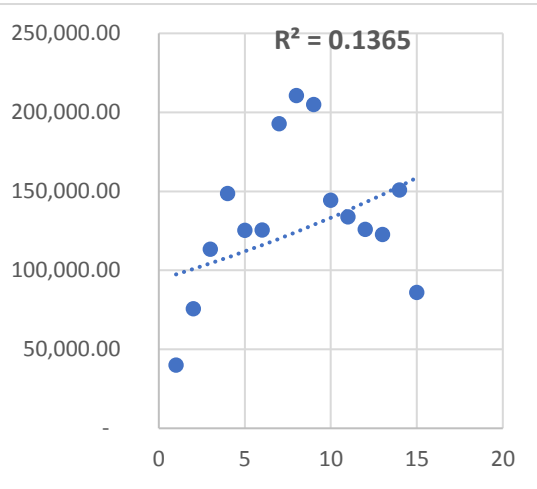


Figure 5: Extrapolation exponentielle

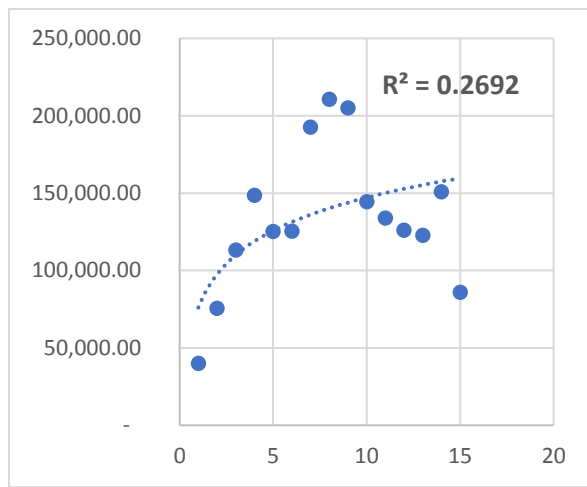


Figure 6: Extrapolation Logarithmique

On observe que le modèle Logarithmique a le coefficient de détermination le plus grand, mais ce coefficient est de loin inférieur à 0.7, donc il n'ajuste pas nos données.

On peut estimer l'inflation par la moyenne des $\frac{\mu_{k+1}}{\mu_k}$ pour $k = 1, \dots, n - 1$, c-à-d une moyenne arithmétique

Où en annualisant le taux d'inflation des n années passées : $\left(\frac{\mu_n}{\mu_1}\right)^{\frac{1}{n-1}}$

✓ Résultats du modèle :

1.3.2.1.Extrapolation par moyenne arithmétique :

Inflation = 1.106272973

K (année calendaire)	J (année de développement)	P_j	μ_k
0	0	0.00792816	40 136.73
1	1	0.06076818	75 736.85
2	2	0.12848117	113 407.85
3	3	0.21391981	148 713.61
4	4	0.16392845	125 341.28
5	5	0.12854062	125 611.24
6	6	0.12258061	192 815.37
7	7	0.07373033	210 746.77
8	8	0.04396319	205 115.86
9	9	0.02337489	144 541.72
10	10	0.01873177	133 990.35
11	11	0.00966366	126 059.01
12	12	0.0041365	122 728.65
13	13	0.00012365	150 915.73
14	14	0.00012901	86 038.90
15			95 182.51
16			105 297.83
17			116 488.15
18			128 867.69
19			142 562.84
20			157 713.42
21			174 474.09
22			193 015.98
23			213 528.36
24			236 220.65
25			261 324.52
26			289 096.26
27			319 819.37
28			353 807.53

Tableau 24:l'estimation des paramètres de la méthode de Taylor par extrapolation arithmétique

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
2001	318	4 981	18 866	36 344	35 021	21 427	21 892	26 404	19 269	1 082	2 862	1 255	649	3	11
2002	222	2 966	16 170	21 681	24 605	24 342	16 390	11 286	575	2 828	1 767	848	142	26	12
2003	529	7 851	5 641	25 778	15 830	30 143	29 893	9 085	3 509	3 344	2 333	1 902	697	12	14
2004	771	8 817	9 328	69 730	40 524	27 948	17 140	12 002	5 467	866	3 292	689	394	13	15
2005	915	6 778	14 860	30 021	27 470	7 412	8 711	5 129	3 905	3 804	1 355	920	436	14	17
2006	460	9 231	28 184	45 698	24 746	8 263	20 438	3 143	7 381	5 941	1 783	1 018	482	16	18
2007	3 410	16 700	17 080	33 211	22 790	16 662	15 974	9 339	2 513	2 225	1 972	1 126	533	18	20
2008	1 280	14 078	30 404	29 946	23 131	22 321	25 628	10 624	4 185	2 461	2 182	1 245	590	20	23
2009	873	14 580	29 312	21 756	21 659	23 193	12 231	7 018	4 629	2 723	2 414	1 378	652	22	25
2010	1 568	11 204	17 780	26 621	21 215	10 915	11 668	7 764	5 121	3 012	2 670	1 524	722	24	28
2011	680	8 289	15 733	25 669	9 214	12 235	12 907	8 589	5 665	3 332	2 954	1 686	798	26	30
2012	489	4 528	23 232	12 743	15 603	13 535	14 279	9 501	6 268	3 687	3 268	1 865	883	29	34
2013	4 119	5 960	15 729	20 361	17 261	14 973	15 797	10 511	6 934	4 078	3 616	2 063	977	32	37
2014	136	3 251	12 229	22 525	19 096	16 565	17 475	11 628	7 670	4 512	4 000	2 283	1 081	36	41
2015	100	5 784	13 529	24 919	21 125	18 325	19 333	12 864	8 486	4 991	4 425	2 525	1 196	40	46

Tableau 25:calcul des règlements estimés par la méthode de Taylor arithmétique

La provision pour chaque année de survenance i :

i	PSAP
2001	-
2002	12
2003	25
2004	422
2005	1 386
2006	3 317
2007	5 894
2008	10 705
2009	18 860
2010	32 532
2011	48 224
2012	68 952
2013	96 642
2014	119 141
2015	137 587

Tableau 26:calcul des provisions annuelles par Taylor arithmétique

La provision globale est :

$$R^{TA} = 543\,701$$

1.3.2.2.Extrapolation par moyenne géométrique :

Inflation =1.055975339

K (année calendaire)	J (année de développement)	P_j	μ_k
0	0	0.00792816	40 136.73
1	1	0.06076818	75 736.85
2	2	0.12848117	113 407.85
3	3	0.21391981	148 713.61
4	4	0.16392845	125 341.28
5	5	0.12854062	125 611.24
6	6	0.12258061	192 815.37
7	7	0.07373033	210 746.77
8	8	0.04396319	205 115.86
9	9	0.02337489	144 541.72
10	10	0.01873177	133 990.35
11	11	0.00966366	126 059.01
12	12	0.0041365	122 728.65
13	13	0.00012365	150 915.73
14	14	0.00012901	86 038.90
15			90 854.95
16			95 940.59
17			101 310.90
18			106 981.81
19			112 970.15
20			119 293.70
21			125 971.20
22			133 022.48
23			140 468.46

24	148 331.23
25	156 634.12
26	165 401.77
27	174 660.19
28	184 436.85

Tableau 27: l'estimation des paramètres de la méthode de Taylor par extrapolation géométrique

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
2001	318	4 981	18 866	36 344	35 021	21 427	21 892	26 404	19 269	1 082	2 862	1 255	649	3	11
2002	222	2 966	16 170	21 681	24 605	24 342	16 390	11 286	575	2 828	1 767	848	142	26	12
2003	529	7 851	5 641	25 778	15 830	30 143	29 893	9 085	3 509	3 344	2 333	1 902	697	11	12
2004	771	8 817	9 328	69 730	40 524	27 948	17 140	12 002	5 467	866	3 292	689	376	12	13
2005	915	6 778	14 860	30 021	27 470	7 412	8 711	5 129	3 905	3 804	1 355	878	397	13	14
2006	460	9 231	28 184	45 698	24 746	8 263	20 438	3 143	7 381	5 941	1 702	927	419	13	15
2007	3 410	16 700	17 080	33 211	22 790	16 662	15 974	9 339	2 513	2 124	1 797	979	443	14	15
2008	1 280	14 078	30 404	29 946	23 131	22 321	25 628	10 624	3 994	2 243	1 898	1 034	467	15	16
2009	873	14 580	29 312	21 756	21 659	23 193	12 231	6 699	4 218	2 368	2 004	1 092	493	16	17
2010	1 568	11 204	17 780	26 621	21 215	10 915	11 137	7 074	4 454	2 501	2 116	1 153	521	16	18
2011	680	8 289	15 733	25 669	9 214	11 679	11 760	7 470	4 703	2 641	2 235	1 217	550	17	19
2012	489	4 528	23 232	12 743	14 894	12 332	12 419	7 888	4 967	2 788	2 360	1 285	581	18	20
2013	4 119	5 960	15 729	19 436	15 727	13 023	13 114	8 329	5 245	2 945	2 492	1 357	614	19	21
2014	136	3 251	11 673	20 524	16 608	13 752	13 848	8 796	5 538	3 109	2 631	1 433	648	20	23
2015	100	5 521	12 327	21 672	17 537	14 521	14 623	9 288	5 848	3 283	2 779	1 514	684	22	24

Tableau 28: calcul des règlements estimés par la méthode de Taylor géométrique

La provision pour chaque année de survenance i :

i	PSAP
2001	-
2002	12
2003	24
2004	401
2005	1 301
2006	3 076
2007	5 372

2008	9 667
2009	16 907
2010	28 990
2011	42 291
2012	59 552
2013	82 321
2014	98 602
2015	109 643

Tableau 29:calcul des provisions annuelles par Taylor géométrique

La provision globale est :

$$R^{TG} = 458\ 159$$

Les résultats de l'estimation de l'inflation par les deux moyennes sont proches, on considère par la suite que celle estimée par la moyenne géométrique est la plus juste étant donné que l'inflation est un phénomène multiplicatif.

1.4.Application des méthodes basées sur les ratios :

1.4.1. Loss Ratio simple :

a- Calcul du Ratio pour la première année de survenance :

$$L_0 = 53,19\%$$

b- Calcul des charges de la dernière année de développement pour chaque année de survenance :

I	Charges
2001	190 385
2002	221 715
2003	240 041
2004	253 632
2005	273 289
2006	260 795

2007	272 696
2008	291 290
2009	321 750
2010	345 287
2011	352 426
2012	348 573
2013	320 483
2014	522 770
2015	522 770

Tableau 30: Calcul des charges de la dernière année de développement pour chaque année de survenance

a- Calcul des provisions pour chaque année de survenance :

I	Provisions
2001	0
2002	97 868
2003	103 506
2004	57 059
2005	162 930
2006	107 311
2007	135 017
2008	133 877
2009	198 145
2010	255 984
2011	292 843
2012	307 581
2013	294 676
2014	519 382
2015	522 669

Tableau 31: calcul des provisions annuelles par Loss Ratio simple

b- Calcul de la provision totale :

$$R^{LRS} = 3\ 188\ 847$$

Cette méthode est simple à mettre en œuvre. Cependant, elle donne des provisions très élevées. Donc elle engendre un risque de sur-provisionnement.

1.4.2. Loss Ratio complémentaire :

a- Calcul des Ratio pour chaque année de développement j:

j	L_j
0	0,18%
1	1,70%
2	5,39%
3	11,47%
4	16,76%
5	21,62%
6	26,63%
7	29,94%
8	31,47%
9	33,00%
10	33,90%
11	37,92%
12	36,76%
13	40,56%
14	53,19%

Tableau 32: Calcul des Ratio pour chaque année de développement j

b- Etudier la convergence des L_j :

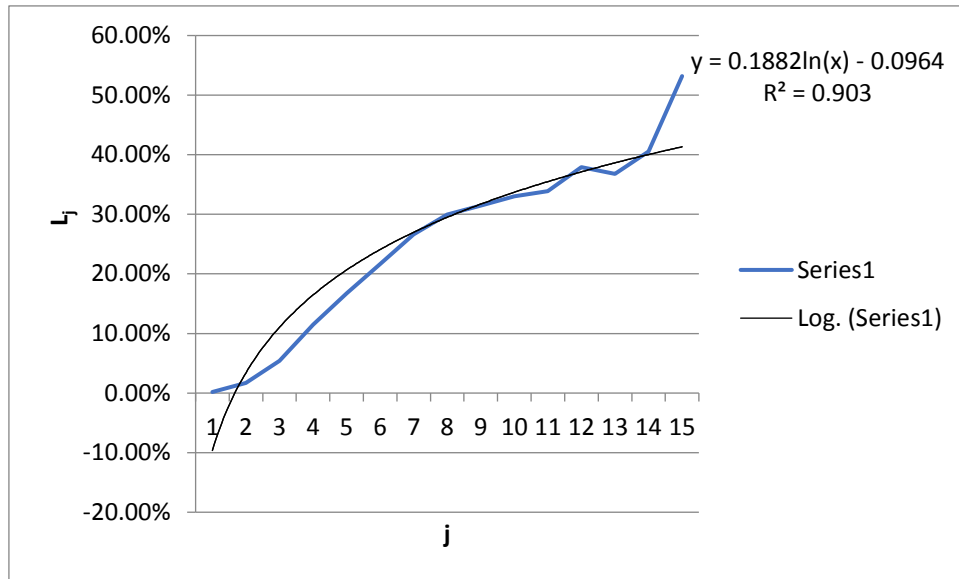


Figure 7: courbe des L_j en fonction des années de développement j

On remarque que les L_j ne convergent pas mais présentent une fonction logarithmique des années de développement. Tel que :

$$L_j = 0,188 * \ln(j + 1) - 0,096$$

Donc, on peut essayer d'expliquer les ratios L_j par le logarithme des années de développement :

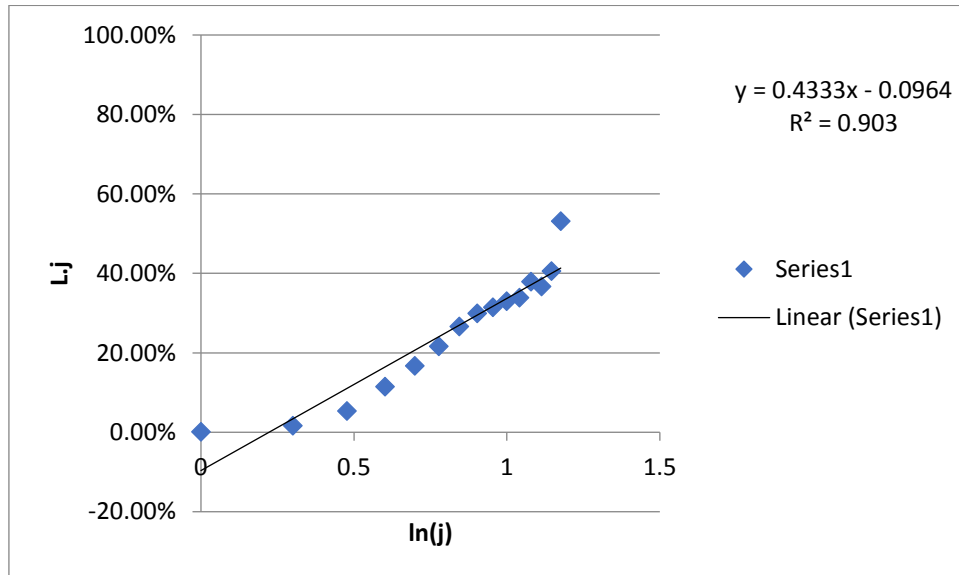


Figure 8: La courbe des ratios en fonction du logarithme des années de développement

Cette nouvelle représentation nous donne un modèle linéaire avec un

$$R^2 = 90,3\%$$

$$L_j = 0,433 * \ln(j + 1) - 0,096$$

En appliquant ce modèle linéaire :

j	L_j
0	-10%
1	3%
2	11%
3	16%
4	21%
5	24%
6	27%
7	30%
8	32%
9	34%
10	35%
11	37%
12	39%
13	40%
14	41%

Tableau 33 : le loss ratio correspondant à l'année de développement j

Donc on peut considérer le ratio de la 15ème année de développement

$$L_{14} = 41\%$$

c- Calcul des $C_{i,n}$ pour chaque année de survenance i :

i	$C_{i,n}$
2001	190385
2002	170908
2003	185035
2004	195511
2005	210663
2006	201033
2007	210206

2008	224540
2009	248020
2010	266163
2011	271666
2012	268696
2013	247043
2014	402975
2015	402975

Tableau 34: Calcul des $C_{i,n}$ pour chaque année de survenance i

d- Calcul des provisions pour chaque année de survenance i :

i	Provisions
2001	0
2002	47 061
2003	48 499
2004	-1 062
2005	100 304
2006	47 548
2007	72 527
2008	67 126
2009	124 415
2010	176 860
2011	212 083
2012	227 704
2013	221 235
2014	399 587
2015	402 874

Tableau 35: calcul des provisions annuelles par Loss ration complémentaire

e- Calcul de la provision totale :

$$R^{LRC} = 2\ 146\ 763$$

On Remarque que cette méthode donne une provision très élevée, donc elle risque de surestimer la provision.

1.5.Application des méthodes mixtes :

1.5.1. Bornhuetter-Ferguson :

1- On remplit le triangle inférieur en appliquant la méthode Chain Ladder.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
2001	318	5 299	24 165	60 509	95 530	116 957	138 849	165 253	184 522	185 605	188 467	189 722	190 371	190 374	190 385
2002	222	3 188	19 358	41 039	65 644	89 985	106 376	117 662	118 236	121 064	122 831	123 678	123 821	123 847	123 854
2003	529	8 380	14 022	39 800	55 629	85 772	115 666	124 750	128 259	131 603	133 936	135 839	136 535	136 548	136 556
2004	771	9 588	18 915	88 645	129 169	157 117	174 257	186 259	191 725	192 591	195 883	196 572	197 223	197 242	197 253
2005	915	7 693	22 553	52 574	80 044	87 456	96 167	101 296	105 201	109 004	110 359	111 167	111 535	111 546	111 552
2006	460	9 691	37 874	83 573	108 319	116 582	137 020	140 163	147 544	153 484	155 892	157 034	157 554	157 569	157 578
2007	3 410	20 110	37 190	70 401	93 191	109 853	125 827	135 166	137 679	140 488	142 693	143 737	144 213	144 227	144 235
2008	1 280	15 359	45 763	75 709	98 840	121 161	146 789	157 413	164 325	167 679	170 310	171 556	172 125	172 141	172 151
2009	873	15 453	44 766	66 522	88 181	111 374	123 605	133 937	139 818	142 671	144 910	145 971	146 454	146 468	146 477
2010	1 568	12 772	30 552	57 173	78 388	89 303	104 389	113 115	118 082	120 491	122 382	123 278	123 686	123 698	123 705
2011	680	8 968	24 701	50 370	59 583	72 437	84 674	91 752	95 780	97 735	99 268	99 995	100 326	100 336	100 342
2012	489	5 017	28 250	40 993	56 893	69 166	80 850	87 608	91 455	93 321	94 786	95 480	95 796	95 805	95 810
2013	4 119	10 079	25 807	53 919	74 833	90 976	106 345	115 234	120 294	122 749	124 675	125 588	126 004	126 016	126 023
2014	136	3 387	9 624	20 107	27 906	33 927	39 658	42 973	44 860	45 775	46 493	46 834	46 989	46 993	46 996
2015	100	859	2 439	5 097	7 074	8 600	10 052	10 893	11 371	11 603	11 785	11 871	11 911	11 912	11 912
facteurj	8,56	2,84	2,09	1,39	1,22	1,17	1,08	1,04	1,02	1,02	1,01	1,00	1,00	1,00	1,00

Tableau 36 :calcul des règlements estimés par la méthode de Chain Ladder

2- Calcul du Loss ratio :

On calcule les $L_{i,j}$:

$$L_{i,j} = \frac{C_{i,j}}{P_i}$$

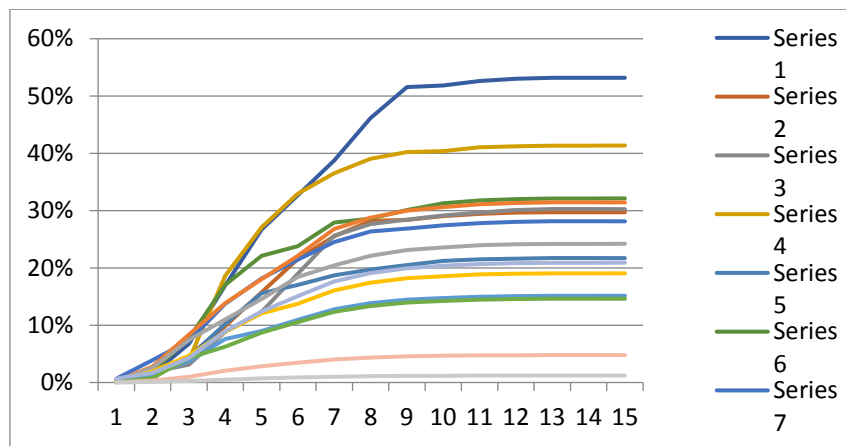


Figure 9 : courbes des Loss ratio pour chaque année de survenance en fonction des années de développement

On remarque que les Loss ratio augmentent pendant les sept premières années puis ils stagnent. On doit prendre une valeur moyenne. Et d'après le graphe, on peut considérer que :

$$L^{BF} = 25\%$$

- 3- Calcul des estimations a priori des montants de charge ultime pour chaque année de survenance i :

i	ui
1	87 787
2	102 234
3	110 684
4	116 950
5	126 014
6	120 254
7	125 741
8	134 315
9	148 360
10	159 213
11	162 505
12	160 728
13	147 776
14	241 051
15	241 051

Tableau 37:Calcul des estimations a priori des montants de charge ultime pour chaque année de survenance i

- 4- Calcul de la L'estimateur $C_{i,n}^{BF}$ de la charge ultime par cette méthode pour l'année de survenance i :

i	C_BF
1	190 385
2	123 853
3	136 552
4	196 976
5	111 707
6	156 608
7	143 395

8	168 912
9	146 771
10	133 580
11	125 592
12	132 953
13	143 321
14	227 065
15	239 121

Tableau 38: Calcul de la L'estimateur $C_{i,n}^{BF}$ de la charge ultime par cette méthode pour l'année de survenance i :

5- Calcul des provisions pour chaque année de survenance i :

i	Provisions
1	0
2	6
3	17
4	404
5	1348
6	3124
7	5716
8	11498
9	23166
10	44276
11	66008
12	91960
13	117514
14	223678
15	239021

Tableau 39: calcul des provisions annuelles par Bornhuetter-Ferguson

6- Calcul de la provision totale :

$$R^{BF} = 827\ 736$$

La méthode Bornhuetter-Ferguson donne des résultats homogènes, et semble donner une estimation vraisemblable des provisions.

Test des hypothèses :

La propriété fondamentale :

Il y a indépendance entre la provision à constituer et le dernier montant connu des règlements :

$$C_{i,j} \text{ indépendant de } C_{i,n} - C_{i,j}$$

i	Provisions	$C_{i,j}$	$\frac{R_i}{C_{i,j}}$
1	0	190 385	0
2	6	123 847	0
3	17	136 535	0
4	404	196 572	0
5	1348	110 359	0
6	3124	153 484	0
7	5716	137 679	0
8	11498	157 413	0
9	23166	123 605	0
10	44276	89 303	0
11	66008	59 583	1
12	91960	40 993	2
13	117514	25 807	5
14	223678	3 387	66
15	239021	100	2383

Tableau 40 : tableau des $\frac{R_i}{C_{i,j}}$ pour chaque année de développement

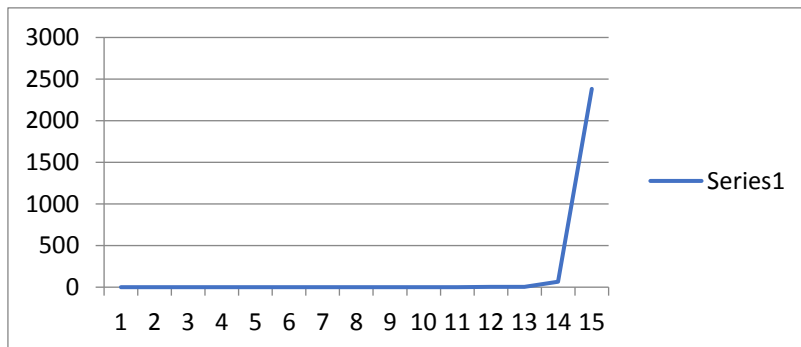


Figure 10: courbe du rapport $\frac{R_i}{C_{i,j}}$ en fonction de l'année survenance i

On remarque que le rapport $\frac{R_i}{C_{i,j}}$ est quasi constant en fonction de l'année de survenance i , sauf pour la dernière valeur qu'on peut ignorer. D'où on déduit la vérification de l'hypothèse fondamentale.

1.5.2. Application de Cape Cod :

1- On remplit le triangle inférieur en appliquant la méthode Chain Ladder.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
2001	318	5 299	24 165	60 509	95 530	116 957	138 849	165 253	184 522	185 605	188 467	189 722	190 371	190 374	190 385
2002	222	3 188	19 358	41 039	65 644	89 985	106 376	117 662	118 236	121 064	122 831	123 678	123 821	123 847	123 854
2003	529	8 380	14 022	39 800	55 629	85 772	115 666	124 750	128 259	131 603	133 936	135 839	136 535	136 548	136 556
2004	771	9 588	18 915	88 645	129 169	157 117	174 257	186 259	191 725	192 591	195 883	196 572	197 223	197 242	197 253
2005	915	7 693	22 553	52 574	80 044	87 456	96 167	101 296	105 201	109 004	110 359	111 167	111 535	111 546	111 552
2006	460	9 691	37 874	83 573	108 319	116 582	137 020	140 163	147 544	153 484	155 892	157 034	157 554	157 569	157 578
2007	3 410	20 110	37 190	70 401	93 191	109 853	125 827	135 166	137 679	140 488	142 693	143 737	144 213	144 227	144 235
2008	1 280	15 359	45 763	75 709	98 840	121 161	146 789	157 413	164 325	167 679	170 310	171 556	172 125	172 141	172 151
2009	873	15 453	44 766	66 522	88 181	111 374	123 605	133 937	139 818	142 671	144 910	145 971	146 454	146 468	146 477
2010	1 568	12 772	30 552	57 173	78 388	89 303	104 389	113 115	118 082	120 491	122 382	123 278	123 686	123 698	123 705
2011	680	8 968	24 701	50 370	59 583	72 437	84 674	91 752	95 780	97 735	99 268	99 995	100 326	100 336	100 342
2012	489	5 017	28 250	40 993	56 893	69 166	80 850	87 608	91 455	93 321	94 786	95 480	95 796	95 805	95 810
2013	4 119	10 079	25 807	53 919	74 833	90 976	106 345	115 234	120 294	122 749	124 675	125 588	126 004	126 016	126 023
2014	136	3 387	9 624	20 107	27 906	33 927	39 658	42 973	44 860	45 775	46 493	46 834	46 989	46 993	46 996
2015	100	859	2 439	5 097	7 074	8 600	10 052	10 893	11 371	11 603	11 785	11 871	11 911	11 912	11 912
facteurj	8,56	2,84	2,09	1,39	1,22	1,17	1,08	1,04	1,02	1,02	1,01	1,00	1,00	1,00	1,00

2- Calcul des cadences de paiement pour chaque année de développement pc_j :

j	Pc
0	0,0084
1	0,0721
2	0,2048
3	0,4279
4	0,5938
5	0,7219
6	0,8439
7	0,9144
8	0,9545
9	0,9740
10	0,9893
11	0,9965
12	0,9998
13	0,9999
14	1

Tableau 41: Calcul des cadences de paiement pour chaque année de développement

3- La charge ultime pour chaque année de survenance i :

i	charge ultime
2001	190385
2002	123854
2003	136556
2004	197253
2005	111552
2006	157578
2007	144235
2008	172151
2009	146477
2010	123705
2011	100342
2012	95810
2013	126023
2014	46996
2015	11 912

Tableau 42:La charge ultime pour chaque année de survenance i :

4- Calcul du Loss ratio : $L_A^{CapeCode}$

$$L_A^{CapeCode} = 28\%$$

5- Calcul de la provision pour chaque année de survenance i :

i	Provisions
2001	0
2002	7
2003	19
2004	461
2005	1539
2006	3566
2007	6525
2008	13126
2009	26446
2010	50546

2011	75354
2012	104981
2013	134153
2014	255349
2015	272864

Tableau 43:calcul des provisions annuelles par Cape Cod

6- Calcul de la provision totale :

$$R^{Cape\ cod} = 944\ 935$$

Cette méthode nous donne une estimation modérée des provisions. Ses résultats sont proches de ceux de Bornhuetter-Ferguson.

Test des hypothèses :

- **H1** : Indépendance des sinistres cumulés non connus(ou non réglés) des sinistres déjà connus ou réglés :

i	Provisions	Cij	Ri/Cij
2001	0	190 385	0,00
2002	7	123 847	0,00
2003	19	136 535	0,00
2004	461	196 572	0,00
2005	1539	110 359	0,01
2006	3566	153 484	0,02
2007	6525	137 679	0,05
2008	13126	157 413	0,08
2009	26446	123 605	0,21
2010	50546	89 303	0,57
2011	75354	59 583	1,26
2012	104981	40 993	2,56
2013	134153	25 807	5,20
2014	255349	3 387	75,39
2015	272864	100	2720,21

Tableau 44:Indépendance des sinistres cumulés non connus (ou non réglés) des sinistres déjà connus ou réglés

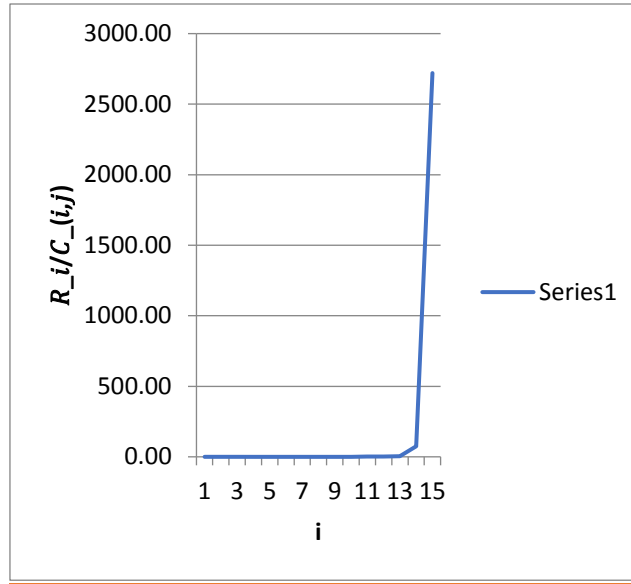
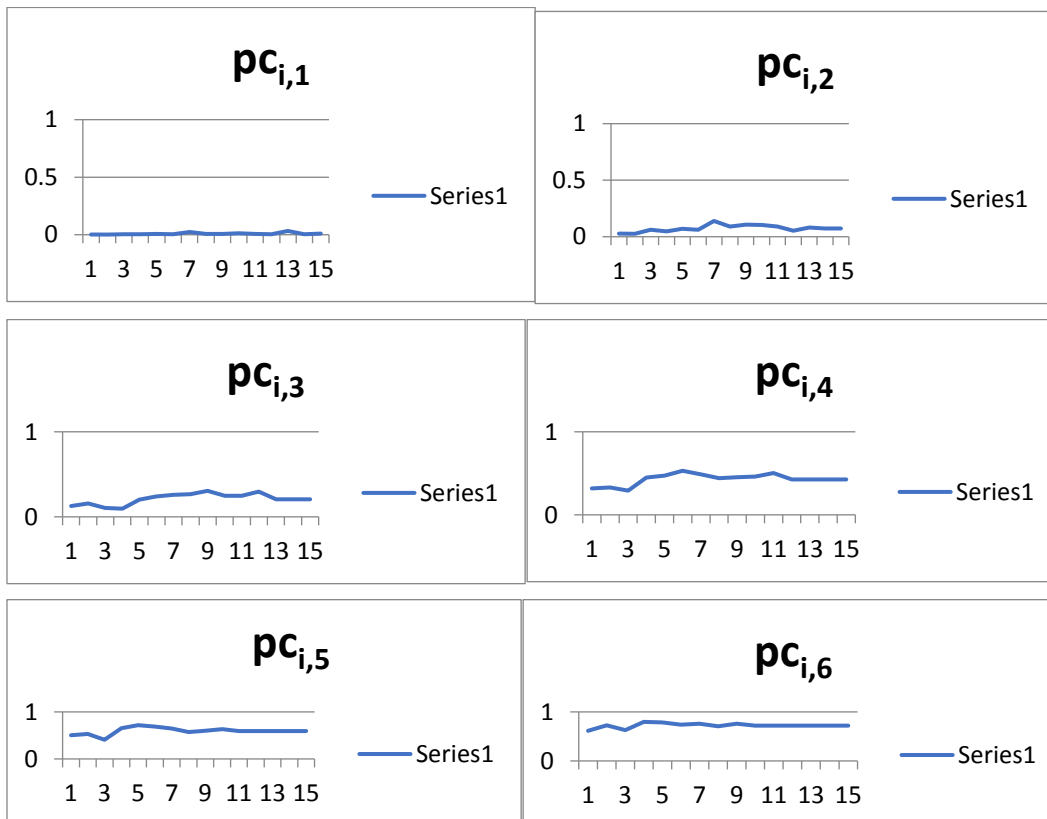


Figure 11: courbe du rapport $\frac{R_i}{C_{i,j}}$ en fonction de l'année survenance i

On remarque que le rapport $\frac{R_i}{C_{i,j}}$ est quasi constant en fonction de l'année de survenance i , sauf pour la dernière valeur qu'on peut ignorer. D'où on déduit la vérification de la première hypothèse.

- **H2** : Indépendance entre les années d'origine au sein d'un même groupe A. On pose alors $pc_{i,j} = pc_j$



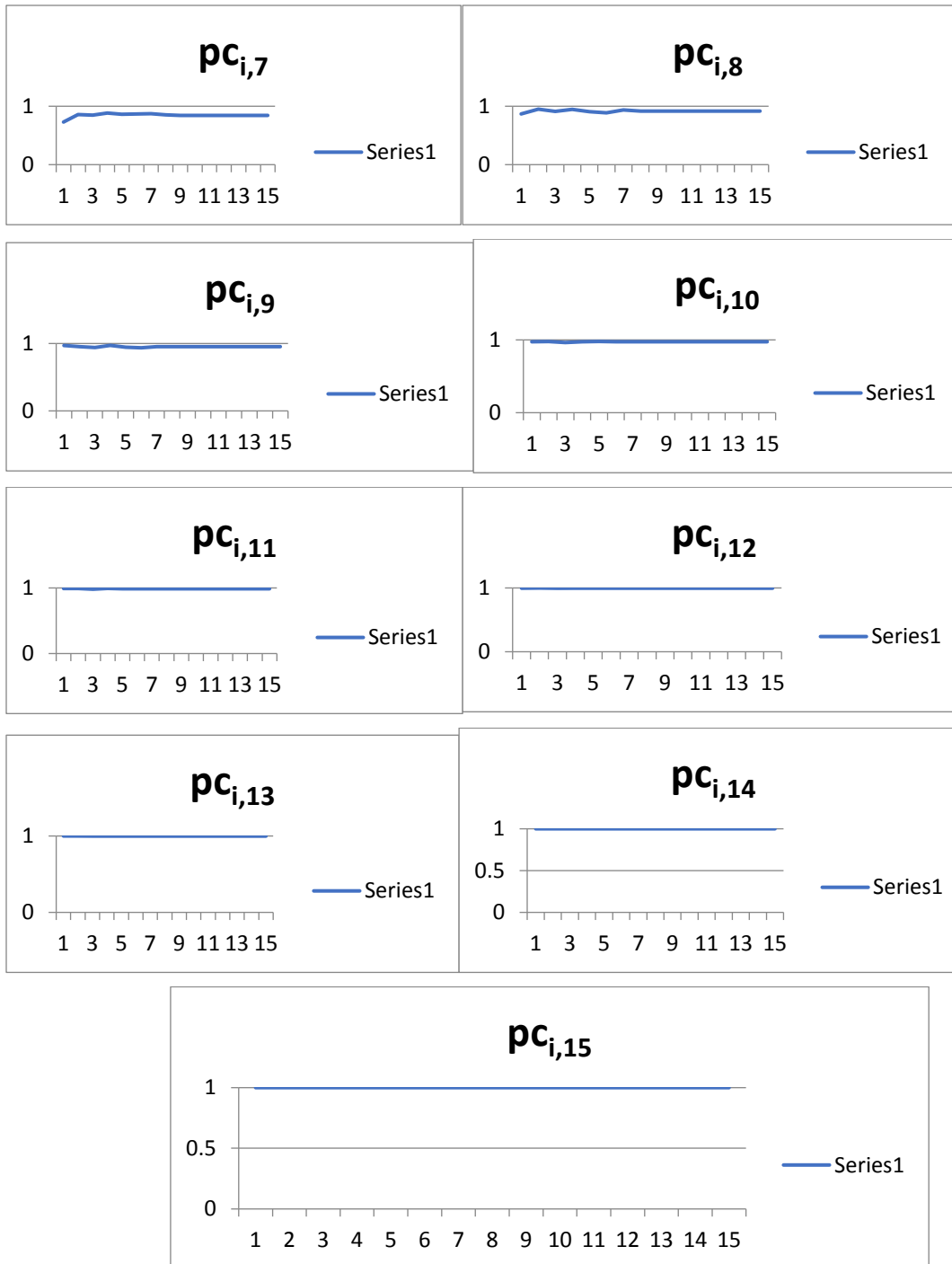


Figure 12: courbes de $pc_{i,j}$ en fonction de l'année de survenance i

On remarque que, dans les 15 graphes, les $pc_{i,j}$ en fonction des années de survenance restent constants. D'où la deuxième hypothèse est aussi vérifiée.

1.5.3. Application de La méthode Benktander

i	PSAP CHAIN LADDER	PSAP BF	pc_{n-i}	PSAP Benktander
2001	-	-		-
2002	7.22	5.96	0.9999417	7
2003	20.69	16.77	0.99984846	21
2004	680.92	403.71	0.996548	680
2005	1 193.09	1 347.77	0.98930464	1 195
2006	4 093.55	3 123.95	0.97402202	4 068
2007	6 556.36	5 715.68	0.95454399	6 518
2008	14 737.42	11 498.39	0.91439237	14 460
2009	22 871.53	23 165.64	0.84385541	22 917
2010	34 401.78	44 276.45	0.72190445	37 148
2011	40 758.05	66 008.38	0.59380682	51 014
2012	54 817.58	91 960.28	0.42785315	76 069
2013	100 215.69	117 513.92	0.20478198	113 971
2014	43 608.85	223 677.99	0.07207147	210 700
2015	11 812.14	239 021.08	0.0084206	237 108

Tableau 45:calcul des provisions annuelles par La méthode Benktander

La provision globale est :

$$R^{BK} = 775\ 877$$

2. Application des méthodes stochastiques :

2.1.Application de Mack :

Pour appliquer la méthode Mack, on doit, d'abord, tester ses hypothèses.

Test d'hypothèses:

H1 : Le test présenté dans la partie théorique nous donne l'intervalle de confiance 97,5% suivant :

$$IC = [28,93; 40,49]$$

Et la statistique $Z = 25 \in IC$

D'où, on ne peut pas rejeter l'hypothèse de l'indépendance des années de survenance.

H2 : Cette hypothèse est déjà étudiée dans la méthode chain ladder.

H3: Pour $0 \leq i \leq n$ et $0 \leq j \leq n$

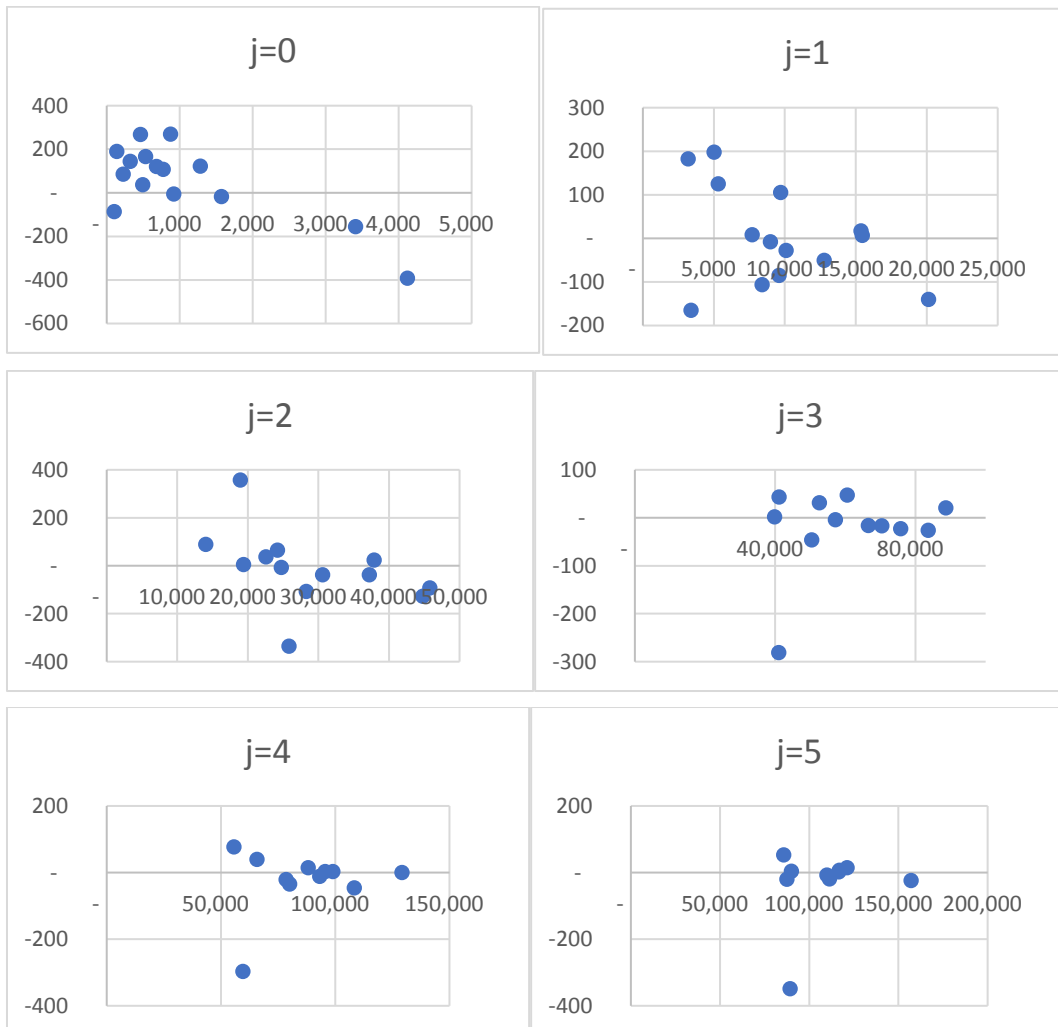
Il existe σ_j tel que :

$$Var(C_{i,j+1}/C_{i,1}, \dots, C_{i,n}) = \sigma_j^2 * C_{i,j}$$

Afin de tester sa validité, nous devons estimer les résidus de notre modèle. Par la suite, nous vérifions graphiquement l'existence d'une tendance spécifique de ces résidus. L'expression des résidus estimés par la méthode des moindres carrés est :

$$r_{ij}^{Mack} = \frac{C_{i,j+1} - \hat{f}_j C_{ij}}{\sqrt{C_{ij}}}, 0 \leq j \leq n - 1 \text{ et } 0 \leq i \leq n - j - 1$$

Graphiquement l'hypothèse H3 est validée si les points (C_{ij}, r_{ij}^{Mack}) ne présentent pas une tendance spécifique.



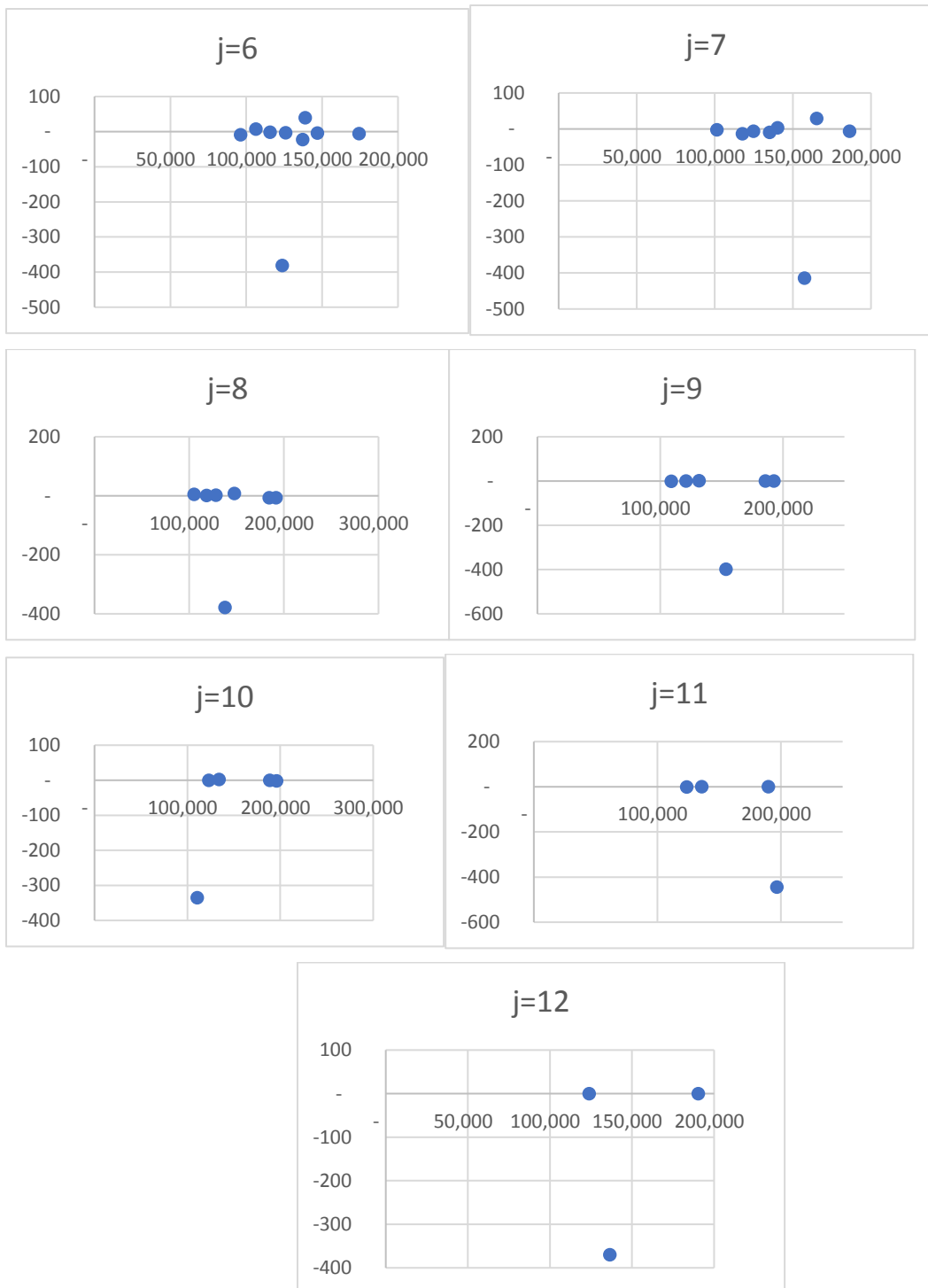


Figure 13: Les résidus estimés par la méthode des moindres carrées en fonction des paiements cumulés pour chaque année de développement j

On remarque, d'après les graphes ci-dessus, que les deux variables ne sont pas dépendantes pour chaque année de développement j . En effet, les nuages de points n'ont pas une tendance spécifique. Par conséquent, l'hypothèse 3 est vérifiée.

Application de la méthode :

1- On remplit le triangle inférieur en appliquant la méthode Chain Ladder.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
2001	318	5 299	24 165	60 509	95 530	116 957	138 849	165 253	184 522	185 605	188 467	189 722	190 371	190 374	190 385
2002	222	3 188	19 358	41 039	65 644	89 985	106 376	117 662	118 236	121 064	122 831	123 678	123 821	123 847	123 854
2003	529	8 380	14 022	39 800	55 629	85 772	115 666	124 750	128 259	131 603	133 936	135 839	136 535	136 548	136 556
2004	771	9 588	18 915	88 645	129 169	157 117	174 257	186 259	191 725	192 591	195 883	196 572	197 223	197 242	197 253
2005	915	7 693	22 553	52 574	80 044	87 456	96 167	101 296	105 201	109 004	110 359	111 167	111 535	111 546	111 552
2006	460	9 691	37 874	83 573	108 319	116 582	137 020	140 163	147 544	153 484	155 892	157 034	157 554	157 569	157 578
2007	3 410	20 110	37 190	70 401	93 191	109 853	125 827	135 166	137 679	140 488	142 693	143 737	144 213	144 227	144 235
2008	1 280	15 359	45 763	75 709	98 840	121 161	146 789	157 413	164 325	167 679	170 310	171 556	172 125	172 141	172 151
2009	873	15 453	44 766	66 522	88 181	111 374	123 605	133 937	139 818	142 671	144 910	145 971	146 454	146 468	146 477
2010	1 568	12 772	30 552	57 173	78 388	89 303	104 389	113 115	118 082	120 491	122 382	123 278	123 686	123 698	123 705
2011	680	8 968	24 701	50 370	59 583	72 437	84 674	91 752	95 780	97 735	99 268	99 995	100 326	100 336	100 342
2012	489	5 017	28 250	40 993	56 893	69 166	80 850	87 608	91 455	93 321	94 786	95 480	95 796	95 805	95 810
2013	4 119	10 079	25 807	53 919	74 833	90 976	106 345	115 234	120 294	122 749	124 675	125 588	126 004	126 016	126 023
2014	136	3 387	9 624	20 107	27 906	33 927	39 658	42 973	44 860	45 775	46 493	46 834	46 989	46 993	46 996
2015	100	859	2 439	5 097	7 074	8 600	10 052	10 893	11 371	11 603	11 785	11 871	11 911	11 912	11 912
facteurj	8,56	2,84	2,09	1,39	1,22	1,17	1,08	1,04	1,02	1,02	1,01	1,00	1,00	1,00	1,00

2- Calcul des σ_j^2 :

j	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
segma j	32 752,22	10 870,43	15 072,70	847,54	1 161,54	497,60	286,63	174,76	29,55	0,45	2,32	0,34	0,00	0,00

Tableau 46: Calcul des sigmas

3- Calcul des provisions pour chaque année de survenance :

i	Provisions
2001	0
2002	7
2003	21
2004	681
2005	1193
2006	4094
2007	6556
2008	14737
2009	22872
2010	34402
2011	40758
2012	54818
2013	100216
2014	43609
2015	11812

Tableau 47: calcul des provisions annuelles par Mack

4- La Provision totale est :

$$R^{Mack} = 335\,775$$

5- Calcul de l'écart quadratique moyen pour chaque année de survenance :

i	MSEP(Ri)
2001	0
2002	1
2003	256
2004	88 303
2005	340 574
2006	589 489
2007	5 402 327
2008	41 007 734
2009	81 108 143
2010	134 954 259
2011	248 887 490
2012	341 063 272
2013	2 728 377 671
2014	1 875 190 725
2015	1 102 888 047

Tableau 48: Calcul de l'écart quadratique moyen pour chaque année de survenance

6- L'estimation du MSEP de la provision totale :

$$\widehat{MSEP}(\widehat{R}) = 20\,018\,643\,082$$

7- L'erreur standard relative :

$$\frac{\sqrt{\widehat{MSEP}(\widehat{R})}}{\widehat{R}} = 42.14\%$$

On constate que l'erreur relative de prédiction est très élevée. D'où, on peut conclure que la méthode chain ladder ne donne pas une très bonne estimation des provisions.

2.2. Application de la méthode de Munich Chain Ladder :

✓ **Vérification des hypothèses :**

- Les différentes années de survenance sont supposées indépendantes dans les règlements et dans les charges

L'hypothèse est du même type que les hypothèses d'indépendance des années calendaires vérifiées sur le triangle de règlements. En revanche, celle-ci fait intervenir simultanément les règlements et les charges. Il a donc été décidé pour vérifier cette hypothèse de mettre à nouveau en œuvre le test d'indépendance, mais cette fois-ci avec le triangle des ratios charges/Paiements.

j	Gj	Pj	nj	zj	mj	E(zj)	V(Zj)
1	0	1	1	0	0	0	0
2	1	1	2	1	0	0,5	0,25
3	1	2	3	1	1	0,75	0,1875
4	3	1	4	1	1	1,25	0,4375
5	2	3	5	2	2	1,5625	0,37109375
6	0	5	5	0	2	1,5625	0,37109375
7	2	5	7	2	3	2,40625	0,55371094
8	1	7	8	1	3	2,90625	0,80371094
9	7	2	9	2	4	3,26953125	0,73594666
10	5	5	10	5	4	3,76953125	0,98594666
11	7	1	8	1	3	2,90625	0,80371094
12	12	0	12	0	5	4,64648438	1,16799545
13	1	9	10	1	4	3,76953125	0,98594666
14	6	7	13	6	6	5,03369141	1,09993911

intervalle de confiance	
borne inférieur	borne supérieur
28,53340488	40,13163418

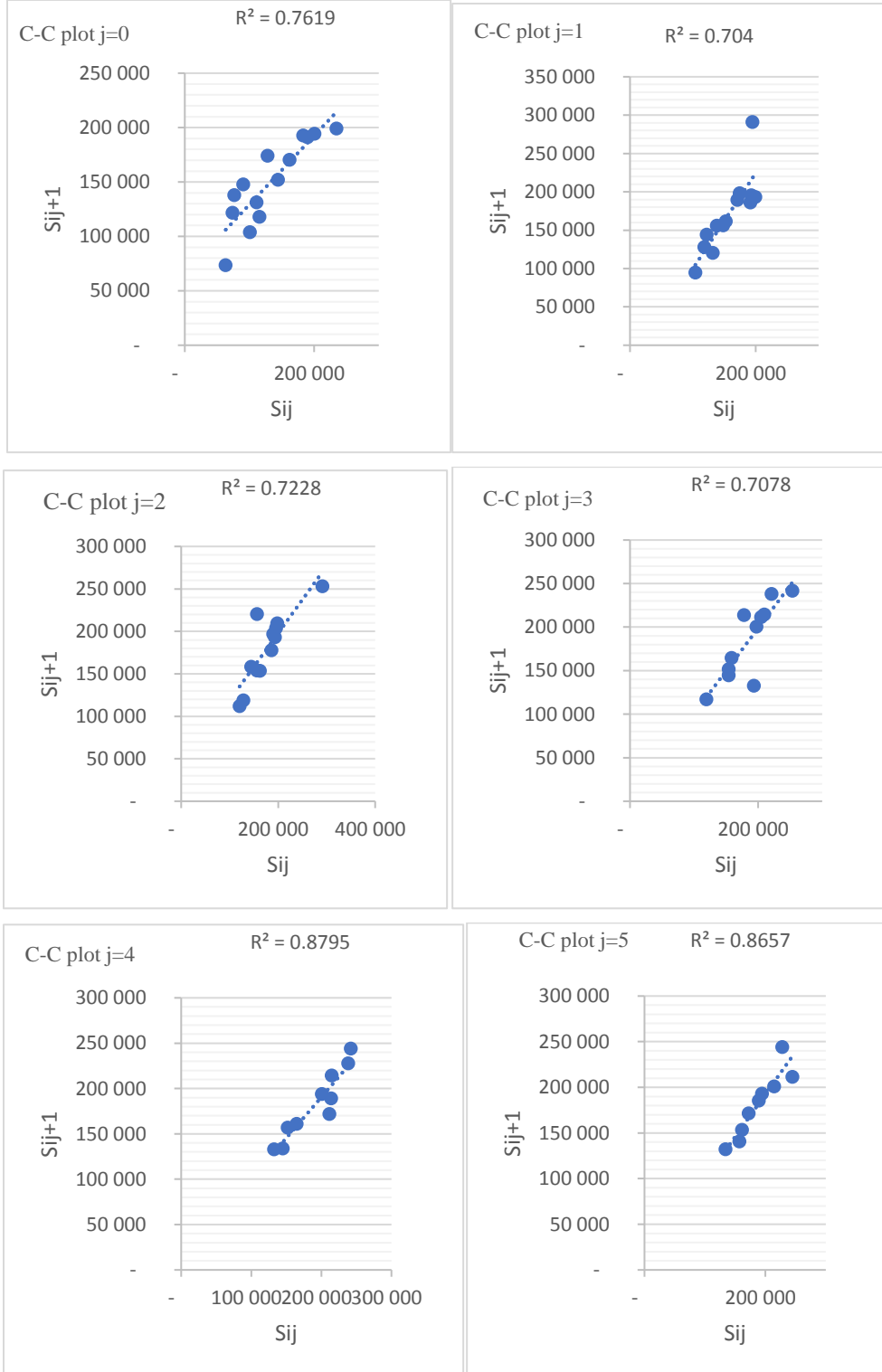
E(Z)	34,3325195
V(Z)	8,75409484
Z	23

Tableau 49: test d'indépendance des années de survenance dans les règlements et dans les charges

On observe que $Z=23$ n'appartient pas à l'intervalle de confiance $[28,53 ; 40,13]$. On rejette l'hypothèse d'indépendance entre les différentes années calendaires au seuil de 5%.

➤ **L'hypothèse de l'existence pour chaque $j=0... n-1$ du paramètre $f_j^{(s)}$**

Les hypothèses relatives au triangle de paiement sont déjà vérifiées, il nous reste de vérifier celles relatives au triangle des charges.



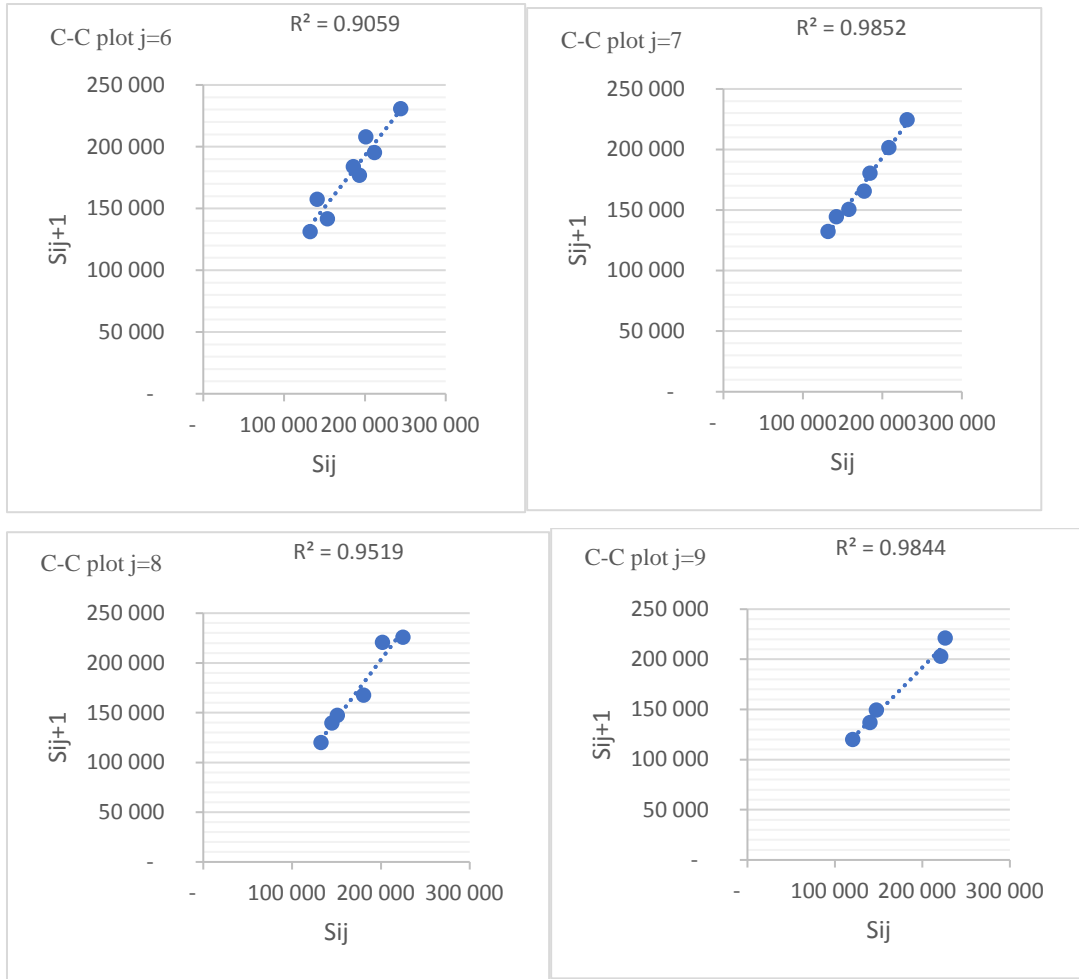
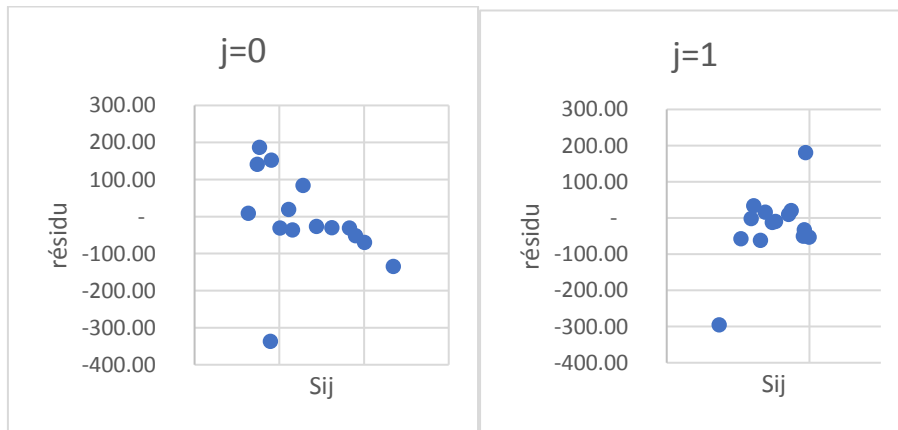
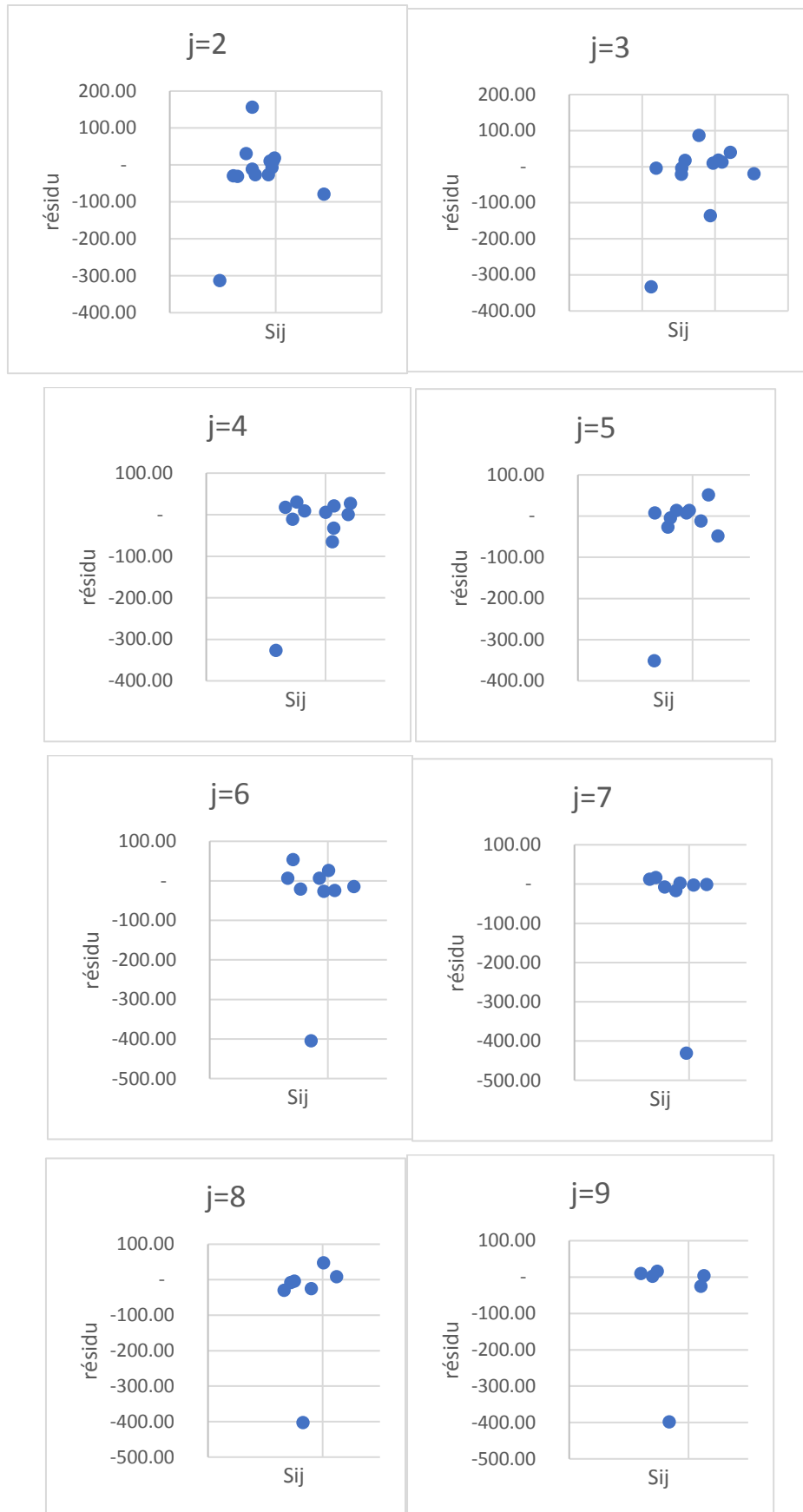


Figure 14 : Représentation des nuages de points ($S_{i,j}, S_{i,j+1}$), $j=0, \dots, 9$

On confirme que l'existence des paramètres $f_j^{(s)}$ est vérifiée, puisque pour chaque j , les points sont alignés et les coefficients de détermination de toutes les années sont supérieurs à 70%, donc une part importante de la variabilité des charges est expliquée par les charges des années de développement antérieures.

➤ L'hypothèse de l'existence pour chaque $j=0 \dots (n-1)$ du paramètre $\sigma_j^{(s)}$





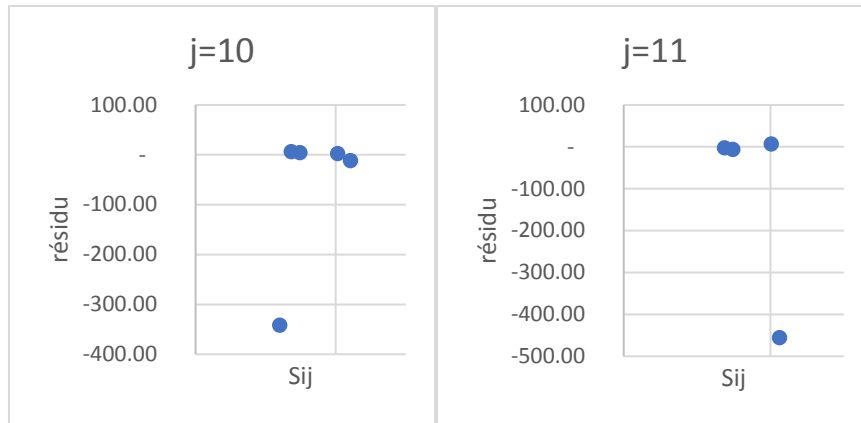


Figure 15 : Les résidus estimés par la méthode des moindres carrés en fonction des charges dossier/dossier pour chaque année de développement j

D'après les graphes ci-dessus, on peut valider l'hypothèse, puisque aucune structure n'est prise en compte par nos nuages de points autrement dit la structure est parfaitement aléatoire.

➤ Validation de l'hypothèse sur l'existence de deux constantes tel que :

$$E \left[\text{RES} \left(\frac{S_{i,j+1}}{S_{i,j}} / S_{i,j}, C_{i,j} \right) \right] = \lambda^{(s)} \text{Res} (Q_{ij} / S_{i,j})$$

$$\text{et } E \left[\text{RES} \left(\frac{C_{i,j+1}}{C_{i,j}} / C_{i,j}, S_{i,j} \right) \right] = \lambda^{(c)} \text{Res} (Q_{ij}^{-1} / C_{i,j})$$

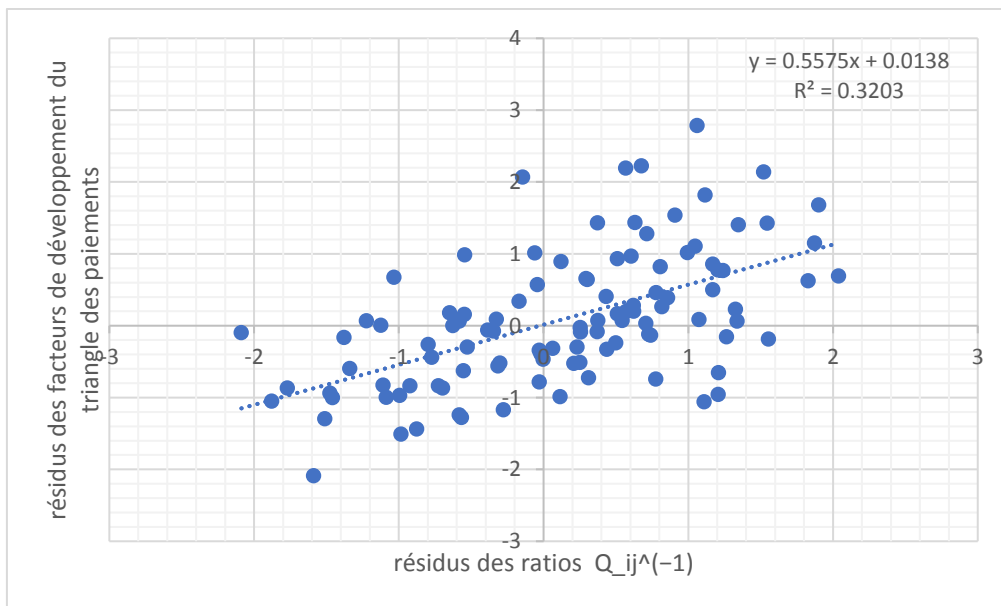


Figure 16: Représentation graphique des résidus des facteurs de développement du triangle des paiements en fonction des résidus des ratios S/C

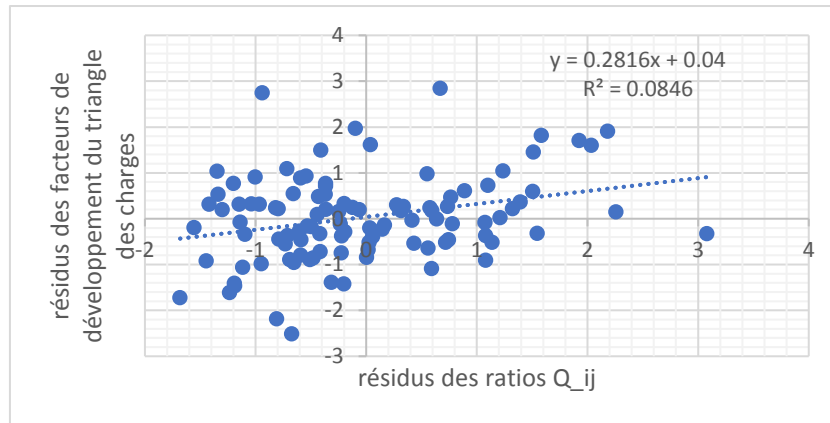


Figure 17: Représentation graphique des résidus des facteurs de développement du triangle des charges en fonction des résidus des ratios C/S

Les deux nuages de points révèlent bien l'existence d'une dépendance entre les résidus des facteurs de développement et les résidus des ratios Paiement/charge ou charge/Paiement, que l'on peut modéliser par une relation linéaire. En outre, les pentes de la droite de régression sont bien positives, ce qui conforte l'hypothèse sur la positivité des constantes. Cependant les coefficients de détermination sont inférieurs à 70% surtout celui relatif au deuxième nuage de point. Cela signifie que le modèle mathématique utilisé n'explique pas la distribution des points.

✓ **Résultats obtenus**

- Etape 1 : Estimation des paramètres $f_j^{(c)}$, $\sigma_j^{(c)}$, $f_j^{(s)}$ et $\sigma_j^{(s)}$

j	$f_j^{(c)}$	$\sigma_j^{(c)}$
0	8,5589466	187,80739
1	2,8413738	108,51865
2	2,0893106	128,23005
3	1,3878753	30,533502
4	1,2157227	35,924863
5	1,1689295	23,659992
6	1,0835889	18,099216
7	1,0439107	14,278946
8	1,0204056	5,9545284
9	1,0156902	0,7490386
10	1,0073217	1,7588919
11	1,0033119	0,7169654
12	1,0000933	0,053497
13	1,0000583	3,10E-05

Tableau 50: l'estimation des paramètres de la méthode de Munich Chain Ladder relatifs au triangle des paiements

j	$f_j^{(s)}$	$\sigma_j^{(s)}$
0	1.1259932	94.438123
1	1.08766105	63.3161272
2	1.01579059	57.0480073
3	0.99478563	54.2344079
4	0.954664314	29.76055057
5	0.964001501	28.11884957
6	0.975790591	28.34721446
7	0.97471683	11.40263281
8	0.987973031	28.22960735
9	0.972592497	15.86269001
10	0.984277423	8.18044655
11	0.987780964	6.541268698
12	0.985662963	6.41335451
13	0.982557099	0.924044808

Tableau 51:l'estimation des paramètres de la méthode de Munich Chain Ladder relatifs au triangle des charges

▪ Etape 2 : Estimation des résidus :

résidus standardisés règlements	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
2001	0.769	1.153	0.503	1.538	0.074	0.264	2.194	2.07	-1.049	-0.15	-0.164	0.066	-0.628	0
2002	0.459	1.681	0.033	1.404	1.106	0.168	0.406	-0.938	0.203	-0.51	-0.084	-1.06	0.778	
2003	0.891	-0.985	0.692	0.064	2.141	2.223	-0.095	-0.39	0.341	0.987	1.432	0.933		
2004	0.574	-0.784	2.786	0.675	0.006	-1.003	-0.339	-0.44	-1.168	0.821	-0.957			
2005	-0.024	0.073	0.283	1.011	-0.97	-0.867	-0.518	-0.12	0.858	-1.44				
2006	1.428	0.968	0.178	-0.869	-1.277	0.092	-1.24	0.229	1.281					
2007	-0.828	-1.296	-0.295	-0.558	-0.314	-0.329	-0.184	-0.652						
2008	0.655	0.158	-0.726	-0.742	0.088	0.627	-0.237							
2009	1.437	0.064	-0.995	-0.526	0.391	-0.834								
2010	-0.087	-0.468	-0.297	-0.132	-0.596									
2011	0.643	-0.076	-0.061	-1.506										
2012	0.2	1.821	-0.837											
2013	-2.089	-0.26												
2014	1.017													

Tableau 52:les résidus standardisés des facteurs de paiements

résidus standardisés charges	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
2001	0.891	0.323	0.329	0.242	0.719	-0.441	0.936	-0.226	1.709	-1.61	0.368	1.045	-0.633	0
2002	1.499	0.535	0.55	0.323	0.323	-0.168	-0.714	1.459	-0.269	0.16	0.775	-0.338	0.774	
2003	1.978	0.247	-0.192	-0.074	1.043	-0.948	1.915	-0.671	-0.131	0.981	0.54	-0.89		
2004	1.618	-0.195	2.754	0.731	0.028	1.822	-0.511	-0.106	0.307	0.223	-1.405			
2005	-0.277	-0.153	-0.458	-0.388	-0.362	0.268	0.238	1.093	-1.052	0.616				
2006	-0.544	-0.791	-0.456	1.606	-1.084	0.27	0.242	0.205	-0.888					
2007	-0.312	0.154	0.184	0.184	0.2	0.489	-0.918	-1.457						
2008	-0.74	2.847	-1.383	-0.364	0.914	-1.718	-0.854							
2009	-0.324	-0.509	0.22	0.337	-2.179	0.472								
2010	-1.418	-0.836	-0.115	-2.507	0.599									
2011	-0.374	-0.026	-0.533	-0.078										
2012	0.206	-0.981	-0.509											
2013	-0.321	-0.901												
2014	0.099													

Tableau 53:les résidus standardisés des facteurs de charge

- Etape 3 : calcul de l'espérance de Q_{ij}^{-1} et Q_{ij} , leurs variances pour calculer des résidus standardisés du triangle Q_{ij}^{-1} et Q_{ij} : ($Q_{i,j} = \frac{C_{i,j}}{S_{i,j}}$)

j	\hat{q}_j^{-1}	$\hat{\rho}_j^{(c)}$	\hat{q}_j	$\hat{\rho}_j^{(s)}$
0	123.682503	4 008.97446	0.00808522	3.37756742
1	15.6285776	670.527847	0.06398535	9.86358361
2	5.92256588	302.051001	0.16884574	20.044185
3	2.96080726	135.831345	0.33774573	27.3656821
4	2.1317615	92.2500463	0.46909563	29.6067305
5	1.68278603	63.4400809	0.59425262	28.8682218
6	1.40206973	30.2770005	0.71323129	18.7419978
7	1.26427748	13.7750245	0.79096561	9.68941079
8	1.18401475	20.8265109	0.84458407	16.4109224
9	1.14358579	15.9128739	0.87444249	13.0549534
10	1.10533755	9.08470888	0.90470101	7.83925968
11	1.08284638	8.23859644	0.92349203	7.31274476
12	1.06691051	5.99327429	0.93728573	5.40661176
13	1.0549354	14.189444	0.94792534	13.0318029

Tableau 54:: calcul de l'espérance de Q_{ij}^{-1} et Q_{ij} , et de leurs variance

✓ Estimation des résidus standardisés du triangle des Q_{ij} et \hat{Q}_{ij}^{-1}

	0	1	2	4	5	6.3	7.6	8.9	10.2	11.5	12.8	14.1	15.4	16.7
2001	1.239	1.872	1.169	0.907	0.376	0.817	0.568	-0.14	-1.88	1.264	-1.38	-1.22	-0.55	-0.63
2002	0.778	1.902	0.706	1.346	1.047	0.51	0.433	-1.48	0.624	0.25	0.37	1.11	1.204	
2003	0.121	0.114	2.037	1.336	1.52	0.675	-2.09	-0.02	-0.17	-0.55	0.373	0.511		
2004	-0.04	-0.03	1.061	-1.03	-1.12	-1.46	-0.03	-0.77	-0.28	0.807	1.206			
2005	0.254	0.543	0.62	-0.06	-0.99	-0.7	-0.3	0.727	1.168	-0.88				
2006	1.545	0.604	-0.65	-1.77	-0.57	-0.33	-0.58	1.327	0.713					
2007	-1.11	-1.51	-0.53	-0.32	0.064	0.437	1.555	1.208						
2008	0.294	-0.55	0.31	0.775	1.074	1.829	0.499							
2009	0.632	-0.58	-1.09	0.208	0.857	-0.73								
2010	0.256	-0	0.231	0.74	-1.34									
2011	0.302	-0.35	-0.39	-0.98										
2012	0.569	1.116	-0.92											
2013	-1.59	-0.8												
2014	0.994													

Tableau 55:les résidus standardisés du triangle de paiement ($Res(Q_{ij}^{-1})/C_{i,j}$)

	0	1	2	4	5	6.3	7.6	8.9	10.2	11.5	12.8	14.1	15.4	16.7
2001	-0.59	-1.42	-1.04	-0.82	-0.37	-0.79	-0.54	0.145	1.925	-1.24	1.393	1.236	0.56	0.637
2002	-0.41	-1.34	-0.66	-1.15	-0.97	-0.5	-0.42	1.513	-0.6	-0.25	-0.37	-1.1	-1.2	
2003	-0.1	-0.12	-1.55	-1.14	-1.35	-0.65	2.181	0.019	0.167	0.549	-0.37	-0.51		
2004	0.038	0.033	-0.94	1.099	1.21	1.583	0.028	0.78	0.275	-0.79	-1.19			
2005	-0.19	-0.53	-0.59	0.06	1.079	0.737	0.297	-0.72	-1.12	0.89				
2006	-0.73	-0.59	0.745	2.035	0.59	0.336	0.576	-1.3	-0.69					
2007	1.545	2.258	0.595	0.316	-0.06	-0.43	-1.45	-1.19						
2008	-0.23	0.669	-0.31	-0.71	-1	-1.68	-0.48							
2009	-0.42	0.719	1.324	-0.2	-0.81	0.764								
2010	-0.2	0.005	-0.23	-0.67	1.505									
2011	-0.22	0.415	0.431	1.074										
2012	-0.36	-0.95	1.139											
2013	3.08	1.079												
2014	-0.44													

Tableau 56: des résidus standardisés du triangle de charge ($Res(Q_{ij}/C_{i,j})$)

Etape 4 : calcul de $\widehat{\lambda}^{(c)}$ et $\widehat{\lambda}^{(s)}$

$\widehat{\lambda}^{(c)}$	$\widehat{\lambda}^{(s)}$
0.55975311	0.28025562

- Etape 5 : Calcul de la partie inférieure des triangles de paiement et des charges et calcul des provisions :

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
2001	318	5 299	24 165	60 509	95 530	116 957	138 849	165 253	184 522	185 605	188 467	189 722	190 371	190 374	190 385
2002	222	3 188	19 358	41 039	65 644	89 985	106 376	117 662	118 236	121 064	122 831	123 678	123 821	123 847	123 854
2003	529	8 380	14 022	39 800	55 629	85 772	115 666	124 750	128 259	131 603	133 936	135 839	136 535	136 543	136 551
2004	771	9 588	18 915	88 645	129 169	157 117	174 257	186 259	191 725	192 591	195 883	196 572	197 205	197 221	197 233
2005	915	7 693	22 553	52 574	80 044	87 456	96 167	101 296	105 201	109 004	110 359	110 968	111 267	111 272	111 278
2006	460	9 691	37 874	83 573	108 319	116 582	137 020	140 163	147 544	153 484	155 683	156 094	156 392	156 390	156 399
2007	3 410	20 110	37 190	70 401	93 191	109 853	125 827	135 166	137 679	140 893	143 140	144 127	144 568	144 578	144 587
2008	1 280	15 359	45 763	75 709	98 840	121 161	146 789	157 413	162 192	165 393	167 993	169 049	169 539	169 549	169 559
2009	873	15 453	44 766	66 522	88 181	111 374	123 605	133 284	138 721	141 470	143 695	144 600	145 020	145 028	145 037
2010	1 568	12 772	30 552	57 173	78 388	89 303	100 783	105 766	108 809	110 955	112 699	113 408	113 736	113 743	113 749
2011	680	8 968	24 701	50 370	59 583	70 259	81 044	86 541	89 700	91 475	92 913	93 498	93 769	93 775	93 780
2012	489	5 017	28 250	40 993	55 743	66 575	77 177	82 730	85 890	87 590	88 968	89 528	89 788	89 793	89 798
2013	4 119	10 079	25 807	40 078	53 771	63 525	73 330	78 350	81 230	82 837	84 140	84 669	84 915	84 920	84 925
2014	136	3 387	11 491	26 282	36 444	44 200	51 539	55 496	57 725	58 869	59 795	60 171	60 346	60 350	60 353
2015	100	2 879	12 788	32 103	44 788	54 575	63 749	68 735	71 537	72 954	74 102	74 569	74 785	74 789	74 794

Tableau 57 : triangle de paiement complété par la méthode Munich-Chain Ladder

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
2001	127 950	174 175	197 987	209 459	214 363	214 550	201 089	208 115	201 678	220 923	202 885	201 050	201 659	196 945	193 510
2002	74 000	121 826	144 327	158 536	164 686	161 126	153 424	141 780	144 459	139 834	136 949	137 141	134 645	134 537	132 117
2003	76 626	137 986	155 901	154 046	151 671	156 880	140 673	157 626	150 602	147 351	149 284	148 643	144 581	142 848	140 379
2004	90 527	147 897	156 102	220 630	238 102	227 707	243 952	230 891	224 475	225 880	221 368	212 481	209 972	207 095	203 501
2005	143 951	152 157	161 709	153 767	144 718	134 062	132 000	131 253	132 449	120 053	120 150	118 746	117 623	116 276	114 269
2006	189 802	191 317	186 177	177 896	213 695	189 094	185 589	184 048	180 398	167 582	165 354	164 534	163 564	162 245	159 466
2007	161 991	170 526	189 505	197 065	200 462	194 040	193 117	177 007	165 542	162 522	157 651	155 322	153 597	151 596	148 969
2008	200 565	194 541	291 093	253 110	241 850	244 268	211 594	195 337	191 357	189 333	184 086	181 616	179 730	177 512	174 441
2009	182 913	192 857	195 609	204 261	211 445	172 034	171 350	167 792	163 737	161 975	157 479	155 361	153 745	151 845	149 218
2010	234 620	199 301	193 148	193 305	132 526	133 006	131 020	130 958	128 367	127 012	123 494	121 837	120 572	119 084	117 024
2011	115 624	118 183	127 975	119 110	117 024	113 039	109 812	108 308	105 857	104 726	101 821	100 453	99 409	98 181	96 483
2012	110 943	131 409	120 406	112 230	113 360	108 943	105 522	103 780	101 368	100 282	97 499	96 189	95 189	94 013	92 387
2013	100 818	103 882	94 600	103 938	106 159	102 465	99 496	98 090	95 862	94 838	92 207	90 968	90 022	88 910	87 372
2014	63 222	73 548	77 623	77 560	77 204	73 768	71 211	69 805	68 133	67 401	65 530	64 649	63 976	63 186	62 093
2015	89 463	95 852	98 401	96 902	96 050	91 620	88 357	86 527	84 437	83 529	81 210	80 118	79 284	78 305	76 950

Tableau 58 :triangle des charges complétées par la méthode Munich-Chain Ladder

La provision pour chaque année de survenance i :

i	PSAP
2001	-
2002	7
2003	15
2004	660
2005	919
2006	2 915
2007	6 908
2008	12 145
2009	21 432
2010	24 446
2011	34 197
2012	48 806
2013	59 118
2014	56 966
2015	74 693

Tableau 59: résultat de provisions annuelles calculées par Munich Chain Ladder

La Provision totale est :

$$R^{Munich} = 343\,228$$

- ✓ Les provisions pour le triangle de paiement et quantification de l'erreur de leur estimation

	R	MSEP	Ecart-typeR	erreur standard	Borne inférieur R	Borne supérieur R
2001	-	-	-	NA	-	-
2002	7.23	6.34	2.52	0.31	4.24	14.00
2003	15.25	567.85	23.83	1.59	0.88	72.06
2004	660.41	146 204.98	382.37	0.58	199.09	1 639.35
2005	919.23	472 482.90	687.37	0.75	199.25	2 717.89
2006	2 915.05	808 517.60	899.18	0.31	1 542.19	5 029.06
2007	6 907.83	6 722 881.68	2 592.85	0.38	3 174.40	13 174.98
2008	12 145.41	47 762 527.06	6 911.04	0.57	3 738.15	29 807.24
2009	21 431.82	93 425 002.40	9 665.66	0.45	8 405.73	45 406.90
2010	24 446.37	134 458 185.27	11 595.61	0.47	9 134.54	53 407.48
2011	34 196.81	249 859 761.73	15 806.95	0.46	13 102.59	73 537.97
2012	48 805.63	343 078 540.23	18 522.38	0.38	22 233.34	93 647.14
2013	59 117.65	1 448 260 928.65	38 056.02	0.64	15 675.52	157 630.16
2014	56 966.02	3 074 419 683.54	55 447.45	0.97	8 240.65	202 215.23
2015	74 693.49	31 919 481 224.89	178 660.24	2.39	1 925.78	431 028.94

Tableau 60:quantification de l'erreur de l'estimation des provisions annuelles par Munich Chain Ladder

SCM	MSER	erreur standard	erreur standard	Borne inférieur R	Borne supérieur R
343 228.18	40 520 846 477.55	201 297.90	59%	101 991.97	859 420.43

Tableau 61:quantification de l'erreur de l'estimation par Munich Chain Ladder

On constate que l'erreur relative standard de prédiction est très élevée. D'où, on peut conclure que la méthode Munich Chain Ladder ne donne pas une bonne estimation des provisions.

2.3.Application de GLM :

L'application du GLM est basée sur le triangle de paiements non cumulés, où on considère les années de développement j et de survenance i autant que des variables explicatives.

Et en construit une base de données adéquate pour appliquer de la méthode :

i	j	règlement
2001	0	318.21
2002	0	222.18
2003	0	529.48
2004	0	770.79
2005	0	914.84
2006	0	460.14
2007	0	3 410.07
2008	0	1 280.43
2009	0	873.36
2010	0	1 568.15
2011	0	679.80
2012	0	489.16
2013	0	4 118.66
2014	0	135.80
2015	0	100.31
2001	1	4 980.67
2002	1	2 965.52
2003	1	7 850.94
2004	1	8 816.80
2005	1	6 777.82
2006	1	9 230.57
2007	1	16 700.00
2008	1	14 078.47
2009	1	14 580.00
2010	1	11 204.26

Tableau 62:extrait de la base des données utilisée en GLM

Pour régresser le règlement, il faut d'abord détecter une loi appartenant à la famille exponentielle. Et en prenant en compte le fait que le règlement est une variable continue positive, parmi les lois servant à régresser nos données on trouve gamma et log-normal.

2.3.1. Modèle Log-normal :

La modélisation par log normale donne ces résultats :

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
2001	1 048.32	10 694.63	22 085.86	38 918.36	29 388.78	21 898.15	22 274.17	11 776.93	5 280.14	3 340.53	3 113.80	1 483.88	566.44	13.36	13.41
2002	696.52	7 105.69	14 674.22	25 858.00	19 526.40	14 549.49	14 799.33	7 824.79	3 508.22	2 219.50	2 068.86	985.91	376.35	8.88	8.91
2003	984.55	10 044.04	20 742.32	36 550.84	27 600.98	20 566.02	20 919.17	11 060.51	4 958.94	3 137.31	2 924.38	1 393.61	531.98	12.55	12.60
2004	1 029.75	10 505.18	21 694.63	38 228.94	28 868.18	21 510.23	21 879.60	11 568.31	5 186.61	3 281.35	3 058.64	1 457.59	556.40	13.12	13.17
2005	791.38	8 073.38	16 672.63	29 379.49	22 185.61	16 530.92	16 814.78	8 890.41	3 985.98	2 521.77	2 350.61	1 120.18	427.60	10.08	10.12
2006	1 015.51	10 359.93	21 394.68	37 700.39	28 469.05	21 212.84	21 577.09	11 408.37	5 114.90	3 235.98	3 016.35	1 437.44	548.71	12.94	12.99
2007	1 181.60	12 054.33	24 893.84	43 866.40	33 125.25	24 682.26	25 106.09	13 274.24	5 951.46	3 765.24	3 509.69	1 672.54	638.45	15.06	15.12
2008	1 323.11	13 497.92	27 875.05	49 119.71	37 092.23	27 638.13	28 112.72	14 863.93	6 664.18	4 216.15	3 930.00	1 872.83	714.91	16.86	16.93
2009	1 095.08	11 171.65	23 070.98	40 654.28	30 699.65	22 874.89	23 267.69	12 302.23	5 515.66	3 489.53	3 252.69	1 550.06	591.70	13.95	14.01
2010	1 042.25	10 632.71	21 957.99	38 693.02	29 218.63	21 771.36	22 145.21	11 708.75	5 249.57	3 321.19	3 095.77	1 475.29	563.16	13.28	13.33
2011	752.50	7 676.76	15 853.57	27 936.19	21 095.71	15 718.82	15 988.74	8 453.66	3 790.17	2 397.88	2 235.13	1 065.15	406.60	9.59	9.63
2012	646.88	6 599.30	13 628.45	24 015.21	18 134.83	13 512.61	13 744.64	7 267.15	3 258.20	2 061.33	1 921.42	915.65	349.53	8.24	8.28
2013	1 468.70	14 983.16	30 942.27	54 524.58	41 173.66	30 679.28	31 206.09	16 499.47	7 397.48	4 680.08	4 362.43	2 078.91	793.58	18.71	18.79
2014	251.35	2 564.16	5 295.33	9 331.11	7 046.29	5 250.33	5 340.48	2 823.65	1 265.97	800.93	746.57	355.78	135.81	3.20	3.22
2015	121.19	1 236.37	2 553.27	4 499.22	3 397.54	2 531.57	2 575.04	1 361.49	610.42	386.19	359.98	171.55	65.48	1.54	1.55

Tableau 63: Triangle des incréments estimé par le modèle Log-normale

La provision pour chaque année de survenance i :

i	PSAP
2001	-
2002	9
2003	25
2004	583
2005	1 568
2006	5 028
2007	9 616
2008	17 432
2009	26 730
2010	47 585
2011	50 075
2012	61 182
2013	193 433
2014	38 399
2015	19 751
Total	471 417

Tableau 64: les provisions annuelles confiance résultantes de la modélisation GLM (log normale)

Qualité de l'ajustement et Validation des hypothèses :

paramètres de la loi log normale :

```

Coefficients:
              Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)    6.765828   0.239851  28.208 < 2e-16 ***
anneesurvenance2002 -0.408846   0.232452  -1.759 0.081966 .
anneesurvenance2003 -0.062762   0.239063  -0.263 0.793505
anneesurvenance2004 -0.017873   0.245732  -0.073 0.942177
anneesurvenance2005 -0.281169   0.252915  -1.112 0.269189
anneesurvenance2006 -0.031796   0.260944  -0.122 0.903288
anneesurvenance2007  0.119683   0.270176   0.443 0.658831
anneesurvenance2008  0.232794   0.281067   0.828 0.409695
anneesurvenance2009  0.043638   0.294274   0.148 0.882442
anneesurvenance2010 -0.005807   0.310811  -0.019 0.985135
anneesurvenance2011 -0.331543   0.332374  -0.998 0.321166
anneesurvenance2012 -0.482778   0.362082  -1.333 0.185748
anneesurvenance2013  0.337186   0.406509   0.829 0.409011
anneesurvenance2014 -1.428112   0.482844  -2.958 0.003949 **
anneesurvenance2015 -2.157562   0.660125  -3.268 0.001527 **
anneedeveloppement1  2.322550   0.232452   9.992 2.66e-16 ***
anneedeveloppement2  3.047747   0.239063  12.749 < 2e-16 ***
anneedeveloppement3  3.614275   0.245732  14.708 < 2e-16 ***
anneedeveloppement4  3.333422   0.252915  13.180 < 2e-16 ***
anneedeveloppement5  3.039211   0.260944  11.647 < 2e-16 ***
anneedeveloppement6  3.056237   0.270176  11.312 < 2e-16 ***
anneedeveloppement7  2.418952   0.281067   8.606 2.10e-13 ***
anneedeveloppement8  1.616762   0.294274   5.494 3.54e-07 ***
anneedeveloppement9  1.158938   0.310811   3.729 0.000334 ***
anneedeveloppement10 1.088653   0.332374   3.275 0.001494 **
anneedeveloppement11 0.347468   0.362082   0.960 0.339780
anneedeveloppement12 -0.615582   0.406509  -1.514 0.133412
anneedeveloppement13 -4.362824   0.482844  -9.036 2.66e-14 ***
anneedeveloppement14 -4.358883   0.660125  -6.603 2.64e-09 ***
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 0.615 on 91 degrees of freedom
(105 observations deleted due to missingness)
Multiple R-squared:  0.9087,    Adjusted R-squared:  0.8806
F-statistic: 32.36 on 28 and 91 DF,  p-value: < 2.2e-16
    
```

Les années de survénance récentes, autant que variables explicatives, ne sont pas significatives, contrairement aux années de développement qui sont toutes significatives au seuil 5%.

Pour mesurer la qualité de l'ajustement d'un modèle GLM on se base sur le calcul des résidus de Pearson.

```

> X1 <- sum(residuals(reg1, type = "pearson")^2)
> ddl1 <- df.residual(reg1)
> 1 - pchisq(X1,ddl1)
[1] 1
    
```

Pvalue est ainsi supérieur à 5%, on ne peut pas rejeter l'hypothèse nulle que le modèle ajuste nos données.

On fait recours au test de Shapiro Wilk pour tester la normalité des résidus. D'après le résultat suivant le p-value est supérieur à 0.05, donc la normalité des résidus est significativement vérifiée.

```
> shapiro.test(rstudent(reg1))
```

```
Shapiro-Wilk normality test
```

```
data: rstudent(reg1)
W = 0.97897, p-value = 0.06105
```

2.3.2. Modèle Gamma :

Le résultat de cette modélisation est le triangle ci-dessous

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
2001	1 208.93	10 859.64	22 923.10	38 768.50	29 194.79	22 643.38	21 665.26	12 508.37	6 822.63	3 928.04	2 873.95	1 420.69	572.31	22.58	11.10
2002	753.22	6 766.05	14 282.15	24 154.56	18 189.70	14 107.87	13 498.45	7 793.29	4 250.81	2 447.35	1 790.60	885.15	356.58	14.07	6.92
2003	1 002.95	9 009.36	19 017.43	32 163.07	24 220.54	18 785.37	17 973.90	10 377.17	5 660.18	3 258.77	2 384.28	1 178.63	474.80	18.73	9.21
2004	1 075.97	9 665.29	20 402.02	34 504.74	25 983.95	20 153.06	19 282.51	11 132.70	6 072.28	3 496.03	2 557.87	1 264.44	509.37	20.09	9.88
2005	757.87	6 807.89	14 370.46	24 303.92	18 302.18	14 195.10	13 581.92	7 841.48	4 277.10	2 462.48	1 801.67	890.63	358.78	14.15	6.96
2006	1 044.54	9 382.98	19 806.10	33 496.89	25 224.99	19 564.41	18 719.29	10 807.52	5 894.92	3 393.92	2 483.16	1 227.51	494.49	19.51	9.59
2007	1 253.11	11 256.57	23 760.97	40 185.54	30 261.90	23 471.03	22 457.15	12 965.57	7 072.01	4 071.61	2 978.99	1 472.62	593.23	23.40	11.51
2008	1 248.92	11 218.92	23 681.48	40 051.11	30 160.67	23 392.51	22 382.03	12 922.19	7 048.35	4 057.99	2 969.03	1 467.69	591.24	23.32	11.47
2009	1 076.92	9 673.84	20 420.05	34 535.25	26 006.92	20 170.88	19 299.56	11 142.54	6 077.65	3 499.12	2 560.13	1 265.56	509.82	20.11	9.89
2010	1 007.41	9 049.47	19 102.10	32 306.27	24 328.38	18 869.01	18 053.92	10 423.38	5 685.38	3 273.28	2 394.90	1 183.88	476.91	18.81	9.25
2011	722.84	6 493.18	13 706.15	23 180.41	17 456.11	13 538.90	12 954.06	7 478.99	4 079.38	2 348.65	1 718.39	849.46	342.19	13.50	6.64
2012	653.96	5 874.48	12 400.15	20 971.66	15 792.80	12 248.84	11 719.73	6 766.35	3 690.68	2 124.86	1 554.65	768.52	309.59	12.21	6.00
2013	1 870.52	16 802.63	35 467.89	59 984.77	45 171.80	35 035.09	33 521.68	19 353.64	10 556.36	6 077.68	4 446.73	2 198.17	885.51	34.93	17.17
2014	248.87	2 235.59	4 719.00	7 980.96	6 010.10	4 661.41	4 460.05	2 575.00	1 404.52	808.63	591.64	292.47	117.82	4.65	2.29
2015	100.31	901.07	1 902.03	3 216.80	2 422.42	1 878.82	1 797.66	1 037.88	566.10	325.93	238.46	117.88	47.49	1.87	0.92

Tableau 65: Triangle des incréments estimé par le modèle Gamma

Les provisions annuelles données par le modèle Gamma :

i	PSAP
2001	0
2002	7
2003	28
2004	539
2005	1 270
2006	4 234
2007	9 151
2008	16 169
2009	25 085
2010	41 520
2011	43 330
2012	54 994
2013	217 283
2014	33 628
2015	14 455
Total	461 696

Tableau 66: les provisions annuelles résultantes de la modélisation GLM (Gamma)

Qualité de l'ajustement et Validation des hypothèses :

Paramètres de la loi log normale

```

Coefficients:
              Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)    7.09749    0.21868  32.456 < 2e-16 ***
anneesurvenance2002 -0.47313    0.21193  -2.232 0.028036 *
anneesurvenance2003 -0.18679    0.21796  -0.857 0.393700
anneesurvenance2004 -0.11651    0.22404  -0.520 0.604291
anneesurvenance2005 -0.46697    0.23059  -2.025 0.045784 *
anneesurvenance2006 -0.14616    0.23791  -0.614 0.540527
anneesurvenance2007  0.03590    0.24633   0.146 0.884450
anneesurvenance2008  0.03255    0.25625   0.127 0.899208
anneesurvenance2009 -0.11563    0.26830  -0.431 0.667509
anneesurvenance2010 -0.18235    0.28337  -0.643 0.521526
anneesurvenance2011 -0.51430    0.30303  -1.697 0.093080 .
anneesurvenance2012 -0.61444    0.33012  -1.861 0.065935 .
anneesurvenance2013  0.43648    0.37062   1.178 0.241987
anneesurvenance2014 -1.58055    0.44022  -3.590 0.000535 ***
anneesurvenance2015 -2.48922    0.60185  -4.136 7.87e-05 ***
anneedeveloppement1  2.19532    0.21193  10.359 < 2e-16 ***
anneedeveloppement2  2.94241    0.21796  13.500 < 2e-16 ***
anneedeveloppement3  3.46788    0.22404  15.479 < 2e-16 ***
anneedeveloppement4  3.18426    0.23059  13.809 < 2e-16 ***
anneedeveloppement5  2.93014    0.23791  12.316 < 2e-16 ***
anneedeveloppement6  2.88598    0.24633  11.716 < 2e-16 ***
anneedeveloppement7  2.33667    0.25625   9.119 1.78e-14 ***
anneedeveloppement8  1.73051    0.26830   6.450 5.29e-09 ***
anneedeveloppement9  1.17841    0.28337   4.159 7.24e-05 ***
anneedeveloppement10 0.86595    0.30303   2.858 0.005290 **
anneedeveloppement11 0.16141    0.33012   0.489 0.626058
anneedeveloppement12 -0.74781    0.37062  -2.018 0.046567 *
anneedeveloppement13 -3.98061    0.44022  -9.042 2.58e-14 ***
anneedeveloppement14 -4.69054    0.60185  -7.794 1.02e-11 ***
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

(Dispersion parameter for Gamma family taken to be 0.3144037)

Null deviance: 197.856 on 119 degrees of freedom
Residual deviance: 31.737 on 91 degrees of freedom
(105 observations deleted due to missingness)
AIC: 2320.1
    
```

Les années de survénance récentes autant que variables explicatives, ne sont pas significatives, contrairement aux années de développement qui sont toutes significatives au seuil 5%.

Pour mesurer la qualité de l'ajustement d'un modèle GLM on se base sur le calcul des résidus de Pearson.

```

> X2 <- sum(residuals(reg2, type = "pearson")^2)
> ddl2 <- df.residual(reg2)
> 1 - pchisq(X2,ddl2)
[1] 1
    
```

Pvalue est ainsi supérieur à 5%, on ne peut pas rejeter l'hypothèse nulle que le modèle ajuste nos données.

On procède par le test de Shapiro Wilk pour tester la normalité des résidus :

La sortie de R :

```
> shapiro.test(rstudent(reg2))

      Shapiro-Wilk normality test

data:  rstudent(reg2)
W = 0.98939, p-value = 0.494
```

La Pvalue du test est supérieur au 5%, donc la normalité des résidus est significativement vérifiée.

2.3.3. Choix du modèle :

critère AIC (sortie de R)

```
> res <- AIC(reg1, reg2 )
> res
      df      AIC
reg1 30 250.6813
reg2 30 2320.1239
```

Le modèle log normale est celui qui possède le plus petit AIC, ainsi et en se basant dans notre choix sur ce critère, le modèle choisi en GLM est le modèle log normale.

i	borne inférieur	PSAP	borne supérieur
2001	-	-	-
2002	2.21	9	24.62
2003	6.23	25	69.46
2004	144.48	583	1 609.96
2005	388.78	1 568	4 332.29
2006	1 246.79	5 028	13 893.33
2007	2 384.29	9 616	26 568.82
2008	4 322.19	17 432	48 163.46
2009	6 627.60	26 730	73 853.34
2010	11 798.72	47 585	131 476.69
2011	12 416.07	50 075	138 355.96
2012	15 169.91	61 182	169 042.78
2013	47 961.27	193 433	534 446.75
2014	9 520.86	38 399	106 093.81
2015	4 897.27	19 751	54 571.68
Total	116886.7	471 417	1302503

Tableau 67:les provisions annuelles et intervalles de confiance résultants de la modélisation GLM (log normale)

La provision totale :

$$R^{GLM} = 471\,417$$

On remarque que les intervalles de confiances sont très larges donc le modèle ne procure pas une information précise sur la marge d'erreur.

3. Application de cadence de règlement :

j	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
cadence	1%	7%	19%	39%	54%	66%	77%	85%	89%	92%	80%	94%	95%	96%	98%

Tableau 68:calcul de cadence de règlement

La provision pour chaque année de survenance :

i	PSAP
2001	-
2002	5 449
2003	6 634
2004	11 961
2005	27 247
2006	13 657
2007	17 016
2008	28 715
2009	36 142
2010	45 452
2011	50 204
2012	64 254
2013	109 603
2014	47 688
2015	13 330

Tableau 69:calcul des provisions annuelles par la méthode de cadence des règlements

La provision totale :

$$R^{CR} = 477\,354$$

4. Récapitulatif des résultats :

Méthode	Réserve
Chain-Ladder standard	335 775
Chain-Ladder pondérée 1	310 128
Chain-Ladder pondérée 2	336 361
Taylor arithmétique	458 159
Taylor géométrique	543 701
cadence de règlement	477 354
London Chain	607 494
London Pivot	620 191
DeVylder	626 540
Bornhuetter-Ferguson	827 736
cape code	944 935
Benktander	
Loss ratio complémentaire	2 146 763
Loss ratio simple	3 188 847
GLM (log normal)	471 417
Munich Chain Ladder	343 228

Tableau 70:calcul de la provision par les différentes méthodes

<i>La méthode</i>	<i>écart</i>
cadence de règlement	0%
London Chain	27%
London Pivot	30%
DeVylder	31%
Taylor	14%
Chain-Ladder	-30%
Benktander	63%
GLM	-1%
Munich	-28%
Mack	-30%
Cape Cod	98%
Bornhuetter Ferguson	73%
Loss ratio simple	568%
Loss ratio complémentaire	350%

Tableau 71: Ecart relatif entre le montant des provisions par les différentes méthodes et la méthode réglementaire de cadence de règlement

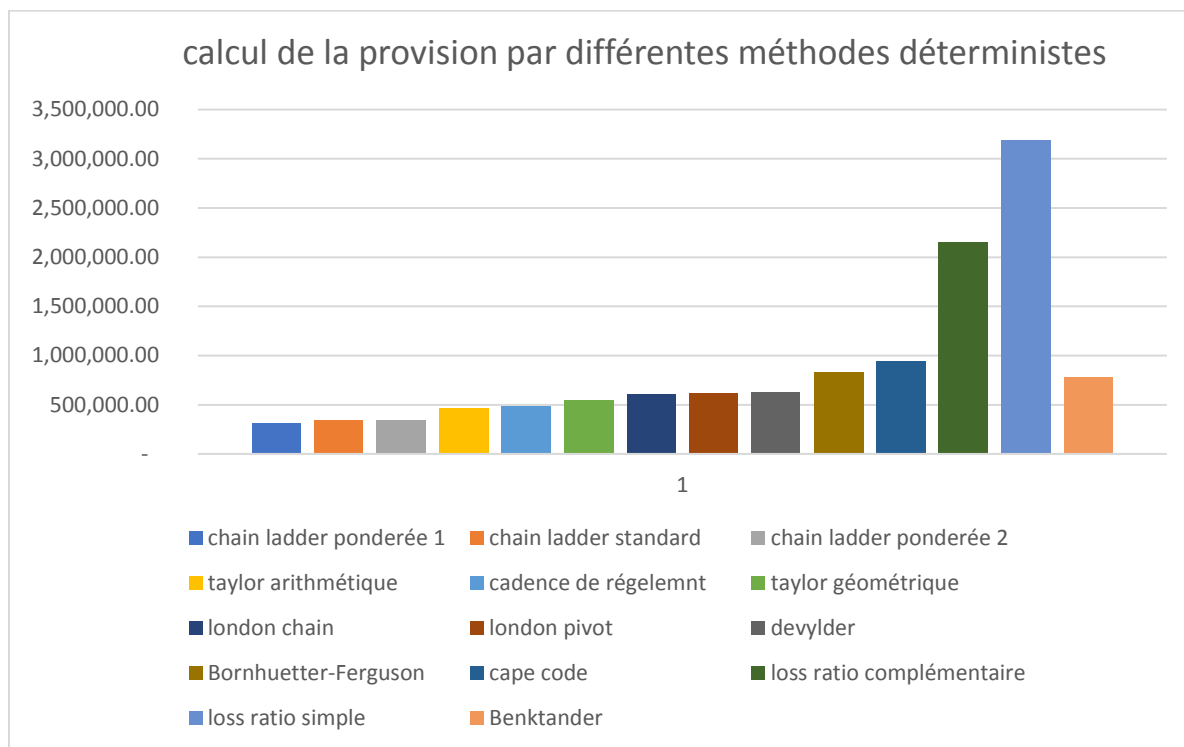


Figure 18: les provisions estimées par les différentes méthodes

La provision totale à effectuer d'après Chain-Ladder est 335 774900 Dhs. Cependant, la méthode n'est applicable que si les ordonnées à l'origine sont négligeables, donc l'estimation faite n'est pas fiable.

La provision totale à effectuer d'après Munich Chain-Ladder est 343 228 180 Dhs, l'erreur relative de prédiction est de 59%, la méthode ne donne pas une très bonne estimation des provisions. Ceci peut être dû au fait que la méthode Munich Chain Ladder repose sur les mêmes hypothèses de Chain Ladder.

Vu que la méthode Chain-Ladder n'était pas « applicable » en théorie, la méthode de Chain-Ladder pondérée permet d'éloigner les facteurs de développement individuels peu représentatifs qui biaisent l'estimation de facteur de développement pour réaliser les hypothèses de Chain-Ladder. Cela peut marcher en l'appliquant sur d'autres données, mais dans notre cas l'hypothèse qu'on n'a pas pu vérifier est celle relative à la proportionnalité entre les montants cumulés d'une année de développement à la suivante, on a trouvé que les ordonnées à l'origine ne sont pas nuls.

Donc en appliquant la pondération on ne fait que changer la distribution des facteurs de développement autour de la droite.

D'autre part, les hypothèses de London Chain sont vérifiées et la réserve résultante est de 607 494 000Dhs. Elle est supérieure à la provision calculée par la méthode réglementaire.

La méthode de Chain-Ladder s'écarte fortement des autres, cela s'explique par le fait du non vérification de son hypothèse.

Le résultat trouvé par la méthode de Taylor est supérieur à celui de la méthode réglementaire et inférieur à celui de London Chain, London Pivot et DeVyllder, Nous

pourrions supposer que cela provient des hypothèses d'inflation faite, et la façon d'estimer cette inflation.

En outre, les méthodes du loss ratio et les méthodes mixtes donnent des estimations trop élevées de la réserve par rapport aux autres méthodes. Cela revient principalement au fait qu'elles tiennent en considération des informations exogènes au triangle de liquidation à savoir les primes acquises. Et par conséquent, l'estimation qui en résulte tient en compte la provision IBNR. En général, ces méthodes sont fréquemment utilisées pour estimer la réserve vu qu'elles font appel, non seulement au calcul mathématique, mais à l'expertise de l'actuaire également.

Chapitre II : TPV

Sachant qu'il n'existe pas une méthode générale pour déterminer la provision, l'actuaire doit choisir parmi les méthodes une seule à appliquer. Pour ce faire, il faut tenir compte de nombreuses considérations, plus particulièrement du risque en question, les contraintes réglementaires et la durée de règlement intégral des sinistres...

Nous avons appliqué plusieurs méthodes de provisionnement déterministes et stochastiques sur des données RC auto relatives à une seule catégorie (poids lourds), et nous avons remarqué que les montants de réserve finale diffèrent d'une méthode à l'autre.

Dans la suite, nous souhaitons voir si ces divergences persisteraient si on applique ces méthodes à d'autres données provenant de la RC auto.

Pour cette raison nous allons appliquer ces méthodes sur des triangles provenant de la même branche d'assurance RC auto mais d'une autre catégorie TPV (Transport Public des Voyageurs).

1. Application des méthodes déterministes :

1.1. Application de Chain Ladder :

H1-Le coefficient de proportionnalité d'une année de développement est identique pour toutes les années de survenance.

Moyenne	7,00	2,52	1,98	1,50	1,31	1,18	1,11	1,09	1,05	1,04	1,03	1,02	1,04	1,04
Ecart-type	1,87	0,31	0,17	0,16	0,14	0,07	0,05	0,07	0,01	0,01	0,02	0,01	0,02	0,00
Coefficient de variation	27%	12%	9%	11%	10%	6%	4%	6%	1%	1%	2%	1%	2%	0%

Tableau 72: les mesures de dispersion des facteurs de développement individuels

Nous observons une variation maximale des facteurs individuels de 27% par rapport à la valeur moyenne (en valeur absolue), et une variation inférieure de 30%.

On remarque aussi que le coefficient de variation connaît un recul important en avançant dans le temps, ce coefficient est de 27% pour $j=0$ et 12% en $j=1$ puis 9% en $j=3$, ceci nous permet d'accepter la stabilité des coefficients autour de la moyenne.

H2- Validation de l'hypothèse : les points $(C_{i,j}, C_{i,j+1})$ $i=0, \dots, n-j-1$ sont sensiblement alignés sur une droite passant par l'origine.

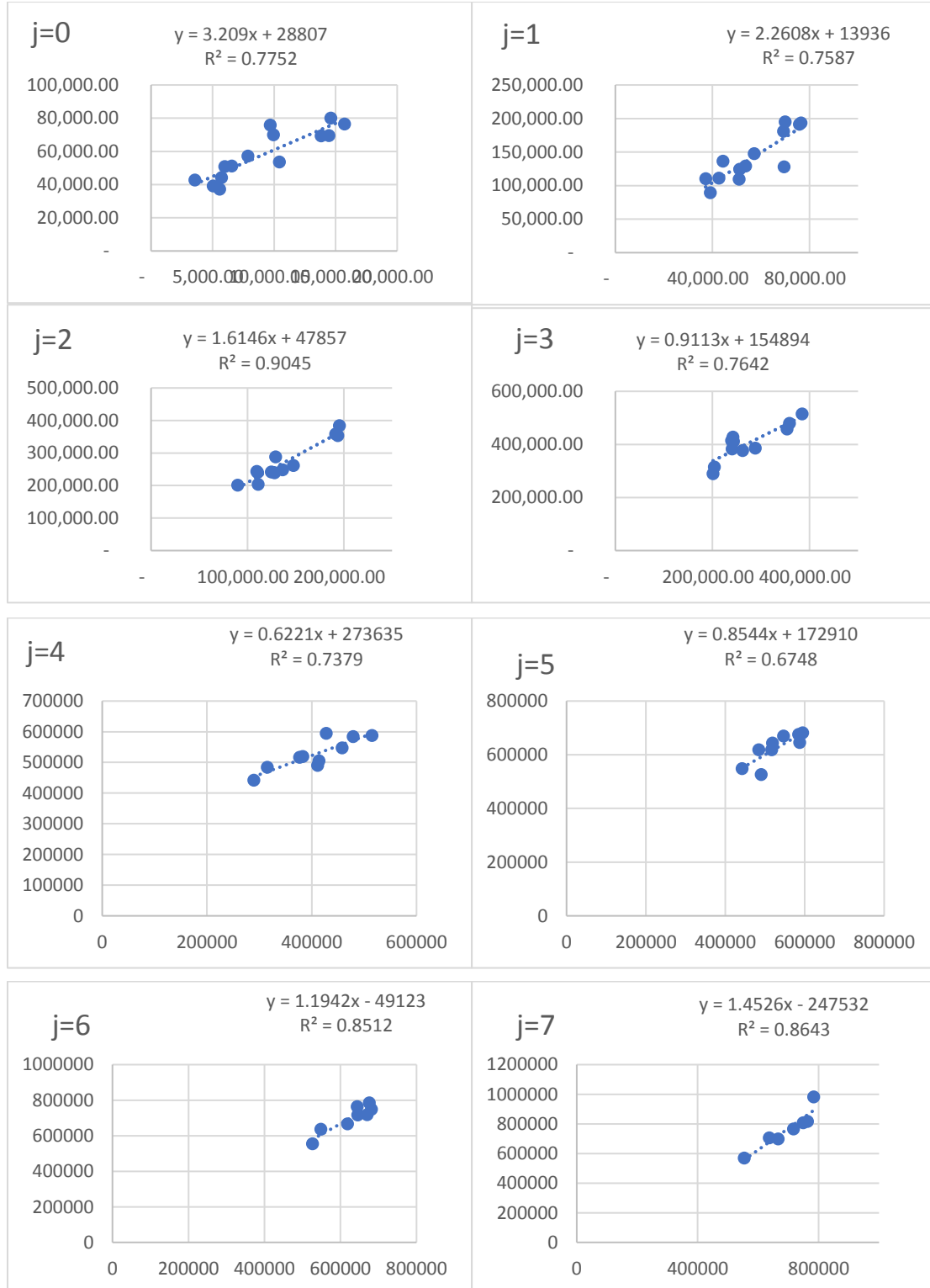


Figure 19: représentation des points $(C_{i,j}, C_{i,j+1})$ $i=0, \dots, n-j-1$

Nous observons qu'une part importante de la variabilité des règlements est expliquée par les règlements des années de développement antérieures.

Les couples sont sensiblement alignés sur une droite mais ne passant pas par l'origine.

La provision pour chaque année de survenance :

i	PSAP
2001	-
2002	35 896
2003	56 751
2004	86 547
2005	76 611
2006	138 620
2007	227 780
2008	252 490
2009	313 705
2010	394 038
2011	503 555
2012	598 152
2013	1 025 884
2014	1 258 004
2015	540 110
réserve totale	5 508 141

Tableau 73:calcul des provisions annuelles par Chain Ladder

La provision totale :

$$R^{CL} = 5\,508\,141$$

1.2. Application des Méthodes autorégressives :

1.2.1. Application de London-Chain :

La provision pour chaque année de survenance :

i	PSAP
2001	-
2002	35 896
2003	106 312
2004	75 663
2005	201 792
2006	146 945
2007	120 868
2008	254 126
2009	324 506
2010	421 073
2011	549 373
2012	683 598
2013	804 939
2014	919 026
2015	919 579

Tableau 74: calcul des provisions annuelles par London Chain

La provision totale :

$$R^{LC} = 5\,563\,698$$

Les hypothèses de London Chain sont vérifiées dans le paragraphe précédent et sont valides.

Le montant de provision calculé par London Chain est supérieur à celui déterminé par Chain Ladder.

La différence remarquable entre les deux méthodes réside dans la PSAP de l'année 2015, où ce montant a baissé brusquement lors de l'application de Chain Ladder, contrairement à la méthode London Chain où ces montants continuent à augmenter d'une année de survenance à l'autre.

1.2.2. Application de London-pivot :

La provision pour chaque année de survenance :

i	PSAP
2001	-
2002	33 384
2003	60 426
2004	81 253
2005	94 493
2006	134 945
2007	185 253
2008	242 086
2009	312 147
2010	404 753
2011	522 640
2012	650 348
2013	804 692
2014	889 636
2015	930 153

Tableau 75:calcul des provisions annuelles par London Pivot

La provision totale :

$$R^{LP} = 5\,346\,209$$

La provision totale calculée par London pivot est inférieure aux celles calculées par Chain Ladder et London Chain.

1.3. Application des Méthodes factorielles :

1.3.1. Application de la méthode de Taylor :

Etant donné que l'inflation est un phénomène multiplicatif, on l'estime par la moyenne géométrique.

La provision pour chaque année de survenance :

i	PSAP
2001	-
2002	35 360
2003	66 383
2004	88 530
2005	118 053
2006	160 048
2007	209 358
2008	291 105
2009	379 612
2010	497 429
2011	646 719
2012	817 162
2013	1 001 311
2014	1 146 450
2015	1 259 901

Tableau 76: calcul des provisions annuelles par Taylor

La provision totale :

$$R^T = 6\,717\,422$$

La provision totale résultante de l'application de Taylor est supérieure à celles déterminées par Chain Ladder et London Chain.

1.3.2. Application de la méthode De Vylder :

La provision pour chaque année de survenance :

i	PSAP
2001	-
2002	35 896
2003	76 456
2004	115 742
2005	127 307
2006	227 580
2007	309 247
2008	327 540
2009	426 301
2010	553 827
2011	850 405
2012	898 061
2013	1 288 686
2014	1 500 504
2015	940 735

Tableau 77:calcul des provisions annuelles par De Vylder

La provision totale :

$$R^{DV} = 7\,678\,287$$

Ce montant, comparé aux montants calculés précédemment, est le plus élevé ,le provisionnement ainsi est plus prudent.

1.4. Application des Méthodes basées sur le loss ratio :

1.4.1. Loss ratio simple :

La provision pour chaque année de survenance :

i	Provisions
2001	-
2002	- 36 620
2003	180 859
2004	124 062
2005	464 740
2006	293 288
2007	105 056
2008	412 016
2009	518 314
2010	634 088
2011	785 161
2012	958 172
2013	1 079 954
2014	1 404 845
2015	1 479 715

Tableau 78: calcul des provisions annuelles par Loss Ratio

La provision totale :

$$R^{LRS} = 8\,403\,650$$

La méthode Loss ratio simple nous donne la provision totale la plus élevée. On peut dire qu'elle est la plus prudente, mais elle peut causer un sur provisionnement, chose qui n'est pas bonne pour l'état financier de la compagnie d'assurance.

1.4.2. Loss Ratio complémentaire :

La provision pour chaque année de survenance :

i	Provisions
2001	-
2002	- 38 001
2003	179 410
2004	122 509
2005	463 117
2006	291 637
2007	103 419
2008	410 311
2009	516 600
2010	632 371
2011	783 395
2012	956 352
2013	1 078 052
2014	1 402 606
2015	1 477 476

Tableau 79:calcul des provisions annuelles par Loss Ratio complémentaire

La provision totale :

$$R^{LRC} = 8\,379\,253$$

L'estimation de la provision trouvée en utilisant cette méthode est très élevée. Donc, si on l'adopte, on risque de sur provisionner.

1.5. Application des Méthodes mixtes :

1.5.1. Bornhuetter Ferguson :

La provision pour chaque année de survenance :

i	Provisions
2001	-
2002	28 115
2003	55 086
2004	75 921
2005	101 288
2006	136 457
2007	172 979
2008	248 497
2009	323 419
2010	422 057
2011	560 474
2012	720 546
2013	906 010
2014	1 180 062
2015	1 243 277

Tableau 80: calcul des provisions annuelles par Bornhuetter Ferguson :

La provision totale :

$$R^{BF} = 6\,174\,191$$

Cette méthode donne une estimation vraisemblable de la provision totale.

1.5.2. Cape Cod :

La provision pour chaque année de survenance :

i	Provisions
2001	-
2002	29 529
2003	57 857
2004	79 740
2005	106 383
2006	143 321
2007	181 680
2008	260 996
2009	339 687
2010	443 286
2011	588 665
2012	756 789
2013	951 581
2014	1 239 418
2015	1 305 812

Tableau 81: calcul des provisions annuelles par Cape Cod :

La provision totale :

$$R^{CC} = 6\,484\,745$$

La méthode Cape Cod donne des résultats similaires à Bornhuetter Ferguson. Son estimation des provisions n'est pas très élevée donc on peut l'adopter.

1. 5. 3. Benktander:

La provision pour chaque année de survenance :

i	PSAP Chain ladder	PSAP BF	Wi	PSAP Benktander
2001	-	-		-
2002	35 896	28 115	0,96	35 614
2003	56 751	55 086	0,93	56 638
2004	86 547	75 921	0,91	85 620
2005	76 611	101 288	0,89	79 359
2006	138 620	136 457	0,85	138 301
2007	227 780	172 979	0,81	217 448
2008	252 490	248 497	0,74	251 452
2009	313 705	323 419	0,66	316 977
2010	394 038	422 057	0,56	406 326
2011	503 555	560 474	0,43	535 796
2012	598 152	720 546	0,29	684 600
2013	1 025 884	906 010	0,15	923 979
2014	1 258 004	1 180 062	0,06	1 184 723
2015	540 110	1 243 277	0,01	1 236 642

Tableau 82 : Provisions calculées par la méthode de Benktander

La provision totale :

$$R^{BK} = 6\ 153\ 472$$

L'estimation de la provision donnée par cette méthode est similaire à celles trouvées par les deux méthodes mixtes précédentes.

2. Application des méthodes stochastiques :

2.1.Mack :

La provision et l'erreur de prédiction pour chaque année de survenance :

i	Provisions	MSEP(Ri)
2001	0	-
2002	35 896	77 941 047
2003	56 751	582 389 439
2004	86 547	793 162 785
2005	76 611	917 225 851
2006	138 620	1 488 701 800
2007	227 780	2 278 471 331
2008	252 490	6 064 110 127
2009	313 705	7 358 310 549
2010	394 038	9 851 740 021
2011	503 555	18 747 058 051
2012	598 152	28 508 160 354
2013	1 025 884	50 667 768 905
2014	1 258 004	77 711 683 083
2015	540 110	64 687 688 947

Tableau 83:calcul des provisions annuelles par Mack

La provision totale :

$$R^{Mack} = 5\,508\,141$$

L'erreur de prédiction totale :

$$MSEP(R) = 1\,002\,918\,215\,966$$

L'erreur relative :

$$\frac{\sqrt{MSEP(R)}}{R} = 18,18\%$$

On constate que l'erreur relative de prédiction est petite. D'où, on peut conclure que la méthode chain ladder donne une bonne estimation des provisions.

2.2.GLM :

Le modèle choisi est la loi log normale, les étapes de modélisation sont détaillées dans l'annexe.

De ce tableau, on peut constater les provisions annuelles et l'intervalle de confiance :

i	Borne inférieur	PSAP	Borne supérieur
2001	-	-	-
2002	15 020	33 930	66 386
2003	19 763	44 643	87 346
2004	35 025	79 119	154 799
2005	32 384	73 154	143 129
2006	59 736	134 941	264 018
2007	102 340	231 180	452 313
2008	120 729	272 720	533 588
2009	146 509	330 956	647 531
2010	196 391	443 636	867 993
2011	242 619	548 063	1 072 309
2012	262 932	593 948	1 162 085
2013	518 655	1 171 614	2 292 314
2014	651 074	1 470 740	2 877 568
2015	273 483	617 784	1 208 721

Tableau 84:calcul des provisions annuelles par le modèle log normale

La provision totale :

$$R^{GLM} = 6\,046\,427$$

L'intervalle de confiance de la provision totale :

$$[2\,676\,660; 11\,830\,101]$$

2.3.Application de Munich Chain Ladder :

i	PSAP	MSEP	Ecart type	Erreur standard	Borne inférieur	Borne supérieur
2001	-	-	-		-	-
2002	35 025	159 051 029	12 612	36%	16 623	65 330
2003	59 894	1 279 173 594	35 766	60%	17 421	151 788
2004	97 006	1 745 559 311	41 780	43%	39 693	199 978
2005	80 124	1 637 398 419	40 465	51%	28 100	182 032
2006	146 593	2 646 655 495	51 446	35%	70 924	269 767
2007	229 320	3 943 680 156	62 799	27%	130 568	374 664
2008	262 643	8 242 596 279	90 789	35%	128 491	479 552
2009	330 475	9 824 434 411	99 118	30%	178 077	562 677
2010	398 473	12 414 265 245	111 419	28%	224 132	657 054
2011	507 287	22 426 286 727	149 754	30%	276 093	857 360
2012	584 486	32 097 144 048	179 157	31%	310 595	1 005 436
2013	1 012 914	57 436 732 955	239 660	24%	623 848	1 557 433
2014	1 262 192	89 007 944 473	298 342	24%	777 764	1 939 959
2015	723 470	117 576 919 920	342 895	47%	270 540	1 579 796

Tableau 85: quantification de l'erreur de l'estimation des provisions annuelles par Munich Chain Ladder

réserve totale	MSER	Ecart type	Erreur standard	Borne inférieur	Borne supérieur
5 729 900	737 775 823 899,53	858 938,78	15%	4 230 855,90	7 589 525,35

Tableau 86: quantification de l'erreur de l'estimation par Munich Chain Ladder

L'erreur de prédiction est de 15%, un bon signe sur la qualité de provisionnement.

3. Méthode réglementaire / Cadence de règlements :

La provision pour chaque année de survenance :

i	PSAP
2001	-
2002	67 375
2003	80 696
2004	126 915
2005	213 106
2006	180 185
2007	273 061
2008	298 314
2009	369 492
2010	450 501
2011	562 730
2012	648 780
2013	1 088 742
2014	1 325 773
2015	591 606

Tableau 87:calcul des provisions annuelles par la méthode de cadence des règlements

La provision totale :

$$R^{CR} = 6\,277\,273$$

4. Récapitulatif des résultats :

Méthode	réserve totale
London Pivot	5 346 209
Chain Ladder	5 508 141
London Chain	5 563 698
Munich Chain Ladder	5 729 900
GLM	6 046 427
Cadence de règlement	6 277 273
Taylor	6 717 422
De Vylder	7 678 287

Mack	5 508 141
Cape Cod	6 484 745
Bornhuetter Ferguson	6 174 191
Benktander	6 153 472
Loss ratio simple	8 403 650
Loss ratio complémentaire	8 379 253

Tableau 88:récapitulatif des résultats

Méthode	Ecart
London Pivot	-15%
Chain Ladder	-12%
London Chain	-11%
Munich Chain Ladder	-9%
GLM	-4%
cadence	0%
Taylor	7%
De Vylder	22%
Mack	-12,25%
Cape Cod	3,31%
Bornhuetter Ferguson	-1,64%
Benktander	-2%
Loss ratio simple	33,87%
Loss ratio complémentaire	33,49%

Tableau 89:L'écart relatif par rapport à la méthode de Cadence de règlements

Au regard de ces deux tableaux, la méthode DeVlylder et les méthodes de loss ratio donnent les montants de prévision les plus élevés ainsi le provisionnement est prudent. Mais ceci n'est pas un indice de qualité de modèle, car le sur-provisionnement et le sous-provisionnement reflètent une mauvaise gestion des ressources financières face au risque.

Chapitre III : Comparaison des résultats et outils de choix :

Ce chapitre est d'une grande importance, vu que choisir la méthode convenable est l'étape la plus critique de l'opération du provisionnement. Comme dit Hans Bühlmann, un grand actuinaire suisse : « *Le provisionnement n'est pas un problème de modélisation complexe et sophistiqué, mais plutôt un exercice de choix de modèle* »

1. Comparaison des résultats :

Méthode	réserve totale TPV	réserve totale Poids lourds
London Pivot	5 346 209	620 191
Chain Ladder	5 508 141	335 775
London Chain	5 563 698	607 494
Munich Chain Ladder	5 729 900	343 228
GLM	6 046 427	471 417
cadence	6 277 273	477 354
Taylor	6 717 422	543 701
De Vylder	7 678 287	626 540
Mack	5 508 141	335 775
Cape Cod	6 484 745	944 935
Bornhuetter Ferguson	6 174 191	827 736
Benktander	6 153 472	775 877
Loss ratio simple	8 403 650	3 188 847
Loss ratio complémentaire	8 379 253	2 146 763

Tableau 90: le montant de la réserve estimée par les différentes méthodes pour les deux catégories RC auto

Méthode	Ecart TPV	Ecart Poids lourds
London Pivot	-15%	30%
Chain Ladder	-12%	-30%
London Chain	-11%	27%
Munich Chain Ladder	-9%	-28%
GLM	-4%	-1%

cadence	0%	0%
Taylor	7%	14%
De Vylder	22%	31%
Mack	-12,25%	-30%
Cape Cod	3,31%	98%
Bornhuetter Ferguson	-1,64%	73%
Benktander	-2%	63%
Loss ratio simple	33,87%	568%
Loss ratio complémentaire	33,49%	350%

Tableau 91: Ecart relatif entre le montant des provisions par les différentes méthodes et la méthode réglementaire de cadence des règlements des deux catégories

Après le travail qu'on a effectué, on remarque qu'on ne peut pas prédire la nature des résultats de chaque méthode. Vu qu'elles se comportent différemment selon les données sur lesquelles on les applique. En effet, sur certains triangles, la méthode Chain Ladder propose des réserves bien plus importantes que London-Chain et pour d'autres c'est l'inverse, de même en comparant London-Chain, London Pivot à la méthode de cadence de règlement. Idem pour les méthodes mixtes.

2. Outil de choix :

Notre objectif par la suite est de chercher la méthode déterministe la plus adaptée au triangle considéré, dans la mesure où elle serait la méthode qui colle le mieux aux informations connues (historique de développement du triangle).

Cette technique consiste à calculer l'erreur de l'estimation faite par la méthode lorsqu'elle est appliquée sur des données historiques par rapport aux vraies valeurs observées.

Pour cela, il suffit de prendre un sous-triangle qui, complété, reste inclus dans le triangle de base, sur lequel on applique une méthode de provisionnement, on calcul l'écart entre les montants estimés et les vraies valeurs lisibles dans le triangle. La méthode la plus adaptée au triangle sera celle qui fournira la somme des carrés des écarts minimale.

On a choisi d'appliquer cette technique sur plusieurs sous-triangles du triangle de départ et faire la somme de ces écarts résultants pour que la comparaison soit plus significative, en fait, il y a $\left(\binom{n}{2}-2\right)$ sous triangles possibles.

$$SCE = \sum_{k=4}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \sum_{d=1}^k \sum_{i=k-d+1}^k (\widehat{C}_{d,i} - C_{d,i})^2$$

C'est la formule appliquée pour toutes les méthodes déterministes à l'exception des méthodes mixtes.

Pour les méthodes mixtes, On va utiliser le même test mais en calculant la différence au carré entre les deux dernières colonnes, c'est-à-dire les $C_{i,n}$. Etant donné que ces méthodes servent à estimer le paiement intégral à la dernière année de développement, on ne peut pas se baser sur ce test pour comparer ces méthodes avec les autres. Donc on va l'utiliser pour les comparer entre elles.

$$SCE = \sum_{k=4}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1} \sum_{d=1}^k (\widehat{C}_{d,k} - C_{d,k})^2$$

Cette technique, bien qu'elle soit objective, elle se fonde sur un critère historique. En effet, une méthode peut donner un SCE minimal mais sa qualité prédictive peut-être médiocre.

En ce qui concerne les méthodes stochastiques, on dispose déjà des moyens pour les comparer à savoir l'erreur moyenne de prédiction et les intervalles de confiance.

Catégorie1 : Poids Lourds

<i>Méthode</i>	<i>SCE</i>
London Pivot	30 832 229 007
London Chain	4 094 688 690
Taylor	301 339 000 000
Chain Ladder	1 596 510 000 000
De Vylder	4 482 460 000 000

Tableau 92:calcul de l'erreur SCE fait par les méthodes déterministes en poids lourds

D'après le tableau, on constate que London Chain est la méthode qui a le SCE le plus petit. Ainsi, en se basant sur ce critère, on peut conclure qu'elle donne la meilleure estimation des réserves.

Les méthodes mixtes :

Méthode	SCE
<i>LRS</i>	110 679 973 670
<i>LRC</i>	21 122 221 684
<i>BF</i>	150 356 968 311
<i>CC</i>	911 316 310 194

Tableau 93:calcul de l'erreur SCE fait par les méthodes économiques en TPV

Pour les méthodes mixtes, d'après ce critère, la méthode Loss Ratio Complémentaire semble être la plus adéquate pour estimer la provision.

Catégorie2 : Transport Public des Voyageurs

méthode	SCE
London Chain	156770 000 000
Taylor	157810 000 000
London Pivot	505540 000 000
Chain Ladder	629 610 000 000
De Vylder	261 450 000 000 000 000 000

Tableau 94: calcul de l'erreur SCE fait par les méthodes déterministes en TPV

D'après le tableau, on constate que London Chain est la méthode qui a le SCE le plus petit. Ainsi, en se basant sur ce critère, on peut conclure qu'elle donne la meilleure estimation des réserves.

Les méthodes mixtes :

Méthode	SCE
LRS	143 244 473 806
LRC	423 169 040 748
BF	961 112 299 367
CC	3 499 081 813 766

Tableau 95:calcul de l'erreur SCE fait par les méthodes économiques en TPV

Pour les méthodes mixtes, d'après ce critère, la méthode Loss Ratio Complémentaire semble être la plus adéquate pour estimer la provision.

3. Conclusion sur les méthodes :

<i>méthodes</i>	<i>avantages</i>	<i>Inconvénients</i>
Chain-Ladder	- Facile à appliquer	- Hypothèses fortes à vérifier - l'incertitude est d'autant plus grande que les branches sont longues.
London-Chain	- facile à appliquer - hypothèses moins contraints que Chain-Ladder	- Sensibilité fortes des provisions aux estimations
London-Pivot	- hypothèses moins contraints que Chain-Ladder	- L'absence d'une solution analytique au problème - Sensibilité fortes des provisions aux estimations
DeVylder	- Prise en compte des effets calendaires (pour DeVlylder on n'a pas pris en compte l'inflation pour identifier le modèle alors qu'on pouvait supposer qu'elle est constante)	- Le modèle n'est pas identifiable sans contraintes - Sensibilité fortes des provisions aux estimations - la solution du système d'équation n'est pas explicite
Taylor		- Estimation difficile des paramètres
Loss Ratio Simple	- Simple à appliquer	- Donne des résultats généralement gonflés - Qualité incertaine
Loss Ratio Complémentaire		
Bornhuetter Ferguson	- Tient en compte des sinistres déjà connu	- Les résultats dépendent fortement d'un loss ratio attendu qui n'est pas toujours connu.
Cape Cod	- Stabilité des résultats	
Benktander		

Tableau 96:avantages et inconvénients de chacune des méthodes déterministes

Conclusion

Vu la place primordiale qu'occupe la provision pour sinistres à payer dans le passif du bilan de chaque compagnie d'assurance, l'actuaire est censé être prudent lors de son estimation, dans la mesure où il doit choisir la méthode la plus conforme à ses données historiques et aux particularités de la branche qu'il est entrain d'étudier.

Ainsi, tout au long de ce mémoire, nous avons entamé les différentes méthodes d'estimation de la réserve, leurs conditions d'application, leurs formules de calcul et leurs erreurs de prédiction.

Dans une première partie, nous avons fait une introduction générale de l'activité d'assurance. Puis, nous avons tracé le cadre théorique des trois types de méthodes qu'adoptent les compagnies d'assurance dans leur estimation de la provision à savoir les méthodes déterministes, stochastiques et règlementaires. Pour chacune de ces méthodes, on a spécifié les hypothèses qu'elle suppose et sa procédure d'estimation de la réserve totale.

Dans une deuxième partie, on a choisi d'appliquer ces méthodes sur la branche RC automobile de la MATU, particulièrement sur les deux catégories, poids lourds et transport public des voyageurs. Ensuite, comparer les résultats que donne chaque méthode pour la même catégorie, puis faire une comparaison du comportement des méthodes selon les deux catégories. Finalement, arriver à un ensemble de règles de choix de la méthode la plus adéquate à adopter pour estimer la réserve.

Aujourd'hui, avec l'introduction des normes de solvabilité II au marché assurantiel marocain, il est encore plus important d'évaluer la valeur actuelle probable des provisions techniques avec justesse.

Bibliographie :

Ilan HABIB, Stéphane RIBAN, Quelle méthode de provisionnement pour des engagements non-vie dans Solvabilité 2 ? , le 26 juin 2012, l'ENSAE ParisTech.

LAGIER Raphaël, Provisionnement non-vie sur la branche Responsabilité Civile Professionnelle, 5 juin 2013, ENSAE ParisTech.

P. D. England and R. J. Verrall, Stochastic claims reserving in general insurance, 28 January 2002, the Institute of Actuaries.

Marie LOUIS, Evaluation des provisions techniques non-vie dans le contexte de solvabilité II, le 5 octobre 2010, Université De Strasbourg.

Thomas MACK, Distribution-free calculation of the standard error of chain ladder reserve estimates.

R. L. BORNHUETTER and R. E. FERGUSON, The Actuary and IBNR

JABRAZKO Réda-BASSOP Pierre, Quelles allocations d'actifs optimisent la solvabilité prospective d'une compagnie d'assurance sous la directive Solvabilité 2?, 29 JUIN 2012, ENSAE ParisTech.

THIBAUT Baron, Mesure de l'Incertitude sur les Provisions en Assurance Non Vie Approche Bornhuetter-Ferguson, ENSAE ParisTech.

Delphine BOUTHIER et Hélène HIPPOLYTE, Mesure du risque de provisionnement à un an en assurance IARD, le 26 Juin 2012, l'ENSAE Paris Tech.

Clémence MICHAUD, La mesure du risque de provisionnement à horizon un an en assurance non-vie - prise en compte du jugement d'expert et de données exogènes, le 5 décembre 2012.

Sandra GOTLIB, Comparaison des méthodes de provisionnement dans le cadre de la garantie responsabilité civile en flotte automobile, le 01 novembre 2012, institut de statistique de l'université Pierre et Marie Curie.

Hélène Gibello et Benoit Lebrun, Crédibilisation des méthodes de provisionnement non vie. Centre d'Etudes Actuarielles

Treyvis DAVID et Laetitia NGUYEN, MunichChain Ladder stochastique pour la mesure du risque de provisionnement à un an en assurance non-vie, le 30 mai 2014, ENSAE Paris Tech.

Maxime BERGERON, Incertitude dans le calcul des Provisions pour sinistres à payer, 14 janvier 2015, Universitaire d'actuariat de l'ISFA

Ilan HABIB, Stéphane RIBAN, Quelle méthode de provisionnement pour des engagements non-vie dans Solvabilité 2 ?, le 26 juin 2012, ENSAE Paris Tech

Selma JAZIRI, Méthodes de provisionnement non-vie et risque de réserve à un an, le 12 Juillet 2011, l'Institut de Science Financière et d'Assurances.

Riad BESSIOUD, Modélisation de la partie attritionnelle de la provision RC médicale, le 17/12/2015, Universitaire d'actuariat de l'ISFA

<http://www.procomptable.com/>

Annexe :

I. Présentation d'A. R.M CONSULTANTS :

Créée en 1996, **A.R.M CONSULTANTS** est le premier cabinet d'actuaire conseils indépendants au Maroc, en Afrique francophone et dans la région MENA, spécialisé dans l'Actuariat, la gestion des risques et l'ingénierie des assurances. Son capital est détenu à 100% par ses associés, ce qui assure au Cabinet une complète indépendance de tout organisme assureur. La présence d'**A.R.M CONSULTANTS**, qui regroupe des actuaire consultants de haut niveau, disposant d'une formation supérieure pluridisciplinaires et ayant une longue expérience dans les différents domaines du Risk-Management, de l'assurance et de la prévoyance sociale tant en France qu'au Maroc, présente une réelle opportunité pour :

- ✚ Les institutions financières qui souhaitent innover et maîtriser leurs risques, pour devenir leaders dans les domaines de l'assurance, de la bancassurance, de la réassurance, de la prévoyance sociale, de la retraite ou du crédit bancaire.
- ✚ Les entreprises et les établissements publics, qui souhaitent optimiser leurs performances en matière de gestion de leurs risques, de leurs assurances et de leurs engagements sociaux.
- ✚ Les administrations qui cherchent à élaborer des études actuarielles pour améliorer les systèmes existants de couvertures sociales ou mettre en place de nouveaux régimes de prévoyance sociale.

A.R.M CONSULTANTS s'est dotée d'équipes soudées et complémentaires, organisées autour de deux pôles distincts (Institutionnels et Corporat) qui lui permet de couvrir l'ensemble des spécificités actuarielles. Cette richesse, diversité et complémentarité des métiers permet à **A.R.M CONSULTANTS** de suivre en permanence l'ensemble des évolutions actuarielles et réglementaires. **A.R.M CONSULTANTS** a su développer et affirmer son savoir-faire et son expertise grâce aux compétences et expériences de ses consultants, à sa spécialisation dans les domaines pointus de l'actuariat et du Risk-Management, et à son approche originale parfaitement adaptée au contexte Marocain et régional, basée sur un conseil extérieur qui est :

- ✚ Innovateur.
- ✚ Indépendant.
- ✚ International, par le biais de son partenariat avec des sociétés similaires de renommée internationale.

II. Tests statistiques :

1. Statistique de Pearson

On définit la statistique de Pearson, parfois appelée khi^2 de Pearson généralisé, comme mesure de qualité globale d'ajustement d'un modèle linéaire généralisé, au même titre que la déviance :

$$\chi^2 = \sum_{i,j} \frac{(Y_{i,j} - \hat{\mu}_{i,j})^2}{\text{Var}(\hat{\mu}_{i,j})}$$

Cette statistique, tout comme la déviance (excepté dans le cas de la loi normale), suit asymptotiquement une loi du χ^2 à n-p degrés de liberté, ce qui fournit une indication sur la qualité du modèle.

L'hypothèse nulle du test est le modèle à n-p degrés de liberté est adéquat

2. Test de Shapiro-Wilk :

Il existe de nombreuses méthodes pour vérifier si les résidus présentent les caractéristiques d'une loi normale. La méthode développée par Shapiro-Wilk est dans bien des cas la plus puissante.

La statistique du test est définie par :

$$W = \frac{(\sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} a_i (x_{(n-i+1)} - x_{(i)}))^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$$

Avec :

$x_{(i)}$ est la série des données triées

$\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ est la partie entière de $\frac{n}{2}$

a_i Est une constante générée à partir de l'espérance et de la matrice de variance-covariance des quantiles d'un échantillon de taille n suivant la loi normale

L'hypothèse nulle du test supposant la normalité des résidus

III. Détails de calcul de la provision de la catégorie :TPV

Résultats de Chain Ladder :

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
2001	5 040	39 097	89 606	200 986	289 021	441 733	548 293	636 459	704 471	721 675	766 995	821 715	843 953	893 021	926 693
2002	5 561	37 158	110 370	240 265	382 879	518 499	643 560	763 198	816 467	872 725	903 887	916 821	940 765	952 004	987 900
2003	3 552	42 673	110 935	203 792	314 867	483 727	618 182	666 073	697 757	742 741	763 069	772 764	779 859	806 211	836 610
2004	6 553	51 199	124 516	241 746	427 352	594 275	681 053	748 458	806 727	848 347	892 917	905 972	925 193	956 455	992 519
2005	5 979	50 903	109 537	243 365	410 785	490 062	525 855	553 671	567 738	592 531	611 426	628 041	641 364	663 036	688 037
2006	9 949	69 952	195 138	384 579	514 821	587 097	645 290	716 826	765 582	801 096	835 081	857 774	875 971	905 571	939 716
2007	9 684	75 763	191 496	358 653	478 985	583 932	675 424	783 592	980 353	1 029 919	1 073 611	1 102 785	1 126 181	1 164 235	1 208 134
2008	15 704	76 442	193 602	353 628	458 011	546 551	669 681	718 266	787 731	827 558	862 665	886 107	904 906	935 483	970 756
2009	7 869	57 152	147 610	261 720	376 834	516 209	617 700	689 150	755 798	794 011	827 695	850 187	868 224	897 561	931 404
2010	14 436	69 443	127 998	239 330	413 440	504 463	595 878	664 804	729 098	765 961	798 455	820 152	837 552	863 853	898 501
2011	10 428	53 571	129 075	287 940	385 441	499 126	589 575	657 771	721 385	757 858	790 008	811 476	828 692	856 693	888 996
2012	5 726	44 272	136 439	248 719	367 177	475 475	561 638	626 603	687 203	721 947	752 574	773 025	789 424	816 099	846 871
2013	13 817	69 299	180 898	354 423	523 223	677 547	800 328	892 902	979 257	1 028 767	1 072 410	1 101 552	1 124 921	1 162 932	1 206 782
2014	14 602	80 015	200 571	392 966	580 123	751 230	887 363	990 005	1 085 750	1 140 644	1 189 034	1 221 344	1 247 255	1 289 400	1 338 018
2015	5 145	32 607	81 734	160 137	236 405	306 133	361 608	403 436	442 453	464 823	484 542	497 709	508 268	525 442	545 254

Résultats de London Chain:

j	f_j	a_j
0	3,21	28 807
1	2,26	13 936

2	1,61	47 857
3	0,91	154 894
4	0,62	273 635
5	0,85	172 910
6	1,19	- 49 123
7	1,45	- 247 532
8	1,10	- 34 759
9	1,06	- 11 618
10	0,86	137 876
11	1,10	- 68 849
12	0,61	378 844
13	1,04	-

Table :Estimations des paramètres utilisés dans la méthode

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
2001	5 040	39 097	89 606	200 986	289 021	441 733	548 293	636 459	704 471	721 675	766 995	821 715	843 953	893 021	926 693
2002	5 561	37 158	110 370	240 265	382 879	518 499	643 560	763 198	816 467	872 725	903 887	916 821	940 765	952 004	987 900
2003	3 552	42 673	110 935	203 792	314 867	483 727	618 182	666 073	697 757	742 741	763 069	772 764	779 859	853 972	886 172
2004	6 553	51 199	124 516	241 746	427 352	594 275	681 053	748 458	806 727	848 347	892 917	905 972	930 857	945 967	981 636
2005	5 979	50 903	109 537	243 365	410 785	490 062	525 855	553 671	567 738	592 531	611 426	664 559	664 467	783 669	813 218
2006	9 949	69 952	195 138	384 579	514 821	587 097	645 290	716 826	765 582	801 096	835 781	857 818	877 721	913 594	948 042
2007	9 684	75 763	191 496	358 653	478 985	583 932	675 424	783 592	980 353	1 042 067	1 090 679	1 077 389	1 120 009	1 061 207	1 101 221
2008	15 704	76 442	193 602	353 628	458 011	546 551	669 681	718 266	795 845	839 402	876 300	892 722	916 236	937 059	972 392
2009	7 869	57 152	147 610	261 720	376 834	516 209	617 700	688 505	752 613	791 916	826 069	849 453	868 490	907 970	942 206
2010	14 436	69 443	127 998	239 330	413 440	504 463	603 936	672 069	728 737	765 691	798 329	825 557	842 122	891 905	925 536
2011	10 428	53 571	129 075	287 940	385 441	513 429	611 597	681 217	742 027	780 288	813 770	838 858	856 799	900 847	934 815
2012	5 726	44 272	136 439	248 719	381 562	511 016	609 535	678 755	738 450	776 359	809 614	835 278	852 849	898 440	932 317
2013	13 817	69 299	180 898	339 935	464 690	562 732	653 723	731 522	815 101	860 553	898 674	911 995	937 503	950 016	985 837
2014	14 602	80 015	194 835	362 438	485 198	575 491	664 624	744 540	834 011	881 324	920 646	930 921	958 387	962 740	999 041
2015	5 145	45 317	116 389	235 778	369 768	503 679	603 266	671 269	727 575	764 414	796 978	824 394	840 838	891 123	924 724

Résultats de Taylor:

i	i+j	p_j	μ_{i+j}
2001	0	0,01053048	478 656
2002	1	0,0561636	594 008
2003	2	0,09525079	528 937
2004	3	0,14364248	753 519
2005	4	0,1384631	758 514
2006	5	0,12475063	907 826
2007	6	0,09910145	896 544
2008	7	0,07414999	1 224 294

2009	8	0,07147775	1 266 370
2010	9	0,04141925	892 096
2011	10	0,03619168	835 991
2012	11	0,02516478	770 496
2013	12	0,01887943	766 762
2014	13	0,02934274	1 105 957
2015	14	0,03547184	949 268
	15		996 849
	16		1 046 814
	17		1 099 284
	18		1 154 384
	19		1 212 246
	20		1 273 008
	21		1 336 815
	22		1 403 821
	23		1 474 185
	24		1 548 077
	25		1 625 672
	26		1 707 156
	27		1 792 724
	28		1 882 582

Table :Estimations des paramètres utilisés dans la méthode

inflation

1,05012345

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
2001	5 040	34 056	50 509	111 380	88 035	152 712	106 559	88 166	68 013	17 204	45 319	54 721	22 237	49 068	33 672
2002	5 561	31 598	73 212	129 895	142 613	135 621	125 061	119 638	53 269	56 258	31 162	12 934	23 945	11 238	35 360
2003	3 552	39 121	68 263	92 857	111 074	168 860	134 456	47 891	31 684	44 984	20 328	9 694	7 096	29 250	37 132
2004	6 553	44 646	73 317	117 230	185 606	166 923	86 778	67 405	58 270	41 619	44 570	13 055	18 820	30 716	38 994
2005	5 979	44 924	58 633	133 828	167 420	79 277	35 793	27 816	14 067	24 793	18 894	25 085	19 763	32 256	40 948
2006	9 949	60 003	125 187	189 441	130 242	72 276	58 193	71 535	48 756	35 514	36 078	26 343	20 754	33 873	43 001
2007	9 684	66 079	115 733	167 158	120 332	104 946	91 492	108 168	196 761	41 289	37 886	27 663	21 794	35 571	45 156
2008	15 704	60 737	117 160	160 026	104 384	88 539	123 131	48 585	71 253	43 358	39 785	29 050	22 887	37 354	47 419
2009	7 869	49 282	90 459	114 109	115 114	139 375	101 491	73 916	74 824	45 532	41 779	30 506	24 034	39 226	49 796
2010	14 436	55 007	58 555	111 331	174 110	91 022	98 789	77 621	78 574	47 814	43 873	32 035	25 238	41 192	52 292
2011	10 428	43 143	75 504	158 865	97 501	124 358	103 741	81 512	82 513	50 210	46 072	33 641	26 503	43 257	54 913
2012	5 726	38 546	92 167	112 281	138 027	130 591	108 941	85 598	86 649	52 727	48 382	35 327	27 832	45 425	57 666
2013	13 817	55 482	111 599	143 190	144 945	137 136	114 401	89 888	90 992	55 370	50 807	37 098	29 227	47 702	60 556
2014	14 602	65 413	94 951	150 367	152 210	144 010	120 135	94 394	95 553	58 145	53 353	38 957	30 692	50 093	63 591
2015	5 145	55 987	99 710	157 904	159 840	151 228	126 157	99 125	100 342	61 060	56 027	40 910	32 230	52 603	66 779

Résultats de London pivot:

j	λ_j	alpha	delta
0	1,02322935	2 159 524,17	8,0873E+10
1	1,03975012		
2	1,05808646		
3	1,0536671		
4	1,04638031		
5	1,03554474		
6	1,02607947		
7	1,02372221		
8	1,01283521		
9	1,01110025		
10	1,00739944		
11	1,00582838		
12	1,00972406		
13	1,01072908		

Table :Estimations des paramètres utilisés dans la méthode

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
2001	5 040	39 097	89 606	200 986	289 021	441 733	548 293	636 459	704 471	721 675	766 995	821 715	843 953	893 021	926 693
2002	5 561	37 158	110 370	240 265	382 879	518 499	643 560	763 198	816 467	872 725	903 887	916 821	940 765	952 004	985 387
2003	3 552	42 673	110 935	203 792	314 867	483 727	618 182	666 073	697 757	742 741	763 069	772 764	779 859	808 442	840 285
2004	6 553	51 199	124 516	241 746	427 352	594 275	681 053	748 458	806 727	848 347	892 917	905 972	923 839	953 822	987 225
2005	5 979	50 903	109 537	243 365	410 785	490 062	525 855	553 671	567 738	592 531	611 426	631 929	648 199	675 501	705 918
2006	9 949	69 952	195 138	384 579	514 821	587 097	645 290	716 826	765 582	801 096	833 960	856 110	873 686	903 182	936 042
2007	9 684	75 763	191 496	358 653	478 985	583 932	675 424	783 592	980 353	1 020 654	1 055 955	1 079 748	1 098 628	1 130 310	1 165 607
2008	15 704	76 442	193 602	353 628	458 011	546 551	669 681	718 266	786 533	824 347	857 468	879 792	897 507	927 234	960 352
2009	7 869	57 152	147 610	261 720	376 834	516 209	617 700	690 128	757 728	795 172	827 970	850 075	867 617	897 053	929 847
2010	14 436	69 443	127 998	239 330	413 440	504 463	599 154	671 098	738 247	775 440	808 019	829 977	847 401	876 641	909 216
2011	10 428	53 571	129 075	287 940	385 441	503 477	598 133	670 051	737 175	774 355	806 922	828 872	846 289	875 518	908 081
2012	5 726	44 272	136 439	248 719	377 963	495 652	590 030	661 737	728 663	765 734	798 205	820 090	837 457	866 600	899 067
2013	13 817	69 299	180 898	316 845	449 744	570 763	667 810	741 546	810 366	848 485	881 874	904 379	922 237	952 204	985 590
2014	14 602	80 015	169 037	304 295	436 521	556 926	653 481	726 843	795 314	833 240	866 461	888 851	906 618	936 434	969 650
2015	5 145	55 429	143 473	277 246	408 021	527 104	622 600	695 156	762 875	800 385	833 241	855 385	872 958	902 446	935 298

Résultats De Vylder :

i,j	alpha i	delta	Charge ultime	pj
0	926 692,93	1,40E+11	926 692,93	0,01
1	987 899,81		987 899,81	0,04
2	856 315,46		856 315,46	0,05
3	1 021 714,08		1 021 714,08	0,12
4	738 732,49		738 732,49	0,09
5	1 028 676,48		1 028 676,48	0,16

6	1 289 600,68		1 289 600,68	0,11
7	1 045 805,55		1 045 805,55	0,1
8	1 044 000,44		1 044 000,44	0,07
9	1 058 290,16		1 058 290,16	0,02
10	1 235 846,06		1 235 846,06	0,05
11	1 146 780,66		1 146 780,66	0,06
12	1 469 584,16		1 469 584,16	0,02
13	1 580 518,85		1 580 518,85	0,05
14	945 879,78		945 879,78	0,04

Table :Estimations des paramètres utilisés dans la méthode

Résultats de la modélisation GLM :

Provisions annuels résultantes de la modélisation GLM log normale :

I	PSAP
2001	-
2002	33 930,44
2003	44 643,12
2004	79 118,82
2005	73 154,19
2006	134 940,77
2007	231 179,60
2008	272 719,61
2009	330 956,32
2010	443 635,61
2011	548 062,61
2012	593 947,85
2013	1 171 613,88
2014	1 470 740,25
2015	617 783,59

Provisions annuels résultantes de la modélisation GLM gamma :

	PSAP
2001	-
2002	30 428,29
2003	46 085,12
2004	76 793,00

2005	76 229,42
2006	136 066,22
2007	237 783,89
2008	280 291,46
2009	318 618,17
2010	449 828,22
2011	537 914,28
2012	580 469,75
2013	1 122 930,83
2014	1 398 209,00
2015	572 392,38

Qualité d'ajustement et Validation du modèle ;

Modèle log normale :

Coefficients:

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t)	
(Intercept)	9.110068	0.151628	60.082	< 2e-16	***
anneesurvenance2002	-0.101302	0.146781	-0.690	0.491890	
anneesurvenance2003	-0.335007	0.150956	-2.219	0.029013	*
anneesurvenance2004	-0.089418	0.155167	-0.576	0.565885	
anneesurvenance2005	-0.350158	0.170377	-2.055	0.042791	*
anneesurvenance2006	-0.063228	0.164777	-0.384	0.702101	
anneesurvenance2007	0.232652	0.170619	1.364	0.176140	
anneesurvenance2008	0.066598	0.177571	0.375	0.708514	
anneesurvenance2009	-0.075076	0.185961	-0.404	0.687387	
anneesurvenance2010	0.004857	0.196396	0.025	0.980325	
anneesurvenance2011	-0.074328	0.210003	-0.354	0.724221	
anneesurvenance2012	-0.219127	0.228752	-0.958	0.340695	
anneesurvenance2013	0.258667	0.256792	1.007	0.316521	
anneesurvenance2014	0.379711	0.304978	1.245	0.216383	
anneesurvenance2015	-0.564318	0.416898	-1.354	0.179288	
anneedeveloppement1	1.708723	0.146781	11.641	< 2e-16	***
anneedeveloppement2	2.291539	0.150956	15.180	< 2e-16	***
anneedeveloppement3	2.769675	0.155167	17.850	< 2e-16	***
anneedeveloppement4	2.762341	0.159702	17.297	< 2e-16	***
anneedeveloppement5	2.678755	0.164773	16.257	< 2e-16	***
anneedeveloppement6	2.443894	0.170602	14.325	< 2e-16	***
anneedeveloppement7	2.194936	0.185732	11.818	< 2e-16	***
anneedeveloppement8	2.099121	0.196242	10.697	< 2e-16	***
anneedeveloppement9	1.569983	0.196277	7.999	4.37e-12	***
anneedeveloppement10	1.401973	0.209929	6.678	2.02e-09	***
anneedeveloppement11	0.984692	0.228752	4.305	4.29e-05	***
anneedeveloppement12	0.770731	0.256792	3.001	0.003487	**
anneedeveloppement13	1.223657	0.304978	4.012	0.000125	***
anneedeveloppement14	1.314363	0.416898	3.153	0.002205	**

Signif. codes: 0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Modèle gamma :

```

Coefficients:
      Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)    9.110068   0.151628  60.082 < 2e-16 ***
anneesurvenance2002 -0.101302  0.146781  -0.690 0.491890
anneesurvenance2003 -0.335007  0.150956  -2.219 0.029013 *
anneesurvenance2004 -0.089418  0.155167  -0.576 0.565885
anneesurvenance2005 -0.350158  0.170377  -2.055 0.042791 *
anneesurvenance2006 -0.063228  0.164777  -0.384 0.702101
anneesurvenance2007  0.232652  0.170619   1.364 0.176140
anneesurvenance2008  0.066598  0.177571   0.375 0.708514
anneesurvenance2009 -0.075076  0.185961  -0.404 0.687387
anneesurvenance2010  0.004857  0.196396   0.025 0.980325
anneesurvenance2011 -0.074328  0.210003  -0.354 0.724221
anneesurvenance2012 -0.219127  0.228752  -0.958 0.340695
anneesurvenance2013  0.258667  0.256792   1.007 0.316521
anneesurvenance2014  0.379711  0.304978   1.245 0.216383
anneesurvenance2015 -0.564318  0.416898  -1.354 0.179288
anneedeveloppement1  1.708723  0.146781  11.641 < 2e-16 ***
anneedeveloppement2  2.291539  0.150956  15.180 < 2e-16 ***
anneedeveloppement3  2.769675  0.155167  17.850 < 2e-16 ***
anneedeveloppement4  2.762341  0.159702  17.297 < 2e-16 ***
anneedeveloppement5  2.678755  0.164773  16.257 < 2e-16 ***
anneedeveloppement6  2.443894  0.170602  14.325 < 2e-16 ***
anneedeveloppement7  2.194936  0.185732  11.818 < 2e-16 ***
anneedeveloppement8  2.099121  0.196242  10.697 < 2e-16 ***
anneedeveloppement9  1.569983  0.196277   7.999 4.37e-12 ***
anneedeveloppement10 1.401973  0.209929   6.678 2.02e-09 ***
anneedeveloppement11 0.984692  0.228752   4.305 4.29e-05 ***
anneedeveloppement12 0.770731  0.256792   3.001 0.003487 **
anneedeveloppement13 1.223657  0.304978   4.012 0.000125 ***
anneedeveloppement14 1.314363  0.416898   3.153 0.002205 **
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

```

Les années de survénance récentes autant que variables explicatives ne sont pas significatives contrairement aux années de développement qui sont toutes significatives au seuil 5%.

Pour mesurer la qualité de l'ajustement d'un modèle GLM on se base sur le calcul des résidus de Pearson.

```

> X1 <- sum(residuals(reg1, type = "pearson")^2)
> ddl1 <- df.residual(reg1)
> 1 - pchisq(X1,ddl1)
[1] 1

```

```

> X2 <- sum(residuals(reg2, type = "pearson")^2)
> ddl2 <- df.residual(reg2)
> 1 - pchisq(X2,ddl2)
[1] 1

```

Les Pvalue sont ainsi supérieurs à 5%, on ne peut pas rejeter l'hypothèse nulle que le les modèle ajustent nos données.

```

> shapiro.test(rstudent(reg1))

      Shapiro-Wilk normality test

data:  rstudent(reg1)
W = 0.98495, p-value = 0.2226

```

```
> shapiro.test(rstudent(reg2))

      Shapiro-Wilk normality test

data:  rstudent(reg2)
W = 0.98403, p-value = 0.185
```

pValue est ainsi supérieur à 5%, pour les deux modèles, on ne peut pas rejeter l'hypothèse nulle sur la normalité des résidus.

Choix du modèle :

En se basant dans notre choix sur le critère AIC, le modèle ayant l'AIC la plus petite est le modèle log normal

```
> res <- AIC(reg1, reg2 )
> res
      df      AIC
reg1 30  132.6792
reg2 30 2696.7459
> |
```

IV. Données initiales de la MATU RC auto :

- Catégorie poids lourds :

Triangle des règlements cumulés :

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
2001	318	5 299	24 165	60 509	95 530	116 957	138 849	165 253	184 522	185 605	188 467	189 722	190 371	190 374	190 385
2002	222	3 188	19 358	41 039	65 644	89 985	106 376	117 662	118 236	121 064	122 831	123 678	123 821	123 847	
2003	529	8380	14022	39800	55629	85772	115666	124750	128259	131603	133936	135839	136535		
2004	771	9588	18915	88645	129169	157117	174257	186259	191725	192591	195883	196572			
2005	915	7693	22553	52574	80044	87456	96167	101296	105201	109004	110359				
2006	460	9691	37874	83573	108319	116582	137020	140163	147544	153484					
2007	3410	20110	37190	70401	93191	109853	125827	135166	137679						
2008	1 280	15 359	45 763	75 709	98 840	121 161	146 789	157 413							
2009	873	15 453	44 766	66 522	88 181	111 374	123 605								
2010	1 568	12 772	30 552	57 173	78 388	89 303									
2011	680	8 968	24 701	50 370	59 583										
2012	489	5 017	28 250	40 993											
2013	4 119	10 079	25 807												
2014	136	3 387													
2015	100														

Triangle des charges :

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
2001	127 950	174 175	197 987	209 459	214 363	214 550	201 089	208 115	201 678	220 923	202 885	201 050	201 659	196 945	193 510
2002	74 000	121 826	144 327	158 536	164 686	161 126	153 424	141 780	144 459	139 834	136 949	137 141	134 645	134 537	
2003	76 626	137 986	155 901	154 046	151 671	156 880	140 673	157 626	150 602	147 351	149 284	148 643	144 581		
2004	90 527	147 897	156 102	220 630	238 102	227 707	243 952	230 891	224 475	225 880	221 368	212 481			
2005	143 951	152 157	161 709	153 767	144 718	134 062	132 000	131 253	132 449	120 053	120 150				
2006	189 802	191 317	186 177	177 896	213 695	189 094	185 589	184 048	180 398	167 582					
2007	161 991	170 526	189 505	197 065	200 462	194 040	193 117	177 007	165 542						
2008	200 565	194 541	291 093	253 110	241 850	244 268	211 594	195 337							
2009	182 913	192 857	195 609	204 261	211 445	172 034	171 350								
2010	234 620	199 301	193 148	193 305	132 526	133 006									
2011	115 624	118 183	127 975	119 110	117 024										
2012	110 943	131 409	120 406	112 230											
2013	100 818	103 882	94 600												
2014	63 222	73 548													
2015	89 463														

Les Primes acquises :

i	PA
2001	357 945
2002	416 849
2003	451 304
2004	476 855
2005	513 813

2006	490 324
2007	512 698
2008	547 658
2009	604 926
2010	649 178
2011	662 600
2012	655 357
2013	602 543
2014	982 865
2015	982 865

- **Catégorie TPV :**

Triangle des règlements cumulés :

C _i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
2001	5 040	39 097	89 606	200 986	289 021	441 733	548 293	636 459	704 471	721 675	766 995	821 715	843 953	893 021	926 693
2002	5 561	37 158	110 370	240 265	382 879	518 499	643 560	763 198	816 467	872 725	903 887	916 821	940 765	952 004	
2003	3 552	42 673	110 935	203 792	314 867	483 727	618 182	666 073	697 757	742 741	763 069	772 764	779 859		
2004	6 553	51 199	124 516	241 746	427 352	594 275	681 053	748 458	806 727	848 347	892 917	905 972			
2005	5 979	50 903	109 537	243 365	410 785	490 062	525 855	553 671	567 738	592 531	611 426				
2006	9 949	69 952	195 138	384 579	514 821	587 097	645 290	716 826	765 582	801 096					
2007	9 684	75 763	191 496	358 653	478 985	583 932	675 424	783 592	980 353						
2008	15 704	76 442	193 602	353 628	458 011	546 551	669 681	718 266							
2009	7 869	57 152	147 610	261 720	376 834	516 209	617 700								
2010	14 436	69 443	127 998	239 330	413 440	504 463									
2011	10 428	53 571	129 075	287 940	385 441										
2012	5 726	44 272	136 439	248 719											
2013	13 817	69 299	180 898												
2014	14 602	80 015													
2015	5 145														

Les Primes acquises :

i	Prime
2001	872 920
2002	862 267
2003	904 970
2004	970 265
2005	1 013 719
2006	1 030 881
2007	1 022 427
2008	1 064 695
2009	1 070 094
2010	1 072 484
2011	1 102 676
2012	1 136 860
2013	1 187 689
2014	1 398 699
2015	1 398 699