



المندوبية السامية للتخطيط
HAUT-COMMISSARIAT AU PLAN

ROYAUME DU MAROC
*_**_*
HAUT COMMISSARIAT AU PLAN
*_**_*_*_*_*_*_*_*_*_*
INSTITUT NATIONAL
DE STATISTIQUE ET D'ECONOMIE APPLIQUEE



INSEA

Projet de Fin d'Etudes

Gestion actif-passif en assurance vie

Préparé par : *Mlle Hajar Gadih*

Sous la direction de : *M. Abderrahim Oulidi (INSEA)*
M. Jamal Harmouch (FIDAROC Grant Thornton)

Soutenu publiquement comme exigence partielle en vue de l'obtention du

Diplôme d' Ingénieur d'Etat

Option : ACTUARIAT-FINANCE

Devant le jury composé de :

- *M. Abderrahim Oulidi (INSEA)*
- *M. Abdessalam Fazouane (INSEA)*
- *M. Jamal Harmouch (FIDAROC Grant Thornton)*

Résumé exécutif

Dans le cadre de la mise en place de la gestion actif-passif au sein des compagnies d'assurance vie, et suite à l'essor des nouvelles normes réglementaires, notamment Solvency II, les assureurs sont désormais amenés à compléter l'évaluation comptable de leurs engagements par :

- le calcul de la valeur actuelle des engagements au taux de marché ;
- le calcul de l'actif en valeur de marché ;
- la prise en compte des options cachées proposées dans les contrats d'assurance vie, à savoir les options de rachat et les garanties financières telles que la participation aux bénéfices.

Aussi, pour une bonne maîtrise des risques encourus, les compagnies d'assurance doivent développer des modèles plus performants permettant de modéliser les éléments du passif et de l'actif de façon fiable.

Le présent rapport s'articule autour de deux parties. Dans un premier temps, après avoir présenté le cadre général et réglementaire des contrats en assurance vie, plusieurs modèles ont été proposés pour la modélisation des taux d'intérêts, des taux de rendements, des actions et des taux de rachat. Ceux-ci sont le modèle de Cox, Ingersoll et Ross, le RSLN-2 et l'estimateur non paramétrique de Kaplan Meier. Dans un second temps, une application a été mise en place pour un contrat d'épargne en dirhams non participatif proposant des garanties en cas de décès, ainsi que des possibilités de rachat. Enfin, pour conclure et affiner le travail réalisé, des études de stress tests ont été effectuées pour les résultats obtenus, et cela en faisant varier certains paramètres intervenant dans leur modélisation.

Mots clés

Assurance vie / Contrat d'épargne en dirhams / Gestion actif-passif / Générateur de scénarios économiques / Embedded Value / RSLN-2 / Vasicek / Kaplan Meier.

Dédicace

À mes très chers parents,

Aucun mot ne pourra témoigner de ma reconnaissance, de ma gratitude et de mon amour à votre égard, vos sacrifices abondants et votre soutien inconditionnel resteront à jamais gravés dans mon cœur et mon esprit.

À ma très chère sœur Chaimae,

À mon très cher frère Youssef,

Je vous remercie pour vos encouragements et votre affection sans mesure, Je vous souhaite de tout mon cœur les plus belles choses au monde.

À tous mes très chers amis avec qui je partage des souvenirs mémorables.

À toute ma grande famille.

Je dédie ce travail...

Hajar

Remerciements

Je tiens, tout d'abord, à exprimer mes remerciements à mon Professeur, M. Abderrahim Oulidi pour avoir accepté d'assurer l'encadrement de ce projet de fin d'études. Il a su à la fois me prodiguer son soutien et ses instructions qui ont contribué à l'aboutissement de ce mémoire.

Je remercie également M. Jamal Harmouch, pour la qualité de son encadrement, son écoute et sa disponibilité.

Je conserve aussi un remerciement spécial à M. Abdessalam Fazouane pour avoir accepté de faire partie des membres du jury.

Mes remerciements vont également au corps professoral qui m'a accompagné tout au long des trois années de ma formation et à toutes les personnes que j'ai contactées et auprès desquelles j'ai trouvé l'accueil chaleureux, l'aide et l'assistance. Qu'ils trouvent ici l'expression de mon grand respect.

Table des matières

LISTE DES ABREVIATIONS	7
LISTE DES TABLEAUX	8
LISTE DES FIGURES.....	9
INTRODUCTION GENERALE	10
CHAPITRE 1 : PRESENTATION DU CADRE GENERAL	
I. L'ASSURANCE VIE	12
I.1. Définition générale	12
I.2. Présentation des produits d'épargne.....	12
I.3. Caractéristiques du contrat d'épargne.....	13
II. LA REGLEMENTATION EN ASSURANCE VIE	15
II.1. Les provisions techniques	15
II.2. Fonds propres ou marge de solvabilité	16
II.3. Les placements.....	17
III. RECENSEMENT DES RISQUES.....	19
III.1. Les risques financiers	19
III.2. Les risques viagers	20
III.3. Les risques liés aux options cachées	21
IV. LA GESTION ACTIF-PASSIF DANS UNE COMPAGNIE D'ASSURANCE VIE.....	22
IV.1. Pourquoi la gestion actif-passif?.....	22
IV.2. Les modèles classiques de gestion actif-passif.....	22
CHAPITRE 2 : GENERATEUR DE SCENARIOS ECONOMIQUES	
I. MODELISATION DE LA STRUCTURE PAR TERME DES TAUX	25
I.1. Le modèle de Vasicek.....	26
I.2. Le modèle de Cox, Ingersoll et Ross.....	33
II. MODELISATION DU COURS DES ACTIONS	38
II.1. Le modèle de Black and Scholes.....	38
II.2. Le modèle de changement de régime.....	46
III. CONCLUSION	52
CHAPITRE 3 : VALORISATION D'UN CONTRAT D'ASSURANCE VIE TYPE EPARGNE	
I. ETUDE A PRIORI DU PORTEFEUILLE D'ASSURE	54
I.1. Description du portefeuille	54
I.2. Évolution des nouveaux adhérents, des rachats et des décès par année.....	56
II. MODELISATION DU RACHAT	57
II.1. Modélisation du rachat structurel	57
II.2. Modélisation du rachat conjoncturel.....	62
III. MODELISATION DU PASSIF	65
III.1. Note technique et hypothèses de tarification du contrat	65
III.2. Hypothèses de projection du portefeuille	65
III.3. Évolution du portefeuille au cours du temps	66

IV. APPLICATION POUR UN PORTEFEUILLE DE CONTRATS D'EPARGNE	68
IV.1. <i>Projection des flux du passif</i>	68
IV.2. <i>Projection des flux de l'actif</i>	69
V. PROJECTION DU RESULTAT ET MESURE DE L'EMBEDDED VALUE.....	75
V.1. <i>Projection du résultat simplifié</i>	75
V.2. <i>Calcul de l'Embedded Value (EV)</i>	75
VI. ETUDES DE SENSIBILITE	79
VI.1. <i>Sensibilité par rapport au taux minimum garanti</i>	79
VI.2. <i>Sensibilité par rapport à la répartition du portefeuille de placements</i>	80
CONCLUSION GENERALE	81
BIBLIOGRAPHIE	83
ANNEXE I	86
ANNEXE II.....	87

Liste des abréviations

ACP	: Autorité de Contrôle Prudentiel
ALM	: Asset Liability Management
ANR	: Actif Net Réévalué
EV	: Embedded Value
MASI	: Moroccan All Shares Index
PB	: Participation aux Bénéfices
RSLN	: Regime Switching Log-Normal
TME	: Taux Moyen des Emprunts de l'Etat
TMG	: Taux Minimum Garanti
TMP	: Taux Moyen Pondéré
UC	: Unité de Compte
VAP	: Valeur Actuelle Probable

Liste des tableaux

Tableau 1	: Les résultats des tests d'adéquation pour le modèle des taux courts	30
Tableau 2	: Les tests de normalité.....	43
Tableau 3	: L'estimation des paramètres du modèle RSLN pour les actions	50
Tableau 4	: Les résultats des critères de sélection du meilleur modèle	51
Tableau 5	: L'effectif des nouveaux adhérents, rachat (partiel et total) et décès par année	56
Tableau 6	: La loi de rachat structurel	62
Tableau 7	: La valeur de marché des actifs au 31/12/2012.....	70
Tableau 8	: L'allocation du portefeuille obligataire au 31/12/2012 par maturité.....	73
Tableau 9	: Le bilan simplifié de la compagnie au 31/12/2012.....	78
Tableau 10	: L'effet des variations du TMG sur l'Embedded Value	79

Liste des figures

Figure 1	: L'évolution du TMP du 01/01/2006 au 21/03/2013	27
Figure 2	: Les résultats du Unit Root test pour vérifier la stationnarité de la série des TMP	27
Figure 3	: Les statistiques descriptives de la série des TMP	28
Figure 4	: Les corrélogrammes simple et partiel de la série des TMP	29
Figure 5	: L'estimation des paramètres du modèle	30
Figure 6	: La représentation des courbes de taux du marché et de Vasicek (dans un univers risque neutre).....	32
Figure 7	: La représentation des courbes de taux du marché et de Vasicek avec la prime de risque	32
Figure 8	: 50 simulations des taux courts du modèle de CIR	35
Figure 9	: La structure par terme des taux du modèle de CIR et des taux du marché	37
Figure 10	: L'évolution du cours du MASI entre janvier 2006 et mars 2013	40
Figure 11	: L'évolution des rendements du MASI entre janvier 2006 et mars 2013	41
Figure 12	: Le test de racine unitaire pour vérifier la stationnarité de la série	41
Figure 13	: Le test de Jarque Bera pour vérifier la normalité de la série	42
Figure 14	: L'évolution des rendements mensuels du MASI entre janvier 2006 et décembre 2012	42
Figure 15	: L'analyse descriptive du rendement mensuel	43
Figure 16	: Le graphique Q-Q pour tester la normalité des rendements mensuels	44
Figure 17	: La représentation de 20 trajectoires du cours des actions pour $S(0)=100$	45
Figure 18	: L'évolution du cours du MASI	46
Figure 19	: La répartition de l'effectif des assurés par âge	55
Figure 20	: La répartition de l'effectif des assurés par ancienneté	55
Figure 21	: La représentation de la fonction de survie en fonction de l'ancienneté des contrats	61
Figure 22	: La fonction du taux de rachat structurel	63
Figure 23	: L'évolution des provisions mathématiques (avec primes futures et sans primes futures) au cours du temps	68
Figure 24	: L'évolution des prestations totales, décès et rachat au cours du temps	69
Figure 25	: La répartition du portefeuille d'investissement de la compagnie entre actions et obligations	70
Figure 26	: L'évolution du cours d'une action de valeur initiale $S(0) = 9359$ DH sur 40 ans	72
Figure 27	: L'évolution stochastique du fonds d'actions sur 40 ans	72
Figure 28	: La projection des cash-flows générés par le portefeuille obligataire	74
Figure 29	: La projection des cash-flows générés par le portefeuille d'investissement	74
Figure 30	: La projection du résultat simplifié de la compagnie	75
Figure 31	: L'évolution de l'Embedded Value en fonction du TMG	79
Figure 32	: L'évolution de l'Embedded Value en fonction de la répartition du portefeuille d'investissement	80

Introduction générale

Les premières notions de gestion actif-passif remontent aux années 1930 où celle-ci est apparue pour la première fois au sein d'entités chargées de la gestion de trésorerie des établissements de crédit, afin de contrôler les impasses de trésorerie et gérer les risques de taux et de liquidité pouvant en découler.

Suite la crise financière des années 1970, de nombreuses institutions financières se sont retrouvées en difficulté. Dans le secteur des assurances, cela a poussé les assureurs à prendre conscience des différents risques menaçant leur activité, notamment les risques de placement (actif) et de souscription (passif), les incitant ainsi à remettre en cause la qualité de leurs modèles de gestion des risques. Depuis, la gestion actif-passif est devenue quasi indispensable au sein des compagnies d'assurance et des caisses de retraite.

L'objet du présent travail est donc de mettre en place un outil de gestion actif-passif pour une compagnie d'assurance commercialisant des contrats d'épargne en dirhams. Cependant, afin de projeter correctement l'évolution de l'actif et du passif de l'assureur, ainsi que son compte résultats, ce travail requiert une analyse approfondie de ses engagements et de ses placements.

Pour répondre à cet objectif, un générateur de scénarios économiques va d'abord être implémenté pour nous offrir un échantillon de scénarios possibles des taux d'intérêt et des rendements des actifs risqués. Les modèles d'actifs que nous allons considérer, dans ce contexte, sont les modèles de Vasicek et de Cox, Ingersoll et Ross pour les taux d'intérêt et le modèle de Black and Scholes et le RSLN-2 pour le rendement des actions. De plus, une corrélation entre ces deux variables va être prise en considération dans nos simulations.

Dans une seconde partie, nous allons nous intéresser au passif et nous allons ainsi définir un modèle non paramétrique (Kaplan Meier) pour estimer les taux de rachat structurel. Nous allons ensuite projeter les éléments du passif ainsi que les flux générés par les classes d'actifs contenues dans le portefeuille d'investissement de l'assureur. Cela va nous permettre de prévoir l'évolution du compte résultats dans le futur et de calculer une Embedded Value pour estimer la valeur économique de la compagnie à la date d'évaluation.

Seront également effectuées des études de sensibilité de manière à illustrer l'impact des variations de certaines variables sur l'évolution du compte résultats et l'Embedded value de la compagnie.

Enfin, une allocation optimale d'actif a été programmée dans le cadre de ce mémoire mais faute de temps et de ressources suffisantes et afin de ne pas remettre un travail moins structuré, nous avons décidé de renoncer à son traitement.

Chapitre 1

Présentation du cadre général

La gestion Actif-Passif ou GAP, en anglais Asset-Liability Management ou ALM, désigne un ensemble de techniques permettant d'analyser, mesurer et gérer les différents risques encourus par les compagnies d'assurance. Celle-ci vise, dans le cadre du respect des normes réglementaires, à optimiser la situation financière de l'assureur pour un niveau de risque donné sous des contraintes prédéfinies.

En assurance vie, l'ALM nécessite la mise en place de projections futures des différents postes de l'actif et du passif afin de permettre à l'assureur de prévoir ses adéquations actif passif à n'importe quel moment et sous différents scénarios.

De ce fait, l'Asset-Liability Management se charge de répondre aux deux principaux objectifs liés au pilotage de l'activité des sociétés d'assurance :

- Une stratégie commerciale qui permet d'orienter la composition du portefeuille des contrats d'assurance.
- Une allocation optimale d'actifs qui limite les risques financiers afin de permettre le paiement des engagements futurs aux assurés.

Dans cette première partie, nous décrivons le cadre général du présent travail. Pour ce faire, nous allons nous intéresser, dans un premier temps, aux caractéristiques des contrats d'assurance vie et plus particulièrement les produits d'épargne. Puis, nous présenterons le cadre réglementaire du secteur de l'assurance vie. Nous passerons, ensuite, au recensement des différents risques encourus par les assureurs vie pour enfin conclure avec les modèles classiques d'ALM permettant la gestion de ces risques.

I. L'assurance vie

I.1. Définition générale

Un contrat d'assurance-vie est un contrat qui garantit, moyennant le paiement d'une prime, le versement d'une somme d'argent en cas de survenance d'un événement lié à la vie de l'assuré. Nous distinguons essentiellement deux types de garantie :

- La garantie en cas de vie : il s'agit d'un contrat qui assure le versement d'un capital ou d'une rente à un bénéficiaire (le plus souvent l'assuré lui-même) dans le cas où l'assuré est en vie à la fin du contrat.
- La garantie en cas de décès : il s'agit d'un contrat qui assure le versement d'un capital ou d'une rente à un bénéficiaire (désigné dans le contrat) en cas de décès de l'assuré.

I.2. Présentation des produits d'épargne

Dans la suite du rapport, nous nous intéresserons à l'élaboration d'un modèle de gestion actif passif pour un portefeuille de contrats d'épargne en dirhams. Un produit épargne en dirhams est un contrat d'assurance vie à long terme qui offre à l'assuré une garantie de versements d'un capital au moins égal aux primes versées, nettes de chargements, revalorisé chaque année d'un rendement constitué d'un taux minimum garanti (TMG) auquel s'ajoute une participation aux bénéfices (PB).

I.3. Caractéristiques du contrat d'épargne

I.3.1. Les cotisations

Les cotisations versées par le client peuvent être effectuées sous différentes formes :

- Cotisation unique : il n'y a qu'un seul versement au moment de la souscription.
- Cotisations périodiques : l'assuré a la possibilité, dans ce cas, de verser des cotisations programmées selon un calendrier de versements (mensuels, trimestriels, annuels...). Il a aussi la possibilité de les interrompre à tout moment.
- Cotisations exceptionnelles : ici l'assuré n'est pas obligé de suivre un calendrier de versements précis mais il est souvent soumis à un montant minimal de cotisations à la souscription.

I.3.2. Les frais liés aux contrats d'épargne

La souscription à un contrat d'épargne donne lieu au paiement des frais suivants :

- Les frais de souscription : ils sont calculés sur la base d'un taux appliqué au montant de chaque prime ou versement exceptionnel. Ils sont généralement de l'ordre de 3%.
- Les frais de gestion : il s'agit d'un taux prélevé chaque année sur le montant de l'épargne constituée revalorisée. Celui-ci peut baisser quand le montant de la prime devient important.

I.3.3. La fiscalité

Les primes versées au titre du produit épargne ne sont pas déductibles de la base imposable à l'IGR (Impôt général sur les revenus). Mais l'épargne constituée bénéficie d'une exonération de l'IGR, si elle n'est pas retirée avant 10 ans. Sinon, le différentiel entre la somme des primes versées et l'épargne constituée est imposable à l'IGR, selon le barème prévu par la réglementation.

I.3.4. Revalorisation des cotisations

L'objectif principal d'un contrat d'épargne en dirhams est de procurer un rendement financier à ses assurés. Pour revaloriser un contrat, deux principaux outils sont utilisés :

- Taux moyen garanti (TMG) : Les cotisations versées par le client sont revalorisées annuellement au taux technique fixé par la réglementation en vigueur. Ce taux d'intérêt technique retenu pour l'établissement des tarifs varie semestriellement et est égal au minimum entre 3,5% et 70% du TME (taux moyen des emprunts d'Etat calculé sur les 6 derniers mois)
- Distribution de la participation aux bénéficiaires (PB) : A la fin de chaque année, la totalité de l'épargne constituée est augmentée par un taux de rendement qui dépend de la participation aux bénéficiaires arrêtée conformément à la réglementation en vigueur.

Ce taux n'est garanti que pour une durée d'un an et peut aller, pour l'exercice à venir, jusqu'à 85% de la moyenne des rendements des actifs de la société.

I.3.5. Les prestations

Au terme de la période d'épargne, le client peut choisir entre l'une des options suivantes :

- Percevoir une partie en capital, et le reste sous forme de rente périodique (viagère ou certaine) ou percevoir la totalité sous forme de rente viagère périodique (les rentes viagères cessent d'être servies au décès de l'assuré).
- Récupérer son capital revalorisé ou percevoir une rente certaine trimestrielle pendant une durée qu'il déterminera lui-même (en cas de décès, pendant la durée du versement, les bénéficiaires continuent de recevoir cette rente).

I.3.6. L'option de rachat

Le rachat est un droit conféré aux assurés par la réglementation leur permettant de récupérer à tout moment, une partie ou la totalité, de leur épargne constituée avant l'échéance normale du contrat. Celui-ci peut être éventuellement soumis à des pénalités en fonction de l'ancienneté du contrat.

II. La réglementation en assurance vie

L'objectif principal de la réglementation est de garantir la sécurité des assurés et les protéger contre les risques d'insolvabilité des compagnies d'assurances. Celle-ci repose principalement sur trois piliers :

- Des provisions techniques suffisantes et calculées de manière prudente.
- Des placements d'actifs sûrs, liquides et rentables.
- Une marge de solvabilité permettant de faire face à tout choc éventuel du marché.

II.1. Les provisions techniques

Les provisions techniques représentent, en termes de volume, la part la plus importante du passif d'une compagnie d'assurance. Elles sont destinées à couvrir le règlement des engagements futurs de l'assureur. Celles-ci sont imposées par la réglementation et doivent être suffisantes à tout moment.

A ce titre, le Code des Assurances stipule clairement les modalités afférentes au calcul de ces réserves techniques qui vont toutes dans le sens de la prudence.

II.1.1. Les provisions mathématiques

La provision mathématique représente la majeure partie des provisions techniques constituées pour couvrir les prestations prévues par le contrat d'assurance. Elle est définie comme étant la différence entre la valeur actuelle probable (VAP) des engagements pris respectivement par l'assureur et l'assuré. Le taux d'intérêt technique ainsi que les tables de mortalité intervenant dans le calcul de cette VAP sont aussi soumis à la réglementation marocaine.

Les tables de mortalité réglementaires retenues pour l'établissement des tarifs sont :

- la table TV 88-90 pour les engagements en cas de vie ;
- la table TD 88-90 pour les engagements en cas de décès ;
- le taux d'intérêt technique retenu pour l'établissement des tarifs est égal au minimum entre 3,5% et 70% du TME (taux moyen des emprunts d'Etat calculé sur les 6 derniers mois).

II.1.2. Les provisions pour participation aux bénéfices

Il s'agit du montant des bénéfices financiers et techniques que l'assureur doit distribuer à ses assurés. Les sommes portées à cette provision sont affectées à la provision mathématique ou inscrites dans des comptes individuels ou versées aux souscripteurs, au cours des trois exercices suivant celui au titre duquel elles ont été portées à la provision pour participation aux bénéfices.

II.1.3. Les provisions pour aléas financiers

Cette provision est constituée dans le but de constater l'insuffisance future du rendement des placements au regard des engagements de l'assureur.

Lorsqu'à l'inventaire le taux de rendement réel diminué de 10% est inférieur au taux minimum garanti, la société doit constituer une provision pour aléas financiers.

Cette provision est égale à la différence entre les provisions mathématiques calculées avec le taux de rendement réel et les provisions mathématiques inscrites au bilan :

- Le taux minimum garanti moyen est égal au rapport entre le montant total des intérêts techniques et le montant moyen (pour les deux derniers exercices) des provisions mathématiques constituées brutes de réassurance.
- Le taux de rendement réel des actifs désigne le rapport entre le produit net des placements figurant dans le compte technique de l'assurance vie et le montant moyen des placements réalisés.

II.1.4. Les réserves de capitalisation

Cette provision possède un statut hybride car c'est aussi un élément des fonds propres. Il s'agit en fait d'une provision technique destinée à parer à la dépréciation et la diminution du revenu des obligations.

Si lors de la vente ou remboursement des obligations, celles-ci ont un prix supérieur à leur valeur nette comptable (VNC), une provision de capitalisation est constituée et correspond à la différence entre le prix et la VNC des obligations. Cette provision est plafonnée à 15% de la VNC des obligations.

II.1.5. Les provisions pour risque d'exigibilité

La réglementation prévoit qu'une provision pour risque d'exigibilité doit être constituée lorsqu'une moins value latente est constatée sur les placements, en particulier les actions et l'immobilier. Celle-ci est calculée par nature de placement et est égale à la différence constatée entre la valeur globale des placements en actions et immobiliers évaluée dans le bilan et selon le marché.

II.2. Fonds propres ou marge de solvabilité

Pour protéger les intérêts des assurés, les sociétés d'assurance doivent également disposer, au-delà de leurs provisions techniques, d'un montant de ressources supplémentaires, pouvant servir de « matelas » en cas de sinistres ou de frais imprévus. Ce « matelas » est appelé marge de solvabilité, et le « matelas » minimal dont doit disposer une entreprise d'assurance est appelé exigence de marge de solvabilité.

II.2.1. Calcul de l'exigence de marge de solvabilité

L'exigence minimale de la marge de solvabilité des sociétés d'assurance vie est calculée par rapport aux provisions mathématiques brutes de réassurance et aux capitaux sous risque. Celle-ci est égale à la somme des deux résultats suivants :

- 5% des provisions mathématiques brutes de réassurance affectées d'un coefficient de réduction qui permet de tenir compte des effets de la réassurance. Ce coefficient est égal au rapport (pour le dernier exercice) entre le montant des provisions mathématiques net de réassurance et le montant des provisions mathématiques brut de réassurance et ne peut être inférieur à 85%.
- 0,3% des capitaux sous risque (définis comme la différence entre le capital garanti en cas de décès et les provisions mathématiques brutes de réassurance) affectés aussi d'un coefficient de réduction. Dans ce cas, ce coefficient est égal au rapport entre le montant des capitaux sous risque net de réassurance et celui des capitaux sous risque brut de réassurance et ne peut être inférieur à 50%.

Ainsi, nous avons :

$$MR = 5\% * PM * \max(85\%, \text{taux de réduction des PM}) + 0,3\% * \text{Capitaux sous risque} * \max(50\%, \text{taux de rétention des CSR})$$

II.2.2. Remarques

- Le taux 0,3% appliqué aux capitaux sous risque dépend de la durée des engagements des temporaires décès. En effet celui-là est fixé à 0,1% pour les temporaires décès d'une durée maximale de 3 ans et à 0,15% entre 3 ans mais et 5 ans.
- Pour les contrats à capital variable ou contrats souscrit en unités de compte (UC) le pourcentage à appliquer aux provisions mathématiques, est de 4% lorsque l'entreprise assume le risque de placement et de 1% lorsque ce risque est transféré à l'assuré. Dans ce cas, la marge de solvabilité réglementaire est calculée de la manière suivante :

$$MR = 4\% * PM(\text{hors UC}) * \max(85\%, \text{taux de réduction des PM}) + 1\% PM(\text{UC}) + 0,3\% * \text{Capitaux sous risque} * \max(50\%, \text{taux de rétention des CSR})$$

II.3. Les placements

En représentation de leurs provisions techniques, les compagnies d'assurance sont tenues d'avoir un montant suffisant d'actifs dits de « bonne qualité ».

En effet, les sociétés d'assurance ne doivent investir que dans des placements où les risques sont identifiés, mesurés et suivis. Elles ne doivent pas perdre de l'esprit les trois règles encadrant un placement à savoir la rentabilité, la sécurité et la liquidité.

La réglementation marocaine fixe, à ce titre, les différentes catégories d'actifs autorisés ainsi que les dispositions relatives à leur répartition et dispersion.

II.3.1. Liste des actifs autorisés

Les principaux groupes d'actifs dans lesquels les compagnies d'assurance sont autorisées à placer leurs provisions techniques sont :

- les placements immobiliers ;
- les obligations, bons et titres de créances négociables ;
- les actions et parts sociales ;
- les prêts et effets assimilés ;
- les dépôts en compte indisponibles ;
- les placements affectés aux contrats en unité de compte.

II.3.2. Règles de répartition des placements : limitations par catégorie d'actif

Les règles de répartition définies par le Code des Assurances sont les suivantes :

- L'ensemble des actifs immobiliers ne doit pas représenter plus de 30% de la base de dispersion.
- L'ensemble des actions et parts des fonds communs de placement à risque ne doivent pas dépasser 70% de la base de dispersion.
- L'ensemble des prêts et certificats de dépôts est plafonné à 15% de la base de dispersion.
- Les obligations d'Etat ainsi que les OPCVM obligataires sont sans limitation avec un minimum de 30% du portefeuille de la compagnie.

II.3.3. Règles de congruence

Les dépôts et les investissements hors du Maroc ainsi que les placements en valeurs étrangères ne peuvent être effectués par les compagnies d'assurance et de réassurance que dans la limite de **5%** du total de leur actif.

III. Recensement des risques

Pour honorer ses engagements en toutes circonstances, la société d'assurance doit être en mesure de se prémunir contre les risques suivants :

III.1. Les risques financiers

Les risques financiers résultent principalement de la volatilité des valeurs du marché et des instruments financiers notamment la variabilité de certaines variables financières telles le cours des actions, les taux d'intérêt, les spreads... Ces risques peuvent donc créer une inadéquation entre la valeur des actifs et celle des passifs.

Notons que les définitions citées dans cette section sont issues de l'ouvrage « Gestion actif passif en assurance vie, réglementation, outils, méthodes » par F. Le Vallois, P. Palsky, B. Paris et A. Tosetti.

III.1.1. Le risque de taux

Le risque de taux est un risque lié aux variations des taux d'intérêt sur le marché obligataire. Ce genre de risque intéresse plus particulièrement les compagnies d'assurance vie puisqu'elles investissent principalement en titres à revenus fixes.

Afin de préciser les effets liés au risque de taux, il convient de discerner le risque de réinvestissement et le risque de liquidation :

1) Le risque de réinvestissement

« Le risque de réinvestissement est le risque que le taux de rendement auquel se feront les investissements futurs soit inférieur aux taux garantis au titre des contrats d'assurance. »

Le risque de réinvestissement apparaît lorsque la durée de vie des actifs (obligations) est inférieure à celle des engagements. En effet, lors d'une baisse des taux d'intérêt, les assurés seront tentés de prolonger la durée de leur contrat. Si en plus les obligations que détient l'assureur arrivent à maturité, il sera obligé de réinvestir dans des conditions de taux défavorables. Une des conséquences possible est que l'assureur ne puisse plus honorer une partie de ses engagements.

2) Le risque de liquidation

« Le risque de liquidation est le risque d'avoir à céder des obligations avant leur remboursement, alors que ces obligations sont en moins-value par rapport à leur prix d'achat. »

Le risque de liquidation résulte d'un actif trop long par rapport au passif. En effet, lors d'une hausse des taux d'intérêt, les assurés risquent de racheter leur contrat s'ils réalisent que le taux servi par la compagnie est trop faible par rapport à celui du marché. Dans ce cas, la

société peut être amenée à liquider des titres avant leur échéance et dont le cours a baissé à cause de la hausse des taux.

III.1.2. Le risque de liquidité

Une compagnie d'assurance doit disposer à tout moment de liquidités suffisantes pour pouvoir honorer ses engagements (termes, décès, rachat partiel ou total...).

Le risque de liquidité apparaît, donc, lorsque l'assureur n'a pas suffisamment de cash au moment où il doit rembourser ses assurés. Ce risque découle de l'inadéquation entre la liquidité de l'actif et l'exigibilité du passif et peut être cerné en ayant recours au concept de duration actif passif.

III.1.3. Le risque de contrepartie

« Ce risque est lié à la solvabilité de l'émetteur de titres financiers, ainsi qu'à la perception de cette solvabilité par les marchés. »

En effet, si le marché décide de réduire la note de l'ensemble des émetteurs privés, nous risquons de voir l'écart entre les taux d'emprunts d'Etat et les taux des emprunts obligataires privés se creuser. Dans ce cas, il est question de risque de spread.

III.2. Les risques viagers

« Le risque viager est le risque lié à la durée de la vie humaine. Il existe dès lors que le contrat d'assurance prévoit une prestation d'un montant différent ou une date différente de versement de la prestation selon que l'assuré survit ou décède. »

Ce risque apparaît, donc, lorsqu'il y a écart entre l'évolution réelle du taux de mortalité de la population des assurés et celui de la table utilisée pour la tarification et le provisionnement. Il peut se décomposer en deux parties :

III.2.1. Le risque lié à la mortalité

Ce risque est commun aux contrats constitués de garanties sur le décès de l'assuré notamment les contrats de prévoyance. Dans ce cas la compagnie doit mesurer ses engagements en ayant recours à des tables de mortalité qui ne sous-estiment pas la probabilité de décès car sinon une augmentation de la mortalité peut entraîner une augmentation des provisions techniques.

III.2.2. Le risque lié à la longévité

Ce risque est typique aux rentes viagères dont les garanties de prestation sont liées à la survie des assurés. Dans ce cas une augmentation de la longévité provoquera une augmentation de la valeur actuelle des provisions techniques.

III.3. Les risques liés aux options cachées

« Les options cachées sont des garanties ou des droits variés conférés aux assurés par la réglementation ou par des clauses contractuelles et destinées à rendre les contrats d'assurance plus souples et plus attractifs. Ces options se caractérisent par l'absence d'un provisionnement distinct dans les comptes de l'assureur »

Le risque principal qui pèse sur l'assureur est celui lié à l'option de rachat. En effet, en cas d'augmentation des taux, le rendement servi aux assurés devient faible par rapport à celui offert sur le marché ce qui pousse les assurés à récupérer à tout moment leur épargne. De façon à payer ces rachats, l'assureur va alors être obligé de vendre des obligations qui, compte tenu de la hausse des taux, risquent de se traduire par la réalisation de moins-values obligataires.

IV. La gestion actif-passif dans une compagnie d'assurance vie

IV.1. Pourquoi la gestion actif-passif ?

Depuis longtemps, les compagnies d'assurance vie géraient des produits à très long terme garantissant une protection en cas de décès, de maladie et d'invalidité. L'assurance vie était donc principalement utilisée pour faire face au risque de mortalité. Aujourd'hui, avec l'essor des produits d'épargne, le profil des contrats d'assurance s'est beaucoup modifié et ressemble plus à des produits financiers. De plus l'accroissement de la volatilité des taux d'intérêt a poussé les assureurs à prendre conscience de nombreux type de risques, y compris ceux liés aux comportements des assurés, aux garanties offertes et aux rendements à long terme sur les placements. Cette situation a poussé les assureurs à faire appel à la gestion actif passif afin d'obtenir des outils de pilotage plus financiers qu'actuariels.

IV.2. Les modèles classiques de gestion actif-passif

Les modèles d'ALM sont généralement classés en trois catégories :

IV.2.1. Les modèles de première génération d'adossement par les flux : gaps de trésorerie et gestion en duration

Les outils de première génération se basent principalement sur la projection statique et la comparaison des flux de trésorerie générés par les actifs financiers d'une part et les engagements d'assurance d'autre part.

- Les flux de l'actif sont projetés sur la base d'un scénario économique « moyen » : un scénario pour la structure par terme de taux, un scénario du marché des actions et un scénario de l'immobilier.
- La projection des flux du passif se fait indépendamment de l'actif et repose sur les deux piliers : les caractéristiques des contrats d'assurance (taux servis, capitaux garantis, maturité...) et les comportements des assurés (rachat partiel ou total, décès...).

Ces modèles donnent des informations en termes d'impasses de trésorerie et permettent donc de mesurer les enjeux de l'adéquation actif-passif. Ils se basent aussi sur le calcul des valeurs actuelles de l'actif et du passif, leurs durations, sensibilité et convexités permettant ainsi la gestion du risque de taux.

Si ces outils sont intéressants et simples à mettre en œuvre, ils présentent toutefois certains inconvénients :

- Seuls les risques de taux sont étudiés.
- Les flux du passif sont rarement fixes et se prêtent mal aux calculs de duration.
- La projection des flux du passif indépendamment du marché est insuffisante pour les contrats de longues durées.

IV.2.2. Les modèles de deuxième génération : une approche de scénarios déterministes prenant en compte les interactions actif-passif

Il s'agit d'une généralisation des modèles de première génération. Ils consistent à construire, de manière arbitraire, des scénarios économiques déterministes ainsi que hypothèses sur l'évolution de la production et les comportements des individus (rachat et décès) et voir leur impact sur le bilan et le compte résultat.

Ces modèles sont très appréciés pour la richesse de leurs indicateurs financiers et comptables et pour leur interprétation facile.

IV.2.3. Les modèles de troisième génération avec une approche par scénarios stochastiques

Ces modèles sont venus éliminer le caractère arbitraire des scénarios déterministes, en examinant un nombre de scénarios selon une certaine probabilité. Ces derniers s'appuient sur un processus de diffusion de taux qui permet de simuler la courbe des taux dans le futur, et sur des modèles mathématiques qui génèrent les rendements des placements par classe d'actifs.

Chapitre 2

Générateur de scénarios économiques

Pour beaucoup de produits d'assurance tels que l'épargne et la retraite, il existe une forte interaction entre les éléments du passif et les fluctuations des produits financiers. Celle-ci est principalement due aux :

- options, comme le rachat, qui agissent directement sur les engagements du passif et qui conviennent d'être exercées par les assurés si les taux offerts par le marché sont plus intéressants que ceux servis par la compagnie d'assurance ;
- garanties financières, comme la participation aux bénéfices.

Il est donc judicieux de tenir compte de cette interaction actif-passif, ainsi que des risques qui y sont liés lors de l'évaluation des flux du passif. La construction d'un générateur de scénarios économiques s'avère être nécessaire puisqu'il remplit cette fonction, et cela contrairement au modèle déterministe.

En effet, le générateur de scénarios économiques permet de projeter sur le long terme un ensemble de composantes économiques et financières, et offre par conséquent aux assureurs un ensemble de scénarios de taux d'intérêt et de rendements d'actifs conformes aux tendances futures ainsi qu'aux réalisations passées.

En supposant que le portefeuille d'investissement de la compagnie d'assurance est composé uniquement d'actions et d'obligations, nous allons nous intéresser, dans ce qui suit, à la projection de la structure par terme des taux d'intérêt et des rendements des actions.

La modélisation de la courbe des taux va se faire par les modèles de Vasicek et de Cox, Ingersoll et Ross. Pour ce qui est de la modélisation des actions, nous allons tout d'abord essayer le modèle de Black and Scholes, puis le modèle de changement de régimes proposé par Hardy.

I. Modélisation de la structure par terme des taux

En assurance vie, la modélisation de la courbe des taux est essentielle car elle permet d'atteindre les deux objectifs suivants :

- Au passif, elle sert de facteur d'actualisation pour les engagements de l'assureur. Plus précisément, elle permet de donner une valeur de marché au passif de la compagnie en actualisant chacun de ses flux, selon leurs maturités, aux taux zéro-coupons de la courbe.
- À l'actif, elle est utilisée pour reproduire l'évolution des prix des produits de taux, notamment le portefeuille obligataire, et par conséquent elle permet de protéger l'assureur contre les risques liés aux variations défavorables des taux d'intérêt.

Dans le cadre de notre étude, nous allons tout d'abord étudier le modèle classique de Vasicek et le calibrer. Cependant, celui-ci a l'inconvénient de reproduire des taux négatifs avec une probabilité non nulle. Pour remédier à ce problème, nous allons finalement nous intéresser à un modèle mieux réputé et plus adéquat ; il s'agit du modèle de Cox, Ingersoll et Ross.

I.1. Le modèle de Vasicek

I.1.1. Présentation du modèle

Développé en 1977, le modèle de Vasicek, est l'un des premiers modèles permettant la construction de la structure par terme des taux d'intérêt. C'est un modèle à un seul facteur, car il décrit l'évolution des taux d'intérêt à partir d'une seule variable explicative ; le taux sans risque instantané.

Selon Vasicek, l'évolution du taux court « r_t » est modélisée suivant le processus aléatoire autorégressif d'Ornstein Uhlenbeck. Celui-ci prend en considération l'effet de retour à la moyenne constaté empiriquement sur les taux d'intérêt :

$$dr_t = a(b - r_t)dt + \sigma dB_t$$

Avec :

- r_t , le taux d'intérêt réel à court terme ;
- a , la vitesse de retour à la moyenne ;
- b , le taux moyen à long terme ;
- σ , la volatilité du processus ;
- B_t , un mouvement brownien standard.

Ce processus admet une solution explicite de la forme :

$$r_t = r_0 e^{-at} + b(1 - e^{-at}) + \sigma e^{-at} \int_0^t e^{-au} dB_u \text{ où } r_0 \text{ est le taux court initial.}$$

Avec une discrétisation exacte :

$$r_{t+1} = r_t e^{-a} + b(1 - e^{-a}) + \sigma \sqrt{\frac{1 - e^{-2a}}{2a}} \varepsilon_t$$

Afin d'utiliser ce modèle pour simuler les trajectoires des taux des instants futurs il faut estimer ses paramètres : a , b et σ .

Posons :

$$\alpha = b(1 - e^{-a}) ; \quad \beta = e^{-a} ; \quad \sigma_\varepsilon = \sigma \sqrt{\frac{1 - e^{-2a}}{2a}}$$

L'estimation des paramètres est réduite au calibrage d'un modèle autorégressif d'ordre 1 :

$$r_{t+1} = \alpha + \beta r_t + \sigma_\varepsilon \varepsilon_t$$

I.1.2. Calibrage du modèle

1) Description des données retenues

✓ *Évolution du taux moyen pondéré*

Pour calibrer notre modèle, nous avons pris comme taux court le taux moyen pondéré (TMP) du marché interbancaire, publié au jour le jour. Nous avons utilisé des données journalières allant du 1^{er} janvier 2006 au 31 décembre 2012, soit au total de 2557 observations, dont l'évolution dans le temps est représentée par la figure suivante.

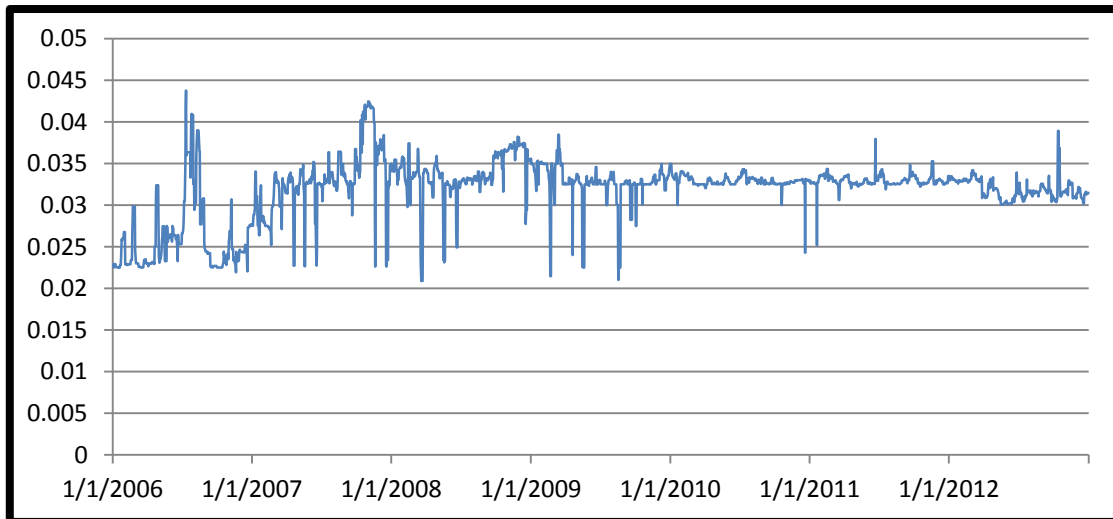


Figure 1 : L'évolution du TMP du 01/01/2006 au 21/03/2013

L'analyse de l'évolution au fil du temps du TMP indique qu'il a connu d'importantes fluctuations entre janvier 2006 et décembre 2009, sans pour autant révéler une tendance haussière ou baissière. Puis, à partir de janvier 2010 que les taux ont commencé à se stabiliser autour d'une valeur moyenne.

Afin de nous assurer si la série est stationnaire ou pas, nous allons procéder à un traitement plus scientifique. Celui-ci consiste à effectuer le test de racine unitaire.

✓ *Test de racine unitaire*

Les résultats exposés ci-dessous sont obtenus en soumettant la série des taux courts au test de racine unitaire (Unit Root Test) :

Null Hypothesis: TMP has a unit root		
Exogenous: Constant		
Lag Length: 1 (Fixed)		
	t-Statistic	Prob.*
Augmented Dickey-Fuller test statistic	-9.190291	0.0000
Test critical values:		
1% level	-3.432716	
5% level	-2.862471	
10% level	-2.567311	
*Mackinnon (1996) one-sided p-values.		

Figure 2 : Les résultats du Unit Root test pour vérifier la stationnarité de la série des TMP

Nous constatons que la statistique du test de Dickey-Fuller Augmenté est inférieure à sa valeur critique au seuil de 5% ($-9,31 < -2,86$), ce qui montre la stationnarité de la série.

✓ *Statistiques descriptives*

Afin d'avoir une vue globale sur les caractéristiques de la série des taux moyens pondérés, nous allons nous intéresser à ses statistiques descriptives. Celles-ci sont résumées dans la figure ci-dessous.

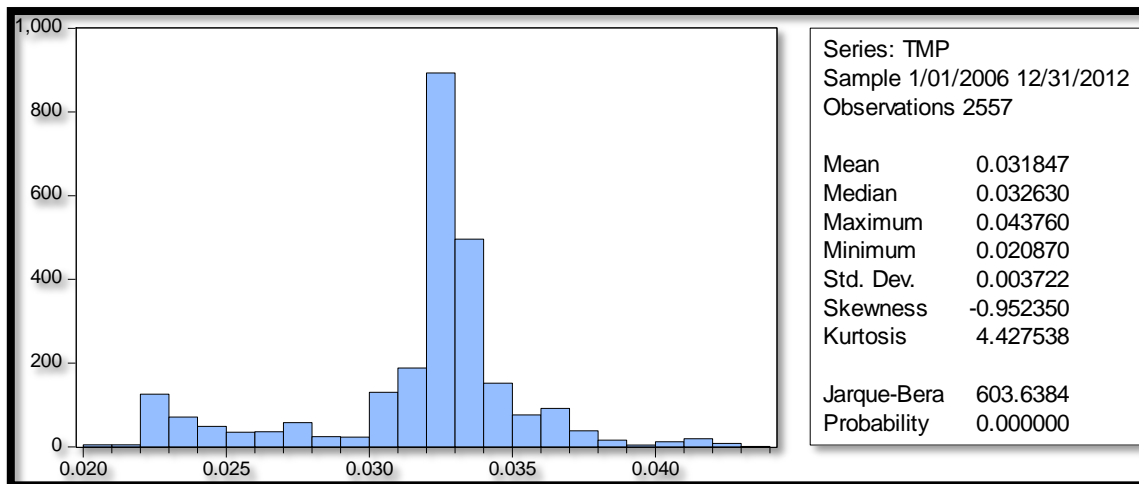


Figure 3 : Les statistiques descriptives de la série des TMP

Cette série est composée de 2557 observations journalières de taux fluctuant autour d'une valeur moyenne de 3,18%. Notons également que ces taux varient entre une valeur minimale de 2,09% et une valeur maximale de 4,38%.

Nous remarquons également que certaines de ces statistiques permettent de tirer des conclusions sur la normalité de la série :

- La distribution de la série est plus étroite que celle d'une loi normale, car la valeur du Kurtosis est de 4,42 (> 3).
- La distribution est allongée vers la gauche, car le coefficient d'asymétrie (Skewness) est négatif ($=-0,95$).
- La distribution des TMP n'est pas une distribution normale, à en juger par la statistique de Jarque-Bera.

2) Calibrage du modèle

Avant de nous intéresser à l'estimation des paramètres du processus des taux courts, nous allons d'abord vérifier que c'est bel et bien un processus autorégressif d'ordre 1. Pour cela, nous allons analyser les corrélogrammes simple et partiel de la série des taux moyens pondérés.

✓ *Corrélogrammes de la série*

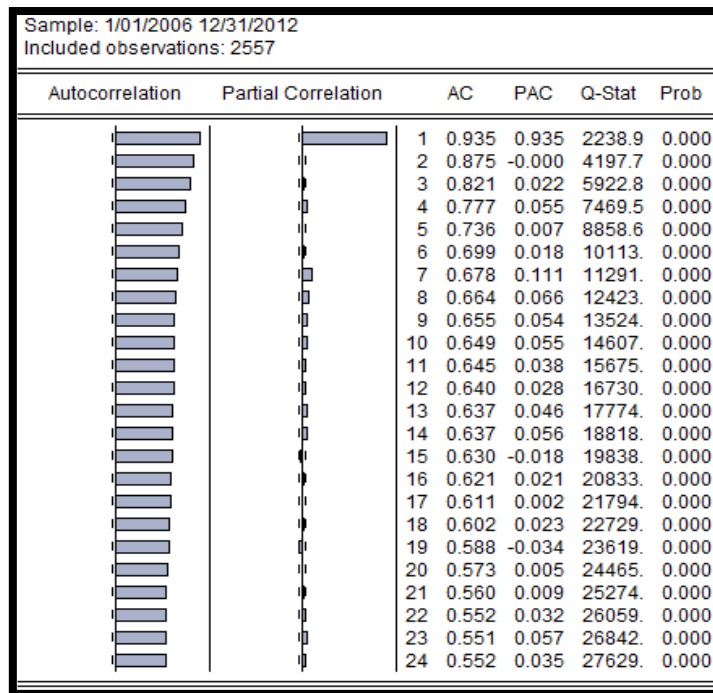


Figure 4 : Les corrélogrammes simple et partiel de la série des TMP

Soit PAC_i , le coefficient d'autocorrélation partiel d'ordre i .

Testons l'hypothèse nulle suivante : $H_0 : PAC_i = 0 \forall i = 1, \dots, 24$

Sachant que les PAC_i suivent une loi normale de moyenne nulle et d'écart type égal à $\sigma = \frac{1}{\sqrt{2557}} = 0,01977$, l'intervalle de confiance correspondant à ce test, pour un seuil de 5%, est :

$$IC_{95\%}(PAC_i) = \left[-1,96 \sqrt{\frac{1}{2557}}; +1,96 \sqrt{\frac{1}{2557}} \right] = [-0,0387; 0,0387]$$

En lisant, sur la figure 2, la valeur de la fonction d'autocorrélation partielle d'ordre 1 ($PAC_1 = 0,935$), nous remarquons qu'elle se situe en dehors des bornes de l'intervalle de confiance. Ce processus est donc effectivement autorégressif d'ordre 1.

Vient maintenant l'étape de l'estimation des paramètres du processus des taux courts.

✓ *Estimation des paramètres*

D'après la figure exposée ci-dessous, nous remarquons que les statistiques de Student associées aux coefficients du modèle sont largement supérieures à la valeur critique de ce test (1,96) au seuil de 5%. Ceci nous permet de dire que les deux paramètres α et β sont significatifs. Autrement dit, l'hypothèse de leur nullité est rejetée.

Sample (adjusted): 1/02/2006 12/31/2012 Included observations: 2556 after adjustments				
Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	0.002067	0.000223	9.291096	0.0000
TMP(-1)	0.935192	0.006940	134.7551	0.0000
R-squared	0.876695	Mean dependent var		0.031850
Adjusted R-squared	0.876647	S.D. dependent var		0.003718
S.E. of regression	0.001306	Akaike info criterion		-10.44299
Sum squared resid	0.004356	Schwarz criterion		-10.43841
Log likelihood	13348.14	Hannan-Quinn criter.		-10.44133
F-statistic	18158.94	Durbin-Watson stat		2.001375
Prob(F-statistic)	0.000000			

Figure 5 : L'estimation des paramètres du modèle

Nous obtenons les résultats suivants :

$$\alpha = 0,002 \text{ et } \beta = 0,935$$

Ces paramètres vont nous permettre de calculer les coefficients du modèle initial décrit par le processus d'Ornstein Uhlenbeck. Ainsi :

- la vitesse de retour à la moyenne est : $a = -\ln(\beta) = 0,067$;
- le taux moyen à long terme est : $b = \frac{\alpha}{1-\beta} = 0,0319$;
- l'écart type de l'erreur du modèle initial est égal à : $\sigma = \sigma_{\varepsilon} \sqrt{\frac{2a}{1-e^{-2a}}} = 0,135\%$.

✓ Tests d'adéquation du modèle

Afin de vérifier la pertinence d'un modèle quelconque, il est indispensable d'effectuer des tests portant sur la qualité des coefficients et sur celle des résidus.

Le tableau suivant résume les résultats des principaux tests vérifiant l'adéquation du modèle des taux courts.

Tableau 1 : Les résultats des tests d'adéquation pour le modèle des taux courts

Test	Résultats	Interprétation
Qualité d'ajustement du modèle	$R^2 = 87,66\%$	Environ 88% de la variation totale des taux courts est expliquée par le modèle
Fisher	$P - value \ll 0,05$	Le modèle est globalement significatif
Student (constante)	$t_{constante} = 9,29 > 1,96$ $P - value \ll 0,05$	La constante est significative

Student (variable)	$t_{constante} = 134,75 \gg 1,96$ $P - value \ll 0,05$	La variable est significative
Durbin Watson	$DW = 2,001375 \approx 2$	Absence d'autocorrélation des résidus
Jarque Bera	$P - value \ll 0,05$	La normalité n'est pas vérifiée

Nous remarquons que tous les tests sont vérifiés, mis à part le test de la normalité des résidus (Jarque Bera). Cependant, vu que l'échec de ce test n'est pas une condition pertinente pour rejeter le modèle, nous allons affirmer que le modèle choisi est adéquat.

I.1.3. Modélisation de la courbe de taux zéro-coupons

Maintenant que nous avons estimé les paramètres du modèle de Vasicek et que nous avons vérifié son adéquation, il est possible de déduire le modèle de la courbe des taux zéro-coupons à partir de la relation ci-dessous.

1) Taux zéro-coupons

Le rendement en t, d'une obligation zéro-coupon versant 1 en T est déterminé à partir du taux court par la relation suivante :

$$R(t, T) = R_{\infty} + \frac{1}{(T-t)a} (1 - \exp(-(T-t)a) (r_t - R_{\infty})) + \frac{\sigma^2}{4(T-t)a^3} (1 - \exp(-(T-t)a)^2)$$

Où $R_{\infty} = b - \frac{\lambda}{a} - \frac{\sigma^2}{4a^3}$ et λ est une constante.

Pour construire la courbe des taux zéro-coupons de Vasicek, il reste un seul paramètre à estimer : la constante λ .

2) Estimation de la prime de risque

L'objectif de ce paragraphe est d'estimer la prime de risque de marché. Celle-ci correspond à une compensation que doit acquérir un investisseur relative au risque encouru en détenant une certaine obligation. Malheureusement, ce prix du risque n'est pas directement observé sur le marché.

Ce paramètre va être déterminé à partir de la courbe de taux zéro-coupons fournie par Bank Al-Maghrib à la date d'évaluation.

Nous allons d'abord déterminer les taux zéro-coupons de Vasicek dans un univers risque neutre (prime de risque nulle), puis nous allons chercher le λ qui permet de reproduire, le plus fidèlement possible, les taux zéro-coupons observés sur le marché, c'est-à-dire celui qui minimise l'écart quadratique entre les taux théoriques et les taux du marché.

- ✓ Comparaison de la courbe de marché (31/12/2012) et celle obtenue par le modèle de Vasicek dans un univers risque neutre ($\lambda = 0$)

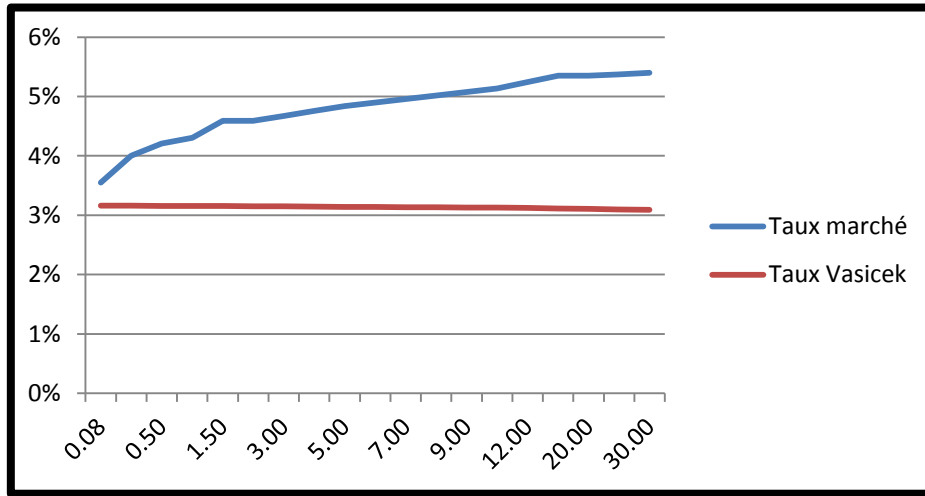


Figure 6 : La représentation des courbes de taux du marché et de Vasicek (dans un univers risque neutre)

Nous voyons clairement que, plus la maturité augmente, et plus la courbe de Vasicek s'éloigne de celle du marché. Nous remarquons aussi que la courbe théorique est plate, ce qui est anormal. La principale cause est le choix d'une prime de risque nulle pour le calcul des taux zéro-coupons théoriques. D'où la nécessité d'estimer la prime de risque de marché.

- ✓ Estimation de la prime de risque de marché au 31/12/2012

À l'aide de l'outil « Solver » d'Excel, nous obtenons la prime de risque qui minimise l'écart quadratique entre les taux zéro-coupons du marché et les taux zéro-coupons théoriques.

En intégrant cette prime de risque dans notre modèle, nous obtenons un écart plus réduit entre la courbe des taux et la courbe de marché, comme laisse apparaître la figure suivante.

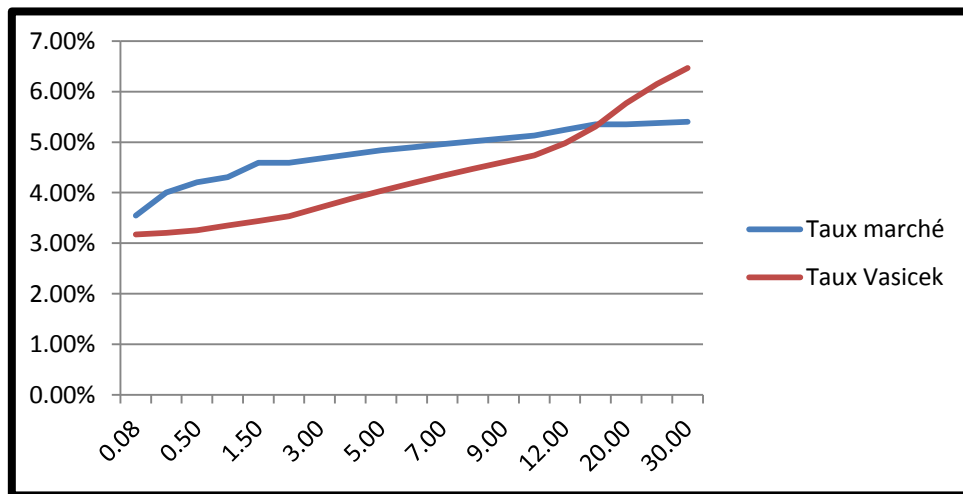


Figure 7 : La représentation des courbes de taux du marché et de Vasicek avec la prime de risque

I.1.4. Limites du modèle de Vasicek

Le modèle de Vasicek présente deux inconvénients majeurs :

- Les coefficients des paramètres du processus d'Ornstein Uhlenbeck sont supposés constants dans le temps.
- Le modèle est amené à produire des taux négatifs, avec une probabilité non nulle.

Pour remédier à ce second point, nous allons essayer un autre modèle qui introduit un processus racine carrée interdisant ainsi l'apparition de taux négatifs. Celui-ci n'est autre que le modèle de Cox, Ingersoll et Ross.

I.2. Le modèle de Cox, Ingersoll et Ross

Développé en 1985, le modèle de Cox, Ingersoll et Ross (CIR) permet de modéliser la structure par terme des taux d'intérêt.

Tout en conservant le principe de retour à la moyenne, ce modèle introduit un processus racine carrée qui ne permet pas l'apparition de taux négatifs. Il possède l'avantage d'être simple à mettre en œuvre et il fournit des formules explicites des prix des zéro-coupons et des obligations. C'est ce qui fait de lui un modèle mieux réputé que le modèle de Vasicek.

Les hypothèses suivantes sur lesquelles reposent le modèle de Cox, Ingersoll et Ross sont les suivantes :

- Les coûts de transaction sont inexistantes.
- Les titres sont parfaitement divisibles.
- Les agents sont rationnels et disposent du même niveau d'information.
- Les marchés sont efficients, ce qui implique l'absence d'opportunité d'arbitrage.
- Les taux d'emprunts et les taux de prêts sont égaux.

I.2.1. Présentation du modèle

Selon Cox, Ingersoll et Ross, l'évolution du taux d'intérêt instantané « r_t » est modélisée par l'équation différentielle stochastique suivante :

$$dr_t = a(b - r_t)dt + \sigma\sqrt{r_t}dB_t$$

Où :

- r_t est le taux court à la date t , tel que $r(0) = r_0$ à $t = 0$;
- a est la vitesse de retour à la moyenne ;
- b est le taux moyen à long terme ;
- σ est la volatilité, telle que $\sigma\sqrt{r_t}$ correspond à l'écart type instantané du taux d'intérêt ;
- B_t est un mouvement brownien standard.

À l'aide de ce modèle, la simulation des taux instantanés va nous permettre de définir une courbe des taux CIR, à partir de laquelle nous allons estimer la valeur de marché des obligations.

Cependant, deux étapes sont indispensables avant de débiter les simulations, comme cela a été le cas pour le modèle de Vasicek. Celles-ci sont la discrétisation du modèle et l'estimation de ses paramètres.

I.2.2. Discrétisation du modèle

Au niveau de l'implémentation de ce processus, la discrétisation pose problème car celui-ci n'admet pas de solution exacte à court terme. Il faut donc faire appel à des techniques de discrétisation approximative.

À ce titre, nous optons pour l'utilisation du schéma explicite d'Euler. Celui-ci propose l'approximation de premier ordre suivante :

$$r_{t+\Delta t} = r_t + a(b - r_t)\Delta t + \sigma\sqrt{r_t\Delta t}\varepsilon_t$$

Avec :

- Δt : le pas utilisé pour la modélisation ;
- ε_t : la réalisation d'une loi normale centrée réduite.

À partir de là, il suffit de générer une loi normale centrée réduite et ensuite de procéder par récurrence pour obtenir les taux courts instantanés jusqu'au terme de notre horizon de projection. Il nous faut désormais estimer les paramètres a , b et σ .

I.2.3. Calibrage du modèle

1) Estimation de la volatilité σ

L'estimation de la volatilité est obtenue à partir de l'écart type des observations mensualisées du taux moyen pondéré du marché interbancaire publié par Bank Al-Maghrib.

Dans le cadre de notre étude, les observations mensuelles du TMP prises en compte s'étalent de janvier 2006 à décembre 2012, soit un total de 84 valeurs dont l'écart type est le suivant :

$$\sigma = 0,316\%$$

2) Estimation des paramètres a et b

Pour des processus n'admettant pas de solution exacte, il est déconseillé d'estimer leurs paramètres via la méthode du maximum de vraisemblance, car cela peut conduire à des résultats biaisés. Il va donc falloir faire appel à une méthode plus adéquate pour ce genre de situation.

Ainsi, nous allons reformuler l'équation de discrétisation d'Euler sous forme de régression linéaire, pour ensuite estimer les paramètres du processus CIR en ayant recours à la méthode des moindres carrés ordinaires :

$$Y_t = \frac{r_{t+1} - r_t}{\sqrt{r_t}} = \frac{ab}{\sqrt{r_t}} - a\sqrt{r_t} + \sigma\varepsilon_t$$

Les paramètres initiaux (a, b) sont obtenus en minimisant la fonction suivante :

$$\sum_i \left(\frac{r_{ti+1} - r_{ti}}{\sqrt{r_{ti}}} - \frac{ab}{\sqrt{r_{ti}}} + a\sqrt{r_{ti}} \right)^2$$

Nous obtenons alors les résultats suivants :

$$\begin{cases} a = 0,2282 \\ b = 0,0306 \end{cases}$$

Les paramètres du modèle de CIR étant estimés, nous pouvons désormais utiliser la discrétisation d'Euler pour représenter l'évolution des taux courts sur les prochaines années. Rappelons que pour un pas de discrétisation d'une année, nous avons :

$$r_{t+1} = r_t + a(b - r_t) + \sigma\sqrt{r_t}\varepsilon_t$$

Pour chaque année projetée, nous avons effectué, sous Excel, 1000 simulations du taux court à partir du paramétrage suivant :

- $t_0 = 31/12/2012$;
- $r_0 = 0,0313$;
- ε_t est la réalisation d'une loi normale centrée réduite obtenue à l'aide du générateur pseudo aléatoire « Rand () » d'Excel et l'inverse de la loi normale.

Nous obtenons la représentation graphique ci-après où nous n'avons gardé que 50 simulations des taux courts pour une meilleure lisibilité.

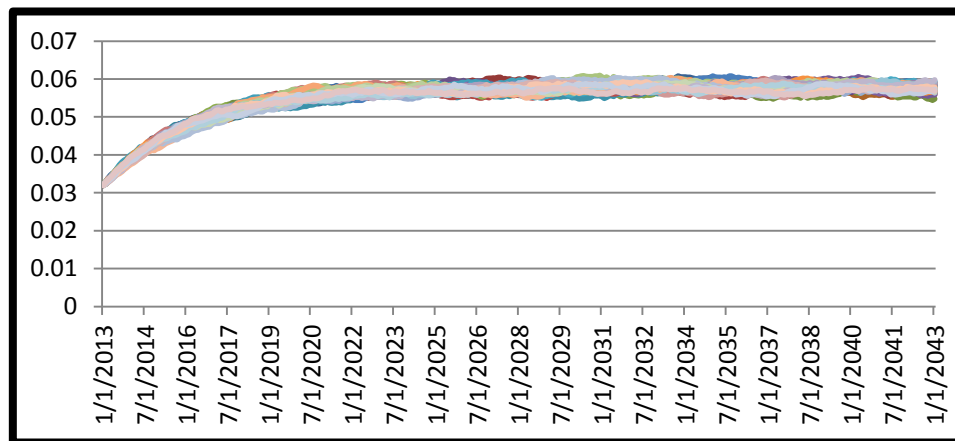


Figure 8 : 50 simulations des taux courts du modèle de CIR

I.2.4. Simulation de la courbe des taux zéro-coupons

Après avoir représenté la courbe des taux courts selon le modèle de Cox, Ingersoll et Ross, nous pouvons désormais en déduire la courbe des taux zéro-coupons.

1) Prix des zéro-coupons

Le prix à la date t d'une obligation zéro-coupon de maturité T est donné par la relation suivante :

$$P(t, T) = A(t, T) \exp(-B(t, T)r_t)$$

Avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} A(t, T) = \left(\frac{2\gamma e^{\frac{(\gamma+a+\lambda)(T-t)}{2}}}{(\gamma+a+\lambda)(e^{\gamma(T-t)} - 1) + 2\gamma} \right)^{\frac{2ab}{\sigma^2}} \\ B(t, T) = \frac{2(e^{\gamma(T-t)} - 1)}{(\gamma+a+\lambda)(e^{\gamma(T-t)} - 1) + 2\gamma} \\ \gamma = \sqrt{(a+\lambda)^2 + 2\sigma^2} \end{array} \right.$$

2) Taux zéro-coupons

Les taux zéro-coupons sont obtenus à partir des prix des obligations zéro-coupons en appliquant la formule suivante :

$$R(t, T) = -\frac{\ln(P(t, T))}{T - t}$$

3) Estimation des paramètres optimaux

Nous cherchons les paramètres qui ajustent au mieux les taux théoriques aux taux du marché. En d'autres termes, nous voulons minimiser l'écart quadratique entre les taux théoriques obtenus à l'aide du modèle CIR et les taux observés sur le marché.

Nous obtenons :

$$\left\{ \begin{array}{l} a = 0,3048 \\ b = 0,0579 \\ \lambda = -0,0027 \end{array} \right.$$

La courbe de taux de CIR est représentée sur le graphique suivant :

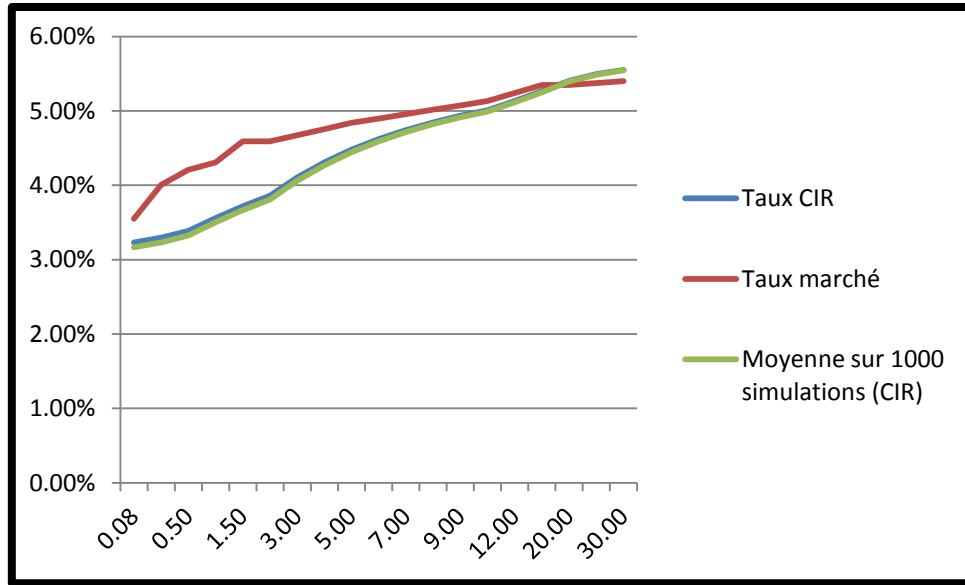


Figure 9 : La structure par terme des taux du modèle de CIR et des taux du marché

Cette courbe de taux va être utilisée par la suite pour :

- actualiser les flux du passif et calculer le « *best estimate* », et cela à chaque maturité ;
- déterminer le prix des obligations détenues par la compagnie ;
- servir de taux de référence des assurés pour estimer l'évolution des taux de rachat conjoncturels.

I.2.5. Prix des obligations

Le prix $O(T)$ d'une obligation sans risque de défaut, de valeur nominale égale à N , de maturité T et de taux de coupon c , est calculé selon la formule suivante :

$$O(T) = N \times (P(0, T) + c \sum_{i=1}^T P(0, i))$$

Où $P(t, T)$ représente le prix à la date t d'une obligation zéro-coupon de maturité T .

II. Modélisation du cours des actions

Bien que les titres obligataires occupent une place prédominante dans le portefeuille d'investissement des compagnies d'assurance vie, une part non négligeable est aussi allouée aux actifs risqués. Ainsi, dans le cadre d'une démarche de gestion actif-passif, les assureurs doivent être en mesure de modéliser de manière stochastique le cours des actions pour se protéger contre les risques liés à leur dépréciation.

Aujourd'hui, le modèle de Black and Scholes est devenu un modèle de référence pour étudier la dynamique des cours des actifs risqués. En effet, celui-ci est facile à comprendre et simple à réaliser puisqu'il suppose que la dynamique des cours des actions est décrite par un mouvement brownien géométrique.

Cependant, ce modèle possède plusieurs inconvénients car il est basé sur des hypothèses restrictives et qui sont souvent en désaccord avec les observations empiriques. Parmi ces hypothèses, nous avons :

- la continuité des trajectoires des prix des actions ;
- la constance de la volatilité utilisée ;
- la normalité de la distribution des rendements des actions.

Face à ces limites, les auteurs ont envisagé l'utilisation de modèles plus réalistes comme le modèle de changement de régime proposé par Hardy qui ne suppose pas le retour à la moyenne pour le rendement des actions mais qui prend en considération la non-normalité des distributions des processus à modéliser.

Dans ce contexte, nous allons tout d'abord définir une composante essentielle à toute modélisation stochastique : le mouvement brownien géométrique. Nous allons ensuite présenter le modèle de Black and Scholes, dont nous allons étaler les principales limites. Celles-ci vont alors nous inciter à opter pour l'utilisation du modèle de changement de régime.

II.1. Le modèle de Black and Scholes

II.1.1. Principes de bases

1) Le mouvement brownien

Un processus stochastique $(X_t, t \in T)$ est une suite de variables aléatoires indexées sur le temps t , à valeurs dans un ensemble défini. Une réalisation d'un processus stochastique est appelée trajectoire.

Dans les modèles stochastiques utilisés en finance, la partie aléatoire du processus de prix est souvent représentée par un mouvement brownien.

Soit (Ω, F, P) un espace probabilisé, et soit un processus $(B_t, t \in [0, \infty[)$ sur cet espace. Le processus $(B_t, t \in [0, \infty[)$ est dit mouvement brownien si :

- $B_0 = 0$ presque sûrement ($P(B_0 = 0) = 1$) ;
- B_t est accroissements stationnaires ;
- B_t est accroissements indépendants.

2) Le lemme d'Itô

Le lemme d'Itô est utilisé dans les processus stochastiques. Si X est la solution de l'équation différentielle stochastique (EDS) :

$$X(t) = X(0) + \int_0^t \mu(X(s), s) ds + \int_0^t \sigma(X(s), s) dB_s$$

Le processus d'Itô s'écrit :

$$dX(t) = \mu(X(t), t)dt + \sigma(X(t), t)dB_t$$

Avec B_t un mouvement brownien, μ le drift et σ la volatilité.

Si $f(t, x)$ est une fonction de classe $C^{1,2}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$, alors :

$$df(X(t), t) = \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \mu(X(t), t) \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2} \sigma(X(t), t)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right) dt + \sigma(X(t), t) \frac{\partial f}{\partial x} dB_t$$

II.1.2. Présentation du modèle

Dans le modèle de Black and Scholes, les cours des actions « S_t » évoluent selon un processus stochastique de mouvement brownien géométrique :

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dB_t$$

Avec :

- μ , la moyenne du rendement des actions, constante ;
- σ , l'écart type du rendement des actions, constant lui aussi ;
- S_t , le prix de l'action à l'instant $t > 0$ et prend la valeur S_0 en $t = 0$;
- B_t , un mouvement brownien standard.

En appliquant le lemme d'Itô à $Y_t = \ln(S_t)$ et la condition à l'origine $S(0) = S_0$ nous obtenons une solution explicite de l'équation différentielle stochastique :

$$S_t = S_0 \exp \left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma B_t \right)$$

De ces deux formules, nous déduisons la discrétisation exacte :

$$S_{t+1} = S_t \exp \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} + \sigma(B_{t+1} - B_t) \right)$$

Comme B_t est un mouvement brownien, l'accroissement $B_{t+1} - B_t$ suit une loi normale centrée réduite.

Ainsi le rendement du fond d'actions entre les deux dates successives t et $t + 1$, donnée par l'équation ci-dessous, suit une loi normale de moyenne $\mu - \frac{\sigma^2}{2}$ et de variance σ^2 .

$$r_t = \ln\left(\frac{S_t}{S_{t-1}}\right) = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) + \sigma(B_t - B_{t-1})$$

II.1.3. Application du modèle de Black and Scholes

1) Description des données retenues

Pour modéliser la dynamique des cours des actions nous avons choisi comme benchmark, l'indice MASI. La raison pour laquelle nous avons opéré ce choix est due, non seulement au fait qu'il présente l'évolution du marché marocain dans son ensemble et fournit une référence à long terme, mais aussi parce qu'il est réputé pour avoir connu de grandes variations.

Nous disposons d'observations quotidiennes (5 jours par semaine) des cours pour la période du 2 janvier 2006 au 29 mars 2013, soit un total de 1809 valeurs boursières dont l'évolution durant cette période est représentée par le graphique suivant. L'unité utilisée est le jour.

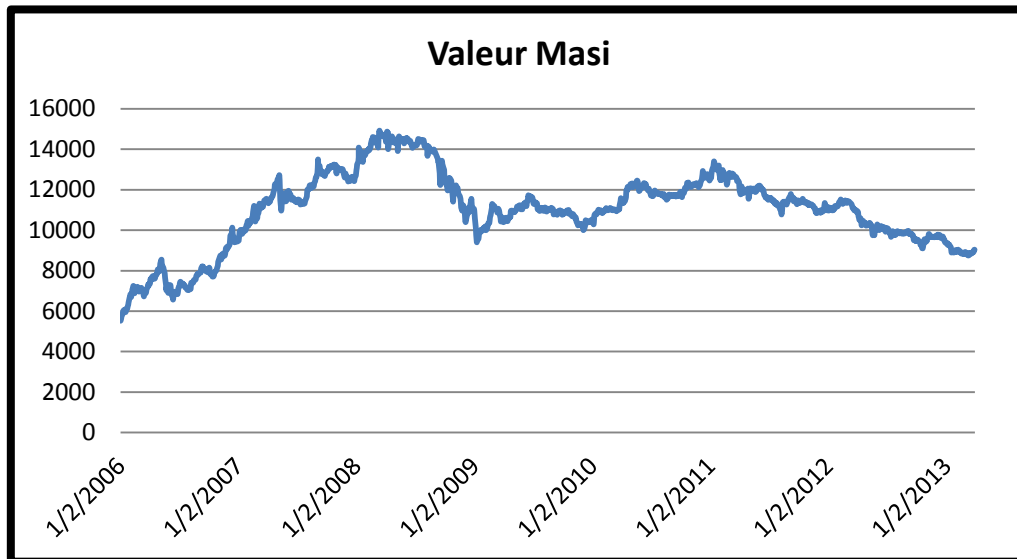


Figure 10 : L'évolution du cours du MASI entre janvier 2006 et mars 2013

Globalement, nous pouvons dire que malgré ses fortes variations à la hausse ou à la baisse, l'indice phare du marché casablancais a connu, durant cette période d'observation, quatre principales phases.

En effet, lors de sa première phase, le MASI a démarré l'année 2006 sur une forte hausse. Ce dernier a continué son trend haussier jusqu'à mi-mars 2008 où il a enregistré sa plus forte performance de 14926 points. Après cette date, l'indice a connu une rétraction

importante jusqu'à janvier 2009 avant d'emprunter une croissance sur un rythme plus ou moins lent pour atteindre les 13398 points au début de l'année 2011. La dernière phase s'est inscrite dans une tendance baissière s'étalant jusqu'au terme de notre horizon d'observation.

A partir de ces cotations, nous obtenons les rendements journaliers du MASI en appliquant la formule suivante :

$$Rendement(t)_{MASI} = Ln\left(\frac{Valeur(t)_{MASI}}{Valeur(t-1)_{MASI}}\right)$$

La série des rendements du MASI, représentée ci-dessous, semble stationnaire, sans tendance marquée à long terme, avec un rendement en moyenne compris entre -6% et 6%. Toutefois, il est nécessaire de vérifier cette impression de stationnarité par des tests adéquats permettant de détecter l'existence de racines unitaires. Pour cela, nous avons opté pour le « Unit Root Test ».

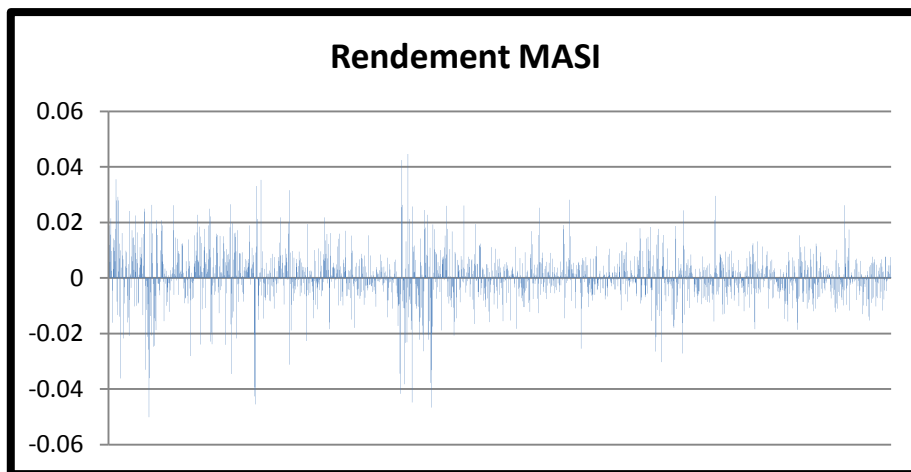


Figure 11 : L'évolution des rendements du MASI entre janvier 2006 et mars 2013

- ✓ Test de racine unitaire pour vérifier la stationnarité de la série des rendements

Null Hypothesis: REND_MASI has a unit root		
Exogenous: Constant		
Lag Length: 0 (Automatic - based on SIC, maxlag=24)		
	t-Statistic	Prob.*
Augmented Dickey-Fuller test statistic	-31.05186	0.0000
Test critical values:		
1% level	-3.433767	
5% level	-2.862936	
10% level	-2.567560	
*MacKinnon (1996) one-sided p-values.		

Figure 12 : Le test de racine unitaire pour vérifier la stationnarité de la série

Pour un seuil égal à 5%, nous avons une statistique de student de valeur absolue (31,05) largement supérieure à la valeur critique (2,86) relative au test de racine unitaire. Nous rejetons donc l'hypothèse nulle « La série des rendements possède une racine unitaire ». Il ressort donc de ce tableau que la série des rendements journaliers du MASI est bien stationnaire.

✓ *Test de normalité de Jarque Bera*

Le test de Jarque Bera ci-dessous nous laisse entrevoir que la série des rendements journaliers ne suit pas une loi normale. En effet, à un seuil critique de 5% la statistique de Jarque Bera est supérieure à sa valeur théorique et la p-value est inférieure à 0,05.

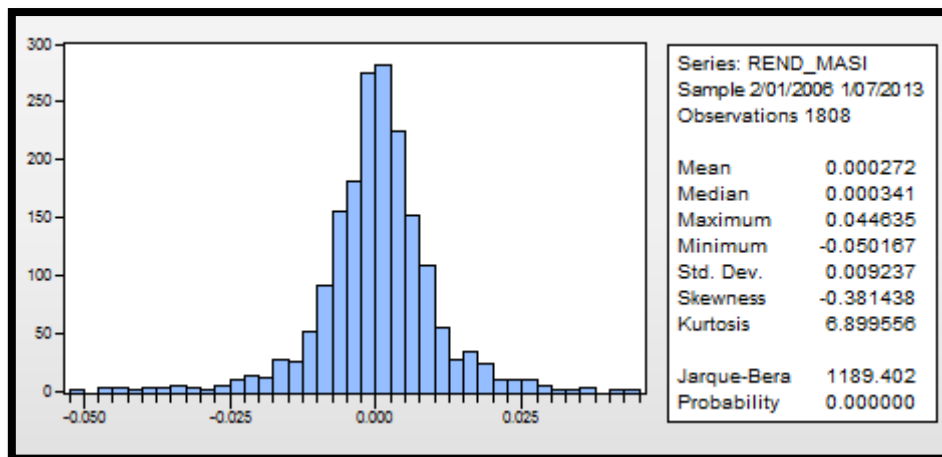


Figure 13 : Le test de Jarque Bera pour vérifier la normalité de la série

Au regard de la non normalité de la distribution des rendements journaliers, nous avons décidé de modéliser notre portefeuille d'actions à partir des données mensuelles des cours du MASI. Nous avons mensualisé nos données quotidiennes à l'aide du logiciel EViews. Nous disposons donc de 86 observations dont l'allure est représentée par le graphique suivant :

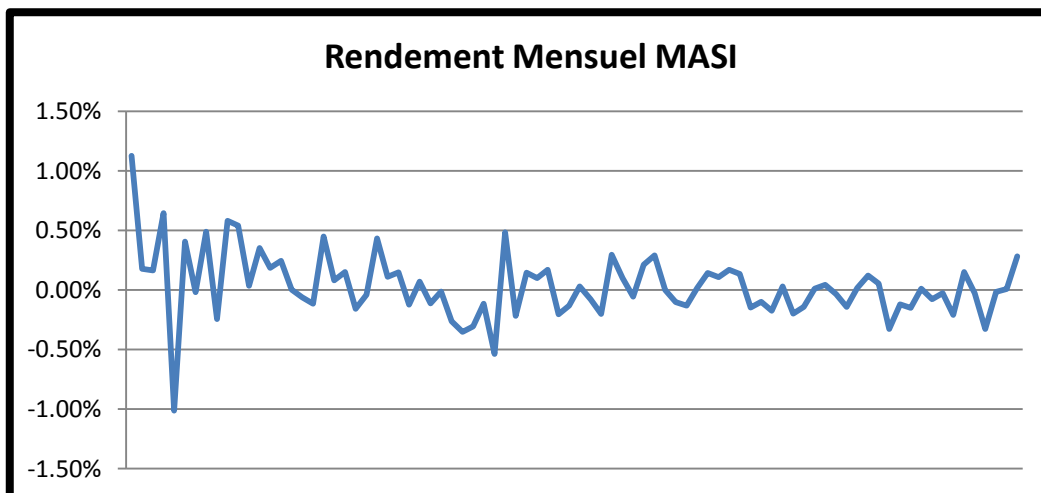


Figure 14 : L'évolution des rendements mensuels du MASI entre janvier 2006 et décembre 2012

2) Description et analyse des rendements mensuels de l'indice MASI

✓ *Statistiques descriptives*

Avant de tester la normalité de notre échantillon de données, faisant une brève analyse descriptive.

Le rendement moyen du MASI mensuel vaut 0,004514, pour un écart type de 0,044481 pour la période étudiée. Le coefficient d'asymétrie (Skewness) vaut 0,31 (à comparer à zéro pour une loi normale) et le coefficient d'aplatissement (Kurtosis) est de 4,01.

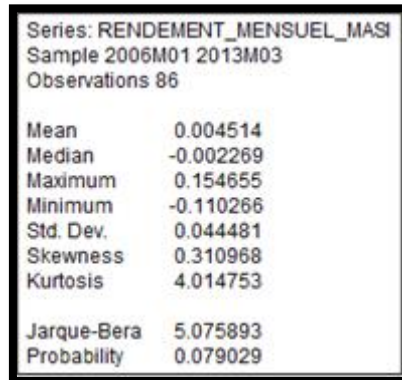


Figure 15 : L'analyse descriptive du rendement mensuel

Cette première analyse du rendement ainsi que la statistique de Jarque Bera nous laisse penser que notre échantillon suit une loi normale.

✓ *Tests d'adéquation à la loi normale*

Vérifions maintenant si les données retenues suivent réellement une loi normale. Pour ce faire nous devons résoudre le test d'hypothèses suivant :

- H_0 : « L'échantillon suit une loi normale ».
- H_1 : « L'échantillon ne suit pas une loi normale ».

Le logiciel XLSTAT propose quatre tests pour analyser la normalité d'un échantillon :

On rejette H_0 si la p-value associée à chaque test est inférieure à $\alpha = 0,05$, sinon nous conservons H_0 . Nous retrouvons ces p-value dans le tableau suivant :

Tableau 2 : Les tests de normalité

Test	Valeur observée	Valeur critique	P-value	Alpha
Shapiro Wilk / W	0,977	-	0,137	0,05
Anderson Darling / A ²	0,732	-	0,054	0,05
Lilliefors / D	0,108	1,006	0,014	0,05
Jarque-Bera / JB	5,076	5,991	0,079	0,05

Hormis le test de Lilliefors, l'ensemble de ces tests prouvent que la normalité de la distribution de notre échantillon est significative au seuil $\alpha = 0,05$.

Un autre moyen pour vérifier visuellement si notre échantillon suit vraiment une loi normale est de se référer au graphique Q-Q :

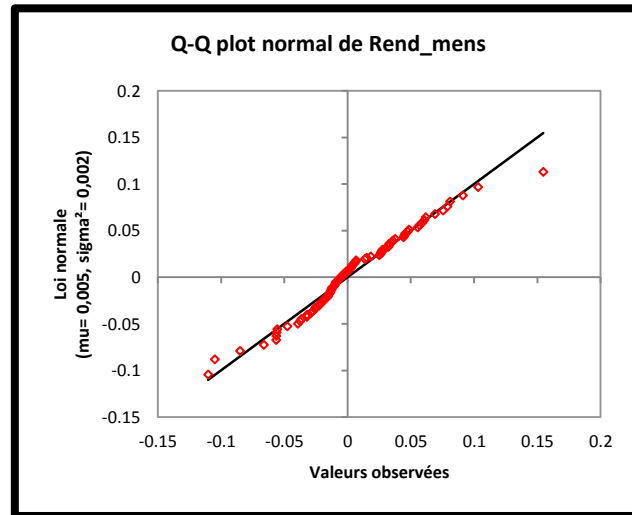


Figure 16 : Le graphique Q-Q pour tester la normalité des rendements mensuels

Nous remarquons que les points sont presque confondus avec la première bissectrice du plan donc visuellement la distribution des rendements est semblable à celle d'une loi normale.

Nous avons décidé de modéliser nos actions par les rendements mensuels car leur distribution est beaucoup plus proche à la loi normale que celle des rendements quotidiens.

3) Application du modèle de Black and Scholes

✓ Estimation des paramètres

À partir des observations retenues « rendement mensuel du MASI » pour calibrer le modèle des actions nous obtenons les estimateurs des paramètres théoriques :

- La moyenne historique des rendements mensuels : $\mu - \frac{\sigma^2}{2} = 0,004514$;
- L'écart type historique des rendements mensuels : $\sigma = 0,044481$.

✓ Simulation de la trajectoire du cours des actions

Le but de ce paragraphe est de simuler les trajectoires du cours de notre fonds d'actions sur une période de projection précise en utilisant la méthode de Monte-Carlo.

Etant donné que le processus représentant le cours des actions est continu, il est d'abord nécessaire de trouver une discrétisation exacte de celui-ci avant de lancer la simulation.

Ainsi, pour un mouvement brownien géométrique et en choisissant Δt comme pas de discrétisation, nous obtenons le schéma récursif exact suivant :

$$S_{t+\Delta t} = S_t \exp \left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) \Delta t + \sigma \varepsilon \sqrt{\Delta t} \right)$$

Où ε représente la réalisation d'une variable aléatoire gaussienne centrée réduite.

Notons que lorsque nous prenons en considération la corrélation entre les taux de rendement des actions et les taux courts, la relation ci-dessus devient telle que :

$$S_{t+\Delta t} = S_t \exp \left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) \Delta t + \sigma \rho \sqrt{\Delta t} B_1 + \sigma \sqrt{(1 - \rho^2) \Delta t} W_1 \right)$$

Avec W_1 et B_1 deux mouvements browniens indépendants, et ρ le coefficient de corrélation.

Nous effectuons 1000 simulations de trajectoires sous Excel, avec le paramétrage suivant :

- Projection sur 5 ans avec des données mensuelles.
- Nombre d'itérations : 60.
- Pas de discrétisation : $\Delta t = \frac{1}{12} = 0,0833333$.

Nous obtenons la représentation graphique suivante ($S(0) = 100$) (pour une meilleure lisibilité seulement 20 simulations ont été représentées).

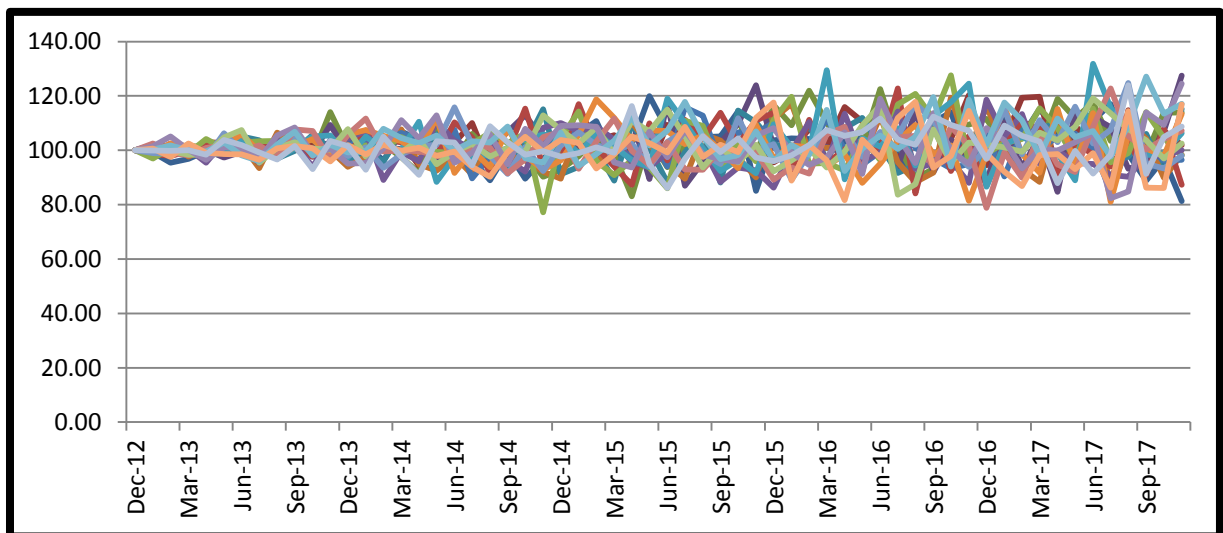


Figure 17 : La représentation de 20 trajectoires du cours des actions pour $S(0)=100$

4) Limites du modèle de Black and Scholes

Le modèle de Black and Scholes est basé sur des hypothèses très restrictives qui sont généralement en désaccord avec les observations empiriques. Parmi ces hypothèses, nous avons :

- la continuité des trajectoires des prix des actions ;

- la constance de la volatilité utilisée ;
- la normalité de la distribution des rendements des actions.

De nombreuses études empiriques ont montré que les rendements ont des queues de distribution plus épaisses que celle d'une loi normale. De plus, les données réelles ont prouvé que les prix des actions ne sont pas continus mais peuvent subir des sauts imprévisibles à cause d'événements exceptionnels. C'est pour cette raison qu'il faut envisager l'utilisation d'autres modèles.

II.2. Le modèle de changement de régime

II.2.1. Présentation

Face aux limites du modèle de Black and Scholes (hypothèse de normalité, volatilité constante, etc.), il nous a fallu recourir à une modélisation beaucoup plus performante. Parmi les nombreux substituts au modèle de Black and Scholes, nous avons opté pour l'utilisation du modèle de changement de régime (RSLN : Regime Switching Log Normal, cf. Hardy [2001]) pour la modélisation de notre fonds d'actions.

Celui-ci repose sur l'idée simple et intuitive que les rendements des actions peuvent évoluer dans le cadre de l'un des deux régimes suivants :

- Un régime à volatilité normale.
- Un régime à forte volatilité.

Aussi, le rendement des actifs au sein de chaque régime est supposé suivre un mouvement brownien géométrique.

II.2.2. Illustration

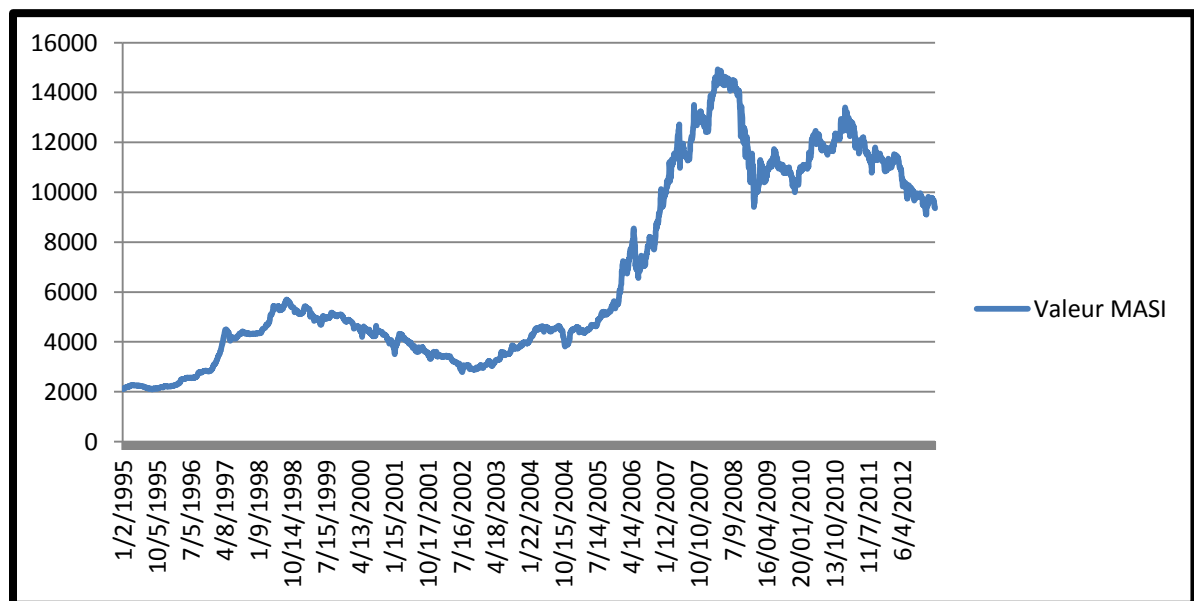


Figure 18 : L'évolution du cours du MASI

Comme nous pouvons le voir sur le graphique ci-dessus, l'indice MASI a connu entre début 1995 et fin 2012 plusieurs phases de croissances :

- Les phases de croissance élevée (marché haussier).
- Les phases de faible croissance (marché baissier).

Ainsi, pour remédier à ces alternances de cycles économiques, le modèle qui semble le plus adéquat est celui du changement de régime car il a la particularité de jongler entre deux processus log-normaux standards. Le modèle intègre aussi un mécanisme stochastique permettant la transition entre les deux processus.

II.2.3. Formulation théorique du modèle

1) Notations

Soient S_t le cours des actions à la date t et $Y_t = \log\left(\frac{S_{t+1}}{S_t}\right)$ le logarithme du rendement des actions pour la $t + 1^{ième}$ période. Dans le modèle à changement de régime, nous considérons :

- $Y_t \setminus \rho_t \sim N(\mu_{\rho_t}, \sigma_{\rho_t}^2)$ où ρ_t représente le régime appliqué à l'intervalle $[t, t + 1]$ (avec $\rho_t = 1$ ou 2).
- $p_{i,j} = \Pr[\rho_{t+1} = j \setminus \rho_t = i]$ représente la probabilité de changement de régime (avec $i = 1$ ou $2, j = 1$ ou 2).
- $\Theta = \{\mu_1, \mu_2, \sigma_1, \sigma_2, p_{1,2}, p_{2,1}\}$ représente les paramètres à estimer.

Notons que normalement ce modèle suppose l'existence de K régimes. Cependant, pour simplifier le modèle et estimer ses paramètres avec une meilleure précision, nous avons décidé de n'en garder que deux.

2) Implémentation du modèle avec la méthode du maximum de vraisemblance

Soit $Y_t = \log\left(\frac{S_{t+1}}{S_t}\right)$ le log rendement du mois $t + 1$. La vraisemblance des observations $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ est : (f la fonction de densité de y).

$$L(\Theta) = f(y_1/\Theta)f(y_2/\Theta, y_1)f(y_3/\Theta, y_1, y_2) \dots f(y_n/\Theta, y_1, y_2, \dots, y_{n-1})$$

Ainsi, la contribution, à la log-vraisemblance, de l'observation de la date t est : $\log(f(y_t/y_{t-1}, y_{t-2}, \dots, y_1, \Theta))$.

Nous pouvons calculer cette expression de façon récursive, en calculant pour une observation à la date t , l'équation (*) suivante :

$$f(\rho_t, \rho_{t-1}, y_t/y_{t-1}, y_{t-2}, \dots, y_1, \Theta) = p(\rho_{t-1}/y_{t-1}, y_{t-2}, \dots, y_1, \Theta)p(\rho_t/\rho_{t-1}, \Theta)f(y_t/\rho_t, \Theta) \quad (*)$$

Où :

- $p(\rho_t/\rho_{t-1}, \Theta)$ désigne la probabilité de transition entre les deux régimes
- $f(y_t/\rho_t, \Theta) = \phi\left(\frac{y_t - \mu_{\rho_t}}{\sigma_{\rho_t}}\right)$ avec ϕ la densité d'une loi normale standard
- $p(\rho_{t-1}/y_{t-1}, y_{t-2}, \dots, y_1, \Theta)$ est obtenue à partir de l'itération précédente. Elle est égale à :

$$p(\rho_{t-1}/y_{t-1}, y_{t-2}, \dots, y_1, \Theta) = \frac{f(\rho_{t-1}, \rho_{t-2} = 1, y_{t-1}/y_{t-2}, \dots, y_1, \Theta) + f(\rho_{t-1}, \rho_{t-2} = 2, y_{t-1}/y_{t-2}, \dots, y_1, \Theta)}{f(y_{t-1}/y_{t-2}, y_{t-3}, \dots, y_1, \Theta)}$$

Dans le cas d'un modèle RSLN à deux régimes ($\rho_t = 1$ ou 2), l'équation (*) peut avoir quatre valeurs en fonctions de celles prise par ρ_t et ρ_{t-1} , à savoir :

$$\begin{cases} f(\rho_t = 1, \rho_{t-1} = 1, y_t \setminus y_{t-1}, y_{t-2}, \dots, y_1, \Theta) \\ f(\rho_t = 1, \rho_{t-1} = 2, y_t \setminus y_{t-1}, y_{t-2}, \dots, y_1, \Theta) \\ f(\rho_t = 2, \rho_{t-1} = 1, y_t \setminus y_{t-1}, y_{t-2}, \dots, y_1, \Theta) \\ f(\rho_t = 2, \rho_{t-1} = 2, y_t \setminus y_{t-1}, y_{t-2}, \dots, y_1, \Theta) \end{cases}$$

$f(y_t \setminus y_{t-1}, y_{t-2}, \dots, y_1, \Theta)$ sera ainsi la somme de ces quatre densités conditionnelles d'état de la nature.

Pour commencer l'itération, nous avons besoin d'une valeur initiale pour $p(\rho_0)$. Cette dernière est déduite à partir de la distribution invariante de la chaîne de Markov. En effet, la distribution invariante $\pi = (\pi_1, \pi_2)$ est la distribution de la probabilité inconditionnelle du processus. Sous cette distribution π , chaque transition est affectée par la même distribution, c'est-à-dire $\pi P = \pi$, étant donné $\pi_1 p_{1,1} + \pi_2 p_{2,1} = \pi_1$ et $\pi_1 p_{1,2} + \pi_2 p_{2,2} = \pi_1$.

$$\text{Autrement dit } p_{1,1} + p_{1,2} = 1 \text{ et donc } \pi_1 = \frac{p_{2,1}}{p_{1,2} + p_{2,1}}, \pi_2 = 1 - \pi_1 = \frac{p_{1,2}}{p_{1,2} + p_{2,1}}$$

Ainsi, pour un ensemble de paramètres de départ Θ , nous pouvons commencer le calcul récursif comme suit :

$$\begin{cases} f(\rho_1 = 1, y_1 \setminus \Theta) = \pi_1 \phi\left(\frac{y_1 - \mu_1}{\sigma_1}\right) \\ f(\rho_2 = 2, y_1 \setminus \Theta) = \pi_2 \phi\left(\frac{y_1 - \mu_2}{\sigma_2}\right) \\ f(y_1 \setminus \Theta) = f(\rho_1 = 1, y_1 \setminus \Theta) + f(\rho_2 = 2, y_1 \setminus \Theta) \end{cases}$$

Et nous calculons deux valeurs relatives à l'expression suivante :

$$p(\rho_1 \setminus y_1, \Theta) = \frac{f(\rho_1, y_1 \setminus \Theta)}{f(y_1 \setminus \Theta)} \quad \rho_1 = 1, 2$$

Cette expression sera utilisée dans l'itération suivante lors du calcul de :

$$f(\rho_2, \rho_1, y_2 \setminus y_1, \Theta)$$

L'objectif sera donc la maximisation du log d la fonction de vraisemblance résultante.

II.2.4. Application

Pour le calibrage du modèle, nous avons utilisé des observations mensuelles de l'indice MASI couvrant la période 1995-2012.

Pour l'estimation de l'ensemble des paramètres $\Theta = \{\mu_1, \mu_2, \sigma_1, \sigma_2, p_{1,2}, p_{2,1}\}$, nous allons suivre la démarche suivante :

Tout d'abord, nous déterminons de manière arbitraire le régime suivi (ρ_t) par la première observation Y_1 . Pour les autres observations, nous procédons comme suit :

$$\text{Pour tout } t \geq 2 : \begin{cases} \rho_t = 1, \text{ si } Y_t < Y_{t-1} \\ \rho_t = 2, \text{ sinon} \end{cases}$$

Par ailleurs et pour l'ensemble des Y_t qui suivent le régime 1 nous calculons la moyenne μ_1 et la volatilité σ_1 de même pour ceux qui suivent le régime 2 nous estimons la moyenne μ_2 et la volatilité σ_2 .

Ensuite pour estimer les probabilités de transition nous avons défini la variable aléatoire $U_{t \geq 2}$ telle que :

$$U_t = \begin{cases} a \text{ si } \rho_{t-1} = 1 \text{ et } \rho_t = 1 \\ b \text{ si } \rho_{t-1} = 1 \text{ et } \rho_t = 2 \\ c \text{ si } \rho_{t-1} = 2 \text{ et } \rho_t = 1 \\ d \text{ si } \rho_{t-1} = 2 \text{ et } \rho_t = 2 \end{cases}$$

Soit :

A : le nombre d'observations telles que $U_t = a$

B : le nombre d'observations telles que $U_t = b$

C : le nombre d'observations telles que $U_t = c$

D : le nombre d'observations telles que $U_t = d$

Nous obtenons ainsi les probabilités de transition :

$$\begin{cases} p_{1,1} = \frac{A}{A+B} \\ p_{1,2} = \frac{B}{A+B} \\ p_{2,1} = \frac{C}{C+D} \\ p_{2,2} = \frac{D}{C+D} \end{cases}$$

D'où la matrice de transition markovienne : $M = \begin{pmatrix} p_{1,1} & p_{1,2} \\ p_{2,1} & p_{2,2} \end{pmatrix}$

Une fois que nous avons empiriquement estimé les paramètres de chaque régime ainsi que les probabilités de transition, à l'aide des observations mensuelles des rendements du MASI, il nous faudra mettre en œuvre une optimisation qui permettra d'estimer de manière robuste les paramètres du modèle. Pour ce faire, nous avons écrit, pour chaque observation, l'expression de sa densité de probabilité selon RSLN-2 pour aboutir à la log-vraisemblance qui sera optimisée par la suite.

Le tableau suivant recense les différents paramètres obtenus à partir du calibrage du modèle de changement de régime sur notre série de données.

Tableau 3 : L'estimation des paramètres du modèle RSLN pour les actions

Paramètre	Intitulé	Estimation
μ_1	Moyenne (régime 1, volatilité faible)	-1,53%
μ_2	Moyenne (régime 2, forte volatilité)	1,82%
σ_1	Ecart type (régime 1, volatilité faible)	2,49%
σ_2	Ecart type (régime 2, forte volatilité)	4,58%
$p_{1,2}$	Probabilité de transition du régime 1 à 2	6,41%
$p_{2,1}$	Probabilité de transition du régime 2 à 1	5,41%

II.2.5. Validation du modèle de changement de régime

Pour apprécier la qualité du modèle de changement de régime nous avons décidé de le comparer au modèle de Black and Scholes sur la base d'un certain nombre de critères de sélection.

Pour les modèles présentant le même nombre de paramètres à estimer il suffit de choisir celui avec la plus grande log-vraisemblance. Or, lorsque le nombre de paramètres diffère il faut faire appel à d'autres critères de sélection comme le test du rapport de vraisemblance (LRT), l'Akaike Information Criterion (AIC) et le Schwartz Bayes Criterion (SBC).

1) Présentation des critères de sélection

✓ *Le test du rapport de vraisemblance (LRT)*

Le test du rapport de vraisemblance a pour objectif de comparer en termes de qualité d'ajustement des données, deux modèles emboîtés $M_0 \subseteq M_1$:

Soit k_1 le nombre de paramètres à estimer dans le modèle M_1 .

Soit k_0 le nombre de paramètres à estimer dans le modèle M_0 .

Puisque $M_0 \subseteq M_1$ alors $k_0 < k_1$.

Soient l_1 et l_0 les log-vraisemblance des deux modèles M_1 et M_0 .

La statistique du test est : $2(l_1 - l_0)$

Nous cherchons à tester l'hypothèse nulle suivante :

H_0 : "Pas d'amélioration significative apportée par le modèle M_1 "

Sous l'hypothèse " H_0 ", nous avons " $2(l_1 - l_0) \sim \chi_{k_1 - k_0}^2$ "

Ainsi, pour un seuil $\alpha = 5\%$ si $2(l_1 - l_0) > \chi_{k_1 - k_0, \alpha}^2$ alors nous rejetons l'hypothèse H_0 , sinon nous l'acceptons.

Notons que lorsque les deux modèles à comparer ne sont pas emboîtés le test du rapport de vraisemblance est toujours valable mais la loi de la statistique $2(l_1 - l_0)$ n'est qu'approximative.

✓ *Akaike information criterion (AIC)*

L'Akaike information criterion retient le modèle qui maximise la statistique $l_i - k_i$, ou l_i désigne la log-vraisemblance du modèle M_i et k_i désigne le nombre de paramètres du même modèle. Selon ce critère, chaque nouveau paramètre doit contribuer à améliorer (augmenter) d'une unité la log-vraisemblance. Bien que son fondement soit purement heuristique, ce critère est très populaire pour sa simplicité.

✓ *Schwartz Bayes Criterion (SBC)*

Le critère de Schwartz-Bayes retient le modèle qui maximise $l_i - \frac{1}{2}k_i \log(n)$, où n désigne la taille de l'échantillon (i.e., de la série observée). Comme pour le critère d'Akaike, ce critère exige à ce que chaque paramètre supplémentaire contribue à l'amélioration de la log-vraisemblance. La différence avec l'AIC est que pour le SBC, l'amélioration de la log-vraisemblance doit croître avec la taille de l'échantillon.

2) Résultats

Le tableau suivant reprend les résultats obtenus pour les trois critères de sélection du modèle de changement de régime et du modèle de Black and Scholes.

Tableau 4 : Les résultats des critères de sélection du meilleur modèle

Modèle (M_i)	Paramètres (k_i)	Log-vraisemblance (l_i)	AIC	SBC
Black and Scholes (M_0)	2	261,0022	259,0022	255,9983
Regime Switching Log-Normal (M_1)	6	271,6776	265,6776	256,6658

Par ailleurs le test de rapport de vraisemblance entre les deux modèles présente au seuil de 5% les résultats suivants :

- $2(l_1 - l_0) = 21,3508 > \chi_{k_1 - k_0, \alpha}^2 = \chi_{4; 0,05}^2 = 9,48$
- $P - value = 0,027\% \ll 5\%$

L'hypothèse nulle est donc rejetée. Nous pouvons ainsi conclure que le modèle de changement de régime apporte une amélioration significative par rapport au modèle de Black and Scholes.

III. Conclusion

L'objet de ce chapitre était de présenter un modèle stochastique de génération de scénarios économiques permettant de suivre certains comportements des taux d'intérêt et des marchés financiers. Ces modèles d'actifs stochastiques vont nous permettre dans la suite du mémoire de projeter les deux classes d'actifs (actions et obligations) d'une part et de l'autre de valoriser économiquement le passif en actualisant ses flux de trésorerie futurs avec les taux zéro-coupons.

Chapitre 3

***Valorisation d'un contrat d'assurance
vie type épargne***

Dans le cadre de la mise en place d'éventuelles nouvelles normes prudentielles au Maroc, les compagnies d'assurance sont appelées à mesurer en juste valeur ou en valeur de marché leurs postes du bilan et en particulier les flux du passif.

La valorisation des postes de l'actif ne pose pas problème puisque le marché fournit régulièrement toutes les informations permettant leur évaluation. Par contre, le passif d'une compagnie d'assurance n'est pas facile à cerner car il est composé principalement des engagements qu'elle a à l'égard de ses assurés et pour lesquels aucun prix n'est observé directement sur le marché.

Ainsi, afin d'obtenir une valorisation satisfaisante du passif, il faut tenir compte de tous les phénomènes imprévisibles et qui agissent directement sur leurs prestations futures comme les options de rachat. En effet, Celles-ci, laissées à la guise de l'assuré, sont difficiles à appréhender et peuvent constituer rapidement un risque grave pour l'assureur pouvant conduire jusqu'à sa faillite.

Cette partie sera consacrée à la modélisation du passif d'un contrat d'assurance vie type épargne. Celui-ci propose des garanties en cas de décès de l'assuré ainsi que des possibilités de rachat partiel ou total.

Nous nous intéresserons, donc, dans une première partie à la modélisation des principaux risques auxquels peut être confronté l'assureur d'un tel produit. Nous présenterons ensuite le modèle retenu pour la projection des flux du passif sur les années à venir ainsi que le calcul du best estimate.

I. Étude a priori du portefeuille d'assuré

Le portefeuille étudié est un produit épargne retraite long terme destiné aux particuliers ou aux entreprises désireux de constituer une retraite principale ou complémentaire, grâce à un système de cotisations périodiques. L'option épargne est assortie d'une assurance obligatoire, garantissant le versement d'un capital en cas de décès de l'assuré. De plus, le souscripteur qui le souhaite peut à tout moment demander la restitution de la totalité ou d'une partie de son épargne constituée.

Ainsi, les éléments qu'il faut prendre en considération lors de la valorisation de ce type de contrat sont :

- le risque de mortalité ;
- le risque de rachat total ou partiel.

Avant de passer à leur modélisation, faisons une brève analyse descriptive du portefeuille d'adhérents qui sera utilisé par la suite pour la projection des flux du passif.

I.1. Description du portefeuille

Le portefeuille comporte 295944 assurés ayant contracté le produit épargne-retraite entre janvier 2006 et décembre 2010. Pour chaque individu, nous disposons des informations suivantes :

- Le nom, prénom et numéro de police.
- La date de souscription du contrat.
- La date de naissance.
- Le montant des réserves mathématiques au 31 décembre 2012.
- L'année de sortie du contrat.
- Le motif de sortie (rachat, décès, échéance...).
- Le montant des prestations en cas de sortie.

I.1.1. Répartition de l'effectif des assurés par âge et par ancienneté

Le graphique ci-dessus nous montre la répartition des assurés en fonction de leur âge. Nous remarquons que la grande majorité se situe entre 26 et 60 ans avec un pic de 7717 adhérents à l'âge de 49 ans.

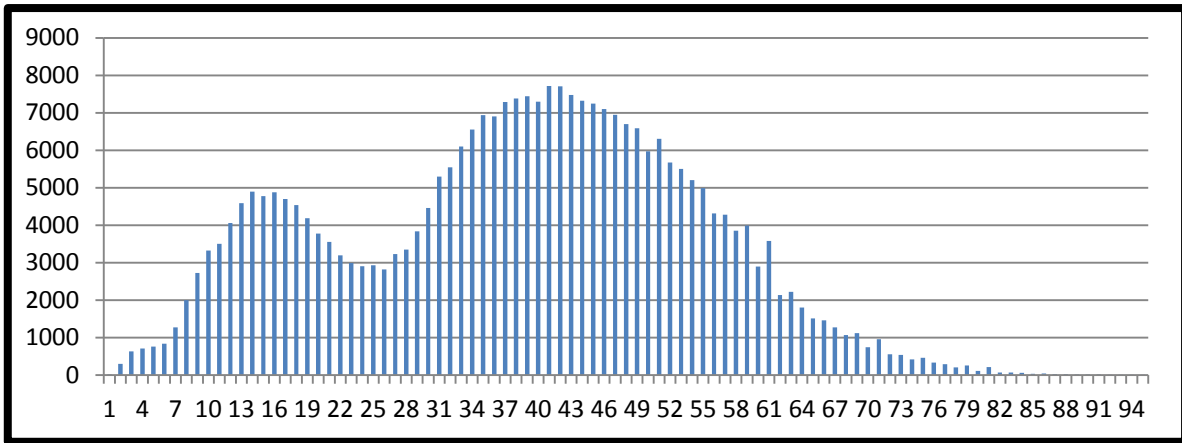


Figure 19 : La répartition de l'effectif des assurés par âge

Ce graphique, quant à lui, a pour but d'identifier la part des assurés correspondante à l'ancienneté de chaque contrat. Il apparaît que la plupart des souscripteurs à ce produit d'épargne retraite ont une ancienneté moyenne comprise entre 1 an et 12 ans.

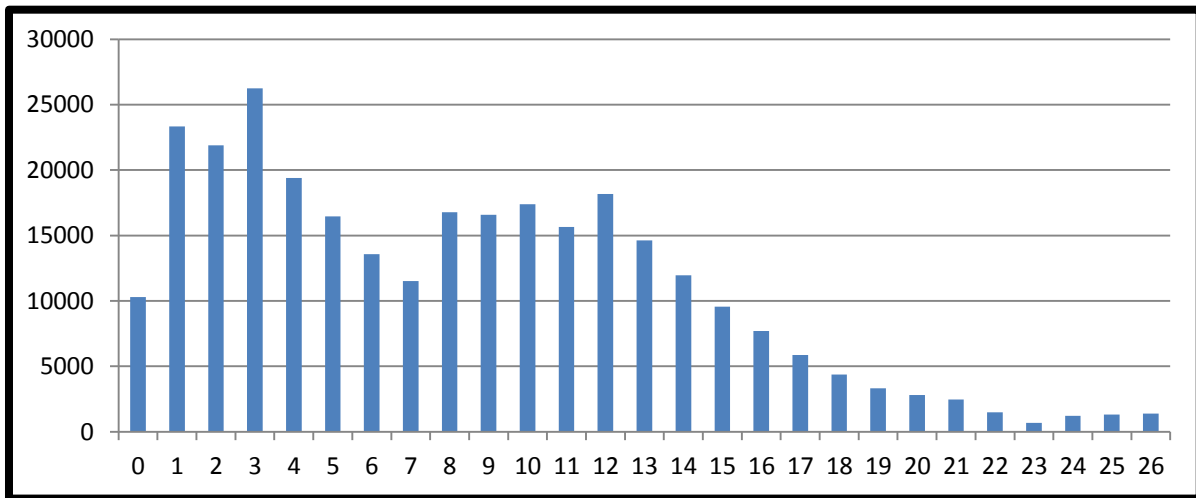


Figure 20 : La répartition de l'effectif des assurés par ancienneté

I.2. Évolution des nouveaux adhérents, des rachats et des décès par année

Nous remarquons d'après le tableau ci-après que les sorties par cause de rachat partiel et par décès sont négligées devant celles dues aux rachats totaux. Ces dernières ne feront donc pas l'objet d'une modélisation stochastique. Nous supposons par conséquent qu'il n'y aurait pas de rachats partiels dans les années à venir et que la mortalité réelle des assurés sera identique à celle représentée par la table de mortalité réglementaire « TD 88-90 ».

Tableau 5 : L'effectif des nouveaux adhérents, rachat (partiel et total) et décès par année

Année d'adhésion	Nombre de contrats	Nombre de rachats partiels	Nombre de décès	Nombre de rachats totaux
1986	2721	127	58	2547
1987	2377	86	49	2244
1988	2193	88	48	2058
1989	1026	40	12	939
1990	2325	90	29	2188
1991	3686	135	32	3511
1992	4138	143	43	3948
1993	5273	164	63	5061
1994	6982	179	79	6765
1995	9046	218	65	8780
1996	11988	278	82	11662
1997	16008	273	91	15687
1998	20041	257	87	19736
1999	23273	230	74	22996
2000	28405	240	80	28118
2001	26235	249	68	25949
2002	32987	137	65	32800
2003	29361	37	61	29274
2004	26581	36	37	26497
2005	8247	6	19	8192
2006	6057	5	9	6005
2007	3971	1	1	3923
2008	7662	2	0	7613
2009	12016	0	1	11969
2010	3345	0	0	3308
Total	295944	3021	1153	291770

II. Modélisation du rachat

Comme nous avons pu le voir dans la première partie, le phénomène de rachat est lié d'une part à la conjoncture économique et de l'autre aux caractéristiques propres à chaque individu. Celui-ci peut donc se décomposer en rachats conjoncturels et rachats structurels.

Dans ce qui suit, nous allons, dans un premier temps, présenter une estimation non paramétrique du rachat structurel avant de passer à une formule simple permettant de modéliser le rachat conjoncturel.

II.1. Modélisation du rachat structurel

Étant donné que le principal facteur explicatif du rachat structurel est l'ancienneté, nous avons décidé de construire, à partir de l'historique du portefeuille étudié, des probabilités de rachat pour chaque ancienneté.

Dans ce contexte, cette partie sera consacrée à la modélisation du phénomène de rachat structurel en fonction de la durée de détention de chaque contrat. Pour ce faire, nous avons décidé de passer par l'élaboration d'un modèle prédictif de durée de vie des contrats d'épargne.

Rappelons que la durée de vie d'un contrat représente le temps séparant sa date d'effet et sa date de résiliation. Au sein de notre portefeuille d'étude, nous avons constaté que pour certains individus la durée de résiliation n'était pas connue pendant toute la période d'observation. Ainsi, le modèle qui semble le plus adéquat pour ce genre de situation est l'estimateur non paramétrique de Kaplan Meier car il tient compte de la présence des données censurées.

Nous exposerons, donc, dans un premier temps quelques bases théoriques en analyse de durée de vie pour ensuite présenter en détail le modèle de Kaplan Meier. Celui-ci sera finalement appliqué à nos données historiques pour nous permettre de construire une loi de rachat adaptée au groupe d'assurés étudié.

II.1.1. Estimation non paramétrique

1) Rappels théoriques

Soit T une variable aléatoire continue à valeurs dans $[0, +\infty[$ décrivant le temps qui s'écoule entre deux événements. Dans notre cas, il s'agit de la durée de vie d'un contrat d'épargne définie comme étant la différence entre la date de sortie de l'adhérent et la date d'effet de son contrat.

En supposant que la distribution de T possède en tout point une fonction de densité f , nous désignons par

- $F(t)$, sa fonction de survie qui, pour un t fixé, représente la probabilité pour un individu de racheter son contrat avant l'instant t , c'est-à-dire :

$$F(t) = P(T \leq t) = \int_0^t f(u) du$$

- $S(t)$, sa fonction de survie qui mesure la probabilité pour un assuré de détenir son contrat d'assurance jusqu'à l'instant t . Elle est définie par :

$$S(t) = P(T > t) = 1 - F(t) = \int_t^{+\infty} f(u) du$$

$$\text{Où : } \begin{cases} S(0) = 1 \\ \lim_{t \rightarrow +\infty} S(t) = 0 \end{cases}$$

- $h(t)$, la fonction de risque ou de hasard qui, pour un t donné, désigne la probabilité instantanée de racheter son contrat conditionnée par le fait de l'avoir détenu jusqu'au temps t . Elle est déduite de la relation suivante :

$$h(t) = \frac{f(t)}{S(t)} = -\frac{S'(t)}{S(t)} = -\frac{d}{dt}(\ln(S(t)))$$

- $H(t)$, la fonction de risque cumulé obtenue à partir de l'intégrale de la fonction de risque instantané :

$$H(t) = \int_0^t h(u) du = \int_0^t -\frac{d}{du} \ln(S(u)) du = \int_0^t -d \ln(S(u))$$

Puisque $S(0) = 1$, nous avons : $H(t) = -\ln(S(t))$

Nous en déduisons que :

$$S(t) = \exp(-H(t)) = \exp\left(-\int_0^t h(u) du\right)$$

Toutes ces fonctions définissent entièrement la densité de la variable : durée de vie. Toute fois pour mesurer le risque de rachat nous nous sommes intéressés plus particulièrement au problème de l'estimation de la fonction de survie en tenant compte de la présence données censurées à droite. Ainsi, en absence d'information à priori sur la forme de la fonction de survie notre choix s'est porté sur l'estimateur non paramétrique : Kaplan Meier.

2) Estimateur de Kaplan de la fonction de survie

L'estimateur de Kaplan Meier permet de trouver une représentation non paramétrique de la fonction de survie de la variable T . Il nous permettra par la suite de construire une table de rachat en fonction de l'ancienneté des contrats tout en tenant compte des données censurées.

✓ *Censure à droite*

La durée de survie d'un contrat n'est pas observée pour tous les individus constituant notre portefeuille car pour certains d'entre eux la date de résiliation par rachat n'est pas connue pendant toute la durée d'observation. Nous parlons dans ce cas de données censurées à droite.

L'existence d'observations incomplètes peut être expliquée par le fait que :

- certains individus ont mis fin à leur contrat pour d'autres raisons que le rachat comme le décès ou la liquidation ;
- la durée d'observation s'est achevée alors que des assurés n'ont pas encore racheté leur contrat.

Ainsi, si nous supposons que nous étudions le comportement de rachat pour n individus en présence de censures alors au lieu d'observer T_1, T_2, \dots, T_n évènements, nous observons :

$$X_i = \min(T_i, C_i) \text{ et } \delta_i = \begin{cases} 1 & \text{si } T_i \leq C_i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \forall i = 1, 2, \dots, n$$

Où C_i est une censure aléatoire à droite.

Notons qu'il existe aussi les censures à gauche et par intervalle mais la plus rencontrée en analyse de durée de vie est la censure à droite.

✓ *Construction de l'estimateur de Kaplan Meier*

Pour le cas du phénomène de rachat, l'estimateur de Kaplan Meier découle de l'idée simple suivante : « ne pas avoir racheté son contrat à l'instant t , c'est ne pas l'avoir racheté juste avant t et ne pas le racheter en t ».

Pour commencer, nous nous plaçons dans le cas où nous étudions les durées de vie des contrats pour n individus, qui peuvent être censurées à droite. Pour chaque individu i est associé un couple de variables aléatoires (X_i, δ_i) .

Ainsi connaissant le couple (X_i, δ_i) soient t_1, t_2, \dots, t_k les différents temps de sortie du portefeuille de contrats (soit par rachat ou par censure).

Pour tout $i = 1, 2, \dots, k$ nous définissons :

- r_i = le nombre d'individus ayant racheté leur contrat d'assurance au temps t_i
- n_i = le nombre d'individus à risque (exposés au risque de rachat) juste avant t_i

Ainsi, la proportion des individus ayant racheté leur contrat à l'instant t_i est : $h_i = \frac{r_i}{n_i}$

Nous définissons aussi c_i le nombre d'individus perdus de vue soit parce qu'ils n'ont racheté leur contrat qu'après la durée maximale d'observation soit qu'ils sont sorti du portefeuille pour d'autres raisons que le rachat (décès ou échéance).

Comme la probabilité de ne pas avoir subi l'évènement de rachat à l'instant t est égale à la probabilité de ne pas l'avoir subi avant t multipliée par la probabilité de ne pas le subir en t_i , alors, pour tout $i = 1, 2, \dots, k$:

$$\begin{aligned}\hat{S}(t_i) &= P(T > t_i) \\ &= P(T > t_i | T > t_{i-1}) P(T > t_{i-1}) \\ &= P(T > t_i | T > t_{i-1}) \dots P(T > t_2 | T > t_1) P(T > t_1) \\ &= \hat{P}_i \hat{P}_{i-1} \dots \hat{P}_1\end{aligned}$$

Estimons la probabilité de ne pas subir l'évènement de rachat à l'instant t_i par :

$$\hat{P}_i = P(T > t_i | T > t_{i-1}) = 1 - \frac{r_i}{n_i}$$

Ainsi la probabilité de garder son contrat au-delà de la date t est obtenue à partir du produit des P_i estimés pour toutes les dates de rachats antérieures à t :

$$\hat{S}_{KM}(t) = \prod_{i/t_i \leq t} \left(1 - \frac{r_i}{n_i}\right)$$

Pour calculer à chaque instant t_i le nombre d'individus exposés au risque de rachat nous utilisons la formule de récurrence suivante :

$$n_i = n_{i-1} - r_{i-1} - c_{i-1}$$

II.1.2. Application de l'estimateur de Kaplan Meier pour la modélisation du taux de rachat structurel

1) Description des données retenues pour l'implémentation du modèle

Les données analysées sont issues d'un portefeuille d'assurés ayant contractés un produit d'épargne retraite entre le 1^{er} janvier 1986 et le 31 décembre 2010. Soit donc une durée maximale d'observation de 24 ans.

Nous disposons pour chaque assuré d'une liste d'informations sur les caractéristiques du produit contracté. Dans ce qui suit, nous allons nous intéresser essentiellement aux données utiles pour notre étude c'est-à-dire celles relatives à l'ancienneté : la date d'effet et la date de sortie soit par cause de rachat ou autre.

2) Application

En vue d'appliquer le modèle de Kaplan Meier, nous avons utilisé la procédure LIFETEST du logiciel SAS. Celle-ci permet de donner une estimation non paramétrique à la fonction de survie et elle accepte les données censurées. Son implémentation nécessite cependant la création de nouvelles variables :

- La variable temps qui représente la durée de vie d'un contrat, c'est-à-dire la durée écoulée depuis l'entrée de l'assuré dans le portefeuille jusqu'à sa sortie : pour l'individu i , $t_i = \text{date de sortie} - \text{date d'effet}$.
- La variable censure qui prend la valeur 1 si l'individu a racheté son contrat avant la fin de l'observation et la valeur 0 si celui-ci est perdu de vue.

✓ *La fonction de survie*

L'estimation non paramétrique de la fonction de survie via l'outil SAS conduit à la représentation graphique ci-dessous :

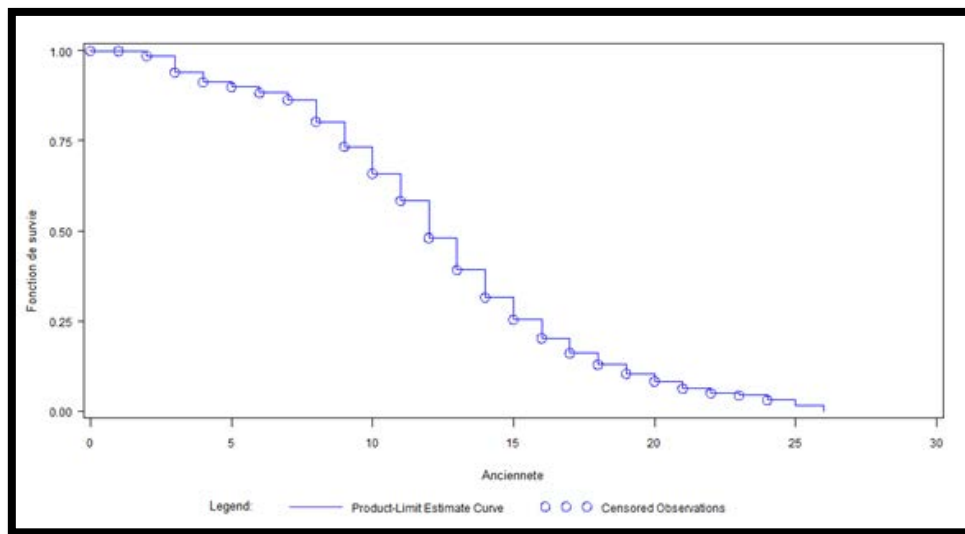


Figure 21 : La représentation de la fonction de survie en fonction de l'ancienneté des contrats

Nous remarquons qu'en présence de données censurées la fonction de survie de Kaplan Meier a une tendance à diminuer avec l'ancienneté. En effet, la probabilité de rester dans le portefeuille et de ne pas racheter son contrat est très importante pour les assurés ayant une ancienneté de 0 à 10 ans. Elle atteint 50% pour ceux ayant atteint 12 ans d'ancienneté. A partir de cette durée les probabilités de survie des contrats commencent à diminuer progressivement.

✓ *Loi de rachat structurel en fonction de l'ancienneté*

Maintenant que nous avons estimé la fonction de survie des contrats constituant notre portefeuille, nous pouvons déduire les probabilités de rachat structurel correspondant à chaque ancienneté à partir de la relation de récurrence suivante :

$$\forall t \in]0, 25\text{ans}[\quad h_i = \frac{r_i}{n_i} = 1 - \frac{\hat{S}_{KM}(t_i)}{\hat{S}_{KM}(t_{i-1})} ; h_0 = 1 - \hat{S}_{KM}(t_0)$$

Nous obtenons les probabilités de rachat suivantes :

Tableau 6 : La loi de rachat structurel

Ancienneté	Taux de rachat structurel
0	0,03%
1	0,05%
2	1,32%
3	4,67%
4	2,93%
5	1,42%
6	1,83%
7	2,19%
8	7,03%
9	8,61%
10	10,19%
11	11,41%
12	17,71%
13	18,54%
14	19,37%
15	26,01%
16	13,49%
17	20,59%
18	19,58%
19	19,46%
20	20,40%
21	24,30%
22	20,45%
23	12,45%
24	30,50%

Nous remarquons d'après le tableau ci-dessus que le taux de rachat structurel augmente fortement à partir de 8 ans d'ancienneté. Ceci est dû au fait, qu'au-delà de cette durée, les rachats deviennent partiellement défiscalisés, ce qui incite les assurés à mettre fin à leur contrat d'assurance.

II.2. Modélisation du rachat conjoncturel

Comme son nom l'indique, le rachat conjoncturel dépend de la conjoncture économique. Celui-ci est difficile à appréhender du fait qu'il dépend des réactions des individus face aux fluctuations des marchés financiers. En effet, ces derniers n'ont pas un comportement rationnel et se font chacun sa propre image sur l'environnement économique et par conséquent ne réagissent pas de la même sorte lorsque les taux d'intérêt varient.

La formule utilisée pour modéliser ce type de rachat est celle recommandée par l'Autorité de Contrôle Prudentiel (ACP) dans le cadre des études QIS de la nouvelle réforme Solvency II. Celle-ci définit le taux de rachat conjoncturel « RC » comme une fonction de l'écart entre le taux servi « r » et le taux de marché (ici le TME) :

$$RC_t = \begin{cases} RC_{max} & \text{si } r-TME < \alpha \\ RC_{max} \frac{(r - TME - \beta)}{(\alpha - \beta)} & \text{si } \alpha < r-TME < \beta \\ 0 & \text{si } \beta < r-TME < \gamma \\ RC_{min} \frac{(r - TME - \gamma)}{(\delta - \gamma)} & \text{si } \gamma < r-TME < \delta \\ RC_{min} & \text{si } r-TME > \delta \end{cases}$$

RC_t est le taux de rachat conjoncturel à la date t et $\{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$ est un ensemble de paramètres fixés par le QIS5 tels que :

- $\alpha = -5\%$ est le seuil en dessous duquel les rachats conjoncturels sont constants et fixés à $RC_{max} = 30\%$.
- $\beta = -1\%$ et $\gamma = 1\%$ sont respectivement les seuils d'indifférence à la baisse et à la hausse du taux servi. Entre ces deux seuils, le comportement des assurés ne change pas.
- $\delta = 3\%$ est le seuil en dessus duquel les rachats conjoncturels sont constants et fixés à $RC_{min} = -5\%$.

Le TME retenu est le taux de rendement sur le marché secondaire des emprunts d'Etat d'échéance 10 ans.

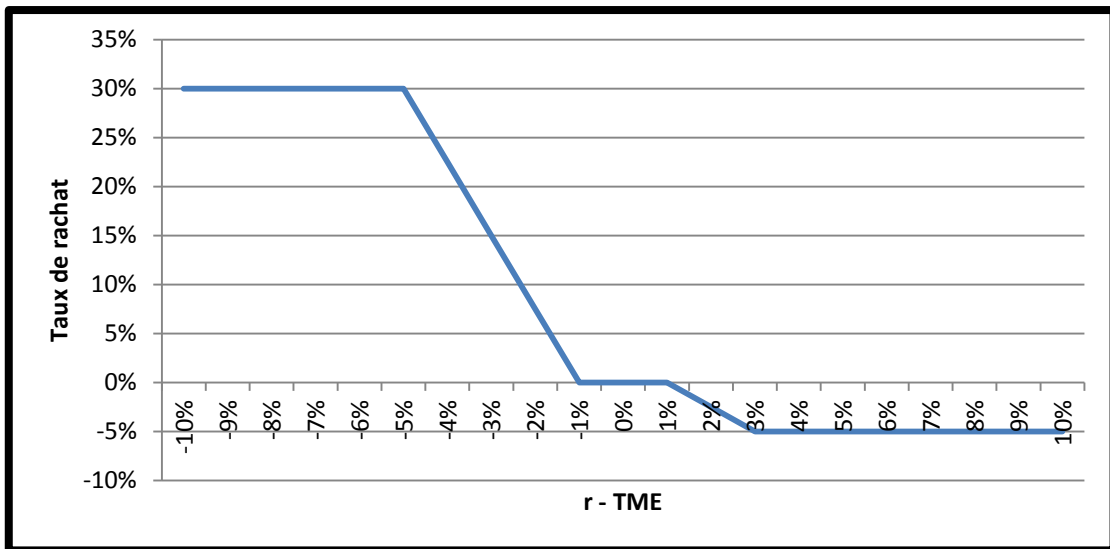


Figure 22 : La fonction du taux de rachat structurel

Pour estimer l'évolution du taux de rachat structurel à l'aide de cette formule, nous avons besoin de connaître le devenir du taux servi par la compagnie et du taux de référence du marché sur l'horizon de projection des flux du passif :

- En ce qui concerne le taux servi par la compagnie, nous allons supposer que celui-ci ne changera pas pendant toute la période de projection.
- Pour ce qui est du TME, celui-ci sera estimé par le taux zéro-coupons de maturité 10 ans obtenu à partir du modèle de Cox, Ingersoll et Ross développé au niveau de la première partie. Aussi, pour déterminer les TME futurs, nous avons simulé une courbe de taux pour chaque et année et déterminer le taux de maturité 10 ans correspondant.

Après avoir effectué les calculs pour les années futures, nous avons obtenu des écarts entre les taux servis et les taux de marché, tous compris entre $\alpha = -5\%$ et $\beta = 1\%$, le taux de rachat conjoncturel est donc égal à :

$$RC = RC_{max} \left(\frac{r - TME - \beta}{\alpha - \beta} \right)$$

Nous pouvons à présent présenter le modèle qui nous va nous permettre de valoriser les flux du passif et le best estimate de notre contrat d'épargne.

III. Modélisation du passif

III.1. Note technique et hypothèses de tarification du contrat

Comme nous l'avons déjà présenté au début de cette partie, le produit utilisé pour la modélisation est un produit épargne retraite non participatif offrant des garanties en cas de décès ainsi que des possibilités de rachat partiels ou totaux et ce grâce à un système de cotisations périodiques.

Nous décrirons ci-dessous les principales caractéristiques permettant la valorisation de ce portefeuille :

III.1.1. Frais de gestion

Les frais de gestion annuels sont fixés à 0,5% par an de l'épargne constituée et revalorisée au taux technique réglementaire.

III.1.2. Taux technique garanti

Ce produit garantit à ses clients une revalorisation annuelle de leur épargne constituée égale au taux technique maximum réglementaire à la date de versements des cotisations. Actuellement ce taux technique est fixé à 3,5%.

III.1.3. Pénalités de rachat

Les assurés ont la possibilité de racheter leur contrat à tout moment et sans aucune pénalité. En effet, quelle que soit la date de demande du rachat, le client reçoit le remboursement de la totalité de ses cotisations.

III.1.4. Fiscalité

Le produit offre la possibilité au souscripteur du contrat de procéder à la déduction fiscale de ses cotisations. En plus, si la durée de souscription est supérieure à 10 ans, le client pourra bénéficier de la totalité de ses cotisations et de la plus value qui lui sera distribuée par la compagnie d'assurance.

III.2. Hypothèses de projection du portefeuille

Afin de donner une image concrète du devenir des engagements de l'assureur dans les années à venir, il a fallu mettre au point un jeu d'hypothèses dites « actuarielles » pour simplifier la mise en œuvre des projections futures. Celles-ci sont classées comme suit :

III.2.1. Hypothèses de projection

- La date d'évaluation est fixée au 31/12/2012 (*date à partir de laquelle nous effectuons les projections*).
- La durée de projection retenue est de 30 ans (*durée pendant laquelle les engagements des assurés et de la compagnie seront projetés*).
- Le portefeuille est supposé être en situation de run-off, seules les primes futures des assurés existant dans le contrat au 31 décembre 2012 sont prises en compte dans les projections.
- Nous supposons que les décès interviennent en fin d'année.
- Nous supposons que les rachats interviennent aussi en fin d'année juste après les décès.

III.2.2. Hypothèses démographiques

Étant donné que l'assureur garantit le versement d'un capital en cas de décès des assurés, celui-ci ne doit pas négliger le phénomène de mortalité lors de la valorisation de ses engagements futurs. Ainsi, pour intégrer les sorties par décès dans notre modèle nous supposons que les individus constituant ce portefeuille meurent suivant la table de mortalité réglementaire TD 88-90.

III.2.3. Hypothèses sur les comportements des clients

Le comportement de rachat des assurés est un facteur très important car il peut influencer considérablement les cash-flows futurs du passif. Dans le cadre de la projection des lois de sortie par rachat, nous avons décidé d'adopter la loi obtenue à partir de l'estimateur de Kaplan Meier pour le taux de rachat structurel et la loi proposée par l'ACP pour le rachat conjoncturel.

III.3. Évolution du portefeuille au cours du temps

Les provisions mathématiques constituent le premier poste en termes de volume du passif d'une compagnie d'assurance vie. Ainsi, représenter l'évolution des flux du passif au cours du temps revient à représenter celle des provisions mathématiques.

S'agissant d'un portefeuille de contrats individuels, la projection des réserves mathématiques sur les trente années à venir se fera tête par tête d'une manière très précise. Pour obtenir l'évolution des réserves mathématiques du portefeuille global il suffit juste d'additionner les résultats obtenus pour chaque individu et pour chaque année.

Avant de nous pencher vers le détail des calculs, retenons les notations suivantes.

III.3.1. Notations

À la date $t = 0$ (31/12/2012), chaque assuré i va être représenté par son âge x et son ancienneté a :

- $PM_{ouv}(x, a)$: L'épargne initiale de l'assuré d'âge x et d'ancienneté a , à la date t .
- $Versement_t(x, a)$: Le versement de l'assuré d'âge x et d'ancienneté a , constaté en début d'année t .
- $Taux_{Rachat\ structurel}(a)$: Le taux de rachat structurel correspondant à l'ancienneté a .
- $Taux_{Rachat\ conjoncturel}(t)$: Le taux de rachat structurel correspondant à l'année t .
- q_x : La probabilité de décès à l'âge x .
- $Montant_{Deces}t$: Montant de la prestation en cas de sortie par décès.
- $Montant_{Rachat}t$: Montant de la prestation en cas de sortie par rachat.
- $PM_{fermt}(x, a)$: L'épargne finale de l'assuré d'âge x et d'ancienneté a , à la date t .
- $Epargne_t$: L'épargne acquise à la fin de l'année t .
- r : Le taux de revalorisation de l'épargne acquise.

III.3.2. Évolution de l'encours global du portefeuille

Pour chaque année t et pour chaque assuré i , nous allons adopter les formules suivantes afin de déterminer l'évolution des flux probables du passif jusqu'au terme de notre horizon de projection :

$$PM_{fermt}(x, a) = Epargne_t(1 + r) - Montant_{Deces}t - Montant_{Rachat}t$$

Avec :

- $Epargne_t = PM_{ouv}(x, a) + Versement_t(x, a)$
- $PM_{ouv}(t)(x, a) = PM_{ferm}(t-1)(x, a)$
- $Montant_{Deces}t = Epargne_t(1 + r) * q_x$
- $Montant_{Rachat}t = Epargne_t(1 + r) * (1 - q_x) * Taux_{Rachat}(a, t)$
- $Taux_{Rachat}(a, t) = \min\left(1, \max\left(0, (Taux_{Rachat\ structurel} + Taux_{Rachat\ conjoncturel})\right)\right)$

IV. Application pour un portefeuille de contrats d'épargne

IV.1. Projection des flux du passif

IV.1.1. Présentation du portefeuille des assurés à la date d'évaluation

Au 31/12/2012, le portefeuille d'adhérents est constitué de 49040 polices d'assurance. Pour chaque assuré, nous connaissons sa provision mathématique d'ouverture, son âge et son ancienneté. Nous disposons donc de toutes les informations nécessaires à la valorisation de ce type de contrat :

- L'âge moyen des assurés est de 53 ans.
- L'ancienneté moyenne des contrats est de 12 ans.
- La provision mathématique d'ouverture totale du portefeuille s'élève à un montant de 723 909 655 DH.
- Aussi, plus de la moitié des assurés ont une ancienneté supérieure à 10 ans. Les contrats constituant notre portefeuille sont relativement anciens, nous pouvons donc nous attendre à des prestations pour cause de rachat structurel aussi importantes que les prestations décès.

IV.1.2. Évolution de la provision mathématique d'ouverture

La figure ci-après illustre l'évolution des provisions mathématiques en fonction des années de projection.

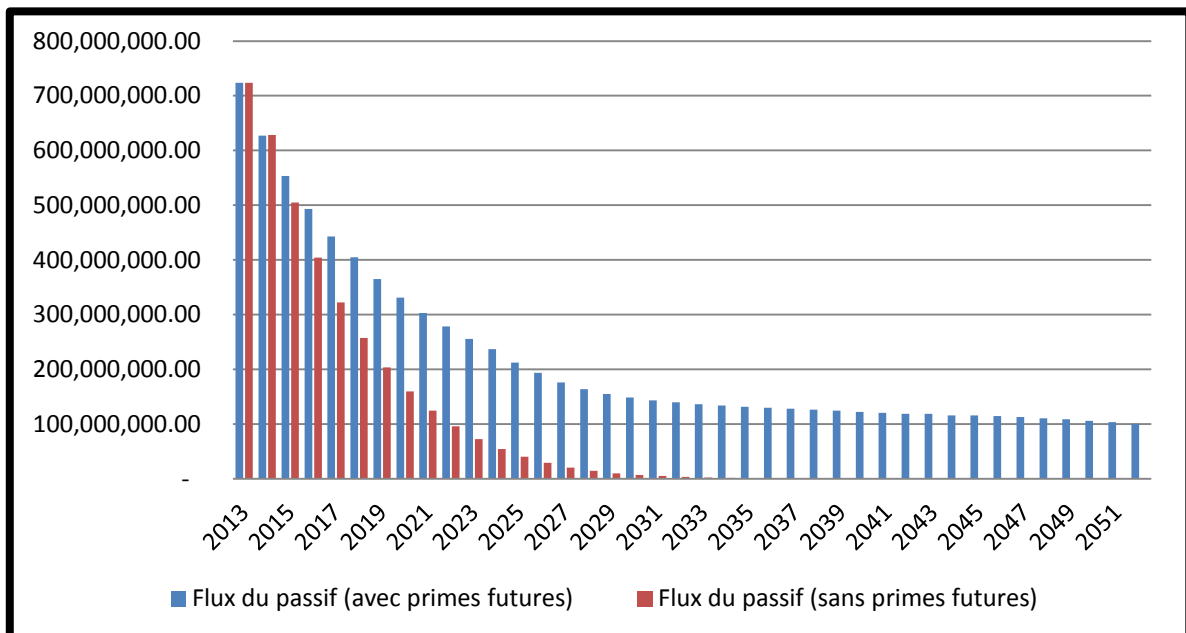


Figure 23 : L'évolution des provisions mathématiques (avec primes futures et sans primes futures) au cours du temps

Nous remarquons que les deux provisions mathématiques diminuent au cours des années de projection. Cela est principalement dû aux sorties par décès et par rachat total qui entraînent l'assureur à payer des prestations faisant diminuer l'épargne totale des assurés.

Cependant, la provision mathématique avec primes futures diminue moins fortement que celle qui ne prend pas en compte les versements futures des assurés, ce qui est normal car les cotisations des assurés permettent de compenser les sorties d'argent dues aux sorties par rachat ou décès.

IV.1.3. Évolution des prestations futures au cours du temps

Les prestations futures totales en cas décès et de rachat évoluent au cours du temps selon l'allure suivante :

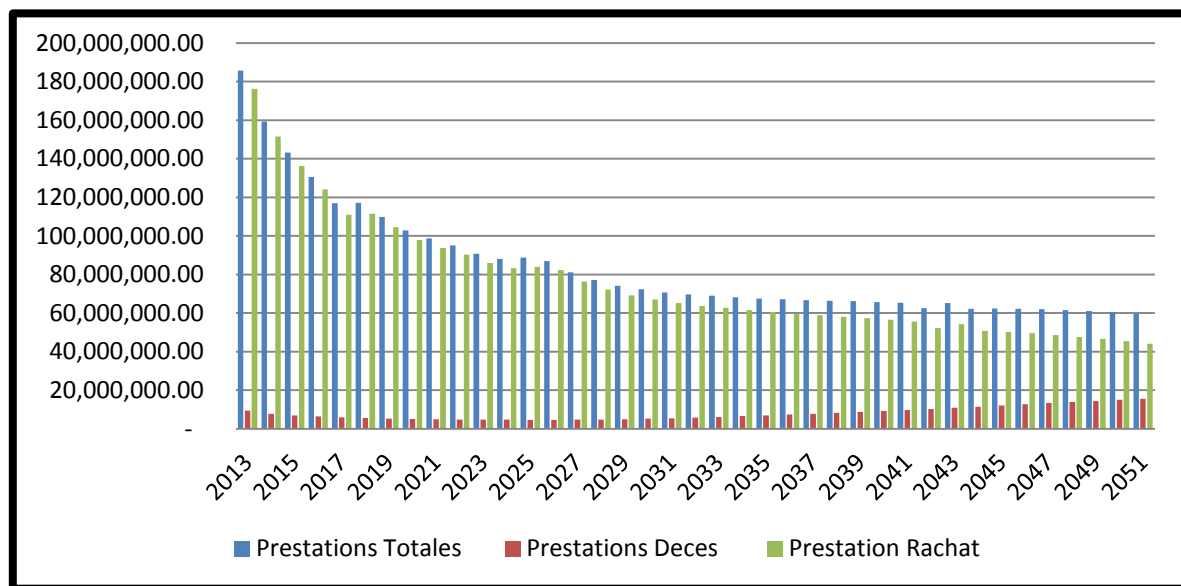


Figure 24 : L'évolution des prestations totales, décès et rachat au cours du temps

Les prestations totales diminuent progressivement jusqu'à atteindre 60 000 000 DH au terme de notre horizon de projection. En effet, au début des projections les prestations à verser aux assurés sont plus importantes car l'encours global de la compagnie est relativement important. Mais au fur et à mesure que les assurés commencent à racheter leur contrat ou à décéder l'encours diminue progressivement entraînant la chute des prestations. Aussi, les prestations pour décès sont très minimes par rapport aux prestations pour rachat total ce qui confirme l'hypothèse proposée au début du chapitre (les sorties par mortalité étant négligées devant les sorties par rachat, celles-ci ne feront pas l'objet d'une modélisation stochastique).

IV.2. Projection des flux de l'actif

IV.2.1. Structure de l'actif et hypothèses de projection

1) Composition de l'actif

Rappelons que le portefeuille d'investissement de la compagnie étudiée est composé des deux principales classes d'actif que nous retrouvons souvent dans les placements des assureurs vie, à savoir les obligations et les actions.

Aussi, le contrat épargne étudié contient des engagements qui doivent être garantis à tout moment et quel que soit la situation des marchés financiers. L'assureur doit donc allouer

une grande partie de ses fonds aux actifs non risqués, comme les obligations d'Etat, pour assurer la sécurité de ses placements et le reste aux actions pour améliorer le rendement de son portefeuille.

À ce titre, nous avons considéré une répartition, entre actions et obligations, stable tout au long de la période de projection telle que :

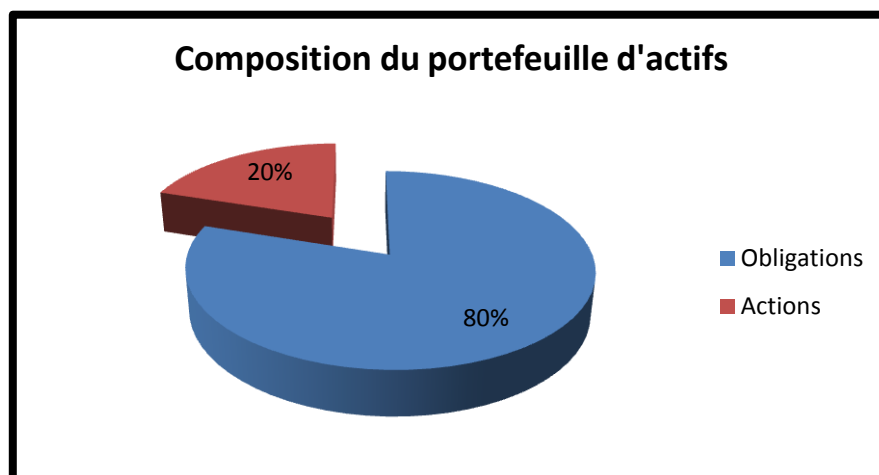


Figure 25 : La répartition du portefeuille d'investissement de la compagnie entre actions et obligations

Au 31/12/2012, la valeur du fonds d'actifs représentant les réserves mathématiques de notre contrat d'épargne s'élève à un montant de 1 701 571 764 DH réparti comme suit :

Tableau 7 : La valeur de marché des actifs au 31/12/2012

Valeur de marché de l'actif au 31/12/2012	1 701 571 764 DH
Obligations (80%)	1 361 257 411 DH
Actions (20%)	340 314 353 DH

2) Hypothèses de projection

Pour projeter les classes d'actifs constituant notre portefeuille de placement, il suffit de simuler l'évolution, dans les années à venir, des cash-flows générés par les actions et obligations détenues au 31/12/2012. Pour ce faire nous avons eu recours au générateur de scénarios économiques, développé dans la première partie du mémoire, où nous avons retenus les deux modèles suivants :

- Le modèle de Cox, Ingersoll et Ross qui nous a permis de déterminer les flux générés (coupons net et montants de remboursement) des obligations détenues.
- Le modèle de changement de régime qui nous a permis de simuler les trajectoires des cours de l'indice MASI en intégrant le fait que ces derniers peuvent transiter d'un régime à forte volatilité à un régime à volatilité normale.

IV.2.2. Résultats de la projection des flux de l'actif

1) Projection des flux générés par le portefeuille actions

Nous adoptons le paramétrage obtenu suite au calibrage du modèle de changement de régime :

- Régime 1 : $\mu_1 = -1,53\%$; $\sigma_1 = 2,49\%$; $\pi_1 = 45,77\%$
- Régime 2 : $\mu_2 = 1,82\%$; $\sigma_2 = 4,58\%$; $\pi_2 = 53,23\%$
- Le coefficient de corrélation avec les taux d'intérêts : $\rho = -0,29$

Pour projeter dans le futur la valeur des actions, nous allons suivre une méthode simple et efficace. L'idée est de générer, dans un premier temps, une variable aléatoire uniforme $u \sim U[0,1]$ et de la comparer ensuite à la probabilité d'être dans le régime 1 (initial) :

- Si $u < \pi_1$, nous restons dans le régime 1 et nous utilisons la discrétisation suivante :

$$S_{t+\Delta t} = S_t \exp \left(\left(\mu_1 - \frac{\sigma_1^2}{2} \right) \Delta t + \sigma_1 \rho \sqrt{\Delta t} B_1 + \sigma_1 \sqrt{(1 - \rho^2) \Delta t} W_1 \right)$$

- Si $u > \pi_1$, nous passons au régime 2 et nous appliquons la discrétisation suivante :

$$S_{t+\Delta t} = S_t \exp \left(\left(\mu_2 - \frac{\sigma_2^2}{2} \right) \Delta t + \sigma_2 \rho \sqrt{\Delta t} B_1 + \sigma_2 \sqrt{(1 - \rho^2) \Delta t} W_1 \right)$$

Où B_1 et W_1 sont deux mouvements browniens standards indépendants.

Nous effectuons 1000 simulations de trajectoires des cours sous Excel, avec le paramétrage suivant :

- Projection sur 40 ans avec des données mensuelles.
- Nombre d'itérations : 480.
- Pas de discrétisation : $\Delta t = \frac{1}{12} = 0,0833333$
- $S(0) = 9359$ Dhs, qui est la valeur du MASI au 31/12/2012.
- Le nombre de titres constituant notre portefeuille d'actions est déterminé de la manière suivante :

$$Nbr\ Actions = \frac{340\ 314\ 353}{9359} = 36\ 362\ actions$$

Nous obtenons la représentation graphique suivante (pour une meilleure lisibilité seulement 40 simulations ont été représentées) :

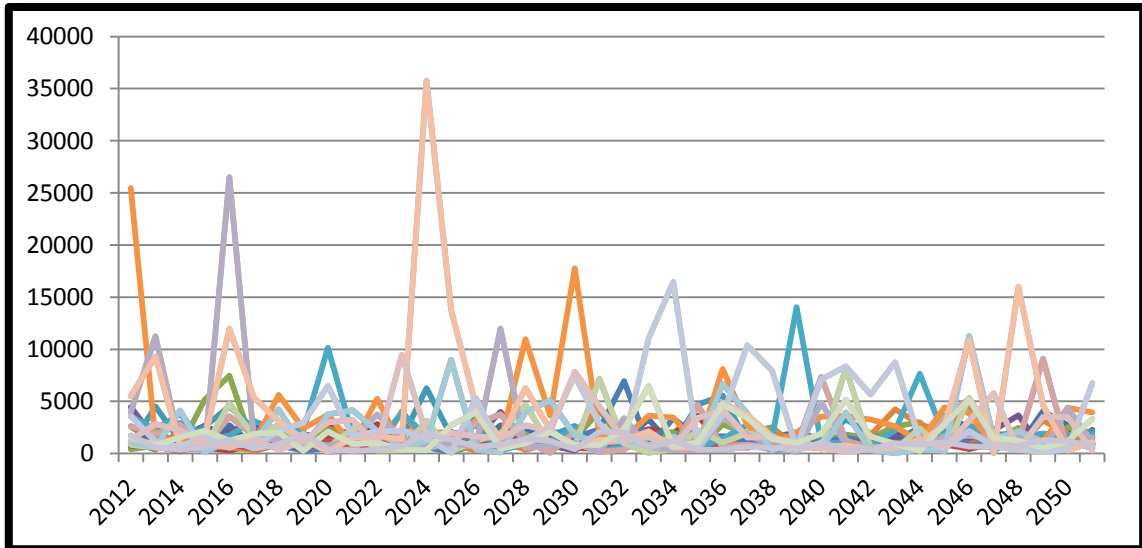


Figure 26 : L'évolution du cours d'une action de valeur initiale $S(0) = 9359$ DH sur 40 ans

Ainsi la projection des flux dégagés par les actions détenues au sein du portefeuille de placements est obtenue à partir de la formule suivante :

$$Flux_{actions}(t) = Nbr\ Actions \times S_t \times r_t \text{ avec } r_t = \ln\left(\frac{S_{t+1}}{S_t}\right)$$

En faisant la moyenne de ces 1000 simulations, nous obtenons une évolution stochastique des cours du fonds d'actions de la compagnie sur un horizon de 40 ans :

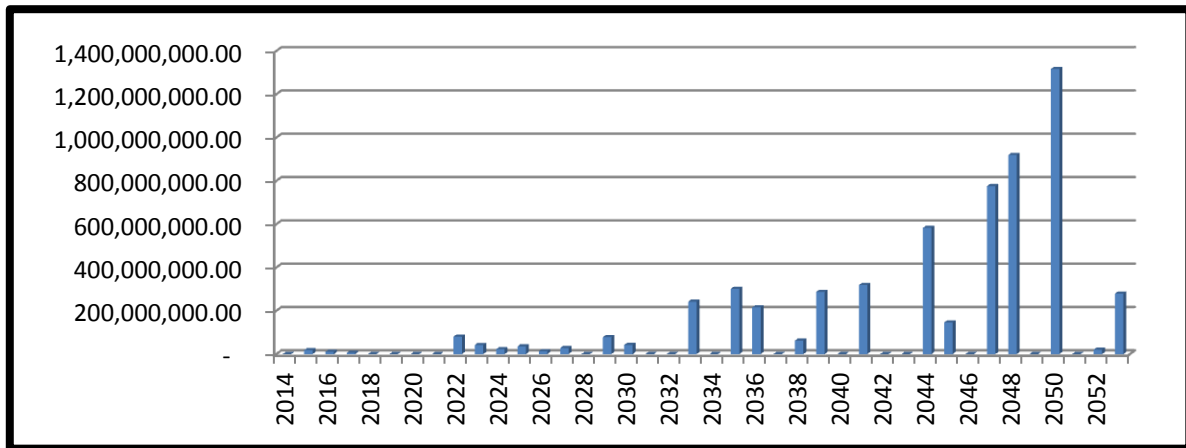


Figure 27 : L'évolution stochastique du fonds d'actions sur 40 ans

2) Projection des flux générés par le fonds obligataire

Le portefeuille obligataire de la compagnie est constitué uniquement d'obligations d'Etat (sans risque de défaut) de valeur nominale égale à 1000 DH. Celles-ci sont achetées au pair (les valeurs d'achat (V_t), de remboursement (V_R) et nominales (N) sont toutes égales). Le portefeuille obligataire est donc réparti comme suit :

Tableau 8 : L'allocation du portefeuille obligataire au 31/12/2012 par maturité

Répartition des obligations selon les maturités	Valeur de marché (en DH)	Part en %
1 an	136 125 741	10%
3 ans	108 900 593	8%
5 ans	108 900 593	8%
10 ans	272 251 482	20%
12 ans	340 314 353	25%
15 ans	272 251 482	20%
20 ans	122 513 167	9%
Total	1 361 257 411	100%

Le coupon de chaque obligation est déterminé à l'achat comme celui qui égalise le prix d'achat et la valeur des flux futurs actualisés avec la courbe des taux zéro-coupons du modèle de Cox, Ingersoll et Ross.

En effet, la valeur d'achat d'une obligation à la date t est égale à la somme de ses flux de trésorerie futurs (coupons et remboursements) actualisés avec les taux zéro-coupons :

$$V_t = \sum_{i=t+1}^T \frac{c \times N}{(1 + R(t, i))^i} + \frac{V_R}{(1 + R(t, T))^T}$$

Avec :

- T : la maturité de l'obligation ;
- $R(t, T)$: le taux zeroo-coupon calculé à la date t et de maturité T .

Or, il s'agit d'une obligation au pair : $V_t = N = V_R$

Donc, le coupon est déduit de la relation suivante :

$$c = \frac{1 - \frac{1}{(1 + R(0, T))^T}}{\sum_{i=1}^T \frac{1}{(1 + R(0, i))^i}}$$

En projetant, sur un horizon de 40 ans, les coupons et les montants de remboursements générés par les obligations détenues au sein du portefeuille, nous obtenons les résultats suivants :

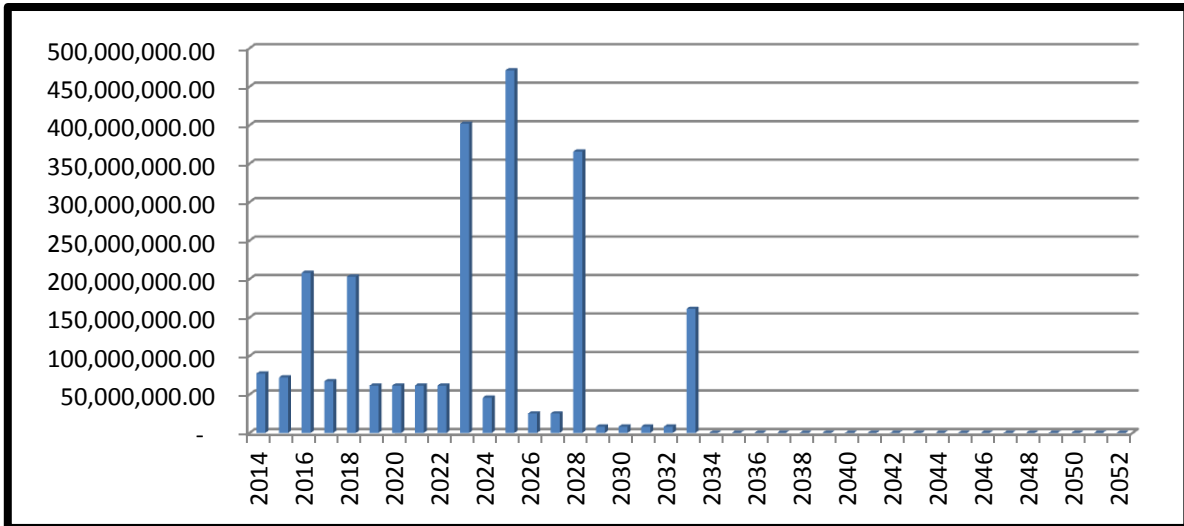


Figure 28 : La projection des cash-flows générés par le portefeuille obligataire

3) Projection des flux de l'actif

Pour la projection des flux de l'actif, nous allons utiliser la formule suivante :

$$\text{Flux de l'actif}_t = \text{Produits financiers}_t(\text{actions}) + \text{Produits financiers}_t(\text{obligations})$$

Nous avons donc la représentation des flux futurs générés par le portefeuille d'investissement suivante :

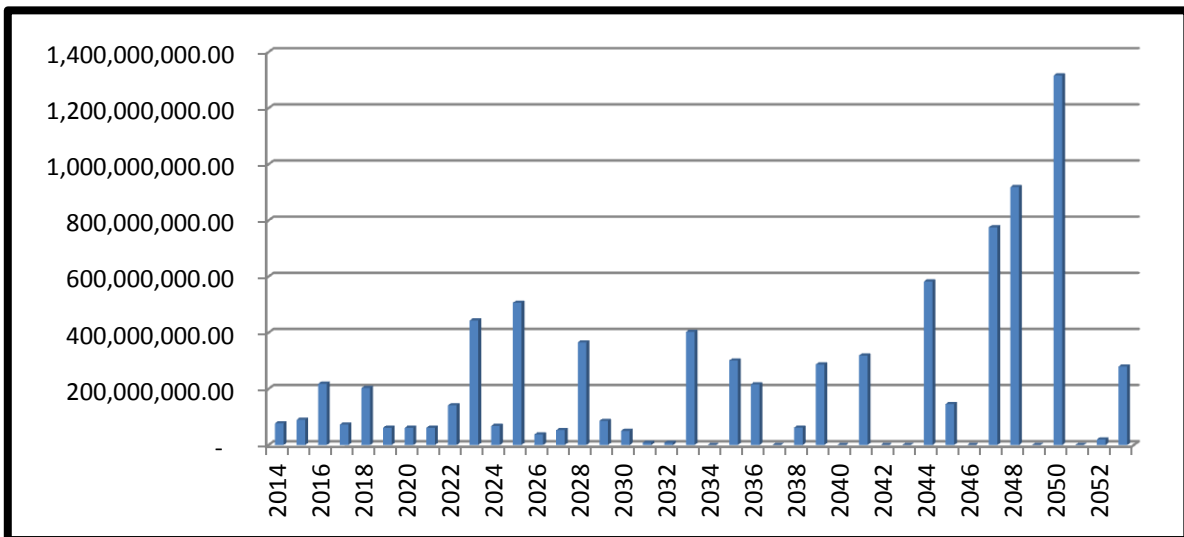


Figure 29 : La projection des cash-flows générés par le portefeuille d'investissement

V. Projection du résultat et mesure de l'Embedded Value

V.1. Projection du résultat simplifié

Le résultat simplifié correspondant à notre portefeuille de contrats d'épargne se calcule selon l'équation suivante :

$$\begin{aligned} \text{Résultat} = & \text{Primes} - \text{Prestations (décès et rachat)} \\ & + \text{Provisions (ouverture)} - \text{Provisions (clôture)} + \text{Produits financiers} \end{aligned}$$

La projection du résultat simplifié de la compagnie jusqu'au terme de notre horizon de projection est représentée par le graphique suivant :

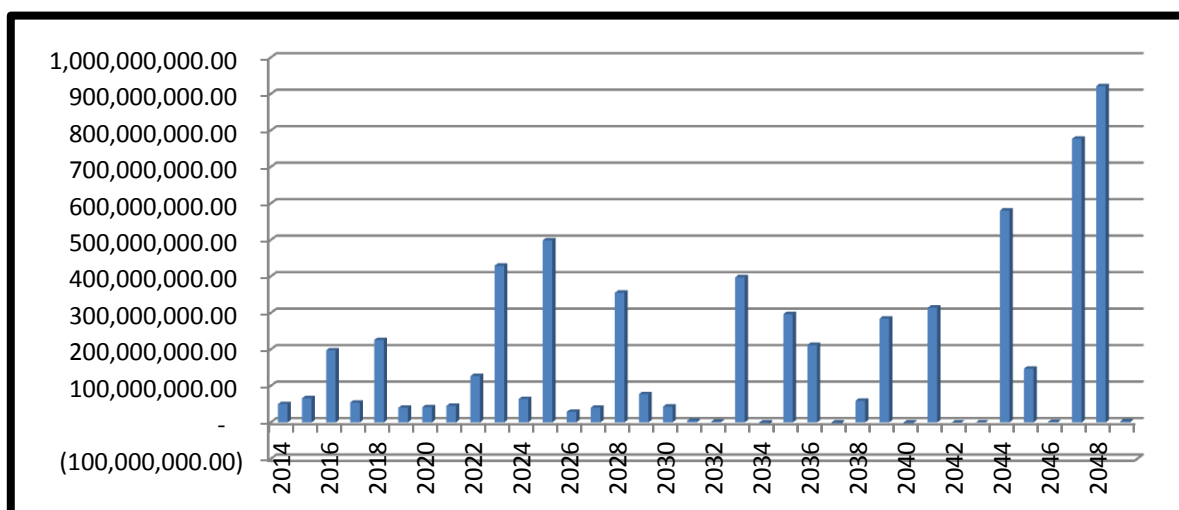


Figure 30 : La projection du résultat simplifié de la compagnie

V.2. Calcul de l'Embedded Value (EV)

V.2.1. Généralités

1) Présentation de l'EV

Les produits commercialisés en assurance vie et notamment les contrats d'épargne s'étalent généralement sur de très longues périodes. Ce type de contrats oblige les assureurs à attendre parfois plus de vingt ans pour voir si la compagnie a réalisé un gain ou une perte sur ces produits. De plus, à long terme, les cash-flows futurs deviennent extrêmement sensibles aux variations d'un certain nombre de paramètres tels les taux d'intérêt, les taux de rendement des placements, les frais, la mortalité, les rachats etc.

Ainsi, pour pouvoir estimer, au plus juste, les flux espérés d'un contrat d'assurance lors de sa souscription l'assureur peut faire appel à un outil très efficace : l'Embedded Value. Il s'agit, en effet, d'un indicateur qui permet de mesurer la valeur économique d'une compagnie d'assurance sans tenir compte de la production future, générée par les futures affaires nouvelles, appelée : « Goodwill ».

2) Les composantes de l'EV

L'Embedded Value correspond à la valeur du portefeuille à la date d'évaluation, ajoutée à l'actif net réévalué diminué du coût de la marge de solvabilité :

$$EV = VP + ANR - CoC$$

✓ *La valeur du portefeuille (VP)*

Il s'agit de la valeur actuelle des résultats futurs générés par le portefeuille des contrats en cours à la date d'évaluation.

Ainsi, pour mesurer cette valeur de portefeuille il suffit de calculer les résultats disponibles à la fin de chaque année de les actualiser au taux zéro-coupons selon les maturités et d'en faire la somme. Nous avons donc :

$$VP = \sum_{t=1}^T \frac{R_t}{(1 + \text{taux d'actualisation})^t}$$

Avec :

$$R = \text{Résultat} - \text{Frais d'acquisition et d'administration} - \text{Impôts}$$

✓ *L'actif net réévalué (ANR)*

L'actif net réévalué correspond à l'actif net comptable du bilan de la compagnie d'assurance. Il est constitué principalement des éléments suivants :

- Les capitaux propres (CP) : le capital social (CS), les réserves de la compagnie et le résultat net de l'année.
- Les plus values latentes (PVLN) nettes des participations aux résultats servies aux assurés et net d'impôts.

Celui est obtenu à partir de la formule suivante :

$$ANR = CS + \text{Réserves} + \text{Résultat de l'exercice} + PVLN$$

✓ *Le coût de la marge de solvabilité*

Il correspond à la différence entre la marge de solvabilité immobilisée qui est placée et qui génère des cash-flows futurs suivant le taux de rendement des placements et le taux auquel sont actualisés les résultats futurs pour le calcul de la valeur du portefeuille.

$$Coc = \text{Marge de solvabilité} \times (\text{taux de rendement des actifs} - \text{taux actualisation})$$

V.2.2. Application

1) Les hypothèses de calcul

✓ *Primes*

Nous supposons que les cotisations sont versées de la même manière qu'en 2012 pendant toute la période de projection. Celles-ci sont calculées en multipliant les primes payées par chaque assuré, au début de chaque année de projection, par sa probabilité de survie.

✓ *Prestations*

Les prestations (décès et rachat) retenues sont celles estimées en fonction des modèles développés au niveau de la partie de valorisation du passif :

- Les lois de sorties par rachat vont être modélisées par l'estimateur non paramétrique pour le rachat structurel et la loi proposée par l'ACP pour le rachat conjoncturel.
- Nous allons supposer que les individus constituant le portefeuille meurent suivant la loi de mortalité réglementaire : TD 88-90.

✓ *Frais d'acquisition*

Les frais d'acquisition représentent 0,5% des primes.

✓ *Frais d'administration*

Les frais d'administration représentent 0,3% des provisions mathématiques d'ouverture.

✓ *Produits financiers*

Les produits financiers sont ceux générés par les actions et obligations détenues au sein du portefeuille de placements de la compagnie.

✓ *Taux d'actualisation*

Le taux retenu pour l'actualisation des résultats futurs est le taux zéro-coupons de maturité 10 ans obtenu avec le modèle de Cox Ingersoll et Ross. Celui est égal à 4,73%.

✓ *Impôts*

Le taux d'impôts sur les bénéfices est de 40%.

✓ *Participation aux bénéfices*

Le contrat est non participatif.

2) Présentation du bilan simplifié au 31/12/2012

En supposant que le compte placement permet d'équilibrer le bilan, nous avons :

Tableau 9 : Le bilan simplifié de la compagnie au 31/12/2012

Actif		Passif	
Placements	1 802 484 942	Capitaux propres	72 316 800
		Résultat	28 596 378
		Provisions mathématiques	1 701 571 764
Total	1 802 484 942	Total	1 802 484 942

3) Embedded value de la compagnie

Procédons tout d'abord au calcul de l'actif net réévalué. Celui-ci est déduit du bilan de la compagnie d'assurance au 31/12/2012 :

$$ANR = \text{Capitaux propres} + \text{Résultat de l'exercice} = 100\,913\,178 \text{ DH}$$

Pour ce qui est de la valeur du portefeuille, celle-ci est obtenue en faisant la somme des résultats actualisés avec le taux zéro-coupons de maturité 10 ans :

$$VP = \sum_{i=1}^T \frac{R_t}{(1 + 0,0473)^i} = 1\,350\,862\,736 \text{ DH}$$

Il nous reste maintenant à calculer et actualiser le coût de la marge de solvabilité de chaque année de projection et d'en faire la somme pour en déduire le coût du capital actualisé :

$$CP = 102\,359\,671 \text{ DH}$$

L'Embedded value est donc égale à :

$$EV = ANR + VP - CP = 1\,349\,416\,243 \text{ DH}$$

VI. Études de sensibilité

Le modèle élaboré, dans le cadre de la valorisation du portefeuille de contrats d'épargne, dépend de plusieurs facteurs. Pour mesurer l'impact d'une variation de ces facteurs sur la situation du portefeuille en question, nous avons examiné l'évolution de l'Embedded Value, calculée ci-haut, par rapport aux variations des variables suivantes :

- Le taux minimum garanti (TMG).
- La répartition du portefeuille d'investissement.

VI.1. Sensibilité par rapport au taux minimum garanti

En laissant les autres paramètres inchangés, nous avons décidé de suivre l'effet marginal du taux minimum garanti par la compagnie sur la valeur du portefeuille. Les résultats obtenus sont représentés dans le tableau et graphique suivants :

Tableau 10 : L'effet des variations du TMG sur l'Embedded Value

TMG	0,0%	1,5%	2,5%	3,5%	4,5%
EV	1 532 186 876	1 463 411 674	1 402 862 761	1 349 416 243	1 187 872 178
Variation	14%	8%	4%	0%	-12%

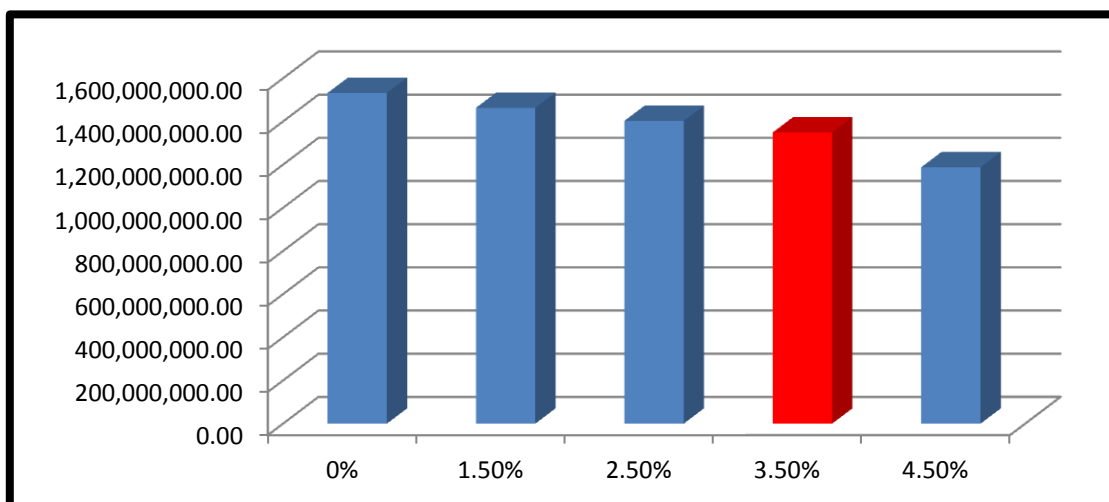


Figure 31 : L'évolution de l'Embedded Value en fonction du TMG

Nous remarquons que plus le TMG augmente plus l'Embedded Value de la compagnie diminue. En effet, une hausse des taux servis entraîne une augmentation de l'épargne constituée, pour chaque assuré, et donc de l'encours global de la compagnie. Ceci rend les engagements de l'assureur beaucoup plus importants. Ces derniers se traduisent par une rétraction des résultats projetés et donc de la valeur de la compagnie. Toutefois, il faut noter qu'une augmentation du TMG peut aussi se traduire par une augmentation de l'EV du fait que lorsque les taux servis par la compagnie sont attractifs, les assurés ne cherchent plus à racheter

leurs contrats et par conséquent les prestations par rachat deviennent moins importantes que dans le premier cas.

VI.2. Sensibilité par rapport à la répartition du portefeuille de placements

Nous allons nous intéresser à présent à l'évolution de l'Embedded value suite aux changements de l'allocation initiale d'actifs (80% en obligations et 20% en actions). Les différentes allocations testées sont les suivantes :

- 100% obligations, 0% actions.
- 90% obligations, 10% actions.
- 50% obligations, 50% actions.

D'après le graphique ci-dessous, nous remarquons que l'Embedded value augmente progressivement en fonction de la part allouée aux actifs risqués au sein du portefeuille de placements de la compagnie. Aussi, le dernier cas (50% actions) est très bénéfique pour la société puisque l'EV y est très importante. Néanmoins, cette possibilité ne peut être envisagée car, comme nous l'avons cité dans le cadre général du travail, la réglementation marocaine interdit aux assureurs vie de dépasser certaines limitations en termes d'allocations des titres risqués notamment les actions.

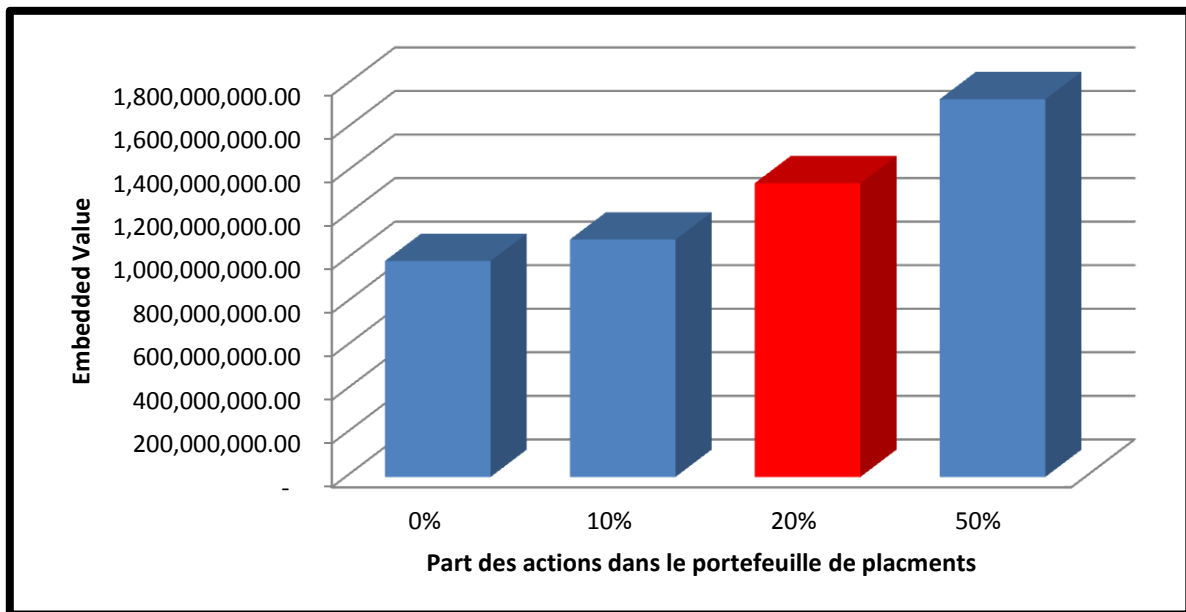


Figure 32 : L'évolution de l'Embedded Value en fonction de la répartition du portefeuille d'investissement

Conclusion générale

L'objectif du présent mémoire a été de mettre en place un outil de gestion actif-passif pour un portefeuille de contrats d'épargne libellés en dirhams.

Après avoir parcouru le cadre général et réglementaire du secteur de l'assurance vie, nous avons développé un générateur de scénarios économiques dans lequel nous avons sélectionné plusieurs modèles permettant de modéliser, de manière plus ou moins correcte, les différents postes de l'actif. Il s'agit du modèle de Cox, Ingersoll et Ross pour la modélisation du taux sans risque et du modèle de Hardy pour la modélisation du rendement des actions.

Le choix de ces modèles nous a permis de simuler l'évolution des flux générés par le portefeuille de placements (constitué de 20% actions et de 80% obligations), tout comme de modéliser l'interaction de celui-ci avec certains éléments du passif (taux de rachat conjoncturel, TMG).

Pour la modélisation du passif, nous avons proposé un estimateur non paramétrique (Kaplan Meier) pour déterminer une loi des taux de rachat structurel en fonction de l'ancienneté des contrats. Par contre, aucune modélisation n'a été effectuée pour les autres facteurs entrant dans la valorisation des engagements de l'assureur, à savoir la mortalité et le rachat conjoncturel.

En effet :

- pour représenter la mortalité des assurés, nous avons eu recours à la table de mortalité réglementaire « TD 88-90 » ;
- pour ce qui est du rachat conjoncturel, nous avons utilisé la formule proposée par l'ACP dans le cadre des études QIS de la nouvelle réforme Solvency 2.

Ensuite, nous nous sommes consacrés à la projection du résultat du portefeuille étudié, sur un horizon de 40 ans, ainsi qu'au calcul de l'Embedded Value sous certaines hypothèses simplificatrices.

Enfin, dans la perspective de tester la pertinence de notre modèle, des études de sensibilité de la valeur de la compagnie ont été menées, relativement au TMG et à la répartition de l'actif entre actions et obligations. Celles-ci ont montré que l'Embedded Value obtenue dépendait fortement des caractéristiques du contrat (TMG) et de celles du portefeuille d'actif. Ainsi, le modèle développé dans le cadre de notre analyse n'est pas très réaliste car il est basé sur des hypothèses audacieuses, parmi lesquelles nous citons :

- Un taux minimum garanti est supposé constant tout au long de la période de projection.
- Un portefeuille de placement est composé uniquement d'actions et d'obligations.
- Un portefeuille en run-off ne prenant pas en compte les nouvelles entrées.

En perspective, ce travail peut faire l'objet de plusieurs améliorations telles que l'intégration d'autres classes d'actifs au niveau du portefeuille de placements de la compagnie

comme l'immobilier, le monétaire, les obligations privées... Il pourrait également être intéressant de rendre certains paramètres variables dans le temps, notamment le taux servi pour une meilleure estimation du taux de rachat conjoncturel. L'étude pourrait aussi s'étendre à une modélisation du phénomène de mortalité à l'aide de certains modèles comme celui de Lee Carter, et cela pour établir une table de mortalité propre au portefeuille des assurés étudié.

Ce travail peut également être le point de départ pour une étude d'allocation optimale d'actifs consistant à rechercher la meilleure répartition entre les différentes classes d'actifs (actions, obligations, monétaire,...) et permettant de maximiser la rentabilité de la compagnie pour un niveau de risque supporté.

Bibliographie

Articles, publications et rapports

- M. Hardy,
A Regime-Switching Model of Long-Term Stock Returns,
North American Actuarial Journal 5, 41-53, 2000.
- C. Augereau,
La logique floue appliquée au phénomène de rachat en assurance vie,
IMA, 2010.
- A. Burger,
La gestion actif-passif en assurance vie : Couverture du risque de taux par des produits dérivés.
Thèse de maîtrise, Université Paris Dauphine, 1999.
- F. Desauty,
Le risque de rachat d'un contrat d'assurance vie,
ISUP, 1997.
- E. Ohnouna,
Evaluation « Best Estimate » de contrats d'épargne en euros,
2008.
- G. Raccah,
Utilisation et calibrage de modélisations financières appliquées au contrat d'assurance vie,
ISUP, 2007.

Cours

- A. Oulidi, « *Assurance vie* », INSEA, 2011.
- A. Chaoubi, « *Modèles de durée de vie* », INSEA, 2012.
- F. Marri, « *Séries temporelles* », INSEA, 2012.
- Y. El Qalli, « *Econométrie de la finance* », INSEA, 2012.
- Y. El Qalli, « *Processus stochastiques appliqués à la finance* », INSEA, 2012.

Ouvrages

- F. Le Vallois, P. Palsky, B. Paris, A. Tosetti,
Gestion actif passif en assurance vie, réglementation, outils, méthodes,
Economica, 2003.
- F. Planchet, P. Therond, A. Kamega,
Scénarios économiques en assurance. Modélisation et simulation,
Economica, 2009.
- F. Planchet, P. Therond,

Modèles de durée, applications actuarielles,
Economica, 2006.

- A. Faleh, D. Rullière, F. Planchet,
Scénarios Economiques et Techniques d'Allocation d'Actif - Applications aux assurances et aux fonds de pension,
Economica, 2012
- P. Petauton,
Théorie et pratique de l'assurance vie,
Dunod, Paris, 2004.
- J. Hull,
Options, Futures and Other derivatives,
New Jersey : Prentice-Hall, 5th. Edition, 2000.

Sites web

- www.ressources-actuarielles.com
- www.fidarocgt.com
- www.bkam.ma
- www.casablanca-bourse.com

ANNEXES

ANNEXE I : La courbe des taux zéro-coupons Marocaine au 31/12/2012

Maturité	Taux zéro-coupons
1M	3,549%
3M	4,005%
6M	4,208%
12M	4,306%
18M	4,589%
2A	4,589%
3A	4,672%
4A	4,755%
5A	4,839%
6A	4,898%
7A	4,956%
8A	5,015%
9A	5,074%
10A	5,133%
12A	5,241%
15A	5,350%
20A	5,350%
25A	5,374%
30A	5,400%

ANNEXE II : Les tables de mortalité TD 88-90 et TV 88-90

Âge x	Nombres de vivants	
	TD 88-90	TV 88-90
0	100000	100000
1	99129	99352
2	99057	99294
3	99010	99261
4	98977	99236
5	98948	99214
6	98921	99194
7	98897	99177
8	98876	99161
9	98855	99145
10	98835	99129
11	98814	99112
12	98793	99096
13	98771	99081
14	98745	99062
15	98712	99041
16	98667	99018
17	98606	98989
18	98520	98955
19	98406	98913
20	98277	98869
21	98137	98823
22	97987	98778
23	97830	98734
24	97677	98689
25	97524	98640
26	97373	98590
27	97222	98537
28	97070	98482
29	96916	98428
30	96759	98371
31	96597	98310
32	96429	98247
33	96255	98182
34	96071	98111
35	95878	98031
36	95676	97942
37	95463	97851
38	95237	97753
39	94997	97648
40	94746	97534
41	94476	97413
42	94182	97282

43	93868	97138
44	93515	96981
45	93133	96810
46	92727	96622
47	92295	96424
48	91833	96218
49	91332	95995
50	90778	95752
51	90171	95488
52	89511	95202
53	88791	94892
54	88011	94560
55	87165	94215
56	96241	93848
57	85256	93447
58	84211	93014
59	83083	92545
60	81884	92050
61	80602	91523
62	79243	90954
63	77807	90343
64	76295	89687
65	74720	88978
66	73075	88226
67	71366	87409
68	69559	86513
69	67655	85522
70	65649	84440
71	63543	83251
72	61285	81936
73	58911	80484
74	56416	78880
75	53818	77104
76	51086	75136
77	48251	72981
78	45284	70597
79	42203	67962
80	39041	65043
81	35824	61852
82	32518	58379
83	29220	54614
84	25962	50625
85	22780	46455
86	19725	42130
87	16843	37738
88	14133	33340
89	11624	28980
90	9389	24739
91	7438	20704
92	5763	16959

93	4350	13580
94	3211	10636
95	2315	8118
96	1635	6057
97	1115	4378
98	740	3096
99	453	2184
100	263	1479
101	145	961
102	76	599
103	37	358
104	17	205
105	7	113
106	2	59
107		30
108		14
109		6
110		2