



المندوبية السامية للتخطيط
HAUT-COMMISSARIAT AU PLAN

ROYAUME DU MAROC

*_*_*_*_*

HAUT COMMISSARIAT AU PLAN

*_*_*_*_*_*_*_*

INSTITUT NATIONAL
DE STATISTIQUE ET D'ECONOMIE APPLIQUEE

INSEA



Projet de Fin d'Etudes

**Rentabilité des branches de l'assurance non-vie :
Estimation du Ratio économique combiné**

**Préparé par : Mme Faouzia Alami Zajli
M. Aimane Sounaine**

**Sous la direction de : M. Fouad Marri (INSEA)
M. Adil Bensouna (AXA ASSURANCE MAROC)
M. Imad Eddine Alouan (AXA ASSURANCE MAROC)**

Soutenu publiquement comme exigence partielle en vue de l'obtention du

Diplôme d'Ingénieur d'Etat
Filière : Actuariat-Finance

Devant le jury composé de :

- **M. Fouad Marri (INSEA)**
- **M. Khalil Said (INSEA)**
- **M. Adil Bensouna (AXA ASSURANCE MAROC)**
- **M. Imad Eddine Alouan (AXA ASSURANCE MAROC)**

Résumé

L'analyse de la **rentabilité** économique de l'activité d'une compagnie d'assurance permet aux actionnaires d'avoir une idée sur le rendement des capitaux investis tels que le capital de solvabilité requis, ainsi que sur la valeur ajoutée créée par les produits de la compagnie. Il s'agit dans cette étude d'évaluer la rentabilité technique des produits de l'assurance non-vie à l'aide de l'indicateur de rentabilité économique, à savoir le ratio économique combiné (**ECR**). Nous appliquerons dans un premier temps les méthodes de provisionnement pour en tirer la charge ultime ainsi que le **Best Estimate** Réserve. Dans la deuxième partie nous examinerons les dépendances entre les branches de l'assurance et le **capital de solvabilité requis** selon deux approches, l'une se basant sur les paramètres de l'EIOPA, et l'autre se basant sur l'estimation de ces paramètres en les adaptant aux données d'AXA Assurance Maroc. Ensuite, à l'aide de ces données nous calculerons le ratio économique combiné relatif à chaque branche puis le ratio économique global de l'activité non-vie pour en déduire la rentabilité de souscription.

Mots clés : Solvabilité II, Capital de solvabilité requis, Provisionnement, Ratio économique combiné, Rentabilité, Best Estimate, Copules, Assurance non-vie.

Dédicace

Je dédie ce travail en premier lieu à mes chers parents qui m'ont soutenue tout au long de mon cursus scolaire et universitaire.

A mon frère Mehdi.

A ma chère famille.

A mes meilleurs amis.

A tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à la réalisation de ce projet.

Que ce modeste travail puisse vous exprimer ma profonde gratitude et reconnaissance.

ALAMI ZAJLI Fouzia

À mes très chers parents, pour qui aucune dédicace ne saurait exprimer mon amour éternel et ma considération pour leurs sacrifices,

À Amal et Nabil,

Et à tous mes amis à l'INSEA et ailleurs,

Que ce modeste travail soit le fruit du soutien et de l'amour que vous me portez,

SOUNAINE Aimane

Remerciements

Nous adressons notre profonde gratitude à notre encadrant interne **M. MARRI Fouad** d'avoir accepté de diriger ce travail, nous tenons aussi à lui être reconnaissant pour ses précieux conseils.

Nous tenons à remercier chaleureusement **M. DBICH Abderrahim**, Deputy CEO d'AXA Assurance Maroc, d'avoir accepté de nous accueillir au sein de son équipe.

Le respect et gratitude vont aussi à **M. ALOUAN Imad Eddine** et **M. BENSOUNA ADIL** pour leurs conseils et orientations qui nous ont été d'une grande importance tout au long de la réalisation de notre projet.

Nous tenons également à remercier **M. SAID Khalil** de nous avoir honorés en acceptant d'évaluer notre travail.

Enfin, nous remercions l'ensemble du corps professoral et administratif de l'INSEA pour leur contribution à notre formation.

Table des matières

Résumé.....	- 3 -
Dédicace.....	- 4 -
Remerciements.....	- 5 -
Liste des abréviations	- 9 -
Liste des figures.....	- 10 -
Liste des tableaux.....	- 12 -
Introduction	- 13 -
<i>Chapitre 1 : Cadre général</i>	- 14 -
I. Axa Assurance Maroc	- 15 -
1. Présentation.....	- 15 -
2. Historique.....	- 15 -
3. Les chiffres clés	- 16 -
4. Métiers	- 16 -
5. Vision.....	- 18 -
II. L'assurance non-vie au Maroc.....	- 19 -
1. Primes émises	- 19 -
2. Ratio combiné	- 20 -
<i>Chapitre 2 : Cadre théorique</i>	- 21 -
I. Provisionnement.....	- 22 -
1. Chain Ladder	- 22 -
2. London Chain	- 23 -
3. Méthode GLM.....	- 24 -
4. Choix de la méthode de provisionnement	- 25 -
II. Mesure de la dépendance entre les branches	- 25 -
1. Notions de dépendance et de corrélation.....	- 25 -
1.1. Le coefficient de corrélation de Pearson	- 26 -
1.2. Le tau de Kendall	- 26 -

1.3.	Le rho de Spearman.....	- 26 -
2.	Théorie des copules	- 27 -
2.1.	Définition et généralités	- 27 -
2.2.	Copules archimédiennes	- 29 -
2.3.	Calibrage d'une copule	- 30 -
2.3.1.	Méthode des moments.....	- 31 -
2.3.2.	Maximum de vraisemblance	- 31 -
2.3.3.	La méthode CML (Maximum de vraisemblance canonique)	- 31 -
2.4.	Test d'adéquation pour le choix de la copule	- 32 -
III.	Calcul du capital de solvabilité requis en non-vie	- 32 -
1.	Les piliers de la solvabilité II	- 32 -
2.1.	Les provisions techniques.....	- 33 -
2.2.	Le Best Estimate	- 33 -
2.3.	Risk Margin	- 34 -
3.	Solvency capital Requirement (SCR).....	- 34 -
4.	Risque de souscription non-vie.....	- 36 -
4.1.	Estimation de l'écart type pour le risque de réserve	- 39 -
4.2.	Estimation de l'écart type pour le risque de prime :	- 46 -
VI.	Etude de la rentabilité technique des branches IARD à l'aide du ECR (economic combined ratio)	- 48 -
1.	Ratio combiné	- 48 -
2.	Economic combined ratio	- 49 -
2.1.	Ajustement CAT	- 50 -
2.2.	Time value.....	- 50 -
2.3.	Exigence des actionnaires	- 51 -
2.4.	La taxe	- 51 -
	<i>Chapitre 3 : Cadre pratique</i>	- 52 -
I.	Provisionnement.....	- 53 -
1.	Chain Ladder	- 53 -
2.	London Chain	- 56 -
3.	GLM.....	- 57 -
II.	Mesure de dépendance	- 58 -

III.	Calcul du capital de solvabilité requis.....	- 62 -
1.	Risque de réserve.....	- 62 -
2.	Risque prime :	- 65 -
3.	Best Estimate prime.....	- 67 -
4.	Best Estimate Réserve	- 67 -
5.	Calcul du capital de solvabilité requis en non-vie	- 68 -
VI.	Rentabilité des branches de l'assurance non-vie.....	- 68 -
1.	Time value et coût du capital.....	- 69 -
2.	CAT Adjustment et taxe	- 70 -
	Conclusion.....	- 71 -
	Bibliographie	- 72 -
	ANNEXE 1 : Vérification des hypothèses CHAIN LADDER.....	- 73 -
	ANNEXE 2 : Calibration des copules archimédiennes pour chaque couple de LoB .-	- 80 -

Liste des abréviations

ADC: Autres dommages corporels

Adj: Ajustement

AT : Accident de travail

AUTO : Automobile

BE : Best Estimate

CAT : catastrophe

CoC : Coût du capital

CL : Chain Ladder

DAB : Dommages aux biens

ECR: Economic Combined Ratio

EIOPA: European Insurance and Occupational Pensions Authority

GLM: Generalized linear models

LC: London Chain

LoB: Line of business

MEDAF : Modèle d'Évaluation des Actifs Financiers

RC : Responsabilité civile

SCE : Somme des carrés des erreurs

SCR: Solvency Capital Requirement

VaR: Value at Risk

Liste des figures

Figure 1 : Les chiffres clés d'AXA Assurance Maroc.....	- 16 -
Figure 2 : Métiers Axa Assurance Maroc	- 17 -
Figure 3: Expertises AXA Assurance Maroc	- 18 -
Figure 4: Répartition des primes émises par catégorie d'assurances non-vie en 2016 et 2017.	- 19 -
Figure 5: Composantes du SCR	- 35 -
Figure 6: Ratio combiné et résultat de souscription	- 49 -
Figure 7 : composantes ECR.....	- 50 -
Figure 8 : Triangle des règlements cumulés de la branche AT	- 53 -
Figure 9 : vérification de l'hypothèse H1	- 54 -
Figure 10 : Vérification de l'hypothèse (H2) pour $j=0,1,2$	- 54 -
Figure 11 : Vérification de l'hypothèse (H2) pour $j=3,..,8$	- 55 -
Figure 12 : triangle complété des règlements cumulés de la branche AT	- 55 -
Figure 13 : Matrice de nuages de points des règlements entre les branches	- 59 -
Figure 14 : Matrice des tau de Kendall	- 60 -
Figure 15: Sorties SAS de PROC COPULA pour le couple AT ; ADC.....	- 61 -
Figure 16 : facteurs de développement Chain Ladder pour la branche Accidents de Travail.....	- 63 -
Figure 17 : Nouveaux facteurs de développement au temps l	- 63 -
Figure 18 : Simulation de la nouvelle diagonale $C_{(i,j+1)}$	- 64 -
Figure 19 : Nouveaux facteurs de développement au temps $l+1$	- 64 -
Figure 20: Ajustement de la distribution de la volatilité par les lois usuelles-AT	- 65 -
Figure 21: Critère AICC-distribution volatilité-AT	- 66 -
Figure 22: SCR selon les deux approches.....	- 68 -
Figure 23 : coût du capital	- 69 -
Figure 24 : Time value et coût du capital pour AT.....	- 70 -
Figure 25 : ECR par lob.....	- 70 -
Figure 26: (H1) RC	- 73 -
Figure 27 : (H1) Incapacité	- 74 -
Figure 28 : (H1) ADC	- 75 -
Figure 29 : (H1) AUTO.....	- 76 -
Figure 30: (H1) INCADB	- 77 -
Figure 31 : (H1) AUTOFLOT.....	- 78 -
Figure 32 : (H1) MALADIE	- 79 -
Figure 33 : AT,ADC	- 80 -
Figure 34 :AT,AUTO.....	- 80 -

Figure 35 : AT,AUTOFLOT.....	- 80 -
Figure 36 : AT, INCAPACITE	- 81 -
Figure 37 : AT, INCDAB.....	- 81 -
Figure 38 : AT, RC	- 81 -
Figure 39 : ADC, AUTO	- 82 -
Figure 40 : ADC, INCAPACITE	- 82 -
Figure 41 : ADC, R.....	- 82 -
Figure 42 : AUTO, AUTOFLOT.....	- 83 -
Figure 43 : AUTO, INCDAB	- 83 -
Figure 44 : AUTO, RC.....	- 83 -
Figure 45 : AUTOFLOT, INCDAB	- 84 -
Figure 46 : AUTOFLOT, RC.....	- 84 -
Figure 47 : INCAPACITE, RC.....	- 84 -
Figure 48 : INCDAB, RC.....	- 85 -

Liste des tableaux

Tableau 1: Evolution des primes émises non-vie entre 2016-2017	- 19 -
Tableau 2: Evolution des ratios S/P et S/P combiné par sous-catégorie des opérations non vie entre 2016-2017	- 20 -
Tableau 3: Exemple du triangle de règlement.....	- 22 -
Tableau 4 : Matrice de corrélation entre Risque-EIOPA	- 36 -
Tableau 5: matrice de corrélation entre LoB-EIOPA.....	- 37 -
Tableau 6: Réserves pour les branches non-vie par année de survenance-CL	- 56 -
Tableau 7: Paramètres de la méthode London Chain	- 56 -
Tableau 8 : Réserves pour les branches non-vie par année de survenance-LC	- 57 -
Tableau 9 : Réserves pour les branches non-vie par année de survenance-GLM/lognormale.....	- 57 -
Tableau 10 : Réserves pour les branches non-vie par année de survenance-GLM/GAMMA	- 58 -
Tableau 11 : SCE des méthodes de provisionnement par LoB	- 58 -
Tableau 12: Couples des LoB corrélés	- 60 -
Tableau 13 : Copules retenues par couple de LoB	- 61 -
Tableau 14 : Dépendance entre lobs.....	- 62 -
Tableau 15 : Validation de l'hypothèse de Merz-Wüthrich pour les différents LoBs-	63
-	
Tableau 16: σ_{res} réglementaires et estimées du risque de provisionnement à horizon un an	- 64 -
Tableau 17 : Comparaison entre les valeurs réglementaires et les valeurs estimées. ...	66 -
Tableau 18 : Best Estimate Prime par LoB.....	- 67 -
Tableau 19 : Best Estimate réserve par LoB	- 68 -

Introduction

Les actionnaires, en immobilisant les capitaux nécessaires permettant à l'assureur de rester solvable, s'attendent naturellement à un retour sur investissement. L'assureur, de sa part, veillera à réaliser des profits de son activité de souscription pour faire face aux exigences des actionnaires. L'étude de la rentabilité des produits d'assurance l'aidera donc à déterminer la profitabilité de son activité et à revoir sa politique de souscription au cas où un produit s'avère non rentable. Le ratio combiné permet de savoir si les primes encaissées ont pu couvrir les charges des sinistres, mais il ne permet pas d'expliquer la rentabilité technique des branches puisque ce dernier ignore plusieurs caractéristiques. Le capital de solvabilité requis est un exemple des caractéristiques qu'ignore le ratio combiné. Ce capital est déterminé selon la directive Solvabilité II, mais dans notre travail, nous avons ajouté des ajustements à cette directive en estimant de nouveaux paramètres décrivant mieux nos données. L'objectif de ce travail est ainsi d'évaluer la rentabilité technique de l'activité non-vie d'AXA Assurance Maroc à travers le calcul du ECR.

Chapitre 1 : Cadre général

I. Axa Assurance Maroc

1. Présentation

“Chaque jour, nous nous engageons afin d’offrir la meilleure qualité de service à nos clients. Pour y parvenir, nous devons sans cesse intensifier nos efforts en nous appuyant sur les trois attitudes fondamentales AXA « disponible, attentionné et fiable ». Ainsi, il s’agit d’aller au-delà des promesses et d’apporter des preuves concrètes de notre ambition à travers des actions que nous mettons en œuvre. En tant qu’entreprise responsable, nous veillons à agir de manière exemplaire et à entretenir des relations transparentes avec nos assurés et nos partenaires. Portée au quotidien par nos collaborateurs et nos agents généraux, cette démarche vers l’excellence est aujourd’hui essentielle pour faire face aux défis à venir. ”

Philippe Rocard

Président Directeur Général AXA Assurance Maroc

2. Historique

1996 : Axa débute ses activités au Maroc par le rachat de "Assurance Al Amane" => la naissance de AXA Al Amane.

1999 : Accord de partenariat entre AXA et ONA, "Axa Al Amane " devient Axa-ONA.

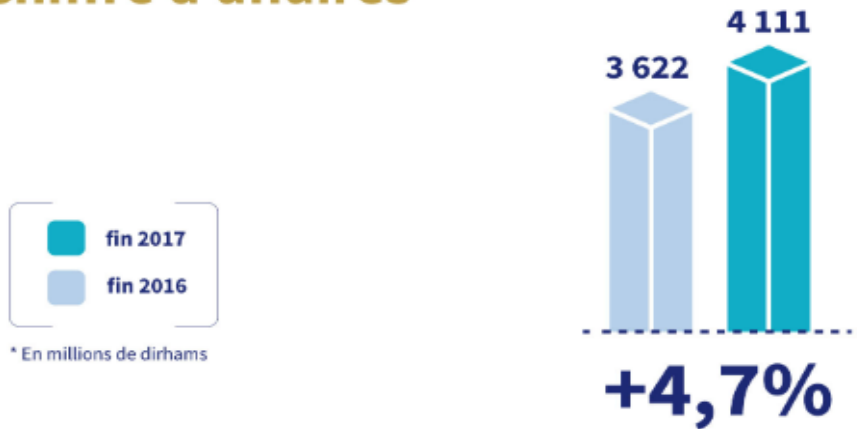
2000 : Création d’Axa Assurance Maroc par fusion entre Axa Al Amane et la compagnie Africaine d’Assurance.

2006 : Axa Assurance Maroc devient filiale à 100% du Groupe AXA

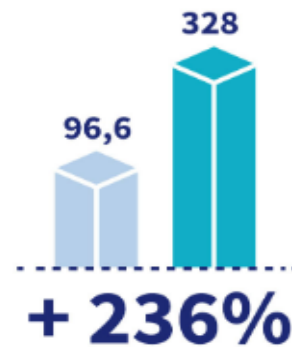
2008 : Axa Assurance Maroc lance sa nouvelle signature pour accompagner le projet "Ambition 2012 "

3. Les chiffres clés

Chiffre d'affaires



Résultat net



Répartition du CA d'AAM à fin 2017

(en millions de dhs)

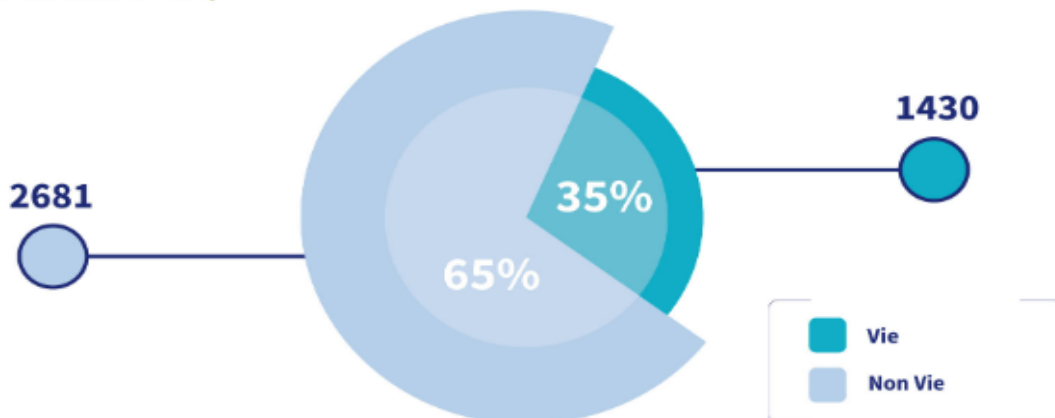


Figure 1 : Les chiffres clés d'AXA Assurance Maroc

4. Métiers

Protéger les clients : Particuliers et entreprises pour leur permettre de vivre et d'entreprendre plus sereinement, grâce à nos deux expertises :

l'assurance vie, épargne, retraite et l'assurance dommages.

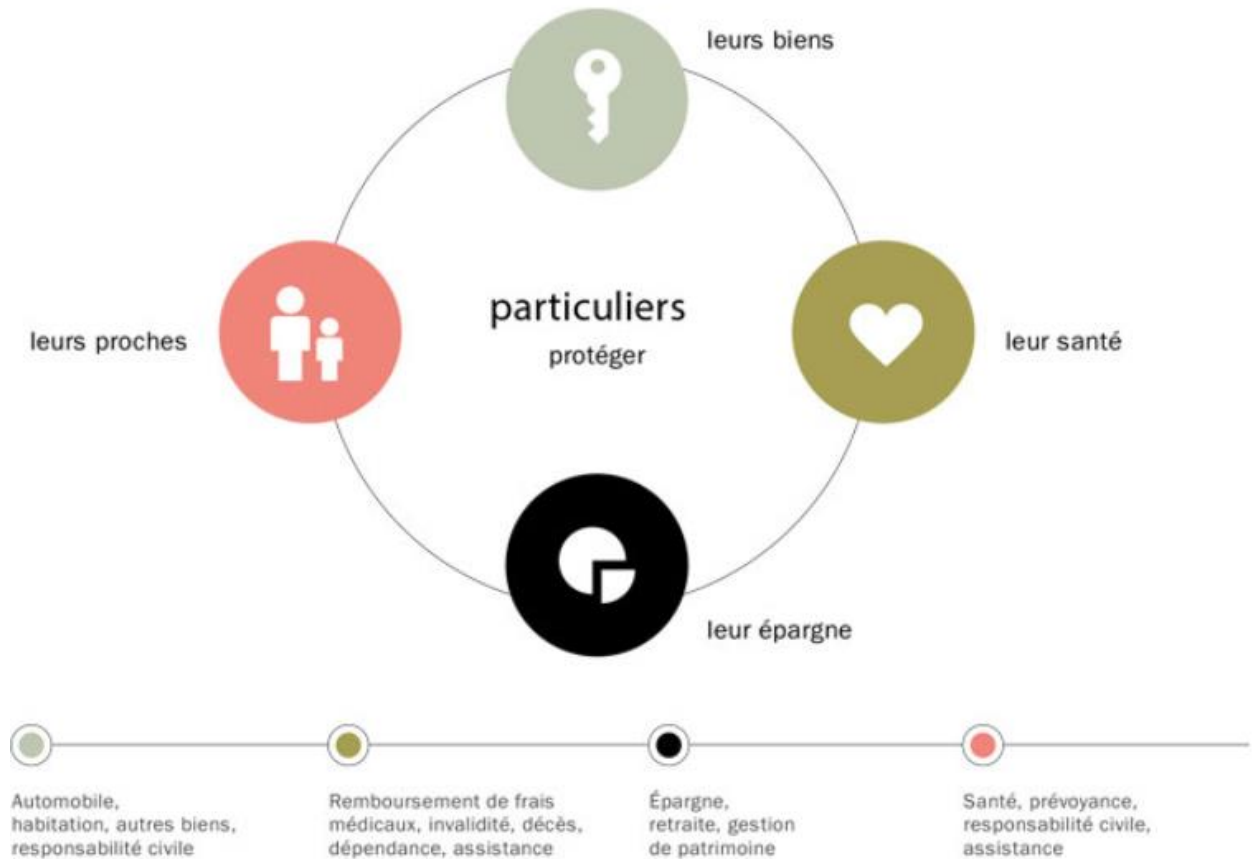


Figure 2 : Métiers Axa Assurance Maroc

Deux expertises :

✓ **Assurance vie, épargne, retraite**

Les contrats individuels et collectifs d'assurance vie offrent, d'une part, une protection de santé (gestion et remboursement des frais médicaux) et de prévoyance (décès et invalidité) et, de l'autre, une gestion de l'épargne. Le premier aspect répond aux risques qui portent atteinte à la personne.

Le second permet de financer un projet, une retraite ou de transmettre un patrimoine.

✓ **Assurance dommages**

Cette activité protège contre les dommages aux biens – automobile et habitation par exemple – et couvre la responsabilité – tant civile que

professionnelle. Elle se décline très largement auprès des particuliers, d'une part, et des entreprises, d'autre part. L'assistance en fait partie, tout comme les lignes très spécialisées d'assurances marine et aviation.

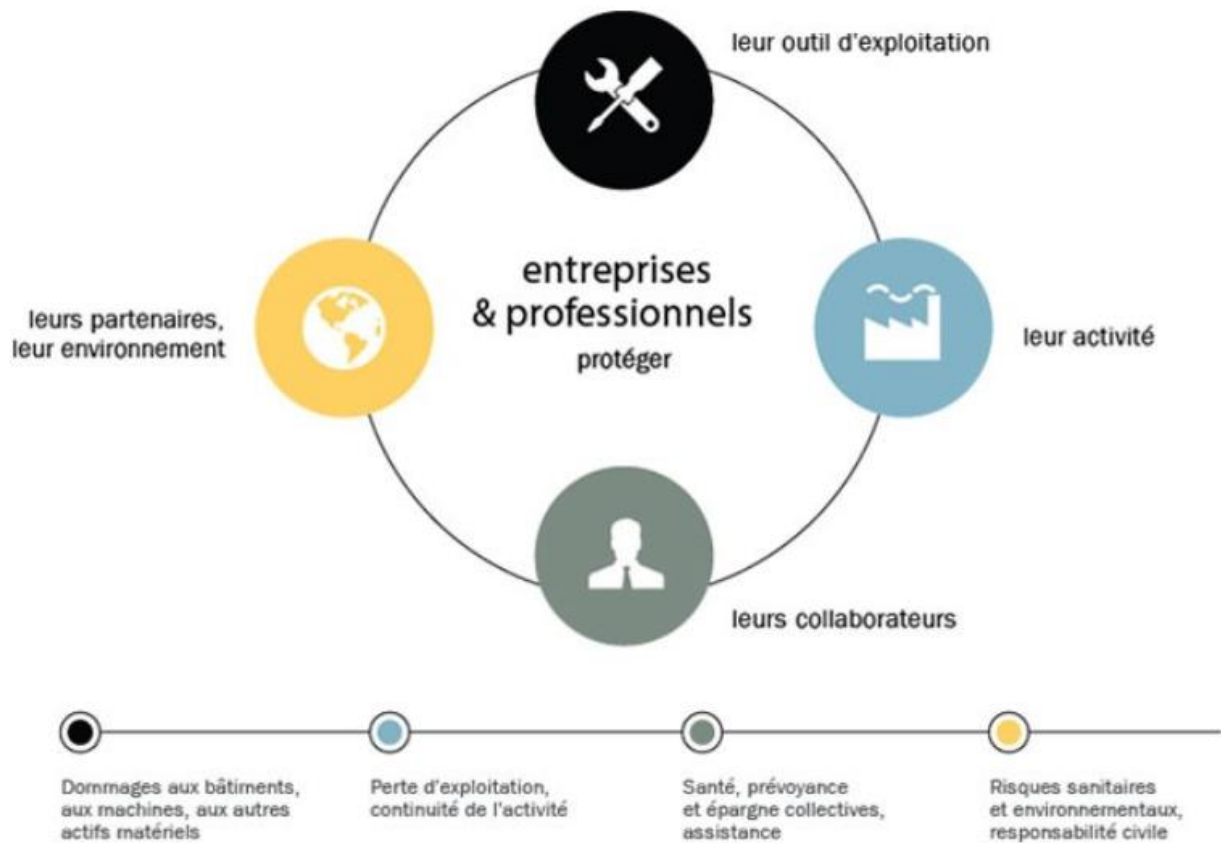


Figure 3: Expertises AXA Assurance Maroc

5. Vision

AXA Assurance Maroc aide ses clients à vivre confiants jour après jour, en les protégeant, en protégeant leurs familles et leurs biens contre les risques, et en gérant leur épargne. Parce que chaque jour est différent, elle accompagne ses clients à travers les petites et les grandes difficultés de la vie et leur donne les moyens d'entreprendre et de préparer l'avenir en toute sérénité.

II. L'assurance non-vie au Maroc

1. Primes émises

Les primes émises relatives aux opérations d'assurances non-vie ont enregistré une croissance de 5,5% par rapport à 2016. Elles sont passées ainsi de 20 622,3 millions de dirhams en 2016 pour s'établir à 21 751,0 millions à fin 2017. Elles représentent 56,2% des émissions totales contre 59,1% en 2016.

En millions de dirhams	2016	2017
Primes émises	20 622,3	21 751,0
Taux d'accroissement	4,9%	5,5%
Part dans les émissions totales	59,1%	56,2%

Tableau 1: Evolution des primes émises non-vie entre 2016-2017

Plus de 76,4% des émissions de primes non-vie proviennent des catégories d'assurances véhicules terrestres à moteur, accidents corporels et accidents du travail, dont les parts dans les l'ensemble des émissions non-vie atteignent respectivement 48,2%, 18,0% et 10,2%.

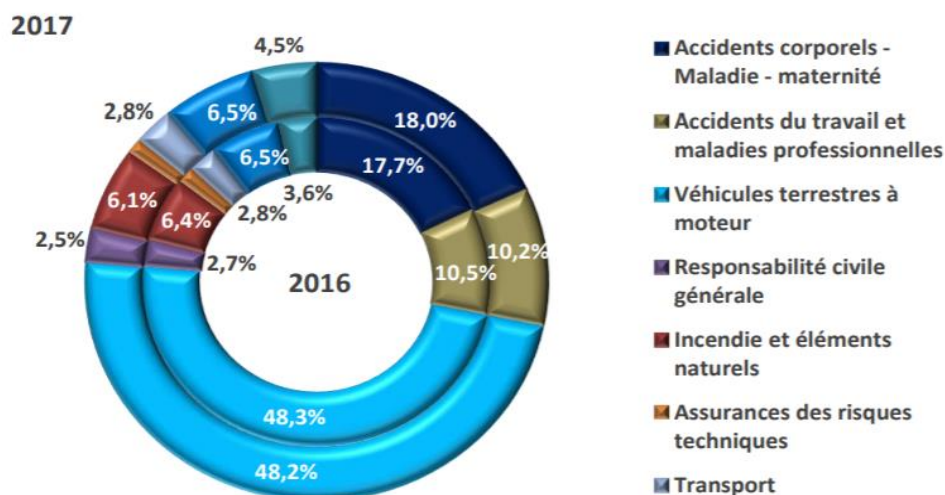


Figure 4: Répartition des primes émises par catégorie d'assurances non-vie en 2016 et 2017.

2. Ratio combiné

Le ratio combiné de la branche non-vie a connu une baisse conséquente de 3,7 points en 2017 pour s'établir à 96,2% contre 99,9% en 2016. Une amélioration due à une augmentation des primes plus importante que celle des prestations et frais. Ce ratio a baissé pour la plupart des catégories, exceptés l'Accidents du travail et maladies professionnelles, Accidents corporels-Maladie-maternité et Assurances des risques techniques qui ont enregistré des variations positives respectives de 19,9%, 1,0% et 214,0%. Notons, par ailleurs, que les S/P combinés de ces trois sous-catégories continuent de manière structurelle à se situer à des niveaux élevés, soit respectivement 137,5%, 107,5% et 134,4%.

	2016		2017		Variation	
	Ratio combiné	S/P	Ratio combiné	S/P	Ratio combiné	S/P
Véhicules terrestres à moteur	93,7%	63,7%	93,0%	64,1%	-0,7%	0,6%
dont responsabilité civile	88,8%	58,5%	87,1%	57,9%	-1,9%	-1,0%
Accidents du travail et maladies professionnelles	114,7%	80,0%	137,5%	103,2%	19,9%	29,0%
Accidents corporels - Maladie - maternité	106,4%	81,4%	107,5%	82,5%	1,0%	1,4%
dont maladie-maternité	120,3%	96,3%	119,0%	95,2%	-1,1%	-1,1%
Responsabilité civile générale	87,0%	51,6%	60,2%	29,0%	-30,8%	-43,8%
Incendie et éléments naturels	81,9%	52,1%	72,0%	44,6%	-12,1%	-14,4%
Assurances des risques techniques	42,8%	12,3%	134,4%	99,9%	214,0%	712,2%
Transport	124,2%	87,1%	68,3%	36,9%	-45,0%	-57,6%
Assistance - crédit - caution	102,6%	65,2%	91,0%	52,4%	-11,3%	-19,6%
Autres opérations non vie	157,7%	126,3%	56,1%	36,5%	-64,4%	-71,1%
Assurances non vie	99,9%	69,7%	96,2%	67,1%	-3,7%	-3,7%

Tableau 2: Evolution des ratios S/P et S/P combiné par sous-catégorie des opérations non vie entre 2016-2017

Chapitre 2 : Cadre théorique

I. Provisionnement

Les sociétés d'assurances, contrairement à d'autres sociétés, ne vendent pas de produits en tant que tels, mais plutôt des promesses à l'assuré de régler les prestations futures. Par conséquent, les assureurs ne connaissent pas les coûts de leur service, mais s'appuient sur des données historiques et les méthodes de provisionnement pour prédire leur engagement futur.

Les données historiques des assurances sont souvent présentées sous la forme d'un triangle, montrant l'évolution des montants de sinistres dans le temps pour chaque année de règlement du sinistre. Les données sur les diagonales présentent des paiements dans la même année calendaire.

Année de survenance	Année de développement					
	1	2	...	j	...	n
1	$C_{1,1}$	$C_{1,2}$...	$C_{1,j}$...	$C_{1,n}$
2	$C_{2,1}$	$C_{2,2}$...	$C_{2,j}$...	
...		
i	$C_{i,1}$	$C_{i,2}$...			
...				
n	$C_{n,1}$					

Tableau 3: Exemple du triangle de règlement

1. Chain Ladder

La méthode de Chain Ladder est une méthode déterministe permettant de prédire les paiements futurs en se basant sur les données d'aujourd'hui. Elle suppose que la proportion d'évolution des règlements cumulés d'une année

de développement à l'autre est la même. C'est-à-dire, elle consiste à supposer que les $C_{i,j}$ sont liés par la formule suivante :

$$\forall i \in [1 : n], \forall j \in [1 : n-1] : C_{i,j+1} = f_j * C_{i,j}$$

Cette proportion d'évolution des règlements cumulés est dite facteur de développement et est calculée par :

$$\hat{f}_j = \frac{\sum_{i=1}^{n-j} C_{i,j+1}}{\sum_{i=1}^{n-j} C_{i,j}}$$

Ces facteurs sont donc utilisés pour compléter le triangle inférieur qui représente les paiements futurs :

$$\forall i+j \geq n+1: \widehat{C}_{i,j} = \prod_{k=n-i}^{j-1} \hat{f}_k * C_{i,n-i}$$

Une fois le triangle inférieur complété, les réserves par année de survenance et la réserve totale peuvent être estimées par les équations suivantes :

$$\forall i \in [1: n]: \widehat{R}_i = \widehat{C}_{i,n} - C_{i,n-i} \quad \text{et} \quad \widehat{R} = \sum_{i=1}^n \widehat{R}_i$$

Mais avant d'appliquer cette méthode il faut au préalable vérifier les hypothèses suivantes :

H1 : $\forall j = 1, \dots, n-1$ les facteurs de développement individuels $f_{i,j}$ sont indépendants de l'année de survenance i .

H2 : La droite de régression des couples $(C_{i,j}; C_{i,j+1})_{i=1,\dots,n-1}$ passe par l'origine et son coefficient de détermination est proche de 1.

2. London Chain

Contrairement à la méthode de Chain Ladder qui ne peut être appliquée que lorsque les couples $(C_{i,j}; C_{i,j+1})_{i=1,\dots,n-1}$ sont sensiblement alignés sur une droite passant par l'origine, la méthode de London Chain suppose que la dynamique des $C_{i,j+1}$ est de la forme :

$$C_{i,j+1} = \lambda_j * C_{i,j} + \alpha_j \quad \text{Avec } i=1,\dots,n \text{ et } j=1,\dots,n-1$$

Cette méthode nécessite donc l'estimation des paramètres λ_j et α_j par la méthode des moindres carrés ordinaires, en minimisant la fonction :

$$(\hat{\lambda}_j, \hat{\alpha}_j) = \operatorname{argmin} \left\{ \sum_{i=1}^{n-j} (C_{i,j+1} - \lambda_j * C_{i,j} - \alpha_j)^2 \right\}$$

On obtient alors : $\hat{\lambda}_j = \frac{\frac{1}{n-j} * \sum_{i=1}^{n-j} C_{i,j} * C_{i,j+1} - \bar{C}_j * \bar{C}_{j+1}}{\frac{1}{n-j} * \sum_{i=1}^{n-j} C_{i,j}^2 - \bar{C}_j^2}$ et $\hat{\alpha}_j = \bar{C}_{j+1} - \hat{\lambda}_j * \bar{C}_j$

Avec $\bar{C}_j = \frac{1}{n-j} * \sum_{i=1}^{n-j} C_{i,j}$ et $\bar{C}_{j+1} = \frac{1}{n-j} * \sum_{i=1}^{n-j} C_{i,j+1}$ les moyennes sur n-j valeurs des colonnes j et j+1.

3. Méthode GLM

La modélisation GLM suppose que les incréments $Y_{i,j}$ sont des variables aléatoires indépendantes distribués selon une loi appartenant à la famille exponentielle linéaire.

Les modèles linéaires généralisés sont caractérisés par trois composantes :

- ✓ La composante aléatoire :

Elle est représentée par les incréments $Y_{i,j}$ de densité :

$$f(Y_{i,j}; \theta_{i,j}; \varphi) = \exp \left(\frac{Y_{i,j} * \theta_{i,j} - b(\theta_{i,j})}{\frac{\varphi}{w_{i,j}}} + c(Y_{i,j}; \varphi) \right)$$

Où

- $\theta_{i,j}$ est le paramètre naturel de la famille exponentielle
- φ est le paramètre de dispersion
- $w_{i,j}$ est une pondération
- b et c sont des fonctions spécifiques à la distribution

On en déduit alors :

$$\mu_{i,j} = E(Y_{i,j}) = b'(\theta_{i,j}) \quad \text{et} \quad \operatorname{Var}(Y_{i,j}) = b''(\theta_{i,j}) * \varphi$$

- ✓ La composante systématique :

C'est une composante déterministe du modèle et elle s'écrit de la manière suivante :

$$\eta_{i,j} = \mu + \beta_j + \alpha_j$$

Avec : α_j le paramètre lié à l'année de survenance i

β_j le paramètre lié à l'année de développement j

✓ La fonction lien :

La fonction lien g est la fonction qui fait le lien entre la composante systématique et la composante aléatoire. Elle est supposée monotone et dérivable.

$$\eta_{i,j} = g(\mu_{i,j}) \text{ pour } i, j = 1, \dots, n$$

4. Choix de la méthode de provisionnement

Le choix de la méthode est basé sur la technique proposée par Denuit et Charpentier, qui met en évidence l'erreur d'estimation des provisions faites dans le passé de chacune des méthodes précédentes par rapport aux vraies valeurs observées dans le passé. L'idée est donc prendre un sous-triangle, qui, complété, reste inclus dans le triangle de base, et le compléter en utilisant les différentes méthodes de provisionnement. Une fois le sous-triangle complété, on compare les provisions estimées avec les vraies valeurs du triangle. La meilleure méthode sera donc celle qui fournira la somme des carrés des erreurs minimales.

La somme des carrés des erreurs est donnée par la formule suivante :

$$SCE = \sum_{i=1}^n \sum_{j=n-i+1}^n (\hat{C}_{i,j} - C_{i,j})^2$$

II. Mesure de la dépendance entre les branches

1. Notions de dépendance et de corrélation

Les notions de dépendance et de corrélation sont souvent confondues ; ce sont pourtant deux concepts différents mais qui sont toutefois associés : si X et Y sont indépendantes, alors X et Y sont non corrélées (linéairement), la réciproque est fautive.

La dépendance englobe tout type de liaisons, linéaires et non linéaires. Le coefficient de corrélation linéaire n'est qu'une mesure de dépendance particulière qui perd de sa pertinence en dehors de l'univers gaussien. Nous nous intéresserons donc à d'autres mesures de dépendance, en particulier aux coefficients de corrélation de rang.

1.1. Le coefficient de corrélation de Pearson

Ce coefficient permet d'analyser la relation linéaire entre deux couples de distributions normales ou de Student.

$$\rho(X, Y) = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}$$

Si ρ est proche de 0, il n'y a pas de relation linéaire entre X et Y.

Si ρ est proche de 1, X et Y sont positivement corrélés.

Si ρ est proche de -1, X et Y sont négativement corrélés.

L'inconvénient de ce coefficient est qu'il ne peut être utilisé seulement pour l'étude de la relation entre deux variables X et Y ayant une distribution de type gaussien et n'ayant pas de valeurs exceptionnelles, ce qui est rare en assurance.

1.2. Le tau de Kendall

Ce coefficient représente la probabilité que les variables observées soient dans le même ordre pour les deux variables versus la probabilité qu'elles soient dans un ordre différent.

$$\tau(X, Y) = \mathbb{P}((X - X')(Y - Y') > 0) - \mathbb{P}((X - X')(Y - Y') < 0)$$

1.3. Le rho de Spearman

Le coefficient de Spearman mesure la dépendance en examinant la corrélation entre les rangs des observations pour deux variables X et Y.

Soit $X = (X_1, \dots, X_n)$ et soit $Y = (Y_1, \dots, Y_n)$ alors le rho de Spearman peut

se calculer comme suit :
$$\rho(X, Y) = 1 - \frac{6 \sum_{i=1}^n (r(X_i) - r(Y_i))^2}{n(n^2 - 1)}$$

Où $r(X_i)$ correspond au rang de X_i dans (X_1, \dots, X_n) et respectivement pour Y.

Ces deux coefficients vérifient les propriétés suivantes :

- ✓ $\rho(X, Y) = \rho(Y, X)$
- ✓ $-1 \leq \rho(X, Y) \leq 1$
- ✓ $\rho(X, Y) = 1$ ssi X et Y sont comonotones
- ✓ $\rho(X, Y) = -1$ ssi X et Y sont antimonotes
- ✓ Si g est une fonction strictement croissante alors $\rho(g(X), g(Y)) = \rho(X, Y)$

2. Théorie des copules

2.1. Définition et généralités

Introduites en 1959 par Abe Sklar, les copules permettent de modéliser et d'étudier la structure de la dépendance, en particulier dans les valeurs extrêmes. Une copule à deux dimensions est une fonction de répartition C de $[0,1] \times [0,1]$ dans $[0,1]$ satisfaisant les propriétés suivantes :

- ✓ $C(u, 0) = C(0, u) = 0$ et $C(u, 1) = C(1, u) = u \quad \forall 0 \leq u \leq 1$
- ✓ $\forall (u_1, u_2) \text{ et } (v_1, v_2) \text{ dans } [0,1]^2$
- ✓ on a $C(v_1, v_2) - C(u_1, v_2) - C(v_1, u_2) + C(u_1, u_2) \geq 0$ si $u_1 \leq v_1$ et $u_2 \leq v_2$

a. Théorème de Sklar (1959)

L'idée de Sklar est que la structure de dépendance entre deux variables aléatoires X_1 et X_2 de fonctions de répartition F_1 et F_2 est décrite par une copule si et seulement si :

$$F_X(x_1, x_2) = C(F_1(x_1), F_2(x_2)).$$

De plus, si F_1 et F_2 sont continues, C est unique.

La copule permet de séparer l'étude des lois marginales de la structure de dépendance.

b. Densité d'une copule

La densité d'une copule C , si elle existe, est donnée par :

$$c(u_1, u_2) = \frac{\partial^2 C}{\partial u_1 \partial u_2}(u_1, u_2) = \frac{f(F_1^{-1}(u_1), F_2^{-1}(u_2))}{f_1(F_1^{-1}(u_1)) * f_2(F_2^{-1}(u_2))} \quad (u_1, u_2) \in [0,1]^2$$

Avec f la fonction de densité jointe de F , f_1 et f_2 les densités marginales de F_1 et F_2 et F_1^{-1} et F_2^{-1} les fonctions de répartition marginales inverses. La fonction de densité d'une copule satisfait l'équation précédente si et seulement si les hypothèses suivantes sont vérifiées :

- ✓ La copule C est une copule absolument continue et différentiable.
- ✓ F est une fonction de répartition jointe absolument continue.
- ✓ Les fonctions de répartition marginales sont continues et strictement croissantes.

Denuit et al (2005) ont introduit une propriété importante qui permet de déterminer la densité jointe d'une suite de variables aléatoires à partir de la densité de la copule.

Cette propriété s'énonce comme suit :

Soit F_1 et F_2 des fonctions de répartition continues avec des densités marginales respectives f_1 et f_2 alors :

$$f(x_1, x_2) = \prod f_i(x_i) * c(u_1, u_2)$$

c. Lien avec le tau de Kendall :

Le tau de Kendall peut s'exprimer en fonction d'une copule comme suit (Nelsen ;1999) :

$$\tau(X_1, X_2) = 4 \iint_0^1 C(u_1, u_2) dC(u_1, u_2) - 1 = 4E(C(U_1, U_2)) - 1$$

Avec $U_i \sim Uniform(0,1) \quad \forall i = 1,2$

d. Dépendance de queue

La notion de dépendance de queue permet d'obtenir une description de la dépendance au niveau des queues de distribution, une description nécessaire en cas de survenance simultanée de valeurs extrêmes. Le coefficient de dépendance de queue inférieure,

respectivement supérieure, pour deux variables X et Y à valeurs dans \mathbb{R}^2 , de fonctions de répartition respectives F_x et F_y est donnée par :

$$\lambda_{lower}(X, Y) = \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{C(u, u)}{u} \quad \text{et}$$

$$\lambda_{upper}(X, Y) = \lim_{u \rightarrow 1^-} \frac{C(u, u) - 2u + 1}{1 - u}$$

2.2. Copules archimédiennes

GENEST et MACKAY (1986) ont introduit la notion de copule archimédienne. Cette famille de copules regroupe plusieurs copules tels que la copule de Frank, Gumbel et Clayton.

Les copules archimédiennes sont construites à partir d'un générateur ϕ et sont définies comme suit :

$$C(x_1, x_2) = \phi^{-1}(\phi(x_1) + \phi(x_2))$$

Avec ϕ le générateur de la copule, une fonction convexe, continue, strictement décroissante dans \mathbb{R}^+ telle que $\phi(1) = 0$ et $\phi(0) = \infty$.

a. La copule de Frank

Le générateur de cette copule archimédienne est donné comme suit :

$$\phi(t) = -\log \frac{e^{-\alpha t} - 1}{e^{-\alpha} - 1}$$

Ainsi, partant de l'expression générale d'une copule archimédienne citée au-dessus, nous obtenons l'expression suivante :

$$C(x_1, x_2) = -\frac{1}{\alpha} \ln \left(1 + \frac{(e^{-\alpha x_1} - 1)(e^{-\alpha x_2} - 1)}{(e^{-\alpha} - 1)} \right)$$

La copule de Frank ne présente pas de dépendance de queue et son tau de Kendall s'écrit comme suit :

$$\tau = 1 - \frac{4(1 - D_1(\alpha))}{\alpha} \quad \text{où } D_k(x) = \frac{k}{x} \int_0^x \frac{t^k}{e^t - 1} dt \text{ est la fonction de Debye.}$$

b. La copule de Gumbel

Elle ne permet d'appréhender que les dépendances positives, accentuées sur la queue supérieure, c'est-à-dire, elle permet de modéliser les dépendances extrêmes.

Elle est obtenue en posant $\phi(t) = -(\ln(t))^\alpha$ et donc :

$$\checkmark C(x_1, x_2) = \exp\left(-\left[(-\ln(x_1))^\alpha + (-\ln(x_2))^\alpha\right]^{\frac{1}{\alpha}}\right)$$

$$\checkmark \lambda_{lower} = 0$$

$$\checkmark \lambda_{upper} = 2 - 2^{\frac{1}{\alpha}}$$

$$\checkmark \text{Le tau de Kendall : } \tau = 1 - \frac{1}{\alpha}$$

c. La copule de Clayton

La copule de Clayton, quant à elle, ne permet de modéliser que les dépendances positives, accentuées sur la queue inférieure, c'est-à-dire les évènements à faible intensité, contrairement à la copule de Gumbel.

Elle est obtenue en posant $\phi(t) = \frac{t^{-\alpha}-1}{\alpha}$ et donc :

$$\checkmark C(x_1, x_2) = (x_1^{-\alpha} + x_2^{-\alpha} - 1)^{-\frac{1}{\alpha}}$$

$$\checkmark \lambda_{upper} = 0$$

$$\checkmark \lambda_{lower} = 2^{-\frac{1}{\alpha}}$$

$$\checkmark \text{Le tau de Kendall : } \tau = \frac{\alpha}{\alpha+2}$$

2.3. Calibrage d'une copule

Le calibrage est une étape cruciale dans le cadre de l'étude de la dépendance entre deux branches d'assurance. Cette étape consiste à estimer le paramètre de la copule étudiée, soit à estimer α . Tout d'abord, nous avons la méthode des moments, qui a l'avantage d'être une méthode simple et rapide mais pour laquelle le résultat obtenu peut être biaisé. Une méthode plus précise est la méthode du maximum de vraisemblance, qui demande toutefois un temps de calcul très long compte tenu du nombre de paramètres à calculer. Pour pallier certains de ces problèmes, Bouye et al. en 2000 ont proposé la méthode CML (Canonical Maximum Likelihood) qui ne nécessite pas d'avoir recours à l'estimation des marginales.

2.3.1. Méthode des moments

Cette méthode revient pour une mesure de concordance donnée, à considérer que le paramètre de la copule est le paramètre qui permet l'égalisation de la valeur théorique et de l'estimateur empirique. La mesure de concordance la plus souvent utilisée est le tau de Kendall, étant donné la simplicité de son utilisation. Prenons à titre d'exemple la copule de Gumbel :

$$\alpha = \frac{1}{1 - \tau_{kendall}}$$

2.3.2. Maximum de vraisemblance

La densité jointe d'un vecteur aléatoire $X=(x_1, x_2)$ se définit comme suit :

$$L(\theta) = f(x_1, x_2) = \prod_{i=1}^2 f_i(x_i) * c(u_1, u_2)$$

La fonction log vraisemblance est donnée donc par :

$$\ln(L(\theta)) = \sum_{i=1}^2 \ln(f_i(x_i) + \ln(c(u_1, u_2)))$$

θ est égale donc à :

$$\theta = ArgMax(\ln(L(\theta)))$$

θ étant un vecteur de paramètres composé des paramètres des lois marginales et du paramètre de la copule.

2.3.3. La méthode CML (Maximum de vraisemblance canonique)

C'est une méthode recommandée par BOUYE et al (2000), il s'agit de transformer les observations $(x_1^i, x_2^i)_{1 \leq i \leq T}$ en uniforme $(u_1^i, u_2^i)_{1 \leq i \leq T}$ par le biais de la fonction de répartition empirique. Le paramètre de la copule se déduit comme suit :

$$\hat{\alpha} = ArgMax\left(\sum_{i=1}^T \ln(c(\hat{u}_1^i, \hat{u}_2^i; \alpha))\right)$$

2.4. Test d'adéquation pour le choix de la copule

Il existe plusieurs tests qui permettent de s'assurer de l'adéquation entre l'échantillon et une loi de distribution. Nous pouvons utiliser le test de maximum de vraisemblance qui consiste à sélectionner la copule qui maximise la log vraisemblance. Néanmoins, il faut noter que la vraisemblance peut être augmentée lorsque le nombre de variables est augmenté. Donc, il serait intéressant d'utiliser aussi le critère d'information d'Akaike (critère AIC) qui consiste à sélectionner la copule qui maximise la log-vraisemblance tout en pénalisant les modèles utilisant trop de variables soit $2p - 2\ln\mathcal{L}$ où p est le nombre de paramètres.

III. Calcul du capital de solvabilité requis en non-vie

La Solvabilité 2 est une directive de l'Union Européenne s'adressant aux assureurs et réassureurs européens. Elle a pour objectif de fixer des normes prudentielles afin de mieux prendre en compte les besoins en fonds propres des compagnies d'assurances par rapport aux risques qu'elles supportent.

Le capital de solvabilité requis est le montant des fonds que les sociétés d'assurance et de réassurance sont obligées de détenir. Le SCR se base sur une formule calibrée pour garantir que tous les risques quantifiables sont pris en compte, tels que le risque de souscription non-vie, de souscription vie, de marché, de santé, de défaut et opérationnel.

La formule du SCR adopte une approche modulaire, l'exposition individuelle à chaque catégorie de risque est évaluée puis agrégée à l'aide des coefficients de corrélation.

1. Les piliers de la solvabilité II

Solvabilité II ne concerne pas que l'exigence en capital. Il s'agit d'un programme complet pour les assureurs, couvrant l'agrément, la gouvernance

d'entreprise, le reporting prudentiel, l'information publique, l'évaluation et la gestion des risques, ainsi que le provisionnement et la solvabilité.

La réforme Solvabilité II est divisée en trois axes, appelés piliers :

- ✓ Pilier 1 : Le premier pilier concerne les exigences quantitatives, il s'attache à vérifier que la compagnie est solvable en contrôlant le niveau de SCR ainsi que les méthodes du calcul.
- ✓ Pilier 2 : Le deuxième pilier définit les exigences relatives au cadre de gouvernance et de gestion de risque en interne ainsi que la supervision des assureurs.
- ✓ Pilier 3 : Le pilier 3 se concentre sur la transmission de l'information prudentielle et statistique à l'autorité et la transparence envers le public.

2. Les exigences quantitatives dans le calcul des provisions et des fonds propres

2.1. Les provisions techniques

Les provisions techniques doivent représenter le montant que la compagnie d'assurance pourrait payer afin de transférer immédiatement ses engagements à une autre compagnie. Elles comprennent les provisions pour primes et les provisions pour sinistres et sont égales à la somme du Best Estimate et du Risk Margin.

2.2. Le Best Estimate

La provision Best Estimate correspond à la somme des cash-flows futurs actualisés. C'est la meilleure estimation des engagements futurs, vue à la date de calcul. Ces flux sont actualisés au taux sans risque fourni par la courbe de taux zéro coupon. Cette provision est calculée brute de réassurance et ne tient pas compte de nouvelles souscriptions.

2.3. Risk Margin

La marge pour risque représente le coût d'immobilisation des fonds propres nécessaires pour faire face aux engagements. Elle est calculée en estimant les cadences de liquidation des SCR dans le futur et en multipliant les SCR futurs actualisés au taux sans risque par le coût du capital.

$$RiskMargin = CoC * \sum_{t=0}^n \frac{SCR_t}{(1 + r_t)^t}$$

3. Solvency capital Requirement (SCR)

Le SCR est fixé à un niveau garantissant que les assureurs et les réassureurs respectent leurs engagements vers les assurés au cours des 12 prochains mois avec une probabilité de 99.5%, c'est-à-dire un capital permettant d'éviter la ruine à moins d'une fois sur 200.

Le calcul du SCR global selon la formule standard prend en compte plusieurs catégories de risques encourus par l'assureur comme le montre la figure suivante :

SCR_{int} : représente l'exigence en capital pour les risques liés aux immobilisations incorporelles.

$Corr_{i,j}$: représente le coefficient de la matrice de corrélation entre les modules de risques i et j.

	Marché	Contrepartie	Vie	Santé	Non vie
Marché	1	0.25	0.25	0.25	0.25
Contrepartie	0.25	1	0.25	0.25	0.5
Vie	0.25	0.25	1	0.25	0
Santé	0.25	0.25	0.25	1	0
Non vie	0.25	0.5	0	0	1

Tableau 4 : Matrice de corrélation entre Risque-EIOPA

Ainsi le SCR global est donné par :

$$SCR_{global} = BCSR + SCR_{op} + Adj$$

Parmi les modules de risques pris en compte dans le calcul du SCR_{global} , notre étude portera sur le risque de souscription non-vie.

4. Risque de souscription non-vie

Le risque de souscription est le risque de perte dû à une mauvaise estimation de la prime et/ou du provisionnement, compte tenu des périls couverts dans l'exercice de cette activité. Il est constitué des sous-modules suivants :

- ✓ Risque de prime : risque que le coût des futurs sinistres soit supérieur aux primes perçues.
- ✓ Risque de réserve : risque lié à la nature aléatoire de l'évaluation des sinistres et à leur mauvaise estimation.
- ✓ Risque catastrophe : risque résultant d'événements extrêmes ou irréguliers non capturés par les risques de tarification et de provisionnement.
- ✓ Risque de cessation : risque de perte, ou de changement défavorable de la valeur des engagements d'assurance, résultant de fluctuations affectant le niveau ou la volatilité des taux de cessation,

d'échéance, de renouvellement et de rachat des polices. Il sera supposé nul dans cette étude car il concerne essentiellement les contrats pluriannuels. En assurance non-vie, il s'agit majoritairement de contrats annuels. Le risque de résiliation est donc très faible.

Le capital de solvabilité requis pour le risque de souscription non-vie est donné donc par la formule suivante :

$$SCR_{nonvie} = \sqrt{\sum_{i,j} Corr_{i,j} * SCR_i * SCR_j}$$

Où

SCR_i : représente le SCR du sous-module de risque i

$Corr_{i,j}$: le coefficient de corrélation entre les sous-modules de risque .

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1: Motor vehicle liability	1											
2: Other motor	0.5	1										
3 :MAT	0.5	0.25	1									
4 :Fire	0.25	0.25	0.25	1								
5 :3rd party liability	0.5	0.25	0.25	0.25	1							
6 :Credit	0.25	0.25	0.25	0.25	0.5	1						
7 :Legal exp.	0.5	0.5	0.25	0.25	0.5	0.5	1					
8 :Assistance	0.25	0.5	0.5	0.5	0.25	0.25	0.25	1				
9 :misc.	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	1			
10 :reins.-property	0.25	0.25	0.25	0.5	0.25	0.25	0.25	0.5	0.25	1		
11 :reins.-casualty	0.25	0.25	0.25	0.25	0.5	0.5	0.5	0.25	0.25	0.25	1	
12 :reins. MAT	0.25	0.25	0.5	0.5	0.25	0.25	0.25	0.25	0.5	0.25	0.25	1

Tableau 5: matrice de corrélation entre LoB-EIOPA

Nous nous sommes concentrés sur la quantification du risque primes&réserves selon deux approches. La première consiste à utiliser les paramètres fournis par la réglementation européenne, alors que la deuxième repose l'estimation de ces paramètres en se basant sur les données d'AXA Assurance Maroc.

Dans le cadre de la formule standard de la directive Solvabilité II, l'exigence en capital réglementaire au titre du risque de primes et de réserves s'exprime sous la forme suivante :

$$SCR = 3\sigma * V$$

V représente la mesure de volume pour le risque de prime et de réserve ($BE_{primes} + BE_{réserves}$).

- ✓ Best estimate prime est donné par la formule suivante :

$$BE_{primes} = Max(P_{last,s}; P_{à\ acquérir,s}) + FP_{existing,s}$$

Avec P_s : Prime acquise par l'entreprise dans le segment s au cours des 12 derniers mois.

$P_{à\ acquérir,s}$: Prime à acquérir par l'entreprise pour le segment s des 12 mois suivants, égale dans notre cas à plus 3% de la prime acquise au cours des derniers mois.

$FP_{existing,s}$: C'est la valeur actuelle probable attendue des primes nettes dues aux contrats existants dans les 12 prochains mois.

- ✓ Best estimate réserve est obtenu via la formule suivante :

$$BE = \sum_{k=n-i+2}^{\infty} \frac{Z_k}{(1+r_k)^k}$$

Avec Z_k la somme des diagonales au-dessous de la dernière diagonale du triangle supérieur.

r_k les taux zéro coupon.

L'écart type du risque de prime et réserve est calculé comme suit :

$$\sigma = \frac{\sqrt{\sum_{s,t} CorrLoB_{s,t} * \sigma_s * V_s * \sigma_t * V_t}}{V_{nv}}$$

Avec $\text{CorrLoB}_{s,t}$ est le coefficient de corrélation pour le risque de prime et de réserve entre les segments s et t .

σ_s représente l'écart type du risque de prime et de réserve en non-vie du segment s . Ce dernier est obtenu par la formule suivante :

$$\sigma_s = \frac{\sqrt{\sigma_{pr,s}^2 * V_{pr,s}^2 + \sigma_{res,s}^2 * V_{res,s}^2 + 2 * \sigma_{pr,s} * V_{pr,s} * \sigma_{res,s} * V_{res,s} * \text{CorrLoB}_{s,t}}}{V_{pr,s} + V_{res,s}}$$

$\sigma_{pr,s}$ et $\sigma_{res,s}$ sont les écarts types du risque de prime et du risque de réserve respectivement. Ces paramètres sont donnés par la réglementation européenne Solvabilité II, mais nous les avons réestimés sur la base des données du marché marocain.

4.1. Estimation de l'écart type pour le risque de réserve

Une des nouveautés centrales de la réforme Solvabilité II est l'introduction d'un nouvel horizon temporel dans le provisionnement non-vie : l'horizon à un an. À la suite du résultat du QIS 3, l'association des mutuelles européennes a réalisé une étude consacrée au risque de provisionnement des branches à développement long en assurance non-vie. A l'issue de cette étude, les calibrations du QIS 3 basées sur des méthodes de provisionnement à *l'ultime* se sont avérées exagérément prudentes.

Les méthodes de provisionnement doivent alors être adaptées pour mesurer la volatilité à *un an* des estimations des provisions. Cette vision à court terme est mieux adaptée et plus intuitive pour l'investisseur : avant de se projeter à long terme, il est primordial de connaître la situation économique à court terme.

a. Le CDR: Claims Development Result

Le risque de réserve à un an correspond au risque de sous-provisionnement des sinistres passés, i.e. le risque d'enregistrer des malis pour un horizon d'un an. Pour estimer ce risque, il suffit alors de calculer le Best Estimate de la charge ultime de la compagnie entre deux années consécutives, qu'on notera I et $I+1$.

Le résultat de développement des sinistres -Claims Development Result- est alors introduit comme la différence des provisions estimées aux temps I et $I+1$, compte tenu de la nouvelle information des paiements effectuées entre ces deux temps.

En adoptant les notations suivantes :

$R_i^I = C_{i,n} - C_{i,n+1-i}$; $i = 2, \dots, n$: le montant de la provision estimé au temps I .

$R_i^{I+1} = C_{i,n} - C_{i,n+2-i}$; $i = 2, \dots, n$: le montant de la provision estimé au temps $I+1$.

$X_{i,n+2-i}$; $i = 2, \dots, n$: Les paiements incrémentaux réalisés entre les temps I et $I+1$.

On peut donner une première définition du CDR comme suit :

$$CDR(I+1) = R_i^I - R_i^{I+1} - X_{i,n-i+2}$$

En théorie, l'estimation de la charge ultime au temps I est égale à celle du temps $I+1$. En pratique, ce n'est pas le cas puisque nous disposons des nouvelles informations des paiements, ce qui implique que l'estimation de la charge doit être modifiée.

Cette modification, capturée par la définition du CDR sus citée, est due à deux facteurs :

- ✓ Un facteur de variance qui correspond à l'évaluation des paiements futurs (Erreur de processus).
- ✓ Un facteur d'estimation des paramètres inhérent à toute méthode de prévision statistique (Erreur d'estimation).

Dans leur modèle, qui sera rappelé ci-après, Merz et Wüthrich proposent de considérer le CDR de deux points de vue :

D'un point de vue prospectif ; à l'année actuelle – le temps t – la charge ultime est estimée, et l'estimation obtenue ne changera pas à priori sur la période $]t ; t+1]$. On s'interroge alors sur l'exactitude de cette affirmation : De combien le CDR va-t-il dévier par rapport à 0 ?

En vision rétrospective, on dispose au temps $t+1$ des observations du développement des sinistres connus, et on obtient les réalisations du CDR. On vérifie ensuite si ces observations sont contenues dans un intervalle raisonnable autour de 0.

b. Modèle de Merz et Wüthrich

Ce modèle est l'adaptation du modèle classique de Mack pour un horizon d'un an, il permet de mesurer la volatilité annuelle de l'estimation des provisions par une formule fermée.

Il est basé sur des hypothèses analogues à celles du modèle Chain Ladder, bien que plus fortes :

- ✓ Indépendance des années de survenance, i.e.

$\{C_{i,1}, \dots, C_{i,n}\}$ et $\{C_{k,1}, \dots, C_{k,n}\}$ sont indépendants pour $i \neq k$

- ✓ Les montants cumulés $(C_{i,j})_{j \geq 1}$ sont des chaînes de Markov. Et il existe

$f_j, \sigma_j > 0$ tels que :

$$E(C_{i,j+1}|C_{i,j}) = f_j C_{i,j}$$

$$V(C_{i,j+1}|C_{i,j}) = \sigma_j^2 C_{i,j}$$

La dernière hypothèse est plus forte que celle de Mack qui supposait que la valeur de $C_{i,j+1}$ est entièrement déterminée par le montant cumulé précédent $C_{i,j}$. Ici, le montant $C_{i,j+1}$ dépend de toutes les valeurs $(C_{i,k})_{k < j}$.

c. Mesure de l'erreur de provisionnement à un an :

Afin d'estimer le risque à horizon à un an, deux définitions commodes du CDR sont introduites ;

- ✓ Le CDR réel : qui est inconnu puisque les facteurs de développement de Chain Ladder le sont également. Il est défini par année de survenance i comme suit :

$$CDR_i(I + 1) = E(C_{i,n}^I | D_I) - E(C_{i,n}^{I+1} | D_{I+1})$$

Où D_I et D_{I+1} sont respectivement les informations disponibles aux temps I et $I+1$.

Le CDR réel agrégé est donc donné par :

$$CDR(I + 1) = \sum_{i=1}^n CDR_i(I + 1)$$

- ✓ Le CDR observable est l'estimateur du CDR réel, défini par :

$$CDR(I + 1) = \hat{C}_{i,n}^I - \hat{C}_{i,n}^{I+1}$$

Le CDR observable agrégé est donc donné par la formule :

$$\widehat{CDR} = \sum_{i=1}^n \widehat{CDR}_i(I + 1)$$

Le risque de provisionnement à horizon un an est défini par la distance entre le CDR réel et son estimateur, i.e.

$$MSEP_{CDR_i(I+1)|D_I}(\widehat{CDR}_i(I + 1)) = E \left[(CDR_i(I + 1) - \widehat{CDR}_i(I + 1))^2 | D_I \right]$$

Dans le cadre de Solvabilité II, il s'agit de mesurer la déviation du CDR observable autour du scénario central correspondant à un CDR nul, qui est couverte par la marge de solvabilité prévue dans la réglementation.

L'erreur de prédiction par année de survenance est donc donnée par :

$$MSEP_{\widehat{CDR}_i(I+1)|D_I}(0) = E \left[(\widehat{CDR}_i(I + 1) - 0)^2 | D_I \right]$$

L'approximation de la formule précédente qui sera utilisée dans le calcul s'écrit :

$$\begin{aligned}
 &MSEP_{\widehat{CDR}_i(I+1)|D_I}(0) \\
 &= (C_{i,n}^I)^2 \left(\frac{\hat{\sigma}_{n+1-i}^2 / (f_{n+1-i}^I)^2}{C_{i,n+1-i}^I} + \frac{\hat{\sigma}_{n+1-i}^2 / (f_{n+1-i}^I)^2}{S_{n+1-i}^I} \right) \\
 &+ \sum_{j=n+2-i}^n \frac{C_{n+1-j,j}^I}{S_j^{I+1}} \cdot \frac{\hat{\sigma}_j^2 / (f_{n+1-i}^I)^2}{S_j^I}
 \end{aligned}$$

Où

$$S_j^I = \sum_{i=1}^{n-j} C_{i,j} \text{ et } S_j^{I+1} = \sum_{i=1}^{n-j+1} C_{i,j}$$

On remarque qu'elle ne prend en compte qu'une seule diagonale et non toutes les diagonales comme dans la formulation de Mack. Elle correspond donc bien à une vision à un an.

L'erreur de prédiction pour toute survenance i est donnée par :

$$\begin{aligned}
 &MSEP_{\sum_{i=1}^n \widehat{CDR}_i(I+1)|D_I}(0) \\
 &= \sum_{i=1}^n MSEP_{\widehat{CDR}_i(I+1)|D_I}(0) \\
 &+ 2 \sum_{i=1}^n \sum_{k=i+1}^n \hat{C}_{i,n} \hat{C}_{k,n} \sum_{j=n+1-i}^n \frac{\hat{\sigma}_j^2 / (f_j^I)^2}{S_j^I}
 \end{aligned}$$

L'intérêt de la dernière formule est le calcul de la volatilité du risque de provisionnement à un an, définie par le rapport entre la racine carrée de l'erreur de prédiction et le Best Estimate des provisions pour sinistres à payer :

$$\sigma_{res} = \frac{\sqrt{MSEP_{\sum_{i=1}^n \widehat{CDR}_i(I+1)|D_I}(0)}}{BE_{psap}}$$

✓ **Hypothèse du modèle**

Les formules de calcul de l'erreur de prédiction explicitées ci-dessus ne donnent en réalité qu'une version approchée. Elle est basée sur la contrainte suivante :

$$\frac{\hat{\sigma}_j^2 / (f_j^I)^2}{C_{n-j,j}^I} \ll 1$$

Cette contrainte doit être vérifiée pour chaque branche étudiée.

✓ **Avantages/Inconvénients du modèle de Merz et Wüthrich :**

Le modèle de Merz et Wüthrich a l'avantage de fournir une formule fermée et facilement implémentable du risque de provisionnement à un an, étant donnés les triangles de liquidation des sinistres.

Ce modèle souffre néanmoins des mêmes limitations de celui de Mack, à savoir des hypothèses fortes qui ne sont pas toujours vérifiées par les données réelles, telles que l'indépendance des années de survenance. Il existe aussi des cas particuliers où la volatilité à horizon un an soit supérieure à celle à l'ultime, ce qui viole une hypothèse d'approximation implicite faite par le modèle pour établir les formules fermées.

Enfin, le modèle de Merz et Wüthrich utilisé seul ne permet pas d'obtenir une distribution de l'estimation du CDR.

✓ **Adaptation de la méthode Bootstrap**

Afin de contourner certaines de ces limitations, on est amené à utiliser une version de la méthode du bootstrap adaptée à l'horizon un an.

En reprenant les mêmes notations définies précédemment, les étapes du bootstrap à horizon un an sont comme suit :

Etape 1 : Estimation des provisions \hat{R}_i^I au temps I par la méthode Chain Ladder.

Etape 2 : Calcul des résidus de Mack :

$$r_{i,j}^{Mack} = \frac{\sqrt{C_{i,j}}(f_{i,j} - \hat{f}_j)}{\hat{\sigma}_j} \quad \text{Pour } i, j = 1, \dots, n - 1.$$

Afin de corriger le biais généré par la procédure de bootstrap sur l'estimation de l'erreur de prédiction, on introduit un facteur d'ajustement $\sqrt{\frac{n-j}{n-j-1}}$ pour obtenir les résidus ajustés de Mack :

$$r_{i,j}^{Ajusté} = \frac{\sqrt{C_{i,j}}(f_{i,j} - \hat{f}_j)}{\hat{\sigma}_j} \cdot \sqrt{\frac{n-j}{n-j-1}}$$

On répète N fois les étapes suivantes :

Etape 3 : Ré-échantillonnage des résidus et obtention d'un nouveau triangle de résidus notés $\tilde{r}_{i,j}$.

Etape 4 : Calcul des nouveaux facteurs de développement individuels,

$$\tilde{f}_{i,j} = \hat{f}_j + \sqrt{\frac{\hat{\sigma}_j^2}{C_{i,j}}} \cdot \tilde{r}_{i,j} \quad \text{Pour } i, j \leq n + 1$$

Etape 5 : Calcul des nouveaux facteurs de développement à partir du triangle ré-échantillonné,

$$\tilde{f}_j = \frac{\sum_{i=1}^{n+1-j} C_{i,j} \tilde{f}_{i,j}}{\sum_{i=1}^{n+1-j} C_{i,j}}$$

Etape 6 : Estimation de la nouvelle diagonale $C_{i,n+2-i}$ via les nouveaux facteurs de développement \tilde{f}_j^I en intégrant l'erreur de processus par un tirage aléatoire d'une loi de probabilité. Pour les lois Gamma et Log-normale, on a :

$$\tilde{C}_{i,j+1} \sim \Gamma\left(\frac{C_{i,n+1-i} \tilde{f}_{n+1-i}^{I^2}}{\hat{\sigma}_{n+1-i}^2}; \frac{\sigma_{n+1-i}^2}{\hat{f}_j}\right)$$

$$\tilde{C}_{i,j+1} \sim \text{Log - normale} \left(\ln(C_{i,n+1-i} \tilde{f}_{n+1-i}^I) - \frac{1}{2} \ln\left(1 + \frac{\hat{\sigma}_{n+1-i}^2}{C_{i,n+1-i} \tilde{f}_{n+1-i}^I}\right); \ln\left(1 + \frac{\hat{\sigma}_{n+1-i}^2}{C_{i,n+1-i} \tilde{f}_{n+1-i}^I}\right) \right)$$

Etape 7 : Calcul des facteurs de développement au temps l+1 ;

$$\tilde{f}_j^{I+1} = \frac{\sum_{i=1}^{n-j} C_{i,j} \tilde{f}_{i,j} + C_{n+1-j,j} \tilde{f}_{n-j,j}^{I+1}}{\sum_{i=1}^{n+1-j} C_{i,j}}$$

Etape 8 : Nouvelle estimation des provisions au temps l+1 par année de survénance et au global ;

$$\tilde{C}_{i,n} = \tilde{C}_{i,n+2-i} \prod_{j=n+2-i}^n \tilde{f}_j^{I+1}$$

$$R_i^{I+1} = \tilde{C}_{i,n} - \tilde{C}_{i,n+2-i}$$

La provision au temps $I+1$ est alors obtenue en agrégeant les années de survenance :

$$R^{I+1} = \sum_{i=1}^n R_i^{I+1}$$

Etape 9 : Calcul du CDR via la formule :

$$CDR(I+1) = R^I - R^{I+1} - X^{I:I+1}$$

Une réalisation du CDR est donc calculée à chaque itération. A la fin de la simulation, la distribution du CDR est constituée, et il sera possible d'en déduire les grandeurs statistiques d'intérêt.

4.2. Estimation de l'écart type pour le risque de prime :

Le risque de prime est déterminé par le biais de la volatilité du loss ratio $\frac{\text{sinistres}}{\text{primes}}$ qui montre si les primes acquises ont pu couvrir les coûts des sinistres. Nous nous sommes basés sur l'historique des loss ratio pour déterminer la volatilité, et puis à l'aide d'une simulation Bootstrap on a déterminé la distribution de la volatilité des loss ratio.

La procédure à suivre pour le bootstrap est la suivante :

- a. On calcule les coefficients de développement à travers le triangle des règlements cumulés, de la même manière que dans la méthode de Chain Ladder.
- b. Grâce à ces coefficients et à la diagonale du triangle des règlements cumulés, c'est à dire les dernières valeurs observées, on calcule un nouveau triangle, que l'on appelle triangle prédit des règlements cumulés et que l'on note $D_{i,j}$, en procédant par récursion arrière :

$$D_{i,n-i+1} = C_{i,n-i+1} \quad \text{pour } i = 1, \dots, n$$

$$D_{i,j} = \frac{C_{i,n-i+1}}{\prod_{k=j}^{n-i} \hat{f}_k} \text{ pour } i = 1, \dots, n-1 \text{ et } j = 1, \dots, n-i$$

- c. On décumule le triangle des règlements cumulés $C_{i,j}$ et le triangle prédit des règlements cumulés $D_{i,j}$ afin d'obtenir le triangle des règlements non cumulés et le triangle prédit des règlements non-cumulés, qu'on note respectivement $Y_{i,j}$ et $Z_{i,j}$.

$$Y_{i,1} = C_{i,1} \text{ et } Z_{i,1} = D_{i,1} \text{ pour } i = 1, \dots, n$$

$$Y_{i,j} = C_{i,j} - C_{i,j-1}$$

$$\text{et } Z_{i,j} = D_{i,j} - D_{i,j-1} \text{ pour } i = 1, \dots, n-1 \text{ et } j = 2, \dots, n-i+1$$

- d. A l'aide de ces deux nouveaux triangles, on calcule le triangle des résidus de Pearson, qu'on note $r_{i,j}$:

$$r_{i,j} = \frac{Y_{i,j} - Z_{i,j}}{\sqrt{Z_{i,j}}} \text{ pour } i = 1, \dots, n \text{ et } j = 1, \dots, n-i+1$$

Ces résidus sont indépendants et identiquement distribués, excepté les deux situés aux extrémités de la diagonale qui sont nuls par construction, et devront donc être exclus du rééchantillonnage.

- e. Ces résidus sont ensuite rééchantillonnés aléatoirement avec remise pour former un triangle des résidus « bootstrap » que l'on note $r_{i,j}^*$.

On effectue ensuite le chemin inverse, on calcule le triangle des règlements non-cumulés « bootstrap » $Y_{i,j}^*$ par :

$$Y_{i,j}^* = Z_{i,j} + r_{i,j}^* \sqrt{Z_{i,j}} \text{ pour } i = 1, \dots, n \text{ et } j = 1, \dots, n-i+1$$

Grâce auquel on détermine le triangle des règlements cumulés « bootstrap » $C_{i,j}^*$:

$$C_{i,j}^* = \sum_{k=1}^j Y_{i,k}^* \text{ pour } i = 1, \dots, n \text{ et } j = 1, \dots, n-i+1$$

Ce triangle nous permet alors de déterminer la charge du sinistre par année de survenance, pour en tirer le loss ratio par année de survenance.

On réitère 10000 fois cette dernière étape, et à chaque itération on calcule la volatilité des loss ratio d'une année à l'autre. A partir des 10000 observations, on détermine la distribution de la volatilité. Cette distribution nous permet de déterminer le quantile à 99.5%.

Alors, on peut en déduire le risque de prime :

$$\sigma_{pr,s} = Quantile_{0.995} - \frac{1}{10000} \sum_{i=1}^{10000} volat_i$$

VI. Etude de la rentabilité technique des branches IARD à l'aide du ECR (economic combined ratio)

1. Ratio combiné

Avant de parler du ratio économique combiné, commençons tout d'abord par définir le ratio combiné tout court. Le ratio combiné est le rapport entre ce que l'assureur décaisse (sinistres réglés, commissions versées aux agents, les frais généraux) et ce qu'il encaisse (les primes versées par les assurés), il permet d'observer à un instant t la rentabilité technique de la compagnie d'assurance, et sert aussi à comparer entre les Lines of Business ou même les pays.

Le ratio combiné est déterminé en sommant :

- ✓ Loss ratio : qui mesure le coût des sinistres par rapport au montant des primes encaissées. Il couvre les indemnités effectivement versées aux assurés mais aussi les charges estimées correspondant aux sinistres en cours.

$$loss\ ratio = \frac{Coût\ sinistres}{primes\ acquises}$$

- ✓ Expense ratio : prend en compte les coûts de commercialisation et de gestion, commissions versées aux intermédiaires, frais de gestion des sinistres.

$$Expense\ ratio = \frac{frais\ de\ gestion,\ commercialisation}{primes\ acquises}$$

Il faut noter que les coûts de sinistres et les primes mentionnés sont nets de réassurance.

Un ratio combiné inférieur à 100% nous dit que les coûts de sinistres et les frais de gestion et de commercialisation sont inférieurs aux primes encaissées, ce qui nous mènera à conclure que la compagnie a réalisé un profit. Mais il s'est avéré qu'avec des ratios combinés inférieurs à 100%, le résultat technique de la compagnie peut être négatif (figure 6).

In % of net premiums	United States 1994-2004	Canada 1994-2004	UK 1994-2004	Germany 1994-2004
Claims ratio	78.7%	73.3%	73.0%	71.3%
Expense ratio	26.4%	29.8%	31.2%	27.5%
Policyholder dividend ratio	1.1%	n.m.	n.m.	1.0%
Combined ratio	106.2%	103.1%	104.2%	99.9%
Standardized underwriting result ¹	-6.9%	-3.7%	-4.7%	-2.4%

Figure 6: Ratio combiné et résultat de souscription

Donc on ne peut pas se limiter au ratio combiné pour évaluer la rentabilité technique de l'assureur puisque ce ratio :

- ✓ Ne prend pas en considération le produit financier résultant de la durée entre le paiement des primes et le règlement des sinistres.
- ✓ Ne s'ajuste pas aux risques catastrophes.
- ✓ Ne prend pas en considération la taxe.
- ✓ Ne prend pas en considération le coût du capital.

2. Economic combined ratio

L'ECR vient remplacer le ratio combiné en évaluant la rentabilité technique de la compagnie d'une manière plus effective, puisqu'il prend en considération plusieurs composantes que le ratio combiné néglige.

Pour obtenir l'ECR il faut donc introduire des ajustements économiques sur le ratio combiné (figure 7).



Figure 7 : composantes ECR

$$ECR = CY \text{ combinedRatio} + CAT_{adj} + Time \text{ value} + Exg_{act} + Taxe$$

2.1. Ajustement CAT

Les provisions dédiées aux sinistres catastrophes sont comptabilisées en Loss Ratio alors que ces événements sont très rares. Pour évaluer la rentabilité de la souscription pour une année donnée il faut réajuster les réserves en prenant en compte la rareté des sinistres CAT.

2.2. Time value

C'est le produit financier qu'une compagnie d'assurance obtient de la différence de temps entre le versement de la prime et le règlement des sinistres. L'importance de la Time Value apparait le plus pour le cas des contrats longue durée, dont la période est significative et crée de la valeur ajoutée.

Afin de calculer la Time Value, il faut d'abord déterminer le résultat technique non actualisé net de réassurance :

$$\text{Résultat technique non actualisé} = \text{Primes} - \text{Charges de sinistres} - \text{Expense}$$

Ensuite, en actualisant le résultat technique avec les taux sans risque, on bénéficiera de la plus longue durée des règlements des sinistres par rapport à l'encaissement des primes, de sorte que la compagnie d'assurance puisse investir cette différence en actifs générant des revenus financiers. Les primes

et les frais sont actualisés dans un an, tandis que les charges seront actualisées en fonction des cadences de liquidation.

$$Time\ Value = \frac{Net\ undiscounted\ Technical\ Result - Net\ Discounted\ Technical\ Result}{Earned\ premiums}$$

2.3. Exigence des actionnaires

Les actionnaires fournissent le capital de solvabilité requis à l'entreprise d'assurance et cette dernière l'investit dans des actifs non risqués puisque c'est un capital qui lui permettra d'éviter la ruine. La rentabilité espérée de cet investissement est évaluée par la réglementation Solvabilité II à 6% mais puisque ce rendement a été calculé sur la base du marché européen, il nous a paru plus adéquat de le recalculer en l'adaptant au marché marocain avec la formule du MEDAF :

$$CoC\% = R_f + \beta * P_{risque}$$

Avec P_{risque} : Prime de risque ($R_m - R_f$)

R_f : le taux sans risque

R_m : Rentabilité du marché marocain

B : Béta du marché des assurances marocain

Les actionnaires attendent naturellement ou exigent un retour sur capitaux, donc avant d'évaluer la rentabilité d'une branche donnée, il faut prendre en considération l'effet return on equity.

$$Exig_{act} = RoE * CoC$$

2.4. La taxe

La taxe sur le profit de souscription doit aussi être prise en compte dans l'évaluation de la rentabilité technique de la compagnie.

$$Taxe = (100\% - CY\ CombinedRatio + catadj + CoC + time\ value) * \text{taux\ taxe}$$

Chapitre 3 : Cadre pratique

Dans le cadre de cette étude, nous allons appliquer les notions théoriques citées dans le chapitre précédent sur les branches de l'assurance non-vie d'AXA Assurance Maroc, à savoir : Accidents de travail, Responsabilité civile, Responsabilité civile automobile, Dommage aux biens, Autre dommage corporel, Incapacité, Maladie, Incendie et Maritime, aérienne et transport (AUTOFLLOT). Pour simplifier, les résultats obtenus dans ce chapitre sont ceux de la branche Accidents de travail, toutefois, les résultats des autres branches sont en Annexe.

I. Provisionnement

1. Chain Ladder

Nous présentons ci-dessous le triangle des règlements cumulés de la branche AT utilisé pour l'estimation des réserves.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
2005	7461,14	25482,49	43065,7	53125,4	64147	74270,4	79184,4	82717	84636,5	86944,4	89438,6	91040,9	91909	92635,6
2006	8288,09	31418,0168	45512,8	60075,9	77257,7	86140,9	92888,7	98007,2	100611	103140	104852	106885	107717	
2007	9882,14	33339,7165	52722,8	76498,1	88174,6	97648,8	104248	108247	111827	113426	114908	115964		
2008	6776,89	35592,9799	71724,6	92963,2	116157	126413	134899	140696	143073	145109	146157			
2009	4521,05	36947,8842	68430,1	107846	126396	138714	150085	154472	157531	159252				
2010	5481,82	35734,1761	76242,2	102074	121111	133766	140263	143502	145093					
2011	6944,67	44092,5361	81718,5	113703	134731	147994	154987	159724						
2012	10070,8	42608,3022	80517,8	109388	126265	135735	141990							
2013	10542	48160,0064	90017,4	124177	147017	161478								
2014	11193,9	51112,7083	95427,9	125272	144045									
2015	9526,84	39125,6327	79287	104735										
2016	10872,8	47757,1603	83390,3											
2017	12317,4	48369,619												
2018	19283,1													

Figure 8 : Triangle des règlements cumulés de la branche AT

Validation des hypothèses :

Avant d'appliquer la méthode de provisionnement Chain Ladder, il faut au préalable vérifier ses hypothèses ;

(H1) : La droite de régression des couples $(C_{i,j}, C_{i,j+1})$ passe par l'origine.

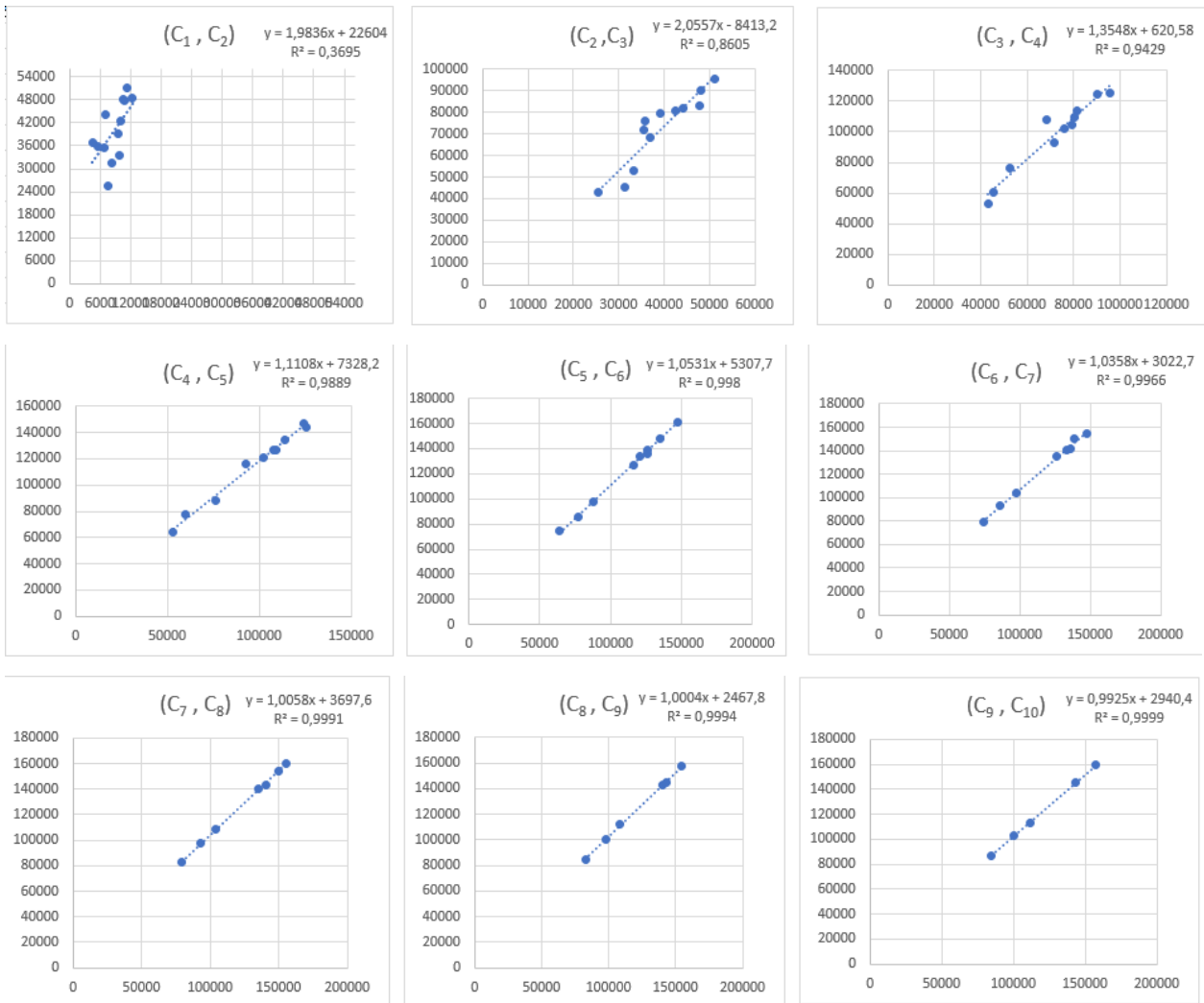


Figure 9 : vérification de l'hypothèse H1

A partir des graphes ci-dessus, on remarque que les couples $(C_{i,j}, C_{i,j+1})$ sont quasiment alignés sur le même droite de régression, à l'exception de ceux de la 1^{ère} année de développement, donc l'hypothèse (H1) est vérifiée.

(H2) : Alignement des facteurs de développement individuels $(f_{i,j})_{j=0,\dots,13}$

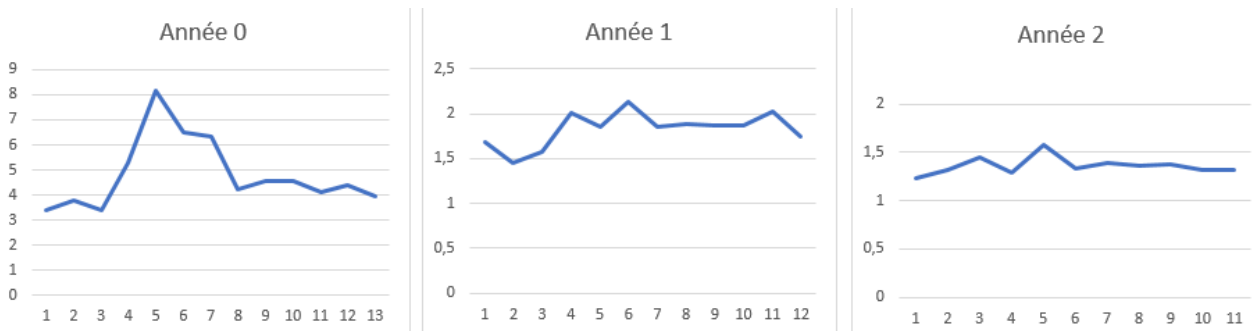


Figure 10 : Vérification de l'hypothèse (H2) pour $j=0,1,2$

On remarque que l'hypothèse (H2) n'est pas vérifiée pour les premières années de développement, donc nous avons eu recours à la méthode de Chain Ladder ajustée qui consiste à éliminer les facteurs correspondant aux pics qui apparaissent sur la figure, puis calculer la moyenne des facteurs de développement restants.

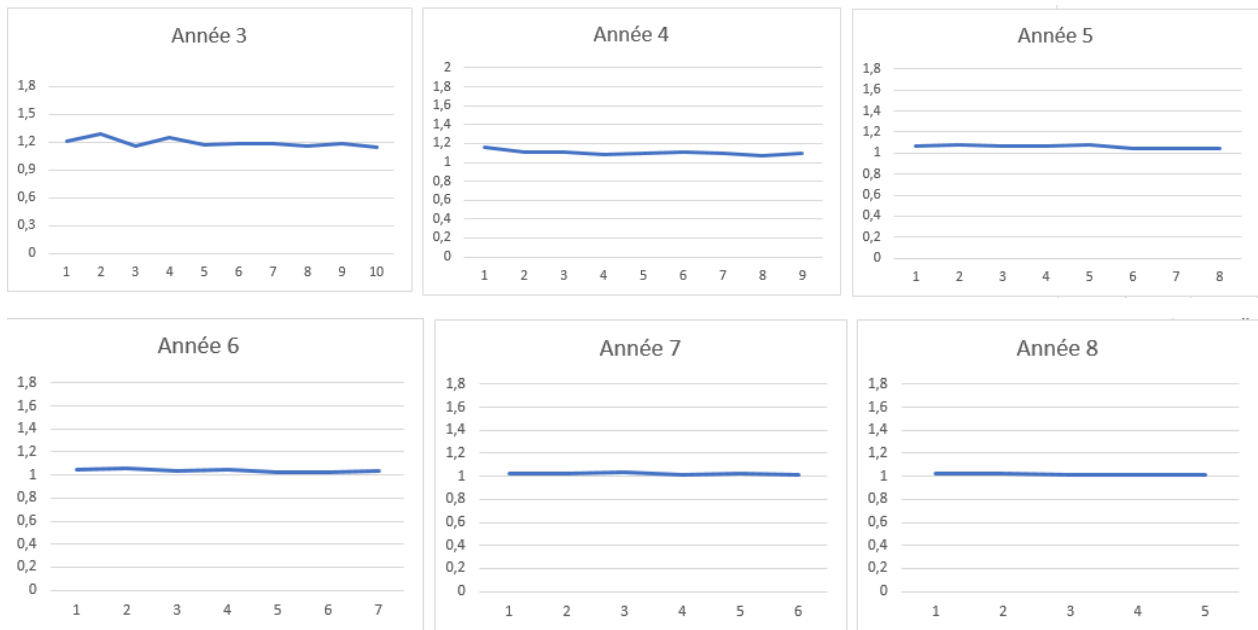


Figure 11 : Vérification de l'hypothèse (H2) pour $j=3, \dots, 8$

Nous constatons que les $(f_{i,j})_{i,j=3, \dots, 8}$ sont presque constants à partir de la 3^{ème} année de développement.

Ayant vérifié les hypothèses, on peut maintenant appliquer la méthode de provisionnement Chain Ladder en utilisant les facteurs de développement ajustés. Nous obtenons le triangle de règlements cumulés complété ci-après :

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
2005	7461,14	25482,49	43065,7	53125,4	64147	74270,4	79184,4	82717	84636,5	86944,4	89438,6	91040,9	91909	92635,6
2006	8288,09	31418,0168	45512,8	60075,9	77257,7	86140,9	92888,7	98007,2	100611	103140	104852	106885	107717	108393
2007	9882,14	33339,7165	52722,8	76498,1	88174,6	97648,8	104248	108247	111827	113426	114908	115964	116900	117634
2008	6776,89	35592,9799	71724,6	92963,2	116157	126413	134899	140696	143073	145109	146157	148134	149330	150268
2009	4521,05	36947,8842	68430,1	107846	126396	138714	150085	154472	157531	159252	161494	163678	164999	166036
2010	5481,82	35734,1761	76242,2	102074	121111	133766	140263	143502	145093	147450	149526	151548	152771	153731
2011	6944,67	44092,5361	81718,5	113703	134731	147994	154987	159724	162959	165605	167937	170208	171582	172660
2012	10070,8	42608,3022	80517,8	109388	126265	135735	141990	146848	149823	152256	154400	156488	157751	158742
2013	10542	48160,0064	90017,4	124177	147017	161478	170946	176795	180376	183305	185886	188400	189921	191114
2014	11193,9	51112,7083	95427,9	125272	144045	159126	168456	174219	177748	180635	183178	185655	187154	188330
2015	9526,84	39125,6327	79287	104735	123833	136798	144819	149774	152807	155289	157476	159605	160894	161905
2016	10872,8	47757,1603	83390,3	111764	132144	145980	154539	159826	163063	165711	168045	170317	171692	172771
2017	12317,4	48369,619	88567,3	118703	140348	155042	164133	169748	173186	175999	178477	180891	182351	183497
2018	19283,1	87563,3056	160333	214888	254071	280672	297129	307294	313518	318610	323096	327466	330109	332183

Figure 12 : triangle complété des règlements cumulés de la branche AT

	AT	RC	RC AUTO	MALADIE	INCENDIE DAB	INCAPACITE	ADC	AUTOFL0T
2005	0	0	0	0	0	0	0	0
2006	851,57713	0	560,03691	0	0	210,96731	0	2,4159419
2007	1928,5435	20,814447	1859,297	0	34,436825	342,07289	17,68565	91,293425
2008	4733,6198	800,82407	4011,5157	0	203,96535	498,00692	25,8659	351,30052
2009	7852,8341	559,82286	7076,713	0	117,42914	685,72659	39,08088	571,06112
2010	9951,516	1747,6014	11271,984	2,3865E-09	284,67126	831,77699	30,89064	944,3838
2011	14671,132	1392,1977	19480,054	0,0075242	526,11744	1046,7085	46,27711	1391,4436
2012	18887,986	2474,6974	32238,547	2,3502354	620,88725	1259,5863	89,00267	4570,9082
2013	32985,724	5221,8593	53902,149	3,0560844	836,58026	1808,2244	313,7209	6725,3396
2014	46434,624	6542,2445	92001,461	19,985419	2095,9329	2314,2619	126,2012	12275,386
2015	60452,883	7764,8787	168233,25	37,665848	4827,5711	1781,4718	165,751	15707,47
2016	92884,402	12092,505	279004,95	212,47539	13209,317	2405,1594	218,8201	24203,185
2017	138848,46	13941,536	428351	512,50457	33882,258	3356,3548	397,2377	45003,034
2018	319637	16281,564	885431,18	48171,731	123397,27	8705,5206	1414,092	126443,66
Total	750120,302	68840,5454	1983422,14	48959,7761	180036,4365	25245,8384	2884,625	238280,881

Tableau 6: Réserves pour les branches non-vie par année de survenance-CL

2. London Chain

La méthode London Chain, suppose elle aussi l'alignement des couples $(C_{i,j}; C_{i,j+1})$ mais sans la contrainte d'alignement avec l'origine. Elle repose donc sur l'estimation de deux paramètres λ_j et α_j afin de compléter le triangle.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
λ	1.983603	2.0557368	1.354756	1.11076	1.053067	1.035805	1.005753	1.000446	0.992454	0.976789	0.982678	0.9976831	1
α	32291.17	-12018.93	886.5378	10468.83	7582.456	4318.11	5282.312	3525.442	4200.585	6124.611	4784.486	1541.4226	1038.01

Tableau 7: Paramètres de la méthode London Chain

Nous retrouverons alors les réserves London Chain pour toutes les branches.

	AT	RC	RC AUTO	MALADIE	INCENDIE DAB	INCAPACITE	ADC	AUTOFL0T
2005	0	0	0	0	0	0	0	0
2006	726.60679	1.4	580.69077	1.3988695	1.4	184.01964	2.1045584	2.5956
2007	1576.3162	156.53006	1697.0169	2.7982148	12.997138	424.7202	91.626785	54.469681
2008	3140.1507	1038.5859	3305.2497	4.0089782	272.83505	449.63523	29.666165	236.77891
2009	4824.1345	597.57653	5412.7065	5.4817386	101.43125	615.49962	159.75561	673.47506
2010	6862.5599	2286.7529	9535.3222	8.5617149	297.71996	689.53487	74.424026	1100.6256
2011	9401.5385	2024.3097	16776.403	10.362555	524.29727	1104.0124	133.99968	1624.5302
2012	13910.149	4063.2764	28317.208	13.616301	604.79693	612.66934	340.48141	6291.8471
2013	22889.947	7563.7571	45201.976	18.491757	1561.0931	2506.6855	885.50225	8115.1375
2014	35652.422	9407.0039	74681.113	33.301959	2788.8273	3627.6973	93.120605	17650.812
2015	52593.191	11264.258	122455.6	48.072166	6020.8463	478.91834	198.87418	19488.505
2016	84737.916	16744.262	194000.83	221.99911	11932.207	2287.5102	383.00062	27379.232
2017	132362.93	18792.009	310250.9	592.44972	29009.659	3793.6349	821.61429	48775.851
2018	203835.82	17893.997	512521.55	48527.202	76948.499	8601.68	1675.2474	84178.597
Total	572513.682	91833.7185	1324736.57	49487.7451	130076.6093	25376.2175	4889.41758	215572.457

Tableau 8 : Réserves pour les branches non-vie par année de survenance-LC

3. GLM

La méthode GLM est appliquée sur les paiements incrémentaux en considérant les années de survenances et années de développement comme variables explicatives.

Les lois à utiliser pour cette modélisation doivent être d'une famille exponentielle, d'où l'utilisation des lois gamma et log normale.

La loi log normale fournit comme réserve :

	AT	RC	RC AUTO	MALADIE	INCENDIE DAB	INCAPACITE	ADC	AUTOFL0T
2005	0	0	0	0	0	0	0	0
2006	1340.9599	76.58075	1390.2089	0.0081205	2.762275	165.35321	1.1631679	66.416109
2007	3200.6504	196.76883	3585.6166	0.03368	9.0285682	344.68896	3.1209248	190.6723
2008	5755.5596	380.80946	6988.1418	0.1136413	22.96784	540.32897	6.4057941	414.85113
2009	9241.0961	657.8646	12195.164	0.3632971	53.687402	754.88763	11.907056	810.46528
2010	13971.199	1069.8781	20094.102	1.1422643	121.08082	991.31273	21.109752	1498.8354
2011	20364.473	1677.1074	32002.71	3.5722454	268.60068	1252.9317	36.493803	2685.5416
2012	28979.017	2566.0407	49877.181	11.15201	591.15617	1543.504	62.200511	4718.6622
2013	40558.836	3860.7241	76620.847	34.794781	1296.046	1867.2806	105.14557	8187.2143
2014	56095.701	5738.9691	116542.06	108.54064	2836.0447	2229.0715	176.87774	14087.541
2015	76911.574	8455.5401	176033.4	338.56606	6200.0845	2634.322	296.68265	24104.53
2016	104768.46	12375.324	264579.07	1056.0524	13548.149	3089.2001	496.766	41086.905
2017	142014.8	18020.784	396249.26	3294.0074	29597.976	3600.6946	830.90914	69850.501
2018	191780.56	26139.829	591916.62	10274.547	64653.839	4176.7274	1388.9233	118535.85
Total	694982.886	81216.2201	1748074.38	15122.8935	119201.423	23190.3034	3437.70541	286237.985

Tableau 9 : Réserves pour les branches non-vie par année de survenance-GLM/lognormale

La loi gamma fournit les résultats ci-dessous :

	AT	RC	RC AUTO	MALADIE	INCENDIE DAB	INCAPACITE	ADC	AUTOFLLOT
2005	0	0	0	0	0	0	0	0
2006	934.99164	369.30869	1097.7283	0.0970863	7.2240312	159.22419	3.2191005	75.477657
2007	2276.6235	864.93188	2823.5403	0.3795609	21.751089	331.2638	8.2824731	212.91967
2008	4182.0665	1520.3013	5491.0013	1.1947673	50.783005	518.18356	16.214852	454.84454
2009	6868.287	2376.941	9566.8821	3.540594	108.61917	722.29753	28.609794	871.82028
2010	10634.744	3486.351	15745.733	10.28388	223.65119	946.2026	47.94542	1580.7871
2011	15894.7	4912.32	25060.738	29.66077	452.25084	1192.8162	78.075409	2775.3188
2012	23218.411	6733.7667	39048.484	85.332892	906.34464	1465.4191	124.99254	4775.5957
2013	33392.703	9048.226	59993.89	245.27774	1808.1633	1767.7034	198.01607	8110.9248
2014	47503.163	11976.129	91294.257	704.78786	3598.9467	2103.8271	311.63815	13655.995
2015	67047.503	15666.053	138000.4	2024.9192	7154.7788	2478.4754	488.39517	22855.854
2016	94091.955	20301.161	207620.97	5817.5294	14215.128	2896.9302	763.33296	38097.361
2017	131486.99	26107.102	311318.02	16713.324	28233.714	3365.1485	1190.9504	63322.481
2018	183164.91	33361.694	465684.07	48015.857	56067.915	3889.8511	1855.9975	105040.85
Total	620697.048	136724.286	1372745.71	73652.1848	112849.2698	21837.3427	5115.66984	261830.23

Tableau 10 : Réserves pour les branches non-vie par année de survenance-GLM/GAMMA

Nous ne pouvons pas choisir la méthode adéquate pour chaque LoB sur la base de la réserve la plus élevée parce que nous pouvons avoir un problème de sur-provisionnement. D'où la nécessité de déterminer l'erreur d'estimation selon la démarche citée dans le deuxième chapitre.

	AT	RC	RC AUTO	MALADIE	INCENDIE DAB	INCAPACITE	ADC	AUTOFLLOT
Chain Ladder	2.19E+11	5.57E+08	1.01E+12	1.32E+12	2.92E+11	3.85E+08	6.36E+07	1.21E+10
London Chain	1.98E+11	6.15E+08	7.85E+11	1.21E+12	1.46E+11	3.68E+08	7.21E+07	1.20E+10
GLM - log normale	3.77E+11	6.50E+08	1.16E+12	1.23E+12	1.20E+11	5.17E+08	5.98E+07	1.51E+10
GLM - gamma	7.91E+10	2.51E+08	3.14E+11	1.21E+12	9.33E+10	1.84E+08	4.10E+07	5.85E+09

Tableau 11 : SCE des méthodes de provisionnement par LoB

Nous remarquons pour toutes les LoB la méthode la plus adéquate est celle de GLM-GAMMA. Nous utiliserons donc les réserves obtenues par Gamma pour déterminer le volume des réserves pour le calcul du capital de solvabilité requis.

II. Mesure de dépendance

Afin de mesurer la dépendance entre les branches, nous procédons par les étapes suivantes :

- ✓ **Sélection des couples de branches à retenir.**

La procédure *sgscatter* sous SAS permet d'obtenir la matrice des nuages de points pour l'ensemble des branches.

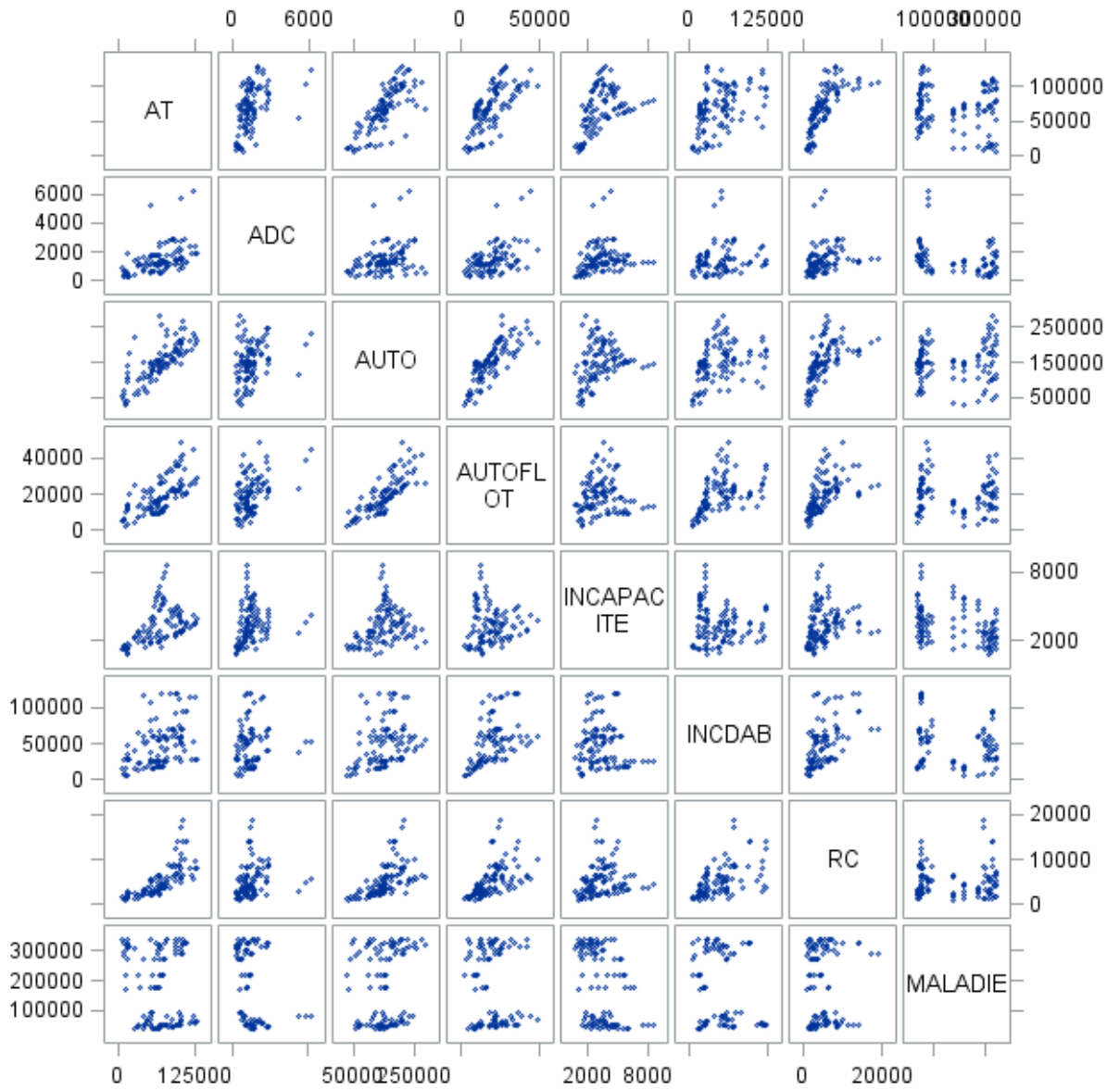


Figure 13 : Matrice de nuages de points des règlements entre les branches

Nous pouvons confirmer les dépendances existantes entre les branches en appliquant le test de significativité des tau de Kendall, qui fournit les résultats

suivants :

Coefficients de corrélation du Tau b de Kendall, N = 105 Proba > tau sous H0: Tau=0								
	AT	ADC	AUTO	AUTOFLOT	INCAPACITE	INCDAB	RC	MALADIE
AT	1.00000	0.42251 <.0001	0.63077 <.0001	0.53700 <.0001	0.35128 <.0001	0.36234 <.0001	0.68376 <.0001	0.00184 0.9779
ADC	0.42251 <.0001	1.00000	0.26707 <.0001	0.24654 0.0002	0.28723 <.0001	0.13438 0.0424	0.31842 <.0001	-0.22423 0.0007
AUTO	0.63077 <.0001	0.26707 <.0001	1.00000	0.63810 <.0001	0.20037 0.0025	0.30079 <.0001	0.55628 <.0001	0.15328 0.0209
AUTOFLOT	0.53700 <.0001	0.24654 0.0002	0.63810 <.0001	1.00000	0.08608 0.1931	0.50522 <.0001	0.51671 <.0001	0.06800 0.3055
INCAPACITE	0.35128 <.0001	0.28723 <.0001	0.20037 0.0025	0.08608 0.1931	1.00000	0.00440 0.9470	0.26724 <.0001	-0.23819 0.0003
INCDAB	0.36234 <.0001	0.13438 0.0424	0.30079 <.0001	0.50522 <.0001	0.00440 0.9470	1.00000	0.44518 <.0001	-0.00368 0.9558
RC	0.68376 <.0001	0.31842 <.0001	0.55628 <.0001	0.51671 <.0001	0.26724 <.0001	0.44518 <.0001	1.00000	0.02353 0.7230
MALADIE	0.00184 0.9779	-0.22423 0.0007	0.15328 0.0209	0.06800 0.3055	-0.23819 0.0003	-0.00368 0.9558	0.02353 0.7230	1.00000

Figure 14 : Matrice des tau de Kendall

Seules les valeurs de corrélation de p-value <0.0001 sont considérées significatives. On retient alors les 16 couples suivants :

AT	AT	AT	AT	AT	AT	ADC	ADC
ADC	AUTO	AUTOFLOT	INCAPACITE	INCDAB	RC	AUTO	INCAPACITE
ADC	AUTO	AUTO	AUTO	AUTOFLOT	AUTOFLOT	INCAPACITE	INCDAB
RC	AUTOFLOT	INCDAB	RC	INCDAB	RC	RC	RC

Tableau 12: Couples des LoB corrélés

Les couples possibles restants sont donc considérés comme indépendants.

✓ **Calibration des copules chaque couple LoB retenu.**

Les copules qui seront calibrées aux données des branches appartiennent à la famille archimédienne. L'objectif de cette calibration est de déterminer le paramètre correspondant à la copule qui capture au mieux la dépendance d'une paire de LoBs.

Pour le couple LoB AT-ADC, Nous obtenons les sorties SAS suivantes pour chaque copule :

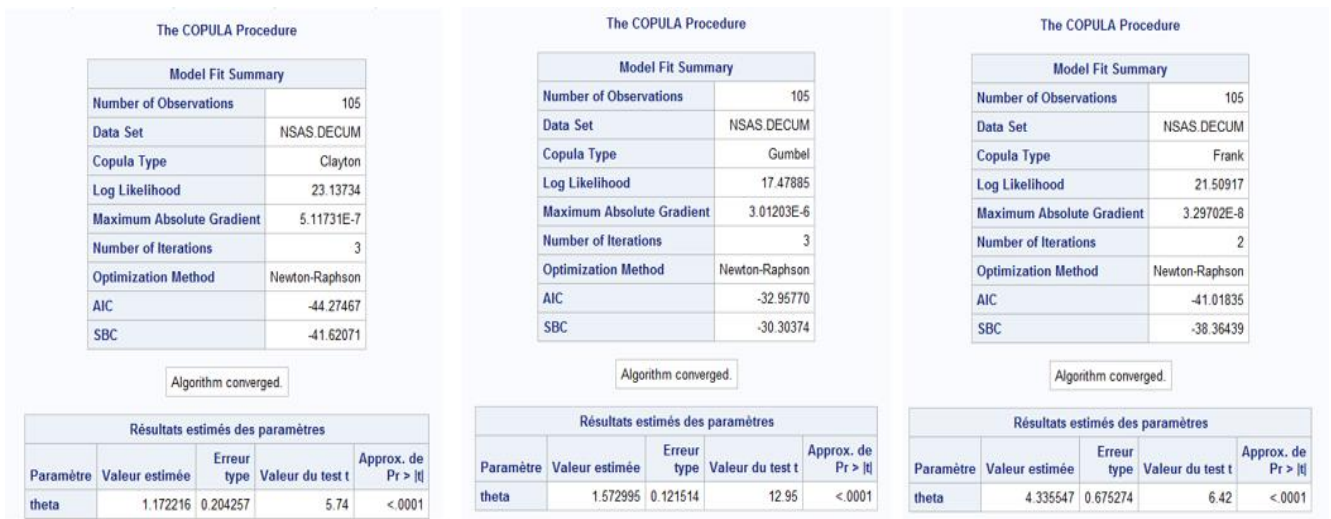


Figure 15: Sorties SAS de PROC COPULA pour le couple AT ; ADC

La copule retenue pour le couple (AT, ADC) est alors celle de *Clayton*, qui correspond à la valeur de log-vraisemblance la plus élevée. Notons que l'utilisation du critère AIC donne le même résultat.

Par la même procédure, nous obtenons les copules optimales pour les couples de branches restants :

Couples de LoBs	COPULE RETENUE	Parametre
AT, ADC	CLAYTON	1.172216
AT, AUTO	FRANK	8.692656
AT, AUTOFLLOT	FRANK	5.995725
AT, INCAPACITE	CLAYTON	1.375421
AT, INCDAB	CLAYTON	0.947584
AT, RC	FRANK	10.092720
ADC, AUTO	FRANK	2.521277
ADC, INCAPACITE	CLAYTON	1.145218
ADC, RC	CLAYTON	0.741952
AUTO, AUTOFLLOT	FRANK	8.522778
AUTO, INCDAB	CLAYTON	1.031762
aUTO, RC	CLAYTON	2.062289
AUTOFLLOT, INCDAB	CLAYTON	2.377556
AUTOFLLOT, RC	CLAYTON	1.562185
INCAPACITE, RC	CLAYTON	0.809750
INCDAB, RC	CLAYTON	1.228200

Tableau 13 : Copules retenues par couple de LoB

✓ Calcul du tau de Kendall par couple correspondant à la copule choisie

Les relations entre les paramètres des différentes copules et le tau de Kendall permettent de calculer la matrice de ce dernier.

Par exemple pour le couple de LoB AT-ADC, dont la copule de dépendance retenue est celle de Clayton, le tau de Kendall s'écrit :

$$\tau = \frac{\alpha}{\alpha+2} \quad \text{où } \alpha \text{ est le paramètre de la copule.}$$

Nous obtenons alors la valeur de tau :

$$\tau = \frac{1.172216}{2+1.172216} = 0,37 \text{ qui sera la mesure de dépendance retenue.}$$

Récapitulons les résultats obtenus pour toute la branche dans le tableau ci-dessous :

	AT	ADC	AUTO	AUTOFLOT	INCAPACITE	INCENDIEDAB	RC	MALADIE
AT	1.00							
ADC	0.37	1.00						
AUTO	0.63	0.26	1.00					
AUTOFLOT	0.51	0.00	0.62	1.00				
INCAPACITE	0.41	0.36	0.00	0.00	1.00			
INCENDIEDAB	0.32	0.00	0.34	0.54	0.00	1.00		
RC	0.67	0.27	0.51	0.44	0.29	0.38	1.00	
MALADIE	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	1.00

Tableau 14 : Dépendance entre lobs

III. Calcul du capital de solvabilité requis

1. Risque de réserve

Vérification de l'hypothèse de Merz-Wüthrich :

Avant d'appliquer la formule fermée de Merz et Wüthrich pour le calcul du risque de provisionnement non-vie, il faut au préalable vérifier que le ratio

$$\frac{\hat{\sigma}_j^2 / (f_j^I)^2}{C_{n-j,i}^I} \text{ est très inférieur à 1 pour } j=1, \dots, 13.$$

	AT	ADC	AUTO	AUTOFLLOT	INCAPACITE	INCDAB	RC	MALADIE
1	0.00162	0.0004	0.00188	0.00515	0.00481	0.00015	0.00133	3.01E-6
2	0.00024	6.07E-6	2.06E-6	0.00023	0.00013	0.00316	8.32E-6	4.92E-8
3	0.00009	0.00016	0.00028	0.00023	0.00006	0.00006	0.00004	1.52E-7
4	0.00017	5.42E-7	0.00034	0.00002	0.00024	0.00004	0.00131	4.35E-10
5	6.06E-7	8.73E-7	0.00014	0.00013	0.00004	0.00001	0.00154	4.39E-10
6	0.00003	0.00004	0.00004	3.41E-6	0.00005	0.00001	0.00268	3.45E-11
7	4.54E-6	0.00003	0.00001	0.00001	0.00056	2.27E-7	0.00067	5.99E-12
8	0.00001	7.42E-6	6.68E-6	1.78E-6	0.00041	7.15E-7	3.13E-6	3.25E-12
9	9.07E-6	4.32E-7	1.38E-6	8.03E-11	0.00002	3.23E-7	0.00015	1.22E-11
10	0.00001	1.12E-6	1.79E-7	9.47E-6	0.00003	1.17E-7	0.00001	8.42E-13
11	0.00001	0.00001	2.06E-8	7.67E-8	0.00007	5.93E-8	0.00003	9.68E-13
12	6.41E-7	0.00004	1.98E-7	2.04E-7	0.00008	1.18E-7	3.66E-6	7.66E-13
13	2.53E-8	0.00001	2.22E-8	1.24E-7	0.00006	9.21E-8	2.29E-8	6.6E-13

Tableau 15 : Validation de l'hypothèse de Merz-Wüthrich pour les différents LoBs

On remarque que l'hypothèse est vérifiée pour l'ensembles des branches.

Pour la branche AT, la première étape est de calculer \hat{f}_i , les facteurs de développement Chain Ladder.

factors													
	COL1	COL2	COL3	COL4	COL5	COL6	COL7	COL8	COL9	COL10	COL11	COL12	COL13
ROW1	4.5639606	1.8415556	1.3634557	1.1866897	1.1007766	1.0615109	1.0359711	1.0207947	1.0170528	1.0150148	1.0151731	1.0085861	1.0079057

Figure 16 : facteurs de développement Chain Ladder pour la branche Accidents de Travail

Les résidus de Mack – tels que définis dans la partie théorique – sont calculés puis ré-échantillonnés. Les nouveaux résidus obtenus permettent de déduire les nouveaux facteurs de développement au temps l notés \tilde{f}_j^l .

factorsi													
	COL1	COL2	COL3	COL4	COL5	COL6	COL7	COL8	COL9	COL10	COL11	COL12	COL13
ROW1	4.5639606	2.3712871	1.7940176	1.5429958	1.4102813	1.3335725	1.2839163	1.2512508	1.229579	1.2156437	1.2070545	1.2017566	1.1993831

Figure 17 : Nouveaux facteurs de développement au temps l

Ces facteurs nous donnent les nouvelles diagonales $\tilde{C}_{i,j+1}$ avec la loi de Gamma :

	COL1	COL2	COL3	COL4	COL5	COL6	COL7	COL8	COL9	COL10	COL11	COL12	COL13	COL14
ROW1	10658.775	36403.557	61522.457	75893.425	91638.629	106100.57	113120.6	118167.18	120909.3	124206.31	127769.42	130058.43	131298.53	132336.53
ROW2	11840.127	44882.881	65018.309	85822.745	110368.15	123058.39	132698.11	140010.34	143730.57	147343.41	149788.38	152693.13	153880.78	155097.32
ROW3	14117.349	47628.166	75318.309	109283.01	125963.72	139498.34	148925.34	154638.66	159753.09	162036.47	164153.78	165662.16	167084.56	0
ROW4	9681.2673	50847.114	102463.74	132804.51	165938.03	180589.55	192712.55	200994.92	204390.58	207298.77	208796.14	211964.24	0	0
ROW5	6458.6463	52782.692	97757.335	154065.84	180566.09	198163.34	214406.97	220674.03	225043.87	227502.64	230918.55	0	0	0
ROW6	7831.175	51048.823	108917.39	145820.03	173015.8	191093.92	200375.05	205002.44	207275.97	210810.61	0	0	0	0
ROW7	9920.9549	62989.337	116740.68	162432.87	192473.51	211420.68	221409.69	228176.68	232921.54	0	0	0	0	0
ROW8	14386.799	60869.003	115025.38	156269.08	180378.73	193906.58	202843.33	210139.82	0	0	0	0	0	0
ROW9	15059.984	68800.009	128596.24	177395.96	210024.67	230683.43	244872.97	0	0	0	0	0	0	0
ROW10	15991.225	73018.155	136325.51	178959.92	205778.01	226515.61	0	0	0	0	0	0	0	0
ROW11	13609.772	55893.761	113267.16	149621.75	177554.59	0	0	0	0	0	0	0	0	0
ROW12	15532.532	68224.515	119128.93	162427.03	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
ROW13	17596.291	69099.456	127250.49	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
ROW14	27547.222	120214.99	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Figure 18 : Simulation de la nouvelle diagonale $C_{(i,j+1)}$

L'étape suivante est d'obtenir les nouveaux facteurs de développement \tilde{f}_j^{I+1} au temps I+1,

factorsip													
	COL1	COL2	COL3	COL4	COL5	COL6	COL7	COL8	COL9	COL10	COL11	COL12	COL13
ROW1	4.8576068	2.3215602	1.6729306	1.4066602	1.2587881	1.1672607	1.1151934	1.0762434	1.0543848	1.0369667	1.0232187	1.0162959	1.0117238

Figure 19 : Nouveaux facteurs de développement au temps I+1

Les étapes citées sont itérées 10000 fois, ces itérations permettent d'obtenir une distribution de chacun des paramètres intervenant dans l'expression de l'erreur de prédiction notée $MSEP_{\sum_{i=1}^n \widehat{CDR}_i(I+1)|D_I}(0)$. On prend les moyennes de ces paramètres pour estimer cette erreur.

Nous en déduisons l'écart—type pour le risque de réserve pour la branche AT.

$$\sigma_{res}^{AT} = \frac{\sqrt{MSEP_{\sum_{i=1}^n \widehat{CDR}_i(I+1)|D_I}(0)}}{BE_{psap}}, \text{ Nous obtenons alors une valeur de 14\%}.$$

Nous procédons de même pour l'ensemble des LoBs :

	RISQUE RESERVE	
	Données réglementation	Données estimées
AT	11%	14%
RC	11%	13%
MALADIE	11%	2%
AUTO	9%	9%
ADC	11%	8%
INCENDIE DAB	10%	7%
AUTOFLLOT	11%	12%
INCAPACITE	11%	12%

Tableau 16: σ_{res} réglementaires et estimées du risque de provisionnement à horizon un an

Nous notons que pour certaines branches, notamment MALADIE, les valeurs obtenues sont sensiblement différentes de celles de la réglementation. Cette dernière peut alors entraîner une surestimation du capital de solvabilité requis.

2. Risque prime :

Le risque de prime a été déterminé en quantifiant la volatilité des S/P par année de survenance. Pour cela, nous avons eu recours à une simulation de 10000 scénarios permettant de trouver la distribution de la volatilité. A partir de sa distribution, nous calculons l'écart entre la $VaR_{99.5\%}$ et la moyenne.

Nous avons utilisé la commande *proc severity* sous **SAS** afin de trouver la distribution la plus adéquate pour la volatilité des loss ratio.

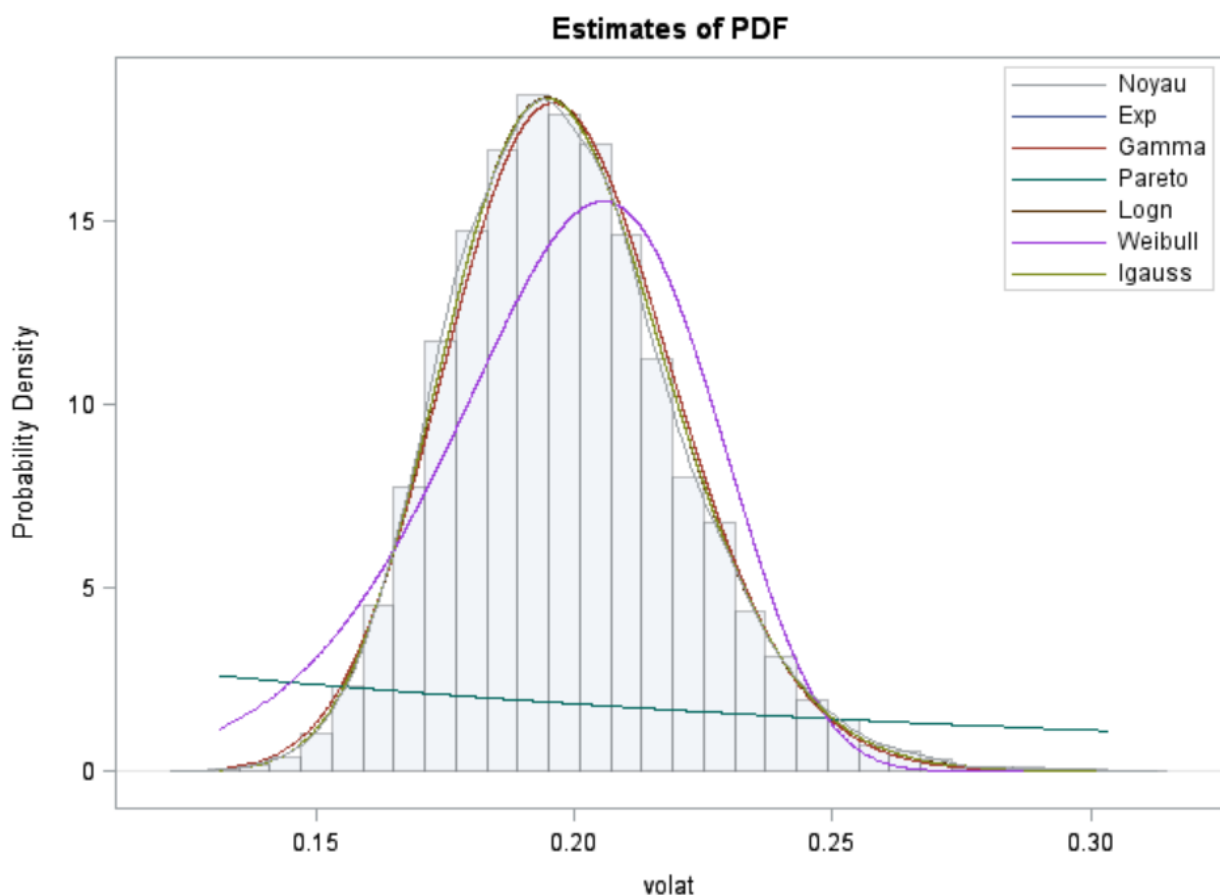


Figure 20: Ajustement de la distribution de la volatilité par les lois usuelles-AT

Model Selection			
Distribution	Converged	AICC	Selected
Exp	Yes	-12360	No
Gamma	Yes	-48028	No
Pareto	Yes	-12357	No
Logn	Yes	-48089	Yes
Weibull	Yes	-46062	No
Igauss	Yes	-48089	No

Figure 21: Critère AICC-distribution volatilité-AT

La loi qui correspond donc le mieux à la distribution de la volatilité des Loss Ratio pour la branche AT est la loi lognormale.

Nous avons effectué cette démarche sur toutes les branches, pour retrouver finalement le tableau récapitulatif suivant :

	RISQUEPRIME	
	Données réglementation	Données estimées
AT	14%	18.69%
RC	14%	11.5%
MALADIE	14%	1.6%
AUTO	10%	5.6%
ADC	14%	4.6%
INCENDIE DAB	8%	10.1%
AUTOFLOT	15%	11.8%
INCAPACITE	14%	7.6%

Tableau 17 : Comparaison entre les valeurs réglementaires et les valeurs estimées.

Nous remarquons que pour la majorité des branches, les valeurs sont largement différentes, chose qui renforce la nécessité de réestimer ces paramètres en se basant sur les données d'AXA Assurance Maroc et non pas sur la base du marché européen.

3. Best Estimate prime

Le volume correspondant au risque de prime se calcule par Line of Business par la formule suivante :

$$BE_{primes} = \max(P_{last,s}; P_{s, \text{à acquérir}}) + FP_{existing}$$

Avec $P_{last,s}$ est la dernière prime acquise pour la branche s

$P_{s, \text{à acquérir}}$ est la prime à acquérir pour la branche s, dans notre cas elle est égale à $3\% * P_{last,s}$

$FP_{existing}$ est la valeur actuelle probable attendue des primes nettes dues aux contrats existants dans les 12 prochains mois. En supposant un taux de renouvellement de 70% :

$$FP_{existing} = \frac{P_{last,s} * 0.7}{1 + r}$$

Avec r le taux zéro coupon.

En appliquant ces deux formules, nous obtenons le BE_{primes} pour toutes les branches, présenté dans le tableau suivant :

	BE PRIMES
AT	475,448.50
RC	127,253.18
MALADIE	622,624.61
AUTO	969,550.46
ADC	11,250.36
INCENDIE DAB	286,875.32
AUTOFLOT	115,084.42
INCAPACITE	235,106.29

Tableau 18 : Best Estimate Prime par LoB

4. Best Estimate Réserve

Pour calculer le Best Estimate réserve, il suffit d'utiliser le triangle décumulé obtenu par la modélisation GLM gamma, et d'actualiser la somme des diagonales du triangle inférieur aux taux zéro coupon.

	BE RESERVES
AT	562,941.83
RC	119,001.26
MALADIE	70,835.15
AUTO	1,254,360.47
ADC	4,752.43
INCENDIE DAB	107,026.39
AUTOFLOT	240,230.49
INCAPACITE	19,586.52

Tableau 19 : Best Estimate réserve par LoB

5. Calcul du capital de solvabilité requis en non-vie

Après avoir estimé les écarts-types pour les risques de prime et de réserve nous pouvons donc calculer le capital de solvabilité requis en non-vie.

SCR-Par. estimés	SCR - Par. EIOPA
761,188.73	1,020,469.46

Figure 22: SCR selon les deux approches.

Nous constatons que l'approche basée sur les paramètres de la réglementation européenne tend à surestimer le SCR. Ceci est dû aux valeurs élevées des écart-types prime et réserve.

VI. Rentabilité des branches de l'assurance non-vie

Dans cette section, nous proposons de mettre en application ce qui a été calculé précédemment afin d'analyser la rentabilité des branches de l'assurance non-vie. Cette analyse se base sur la détermination du ECR (economic combined ratio). Le ratio combiné tout seul, ne peut pas refléter l'activité des LoB puisqu'il se restreint à la sinistralité et aux primes encaissées. Certes, la rentabilité d'une branche doit être évaluée en se basant sur la capacité de régler les prestations mais aussi sur la capacité à rémunérer les actionnaires. D'où l'importance d'inclure à l'indicateur de

rentabilité le produit financier et toutes les charges émanant de l'activité de souscription, à savoir la Time Value, le coût de capital, et la taxe.

1. Time value et coût du capital

Pour calculer la Time Value, nous avons besoin de la charge du sinistre, la prime, Expense Ratio et la cadence de liquidation. La Time Value est une composante qui réduit la valeur de l'ECR puisqu'elle représente le produit financier résultant de la différence de temps entre la date d'encaissement des primes et la date de règlement des sinistres.

Afin de calculer le coût du capital qui est considéré comme rentabilité espérée de l'investissement du SCR au taux sans risque, nous avons utilisé la formule MEDAF sur la base de la rentabilité du marché marocain et le coefficient beta de l'activité de l'assurance au Maroc, au lieu d'appliquer le 6% relatif au marché européen.

Cout du capital %	9.04%
taux sans risque	3.1%
Rentabilité du marché	9.1%
Bêta du marché boursier marocain	0.99

Figure 23 : coût du capital

Ce pourcentage du coût du capital est ensuite multiplié par les SCR_t -obtenus par les cadences de liquidation- actualisés au taux sans risque puis multipliés par le taux RoE (12.9%) exigé par les actionnaires à AXA Assurance Maroc.

AT																
Time value	-6.6%															
		Loss Ratio	Expense R	SCR												
		72.42%	33.8%	427,738.4												
année		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	
Cadence		5.77%	20.44%	21.78%	16.33%	11.73%	7.96%	4.93%	3.04%	1.86%	1.52%	1.34%	1.31%	0.79%	0.62%	
taux sans risque		2.39%	2.56%	2.68%	2.81%	2.81%	2.88%	2.98%	3.09%	3.20%	3.35%	3.55%	3.66%	3.73%	3.80%	
GEP	undiscounted	250,528.6	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	
	discounted	244,680.8	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	
CY EAXA CHARGE	undiscounted	180,390.8	10,471.5	37,079.3	39,516.9	29,625.8	21,278.8	14,445.3	8,936.5	5,520.4	3,380.0	2,765.1	2,436.0	2,372.8	1,436.2	1,126.2
	discounted	160,106.1	10,227.1	35,251.4	36,502.8	26,517.3	18,525.5	12,182.6	7,276.1	4,327.5	2,545.6	1,988.9	1,659.7	1,541.4	892.2	668.1
EXPENSE	undiscounted	84,614.0	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	
	discounted	82,638.9	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	
Exg actionnaires	en montant	34,123.4	2,179.7	7,513.1	7,779.8	5,651.6	3,948.3	2,596.5	1,550.7	922.3	542.6	423.9	353.7	328.5	190.1	142.4
	en %	13.62%	0.87%	3.00%	3.11%	2.26%	1.58%	1.04%	0.62%	0.37%	0.22%	0.17%	0.14%	0.13%	0.08%	0.06%

Figure 24 : Time value et coût du capital pour AT

2. CAT Adjustement et taxe

Pour le CAT Adjustement, nous avons utilisé les valeurs déjà estimées par AXA Assurance Maroc. La dernière étape est donc d'appliquer la taxe à ces composantes pour obtenir l'ECR pour chaque LoB.

estimation	Combined ra	Cat adjust	Time value	Coc	Taxe	ECR
AT	105.8%	0%	-6.6%	13.6%	5.3%	118.2%
RC+ADC	47.7%	0%	-1.7%	7.7%	2.9%	56.6%
MALADIE+INCAPACITE	113.6%	0%	-0.7%	2.3%	0.9%	116.0%
AUTO	89.9%	0%	-4.7%	4.4%	1.6%	91.2%
INCENDIE DAB	69.4%	4.42%	-0.7%	3.2%	1.2%	77.5%
AUTOFL0T	94.0%	0%	-4.0%	8.5%	3.2%	101.7%
ECR NON VIE						93.5%

Figure 25 : ECR par lob

Nous pouvons remarquer que les branches AT, RC+ADC, AUTOFL0T sont des branches non rentables vis-à-vis les actionnaires, puisque leur ECR dépasse 100%. La branche ne crée donc pas de valeur de plus pour la rémunération des actionnaires. Dans ce cas, la compagnie d'assurance devrait revoir sa politique de souscription en agissant sur le ratio combiné. Toutefois, l'activité non-vie est économiquement rentable dans sa totalité puisque le ratio économique combiné est inférieur à 100%.

Conclusion

La mise en place de nouveaux paramètres à partir des données de l'assureur a permis d'illustrer que les compagnies d'assurance marocaines doivent adopter une approche fixant les exigences en capital réglementaire, propre au marché marocain, puisque les résultats obtenus par la directive Solvabilité II surestiment le besoin en capital de solvabilité requis. Une surestimation de ce capital augmente l'indicateur de rentabilité technique, à savoir le ratio économique combiné, et mène à conclure que l'activité non-vie est non rentable. Chose qui pourra nuire à l'image de la compagnie et décourager les actionnaires à y investir leurs capitaux.

L'activité non-vie d'AXA Assurance Maroc s'est avérée techniquement rentable dans sa globalité. Les politiques de souscription des branches dont l'ECR dépasse 100% doivent être revues et réétudiées afin de réduire l'ECR global et d'améliorer l'activité non-vie.

Bibliographie

- [1] Arthur Charpentier – Computational Actuarial Science with R – CRC Press Book.
- [2] Roger B NELSEN – An introduction to copulas – Springer,1999.
- [3] Swiss Re, Measuring underwriting profitability of the non-life insurance industry, sigma, No 3/2006.
- [4] Swiss Re, Insurers' cost of capital and economic value creation: principles and practical implications, sigma, No 3/2005.
- [5] Autorité de Contrôle des Assurances et de la Prévoyance Sociale, Rapport annuel du secteur des assurances au Maroc, 2017.
- [6] EL GHALI H., KHERRAZ F.E. (2017) – Evaluation des risques de souscription non-vie sous la directive solvabilité 2 – Mémoire d'actuariat, INSEA.
- [7] LOISEAU A. (2014) – Modélisation du capital requis pour le risque de souscription non-vie et étude de la dépendance – Mémoire d'actuariat, Université Paris Dauphine.
- [8] GBONGUE K.F. (2012) – Apport de la théorie des copules, de la théorie bayésienne et des mesures de risque dans la résolution des problèmes en Actuariat – Mémoire d'actuariat, INSEA.
- [9] LAILY R. (2014) – Construction d'un modèle interne partiel en assurance non-vie – Mémoire d'actuariat, EURIA.
- [10] JAZIRI S. (2011) – Méthodes de provisionnement non-vie et risque de réserve à un an – Mémoire d'actuariat, ISFA.
- [11] REZQALLAH Z. (2018) – Quel provisionnement non-vie sous SBR ? – Mémoire d'actuariat, INSEA.
- [12] BELGUISE O. (2001) – Tempêtes: Etude des dépendances entre les branches Auto et Incendie avec la théorie des copulas – Mémoire d'actuariat, ULP.

ANNEXE 1 : Vérification des hypothèses CHAIN

LADDER

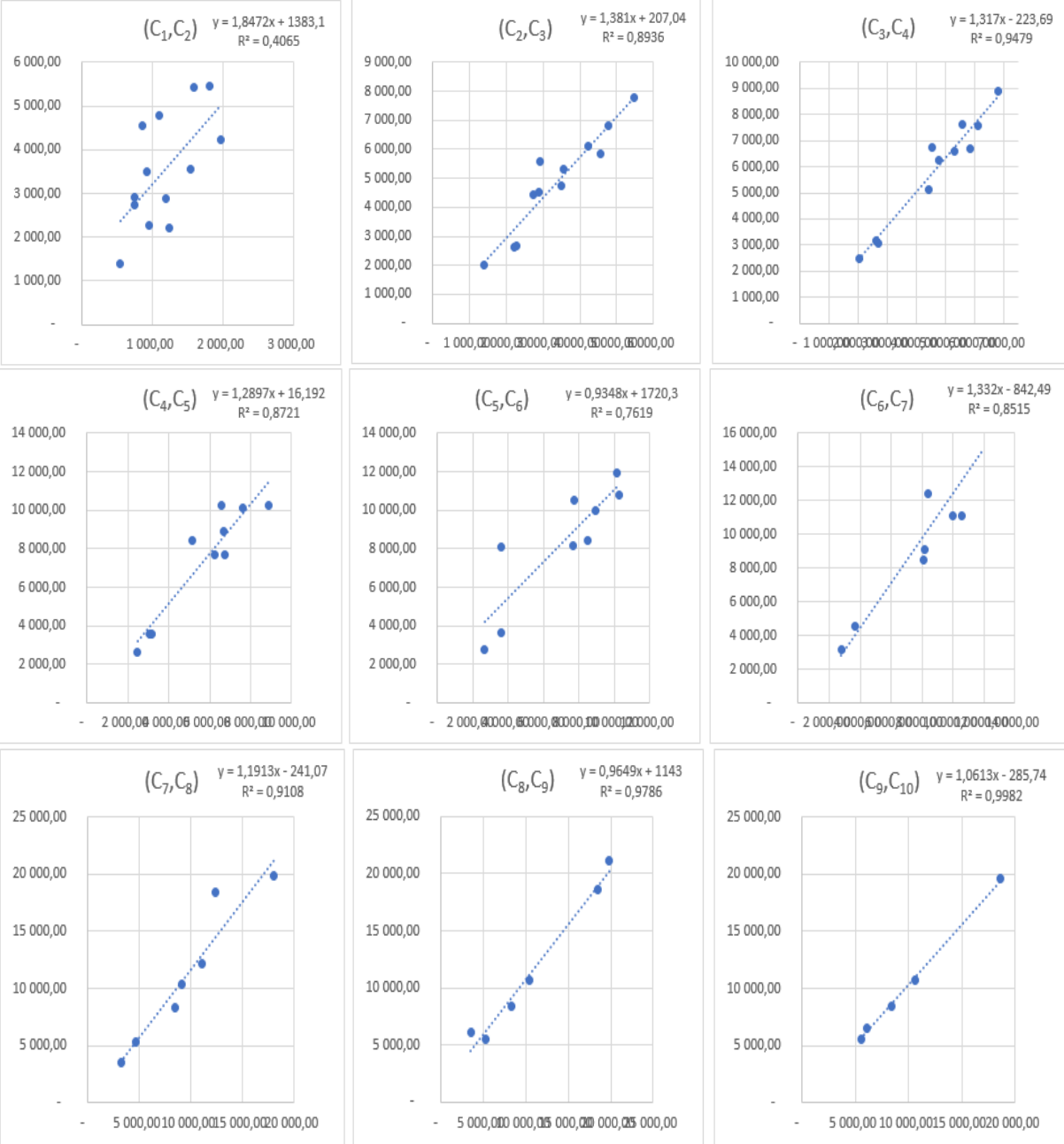


Figure 26: (H1) RC

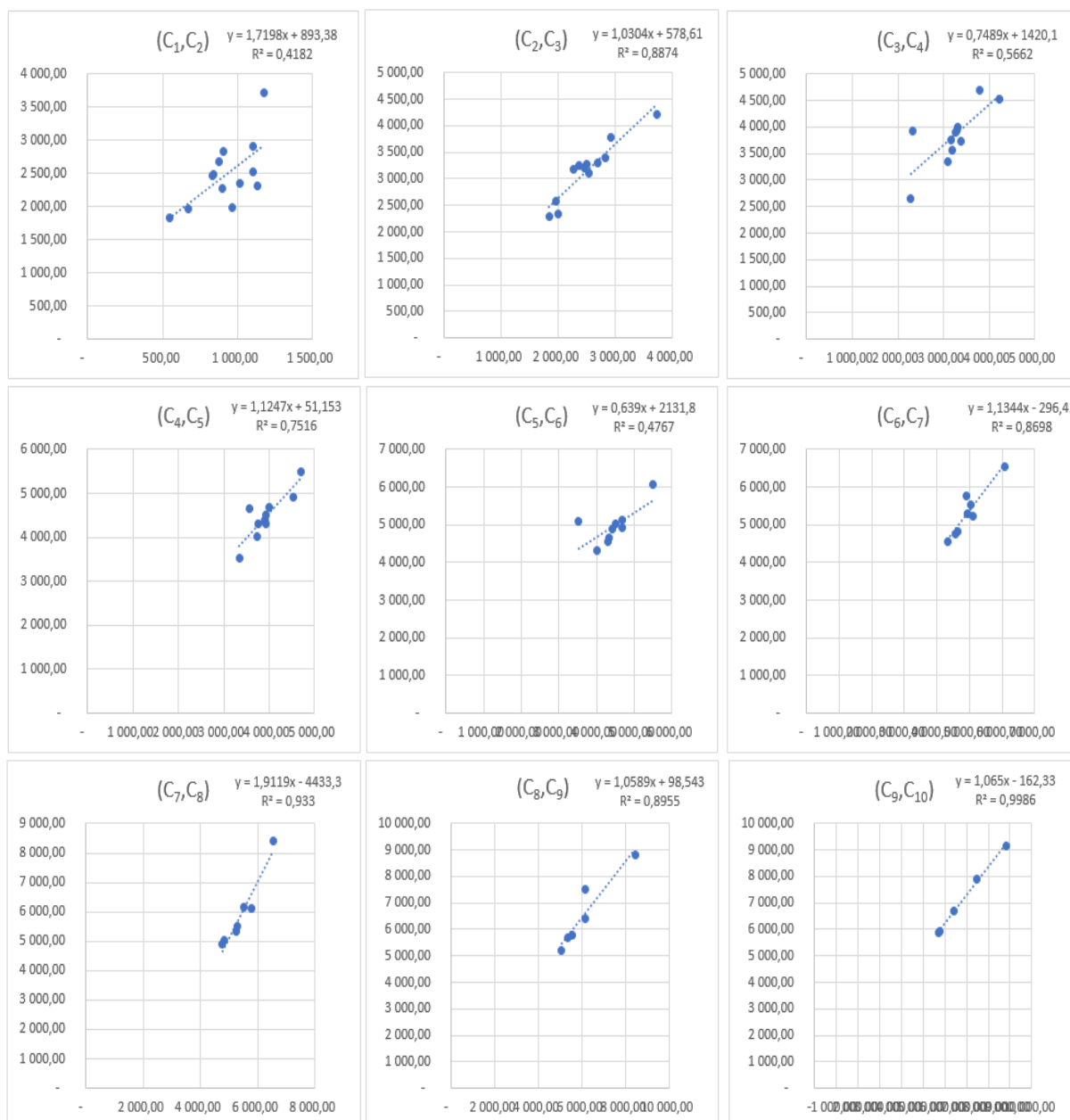


Figure 27 : (H1) Incapacité

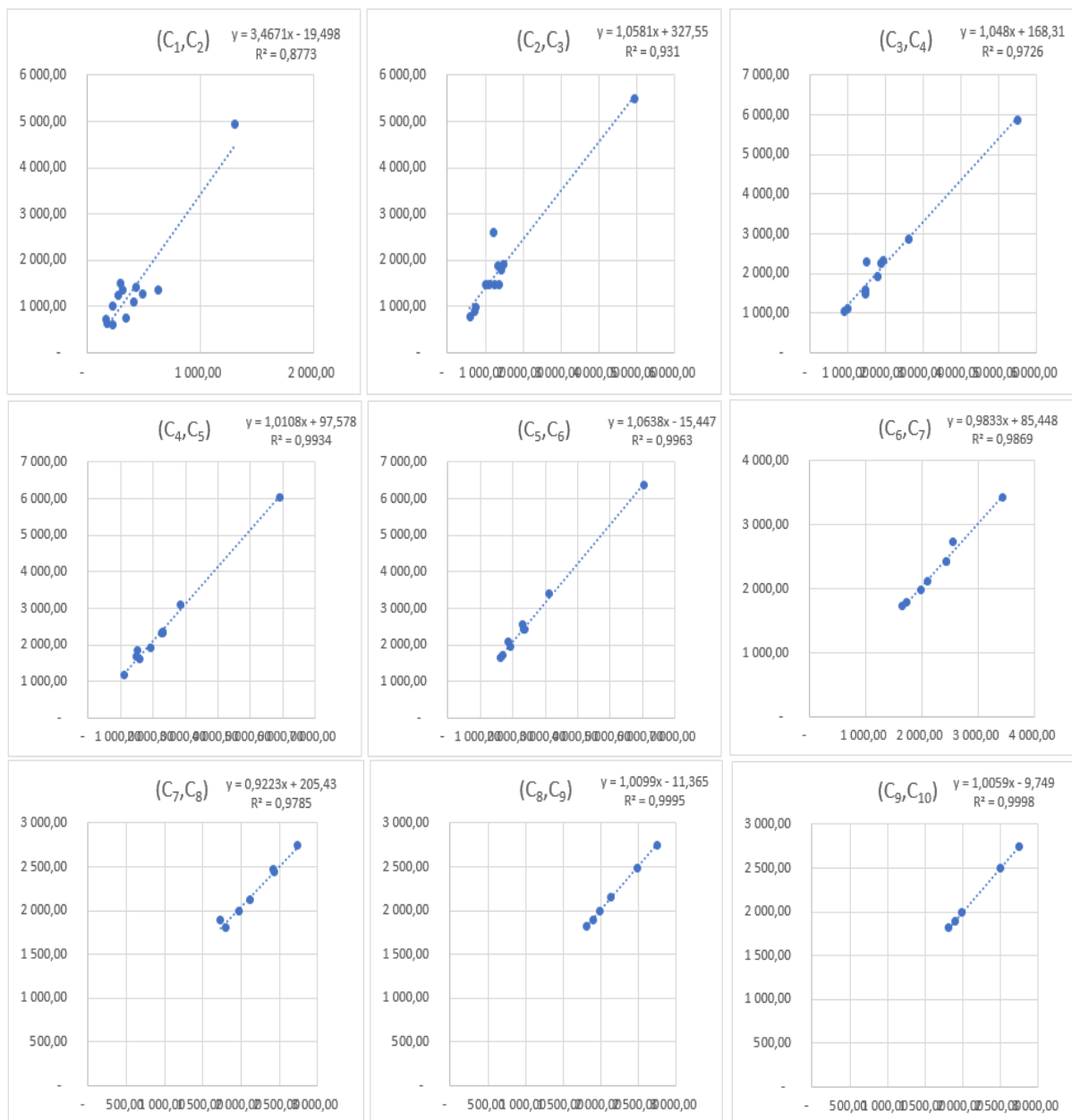


Figure 28 : (H1) ADC

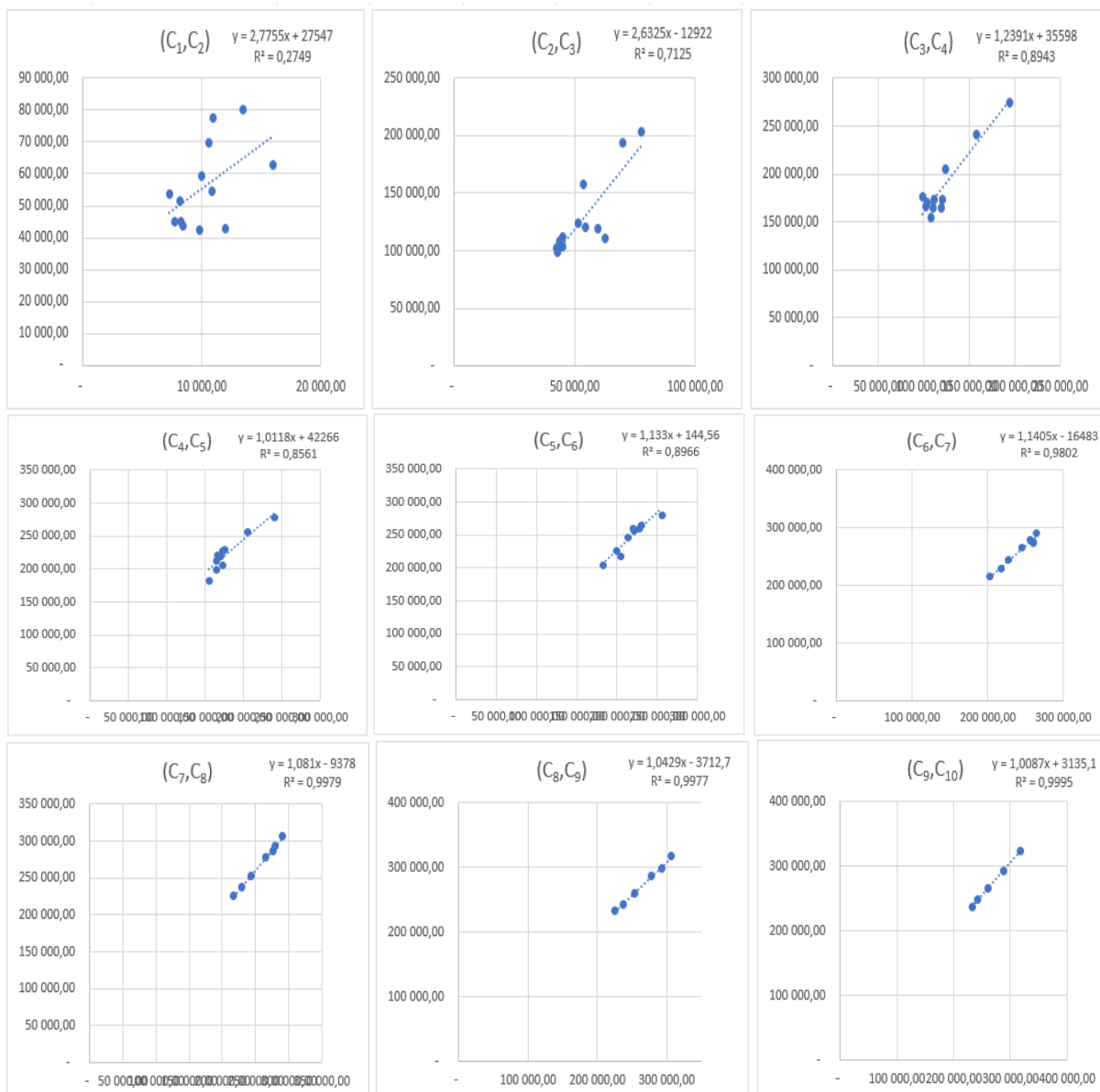


Figure 29 : (H1) AUTO

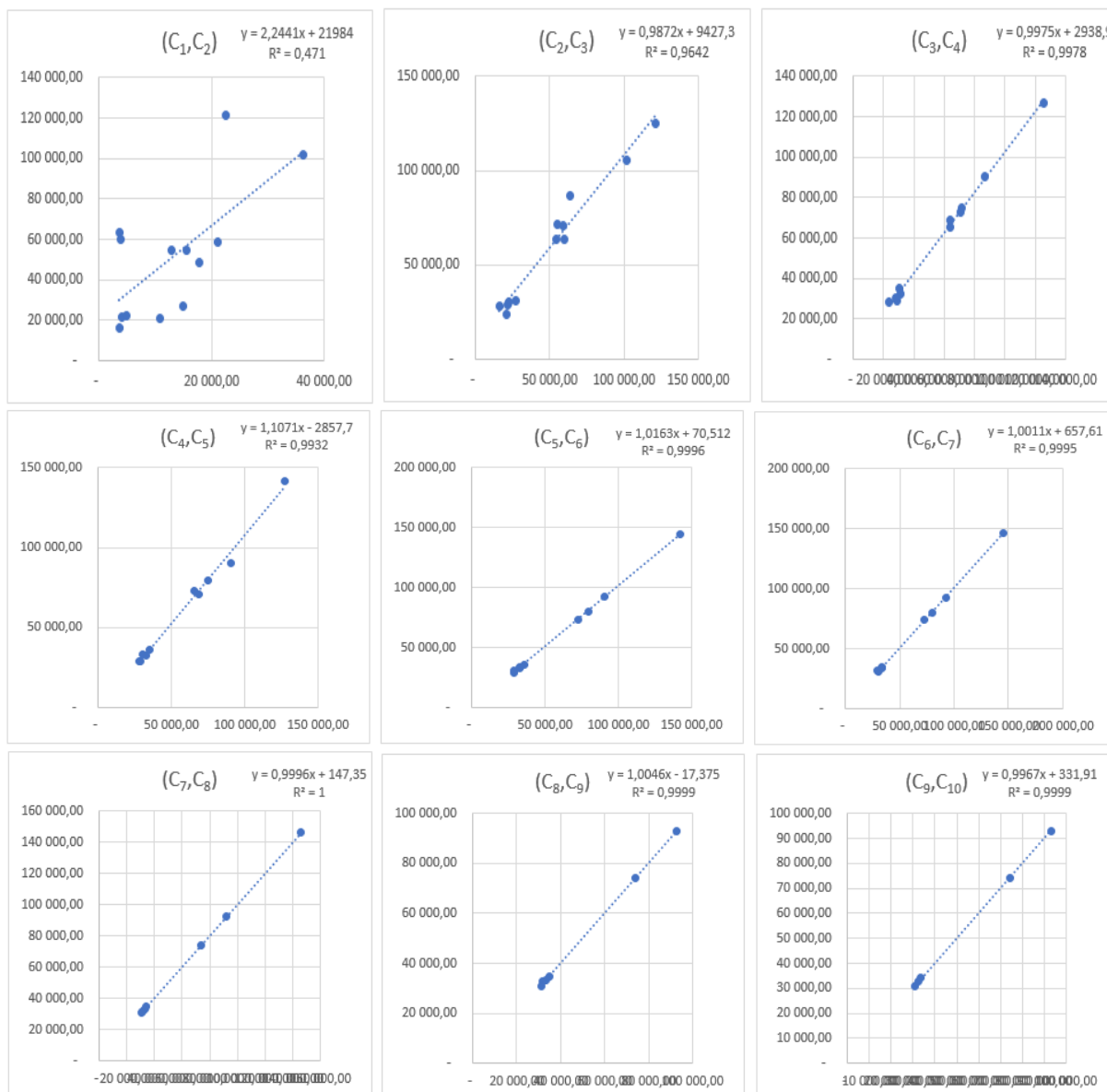


Figure 30: (H1) INCDA B

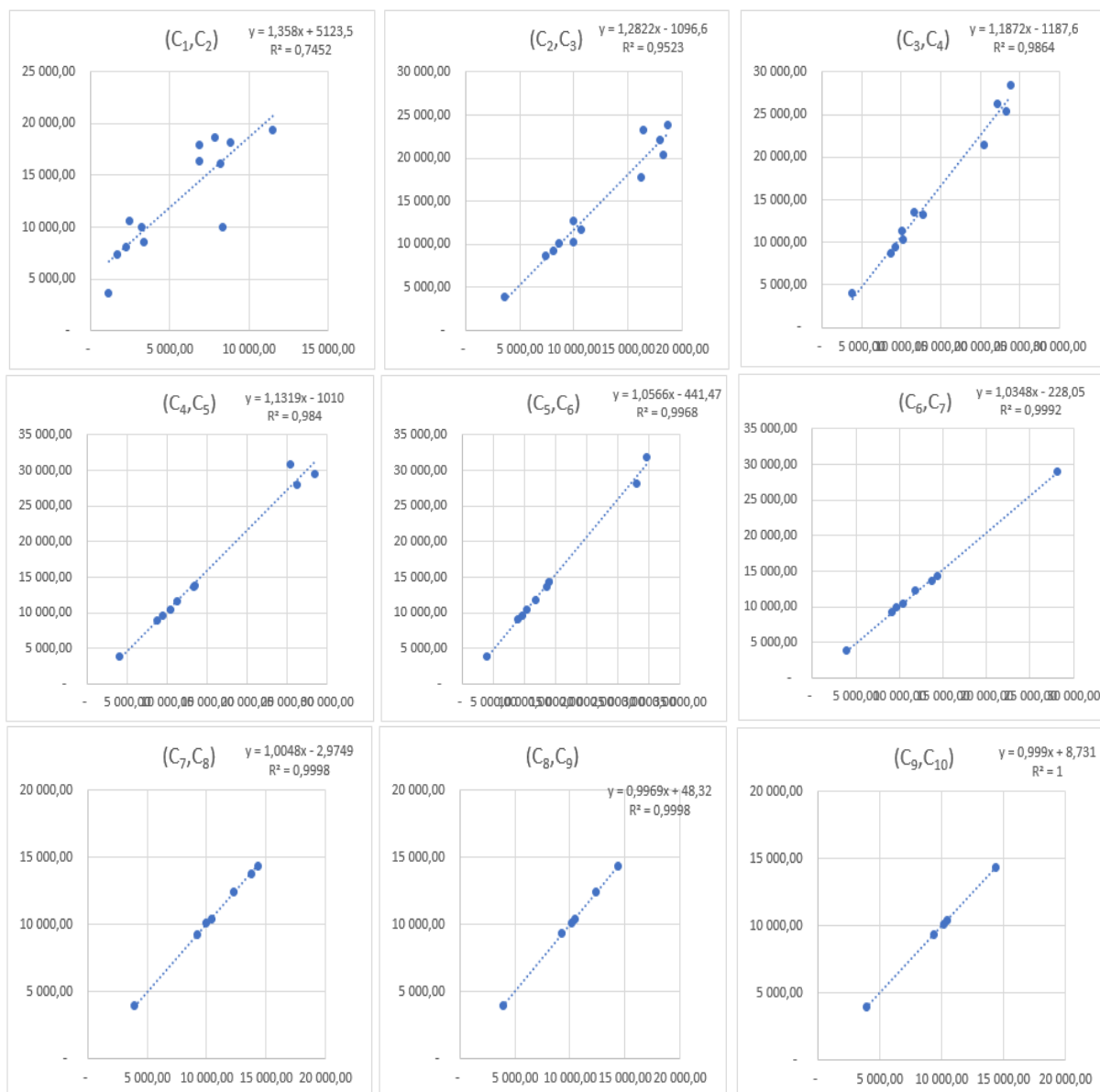


Figure 31 : (H1) AUTOFLLOT

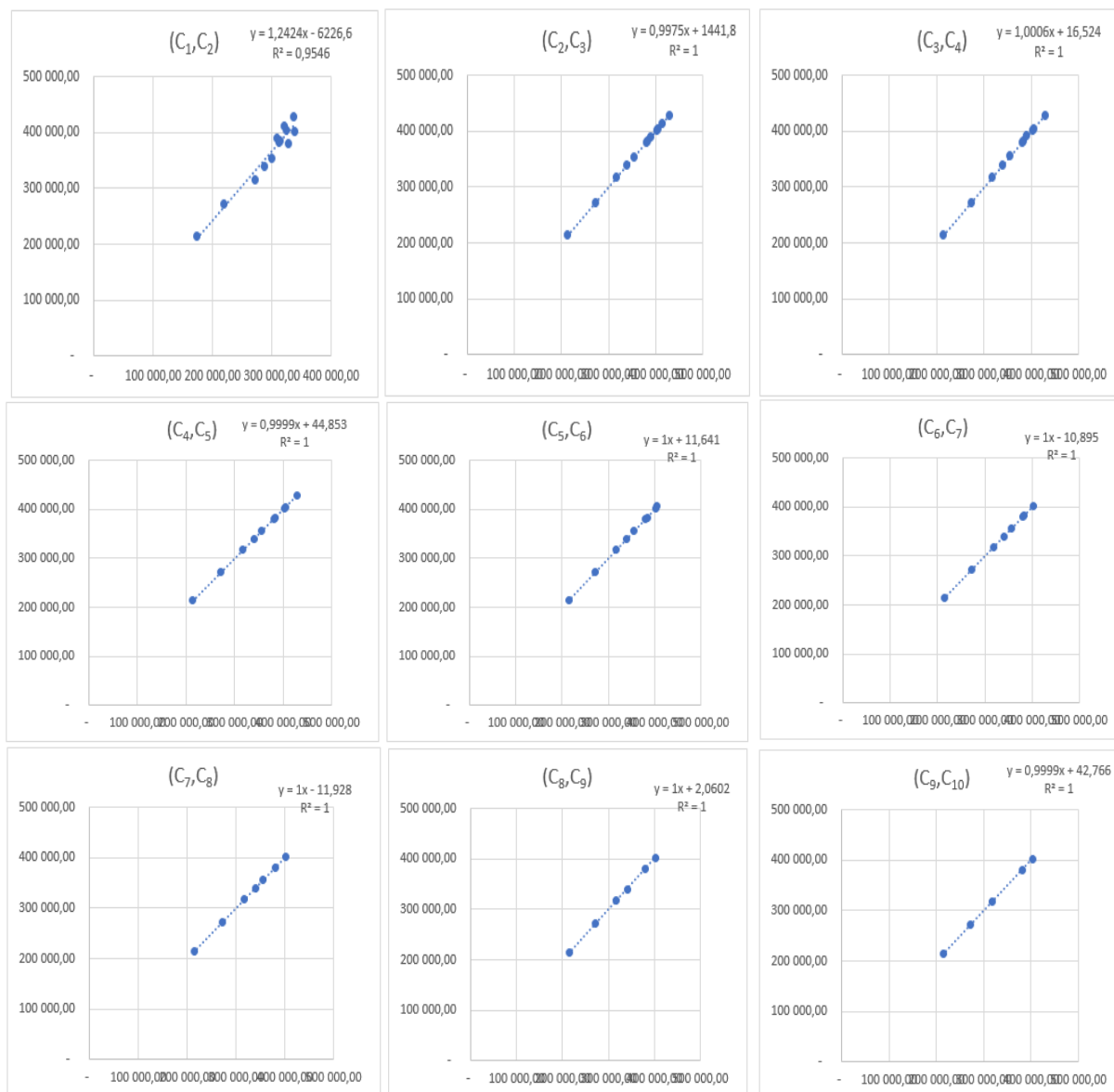


Figure 32 : (H1) MALADIE

ANNEXE 2 : Calibration des copules archimédiennes pour chaque couple de LoB

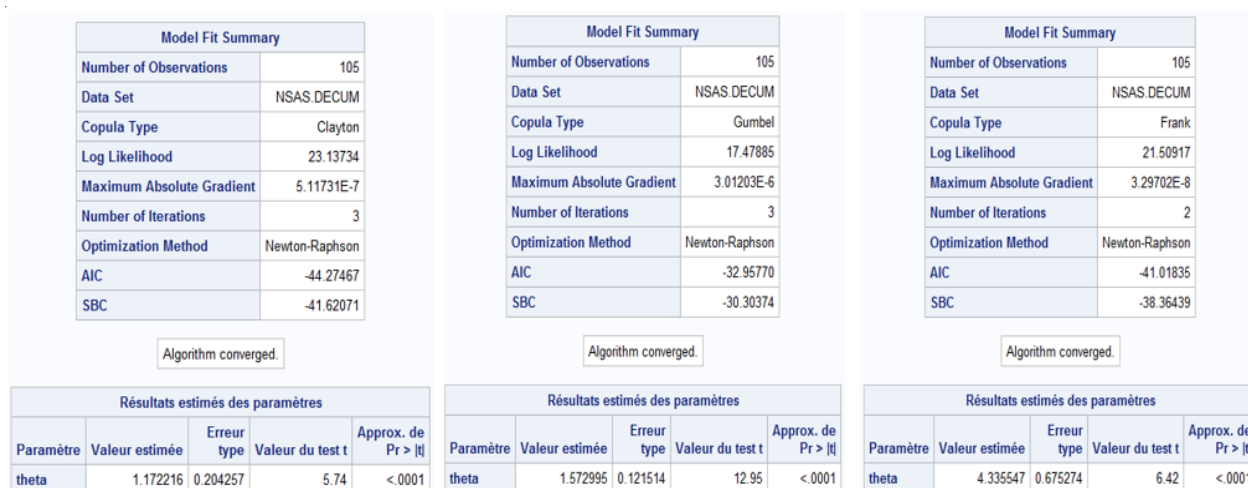


Figure 33 : AT,ADC

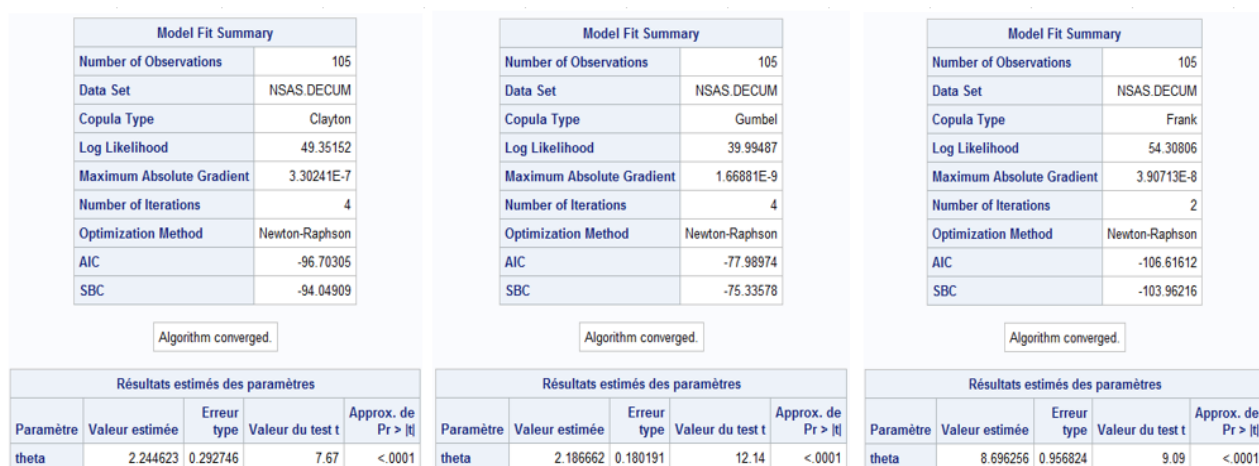


Figure 34 : AT,AUTO

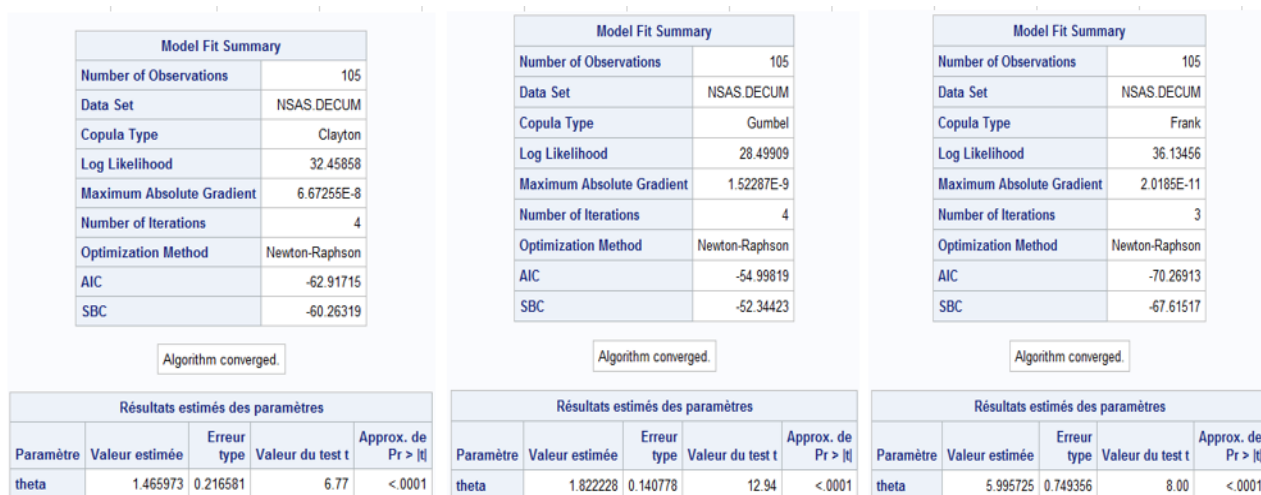


Figure 35 : AT,AUTOFLLOT



Figure 36 : AT, INCAPACITE

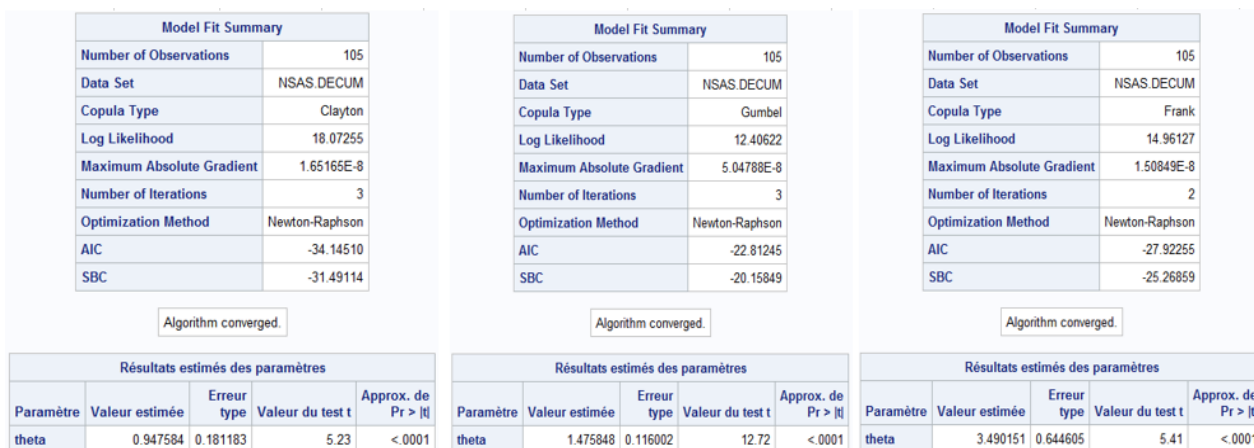


Figure 37 : AT, INCADAB

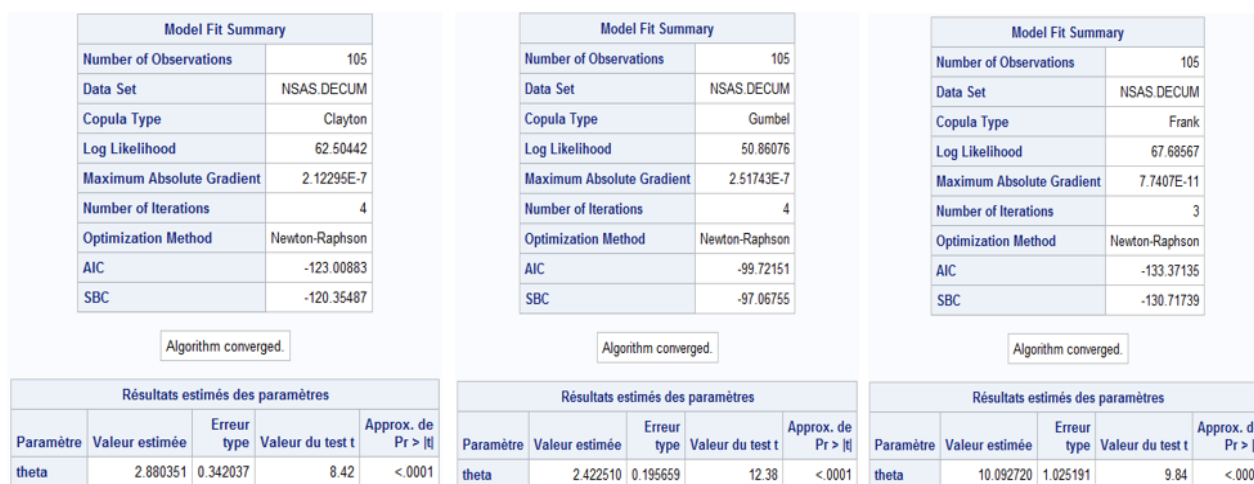


Figure 38 : AT, RC

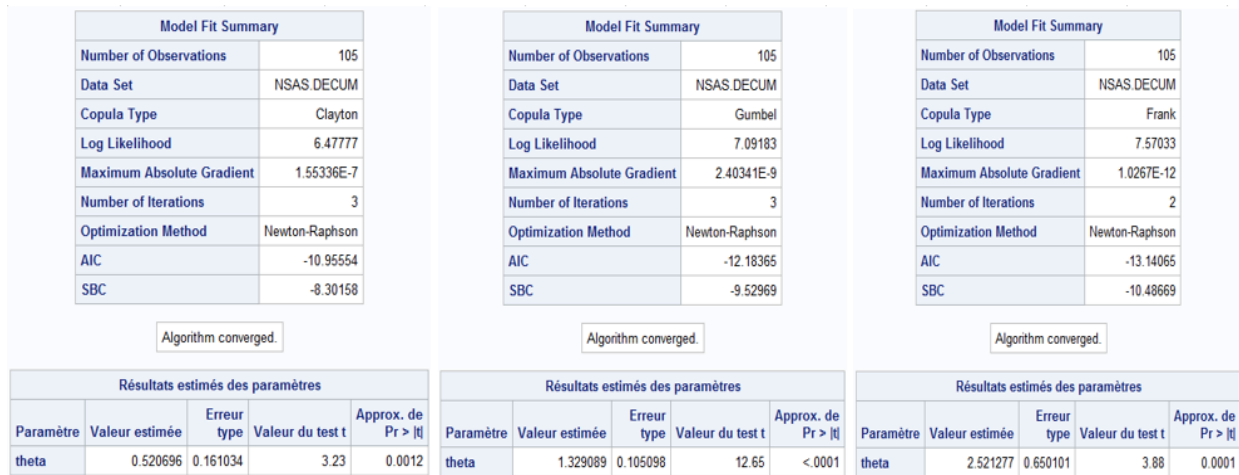


Figure 39 : ADC, AUTO

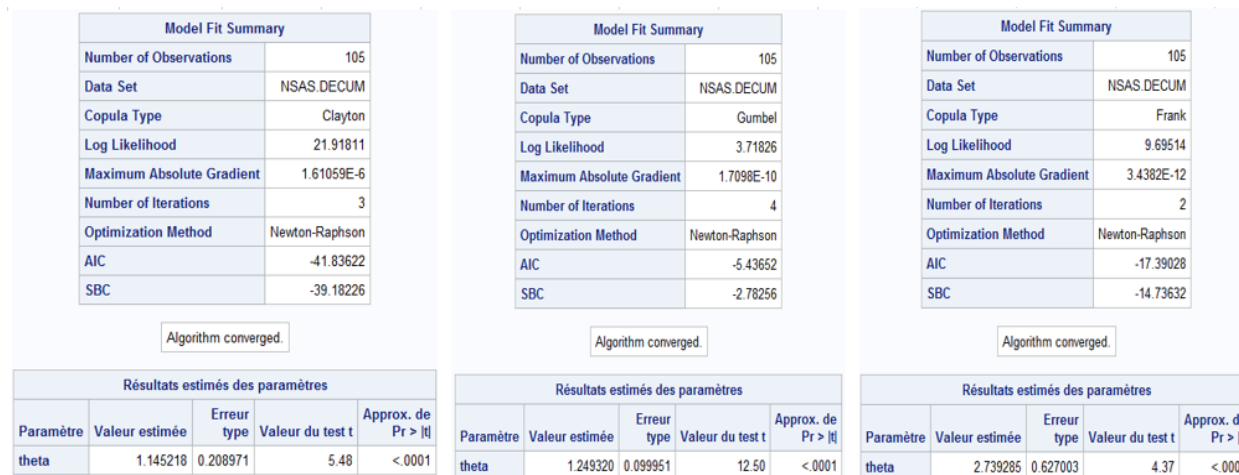


Figure 40 : ADC, INCAPACITE

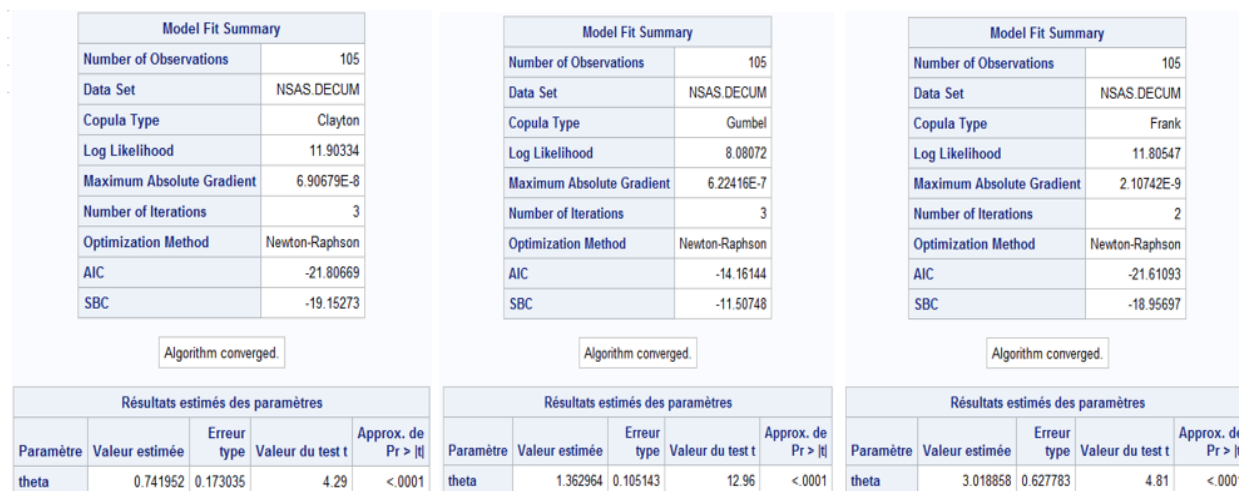


Figure 41 : ADC, R

Model Fit Summary				
Number of Observations	105			
Data Set	NSAS.DECUM			
Copula Type	Clayton			
Log Likelihood	49.91488			
Maximum Absolute Gradient	1.47056E-6			
Number of Iterations	4			
Optimization Method	Newton-Raphson			
AIC	-97.82976			
SBC	-95.17580			

Algorithm converged.

Résultats estimés des paramètres				
Paramètre	Valeur estimée	Erreur type	Valeur du test t	Approx. de Pr > t
theta	2.257599	0.288116	7.84	<.0001

Model Fit Summary				
Number of Observations	105			
Data Set	NSAS.DECUM			
Copula Type	Gumbel			
Log Likelihood	50.30025			
Maximum Absolute Gradient	2.3062E-10			
Number of Iterations	4			
Optimization Method	Newton-Raphson			
AIC	-98.60049			
SBC	-95.94653			

Algorithm converged.

Résultats estimés des paramètres				
Paramètre	Valeur estimée	Erreur type	Valeur du test t	Approx. de Pr > t
theta	2.374389	0.190241	12.48	<.0001

Model Fit Summary				
Number of Observations	105			
Data Set	NSAS.DECUM			
Copula Type	Frank			
Log Likelihood	55.55362			
Maximum Absolute Gradient	4.4265E-11			
Number of Iterations	3			
Optimization Method	Newton-Raphson			
AIC	-109.10725			
SBC	-106.45329			

Algorithm converged.

Résultats estimés des paramètres				
Paramètre	Valeur estimée	Erreur type	Valeur du test t	Approx. de Pr > t
theta	8.522778	0.915146	9.31	<.0001

Figure 42 : AUTO, AUTOFLOT

Model Fit Summary				
Number of Observations	105			
Data Set	NSAS.DECUM			
Copula Type	Clayton			
Log Likelihood	19.54327			
Maximum Absolute Gradient	2.31446E-9			
Number of Iterations	3			
Optimization Method	Newton-Raphson			
AIC	-37.08654			
SBC	-34.43258			

Algorithm converged.

Résultats estimés des paramètres				
Paramètre	Valeur estimée	Erreur type	Valeur du test t	Approx. de Pr > t
theta	1.031762	0.192372	5.36	<.0001

Model Fit Summary				
Number of Observations	105			
Data Set	NSAS.DECUM			
Copula Type	Gumbel			
Log Likelihood	5.77628			
Maximum Absolute Gradient	2.20979E-6			
Number of Iterations	3			
Optimization Method	Newton-Raphson			
AIC	-9.55256			
SBC	-6.89860			

Algorithm converged.

Résultats estimés des paramètres				
Paramètre	Valeur estimée	Erreur type	Valeur du test t	Approx. de Pr > t
theta	1.307107	0.101815	12.84	<.0001

Model Fit Summary				
Number of Observations	105			
Data Set	NSAS.DECUM			
Copula Type	Frank			
Log Likelihood	10.19182			
Maximum Absolute Gradient	2.7962E-10			
Number of Iterations	2			
Optimization Method	Newton-Raphson			
AIC	-18.38363			
SBC	-15.72967			

Algorithm converged.

Résultats estimés des paramètres				
Paramètre	Valeur estimée	Erreur type	Valeur du test t	Approx. de Pr > t
theta	2.781016	0.617034	4.51	<.0001

Figure 43 : AUTO, INCADB

Model Fit Summary				
Number of Observations	105			
Data Set	NSAS.DECUM			
Copula Type	Clayton			
Log Likelihood	46.22241			
Maximum Absolute Gradient	1.54614E-6			
Number of Iterations	3			
Optimization Method	Newton-Raphson			
AIC	-90.44483			
SBC	-87.79086			

Algorithm converged.

Résultats estimés des paramètres				
Paramètre	Valeur estimée	Erreur type	Valeur du test t	Approx. de Pr > t
theta	2.062289	0.269466	7.65	<.0001

Model Fit Summary				
Number of Observations	105			
Data Set	NSAS.DECUM			
Copula Type	Gumbel			
Log Likelihood	25.80097			
Maximum Absolute Gradient	1.33898E-8			
Number of Iterations	4			
Optimization Method	Newton-Raphson			
AIC	-49.60195			
SBC	-46.94799			

Algorithm converged.

Résultats estimés des paramètres				
Paramètre	Valeur estimée	Erreur type	Valeur du test t	Approx. de Pr > t
theta	1.818983	0.145552	12.50	<.0001

Model Fit Summary				
Number of Observations	105			
Data Set	NSAS.DECUM			
Copula Type	Frank			
Log Likelihood	40.26561			
Maximum Absolute Gradient	5.32258E-7			
Number of Iterations	2			
Optimization Method	Newton-Raphson			
AIC	-78.53122			
SBC	-75.87726			

Algorithm converged.

Résultats estimés des paramètres				
Paramètre	Valeur estimée	Erreur type	Valeur du test t	Approx. de Pr > t
theta	6.650152	0.805354	8.26	<.0001

Figure 44 : AUTO, RC

Model Fit Summary				
Number of Observations	105			
Data Set	NSAS.DECUM			
Copula Type	Clayton			
Log Likelihood	51.28815			
Maximum Absolute Gradient	4.05109E-8			
Number of Iterations	3			
Optimization Method	Newton-Raphson			
AIC	-100.57630			
SBC	-97.92234			

Algorithm converged.

Résultats estimés des paramètres				
Paramètre	Valeur estimée	Erreur type	Valeur du test t	Approx. de Pr > t
theta	2.377556	0.300648	7.91	< .0001

Figure 45 : AUTOFLOT, INCDAB

Model Fit Summary				
Number of Observations	105			
Data Set	NSAS.DECUM			
Copula Type	Clayton			
Log Likelihood	34.23710			
Maximum Absolute Gradient	4.2396E-11			
Number of Iterations	4			
Optimization Method	Newton-Raphson			
AIC	-66.47421			
SBC	-63.82025			

Algorithm converged.

Résultats estimés des paramètres				
Paramètre	Valeur estimée	Erreur type	Valeur du test t	Approx. de Pr > t
theta	1.562185	0.230340	6.78	< .0001

Figure 46 : AUTOFLOT, RC

Model Fit Summary				
Number of Observations	105			
Data Set	NSAS.DECUM			
Copula Type	Clayton			
Log Likelihood	14.51821			
Maximum Absolute Gradient	3.6496E-11			
Number of Iterations	3			
Optimization Method	Newton-Raphson			
AIC	-27.03642			
SBC	-24.38246			

Algorithm converged.

Résultats estimés des paramètres				
Paramètre	Valeur estimée	Erreur type	Valeur du test t	Approx. de Pr > t
theta	0.809750	0.173299	4.67	< .0001

Figure 47 : INCAPACITE, RC

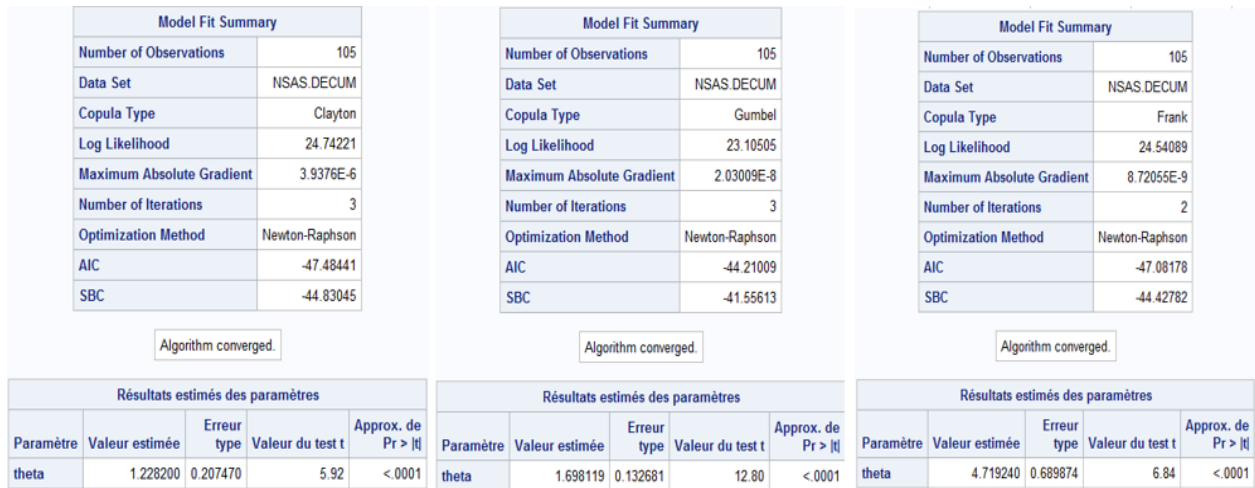


Figure 48 : INCDAB, RC

