

ROYAUME DU MAROC
*_*_*_*_*
PREMIER MINISTRE
*_*_*_*_*_*_*_*
HAUT COMMISSARIAT AU PLAN
*_*_*_*_*_*_*_*_*_*_*_*
INSTITUT NATIONAL
DE STATISTIQUE ET D'ECONOMIE APPLIQUEE

INSEA



Projet de Fin d'Etudes

Conception d'un produit "Variable Annuities" adapté au marché marocain

Préparé par : **Mlle ELLATIFI Ouafa**

M. KHADIM Faye

Sous la direction de : **M. OULIDI Abderrahim (INSEA)**

M. LACKER Toufik (La Marocaine Vie)

Soutenu publiquement comme exigence partielle en vue de l'obtention du

Diplôme d'Ingénieur d'Etat

Options : **Actuariat-Finance**

Devant le jury composé de :

- **M. OULIDI Abderrahim (INSEA)**
- **M. EL HAJ TIRARI Mohammed (INSEA)**
- **M. LACKER Toufik (La Marocaine Vie)**

Juin 2012

Résumé

Entre crise des régimes de retraite et crise financière, les assureurs vie explorent de nouvelles solutions en inventant des produits d'assurance plus en phase avec les besoins de l'épargne longue. Cela est accentué par le contexte actuel de baisse inéluctable des taux et la nécessité d'innover pour faire face à la forte concurrence.

C'est ainsi qu'un produit innovant pour redynamiser le marché de l'épargne retraite, permettant d'offrir à la fois des rendements élevés et un risque faible, est venu des États-Unis: les Variable Annuities. Ce sont des produits d'épargne retraite en unités de compte combinés à des garanties de revenus ou de capital.

L'objet de ce projet de fin d'études est de concevoir un produit Variable Annuities adapté aux réalités du marché marocain de l'épargne. Le travail a été divisé en deux grandes parties: la première est consacrée à l'étude de marché et la définition du produit, tandis que la deuxième partie est réservée à la modélisation et à la tarification.

L'étude de marché révèle que la dégradation croissante des conditions de vie à la retraite et la forte aversion aux placements en unités de compte non garantis font naître de nouveaux besoins chez les épargnants, qui sont entre autres: la nécessité de constituer un complément de retraite, le souhait de disposer de produits offrant un rendement important tout en sécurisant l'investissement contre les perturbations des marchés financiers. Pour répondre à ces attentes, nous avons conçu un produit variable annuities combinant les garanties GMWB-L et GMDB, tout en prenant en compte les capacités du marché financier marocain.

Pour la tarification de ce produit, en l'absence de formules fermées, nous avons utilisé une approche stochastique de simulations de Monte Carlo. D'une manière générale, les garanties GMWB/GMWB-L peuvent être décomposées comme des sommes pondérées par les probabilités de décès et de rachat de puts européens de différentes maturités écrits sur un sous-jacent discontinu. En définissant un scénario central et en choisissant un nombre de scénarios de 10000 simulations, nous avons obtenu:

- une prime pure de la garantie GMWB seule qui est égale à 0,55% de l'épargne ;
- une prime commerciale de la garantie GMWB combinée à une garantie GMDB qui est égale à 1,16% de l'épargne.

L'étude de sensibilité que nous avons faite montre que le tarif de la garantie est fortement dépendant de la configuration du produit, de l'âge de l'assuré, de la proportion de l'épargne investie en actions, de la volatilité du support, de la corrélation entre les supports d'investissement, du taux sans risque, de la maturité du produit, de la durée du différé, aux différentes variantes....

Mots clés: Variable Annuities, GMWB, GMWB-L, GMDB, Modélisation stochastique, Simulations de Monte Carlo, Cliquet, Revalorisation TMG,...

Dédicace de Khadim

*Je dédie spécialement ce travail à mes **parents** pour tout ce qu'ils représentent pour moi. Je tiens à magnifier vos sacrifices et votre soutien inconditionnel sans lesquels rien ne serait possible pour moi. Veuillez trouver ici l'expression de mon éternelle gratitude.*

*A mes **frères** et **sœurs**, pour qui je n'ai que de sincères remerciements à adresser. Votre assistance permanente ainsi que vos conseils très utiles me sont toujours allés droit au cœur. Que DIEU nous donne longue vie pour partager des jours meilleurs!!!*

*A toute la **famille** ainsi qu'à mon **guide spirituel**, pour leur support indéfectible, leurs prières et leurs encouragements. Je réserve également dans ce chapitre de dédicace une mention spéciale aux regrettés **Ibrahima DIAGNE** et **Niandou NDIAYE**, à qui je dois mes premiers pas à l'école; ils m'ont appris, encadré et encouragé tout au long de mon cursus. Que Dieu les accueille dans son paradis !!!*

A mon cher binôme Ouafa ELLATIFI pour sa fidèle collaboration et ses qualités humaines, à Marième DIOP, à Siham KASSIM, à Abdeljalil JLIOUAT, à Mamadou SAMB, à Marouane ABOULOOUAFA, à Mouhamadou Moustapha KANE, à Abdelaziz AOUN, à Alioune DIA, à Hamza MAFTAH, à Souleymane MBOW, à Serigne DIOP, à A. S., envers qui j'ai le sentiment d'une reconnaissance toute particulière. Je voudrais que vous sachiez que je vous définis comme étant des êtres d'exception et pour cela vous méritez d'être mentionnés entre ces lignes.

Bref à tous ces êtres chers à moi dont je n'ai pu citer les noms, qu'à cela ne tienne, il en demeure que toutes mes pensées convergent vers vous en ces moments précieux et uniques.

Je tiens tellement à vous...

Dédicace de Ouafa

Je dédie ce travail :

A Mes très chers parents,

*Qui m'ont toujours poussé à faire de mon mieux,
Aucune dédicace ne saura exprimer mon respect, ma considération, mon profond amour
et surtout ma reconnaissance pour tous les sacrifices qu'ils ont consentis, les conseils et
les encouragements qu'ils m'ont prodigué tout au long de mes études.*

*Dédicace très particulière à ces êtres très chers qui n'ont économisé aucun effort à
m'accorder.*

A mes frères et sœurs,

*Qui m'ont toujours beaucoup aimé et soutenu. En témoignage de nos profonds
sentiments de l'attachement qui nous unit, trouvez ici l'expression de ma
compréhension et gratitude pour votre soutien.*

A Mon cher binôme Khadim Faye,

*Qui n'a épargné aucun effort pour la réalisation de ce projet, pour son
professionnalisme et son sens d'humour.*

A mes chers amis

*Spécialement Mohammed Idrissi, Qui m'ont toujours souhaité le bonheur et la
réussite : J'en suis infiniment reconnaissante...*

*A toutes les personnes qui m'aiment... A tout ceux qui m'ont aidé, de proche où
de loin, pour réussir ce travail.*

Ellatifi Ouafa

Remerciements

*De prime abord, nous rendons grâce à **ALLAH LE TOUT PUISSANT** pour tous les avantages qu'il nous a gratifiés, nous prions sur son Prophète **MOUHAMED (PSL)** qui est le Prince des Envoyés.*

*Nous remercions également de tout cœur nos chers **PARENTS**, pour tout ce qu'ils représentent pour nous.*

*Des remerciements sincères vont aussi à l'endroit de notre professeur et encadrant M. **Abderrahim OULIDI** pour ses remarques, ses conseils et ses encouragements tout au long de ce travail. Nous remercions également notre professeur M. **Pierre DEVOLDER** pour sa disponibilité et pour la riche documentation qu'il a mise à notre disposition.*

*Nous exprimons notre profonde gratitude et notre déférence à notre honorable encadrant externe M. **Toufik LACHKER** (Directeur Technique de La Marocaine Vie) qui a bien voulu nous faire confiance en nous donnant l'opportunité de travailler sur un sujet actuariel, à la fois passionnant et valorisant. Il n'a ménagé aucun effort pour nous mettre dans de très bonnes conditions. Son encadrement, son expérience, ses conseils, sa disponibilité, ses remarques sont plus que déterminants pour ce travail. Pour tout cela, nous lui remercions infiniment.*

Il en va de même à l'ensemble du personnel de La Marocaine Vie, notamment à:
*- Mlle **Karima LARGUET** (Directrice Communication et Marketing), M. **Faïçal ZAHLANE** (responsable du service Actuariat), M. **Youssef LYAMMOURI** (responsable des supports d'investissement), pour leurs explications, leur disponibilité et leurs conseils ô combien importants, qui nous ont permis de mieux appréhender ce travail.*

*- Mme **Raja GHAZI** (DRH) pour son accueil chaleureux,
- Mlle **Hanane** (réceptionniste) et le **vigile**, pour leur disponibilité et leur aide.*

Enfin, que toutes les personnes qui ont directement ou indirectement mis leur contribution à la réalisation de ce travail trouvent ici l'expression de toute notre éternelle gratitude.

Table des matières

Table des matières

Résumé.....	- 3 -
Dédicace de Khadim	4
Dédicace de Ouafa	5
Remerciements	6
Table des matières	7
Liste des abréviations	11
Liste des tableaux et figures	12
Introduction Générale.....	14
Préliminaires: Contexte et présentation du sujet	16
Chapitre 1: Présentation de l'organisme d'accueil	17
I. Actionnariat :	17
II. Organigramme :	18
III. Produits:.....	19
IV. Chiffres clés:	19
Chapitre 2: Contexte et fonctionnement des Variable Annuities	21
I. Définition et contexte des Variable Annuities:	21
<i>I.1. Définition:</i>	21
I.2. Positionnement des variable annuities dans le contexte actuel de l'épargne retraite:.....	22
II. Les différentes garanties et leurs variantes:	23
II.1. GMDB: Guaranteed Minimum Death Benefit.....	23
II.2. GMAB: Guaranteed Minimum Accumulation Benefit	23
II.3. GMIB: Guaranteed Minimum Income Benefit.....	23
II.4. GMWB: Guaranteed Minimum Withdrawal Benefit	24
III. Le marché international des Variable Annuities:	25
III.1. Historique:	25
III.2. Evolution du marché:	25
Première partie: Etude de marché et définition du produit.....	28
Introduction:	29
Chapitre 3: État des lieux de la retraite au Maroc.....	30
I. Les régimes de retraite au Maroc: présentation, diagnostic et besoin de réforme	30
I.1. Présentation et diagnostic des régimes:	30

I.2. Evolution de quelques indicateurs démographiques au Maroc:	31
I.3. Impacts de ces évolutions démographiques sur les régimes de retraite au Maroc:	32
II. Les produits d'épargne retraite des assurances vie: caractéristiques et limites	36
II.1. Caractéristiques des différents produits:	36
II.2. Limites de l'offre des assureurs:	36
Chapitre 4: Étude des besoins actuels du marché marocain de la retraite	37
I. Besoins des assurés en termes d'épargne retraite:	37
II. Intérêts des Variable Annuities:	41
II.1. Avantages pour l'assuré:	41
II.2. Avantages pour l'assureur:	41
Chapitre 5: Conception du produit	43
I. Benchmark:	43
I.1. Exemples de produits commercialisés sur le marché français:	43
I.2. Caractéristiques des produits commercialisés sur le marché américain:	46
II. Cadre réglementaire et fiscal:	48
II.1. Cadre réglementaire:	48
II.2. Fiscalité:	48
III. Définition du produit et des garanties:	48
Conclusion de la partie I:	51
Deuxième partie: Modélisation et pricing du produit	53
Introduction:	53
Chapitre 6: Logique financière des garanties GMWB et GMWB-L et cartographie des risques	54
I. Les garanties GMWB et GMWB-L d'un point de vue financier:	54
II. Cartographie des risques liés aux Variable Annuities:	55
II.1. Risques actuariels:	56
II.2. Risques liés aux arbitrages entre fonds:	56
II.3. Risques financiers:	56
II.4. Risque de défaut:	57
II.5. Risque opérationnel:	58
Chapitre 7: Cadre de modélisation	59
I. Notations:	59
II. Modélisation de l'actif:	60
II.1. Choix du taux sans risque:	60
II.2. Modélisation de l'épargne:	61
II.3. Corrélation entre les supports:	65
III. Hypothèses du passif:	65

III.1. Choix de la table de mortalité:.....	65
III.2. Hypothèse de rachats:.....	66
III.3. Formulation des frais et des revenus garantis:	66
IV. Modélisation du vecteur d'état :	66
IV.1. Valeur du vecteur d'état à la souscription (t=0):.....	66
IV.2 Évolution entre t_{k-1}^+ et t_k^- ($k > 1$):	67
IV.3. Évolution entre t_k^- et t_k^+ :	67
V. Modélisation du tarif de la garantie:.....	71
V.1. Modélisation de la valeur de la garantie GMWB seule:.....	71
V.2. Prise en compte de la GMDB:	72
V.3. Evaluation de la prime pure et de la prime commerciale:	73
Chapitre 8: Application numérique.....	74
I. Estimation des paramètres des modèles:	74
I.1. Estimation des paramètres du modèle Black & Scholes:	74
I.2. Choix des supports d'investissement du produit:.....	74
II. Estimation de la prime pure:	75
II.1. Définition du scénario central:.....	75
II.2. Estimation du tarif du scénario central:	76
Chapitre 9: Sensibilité de la garantie GMWB et impacts des variantes	77
I. Sensibilités aux paramètres actuariels et financiers:	77
I.1. Sensibilité à l'introduction d'une garantie GMDB:	77
I.2. Sensibilité à la proportion d'actions dans l'épargne:	77
I.3. Sensibilité aux paramètres de marché:	78
I.4. Sensibilité à la fréquence des revenus garantis :	79
I.5. Sensibilité à la maturité de la garantie:	80
I.6. Sensibilité à la durée du différé:.....	80
II. Evaluation de la prime commerciale:	81
III. Impact des variantes de la garantie :.....	81
III.1. TMG et cliquet de la benefit base	82
III.2. Revalorisation en phase d'accumulation.....	82
III.3.Revalorisation en phase de distribution	82
III.4.Modification de l'assiette de prélèvement des frais.....	83
Conclusion de la 2 ^e partie:.....	84
Conclusion Générale	85
Bibliographie.....	86

Annexes	87
ANNEXE 1: Réduction des risques par la formulation des garanties du produit	87
Annexe 2: Rappels de probabilités	89
Annexe 3: Les produits d'épargne retraite commercialisés sur le marché marocain.	92
Annexe 4 : Cadre réglementaire et fiscal:	95
Annexe 5: Fonctionnement des supports d'investissement de La Marocaine Vie.....	98
ANNEXE 6 : Simulation de Monte-Carlo	101
Annexe 7: Le modèle de Black & Scholes.....	103

Liste des abréviations

BB: Benefit Base

CIMR: Caisse Interprofessionnelle Marocaine de Retraite

CMR: Caisse Marocaine de Retraite

CNSS: Caisse Nationale de Sécurité Sociale

DAPS: Direction des Assurances et de la Prévoyance Sociale

GMAB: Guaranteed Minimum Accumulation Benefit

GMDB: Guaranteed Minimum Death Benefit

GMIB: Guaranteed Minimum Income Benefit

GMWB: Guaranteed Minimum Withdrawal Benefit

GMWB-L: Guaranteed Minimum Withdrawal Benefit for Life

MDH: Million de Dirhams

OPCVM: Organisme de Placement Collectif en Valeurs Mobilières

PB: Participation aux Bénéfices

PVL: Plus-values Latentes

RCAR: Régime Collectif d'Allocation de Retraite

RPP: Retrait Partiel Programmé

TMG: Taux Minimal Garanti

UC: Unités de Compte

VA: Variable Annuities

VAP: Valeur Actuelle Probable

Liste des tableaux et figures

Figure 1: Répartition du capital au 30 avril 2009.....	18
Figure 2 : Organigramme de La Marocaine Vie	18
Figure 3 : Chiffre d'affaire (en MDHs).....	20
Figure 4 :Provisions mathématiques(en MDHs).....	20
Figure 5 : Adhésions gérées	20
Figure 6: Position des VA en termes de couple rendement/risque.	22
Figure 7: Fonctionnement d'un contrat GMWB for life	24
Figure 8: Evolution de l'offre des VA depuis leur création.....	25
Tableau 1: Evolution de l'encours des VA aux Etats-Unis.....	26
Figure 9: Evolution de l'encours des VA aux Etats-Unis	26
Tableau 2 : Quelques produits VA commercialisés en Europe.....	27
Tableau 3 : Indicateurs du secteur en 2010 :	31
Figure10 : Évolution de l'espérance de vie à la naissance.....	31
Figure11 : Évolution prévue du rapport de dépendance des personnes âgées :	32
Figure12 : Rapport démographique entre 2007 et 2060.....	34
Figure13 : la perception de l'évolution du niveau de vie à la retraite	37
Figure 14 : Écart entre le montant moyen de la retraite et les besoins du foyer	38
Figure15 : Principale source de revenu à la retraite	39
Figure 16: Comportement des assurés vis-à-vis du risque financier :.....	40
Tableau 4: Comparaison des Variable Annuities avec d'autres produits d'épargne retraite ...	41
Tableau 5: Exemples de produits commercialisés sur le marché français	43
Tableau 6 : Les produits commercialisés sur le marché américain:.....	47
Tableau 7 : La fiche du produit VITAL RETRAITE OPTIMALE.....	49
Figure 17 : Evolution de l'épargne dans le cas discret.....	55
Tableau8 : Risques liés aux VA	55
Tableau 9 : Evolution du vecteur d'état en cas de retrait égal au revenu garanti.....	68
Tableau 10 : Evolution du vecteur d'état en cas de retrait supérieur au revenu garanti :	69
Tableau 11 : Volatilité historique des 7 supports	74
Tableau 12 : matrice de corrélation entre les supports	75
Tableau 13 : Sensibilité à l'introduction d'une garantie GMDB	77
Tableau 14: Sensibilité du tarif à la part d'actions lors de la souscription - Sans rebalancement annuel	78
Tableau 15: Tarif de la garantie en fonction du taux sans risque et du niveau de volatilité (Black & Scholes)	78

Liste des tableaux et figures

Tableau 16 : Sensibilité du tarif de la garantie à la corrélation entre les sous-jacents (Black & Scholes)	79
Tableau 17 : Sensibilité du tarif à la fréquence de retrait des revenus garantis (scénario central).....	79
Tableau 18 : Sensibilité du tarif à la maturité de la garantie	80
Tableau 19 : Sensibilité du tarif à la durée du différé	80
Tableau 20: La détermination de la prime commerciale	81

Introduction générale

L'environnement actuel marocain de l'épargne retraite est caractérisé par un allongement de l'espérance de vie (**74,8 ans** en 2010, source: HCP) et un chômage des jeunes relativement important (**12,8%** pour la tranche d'âge 25-34 ans en 2010, source: HCP). Ces facteurs ont des impacts néfastes sur les régimes obligatoires de retraite à savoir: la dégradation du rapport actifs/retraités et la détérioration du taux de remplacement. Face à cette situation de détérioration croissante des pensions de retraite, la constitution d'un complément de retraite par capitalisation est donc devenue indispensable afin de maintenir un niveau de vie à la retraite acceptable.

Ainsi, pour satisfaire ce besoin en termes d'épargne retraite, les assureurs vie ont depuis longtemps lancés sur le marché plusieurs contrats d'épargne retraite par capitalisation. Dans ces contrats, les primes sont essentiellement investies en obligations; leur sécurité (garantie d'un TMG et PB) a donc pour contrepartie une faible performance. Ce qui ne répond pas aux exigences d'une certaine catégorie de clientèle aisée. De plus, on note un certain manque d'innovation de la part des assureurs pour relancer le marché; cela fait que le seul élément de différenciation des assureurs est le tarif. Cette forte concurrence basée essentiellement sur le tarif proposé, peut avoir des répercussions sur le chiffre d'affaires des assureurs.

Par suite, afin de redynamiser l'épargne retraite, La Marocaine Vie avait innové en 2007 en lançant pour la première fois au Maroc les contrats en unités de compte. Mais avec la crise financière de 2008, on constate un certain conservatisme de la part des assurés à l'égard de ces produits à capital variable. En effet, la principale limite de ces produits est la forte exposition de l'assuré au risque de moins-value, ce qui constitue un véritable handicap à leur commercialisation.

Ainsi, dans ce contexte particulier de détérioration des prestations des retraites et de crise financière:

- les épargnants cherchent des produits qui allient à la fois rentabilité et sécurité;
- les assureurs doivent faire preuve d'innovation pour répondre à ces besoins et redynamiser le marché des contrats en unités de compte.

La solution est venue des Etats-Unis avec notamment l'émergence de nouveaux produits: les Variable Annuities. Ces derniers sont:

- des **produits d'épargne retraite en unités de compte**, permettant de bénéficier de rendements potentiellement élevés des marchés financiers,

- **combinés à des garanties** (en cas de vie et/ou de décès) portant sur le capital, afin de sécuriser l'investissement de l'assuré.

C'est ainsi que dans le cadre de notre projet de fin d'études, La Marocaine Vie, unique compagnie qui commercialise les produits en unités de compte au Maroc, nous a confié la tâche de concevoir un produit Variable Annuities qui est adapté aux réalités et contraintes du marché marocain de l'épargne. L'objet de ce présent rapport est de retracer toutes les étapes de cette conception, de présenter les conclusions de l'étude et faire ainsi des recommandations quant à l'intérêt de ce produit.

Pour ce faire l'approche que l'on se propose mettra en exergue 3 grandes parties.

Introduction générale

Nous présenterons tout d'abord sous forme de préliminaires, le contexte et le fonctionnement des Variable Annuities. Cela, dans le but de mieux appréhender la façon dont ils pourraient redynamiser l'épargne retraite complémentaire.

La première partie sera, quant à elle consacrée à l'étude de marché et à la définition du produit et des garanties: étape préalable primordiale dans la conception d'un produit d'assurance.

Enfin, la deuxième partie est celle de modélisation et de tarification du produit conçu. Nous ferons également une étude de sensibilité du tarif aux paramètres financiers et actuariels.

Préliminaires: Contexte et présentation du sujet

Chapitre 1: Présentation de l'organisme d'accueil

Dans le cadre de notre projet de fin d'études à l'Institut National de Statistique et d'Economie Appliquée (INSEA) pour l'obtention du diplôme d'ingénieur d'état en Actuariat-Finance, nous avons effectué notre stage d'une durée de quatre mois au sein de la Marocaine Vie, le meneur dans l'assurance personne.

Historique:

La Marocaine-Vie, seule compagnie spécialisée dans les branches d'assurance de personnes, est présente sur le marché marocain depuis 1978. Acquisée en 2001 par le Groupe Société Générale (via Sogécap, compagnie d'assurance vie du Groupe, et Société Générale Maroc), elle a depuis lors réorienté son activité vers le développement de la bancassurance avec les réseaux et filiales de la Société Générale au Maroc.

I. Actionnariat :



Sogécap compagnie d'assurance vie et de capitalisation du Groupe Société Générale, est en France l'un des leaders de la bancassurance. A fin 2009, Sogécap gère plus de 8 millions de contrats pour un encours supérieur à 70 milliards d'euros.

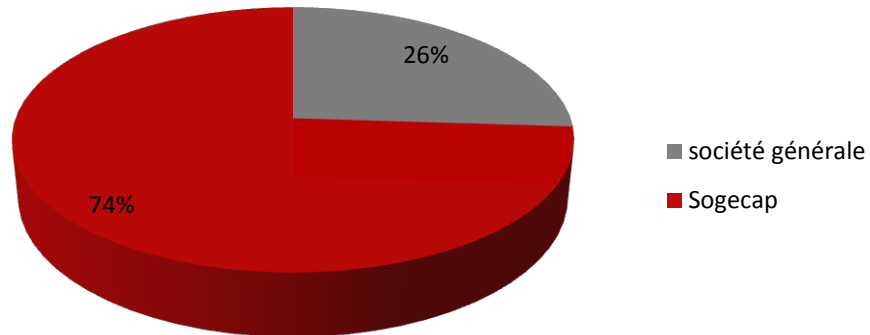
Sogécap est présente dans dix-sept pays : France, Luxembourg, Liban, Maroc, Égypte, République Tchèque, Grèce, Bulgarie, Russie, Allemagne, Roumanie, Serbie, Brésil, Chine et Croatie.



Banque universelle créée en 1913, **Société Générale** Maroc est l'une des principales filiales du Groupe Société Générale France.

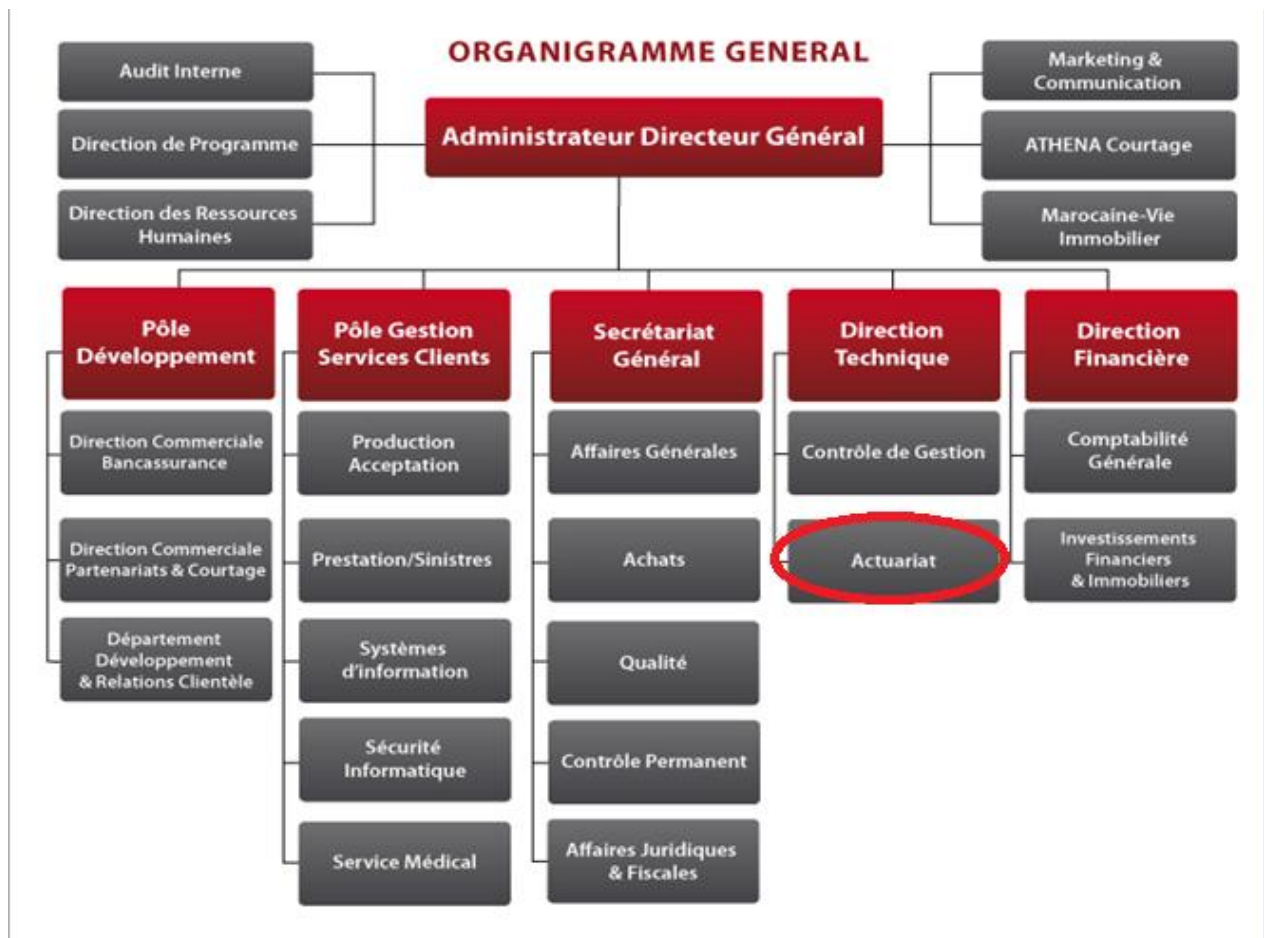
Avec **plus de 3 300 collaborateurs** et des filiales leaders dans des secteurs d'activité comme le financement par crédit-bail, le crédit à la consommation, etc., **Société Générale** Maroc est aujourd'hui l'un des principaux opérateurs multicanaux du secteur bancaire au Maroc. **Le Groupe Société Générale** Maroc est le premier groupe financier international du pays.

Figure 1: Répartition du capital au 30 avril 2009



II. Organigramme :

Figure 2 : Organigramme de La Marocaine Vie



L'étude de notre projet, intitulé « la conception d'un produit Variables Annuités adapté au marché marocain », a été réalisée au sein du département Actuariat/Réassurance.

III. Produits:

La Marocaine-Vie est la seule compagnie au Maroc spécialisée dans les assurances de personnes. Elle a mis en place une organisation adéquate pour connaître les besoins de ses clients en matière d'assurance individuelle et collective. Elle y répond par une gamme de produits adaptés.

La Marocaine-Vie commercialise :

➤ Des produits aux particuliers :

- L'épargne retraite individuelle, en dirhams ou en unités de compte, qui permet de compléter une pension retraite de base tout en bénéficiant d'incitations fiscales ;
- L'épargne assurance vie individuelle, en dirhams ou en unités de compte, pour la constitution d'une épargne projet ou de prévoyance dans un cadre fiscal avantageux.
- L'épargne éducation pour préparer l'avenir des enfants des assurés.
- La prévoyance individuelle et l'assurance des emprunteurs.
- L'assurance maladie et hospitalisation.

➤ Des produits aux entreprises :

- L'épargne retraite collective, en dirhams ou en unités de compte, qui permet de faire bénéficier certains salariés d'une rémunération complémentaire différée en dirhams ou en unités de compte (accès au marché financier).
- Solution de financement du passif social.
- Retraite chapeau.
- Plan d'épargne santé.
- Après avoir lancé fin 2007 les premiers contrats multi-supports en unités de compte avec la Société Générale, La Marocaine-Vie innove à nouveau en 2010, en créant une offre d'assurance retraite complémentaire multi-supports réservée aux entreprises. Elle est ainsi le numéro un des contrats multisupport au Maroc.

IV. Chiffres clés:

Figure 3: Chiffre d'affaire (en MDHs)

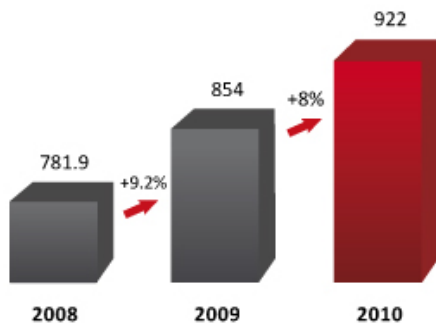
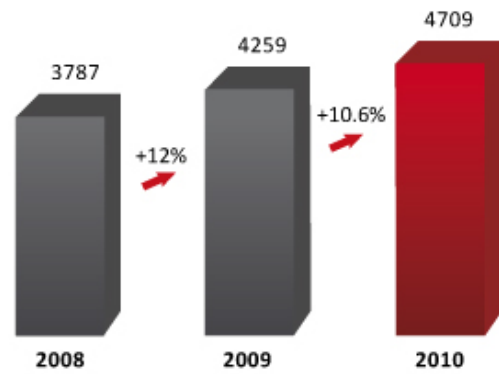


Figure 4 : Provisions mathématiques(en MDHs)



Part de marché (Assurance vie)

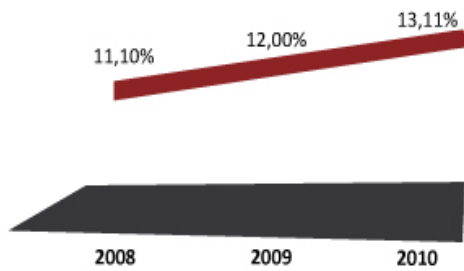
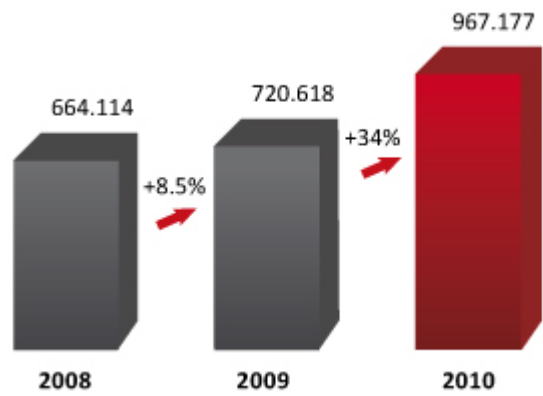


Figure 5 : Adhésions gérées



Chapitre 2: Contexte et fonctionnement des Variable Annuities

I. Définition et contexte des Variable Annuities:

I.1. Définition:

Importés des États-Unis où ils ont fait leurs premières apparitions dans les années 1980, les «Variable Annuities» sont des **produits d'épargne retraite en unités de compte**, permettant de bénéficier de rendements potentiellement élevés des marchés financiers, **combinés à des garanties** (en cas de vie et/ou de décès) portant sur le capital, afin de sécuriser l'investissement de l'assuré.

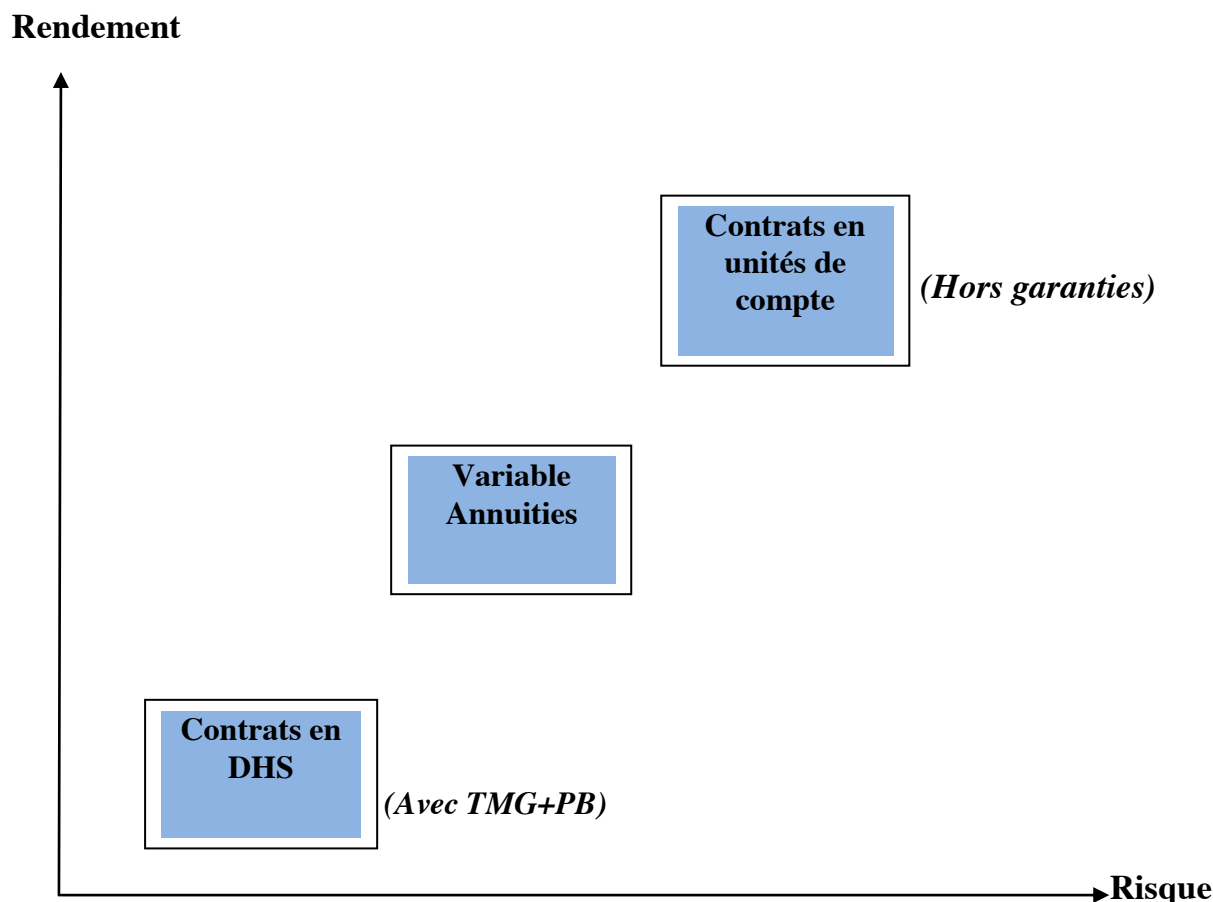
En effet, dans le cadre de l'assurance vie, il existe deux grandes familles de contrats d'épargne: les contrats en devises (dirhams, ...) et les contrats en unités de compte. Contrairement aux contrats en dirhams qui garantissent un taux minimal avec une participation aux bénéfices, les contrats d'assurance vie en unités de compte (appelés également contrats à capital variable) sont des contrats d'épargne proposant plusieurs supports d'investissement (actions, obligations, parts d'OPCVM...) sur lesquels le souscripteur répartit son épargne en fonction de ses objectifs en termes de rentabilité, de risque et de disponibilité.

Dans ces contrats en unités de compte (hors garanties), l'assureur ne garantit pas la valeur des unités de compte qui varient à la hausse ou à la baisse en fonction des marchés financiers, mais uniquement le nombre d'unités de compte acquises par l'assuré en contrepartie des primes nettes. L'encours valorisé est alors obtenu en multipliant le nombre d'unités de compte par leur valeur liquidative: l'assuré s'expose donc à un risque important de moins-value.

C'est ainsi que, suite à une exigence de garanties financières de la part des assurés, les sociétés d'assurance ont conçu un produit d'épargne de nouvelle génération, qui allie performance et sécurité : les variable annuities. En effet, l'investissement est sécurisé par des garanties tout en profitant des marchés financiers lorsqu'ils sont à la hausse sans que toutefois cela impacte l'épargne en cas de baisse.

De ce fait, les variable annuities présentent pour les épargnants un couple rendement/risque intéressant: ce sont des produits avec des rendements plus élevés que ceux des contrats classiques en dirhams, et avec un risque moins important que celui des produits investis purement sur des supports en unités de compte.

Figure 6: Position des VA en termes de couple rendement/risque.



Les VA constituent donc une alternative séduisante aux contrats en dirhams dont la sécurité a pour contrepartie une faible rentabilité à long terme; et aux contrats en unités de compte dont le dynamisme se paye au prix fort du risque.

De même, la répartition des risques entre assureur et assuré est différente que celle des autres produits d'épargne (en dirhams ou en unités de compte). En effet, à cause des garanties, l'assureur a un risque plus important que dans le cas de ces deux types de produit alors que l'assuré porte moins de risque que dans le cas d'un contrat en unités de compte.

I.2. Positionnement des variable annuities dans le contexte actuel de l'épargne retraite:

Les VA présentent des atouts majeurs pour redynamiser l'épargne retraite dans le contexte actuel de détérioration des prestations à la retraite et de crise financière. En effet, à l'heure actuelle et dans plusieurs pays, l'environnement de l'épargne retraite se caractérise par :

- Des crises des régimes obligatoires de retraite, dues à un allongement général de la durée de vie, qui rendent nécessaire la constitution d'un complément de retraite par capitalisation,
- Des marchés financiers en turbulences qui rendent indispensable de bénéficier de garanties financières.

Ainsi, dans ce contexte, les Variable Annuities pourraient constituer une réponse pertinente aux besoins des assurés en termes d'épargne retraite qui sont entre autres:

- Se constituer une épargne afin de compléter leur retraite,
- Sécuriser l'investissement contre les perturbations des marchés financiers, contrairement aux produits en unités de compte purs,
- Disposer de produits souples et modulables selon leurs besoins.

Les Variable Annuities répondent parfaitement à cette nouvelle demande des assurés.

II. Les différentes garanties et leurs variantes:

Les garanties des VA se déclinent sous plusieurs formes, chacune d'entre elles répondant aux besoins des souscripteurs. Il existe principalement 4 garanties, connues sous le nom générique de **GMxB (Guaranteed Minimum x Benefit)**. On distingue:

- Des garanties en cas de vie ou de décès;
- Des garanties portant sur des niveaux minimums de capital, de rente ou de rachat.

En pratique, les Variable Annuities combinent plusieurs de ces garanties: ce sont des **produits modulables**.

II.1. GMDB: Guaranteed Minimum Death Benefit

Plus connue sous le nom de garantie plancher (présente dans la plupart des produits d'épargne en unités de compte du marché), la GMDB est la seule garantie de type Variable Annuities qui se déclenche en cas de décès du souscripteur.

Elle garantit en cas de décès de l'assuré, un capital minimum (défini à la souscription) qui sera versé au bénéficiaire désigné. Son objectif est donc de protéger le capital tout en conservant une espérance de rendement plus importante et un positionnement sur le marché des actions. Il existe plusieurs variantes:

- **Garantie simple:** le capital versé correspond au maximum entre la somme des primes versées et la valeur atteinte de l'épargne.
- **Revalorisation TMG:** le capital versé est égal au maximum entre la somme des primes versées revalorisée à un taux fixe prédéterminé et garanti, et la valeur atteinte de l'épargne.
- **Cliquet:** le capital versé correspond au maximum entre le niveau le plus haut atteint (en général à une date anniversaire) par le fonds et la valeur du fonds à la date actuelle.
- **Mix :** il s'agit du niveau maximum entre le Ratchet et le Roll-up.

II.2. GMAB: Guaranteed Minimum Accumulation Benefit

Selon cette garantie, en cas de survie de l'assuré au terme du contrat (GMAB) ou à une autre date fixée à l'avance (GMSB), le capital versé correspond au maximum entre la somme des primes versées d'une part, et la valeur de l'épargne d'autre part.

Elle garantit donc au souscripteur un plancher sur son investissement et a pour objectif l'accumulation du capital. De la même façon que la GMDB, ce plancher peut prendre différentes formes (Premium Return, Roll-up, Ratchet).

II.3. GMIB: Guaranteed Minimum Income Benefit

Il s'agit de la garantie de revenu minimum en cas de vie. Elle garantit au souscripteur, en cas de survie à une date fixée à l'avance, une rente viagère indépendamment de la performance des marchés. L'option peut être exercée après un certain nombre d'années après la souscription (10 ans par exemple) ou après un certain âge (70 ans par exemple).

Le capital constitutif pour le calcul de la rente est le maximum entre la valeur du fonds et le niveau de la garantie à l'instant où l'assuré demande le début du paiement. La base de la rente peut être garantie en Roll-up ou en Ratchet.

II.4. GMWB: Guaranteed Minimum Withdrawal Benefit

En cas de survie de l'assuré à une date déterminée à l'avance, la GMWB et la GMWB for Life garantissent respectivement, habituellement après une période de différé, des retraits réguliers sur une période déterminée ou des retraits viagers.

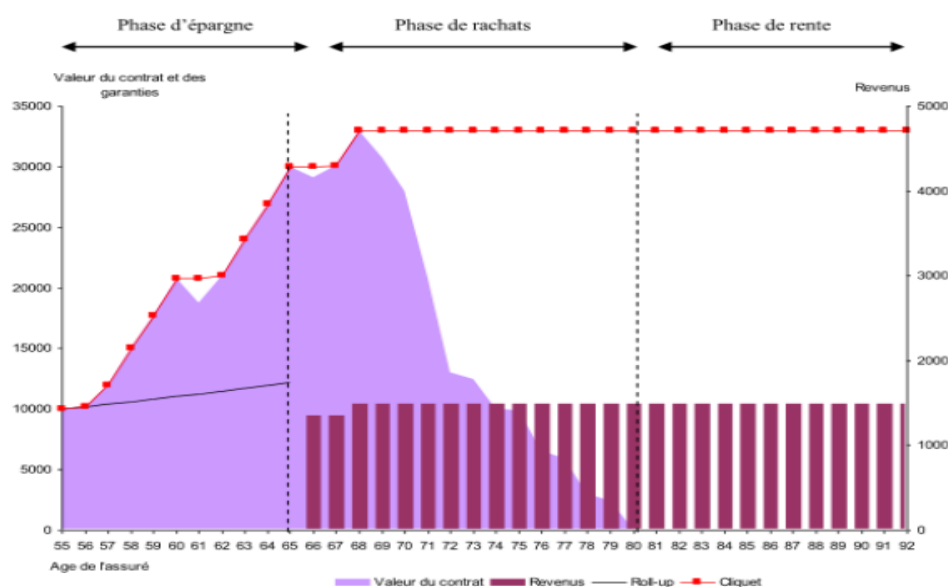
Elle permet de retirer $x\%$ des sommes versées par an quelles que soient les performances des marchés financiers. Ce pourcentage x est fixé mais il est possible pour l'assuré de retirer un pourcentage y supérieur à x , néanmoins il s'expose dans ce cas à des pénalités de rachat portant sur le différentiel $y-x$.

En cas de décès de l'assuré, un capital (au moins égal au montant total des versements effectués par l'assuré nets des frais prélevés et diminué des montants des rachats partiels déjà effectués) sera versé au bénéficiaire désigné (garantie plancher).

Dans ces contrats, on distingue trois phases successives:

- Une **phase d'accumulation**: c'est une phase d'épargne, permettant de faire fructifier le capital sans rachat sur le contrat; sa durée est définie à la souscription. Durant cette phase, l'assuré peut éventuellement réaliser des versements complémentaires et il peut bénéficier d'une garantie de revalorisation (i.e. l'assiette de calcul du montant des rachats partiels programmés est revalorisée) et d'une garantie cliquet.
- Une **phase de retraits partiels programmés**: c'est une période pendant laquelle l'assuré effectue une série de rachats partiels programmés. L'épargne diminue donc progressivement. Les contrats peuvent également comporter une garantie cliquet durant cette phase. Dans un contrat GMWB, la durée de cette phase est définie à l'adhésion et met fin au contrat.
- Une **phase de rente viagère**: si la garantie est de type GMWB for Life, une rente sera versée à l'assuré jusqu'à son décès. Si à une date donnée le capital est entièrement consommé, une rente viagère d'un montant égal au dernier rachat partiel programmé se déclenche jusqu'au décès de l'assuré.

Figure 7: Fonctionnement d'un contrat GMWB for life



III. Le marché international des Variable Annuities:

III.1. Historique:

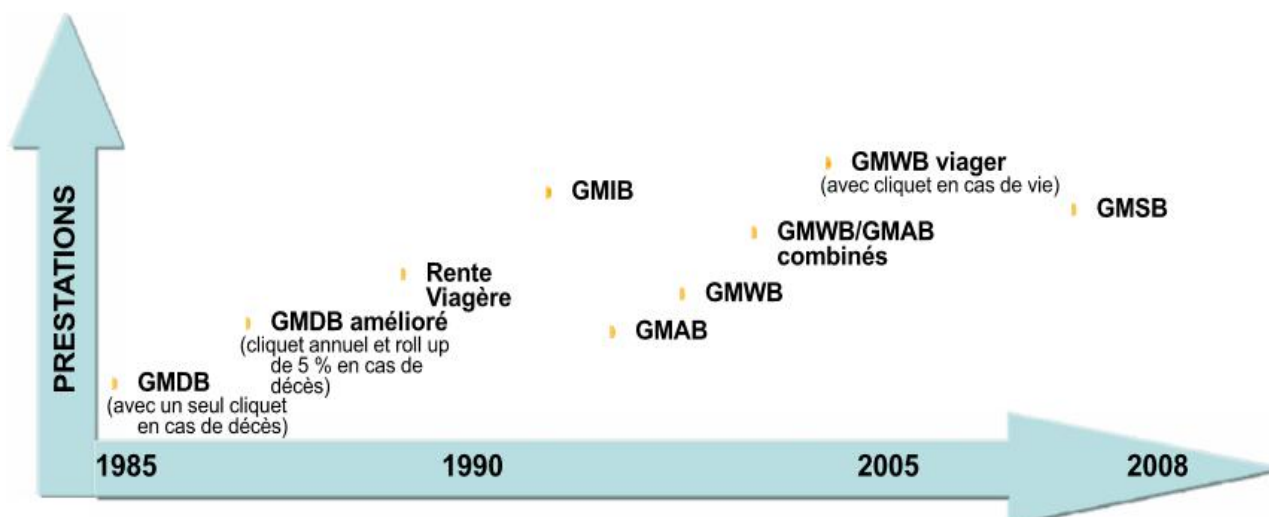
Le premier produit Variable Annuities est apparu aux Etats-Unis en 1985, il s'agit d'une GMDB. Dans les années 90, les premiers produits avec des garanties de type GMIB et GMAB sont nés, notamment avec le lancement en 1996 par AXA d'un produit VA de type GMIB. Depuis lors, de nombreux acteurs se sont positionnés et ont contribué à enrichir l'offre des Variable Annuities, à tel point qu'une association chargée de leur promotion a été créée: la NAVA (National Association for Variable Annuities).

III.2. Evolution du marché:

Depuis leur apparition, les VA sont de plus en plus sophistiqués et ont connu un grand essor durant la dernière décennie. Aujourd'hui, les garanties qui sont en plein essor et qui suscitent le plus d'intérêts pour les assurés sont les garanties GMWB et GMWB for Life. Ce sont les garanties les plus commercialisées sur le marché nord-américain (USA et Canada), elles commencent également à se développer sur le marché européen.

L'évolution des Variable Annuities peut être schématisée par la figure ci-dessous:

[Figure 8: Evolution de l'offre des VA depuis leur création.](#)



III.2.1. Le marché américain:

Le marché américain a connu un développement considérable depuis les années 2000. A présent, les VA sont devenus les produits phares sur le marché nord-américain, avec notamment une concentration du secteur sur une dizaine de compagnies. Aux USA, les Variable Annuities représente environ 2/3 de la collecte en épargne retraite.

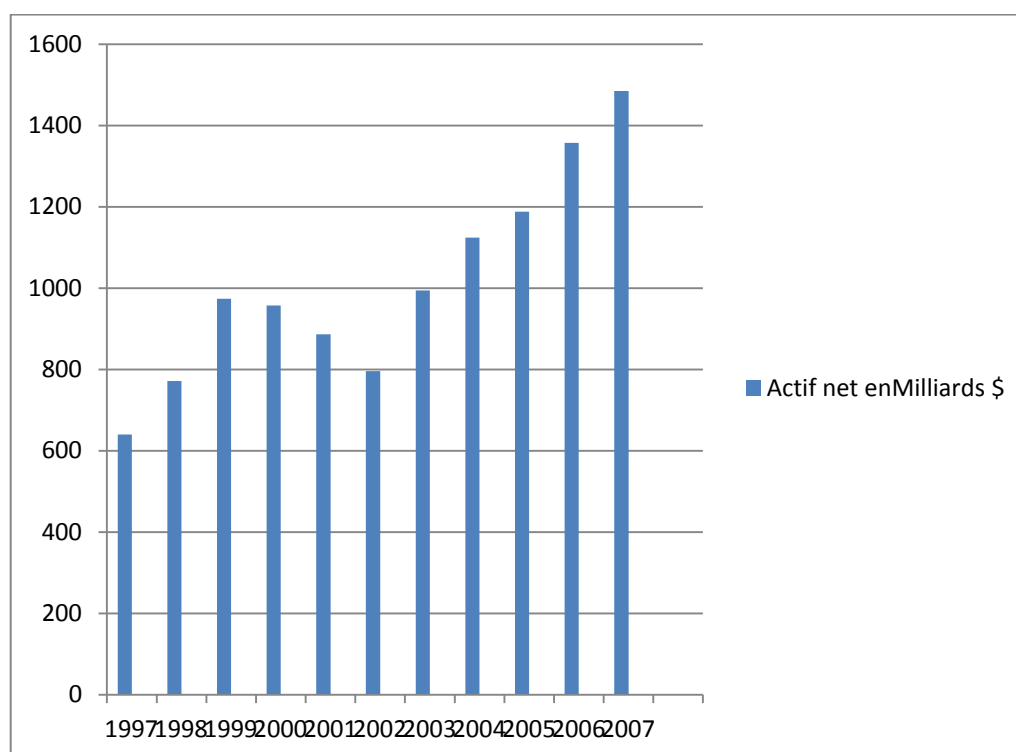
L'encours des produits Variable Annuities (toutes garanties confondues) est passé de 640 milliards \$ en 1997 à 1485 milliards \$ en 2007, comme l'atteste le tableau suivant.

Tableau 1: Evolution de l'encours des VA aux Etats-Unis.

	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007
Actif net en Milliards \$	640	771	974	957	886	796	994	1124	1188	1357	1485

(Source: National Association for Variable Annuities)

Figure 9: Evolution de l'encours des VA aux Etats-Unis.



III.2.2. Le marché japonais:

Après le marché américain, les Variable Annuities ont rapidement gagné le marché asiatique. En 1999, les premiers produits font leur apparition au Japon. Ils atteignent par la suite d'autres pays asiatiques.

Aujourd'hui, ce marché constitue le deuxième marché le plus important après celui de l'Amérique du Nord.

III.2.3. Le marché européen:

En Europe, les premiers produits Variable Annuities sont apparus en 2006. Un certain nombre de grands groupes internationaux ont à leur tour lancé des produits Variable Annuities sur le marché européen : il s'agit principalement des sociétés bien implantées sur le marché américain et ayant un certain savoir-faire dans la conception et la gestion de ces produits.

Depuis 2008, la commercialisation des garanties GMWB/GLWB s'est accélérée. Le tableau ci-dessous présente quelques produits Variable Annuities commercialisés en Europe, ainsi que leurs dates de lancement.

Tableau 2 : Quelques produits VA commercialisés en Europe.

Nom	Produit	Garantie	Lancement
Aegon	Income for Life	WB/IB	UK-Mai 08
MetLife	Retirement Portfolio	WB/AB	UK-Juin 08
Allianz	Invest4Life	WB	Allemagne-Juillet 08
Axa	Accumulator Retraite	WB	France-Juillet 08
MetLife	Citi VA Orchidea	WB	Pologne-Septembre 08
Bâloise Life	RentaSafe	WB	Suisse-Octobre 08
Allianz	Invest4Life	WB	France- Octobre 08
Axa	Twinstar	WB	Suisse-Novembre 08
MetLife	Citi VA Investment Bond	WB	UK-Janvier 09
La Mondiale	Terre d'Avenir	WB/DB	France-Janvier 09
MetLife	Citi VA Auvida	WB	Grèce-Février 09
Allianz	Invest4Life	WB	Italie-Février 09
ING	Lifelong Income	WB	Belgique-Février 09
Canada Life	Garantie Investment Rente	WB	Allemagne-Mars 09
MetLife	Citi VA Auvida	WB	Espagne-Mai 09
MetLife	Citi VA	WB	Belgique-Mai 09

Première partie: Étude de marché et définition du produit

Introduction:

Comme dans tout travail actuariel de conception d'un nouveau produit d'assurance, il est indispensable de procéder au préalable à une étude de marché (recherche d'informations sur le marché). Celle-ci permet de diagnostiquer les besoins de la clientèle et de déterminer la population cible, afin de définir par la suite un produit qui est en phase avec les attentes et les besoins du créneau sur lequel l'assureur compte se positionner.

Ainsi, cette première partie sera consacrée à deux objectifs essentiels: d'abord, nous étudierons si le contexte actuel du marché marocain d'épargne est favorable au lancement et au développement des Variable Annuities. Une fois que le contexte et les besoins du marché sont bien cernés, nous passerons à la conception proprement dite de notre produit.

Pour ce faire, l'approche que l'on se propose sera basée sur trois chapitres. De prime abord, nous ferons l'état des lieux des retraites au Maroc ; ainsi, nous étudierons aussi bien les régimes obligatoires que les régimes complémentaires, et nous mettrons en évidence la crise et les limites de ces deux régimes. Cela nous permettra d'enchaîner directement avec l'analyse des besoins actuels du marché marocain en termes d'épargne retraite.

Le dernier chapitre sera, quant à lui, consacré à la conception du produit.

Chapitre 3: État des lieux de la retraite au Maroc

L'objectif de ce chapitre est d'abord de présenter l'ensemble du système de retraite au Maroc, et de faire apparaître par la suite les problèmes que connaissent les différentes caisses et leurs impacts sur le système. Enfin nous mettrons l'accent sur les produits épargne-retraite commercialisés par les assurances-vie et leurs limites.

I. Les régimes de retraite au Maroc: présentation, diagnostic et besoin de réforme

La présence et le fonctionnement de fonds de pension et de caisses de retraite dépendent du régime des retraites dans le pays considérés. On peut distinguer deux types de régimes de retraites : les régimes par répartition, les régimes par capitalisation et les régimes mixtes.

Le régime par répartition est un système de solidarité intergénérationnelle : les salariés qui sont en activité financent les retraites des salariés qui ne sont plus en activité (les retraités).

L'autre régime est celui par capitalisation : dans un tel système chaque salarié finance sa propre retraite.

Au Maroc, les régimes utilisés sont les régimes par répartition et par capitalisation.

I.1. Présentation et diagnostic des régimes:

Le système de retraite marocain comprend principalement 4 caisses, à savoir:

- **La caisse marocaine de retraite (CMR):**
 - **Création** : en 1930.
 - **Bénéficiaires** : Fonctionnaires civils et militaires, salariés des collectivités locales et de certains établissements publics.
 - **Mode de financement** : Répartition.

- **La caisse nationale de sécurité sociale (CNSS):**
 - **Création** : en 1959.
 - **Bénéficiaires** : la CNSS est une caisse obligatoire du secteur privé.
 - **Mode de financement** : Répartition.

- **La caisse interprofessionnelle de retraite (CIMR):**
 - **Création** : en 1949
 - **Bénéficiaires** : la CIMR est une caisse facultative du secteur privé.
 - **Mode de financement** : Mixte (*seul régime équilibré sur un horizon de 60 ans*).

- **Le régime collectif d'allocation de retraite (RCAR):**
 - **Création** : en 1978
 - **Bénéficiaires** : Agents non titulaires de l'État et des collectivités locales, et salariés des organismes soumis au contrôle financier de l'État.
 - **Mode de financement**: Mixte.

Tableau 3 : Indicateurs du secteur en 2010 :

Régimes	Total	CMR	CNSS	RCAR	CIMR
Actifs cotisants	3 689 252	862 938	2 360 543	195 785	269 986
Bénéficiaires	1 210 715	601 202	378 418	101 263	129 832
Cotisations (en MDHS)	36 162	16 903	12 561	1 792	4 906
Prestations (en MDHS)	32 237	15 426	10 008	3 226	3 577
Réserves (en MDHS)	198 531	70 520	23 220	83 177	21 706
Produits financiers (en MDHS)	13 499	4 267	822	5 584	2 826

Source : La DAPS

I.2. Evolution de quelques indicateurs démographiques au Maroc:

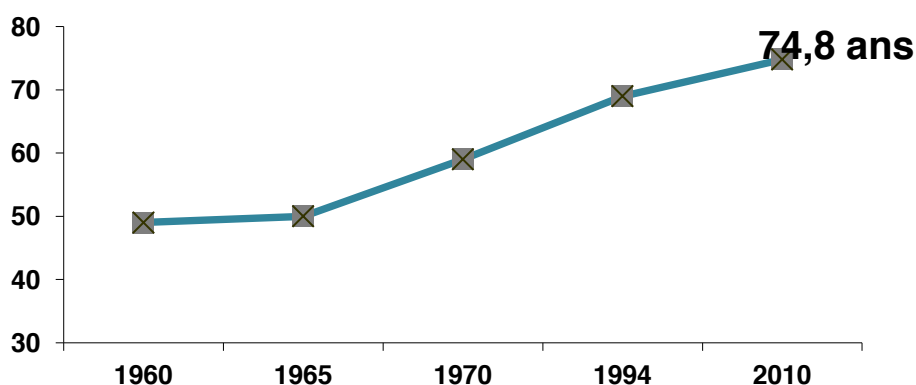
Depuis plusieurs années, les régimes par répartition connaissent des limites et on constate une augmentation de la population des retraités comparativement à la population active : pour des raisons d'augmentation de l'espérance de vie, de niveau de chômage plus élevé qu'auparavant, et de natalité faible.

➤ Allongement de l'espérance de vie :

L'espérance de vie à la naissance est un indicateur statistique exprimant le nombre moyen d'années que pourrait vivre un nouveau-né.

Comme le montre le graphique ci-dessous; l'espérance de vie au Maroc (population totale) a enregistré une nette amélioration.

Figure10 : Évolution de l'espérance de vie à la naissance.



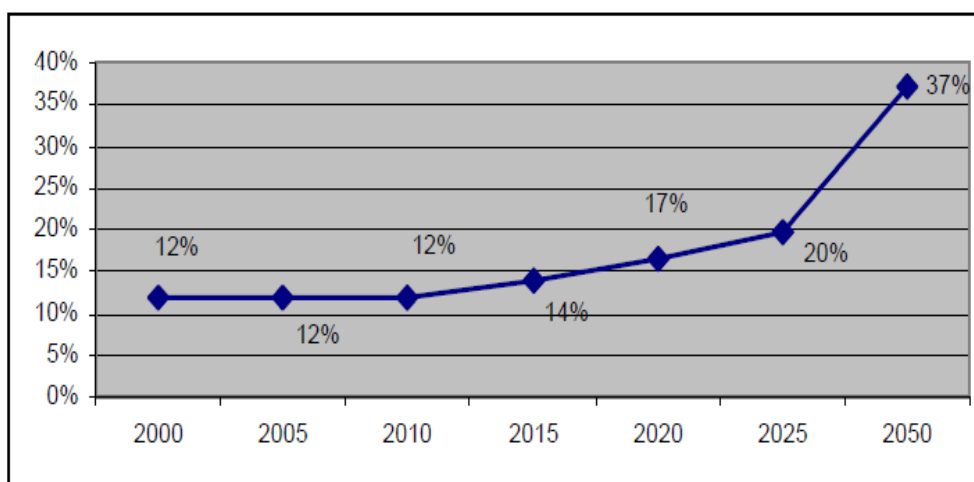
Source : HCP- Enquête nationale sur les personnes âgées au Maroc

À sa naissance, le Marocain moyen espérait vivre 47 ans en 1962 (57 ans en milieu urbain et 43 ans en milieu rural). Aujourd'hui, un demi-siècle après, son espérance de vie est portée à 74,8 ans (77,3 ans en milieu urbain et 71,7 ans en milieu rural), le gain est ainsi de 28 ans, résultante de la baisse de la mortalité aux différents âges. Le rythme d'évolution de cette dernière est fortement corrélé au niveau d'amélioration des conditions sanitaires et du niveau de vie.

➤ **Évolution du rapport de dépendance :**

Défini comme étant la proportion des personnes âgées de 60 ans et plus par rapport à la population d'âge situé entre 15 ans et 59 ans, le rapport de dépendance des personnes âgées, nous renseigne sur le nombre des personnes âgées pour 100 personnes en âge d'activité.

Figure 11 : Évolution prévue du rapport de dépendance des personnes âgées :

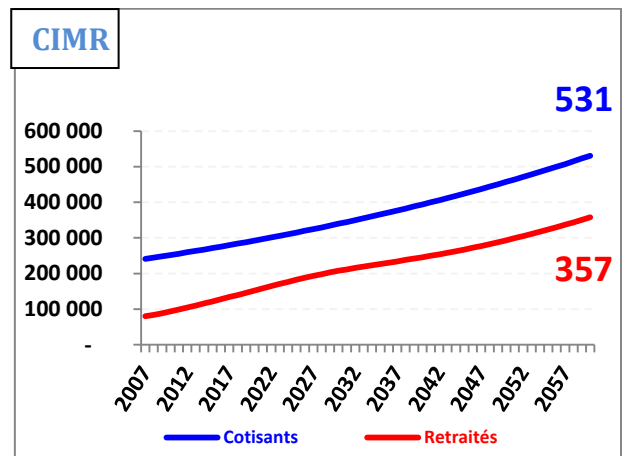
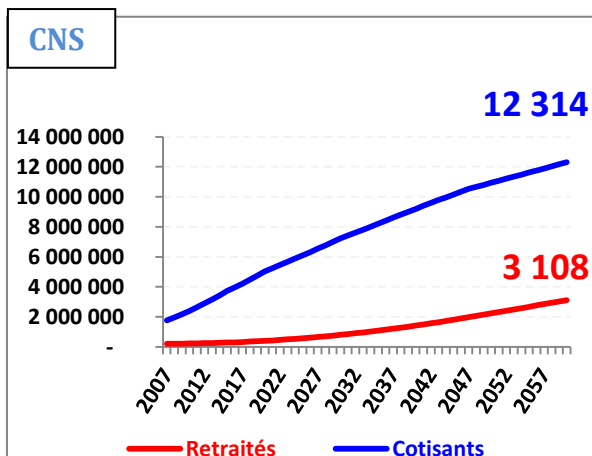
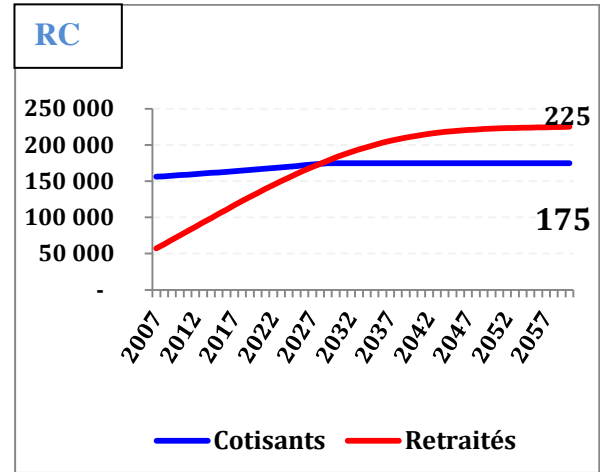
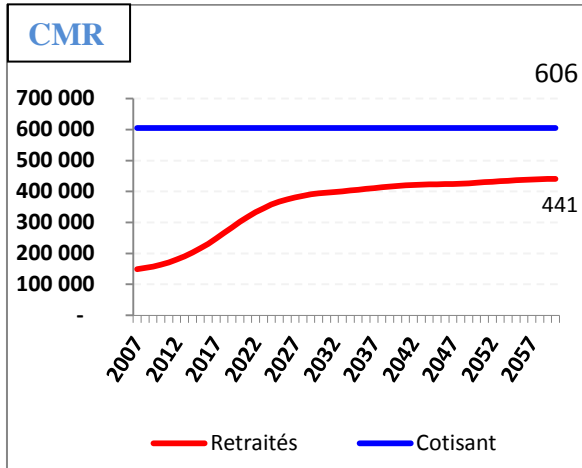


Source : HCP- Enquête sur les changements démographiques au Maroc

Pour le Maroc, ce rapport qui a été de 12% en 2000 passera à 14% en 2015 pour atteindre près de 20% en 2025 puis 37% en 2050. Conséquence de l'augmentation de plus en plus rapide de la population âgée et de la diminution du rythme de croissance de la population en âge d'activité, l'évolution du rapport de dépendance des personnes âgées illustre bien la vitesse avec laquelle se produira le vieillissement de la population. Il annonce aussi les difficultés auxquelles seront confrontées les caisses de retraite par répartition.

I.3. Impacts de ces évolutions démographiques sur les régimes de retraite au Maroc:

➤ Effectif cotisants/retraites :



Source: Rapport d'activités de la CNSS, CMR, CIMR, RCAR

CMR :

- Stabilité des cotisants (606000) entre 2007 et 2060 et forte augmentation des retraités de 148.976 en 2007 à 441000 en 2060.

RCAR :

- Quasi stabilité des cotisants (156.000 en 2007 à 175.000 à partir de 2030) et forte augmentation des retraités de 57.000 en 2007 à 225.000 en 2060;

CNSS :

- La population d'actifs cotisants est multipliée par 7 sur l'horizon de projection.
- L'effectif des retraités est multiplié par 5 sur la même période;

CIMR :

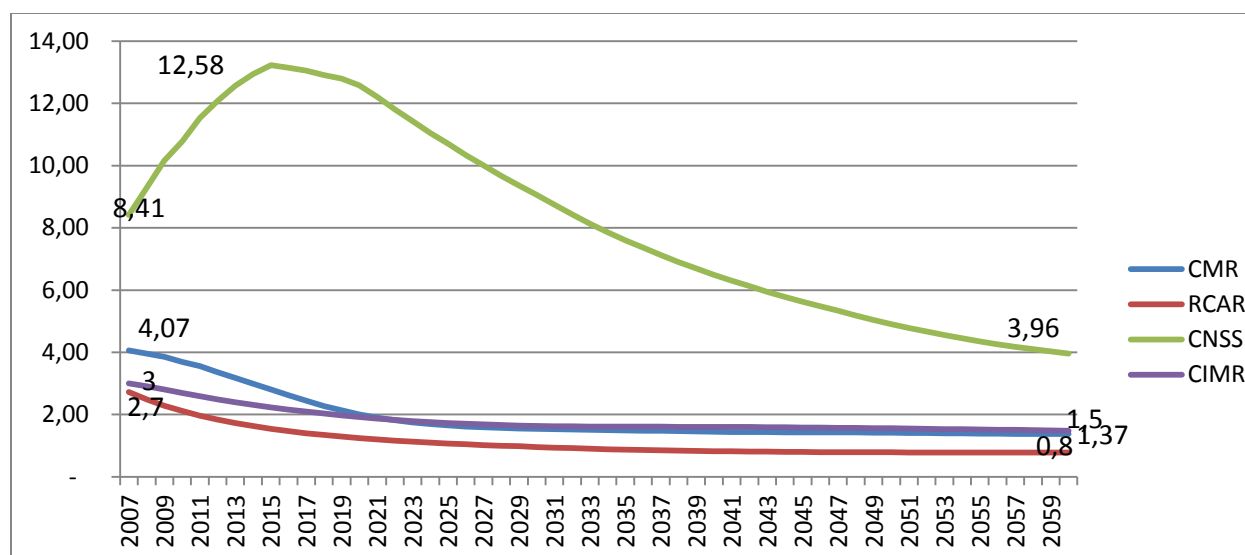
- La population d'actifs passera de 241.000 en 2007 à 531.000 en 2060;

- L'effectif des retraités est multiplié par 2,5 d'ici 2028 pour atteindre 198.000. Par la suite, l'augmentation est plus lente avec un effectif de 357.000 en 2060;

Tous ces changements qu'a connus l'effectif cotisants/retraités pour les différents régimes vont influencer le rapport démographique, défini comme étant le rapport entre les actifs et les retraités, en décroissance continue.

➤ **Rapport démographique :**

Figure12 : Rapport démographique entre 2007 et 2060



Source : Le rapport d'activités de la CNSS, CMR, CIMR, RCAR

CMR :

- Dégradation du rapport démographique qui passera de 3,49 actifs pour un retraité en 2007 à 1,37 actif pour un retraité en 2060;

RCAR :

- Dégradation du rapport démographique qui passera de 2,7 actifs pour un retraité en 2007 à 0,8 à partir de 2045;

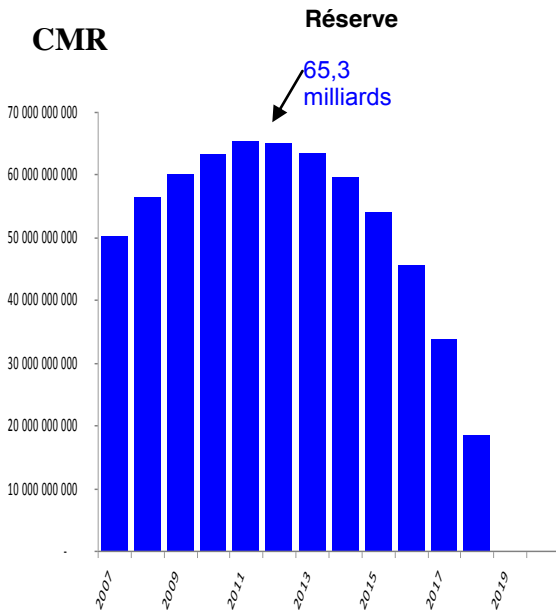
CNSS :

- Amélioration du rapport démographique qui passera de 8,41 en 2007 à 12,6 en 2020 avant de baisser à 3,9 en 2060;

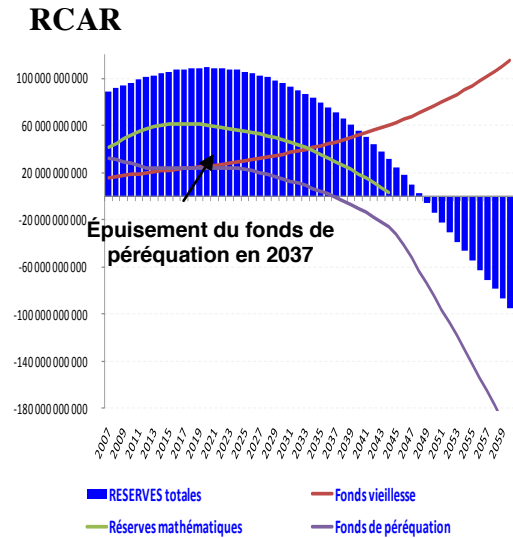
CIMR :

- Chute rapide du rapport démographique de 3 en 2007 à 1,5 en 2060;
- Cette dégradation du rapport démographique de toutes les caisses de retraites a, l'exception de la CNSS, peut être expliqué par le vieillissement de la population et (d'autres facteurs).

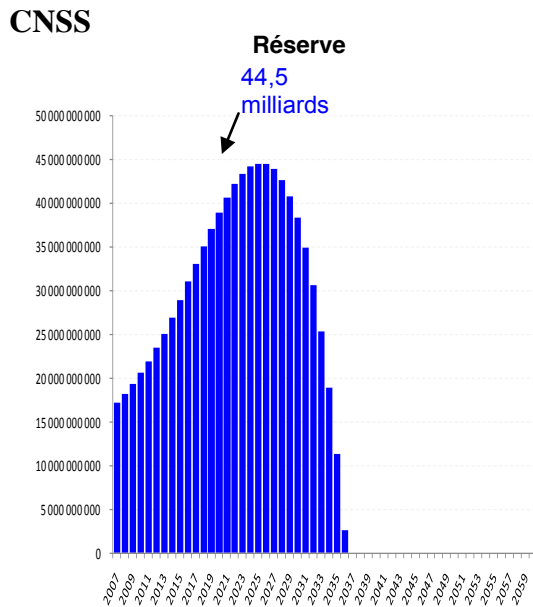
➤ **Réserves:**



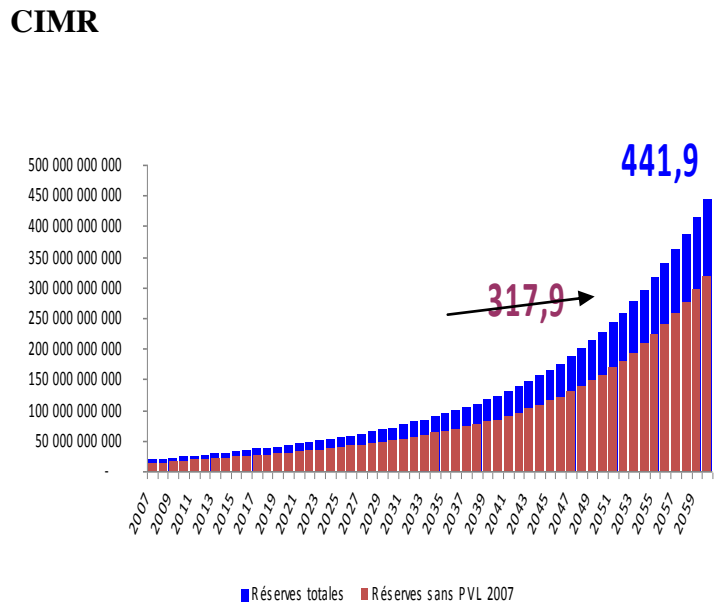
Épuisement des réserves en 2019



Épuisement des réserves totales en 2049



Épuisement des réserves en 2037



La réserve de prévoyance est toujours positive et croissante en fin de projection (pas de déficit à l'horizon de projection)

➤ **Taux de remplacement:**

Le taux de remplacement est le rapport entre le montant de la pension de retraite et le montant du dernier revenu d'activité. Bien que le taux de remplacement réel n'est connu que lors

du départ à la retraite; Des études actuarielles ont montré que pour un homme de 55 ans qui gagne aujourd'hui 10000dhs et qui a commencé à travailler en 1982 c-à-dire 30 ans de carrière.

À son départ en retraite, à 65 ans, son taux de remplacement sera entre 42% et 60% soit une baisse considérable de ses revenus.

II. Les produits d'épargne retraite des assurances vie: caractéristiques et limites

Face à la détérioration inéluctable du niveau des prestations des régimes obligatoires, les assurances vie ont très tôt constitué une alternative en proposant des produits d'épargne retraite, afin de pallier aux insuffisances de ces régimes de base.

Au Maroc, les assurances vie proposent plusieurs contrats d'épargne retraite par capitalisation, visant essentiellement à répondre au besoin de complément de retraite pour les salariés.

II.1. Caractéristiques des différents produits:

Ces produits sont de deux types:

- **l'épargne retraite complémentaire proposée par les entreprises à leurs employés:** ce sont donc des contrats de groupe (dans lesquels l'effort d'épargne peut être supporté par l'adhérent seul, par une entreprise ou conjointement);
- **l'épargne retraite individuelle.**

Pour toutes ces deux catégories, on distingue les contrats en dirhams et ceux en unités de compte (dont seule La Marocaine Vie commercialise)¹.

II.2. Limites de l'offre des assureurs:

En analysant rigoureusement cette offre du marché, on remarque que les produits d'épargne retraite proposés par les assureurs sont similaires et présentent des limites tant en termes de garanties proposées, qu'en termes de souplesse et de restitution de l'épargne. En outre, à part le lancement des produits en unités de compte en 2007 par La Marocaine Vie, on constate **un manque d'innovation** de la part des assureurs pour relancer le marché de l'épargne retraite.

Cela fait que le seul élément de différenciation des assureurs est le tarif. Cette forte concurrence basée essentiellement sur le tarif proposé, peut avoir des répercussions sur le chiffre d'affaires des assureurs. C'est la raison qui pousse La Marocaine Vie à innover pour se démarquer de ses concurrents en ciblant des niches porteuses et haut de gamme.

De plus, on assiste à une baisse inéluctable des taux de rendement des contrats en dirhams. En effet, leur sécurité a pour contrepartie une faible rentabilité: ce sont des contrats pour lesquelles les primes sont massivement investies en obligations (dans le but de garantir un taux minimal), ce qui se traduit par un amenuisement du taux de rendement dû essentiellement à la baisse des taux des bons du Trésor.

Quant aux produits en unités de compte, leur principale limite est la forte exposition de l'assuré au risque de moins-value, ce qui constitue un véritable handicap à leur commercialisation (surtout depuis la crise financière de 2008): d'où la nécessité de combiner ces produits à des garanties (besoin auquel répondent les Variable Annuities).

¹ Voir **tableau** en annexe sur les produits d'épargne retraite commercialisés au Maroc.

Chapitre 4: Étude des besoins actuels du marché marocain de la retraite

La retraite est devenue un enjeu majeur pour la majorité des pays et le Maroc ne déroge pas à la règle. En effet, l'impact combiné de la baisse de la natalité et de l'augmentation de l'espérance de vie, donne lieu à un vieillissement de la population et à une explosion du nombre de retraités par rapport à la population active ; sur ce s'ajoute le manque d'innovation que connaissent les différents produits d'assurance-vie présents sur le marché.

Ainsi, il s'avère nécessaire, en premier lieu, d'examiner quels sont les besoins des assurés marocains en termes d'épargne-retraite afin de pouvoir trouver une alternative pour les satisfaire.

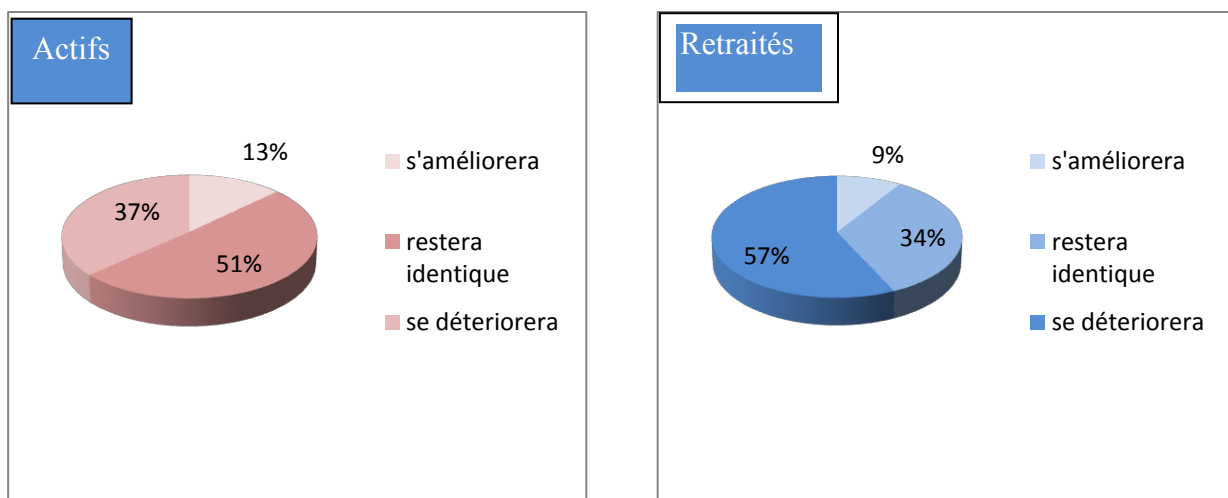
I. Besoins des assurés en termes d'épargne retraite:

Le constat à faire tout d'abord est que, contrairement à d'autres pays, la majorité des marocains sont mal informés des problèmes dont souffrent les différentes caisses de retraites au Maroc et que la prise de conscience est très récente. Mais ce constat n'empêche que les actifs marocains et leurs concitoyens retraités ont des attentes en matière d'épargne-retraite:

- la nécessité pour chaque individu de prendre en main sa retraite;
- l'épargne n'est plus un bonus, mais un revenu futur nécessaire pour vivre sa retraite;

Il est donc indispensable de voir comment les actifs et les retraités perçoivent l'évolution de leur niveau de vie à la retraite, et si le montant de leur retraite parvient réellement à satisfaire les besoins du foyer; c'est ce qu'illustrent bien les figures ci-dessous:

Figure13 : la perception de l'évolution du niveau de vie à la retraite

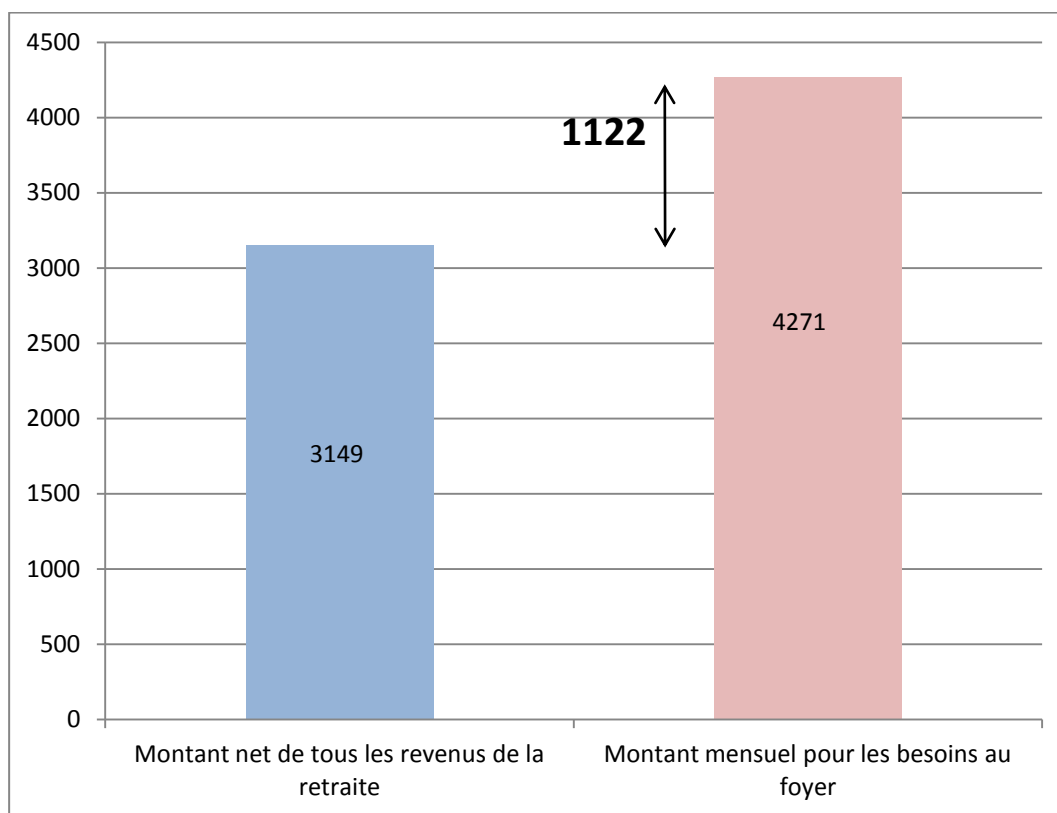


Source : Baromètre AXA de la retraite au Maroc (résultats 2008)¹

Plus de la moitié des actifs marocains pense que leur niveau de vie ne diminuera pas au moment de leur retraite et notamment ceux des classes sociales aisées et moyennes. En revanche, plus de la moitié des retraités a constaté que le niveau de vie s'était détérioré.

¹ Nous avons gardé les données du Baromètre AXA 2008 car entre ce Baromètre et celui de 2010, les données ont presque gardé la même tendance.

Figure 14 : Écart entre le montant moyen de la retraite et les besoins du foyer



Source : Baromètre AXA de la retraite au Maroc (résultats 2008)¹

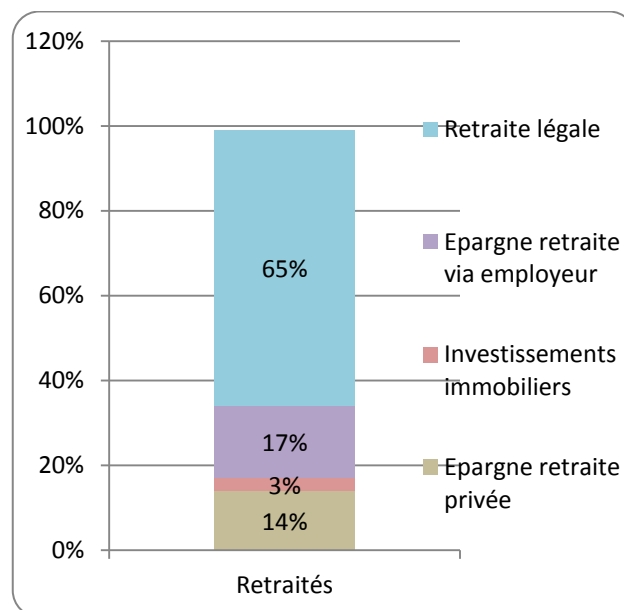
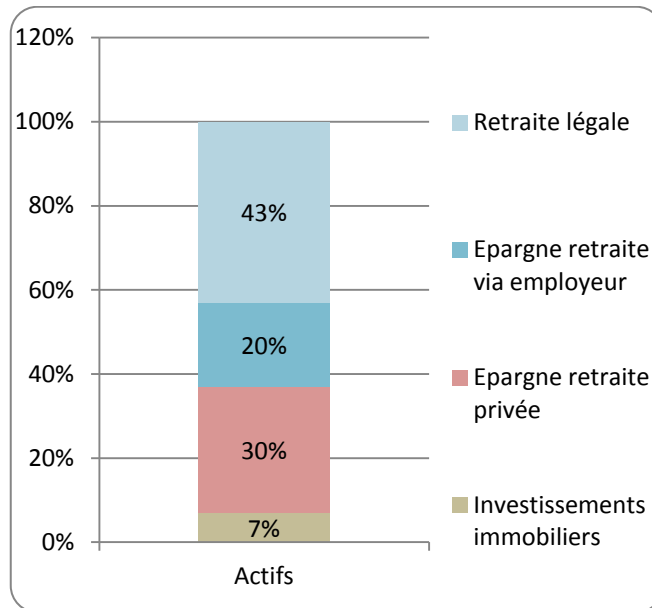
Quelle que soit la classe sociale, les revenus de retraite des marocains ne sont pas suffisants pour subvenir aux besoins des foyers.

Le manque à gagner représente environ 26% des dépenses du foyer mensuellement.

La différence est significative entre les perceptions des actifs et la réalité des retraités marocains : si plus de la moitié des actifs ne prévoit pas de dégradation de leur qualité de vie à la retraite, plus de la moitié des retraités ont vu leur qualité de vie se dégrader.

¹ Nous avons gardé les données du Baromètre AXA 2008 car entre ce Baromètre et celui de 2010, les données ont presque gardé la même tendance.

Figure15 : Principale source de revenu à la retraite

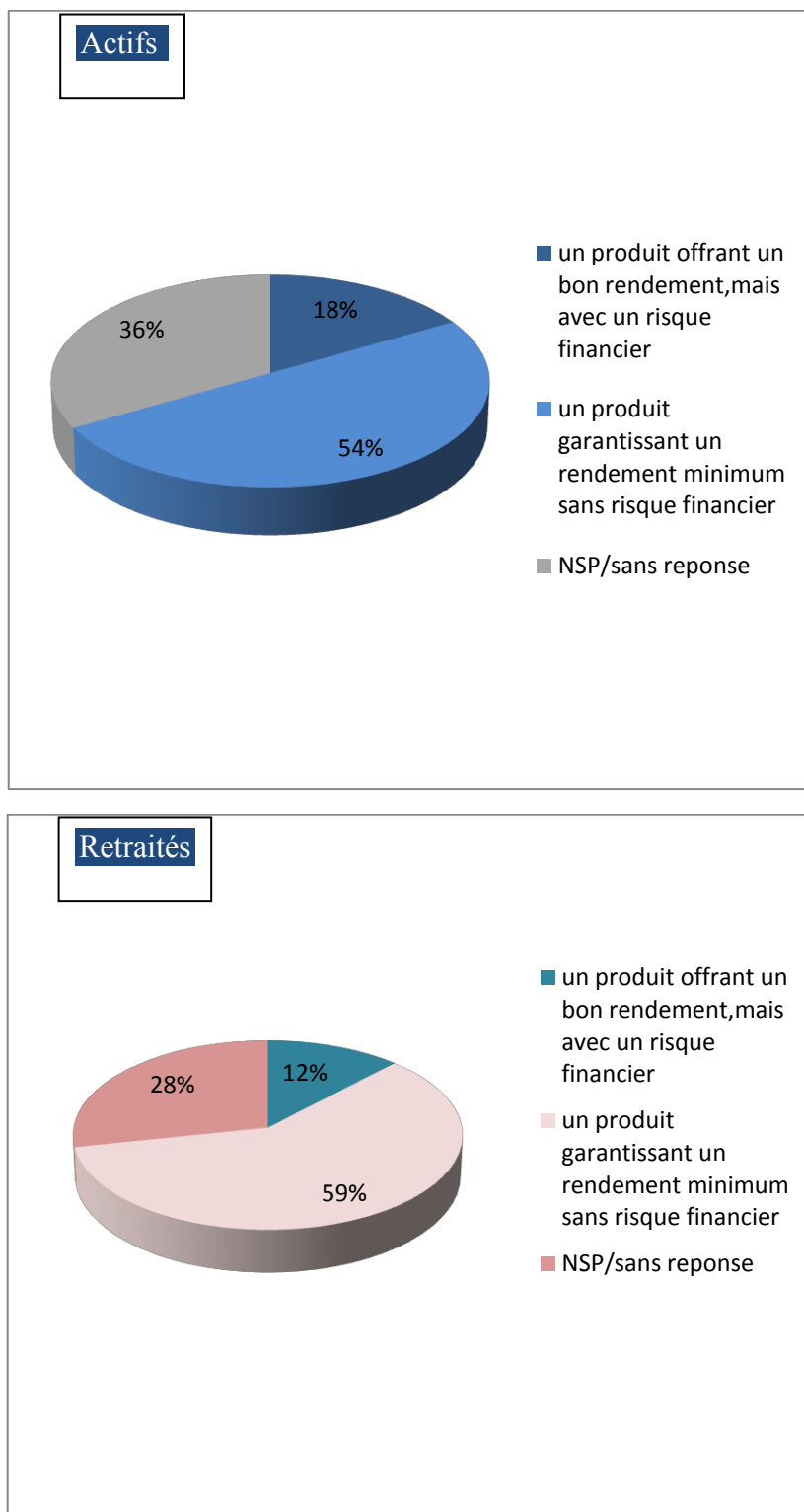


Source : Baromètre AXA de la retraite au Maroc (résultats 2010)

L'épargne privée émerge auprès des actifs en tant que principale source de revenu à la retraite. Par ailleurs, même si le rôle de l'état reste encore important auprès des actifs marocains, 57% d'entre eux comptent sur d'autres sources de revenus (épargne retraite privée : 30%, épargne retraite via employeurs : 20%, investissements immobiliers : 7%).

- Les risques acceptés ne peuvent plus être les mêmes car chacun se trouve dans l'obligation d'assurer un revenu minimum à la retraite :

Figure 16: Comportement des assurés vis-à-vis du risque financier :



Source : Baromètre AXA de la retraite au Maroc (résultats 2008)

Environ un tiers des marocains ne sait pas quel est le produit financier idéal pour la retraite. Et ils sont peu enclins à prendre des risques en matière de placement financier

pour la retraite. Assez logiquement, les classes aisées acceptent plus facilement d'avoir recours à un produit financier risqué.

Pour toutes ces raisons, les assurés se trouvent dans l'obligation de trouver une solution de complément de retraite tout en garantissant un minimum de revenu ;ce qui constitue un avantage pour les « Variable Annuities » qui proposent une garantie du capital et une perspective de plus-value supérieure à d'autres placements financiers classiques.

II. Intérêts des Variable Annuities:

II.1. Avantages pour l'assuré:

Grâce à leurs garanties et à leur souplesse, les Variable Annuities présentent de nombreux avantages pour les assurés. En effet, ces produits individuels d'épargne retraite ont pour principaux atouts:

- de permettre à l'assuré de constituer son complément de retraite en disposant d'annuités garanties;
- de prévoir le versement du capital restant en cas de décès ou de besoin (non aliénation du capital);
- de bénéficier d'une revalorisation plus attractive;
- de s'exposer aux actions, mieux adaptées à la préparation de la retraite puisque leur rendement espéré sur de longues périodes est plus élevé que celui des obligations, tout en étant protégé contre les conséquences des fluctuations à la baisse des marchés financiers ;
- de réaliser régulièrement des arbitrages entre les supports d'investissement.

Ainsi les VA offrent à l'assuré un couple rendement/risque très attractif et il reste toujours maître de son épargne.

II.2. Avantages pour l'assureur:

Avant le lancement d'un nouveau produit, l'assureur se demande s'il sera rentable. Les assureurs, s'ils acceptent les risques de ces garanties et sont à mesure de les gérer efficacement, peuvent tirer de nombreux gains financiers à commercialiser ces produits. En effet, en se positionnant sur des créneaux porteurs et haut de gamme, l'assureur peut avoir une forte rentabilité grâce à l'incorporation de marges de sécurité importantes dans le tarif.

En outre, ces produits attestent la capacité d'innovation de la compagnie d'assurance et son expertise financière, ce qui lui permet de se démarquer de la concurrence

Tableau 4: Comparaison des Variable Annuities avec d'autres produits d'épargne retraite

	Variable Annuities	Contrat Multisupport avec GP	Contrat en dirham
Avantages	-performance, sécurité, souplesse et revalorisation; -possibilité d'avoir une garantie au terme et de réaliser des rachats supplémentaires même si la valeur du contrat est nulle; - possibilité d'arbitrage entre les	-potentiel de performance, souplesse et capital garanti; -possibilité d'arbitrage ; -non aliénation du	-versements à vie éventuellement réversible; -sécurité (TMG et PB)

	supports en fonction des anticipations de l'assuré; -non aliénation du capital	capital ;	
Inconvénients	-frais de garantie et de gestion élevés; -coûts élevés pour la réflexion et le développement des outils compétents; -manque de flexibilité pour réaliser des versements complémentaires;	- pas de garantie au terme (rente ou capital);	-aliénation du capital et fonds uniquement en dirhams; -faible performance

Chapitre 5: Conception du produit

L'objet de ce chapitre est de présenter l'offre de Variable Annuities de certains marchés internationaux de référence, dans le but de l'adapter aux réalités et exigences du marché marocain, afin de créer un produit innovant qui répond aux besoins des épargnants et qui est rentable pour La Marocaine Vie.

I. Benchmark:

I.1. Exemples de produits commercialisés sur le marché français:

En France, les Variable Annuities sont apparus pour la première fois en 2007; Axa fut le pionnier à se positionner sur ce créneau avec son contrat Capital Ressources qui est inspiré de son produit américain Accumulator.

Depuis lors, trois autres contrats ont été lancés entre 2008 et 2009, il s'agit de: Accumulator Retraite d' Axa, Invest4Life d' Allianz et Terre d'avenir de La Mondiale Partenaire.

Le tableau suivant présente le fonctionnement et la formulation de ces différents produits.

Tableau 5: Exemples de produits commercialisés sur le marché français

	Capital Ressources	Accumulator Retraite		Invest4Life	Terre d'Avenir
Assureur	Axa	Axa		Allianz	La Mondiale
Date de lancement	Mai 2007	Juillet 2008		Novembre 2008	Janvier 2009
Type de contrat		Collectif		Individuel	Collectif
Garanties proposées	GMWB avec garantie plancher (GMDB).	GMWB-L		GMWB-L et GMDB	GMWB-L et GMDB
Versement initial	PU de montant minimal de 30000 €	Différé	Montant	PU à partir de 30000 €	Minimum 100 k€
		2-4 ans	30 k€		
		5-10 ans	15 k€		
		11-30 ans	10 k€		

Versements complémentaires (VL=libre, VR=Réguliers)	Pas de versements complémentaires	VL= 480 € min VR= 250 € min/mois. Ces versements augmentent la benefit base.	Pas de VL, ni de VR.	VL= 5000 €. Les VL augmentent la benefit base.																				
Age de souscription	Entre 25 et 75 ans (en l'absence de différé, 70 ans maximum si différé).	Entre 25 et 73 ans.	Entre 43 et 75 ans	Entre 45 et 75 ans																				
Différé (phase d'accumulation avant le 1^{er} revenu garanti)	Nul ou de 4 ans	2 à 30 ans	0 à 15 ans	Déclenche des revenus à partir de 60 ans																				
Frais d'entrée	4, 85% de la prime versée		4,5% de la prime versée																					
Frais de gestion (hors garantie financière)	0,96% sur encours annuel; 1% sur les arbitrages en gestion libre	0,96% de l'encours par an.	0,99% de l'encours par an	0,96% de l'encours par an																				
Tarif des garanties financières	Tarif annuel de la garantie, en % de la prime nette investie: - 0.5% de la prime nette investie en l'absence de différé ; - 0.4% pour un différé de 4 ans.	Tarif, en % des primes nettes, pour la garantie GLWB cliquet (distribution) et garantie roll-up (accumulation). Fonction de la part action uniquement.	Tarif, en % de l'encours, pour la GLWB cliquet (distribution et accumulation) et garantie plancher. Fonction de la part action, du sexe, de l'âge à la souscription et du différé. <u>Tarif homme :</u>	Tarif, en % de l'encours, pour la GLWB cliquet (distribution et accumulation) et garantie plancher. Fonction de la part action, du sexe et de l'âge à la fin du différé. <u>Fin différé à 60 ans:</u>																				
		<table border="1"> <thead> <tr> <th>% action</th> <th>Frais</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>50%</td> <td>1,40%</td> </tr> <tr> <td>60%</td> <td>1,9%</td> </tr> <tr> <td>70%</td> <td>2,4%</td> </tr> </tbody> </table>	% action	Frais	50%	1,40%	60%	1,9%	70%	2,4%	<table border="1"> <thead> <tr> <th>% action</th> <th>Frais (%)</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>50%</td> <td>0,49-1,94</td> </tr> <tr> <td>75%</td> <td>0,68-2,91</td> </tr> </tbody> </table>	% action	Frais (%)	50%	0,49-1,94	75%	0,68-2,91	<table border="1"> <thead> <tr> <th>% action</th> <th>Frais</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>20%</td> <td>0,75 %</td> </tr> <tr> <td>40%</td> <td>1,25</td> </tr> </tbody> </table>	% action	Frais	20%	0,75 %	40%	1,25
% action	Frais																							
50%	1,40%																							
60%	1,9%																							
70%	2,4%																							
% action	Frais (%)																							
50%	0,49-1,94																							
75%	0,68-2,91																							
% action	Frais																							
20%	0,75 %																							
40%	1,25																							

				<table border="1"> <tr> <td></td> <td>%</td> </tr> <tr> <td colspan="2"><u>Fin différé à 65 ans:</u></td> </tr> <tr> <td>% action</td> <td>Frais</td> </tr> <tr> <td>20%</td> <td>0,5%</td> </tr> <tr> <td>40%</td> <td>0,75%</td> </tr> <tr> <td>60%</td> <td>1,25%</td> </tr> </table>		%	<u>Fin différé à 65 ans:</u>		% action	Frais	20%	0,5%	40%	0,75%	60%	1,25%
	%															
<u>Fin différé à 65 ans:</u>																
% action	Frais															
20%	0,5%															
40%	0,75%															
60%	1,25%															
Type de gestion	-Gestions profilées (avec réajustement annuel gratuit) - Choix parmi une gamme de fonds	Choix parmi 3 mandats de gestion et une gestion libre.	Choix d'un fonds profilés parmi 2 Proposés	Choix du fonds profilé selon l'âge de fin de différé (60/65 ans).												
Supports d'investissement	L'allocation d'actifs peut comporter un fonds en euro (minimum 30% de l'allocation), des fonds obligataires (maximum 20% de l'allocation) et des fonds actions (maximum 50% de l'allocation) ;	Mandat par défaut : 40% fonds euro, 10% obligations et 50% actions. Mandats 60% et 70% actions possibles	2 fonds (actions Internationales et obligation européenne) <table border="1"> <tr> <td>Fonds</td> <td>Actions</td> </tr> <tr> <td>Strategy 50</td> <td>50%</td> </tr> <tr> <td>Strategy 75</td> <td>75%</td> </tr> </table>	Fonds	Actions	Strategy 50	50%	Strategy 75	75%	3 profils de gestion : Prudent : 20% Actions / 80% Obligations Equilibré : 40% Actions / 60% Obligations Dynamique : 60% Actions / 40% Obligations.						
Fonds	Actions															
Strategy 50	50%															
Strategy 75	75%															
Possibilité d'arbitrage	Possibilité d'arbitrer entre les supports tant que les pondérations des classes d'actifs restent dans les limites prévues par le contrat.	Pas d'arbitrage possible à l'initiative de l'assuré	Arbitrage de Strategy 75 vers 50 (tarif garantie inchangé). Autre sens interdit	Arbitrage gratuit (max. 12/an)												
Assiette de calcul des	Maximum entre la prime investie	Valeur de l'épargne atteinte à la fin du différé, rehaussée si nécessaire par la garantie cliquet ou TMG														

revenus (benefit base)	nette de frais et la valeur de l'épargne à la fin du différé. Cela correspond à une revalorisation avec un TMG nul. En l'absence de différé, la benefit base est égale à la prime nette.				
Garantie sur l'épargne en phase d'accumulation		TMG : l'assiette de 1 ^{er} retrait est supérieure aux versements nets capitalisés à 2%	Cliquet annuel : l'assiette de calcul du 1 ^{er} revenu garanti est égale à la plus haute valeur constatée		
Revenus garantis à l'issue de la phase d'accumulation	-6% de l'épargne pendant 5 ans; -7% pour les dix années suivantes.	Fin différé	Taux	Taux fixe : 4%	Taux fixe : 4,5%
		55 ans	3,5%		
		60 ans	4%		
		65 ans	4,5%		
		70 ans	5%		
		75a ans	5,5%		
Revalorisation de BB (phase distribution)		Cliquet tous les 5 ans	Cliquet tous les ans	Cliquet tous les 3 ans	

I.2. Caractéristiques des produits commercialisés sur le marché américain:

Ici, nous présenterons de manière unifiée les caractéristiques essentielles des produits disponibles sur le marché américain.

Tableau 6 : Les produits commercialisés sur le marché américain:

	GMWB	GMWB-L
Revenus garantis	Entre 5% et 7%	<p>Entre 3.5% et 6% mais avec des formulations variables :</p> <ul style="list-style-type: none"> - Généralement, le taux dépend de l'âge du début des retraits; - Le taux peut être fixe mais sa valeur dépend d'un âge cible ; - Le taux peut être fixe mais sa valeur dépend d'un âge cible l'engagement (5% si 1 tête, 4,75% si 2 têtes) ; - Un produit comprend une garantie originale : le pourcentage de retrait est doublé si l'assuré (ou son épouse) est hospitalisé pendant une certaine durée.
Option de revalorisation de la benefit base	Généralement cliquet annuel pendant une durée limitée (par exemple jusqu'à 85 ans ou pendant les 12 premières années du contrat).	<p>Différentes formulations:</p> <ul style="list-style-type: none"> -absence de revalorisation; - TMG, généralement de 6% pendant les 10 premières années du contrat ; - Cliquet généralement annuel et qui s'arrête au 91^e anniversaire
Tarif des garanties	entre 0.55% et 0.85% de l'épargne	Entre 0.85% et 1.50% de l'encours.

En analysant les deux offres, il apparaît que les produits disponibles sur le marché US comportent des caractéristiques supplémentaires par rapport aux produits français. Par exemple, ils proposent des taux de retrait variables en fonction de l'âge, des rentes avec mécanisme de réversion et des garanties de la revalorisation de la benefit base si l'assuré accepte de renoncer à certains revenus garantis.

Ce signe de maturité permet d'offrir un niveau de tarif acceptable.

II. Cadre réglementaire et fiscal:

II.1. Cadre réglementaire:

Le code des assurances marocain ne prévoit pas de cadre réglementaire pour les produits «variable annuities» puisqu'ils ne sont pas encore lancés sur le marché marocain. Mais étant donné que ces derniers sont des produits d'assurance en unités de compte assortis de garanties de capital et de revenus, nous serons donc amenés à chercher de quelle manière ces produits pourraient s'appuyer sur la réglementation des unités de compte.

Pour rappel, les produits en unités de compte sont des contrats d'assurance sur la vie ou de capitalisation. Les primes émises sont exprimées en unité de compte, autrement dit en valeurs mobilières (au Maroc: OPCVM). L'épargnant peut donc espérer des performances nettement supérieures aux contrats vie traditionnels. En revanche, le risque est entièrement à sa charge, puisqu'il n'y a généralement pas de rendement technique minimum garanti.

Le projet de réglementation proposé par la DAPS ressemble de près aux dispositions actuellement en vigueur en France. Une attention particulière a été accordée à l'obligation d'information de l'assuré.

Compte tenu de la spécificité des risques inhérents à ce type de contrats, la DAPS communique un certain nombre de règles à respecter en matière d'information tant au niveau des documents (qui doivent spécifier la nature du contrat proposé) que de la police d'assurance. Celle-ci doit définir de manière précise la nature de la valeur de référence choisie (qui est constituée par une ou plusieurs unités de compte), les mécanismes qui lient la valeur de référence et les opérations prévues dans le contrat, la date de la conversion des primes en unités de compte, etc. Par ailleurs, l'évolution de la valeur de référence et de la garantie doit être communiquée à l'assuré (lorsque la valeur baisse de manière brutale, l'assuré doit en être immédiatement informé)¹.

II.2. Fiscalité:

Au Maroc, il existe deux cadres fiscaux pour l'assurance des personnes:

- La fiscalité retraite complémentaire;
- Et la fiscalité assurance-vie.

C'est la classification du contrat d'assurance qui détermine sa fiscalité; aussi peut-on soumettre les produits « variable annuities » au cadre fiscal de la retraite complémentaire.

Ainsi, il est sans doute nécessaire de développer pour ces contrats, un cadre fiscal adéquat.

III. Définition du produit et des garanties:

Nom commercial: VITAL RETRAITE OPTIMALE.

''Avec **Vital Retraite Optimale**, disposez des compléments de ressources garantis tout en dynamisant votre épargne en cours.

Avec **Vital Retraite Optimale**, vivez votre retraite de la manière la plus optimale. Vivre confortablement votre retraite''.

Nature et objet du contrat:

¹ Les articles sont présentés en annexe.

VITAL RETRAITE OPTIMALE est un produit variable annuités: une nouvelle génération de produits d'épargne retraite en UC, combinant différentes garanties (en cas de vie et /ou de décès) portant sur le capital afin de sécuriser votre épargne.

VITAL RETRAITE OPTIMALE allie sécurité et performance. En effet, ce produit permet à l'assuré de constituer un complément de retraite pour pallier aux insuffisances des régimes de base en réalisant un rendement nettement supérieur à celui des contrats en dirhams, tout en se prémunissant contre les turbulences des marchés financiers.

Ce produit garantit à l'assuré un capital minimal en cas de retraits effectués sur le contrat, quelle que soit la performance des marchés financiers; une fois que la valeur de l'épargne est épuisée, se déclenche une garantie de rente viagère.

Garanties proposées: GMWB-L avec une garantie décès plancher (GMDB).

La durée du contrat est viagère et son fonctionnement s'articule en trois phases:

Tableau 7 : La fiche du produit VITAL RETRAITE OPTIMALE

Phases du contrat	Garanties spécifiques
Phase d'accumulation	-Revalorisation de l'assiette de calcul du montant des retraits partiels périodiques: TMG de 2% annuel ; -Garantie décès plancher.
Phase de retraits partiels programmés	-Garantie d'un taux minimum de retraits partiels: 4% du maximum entre l'épargne et la benefit base; -Cliquet pour revaloriser la benefit base: tous les 5 ans ; -Garantie décès plancher.
Phase de rente viagère	-Garantie d'une rente viagère de montant égal à celui du dernier retrait partiel programmé.

Spécificités du produit:

Type de contrat	Individuel
Cible	Clientèle aisée: professions libérales, indépendants, patrimoniaux riches.
Age de souscription	entre 40 et 60 ans
Versement initial	PU à partir de 350 000 dhs
Age de service des RPP	65 ans
Durée du différé	entre 5 et 25 ans (en fonction de l'âge d'adhésion)

Supports d'investissement	Mêmes supports que Vital Retraite Multisupport. (voir annexe 5)
Mode de gestion	Choix entre les profils de placements établis pour VMS, avec possibilité d'arbitrage.
Rachats	En phase d'épargne: possibilité de racheter partiellement ou totalement son contrat, mais avec pénalités et réduction de la benefit base.
Fiscalité	Fiscalité de retraite complémentaire.

Conclusion de la partie I:

Nous avons vu dans la partie I qu'il existait un réel besoin pour les marocains de se constituer une épargne retraite complémentaire. L'offre actuelle de produits ne semble pas répondre totalement aux attentes des clients potentiels, notamment pour les raisons suivantes :

- La crise financière observée en 2008 catalyse ces aspects et met en exergue l'absolue nécessité de pouvoir bénéficier de garanties, non plus seulement en cas de décès, mais également en cas de vie, sur le capital et les revenus des contrats.
- Les produits d'épargne retraite proposés par les assureurs sont similaires et présentent des limites tant en termes de garanties proposées, qu'en termes de souplesse et de restitution de l'épargne.
- Les contrats en dirhams offre un rendement faible causé par la baisse des taux des bons de Trésor et les unités de compte proposées ne présentent aucune garantie de capital (exceptée la garantie plancher).
- La situation financière des régimes de retraite au Maroc et les conséquences sur le niveau anticipé des pensions actuellement liquidées témoigne du risque des dispositifs investis principalement en actifs risqués sans protection ;
- Les épargnants marocains n'ont pas cette culture de prise de risque et préfèrent investir dans des produits sécurisés à faible rentabilité plutôt que des produits risqués rentables mais risqués.

Un produit individuel d'épargne retraite proposant des annuités garanties, prévoyant le versement du capital restant en cas de décès ou de besoin, et bénéficiant d'une revalorisation plus attractive sur le long terme que les contrats en dirhams lors de la phase de constitution de l'épargne, pourrait constituer une alternative réelle aux produits existants. Les contrats avec garanties GMWB et GLWB sont ainsi parvenus à drainer depuis leur apparition au début des années 2000 aux États-Unis¹ une épargne importante.

¹ Les contrats variable annuités représentaient 67% de la collecte aux États-Unis en 2006, dont les trois-quarts étaient réalisés sur des garanties GMWB (source: LIMRA 2006). L'encours de ces contrats dépasserait les 1 400 milliards de dollars à la mi-2008 même si la collecte s'est contractée de 25% sur les 9 premiers mois de l'année 2009 en raison de la crise.

Deuxième partie: Modélisation et Pricing du produit

Introduction:

Dans la partie précédente, nous avons étudié les besoins actuels du marché marocain de la retraite en nous appuyant sur un état des lieux de celle-ci. Puis, pour répondre à ces besoins, nous avons conçu un produit de type GMWB et GMWB-L avec une garantie décès plancher.

Cette deuxième partie sera donc naturellement consacrée à la modélisation actuarielle et financière de notre produit, à la détermination du tarif (en prime pure et commerciale) et à l'étude de la sensibilité du prix des garanties aux paramètres financiers et actuariels ainsi qu'aux différentes variantes du produit.

Pour ce faire, nous présenterons le cadre unifié de toute la modélisation. Ensuite, l'application numérique sera scindée en deux: une évaluation du tarif d'un scénario central (en faisant des hypothèses sur les paramètres actuariels et financiers) et une évaluation de sensibilité du tarif suite à la modification de certains paramètres et variantes du produit.

Chapitre 6: Logique financière des garanties GMWB et GMWB-L et cartographie des risques

Ce chapitre se fixe pour objectif d'entamer la modélisation des garanties GMWB et GMWB-L en les présentant d'un point de vue financier; et ainsi de s'appuyer sur cela pour faire la cartographie des risques dont nous serons confrontés dans la tarification de ces garanties.

I. Les garanties GMWB et GMWB-L d'un point de vue financier:

Dans le cadre des garanties GMWB/GMWB-L, l'assureur verse des prestations lorsque:

- l'épargne du contrat chute fortement et ne permet plus d'assurer les revenus garantis;
- l'assuré vit plus longtemps que prévu sans que la performance des marchés financiers ne permette de compenser cet accroissement de la longévité.

D'une manière générale, les garanties GMWB/GMWB-L peuvent être décomposées comme des sommes pondérées par les probabilités de décès et de rachat de puts européens de différentes maturités écrits sur un sous-jacent discontinu. Ces puts européens sont conditionnés aux valeurs antérieures du sous-jacent dans la mesure où le payoff est connu si l'épargne est nulle à la date antérieure. Le strike est égal au montant de revenu garanti (RPP).

L'assuré est acheteur d'options de vente et l'assureur est vendeur de ces options.

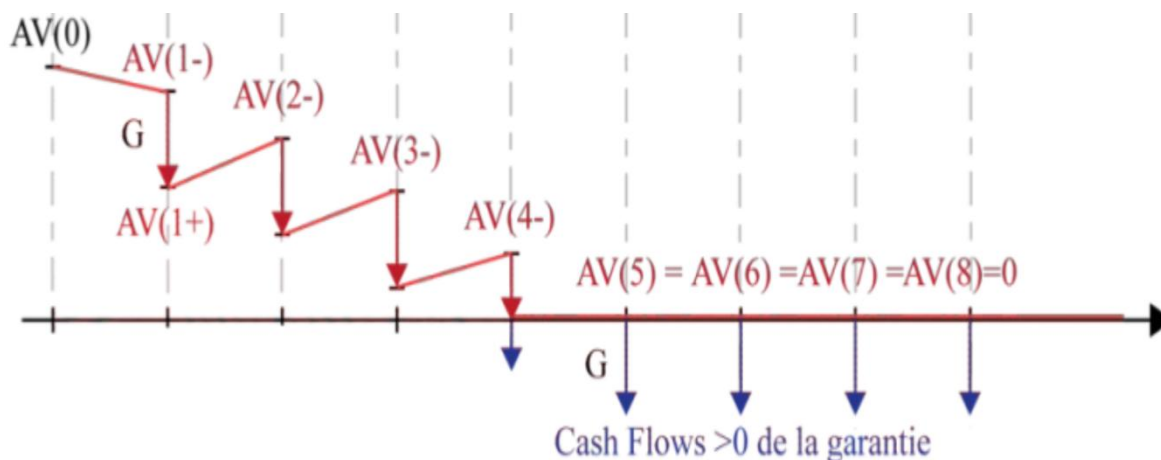
Par exemple, nous considérons un produit assurant des revenus garantis constants G et retirés systématiquement à chaque date anniversaire ($t \in N$). Nous supposons que le sous-jacent S_t sur lequel est investie l'épargne AV_t suit un processus de Black & Scholes. Le marché est supposé parfait et sans opportunité d'arbitrage. La mortalité et les rachats sont supposés déterministes. Les frais sont prélevés d'un seul coup au moment de la souscription.

Le flux à la date T_p est celui d'un put européen de strike G , écrit sur le sous-jacent AV_{T_p} :

- Le payoff est nul si la garantie ne s'active pas en T_p (période de différé par exemple);
- Si la garantie s'active en T_p , le payoff de la garantie est compris entre $[0, G]$ (en effet, $Max(G - AV_{T_p}, 0) = 0$ si $AV_{T_p} \geq G$ et $Max(G - AV_{T_p}) = G$ si $AV_{T_p} = 0$);
- Une fois que la garantie s'est activée (par exemple en $T_p + 1$), tous les puts de maturités $t > T_p + 1$ ont un payoff certain égal à G puisque $AV_t = 0$.

Même dans ce cas simple, il n'existe pas de formule fermée pour le prix du put en raison des sauts de l'épargne. L'évolution de cette dernière est donnée par la figure suivante:

Figure 17 : Evolution de l'épargne dans le cas discret



En supposant le comportement de l'assuré déterministe, nous en déduisons que le comportement financier des garanties GMWB/GMWB-L présentent des similarités avec celui d'un portefeuille d'options de vente européennes.

II. Cartographie des risques liés aux Variable Annuities:

Avec ses garanties alléchantes, les Variable Annuities deviennent de plus en plus attractifs pour les assurés tout en faisant peser un risque certain sur les compagnies d'assurance.

D'une manière globale, nous pouvons distinguer quatre classes de risques auxquels sont exposés les Variable Annuities.

Tableau8 : Risques liés aux VA

Risques financiers	Risques actuariels	Risque opérationnel	Risque de défaut
Valeur de l'épargne (delta)	Risque de mortalité (GMWB)		
Volatilité (Vega)	Risque de longévité (GMWB-L)		
Valeur des taux (rhô)	Rachat total		
Corrélations entre supports	Rachat partiel		

II.1. Risques actuariels:

Ces risques comprennent à la fois les risques démographiques tels que le risque de mortalité et le risque de longévité mais également le risque de rachats (risque du comportement des assurés).

II.1.2. Risque de mortalité:

Ce risque, potentiellement mutualisable, traduit l'écart entre l'évolution réelle de la mortalité et la table utilisée pour effectuer la tarification et le provisionnement. Ainsi, la garantie GMWB comporte un risque de mortalité dans la mesure où le versement du capital est lié à la date de décès de l'assuré.

II.1.3. Risque de longévité:

Ce risque concerne au contraire les garanties en cas de vie de l'assuré telles que la GMWB for Life... Ces types de contrat comportent un risque lié à la longévité de l'assuré dans la mesure où les flux ou le capital à verser à ce dernier dépendront de sa durée de vie.

II.1.4. Risque de rachats:

Le comportement de rachat de l'assuré constitue un facteur difficile à appréhender et à modéliser puisqu'il peut résulter d'un grand nombre de facteurs explicatifs, ou dans certains cas d'un comportement irrationnel. Ce risque concerne l'ensemble des garanties des Variable Annuities, plus particulièrement les garanties prévoyant des rachats partiels (GMWB et GMWB for Life). Ce risque complexifie la détermination du tarif et la gestion des risques de la garantie.

II.2. Risques liés aux arbitrages entre fonds:

Pour des investissements de long terme, ne pas pouvoir modifier l'allocation d'actifs peut poser un problème d'efficacité pour l'assuré (et donc un inconvénient pour la réussite commerciale du produit). Les arbitrages à la main de l'assuré sont cependant difficiles à gérer puisqu'ils peuvent modifier le profil de risque de la garantie.

Si l'assuré opte pour une allocation plus risquée, le tarif de la garantie sera augmenté mécaniquement. Cependant, appliquer le tarif de la nouvelle allocation ne permet pas nécessairement à l'assureur de disposer des frais suffisants pour honorer ses engagements. Le plus simple consisterait à traiter ce cas de figure comme un nouveau contrat (tarification et niveau des garanties en vigueur au moment de l'arbitrage), en conservant l'antériorité fiscale.

II.3. Risques financiers:

II.3.1. Risque lié au niveau de l'épargne:

Par construction, le delta des garanties GMWB / GMWB-L est toujours négatif, ce qui signifie que le coût de la garantie augmentera lorsque la valeur du sous-jacent diminuera.

Cette conclusion reste valable lorsque les frais sont prélevés au fur et à mesure de la vie du contrat puisque ceux-ci sont proportionnels à la valeur de l'épargne et contribuent négativement au calcul du delta de la valeur de la garantie.

En cas de convexité trop importante du passif, l'assureur devra être très attentif au gamma (toujours positif) afin de contrôler la vitesse de variation du delta et de couvrir ce risque.

II.3.2. Risque lié à la volatilité de l'épargne:

Le vega est positif, ce qui signifie qu'une augmentation de la volatilité de l'épargne conduit à une augmentation du coût de la garantie.

Le coût de la garantie sera d'autant plus sensible à la volatilité que la maturité des options est importante. En effet, la contribution de l'option supplémentaire rajoutée dans la décomposition de la garantie aura une contribution élevée en vega.

Lorsque la maturité résiduelle de la garantie diminue, le nombre d'options diminue ainsi que le vega de chacune des options restantes. Toutes choses égales par ailleurs, nous pouvons donc en déduire que la sensibilité à la volatilité sera plus faible lorsque le temps passe.

Dans le cas d'un mandat de gestion ou d'un fonds à volatilité capé, l'assureur peut modifier l'allocation d'actifs afin de réduire l'exposition aux actifs risqués lorsque les conditions de marché deviennent très volatiles (et inversement).

II.3.3. Risque de taux:

Le rho est négatif, c'est à dire que le coût de la garantie augmente lorsque les taux d'intérêts diminuent (uniformément).

Pour un niveau de référence de taux et de volatilité, la valeur absolue du rho d'une option décroît avec la maturité (que l'option soit dans la monnaie ou hors de la monnaie). Nous pouvons en déduire que la sensibilité de la garantie par rapport au taux d'intérêt diminue avec le temps.

Lorsque la garantie est activée, le risque de taux est le seul risque financier résiduel à la charge de l'assureur.

Remarque : même si l'inflation n'intervient pas dans la revalorisation du montant de revenus garantis (pourcentage fixe), elle aura un impact sur le niveau des taux d'actualisation et sur la valeur de l'épargne. Nous ne traiterons pas cette problématique dans la suite du mémoire.

II.3.4. Risque de corrélation entre les actifs:

La structure de dépendance entre actifs impacte le coût et la sensibilité des garanties. La modélisation de la corrélation est un point crucial des modèles d'actifs.

II.3.5. Risque de liquidité:

La crise a démontré qu'il était nécessaire de veiller au risque de liquidité. Ce risque peut intervenir au moins à 4 niveaux pour les garanties de revenus :

- Les programmes de couverture peuvent faire intervenir des produits dérivés négociés sur des marchés peu profonds ou de gré à gré. Il est préférable de privilégier, dès que possible, les actifs liquides (les coûts de transaction seront par ailleurs moins élevés);
- La gestion des appels de marge vis-à-vis des contreparties sur les produits dérivés ;
- Le coût d'emprunt des titres qui peut fortement augmenter en cas de stress des marchés et qui a un impact direct sur le coût de la couverture (l'assureur étant short sur le sous-jacent dans le cadre de la couverture du delta);
- Le comportement de l'assuré (décès, rachat partiel, rachat total) peut provoquer des décaissements différents des décaissements anticipés. L'assureur peut devoir céder des actifs ou augmenter le niveau de sa couverture dans un contexte financier adverse.

II.4. Risque de défaut:

Afin de pouvoir honorer le versement de ses engagements dus à l'assuré, et dans le cadre de la gestion de ses actifs et la constitution d'un portefeuille de couverture, l'assureur conclut différents contrats avec un certain nombre de contreparties: pour le fonds support d'une part (Etats émetteurs d'obligations, entreprises), mais aussi pour l'acquisition d'options

financières nécessaires par exemple pour la couverture (swaps, options,...) avec des institutions bancaires d'investissement. Le risque de défaut désigne le risque que la contrepartie avec laquelle un contrat a été conclu ne tienne pas ses engagements (livraison, paiement, remboursement,...).

Des procédés de couverture contre ce risque existent, avec notamment les CDS (Credit Default Swap), mais cette stratégie génère un coût supplémentaire pour l'assureur.

Ce risque comprend les conséquences d'une dégradation de la notation des émetteurs obligataires ou de crédits sur lesquels l'épargne a été investie ainsi que les possibles défaillances du réassureur ou des contreparties des produits dérivés achetés pour assurer la couverture de la garantie. Ce dernier risque peut être partiellement maîtrisé en exigeant la mise en place systématique de collatéraux ou en utilisant des produits gérés par des chambres de compensation

II.5. Risque opérationnel:

Les Variable Annuities introduisent un large champ de risques opérationnels (risque de pricing ou de modèle qui traduit l'incapacité du modèle développé à prédire les lois régissant la valeur de marché du fonds; risque lié à la mise en place d'un nouveau programme de couverture, risques liés à leur gestion et à leur commercialisation).

Le risque opérationnel regroupe l'ensemble des risques touchant la mise en œuvre des stratégies financières (erreur de calcul dans les couvertures, erreur dans les opérations de marché, non déclenchement d'un rebalancement du portefeuille de couverture...), la défaillance éventuelle des systèmes de gestion, la structure de rémunération des distributeurs...

Dans la suite, nous nous intéresserons particulièrement aux risques actuariels et financiers.

Ces risques encourus doivent être identifiés, quantifiés et maîtrisés. La gestion des risques est réalisée:

- A priori : via la définition des garanties du produit, la tarification, la mise en place des couvertures (réassurance, hedging financier).
- A posteriori : via une politique d'actifs et un suivi de la couverture et un calcul des provisions et du besoin de capita

Chapitre 7: Cadre de modélisation

La modélisation des produits Variable Annuities est un peu délicate. Les méthodes déterministes d'évaluation ne sont pas adaptées pour ce type de produits car elles ne tiennent pas compte des risques financiers qu'ils présentent. Par conséquent, une évaluation juste et cohérente en fonction de la réelle exposition au risque ne peut être obtenue que par des projections sur la base d'une approche stochastique.

En l'absence de formules fermées, nous nous orientons donc vers des simulations de Monte Carlo pour déterminer le coût des garanties de revenus. La méthode de Monte Carlo présente l'avantage d'être applicable à l'ensemble des variantes de la garantie et permet de mesurer l'impact des modèles d'actifs sur la tarification et la gestion du risque. Elle devrait par ailleurs se révéler plus rapide en termes de mise en œuvre informatique.

D'une manière générale, toute modélisation stochastique d'une activité d'assurance comprend un modèle d'actif, un modèle de passif et un modèle d'interactions entre actifs et passifs ; plusieurs modèles stochastiques sont donc nécessaires.

I. Notations:

Les évènements (retraits, prélèvement des frais...) surviennent en temps discret.

- Nous définissons l'échelle de temps, pour $k \in [0; N.T]$:

$$t_k = \frac{k}{N}$$

Où :

- N: est la périodicité dans l'année de la mortalité et des rachats (N=1 car les décès et les rachats sont considérés dans notre étude comme étant des évènements annuels);
- T: est la somme de la durée du différé et de la durée de la phase des RPP.

Remarque: N est désigné par N_model dans le programme Matlab.

-Le pas de temps de la simulation sera égal à $\Delta_t = t_{k+1} - t_k = \frac{1}{N}$ (1 an dans notre cas).

La garantie GMWB est caractérisée par un vecteur d'état, c'est-à-dire un ensemble de variables aléatoires permettant de décrire les flux de la garantie. On note X_t ce vecteur d'état:

$$X_t = (AV_t, BB_t, G_t, G_t^W, C_t^W, F_t, G_t^D, C_t^D)$$

Avec:

- AV_t : valeur de l'épargne à la date;
- BB_t : base de calcul des retraits garantis à la date t (Benefit base);
- G_t : retrait réalisé à la date t par l'assuré;
- G_t^W : montant total de revenus garantis restant à effectuer à la date t;

- C_t^W : prestations payées par l'assureur à la date t au titre de la garantie GMWB;
- F_t : frais payés à la date t par l'assuré au titre des frais des garanties;
- G_t^D : montant annuel garanti à la date t en cas de décès dans le cadre de la GMDB;
- C_t^D : prestations payées par l'assureur à la date t au titre de la garantie GMDB.

Le vecteur d'état des garanties GMWB-L se simplifie par rapport à celui de la GMWB puisque la variable G_t^W n'apporte pas d'information ($G_t^W = +\infty$ pour tout t par définition).

La valeur des variables d'état dépend de l'évolution des marchés financiers, de la stratégie de retrait et de la date de sortie de l'assuré. Elles sont discontinues (par exemple à l'occasion d'un retrait à la date t_k) ce qui nécessite de distinguer leurs valeurs en t_k^- (avant prélèvement des RPP, des frais de gestion et d garanties) et t_k^+ (après prélèvement des RPP, des frais de gestion et d garanties).

Nous définissons la chronique des flux de la garantie qui contient 2 périodes distinctes:

- $t_k \in [0, d]$: une période de constitution de l'épargne de durée d (appelée aussi différé ou encore phase d'accumulation). Au cours de cette période, les retraits éventuels ne sont pas garantis et s'apparentent à des rachats partiels. Selon la formulation du produit, l'assuré peut avoir l'option de choisir un différé nul;
- $t_k \in [d, d + T]$: c'est la phase de distribution (appelée aussi période de mise à disposition des revenus garantis). L'assuré effectue son premier retrait à la fin de la période $[d, d + 1]$. Lorsque l'épargne devient nulle, la garantie de rente viagère s'active.

La revalorisation de la benefit base n'a lieu que si la date t_k correspond à une date où la garantie cliquet / TMG peut se déclencher.

Nous supposons que:

- le modèle utilise un pas de temps annuel $\Delta_t = \frac{1}{N} = 1$ pour simuler les scénarios d'actifs;
- les rachats et les décès surviennent à chaque pas de temps du modèle et sont comptabilisés en fin de période;
- les retraits de revenus garantis et les prélèvements sont opérés sur une échelle $N_{_even} = 1$;
- les garanties cliquets et TMG ont leur échelle de temps spécifique (respectivement $N_{_revalorisation_a}$ et $N_{_cliquet_d}$).

II. Modélisation de l'actif:

II.1.Choix du taux sans risque:

Parmi les hypothèses du modèle de Black & Scholes, le taux sans risque r est constant et fixe quelle que soit la maturité du produit dérivé. Le premier problème qui se pose ; quel est le meilleur taux sans risque que nous devons choisir ?

La plupart des littératures font appel aux Taux d'Emprunt de l'État (TME). En revanche, dans notre cas, il est plus pertinent d'utiliser 70% du TME afin d'être plus prudent.

II.2.Modélisation de l'épargne:

Dans cette section, nous supposons que le contrat d'assurance comporte deux supports OPCVM : **un support action (SG Expansion), un support obligataire (SG Oblig Plus)**, et que la prime versée est répartie entre ces deux.

Le choix de ces deux supports s'est sur le calcul de rentabilité, de volatilité historique et de la corrélation entre ces supports. Les résultats seront exposés dans l'application numérique (chapitre 8).

II.2.1Support Action:

II.2.1.1.Modèle et discrétisation

Le support financier est assimilé à une action. Le modèle utilisé pour modéliser les actions est le modèle de Black et Scholes avec un taux d'intérêt constant¹ et volatilité constante. Ce type de modèle sous-estime l'occurrence des cas extrêmes et conduit à minimiser la fréquence de déclenchement (ainsi que le coût) de la garantie.

La dynamique du sous-jacent S_t sous la probabilité risque neutre Q est donnée par le processus stochastique suivant :

$$dS_t = \mu S_t + \sigma_s S_t dZ_t$$

Où μ représente l'espérance de rentabilité des actions

σ_s est la volatilité de l'action supposée constante

Z_t est un mouvement brownien standard sous la probabilité historique P.

Le rendement espéré de l'action correspond au taux sans risque auquel une prime de risque λ est ajoutée : $\mu = r + \lambda$. Par simplification cette prime est supposée constante au cours du temps.

En appliquant le Lemme d'Itô, sous la probabilité historique P, la solution de l'équation aux dérivées partielles est donnée par :

$$S_t = S_0 \exp \left(\left(\left(\mu - \frac{\sigma_s^2}{2} \right) t + \sigma_s Z_t \right) \right)$$

$$\text{On en déduit que : } \ln \frac{S_t}{S_0} = \left(\mu - \frac{\sigma_s^2}{2} \right) t + \sigma_s Z_t$$

¹ Voir section précédente.

Comme Z_t est un mouvement brownien géométrique standard, on sait qu'il suit une loi normale centrée d'écart-type \sqrt{t} .

Par conséquent, $\ln \frac{S_t}{S_0}$ suit une loi normale d'espérance $\left(\mu - \frac{\sigma_s^2}{2} \right) t$ et d'écart-type $\sigma_s \sqrt{t}$. On en conclut que la volatilité d'une action est l'écart-type des rentabilités sur une période donnée.

II.2.1.2.Étalonnage du modèle

Nous supposons que le sous-jacent est un OPCVM de catégorie actions (**SG Expansion**), de nature juridique SICAV et de périodicité de cotation hebdomadaire.

Nous abordons dans cette partie la volatilité et la prime de risque.

➤ *Estimation de la volatilité*

Ily a deux types de volatilité : la volatilité historique et la volatilité implicite. La première reflète ce qui s'est passé ; on peut l'estimer mathématiquement sur la base d'une distribution statique. Alors que La volatilité implicite est estimée par le marché. On la retrouve dans la détermination du prix des options. Il n'existe aucune formule mathématique donnant son expression et chaque émetteur des options suit sa propre théorie.

Dans cette étude, nous utilisons la volatilité historique annualisée. En effet, à partir d'un historique des cours d'un support défini, nous estimons la volatilité par jour de cotation comme étant l'écart-type des rentabilités (exprimées en taux composé continu) sur une durée donnée, puis nous annualisons cette volatilité en la multipliant par la racine de nombre de jours ouvrables de cotation par ans :

$$\text{vol. annuelle} = \text{vol}/j \text{ de cotation} \times \sqrt{\text{nbr de j de cotation/an}}$$

Afin d'estimer la volatilité de notre support (**SG Expansion**), des relevés de cours hebdomadaires sont nécessaires.

On note :

$n + 1$ le nombre d'observations

S_i le cours de l'action au terme du $i^{\text{ème}}$ intervalle de temps

τ la durée des intervalles de temps en années

On pose :

$$u_i = \ln \frac{S_i}{S_{i-1}} \text{ pour } i = 1, \dots, n$$

L'estimation s de l'écart-type des u_i est donnée par la formule :

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (u_i - \bar{u})^2} \quad \text{où } \bar{u} \text{ est la moyenne des } u_i$$

L'écart-type des u_i étant égal à $\sigma_s \sqrt{\tau}$, la variable s est donc un estimateur de $\sigma_s \sqrt{\tau}$.

L'estimateur de σ peut être faite par $\hat{\sigma}_s = \frac{s}{\sqrt{\tau}}$.¹

➤ **Estimation de la prime de risque:**

L'évaluation sous probabilité risque neutre Q signifie que tous les actifs ont pour rendement le taux sans risque. Lorsque nous nous intéresserons à la distribution réelle des paiements futurs (ALM, gestion du capital économique, backtesting...), nous utiliserons des projections des actifs sous la probabilité historique P .

Nous cherchons ici à estimer la prime de risque définie comme étant l'écart entre le rendement du support action et le taux sans risque. Pour simplifier l'estimation, nous supposons que le rendement de notre support est constant.

Comme $\ln \frac{S_t}{S_0}$ suit une loi normale d'espérance $\left(\mu - \frac{\sigma_s^2}{2} \right) t$ et d'écart-type $\sigma_s \sqrt{t}$,

avec les mêmes notations que précédemment, on sait que $\bar{u} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n u_i = \frac{1}{n} \ln \frac{S_i}{S_{i-1}}$ est un

estimateur de $\left(\mu - \frac{\sigma_s^2}{2} \right) \tau$. On en déduit donc que $\hat{\mu} = \frac{\bar{u}}{\tau} + \frac{\hat{\sigma}_s^2}{2}$ est un estimateur de μ .

Une fois connue l'estimation du rendement de l'action, l'estimation de la prime de risque est obtenue en ôtant un taux d'intérêt sans risque.

II.2.2.Support obligataire :

Dans les parties précédentes, nous avons vu la modélisation du support action et le choix du taux sans risque :

$$dS_t = \mu S_t + \sigma_s S_t dZ_t$$

Nous supposons que le sous-jacent est un OPCVM obligataire (**SG Oblig Plus**), de nature juridique SICAV et de périodicité de cotation hebdomadaire.

Nous supposons que l'évolution du support obligataire suit un processus lognormal et n'est pas corrélé avec celle des taux courts. En supposant que le sous-jacent obligataire est

¹ Application numérique dans la partie application numérique

corrélé avec un facteur φ_1^1 avec le sous-jacent action, la dynamique du support, sous la probabilité risque neutre Q est donnée par :

$$dB_t = rB_t dt + \sigma_B B_t \left(\varphi_1 \cdot dZ_t^1 + \sqrt{1 - \varphi_1^2} \cdot dZ_t^2 \right)$$

Cette modélisation permet par ailleurs, en supposant $\sigma_B = 0$, de modéliser le cas où la partie non exposée en actions serait investie en actifs sans risque.

II.2.3. Modélisation de l'épargne :

Dans ces contrats, l'assuré peut généralement choisir entre 2 stratégies de gestion :

- Laisser dériver les poids de chaque sous-jacent ;
- Arbitrer entre les différents actifs, à une fréquence prédéfinie (généralement annuelle), de manière à maintenir la proportion dans l'épargne de chaque actif constante.

Dans la suite, nous supposons pour simplifier les notations que la valeur initiale de chaque support est égale à 1000 (correspondant à la valeur de la prime nette investie) :

$$S_0 = B_0 = 10 = AV_0$$

➤ Modélisation en l'absence de rebalancement

Soit $w_{eq}^{t=0}$ la proportion d'actions de l'épargne au moment de la souscription. Par définition :

$$AV_0 = w_{eq}^{t=0} \cdot S_0 + \left(1 - w_{eq}^{t=0} \right) \cdot B_0$$

En l'absence de rebalancement, nous en déduisons l'évolution de l'épargne AV_t :

$$AV_t = w_{eq}^{t=0} \cdot S_t + \left(1 - w_{eq}^{t=0} \right) \cdot B_t$$

Le rendement de l'épargne entre t_k et t_{k+1} s'écrit alors :

$$\rho(t_k, t_{k+1}) = \frac{AV_{t_k}}{AV_{t_{k+1}}} - 1 = \frac{w_{eq}^{t=0} \cdot S_{t_{k+1}} + \left(1 - w_{eq}^{t=0} \right) \cdot B_{t_{k+1}}}{w_{eq}^{t=0} \cdot S_{t_k} + \left(1 - w_{eq}^{t=0} \right) \cdot B_{t_k}} - 1$$

➤ Modélisation en cas de rebalancement annuel

Nous supposons que les poids des actifs au sein de l'épargne sont rebalancés lorsque $t_k \in \mathbb{N}$. En utilisant $\lfloor x \rfloor$ la partie entière de x , nous pouvons écrire que :

¹ Voir valeur dans la partie application numérique

$$AV_{t_k} = w_{eq}^{\lfloor t_k \rfloor} \cdot S_{t_k} + \left(1 - w_{eq}^{\lfloor t_k \rfloor}\right) \cdot B_{t_k}$$

Avec :

- Pour $t_k < 1$, $w_{eq}^{\lfloor t_k \rfloor} = w_{eq}^{t=0}$
- Pour $t_k \geq 1$:

$$\begin{aligned} w_{eq}^{\lfloor t_k \rfloor} &= w_{eq}^{\lfloor t_k \rfloor - 1} \cdot \frac{S_{\lfloor t_k \rfloor - 1}}{S_{\lfloor t_k \rfloor}} \cdot \frac{AV_{\lfloor t_k \rfloor}}{AV_{\lfloor t_k \rfloor - 1}} \\ &= w_{eq}^{\lfloor t_k \rfloor - 1} \cdot \frac{S_{\lfloor t_k \rfloor - 1}}{S_{\lfloor t_k \rfloor}} \cdot \frac{w_{eq}^{\lfloor t_k \rfloor - 1} \cdot S_{\lfloor t_k \rfloor} + \left(1 - w_{eq}^{\lfloor t_k \rfloor - 1}\right) \cdot B_{\lfloor t_k \rfloor}}{w_{eq}^{\lfloor t_k \rfloor - 1} \cdot S_{\lfloor t_k \rfloor - 1} + \left(1 - w_{eq}^{\lfloor t_k \rfloor - 1}\right) \cdot B_{\lfloor t_k \rfloor - 1}} \end{aligned}$$

Le rendement de l'épargne entre t_k et t_{k+1} s'écrit alors :

$$\rho(t_k, t_{k+1}) = \frac{AV_{t_k}}{AV_{t_{k+1}}} - 1 = \frac{w_{eq}^{\lfloor t_{k+1} \rfloor} \cdot S_{t_{k+1}} + \left(1 - w_{eq}^{\lfloor t_{k+1} \rfloor}\right) \cdot B_{t_{k+1}}}{w_{eq}^{\lfloor t_k \rfloor} \cdot S_{t_k} + \left(1 - w_{eq}^{\lfloor t_k \rfloor}\right) \cdot B_{t_k}} - 1$$

II.3. Corrélation entre les supports:

Le coût de la garantie augmente lorsque la corrélation entre les sous-jacents augmente. Ce résultat s'explique par le fait que le support obligataire suivra davantage la tendance du sous-jacent action. Lorsque φ_1 devient de plus en plus négative, le comportement du fonds obligataire compense la trajectoire défavorable du support actions, ce qui limite ainsi le déclenchement de la garantie.

Nous ferons donc une attention particulière à cette corrélation entre supports pour d'une part bien choisir les supports de notre produit, et d'autre part pour quantifier son impact sur le tarif lors de l'étude de sensibilité.

La démarche et les résultats seront exposés dans l'application numérique (chap.8).

III. Hypothèses du passif:

III.1. Choix de la table de mortalité:

Nous pouvons considérer, en première approximation, que le risque de décès est mutualisable lorsque le portefeuille est suffisamment important et homogène (application de la loi des grands nombres). Dans ce cas, les décès sont supposés suivre une table de mortalité déterministe, généralement une table réglementaire sur laquelle l'assureur ajoute une marge

de prudence. Une attention particulière doit être portée au phénomène d'antisélection en raison des caractéristiques de ces contrats.

Dans notre étude, vu que la GMWB et la GMWB-L sont des garanties en cas de vie, nous utiliserons la table de mortalité réglementaire TV88/90.

III.2. Hypothèse de rachats:

Pour tarifier notre produit, nous faisons l'hypothèse d'absence de rachats autrement dit a probabilité ${}_{t_k/1}R_x$ de rachat sur l'intervalle de temps $[t_k, t_{k+1}]$ est nulle.

III.3. Formulation des frais et des revenus garantis:

Nous supposons que les frais et les retraits viennent en déduction de la valeur de l'épargne AV_{t_k} (les frais pouvaient aussi être formulés en % de la prime initiale AV_0 ou de la benefit base BB_{t_k}).

Si l'assuré retire davantage que le revenu garanti, nous considérons l'excédent comme étant un rachat partiel. A l'opposé, l'assuré peut renoncer à un revenu garanti (éventuellement en contrepartie d'un bonus d'attente, c'est à dire une revalorisation des revenus garantis à venir et du montant total de revenus garantis dont l'assuré peut disposer).

En notant G_t le retrait réalisé à la date t par l'assuré et G le revenu garanti, la somme effectivement perçue à cette date est:

$$\begin{aligned} f(G_t) &= G_t \text{ si } 0 < G_t \leq G, \\ f(G_t) &= G_t - k(G_t - G) \text{ si } G_t \geq G \end{aligned}$$

IV. Modélisation du vecteur d'état :

Dans cette partie, nous modélisons le passif de la garantie GMWB pour un assuré souscrivant le contrat à l'âge x . Ce modèle est valable pour les garanties GMWB-L ($G_{t_k}^w = +\infty$).

Nous écrivons, dans un premier temps, les hypothèses pour notre produit :

- Absence de revalorisation de la benefit base en phases d'accumulation et de distribution¹.
- Existence d'une garantie complémentaire décès qui prévoit le versement du maximum entre la prime investie et la valeur de l'épargne, sans limite d'âge de l'assuré. Nous n'envisagerons pas de variante de cette garantie (cliquet, TMG...).

IV.1. Valeur du vecteur d'état à la souscription (t=0):

Par définition de la garantie, la benefit base est généralement égale à l'épargne investie nette :

¹ Le traitement de ces options sera développé dans le chapitre 9.

$$BB_0 = AV_0 = P_0 (1 - f_{acq})$$

A la fin du différé : $BB_d = AV_0 \cdot (1 + 2\%)^d$

Le montant (minimum¹) total de revenus garantis et le montant garanti en cas de décès sont égaux à l'épargne investie :

$$G_0^W = AV_0 \text{ et } G_0^D = AV_0$$

L'ensemble des variables décrivant les prestations et les frais sont nulles à la date de souscription :

$$C_0^W = G_0^D = F_0 = 0$$

IV.2 Évolution entre t_{k-1}^+ et t_k^- ($k > 1$):

L'épargne est revalorisée suivant le rendement I_{t_k} sur $[t_k, t_{k+1}[$:

$$AV_{t_k}^- = AV_{t_{k-1}}^+ \cdot (1 + I_{t_k})$$

Ainsi, aucune prestation, aucun frais et aucune sortie n'est possible entre t_{k-1}^+ et t_k^- . Aucune autre variable d'état n'est par conséquent modifiée.

IV.3. Évolution entre t_k^- et t_k^+ :

L'évolution des variables d'état dépend du montant de retrait effectué par l'assuré.

- 1^{er} Cas : retrait = revenu garanti (pas de rachat partiel de l'épargne) :

Nous supposons que le contrat est en cours en t_k^- et que l'assuré effectue un retrait égal au montant de revenu garanti (lorsque le contrat est en phase d'accumulation, cela signifie que l'assuré n'effectue pas de rachat partiel de son épargne).

Les composantes du vecteur d'état évoluent alors de la manière suivante :

¹ En cas de revalorisation de la Benefit base dans le chapitre 9.

Tableau 9 : Evolution du vecteur d'état en cas de retrait égal au revenu garanti

Phase accumulation $[0; d[$	Phase distribution $[d; d + T[$
$G_{t_k} = 0$	$G_{t_k} = 4\% \cdot BB_{t_k}^- 1_{\{even=1\}}$
$G_{t_k}^D = \max\left(G_{t_k}^{D^-} - AV_{t_k}^-, 0\right)$	
$F_{t_k} = AV_{t_k}^- (1 - \alpha_m) \alpha_g^w 1_{\{even=1\}}$ $= \alpha_g^w \left(AV_{t_k}^- - \alpha_m \cdot AV_{t_k}^- \right)$ $= \alpha_g^w \left(AV_{t_k}^- - \text{frais}_{-} \text{gest} \right)$	
$AV_{t_k}^+ = AV_{t_k}^- (1 - \alpha_m) - F_{t_k}$	$AV_{t_k}^+ = \max\left(AV_{t_k}^- (1 - \alpha_m) - F_{t_k} - G_{t_k}, 0 \right)$
$C_{t_k}^W = 0$	$C_{t_k}^W = \max\left(F_{t_k} + G_{t_k} - AV_{t_k}^- (1 - \alpha_m), 0 \right)$
$G_{t_k}^D = G_{t_k}^{D^-} - G_{t_k}$	
<p>$BB_{t_k}^+ = BB_{t_k}^- = BB_{t_{k-1}}^+$ (car hyp. d'absence de TMG).</p> <p>La Benefit base n'est pas impactée par le prélèvement des frais de gestion et des RPP.</p>	
$G_{t_k}^{W^+} = G_{t_k}^{W^-} - G_{t_k}$	

En supplément des frais prélevés au titre de la garantie, l'assureur prélève aussi des frais de gestion $F_{t_k}^{gestion} = AV_{t_k}^- (\alpha_m) 1_{\{even=1\}}$ qui ne seront pas pris en compte dans le calcul de la valeur de la garantie.

• 2^e Cas : retrait > revenu garanti :

En phase de distribution, nous considérons que le rachat partiel désigne l'épargne rachetée au-delà du montant de revenu garanti (c'est à dire que $G_{t_k} - 4\%BB_{t_k}^- > 0$). Les équations sont différentes selon que le contrat prévoit une pénalité de rachat ou non lorsque l'assuré effectue un rachat partiel.

- Absence de pénalité de rachat :

Nous supposons que le contrat prévoit, en cas de rachat partiel, un abattement proportionnel du niveau des garanties.

Chronologiquement, l'assuré effectue un retrait égal au montant de revenu garanti puis rachète son épargne à hauteur :

$$G_{t_k} = 4\%BB_{t_k}^- + G_{t_k} - 4\%BB_{t_k}^-$$

Nous en déduisons l'évolution des composantes du vecteur d'état :

[Tableau 10 : Evolution du vecteur d'état en cas de retrait supérieur au revenu garanti :](#)

Phase accumulation $[0; d[$	Phase distribution $[d; d + T[$
$G_{t_k} = 0$	$G_{t_k} > 4\%BB_{t_k}^- 1_{\{even=1\}}$
$C_{t_k}^D = \max(G_{t_k}^{D^-} - AV_{t_k}^-, 0)$	
$F_{t_k} = AV_{t_k}^- (1 - \alpha_m) \alpha_g^w 1_{\{even=1\}}$	
$AV_{t_k}^+ = AV_{t_k}^- (1 - \alpha_m) - F_{t_k} - G_{t_k}$	
$C_{t_k}^W = 0$	

$$G_{t_k}^{D^+} = G_{t_k}^{D^-} - G_{t_k}$$

$$BB_{t_k}^+ = BB_{t_k}^- \cdot \frac{AV_{t_k}^- (1 - \alpha_m) - F_{t_k} - G_{t_k}}{AV_{t_k}^- (1 - \alpha_m) - F_{t_k} - 4\% BB_{t_k}^-}$$

tout rachat partiel de l'épargne a pour effet de diminuer la Benefit base

$$G_{t_k}^{W^+} = \left[G_{t_k}^{W^-} - 4\% BB_{t_k}^- 1_{\{even=1\}} \right] \cdot \frac{BB_{t_k}^+}{BB_{t_k}^-}$$

$$G_{t_k}^{D^+} = \left[G_{t_k}^{D^-} - 4\% BB_{t_k}^- 1_{\{even=1\}} \right] \cdot \frac{BB_{t_k}^+}{BB_{t_k}^-}$$

Si l'assuré rachète son contrat sur $[t_{k-1}, t_k[$, le rachat est comptabilisé à la date t_k^- et met fin au contrat. Le vecteur d'état devient ainsi nul:

$$AV_{t_k}^+ = G_{t_k}^{W^+} = G_{t_k} = BB_{t_k}^+ = C_{t_k}^{W^+} = C_{t_k}^W = F_{t_k} = 0$$

- Avec pénalité de rachat :

Il est possible de limiter l'optimisation de la valeur de la garantie par l'assuré en introduisant une pénalité de rachat S_{t_k} ;

En cas de retrait G_{t_k} supérieur au revenu garanti, l'assuré perçoit un montant net égal à :

$$\left[G_{t_k} - 4\% BB_{t_k}^- \right] (1 - s_{t_k}) + 4\% BB_{t_k}^-$$

L'assureur dégage donc une marge $\left[G_{t_k} - 4\%BB_{t_k}^- \right] S_{t_k}$ sur le rachat partiel de l'assuré, ce qui lui permettra de compenser une partie du manque à gagner sur le contrat.

Remarque :

Dans la suite, nous supposons pour simplifier que l'assuré rachète son contrat ou effectue un retrait égal au montant de revenus garantis au cours de la phase de distribution. Pendant la phase d'accumulation, l'assuré n'effectue pas de rachat partiel. La dynamique du vecteur d'état est donc donnée, en cas de rachat total du contrat, par les équations du tableau

$$\text{avec ou par l'équation : } AV_{t_k}^+ = G_{t_k}^{W^+} = G_{t_k} = BB_{t_k}^+ = C_{t_k}^{W^+} = C_{t_k}^W = F_{t_k} = 0$$

V. Modélisation du tarif de la garantie:

A partir des résultats obtenus précédemment dans ce chapitre, nous pouvons écrire la valeur actuelle probable des engagements de l'assureur et de l'assuré et en déduire la valeur de la garantie.

V.1. Modélisation de la valeur de la garantie GMWB seule:

Notons:

$H_{t_k}^{vie}$: la valeur actualisée de la garantie à la date t_k ;

$v^{t_k} = \exp(-\int_0^{t_k} r_s ds) = P(0, t_k)$: Coefficient d'actualisation à la date t_k (prix du zéro coupon);

$N_{t_k}^{ec}$: Nombre de contrats en cours à la date t_k

A partir des prestations nettes des frais de garantie $C_{t_k}^W - F_{t_k}$, nous déterminons l'expression de $H_{t_k}^{vie}$:

$$H_{t_k}^{vie} = E_{\mathbb{Q}} \left[\mathbf{1}_{\{T_x \geq t_k\}} (C_{t_k}^W - F_{t_k}) e^{-\int_0^{t_k} r_s ds} \right] = E_{\mathbb{Q}} \left[\frac{N_{t_k}^{ec}}{l_x} (C_{t_k}^W - F_{t_k}) v^{t_k} \right]$$

En supposant que la mortalité indépendante du risque financier et déterministe, nous pouvons simplifier l'expression:

$$H_{t_k}^{vie} = {}_{t_k} p_x E_{\mathbb{Q}} \left[\prod_{i=0}^{k-1} (1 - {}_{t_i/1} R_x) (C_{t_k}^W - F_{t_k}) v^{t_k} \right]$$

Nous en déduisons l'expression de la valeur de la garantie à la date $t=0$:

$$V_0^G = \sum_{k=1}^{N.T} H_{t_k}^{vie} = \sum_{k=1}^{N.T} p_x E_{\mathbb{Q}} \left[\prod_{i=0}^{k-1} (1 - {}_{t_i/1} R_x) (C_{t_k}^W - F_{t_k}) v^{t_k} \right]$$

En développant cette dernière équation, on met en évidence la valeur actuelle probable des engagements de l'assureur et de l'assuré :

$$V_0^G = \sum_{k=1}^{N.T} p_x E_{\mathbb{Q}} \left[\prod_{i=0}^{k-1} (1 - {}_{t_i/1} R_x) C_{t_k}^W v^{t_k} \right] - \sum_{k=1}^{N.T} p_x E_{\mathbb{Q}} \left[\prod_{i=0}^{k-1} (1 - {}_{t_i/1} R_x) F_{t_k} v^{t_k} \right]$$

En utilisant la méthode de Monte Carlo, nous pouvons transformer les espérances en somme afin de déterminer la valeur de la garantie pour un scénario d'actifs donné (j) et de calculer ensuite la moyenne sur l'ensemble des scénarios :

$$V_0^G = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \left[\sum_{k=1}^{N.T} \left[p_x \prod_{i=0}^{k-1} (1 - {}_{t_i/1} R_x^{(j)}) (C_{t_k}^{W(j)} - F_{t_k}^{(j)}) v^{t_k(j)} \right] \right]$$

Puisque, nous avons fait une hypothèse d'absence de rachats, on a donc ${}_{t_i/1} R_x = 0$. Ainsi, nous obtenons la formule finale :

$$V_0^G = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \left[\sum_{k=1}^{N.T} \left[p_x (C_{t_k}^{W(j)} - F_{t_k}^{(j)}) v^{t_k(j)} \right] \right]$$

V.2. Prise en compte de la GMDB :

Les garanties GMWB / GLWB incluent souvent une garantie décès complémentaire.

La valeur actualisée des flux $H_{t_k}^{vie}$ devient alors H_{t_k} et s'écrit :

$$H_{t_k} = E_{\mathbb{Q}} \left[\mathbf{1}_{\{T_x \geq t_k\}} (C_{t_k}^W - F_{t_k}) e^{-\int_0^{t_k} r_s ds} \right] + E_{\mathbb{Q}} \left[\mathbf{1}_{\{t_{k-1} \leq T_x \leq t_k\}} C_{t_k}^D e^{-\int_0^{t_k} r_s ds} \right]$$

Avec les mêmes hypothèses et notations qu'au paragraphe précédent, on en déduit la valeur de la garantie à la date $t=0$:

$$V_0^G = \sum_{k=1}^{N.T} p_x E_{\mathbb{Q}} \left[\prod_{i=0}^{k-1} (1 - {}_{t_i/1} R_x) (C_{t_k}^W - F_{t_k}) v^{t_k} \right] + \sum_{k=1}^{N.T} q_x E_{\mathbb{Q}} \left[\prod_{i=0}^{k-2} (1 - {}_{t_i/1} R_x) C_{t_k}^D v^{t_k} \right]$$

En passant à la simulation de Monte Carlo, on obtient la formule finale :

$$V_0^G = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \left[\sum_{k=1}^{N.T} \left[p_x (C_{t_k}^{W(j)} - F_{t_k}^{(j)}) v^{t_k(j)} + q_x C_{t_k}^{D(j)} v^{t_k(j)} \right] \right]$$

V.3. Evaluation de la prime pure et de la prime commerciale:

En notant α_g^{PP} le tarif en prime pure de la garantie. **Ce niveau de frais est fixé de manière à égaliser la VAP de la différence entre les engagements de l'assureur et ceux de l'assuré à la souscription (càd $VAP(\alpha_g^{PP})=0$).**

Ces frais ne permettent pas à l'assureur de faire face à l'ensemble de ses coûts. La mise en place d'une stratégie de couverture engendre par exemple des frais de structure h de la plateforme de couverture. L'assureur ne disposerait alors plus que de $\alpha_g^{PP} - h$ pour honorer ses engagements au titre de la garantie. α_g^{PP} doit donc être revu à la hausse.

Plusieurs incertitudes demeurent lorsque nous fixons la valeur du tarif en prime pure α_g^{PP} :

- Les paramètres financiers différents de ceux qui ont servi à calculer α_g^{PP} ;
- La composition du portefeuille dans le cas d'un tarif agréé et le comportement des assurés peuvent diverger par rapport aux hypothèses faites pour déterminer le tarif;
- Le programme de couverture mis en place peut se révéler moins efficace que prévu (écart entre la couverture théorique et la couverture réelle pour un notionnel donné).

L'assureur doit donc inclure une marge de sécurité pour compenser ces déviations ainsi que pour couvrir le coût du capital immobilisé par l'assureur au titre des exigences de solvabilité.

Cette marge de sécurité devrait aussi permettre à l'assureur de dégager du profit.

Le passage de la prime pure à la prime commerciale contient une difficulté (impossibilité d'ajouter un chargement de sécurité à posteriori comme on le fait par exemple pour les produits de prévoyance).

✓ Méthode de détermination du chargement de sécurité :

- On détermine la prime pure α_g^{PP} à partir du scénario central ;
- On fait des stress tests portant sur les paramètres financiers et actuariels, pour déterminer la prime pure de chaque stress test i : $\alpha_g^{PP(i)}$;
- $\alpha_g^{PC} = \max_i(\alpha_g^{PP}, \alpha_g^{PP(i)})$.

Ainsi, nous intégrons une marge explicite dans le tarif :

$$\underbrace{\alpha_g^{PC}}_{\text{Tarif de la garantie}} = \max_i(\alpha_g^{PP(i)}; \alpha_g^{PP}) = \underbrace{\alpha_g^{PP}}_{\text{Coût économique de la garantie}} + \underbrace{\max_i(\alpha_g^{PP(i)} - \alpha_g^{PP}; 0)}_{\text{Marge de sécurité}}$$

Chapitre 8: Application numérique

Dans ce chapitre, nous effectuons les applications numériques des modèles de l'actif et du passif présentés précédemment.

I. Estimation des paramètres des modèles:

Pour l'estimation des paramètres du modèle Black & Scholes et le choix de nos supports d'investissement, nous avons considéré un historique sur 3 ans (de 2009 à 2012) des valeurs liquidatives des 7 supports de La Marocaine vie.

I.1. Estimation des paramètres du modèle Black & Scholes:

A partir de cet historique et des formules vues dans la partie modélisation de l'actif, nous avons estimé la volatilité historique des 7 supports d'investissement et nous avons obtenus comme résultats:

Tableau 11 : Volatilité historique des 7 supports

Supports	volatilite historique
SG VALEURS	0,16%
SG TRESOR PLUS	0,16%
SG OBLIG PLUS	0,33%
SG OPTIMAL OBLIG	0,81%
SG PERSPECTIVES	4,96%
SG EXPANSION	9,91%
SG ACTIONS PLUS	9,64%

Pour le rendement, nous travaillons sous probabilité risque neutre Q . Or, l'évaluation sous cette probabilité signifie que tous les actifs ont pour rendement le taux sans risque.

Autrement dit, nous supposons que le rendement est constant est égal à r (pas de prise en compte de la prime de risque).

I.2. Choix des supports d'investissement du produit:

Il s'agit de choisir un support de type action et un support de type obligation long terme, tout en faisant attention à la corrélation entre ces 2 supports. Pour cela, nous avons construit la matrice de corrélation des différents supports et nous avons obtenu les résultats suivants :

Tableau 12 : matrice de corrélation entre les supports

	SGVAL	SGTRESORPLUS	SGOBLIGPLUS	SGOPTIMALOBLIG	SGPERSPECTIVES	SGEXPANSION	SGACTIONSPLUS
SGVAL	1.00						
SGTRESORPLUS	0.79	1.00					
SGOBLIGPLUS	0.43	0.75	1.00				
SGOPTIMALOBLIG	0.21	0.34	0.47	1.00			
SGPERSPECTIVES	-0.10	-0.05	0.00	0.10	1.00		
SGEXPANSION	-0.19	-0.20	-0.04	0.02	0.80	1.00	
SGACTIONSPLUS	-0.15	-0.14	-0.03	-0.01	0.46	0.34	1.00

En se basant sur ces résultats, nous avons opté pour les 2 supports suivants :

- **SG Expansion** (OPCVM action) ;
- **SG Oblig Plus**, qui est un OPCVM obligation à long terme et négativement corrélé avec le support action.

II. Estimation de la prime pure:

II.1. Définition du scénario central:

Nous considérons un contrat GMWB de durée 30 ans (différé de 10 ans et phase de distribution de 20 ans) souscrit par un homme de 55 ans. La mortalité est supposée suivre la table TV 88-90. L'épargne est investie à 60% sur le support action (SG EXPANSION) et 40% sur le support obligation (SG OBLIG PLUS). Aucun rebalancement du poids des actifs n'est prévu dans la gestion. Le taux de revenu annuel garanti est égal à 4%. Nous supposons que l'assuré investit une prime nette de 1000 DHS. Nous faisons également une hypothèse d'absence de rachat.

Paramètres actuariels	Notation	Valeur
Sexe de l'assuré	sexe	M
Age à la souscription	x	55 ans
Frais de gestion annuels	α_m	0,96%

Dans le scénario central des actifs financiers, nous avons utilisés un modèle de Black & Scholes pour générer les scénarios d'actifs avec les paramètres suivants:

Paramètres financiers	Notation	Valeur
Taux sans risque	r	3,5%
Volatilité SG EXPANSION	σ_S	9,91%
Volatilité OBLIG PLUS	σ_B	0,33%

Corrélation (SG Expansion, Olig Plus)	ϕ_1	-4%
Part action à la souscription	$w_{eq}^{t=0}$	60%

II.2. Estimation du tarif du scénario central:

Nous utilisons notre modèle pour déterminer la prime pure dans le scénario central. Nous avons utilisé 10000 scénarios antithétiques (conformément aux recommandations de l'association américaine des actuaires) pour déterminer le tarif de la garantie GMWB.

Nous avons utilisé le logiciel Matlab pour simuler les scénarios d'actifs et les charger dans notre scénario central.

Le résultat obtenu pour le tarif de la garantie GMWB seule est $\alpha_g^{pp} = 0,55\%$ de l'épargne.

Cette prime pure concerne le prix de la garantie GMWB seule (sans intégration de la GMDB). Elle est calculée sur la base des hypothèses du passif, des paramètres du scénario central et des scénarios d'actifs simulés; elle est donc très dépendante de ces facteurs: une étude de sensibilité s'impose donc dans le chapitre suivant.

Chapitre 9: Sensibilité de la garantie GMWB et impacts des variantes

Dans ce chapitre, nous examinons la sensibilité de notre tarif par rapport aux différents paramètres actuariels et financiers. Nous étudierons également dans la 2^e partie de ce chapitre, l'impact sur le tarif de l'introduction dans notre produit des variantes comme le TMG, le cliquet et l'assiette de prélèvement des frais.

I. Sensibilités aux paramètres actuariels et financiers:

I.1. Sensibilité à l'introduction d'une garantie GMDB:

Dans le scénario central, nous avons tarifé la garantie GMWB toute seule. Dans cette partie, nous évaluons le tarif de la garantie GMWB combinée avec une garantie GMDB. Les résultats obtenus sont résumés dans le tableau suivant:

Tableau 13 : Sensibilité à l'introduction d'une garantie GMDB

Age (x)	α_g^{PP}
40	0,57%
50	0,58%
55	0,61%
60	0,66%
70	0,83%

En l'absence de garantie décès, le coût de la garantie décroît avec l'âge de souscription car le phénomène de décès permet à l'assureur de diminuer le nombre de contrats sur lequel il est susceptible de verser des prestations à l'assuré. Ce n'est pas le cas en présence d'une garantie décès et le coût total des frais augmente avec l'âge de souscription. C'est la raison pour laquelle, dans beaucoup de produits commercialisés, les garanties planchers arrêtent de couvrir l'assuré lorsque celui atteint son 80^e ou 85^e anniversaire. Pour les assurés souscrivant avant 60 ans, la garantie décès ne représente pas de surcoût important pour l'assureur puisque les probabilités de décès restent faibles (le risque dominant est le risque de rachat). Le coût de la garantie est quasi-constant lorsque $x \in [40; 60]$ et augmente fortement après.

L'absence de rachat renchérit le coût des garanties car davantage d'assurés décéderont alors que le contrat sera en cours.

I.2. Sensibilité à la proportion d'actions dans l'épargne:

Nous testons la sensibilité du coût de la garantie à la proportion d'actions contenue dans l'épargne en l'absence de rebalancement.

Tableau 14: Sensibilité du tarif à la part d'actions lors de la souscription - Sans rebalancement annuel

Part action ($W_{eq}^{t=0}$)	α_g^{pp}
0%	0.29%
20%	0.29%
40%	0.34%
60%	0.55%
80%	0.94%
100%	1.35%

Le coût de la garantie augmente fortement lorsque la part actions dépasse un certain seuil. Dans le scénario central, la valeur totale des frais ($\alpha_g^{pp} + \alpha_m$) dépasse 2% lorsque l'épargne est investie totalement en actions. Nous serons amenés à limiter la proportion maximale d'actions dans l'allocation d'actifs de l'assuré.

Le tarif calculé pour la garantie est toujours plus élevé lorsque le produit prévoit des rebalancements annuels de l'épargne.

I.3. Sensibilité aux paramètres de marché:

Nous nous plaçons dans le cadre d'un modèle de Black & Scholes pour étudier les sensibilités de la garantie à la valeur du taux sans risque et de la volatilité des actions.

Nous nous intéressons à l'impact du changement des paramètres financiers sur la valeur du tarif en prime pure α_g^{pp} . Les valeurs du taux sans risque figurent dans la 1ère ligne, celles de la volatilité action dans la 1ère colonne.

Tableau 15: Tarif de la garantie en fonction du taux sans risque et du niveau de volatilité (Black & Scholes)

α_g^{pp}	3%	3.5%	4%
8%	0.42%	0.30%	0.18%
9.91%	0.74%	0.55%	0.38%
11%	1.16%	0.87%	0.63%
12%	1.58%	1.13%	0.91%

Une augmentation d'environ 1% de la volatilité a plus d'impact qu'une baisse des taux de 0.5% mais les résultats restent néanmoins du même ordre de grandeur. Le coût de la garantie augmente lorsque les taux baissent ou lorsque la volatilité augmente.

D'une autre part, une étude de sensibilité du tarif de la garantie en fonction de la corrélation entre les supports s'avère nécessaire aussi :

Tableau 16 : Sensibilité du tarif de la garantie à la corrélation entre les sous-jacents (Black & Scholes)

Corrélation ϕ_1	α_g^{pp}
-7%	0.45%
-2%	0.53%
-4%	0.55%
0%	0.59%
2%	0.65%
7%	0.73%

Le coût de la garantie augmente lorsque la corrélation entre les sous-jacents augmente. Ce résultat s'explique par le fait que le support obligataire suivra davantage la tendance du sous-jacent action. Lorsque ϕ_1 devient de plus en plus négative, le comportement du fonds obligataire compense la trajectoire défavorable du support actions, ce qui limite ainsi le déclenchement de la garantie. La variation du coût de la garantie en fonction de la corrélation entre les actions et les obligations est quasiment linéaire.

I.4. Sensibilité à la fréquence des revenus garantis :

La notation $\{N_{even} = k\}$ signifie que les retraits s'effectuent k fois par an. Le Tableau ci-après nous indique que la fréquence des événements n'a pas d'impact sur le coût de la garantie dans le cadre du scénario central¹.

Tableau 17 : Sensibilité du tarif à la fréquence de retrait des revenus garantis (scénario central)

N_{even}	α_g^{pp}
1	0.55%
2	0.55%
4	0.57%
12	0.57%

¹ Ce résultat reste valable sous un scénario financier plus volatil

L'assureur peut donc offrir la possibilité à l'assuré de choisir la fréquence de la mise à disposition des revenus garantis.

I.5. Sensibilité à la maturité de la garantie:

La maturité du produit est une variable importante dans la détermination du tarif ; nous avons donc étudié son impact sur celui-ci.

Tableau 18 : Sensibilité du tarif à la maturité de la garantie

Maturité T	α_g^{PP}
20 ans	0,62%
30 ans	0,55%
35 ans	0,44%

Le coût de la garantie diminue lorsque la maturité de la garantie augmente dans la mesure où les retraits sont plus souvent compensés par la revalorisation de l'épargne. Par ailleurs, nous constatons que plus la maturité augmente et moins le coût de la garantie est sensible à une variation des paramètres financiers.

I.6. Sensibilité à la durée du différé:

L'effet de la maturité évalué dans le cas précédent combine l'effet du différé et celui de la durée de la phase de distribution. Ici, nous essayons de mesurer isolément l'effet du différé sur le tarif.

Tableau 19 : Sensibilité du tarif à la durée du différé

Différé	α_g^{PP}
d=5	0,59%
d=10	0,55%
d=15	0,48%
d=20	0,42%

Lorsque le différé augmente, le coût de la garantie diminue car l'épargne dispose plus de temps pour s'accumuler.

II. Evaluation de la prime commerciale:

Après avoir déterminé le tarif du scénario central et fait les études de sensibilité, nous évaluons la prime commerciale qui est déterminée par la méthode suivante:

- On détermine la prime pure α_g^{PP} à partir du scénario central ;
- On fait des stress tests portant sur les paramètres financiers et actuariels, pour déterminer la prime pure de chaque stress test i : $\alpha_g^{PP(i)}$;

$$\underbrace{\alpha_g^{PC}}_{\text{Tarif de la garantie}} = \max_i \left(\alpha_g^{PP(i)} ; \alpha_g^{PP} \right) = \underbrace{\alpha_g^{PP}}_{\text{Coût économique de la garantie}} + \underbrace{\max_i \left(\alpha_g^{PP(i)} - \alpha_g^{PP} ; 0 \right)}_{\text{Marge de sécurité}}$$

Nous calculons le tarif en prime commerciale pour un homme de 55 ans investissant 60% de son épargne en actions.

Tableau 20: La détermination de la prime commerciale

	Stress test	$\alpha_g^{PP(i)}$
0	Scénario central	0,55%
1	Avec GMDB	0,61%
2	Volatilité action=12%	1,13%
3	r=3% et volatilité action=11%	1,16%
4	r=3%	0,74%
5	Corrélation=2%	0,65%

Ainsi, sous l'hypothèse d'absence de rachat, la prime commerciale pour les garanties de notre produit (GMWB+GMWB) est égale à **1,16%**.

Cette prime est rendue importante par l'hypothèse très forte d'absence de rachats.

III. Impact des variantes de la garantie :

Nous nous intéressons dans cette partie à l'évolution du vecteur d'état pour des formulations plus complexes du produit : existence de garanties de revalorisation de la benefit base, frais prélevés en fonction de la prime investie ou de la benefit base...

Nous définissons Na (respectivement Nd) le nombre d'activation annuelle éventuelle du cliquet pendant la phase d'accumulation (respectivement la phase de distribution). Ces

deux variables permettent de définir les ensembles de dates auxquelles la benefit base est susceptible d'être revalorisée pendant chacune des deux phases ($echelle_{cliquetA}$ et $echelle_{cliquetB}$).

III.1. TMG et cliquet de la benefit base

La garantie TMG prévoit qu'à la fin du différé, la benefit base soit égale à la benefit base de souscription revalorisée au taux 4% (défini à la souscription).

La garantie cliquet permet de revaloriser, à des dates fixées à l'avance, la valeur de la benefit base si celle-ci est inférieure à la valeur de l'épargne.

Ces deux garanties modifient la dynamique de 3 variables du vecteur d'état : la benefit base, le montant de revenus garantis restant à retirer et le montant du capital en cas de décès.

Nous proposons des formulations permettant de traiter l'ensemble des garanties de revalorisation possibles, ainsi que des illustrations numériques.

III.2. Revalorisation en phase d'accumulation

La benefit base est égale au maximum entre les calculs effectués pour chaque garantie :

$$BB_{t_k}^+ = \max \left(BB_{t_k}^-, BB_0 (1 + 4\%)^d \cdot 1_{\{echelle_{TMG}=1\}}, AV_{t_k}^+ \cdot 1_{\{echelle_{cliquetA}=1\}} \right)$$

Cette revalorisation de la benefit base modifie le montant de revenus garantis et le montant du capital en cas de décès :

$$G_{t_k}^{W^+} = \left[G_{t_k}^{W^-} - 4\% BB_{t_k}^- 1_{\{even=1\}} \right] \cdot \frac{BB_{t_k}^+}{BB_{t_k}^-}$$

et
$$G_t^{D^+} = \left[G_t^{D^-} - 4\% BB_t^- 1_{\{even=1\}} \right] \cdot \frac{BB_t^+}{BB_t^-}$$

III.3. Revalorisation en phase de distribution

En phase de distribution, la seule garantie possible est un cliquet. Nous déduisons les formules de celles qui ont été établies pour la phase d'accumulation :

$$BB_{t_k}^+ = \max \left(BB_{t_k}^-, AV_{t_k}^+ \cdot 1_{\{echelle_{cliquetd}=1\}} \right)$$

Le montant de revenus garantis et le montant du capital en cas de décès sont augmentés selon les équations suivantes :

$$G_{t_k}^{W^+} = \left[G_{t_k}^{W^-} - 4\% BB_{t_k}^- 1_{\{even=1\}} \right] \cdot \frac{BB_{t_k}^+}{BB_{t_k}^-}$$

$$\text{et } G_{t_k}^{D^+} = \left[G_{t_k}^{D^-} - 4\% BB_{t_k}^- 1_{\{even=1\}} \right] \cdot \frac{BB_{t_k}^+}{BB_{t_k}^-}$$

III.4.Modification de l'assiette de prélèvement des frais

Si les frais sont prélevés en fonction de la prime initiale, nous pouvons alors écrire :

$$F_{t_k} = \left[\alpha_g \cdot AV_0 - \left(\alpha_g \cdot AV_0 - AV_{t_k}^- (1 - \alpha_m) \right)^+ \right] \cdot 1_{\{even=1\}}$$

Si les frais sont formulés en fonction de la benefit base, ceux-ci s'écrivent alors :

$$F_{t_k} = \left[\alpha_g \cdot BB_{t_k}^- - \left(\alpha_g \cdot BB_{t_k}^- - AV_{t_k}^- (1 - \alpha_m) \right)^+ \right] \cdot 1_{\{even=1\}}$$

Les deux formules précédentes diffèrent uniquement lorsque la garantie intègre une revalorisation de la benefit base (TMG ou cliquet). La valeur des frais prélevés en fonction de l'épargne, de la benefit base et de la prime initiale peuvent, dans certains cas, être proportionnels

Conclusion de la 2^e partie:

Dans cette partie, nous avons étudié, dans le chapitre 6, notre garantie d'un point de vue financier avant de passer au chapitre 7 qui a été principalement consacré à la modélisation de l'actif, du passif et à la détermination du tarif de la garantie.

Sous l'hypothèse d'absence de rachat, nous avons évalué un tarif d'environ **0,55%** de l'épargne **pour notre scénario** central et une prime commerciale égale **1,16%** en introduisant un garantie GMDB.

Ce tarif peut s'avérer élevé mais cela est principalement dû à l'hypothèse d'absence de rachat qui impacte à la hausse le coût de la garantie.

Le chapitre 8 a été consacré à l'étude de la sensibilité des garanties GMWB à l'ensemble des paramètres financiers et actuariels, ainsi qu'à la formulation du produit et au modèle d'actifs utilisé.

Aussi peut-on déduire que le coût de la garantie :

- Diminue :
 - Avec l'âge de l'assuré;
 - Quand la maturité augmente;
 - Quand la durée du différé augmente;
- Augmente :
 - Quand la part des actions dépasse un certain seuil;
 - Quand le taux sans risque diminue ou quand la volatilité augmente;
 - Quand la corrélation entre les actifs augmente;
- Très peu impactée par le changement de la fréquence des RPP.

Conclusion Générale

Ce présent mémoire, qui est un premier du genre au Maroc, s'est fixé pour objectifs: d'étudier les besoins actuels du marché marocain de l'épargne retraite, de concevoir un produit Variable Annuities qui répond à ces besoins et de prévoir le tarif des garanties.

Au terme de notre étude, il est important de souligner que la détérioration inéluctable des niveaux de vie à la retraite et l'aversion aux fluctuations des marchés financiers ont engendré de nouveaux besoins en termes d'épargne retraite. Ainsi, les assurés cherchent un complément de retraite pour conserver un niveau de vie acceptable à la retraite; aussi, ils préfèrent les produits qui allient à la fois rendement important et sécurité et veulent disposer de produits souples et modulables.

Pour répondre à ces nouveaux besoins, nous avons proposé un produit GMWB-L combiné à une garantie GMDB, avec une revalorisation de 2% annuel de la benefit base lors de la phase d'accumulation et un cliquet tous les 5 ans lors de la phase de distribution. Ce produit présente de véritables atouts pour l'assuré dans le sens où il lui garantit des revenus minimums jusqu'à son décès: à partir de 65 ans, il peut retirer chaque année 4% de la benefit base; en cas d'épuisement de l'épargne, l'assuré reçoit une rente viagère de montant égal au dernier montant des retraits partiels programmés.

Dans un second lieu, nous avons tarifé notre produit en utilisant une approche stochastique de simulations de Monte-Carlo. Les applications numériques mettent en évidence une forte variabilité du tarif à certains paramètres comme la volatilité des supports d'investissement, la corrélation entre ces supports, le taux technique, l'âge de l'assuré, la proportion investie en actions... Il est également important de préciser que le tarif obtenu est un peu surestimé par l'hypothèse d'absence de rachats.

Certes les variable Annuities présentent de nombreux avantages pour les assurés et pourraient constituer une solution intéressante aux problèmes des régimes de retraite ; mais ils font peser un risque certain sur l'assureur. En effet, pour faire face aux garanties promises dans le cadre d'un produit GMWB-L, l'assureur a besoin d'une performance sur les marchés financiers de l'ordre de 8%, ce qui est presque impossible ces dernières années sur le marché financier marocain. De plus, la commercialisation des produits GMWB et GMWB-L est tributaire à la mise en place d'un système de couverture financière adaptée. A cela s'ajoutent le coût élevé et la complexité des variable annuities, la nécessité de la définition d'une tarification concurrentielle tout en contrôlant les risques liés aux garanties.

Une autre question intéressante, en lien avec le sujet de notre étude, serait non seulement de faire un profit testing afin d'évaluer la rentabilité du produit, mais aussi de mener une réflexion sur la manière de mettre en place un système adéquat de couverture financière ou de réassurance.

Aussi, dans ce contexte de préparation à l'introduction de Solvabilité 2, on pourrait également s'interroger sur la manière de couvrir, de provisionner et d'estimer la marge de solvabilité de ces garanties.

Bibliographie

▪ **Ouvrages:**

- Planchet Frédéric, Thérond Pierre, Jacquemin Julien : Modèles financiers en assurance, Economica 2005.
- Bodie Zvi, Merton Robert, Christophe Thibierge: Finance, 2^e édition, Nouveaux Horizons.
- Demeure Claude : Aide-mémoire Marketing, 6^e édition, Dunod.

▪ **Mémoires et publications:**

- Feng Sun: Pricing and Risk Management of Variable Annuities with Multiple Guaranteed Minimum Benefits,
- Porel Sarah: Modélisation d'un contrat Variable Annuity GMWB for life, Mémoire ISUP 2009.
- Gibot Christian : Les garanties de revenus temporaires et viagères (GMWB et GLWB) dans les contrats d'assurance vie multisupports, Mémoire CEA 2011.
- Perez Damien: Modélisation et étude d'un produit Variable Annuities, Mémoire ISUP 2009.
- Baromètre AXA de la retraite 2008.
- Baromètre AXA de la retraite 2010.
- Dossier technique Optimind sur les Variable Annuities.

▪ **Supports de cours:**

- Devolder Pierre: Finance Stochastique, UCL 2010-2011.
- Devolder Pierre: Prévoyance et assurance de groupe, INSEA 2011-2012.
- Boujendar : Exposé sur la réforme de retraite au Maroc, INSEA 2011-2012.

Annexes

ANNEXE 1: Réduction des risques par la formulation des garanties du produit

Les garanties GMWB / GMWB-L présentent des risques importants et il est nécessaire de les réduire en partie lors de la conception du produit. Le pricing et la gestion des risques mise en place doivent permettre de gérer les risques résiduels.

L'objet de cette annexe est de décrire les précautions à prendre pour contrôler les risques lors de la phase de conception du produit. En effet, le profil de risque dépend largement de la façon dont l'assureur formule la garantie. Celui-ci aura donc intérêt à proposer une garantie qui limite les possibilités d'aléa moral (rachat dynamique...) et les risques financiers.

Nous proposons dans le tableau ci-dessous quelques pistes permettant de réduire les risques des garanties.

Caractéristiques	Recommandations
Gestion proposée	<p>Privilégier une gestion par profil. Cette solution permet de conserver la main sur l'allocation d'actifs, la gestion personnelle est déconseillée à moins d'interdire des arbitrages.</p> <p>La gestion évolutive (part actions décroissante avec l'âge de l'assuré) a peu d'intérêt pour l'assuré, protégé quoi qu'il arrive.</p>
Formulation des frais de la garantie	<p>Il est possible de définir les frais comme un pourcentage de l'épargne, de la benefit base (permet de capter les revalorisations liées aux garanties cliquet ou TMG) ou de la prime versée.</p> <p>Utiliser l'épargne comme assiette pour prélever les frais liées à la garantie permet d'afficher un chiffre inférieur aux frais calculés sur la base des primes versées (ou de la benefit base). Cependant, cela accentue l'aléa moral de l'assuré puisque lorsque l'épargne augmentera, les frais payés seront de plus en plus élevés alors que la garantie aura de moins en moins de valeur.</p>
Durée du différé	La durée du différé doit être fixée lors de la souscription, par exemple en s'alignant sur l'âge légal de départ à la retraite.
Segmentation du tarif	Il est préférable de favoriser une tarification par âge et par sexe afin de limiter les écarts entre l'assuré moyen anticipé et les souscriptions réelles.
Age de l'assuré	Encadrer l'âge de souscription pour d'une part imposer un minimum de différé et d'autre part éviter de prendre des engagements trop longs (difficulté à anticiper les conditions de marché et de longévité).

	<p>Il ne paraît pas nécessaire d'introduire un âge maximum de souscription, à condition toutefois de limiter la portée de la garantie GMDB et des garanties de revalorisation de la benefit base (ex : 80 ans).</p> <p>L'âge de début de la phase de distribution peut être piloté par la formulation des taux de revenus garantis (ex : croissant avec l'âge du 1 revenu garanti mis à la disposition de l'assuré).</p>
Benefit base	<p>Prévoir des garanties de revalorisation permet de réduire l'aléa moral (rachat partiel). Il peut être envisagée de fixer une benefit base égale à 90% de la prime investie afin de limiter le niveau des prestations et de proposer des garanties de revalorisation basées sur le rendement.</p>
Rachats	<p>Les rachats totaux peuvent être minimisés par des garanties de revalorisation de la benefit base. La problématique de la valeur de rachat de la garantie doit être creusée et pourrait empêcher d'intégrer une garantie GMDB au produit.</p> <p>Pour les rachats partiels, il est possible de les restreindre contractuellement:</p> <ul style="list-style-type: none"> -en limitant le nombre maximum de rachat partiel pouvant être effectué annuellement (par un montant minimum de rachat partiel ou une limite en nombre) ; -en prévoyant une pénalité de rachat ; cette pénalité peut être dégressive en fonction de l'ancienneté du contrat. <p>Le produit doit prévoir un mécanisme d'abattement (généralement proportionnel) de la benefit base en cas de rachat partiel.</p> <p>Si le contrat prévoit des garanties de revalorisation (cliquet, TMG...), un mécanisme non proportionnel semble mieux adapté (la benefit base est alors égale au maximum entre l'épargne après rachat et la benefit base ajustée du rachat partiel).</p>

Annexe 2: Rappels de probabilités

➤ Notions de probabilités:

Définition: Filtration

Soit (Ω, \mathcal{A}, P) un espace probabiliste.

une filtration sur Ω est une famille croissante (au sens de l'inclusion) de sous tribus de

$$F = \{F_t, 0 \leq t \leq T\} \text{ i.e. pour tout } t \leq s, F_t \subseteq F_s.$$

Définition: processus stochastique

L'évolution aléatoire d'une variable au cours du temps peut être modélisée par un processus stochastique. Un processus stochastique est une famille de variables aléatoires $\{X_t, t \geq 0\}$ définie sur l'espace probabilisé (Ω, \mathcal{A}, P) . C'est donc une suite de variables indexées par le temps.

Un processus stochastique $X = \{X_t, t \geq 0\}$ est dit adapté par rapport à la filtration F_t si X_t est F_t -mesurable pour tout t . Nous pouvons associer à un processus stochastique sa

filtration naturelle, notée F_t^X , c'est-à-dire la famille croissante de tribus

$$F_t^X = \sigma \{X_s, s \leq t\}.$$

Il existe deux catégories de processus stochastiques: les processus en temps discret (les changements de la valeur de la variable se produisent à des dates précises) et les processus en temps continu (la variable évolue à n'importe quel instant).

Le processus est dit à trajectoires continues si les applications $t \rightarrow X_t(w)$ sont continues pour presque tout $w \in \Omega$.

Définition mouvement brownien

Soit un processus $(w_t)_{t \geq 0}$.

$(w_t)_{t \geq 0}$ est un mouvement brownien si :

$$- w_0 = 0$$

- $(w_t)_{t \geq 0}$ est à accroissement indépendants

- $(w_t)_{t \geq 0}$ est à accroissement stationnaire et pour $t > s > 0$, $w_t - w_s$ suit une loi normale $N(0, t - s)$.

Définition: Mouvement brownien adapté

Soit (Ω, F_t, F, P) un espace probabilisé filtré et $(w_t)_{t>0}$ un mouvement brownien.

$(w_t)_{t>0}$ est un mouvement brownien adapté à la filtration F si:

- Pour tout t, w_t est F_t -mesurable
- Pour tout $t \succ s$, $w_t - w_s$ est indépendant de F_s .

Définition: Martingale

Soit (Ω, A, P) un espace probabilisé muni d'une filtration F.

Une famille de variables aléatoires $\{M_t, t \geq 0\}$ est une martingale par rapport à la filtration F si et seulement si :

- M_t est intégrale pour tout t: $E[|M_t|] < \infty$
- M_t est F_t -mesurable
- Pour tout $t \geq s \geq 0$, $E[M_t | F_s] = M_s$.

Lemme d'Itô

Si X_t est la solution de l'équation aux dérivées partielles: $dX_t = m(X_t, t) dt + \sigma(X_t, t) dW_t$ où W_t est un mouvement brownien et si $\phi(x, t)$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}^+)$, bornée et de dérivée première et seconde également bornée, alors :

$$\begin{aligned} \phi(X_t, t) = & \phi(X_0, 0) + \int_0^t \left(m(X_s, s) \frac{\partial \phi}{\partial t}(X_s, s) \right) ds + \int_0^t \frac{\partial \phi}{\partial x}(X_s, s) \sigma(X_s, s) dW_s \\ & + \frac{1}{2} \int_0^t \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}(X_s, s) \sigma^2(X_s, s) ds \end{aligned}$$

Lemme de Girsanov

Soit $(\Omega, \mathcal{F}_t, \mathcal{F}, P)$ un espace probabilisé filtré dont la filtration est la filtration naturelle d'un mouvement brownien standard $(w_t)_{0 \leq t \leq T}$.

Soit $(\theta_t)_{0 \leq t \leq T}$ un processus adapté tel que $\int_0^T \theta_s ds < \infty$ et tel que le processus

$(L_t)_{0 \leq t \leq T}$ défini par $L_t = \exp\left(-\int_0^t \theta_s dw_s - \frac{1}{2} \int_0^t \theta_s^2 ds\right)$ soit une martingale.

Alors le processus $(B_t)_{0 \leq t \leq T}$ défini par $B_t = w_t + \int_0^t \theta_s ds$ est un mouvement brownien

standard sous la probabilité P^L de densité L_T par rapport à P .

➤ **Notions financières:**

- L'Absence d'Opportunité d'Arbitrage :

L'Absence d'Opportunité d'Arbitrage fait référence à l'impossibilité de réaliser un profit certain avec un investissement nul.

- Marché complet :

Un actif conditionnel (ou contingent) est un produit construit sur les actifs de base (options, produits dérivés, indices,...). un marché est dit **complet** si tout actif conditionnel est simulable.

- Marché liquide :

Un marché **liquide** est un marché sur lequel un investisseur peut effectuer une transaction importante en termes de volume au prix affiché sans que cela ait une incidence sur le prix du titre.

Théorème fondamentale

Harrison et Kreps en 1979 puis Harrison et Pliska en 1981 ont établi un résultat fondamental de la finance.

Dans un marché sans opportunité d'arbitrage (on parle de marché viable), il existe une probabilité P^* équivalente à P sous laquelle les prix actualisés sont des martingales. Si de plus le marché est complet, cette probabilité est unique. On l'appelle la probabilité risque-neutre.

Annexe 3: Les produits d'épargne retraite commercialisés sur le marché marocain.

Le tableau suivant présente l'essentiel (liste non exhaustive) des produits de retraite complémentaire disponibles sur le marché marocain de l'assurance vie.

Tableau : Les produits d'épargne retraite commercialisés sur le marché marocain.

Produit	Assureur	Caractéristiques principales du contrat
Istimrar	Atlanta	<p>-cible: personne âgée de moins 65 ans;</p> <p>-garantie complémentaire: en cas de décès (resp. IAD), versement du capital constitué diminué des avances non remboursées et des rachats partiels effectués aux bénéficiaires désignés (resp. à l'assuré) ;</p> <p>-rachat partiel: 2 fois maximum durant la vie du contrat, ne peut excéder 50% de la valeur du rachat total à la date de demande;</p> <p>-rachat total: met fin au contrat, pénalité de 5% en cas de rachat avant la 10^e année;</p> <p>-versements: programmés ou libres;</p> <p>-avance: ne peut excéder 80% de la valeur du rachat total à la date de demande, elle est consentie pour 5 années et est accordée sous réserve de remboursement de l'avance précédente ;</p> <p>-règlement: sous forme de capital, ou de rentes ou des deux à la fois.</p>
Futuris Entreprise	Axa Assurance	<p>-produit d'épargne retraite collectif</p> <p>-cible: collaborateurs ou membres de tout groupement organisé, âgés de moins de 60 ans à la date d'adhésion;</p> <p>-garantie: constitution d'une retraite complémentaire, en cas de décès ou IAD le montant du compte sera versé aux bénéficiaires désignés.</p>
Futuris Individuel 2	Axa Assurance	Même caractéristiques que Futuris Entreprise, sauf qu'il s'agit d'un contrat individuel.
Assur'Retraite	CNIA SAADA	<p>- produit d'épargne retraite collectif ;</p> <p>-cible: entreprises souhaitant faire bénéficier leurs collaborateurs des avantages de la retraite complémentaire (effectif minimum de 4</p>

		<p>personnes) ;</p> <ul style="list-style-type: none"> -garantie de base: retraite complémentaire -garantie optionnelle : incapacité temporaire et totale de travail ; -versements: périodiques ou libres ; -avance: l'assuré peut la demander à tout moment mais elle ne peut excéder 80% de l'épargne constituée.
<p>Vital Multisupport</p>	<p>La Marocaine Vie</p>	<ul style="list-style-type: none"> -contrat multisupport d'épargne retraite -7 supports d'investissement en plus du support en dhs, changement de placements à tout moment sans aucune imposition -versements: ponctuels ou au choix ; - l'épargne est disponible à tout moment sous forme d'avance ou de rachat ; - en cas de décès, le patrimoine est transmis aux bénéficiaires désignés en toute sécurité; -garantie plancher: permettant le remboursement d'une éventuelle moins-value jusqu'à 1 MDH ; -garantie supplémentaire: en cas de décès accidentel, un capital de 100 000 DH est versé aux bénéficiaires désignés.
<p>Vital Retraite</p>	<p>La Marocaine Vie</p>	<ul style="list-style-type: none"> -objet : constitution d'épargne retraite ; -versement : programmés ou libres (à partir de 300 dhs/mois) ; -épargne disponible à tout moment sous forme d'avance ou de rachat ; -en cas d'invalidité permanente totale pendant la phase d'épargne, prise en charge, en option, de vos primes jusqu'au terme du contrat ; -en cas de décès accidentel, une garantie de « doublement du capital constitué » est assurée.
<p>Al Akhdar Retraite</p>	<p>MCMA</p>	<ul style="list-style-type: none"> -objet : constitution d'une épargne retraite par capitalisation -cible: salariés professionnels âgés de moins de 65 ans à la date de souscription ;

		<p>-versements : périodiques ou libres ;</p> <p>-avance : représentant au maximum 80% de l'épargne ;</p>
Kenz-Epargne retraite entreprise	RMA Watanya	<p>-objet : constitution d'une épargne retraite par capitalisation ;</p> <p>-cible: toute personne morale au profit de ses salariés ;</p> <p>-versements : périodiques ou libres;</p> <p>-garantie complémentaire : incapacité totale temporaire.</p>
Kenz-Epargne retraite particuliers	RMA Watanya	Même chose que Kenz-Epargne retraite entreprises, sauf qu'il s'agit d'un produit individuel.
Sanad Al Hayat	Sanad	<p>-objet : constitution d'une épargne retraite de base ou complémentaire ;</p> <p>-cible : toute personne âgée de moins de 60 ans ;</p> <p>-versements : périodiques ou libres;</p> <p>--rachat partiel: 2 fois maximum durant la vie du contrat, ne peut excéder 50% de la valeur du rachat total à la date de demande;</p> <p>-rachat total: met fin au contrat, pénalité de 5% en cas de rachat avant la 10^e année;</p> <p>-avance: ne peut excéder 80% de la valeur du rachat total à la date de demande, elle est consentie pour 5 années et est accordée sous réserve de remboursement de l'avance précédente ;</p> <p>-règlement: sous forme de capital, ou de rentes ou des deux à la fois.</p>
Age d'or Retraite	Wafa Assurance	<p>-objet: constitution d'une épargne retraite de base ou complémentaire ;</p> <p>-cible : toute personne physique souhaitant préparer sa retraite ;</p> <p>-versements: périodiques ou libres.</p>

Annexe 4 : Cadre réglementaire et fiscal:

Dispositions générales des contrats UC:

Selon **l'article 98** du nouveau code des assurances, les contrats d'assurance sur la vie peuvent être des contrats à capital variable. Dans ce cas, le capital ou la rente est exprimé en unités de compte dites valeurs de référence. Ces unités de compte sont constituées de valeurs mobilières ou de titres figurant sur une liste fixée par la voie réglementaire et prenant en considération la sécurité et la rentabilité de ces valeurs ou titres.

Dans tous les cas, l'assuré ou le bénéficiaire a la faculté d'opter soit pour le règlement en espèces, soit pour la remise de valeurs ou de titres. Toutefois, lorsque les unités de compte sont constituées de titres ou de valeurs non négociables, le règlement ne peut être effectué qu'en espèces.

L'article 99 vient ajouter que pour les contrats d'assurance sur la vie à capital variable prévus à l'article 98 ci-dessus, le capital ou la rente garanti, la prime et la provision mathématique sont exprimés en unités de compte approuvés par l'assuré.

Lorsqu'un contrat d'assurance à capital variable est exprimé en plusieurs unités de compte, la prime correspondante est ventilée dans les mêmes proportions.

Les conditions d'évaluation des unités de compte sont fixées par l'administration qui arrête la date de la valeur liquidative à prendre en considération pour la détermination de la prime, de la provision mathématique, du capital ou de la rente garanti et de leur valeur de rachat.

Pour les valeurs et les titres non cotés en bourse, l'administration fixe leurs valeurs liquidatives sur la base de l'actif net de l'organisme de placement collectif en valeurs mobilières concerné ou tout autre organisme non coté.

Les dispositions relatives aux supports d'investissements:

L'article suivant précise les supports sur lesquels l'assureur peut effectuer ses placements:

ARTICLE PREMIER. - En application du 1) de l'article premier du décret n° 2-04-355 du 19 ramadan 1425 (2 novembre 2004) sus visé, les unités de compte sont constituées d'actions des sociétés d'investissement à capital variable ou de parts de fonds communs de placement régis par le dahir portant loi n° 1-93-213 du 4 rabia II 1414 (21 septembre 1993) relatif aux organismes de placement collectif en valeurs mobilières tel qu'il a été modifié et complété, dont l'assureur dispose dans son actif.

Valorisation et dates de valeur:

ART. 2. - Les unités de compte visées à l'article premier ci-dessus, servant de base aux contrats d'assurances à capital variable, sont évaluées à leur valeur liquidative telle que prévue à l'article 13 du dahir portant loi n° 1-93-213 précité.

La date de la valeur liquidative précitée à prendre en considération pour la conversion de la prime ou cotisation et de toute somme à verser par l'assureur selon les dispositions contractuelles, est fixée par le contrat. Cette date ne peut être postérieure de plus de 30 jours à

la date de paiement de la prime ou cotisation ou de présentation à l'assureur de la demande par le bénéficiaire du contrat pour le règlement des sommes à verser par l'assureur.

Le délai prévu à l'alinéa précédent n'est pas applicable aux paiements effectués par les parties au contrat, dont les dates d'exigibilité sont fixées par ledit contrat.

ART. 3. Le montant visé au 3) de l'article premier du décret n° 2-04-355 du 19 Ramadan 1425 (2 Novembre 2004) précité, est fixé :

-pour les rentes annuelles, à une fois la tranche de revenu exonérée de l'impôt général sur le revenu prévue par l'article 94, tel modifié et complété, de la loi n° 17-89 relative à l'impôt général sur le revenu ou l'équivalent en unités de compte;

-pour les capitaux, à dix (10) fois la tranche de revenu exonérée de l'impôt général sur le revenu prévue par l'article 94, tel modifié et complété, de la loi n° 17-89 relative à l'impôt général sur le revenu ou l'équivalent en unités de compte.

Les dispositions de l'alinéa précédent sont applicables aux capitaux ou rentes stipulés à la souscription, abstraction faite de la revalorisation au titre des participations des assurés aux bénéfices ou de la réévaluation des unités de compte.

Le droit à l'information:

ART. 10. - Le contrat d'assurance sur la vie ou de capitalisation à capital variable doit prévoir qu'en cas de chute brutale, dont le seuil est fixé par ledit contrat, de la valeur d'une ou plusieurs unités de compte auxquelles il est adossé, l'assureur est tenu d'en informer le souscripteur, dans un délai lui permettant de décider du sort de son contrat et au plus tard dans les dix (10) jours à compter de l'événement.

ART. 13. - La notice d'information prévue à l'article 106 de la loi n° 17-99 précitée, doit comporter au moins les indications suivantes :

- la ou les garantie(s) objet du contrat;
- les exclusions et les restrictions de garanties, les cas de déchéance;
- les conditions d'octroi du rachat et de l'avance si le contrat en prévoit;
- les conditions de revalorisation et de la participation aux bénéfices ;
- les unités de compte servant de base au contrat;
- les modalités de calcul de la prime ou cotisation;
- les conséquences des fausses déclarations à l'adhésion ou à l'occasion d'un sinistre ;
- les conséquences du non-paiement de la prime ou cotisation;
- la clause d'arbitrage pour les contrats qui en comportent;
- les formalités de déclaration des sinistres, en particulier les pièces à fournir pour bénéficier des prestations garanties par le contrat et les délais de fourniture de ces pièces.

ART. 9. - Le contrat doit fixer le montant à partir duquel la valeur de rachat est considérée insuffisante pour l'application de l'article 88 de la loi n° 17-99 précitée.

Il doit également prévoir qu'en cas de résiliation du contrat en application des dispositions de l'article 86 de la loi n° 17-99 précitée, la provision mathématique dudit contrat est restituée à l'assuré.

Le contrat de capitalisation doit prévoir qu'en cas de suspension en application des dispositions de l'article 102 de la loi n° 17-99 précitée, le capital ou la rente garanti ne peut être inférieur au montant que l'assuré obtiendrait en appliquant comme prime unique à la souscription d'une assurance de même nature, et conformément aux tarifs d'inventaire en vigueur lors de l'assurance primitive, une somme égale à la provision mathématique du contrat à la date de suspension.

Arrêté du ministre des finances et de la privatisation n° 1548-05 du 28 Joumada II 1426 (4 Août 2005) relatif aux entreprises d'assurance et de réassurance:

ART. 11. - Lorsque le contrat d'assurance sur la vie ou de capitalisation prévoit le prélèvement de chargements de gestion et/ou d'acquisition par l'assureur, ces frais doivent être libellés en montant ou calculés en pourcentage des primes ou cotisations, des provisions mathématiques, du capital ou rente garanti ou de la valeur de rachat .

En outre, le contrat doit indiquer le mode de financement de ces chargements.

Annexe 5: Fonctionnement des supports d'investissement de La Marocaine Vie

1.1. Définition des OPCVM:

D'une manière générale, les OPCVM (Organismes de Placements Collectifs en Valeurs Mobilières) sont des instruments d'épargne collective. En effet, plusieurs épargnants mettent en commun leurs investissements dans un portefeuille constitué principalement de valeurs mobilières (actions ou obligations). Ils ont été mis en place par le législateur dans le but d'assurer aux épargnants l'accès aux marchés financiers dans les meilleures conditions de sécurité et de performance.

Dans cette forme, les épargnants ne sont plus directement détenteurs de titres de propriétés ou de créances de sociétés, mais d'actions ou de parts d'OPCVM elles-mêmes investies en valeurs mobilières.

Les OPCVM existent sous deux formes juridiques distinctes, mais présentent les mêmes règles de fonctionnement: les Sociétés d'Investissement à Capital Variable (SICAV) et les Fonds Communs de Placement (FCP).

La SICAV est une société anonyme ; tout investisseur qui souscrit des actions devient actionnaire et possède le droit d'exprimer son avis sur la gestion lors des assemblées générales.

Le FCP est une copropriété de valeurs mobilières qui n'a pas de personnalité morale. Sa gestion est assurée par un établissement de gestion de FCP agissant au nom des porteurs.

L'investisseur en actions de SICAV est donc un actionnaire, alors que celui d'un FCP est désigné sous le nom de porteur de parts.

1.2. Les différentes classifications d'un OPCVM:

Il existe quatre grandes catégories d'OPCVM qui se différencient entre eux par la nature des valeurs mobilières constituant leur portefeuille.

Les OPCVM Actions: ce sont des OPCVM dont le portefeuille est constitué majoritairement d'actions et valeurs assimilées investis au minimum à hauteur de 60% en actions de sociétés cotées à la Bourse de Casablanca, ils sont « risqués » car plus volatiles et généralement plus performants mais sur un horizon de placement plus long.

Les OPCVM Diversifiés: ce sont des OPCVM investis en actions et obligations, ils permettent à l'épargnant de profiter au mieux du dynamisme de la bourse et de bénéficier de la sécurité des placements obligataires.

Les OPCVM Monétaires: investis en titres du marché monétaire et autres titres de créances négociables à court terme, ils sont destinés aux institutionnels et aux entreprises pour une optimisation de la gestion de leur trésorerie et aux particuliers pour une meilleure rentabilisation de leurs excédents.

Les OPCVM Obligataires: investis au minimum à hauteur de 90% en obligations, ces OPCVM sont destinés aux épargnants recherchant un placement à moyen terme, peu risqué mais dont la performance reste modeste et régulière dans le temps.

1.1. Fonctionnement des OPCVM:

Les FCP sont obligatoirement gérés par des établissements de gestion assurant exclusivement l'activité de gestion de FCP, alors que les SICAV ont la possibilité de s'autogérer. En outre, les SICAV et les établissements de gestion de FCP peuvent déléguer leur gestion à des établissements délégués de gestion.

Pour la conservation des actifs de l'OPCVM ainsi que pour le contrôle de la régularité des décisions de gestion, les SICAV et les FCP font appel à un organisme dépositaire qui doit être unique et distinct de la société de gestion.

Les actions de SICAV et parts de FCP sont commercialisés par les banques, les sociétés de bourse, les compagnies d'assurance et de prévoyance sociale, la CDG et les sociétés de gestion.

Les actions ou parts d'OPCVM peuvent être souscrites, à tout moment, auprès des réseaux de commercialisation. Les souscriptions sont effectuées à un prix appelé valeur liquidative et calculé périodiquement. La périodicité de calcul de la valeur liquidative peut être soit quotidienne, soit hebdomadaire dans la majorité des cas.

$$\text{Valeur liquidative} = (\text{Actif Net}) / (\text{nombre de parts de l'OPCVM})$$

1.4. La gamme d'OPCVM de La Marocaine Vie:

Pour ses contrats en unités de compte (par exemple Vital Retraite Multisupport), La Marocaine Vie utilise des supports d'investissement qui sont exclusivement des OPCVM; conformément à la réglementation marocaine.

Le tableau suivant dresse la liste des sept OPCVM qui servent de supports aux contrats en unités de compte de La Marocaine Vie.

OPCVM	Catégorie	Destiné au placement	Valorisation	Degré de risque*	Rendement espéré*
Sicav SG VALEURS	Monétaire	Excédents de trésorerie à placer sur des durées courtes et sans risque de perte du capital	Quotidienne	1	1
Fcp SG TRESOR PLUS	Obligations court terme	Excédents de trésorerie à placer sur une durée comprise entre 6 et 12 mois	Hebdomadaire	2	2
Sicav SG OBLIG PLUS	Obligations moyen et long terme	Epargne et excédents de trésorerie à placer à moyen et long terme	Hebdomadaire	3	3
Fcp SG OPTIMAL	Obligations moyen et long terme	Epargne à placer à moyen et long terme, avec faible aversion	Hebdomadaire	3	3

OBLIG		au risque			
Sicav SG PERSPECTIVES	Diversifié	Epargne à placer à moyen et long terme	Hebdomadaire	4	4
Sicav SG EXPANSION	Actions	Epargne à placer à long terme	Hebdomadaire	5	5
FCP SG ACTIONS PLUS	Actions	Epargne à placer à long terme, dans des valeurs uniquement industrielles	Hebdomadaire	5	5

*L'échelle de risque et de rendement est croissante et varie de 1 à 5.

ANNEXE 6 : Simulation de Monte-Carlo

Le but de cette annexe est de justifier la méthode de Monté-Carlo, d'indiquer la précision qu'elle fournit et les intervalles de confiance qu'elle peut obtenir.

Cette méthode qui converge « lentement » a comme intérêt d'être insensible à la dimension des problèmes étudiés contrairement à des méthodes classiques d'analyse numérique qui ne sont performantes qu'en petite dimension.

La justification théorique de la méthode est la loi des grands nombres qui permet de ne faire appel qu'à une réalisation d'un échantillon, c'est-à-dire à la suite $X_n(\omega)$ pour un seul ω .

Théorème 1 : Soit $X_n = (X_n^k, 1 \leq K \leq d), n \geq 1$ une suite de variables aléatoires à valeurs dans \mathbb{R}^d indépendantes de même loi (i.i.d.) intégrables. Alors, pour presque tout $\omega \in \Omega$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \overline{X}_n(\omega) = E(X_1)$$

$$\text{Avec : } \overline{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

La vitesse de convergence est bien sûr un problème crucial pour maîtriser l'erreur commise en approximant la valeur souhaitée $E(X)$ par $\overline{X}_n(\omega)$ que l'on peut simuler. L'inégalité de Bienaymé-Chebychev donne une première estimation très grossière de cette erreur :

Lemme 1 : Soit $X_n = (X_n^k, 1 \leq K \leq d), n \geq 1$ une suite de variables aléatoires à valeurs dans \mathbb{R}^d i.i.d. et de carré intégrable. Alors, si $Var(X_1) = E(X_1^2) - E(X_1)^2$, pour presque tout $\theta > 0$:

$$P(\overline{X}_n - E(X_1) \geq \theta) \leq \frac{Var(X_1)}{n\theta^2}$$

Cette inégalité donne de très mauvaises estimations de la probabilité que la moyenne empirique soit loin de l'espérance et peut être nettement améliorée par un résultat très simple de grandes déviations sous des hypothèses renforcées d'intégrabilité. Ainsi, lorsque les X_n ont des moments exponentiels, le théorème suivant de Chernov montre que la probabilité de \overline{X}_n appartienne à un intervalle qui ne contient pas $E(X_1)$ converge vers 0 à une vitesse exponentielle.

Soit X une variable aléatoire réelle, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on note $\Phi_X(t) = \ln[E(e^{tx})]$ la log-Laplace de X et $D_X = \{t \in \mathbb{R} : \Phi_X(t) < +\infty\}$ le domaine de Φ_X .

Lemme 2 : Soit $X_n = (X_n^k, 1 \leq K \leq d), n \geq 1$ une suite de variables aléatoires à valeurs dans \mathbb{R}^d i.i.d. et de carré intégrable. Alors, si $Var(X_1) = E(X_1^2) - E(X_1)^2$, pour presque tout $\theta > 0$:

$$\varphi_X(x) = \sup\{tx - \Phi_X(t) : t \in \mathbb{R}\} = \sup\{tx - \Phi_X(t) : t \in D_X\}$$

La transformée de Cramer de X . Soit $(X_n, n \geq 1)$ une suite de variables aléatoires réelles i.i.d de même loi que X , alors pour tout $a < E(X) < b$:

$$P(\overline{X}_n \geq b) \leq e^{-n\varphi_X(b)} \quad \text{et} \quad P(\overline{X}_n \leq a) \leq e^{-n\varphi_X(a)}$$

Pour obtenir des intervalles de confiance de $E(X_1)$, on utilise le théorème de la limite centrale suivant.

Théorème 2 : Soit $(X_n, n \geq 1)$ une suite de variables aléatoires à valeurs dans \mathbb{R}^d i.i.d. et de carré intégrable d'espérance m et de variance σ^2 . Alors la suite $\frac{\sqrt{n}}{\sigma} (\bar{X}_n - m)$ converge en loi vers une variable N de loi gaussienne centrée réduite.

Corolaire 1 : Soit $(X_n, n \geq 1)$ une suite de variables aléatoires à valeurs dans \mathbb{R}^d i.i.d. et de carré intégrable d'espérance m et de variance σ^2 . Alors pour toute fonction $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue bornée (resp. continue sauf en un nombre fini de point), si N désigne une variable aléatoire gaussienne $N(0,1)$:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} E \left[f \left(\frac{\sqrt{n}}{\sigma} (\bar{X}_n - m) \right) \right] = E[f(N)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

De plus pour tout couple de nombre réel $a < b$, on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P \left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}} a < \bar{X}_n - m < \frac{\sigma}{\sqrt{n}} b \right) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

Une table de fonction de répartition d'une loi gaussienne centrée réduite montre que si N est $N(0,1)$, $P(|N| \leq 1,96) = 0,95$. On en déduit que pour n assez grand,

$$P \left(|\bar{X}_n - E(X_1)| \leq 1,96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right) \sim 0,95$$

C'est-à-dire que l'on a un intervalle de confiance de $E(X_1)$ à 95% en posant

$$\left[\bar{X}_n - 1,96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \bar{X}_n + 1,96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right]$$

L'ordre de grandeur de l'erreur commise étant $1,96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, il faut impérativement estimer l'écart type σ s'il est inconnu. C'est le but de résultat suivant :

Théorème 3 : Soit $(X_n, n \geq 1)$ une suite de variables aléatoires à valeurs dans \mathbb{R}^d i.i.d. et de carré intégrable. Notons \bar{X}_n la moyenne empirique de cet échantillon ; la variance empirique de l'échantillon est :

$$\tilde{\sigma}_n^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2 = \frac{n}{n-1} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 - \bar{X}_n^2 \right)$$

Alors $\tilde{\sigma}_n^2$ est un estimateur sans biais consistant de σ^2 . Ce théorème montre qu'en remplaçant σ par $\tilde{\sigma}_n$, on obtient un intervalle de confiance de $E(X_1)$ avec une probabilité proche de 95% (quand n est grand)

$$\left[\bar{X}_n - 1,96 \frac{\tilde{\sigma}_n}{\sqrt{n}}; \bar{X}_n + 1,96 \frac{\tilde{\sigma}_n}{\sqrt{n}} \right]$$

Signalons enfin que le Théorème de la Limite Centrale peut parfois être amélioré, par exemple, en imposant un peu plus d'intégrabilité.

Annexe 7: Le modèle de Black & Scholes

Au début des années 1970, Fisher Black et Myron Scholes ont opéré une avance majeure en matière d'évaluation d'options. Ces contributions et l'ensemble des développements auxquels elles sont donné lieu sont à l'origine du célèbre modèle de Black & Scholes. Ce dernier a eu un très grand impact sur les méthodes utilisées par les traders, tant en matière d'évaluation d'options que dans la mise au point de techniques de couverture.

Cette annexe expose les caractéristiques de ce modèle. Nous présentons, dans un premier lieu, le processus stochastique généralement retenu pour modéliser le cours d'action ne versant pas de dividendes

La propriété de Markov :

Un processus de Markov est un cas particulier de processus stochastique pour lequel seule la valeur présente d'une variable est utile pour anticiper sa distribution future. L'historique et la façon dont le présent a émergé d'une trajectoire passée ne sont pas pertinents.

Les cours des actions sont généralement censés suivre des processus de Markov : les prédictions sur la valeur future d'une action n'ont aucun rapport avec son prix de la semaine précédente ou l'année précédente. Les cours futurs sont incertains et ne doivent être exprimés qu'en termes de distributions de probabilité.

Le processus de Wiener :

Un processus de Wiener standard, z , est un processus décrivant l'évolution d'une variable dont les variations sont normalement distribuées. Le drift ou le paramètre de tendance centrale, de ce processus est nul et son paramètre de variance est égal à 1 par unité de temps.

Un processus de Wiener général pour une variable x peut être défini en fonction de dz ainsi :

$$dx = a \cdot dt + b \cdot dz \quad \text{Ou } a \text{ et } b \text{ sont des constantes, } b > 0.$$

Pour comprendre cette équation, il est utile de considérer les deux termes du membre de droite de l'équation séparément. Le terme $a \cdot dt$ signifie que x a un drift égal à a . sans le terme $b \cdot dz$, l'équation serait :

$$dx = a \cdot dt$$

Que l'on peut écrire :

$$\frac{dx}{dt} = a$$

Et l'intégration de cette équation par rapport au temps donne :

$$x = x_0 + a \cdot t$$

Où x_0 est la valeur de x à la date zéro. Dans une période de T , la valeur de x augmente de $a \cdot T$. Le terme de $b \cdot dz$ peut être considéré comme l'ajout de bruit à la trajectoire

suivie par x . cette quantité est égale à b fois celle apportée par un processus standard de Wiener.

Ainsi, le processus de Wiener général a un drift égal à a et un paramètre de variance égal à b^2 .

La propriété de log-normalité

Nous allons à présent utiliser le lemme d'Itô pour déduire le processus suivi par $\ln S$ lorsque S suit le processus suivant :

$$dS = \mu S dt + \sigma S dz$$

Les notations suivantes seront adoptées dans la suite :

μ est l'espérance de la rentabilité de l'action

σ est la volatilité du cours de l'action

On prend $G = \ln S$, on obtient :

$$\frac{\partial G}{\partial S} = \frac{1}{S}, \quad \frac{\partial^2 G}{\partial S^2} = -\frac{1}{S^2}, \quad \frac{\partial G}{\partial t} = 0$$

On aura donc :

$$dG = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) dt + \sigma dz$$

Sachant que μ et σ sont constantes, cette équation montre que $G = \ln S$ suit un processus de Wiener général de drift égal à $\mu - \frac{\sigma^2}{2}$ et un paramètre de variance égal à σ^2 . La variation de $\ln S$, entre la date zéro et n'importe quelle date futur T , suit une loi normale de moyenne $\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) T$ et de variance $\sigma^2 T$.

Cela signifie que :

$$\ln(S_T) - \ln(S_0) \sim \varphi \left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) T, \sigma \sqrt{T} \right]$$

Ou encore :

$$\ln(S_T) \sim \varphi \left[\ln(S_0) + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) T, \sigma \sqrt{T} \right]$$

S_T est le cours de l'action à la date T , S_0 est la valeur présente de l'action et $\varphi(m, s)$ désigne une loi normale de moyenne m et d'écart-type s .

Hypothèses de Black & Scholes :

L'obtention de l'EDP de Black & Scholes nécessite les hypothèses suivantes :

- ❖ Le cours de l'action suit le processus présenté ci-dessus avec μ et σ sont constants
- ❖ Il n'y a aucune restriction sur les ventes à découvert. Le produit de ces ventes est immédiatement et intégralement disponible.

- ❖ Il n'y a pas de frais de transactions ou d'impôts. Tous les actifs financiers sont parfaitement divisibles.
- ❖ Il n'y a pas de dividende sur le sous-jacent pendant la durée de vie de l'actif dérivé.
- ❖ Le marché fonctionne en continu.
- ❖ Le taux sans risque, r , est constant et fixe quelle que soit la maturité du produit dérivé.

Démonstration de l'équation aux dérivées partielles de Black & Scholes :

Le processus suivi par l'action est un mouvement brownien géométrique. Il est caractérisé par :

$$ds = \mu S dt + \sigma S dz$$

Notons f le prix d'une option d'achat ou de tout autre produit dérivé lié au titre S . la variable f est alors une fonction de S et t . A partir du lemme d'Itô, nous déduisons la relation suivante :

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial S} \mu S + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \right) dt + \frac{\partial f}{\partial S} \sigma S dz$$

Un portefeuille approprié peut être défini de la façon suivante :

- ❖ Vente d'une unité du produit dérivé ;
- ❖ Achat de $\frac{\partial f}{\partial S}$ actions.

Le détenteur du portefeuille est alors en position courte (vendeur) sur le produit dérivé et en position longue (acheteur) sur $\frac{\partial f}{\partial S}$ actions. La valeur du portefeuille, notée Π , s'écrit alors :

$$\Pi = -f + \frac{\partial f}{\partial S} S$$

La variation $\Delta \Pi$ de la valeur du portefeuille au cours d'un intervalle de temps Δt est donnée par :

$$\Delta \Pi = -\Delta f + \frac{\partial f}{\partial S} \Delta S$$

En substituant à Δf et ΔS nous obtenons :

$$d\Pi = \left(-\frac{\partial f}{\partial t} \mu S - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \right) \Delta t$$

Puisque cette équation ne comporte pas l'expression Δz , le portefeuille doit être sans risque pendant l'intervalle de temps Δt . Les hypothèses énoncées à la section précédente impliquent qu'un tel portefeuille doit procurer une rentabilité égale au taux sans risque. Dans le cas contraire, les investisseurs profiteraient d'une opportunité d'arbitrage. Deux possibilités se représentent alors : premièrement, si la rentabilité du portefeuille est supérieure au taux sans risque, l'investisseur emprunte de l'argent au taux sans risque pour le réinvestir en achetant le portefeuille engendre une rentabilité inférieure au taux sans risque afin de dégager un profit totalement sans risque. Nous pouvons donc écrire :

$$\Delta\Pi = r\Pi\Delta t$$

Où r représente le taux sans risque.

Si nous remplaçons les termes Π et $\Delta\Pi$ de cette équation par leurs expressions données, nous obtenons :

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \sigma^2 S^2\right) \Delta t = r \left(f - \frac{\partial f}{\partial S} S\right) \Delta t$$

Et donc :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + rS \frac{\partial f}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} = rf$$

Cette équation est l'équation aux dérivées partielles de Black & Scholes. Elle a plusieurs solutions correspondant à tous les produits dérivés qui peuvent avoir S comme actif sous-jacent. La solution de l'équation dépend alors des conditions aux bornes qui caractérisent le produit dérivé considéré. Ces

conditions précisent les valeurs de l'actif dérivé analysé aux bornes des ensembles de valeurs possibles de S et t . par exemple le cas d'un put européen, elle s'écrit :

$$f = \max(k - S; 0) \text{ quand } t = T$$

Notons que le portefeuille utilisé dans la dérivation n'est pas un portefeuille sans risque de façon permanente. Il est sans risque uniquement pendant un intervalle de temps infinitésimal. En effet, dès que S et t varient, $\frac{\partial f}{\partial S}$ varie aussi. Ainsi, afin de conserver le caractère non risqué du portefeuille, il est nécessaire d'ajuster fréquemment les positions relatives de l'action et du produit dérivé au sein du portefeuille.

Démonstration de la formule de Black & Scholes :

Nous allons démontrer le résultat de Black & Scholes en étudiant tout d'abord ce résultat fondamental :

Si suit une loi log-normale et si s désigne l'écart-type de $\ln V$, alors :

$$E(V - K; 0) = E(V)N(d_1) - KN(d_2)$$

Où :

$$d_{1,2} = \frac{\ln[E(V)/K] \pm s^2/2}{s}$$

Et E désigne l'espérance mathématique.

Démonstration : Notons $g(V)$ la fonction de densité de probabilité de V ; on a alors :

$$E[\max(V - K; 0)] = \int_K^{+\infty} (V - K)g(V)dV$$

La variable $\ln V$ est distribuée selon une loi normale d'écart-type s . grâce aux propriétés de la distribution log-normale, la moyenne de $\ln V$ est égale à m , où :

$$m = \ln[E(V)] - s^2/2$$

Procédons au changement de variable :

$$Q = \frac{\ln(V) - m}{s}$$

Cette variable est gaussienne centrée-réduite. Notons $h(Q)$ la fonction de densité de Q , définie par :

$$h(Q) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-Q^2/2}$$

En utilisant l'équation (13A.4) pour transformer le membre de droite de l'équation (13A.5) en intégrale par rapport à Q au lieu de V , nous obtenons :

$$E[\max(V - K; 0)] = \int_{(\ln(K)-m)/s}^{+\infty} (e^{Qs+m} - K)h(Q)dQ$$

Ou encore :

$$E[\max(V - K; 0)] = \int_{(\ln(K)-m)/s}^{+\infty} e^{Qs+m}h(Q)dQ - K \int_{(\ln(K)-m)/s}^{+\infty} h(Q)dQ$$

On écrit alors :

$$\begin{aligned} e^{Qs+m}h(Q) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{(-Q^2+2Qs+2m)}{2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(Q-s)^2+2m-s^2}{2}} \\ &= \frac{e^{m+\frac{s^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(Q-s)^2}{2}} \\ &= e^{m+\frac{s^2}{2}} h(Q - s) \end{aligned}$$

L'équation (13A.5) devient alors :

$$E[\max(V - K; 0)] = \int_{(\ln(K)-m)/s}^{+\infty} h(Q - s)dQ - K \int_{(\ln(K)-m)/s}^{+\infty} h(Q)dQ$$

Si on note $N(x)$ la probabilité qu'une variable normale centrée-réduite soit inférieure à x , la première intégrale de l'équation (13A.7) est égale à :

$$1 - N\left[\frac{(\ln(K) - m)}{s} - s\right]$$

Ou encore :

$$N\left[\frac{(-\ln(K) - m)}{s} + s\right]$$

En substituant à m son expression déduite de l'équation (13A.5), nous obtenons :

$$N\left[\frac{\left(-\ln\left(\frac{E(V)}{K}\right) + \frac{s^2}{2}\right)}{s}\right] = N(d_1)$$

De même, la seconde intégrale de l'équation (13A.6) est $N(d_2)$ l'équation (13A.8) devient donc :

$$E(\max[V - K; 0]) = e^{m + \frac{s^2}{2}}N(d_1) - KN(d_2)$$