

Royaume du Maroc
Haut Commissariat au Plan
Institut National de Statistique et d'Economie Appliquée



RAPPORT DU PROJET DE FIN D'ÉTUDES

Réalisé par
Soufiane FADILI
Option : ACTUARIAT-FINANCE

SUJET:
L'APPORT DU STOCHASTIQUE DANS L'ÉTUDE
DE LA PÉRENNITÉ DES RÉGIMES DE RETRAITE AU MAROC
APPLICATION À LA CIMR

Organisme d'accueil : MAZARS
Encadrante externe : Mlle LAHLOU Roukia
Encadrant interne : M. MARRI Fouad



Année universitaire : 2013-2014

A la mémoire de Meriam AZZOUZI, que Dieu ait ton âme en sa sainte miséricorde.

Dédicace

Je dédie ce rapport à :

- **La mémoire de mon grand père Simohamed et de ma tante Aziza** : que Dieu vous couvre de sa miséricorde.
- **Ma mère** qui, pour son bonheur j'existe. Aucune expression d'amour ne pourra décrire ce que je porte pour toi.
- **Mon père** qui a su sculpter délicatement la personne que je suis. Je peux te le confier : tu es le meilleur père au monde.
- **Mon frère Anas** pour tous les moments de folie qu'on a partagés. Puisse Dieu le tout puissant nous unir éternellement. Prends soin de ma belle sœur **Hanae**.
- **Ma petite muse Safia « Fourouj »** : tu illumines ma vie de bonheur. Si la terre tourne mal pour toi, rappelle toi que ton frère est toujours présent.
- **Mes grands parents** : que Dieu vous protège.
- **Mes oncles Ahmed, Naoufel, Taoufiq, Hassan, Allal, Jaouad et Mohamed ainsi que mes deux belles tantes, Souad et Hassnae** : vous êtes le pilier de bonheur de ma petite famille. Que Dieu guide vos familles.
- **Housna El Gamah** pour tous les hauts et les bas que tu partages avec moi. Merci d'exister.
- **Yassir, Mouad, Adam, Fingolfin, Anass, Anas, Abdou, Amine(s), Noussayba, Azzam, RabiiD et Akram** : Merci pour votre écoute. Je vous souhaite bon courage mes très chers.
- **Tous ceux que j'ai involontairement oubliés** : ce modeste travail vous est dédié.

Soufiane FADILI

Remerciements

AVANT de développer le présent rapport, je tiens tout d'abord à remercier toutes les personnes qui ont contribué de près ou de loin au bon déroulement de mon stage, et toutes les personnes qui m'ont formé et accompagné tout au long de cette expérience professionnelle avec beaucoup de patience et de pédagogie, à savoir :

Mlle LAHLOU ROUKIA : Consultante au sein du département financier à Mazars, lauréate de l'INSEA. Merci de m'avoir accompagné tout au long de ce projet.

M. MARRI Fouad : professeur d'actuariat à l'INSEA. Vos précieux conseils m'ont été très utiles, mes remerciements les plus respectueux vous sont adressés.

Mlle SALIH Hassnae : Stagiaire à Mazars, étudiante à l'INSEA. Merci pour ton soutien moral et ta bonne humeur.

Mme BENKHALDOUNE HALA : Consultante au sein du département financier à Mazars. Vos remarques m'ont été très instructives, je vous en remercie énormément.

J'exprime également ma gratitude à l'égard de l'ensemble du personnel du siège de *Mazars* qui ont facilité mon incursion, et n'ont pas hésité à me transmettre leurs connaissances, leurs méthodes de travail, leurs expériences, leurs conseils pour surmonter les différentes difficultés que j'ai dû rencontrer lors de cette expérience professionnelle, je les remercie également pour leurs sympathie et soutien incommensurables qu'ils m'ont accordés.

Résumé

CE rapport traite la validation de la pérennité de la *Caisse Interprofessionnelle Marocaine de Retraite*. Dans un contexte où les conditions économiques sont très volatiles, la *C.I.M.R* établit à chaque arrêté des comptes un bilan actuariel pour s'assurer de la bonne santé du régime sur un horizon lointain.

Si les projections à court-terme reflètent plus ou moins la réalité économique actuelle du régime et ne demandent pas une modélisation des hypothèses futures, l'étude de l'apport du stochastique dans ces dernières devient capital si l'horizon grandit. En effet, celui-ci permet de vérifier si, dans le cas de situations financières ou démographiques précaires, le régime est-il réellement capable d'honorer ces engagements ?

C'est dans ces circonstances que nous avons essayé d'apporter du stochastique au paramètre le plus influant : **le taux de rendement du placement de la réserve de prévoyance**.

En effet, chaque année, la *C.I.M.R* place sa réserve pour récupérer un intérêt en fin de période. Celui-ci dépend bien évidemment de la performance du portefeuille du régime dont la réserve est influencée principalement par le taux de rendement des placements. Nous avons donc modélisé le taux de rendement des placements à l'aide des modèles stochastiques des taux d'intérêt à savoir :

- *Vasiček*.
- *Cox Ingersoll Ross (CIR)*.

et projeté leur performance sur un horizon lointain et finalement, vérifié les critères de pérennité du régime.

Notre conviction est que ce travail constitue un moyen d'assimilation du système de retraite en points de la CIMR ainsi que la méthodologie des projections stochastiques. Cela est une méthode pédagogique qu'un proverbe chinois dicte de la façon suivante :

我听见我忘记；我看见我记住；我做我了解。

(J'entends et j'oublie ; je vois et je me souviens ; je fais, alors je comprends.)

Mots Clés

- *C.I.M.R*, retraite, réserve de prévoyance, modèles stochastiques des taux d'intérêt, R, VBA.

Table des matières

Remerciements	0
Résumé	0
Table des figures	5
Liste des tableaux	6
Introduction	7
I Présentation de l'organisme d'accueil	8
1 Mazars à l'international	10
1.1 Présentation	10
1.2 Les règles du partnership intégré : Démocratie et transparence	11
1.3 Dates clés	11
2 Mazars au Maroc	12
2.1 Présentation	12
2.2 Organisation	13
2.3 Offre de service	14
II La retraite au Maroc	15
3 Les différents régimes	17
3.1 Définition	17
3.2 Types de régimes de retraite	17
3.2.1 Régimes obligatoires / régimes facultatifs	18
3.2.1.1 Régimes obligatoires	18
3.2.1.2 Régimes facultatifs	18
3.2.2 Régimes de base / régimes complémentaires	18
3.2.2.1 Régimes de base	18
3.2.2.2 Régimes complémentaires	18
3.2.3 Régimes mono-pilier / régimes multi-piliers	18
3.2.3.1 1 ^{er} pilier	18
3.2.3.2 2 ^{ème} pilier	19
3.2.3.3 3 ^{ème} pilier	19
3.2.4 Régimes en points	19
3.3 Systèmes de financement des régimes de retraite	19
3.3.1 Définition	19
3.3.2 Types de systèmes de financement	19
3.3.2.1 Financement par répartition	19
3.3.2.2 Financement par capitalisation	20
3.3.2.3 Régimes mixtes	20
3.3.3 Régimes à prestations définies / Régimes à cotisations définies	20
3.3.3.1 Régimes à prestations définies	20
3.3.3.2 Régimes à cotisations définies	20

3.4	Les régimes de retraite au Maroc	21
3.4.1	Comparaison des régimes	21
3.4.2	Système de retraite actuel	21
4	Zoom sur le régime de la CIMR	22
4.1	Présentation	22
4.2	Historique de la CIMR	23
4.3	Fonctionnement	23
4.3.1	Éligibilité	23
4.3.2	Ressources	23
4.3.2.1	Remarque	24
4.3.3	Paramètres de base	24
4.3.3.1	Remarques	24
4.3.4	Droits de la retraite	24
4.3.5	Modes de liquidation	24
4.3.6	Âge de départ à la retraite	25
4.3.7	Réversions	25
4.4	« Régime à 55 ans »	25
4.5	Critères de pérennité	25
III	Fiabilisation et traitement des données	26
5	Fiabilisation et traitement des données	28
5.1	Fiabilisation des données	28
5.1.1	Plusieurs acteurs	28
5.1.2	Données sur les actifs cotisants et ayants droit	28
5.1.2.1	Anomalies détectées et traitements	29
5.1.3	Fichier des allocataires	29
5.2	Traitement des données	29
5.2.1	Fichier des actifs cotisants et des ayants droit : affiliés	29
5.2.1.1	Agrégation des données	29
5.2.1.2	Traitement des données	30
5.2.2	Fichier des retraités et ayants cause : Allocataires	30
5.2.2.1	Agrégation des données	30
IV	Modélisation de la CIMR	31
6	Algorithme	33
6.1	Explications	34
7	Projections actuarielles	35
7.1	Etape 1 : Contributions versées et points attribués de l'année	35
7.2	Etape 2 : Solde de la population des affiliés (actifs cotisants et ayants droit) en fin d'année	36
7.3	Etape 3 : Prise en compte des nouvelles affiliations	36
7.4	Etape 4 : Mise à jour des informations relatives aux affiliés	37
7.5	Etape 5 : Mise à jour de la population des allocataires (retraités + ayants cause)	38
7.6	Etape 6 : Mise à jour des informations relatives aux allocataires	38
7.7	Etape 7 : Détermination et enregistrement des flux financiers	40
7.8	Etape 8 : Autres flux	40
7.9	Etape 9 : Mise à jour de la réserve	40

8 Hypothèses actuarielles	42
8.1 Présentation des données	42
8.1.1 affiliés actifs et ayants droit	42
8.1.2 Allocataires : retraités directs et réversataires	44
8.2 Hypothèses actuarielles	44
8.2.1 Hypothèses démographiques	44
8.2.1.1 Table de mortalité	44
8.2.1.2 Hypothèse sur la nuptialité et la différence d'âge entre les conjoints	45
8.2.2 Hypothèses économiques et financières	45
8.2.3 Hypothèses propres à la CIMR	46
8.2.4 Comportements sociaux des affiliés	48
9 Résultats et tests de sensibilité	50
9.1 Réserve de prévoyance à l'horizon de 60 ans	50
9.2 Tests de sensibilité	51
V L'apport du stochastique	52
10 Le cadre théorique	54
10.1 Choix des modèles	54
10.2 Modèle de Vasiček (1977)	55
10.2.1 Présentation du modèle	55
10.2.2 Estimation des paramètres	55
10.3 Modèle de COX, INGERSOLL, ROSS (CIR) (1985)	56
10.3.1 Estimation des paramètres	57
10.4 Avantages et inconvénients des deux modèles	57
11 Mise en œuvre des calculs et réserve de prévoyance stochastique	59
11.1 Estimation à l'aide des séries temporelles	59
11.1.1 Méthodologie de Box Jenkins	59
11.1.2 Implémentation informatique	59
11.2 Estimation à l'aide du modèle économétrique	60
11.2.1 Méthodologie	60
11.2.2 Implémentation informatique	60
11.3 Résultats	61
11.3.1 Modèle de Vasiček	61
11.3.1.1 Estimation à l'aide des séries chronologiques	61
11.3.1.2 Estimation par modèle économétrique	64
11.3.2 Modèle de Cox-Ingersoll-Ross	68
11.4 Réserve stochastique	70
Conclusion	73
Références	74
A Lemme d'Itô, schéma d'Euler et schéma de Milstein	75
A.1 Lemme d'Itô	75
A.2 Schéma d'Euler	76
A.3 Schéma de Milstein	76
B Tests d'hypothèses	77
B.1 Test de Bartlett	77
B.2 Test de Box-Pierce et test de Ljung-Box	77
B.3 Tests de Dickey-Fuller-Augmentés (AFD)	78
B.4 Test de Goldfeld & Quandt	79
B.5 Test de Breusch-Pagan	79
B.6 Test de Durbin-Watson	79
B.7 Test de Jarque Bera	79

C Programme VBA de simulation de la réserve stochastique	81
C.1 Par le modèle de <i>Vasiček</i>	81
C.2 Par le modèle de <i>CIR</i>	81
Index	83

Table des figures

1.1 Mazars à l'international. En bleu : pays intégrés. En gris : Pays correspondants et Joint-Ventures	10
2.1 Siège de Mazars-Casablanca	12
2.2 Organigramme de « Mazars »	13
3.1 Système de retraite actuel	21
6.1 Algorithme des projections	33
8.1 Pyramide des âges des affiliés de la CIMR en fin 2013	43
8.2 Pyramide des moyennes des points acquis en fin 2013	43
8.3 Pyramide des âge des allocataires en fin 2013	44
8.4 Pyramide des âges des ayants cause	45
8.5 Proportion des nouveaux affiliés pour les différents taux de cotisation en fonction de l'âge.	46
8.6 Proportion des nouveaux affiliés pour les différents taux de cotisation en fonction du salaire d'affiliation.	47
9.1 Réserve de prévoyance - Scénario de référence	50
9.2 Réserve de prévoyance - Tests de sensibilité au taux de rendement	51
11.1 Taux de rendement	62
11.2 ACF	63
11.3 PACF	63
11.4 Simulation Monte-Carlo du taux de rendement (Vasiček)	67
11.5 Simulation Monte-Carlo du taux de rendement (CIR)	70
11.6 Réserves de prévoyance stochastiques des deux modèles CIR et Vasiček	72
B.1 Stratégie des test de Dickey-Fuller Augmentés (ADF)	78

Liste des tableaux

1.1 Historique de « Mazars »	11
2.1 Offre de service de « Mazars »	14
3.1 Les différents régimes au Maroc	21
3.2 Comparaison des régimes	21
4.1 Historique de la CIMR	23
4.2 Table d'anticipation/prorogation	25
8.1 Données de base de pour les affiliés	42
8.2 Données de base de pour les ayants droit	44
8.3 Hypothèses économiques et financières du scénario de référence	45
8.4 Évolution de la valeur des points et du salaire de référence	46
8.5 Table d'anticipation/prorogation	48
8.6 Table de sortie en retraite	48
8.7 Table du turnover	49
10.1 Avantages et inconvénients des modèles stochastiques des taux d'intérêt	58
11.1 Implémentation informatique des séries chronologiques	60
11.2 Implémentation informatique des modèles économétriques	61

Introduction

LA métamorphose des conditions économiques nationales impose à la *Caisse Interprofessionnelle Marocaine de Retraite* l'élaboration régulière d'un bilan actuariel en projetant la réserve de prévoyance sur un horizon lointain. La modélisation des hypothèses financières et démographiques constitue donc la base du projet en soi.

Ce rapport présente tout d'abord le marché de retraite marocain ainsi que ses particularités, ensuite, est présenté l'algorithme des projection de la caisse et les hypothèses démographiques et financières déterministes et finalement la modélisation stochastique de la réserve en modélisant les taux de rendements des placements à l'aide des modèles stochastiques des taux d'intérêts.

Dans la première et la seconde parties, nous présentons brièvement l'organisme d'accueil : « *Mazars* », décrivons sommairement le marché de retraite marocain et exposons en détail le fonctionnement du régime de la *C.I.M.R.*

La troisième partie est consacrée à la fiabilisation des données.

En effet, le traitement des données dure longtemps, car, outre le traitement des anomalies, il faut apporter quelques manipulations. Ces traitements sont acheminés via ACCESS et Excel et durent environ **deux semaines**. Nous avons donc décidé de programmer un script avec **R** qui permet de réaliser tous les traitements en **5 minutes** environ. Par souci de confidentialité, ce programme n'est pas exposé dans ce rapport.

Dans la quatrième partie est exposé l'algorithme des projections, les formules, ainsi que les différentes hypothèses actuarielles déterministes considérées pour l'élaboration du bilan actuariel.

Finalement, dans la dernière partie, nous présentons les deux modèles stochastiques de taux d'intérêt : *Vasiček* et *Cox-Ingersoll-Ross*, leurs traitements, ainsi que les étapes pas à pas de leurs implémentation informatique sous **R** avec les packages et les fonctions nécessaires. Enfin, à l'aide d'un petit programme en VBA fourni en annexe, nous simulons par la méthode de *Monte-Carlo* (*1000 scénarios pour chaque modèle de taux*) une réserve de prévoyance stochastique et présentons les conclusions quant à la pérennité du régime de la *C.I.M.R.*

Première partie

Présentation de l'organisme d'accueil

Dans cette première partie du rapport, nous présentons l'organisme d'accueil « Mazars »

Chapitre 1

Mazars à l'international

Sommaire

1.1 Présentation	10
1.2 Les règles du partnership intégré : Démocratie et transparence	11
1.3 Dates clés	11

1.1 Présentation

MAZARS est une entreprise internationale d'origine française spécialisée dans l'audit, l'expertise comptable, la fiscalité et le conseil aux entreprises. Mazars a considérablement accéléré son développement dans le monde au cours des dernières années, et conforté son positionnement d'acteur international indépendant de premier plan. La présence mondiale de Mazars aujourd'hui est structurée autour de plates-formes géographiques : l'Europe, l'Asie Pacifique, l'Afrique, le Moyen-Orient, l'Amérique Latine, les Caraïbes et l'Amérique du Nord. Le partnership intégré de Mazars est aujourd'hui présent dans **71** pays. De **33** salariés en France en **1977**, l'effectif global du cabinet est aujourd'hui supérieur à **13 000** professionnels dans le monde. Une particularité saillante de ce groupe tient à son origine française dans un marché de l'audit largement dominé par les cabinets anglo-saxons tels *Deloitte*, *Ernst & Young*, *KPMG* et *PricewaterhouseCoopers*. Mazars occupe en Europe la cinquième place derrière ces derniers, communément appelés les Fat Four.

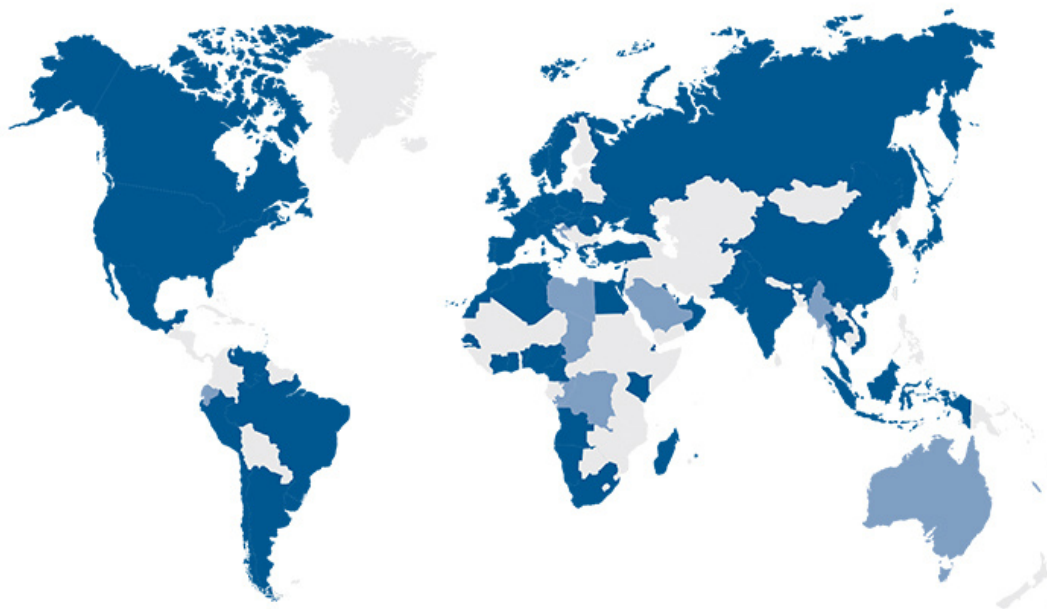


FIGURE 1.1 – Mazars à l'international. En **bleu** : pays intégrés. En **gris** : Pays correspondants et Joint-Ventures

Fort de sa dimension internationale, **Mazars** s'affirme comme une alternative crédible, capable de proposer des solutions fluides et sur mesure aux grandes sociétés, quelle que soit leur origine. Tous les collaborateurs de Mazars sont unis par une exigence identique de qualité et une détermination commune à aller au-delà des normes techniques et éthiques en vigueur. Mazars a une forte présence au niveau des instances européennes et internationales relative à ses métiers notamment *IASB* (International Accounting Standards Board), l'*IFRIC* (International Financial Reporting Committee), etc.

1.2 Les règles du partnership intégré : Démocratie et transparence

Le principal objectif du partnership international intégré de Mazars est de garantir un service de qualité constante aux clients, tout particulièrement aux clients internationaux qui souhaitent des services parfaitement coordonnés, reflétant leur propre structure de groupe. Ce partnership est fondé sur un modèle démocratique qui permet à chaque associé de voter pour décider des principales stratégies de développement du groupe. Les associés membres partagent, au-delà de leurs différences culturelles, les mêmes valeurs et la même conception du métier et de ses standards d'excellence. Mazars publie annuellement ses comptes consolidés, audités et en normes *IFRS* dans son rapport annuel.

1.3 Dates clés

Année	Évènements
1940	Robert Mazars crée son cabinet d'expertise comptable, près de Rouen
1965	Création, le 1er janvier, de la SARL Cabinet Robert Mazars
1973	Les équipes d'audit du cabinet s'installent à Paris
1975	Mazars ouvre ses premiers bureaux hors de France, en Allemagne et en Espagne.
1983	Robert Mazars décide de se retirer. Patrick de Cambourg devient Président de Mazars.
1995	Mazars fusionne avec Guérard Viala. La fusion marque la création du partnership international CARL, dans lequel tous les associés, qu'ils viennent de l'une ou l'autre des deux entités, sont associés à parts égales dans le développement de l'organisation.
1998	Mazars intègre Neville Russell, l'un des principaux cabinets indépendants du Royaume-Uni
1999	: Mazars & Guérard choisit d'opérer sous le nom de marque « Mazars »
2000	Mazars fusionne avec Paardekooper Hoffman aux Pays-Bas. Avec des bureaux dans la plupart des pays européens, Mazars devient une organisation véritablement internationale. Hors d'Europe, Mazars est déjà présent en Amérique Latine - au Brésil-, en Chine et dans plusieurs pays d'Afrique. L'organisation peut également servir ses clients dans de nombreux autres pays, via des accords de correspondance.
2003-2007	Mazars accélère son développement international, avec de nouveaux bureaux en Europe de l'Est - Russie inclue -, en Chine, en Inde et dans la zone Asie-Pacifique, ainsi qu'Amérique latine - au Mexique, au Brésil, en Argentine, au Venezuela, au Chili,...-, en Afrique australe et au Moyen-Orient.
2007	Mazars est membre fondateur de l'Alliance Praxity qui regroupe plus de 100 firmes indépendantes dans 75 pays.
2013	Au total, Mazars est présent en direct dans 71 pays et intervient dans 14 pays supplémentaires via des accords de correspondance et des bureaux de représentation.

TABLE 1.1 – Historique de « Mazars »

Chapitre 2

Mazars au Maroc

Sommaire

2.1 Présentation	12
2.2 Organisation	13
2.3 Offre de service	14

2.1 Présentation

LE cabinet « Mazars Audit et Conseil », membre intégré du partnership *MAZARS*, fait partie des cinq plus importants cabinets d'audit et de conseil du Royaume. Fort d'une expérience de plus de **trente-cinq ans**, et porté par une équipe de plus d'une **centaine** de professionnels, le cabinet poursuit son ambition de rester l'un des acteurs les plus en vue pour accompagner le secteur public dans ses stratégies de modernisation et le secteur privé dans ses projets de développement au Maroc et dans la région de l'Afrique du nord et de l'Afrique subsaharienne. Le cabinet compte actuellement :

- 7 associés
- **Plus de 140** Auditeurs et Consultants
- Une plateforme logistique reposant sur **1600 m²** de bureaux
- Une plateforme informatique centralisée et **plus de 150** ordinateurs nomades et en réseau.



FIGURE 2.1 – Siège de Mazars-Casablanca

2.2 Organisation

Le cabinet est géré par un *Comité Exécutif*. Sous la supervision d'un *Comité de Surveillance*, il est composé de *Management Units métiers* et de **trois** direction *Support*.

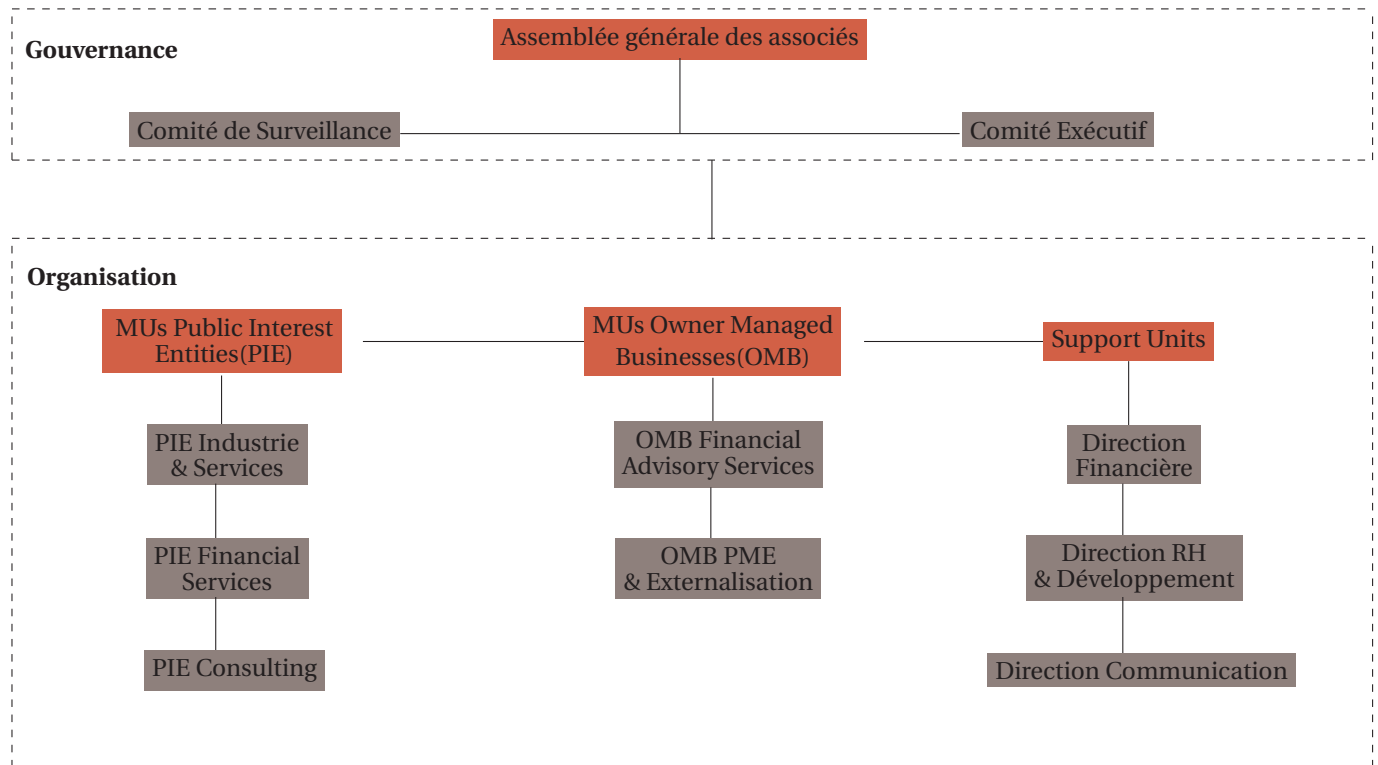


FIGURE 2.2 – Organigramme de « Mazars »

2.3 Offre de service

Offre de service : Une réponse sur mesure des attentes du client	
ACTUARIAT ET FINANCE QUANTITATIVE	<ul style="list-style-type: none"> - Modélisation et évaluation actuarielle - Mesure de capital et gestion des risques financiers - Valorisation d'instruments financiers - Rémunération, retraite et avantages sociaux - Modélisation statistique et analyse des données
AUDIT FINANCIER	<ul style="list-style-type: none"> - Audit légal - Audit contractuel - Financement & trésorerie d'entreprise - Doctrine
FISCALITÉ	<ul style="list-style-type: none"> - Fiscalité des entreprise / internationale - Contentieux fiscal - Fiscalité indirecte - douane - Prix de transfert - Fiscalité immobilière - Fusions - acquisitions - Mobilité internationale - fiscalité patrimoniale - Successions / transmissions d'entreprises - R&D subventions
CONSULTING	<ul style="list-style-type: none"> - Stratégie - CFO transformation - Business process improvement - Stratégie & gouvernance des systèmes d'information - Développement durable et responsabilité sociétale - Management des risques & gouvernance - Droits de l'Homme & compliance sociale - People development consulting
ACCOMPAGNEMENT COMPTABLE ET FINANCIER	<ul style="list-style-type: none"> - Consolidation & reporting - Expertise comptable - Conseil comptable & réglementaire - Assistance & solutions d'urgence - Externalisation / business process outsourcing (BPO) - Centre de services partagés (CSP)
FINANCIAL ADVISORY SERVICES	<ul style="list-style-type: none"> - Transaction - Due diligence acquéreur - Due diligence vendeur - Modélisation & évaluation - Litiges & fraudes - Retournement - Conseil en fusions & acquisitions

TABLE 2.1 – Offre de service de « Mazars »

Deuxième partie

La retraite au Maroc

*Dans cette partie du rapport, nous présentons en bref les différents régimes de retraite existants au Maroc ainsi que leurs modes de fonctionnement. Un zoom sur le régime de la CIMR est donné en **chapitre 4**, étant le socle du projet.*

Chapitre 3

Les différents régimes

Sommaire

3.1 Définition	17
3.2 Types de régimes de retraite	17
3.2.1 Régimes obligatoires / régimes facultatifs	18
3.2.2 Régimes de base / régimes complémentaires	18
3.2.3 Régimes mono-pilier / régimes multi-piliers	18
3.2.4 Régimes en points	19
3.3 Systèmes de financement des régimes de retraite	19
3.3.1 Définition	19
3.3.2 Types de systèmes de financement	19
3.3.3 Régimes à prestations définies / Régimes à cotisations définies	20
3.4 Les régimes de retraite au Maroc	21
3.4.1 Comparaison des régimes	21
3.4.2 Système de retraite actuel	21

Le secteur de la retraite joue un rôle important dans la stimulation de la croissance et ce, à travers la collecte et l'injection des flux financiers dans l'enchaînement de l'économie. Il est à rappeler la lourde responsabilité qui incombe à ce secteur quant à la sécurité financière des affiliés.

Dans ce chapitre, nous présentons les différents régimes de retraite au Maroc ainsi que leurs modes de fonctionnement.

3.1 Définition

Un **régime de retraite** est l'ensemble constitué :

- Des droits et obligations réciproques des employés et des employeurs
- D'une caisse de sécurité sociale

Donc :

$$\text{Régime de retraite} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Droits et obligations réciproques des employés et des employeurs} \\ + \\ \text{Caisse de sécurité sociale} \end{array} \right.$$

3.2 Types de régimes de retraite

Il existe différents types de régimes :

- Régimes **obligatoires** ≠ Régimes **facultatifs**
- Régimes **de base** ≠ Régimes **complémentaires**
- Régimes **mono-pilier** ≠ Régimes **multi-piliers**

3.2.1 Régimes obligatoires / régimes facultatifs

3.2.1.1 Régimes obligatoires

Régime légal de prévoyance auquel l'adhésion de l'assuré est obligatoire en fonction de son statut professionnel. Il peut être un **régime de base** ou un **régime complémentaire**.

Exemples

- Le régime de la *sécurité sociale*.
- Le régime général du *RCAR*¹.
- Le régime des *pensions civiles* géré par la *CMR*².
- Le régime des *pensions militaires* géré par la *CMR*.
- Le régime de retraite des membres de la *chambre des représentants*.
- Le régime de retraite des membres de la *chambre des conseillers*.
- Le régime interne de l'*ONE, BAM*.

3.2.1.2 Régimes facultatifs

Régime de prévoyance auquel l'adhésion est au gré de l'assuré en fonction de son statut professionnel. C'est le cas des **régimes complémentaires**.

Exemples

- Le régime de la *CIMR*³.
- Le régime Complémentaire du *RCAR*.

3.2.2 Régimes de base / régimes complémentaires

3.2.2.1 Régimes de base

Régime dont le but est de garantir une prestation minimale. Elle peut être forfaitaire ou variable selon le salaire de référence et l'ancienneté dans le régime.

Exemples

- Régimes des *pensions civiles et militaire*.
- Le régime général du *RCAR*.
- Régime de la *CNSS*⁴.

3.2.2.2 Régimes complémentaires

Le but d'un régime complémentaire est de compléter la prestation du régime de base avec comme objectif de rapprocher le niveau de la pension calculée de celui du dernier salaire ou d'une fraction significative de ce dernier. Le régime complémentaire permet de s'affranchir des limites d'assiette et de montant fixés par le régime de base.

Exemples

- les régimes de la *CIMR*.
- régime complémentaire du *RCAR*.

3.2.3 Régimes mono-pilier / régimes multi-piliers

3.2.3.1 1^{er} pilier

La **SECURITE SOCIALE** organisée au niveau général d'un pays et permettant d'octroyer un premier niveau de base en matière de pension.(garantie du minimum vital)

1. Régime Collectif d'Allocation de Retraite
2. Caisse Marocaine de Retraite
3. Caisse Interprofessionnelle Marocaine de Retraite
4. Caisse Nationale de Sécurité Sociale

3.2.3.2 2^{ème} pilier

Les **REGIMES PROFESSIONNELS** organisés au sein d'une entreprise ou d'un secteur d'activité, octroyant à chacun des affiliés de ces régimes un complément à la sécurité sociale. (maintien de niveau de vie)

3.2.3.3 3^{ème} pilier

L'**EPARGNE INDIVIDUELLE** organisée au libre choix de chacun. (complémentaire individuelle)

3.2.4 Régimes en points

Régime dans lequel chaque année, les cotisations de l'affilié lui permettent d'acquérir un certain nombre de points. En effet, le montant de la cotisation versée est divisé par une grandeur appelée « **salaire de référence** » ou « **valeur d'acquisition d'un point de retraite** ». Ce salaire de référence est révisé tous les ans en fonction de l'évolution d'un indice tel celui des prix ou des salaires. Au moment du départ en retraite, la pension est égale au **produit du nombre total de points par une grandeur appelée** « **la valeur de service du point** ». La valeur de service du point peut à son tour être indexée sur les prix ou sur les salaires. Un régime en points est donc un régime à **cotisations définies** dans lequel l'effort contributif de l'assuré détermine le montant de la pension qu'il percevra.

3.3 Systèmes de financement des régimes de retraite

3.3.1 Définition

Le système de financement pour une institution de prévoyance peut être vu comme sa méthode d'allocation et de gestion des ressources pour faire face à ses engagements prévisibles.

3.3.2 Types de systèmes de financement

Les deux systèmes de financement les plus connus sont :

- Financement par **répartition**.
- Financement par **capitalisation**.

Des régimes *hybrides* peuvent exister, appelés régimes **mixtes**.

3.3.2.1 Financement par répartition

Ce système est fondé sur un **contrat** entre les générations. En effet, les actifs d'aujourd'hui payent les pensions des retraités d'aujourd'hui, et ce sont les actifs de demain qui financeront à leur tour les retraites des actifs d'aujourd'hui. C'est un contrat de **solidarité** entre générations. Ce système est basé sur le principe de l'**équivalence**. En effet, à tout moment, les contributions versées par les actifs doivent équivaloir les prestations concédées à tous les pensionnés. Il dépend essentiellement de la capacité financière des actifs et du ratio :

$$\frac{\text{cotisants}}{\text{retraités}}$$

Comme tout régime, le régime par répartition a ses points forts et se heurte à plusieurs contraintes / inconvénients.

Avantages

- Le régime peut fonctionner dans les premières années au profit des personnes qui n'ont jamais ou qui ont peu cotisé.
- La répartition préserve les assurés des aléas financiers inhérents à la capitalisation car fondée sur un partage du revenu entre générations.

Inconvénients

- Le rendement du régime dépend directement du ratio : (cotisants/retraités), qui évolue défavorablement sous l'effet du vieillissement de la population, du chômage etc.
- Les fonds dégagés par la répartition sont faibles pour financer les investissements.

3.3.2.2 Financement par capitalisation

Il s'agit d'un système dans lequel les pensions de retraite sont financées par l'épargne accumulée des cotisants et par les revenus de son placement. On peut donc dire que chacun finance sa propre retraite.

Les droits acquis sont intégralement couverts par des livrets individuels ou par des provisions mathématiques qui sont inscrits au passif de la société d'assurance ou de l'institution de prévoyance. En effet, il y a équivalence actuarielle entre la valeur actuelle des cotisations avant la retraite et la valeur actuelle des pensions après la retraite.

Avantages

- Le système est transparent et facile à comprendre.
- La capitalisation assure à chaque assuré une certaine sécurité juridique.
- En cas de stabilité monétaire, lorsque le taux de capitalisation est intéressant, les rendements nominaux sont très avantageux.
- Sur le plan macro-économique, la capitalisation permet la constitution d'une masse monétaire colossale qui peut être investie.
- La capitalisation n'est pas très sensible à la dégradation de la structure démographique.

Inconvénients

- Cette technique exige une longue période d'assurance.
- L'attribution de droits gratuits est impossible.
- L'inflation : le capital placé peut être gravement dévalorisé.
- Il résiste mal aux Crashes boursiers.
- Le marché des capitaux doit être suffisamment développé pour absorber les fonds cumulés. Il doit être aussi réglementé efficacement pour protéger l'épargne des affiliés .

3.3.2.3 Régimes mixtes

C'est un système hybride. On peut caractériser un tel système en exprimant le montant du fonds de réserves par rapport aux engagements actuariels nécessaires en capitalisation. Suivant l'importance de ce rapport, le système est proche de la répartition ou de la capitalisation. Les systèmes appliqués par les institutions de prévoyance de droit privé doivent obligatoirement être gérés en capitalisation, alors que les caisses de pensions publiques appliquent souvent un système mixte ;

Exemples Au Maroc :

- Régime général du *RCAR*.
- Régime complémentaire du *RCAR*.

3.3.3 Régimes à prestations définies / Régimes à cotisations définies

3.3.3.1 Régimes à prestations définies

Ces régimes sont basés sur une optique de revenu de remplacement, définissant explicitement les prestations octroyées aux affiliés en fonction de différents paramètres tels que la durée d'affiliation et les salaires d'activité etc.

Exemple

Rente octroyée=80% * Moyenne des salaires de toute la carrière

3.3.3.2 Régimes à cotisations définies

Ces régimes, basés plutôt sur une optique d'épargne, définissent explicitement les cotisations qui seront versées au régime. Les prestations obtenues en découlent selon des règles définies. C'est donc ici le niveau du financement qui est défini a priori, les prestations devant être adaptées afin d'assurer l'équilibre du régime.

Exemple

Cotisation retraite = 12 % du salaire

3.4 Les régimes de retraite au Maroc

Les principaux régimes de retraite au Maroc sont schématisés dans le tableau suivant :

TABLE 3.1 – Les différents régimes au Maroc

Acronyme	Nom complet	Ancienneté
CMR	Caisse Marocaine des Retraites	83 ans
CIMR	Caisse Interprofessionnelle Marocaine des Retraites	65 ans
CNSS	Caisse Nationale de la Sécurité Sociale	54 ans
RCAR	Régime Collectif d’Allocation de Retraite	36 ans

3.4.1 Comparaison des régimes

Nous remarquons à travers le tableau⁵ suivant que le régime de la **CMR** a urgemment besoin d’une réforme tandis que la **CIMR** semble être en bonne santé.

Caisses	CMR	CNSS	RCAR	CIMR
Dette implicite	517	395	112	63
Taux de préfinancement	32%	26%	74%	72%
Premier déficit	2014	2026	2021	Néant
Epuisement des réserves	2021	2037	2049	Néant
Taux de cotisation d’équilibre	54%	14%	46%	

TABLE 3.2 – Comparaison des régimes

3.4.2 Système de retraite actuel

Le système de retraite du Maroc est organisé actuellement comme le montre la figure suivante⁶ :

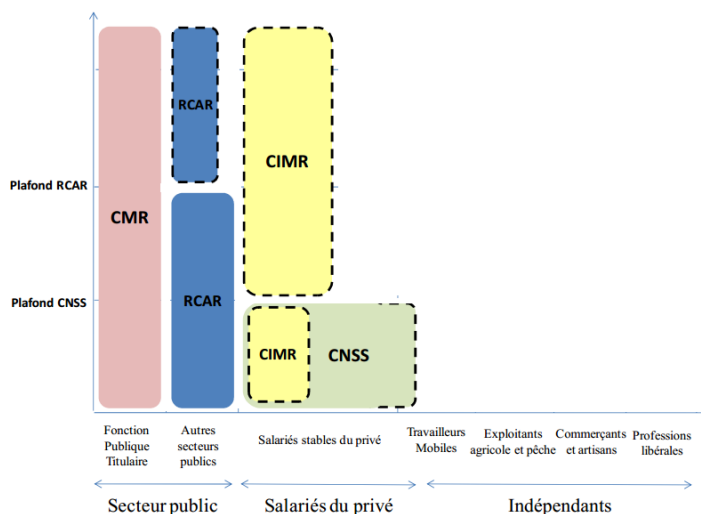


FIGURE 3.1 – Système de retraite actuel

5. Source : http://www.ugtm.ma/siteugtm/modif/fr/pdf/retraites_synthese9.pdf page 9

6. Source : http://www.ugtm.ma/siteugtm/modif/fr/pdf/retraites_synthese9.pdf page 4

Chapitre 4

Zoom sur le régime de la CIMR

Sommaire

4.1 Présentation	22
4.2 Historique de la CIMR	23
4.3 Fonctionnement	23
4.3.1 Éligibilité	23
4.3.2 Ressources	23
4.3.3 Paramètres de base	24
4.3.4 Droits de la retraite	24
4.3.5 Modes de liquidation	24
4.3.6 Âge de départ à la retraite	25
4.3.7 Réversions	25
4.4 « Régime à 55 ans »	25
4.5 Critères de pérennité	25

Faute de temps, nous n'avons pas pu étudier en détails tous les régimes, nous nous focalisons plutôt sur le régime de la CIMR : régime en points, par répartition provisionnée et à cotisations définies¹.

4.1 Présentation

LA CIMR est une association à but non lucratif créée en **1949** par l'initiative d'un ensemble d'employeurs exerçant dans le secteur privé. Elle est gérée par une association patronale et régie par le Dahir du **15 novembre 1958** relatifs aux associations. La caisse gère un régime à **adhésion facultative** destiné aux salariés du secteur privé pour compléter le régime obligatoire de la CNSS. L'adhérent (l'entreprise) a en fait le choix de présenter l'ensemble de ses salariés ou un ensemble homogène du personnel. Le régime de la CIMR est un régime :

- en points
- par répartition
- à cotisations définies

1. Source du chapitre : http://www.cimr.ma/upload/document/Guide_affilie_1.pdf

En outre, la CIMR est passée par plusieurs étapes :

4.2 Historique de la CIMR

Année	Évènement
1949	Création de la CIMR
1967	Introduction du système de points de retraite qui prend en compte l'ensemble des cotisations versées tout au long de la carrière
1993	Mise en place de deux nouveaux produits : <ul style="list-style-type: none"> – Régime de retraite complémentaire permettant d'augmenter le niveau des pensions. – Régime à 55 ans promettant une pension sans abattement à 55 ans.
1997	L'AGE ^a a modifié le fonctionnement de la CIMR : <ul style="list-style-type: none"> – Versement intégral de la participation au bénéfice par les sociétés d'assurance. – Accélération de la baisse du taux de rendement. – Diminution de la revalorisation des pensions. – Majoration des contributions patronales.
	<i>a. Assemblée Générale Extraordinaire</i>
2003	Réforme visant à : <ul style="list-style-type: none"> – Ramener le rendement du régime à 10% à l'horizon de 2010. – Récupérer les cotisations salariales au titre des années 2003 et ultérieures et les gérer en répartition. – Ces cotisations sont inscrites dans un compte (virtuel, notionnel^a) et "capitalisées" à 3,25% plus une revalorisation annuelle fixée par le conseil d'administration de la caisse.
	<i>a. Régime en répartition où les prestations ne sont plus calculées à la retraite en fonction d'une formule sur le salaire mais correspondent à une valeur capitalisée fictivement des cotisations payées pendant toute la carrière.</i>

TABLE 4.1 – Historique de la CIMR

4.3 Fonctionnement

4.3.1 Éligibilité

Toute personne physique ou morale employant au Maroc du personnel salarié est admissible à la CIMR.

On recense 4 catégories :²

- Affiliés actifs : les personnes en activité
- Allocataires retraités : Personnes qui perçoivent une pension de retraite.
- Ayants cause : Personnes qui perçoivent une pension de réversion
- Ayants droit : actifs n'ayant pas liquidé leurs droits et ne cotisant plus. Cotisants « dormants »

4.3.2 Ressources

Les ressources de la caisse sont constituées essentiellement des :

- Contributions patronales

2. Source : [http://www.ressources-actuarielles.net/EXT/ISFA/1226-02.nsf/9c8e3fd4d8874d60c1257052003eced6/2e870d0c6521c898c125757a0050feaa/\\$FILE/Memoire%20LAHBABI.pdf](http://www.ressources-actuarielles.net/EXT/ISFA/1226-02.nsf/9c8e3fd4d8874d60c1257052003eced6/2e870d0c6521c898c125757a0050feaa/$FILE/Memoire%20LAHBABI.pdf)

- Contributions salariales
- Intérêts des fonds placés

4.3.2.1 Remarque

L'excédent éventuel est affecté à un fond appelé **réserve de prévoyance**.

4.3.3 Paramètres de base

La **valeur du point de service** (VPS), la **valeur du point à la liquidation** (VPL) et le **salaire de référence** (SR) constituent les paramètres de base du régime. Ils évoluent chaque année et permettent de valoriser les droits acquis et les pensions versées.

Salaire de référence un indice qui reflète l'évolution du salaire moyen de l'ensemble des affiliés cotisant à la CIMR.

La valeur du point à la liquidation le nombre de points est multiplié par la valeur du point à la liquidation pour déterminer le montant annuel brut de la pension. Dépend du salaire de référence.

La valeur du point en service permet de revaloriser annuellement le montant des pensions payées aux retraités CIMR.

4.3.3.1 Remarques

- Le salaire de référence (**SR**) évolue chaque année en fonction de l'évolution du salaire moyen du régime. Toutefois, le taux annuel d'augmentation de ce salaire au titre de la période 2003-2010 est fixé à 4%. Au 31/12/2013, la valeur du salaire de référence est de 21,8 Dhs
- La valeur du point à la liquidation (**VPL**) évolue à son tour en fonction de l'évolution du **salaire de référence**³. Cependant, cette valeur est fixée à 11,64 Dhs pour la même période susmentionnée. Au 31/12/2013, sa valeur est de 13,11 Dhs.

$$VPL(n) = VPL(n-1) \cdot \frac{SR(n)}{SR(n-1)}$$

- La valeur du point en service (**VPS**) est augmentée annuellement à compter du 1er juillet 2003 de 0,7% et ce jusqu'au 30 juin 2011. Au 31/12/2013, la valeur du point en service est de 12,00 Dhs.

4.3.4 Droits de la retraite

Chaque année, la CIMR attribue à l'affilié actif un nombre de points calculé par la formule suivante⁴

$$\text{Nombre de points annuel} = \frac{\text{Cotisation}_{\text{patronale}} + \text{Cotisation}_{\text{salariale}}}{6 * \text{Salaire}_{\text{reference}}}$$

Le coefficient $\frac{1}{6}$ appelé rendement théorique, résulte du passage en 1968 d'un système en annuités à celui des points. Le cumul de ces points est alors converti en nombre de points de service :

$$\text{Nombre de points de service} = \text{Nombre de points acquis} \cdot \frac{VPL}{VPS}$$

Finalement, la pension est calculé par la formule suivante :

$$\text{Pension} = \text{Nombre de points de service} \cdot VPS$$

4.3.5 Modes de liquidation

L'intéressé peut opter pour l'un des deux modes de liquidation suivants :

- Une liquidation avec option capital et dans ce cas le nombre de points **acquis** :
 - pour 2003 et postérieur, est réduit de moitié et la pension est calculé sur la base de 50% des points restants⁵.
 - pour les points acquis avant 2003, la rente acquise en capitalisation (auprès des compagnies d'assurance) est transformée en points qui sont ensuite soustraits de la totalité des points acquis. Dans ce cas l'affilié récupère son livret individuel auprès de la CIMR et un capital auprès des sociétés d'assurances.
- Une liquidation avec option rente auquel cas :
 - la pension est servie sur la **totalité des points** et la CIMR récupère la rente de capitalisation auprès des sociétés d'assurances.

3. Source : Cours M. Abouzaid (INSEA)

4. Source : http://www.cimrpro.ma/fr/aide_faq.php?id_rub=8&id_srub=15

5. L'intéressé ne peut liquider que la part salariale

4.3.6 Âge de départ à la retraite

L'âge de la retraite est fixé à 60 ans avec la possibilité d'anticiper le départ dès l'âge de 50 ans moyennant l'application d'abattement ou de le proroger à 65 ans avec application de taux de prorogation selon le tableau suivant⁶

Âge à la liquidation	Coefficient
50	0,40
51	0,47
52	0,54
53	0,61
54	0,66
55	0,72
56	0,76
57	0,81
58	0,87
59	0,93
61	1,05
62	1,10
63	1,15
64	1,20
65 et plus	1,25

TABLE 4.2 – Table d'anticipation/prorogation

4.3.7 Réversions

Le décès d'un actif, ayant au moins 5 années de cotisation, ou d'un retraité donne lieu au service d'une **pension de réversion** au profit du veuf (ve)(s'il valide la condition du **minimum 2 ans de mariage**) calculée sur la moitié du nombre de points acquis par le défunt. Cette allocation est servie à partir de l'âge normal de la retraite (60 ans) si le conjoint est de sexe masculin, et 10 ans plus tôt s'il est de sexe féminin. Le service de cette allocation peut être anticipé de 10 ans plus tôt moyennant l'application du **coefficient d'abattement**. Toutefois, cette pension est octroyée **immédiatement** pour un conjoint ayant un enfant mineur à charge. Les orphelins **de père et de mère** reçoivent chacun une pension calculée sur la base de **20%** des points acquis par le défunt.

4.4 « Régime à 55 ans »

Le « régime à 55 ans sans abattement » est créé en 1993 pour permettre à l'intéressé de bénéficier d'une pension de retraite à l'âge de 55 ans sans anticipation. Les affiliés peuvent acquérir des points liquidables à 55 ans en contrepartie d'une majoration des contributions patronales et salariales de 38,89%.

4.5 Critères de pérennité

La réforme entérinée en 2003 a retenu deux critères de pérennité :

- La réserve de prévoyance (les fonds) est toujours **positive**.
- La réserve de prévoyance a une *tendance ascendante* en fin de projection.

6. Source : www.cimr.ma/upload/document/Guide_affilie_1.pdf

Troisième partie

Fiabilisation et traitement des données

*Dans cette partie du rapport, nous présentons les différents processus des traitements effectués sur les données de base. **Par souci de confidentialité, un coefficient a été appliqué à tous les résultats afin de pouvoir les retranscrire dans ce rapport.***

Chapitre 5

Fiabilisation et traitement des données

Sommaire

5.1 Fiabilisation des données	28
5.1.1 Plusieurs acteurs	28
5.1.2 Données sur les actifs cotisants et ayants droit	28
5.1.3 Fichier des allocataires	29
5.2 Traitement des données	29
5.2.1 Fichier des actifs cotisants et des ayants droit : affiliés	29
5.2.2 Fichier des retraités et ayants cause : Allocataires	30

5.1 Fiabilisation des données

DANS ce petit chapitre, nous présentons les données de base ainsi que les différents processus de détection et de correction des anomalies.

En effet, nous disposons de **deux** fichiers essentiels : le premier pour les **actifs cotisants et ayants droit (ACAD)** tandis que le second est pour les **allocataires (retraités et réservataires)**.

5.1.1 Plusieurs acteurs

La modélisation de la caisse fait intervenir plusieurs acteurs :

- Les affiliés actifs : les personnes qui cotisent normalement au régime.
- Les allocataires retraités : les personnes qui sont sorties en retraite et qui bénéficient normalement de leurs pensions.
- Les ayants cause : les ayants cause et les orphelins.
- Les ayants droit : affiliés ayant cessé de cotiser au régime après avoir quitté leurs employeurs (démission ou licenciement).

5.1.2 Données sur les actifs cotisants et ayants droit

Il s'agit pour ce fichier de détecter les :

- doublons
- dates de naissance vides et non conformes
- sexes non-conformes
- Statut non conforme
- âges inférieurs à 18 ans (formule : année de calcul – année de naissance)
- âges supérieurs à 80 ans
- points négatifs
- rentes négatives
- provisions négatives
- salaires nuls chez les actifs cotisants

- taux de cotisation non-conformes/ Taux de cotisation nul pour un actif cotisant
- cotisations négatives
- Salaire nul pour un actif cotisant / Salaire non nul pour un ayant droit

Après avoir déroulé tous ces tests, le taux d'anomalies est de moins de 1%, qui est largement inférieur au seuil de 3% et donc les données sur les actifs cotisants et ayants droit sont parfaitement exploitables.

5.1.2.1 Anomalies détectées et traitements

Les anomalies repérées tachaient seulement les dates de naissances : **quelques milliers** de dates vides engendraient donc des âges non conformes. Afin de corriger ces erreurs, nous avons affecté par sexe et par catégorie (actif cotisant ou ayant droit) l'année de naissance moyenne des individus ayant une date de naissance non vide¹. Ensuite, nous avons calculé l'âge de chaque individu par *différence de millésime*, et nous avons recherché les âges supérieurs à **80 ans** ou inférieurs à **15 ans**, l'âge minimal pour cotiser étant de 15 ans. Le résultat n'était pas inquiétant. Seulement **2** actifs cotisant avaient un âge inférieur à 15 ans et **10** autres avaient un âge supérieur à 80 ans. Afin de corriger ces anomalies, nous leur avons affectés, par sexe, l'âge moyen des actif(ve)s cotisant(e)s. D'un autre côté, **quelques milliers** d'ayants droit avaient des âges non conformes. Ce groupe est constitué de 88% d'hommes et de 12% de femmes avec un nombre de point moyen cumulé ne dépassant pas **500** et un âge moyen de 96 ans et n'ont pas cotisé en moyenne à la CIMR depuis environ 30 ans et sont donc **écartés de notre étude**.

5.1.3 Fichier des allocataires

Il s'agit pour ce fichier de détecter les :

- doublons
- dates de naissance vides et non conformes
- sexes non-conformes
- Statut non conforme
- sexes non conformes
- Points négatifs
- Rentes négatives
- Situation de famille non conforme
- Matricule avec plusieurs dossiers de pension.

Après avoir déroulé tous ces tests, le taux d'anomalies est de **0%**, qui est à son tour largement inférieur au seuil de 3% et donc les données sur les allocataires sont parfaitement exploitables.

5.2 Traitement des données

Afin de rendre nos fichiers exploitables pour les projections, nous avons acheminé quelques traitements sur les deux fichiers précédemment cités. Ces traitements consistent d'abord à agréger les données pour minimiser considérablement le temps de calcul, ensuite corriger les salaires des ayants droit. Ces traitements seront détaillés par fichier.

5.2.1 Fichier des actifs cotisants et des ayants droit : affiliés

5.2.1.1 Agrégation des données

Afin de réduire le temps de calcul, les données ont été agrégées selon :

- Année de naissance
- Sexe
- Taux de cotisation (le taux appliqué à l'assiette salariale pour déterminer les cotisations.
- Statut (actif cotisant ou ayant droit)

Un compte de matricules pour chaque agrégat est calculé pour déterminer sa pondération. Pour les autres variables, une moyenne a été calculée par agrégat.

1. Ces dates de naissance peuvent être non conformes (1739) par exemple, l'essentiel c'est qu'elle ne soit pas vide. Un traitement ultérieur corrigera les données non conformes.

5.2.1.2 Traitement des données

Un petit traitement des salaires pour les ayants droit a été acheminé :

- La moyenne des salaires des affiliés actifs cotisants est calculée par âge, par sexe et par catégorie. Ensuite, ces salaires moyens sont affectés aux ayants droit sur la base de ces critères. Pour les tranches d'âge des ayants droit correspondant aux tranches d'âge des affiliés actifs manquants, le salaire de l'âge précédent est attribué.

5.2.2 Fichier des retraités et ayants cause : Allocataires

5.2.2.1 Agrégation des données

La clé d'agrégation pour ce fichier est basée sur :

- Âge
- Sexe
- Statut : retraité ou réversataire

Quatrième partie

Modélisation de la CIMR

Cette partie du rapport représente la base de ce travail. En effet, celle-ci traite la modélisation de la caisse toute entière avec tous les paramètres qu'elle engendre. Dans un premier temps, nous présentons l'algorithme des projections, une image simplifiée mais exhaustive du régime et des mouvements y afférents. Ensuite, nous attaquons les projections que nous avons ventilées en plusieurs étapes.

Chapitre 6

Algorithme

Sommaire

6.1 Explications	34
------------------------	----

LA modélisation de la caisse repose sur les mouvements entre les différents acteurs, l'image ci-après résume ces mouvements :

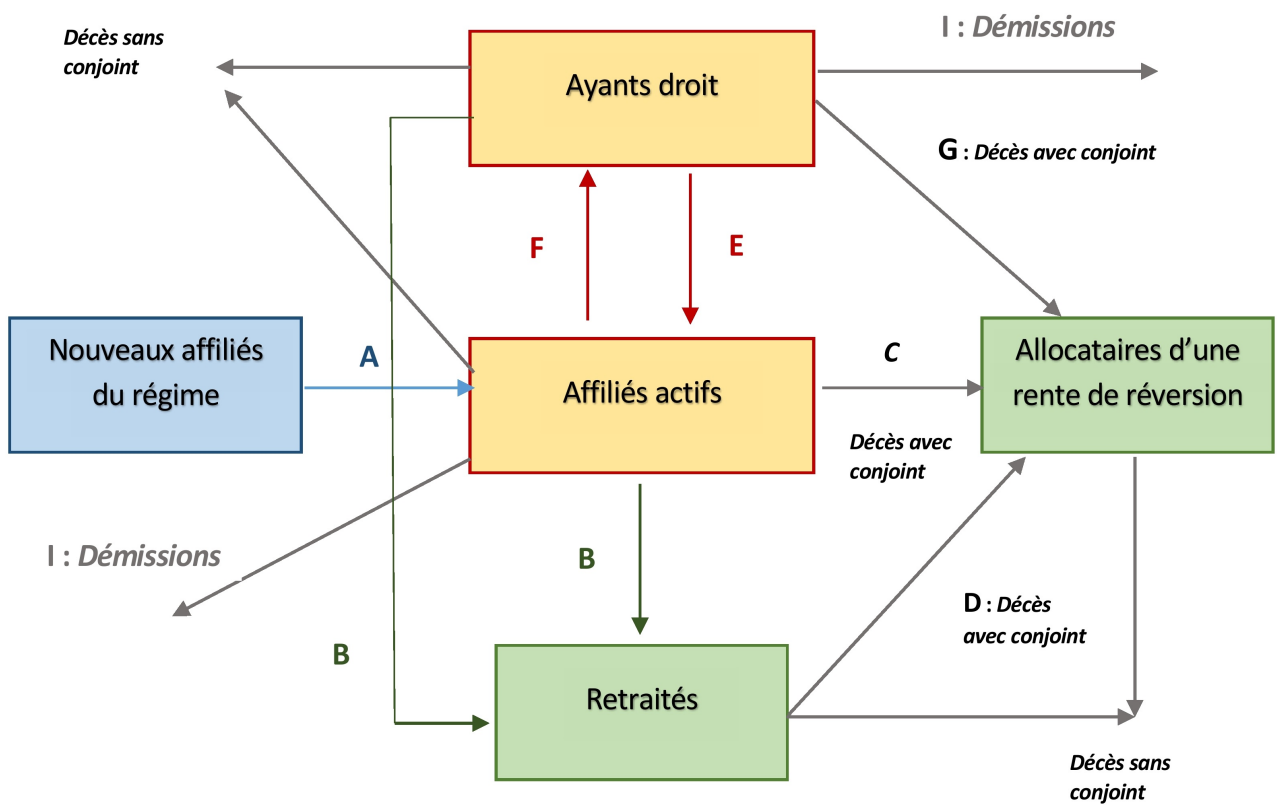


FIGURE 6.1 – Algorithme des projections

6.1 Explications

A nouvelles entrées des affiliés actifs.

B départ à la retraite des affiliés actifs à l'âge normal, par anticipation ou par prorogation.

C génération de rente de réversion **directe** suite au décès d'un affilié actif.

D génération de rente de réversion **indirecte** suite au décès d'un retraité.

E cessation des cotisations suite au chômage, démission ou changement d'employeur.

F reprise des cotisations.

G génération de rente de réversion **directe** suite au décès d'un ayant droit.

H départ à la retraite des ayants droit.

I démission du régime.

Chapitre 7

Projections actuarielles

Sommaire

7.1 Etape 1 : Contributions versées et points attribués de l'année	35
7.2 Etape 2 : Solde de la population des affiliés (actifs cotisants et ayants droit) en fin d'année	36
7.3 Etape 3 : Prise en compte des nouvelles affiliations	36
7.4 Etape 4 : Mise à jour des informations relatives aux affiliés	37
7.5 Etape 5 : Mise à jour de la population des allocataires (retraités + ayants cause)	38
7.6 Etape 6 : Mise à jour des informations relatives aux allocataires	38
7.7 Etape 7 : Détermination et enregistrement des flux financiers	40
7.8 Etape 8 : Autres flux	40
7.9 Etape 9 : Mise à jour de la réserve	40

LES projections actuarielles sont obligatoirement faites en **groupe ouvert**, puisque le régime est un régime de **répartition**.
Pour faciliter la lecture de ce rapport, nous ne prenons pas en compte l'ensemble des critères d'agrégation des données dans l'écriture des formules.

Exemple Pour calculer les contributions versées au régime, nous **écrivons** la formule suivante :

$$c(n) = \sum_x (c_x^p(n) + c_n^s(n)) * E_x^1(n)$$

au lieu d'écrire :

$$c(n) = \sum_x \sum_s \sum_t (c_{x,s,t}^p(n) + c_{x,s,t}^s(n)) * E_{x,s,t}^1(n)$$

où :

- **x** : Âge
- **s** : Sexe
- **t** : taux de contribution
- **n** : Année de calcul

7.1 Etape 1 : Contributions versées et points attribués de l'année

Chaque année, la CIMR reçoit des cotisations de la part des affiliés, chacun selon le taux de cotisation qu'il a convenu avec son employeur. En effet, deux types de cotisations sont reçues pour chaque affilié : les contributions **salariales** et les contributions **patronales** :

- Contributions salariales : $c_x^s(n) = t_1 * \bar{s}_x(n)$
- Contributions patronales : $c_x^p(n) = t_1 * \bar{s}_x(n)$

où :

- $\bar{s}_x(\mathbf{n})$: salaire moyen soumis à la cotisation pour les affiliés d'âge x (ou encore appartenant à un agrégat d'âge x et d'un certain sexe et d'un taux de cotisation précis (revoir la remarque en début de chapitre)

Ces contributions encaissées sont ensuite converties en **points de liquidation** selon la formule suivante :

$$\hat{p}_{l,x}^1(n) = \frac{c_x^s(n) + c_x^p(n)}{SR(n)} * r_{CIMR}$$

où :

- $SR(n)$: salaire de référence de l'année, le paramètre clé de la CIMR.
- r_{CIMR} : rendement théorique¹ de la caisse, égal à 16.67% (fixe).

7.2 Etape 2 : Solde de la population des affiliés (actifs cotisants et ayants droit) en fin d'année

Concernant la population des affiliés actifs, on peut distinguer **trois** types de décrets (chutes) :

- les départs en retraite
- les décès
- le turnover :

Pour les affiliés actifs c'est la probabilité de cessation de cotisations suite à une démission, licenciement ou à un départ d'une entreprise adhérente.

Pour les ayants droit c'est la probabilité de reprise des cotisations ou de démission du régime.

Soient donc $E_x^1(n)$ et $E_x^2(n)$ respectivement l'effectif des **affiliés actifs** et d' **ayants droit** ayant l'âge x . On note, $ret_x^1(n)$ et $ret_x^2(n)$ respectivement le nombre d' affiliés actifs et ayants droit partant en retraite l'année n . En supposant que les liquidations des droits précèdent les décès et le turnover, on obtient :

$$\text{Affiliés actifs } ret_x^1(n) = E_x^1(n) * r_x^1$$

$$\text{Ayants droit } ret_x^2(n) = E_x^2(n) * r_x^2$$

avec :

- r_x^1 : probabilité de départ en retraite à l'âge x pour un affilié actif.
- r_x^2 : probabilité de départ en retraite à l'âge x pour un ayant droit.

Ensuite, on enregistre les nombres de décès pour les deux statuts (affiliés actifs et ayants droit)

- **Affiliés actifs** $DC_x^1(n) = E_x^1(n) * (1 - r_x^1) * q_x$
- **Ayants droit** $DC_x^2(n) = E_x^2(n) * (1 - r_x^2) * q_x$

avec :

- q_x : probabilité de décès à l'âge x tirée de la table de mortalité utilisée².

On s'intéresse désormais aux effectifs qui changent de statut :

- les affiliés actifs qui deviennent des ayants droit suite à la cessation des cotisations.
- les ayants droit qui redeviennent des affiliés actifs suite à la reprise des cotisations.

Leurs effectifs sont donnés par :

- **affiliés actifs** $\gamma_x^1(n) = E_x^1(n) * (1 - r_x^1) * (1 - q_x) * w^1$
- **ayants droit** $\gamma_x^2(n) = E_x^2(n) * (1 - r_x^2) * (1 - q_x) * w^2$

avec :

- w_x^1 : taux de turnover pour la population des affiliés actifs.
- w_x^2 : taux de turnover pour la population des ayants droit.

7.3 Etape 3 : Prise en compte des nouvelles affiliations

Pour enregistrer les nouvelles affiliations, on détermine d'abord l'effectif restant des affiliés actifs et celui des ayants droit notés respectivement $\delta_x^1(n)$ et $\delta_x^2(n)$.

$$\delta_x^1(n) = E_x^1(n) - ret_x^1(n) - DC_x^1(n) - \gamma_x^1(n)$$

$$\delta_x^2(n) = E_x^2(n) - ret_x^2(n) - DC_x^2(n) - \gamma_x^2(n)$$

Ainsi, le nombre d' **ayants droit** au début de l'année $n+1$ est égal à :

$$E_{x+1}^2(n+1) = \delta_x^2(n) + \gamma_x^1(n) * (1 - p_d^1)$$

où :

1. Le rendement théorique d'un régime en points est le rapport entre la valeur du point de service et le salaire de référence de l'année.
2. voir les hypothèses actuarielles.

- p_d^1 : probabilité qu'un affilié actif démissionne du régime exprimée en pourcentage du turnover.

Explication : La population d'un agrégat (d'âge $x+1$ en $n+1$) des ayants droit en $n+1$ est constituée des personnes du même agrégat (d'âge x en n) qui n'ont pas subi la mort, ne sont pas sortis en retraite et non pas changé de statut ainsi que des **affiliés actifs qui ont changé de statut, c'est-à-dire qui ont arrêté de cotiser mais n'ont pas démissionné du régime, d'où le terme p_d^1** .

Ensuite, et afin d'obtenir l'effectif en $n+1$ des affiliés actifs, un **taux de croissance général c** est appliqué chaque année sur la population des affiliés actifs du début de l'année n :

$$\sum_x E_x^1(n+1) = (1+c) * \sum_x E_x^1(n)$$

Cette somme peut être exprimée selon une autre optique. En effet, elle est égale à la somme des

- affiliés actifs qui :
 - ne sont pas décédés
 - n'ont pas changé de statut
 - ne sont pas sortis en retraite
- ayants droit qui ont repris les cotisations au cours de l'année
- **nouveaux entrants**

$$\sum_x E_x^1(n+1) = \sum_x (\delta_x^1(n) + \gamma_x^2 * (1 - p_d^2) + e(n)) = \sum_x \Delta_x(n) + e(n)$$

avec :

- $e(n)$: effectif des nouveaux entrants de l'année n .
- p_d^2 : probabilité de démission d'un ayant droit exprimée en pourcentage du turnover.

On obtient alors :

$$e(n) = \sum_x ((1+c) * E_x^1(n) - (\delta_x^1(n) + \gamma_x^2 * (1 - p_d^2)))$$

Ensuite, on détermine le nombre de nouveaux affiliés de chaque agrégat :

$$e_x(n) * \zeta_x$$

avec :

- $e_x(n)$: effectif des nouveaux affiliés d'âge x
- ζ_x : proportion de nouvelles affiliations à l'âge x avec : $\sum_x \zeta_x = 1$

7.4 Etape 4 : Mise à jour des informations relatives aux affiliés

A cette étape, on met à jour certaines informations relatives aux deux populations des affiliés . D'abord, le nouveau nombre de points de liquidation est donné par la moyenne pondérée suivante :

$$p_{l,x+1}^1(n+1) = \frac{\delta_x^1(n) * (p_{l,x}^1(n) + \hat{p}_{l,x}^1(n)) + \gamma_x^2(n) * (1 - p_d^2) * (p_{l,x}^2(n) + 0) + e_x(n) * 0}{E_{x+1}^1(n+1)}$$

avec :

- $p_{l,x}^1(n)$: la moyenne des points de liquidation dont les affiliés actifs faisant partie de l'agrégat (x) **disposait en début de l'année n** .
- $\hat{p}_{l,x}^1(n)$: la moyenne des points de liquidation que les affiliés actifs faisant partie de l'agrégat (x) **ont obtenu au cours de l'année n** .
- $p_{l,x}^2(n)$: la moyenne des points de liquidation dont les ayants droit faisant partie de l'agrégat (x) **disposait en début d'année n et donc à sa fin puisqu'ils n'ont pas cotisé**.

On met également à jour le nombre moyen de points de liquidation dans la population des ayants droit, même s'ils ne contribuent pas au régime afin de tenir compte du turnover des affiliés actifs :

$$p_{l,x+1}^2(n+1) = \frac{\delta_x^2(n) * (p_{l,x}^2(n) + 0) + \gamma_x^1(n) * (1 - p_d^1) * (p_{l,x}^1(n) + \hat{p}_{l,x}^1(n))}{E_{x+1}^2(n+1)}$$

Attention! on met à jour ces informations en fin d'année ce qui explique les zéros. Ensuite, et afin d'estimer les cotisations versées au régime, il est nécessaire de considérer les augmentations des salaires des affiliés du régime et des nouveaux entrants :

$$s_x^{n.e}(n+1) = s_x^{n.e}(n) * (1 + j^{n.e}) \text{ pour les nouveaux entrants}$$

$$s_x^1(n+1) = s_x^1(n) * (1 + j^1 + i) \text{ pour les affiliés actifs}$$

$$s_x^2(n+1) = s_x^2(n) * (1 + j^2 + i) \text{ pour les ayants droit}$$

avec :

- $j^{n.e}$: taux d'augmentation du salaire des nouveaux affiliés .
- j^1, j^2 : taux de revalorisation des salaires net d'inflation.
- i : taux inflation.

d'où :

$$s_{x+1}^1(n+1) = \delta_x^1(n) * s_x^1(n+1) + e_x(n) * s_x^{n.e}(n+1) + \gamma_x^2(n) * (1 - p_d^2) * s_x^2(n+1)$$

où :

- $s_x^1(n), s_x^2(n)$: salaires moyens des affiliés actifs et ayants droit.

Attention ! « x+1 » veut dire « y compris les nouveaux entrants et les effectifs résultant du turnover ». Exemple : $s_x^1(n+1)$ est le salaire moyen des affiliés actifs qui ont l'âge x en n vu en n+1 tandis que $s_{x+1}^1(n+1)$ est le salaire moyen des affiliés actifs qui ont l'âge x+1 mais vu en n+1 c'est à dire en intégrant tous les flux (nouveaux entrants, turnover) Les rentes moyenne acquises par l'agrégat x auprès des compagnies d'assurance avant la réforme de 2003 sont quant à elles revalorisées de la façon suivante :

$$Rente_{x+1}^{<2003}(n+1) = Rente_x^{<2003}(n) * (1 + tr) * \frac{E_x(n)}{E_{x+1}(n+1)}$$

où :

- tr : taux de revalorisation des rentes. Égal à 3.5% où 4.5% selon l'affilié.

7.5 Etape 5 : Mise à jour de la population des allocataires (retraités + ayants cause)

Tout d'abord, le groupe de bénéficiaire de **rentes directes** (les affiliés qui sont sortis en retraite) est composé de :

- les retraités de l'année précédente
- les affiliés qui ont liquidé leurs droits au cours de l'année n

Ce groupe est noté $A_{x+1}^1(n+1)$ avec :

$$A_{x+1}^1(n+1) = (A_x^1(n) + ret_x^1(n) + ret_x^2(n)) * (1 - q_x)$$

Ensuite, l'effectif des allocataires de **rentes de réversion directes** en n+1, noté $A_{x+1}^2(n+1)$ est obtenu en prenant en compte les conjoints des affiliés décédés au cours de l'année n :

$$A_{x+1}^2(n+1) = (A_x^2(n) + DC_{x\pm d}^1(n) * \mathbb{1}_{\{Marié\}}(x \pm d) + DC_{x\pm d}^2(n) * \mathbb{1}_{\{Marié\}}(x \pm d)) * (1 - q_x)$$

avec :

- d : différence d'âges entre les conjoints, c'est-à-dire entre un homme et son épouse.

Le groupe d'allocataires de **rentes de réversion indirecte** en n+1, noté $A_{x+1}^3(n+1)$ est composé, quant à lui, de trois sous-populations :

- les allocataires de rentes de réversion indirecte de l'année précédente.
- les conjoints des retraités décédés au cours de l'année n.
- les conjoints des affiliés décédés après avoir liquidé leurs droits au cours de l'année n.

$$A_{x+1}^3(n+1) = A_x^3(n) * (1 - q_x) + (ret_{x\pm d}^1(n) * \mathbb{1}_{\{Marié\}}(x \pm d) + ret_{x\pm d}^2(n) * \mathbb{1}_{\{Marié\}}(x \pm d)) * (1 - q_x) + (A_{x\pm d}^1(n)) * \mathbb{1}_{\{Marié\}}(x \pm d) * q_{x\pm d} * (1 - q_x)$$

7.6 Etape 6 : Mise à jour des informations relatives aux allocataires

Pour obtenir les prestations versées en n+1, il faut d'abord mettre à jour le nombre moyen des points acquis par les allocataires (A^1 , A^2 et A^3).

Nombre moyen de points de service des retraités :

Pour tenir compte des liquidations « en capital », on note $\bar{p}_{l,x}^1(n)$ et $\bar{p}_{l,x}^2(n)$ les points de liquidations provenant des contributions salariales après la réforme entérinée en 2003 (y compris la cotisation de l'année n) pour les affiliés actifs et les ayants droit d'âge x respectivement. Ainsi, les nombres moyens de points de liquidation à convertir en **points de service** sont donnés par :

- **affiliés actifs** : $z_x^1(n) = p_{l,x}^1(n) + \hat{p}_{l,x}^1(n) - Cap * \left(\frac{R_{ass,x}^1(n)}{v_l(n)} + \tilde{p}_{l,x}^1(n) \right)$
- **ayants droit** : $z_x^2(n) = p_{l,x}^2(n) - Cap * \left(\frac{R_{ass,x}^2(n)}{v_l(n)} + \tilde{p}_{l,x}^2(n) \right)$

où :

- **Cap** : taux de liquidation en capital
- **$R_{ass,x}^1(n), R_{ass,x}^2(n)$** : rentes annuelles moyennes acquises auprès des compagnies d'assurance.

D'autre part, le nombre moyen de points de service acquis par des affiliés d'âge x qui partent en retraite l'année n, noté $\tilde{p}_{s,x}^1(n)$ est donné par :

$$\tilde{p}_{s,x}^1(n) = \frac{z_x^1 * ret_x^1(n) + z_x^2 * ret_x^2(n)}{ret_x^1(n) + ret_x^2(n)} * \frac{v_l(n)}{v_s(n)} * \tilde{c}_x$$

où :

- \tilde{c}_x : coefficient d'anticipation ou prorogation correspondant à l'âge x.

Ainsi, le nombre moyen de points de service des retraités de l'année (n+1) à l'âge x+1 est calculé à l'aide de la moyenne pondérée suivante :

$$p_{s,x+1}^1(n+1) = \frac{(A_x^1(n) * p_{s,x}^1 + (ret_x^1(n) + ret_x^2(n)) * \tilde{p}_{s,x}^1(n)) * (1 - q_x)}{A_{x+1}^1(n+1)}$$

Nombre moyen de points de service des bénéficiaires de rente de réversion directe :

Il est nécessaire d'abord de tenir compte de l'**âge minimal de réversion : 50 ans**. Si le conjoint est âgé de moins de 50 ans lors du décès de l'affilié, il se voit attribuer une partie des points de liquidation du défunt. Celle-ci est convertie en points de service au moment où le conjoint bénéficiaire atteint l'âge minimal de réversion. Il est donc nécessaire de déterminer l'année de conversion des points, notée n_c :

$$n_c = n + \max(50 - \underbrace{(x \pm d)}_{\text{Âge du conjoint}}, 0)$$

Ensuite on détermine le nombre moyen de points de service attribué aux conjoints des affiliés décédés au cours de l'année n :

$$\tilde{p}_{s,x}^2(n) = \frac{\left\{ DC_{x \pm d}^1(n) * (p_{l,x}^1(n) + \hat{p}_{l,x}^1(n)) + DC_{x \pm d}^2(n) * p_{l,x}^2(n) \right\} * t^{rev}}{DC_{x \pm d}^1(n) + DC_{x \pm d}^2(n)} * \frac{v_l(n_c)}{v_s(n_c)}$$

avec :

- t_{rev} : taux de réversion (50% dans notre cas)

On obtient ainsi le nombre moyen de points de service des bénéficiaires de rentes de réversion directes en (n+1) :

$$p_{s,x+1}^2(n+1) = \frac{\left\{ A_x^2(n) * p_{s,x}^2(n) + (DC_{x \pm d}^1(n) + DC_{x \pm d}^2(n)) * \tilde{p}_{s,x}^2(n) * \mathbb{1}_{\{Marié\}}(x \pm d) \right\} * \{1 - q_x\}}{A_{x+1}^2(n+1)}$$

Nombre moyen de points de service des bénéficiaires de rentes de réversion indirectes

Les conjoints des retraités qui décèdent en année n reçoivent une part de leurs points de service :

$$\tilde{p}_{s,x}^3(n) = p_{s,x \pm d}^1(n) * t^{rev}$$

D'autre part, le nombre moyen de points de service des conjoints des allocataires qui liquident **leurs droits en année n et décèdent la même année**, est donné par :

$$\tilde{p}_{s,x}^{3*}(n) = \tilde{p}_{s,x}^1(n) * t^{rev}$$

Ainsi, obtient le nombre moyen de points de service des allocataires de rentes de réversion indirectes en n+1 :

$$p_{s,x+1}^3(n+1) = \frac{\left\{ A_x^3 * p_s^3(n) * p_{s,x}^3(n) + A_{x \pm d}^1(n) * q_{x \pm d} * \tilde{p}_{s,x}^3 * \mathbb{1}_{\{Marié\}}(x \pm d) + (ret_{x \pm d}^1(n) + ret_{x \pm d}^2(n)) * \mathbb{1}_{\{Marié\}}(x \pm d) * \tilde{p}_{s,x}^{3*}(n) * q_{x \pm d} \right\}}{A_{x+1}^3(n+1)}$$

Finalement, on réévalue les rentes acquises auprès des compagnies d'assurances.

7.7 Etape 7 : Détermination et enregistrement des flux financiers

A cette étape, sont évaluées les ressources et les dépenses du régime au cours de l'année n :

Contribution

Les cotisations sont la somme des contributions patronales et salariales pour tous les agrégats :

$$c(n) = \sum_x (c_x^s(n) + c_x^p(n)) * E_x^1(n)$$

Rentes versées par les compagnies d'assurances

Le montant total des rentes versées par des compagnies d'assurance à la CIMR au cours de l'année, correspond aux droits acquis auprès de celles-ci par des retraités directs et des allocataires de rente de réversion directe et indirecte :

$$R_{ass}^{tot}(n) = (1 - Cap) * \sum_x R_{ass}^1(n) * A_x^1(n) + R_{ass}^2(n) * A_x^2(n) + R_{ass}^3(n) * A_x^3(n)$$

Pension de retraite et rentes de réversion

En prenant en considération les trois populations d'allocataires, on obtient le montant total des rentes servies :

$$R_{CIMR}^{tot}(n) = v_s(n) * \sum_x \sum_{i=1}^3 p_{s,x}^i(n) * A_x^i(n)$$

Capitaux versés par la CIMR

Suite au choix de l'« option en capital », le capital versé est donné par la formule :

$$c_{CIMR}(n) = Cap * \left(\sum_x ret_x^1(n) * \tilde{c}_x^{s,1}(n) + ret_x^2(n) * \tilde{c}_x^{s,2}(n) \right)$$

où :

- $\tilde{c}_x^{s,1}(n)$, $\tilde{c}_x^{s,2}(n)$: moyenne des contributions salariales capitalisées, versées après la réforme de 2003 par les affiliés actifs et les ayants droit d'âge x .

Remboursements des contributions salariales aux démissionnaires

$$c^{dém} = \sum_x \gamma_x^1(n) * p_d^1 * \hat{c}_x^{s,1}(n) + \gamma_x^2(n) * p_d^2 * \hat{c}_x^{s,2}(n)$$

où :

- $\hat{c}_x^{s,1}(n)$, $\hat{c}_x^{s,2}(n)$: moyenne des contributions salariales nettes d'intérêt, versées après la réforme de 2003, pour des affiliés actifs et les ayants droit d'âge x .

7.8 Etape 8 : Autres flux

Les ressources et les prestations suivantes sont calculées d'une façon globale en pourcentage des cotisations acquises ou rentes versées :

- « rachats de carrière et d'échéance » .
- « cotisations sociales ».
- le « régime à 55 ans ».
- les frais de fonctionnement.
- les majorations de prestations liées aux rentes d'orphelins et aux « points maladies ».

7.9 Etape 9 : Mise à jour de la réserve

Les produits financiers provenant des réserves placées font également partie des ressources du régime. Elles restent fonction du taux moyen de placement annuel et du niveau de la réserve de prévoyance. A la fin de chaque année, la réserve est recalculée selon le calcul arithmétique suivant : $Réserv(e)(n) =$

- **Fonds de début**
- **+ Cotisations sociales de l'exercice.**
- **+ Contributions patronales de l'exercice.**

- + **Contributions salariales de l'exercice.**
- + **Versements correspondant aux rachats de carrière et d'échéance & surprime R55.**
- + **Produits financiers.**
- + **Rentes reçues des compagnies d'assurance.**
- + **Cotisations salariales reçues des compagnies d'assurances suite au décès d'actifs suivis de versement de pensions de réversion directe au conjoint survivant.**
- - **Prestations récurrentes.**
- - **Capitaux versés provenant de l'« option en capital » sur les contributions salariales versées à la C.I.M.R.**
- - **Charges de fonctionnement.**

Finalement, on rappelle que tous les flux sont comptabilisés en fin de période. De même, le fonds de la C.I.M.R est crédité et/ou débité en fin de période. Il est à noter que les **intérêts financiers sont calculés en milieu d'année.**

- $IF = (\text{Fonds de début} + (\text{contributions salariales et patronales} + \text{cotisations sociales} + \text{versements correspondant aux rachats} + \text{rentes reçues des compagnies d'assurances} + \text{cotisations salariales reçues des compagnies d'assurances} + \text{surprime à 55 ans} - \text{prestations principales} - \text{capitaux versés par la C.I.M.R.} - \text{part salariale versée aux remboursés} - \text{prestations « maladie »} - \text{arrérages des rentes « orphelins »} - \text{capitaux constitutifs attribués lors de l'option de rachat} - \text{frais de fonctionnement}) / 2) * \text{taux de rendement financier}$

Chapitre 8

Hypothèses actuarielles

Sommaire

8.1 Présentation des données	42
8.1.1 affiliés actifs et ayants droit	42
8.1.2 Allocataires : retraités directs et réversataires	44
8.2 Hypothèses actuarielles	44
8.2.1 Hypothèses démographiques	44
8.2.2 Hypothèses économiques et financières	45
8.2.3 Hypothèses propres à la CIMR	46
8.2.4 Comportements sociaux des affiliés	48

DANS ce chapitre¹ nous présentons d'abord les données dont nous disposons et détaillons par la suite les hypothèses actuarielles bases des projections ainsi que leurs valeurs. En effet, le scénario de référence se base sur les données réelles retenues par la CIMR pour l'élaboration du bilan actuariel à fin 2013 qui feront l'objet de la première section

8.1 Présentation des données

8.1.1 affiliés actifs et ayants droit

L'effectif de la CIMR en fin 2013 comptait plus de **300 000 actifs cotisants** et plus de **250 000 ayants droit**. On décrit ci-après les principales caractéristiques de ces deux populations : L'image ci-après montre le caractère assez jeune de la

Libellé	affiliés actifs	ayants droit	Total
Effectif	304 193	263 967	568 160
Moyenne des points de liquidation	330 983	88 155	419 138
Moyenne des salaires	131 972	-	131 972
Masse salariale	40 144 962	-	40 144 962
Age moyen	39.3	47.9	43.3
Moyenne des rentes à 3.50%	24 025	31 130	55 155

TABLE 8.1 – Données de base de pour les affiliés

population active couverte par la CIMR. Nous remarquons également que la population féminine est très jeune, ce qui explique la féminisation récente du secteur privé au Maroc.

1. Sources : [http://www.ressources-actuarielles.net/EXT/ISFA/1226-02.nsf/d512ad5b22d73cc1c1257052003f1aed/fe918ced3b83c9f2c12577ba0071b93b/\\$FILE/Magda_Bolewska%20-%20M%C3%A9moire.002.pdf](http://www.ressources-actuarielles.net/EXT/ISFA/1226-02.nsf/d512ad5b22d73cc1c1257052003f1aed/fe918ced3b83c9f2c12577ba0071b93b/$FILE/Magda_Bolewska%20-%20M%C3%A9moire.002.pdf)

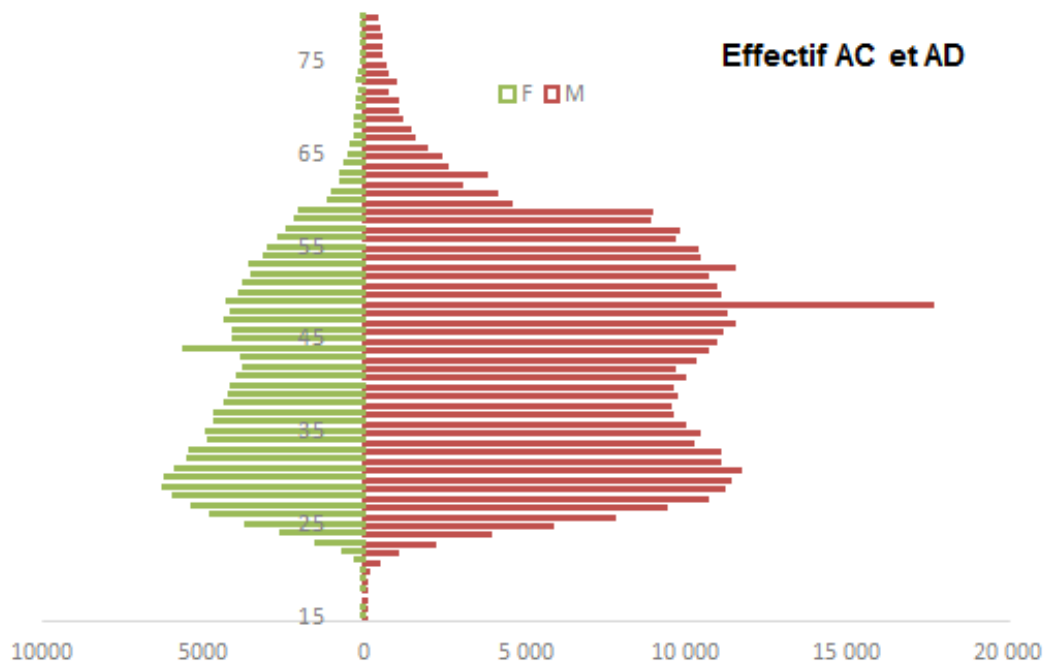


FIGURE 8.1 – Pyramide des âges des affiliés de la CIMR en fin 2013

On remarque également un pic au niveau des âges 49 pour les hommes et 43 pour les femmes. Cette « anomalie » provient du fait que l'on ait attribué un âge moyen à tous les affiliés dont l'âge était inconnu. D'autre part, le phénomène d'évolution du salaire est bien marqué par l'image ci-après décrivant le nombre moyen des points acquis par âge et par sexe :

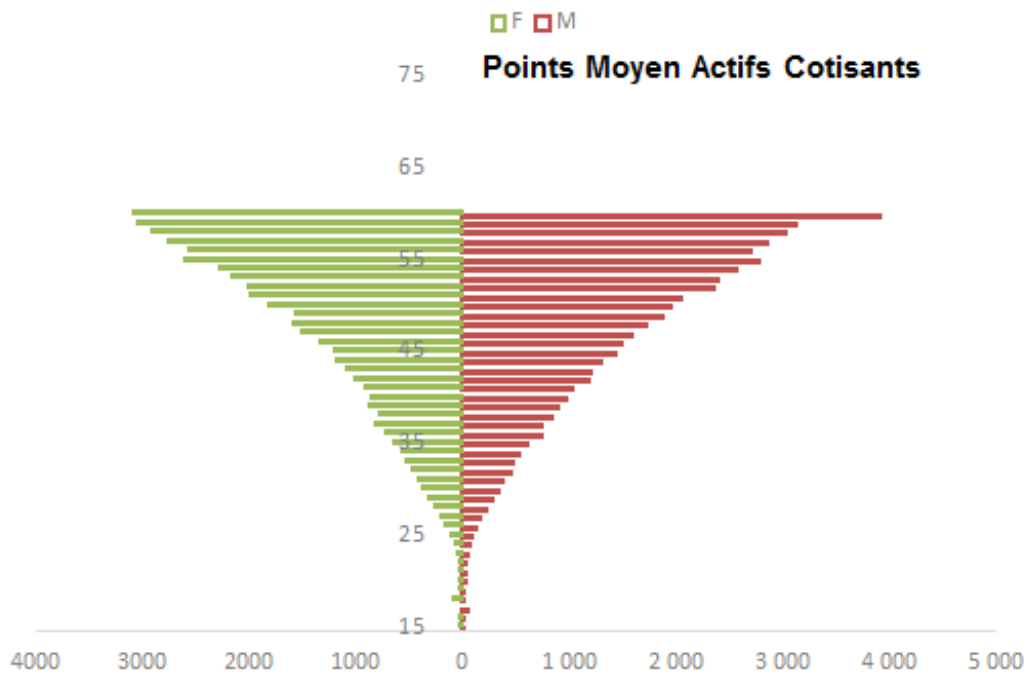


FIGURE 8.2 – Pyramide des moyennes des points acquis en fin 2013

8.1.2 Allocataires : retraités directs et réversataires

La population des allocataires de la CIMR en fin 2013 se présentait comme suit :

Libellé	Retraités	Réversataire	Total
Effectif	106 333	43 994	150 404
Total des points de service	238 357 088	42 117 088	280 474 176
Age moyen	68	73	69
Somme des rentes à 4.50%	2 447 614 976	79 289 782	2 526 904 758

TABLE 8.2 – Données de base de pour les ayants droit

En effet, l’effectif peut-être visualisé plus en détail sur l’image suivante :



FIGURE 8.3 – Pyramide des âges des allocataires en fin 2013

On peut remarquer sur l’image suivante le caractère dominant du sexe masculin au niveau la population active : Ce caractère dominant revient au fait que les hommes dominaient auparavant le marché du travail.

8.2 Hypothèses actuarielles

Dans cette section, nous présentons les principales hypothèses actuarielles qui nous ont servi de base pour le scénario de référence. Elle concerne à la fois les hypothèses démographiques et économiques, et d’autres propres à la CIMR.

8.2.1 Hypothèses démographiques

8.2.1.1 Table de mortalité

La table de mortalité permet de simuler les survénances des décès et d’évaluer les espérances de vie. La table retenue pour les simulations est la table française *PF 60-64* avec l’espérance de vie à 60 ans de 24,6 augmentant d’un trimestre tous les ans.

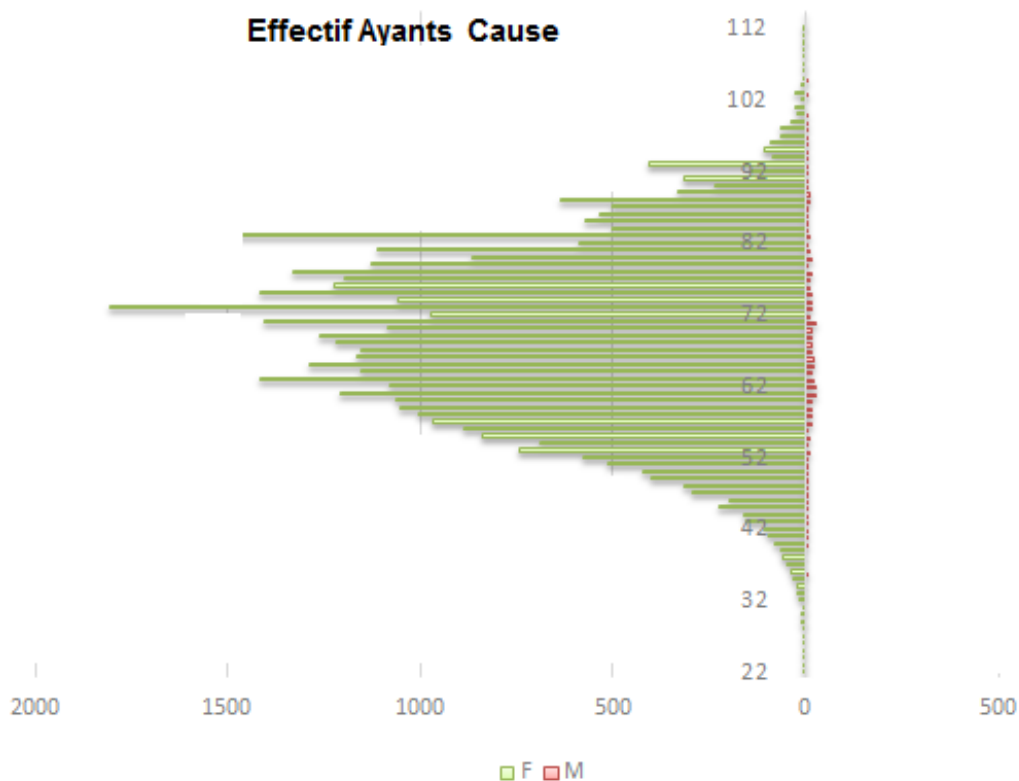


FIGURE 8.4 – Pyramide des âges des ayants cause

8.2.1.2 Hypothèse sur la nuptialité et la différence d’âge entre les conjoints

Le taux de nuptialité est une hypothèse permettant d’évaluer la proportion d’individus mariés lors de leur départ à la retraite. Ce coefficient permet notamment d’estimer la proportion des rentes qui sont potentiellement réversibles sur le conjoint survivant. Une étude statistique sur les 6 dernières années a été menée pour déterminer le taux de nuptialité. La valeur retenue pour ce paramètre est de 90%, autrement dit, 90% de la population est mariée. Concernant la différence d’âge entre les conjoints, la valeur retenue est de 4 ans (les femmes sont supposées être plus jeunes de 4 ans que les hommes).

8.2.2 Hypothèses économiques et financières

Les hypothèses économiques sont les hypothèses relatives à l’inflation, l’évolution des salaires et le rendement financier des placements. Celles-ci sont résumées dans le tableau suivant :

Hypothèse	Valeur
Inflation	2%
Rendement financier des placement	6%
Évolution annuelle des salaires des affiliés (hors inflation)	4%
Évolution annuelle des salaires des nouveaux entrants au moment de l’affiliation (hors inflation)	4%

TABLE 8.3 – Hypothèses économiques et financières du scénario de référence

8.2.3 Hypothèses propres à la CIMR

Il s'agit de : Évolution de la valeur des points et du salaire de référence

Hypothèse	Valeur au 31/12/2013	Évolution
Salaire de référence	21.8	4%
Valeur du point à la liquidation	13.11	4%
Valeur du point de service	12.00	1%

TABLE 8.4 – Évolution de la valeur des points et du salaire de référence

Valeur initiale de la réserve de prévoyance

Par prudence, la valeur retenue est la valeur comptable nettement inférieure à la valeur de marché et est de **32.4 Milliards de Dh.**

Caractéristiques des nouveaux affiliés

Les caractéristiques des nouveaux affiliés , qui cotiseront au régime dans le futur, sont basées sur les statistiques provenant de l'expérience de la caisse, le graphique suivant montre la proportion des nouveaux affiliés pour les différents taux de cotisation en fonction de l'âge :

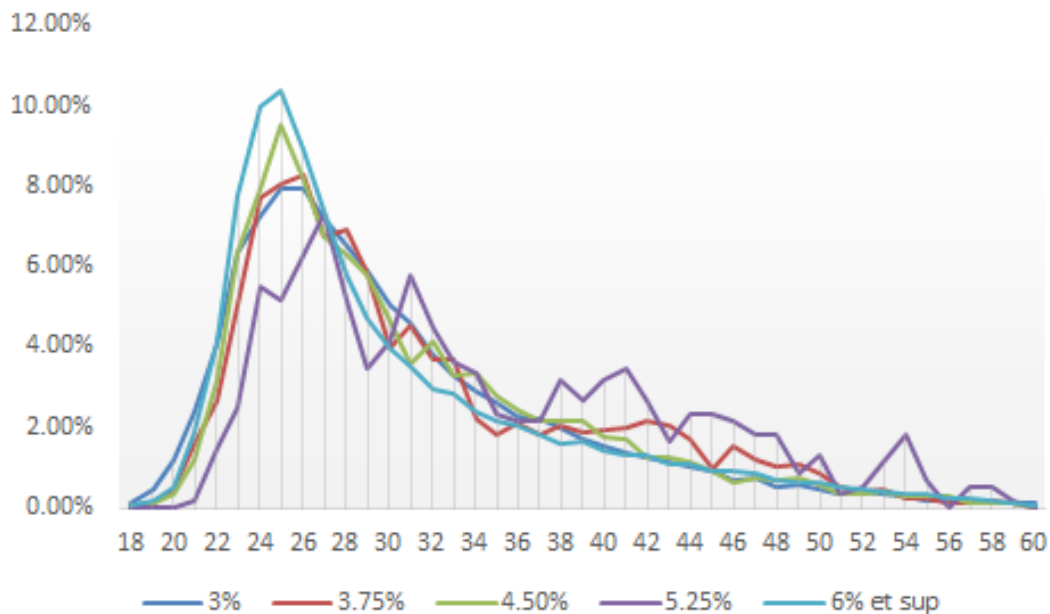


FIGURE 8.5 – Proportion des nouveaux affiliés pour les différents taux de cotisation en fonction de l'âge.

On peut voir ces caractéristiques de l'angle du salaire d'affiliation en fonction du taux de cotisation. Le graphique suivant illustre cette hypothèse :

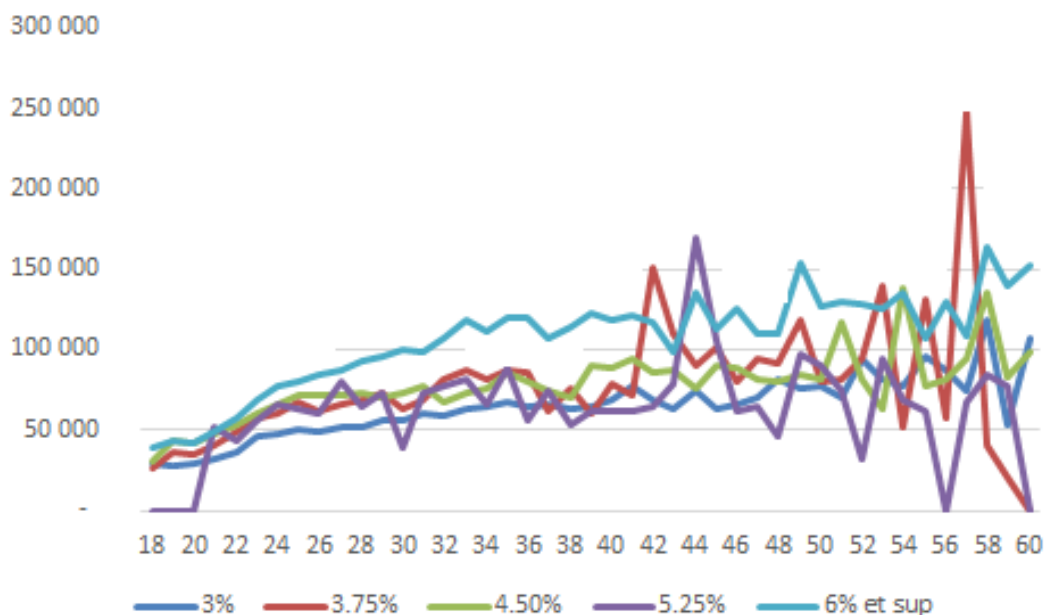


FIGURE 8.6 – Proportion des nouveaux affiliés pour les différents taux de cotisation en fonction du salaire d'affiliation.

Rendement pour l'« option en capital »

La revalorisation des cotisations salariales est fixée dans le scénario de référence à **3.25%+0.25% (revalorisation supplémentaire fixée par le Conseil d'Administration)**

Âge minimal de réversion

Une hypothèse réaliste et prudente concernant l'âge minimal de réversion a été retenue. Cet âge est unique pour les veufs et les veuves et est de **50 ans**.

Évolution de la population des affiliés actifs dans le futur

Dans le scénario principal, il est supposé que l'effectif des affiliés cotisants croît de **0,5%** par an. Il est également considéré que les affiliés cotisant au régime **ne changent jamais leurs taux de contribution**. À l'inverse, les ayants droit peuvent reprendre les contributions selon un taux différent de celui avant la cessation des cotisations (Le taux de cotisation est un choix de l'entreprise adhérente et n'est pas aux choix personnels des affiliés . La reprise des cotisations n'est donc pas forcément résultant du retour chez le même employeur).

Frais de fonctionnement de la caisse

Les frais annuels de fonctionnement du régime sont assimilés à 2% des contributions patronales, salariales et des cotisations sociales. Cette valeur est basée sur les statistiques du régime.

Rentes d'orphelin et « points maladie »

Une étude statistique a été menée pour déterminer la charge qui résulte des rentes d'orphelin et des « points maladie ». Par contre les charges liées aux affiliés en incapacité ou en invalidité représentent une partie peu significative des prestations du régime. Ils sont traités d'une façon globale et valent respectivement 0,2% (rentes d'orphelins) et 0,1% (« Points maladie ») des rentes versées.

« Régime à 55 ans »

Une table d'acquisition de points à 55 ans a été élaborée par la CIMR et définit, en fonction de l'âge de l'intéressé, le taux moyen de points acquis à 55 ans par rapport au nombre total de points acquis. Ce taux est appliqué au nombre de points acquis au cours de l'année pour déterminer le nombre de points à 55 ans. Les points à 55 ans sont gérés dans les simulations actuarielles comme un surplus de points liquidables à l'âge normal (60 ans).

« Rachats de carrière et d'échéance »

Les ressources provenant des « rachats de carrière » et des « rachats d'échéance » sont évaluées par le régime respectivement à **0,7%** et **1,9%** des contributions génératrices de droits. Les prestations liées aux « rachats de carrière » et « rachats d'échéance » sont assimilées à **0,7%** et **0,16%** de rentes versées annuellement.

« Cotisations sociales »

La « cotisation sociale », égale à **350** dirhams en 2013, est supposée ne pas évoluer au cours du temps. Le nombre initial d'entreprises adhérentes est supposé augmenter selon le taux observé au cours des dernières années qui est de **10%**.

8.2.4 Comportements sociaux des affiliés**« Âge de départ en retraite »**

L'âge normal de départ en retraite est de 60 ans. Au moment de la liquidation des droits, une table d'anticipation/prorogation est appliquée pour déterminer le nombre de point de service. Cette table se présente comme suit :

Âge à la liquidation	Coefficient
50	0.40
51	0.47
52	0.54
53	0.61
54	0.66
55	0.72
56	0.76
57	0.81
58	0.87
59	0.93
61	1.05
62	1.10
63	1.15
64	1.20
65 et plus	1.25

TABLE 8.5 – Table d'anticipation/prorogation

En ce qui concerne les sorties en retraite, elles sont régies selon la loi suivante :

Âge à la liquidation	Coefficient
55	2.5%
56	0%
57	0%
58	0%
59	0%
60	75%
61	8%
62	3%
63	3%
64	3%
65	5.5%

TABLE 8.6 – Table de sortie en retraite

« Option en capital »

Selon les statistiques, environ **83.4%** choisissent la liquidation sous forme de capital pour la partie salariale des cotisations. Par prudence, on ne retiendra que la valeur de **50%** dans les simulations.

Turnover et démissions des affiliés

Les probabilités utilisées sont résumées dans le tableau suivant :

Population	Taux du turnover	Ventilation
affiliés actifs	12%	– 95% gardent leurs droits et deviennent ayants droit. – 5% démissionnent.
ayants droit	9%	– 90% réactivent leurs cotisations et deviennent affiliés actifs. – 10% démissionnent.

TABLE 8.7 – Table du turnover

Chapitre 9

Résultats et tests de sensibilité

Sommaire

9.1 Réserve de prévoyance à l'horizon de 60 ans	50
9.2 Tests de sensibilité	51

Nous exposons dans ce petit chapitre le résultat de notre simulation ainsi que quelques tests de sensibilité au taux de rendement des placements.

9.1 Réserve de prévoyance à l'horizon de 60 ans

APRÈS avoir déroulé toutes les étapes du **chapitre des projections**, nous pouvons valider les critères de pérennité du régime de la CIMR puisque la réserve de prévoyance est positive en fin des projections et a une tendance ascendante. Le graphique suivant appuie cette conclusion :

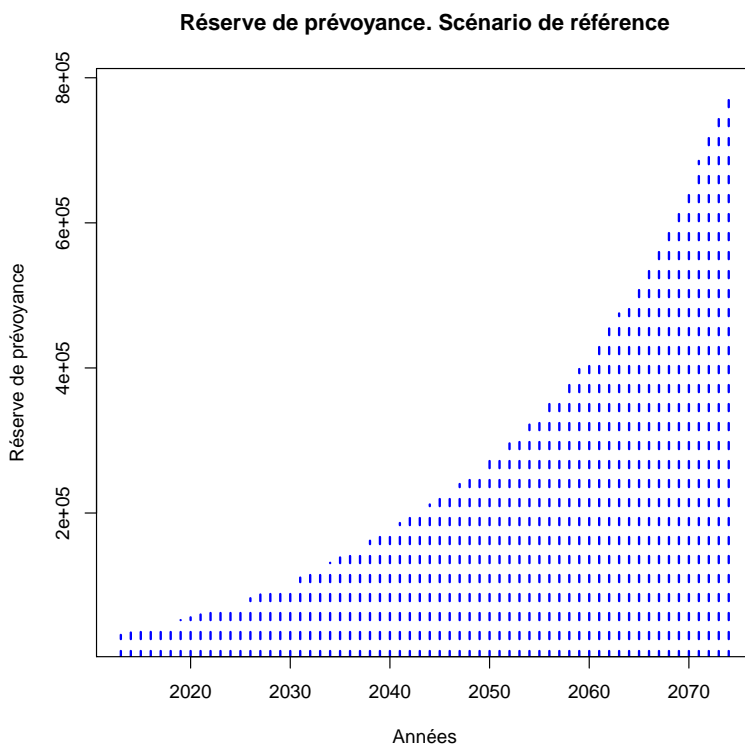


FIGURE 9.1 – Réserve de prévoyance - Scénario de référence

nous pouvons donc, compte tenu des hypothèses retenues confirmer la pérennité du régime. Toute fois, ayant voulu challenger ces hypothèses, nous avons déroulé des tests de sensibilité au taux de rendement des placements. Le résultat est étonnant!

9.2 Tests de sensibilité

Comme nous l'avons annoncé, nous avons fait varier le taux de rendement des placements sur une plage très restreinte pour pouvoir confirmer d'avantage la pérennité du régime. Le graphique suivant illustre ces tests :

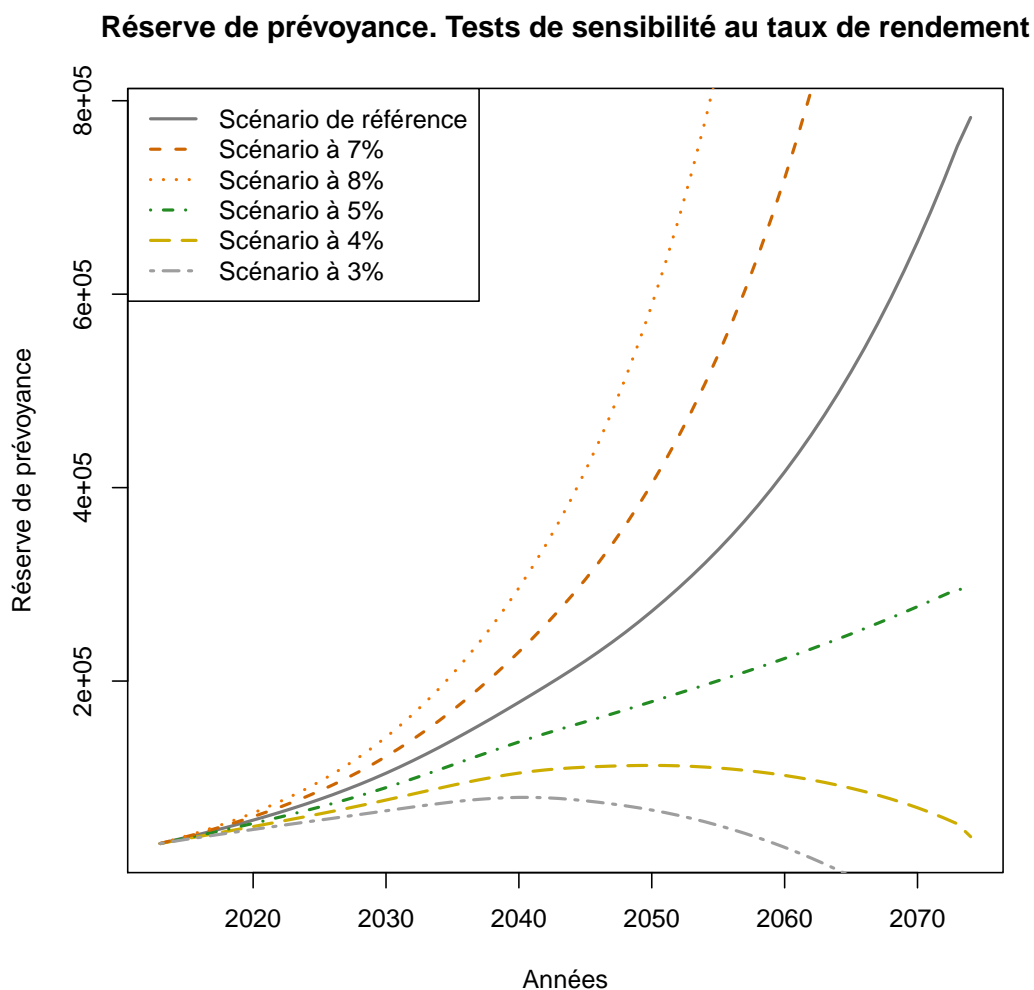


FIGURE 9.2 – Réserve de prévoyance - Tests de sensibilité au taux de rendement

Comme nous le remarquons, la réserve de prévoyance est très sensible aux variations du taux de rendement des placements, et son extinction peut même devenir rapide si le taux de rendement diminue à 3% ou encore moins. Il est donc nécessaire d'apporter du stochastique à cette hypothèse déterminante afin de vérifier, si les conditions financières et économiques s'avèrent précaires dans le futur, le comportement de la réserve.

Cinquième partie

L'apport du stochastique

*Comme nous avons pu le remarquer, les tests de sensibilités aux variations du taux de rendement des placements financiers ont montré que la réserve est très sensible à ce paramètre, et considérer une valeur fixe des rendements sur un horizon de **40 ans** est une hypothèse très large qui s'éloigne de la réalité financière de la caisse. Nous avons donc jugé intéressant d'étudier l'apport de l'aléa à ce paramètre dans l'étude de la forme de la réserve de prévoyance en fin de projections. Dans un premier chapitre nous présentons le cadre théorique de notre étude, dans un second, nous nous attaquerons à l'application réalisée par **R** pour estimer les différents modèles, finalement, nous comparons les réserves déterministe et stochastique et sortirons d'une conclusion plus concrète.*

Chapitre 10

Le cadre théorique

Sommaire

10.1 Choix des modèles	54
10.2 Modèle de Vasiček (1977)	55
10.2.1 Présentation du modèle	55
10.2.2 Estimation des paramètres	55
10.3 Modèle de COX, INGERSOLL, ROSS (CIR) (1985)	56
10.3.1 Estimation des paramètres	57
10.4 Avantages et inconvénients des deux modèles	57

Afin de rendre le taux de rendement des placements (*qui est un taux court*) stochastique, nous avons eu recours aux modèles qui reposent d'un côté sur une approche dite d'évaluation d'équilibre général (CIR), et d'un autre, ceux qui reposent sur une approche dite d'évaluation d'arbitrage (VASIČEK).

10.1 Choix des modèles

Il existe une grande variété de modèles de taux d'intérêt. On peut cependant distinguer deux grandes familles de modèles stochastiques utilisées dans le cadre de ce mémoire :

- **Les modèles d'arbitrage à une seule variable d'état** (ou bien d'équilibre partiel) comme celui de Vasiček (1977) qui comporte une seule variable d'état et que nous allons traiter par la suite.
- **Les modèles d'équilibre général** qui, prennent en compte la conjoncture économique tels que le modèle de Cox, Ingersoll et Ross (1985) (CIR) que nous allons détailler également dans ce qui suit.

Tous les modèles étudiés par la suite, modélisent le taux court instantané à l'aide de l'équation différentielle stochastique (EDS) suivante :

$$dr_t = \mu(r_t, t)dt + \sigma(r_t, t)dW_t$$

où :

- μ est le coefficient de dérive (drift).
- σ est le coefficient de diffusion.
- W_t processus de Wiener.

En supposant que le marché est parfait (absence de coût de transaction, titre, même niveau d'information chez tous les agents, marché efficient, ...) nous présenterons les modèles suivants :

- Modèle de **Vasiček**
- Modèle de **COX, INGERSOLL, ROSS** : (CIR)

10.2 Modèle de Vasiček (1977)

10.2.1 Présentation du modèle

Il s'agit d'un processus gaussien basé sur le processus d'**ORNSTEIN UHLENBECK** expliquant l'effet de retour à la moyenne empiriquement observé sur les courbes de taux. Celui-ci s'écrit :

$$dr_t = a(b - r_t)dt + \sigma dW_t$$

avec :

- r_t : taux d'intérêt instantané
- a : vitesse de retour à la moyenne
- b : moyenne long terme du taux autour de laquelle évolue le taux court instantané
- σ : volatilité
- W_t : processus de WIENER

Nous disposons d'une solution explicite pour cette équation différentielle stochastique, on peut donc discrétiser le processus.

Après calculs (voir **annexes**), nous pouvons écrire le modèle de *Vasiček* de la façon suivante :

$$r_t = r_0 e^{-at} + b(1 - e^{-at}) + \sigma \sqrt{\frac{1 - e^{-2at}}{2a}} \epsilon_t \quad \text{avec} \quad \epsilon_t \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, 1)$$

où encore :

$$r_t = r_s e^{-a(t-s)} + b(1 - e^{-a(t-s)}) + \sigma \sqrt{\frac{1 - e^{-2a(t-s)}}{2a}} \epsilon_t \quad \text{avec} \quad \epsilon_t \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, 1)$$

Le modèle de *Vasiček* admet donc une solution explicite exacte et, par conséquent, on peut déterminer une discrétisation exacte du processus :

$$\tilde{r}_{t+\delta t} = \tilde{r}_t e^{-a\delta t} + b(1 - e^{-a\delta t}) + \sigma \sqrt{\frac{1 - e^{-2a\delta t}}{2a}} \epsilon_{t+\delta t} \quad \text{avec} \quad \epsilon_{t+\delta t} \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, 1)$$

10.2.2 Estimation des paramètres

Plusieurs méthodes peuvent être utilisées pour estimer les paramètres du modèle. On peut citer :

- Estimation par maximum de vraisemblance : inutilisable si le processus ne possède pas de discrétisation exacte, car la densité n'est déterminée que de façon approximative. Cela entraîne bien-entendu un biais dans l'estimation. On n'utilisera donc pas cette méthode pour l'estimation des paramètres.
- Estimation par régression : utilisée lorsque le processus peut être assimilé à une série temporelle. C'est le cas des modèles de *Vasiček* et *CIR*. Nous utiliserons donc cette méthode.

Rappelons donc la discrétisation exacte du modèle de *Vasiček* :

$$\begin{aligned} \tilde{r}_{t+1} &= \tilde{r}_t e^{-a} + b(1 - e^{-a}) + \sigma \sqrt{\frac{1 - e^{-2a}}{2a}} \epsilon_{t+1} \quad \text{avec} \quad \epsilon_{t+1} \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, 1) \\ &\rightarrow \tilde{r}_{t+1} = \alpha_1 + \alpha_2 \tilde{r}_t + \alpha_3 \epsilon_{t+1} \quad \text{avec} \quad \epsilon_{t+1} \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, 1) \quad (2) \end{aligned}$$

avec :

- $\alpha_1 = b(1 - e^{-a})$
- $\alpha_2 = e^{-a}$
- $\alpha_3 = \sigma \sqrt{\frac{1 - e^{-2a}}{2a}}$

C'est donc un processus autorégressif d'ordre 1 ($\mathcal{AR}(1)$) avec :

- $\hat{a} = -\ln(\hat{\alpha}_2)$
- $\hat{b} = \frac{\hat{\alpha}_1}{1 - \hat{\alpha}_2}$
- $\hat{\sigma} = \hat{\alpha}_3 \sqrt{\frac{2\ln(\hat{\alpha}_2)}{\hat{\alpha}_2^2 - 1}}$ où $\hat{\alpha}_3 = \hat{\sigma}_{reg} = \sqrt{\frac{\sum_{t=1}^n \hat{\epsilon}_{t+1}^2}{n-2}}$

Nous pouvons donc procéder par une régression linéaire simple pour estimer les paramètres. Cependant, avant d'entamer les estimations, il est nécessaire de vérifier si la série des taux est **stationnaire au sens large (SSL)**. Rappelons donc ce qu'est un processus SSL :

Définition (Processus stationnaire au sens large). *Un processus X_t est dit stationnaire au sens large (SSL) si et seulement si :*

1. $\mathbb{E}(X_t)$ est constante
2. $\mathbb{E}(X_t^2) < \infty$
3. La fonction d'auto-covariance $\gamma_k = cov(X_t, X_{t+k}) = \mathbb{E}\{(X_t - \mathbb{E}(X_t))(X_{t+k} - \mathbb{E}(X_{t+k}))\}$ est indépendante de t .

La plupart des séries financières sont non-stationnaires, il faut donc procéder à la stationnarisation. Différents tests permettent de détecter une non-stationnarité et éventuellement la bonne méthode pour stationnariser la série en question. Le plus célèbre est le test de **Dickey-Fuller** qui estime d'abord la régression :

$$X_t = \Phi X_{t-1} + a_t$$

par la méthode des moindres carrés et teste si $\Phi = 1$.

- si $\Phi = 1$ alors la série est non stationnaire.
- si $|\Phi| < 1$ la série est stationnaire.

Le test est conduit en estimant **trois modèles** en recherche de la présence d'une racine unitaire¹. Ces modèles sont les suivants :

- $\Delta X_t = \rho X_{t-1} + \alpha + \beta t + a_t$
- $\Delta X_t = \rho X_{t-1} + \alpha + a_t$
- $\Delta X_t = \rho X_{t-1} + a_t$

avec $a_t \rightsquigarrow BB(0, \sigma^2) i.i.d$. On cherche donc à tester l'hypothèse de racine unitaire :

$$\begin{cases} H_0 & \rho = 0 \\ H_0 & \rho < 0 \end{cases}$$

si $t_{\hat{\rho}} > t_{tabulé}$ on accepte H_0 : la série est non SSL. Par hypothèse, le processus a_t dans le test de **Dicker-Fuller** est un bruit blanc. Cependant, il n'y a aucune raison pour que les résidus le soient réellement. On fait donc appel aux tests de **Dickey-Fuller Augmentés (ADF)** pour prendre en compte cette hypothèse. Les trois modèles deviennent :

- **Modèle 3** : $\Delta X_t = \rho X_{t-1} + \alpha + \beta t + \sum_{j=1}^n \Phi_j \Delta X_{t-j} + a_t$
- **Modèle 2** : $\Delta X_t = \rho X_{t-1} + \alpha + \sum_{j=1}^n \Phi_j \Delta X_{t-j} + a_t$
- **Modèle 1** : $\Delta X_t = \rho X_{t-1} + \sum_{j=1}^n \Phi_j \Delta X_{t-j} + a_t$

avec $a_t \rightsquigarrow BB(0, \sigma^2) i.i.d$, et on cherche toujours à tester la même hypothèse, à savoir :

$$\begin{cases} H_0 & \rho = 0 \\ H_0 & \rho < 0 \end{cases}$$

La stratégie proposée pour les tests de **Dickey-Fuller augmentés (ADF)** est résumée par le schéma fourni en **annexe**

10.3 Modèle de COX, INGERSOLL, ROSS (CIR) (1985)

Le modèle de *Vasiček* présente l'inconvénient majeur de pouvoir ressortir des taux négatifs du fait que la loi normal est centrée réduite. Dans ce contexte, CIR ont eu recours au processus « racine carré » dont la dynamique du modèle est donnée par l'EDS suivante :

$$dr_t = a(b - r_t)dt + \sigma \sqrt{r_t} dW_t$$

Malheureusement, comme dans la plupart des cas, ce processus n'admet ni une solution explicite, ni une discrétisation exacte. Dans ce cas, le recours aux méthodes numériques est essentiel. La plus célèbre est le développement d'Itô-Taylor. Le développement d'Itô-Taylor d'ordre **1**, connu sous le nom du **schéma d'Euler**², fournit une première approximation discrète du taux court :

$$\tilde{r}_{t+\delta t} = \tilde{r}_t + a(b - \tilde{r}_t)\delta t + \sigma \sqrt{\tilde{r}_t} \delta t \epsilon_{t+\delta t} \quad \text{avec} \quad \epsilon \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, 1)$$

1. D'où l'appellation (*Unit Root Test*).

2. voir **annexes**.

La simulation d'un schéma d'*Euler* est extrêmement simple puisqu'il suffit de simuler les variables gaussiennes. Cependant, ce schéma d'*Euler* peut être amélioré. En fait, l'idée est simple, plus le développement d'Itô-Taylor est détaillé, plus l'approximation est bonne au sens de la convergence forte. C'est dans cette optique que *Milshstein* propose un schéma d'ordre 2³. Dans ce cas, l'approximation du taux dans le modèle de CIR s'écrit :

$$\tilde{r}_{t+\delta t} = \tilde{r}_t + a(b - \tilde{r}_t)\delta t + \sigma\sqrt{\tilde{r}_t}\delta t\epsilon_{t+\delta t} + \frac{\sigma^2}{4}\delta t(\epsilon_{t+\delta t}^2 - 1) \quad \text{avec } \epsilon \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, 1)$$

Faute de temps, ce modèle ne fera pas objet de notre modélisation.

10.3.1 Estimation des paramètres

Rappelons la discrétisation approximative d'ordre 1 du processus du modèle de CIR :

$$\tilde{r}_{t+1} = \tilde{r}_t + a(b - \tilde{r}_t) + \sigma\sqrt{\tilde{r}_t}\epsilon_{t+1} \quad \text{avec } \epsilon \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, 1)$$

En divisant par $\sqrt{\tilde{r}_t}$ on remarque que :

$$\frac{\tilde{r}_{t+1}}{\sqrt{\tilde{r}_t}} = ab\frac{1}{\sqrt{\tilde{r}_t}} + (1-a)\frac{\tilde{r}_t}{\sqrt{\tilde{r}_t}} + \sigma\epsilon_{t+1} \quad \epsilon_t \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, 1)$$

et en posant donc : $Y_t = \frac{\tilde{r}_{t+1}}{\sqrt{\tilde{r}_t}}$, $X_t^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{\tilde{r}_t}}$ et $X_t^{(2)} = \frac{\tilde{r}_t}{\sqrt{\tilde{r}_t}}$ on obtient :

$$Y = abX_t^{(1)} + (1-a)X_t^{(2)} + \sigma\epsilon_{t+1} \quad \text{avec } \epsilon \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, 1)$$

$$Y = \alpha_1 X_t^{(1)} + \alpha_2 X_t^{(2)} + \sigma\epsilon_{t+1} \quad \text{avec } \epsilon \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, 1) \quad (3)$$

équation à estimer par régression linéaire également avec :

- $\alpha_1 = ab$
- $\alpha_2 = 1 - a$
- $\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{\sum_{t=1}^n \hat{\epsilon}_{t+1}^2}{n-3}}$

10.4 Avantages et inconvénients des deux modèles

Dans cette courte section, on synthétise les avantages et les inconvénients des deux modèles dans le tableau suivant :

	Avantages	Inconvénients
Vasiček	<p>Le modèle prend en compte l'effet de retour à la moyenne (qui est réellement observé dans le marché). Une baisse des taux est généralement suivie par une hausse et inversement.</p> <p>Le modèle est à un seul facteur ce qui le rend facile à comprendre sur le plan théorique</p> <p>Le modèle est facilement programmé de point de vue informatique</p>	<p>Le processus de r_t est gaussien ce qui fait que le taux r_t peut être négatif avec une probabilité non nulle.</p> <p>Tous les paramètres de diffusion sont constants, c'est-à-dire que le seul facteur qui peut déformer la courbe c'est le taux instantané lui-même. Ce qui suppose une corrélation parfaite des taux.</p>

3. voir annexes.

Cox	Les taux ne peuvent jamais être négatifs car le modèle n'a plus le caractère gaussien	Les paramètres de diffusion sont constants
Ingersoll	Le modèle permet de prendre en compte l'effet de retour à la moyenne constaté sur les taux d'intérêt	
Ross	Le modèle est simple à programmer de point de vue informatique	
(CIR)	Le modèle est intuitif du fait de l'interprétation de ses paramètres	

TABLE 10.1 – Avantages et inconvénients des modèles stochastiques des taux d'intérêt

Chapitre 11

Mise en œuvre des calculs et réserve de prévoyance stochastique

Sommaire

11.1 Estimation à l'aide des séries temporelles	59
11.1.1 Méthodologie de Box Jenkins	59
11.1.2 Implémentation informatique	59
11.2 Estimation à l'aide du modèle économétrique	60
11.2.1 Méthodologie	60
11.2.2 Implémentation informatique	60
11.3 Résultats	61
11.3.1 Modèle de <i>Vasiček</i>	61
11.3.2 Modèle de <i>Cox-Ingersoll-Ross</i>	68
11.4 Réserve stochastique	70

Le langage informatique utilisé est **R**¹ du fait de sa documentation abondante et sa rapidité en terme d'exécution. Dans ce chapitre, nous sortons du cadre théorique pour procéder à des calculs sur les données réelles. Cela dit, nous présentons les différentes étapes de calcul, le programme lui même ainsi que les sorties et les résultats obtenus.

11.1 Estimation à l'aide des séries temporelles

11.1.1 Méthodologie de Box Jenkins

La procédure de Box & Jenkins est une méthodologie en 4 étapes permettant de fournir les meilleures prévisions possibles d'un processus stationnaire au sens large.

1. **Identification** : à cette étape, on identifie les ordres « p » et « q » du processus. En effet, en utilisant le test de Bartlett² on peut déterminer l'ordre du processus (« p » pour $\mathcal{AR}(p)$ et « q » pour $\mathcal{MA}(q)$).
2. **Estimation** : on ne retient que les modèles dont tous les coefficients ont un *t-student* en valeur absolue supérieur à **1.96 (au risque de 5%)**.
3. **Validation** : il faut par la suite vérifier si les résidus du modèle sont un bruit blanc à l'aide du test de *Box-Pierce* ou *Box-Ljung*³.
4. **Prévision** : finalement, on projette notre série chronologique sur un horizon de 60 ans.

11.1.2 Implémentation informatique

Le tableau suivant résume les différentes étapes empruntées, les packages de **R** appelés ainsi que les fonctions utilisées.

1. R est un logiciel libre de traitement des données et d'analyse statistique mettant en œuvre le langage de programmation S.
2. Voir [annexes](#).
3. Voir [annexes](#).

Étape de travail	Package	Fonctions	Autres
Test de stationnarité (<i>Dickey-Fuller Augmentés (ADF)</i>)	<i>tseries</i>	<i>adf.test()</i>	si $p\text{-value} < 0.05 \rightarrow$ S.S.L ^a . <hr/> a. série Stationnaire au Sens Large.
Identification des paramètres « p » et « q » (à l'aide des corrélogrammes et du test de <i>Bartlett</i>)	<i>tseries</i>	– autocorrélations ($\mathcal{M}\mathcal{A}$) : <i>acf()</i> . – autocorrélations partielles ($\mathcal{A}\mathcal{R}$) : <i>pacf()</i>	voir le schéma pour détecter le « p » et le « q »
Estimation	<i>stats</i> ou <i>tseries</i>	<i>arima(,order=c(p,0,q))</i>	le « 0 » dans (order) signifie que la série n'est pas dérivée.
Validation (tests de Box-Pierce et <i>Ljung-Box</i>)	<i>stats</i>	<i>Box.test()</i>	si $p\text{-value} > 0.05 \rightarrow$ les résidus sont un bruit blanc
Prévision	<i>forecast</i> ou <i>stats</i>	<i>predict.Arima(,h=10)</i> ou <i>forecast.Arima(,h=10)</i>	« h » est le nombre de prévisions à estimer

TABLE 11.1 – Implémentation informatique des séries chronologiques

11.2 Estimation à l'aide du modèle économétrique

11.2.1 Méthodologie

L'approche ici n'est pas totalement différente. En effet, il s'agit de :

1. S'assurer que la série est stationnaire et la stationnariser dans le cas contraire en la dérivant éventuellement.
2. Estimer les régressions : *Vasiček* et *Cox-Ingersoll-Ross*.
3. Valider si le modèle obtenu est significatif ou non (R^2 , test de *Fisher*).
4. Vérifier si les résidus sont non-corrélés à l'aide du test de *Durbin-Watson*.
5. Vérifier l'homoscédasticité à l'aide du test de *Breusch-Pagan* ou celui de *Goldfeld-Quandt*.
6. Procéder à la prévision sur un horizon de 60 ans.

11.2.2 Implémentation informatique

Étape de travail	Package	Fonctions	Autres
Test de stationnarité (<i>Dickey-Fuller Augmentés (ADF)</i>)	<i>tseries</i>	<i>adf.test()</i>	si $p\text{-value} < 0.05 \rightarrow$ S.S.L ^a . <hr/> a. série Stationnaire au Sens Large.
Estimation des modèles	<i>base</i>	<i>lm(Y ~ X)</i>	pour une régression sans constante (CIR) : $lm(Y \sim X_1 + X_2 + 0)$

Validation	<i>base et lmtest</i>	<ul style="list-style-type: none"> - Breush-Pagan : <i>bptest(lm)</i>. - Goldfeld-Quandt : <i>gqtest(lm)</i>. - Durbin-Watson : <i>dwttest(lm)</i>. - R² 	« lm » est un objet de type « linear model (lm sous R) »
Prévision	<i>base</i>	boucle	

TABLE 11.2 – Implémentation informatique des modèles économétriques

11.3 Résultats

Cette brève section présente l'ensemble des résultats des deux approches pour chacun des deux modèles, l'outil utilisé étant **R**. Tout d'abord, la série des taux dont on dispose est l'historique d'environ **6 ans** du taux de rendement journalier des placements.

11.3.1 Modèle de Vasiček

11.3.1.1 Estimation à l'aide des séries chronologiques

D'abord, on vide la mémoire de tous les objets présents éventuellement, et on permet à **R** d'utiliser toute la mémoire si nécessaire avec les commandes suivantes :

```
rm(list=ls());
memory.limit(4000);
```

```
[1] 4000
```

ensuite, on charge les packages nécessaires comme décrits dans les deux sections précédentes :

```
library("tseries"); # voir les tableaux précédemment cités.
library("stats");
library("forecast");
library("lmtest");
```

on fixe le germe des nombres aléatoires pour pouvoir reproduire les mêmes résultats à l'aide de la syntaxe suivante :

```
set.seed(10) # le nombre 10 est choisi arbitrairement
```

on importe à présent la base de données des taux qu'on stocke dans l'objet `bd`

```
bd=read.table("Taux_de_rendement.csv",sep=";",dec=".",header=T);
```

la fonction suivante permet d'avoir les noms de toutes les colonnes :

```
names(bd);
```

```
[1] "Rendement" "Date"
```

on stocke alors la première colonne dans un objet nommé "*rendement*" et on calcul sa distribution :

```
rendement=bd[,1];
summary(rendement);
```

```
   Min. 1st Qu.  Median    Mean 3rd Qu.    Max.
0.07090 0.08030 0.08270 0.08162 0.08350 0.09960
```

à ce stade, on convertit la série en une série temporelle de type "*ts*" pour pouvoir l'utiliser par les fonctions du packages *tseries*⁴

```
rendement=as.ts(rendement);
```

la série apparait comme le montre la figure suivante :

4. Le langage **R** est très intuitif, pour convertir par exemple un objet numerique "*x*" en caractère il suffit d'exécuter la commande `x=as.character(x)`.

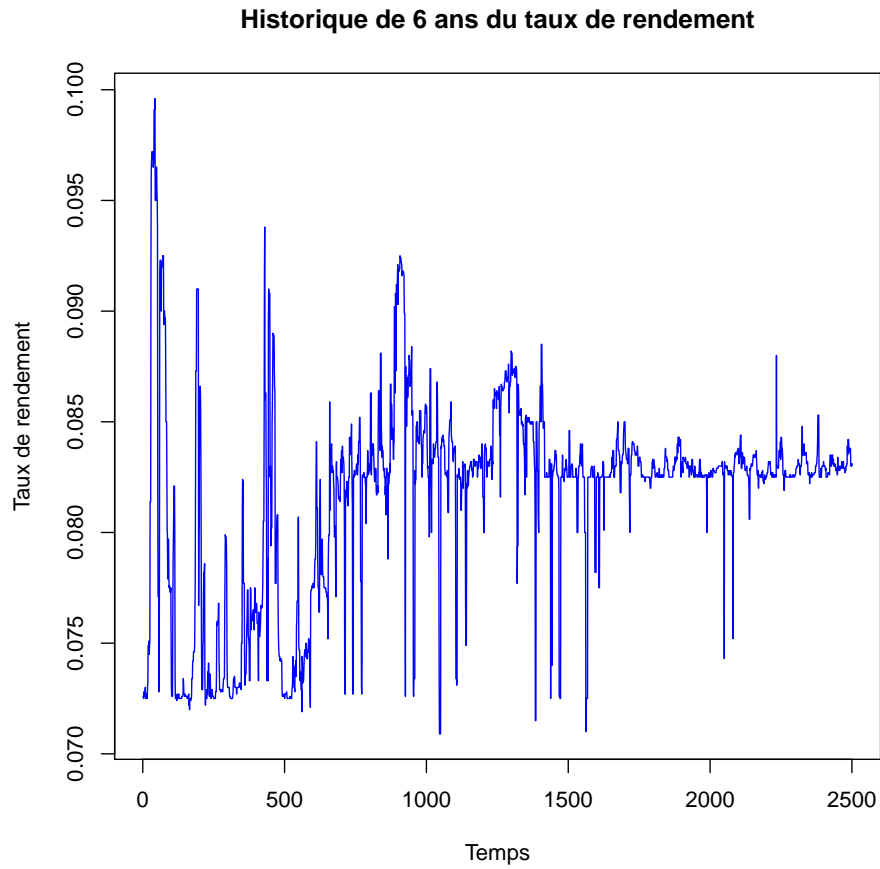


FIGURE 11.1 – Taux de rendement

Vérifions à présent si la série est stationnaire, on fait donc appel aux tests augmentés de *Dickey-Fuller* :

```
adf=adf.test(rendement);
adf;
```

Augmented Dickey-Fuller Test

```
data: rendement
Dickey-Fuller = -5.9864, Lag order = 13, p-value = 0.01
alternative hypothesis: stationary
```

nous remarquons que la série est bien stationnaire, on peut donc identifier ses ordres à l'aide des corrélogrammes : Pour le corrélogramme des autocorrélations (*MA*) :

```
acf=acf(rendement,main="Corrélogramme des autocorrélations",xlab="Ordres");
```

Pour le corrélogramme des autocorrélations partielles (*AR*) :

```
pacf=pacf(rendement,main="Corrélogramme des autocorrélations partielles",xlab="Ordres");
```

Corrélogramme des autocorrélations

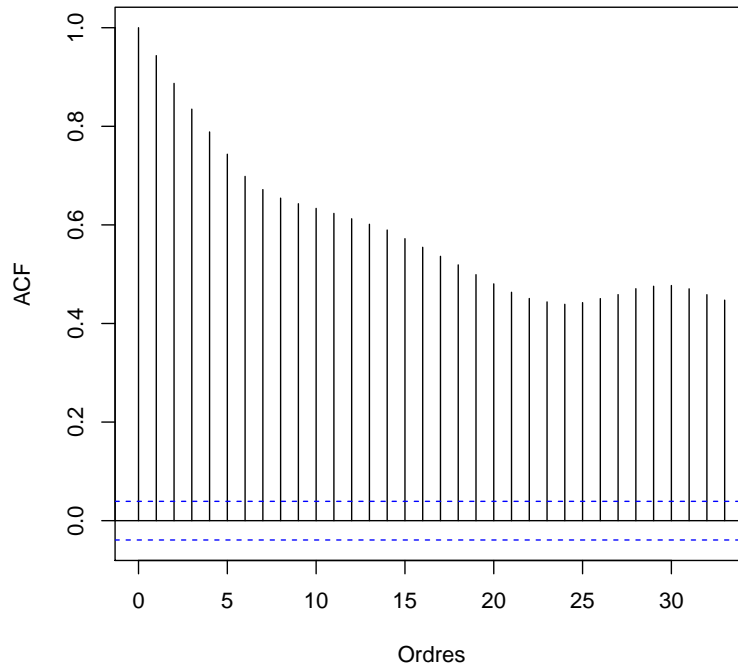


FIGURE 11.2 – ACF

Corrélogramme des autocorrélations partielles

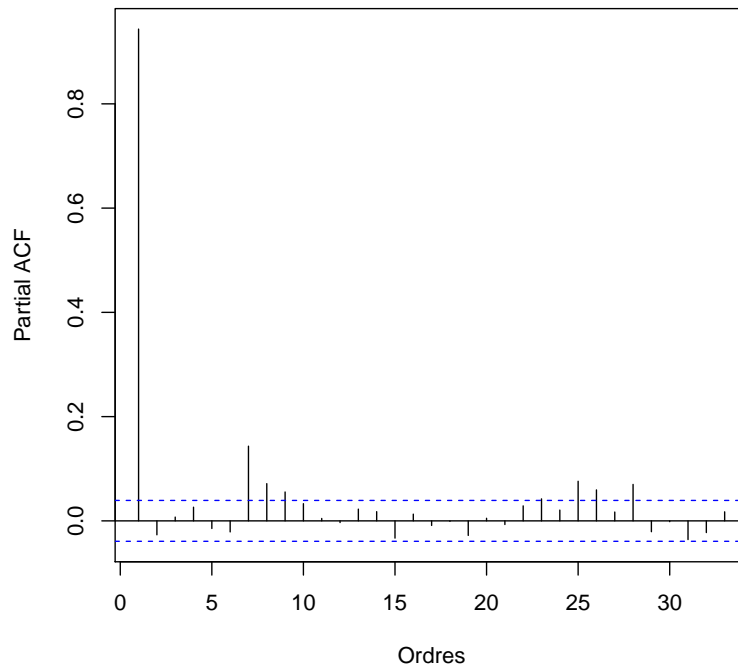


FIGURE 11.3 – PACF

on remarque donc que la série peut bien être modélisée par un processus auto-régressif d'ordre 1, estimons donc les paramètres, c'est à dire ceux du modèle :

$$\tilde{r}_{t+1} = \alpha_1 + \alpha_2 \tilde{r}_t + \alpha_3 \epsilon_{t+1} \quad \text{avec} \quad \epsilon \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, 1)$$

```
a=arima(rendement,order=c(1,0,0))
a
const=as.numeric(a$coef)[2];
ar=as.numeric(a$coef)[1];
sigmachap=sqrt(as.numeric(a$sigma2));
```

```
Series: rendement
ARIMA(1,0,0) with non-zero mean
Coefficients:
      ar1  intercept
      0.9445   0.0816
s.e.   0.0066   0.0005
sigma^2 estimated as 2.335e-06: log likelihood=12666.15
AIC=-25326.3   AICc=-25326.29   BIC=-25308.82
```

donc :

- $\alpha_1 = 0.082 * (1 - 0.944) = 0.005$ car $Intercept = E(r_t)$
- $\alpha_2 = 0.944$
- $\hat{\alpha}_3 = \sqrt{2.33e-06} = 0.0015$

Pour valider le modèle, on commence d'abord par calculer les *t-student* en rapportant le coefficient estimé à son écart-type estimé :

```
sd=numeric(2); #Vecteur pour les écarts-type
sd[1:2]=round(sqrt(diag(a$var.coef)), digits = 6);
tstudents=numeric(2);
tstudents[1]=ar/sd[1];
tstudents[2]=const/sd[2];
abs(tstudents)>qnorm(1-0.05/2);
```

```
[1] TRUE TRUE
```

les $|t - students|$ sont tous supérieurs à 1.96 (au risque de 5%), le modèle est donc significatif. Vérifions maintenant si les résidus sont un bruit blanc à l'aide du test de *Box-Pierce* :

```
Box.test(a$residuals);
```

```
Box-Pierce test
data: a$residuals
X-squared = 1.4417, df = 1, p-value = 0.2299
```

la *p-value* est **supérieure** à 5% : les résidus du modèle sont un bruit blanc. \implies Le modèle est bien spécifié et validé.

11.3.1.2 Estimation par modèle économétrique

L'idée est d'estimer l'équation suivante :

$$Y = \alpha_1 + \alpha_2 X + \epsilon_{t+1} \quad \text{avec} \quad \epsilon \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, 1) \quad \}$$

avec :

- $Y = \tilde{r}_{t+1}$
- $X = \tilde{r}_t$

on utilisera donc la syntaxe suivante :

```
rm(list=ls());
memory.limit(4000);
```

[1] 4000

```
set.seed(1);
library("tseries");
library("stats");
library("forecast");
library("lmtest");
bd=read.table("Taux_de_rendement.csv",sep=";",dec=".",header=T);
names(bd);
```

[1] "Rendement" "Date"

```
rendement=bd[,1];
rendement=as.ts(rendement);
n=length(rendement);
Y=rendement[2:n];
X=rendement[1:(n-1)];
regVAS=lm(Y~X);
summary(regVAS);
```

Call:

```
lm(formula = Y ~ X)
```

Residuals:

Min	1Q	Median	3Q	Max
-0.0137734	-0.0002719	0.0000459	0.0001873	0.0157256

Coefficients:

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t)
(Intercept)	0.0046199	0.0005386	8.578	<2e-16 ***
X	0.9434454	0.0065887	143.192	<2e-16 ***

Signif. codes: 0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 0.001528 on 2498 degrees of freedom

Multiple R-squared: 0.8914, Adjusted R-squared: 0.8914

F-statistic: 2.05e+04 on 1 and 2498 DF, p-value: < 2.2e-16

```
const=as.numeric(regVAS$coeff[1]);
coeff=as.numeric(regVAS$coeff[2]);
sd=sqrt(sum(regVAS$residuals^2)/(n-2));
```

Nous remarquons que le R^2 est satisfaisant. A ce stade, on vérifie s'il y a hétéroscédasticité à l'aide du test de *Test de Goldfeld & Quandt*:

```
gqtest(regVAS); ## Hétéroscédasticité
```

Goldfeld-Quandt test

data: regVAS

GQ = 0.3865, df1 = 1248, df2 = 1248, p-value = 1

Nous concluons alors qu'il y a homoscédasticité et on vérifie enfin s'il y a auto-corrélation des erreurs en recourant au test de *Durbin-Watson*:

```
dwtest(regVAS); ## Auto-corrélation des erreurs
```

```

    Durbin-Watson test
data: regVAS
DW = 1.9503, p-value = 0.1037
alternative hypothesis: true autocorrelation is greater than 0

```

la p -value étant supérieure à 0.05%, il n'y a donc pas d'auto corrélation des résidus.
Pour valider la normalité des résidus, on fait appel au test de *Jarque Bera* :

```
jarque.bera.test(regVAS$residuals) ; ## normalité des résidus.
```

Jarque Bera Test

```

data: regVAS$residuals
X-squared = 92214.85, df = 2, p-value < 2.2e-16

```

Nous remarquons que la normalité des résidus est l'unique hypothèse non vérifiée. L'absence de cette hypothèse n'entrave pas notre étude puisque les séries des taux portent généralement ce caractère.

Nous remarquons que les deux approches conduisent aux mêmes résultats!

cela étant fait et ayant tous les ingrédients, nous pouvons désormais attaquer les projections à l'aide de la discrétisation du modèle de *Vasiček* :

$$\rightarrow \tilde{r}_{t+1} = \alpha_1 + \alpha_2 \tilde{r}_t + \alpha_3 \epsilon_{t+1} \quad \text{avec} \quad \epsilon \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, 1)$$

avec :

- $\alpha_1=0.005$
- $\alpha_2=0.943$
- $\alpha_3=0.00152742$
- ϵ généré aléatoirement suivant une loi $\mathcal{N}(0, 1)$ à l'aide de la fonction *rnorm(1)*;

Afin d'obtenir plusieurs scénarios, nous avons eu recours à la méthode de *Monte-Carlo*⁵, pour cela, on définit le nombre de scénarios ainsi que l'horizon de projections (en jours ouvrable sur 60 ans) :

```

nsimulation=1000;
horizon=60*(365-52*2);

```

et on crée un vecteur pour les taux futurs de chaque scénario initialisé par le taux au 31/12/2013 :

```

r=numeric();
r[1]=Y[length(Y)];

```

ainsi qu'une matrice pour regrouper les scénarios :

```
tauxsimul=matrix(0,horizon,nsimulation);
```

et finalement, on crée un vecteur pour le scénario moyen :

```
tauxderendement=numeric(horizon);
```

à l'aide de la boucle suivante, on obtient les taux de rendement futurs du scénario moyen, et afin de tenir compte du temps de calcul, on calcul la différence de temps entre le début de la boucle et sa fin :

```

t0=Sys.time();
for(j in 1:nsimulation){
for(i in 1:horizon){
r[i+1]=r[i]*coeff+const+sd*rnorm(1);
}
for(i in 1:horizon){
tauxsimul[i,j]=r[i];
}
}

```

5. Nous simulerons **1000 scénarios**.

```

}
for(i in 1:horizon){
for(j in 1:nsimulation){
tauxderendement[i]=tauxderendement[i]+tauxsimul[i,j];
}
tauxderendement[i]=tauxderendement[i]/nsimulation;
}
tf=Sys.time();
tempscalcul=tf-t0;

```

le temps de calcul est de 3.1 minutes. D'autre part, on trace sur un graphique l'allure du scénario moyen afin d'avoir une idée sur le schéma moyen que les taux de rendements futurs pourraient emprunter :

```

plot(tauxderendement,type="l",col=colors()[floor(60)],xlab="Jours",ylab="Taux de rendement");
title(main="Simulation Monte-Carlo du taux de rendement (Vasiček)", col.main="red", font.main=4)

```

Simulation Monte-Carlo du taux de rendement (Vasicek)

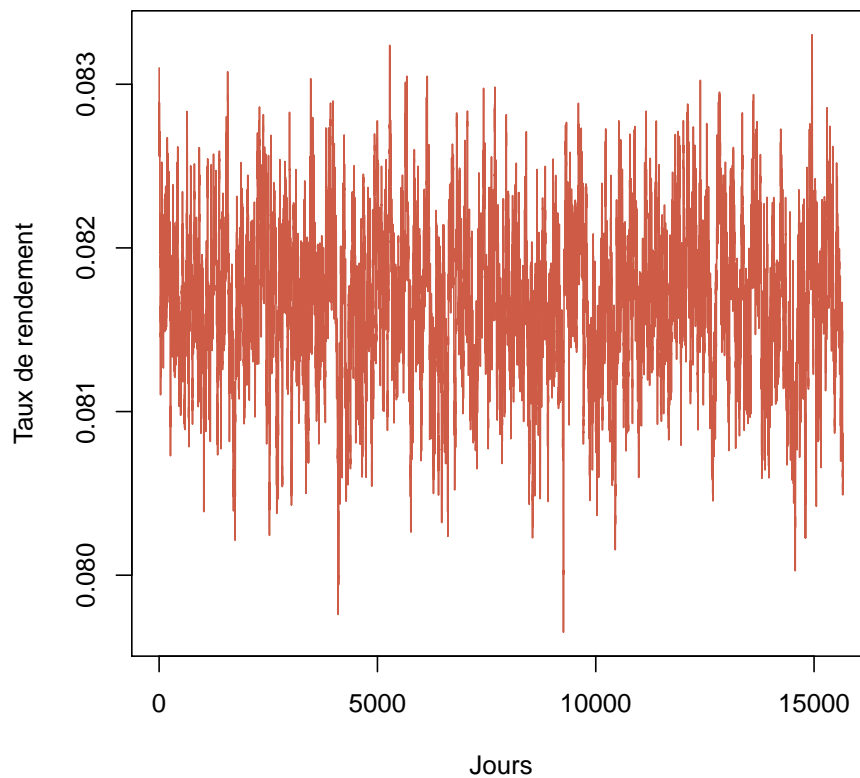


FIGURE 11.4 – Simulation Monte-Carlo du taux de rendement (Vasiček)

11.3.2 Modèle de Cox-Ingersoll-Ross

L'équation à estimer ici est :

$$\frac{\tilde{r}_{t+1}}{\sqrt{\tilde{r}_t}} = ab \frac{1}{\sqrt{\tilde{r}_t}} + (1-a) \frac{\tilde{r}_t}{\sqrt{\tilde{r}_t}} + \sigma \epsilon_{t+1} \quad \epsilon_{t+1} \rightsquigarrow \mathcal{N}(0,1)$$

ou encore en posant $Y_t = \frac{\tilde{r}_{t+1}}{\sqrt{\tilde{r}_t}}$, $X_t^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{\tilde{r}_t}}$ et $X_t^{(2)} = \frac{\tilde{r}_t}{\sqrt{\tilde{r}_t}}$:

$$Y = abX_t^{(1)} + (1-a)X_t^{(2)} + \sigma \epsilon_{t+1} \quad \text{avec} \quad \epsilon_{t+1} \rightsquigarrow \mathcal{N}(0,1)$$

$$Y = \alpha_1 X_t^{(1)} + \alpha_2 X_t^{(2)} + \sigma \epsilon_{t+1} \quad \text{avec} \quad \epsilon \rightsquigarrow \mathcal{N}(0,1)$$

équation à estimer par régression linéaire, avec :

- $\alpha_1 = ab$
- $\alpha_2 = 1 - a$
- $\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{\sum_{t=1}^n \hat{\epsilon}_{t+1}^2}{n-3}}$

La syntaxe suivante présente toute l'étude économétrique, y compris les tests sur les résidus (auto-corrélation et homos-cédasticité) :

```
n=length(rendement);
Y=rendement[2:n]/sqrt(rendement[1:(n-1)]);
X1=1/sqrt(rendement[1:(n-1)]);
X2=rendement[1:(n-1)]/sqrt(rendement[1:(n-1)]);
regCIR=lm(Y~X1+X2+0); # Régression sans constante
alpha1=as.numeric(regCIR$coeff[1]);
alpha2=as.numeric(regCIR$coeff[2]);
alpha3=sqrt(sum(regCIR$residuals^2)/(n-3))
a=1-alpha2;
b=alpha1/a;
sigmaCIR=alpha3;
summary(regCIR); # la régression est significative

Call:
lm(formula = Y ~ X1 + X2 + 0)
Residuals:
      Min       1Q   Median       3Q      Max
-0.045641 -0.000965  0.000161  0.000649  0.058067
Coefficients:
      Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
X1  0.0046647  0.0005369   8.689  <2e-16 ***
X2  0.9428965  0.0065889 143.104  <2e-16 ***
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
Residual standard error: 0.005419 on 2498 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.9996,    Adjusted R-squared:  0.9996
F-statistic: 3.474e+06 on 2 and 2498 DF,  p-value: < 2.2e-16

gqtest(regCIR); ## Hétéroscédasticité

      Goldfeld-Quandt test
data:  regCIR
GQ = 0.3902, df1 = 1248, df2 = 1248, p-value = 1
```

```
dwtest(regCIR); ## Auto-corrélation des erreurs
```

```

Durbin-Watson test
data: regCIR
DW = 1.9562, p-value = 0.1327
alternative hypothesis: true autocorrelation is greater than 0

```

Pour valider la normalité des résidus, on fait encore une fois appel au test de *Jarque Bera* :

```
jarque.bera.test(regCIR$residuals) ; ## normalité des résidus.
```

Jarque Bera Test

```

data: res
X-squared = 101455.4, df = 2, p-value < 2.2e-16

```

Nous remarquons que la normalité des résidus n'est pas vérifiée dans le modèle de *CIR* tout comme celui de *Vasiček*. Cela ne pose pas de problèmes puisque les séries des taux d'intérêt possèdent généralement le caractère de la non normalité des résidus. Nous pouvons donc continuer notre étude en l'absence de cette hypothèse.

nous remarquons que le R^2 est de l'ordre de **100%**. La régression est donc très significative et ne présente aucun problème économétrique. Nous pouvons désormais passer aux projections à l'aide de la discrétisation approximative du modèle de *CIR* :

$$\tilde{r}_{t+1} = \tilde{r}_t + a(b - \tilde{r}_t) + \sigma\sqrt{\tilde{r}_t}\epsilon_{t+1} \quad \text{avec } \epsilon \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, 1)$$

avec :

- $a=0.057$
- $b=0.082$
- $\sigma=0.0054$
- ϵ généré aléatoirement suivant une loi $\mathcal{N}(0, 1)$ à l'aide de la fonction *rnorm(1)*;

Afin d'obtenir plusieurs scénarios, nous avons eu recours encore une fois à la méthode de *Monte-Carlo*⁶, pour cela, on définit le nombre de scénarios ainsi que l'horizon de projections (en jours ouvrables sur 60 ans) :

```

nsimulation=1000;
horizon=60*(365-52*2);

```

et on crée un vecteur pour les taux futurs de chaque scénario initialisé par le taux au 31/12/2013 :

```

r=numeric();
r[1]=rendement[length(rendement)];

```

ainsi qu'une matrice pour regrouper les scénarios :

```
tauxsimul=matrix(0,horizon,nsimulation);
```

et finalement, on crée un vecteur pour le scénario moyen :

```
tauxderendementCIR=numeric(horizon);
```

à l'aide de la boucle suivante, on obtient les taux de rendement futurs du scénario moyen, et afin de tenir compte du temps de calcul, on calcule la différence de temps entre le début de la boucle et sa fin :

```

t0=Sys.time();
for(j in 1:nsimulation){
for(i in 1:horizon){
r[i+1]=r[i]+a*(b-r[i])+sigmaCIR*sqrt(r[i])*rnorm(1);
}
for(i in 1:horizon){
tauxsimul[i,j]=r[i];
}
}

```

6. Nous simulerons **1000 scénarios**.

```

}
}
tf=Sys.time();
tempscalcul=tf-t0;
### Calcul du scénario moyen
for(i in 1:horizon){
for(j in 1:nsimulation){
tauxderendementCIR[i]=tauxderendementCIR[i]+tauxsimul[i,j];
}
tauxderendementCIR[i]=tauxderendementCIR[i]/nsimulation;
}

```

le temps de calcul ici est d'environ 4 minutes. On trace encore une fois sur un graphique l'allure du scénario moyen afin d'avoir une idée sur le schéma moyen que les taux de rendements futurs modélisés par le modèle de CIR pourraient emprunter :

```

plot(tauxderendementCIR,type="l",col=colors()[floor(60)],xlab="Jours",ylab="Taux de rendement");
title(main="Simulation Monte-Carlo du taux de rendement (CIR)", col.main="red", font.main=4)

```

Simulation Monte-Carlo du taux de rendement (CIR)

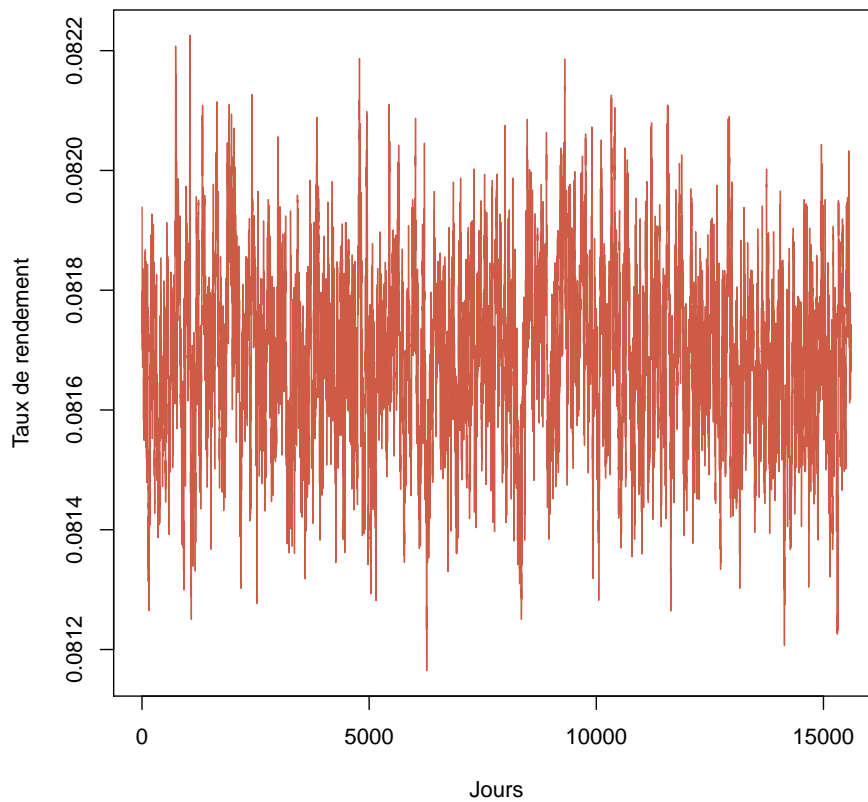


FIGURE 11.5 – Simulation Monte-Carlo du taux de rendement (CIR)

11.4 Réserve stochastique

Selon une optique de « Best-Estimate », pour chacun des 1000 scénarios générés, on projette le régime de la CIMR et on vérifie les critères de pérennité du régime. Finalement on calcule une réserve stochastique qui est la moyenne de toutes les

réserves et on valide encore une fois les critères de pérennité. Nous avons tout d'abord exporté les scénarios des taux générés avec **R** vers **Excel-VBA** afin d'utiliser l'outil des projections. En effet, pour les deux modèles et pour chaque scénario, nous avons calculé une moyenne des taux de rendement de chaque année et l'avons utilisée pour calculer une réserve de prévoyance, et finalement une moyenne des réserves a été calculée. La consolidation annuelle pour les deux modèles et l'exportation vers Excel sont faites à l'aide d'une fonction qu'on a programmée :

```
tauxannuels=matrix(0,60,nsimulation); ## vecteur des taux annuels pour tous les scénarios
### Fonction qui calcule la moyenne annuel d'un scénario donné

moyenneannuellescenario=function(t){
moyenne=numeric();
pas=365-52*2;
for(i in 1:60){
moyenne[i]=mean(t[i:(i+pas)]);
}
return(moyenne);
}
## Consolidation
for(j in 1:nsimulation){
tauxannuels[,j]=moyenneannuellescenario(tauxsimul[,j]);
}
#On renomme les colonnes
tauxannuels=as.data.frame(tauxannuels);
for(i in 1:nsimulation){
names(tauxannuels)[i]=paste("Scénario",i);
}
# On exporte vers Excel (ici on présente le modèle Vasiček, la syntaxe est la même pour CIR)
write.table(tauxannuels, "Taux_de_rendement_annuels_Vasiček.csv", sep=";",dec=".",row.names=F);
```

Enfin, à l'aide de l'outil des projections sur Excel, nous avons calculé pour chacun des modèles et pour chacun des scénarios une réserve de prévoyance⁷. Finalement, on exporte les résultats vers **R** pour calculer la réserve stochastique qu'est le résultat du scénario moyen. Le graphique suivant montre que les critères de pérennité sont vérifiés pour les deux cas, à savoir :

- La réserve de prévoyance (les fonds) est toujours **positive**.
- La réserve de prévoyance a une *tendance ascendante* en fin de projection.

7. Voir le programme en annexe

Réserve de prévoyance stochastique (en MDhs)

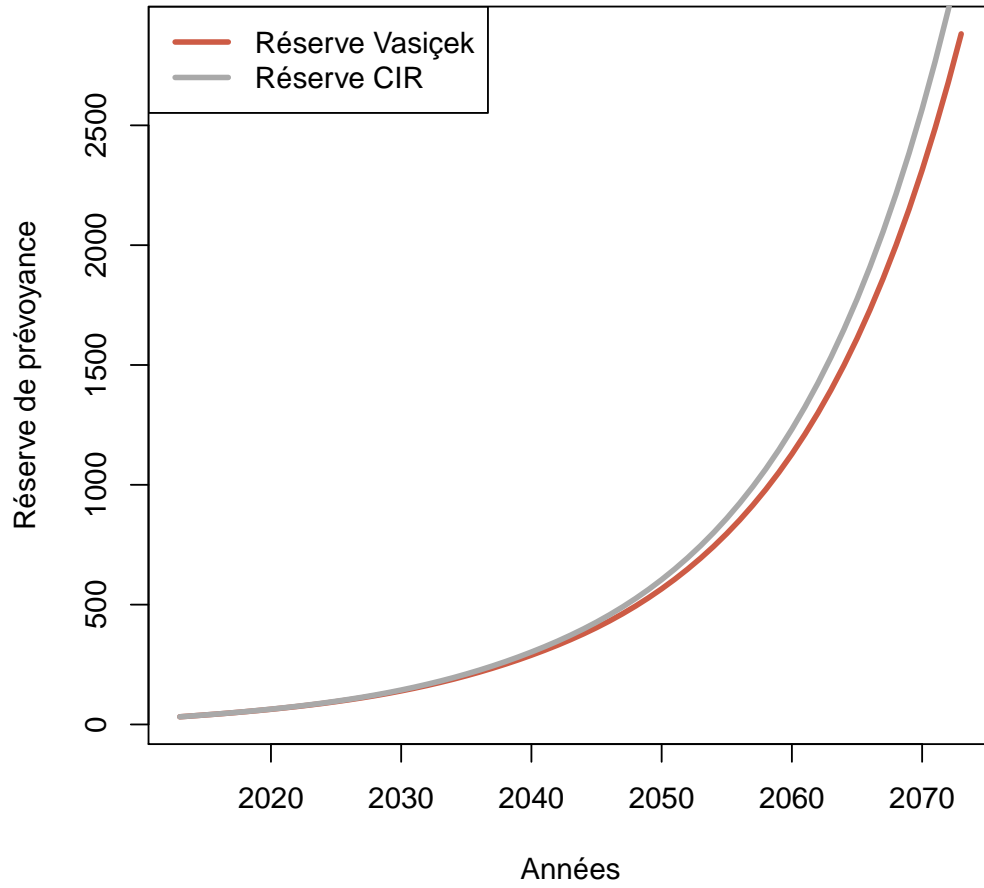


FIGURE 11.6 – Réserves de prévoyance stochastiques des deux modèles CIR et Vasicek

Conclusion

NUL doute que le régime par points permet de maîtriser les dépenses et qu'il est préférable au régime à prestations définies puisque l'affilié peut aisément augmenter son dernier salaire en faveur de sa rente.

Comme nous l'avons remarqué, la réserve déterministe ne permet pas de refléter la réalité économique de la caisse puisqu'un simple test de sensibilité peut aisément se traduire par une extinction rapide de la réserve. La modélisation stochastique s'avère encore une fois nécessaire.

Au terme de ce rapport, nous pouvons valider avec confiance la pérennité du régime de la *C.I.M.R.* En effet, les projections stochastiques permettent de simuler plusieurs scénarios futurs pour prendre en compte les différentes conditions financières futures possibles et considérer le scénario moyen comme référence de décision.

Il est important de rappeler que l'outil informatique développé pour le traitement des données, facilitera désormais cette partie qui demeurait pénible. L'acheminement de tous les traitements se fait désormais en environ *4 minutes* au lieu de *deux semaines*.

Tout compte fait, notre projet présente une importance relativement haute pour les actuaires, étant donné l'essor de l'actuariat en matière de modélisation sortant ainsi du cadre classique du rôle de l'actuaire au sein des compagnies d'assurance à savoir : « la tarification » et « le provisionnement ».

Limites du travail et ouverture : Tout bon travail engendre des « limites » qu'il faudra surpasser dans d'éventuelles études. Pour le cas de ce projet, elles se manifestent dans l'absence du stochastique dans la mortalité qui demeure l'un des facteurs clé pour un régime par répartition. Ainsi nous proposons au cher lecteur, souhaitant d'approfondir notre travail, de se baser sur des modèles stochastiques de ces lois de sortie comme le modèle de Lee & Carter à titre d'exemple.

Références

- [1] CIMR. Guide des affiliés. 2012. MAROC.
- [2] Marri Fouad .*Séries chronologiques*. Partie 7. 2012. INSEA. RABAT.
- [3] Mostapha ABOUZOID. *Réforme de la retraite marocaine*. 2013. INSEA. RABAT.
- [4] Pierre Devolder. *Prévoyance et assurances de groupe*. 2012. INSEA .RABAT.

Webographie

- Site officiel de R : <http://cran.r-project.org>
- Foire aux questions de la CIMR : http://www.cimrpro.ma/fr/aide_faq.php?id_rub=8&id_srub=15
- Ressources actuarielles : www.ressources-actuarielles.net
 - Mémoire LAHBABI (CIMR) :
[http://www.ressources-actuarielles.net/EXT/ISFA/1226-02.nsf/9c8e3fd4d8874d60c1257052003eced6/2e870d0c6521c898c125757a0050feaa/\\$FILE/Memoire%20LAHBABI.pdf](http://www.ressources-actuarielles.net/EXT/ISFA/1226-02.nsf/9c8e3fd4d8874d60c1257052003eced6/2e870d0c6521c898c125757a0050feaa/$FILE/Memoire%20LAHBABI.pdf)
 - Mémoire BOLEWSKA (CIMR) :
[http://www.ressources-actuarielles.net/EXT/ISFA/1226-02.nsf/d512ad5b22d73cc1c1257052003f1aed/fe918ced3b83c9f2c12577ba0071b93b/\\$FILE/Magda_Bolewska%20-%20M%C3%A9moire.002.pdf](http://www.ressources-actuarielles.net/EXT/ISFA/1226-02.nsf/d512ad5b22d73cc1c1257052003f1aed/fe918ced3b83c9f2c12577ba0071b93b/$FILE/Magda_Bolewska%20-%20M%C3%A9moire.002.pdf)
- Rapport d'ACTUARIA sur la retraite au Maroc :
http://www.ugtm.ma/siteugtm/modif/fr/pdf/retraites_synthese9.pdf

Annexe A

Lemme d'Itô, schéma d'Euler et schéma de Milstein

A.1 Lemme d'Itô

Lemme (d'Itô). *Ayant un processus de diffusion de la forme :*

$$dX_t = \mu dt + \sigma dW_t$$

On désire obtenir le processus suivi par $Y_t = f(X_t, t)$. L'idée est très simple : on effectue un développement de Taylor d'ordre 2, et on ne garde que les termes dont la puissance du temps est inférieure à 1. Effectuons donc le développement de Taylor d'ordre 2 pour $Y_t = f(X_t, t)$. On a :

$$dY_t = df(X_t, t) = \frac{\partial f(X_t, t)}{\partial X_t} dX_t + \frac{\partial f(X_t, t)}{\partial t} dt + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 f(X_t, t)}{\partial X_t^2} dX_t^2 + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 f(X_t, t)}{\partial t^2} dt^2$$

$$dY_t = df(X_t, t) = \frac{\partial f(X_t, t)}{\partial X_t} dX_t + \frac{\partial f(X_t, t)}{\partial t} dt + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 f(X_t, t)}{\partial X_t^2} dX_t^2 \text{ puisque } dt^2 \rightsquigarrow 0$$

En remplaçant dX_t par sa valeur, on obtient :

$$dY_t = df(X_t, t) = \frac{\partial f(X_t, t)}{\partial X_t} (\mu dt + \sigma dW_t) + \frac{\partial f(X_t, t)}{\partial t} dt + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 f(X_t, t)}{\partial X_t^2} (\mu dt + \sigma dW_t)^2 \quad (1)$$

Or :

$$dX_t^2 = (\mu dt + \sigma dW_t)^2 = \mu^2 (dt)^2 + 2\mu\sigma dt dW_t + \sigma^2 dW_t^2$$

sachant que $dW_t^2 = dt$ on obtient alors, en négligeant les facteurs dont la dimension temps est supérieure à 1 :

$$dX_t^2 = (\mu dt + \sigma dW_t)^2 = \sigma^2 dt$$

et en remplaçant dans l'équation (1) on obtient :

$$dY_t = df(X_t, t) = \frac{\partial f(X_t, t)}{\partial X_t} (\mu dt + \sigma dW_t) + \frac{\partial f(X_t, t)}{\partial t} dt + \frac{1}{2!} \sigma^2 \frac{\partial^2 f(X_t, t)}{\partial X_t^2} dt$$

d'où :

$$dY_t = df(X_t, t) = \left(\mu \frac{\partial f(X_t, t)}{\partial X_t} + \frac{\partial f(X_t, t)}{\partial t} + \frac{1}{2!} \sigma^2 \frac{\partial^2 f(X_t, t)}{\partial X_t^2} \right) dt + \left(\sigma \frac{\partial f(X_t, t)}{\partial X_t} \right) dW_t$$

A ce stade, on applique le **lemme d'Itô** à $x_t = e^{at} \cdot r_t$ on obtient :

$$dx_t = \left(\mu \frac{\partial x_t}{\partial r_t} + \frac{\partial x_t}{\partial t} + \frac{1}{2!} \sigma^2 \frac{\partial^2 x_t}{\partial r_t^2} \right) dt + \left(\sigma \frac{\partial x_t}{\partial r_t} \right) dW_t$$

$$= \{e^{at} (a(b - r_t) + ar_t)\} dt + \{e^{at} * \sigma\} dW_t$$

En intégrant de 0 à t on obtient :

$$\int_0^t d(e^{as} r_s) ds = \int_0^t [\{e^{as} (a(b - r_s) + ar_s)\} dt + \{e^{as} * \sigma\} dW_s] ds$$

$$r_t e^{at} - r_0 = b e^{at} - b + \sigma \int_0^t e^{as} dW_s$$

d'où :

$$r_t = r_0 e^{-at} + b(1 - e^{-at}) + \sigma e^{-at} \int_0^t e^{as} dW_s$$

Où $\int_0^t e^{as} dW_s$ est une intégrale de WIENER qui suit donc une loi normale de moyenne nulle et de variance :

$$\int_0^t (e^{as})^2 ds = \frac{e^{2at} - 1}{2a}$$

A.2 Schéma d'Euler

Le but étant de trouver un schéma d'ordre 1 approchant la solution d'une équation différentielle stochastique n'admettant pas une discrétisation exacte. Soit X_t un processus solution de :

$$X_t = X_0 + \int_0^t b(X_s) ds + \int_0^t \sigma(X_s) dW_s \quad (1)$$

Soit n le nombre d'intervalles de discrétisation et $h = \frac{T}{n}$. Une approximation de X_h , peut être donnée par :

$$X_h \simeq X_0 + b(X_0)h + \sigma(X_0)(W_h - W_0)$$

Par récurrence, on obtient le schéma d'Euler pour l'EDS : (1) :

$$X_0^n = X_0,$$

$$X_{(k+1)h}^n = X_{kh}^n + b(X_{kh}^n)h + \sigma(X_{kh}^n)(W_{(k+1)h}^n - W_{kh}^n)$$

Il suffit donc de générer des variables gaussiennes.

A.3 Schéma de Milstein

Le schéma de *Milstein* est un schéma d'ordre 2 qui converge à une vitesse supérieure. Il est donné par :

$$\hat{X}_t^n = \hat{X}_{t_k}^n + \sigma(\hat{X}_{t_k}^n)(W_t - W_{t_k}) + \sigma(\hat{X}_{t_k}^n)\sigma'(\hat{X}_{t_k}^n) \int_{t_k}^t (W_s - W_{t_k}) dW_s$$

Le terme intégral est calculé par l'intégrale d'Itô :

$$\int_{kh}^{(k+1)h} (W_s - W_{kh}) dW_s = \frac{1}{2} ((W_{(k+1)h} - W_{kh})^2 - h)$$

Le schéma de *Milstein* s'écrit donc :

$$\tilde{X}_{(k+1)h}^n = \tilde{X}_{kh}^n + \left(b(\tilde{X}_{kh}^n) - \frac{1}{2} \sigma'(\tilde{X}_{kh}^n) \sigma(\tilde{X}_{kh}^n) \right) h + \sigma(\tilde{X}_{kh}^n) (W_{(k+1)h} - W_{kh}) + \frac{1}{2} \sigma'(\tilde{X}_{kh}^n) \sigma(\tilde{X}_{kh}^n) (W_{(k+1)h} - W_{kh})^2$$

Annexe B

Tests d'hypothèses

B.1 Test de *Bartlet*

$$\begin{cases} H_0 : \rho_k = 0 \\ H_1 : \rho_k \neq 0 \end{cases}$$

Sous H_0 , le test montre que $\sqrt{T}\hat{\rho}_k \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, 1)$ avec T est le nombre d'observation de la série et ρ_k est le coefficient d'auto-corrélation théorique de X_t . Pour déterminer les ordres de la séries, le test de *Bartlet* propose la stratégie suivante, en posant $z_{\frac{\alpha}{2}}$ le fractile au seuil de $\alpha\%$ de la loi normale centrée réduite :

- Les q premiers FAC (fonction d'auto-corrélation) sont en dehors de l'intervalle $\left(\frac{-z_{\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{T}}, \frac{z_{\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{T}}\right)$: **MA(q)**.
- Les p premiers FACP (fonction d'auto-corrélation partielle) sont en dehors de l'intervalle $\left(\frac{-z_{\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{T}}, \frac{z_{\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{T}}\right)$: **AR(q)**.

B.2 Test de *Box-Pierce* et test de *Ljung-Box*

Ce test vérifie si les résidus sont un bruit blanc. Il s'écrit :

$$\begin{cases} H_0 : \rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = \dots = \rho_k = 0 \\ H_1 : \text{Il existe un } j \text{ tel que } \rho_j \neq 0 \end{cases}$$

La statistique du test est $Q = T \sum_{j=1}^k \hat{\rho}_j^2$ où :

- T : le nombre d'observations dans la série.
- k : la longueur du retard.
- $\hat{\rho}_j$ est l'auto-corrélation estimée.

Sous H_0 on a $Q \rightsquigarrow \chi_{k-(p+q)}^2$

Le test de *Ljung-Box* est quant à lui basé sur la statistique $Q = T(T+2) \sum_{j=1}^k \frac{\hat{\rho}_j^2}{T-j}$. Le reste est similaire au test de *Box-Pierce*.

B.3 Tests de *Dickey-Fuller-Augmentés (AFD)*

La stratégie est résumée par la figure suivante :

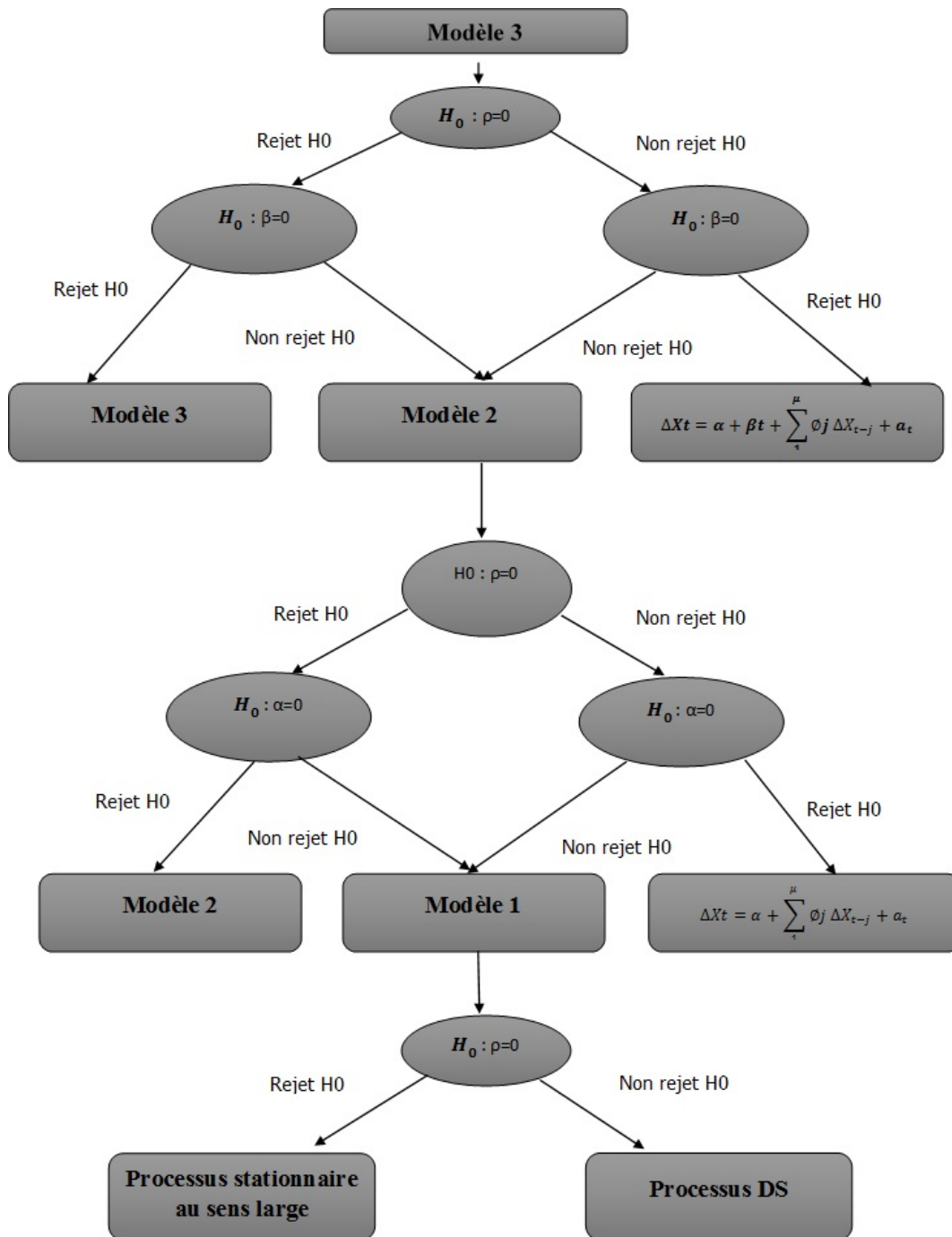


FIGURE B.1 – Stratégie des test de Dickey-Fuller Augmentés (ADF)

B.4 Test de *Goldfeld & Quandt*

Ce test est utilisé en économétrie afin de savoir si les résidus sont homoscedastiques. Il s'appuie sur la loi de *Fischer* et est acheminé selon la procédure suivante :

1. On ordonne les variables explicatives par ordre croissant ou décroissant.
2. On élimine un nombre e d'observations centrales dans l'échantillon classé.
3. On obtient alors **deux** échantillons de taille $\frac{(n-e)}{2}$.
4. On effectue la régression par moindres carrés dans les deux échantillons et on obtient SCR_1 et SCR_2 la somme des carrés des résidus .
5. L'hypothèse nulle est que les résidus sont homoscedastiques c'est-à-dire que $\sigma_1 = \sigma_2$. On rejette alors l'hypothèse nulle si $\frac{SCR_2}{SCR_1} > f_\alpha$ où f_α est la valeur critique d'une loi de Fisher de paramètres $\left(\frac{(n-e-k)}{2}, \frac{(n-e-k)}{2}\right)$; avec k est le nombre de variables exogènes.

B.5 Test de *Breusch-Pagan*

Ce test permet de valider l'hypothèse d'homoscedasticité du terme d'erreur d'un modèle de régression linéaire en respectant les étapes suivante :

1. On estime la régression avec moindres carrés et on en tire le vecteurs des résidus.
2. On effectue la régression des carrés des résidus sur p exogènes et on en tire un coefficient de détermination : R^2 .
3. Sous l'hypothèse nulle (absence d'hétéroscedasticité), la statistique $LM = nR^2$ où n est le nombre d'observations, suit asymptotiquement la loi de χ^2_{p-1}

B.6 Test de *Durbin-Watson*

Ce test permet de détecter une auto-corrélation des erreurs d'ordre un en estimant un modèle autorégressif de premier ordre pour les résidus estimés par la méthode des moindres carrés ordinaires :

$$\hat{\epsilon}_t = \rho \cdot \hat{\epsilon}_{t-1} + v_t$$

L'hypothèse nulle est l'absence d'auto-corrélation : $H_0 = \rho = 0$ et la statistique de *Durbin-Watson* est donnée par :

$$DW = \frac{\sum_{t=2}^n (\hat{\epsilon}_t - \hat{\epsilon}_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^n \hat{\epsilon}_t^2}$$

Cette statistique est par construction comprise entre **0** et **4**. H_0 est acceptée lorsque sa valeur est proche de **2**. Des valeurs critiques au seuil de 5% : d_1 et d_2 , avec $d_1 > d_2$, ont été tabulées par *Durbin-Watson*. On interprète alors le résultat de la statistique comme suit :

- Si $DW < d_1$: il existe une auto-corrélation positive (ou $\rho > 0$).
- Si $d_2 < DW < 4 - d_2$: pas d'auto-corrélation.
- Si $DW > 4 - d_1$ il existe une auto-corrélation négative (ou $\rho < 0$)
- Si DW est en dehors de ces intervalles, alors on ne peut pas conclure.

B.7 Test de *Jarque Bera*

Le test de *Jarque Bera* est un test d'hypothèse visant à vérifier la normalité des données. Son hypothèse nulle est la normalité des données contre leur non-normalité. La statistique s'écrit :

$$JB = \frac{n-p}{6} \left(S^2 + \frac{(K-3)^3}{4} \right)$$

avec :

- n = Nombre d'observations

- p = Nombre de variables explicatives dans le cas où les données proviennent des résidus d'une régression linéaire. Sinon, $p=0$.
- S = Coefficient d'asymétrie de l'échantillon testé.
- K = Kurtosis de l'échantillon testé.

On rappelle que S et K sont définis par :

$$S = \frac{\hat{\mu}_3}{\hat{\sigma}^3} = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^3}{\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \right)^{3/2}}$$

et

$$K = \frac{\hat{\mu}_4}{\hat{\sigma}^4} = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^4}{\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \right)^2}$$

avec $\hat{\mu}_3$ et $\hat{\mu}_4$ les estimateurs du troisième et quatrième moments.

La statistique JB suit asymptotiquement une loi du χ^2 à 2 degrés de liberté.

En effet, l'idée est simple : une loi normale a un coefficient d'asymétrie = 0 et une kurtosis = 3. Si les données suivent une loi normale, le test s'approche alors de 0 et on accepte H_0 à un risque d'erreur α .

Annexe C

Programme VBA de simulation de la réserve stochastique

C.1 Par le modèle de *Vasiček*

```
Sub SimulerVas() 'Procédure pour simuler la réserve en considérant les taux par ĆVasiek
Worksheets("Graphe ĆVasiek").Select
Cells(1, 1).Value = Time ' Pour tenir compte du temps de calcul
Dim nsimul As Integer
nsimul = Cells(3, "B").Value
For j = 1 To nsimul
Dim taux(60) As Double
Dim reserve(61) As Double
Worksheets("ĆTaux_de_rendement_annuels_Vasi").Select
For i = 1 To 60
taux(i) = Cells(i + 1, j).Value
Next i
Worksheets("Parametres et hypotheses").Select
For i = 1 To 60
Cells(40 + i, "D").Value = taux(i)
Next i
Worksheets("Final").Select
For i = 1 To 61
reserve(i) = Cells(i + 10, "AG").Value 'Calcul de la resevre
Next i
Worksheets("Graphe ĆVasiek").Select
Cells(4, j + 1).Value = "Scenario" & CStr(j) 'Esthetique
Cells(4, j + 1).Interior.ColorIndex = 49 'Esthetique
Cells(4, j + 1).Borders.Weight = xlThin 'Esthetique
Cells(4, j + 1).HorizontalAlignment = xlCenter 'Esthetique

For i = 1 To 61
Cells(i + 4, j + 1).Value = reserve(i)
Cells(i + 4, j + 1).Borders.Weight = xlThin 'Esthetique
Cells(i + 4, j + 1).NumberFormat = "0,00" 'Esthetique
Cells(i + 4, j + 1).HorizontalAlignment = xlCenter 'Esthetique
If j Mod 2 = 0 Then
Cells(i + 4, j + 1).Interior.ColorIndex = 40 'Esthetique
Else
Cells(i + 4, j + 1).Interior.ColorIndex = 37 'Esthetique
End If
Next i
Next j
Cells(1, 2).Value = Time
End Sub
```

C.2 Par le modèle de *CIR*

```
Worksheets("Graphe CIR").Select
Cells(1, 1).Value = Time
Dim nsimul As Integer
nsimul = Cells(3, "B").Value
For j = 1 To nsimul
Dim taux As Double
Dim reserve As Double
```

```
For i = 1 To 60
Worksheets("Taux_de_rendement_annuels_CIR").Select
taux = Cells(i + 1, j).Value
Worksheets("Parametres et hypotheses").Select
Cells(40 + i, "D").Value = taux
Next i

Worksheets("Graphe CIR").Select
Cells(4, j + 1).Value = "Scenario" & CStr(j) 'Esthetique
Cells(4, j + 1).Interior.ColorIndex = 49 'Esthetique
Cells(4, j + 1).Borders.Weight = xlThin 'Esthetique
Cells(4, j + 1).HorizontalAlignment = xlCenter 'Esthetique

For i = 1 To 61
Worksheets("Final").Select
reserve = Cells(i + 10, "AG").Value 'Calcul de la reserve
Worksheets("Graphe CIR").Select
Cells(1, "C").Value = i
Cells(2, "C").Value = j
Cells(i + 4, j + 1).Value = reserve
Cells(i + 4, j + 1).Borders.Weight = xlThin 'Esthetique
Cells(i + 4, j + 1).NumberFormat = "0,00" 'Esthetique
Cells(i + 4, j + 1).HorizontalAlignment = xlCenter 'Esthetique
If j Mod 2 = 0 Then
Cells(i + 4, j + 1).Interior.ColorIndex = 40 'Esthetique
Else
Cells(i + 4, j + 1).Interior.ColorIndex = 37 'Esthetique
End If
Next i
Next j
Cells(1, 2).Value = Time
End Sub
```

Index

A	
Affiliés	23, 28, 36–40, 42, 43, 45–49
Algorithme	32
Allocataires	23
Ayants cause	23
Ayants droit	23, 28, 36–40, 42, 44, 49
B	
Box	
Jenkins	59
C	
CIMR	16, 18, 24
CIR	56, 81
Contributions	
patronale	23
patronales	23, 25
salariales	24, 25
E	
EDS	54, 55, 76
Estimation	55, 59–61, 64
M	
Mazars	9
P	
Pérennité	7, 25, 50, 51, 70, 71, 73
Points de	
liquidation	36–39, 42
service	24, 38, 39, 44
R	
Réserve de prévoyance	59
réserve de prévoyance	24, 25, 46, 50
S	
séries chronologiques	60, 61
stochastique	7, 51–55, 58, 59, 70–73, 76, 81
T	
Test de	
Bartlet	59, 77
Box	
Ljung	59, 60, 77
Pierce	59, 60, 77
Breusch-Pagan	79
Dickey-Fuller-Augmentés	78
Durbin-Watson	60, 79
Goldfeld & Quandt	65, 79
Jarque Bera	66, 69, 79
Turnover	36, 37, 49
V	
Vasiček	54, 55, 61
VBA	71, 81