



المندوبية السامية للتخطيط
HAUT-COMMISSARIAT AU PLAN

ROYAUME DU MAROC

..*.*.*

HAUT-COMMISSARIAT AU PLAN

..*.*.*



INSTITUT NATIONAL

DE STATISTIQUE ET D'ECONOMIE APPLIQUEE

INSEA

Projet de Fin d'Etudes

Modélisation des provisions pour sinistres à payer en assurance non vie

Préparé par : **M. Dramé Kaba**

Sous la direction de : **M. Mustapha Lebbar (INSEA)**

M. Aziz Majdoune (SAHAM Finances)

**Soutenu publiquement comme exigence partielle en vue de l'obtention du Diplôme
d'Ingénieur d'Etat**

Filière : Actuariat-Finance

Devant le jury composé de :

- **M. Mustapha Lebbar (INSEA)**
- **M. A. Mechrafi (INSEA)**
- **M. Aziz Majdoune (SAHAM Finances)**

N°9

Juin 2018

Mots clés :

Assurance non vie, provisionnement, méthodes déterministes, méthodes stochastiques, risque à horizon un an.

Résumé :

Les compagnies d'assurance sont tenues de respecter leurs engagements vis-à-vis des assurés d'où la nécessité de constituer des provisions. Dans ce projet, nous proposons plusieurs méthodes de provisionnement en assurance non vie et nous les appliquons à la branche automobile de l'une des filiales de SAHAM Finances. Etant donné qu'il faut retenir un seul montant de réserve, nous comparons les résultats obtenus par ces différentes méthodes afin de choisir la mieux adaptée à notre triangle de règlements. En fin, nous enrichissons notre étude en analysant le risque de provisionnement à un an en utilisant la méthode de Merz-Wüthrich.

Dédicace :

Je dédie ce mémoire à toute ma famille, en particulier :

A mon père Mamady Dramé et à ma mère Hassanatou Condé pour l'éducation que j'ai reçue, leur amour et leur soutien dans l'accomplissement de mes projets.

A mon grand-père El hadj Kaba Condé (Paix à son âme) qui demeure ma référence.

A ma grand-mère Hadja Saran Keita pour son amour inconditionnel.

A mes frères, sœurs, cousins, tantes, oncles et amis pour leur soutien et leur présence pendant les moments difficiles.

Remerciements :

Pour ce mémoire, je remercie d'abord Dieu pour tout.

Je remercie également Monsieur Aziz Majdoune et Madame Awa Ouattara HR Project Manager chez SAHAM Finances pour ce stage et tous les conseils qu'ils m'ont donnés.

J'adresse aussi mes remerciements à Monsieur Mustapha Lebbar, professeur à l'Institut National de Statistiques et d'Economie Appliquée (INSEA) qui m'a encadré tout au long de ce stage, à Amina Ridouane, actuaire à la Direction Conformité et Réglementation chez SAHAM Finances pour son aide et son implication dans la réalisation de ce projet.

Table des matières

Mots clés :	3
Résumé :	3
Dédicace :	4
Remerciements :	5
Problématique :	16
Généralité et Contexte :	17
1. Assurance et provisionnement non vie dans la zone CIMA :	17
2. Le Code CIMA et provisionnement en assurance non vie	18
Chapitre I : Le Provisionnement en assurance non vie	20
I.1. La vie d'un sinistre	20
I.2. Présentation des données	20
Chapitre II : Les méthodes de provisionnement	23
II.1. Les méthodes déterministes	23
II.1.1. Méthode de Chain Ladder	23
II.1.2. Méthode de London-Chain	28
II.1.3 London Pivot	32
II.1.4. Méthode de Bornhuetter-Ferguson	35
II.1.5. Méthode de Cape Code	38
II.1.6. Conclusion	42
II.2. Les méthodes stochastiques	43
II.2.1. Mack	43
II.2.2. Modélisation GLM	48
II.2.2.2. Modèle Log-Normal	53
II.2.2.3. Modèle Gamma	55
II.2.2.4. Choix du modèle	57
II.2.3 Le modèle de Bootstrap	58
II.2.4. Conclusion :	63
II.3 Méthodes réglementaires Dossier/dossier	63
II.3.1. Application de la méthode dossier/dossier :	64
II.3.2. Coefficients de Chain Ladder :	65
II.3.3. Estimation du nombre de sinistres IBNR :	66
II.3.4. Cout moyen :	67
II.3.5. Critiques de la méthode dossier/dossier :	67
Chapitre III : Choix de la méthode	70
III.1. Comparaison des méthodes	70

III.2. Outil de choix de la méthode	71
III.2.1. Etapes de l'application de la technique de Denuit et Charpentier.....	71
III.2.2. Comparaison par SCE sur les diagonales	72
III.2.3. Comparaison des SCE sur les trapèzes.....	73
Chapitre IV : Mesure du risque de provisionnement à l'horizon 1 an	74
IV.1. Risque de provisionnement à 1 an	74
IV.2. Méthode de Merz-Wüthrich	74
IV.2.1. Claims Development Results (CDR)	76
IV.2.2 Erreur de prédiction à 1 an	76
Les critiques du modèle de Merz-Wüthrich :	77
Conclusion	79
Annexe I : Modalités de calcul	81
Annexe II : Triangle de règlements décumulés	82
Annexe III : Estimation des paramètres de la loi de poisson	83
Annexe IV : Estimation des paramètres de la loi normale	84
Annexe V : Estimation de la loi gamma	85
Annexe VI : Méthode de cout moyen et de cadence des règlements	86

Liste des abréviations

CDR : Claims Development Results

CIMA : Conférence Interafricaine des Marchés d'Assurances

GLM: Generalized linear model

IBNR: Incurred But Not Reported

MSE : Erreur carré moyenne

MSEP : Erreur standard relative

PSAP : Provision pour sinistres à payer

SCE : Somme des carrés des erreurs

TPA : Third Party Administrator

Liste des tableaux

Tableau 1: Primes émises dans la zone CIMA 1995-2014.....	17
Tableau 2: Charges de sinistres (en milliers de FCFA) dans la zone CIMA 2012-2014	18
Tableau 3 : Triangle des paiements cumulés.....	21
Tableau 4 : Table des paiements cumulés estimés	21
Tableau 5 : Triangle des règlements cumulés	24
Tableau 6 : Triangle des coefficients de passage individuel	25
Tableau 7 : Moyenne-Ecart type-Coefficient de variation des coefficients de passage	25
Tableau 8 : facteurs de développement de Chain Ladder.....	26
Tableau 9 : Table de règlements estimés par la méthode de Chain Ladder	27
Tableau 10 : Provisions de Chain Ladder par année de survenance.....	27
Tableau 11 : Charges ultimes et provisions par Chain Ladder avec taux de liquidation.....	28
Tableau 12 : Estimation des paramètres de London Chain	29
Tableau 13 : Table des règlements estimés par London Chain	30
Tableau 14 : Provisions de London Chain par année de survenance	30
Tableau 15 : Charges ultimes et provisions London Chain.....	31
Tableau 16 : Paramètres de London Pivot.....	33
Tableau 17 : Table des règlements futurs à partir de la méthode de London Pivot	34
Tableau 18 : Provisions par année de survenance de London Pivot	34
Tableau 19 : Charges ultimes et Provisions London Pivot avec taux de liquidation	35
Tableau 20 : Loss ratio de Bornhuetter-Ferguson	36
Tableau 21 : Estimateurs des charges ultimes de Bornhuetter-Ferguson	36
Tableau 22 : Charges ultimes de Bornhuetter-Ferguson	37
Tableau 23: Provisions par année de survenance par la méthode de Bornhuetter-Ferguson	37
Tableau 24 : rapport entre la provision de Bornhuetter-Fergusson et les charges.....	38
Tableau 25: Cadence de paiement par année de développement	39
Tableau 26 : Charges ultimes de Cape Code.....	40
Tableau 27 : Provisions par années de survenance de Cape Code	40
Tableau 28 : rapport des provisions Cape-Code et des charges de la dernière année	41
Tableau 29 : facteurs de développement individuels et facteurs médians.....	43
Tableau 30 : Identification et Remplacement des facteurs de développement.....	44
Tableau 31 : les paramètres de l'hypothèse H1 de Mack.....	44
Tableau 32 : Estimateurs sans biais de σ^2	47
Tableau 33 : Erreur type de Mack	47
Tableau 34 : Exemples de familles exponentielles.....	49
Tableau 35 : extrait de la base de données utilisée pour la modélisation GLM	51
Tableau 36 : Règlements futurs par la régression poissonienne.....	52
Tableau 37: Reserve et risque de prédiction par le modèle de poisson	53
Tableau 38 : Règlements futurs par la régression Log-normale.....	54
Tableau 39: Provisions annuelles par la régression Log-normale	54
Tableau 40 : Provisions annuelles avec taux de liquidation par le modèle log-normal.....	55
Tableau 41 : Règlements futurs estimés par le modèle Gamma.....	56
Tableau 42 : Provisions annuelles du modèle Gamma.....	56
Tableau 43 : Provisions annuelles du modèle Gamma avec taux de liquidation.....	57
Tableau 44 : Estimation de l'erreur de modèle log-normal	58
Tableau 45 : Résidus de Pearson ajustés	59
Tableau 46 : Estimateurs des grandeurs du modèle bootstrap.....	62
Tableau 47 : Quantiles de la distribution des provision	63

Tableau 48 : Provisions dossier/dossier	65
Tableau 49 : Triangle du nombre de sinistres	65
Tableau 50 : Coefficients de Chain Ladder.....	66
Tableau 51 : Estimations du nombre de de futurs sinistres	66
Tableau 52: Nombre de sinistres BNR.....	66
Tableau 53 : Charges et nombre de sinistres	67
Tableau 54 : Réserves IBNR et provisions dossier/dossier corrigées	67
Tableau 55 : Comparaison des montants de provisions à la réserve dossier/dossier.....	68
Tableau 56 : Avantages et Inconvénients des méthodes de provisionnement étudiées.....	69
Tableau 57 : Provisions estimées par branche et écart avec la méthode Chain Ladder	70
Tableau 58 : SCE par sous-triangles	71
Tableau 59 : SCE par sous-triangles des méthodes mixtes	72
Tableau 60 : SCE par diagonales des méthodes	72
Tableau 61 : SCE par diagonales des méthodes mixtes	73
Tableau 62 : SCE par la méthode des trapèzes.....	73
Tableau 63 : SCE par trapèzes des méthodes mixtes	73
Tableau 64 : Ecart entre les méthodes Chain Ladder et Bornhuetter-Ferguson	73
Tableau 65 : Erreur de Merz-Wüthrich à un an et de Mack à l'ultime	77
Tableau 66 : Triangle initial de règlements.....	82

Liste des figures

Figure 1 : Evolution des primes émises dans la zone CIMA 1995-2014	17
Figure 2 : Dynamique de la vie d'un sinistre	20
Figure 3 : comparaison des λ_{ij} et $\lambda.j$	24
Figure 4 : Vérification de l'hypothèse H2 de Chain Ladder par représentation des couples $(C_{i,j}, C_{i,j+1})$	26
Figure 5 : représentation des points $(C_{i,j+\alpha}, C_{i,j+1+\alpha})$	33
Figure 6 : Evolution du rapport $PSAP_{C_{i,j}}$ de Bornhuetter-Ferguson	38
Figure 7 : Evolution du rapport $PSAP_{C_{i,j}}$ de Cape Code	41
Figure 8 : Evolution des cadences de règlements par année de développement	42
Figure 9 : Représentation des points $(C_{i,j}, r_{i,j})_{i=0, \dots, n-j-1}$	46
Figure 10 : QQ-plots des résidus	60
Figure 11 : Représentation des résidus par année de survenance et de développement	61
Figure 12 : ACF des résidus	61
Figure 13 : Histogramme et densité des résidus (à droite) et fonction de répartition (à droite) avec l'ajustement Gaussien en pointillés	62
Figure 14 : Histogramme et densité de provision du modèle de bootstrap	63
Figure 15 : Représentation des provisions obtenues par les différentes méthodes utilisées	68
Figure 16 : Représentation graphique des facteurs de développement par branche	71
Figure 17 : résidus en fonction des années de survenance et de développement	75
Figure 18 : ACF des résidus	75

Introduction générale :

Le passif d'une compagnie d'assurance est constitué en majeure partie des provisions techniques. Leur variation affecte considérablement le bilan. Wüthrich et Merz expliquent dans l'ouvrage "Modeling the Claims Result For Solvency Purposes " qu'une baisse de 1% du montant des provisions peut amener à un résultat du double de sa valeur sans cette baisse.

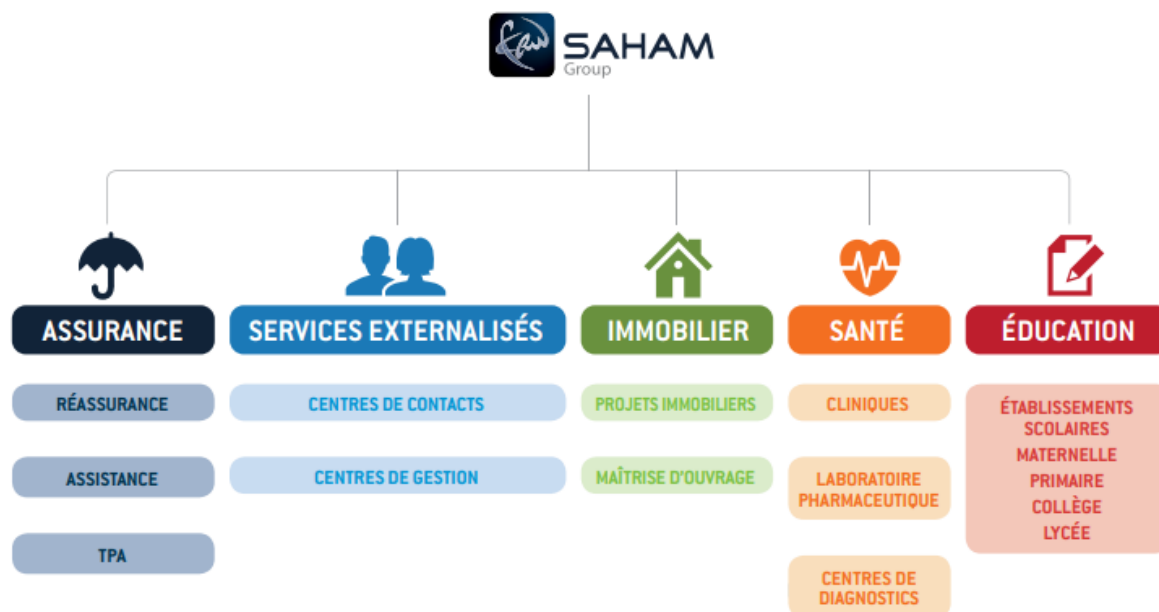
Les compagnies d'assurance et de réassurance doivent produire tous les états et comptes rendus afin de permettre le contrôle de leur situation financière, le déroulement des opérations qu'elles effectuent : l'émission des primes, les placements et surtout les règlements de sinistres. Il est donc crucial de bien évaluer les provisions et de mesurer les erreurs de prédiction associées. Par ailleurs, la tenue d'une comptabilité revêt une importance considérable pour toute compagnie d'assurance car elle sert de moyen de contrôle pour les autorités de tutelle.

En effet, elle permet à la compagnie d'évaluer succinctement sa situation financière et de vérifier sa solvabilité. Les assureurs sont donc tenus par la réglementation d'inscrire à tout moment à leur passif des provisions techniques suffisantes pour le règlement intégral des sinistres.

L'objectif de ce mémoire est d'estimer les provisions pour sinistres à payer (PSAP) en utilisant des méthodes statistiques (déterministes et stochastiques) et réglementaires. Pour cela, nous déterminons dans un premier temps ces provisions à partir de différentes méthodes tout en vérifiant les hypothèses établies par chacune d'elles. Dans un second temps, nous les comparons afin de choisir la mieux adaptée à nos données. En fin, nous terminons notre étude en évaluant le risque de provisionnement à horizon 1 an.

Présentation de SAHAM Finances :

SAHAM Group est une multinationale panafricaine et un acteur historique des métiers et services essentiels à la personne : l'assurance, l'assistance, les services externalisés, l'immobilier, la santé et l'éducation. Présent aujourd'hui dans 27 pays en Afrique et au Moyen-Orient, le groupe est né en 1995 de la vision ambitieuse et humanitaire de Monsieur Moulay Hafid Elalamy. En 2016, le chiffre d'affaire du groupe était de 1,24 milliards de dollars (USD). De nos jours, il emploie plus de 16 000 collaborateurs, qui mettent chaque jour leur énergie et leur savoir-faire au service de leurs clients.



Hors l'Afrique du Sud, SAHAM Finances est le premier groupe d'assurance panafricain. En 2017, il a enregistré un chiffre d'affaire de 1,2 milliards de dollars. Actif en Afrique et au Moyen-Orient, SAHAM Finances poursuit activement sa stratégie de croissance et présente 65 filiales dont 35 compagnies d'assurance et de réassurance. Le groupe dispose également d'un large réseau de distribution de 700 agences et compte aujourd'hui plus de 3000 collaborateurs. Avec une forte présence en Afrique et au Moyen-Orient, SAHAM Finances met ses expertises au service des métiers de l'assurance, de la réassurance, de l'assistance et de la tierce Gérance (TPA).

Assurance : en élargissant ses perspectives de croissance au Moyen-Orient et avec sa présence dans 26 pays, SAHAM Assurance est leader du secteur en Afrique aussi bien sur les activités dommages que vie.

Assistance : Partenaire de Mondial Assistance, SAHAM Assistance est leader panafricain de l'assistance et est présent aujourd'hui dans 26 pays.

TPA : la tierce gérance (TPA) est un axe de croissance stratégique de SAHAM Finances pour optimiser la gestion des frais de santé à travers des réseaux de soins étendus et permet ainsi aux bénéficiaires une qualité optimale.



Aujourd'hui, le Group SAHAM se transforme en Fonds d'Investissement Panafricain et cède ses filiales assurance à SANLAM :

- ✓ Transformation du groupe SAHAM en Fonds d'Investissement Panafricain
- ✓ Rachat des parts de Wendel dans la Holding
- ✓ Augmentation de la participation de SANLAM dans les filiales assurance du groupe

Cession de la filiale assurance à SANLAM :

Partenaire depuis février 2016, SANLAM augmentera après plusieurs mois de négociations sa participation dans le capital des filiales assurance du groupe SAHAM pour passer de 46,6% à 100%.

Avec une capitalisation boursière de 16 milliards de dollars, SANLAM est le premier groupe d'assurance en Afrique et continue à renforcer sa position sur le continent avec ce nouvel accord.

Rappelons que c'est en 2010 que SAHAM a amorcé son développement stratégique en Afrique et est présent aujourd'hui dans 26 pays.

L'acquisition faite par SANLAM au titre de 1 milliard 50 millions de dollars fut conclu sur la base d'un prix de SAHAM Assurance Maroc à 1450 drh par action.

Conformément à la réglementation boursière marocaine, cette opération est soumise aux accords des différents régulateurs concernés et donnera lieu au lancement d'une offre publique d'achat sur les titres de SAHAM Assurance Maroc, société cotée à la Bourse de Casablanca.

Rachat des parts de WENDEL dans le groupe SAHAM :

SAHAM a entamé une simplification de son actionnariat en rachetant les parts du groupe Wendel (France) et ceci dans une optique de transformation en fonds d'Investissement. Cette opération lui a permis d'accélérer de manière substantielle la diversification du groupe.

Transformation du groupe SAHAM en fonds d'Investissement Panafricain :

De par son expérience sur le continent et son désir de mettre son expertise au service des grands projets, SAHAM s'est convertit en Fonds d'Investissement Panafricain et vise à fortifier sa position d'acteur stratégique sur le continent. Cette nouvelle vision lui permettra de renforcer son impact dans plusieurs secteurs.

Problématique

L'évaluation des provisions techniques est un exercice indispensable en assurance non vie. Cette conjoncture tient au fait qu'à chaque instant, plus de la moitié de la charge des sinistres destinée aux contrats reste encore à payer. C'est pourquoi le mode de constitution des provisions est règlementé par les instances de supervision des compagnies d'assurance.

Le cas des pays de la zone CIMA est encore plus inquiétant. En effet, 75% des primes encaissées relèvent des activités non vie contre 42% au niveau mondial. Les provisions pour sinistres à payer (PSAP) nécessitent par conséquent une attention particulière et constituent une composante majeure du passif du bilan des assureurs non vie.

Notre travail consiste donc à évaluer ces provisions pour une des filiales non vie de SAHAM Finances dans la zone CIMA en faisant recours à la réglementation et à des méthodes statistiques. Précisons que ces méthodes statistiques ne sont utilisées qu'après l'accord de la Commission de contrôle des assurances (article 334-12 du Code CIMA).

Généralité et Contexte

1. Assurance et provisionnement non vie dans la zone CIMA :

La Conférence Interafricaine sur les marchés de l'assurance encadre les activités d'assurance de quatorze pays : le Bénin, le Burkina-Faso, le Cameroun, la Centrafrique, les Iles Comores, le Congo, la Cote d'Ivoire, le Gabon, la Guinée Equatoriale, le Mali, le Niger, le Sénégal, le Tchad et le Togo. Les activités de la zone sont marquées par une forte prédominance de l'assurance dommage qui occupe la majeure partie des primes émises (75%) contre 25% pour l'assurance vie. Le tableau et le graphe suivants mettent en lumière l'évolution des primes émises (chiffre d'affaire) dans la zone CIMA de 1995 à 2014.

Année	Montant (en Milliers de FCFA)	Variation
1995	181 789	-
1996	195 850	7,70%
1997	181 655	-7,20%
1998	210 853	16,10%
1999	218 648	3,70%
2000	236 514	8,20%
2001	261 836	10,70%
2002	301 625	15,20%
2003	324 522	7,60%
2004	330 505	1,80%
2005	343 799	4%
2006	362 058	5,30%
2007	399 011	10,20%
2008	440 210	10,30%
2009	466 097	5,90%
2010	505 065	8,40%
2011	531 341	5,20%
2012	585 694	10,20%
2013	656 380	12,10%
2014	670 804	2,20%

Tableau 1: Primes émises dans la zone CIMA 1995-2014

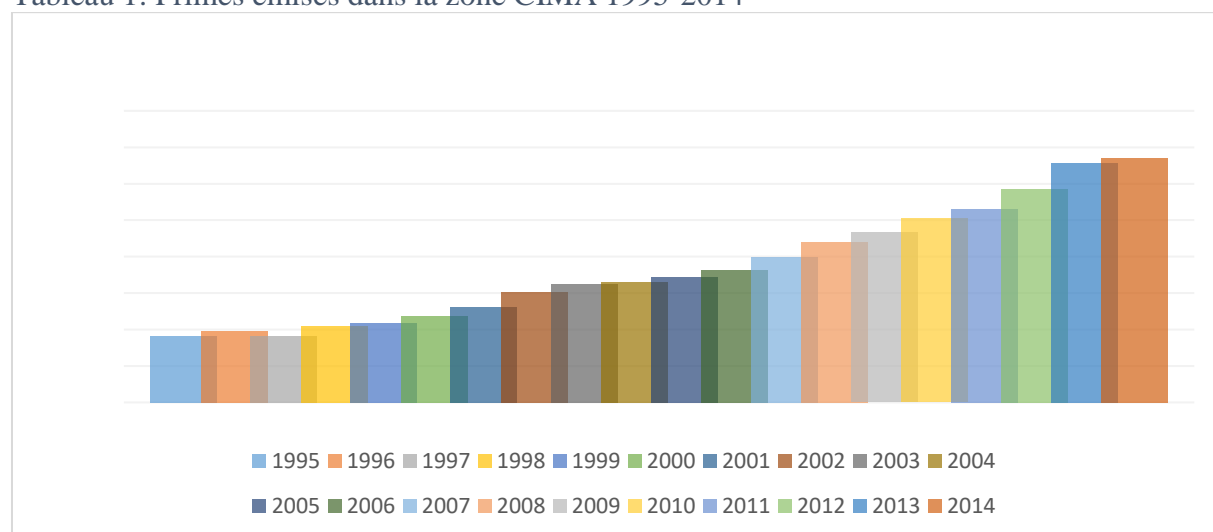


Figure 1 : Evolution des primes émises dans la zone CIMA 1995-2014

A partir de ce graphe, on observe une croissance générale des primes émises, exception faite pour l'année 1997 où ces primes ont connu une baisse de 7,2%.

En 2014, les primes émises s'élèvent à 670,8 milliards de FCFA contre 656,38 milliards de FCFA en 2013, soit une progression de 2,2%.

Durant vingt (20) ans, la production en assurance non vie est passée de 182,79 milliards de FCFA en 1995 à 670,8 milliards de FCFA et donc une évolution globale de 269% contre 7,1% annuellement.

Quant aux charges de sinistres, elles se répartissent comme suit dans la zone CIMA : Côte d'Ivoire 25,2%, Cameroun 16,2%, Sénégal 11,2% et Gabon 11%. Les autres pays se partagent les 36,4% restant.

Marché	charges 2012	charges 2013	charges 2014
Bénin	11 160	13 465	17 307
Burkina Faso	13 113	15 172	17 149
Cameroun	39 717	42 993	48 390
Centrafrique	1 725	1 158	812
Congo	15 597	11 256	27 319
Cote d'Ivoire	45 542	85 818	75 091
Gabon	26 319	33 268	32 688
Guinée Equatoriale	2 399	1 839	1 905
Mali	8 743	7 473	16 432
Niger	7 283	10 005	8 507
Sénégal	29 047	28 367	33 366
Tchad	2 643	6 080	4 649
Togo	9 520	11 873	14 859

Tableau 2: Charges de sinistres (en milliers de FCFA) dans la zone CIMA 2012-2014

En 2014, les charges de sinistres atteignent 298,47 milliards de FCFA et s'élevaient à 268,77 milliards de FCFA en 2013. Dans l'ensemble de la zone, la sinistralité se situe à 43,2% avec une hausse de 11,1% en 2014.

Les charges de sinistres sont en forte progression au Mali, au Bénin, au Congo et sont respectivement de 119,9%, 142,7% et 2,5%.

Contrairement aux pays précédents, elles sont en baisse en Centrafrique 29,8%, au Tchad 23,5%, au Niger 15%, en Côte d'Ivoire 12,5% et au Gabon 1,7%.

2. Le Code CIMA et provisionnement en assurance non vie

L'Article 334 du code CIMA préconise quatre engagements règlementés que les compagnies d'assurance doivent respecter. Parmi ces engagements figurent les provisions techniques. Celles-ci doivent être suffisantes pour le règlement de tous les sinistres.

Les provisions pour sinistres à payer (PSAP) occupent la majorité des provisions techniques en assurance non vie. En référence au code CIMA, cette provision correspond à la valeur estimative des dépenses en principal et en frais, tant internes qu'externes nécessaires

au règlement de tous les sinistres survenus et non payés, y compris les capitaux consécutifs des rentes non encore mises à la charge de l'entreprise.

Les provisions techniques sont soumises à une réglementation (voir annexe I). Cette dernière obéit à trois règles dictées par le code CIMA dont les idées générales sont les suivantes :

Règle 1 :

La première règle nous renseigne sur le mode d'évaluation des sinistres. En effet, sans préjudice de l'application des règles spécifiques à certaines branches, l'évaluation des sinistres connus est effectuée dossier par dossier et le cout d'un dossier comprend toutes les charges externes individualisables ; elle est augmentée d'une estimation du cout des sinistres survenus mais non déclarés appelés IBNR (Incurred But Not Reported). Les modalités d'estimation du cout des sinistres survenus mais non déclarés sont fixées par circulaire de la commission de contrôle des assurances.

Règle 2 :

La provision pour sinistres à payer doit toujours être calculée pour son montant brut sans tenir compte des recours à exercer ; les recours à recevoir font l'objet d'une évaluation distincte.

Règle 3 :

Avec l'accord de la Commission de contrôle des assurances, les compagnies d'assurance peuvent utiliser des méthodes statistiques pour l'estimation des sinistres survenus au cours des deux derniers exercices.

Chapitre I : Le Provisionnement en assurance non vie

Avant de commencer l'étude des méthodes de provisionnement, il est important d'avoir une idée sur le provisionnement en assurance non vie. Rappelons que le cycle de production en assurance est inversé, c'est pourquoi il est important de constituer à tout moment des provisions afin de régler les sinistres.

I.1. La vie d'un sinistre

On s'intéresse dans cette partie à la représentation classique et à la dynamique de la vie d'un sinistre. Ceci nous permettra de comprendre la notion de sinistre en assurance.

La spécificité de l'assurance est l'inversion du cycle de production. Lors de la souscription d'une police d'assurance, l'assureur promet à l'assuré une indemnisation en cas de réalisation d'un sinistre et ceci moyennant une prime qu'il reçoit soit mensuellement ou annuellement. Cette prime est versée d'abord par l'assuré et si toutefois un sinistre survient pendant la période d'exposition (de couverture de sinistre) alors l'assureur s'occupe du règlement du sinistre survenu. L'indemnisation suit tout un processus et passe par des étapes comme l'indique le schéma ci-dessous :

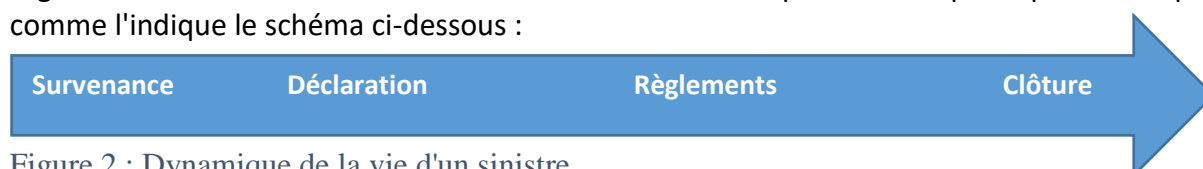


Figure 2 : Dynamique de la vie d'un sinistre

On peut remarquer sur cette figure qu'il y'a quatre étapes qui définissent la dynamique d'un sinistre. En effet, après la survenance d'un sinistre pendant la période de couverture, l'assuré déclare à l'assureur qui effectue à son tour des règlements. Une fois que tous les règlements ont été effectués, l'assureur peut clôturer ce sinistre. Les règlements futurs sont estimés par la compagnie d'assurance à partir de plusieurs critères et méthodes de provisionnement. Ces estimations concernent non seulement les sinistres survenus et déclarés à la compagnie mais aussi les sinistres survenus et non déclarés à la date de l'inventaire. Les sinistres survenus non déclarés sont appelés les tardifs ou sinistres Incurred But Not Reported (IBNR).

Pour faire face aux différents sinistres, les assureurs estiment donc des provisions qui tiennent compte de l'inversion du cycle de production.

I.2. Présentation des données

Les données sont représentées sous forme de triangle qui reflète la dynamique de liquidation des sinistres. Dans ce mémoire, les données utilisées sont confidentielles, c'est pourquoi nous ne précisons pas la filiale choisie, les années de sinistres et de développement.

Ainsi l'étude effectuée porte sur un triangle de règlements d'historique comptables issu de la branche automobile de l'une des filiales de SAHAM Finances dans la zone CIMA.

Les données utilisées sont annuelles et les notations utilisées sont les suivantes :

- ✓ i : l'indice des années de survenance $i=1, \dots, n$
- ✓ j : l'indice des années de développement
- ✓ $Y_{i,j}$: les paiements non cumulés des sinistres survenus l'année i , en $i+j-1$ années de développement

✓ $C_{i,j}$: les paiements cumulés des sinistres survenus l'année i , en j années de développement

$$C_{i,j} = Y_{i,1} + Y_{i,2} + \dots + Y_{i,j} = \sum_{K=1}^j Y_{i,k}$$

Le triangle contenant les paiements cumulés se présente sous la forme ci-dessous :

$j \backslash i$	1	2	...	n-1	n
1	$C_{1,1}$	$C_{1,2}$...	$C_{1,n-1}$	$C_{1,n}$
2	$C_{2,1}$	$C_{2,2}$...	$C_{2,n-1}$	
.	.	.	.		
.	.	.	.		
.	.	.	.		
n-1	$C_{n-1,1}$	$C_{n-1,2}$			
n	$C_{n,1}$				

Tableau 3 : Triangle des paiements cumulés

L'objectif est d'estimer la partie inférieure du triangle de liquidation à partir des informations que nous disposons dans la partie supérieure. Les $\hat{C}_{i,j}$ sont les valeurs estimées des règlements cumulés.

$j \backslash i$	1	2	...	n-1	n
1	$C_{1,1}$	$C_{1,2}$...	$C_{1,n-1}$	$C_{1,n}$
2	$C_{2,1}$	$C_{2,2}$...	$C_{2,n-1}$	$\hat{C}_{2,n}$
.
.	.	.	.		
.	.	.	.		
n-1	$C_{n-1,1}$	$C_{n-1,2}$...	$\hat{C}_{n-1,n-1}$	$\hat{C}_{n-1,n}$
n	$C_{n,1}$	$\hat{C}_{n,2}$...	$\hat{C}_{n,n-1}$	$\hat{C}_{n,n}$

Tableau 4 : Table des paiements cumulés estimés

Après l'estimation des $\hat{Y}_{i,j}$ et $\hat{C}_{i,j}$, on peut déterminer les provisions pour chaque année de sinistre notées :

$$\hat{R}_i = \hat{Y}_{i,n+2-i} + \hat{Y}_{i,n+3-i} + \dots + \hat{Y}_{i,n} = \hat{C}_{i,n} - C_{i,n+1-i}$$

La réserve totale s'obtient à partir de l'expression :

$$\hat{R}_i = \sum_{i=2}^n \hat{R}_i = \sum_{i=2}^n (\hat{C}_{i,n} - C_{i,n+1-i})$$

Pour l'estimation de la partie inférieure nous avons utilisé les méthodes déterministes de Chain Ladder, London Chain, London Pivot, Bornhuetter-Ferguson et de Cape Code ainsi que les méthodes stochastiques de Mack, GLM et bootstrap.

Dans la partie suivante, nous présentons et appliquons ces différentes méthodes au triangle de règlements en vue de déterminer la réserve à constituer.

Chapitre II : Les méthodes de provisionnement

II.1. Les méthodes déterministes

Les méthodes déterministes reposent sur la stabilité du délai qui s'écoule entre la survenance d'un sinistre et les règlements. Ces méthodes s'avèrent plus pratiques dans l'estimation de la charge finale lorsque les hypothèses suivantes sont vérifiées :

- Absence de changement de structure du portefeuille
- Absence de l'inflation...

II.1.1. Méthode de Chain Ladder

Description de la méthode :

Il s'agit de considérer que l'évolution des charges cumulées d'une année à une autre reste semblable pour toutes les années de survenance. Cette évolution est caractérisée par un facteur multiplicatif propre à chaque année de développement.

Considérons le facteur de développement individuel :

$$\lambda_j = \frac{C_{i,j+1}}{C_{i,j}} \quad \forall \quad i, j=1\dots n.$$

La méthode de Chain Ladder repose sur l'hypothèse d'indépendance des facteurs de développement λ_j des années de survenance.

Disposant d'un triangle de n années et en considérant les coefficients de passage d'une année à une autre commun pour les années de survenance, l'estimateur du facteur de développement est donné par :

$$\hat{\lambda}_j = \frac{\sum_{i=1}^{n-j} C_{i,j+1}}{\sum_{i=1}^{n-j} C_{i,j}} \quad j=1\dots n$$

Ces facteurs nous permettent d'estimer par la suite :

- Les charges ultimes par exercice :

$$C_{i,j} = C_{i,n+1-i} \cdot \prod_{j=n+1-i}^{j-1} \hat{\lambda}_j \quad \text{Pour } i=2,\dots,n \text{ et } j=n+2-i,\dots,n$$

- Connaissant ces charges futures, on détermine le montant de provision pour l'année de survenance i par la relation :

$$\hat{R}_i = \hat{C}_{i,n} - \hat{C}_{i,n+1-i} \quad \text{pour } i=2,\dots,n$$

- Le montant total de réserve sera donc estimé comme suit :

$$\hat{R} = \sum_{i=2}^n \hat{R}_i = \sum_{i=2}^n \hat{C}_{i,n} - \hat{C}_{i,n+1-i}$$

NB : les résultats sont obtenus à partir du logiciel R et Excel. Par ailleurs, les paiements, les évaluations et les provisions sont en milliers de FCFA.

Application au triangle de règlements Auto :

Nous présentons dans la table suivante le triangle des règlements cumulés, utilisés pour estimer la réserve :

	0	1	2	3	4	5	6	7
an sur 1	192 130	329 544	361 786	375 807	380 925	391 194	396 679	423 755
an sur 2	260 780	428 179	481 142	501 590	508 205	513 164	584 506	
an sur 3	327 916	435 521	483 017	497 668	510 593	520 933		
an sur 4	395 136	619 030	653 170	663 885	671 177			
an sur 5	457 964	697 585	728 361	768 815				
an sur 6	367 871	623 469	684 217					
an sur 7	548 962	927 481						
an sur 8	578 654							

Tableau 5 : Triangle des règlements cumulés

Validation des hypothèses du modèle :

H1 :

Le coefficient de passage individuel λ_{ij} pour une année de développement j est équivalent pour toutes les années de survénance i c'est-à-dire : $\lambda_{ij} = \frac{C_{i,j+1}}{C_{i,j}} \sim \bar{\lambda}_j$.

Pour vérifier H1, nous allons comparer λ_{ij} à $\bar{\lambda}_j$ pour $j=0...4$

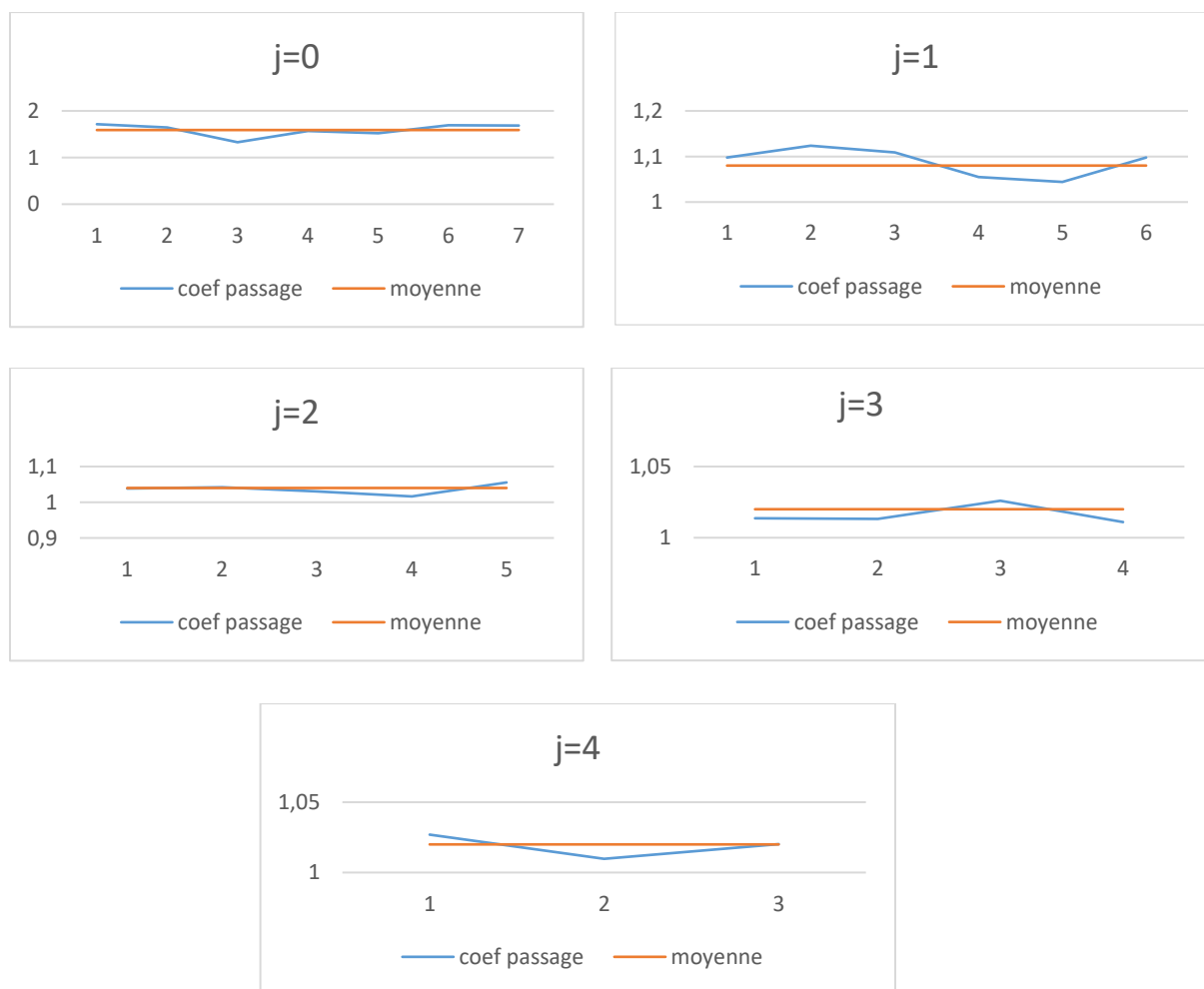


Figure 3 : comparaison des λ_{ij} et $\bar{\lambda}_j$

D'après ces figures, on constate que les λ_{ij} et $\bar{\lambda}_j$ ne sont pas complètement confondus mais cependant l'écart entre l'évolution des deux par année de développement n'est pas grand.

Pour mieux justifier cette première hypothèse de Chain Ladder, nous allons donc déterminer la moyenne, l'écart type et enfin le coefficient de variation des facteurs de développement individuel. Ci-dessous nous avons le triangle de coefficients individuels :

	0	1	2	3	4	5	6
an sur 1	1,72	1,1	1,04	1,01	1,03	1,01	1,07
an sur 2	1,64	1,12	1,04	1,01	1,01	1,14	
an sur 3	1,33	1,11	1,03	1,03	1,02		
an sur 4	1,57	1,06	1,02	1,01			
an sur 5	1,52	1,04	1,06				
an sur 6	1,69	1,1					
an sur 7	1,69						

Tableau 6 : Triangle des coefficients de passage individuel

Les résultats obtenus y compris les facteurs de développement de Chain Ladder sont dans le tableau suivant :

Moyenne	1,59	1,09	1,04	1,02	1,02	1,08	1,07
Ecart type	0,14	0,03	0,01	0,01	0,01	0,09	0
Coeff de variation	0,09	0,03	0,01	0,01	0,01	0,09	0

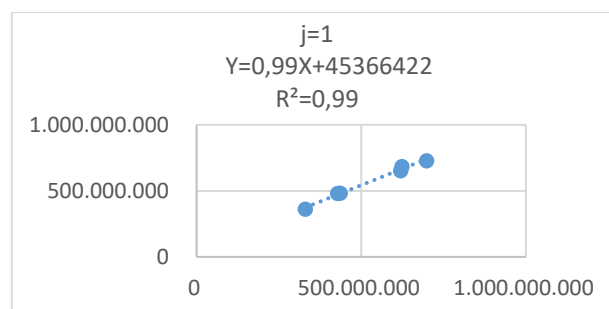
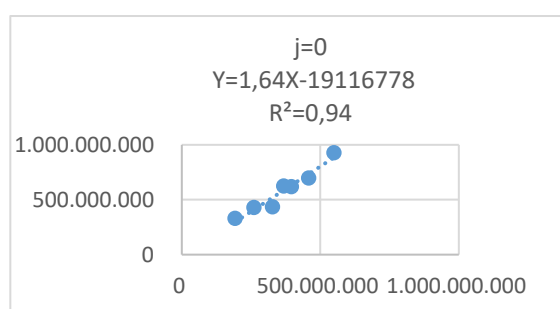
Tableau 7 : Moyenne-Ecart type-Coefficient de variation des coefficients de passage

On remarque que la plus grande valeur des coefficients de variation vaut 9%. Ces coefficients sont faibles pour toutes les années de développement. D'après ces résultats, nous pouvons conclure la stabilité des facteurs de développement et par conséquent l'hypothèse H1 de Chain Ladder est vérifiée.

H2 :

Cette hypothèse porte sur la linéarité entre les paiements cumulés. Il s'agit donc de vérifier si les points $(C_{i,j}, C_{i,j+1})$ sont sensiblement alignés sur une droite passant par l'origine.

Pour cela, nous avons considéré $Y=C_{i,j+1}$, $X=C_{i,j}$ et ensuite calculé les coefficients de détermination afin de mieux apprécier la qualité de l'ajustement.



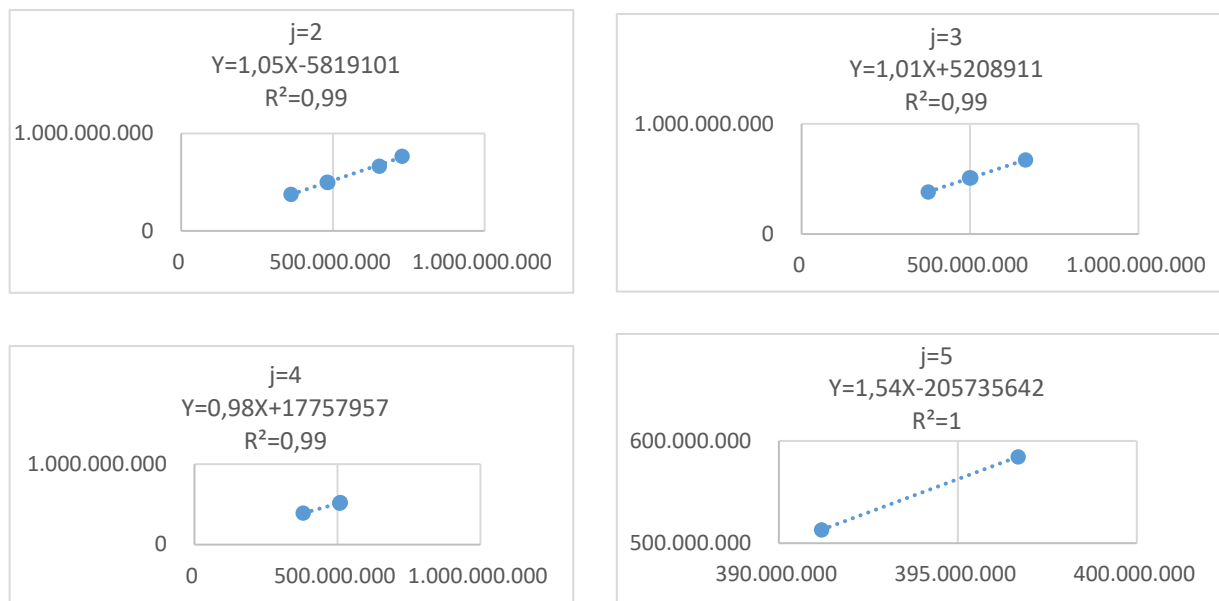


Figure 4 : représentation des couples $(C_{i,j}, C_{i,j+1})$

A partir de ces graphes, nous constatons que les points $(C_{i,j}, C_{i,j+1})$ sont alignés sur une même droite et c'est seulement pour la première année de développement que certains points se détachent de la droite de régression. De plus, ces droites passent quasiment par l'origine pour toutes les années de développement.

Concernant les coefficients de détermination, les valeurs obtenues sont toutes supérieures à 0,9. Nous avons donc une bonne qualité de l'ajustement. De ce qui précède, nous concluons que l'hypothèse H2 de Chain Ladder est presque vérifiée.

Estimation des provisions et de la réserve globale :

On détermine d'abord les facteurs de Chain Ladder. Les coefficients trouvés par année de développement figurent dans le tableau suivant :

j	Facteurs de développement
0	1,59
1	1,08
2	1,04
3	1,02
4	1,02
5	1,02
6	1,08
7	1,07

Tableau 8 : facteurs de développement de Chain Ladder

Connaissant les facteurs de développement et après la validation des hypothèses de Chain Ladder, nous pouvons remplir la partie inférieure du triangle. Les résultats obtenus sont dans la table suivante :

	0	1	2	3	4	5	6	7
an sur 1	192 130	329 544	361 786	375 807	380 925	391 194	396 679	423 755
an sur 2	260 780	428 179	481 142	501 590	508 205	513 164	584 506	624 403
an sur 3	327 916	435 521	483 017	497 668	510 593	520 933	565 187	603 765
an sur 4	395 136	619 030	653 170	663 885	671 177	683 436	741 495	792 108
an sur 5	457 964	697 585	728 361	768 815	780 862	795 125	862 672	921 556
an sur 6	367 871	623 469	684 217	709 561	720 680	733 843	796 185	850 530
an sur 7	548 962	927 481	1 003 958	1 041 146	1 057 461	1 076 776	1 168 250	1 247 992
an sur 8	578 654	921 217	997 178	1 034 115	1 050 319	1 069 504	1 160 360	1 239 564

Tableau 9 : Table de règlements estimés par la méthode de Chain Ladder

Après l'estimation des règlements futurs, on détermine les réserves par année de survenance comme mentionné précédemment :

i	PSAP
0	0
1	39 897
2	82 833
3	120 931
4	152 742
5	166 314
6	320 511
7	660 910
Total	1 544 137

Tableau 10 : Provisions de Chain Ladder par année de survenance

La réserve totale obtenue par Chain Ladder est :

$$PSAP_{\text{Totale}} = 1\,544\,137 \text{ FCFA}$$

Pour des branches comme l'automobile, les règlements sont totalement effectués après plusieurs années. Il serait donc prudent de tenir compte du taux de liquidation pour l'évaluation des réserves. Ce taux est déterminé par la formule suivante :

$$\text{Taux de liquidation} = \frac{\text{Règlements cumulés}}{\text{Charges cumulées}} = \frac{423\,755\,000}{434\,620\,512} = 97,5\%$$

Avec un taux de liquidation inférieur à 100%, les règlements cumulés de la dernière année de développement diffèrent des charges ultimes. Celles-ci sont déterminées comme suit :

$$\text{Charges ultimes} = \frac{\text{Règlements cumulés}}{0,975}$$

Nous pouvons en fin déduire les charges ultimes et les provisions par année de survenance comme le montre le tableau suivant :

i	Charges ultimes	PSAP
0	434 621	10 866
1	640 413	55 907
2	619 247	98 314
3	812 418	141 242
4	945 186	176 371
5	872 339	188 122
6	1 279 992	352 511
7	1 271 347	692 694
Total	6 875 563	1 716 026

Tableau 11 : Charges ultimes et provisions par Chain Ladder avec taux de liquidation

La réserve totale obtenue par la méthode de Chain Ladder sera alors :

$$PSAP_{Totale} = 1\,716\,026 \text{ FCFA}$$

Les critiques de la méthode Chain Ladder :

La méthode de Chain Ladder repose sur des hypothèses qui ne sont pas toujours réalistes dans la pratique. Le principe selon lequel le cumul d'une année de développement est proportionnel à celui de l'année précédente doit être semblable pour toutes les années de sinistres. Ce principe ne tient pas compte au cours du temps de l'évolution probable dans le déroulement des règlements de sinistres. Par exemple, en cas de changement de management au niveau de la gestion des sinistres visant à optimiser le rythme de règlements des sinistres.

Par ailleurs, l'instabilité de la prévision des charges finales pour les années récentes est inquiétante. Notons que la charge finale de la dernière année du triangle est le résultat du produit de j estimations des facteurs de développement $\hat{\lambda}_j, j \in \{0, \dots, J\}$. Cette analyse montre une forte sensibilité à la première valeur.

II.1.2. Méthode de London-Chain

Description de la méthode :

Introduite par Benjamin et Eagles [1986], la méthode de London Chain est une généralisation de la méthode de Chain Ladder.

En effet, les hypothèses de la méthode de Chain Ladder sont reprises mais cette méthode repose sur une réalité moins contraignante entre les états $C_{i,j}, C_{i,j+1}$. La dynamique des paiements cumulés évoquée par ce modèle est donnée par :

$$C_{i,j+1} = \lambda_j \cdot C_{i,j} + \alpha_j \text{ pour } i = 1, \dots, n \text{ et } j = 1, \dots, n-1$$

Notons que l'ensemble des points $(C_{i,j}, C_{i,j+1})$ doivent être alignés sur une même droite mais cette dernière ne passera pas nécessairement par l'origine comme dans le cas de la

méthode de Chain Ladder. L'hypothèse fondamentale de la méthode de London Chain est déjà vérifiée (voir H2 de Chain Ladder).

L'estimation porte sur $(2n-2)$ paramètres donc deux fois plus de paramètres que dans la méthode de Chain Ladder. Le modèle London Chain étant sous forme linéaire, nous estimons ses paramètres par la méthode des moindres carrés.

$$(\hat{\lambda}_j, \hat{\alpha}_j) = \text{Argmin}\left\{\sum_{i=1}^{n-j} (C_{i,j+1} - \lambda_j \cdot C_{i,j} - \alpha_j)^2\right\}$$

On cherche à déterminer pour tout k :

$$\hat{\lambda}_j = \frac{\frac{1}{n-j} \sum_{i=1}^{n-j} C_{i,j} \cdot C_{i,j+1} - \bar{C}_j \cdot \bar{C}_{j+1}}{\frac{1}{n-j} \sum_{i=1}^{n-j} C_{i,j}^2 - \bar{C}_j^2} \quad \text{où} \quad \bar{C}_j^{(j)} = \frac{1}{n-j} \sum_{i=1}^{n-j} C_{i,j}$$

$$\bar{C}_{j+1}^{(j)} = \frac{1}{n-j} \sum_{i=1}^{n-j} C_{i,j+1}$$

En fin les $\hat{\alpha}_j$ et $\hat{\lambda}_j$ sont estimés comme suit :

$$\hat{\alpha}_j = \bar{C}_{j+1}^{(j)} - \hat{\lambda}_j \cdot \bar{C}_j^{(j)} \quad \text{et} \quad \hat{\lambda}_j = \frac{\text{cov}(\text{colonne}_j, \text{colonne}_{j+1})}{\text{var}(\text{colonne}_j)}$$

Application au triangle de règlements Auto :

En estimant les paramètres du modèle, nous obtenons les résultats suivants :

j	lambda	alpha
1	1,64	-19 116 778
2	0,99	45 366 422
3	1,045	-5 819 101
4	1,005	5 208 912
5	0,98	17 757 958
6	1,54	-205 735 642
7	1	0

Tableau 12 : Estimation des paramètres de London Chain

Ces paramètres permettent d'estimer les règlements futurs notés : $\hat{C}_{i,j+1} = \hat{\lambda}_j \cdot \hat{C}_{i,j} + \hat{\alpha}_j$

	0	1	2	3	4	5	6	7
an sur 1	192 130	329 544	361 786	375 807	380 925	391 194	396 679	423 755
an sur 2	260 780	428 179	481 142	501 590	508 205	513 164	584 506	611 582
an sur 3	327 916	435 521	483 017	497 668	510 593	520 933	596 469	623 546
an sur 4	395 136	619 030	653 170	663 885	671 177	675 649	834 723	861 799
an sur 5	457 964	697 585	728 361	768 815	778 215	780 568	996 292	1 023 368
an sur 6	367 871	623 469	684 217	711 095	720 180	723 682	908 691	935 767
an sur 7	548 962	927 481	968 752	1 009 228	1 019 938	1 017 507	1 361 163	1 388 239
an sur 8	578 654	932 458	973 707	1 014 419	1 025 158	1 022 623	1 369 042	1 396 118

Tableau 13 : Table des règlements estimés par London Chain

Connaissant les règlements estimés, nous pouvons déterminer les provisions par année de survenance :

i	PSAP
0	0
1	27 076
2	102 613
3	190 622
4	254 553
5	251 550
6	460 758
7	817 465
Total	2 104 638

Tableau 14 : Provisions de London Chain par année de survenance

La réserve totale obtenue par la méthode de London Pivot est :

$$PSAP_{\text{Totale}} = 2\,104\,638 \text{ FCFA}$$

Dans l'optique d'obtenir une estimation plus fiable, nous utilisons comme dans la méthode précédente le taux de liquidation. Dans ce cas les réserves à constituer par année de survenance seront :

i	Charges ultimes	PSAP
0	434 621	10 866
1	627 264	42 758
2	639 534	118 601
3	883 896	212 720
4	1 049 608	280 794
5	959 761	275 545
6	1 423 835	496 354
7	1 431 916	853 262
Total	7 450 435	2 290 899

Tableau 15 : Charges ultimes et provisions London Chain

D'où la réserve totale estimée par London Chain :

$$\text{PSAP}_{\text{Totale}} = 2\,290\,899 \text{ FCFA}$$

On remarque que la réserve de London Chain est plus élevée que celle obtenue par la méthode de Chain Ladder. Nous parlons en général d'une méthode prudente. Néanmoins même si l'hypothèse fondamentale de cette méthode est vérifiée, nous faisons attention au risque de sur provisionnement.

Avantages de la méthode London Chain :

La méthode London Chain prend en compte à la fois une tendance multiplicative et une autre additive ce qui fait qu'elle est plus élaborée et plus souple que la méthode de Chain Ladder. De plus, cette méthode suppose l'alignement des points $(C_{i,j}, C_{i,j+1})$ mais relâche l'hypothèse du passage de la droite de régression par l'origine. Le relâchement de cette contrainte peut être validé à l'aide d'un test de significativité portant sur le facteur incrémental.

La formulation de ce test est donnée par :

$$\begin{cases} H_0 : \alpha_j = 0 \\ H_1 : \alpha_j \neq 0 \end{cases}$$

En supposant la normalité des résidus ε_j , on peut montrer que :

$\hat{\alpha}_j \sim N \left(\alpha_j, \frac{\sigma_j^2}{1-j} + \frac{\sigma_j^2 \bar{C}_j^2}{(1-j-1)S_{C_j}^2} \right)$ avec σ_j^2 la variance de ε_j et $S_{C_j}^2$ un estimateur sans biais de C_j .

La statistique du test est donnée par l'expression :

$$T_j = \frac{\widehat{\alpha}_j - \alpha_j}{\sqrt{S_{\varepsilon_j}^2 \left(\frac{1}{I-j} + \frac{\overline{C}_j^2}{(I-j-1)S_{C_j}^2} \right)}} \sim T_{I-j-2} \text{ avec } S_{\varepsilon_j}^2 \text{ un estimateur sans biais de } \sigma_j^2.$$

On valide le modèle à 95% pour une probabilité inférieure à 5%.

II.1.3 London Pivot

Description de la méthode :

Proposée par Straub (1988), la méthode London Pivot est un modèle intermédiaire entre la méthode de London Chain et de Chain Ladder.

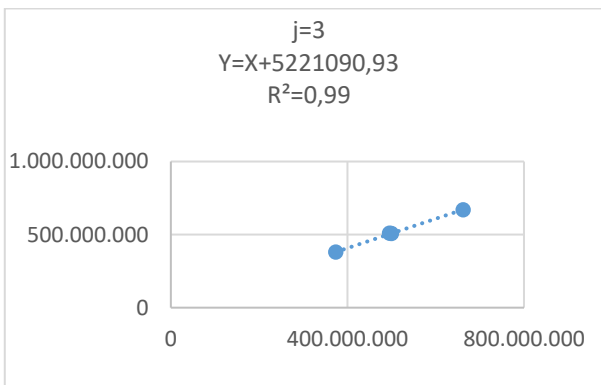
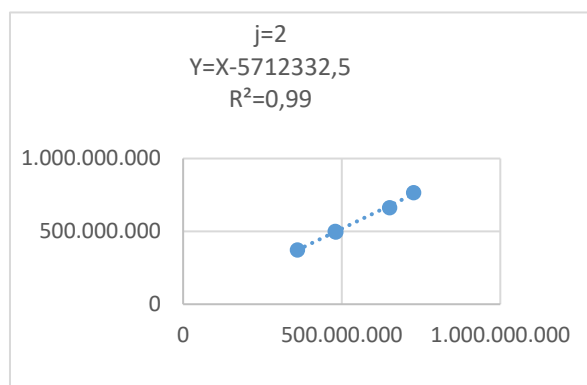
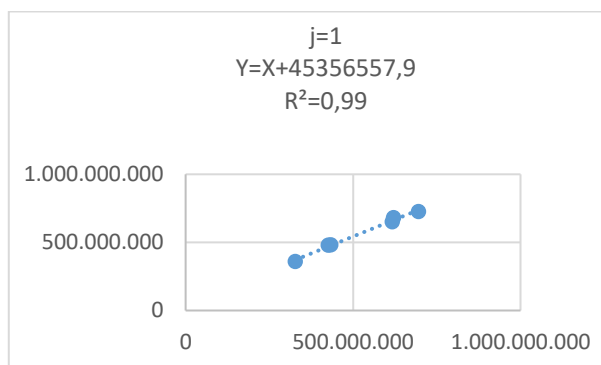
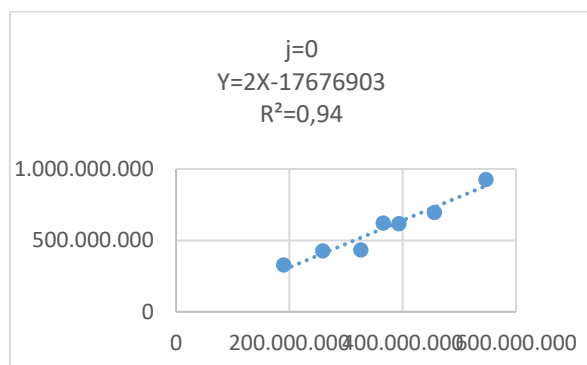
London Pivot propose l'introduction d'une charge fixe α et la dynamique des paiements cumulés est donnée par :

$$C_{i,j+1} + \alpha = \lambda_j \cdot (C_{i,j} + \alpha) \quad \text{pour } i=1, \dots, n \text{ et } j=1, \dots, n-1$$

Validation des hypothèses :

Ce modèle est efficace lorsque les points $(C_{i,j}, C_{i,j+1})$ sont plus ou moins alignés sur des droites concourantes au point pivot noté $(-\alpha, -\alpha)$. Ce dernier correspond à l'origine de la méthode de Chain Ladder c'est-à-dire le point $(0,0)$.

En d'autre terme, il s'agit de vérifier l'alignement des points $(C_{i,j} + \alpha, C_{i,j+1} + \alpha)$ sur une droite passant par l'origine.



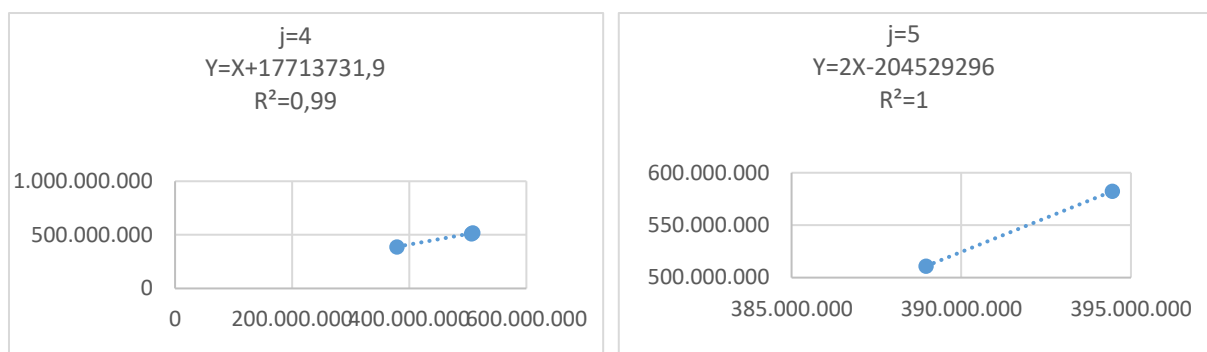


Figure 5 : représentation des points $(C_{i,j} + \alpha, C_{i,j+1} + \alpha)$

Nous remarquons l’alignement des couples $(C_{i,j} + \alpha, C_{i,j+1} + \alpha)$ sur une droite de régression à partir de la deuxième année de développement. De plus, nous avons une bonne qualité de l’ajustement car les coefficients de détermination obtenus sont tous élevés ($R_j > 0,9 \forall j$). Remarquons aussi que la droite de régression passe quasiment par l’origine pour presque toutes les années de développement.

Tout comme dans la méthode de Chain Ladder, l’hypothèse de la linéarité des couples $(C_{i,j} + \alpha, C_{i,j+1} + \alpha)$ est presque vérifiée.

Estimation des paramètres du modèle :

L’estimation des n paramètres du modèle se fait par moindres carrés :

$$(\hat{\alpha}, \hat{\lambda}_j) = \text{Armin} \left\{ \sum_{i=1}^{n-j} (C_{i,j+1} - \lambda_j * (C_{i,j} + \alpha) + \alpha)^2 \right\}$$

Analytiquement, ce problème n’a pas de solution. Nous avons donc fait recours à un algorithme itératif sous le logiciel R.

L’estimation des paramètres fournie les résultats suivants :

j	Lambda _j
0	1,60
1	1,08
2	1,04
3	1,02
4	1,02
5	1,09
6	1,07

Tableau 16 : Paramètres de London Pivot

Alpha= - 2 234 226

A partir de ces paramètres, nous pouvons remplir le triangle de règlements. Les résultats trouvés sont en bleu dans le tableau suivant :

	0	1	2	3	4	5	6	7
an sur 1	192 130	329 544	361 786	375 807	380 925	391 194	396 679	423 755
an sur 2	260 780	428 179	481 142	501 590	508 205	513 164	584 506	624 475
an sur 3	327 916	435 521	483 017	497 668	510 593	520 933	569 469	608 407
an sur 4	395 136	619 030	653 170	663 885	671 177	683 027	746 732	797 837
an sur 5	457 964	697 585	728 361	768 815	780 572	794 360	868 482	927 945
an sur 6	367 871	623 469	684 217	709 989	720 844	733 574	802 009	856 909
an sur 7	548 962	927 481	999 246	1 036 924	1 052 793	1 071 404	1 171 450	1 251 710
an sur 8	578 654	924 397	995 923	1 033 475	1 049 291	1 067 840	1 167 553	1 247 545

Tableau 17 : Table des règlements futurs à partir de la méthode de London Pivot

Nous nous attendons à une réserve totale plus faible que celle trouvée dans la méthode précédente (London Chain) d'autant plus que les règlements cumulés trouvés dans la dernière colonne du tableau sont moins élevés. On obtient :

i	PSAP
0	0
1	39 970
2	87 474
3	126 660
4	159 131
5	172 692
6	324 229
7	668 892
Total	1 579 048

Tableau 18 : Provisions par année de survenance de London Pivot

En totalisant ces provisions, nous obtenons comme prévu une réserve totale plus petite que la réserve London Chain. Cette réserve est alors :

$$PSAP_{\text{Totale}} = 1\,579\,048 \text{ FCFA}$$

Par la suite, nous intégrons le taux de liquidation dans les estimations des provisions par année de sinistre. La différence se ressent dès la première année de survenance où la provision estimée n'est plus nulle comme indiqué dans le tableau suivant:

i	Charges ultimes	PSAP
0	434 621	10 866
1	640 488	55 982
2	624 007	103 074
3	818 294	147 118
4	951 739	182 924
5	878 881	194 664
6	1 283 805	356 324
7	1 279 534	700 880
Total	6 911 368	1 751 832

Tableau 19 : Charges ultimes et Provisions London Pivot avec taux de liquidation

La réserve totale obtenue par la méthode de London Pivot sera donc :

$$PSAP_{Totale} = 1\,751\,832 \text{ FCFA}$$

Comparativement à la méthode de Chain Ladder, cette réserve est plus grande mais l'écart entre ces deux méthodes est relativement faible.

II.1.4. Méthode de Bornhuetter-Ferguson

Description de la méthode :

La méthode de Bornhuetter-Ferguson permet d'insérer un indicateur d'exposition qui est en général le montant des primes acquises. Elle a l'avantage d'assurer une meilleure stabilité des estimations. En effet, cette méthode repose sur une hypothèse exogène d'estimation préalable de la charge finale sur laquelle est appliquée un taux de liquidation. En procédant ainsi, les estimations récentes dépendent moins des anciens paiements comparativement à la méthode de Chain Ladder qui reflète une dépendance entre les années. La méthode de Bornhuetter-Ferguson s'adapte donc aux triangles dont les paiements sont instables.

Classiquement, on suppose qu'il existe μ_i et des facteurs de développement $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ avec $\alpha_n = 1$ tel que :

$$E(C_{i,1}) = \alpha_1 \mu_i$$

$$E(C_{i,j+k}/C_{i,1} \dots C_{i,j}) = C_{i,j} + [\alpha_{j+k} - \alpha_j] \mu_i$$

$$E(C_{i,j}) = \alpha_j \mu_i$$

On estime statistiquement α ($\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$) et $\hat{\mu}_i$ un estimateur de $E(C_{i,n})$. Connaissant ces deux estimations, nous déduisons la charge ultime par la formule :

$$\hat{C}_{i,n} = C_{i,j} + [1 - \hat{\alpha}_{j-i}] \hat{\mu}_i$$

A partir de la méthode Chain Ladder, Bornhuetter-Ferguson propose l'estimateur :

$$\hat{\alpha}_i = \prod_{k=j+1}^n \frac{1}{\hat{\lambda}_k}$$

En fin nous estimons $\hat{\mu}_i$ à partir du ratio de sinistralité (loss ratio) par année de survenance : $L_{i,j} = \frac{C_{i,j}}{P_i}$

Notons que : $C_{i,j}$ désigne les charges pour la dernière année obtenues par la méthode de Chain Ladder.

i	$C_{i,j}$	Primes acquises (PA)	Loss ratio
0	434 621	3 122 609	14%
1	640 413	3 687 749	17%
2	619 247	3 945 231	16%
3	812 418	4 508 625	18%
4	945 186	5 326 269	18%
5	872 339	5 863 622	15%
6	1 279 992	7 045 367	18%
7	1 271 347	7 396 695	17%

Tableau 20 : Loss ratio de Bornhuetter-Ferguson

Les ratios obtenus sont tous inférieurs à 100%, ce qui traduit une couverture totale des sinistres. De plus, nous remarquons que ces valeurs ne sont pas assez différentes. Pour la suite, nous considérons la valeur moyenne du Loss ratio : $\overline{L_{i,j}} = 17\%$.

Estimations des charges par année de survenance :

En supposant que les $C_{i,j}$ sont indépendants par année de survenance, on obtient μ_i l'estimateur de la charge ultime par année d'accident : $\mu_i = \overline{L_{i,j}} * PA$

i	μ_i
0	519 050
1	612 989
2	655 789
3	749 438
4	885 349
5	974 670
6	1 171 103
7	1 229 502

Tableau 21 : Estimateurs des charges ultimes de Bornhuetter-Ferguson

A partir des estimations précédentes, nous pouvons déterminer les charges ultimes qui serviront par la suite à estimer la réserve à constituer. Les résultats obtenus sont alors :

i	Charges ultimes
0	434 621
1	639 665
2	626 567
3	805 737
4	939 031
5	897 236
6	1 259 739
7	1 265 845

Tableau 22 : Charges ultimes de Bornhuetter-Ferguson

Pour calculer les provisions, on utilise :

$$\hat{R}_i = \hat{C}_{i,n} - C_{i,j} = [1 - \hat{\alpha}_{j-i}] \hat{\mu}_i \text{ et la réserve globale: } \hat{R} = \sum_{i=0}^{n-1} \hat{R}_i$$

Les résultats obtenus sont mentionnés dans le tableau suivant :

i	PSAP
0	10 866
1	55 159
2	105 634
3	134 560
4	170 216
5	213 019
6	332 258
7	687 191
Total	1 708 904

Tableau 23: Provisions par année de survenance par la méthode de Bornhuetter-Ferguson

La provision à constituer selon la méthode de Bornhuetter-Ferguson est :

$$PSAP_{\text{Totale}} = 1\,708\,904 \text{ FCFA}$$

Précisons que cette réserve prend en compte le taux de liquidation. Sans ce taux la provision obtenue par la méthode de Bornhuetter-Ferguson serait : 1 537 192 FCA

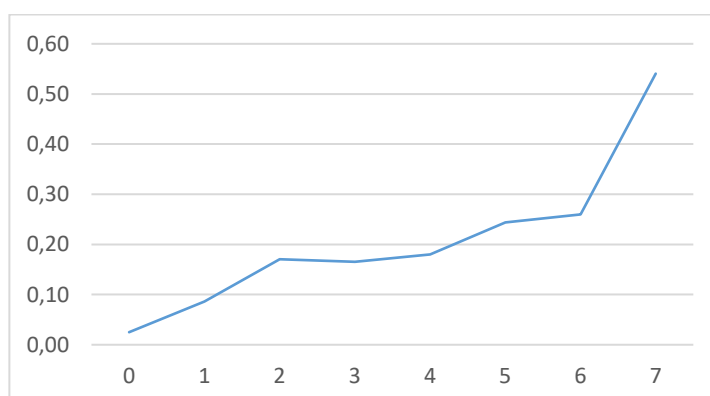
Validation de l'hypothèse fondamentale :

L'hypothèse fondamentale de cette méthode repose sur l'indépendance entre la provision à constituer et le dernier montant connu des règlements. Pour valider cette hypothèse, il suffit de vérifier si le rapport $\frac{PSAP}{C_{i,j}}$ reste constant par année de survenance.

i	PSAP	$C_{i,j}$	$\frac{PSAP}{C_{i,j}}$
0	10 866	434 621	0,02
1	55 159	640 413	0,09
2	105 634	619 247	0,17
3	134 560	812 418	0,17
4	170 216	945 186	0,18
5	213 019	872 339	0,24
6	332 258	1 279 992	0,26
7	687 191	1 271 347	0,54
Total	1 708 904	6 875 563	-

Tableau 24 : rapport entre la provision de Bornhuetter-Ferguson et les charges

A partir du tableau ci-dessus, on remarque que le rapport $\frac{PSAP}{C_{i,j}}$ est presque constant. En effet, les écarts entre les valeurs obtenues ne sont pas grands. On peut considérer que l'hypothèse fondamentale de Bornhuetter-Ferguson est presque vérifiée. Nous pouvons visualiser ces écarts sur la figure suivante :

Figure 6 : Evolution du rapport $\frac{PSAP}{C_{i,j}}$ de Bornhuetter-Ferguson

Avantages et limites de la méthode de Bornhuetter-Ferguson :

Contrairement aux autres méthodes, celle-ci permet d'incorporer de l'information extérieure et par conséquent ne s'attache pas uniquement aux informations fournies par les données. En introduisant des données exogènes, on remédie au fait que dans la méthode de Chain-Ladder, la charge ultime dépend totalement de la dernière position connue et donc la nullité de celle-ci entraînera celle de la charge ultime aussi.

Par ailleurs, ces données exogènes doivent être justes car les charges finales constituent l'un des facteurs clés du provisionnement.

II.1.5. Méthode de Cape Code

Description de la méthode :

La méthode de Cape Code consiste à réécrire :

$$C_{i,n} = C_{i,n-i} + \left(1 - \frac{C_{i,n-i}}{C_{i,n}}\right) \cdot C_{i,n} \quad \text{sous la forme} \quad C_{i,n} = C_{i,n-i} + \left(1 - \frac{C_{i,n-i}}{C_{i,n}}\right) \cdot LR_i \cdot P_i$$

Rappelons que LR_i est le Loss ratio de l'année i . De façon générale, on a :

$$C_{i,n} = C_{i,n-i} + (1 - \text{Cadence}_{n-i}) \cdot LR_i \cdot P_i$$

Notons que la cadence de paiement peut être estimée par la méthode de Chain Ladder. Il est aussi possible de proposer un même ratio cible pour plusieurs années de survenance.

Pour $i \in A$:

- $LR_A = \frac{\sum_{k \in A} C_{n,n-k}}{\sum_{k \in A} \text{Cadence}_{n-k} \cdot P_k}$
- les cadences de paiements : $\text{Cadence}_{i,j} = \frac{E(C_{i,j})}{E(C_{i,n})}$

Calcul des cadences de paiements :

Pour calculer les cadences de paiements par année de développement, nous utilisons : $\text{Cadence}_j = 1 - \frac{C_{i,n-i}}{C_{i,n}}$. Nous obtenons les résultats suivants :

j	Cadence _j
0	0
1	4%
2	16%
3	22%
4	25%
5	27%
6	33%
7	59%

Tableau 25: Cadence de paiement par année de développement

On remarque que les cadences de paiements augmentent d'une année à une autre et cette évolution est tout à fait normale. En effet, plus les années passent plus les règlements de sinistres sont davantage effectués jusqu'au règlement intégral qui correspond à la clôture de ces sinistres.

Charges ultimes :

Les charges ultimes de cette méthode correspondent à celles prédites par Chain Ladder:

i	Charges ultimes
0	434 621
1	640 413
2	619 247
3	812 418
4	945 186
5	872 339
6	1 279 992
7	1 271 347
Total	6 875 563

Tableau 26 : Charges ultimes de Cape Code

Déterminons le Loss ratio commun :

$$\forall i \in A, LR_A = \frac{\sum_{k \in A} C_{n,n-k}}{\sum_{k \in A} \text{Cadence}_{n-k} \cdot P_k} = 16,81\%$$

Nous déduisons en fin les réserves par année de survénance en utilisant :

$$R_i = C_{i,n} - C_{i,n-i} = (1 - \text{Cadence}_{n-i}) LR_i \cdot P_i$$

Nous obtenons les provisions suivantes :

i	PSAP
0	13 125
1	42 262
2	123 005
3	182 422
4	239 557
5	283 022
6	412 916
7	741 017
Total	2 037 325

Tableau 27 : Provisions par années de survénance de Cape Code

La réserve à constituer par Cape Code est :

$$PSAP_{\text{Totale}} = 2 037 325 \text{ FCFA}$$

Précisons que la réserve obtenue tient compte du taux de liquidation. En n'intégrant pas ce taux, la réserve de Cape Code serait :

$$PSAP_{\text{Totale}} = 1 913 267 \text{ FCFA}$$

En comparant ce résultat à la réserve obtenue par Bornhuetter-Ferguson, on constate qu'il est plus grand et donc plus prudent que la provision estimée par Bornhuetter-Ferguson. Par la suite, nous vérifions les hypothèses de cette méthode afin d'être précautionneux dans notre comparaison.

Validation des hypothèses :

A la différence de la méthode précédente, le modèle de Cape-Code repose sur deux hypothèses. La première correspond à l'hypothèse fondamentale de Bornhuetter-Ferguson et la seconde porte sur la constance des cadences de règlements.

H1 :

Les sinistres cumulés non réglés et les sinistres réglés sont indépendants.

Comme nous l'avons déjà indiqué, cette hypothèse consiste à vérifier si le rapport $\frac{PSAP}{C_{i,j}}$ est constant par année de survenance.

i	PSAP	$C_{i,j}$	$\frac{PSAP}{C_{i,j}}$
0	13 125	434 621	0,03
1	42 262	640 413	0,07
2	123 005	619 247	0,20
3	182 422	812 418	0,22
4	239 557	945 186	0,25
5	283 022	872 339	0,32
6	412 916	1 279 992	0,32
7	741 017	1 271 347	0,58
Total	2 037 325	6 875 563	-

Tableau 28 : rapport des provisions Cape-Code et des charges de la dernière année

Le rapport $\frac{PSAP}{C_{i,j}}$ est presque constant pour toutes les années de survenance car l'écart entre les valeurs est relativement faible. La première hypothèse de Cape Code est presque vérifiée et nous pouvons observer l'évolution de ce rapport sur la figure suivante :

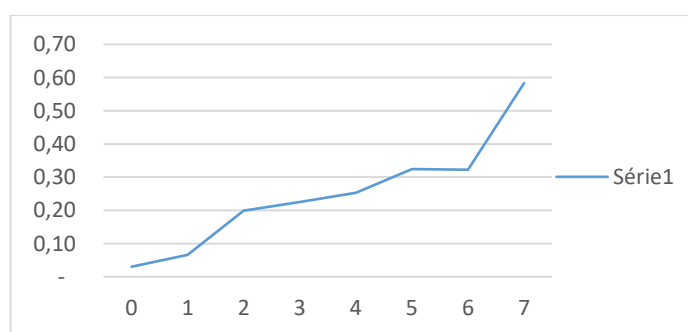


Figure 7 : Evolution du rapport $\frac{PSAP}{C_{i,j}}$ de Cape Code

H2 :

Cette hypothèse se traduit par l'indépendance des années d'origine au sein d'un même groupe. L'hypothèse H2 de Cape Code est vérifiée si les cadences de règlements restent constantes par année de survenance c'est-à-dire : $Cadence_{i,j}=Cadence_j$

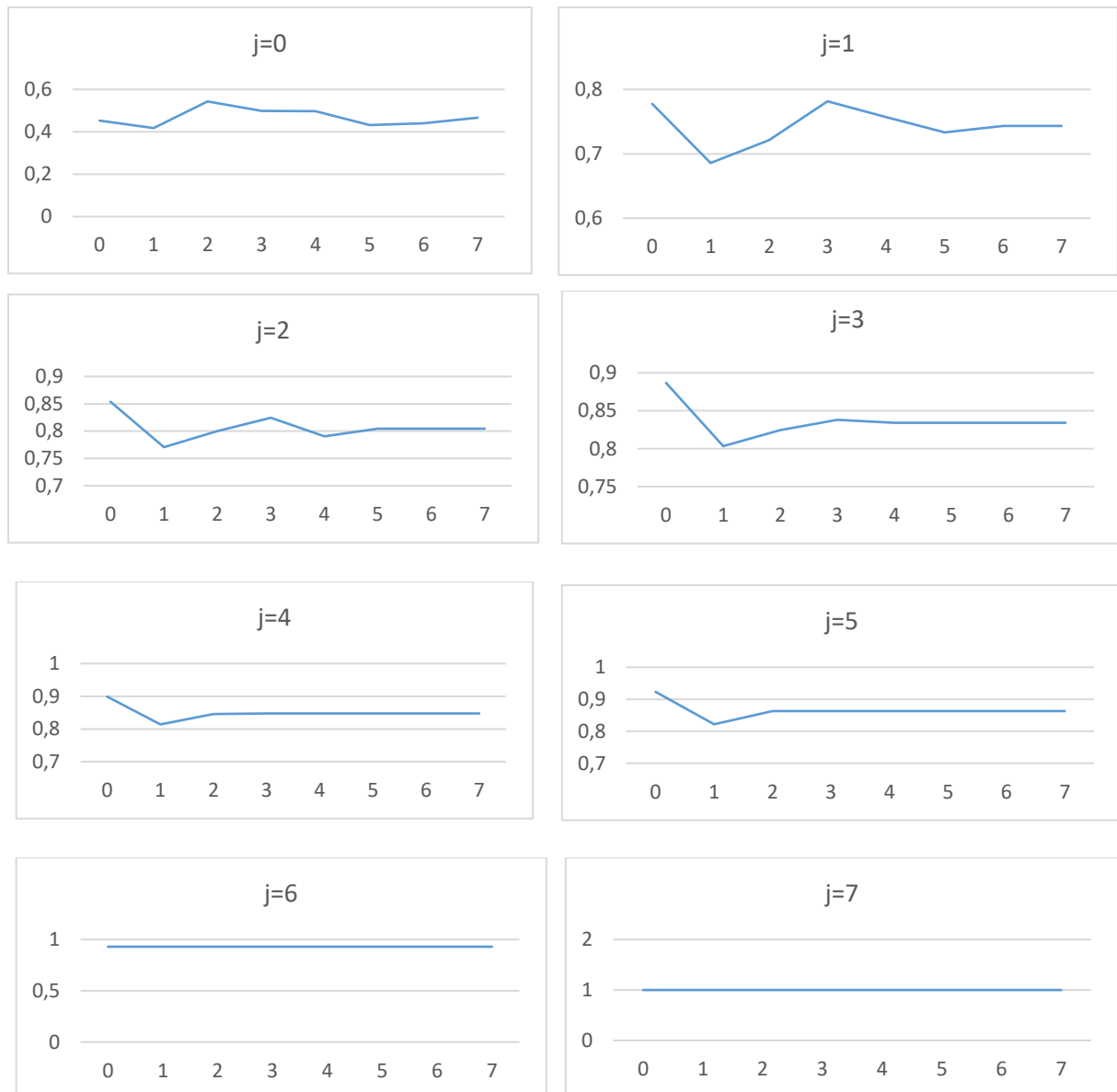


Figure 8 : Evolution des cadences de règlements par année de développement

On remarque que les cadences de règlements sont constantes pour les deux dernières années de règlements. Concernant les autres années, elles sont presque constantes $j=1$. Nous considérons par conséquent que cette hypothèse est presque vérifiée.

II.1.6. Conclusion

Malgré leur simplicité, les méthodes déterministes sont très sensibles à des variations de données et ne permettent pas d'estimer les erreurs de prédiction. C'est pourquoi nous faisons recours aux méthodes stochastiques qui permettent de mesurer l'incertitude liée aux réserves estimées.

II.2. Les méthodes stochastiques

Un modèle stochastique suppose que la variable à modéliser possède un élément aléatoire. Dans cette partie, nous présentons trois (3) autres modèles usuels à savoir :

Le modèle de Mack, les modèles GLM et le modèle Bootstrap qui permettent non seulement l'obtention des provisions mais aussi de déterminer le degré d'incertitude correspondant à la réserve. Ce qui peut s'avérer une information capitale pour les stratégies financières de la compagnie.

II.2.1. Mack

Le modèle de Mack (1993) est la méthode stochastique du modèle de Chain Ladder évoqué dans la première partie. Sous certaines hypothèses, nous obtenons à partir de ce modèle la même réserve trouvée par Chain Ladder.

Ces hypothèses sont les suivantes :

$$H_1 : \{C_{i,1}, \dots, C_{i,n}\}, \{C_{j,1}, \dots, C_{j,n}\}, \quad i \neq j \text{ sont indépendants;}$$

$$H_2 : E \left[\frac{C_{i,k+1}}{C_{i,1}}, \dots, C_{i,k} \right] = \lambda_k * C_{i,k},$$

$$H_3 : \text{Var} [C_{i,k+1} / C_{i,1}, \dots, C_{i,k}] = \sigma_k^2 * C_{i,k}$$

Avec $i=1 \dots n$ et $k=1 \dots n-1$

Validation des hypothèses :

H1 :

La validation de H1 peut se faire graphiquement en utilisant les résidus. Ces résidus ne sont autres que les différences entre les règlements connus à posteriori et leurs estimations. Ainsi, les résidus obtenus ne doivent pas être corrélés.

Un autre moyen plus connu est le test d'indépendance. Dans la suite, nous allons exécuter les étapes à effectuer pour la réalisation de ce test.

a) La première étape consiste à déterminer les facteurs de développement individuels : $\lambda_j = \frac{C_{i,j+1}}{C_{i,j}}$ et les facteurs médians $\forall i, j=1 \dots n$

	0	1	2	3	4	5	6
an sur 1	1,72	1,1	1,04	1,01	1,03	1,01	1,07
an sur 2	1,64	1,12	1,04	1,01	1,01	1,14	
an sur 3	1,33	1,11	1,03	1,03	1,02		
an sur 4	1,57	1,06	1,02	1,01			
an sur 5	1,52	1,04	1,06				
an sur 6	1,69	1,1					
an sur 7	1,69						
Facteur médian	1,64	1,1	1,04	1,01	1,02	1,075	1,07

Tableau 29 : facteurs de développement individuels et facteurs médians

b) On remplace dans l'étape suivante par 1 tous les facteurs de développement individuels supérieurs ou égaux à 1 et par 0 sinon. On obtient le triangle suivant :

	0	1	2	3	4	5	6
an sur 1	1	1	1	1	1	0	1
an sur 2	1	1	1	1	0	1	
an sur 3	0	1	0	1	1		
an sur 4	0	0	0	1			
an sur 5	0	0	1				
an sur 6	1	1					
an sur 7	1						

Tableau 30 : Identification et Remplacement des facteurs de développement

c) Pour chaque année de développement j , on détermine β_j et γ_j tels que :

β_j : Nombre d'occurrence de 0 pour l'année j

γ_j : Nombre d'occurrence de 1 pour l'année j

d) En fin, on définit une variable noté : $\theta_j = \min(\beta_j, \gamma_j)$.

D'après Mack, Cette variable suit asymptotiquement une loi binomiale de paramètres $n_j = \beta_j + \gamma_j$ et $p=0,5$.

L'espérance et la variance de cette variable s'écrivent :

$$E(\theta_j) = \frac{n_j}{2} - \left(\frac{(n_j-1)!}{(m_j)!(n_j-1-m_j)!} \right) \frac{n_j}{2^{n_j}}$$

$$V(\theta_j) = n_j \left(\frac{n_j-1}{4} \right) - \left(\frac{(n_j-1)!}{(m_j)!(n_j-1-m_j)!} \right) n_j \left(\frac{n_j-1}{2^{n_j}} \right) + E(\theta_j) + E(\theta_j)^2$$

A noter que : $m_j = \frac{n_j-1}{2}$

Les résultats obtenus sont regroupés dans le tableau suivant :

j	β_j	γ_j	θ_j	n_j	m_j	$E(\theta_j)$	$V(\theta_j)$
0	3	4	3	7	3	3,39	1,74
1	2	4	2	6	2,5	2,81	1,46
2	2	3	2	5	2	2,19	1,15
3	0	4	0	4	1,5	1,5	0,75
4	1	2	1	3	1	0,75	0,1875
5	1	1	1	2	0,5	0	-0,5

Tableau 31 : les paramètres de l'hypothèse H1 de Mack

Nous ne testons pas les θ_j de manière séparée. On considère plutôt une variable θ tel que :

$$\theta = \sum_{j=2}^{n-1} \theta_j = 9$$

Avec : $E(\theta) = \sum_{j=2}^{n-1} E(\theta_j) = 10,64$

$$V(\theta) = \sum_{j=2}^{n-1} V(\theta_j) = 4,79$$

On suppose que θ suit une distribution normale, on peut écrire l'intervalle de confiance de θ comme suit :

$$IC(\theta) = [E(\theta) \pm \sqrt{V(\theta)}] = [8,45 ; 12,83]$$

En se plaçant à un niveau de confiance de 95%, nous remarquons que $\theta=9 \in IC$ donc nous ne rejetons pas l'hypothèse d'indépendance des années d'origine.

H2 :

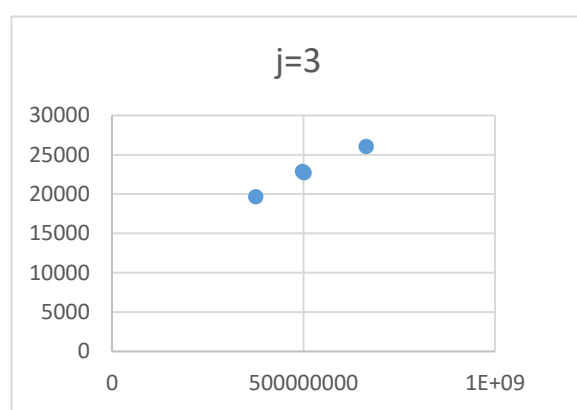
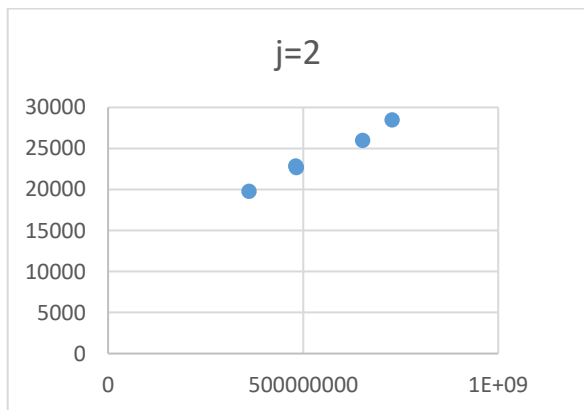
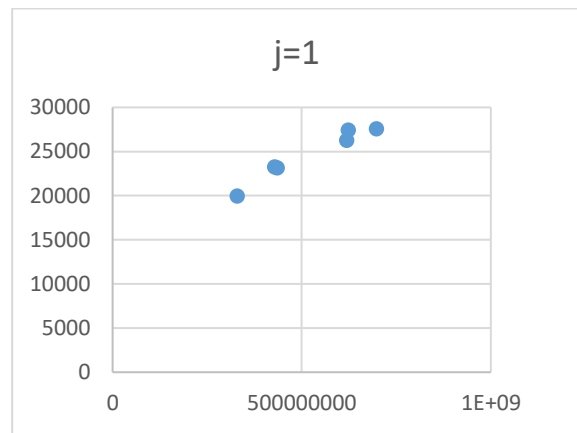
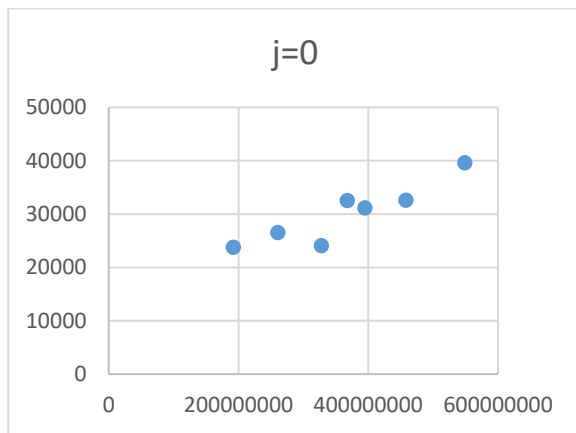
L'hypothèse H2 fait référence à l'alignement des points $(C_{i,j}, C_{i,j+1})_{i=0, \dots, n-j-1}$ sur une droite passant par l'origine. La même hypothèse a été vérifiée dans le modèle de Chain Ladder. Rappelons qu'elle était presque vérifiée pour toutes les années de développement.

H3 :

Pour cette dernière hypothèse, il suffit d'observer si les points $(C_{i,j}, r_{i,j})_{i=0, \dots, n-j-1}$ suivent une tendance spécifique. Si ce n'est pas le cas, nous diront qu'elle est vérifiée.

Ces résidus sont déterminés par la formule suivante : $r_{i,j} = \frac{C_{i,j+1} - \lambda_j C_{i,j}}{\sqrt{C_{i,j}}}$

Représentons graphiquement les couples $(C_{i,j}, r_{i,j})_{i=0, \dots, n-j-1}$:



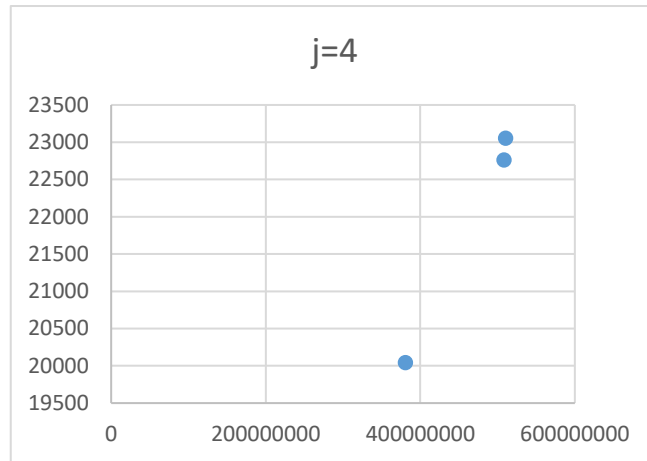


Figure 9 : Représentation des points $(C_{i,j}, r_{i,j})_{i=0,..,n-j-1}$

Des graphes ci-dessus, on remarque qu'aucune tendance spécifique n'est observée et ceci pour toutes les années de développement. Par conséquent l'hypothèse H3 vérifiée.

Calcul des provisions par année de survénance :

Rappelons que le modèle de Mack est la méthode stochastique relative à la méthode de Chain Ladder. Les réserves obtenues sont identiques d'où :

$$PSAP_{Totale} = 1\,716\,026 \text{ FCFA}$$

Estimation des paramètres à l'incertitude sur le montant des provisions :

Dans cette partie, nous nous intéressons à l'erreur carrée moyenne $Mse(\hat{C}_{i,n})$ et l'erreur quadratique moyenne $Mse(\hat{R}_1)$ en conditionnant par rapport aux données passées :

$$Mse(\hat{C}_{i,n}) = E [(\hat{C}_{i,n} - C_{i,n})^2 / D]$$

$$Mse(\hat{R}_1) = E [(\hat{R}_1 - R_1)^2 / C_{i,j} : i + j \leq n + 1]$$

Où : $D = \{C_{i,j} / i + j \leq n + 1\}$ l'ensemble des variables observables.

$$\hat{R}_1 = \hat{C}_{i,n} - C_{i,n-i+1} \quad \text{et} \quad \hat{R}_1 - R_1 = \hat{C}_{i,n} - C_{i,n}$$

$$Mse(\hat{R}_{i,n}) = Mse(\hat{C}_{i,n})$$

Mack propose d'estimer l'erreur quadratique moyenne sous les hypothèses précédentes par :

$$Mse(\hat{R}_1) = \hat{C}_1^2 \cdot \sum_{k=n-i+1}^{n-1} \frac{\sigma_k^2}{\lambda_k^2} \left(\frac{1}{\hat{C}_{i,k}} + \frac{1}{\sum_{j=1}^{n-k} C_{j,k}} \right) \quad \text{et l'estimateur sans biais de } \sigma_k^2$$

s'exprime par la relation :

$$\sigma_k^2 = \frac{1}{n-k-1} \sum_{i=1}^{n-k} C_{i,k} \left(\frac{C_{i,k+1}}{C_{i,k}} - \hat{\lambda}_k \right)^2 \quad \text{Avec } k=1, \dots, n-2$$

$$\hat{\sigma}_{n-1}^2 = \min \left(\frac{\hat{\sigma}_{n-2}^4}{\hat{\sigma}_{n-3}^2}, \min(\hat{\sigma}_{n-3}^2, \hat{\sigma}_{n-2}^2) \right) : \text{estimateur sans biais de } \sigma_k^2$$

En calculant les estimateurs sans biais de σ_k^2 , nous obtenons les résultats suivants :

j	sigma _j ($\hat{\sigma}_{n-1}^2$)
0	3574,145
1	14024,620
2	7582,975
3	14364,306
4	13360,142
5	18434,104
6	13360,142

Tableau 32 : Estimateurs sans biais de σ_k^2

A partir de ces estimateurs nous déduisons ci-dessous l'erreur type de Mack :

$$\widehat{Se}(\hat{R}_i) = \sqrt{\text{MSEP}(\hat{R}_i)}$$

L'erreur type de la réserve totale est : 373 473 853.

Cette dernière nous permet d'exprimer l'erreur standard relative c'est-à-dire l'écart-type rapporté au montant total de la provision : $\frac{\sqrt{\text{MSEP}(\hat{R})}}{\hat{R}} = 24,18\%$

Avec une erreur standard de 24,18%, la méthode de Chain Ladder nous donne une estimation moyenne de la réserve à constituer.

Erreur type et Intervalles de confiance :

i	Mack S.e.10 ³
0	0
1	6 990
2	57 400
3	69 800
4	78 100
5	74 800
6	105 000
7	138 000

Tableau 33 : Erreur type de Mack

Pour construire les intervalles de confiance des réserves estimées à partir du modèle de Mack, nous supposons une hypothèse paramétrique sur la distribution des R_i . Ainsi, nous choisirons la loi normale si un nombre suffisant de données est disponible.

A partir du modèle de Mack, on peut estimer la moyenne de R_i ainsi que l'écart type exprimé par l'expression : $\widehat{se}(\widehat{R}_1) = \sqrt{m\widehat{se}(\widehat{R}_1)}$

On établit donc un intervalle de confiance à 95% : $[\widehat{R} \pm 1,96 \cdot \widehat{se}(\widehat{R})]$

$$IC(\widehat{R}) = [812\ 128 ; 2\ 276\ 146]$$

NB : Il est possible que la distribution normale mène à une borne inférieure négative. Pour remédier à ce problème, on fait recours à la distribution Log Normale qui constitue une bonne alternative.

$R_i \sim \text{LogN}(\mu_i, \sigma_i)$ tel que :

$$\exp(\mu_i + \frac{\sigma_i^2}{2}) = \widehat{R}_1 \Rightarrow \mu_i = \ln(\widehat{R}_1) - \frac{\sigma_i^2}{2}$$

$\exp(2\mu_i + \sigma_i^2) * \exp(\sigma_i^2 - 1) = (\widehat{se}(\widehat{R}_1))^2 \Rightarrow \sigma_i^2 = \ln((\frac{\widehat{se}(\widehat{R}_1)}{\widehat{R}_1})^2) + 1$ d'où l'intervalle de confiance à 95% :

$$IC(\widehat{R}_1) = [\widehat{R}_1 \exp(-\frac{\sigma_i^2}{2} - 1,96\sigma_i), \widehat{R}_1 \exp(-\frac{\sigma_i^2}{2} + 1,96\sigma_i)]$$

II.2.2. Modélisation GLM

La modélisation GLM consiste à chercher une loi paramétrique suivie par les règlements. Nous supposons dans l'application de ce modèle l'indépendance des paiements annuels non cumulés $Y_{i,j}$ ainsi que leur appartenance à la famille exponentielle.

Composition du modèle :

Les modèles GLM sont formés de trois composantes principales dont : une composante aléatoire, une composante systématique et une fonction de lien notée g .

La composante aléatoire :

Elle est représentée par les paiements non cumulés $Y_{i,j}$, $0 \leq i, j \leq n-1$.

La densité associée à ces paiements est :

$$f(Y_{i,j} / \theta_{i,j}; \Phi) = \exp\left(\frac{Y_{i,j} * \theta_{i,j} - b(\theta_{i,j})}{\omega_{i,j} \Phi}\right) + c(Y_{i,j}; \Phi)$$

$\theta_{i,j}$: Un paramètre réel appelé paramètre naturel

Φ : Paramètre de dispersion

$\omega_{i,j}$: Une pondération donnée

b et c : des fonctions spécifiques de la distribution avec $b \in C^2$ à valeurs dans R et c à valeurs dans R^2 .

Exemples de familles exponentielles :

Distribution	$\theta(\mu)$	$b(\theta)$	$a(\varphi_0)$
Normale	μ	$\frac{\theta^2}{2}$	σ^2
Poisson	$\log\mu$	e^θ	1
Gamma	$\frac{-1}{\mu}$	$-\log(-\theta)$	$\frac{1}{\vartheta}$

Tableau 34 : Exemples de familles exponentielles

On exprime l'espérance et la variance par les formules :

$$E(Y_{i,j}) = b'(\theta_{i,j}) \quad \text{et} \quad \text{Var}(Y_{i,j}) = b''(\theta_{i,j}) \cdot \frac{\Phi}{\omega_{i,j}}$$

La composante systématique :

Dans le cas du provisionnement, cette composante s'écrit :

$$\eta_{i,j} = \mu + \beta_j + \alpha_i$$

β_j : Paramètre lié à la $j^{\text{ème}}$ année de développement.

α_i : Paramètre lié à la $i^{\text{ème}}$ année de survenance.

μ : la moyenne générale.

$(\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1})$ et $(\beta_0, \dots, \beta_{n-1})$ sont respectivement les effets lignes et colonnes du modèle à estimer.

Fonction de lien :

La fonction de lien comme son nom l'indique est celle qui fait le lien entre la composante aléatoire et la composante systématique.

$$g(\mu_{i,j}) = \eta_{i,j}$$

Après avoir défini ces trois composantes, nous écrivons :

$$\begin{cases} \mu_{i,j} = g^{-1}(\eta_{i,j}) \\ E(Y_{i,j}) = \mu_{i,j} \\ V(Y_{i,j}) = \Phi V(\mu_{i,j}) \end{cases}$$

Le choix de la fonction de lien n'est pas arbitraire. En effet, la fonction choisie doit nous assurer que les valeurs obtenues par le modèle sont de même nature que les valeurs d'origine.

Exemples de fonction de lien :

Nom du lien	Fonction de lien
Lien Identité	$g(\mu) = \mu$
Lien log	$g(\mu) = \ln(\mu)$
Lien cloglog	$g(\mu) = \ln(-\ln(1 - \mu))$
Lien logit	$g(\mu) = \ln\left(\frac{\mu}{1 - \mu}\right)$
Lien probit	$g(\mu) = \Phi(\mu)$ Φ fonction inverse de la fonction de répartition d'une loi Normale $\mathcal{N}(0, 1)$
Lien réciproque	$g(\mu) = -1/\mu$
Lien puissance	$g(\mu) = \mu^\gamma$ avec $\gamma \neq 0$ $g(\mu) = \ln(\mu)$ avec $\gamma = 0$

Validation du modèle par examen des résidus :

Nous pouvons définir trois types de résidus et ceci pour chaque cellule du triangle supérieur tel que $i + j < n$:

- ✓ Les résidus bruts qui sont adaptés en pratique : $r_{i,j} = Y_{i,j} - \hat{\mu}_{ij}$
- ✓ Les résidus non standardisés de Pearson : $r_{ij}^p = \frac{Y_{i,j} - \hat{\mu}_{ij}}{\sqrt{V(\hat{\mu}_{ij})}}$
- ✓ Les résidus de la déviance :

$$\begin{cases} r_{ij}^d = \text{sgn}(Y_{i,j} - \hat{\mu}_{ij}) / \sqrt{d_{i,j}} \\ d_{i,j} = 2Y_{i,j}(\check{\theta}_{i,j} - \hat{\theta}_{i,j}) - [b(\check{\theta}_{i,j}) - b(\hat{\theta}_{i,j})] \end{cases}$$

Où : $\check{\theta}_{i,j} = b^{-1}(Y_{i,j})$ et $\hat{\theta}_{i,j} = b^{-1}(\hat{\mu}_{ij})$

Pour obtenir la qualité de l'ajustement, nous pouvons utiliser les indicateurs suivants :

La statistique de Pearson :

$$\chi^2 = \sum_{i,j=0}^n \frac{(Y_{i,j} - \hat{\mu}_{ij})^2}{V(\hat{\mu}_{ij})} \quad i + j \leq n$$

Cette statistique suit une loi de Khi^2 à $n-p$ degrés de liberté; ce qui fournit la qualité de l'ajustement. L'hypothèse nulle du test est le modèle à $n-p$ degrés de liberté est adéquat.

La deviance:

$$D = 2 \cdot \sum_{i,j=0}^n Y_{i,j}(\check{\theta}_{i,j} - \hat{\theta}_{i,j}) - [b(\check{\theta}_{i,j}) - b(\hat{\theta}_{i,j})] \quad i + j \leq n$$

Plus cette déviance est fiable plus l'ajustement du modèle est de bonne qualité.

Risque d'estimation et de prédiction :

Pour estimer la matrice de variance covariance $\hat{\Sigma}_{\hat{R}}$, on utilise la méthode delta. L'erreur d'estimation est alors donnée par la relation :

$$\hat{\sigma}_{\hat{R}} = \sqrt{\sum_{i,j} \hat{\Sigma}_{\hat{R}_{i,j}}}$$

$$V(\hat{R}) = \hat{\Phi} \cdot \sum_{i+j > n} \cdot V(\hat{\mu}_{ij}) \quad \text{Avec} \quad \hat{\Phi} = \frac{1}{N-p} \sum_{i+j < n} \frac{(Y_{i,j} - \hat{\mu}_{ij})^2}{V(\hat{\mu}_{ij})}$$

N : désigne le nombre d'éléments et p le nombre de paramètres

D'où l'erreur de prédiction :

$$\widehat{Sep}_{\widehat{R}} = \sqrt{V(\widehat{R}) + \widehat{\sigma}_{\widehat{R}}^2}$$

Application au triangle de règlements Auto :

Rappelons que le modèle Gln est appliqué au triangle initial (voir annexe II). Les i et j années de développement et de survenance sont considérées comme des variables explicatives. Ainsi les règlements non cumulés, les années de développement et de survenance représentent la base de données utilisée pour l'application de ce modèle.

règlement	i	j
192 130	1	1
260 780	2	1
327 916	3	1
395 136	4	1
457 964	5	1
367 871	6	1
548 962	7	1
578 654	8	1
137 414	1	2
167 399	2	2
107 605	3	2
223 894	4	2
239 622	5	2
255 598	6	2
378 519	7	2

Tableau 35 : extrait de la base de données utilisée pour la modélisation GLM

Les lois à utiliser pour cette modélisation étant de la famille exponentielle, nous faisons usage dans premier temps de la régression poissonnienne de Hachemeister et Stanard et par la suite des modèles gamma et log-normal.

II.2.2.1 Modèle de poisson de Hachemeister et Stanard

Estimation des réserves :

Les règlements futurs obtenus par année de survenance à partir de la régression poissonnienne de Hachemeister et Stanard sont donnés par la table suivante:

	0	1	2	3	4	5	6	7
an sur 1	192 130	137 414	32 242	14 021	5 119	10 268	5 485	27 076
an sur 2	260 780	167 399	52 963	20 448	6 615	4 959	71 342	342 563
an sur 3	327 916	107 605	47 496	14 651	12 925	10 340	76 477	75 961
an sur 4	395 136	223 894	34 140	10 715	7 291	25 344	37 188	36 937
an sur 5	457 964	239 622	30 775	40 454	12 047	11 119	16 315	16 205
an sur 6	367 871	255 598	60 747	12 259	14 263	13 164	19 315	19 185
an sur 7	548 962	378 519	44 254	58 059	67 547	62 341	91 474	90 856

Tableau 36 : Règlements futurs par la régression poissonnienne

La réserve correspond à la somme des paiements prédits (la partie en bleue du tableau). Nous obtenons le même montant trouvé dans la méthode de Chain Ladder :

$$PSAP_{Totale} = 1\,544\,137 \text{ FCFA}$$

Avec le taux de liquidation de cette branche, on obtient la réserve suivante :

$$PSAP_{Totale} = 1\,716\,026 \text{ FCFA}$$

Ces résultats obtenus sont rassurants car Hachemeister et Stanard ont effectivement montré que la régression poissonnienne sur les règlements non cumulés conduit à une réserve de Chain Ladder.

Incertitude lié au modèle de poisson :

Pour calculer les erreurs de prédictions liées à ce modèle, nous utilisons la méthode delta.

$$\text{Rappel : } \begin{cases} \mu_{i,j} = g^{-1}(\eta_{i,j}) \\ E(Y_{i,j}) = \mu_{i,j} \\ V(Y_{i,j}) = \phi V(\mu_{i,j}) \end{cases}$$

D'après la méthode Delta, on a :

$$V(\hat{Y}_{i,j}) \approx \left| \frac{\partial \mu_{i,j}}{\partial \eta_{i,j}} \right|^2 \cdot V(\hat{\eta}_{i,j})$$

Avec un lien logarithmique, la formule précédente se simplifie et on obtient :

$$\frac{\partial \mu_{i,j}}{\partial \eta_{i,j}} = \mu_{i,j}$$

Pour une loi de poisson, on a l'expression suivante pour la partie inférieure du triangle :

$$E(|Y_{i,j} - \hat{Y}_{i,j}|^2) \approx \hat{\phi} \cdot \hat{\mu}_{i,j} + \hat{\mu}_{i,j}^2 \cdot V(\hat{\eta}_{i,j})$$

$$\text{Cov}(\hat{Y}_{i,j}, \hat{Y}_{k,l}) \approx \hat{\mu}_{i,j} \cdot \hat{\mu}_{k,l} \cdot \widehat{\text{Cov}}(\hat{\eta}_{i,j}, \hat{\eta}_{k,l})$$

Sachant que le montant de provision est la somme des paiements futurs c'est-à-dire

$$\hat{R} = \sum_{i+j > n} \hat{Y}_{i,j}, \text{ on a :}$$

$$E(|R - \hat{R}|^2) \approx (\sum_{i+j > n} \hat{\phi} \cdot \hat{\mu}_{i,j}) + \hat{\mu}' \cdot V(\hat{\eta}) \cdot \hat{\mu}$$

$$\widehat{Sep}_{\widehat{R}} = \sqrt{E(|R - \widehat{R}|^2)}$$

\widehat{R} (en milliers)	Sep	$\frac{\sqrt{E(R - \widehat{R} ^2)}}{\widehat{R}}$	Borne inf	Borne sup
1 544 137	285 208 764	18%	985 128	2 103 146

Tableau37: Reserve et risque de prédiction par le modèle de poisson

Bien que le montant de provision soit le même que dans la méthode de Mack, la régression poissonnienne nous donne une erreur standard relative plus faible 18%.

Estimations des paramètres :

Le tableau des paramètres estimés montre que toutes les P-values sont inférieures à 5% (voir annexe III). Ainsi les années de survenance et de développement ont un effet significatif sur les incréments.

Ajustement du modèle :

Pour mesurer la qualité de l'ajustement, nous allons appliquer le test de Pearson sur les résidus.

```
> X<-sum(residuals(poi,type="pearson")^2)
```

```
> X
```

```
[1] 135296623
```

```
> ddl<-df.residual(poi)
```

```
> p_value<-pchisq(X,ddl)
```

```
> 1-p_value
```

```
[1] 0
```

On a une P-value inférieure à 5% d'où le rejet de l'hypothèse nulle selon laquelle le modèle ajuste nos données.

II.2.2.2. Modèle Log-Normal

Estimation des réserves :

Le tableau suivant contient les règlements futurs obtenus par la régression Log-normale :

	0	1	2	3	4	5	6	7
an sur 1	192 130	137 414	32 242	14 021	5 119	10 268	5 485	27 076
an sur 2	260 780	167 399	52 963	20 448	6 615	4 959	71 342	374 481
an sur 3	327 916	107 605	47 496	14 651	12 925	10 340	88 420	85 289
an sur 4	395 136	223 894	34 140	10 715	7 291	28 317	40 241	38 816
an sur 5	457 964	239 622	30 775	40 454	12 769	12 945	18 397	17 745
an sur 6	367 871	255 598	60 747	9 529	13 896	14 088	20 020	19 312
an sur 7	548 962	378 519	27 089	24 956	36 395	36 896	52 433	50 577
an sur 8	578 654	49 824	47 510	43 769	63 831	64 710	91 960	88 704

Tableau 38 : Règlements futurs par la régression Log-normale

Les provisions annuelles obtenues par cette régression sont alors :

i	PSAP
0	0
1	374 481
2	173 708
3	107 373
4	61 856
5	76 845
6	228 347
7	450 307
Total	1 472 919

Tableau 39: Provisions annuelles par la régression Log-normale

D'où la réserve totale :

$$PSAP_{\text{Totale}} = 1\,472\,919 \text{ FCFA}$$

En tenant compte du taux de liquidation, quelques changements sont observés dans les provisions annuelles. On trouve les résultats suivants :

i	PSAP
0	10 866
1	399 070
2	191 520
3	127 336
4	83 156
5	96 360
6	257 984
7	476 691
Total	1 642 983

Tableau 40 : Provisions annuelles avec taux de liquidation par le modèle log-normal

On obtient une réserve inférieure à la celle de la régression de poisson. Sa valeur est $PSAP_{Totale} = 1\,642\,983$ FCFA

Estimations des paramètres :

L'estimation des paramètres (voir annexe IV) montre que les trois premières années et la dernière année de survenance ne sont pas significatives au seuil de 5% tandis que pour toutes les années de développement, les P-values sont inférieures à 5%. Les années de développement ont donc un effet significatif sur les incréments.

Qualité d'ajustement du modèle :

En effectuant le test de Pearson sur les résidus, on obtient :

```
> X1<-sum(residuals(reg,type="pearson") ^2)
```

```
> ddl1<-df.residual(reg)
```

```
> a<-pchisq(X1,ddl1)
```

```
> 1-a
```

```
[1] 0.9999075
```

Avec une Pvalue de 0,99 (supérieure à 5%), on ne rejette pas l'hypothèse nulle selon laquelle le modèle ajuste nos données.

II.2.2.3. Modèle Gamma

Les règlements futurs estimés par le modèle gamma :

	0	1	2	3	4	5	6	7
an sur 1	192 130	137 414	32 242	14 021	5 119	10 268	5 485	27 076
an sur 2	260 780	167 399	52 963	20 448	6 615	4 959	71 342	338 750
an sur 3	327 916	107 605	47 496	14 651	12 925	10 340	80 504	77 929
an sur 4	395 136	223 894	34 140	10 715	7 291	25 838	36 905	35 724
an sur 5	457 964	239 622	30 775	40 454	12 262	11 723	16 744	16 208
an sur 6	367 871	255 598	60 747	9 655	14 426	13 792	19 699	19 069
an sur 7	548 962	378 519	39 287	36 797	54 979	52 562	75 074	72 673
an sur 8	578 654	42 107	41 422	38 797	57 966	55 418	79 154	76 622

Tableau 41 : Règlements futurs estimés par le modèle Gamma

Estimation des réserves :

Les estimations précédentes nous permettent de trouver les provisions suivantes par année de survenance :

i	PSAP
0	0
1	338 750
2	158 432
3	98 467
4	56 936
5	76 641
6	331 372
7	391 485
Total	1 452 084

Tableau 42 : Provisions annuelles du modèle Gamma

On obtient une réserve proche du montant obtenu par la régression log-normale

$$PSAP_{\text{Totale}} = 1\,452\,084\,176 \text{ FCFA}$$

Comme précédemment, nous intégrons le taux de liquidation et les provisions annuelles deviennent :

i	PSAP
0	10 866
1	362 423
2	175 852
3	118 202
4	78 109
5	96 150
6	363 650
7	416 361
Total	1 621 613

Tableau 43 : Provisions annuelles du modèle Gamma avec taux de liquidation

La provision totale pour ce modèle est finalement :

$$PSAP_{\text{Totale}} = 1\,621\,613 \text{ FCFA}$$

Estimations des paramètres :

Les trois premières années de survenance ne sont pas significatives compte tenu des P-values supérieures à 5%. Les autres années y compris les années de développement sont toutes significatives (voir annexe V).

Qualité d'ajustement du modèle :

Le test de Pearson sur les résidus nous donne :

```
> X2<-sum(residuals(gam,type="pearson") ^2)
```

```
> X2
```

```
[1] 3.435137
```

```
> ddl2<-df.residual(gam)
```

```
> b<-pchisq(X2,ddl2)
```

```
> 1-b
```

```
[1] 0.9999948
```

la Pvalue obtenue est supérieure à 5%. On ne rejette pas l'hypothèse nulle selon laquelle le modèle ajuste nos données.

II.2.2.4. Choix du modèle

Nous avons vu que les modèles log-normale et gamma sont adéquats à nos données et fournissent des résultats différents même si l'écart entre ces derniers n'est pas grand. Nous allons donc utiliser le critère AIC pour choisir le meilleur parmi ces deux modèles.

$$AIC = -2 \cdot \text{Log}(\tilde{L}) + 2 \cdot K$$

Où : \tilde{L} est la vraisemblance maximisée du modèle et k le nombre de paramètres.

```
> AIC(reg,gam)
```

```
df    AIC
```

reg 16 61.55025

gam 16 1343.00375

Nous retenons le modèle log-normale qui a le critère AIC le plus petit.

Risque d'estimation et de prédiction des modèles log-normal:

Modèle	Provision (en milliers)	Sep	Sep/R
Log-normal	1 642 982	374 329 795	23%

Tableau 44 : Estimation de l'erreur de modèle log-normal

II.2.3 Le modèle de Bootstrap

Inventé par Efron en 1979, le modèle de bootstrap consiste à effectuer un ré échantillonnage avec remise en utilisant des simulations de Monte-Carlo. Il permet d'estimer en particulier la variabilité d'un paramètre. Elle est beaucoup utilisée en assurance non vie du fait de sa simplicité. En la couplant avec les modèles GLM, on peut déterminer une estimation de la distribution des provisions.

Hypothèse :

Le modèle de Bootstrap suppose que les éléments de l'échantillon de départ sont indépendants et identiquement distribués (i i d). Le problème qui se pose est le suivant : les paiements non cumulés ($Y_{i,j}$) ne sont pas en général identiquement distribués. C'est pourquoi, on fait recours aux résidus du modèle et en particulier les résidus de Pearson.

Pour corriger les biais dans la comparaison des estimations analytiques et bootstrap d'erreur de prédiction, il est conseillé d'ajuster les résidus en intégrant le nombre de paramètres de régression dans l'erreur bootstrap de prédiction. Les résidus ajustés s'expriment par la formule :

$$r_{ij}^{aj} = \sqrt{\frac{N}{N-p}} r_{ij}^p$$
 où N et p sont respectivement la taille de l'échantillon et le nombre de paramètres de régression.

On utilisera lors de l'application de cette méthode le modèle Log Poisson qui donne les mêmes résultats fournis par la méthode de Chain Ladder.

Description de la méthode du bootstrap :

La méthode du bootstrap dans le cadre de la modélisation GLM se fait en trois étapes :

- (i) Estimation des valeurs prévues $\hat{\mu}_{ij}$.
- (ii) Calcul des résidus de Pearson du modèle : $r_{ij}^p = \frac{Y_{i,j} - \hat{\mu}_{ij}}{\sqrt{V(\hat{\mu}_{ij})}}$
- (iii) Pour $b=1 \dots B$ ($B=5000$ ou 10000) :
 - Ré échantillonnage avec remise des résidus
 - On obtient ensuite un nouveau triangle appelé pseudo-triangle à partir de la relation : $(Y_{i,j})^b = (r_{ij}^p)^b \sqrt{V(\hat{\mu}_{ij})} + \hat{\mu}_{ij}$
 - Pour terminer, on utilise une nouvelle modélisation GLM pour estimer les provisions \hat{R}^b .

A partir de B échantillon des provisions \hat{R}^b , nous pouvons estimer la moyenne, la variance ainsi que l'erreur de prédiction de la réserve totale. Pour exprimer ces grandeurs, on utilisera les formules suivantes :

$$E^B(\hat{R}) = \frac{1}{B} \sum_{b=1}^B \hat{R}^b$$

$$\text{Var}^B(\hat{R}) = \frac{1}{B-1} \sum_{b=1}^B (\hat{R}^b - E^B(\hat{R}))^2$$

$$\hat{V}(R) = \hat{\Phi} \sum_{i+j > n} V(\hat{\mu}_{ij}) \text{ et l'erreur de prédiction : } \text{sep} = \sqrt{\hat{V}(R) + \text{Var}^B(\hat{R})}$$

Application du modèle de bootstrap :

Pour quantifier l'erreur d'estimation, il est nécessaire de simuler de faux triangles et d'observer par la suite la distribution des montants de provisions obtenus par chaque triangle (en utilisant soit la méthode de Chain Ladder ou la régression de poisson).

Nous avons choisi d'utiliser la régression de poisson développé dans la modélisation GLM. Cependant, nous avons montré que cette dernière n'était pas adéquate à nos données et de plus il serait pertinent de générer des lois avec davantage de variance telle que la loi gamma.

En posant : $E(Y) = \lambda$ et $V(Y) = \phi\lambda$, la loi Gamma $G(\alpha, \beta)$ vérifie : $\alpha\beta = \lambda$ et $\alpha\beta^2 = \lambda\phi$.

Calcul des résidus de Pearson :

En utilisant le modèle de poisson, nous estimons les valeurs prédites $\hat{\mu}_{ij}$ pour la partie supérieure du triangle et calculons ensuite les résidus de Pearson par la formule :

$$r_{ij}^p = \frac{Y_{ij} - \hat{\mu}_{ij}}{\sqrt{V(\hat{\mu}_{ij})}}$$

En ajustant ces résidus : $r_{ij}^{aj} = \sqrt{\frac{N}{N-P}} \cdot r_{ij}^p$, on obtient les valeurs les résultats suivant :

	0	1	2	3	4	5	6	7
an sur 1	-529	2457	1612	513	-234	1897	-6008	0
an sur 2	-2354	-514	3111	559	-709	-1982	4950	
an sur 3	3593	-6006	2260	-1031	2345	426		
an sur 4	1727	441	-2706	-3473	-1247			
an sur 5	1753	-1235	-4477	3246				
an sur 6	-1917	1755	1564					
an sur 7	-1824	2371						
an sur 8	0							

Tableau 45 : Résidus de Pearson ajustés

Hypothèses du modèle :

- Pour l'application de ce modèle, on doit s'assurer que les résidus de Pearson ajustés sont indépendants et identiquement distribués.

Pour vérifier cette hypothèse, nous allons représenter dans un premier temps les résidus ajustés en fonction des résidus empiriques d'une loi normale centrée réduite en utilisant un QQ-plot sous logiciel R.

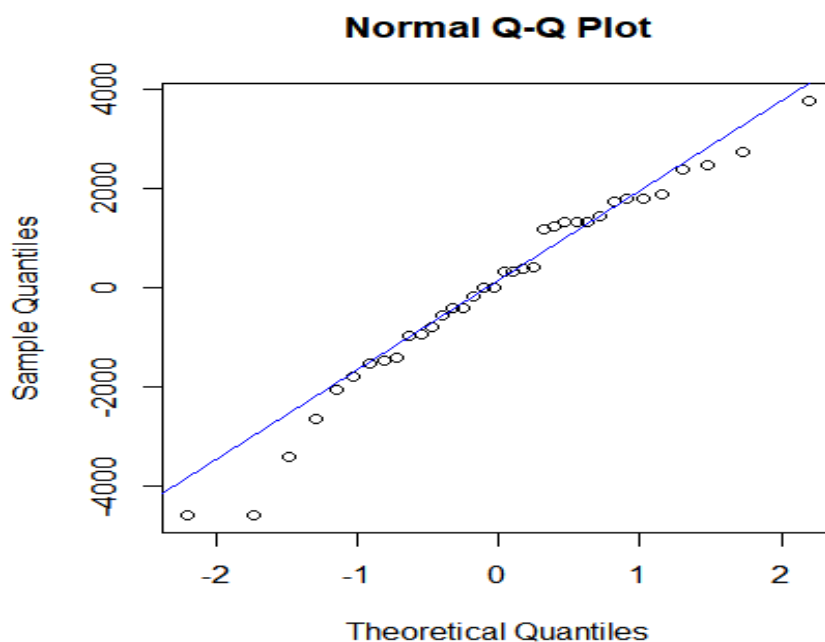


Figure 10 : QQ-plots des résidus

On peut remarquer que les résidus représentés sur la figure ci-dessus sont proches de la droite de Henry. Plus les résidus sont proches de cette droite, plus l'hypothèse de normalité des résidus est vérifiée. En respectant une certaine prudence, nous pouvons considérer que l'hypothèse fondamentale de la normalité des résidus est justifiée. Il convient tout de même de rester vigilant quant aux queues de distribution. Nous allons donc renforcer notre interprétation en effectuant le test statistique de normalité de Shapiro-Wilk avec le logiciel R.

```
> shapiro.test (residus)
```

```
Shapiro-Wilk normality test
```

```
data: residus
```

```
W = 0.96712, P-value = 0.3522
```

On observe une P-value supérieure à 5% ; on ne rejette pas l'hypothèse de normalité des résidus.

- Les graphes suivants représentent les résidus par année de survenance et par année de développement.

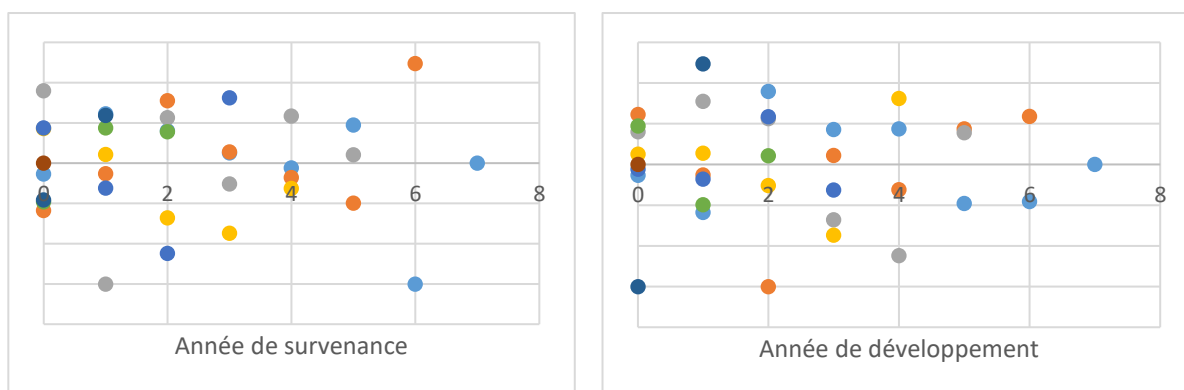


Figure 11 : Représentation des résidus par année de survenance et de développement

Aucune structure particulière n'apparaît sur ces graphiques ; la répartition des résidus est donc non structurée. Ainsi, la propriété d'espérance nulle et d'homoscédasticité des résidus est vérifiée.

- On présente par la suite l'ACF représentant la fonction d'autocorrélation empirique des résidus et on souhaite montrer que les résidus sont indépendants.

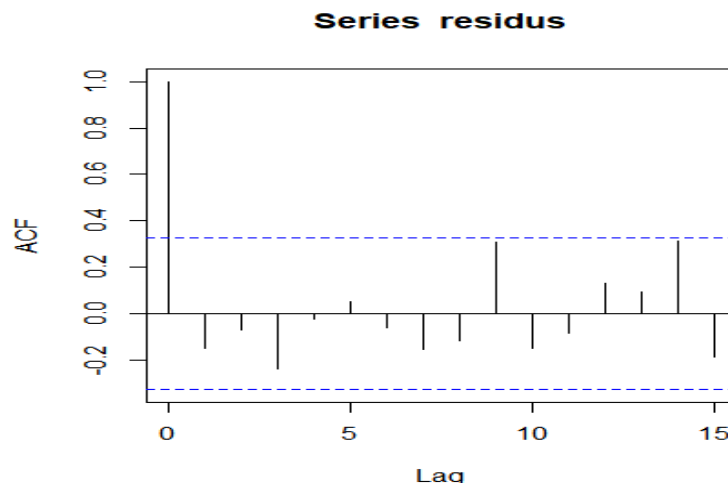


Figure 12 : ACF des résidus

Hors mis la première valeur, on remarque que toutes les covariances entre les résidus sont contenues dans l'intervalle de confiance à 95% (indiqué en bleue sur le graphe). Par définition de la fonction de corrélation, la première valeur est égale à l'unité. Ainsi on ne rejette pas l'hypothèse d'indépendance des résidus. Nous pouvons visualiser sur les figures suivantes l'histogramme, la densité des résidus, la fonction de répartition avec l'ajustement gaussien.

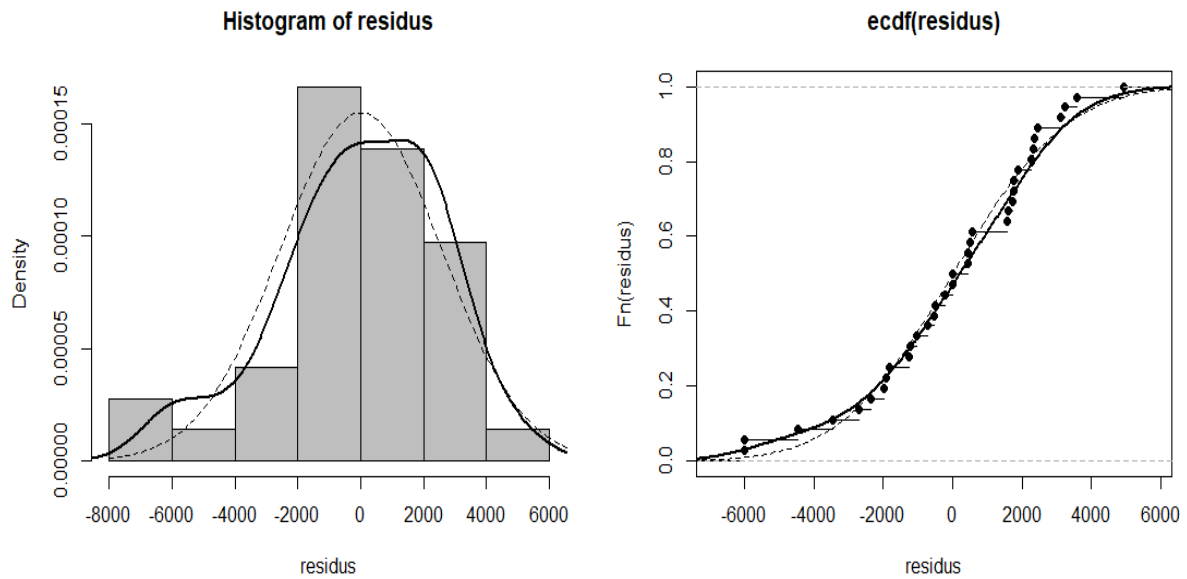


Figure 13 : Histogramme et densité des résidus (à gauche) et fonction de répartition (à droite) avec l'ajustement Gaussien en pointillés.

Détermination de la PSAP et l'incertitude à l'ultime associée:

Modèle	\hat{R} (en milliers)	$E^B(\hat{R})$	$Var^B(\hat{R})$	$\hat{V}(R)$	Sep/R
Gamma	1 645 472	1 649 290 335	6,879845e+16	1,494781e+17	28%

A partir de 5 000 triangles simulés, nous déterminons la distribution des montants de provisions et nous obtenons les résultats suivants :

Tableau 46 : Estimateurs des grandeurs du modèle bootstrap

Comparativement au modèle de Mack, l'erreur de prédiction est plus grande. Quant à l'erreur standard relative, elle est aussi plus élevée par rapport aux valeurs obtenues par le modèle de Mack et de log-normal.

On représente ci-dessous la densité empirique obtenue par le modèle bootstrap pour l'estimation de la provision. La moyenne de cette distribution est égale à la PSAP estimée et l'erreur de prédiction correspond à l'incertitude autour de cette moyenne.

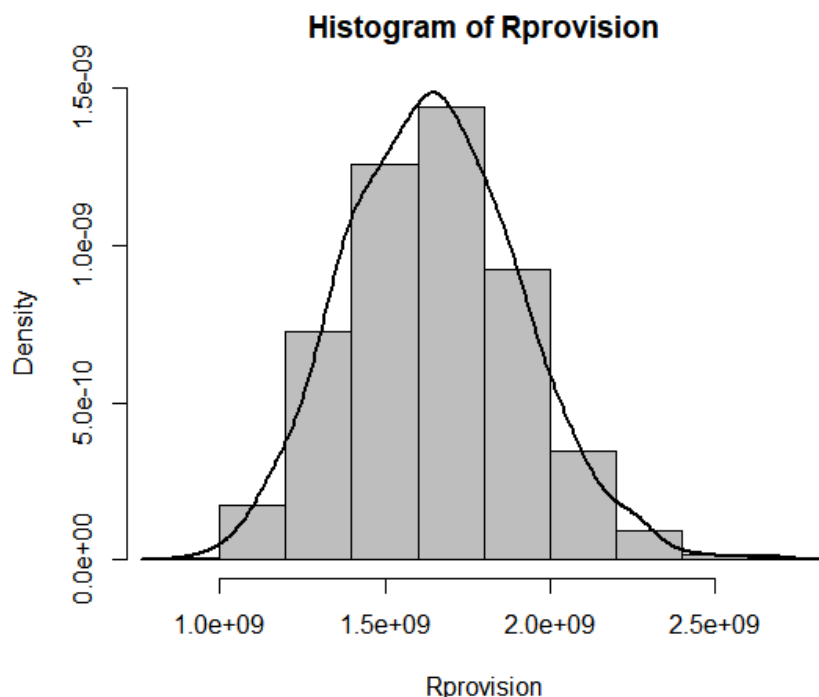


Figure 14 : Histogramme et densité de provision du modèle de bootstrap

On trouve les quantiles à 90%, 95% et 99% égaux respectivement à 1 686 811 FCFA, 1 855 400 FCFA et 2 105 692 FCFA. Le quantile 90% est le montant tel que 90% des observations au maximum sont inférieures à celui-ci et 5% sont supérieures

Méthode de Bootstrap	Provision (en milliers)
VAR 90%	1 686 811
VAR 95%	1 855 400
VAR 99%	2 105 692

Tableau 47 : Quantiles de la distribution des provision

II.2.4. Conclusion :

Comme souhaité, les méthodes stochastiques nous ont permis de déterminer les erreurs de prédiction. On a remarqué que l'erreur associée au modèle de poisson était relativement plus faible mais n'ajustait pas nos données. Le modèle log-normal serait donc une alternative intéressante dans le choix de la méthode à adopter car elle nous fournit la plus faible erreur standard après le modèle de poisson.

II.3 Méthodes réglementaires Dossier/dossier

La méthode dossier/dossier est appliquée lorsqu'on dispose de l'évaluation du cout de chaque sinistre fourni par le gestionnaire de dossier. Pour faire cette évaluation, le gestionnaire de dossier tient compte de l'information disponible et de plusieurs paramètres tels que :

- ✓ Le taux d'incapacité physique

✓ La durée de l'incapacité de travail...

La provision est obtenue en faisant la différence entre le cout total estimé et les règlements déjà effectués. Ainsi, la provision pour sinistres à payer (PSAP) est la somme des provisions pour chaque dossier.

$$PSAP_{\text{déclarés}}^{\text{Dossier/Dossier}} = \sum_i (\text{Cout}_i - \text{Règlements}_i)$$

On ajoute à l'expression précédente les réserves pour les sinistres tardifs (IBNR : Incurred But Not Reported) et la provision dossier/dossier sera dans ce cas :

$$PSAP^{\text{Dossier/dossier}} = PSAP_{\text{déclarés}}^{\text{Dossier/Dossier}} + IBNR$$

Où : $Reserve\ IBNR = CM \cdot N_{IBNR}$

$$CM = \frac{\text{Couts de sinistres terminés au cours des 5 dernières années}}{\text{Nombre de sinistres terminés au cours des 5 dernières années}}$$

L'estimation du nombre de sinistres survenus et non déclarés se fait à partir de la méthode Chain Ladder et s'exprime par la relation :

$$N_{IBNR} = \text{Nombre}_{\text{ultime chain Ladder}} - \text{dernier nombre connu}$$

Cette méthode réglementaire suppose que les gestionnaires de sinistres sont à mesure d'évaluer correctement les couts totaux. Dans le cas où ces derniers sont confrontés à un nombre pléthorique de sinistres de même catégorie, les sinistres (sous évalués et sur évalués) se compensent mutuellement.

Notons qu'il existe d'autres méthodes réglementaires qui permettent d'estimer les réserves qui sont : la méthode du cout moyen et la méthode de la cadence de règlement (voir annexe VI). Celles-ci ne figurent pas dans la réglementation CIMA et c'est pourquoi nous nous limitons dans cette partie à la méthode réglementaire dossier/dossier.

II.3.1. Application de la méthode dossier/dossier :

Pour déterminer les provisions dossier/dossier, nous avons utilisé la base de données sinistre et par la suite on obtient les provisions dossier/dossier en faisant la différence entre les évaluations de sinistre (charges) et les règlements effectués.

i	Evaluation	Règlement	Provision
0	13 954	13 954	0
1	119 737	119 737	0
2	159 411	158 512	899
3	217 398	216 998	400
4	279 306	259 615	19 691
5	302 860	298 381	4 479
6	341 191	306 746	34 445
7	253 512	246 424	7 088
8	392 070	390 006	2 064
9	343 049	340 370	2 679
10	454 652	423 755	30 897
11	636 823	584 506	52 317
12	698 495	520 933	177 562
13	777 457	671 177	106 280
14	1 057 346	768 815	288 531
15	922 460	684 217	238 243
16	1 242 589	927 481	315 108
17	1 176 321	578 654	597 668
Total	9 388 631	7 510 281	1 878 351

Tableau 48 : Provisions dossier/dossier

La réserve totale dossier/dossier est donc :

$$PSAP_{Totale} = 1\,878\,351 \text{ FCFA}$$

Déterminons ensuite la réserve pour les tardifs IBNR (Incurred but not Reported). Pour cela, nous estimons dans un premier temps le nombre de sinistres par la méthode de Chain Ladder et enfin leurs montants en utilisant la méthode du cout moyen.

Le triangle suivant contient le nombre de sinistres par année de survenance et par année de déclaration :

	0	1	2	3	4	5
an sur 1	1 454	1 484	1 484	1 484	1 484	1 484
an sur 2	1 580	1 662	1 662	1 664	1 664	
an sur 3	2 173	2 276	2 276	2 277		
an sur 4	2 571	2 675	2 678			
an sur 5	2 983	3 106				
an sur 6	3 719					

Tableau 49 : Triangle du nombre de sinistres

II.3.2. Coefficients de Chain Ladder :

Les coefficients de Chain Ladder sont calculés à partir de la formule

$$\widehat{Coef}_j = \frac{\sum_{i=1}^{n-j} Nbre_{i,j+1}}{\sum_{i=1}^{n-j} Nbre_{i,j}}$$

coefficient	1,041	1,00037	1,0005	1	1
-------------	-------	---------	--------	---	---

Tableau 50 : Coefficients de Chain Ladder

II.3.3. Estimation du nombre de sinistres IBNR :

Avec les coefficients obtenus par la méthode de Chain Ladder, nous pouvons remplir le triangle de nombre de sinistres :

	0	1	2	3	4	5
an sur 1	1 454	1 484	1 484	1 484	1 484	1 484
an sur 2	1 580	1 662	1 662	1 664	1 664	1 664
an sur 3	2 173	2 276	2 276	2 277	2 277	2 277
an sur 4	2 571	2 675	2 678	2 679	2 679	2 679
an sur 5	2 983	3 106	3 107	3 109	3 109	3 109
an sur 6	3 719	3 872	3 873	3 875	3 875	3 875

Tableau 51 : Estimations du nombre de de futurs sinistres

La différence entre le nombre ultime de sinistres et les derniers sinistres connus correspond au nombre de sinistres IBNR.

i	IBNR
0	0
1	0
2	0
3	1
4	3
5	156
Total	161

Tableau 52: Nombre de sinistres BNR

On constate que les sinistres survenus non déclarés sont plus fréquents lors de la dernière année de survenance.

II.3.4. Cout moyen :

i	Charges	Nombre de sinistres
1	777 456	1 664
2	1 057 345	2 277
3	922 459	2 678
4	1 242 588	3 106
5	1 176 321	3 719
total	5 176 172	13 444

Tableau 53 : Charges et nombre de sinistres

D'où :

$$CM = \frac{5\,176\,172}{13\,444} = 385\,017 \text{ FCFA}$$

Enfin, nous déduisons les réserves IBNR et la provision dossier/dossier corrigée des IBNR :

i	Provisions dossier/dossier	Réserves IBNR	Provisions (dossier/dossier) corrigées
0	0		0
1	0		0
2	899		899
3	400		400
4	19 691		19 691
5	4 479		4 479
6	34 445		34 445
7	7 088		7 088
8	2 064		2 064
9	2 679		2 679
10	30 897		30 897
11	52 317		52 317
12	177 562	0	177 562
13	106 280	0	106 280
14	288 531	0	288 531
15	238 243	570	238 814
16	315 108	1 105	316 213
17	597 668	60 191	657 858
Total	1 878 352	61 866	1 940 219

Tableau 54 : Réserves IBNR et provisions dossier/dossier corrigées

L'ajout de la réserve IBNR à la provision dossier/dossier nous donne :

$$PSAP_{\text{Totale}} = 1\,940\,219 \text{ FCFA}$$

II.3.5. Critiques de la méthode dossier/dossier :

En général les gestionnaires ont tendance à sur évaluer les couts de sinistres par crainte d'insuffisance de la provision et d'être accusés de mauvais gestionnaires. Les critiques de cette

méthode sont dirigées vers l'évaluation des couts et le jugement subjectif des gestionnaires de sinistres. Par exemple, un gestionnaire peut clôturer un sinistre en le considérant bien géré pour un cout inférieur à l'estimation qu'il a lui-même prévu et ceci peut conduire à une surévaluation lorsqu'on généralise à l'échelle du département des sinistres.

Connaissant les résultats obtenus par ces méthodes, déterminons à présent l'écart entre les provisions estimées par les méthodes statistiques (déterministes et stochastiques) et la méthode règlementaire dossier/dossier.

NB : Pour cette comparaison, nous considérons les provisions dossier/dossier des huit dernières années qui correspondent aux années de survenance utilisées pour l'application des méthodes statistiques précédentes. Par ailleurs, les provisions utilisées dans ce tableau tiennent compte du taux de liquidation.

Méthode	Provision avec taux de liquidation	Ecart avec Dossier/dossier +IBNR
Dossier/dossier +IBNR	1 940 218	0%
Chain Ladder/Mack/Poisson	1 716 026	-13%
London Chain	2 290 898	15%
London Pivot	1 751 831	-11%
Bornhuetter-Ferguson	1 708 903	-14%
Cape Code	1 913 267	-1%
log-normal	1 642 982	-18%
Gamma	1 621 612	-20%
Bootstrap	1 645 472	-18%

Tableau 55 : Comparaison des montants de provisions à la réserve dossier/dossier

Le résultat le plus proche de la réserve dossier par dossier est celle de Cape Code (-1%) ensuite viennent les provisions de London Pivot et de Chain Ladder. La réserve obtenue par le modèle de régression gamma reste la plus éloignée. Nous pouvons visualiser ces écarts sur la figure ci-dessous.

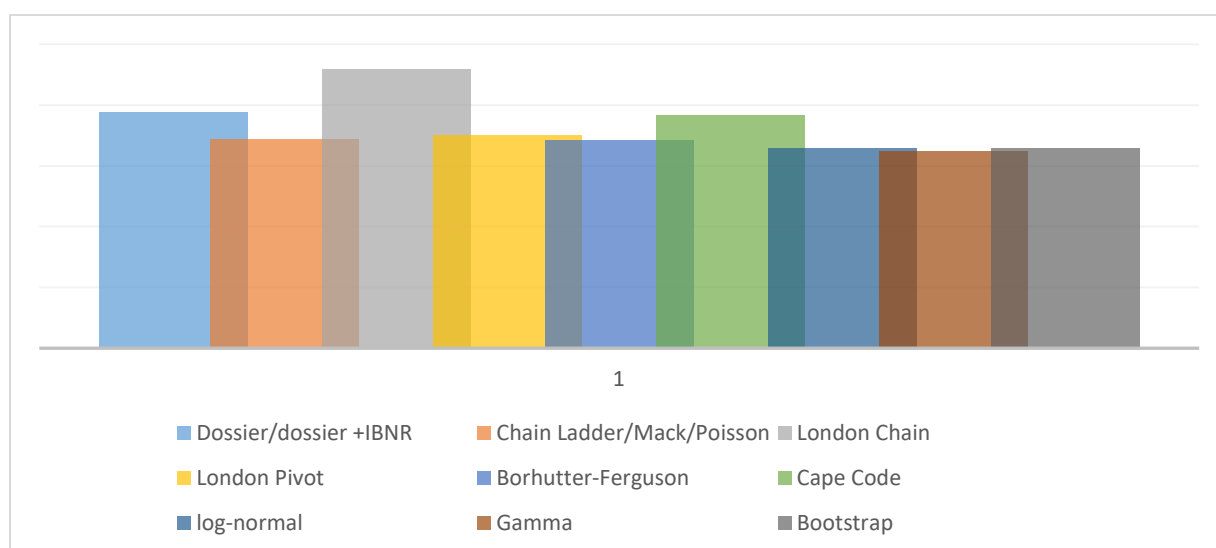


Figure 15 : Représentation des provisions obtenues par les différentes méthodes utilisées

Nous terminons cette partie sur les méthodes de provisionnement en présentant les avantages et inconvénients de chacune d'elle.

Méthodes	Avantages	Inconvénients
Chain Ladder	-Facile à appliquer -Méthode de référence	-Hypothèses fortes -Sensibilité forte des estimations de réserves
London Chain	-Facile à appliquer -Hypothèses moins contraignantes que Chain Ladder	-Sensibilité forte des estimations de réserves
London Pivot	-Hypothèses moins contraignantes que Chain Ladder	-Sensibilité forte des estimations de réserves -Absence de solution analytique
Bornhuetter-Fergusson Et Cape-Code	-Faible sensibilité des estimations	-Besoin de données exogènes qui ne sont pas toujours disponibles
Mack	-Même résultat que la méthode de référence (Chain Ladder) -Permet de mesurer l'incertitude associée à la réserve -Utilisée pour établir le modèle de Merz-Wüthrich	-Hypothèses fortes -Sensibilité forte des estimations de réserves
GLM	-Même résultat que la méthode de Chain Ladder (cas du modèle de poisson) -Permet de mesurer l'incertitude associée à la réserve -Utilisée dans le modèle de Bootstrap	-Estimation des paramètres lourde - Hypothèses paramétriques
Bootstrap	-Calcul l'erreur et la VAR	-Hypothèses fortes

Tableau 56 : Avantages et Inconvénients des méthodes de provisionnement étudiées

Chapitre III : Choix de la méthode

Cette partie est indispensable pour notre étude. En effet, Les estimations faites précédemment sont les résultats de plusieurs méthodes. Nous avons remarqué qu'il y'a divergence entre les réserves estimées bien que les écarts obtenus ne sont pas assez grands. A présent, nous procédons au choix de la méthode qui représente mieux notre historique de données.

Pour cela, nous nous intéressons tout d'abord à d'autres triangles afin de comprendre si ces divergences persistent d'une branche d'activité à une autre et par la suite nous utilisons le critère historique par rapport au triangle étudié afin de choisir la méthode convenable.

III.1. Comparaison des méthodes

Nous allons donc estimer les provisions de trois branches d'assurance et déterminer ensuite l'écart entre celles-ci et la provision de Chain Ladder.

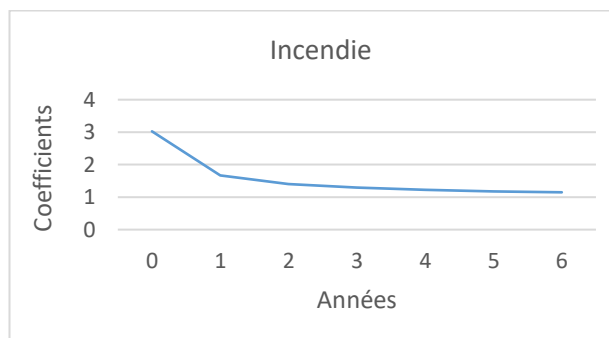
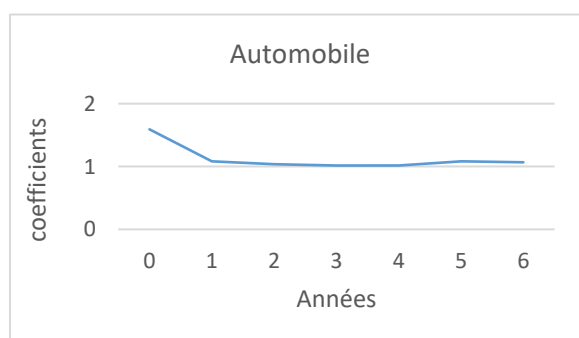
Branche	Chain Ladder	London Chain	London Pivot	Bornhuetter-Ferguson	Cape Code
Automobile	1716026	2290898 (33,5%)	1751831 (2,1%)	1708903(-0,41%)	2037325(18,7%)
RC générale	3660	3277 (-10,5%)	2976 (-18,7%)	6583 (79,8%)	4565 (24,7%)
Incendie	123421	143320 (16.12%)	108663 (-12%)	254448 (106.2%)	106100 (-14%)

Tableau 57 : Provisions estimées par branche et écart avec la méthode Chain Ladder

En observant ce tableau, notre première impression est que la méthode de London Chain et les méthodes mixtes (Bornhuetter-Ferguson en particulier) donnent des provisions plus grandes et donc prudentes par rapport aux autres. Cependant, nous devons faire attention au risque de sur-provisionnement. De plus cette remarque n'est pas toujours vérifiée. En prenant par exemple le cas de la branche RC générale, la méthode London Chain affiche une provision plus faible contrairement à ce qu'on pouvait imaginer.

Ces méthodes ont été appliquées sur trois branches, ce qui montre qu'on ne peut pas généraliser les résultats obtenus. Par ailleurs, on se rend compte qu'il n'y a pas de logique globale entre ces méthodes. En effet pour la branche automobile, London Chain fournit une provision plus grande tandis qu'en RC générale la provision obtenue est relativement faible.

Pour savoir s'il existe une similitude dans les caractéristiques de ces branches qui explique ces résultats, nous nous intéressons aux facteurs de développement de Chain Ladder.



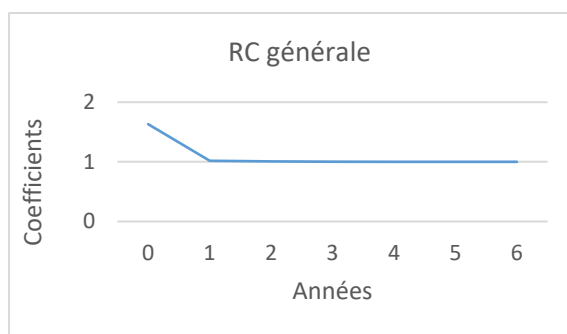


Figure 16 : Représentation graphique des facteurs de développement par branche

Cette représentation graphique montre que la stabilisation des facteurs de Chain Ladder est plus lente pour la branche incendie tandis que pour la branche RC générale, les facteurs se stabilisent dès la deuxième année. La branche automobile quant à elle, les facteurs sont presque stables à partir de la troisième année.

III.2. Outil de choix de la méthode

Nous procédons dans cette partie au choix de la méthode la plus adaptée à notre triangle en utilisant la technique proposée par Denuit et Charpentier. Cette technique met en évidence l'erreur d'estimation des provisions constituées dans le passé par rapport aux valeurs exactes observées.

Bien qu'elle paraisse objective et pertinente, la technique de Denuit et Charpentier est basée sur un critère historique qui est particulier au triangle. Dans le cas d'un modèle sur-paramétré, on pourrait obtenir de bons résultats alors que sa qualité prédictive est mauvaise.

III.2.1. Etapes de l'application de la technique de Denuit et Charpentier

On prend un sous-triangle qui, complété, reste inclus dans le triangle de base. On complète sa partie inférieure par une des méthodes de provisionnement. Ensuite, on compare les provisions estimées avec les valeurs lisibles dans le triangle de développement et on choisit la méthode qui donne la valeur minimale de la somme des carrés des erreurs.

Pour améliorer cet outil, on peut tenir compte d'un maximum de triangles (tous les sous-triangles possibles au nombre de $\frac{n}{2} - 2$). La somme des carrés des erreurs (SCE) se calculent à partir de l'expression suivante :

$$SCE = \sum_{m=1}^{n/2} \sum_{i=1}^m \sum_{k=m-i+1}^m (\hat{C}_{i,k} - C_{i,k})^2$$

En appliquant cette technique, nous obtenons les résultats suivants :

Méthode	SCE
Chain Ladder	2,63E+18
London Chain	2,54E+18
London Pivot	2,65E+18

Tableau 58 : SCE par sous-triangles

Les résultats obtenus montrent que la plus petite valeur du SCE est celle de la méthode London Chain 2,54E+18. Ce qui signifie que cette méthode est la plus adaptée à nos données.

SCE des méthodes mixtes :

La technique de Denuit et Charpentier diffère pour les méthodes mixtes (Fergusson, Cape Code) car celles-ci ont été utilisées pour le paiement intégral de la dernière année de développement. Ainsi, nous allons utiliser le même procédé mais en s'intéressant cette fois à la différence des carrés des erreurs des deux dernières colonnes.

$$SCE = \sum_{k=1}^{(n/2)+1} \sum_{i=1}^k (\hat{C}_{i,k} - C_{i,k})^2$$

Méthode	SCE
Bornhuetter-Ferguson	2,45E+17
Cape Code	2,46E+17

Tableau 59 : SCE par sous-triangles des méthodes mixtes

La valeur du SCE de Bornhuetter-Ferguson est légèrement plus petite que celle de la méthode de Cape Code. On considère par conséquent qu'elle est la méthode mixte la plus commode à nos données.

Pour être précautionneux dans le choix de la méthode, nous appliquons la même technique sous d'autres formes.

III.2.2. Comparaison par SCE sur les diagonales

Dans cette partie, nous allons étendre le calcul du SCE en tenant compte d'une grande quantité de données issues du triangle et ceci en allant jusqu'à la dernière diagonale. A titre d'exemple, nous pouvons effectuer le calcul du SCE aux termes qui suivent la diagonale en utilisant donc les montants du triangle supérieur.

En appliquant cette technique au triangle supérieur, nous obtenons les résultats suivants:

Méthode	SCE
Chain Ladder	6,2E+18
London Chain	8,01E+19
London Pivot	6,27E+19

Tableau 60 : SCE par diagonales des méthodes

Cette fois, c'est la méthode de Chain Ladder qui s'avère être la plus adaptée à notre triangle. London Chain qui était choisi par la première technique nous donne la plus grande valeur du SCE 8,01E+19.

SCE par diagonales des méthodes mixtes :

Tout comme précédemment, la méthode de Bornhuetter-Ferguson est le modèle mixte retenu avec une valeur du SCE égale à 6,89E+17.

Méthode	SCE
Bornhuetter-Ferguson	6,89E+17
Cape Code	1,19E+18

Tableau 61 : SCE par diagonales des méthodes mixtes

III.2.3. Comparaison des SCE sur les trapèzes

La comparaison des SCE sur les trapèzes regroupe les deux méthodes précédentes. Il s'agit de continuer jusqu'au bout le calcul des SCE sur les sous-triangles mais qui sera tronqué au niveau de la diagonale du triangle initial. Le calcul sera donc effectué sur des diagonales étendues (trapèzes).

En appliquant cette méthode, on obtient les résultats suivants :

Méthodes	SCE
Chain Ladder	3,26389E+17
London Chain	7,39499E+17
London Pivot	3,35874E+17

Tableau 62 : SCE par la méthode des trapèzes

Comme dans la méthode sur les diagonales, Chain Ladder semble la plus appropriée à notre triangle.

SCE méthodes mixtes :

Une fois de plus, la méthode de Bornhuetter-Ferguson fournit la plus petite valeur du SCE et reste par conséquent la mieux adaptée des méthodes mixtes utilisées.

Méthodes	SCE
Bornhuetter-Ferguson	1,71E+17
Cape Code	3,87E+17

Tableau 63 : SCE par trapèzes des méthodes mixtes

A partir des résultats obtenus, les méthodes de Chain Ladder et de Bornhuetter-Ferguson sont les plus convenables à notre triangle. L'écart entre les estimations faites par ces deux méthodes est relativement faible comme le montre le tableau suivant :

Méthodes	PSAP	Ecart par rapport à Chain Ladder
Chain Ladder	1 716 026	0
Bornhuetter-Ferguson	1 708 903	-0,0042

Tableau 64 : Ecart entre les méthodes Chain Ladder et Bornhuetter-Ferguson

En fin, nous retenons pour le calcul des réserves la méthode de Chain Ladder non seulement parce qu'elle s'adapte à notre triangle et en plus l'erreur d'estimation obtenue par le modèle stochastique associée n'est pas élevée.

$$PSAP_{\text{Totale}} = 1\,716\,026 \text{ FCFA}$$

Chapitre IV : Mesure du risque de provisionnement à l'horizon 1 an

IV.1. Risque de provisionnement à 1 an

Habituellement, le risque de provisionnement étudié est le risque à l'ultime. Il s'agit de la différence entre la charge finale estimée aujourd'hui et sa valeur réelle à l'ultime. Ce risque a été quantifié dans le modèle de Mack.

A présent nous cherchons à quantifier la volatilité de l'estimation sur un an afin de connaître la variation de la charge finale à la date (t+1) par rapport à la date t.

Changement d'horizon :

Il est fort probable que si une compagnie d'assurance n'est pas solvable dans 1 an, elle ne le sera pas à un horizon plus long. Il est donc important de maintenir à court terme sa performance pour préserver non seulement sa solvabilité mais aussi sa réputation.

IV.2. Méthode de Merz-Wüthrich

La méthode de Merz-Wüthrich consiste à obtenir une variance de la variation calendaire de la charge de sinistres estimée à l'ultime. Cette méthode est basée sur le modèle de Mack.

Les hypothèses d'utilisation de ce modèle sont semblables aux hypothèses de Mack. Nous ajouterons à celles-ci la condition de Markov :

- ✓ Les paiements cumulés $(C_{i,j})_{j \geq 0}$ sont indépendants par année de survenance ;
- ✓ Les paiements cumulés $(C_{i,j})_{j \geq 0}$ suivent une chaîne de Markov :

$\lambda_j > 0$ et $\sigma_j > 0$ telles que $\forall 1 \leq i \leq I$ et $1 \leq j \leq J$

$$\begin{cases} E[C_{i,j}/C_{i,j-1}] = \lambda_{j-1} \cdot C_{i,j-1} \\ \text{Var}[C_{i,j}/C_{i,j-1}] = \sigma_{j-1}^2 \cdot C_{i,j-1} \end{cases}$$

On notera D_I et D_{I+1} les informations disponibles respectivement aux dates $t=I$ et $t=I+1$.

$$D_I = \{C_{i,j} ; i+j \leq I, i \leq I\}$$

$$D_{I+1} = \{C_{i,j} ; i+j \leq I+1, i \leq I+1\}$$

Dans le modèle de Merz-Wüthrich, les règlements du triangle de liquidation sont supposés vérifier la relation :

$C_{i,j} = \lambda_{j-1} \cdot C_{i,j-1} + \sigma_{j-1} \cdot \sqrt{C_{i,j-1}} \cdot \varepsilon_{i,j}$, Où les $\varepsilon_{i,j}$ sont des variables aléatoires indépendantes conditionnellement aux $C_{1,1}, \dots, C_{I,1}$ et $E[\varepsilon_{i,j} | C_{1,1}, \dots, C_{I,1}] = 0$. Nous vérifions cette hypothèse en représentant les résidus égaux à $\frac{C_{i,j+1} - \lambda_j \cdot C_{i,j}}{\hat{\sigma}_j \sqrt{C_{i,j}}}$ par année de survenance et par année de développement :

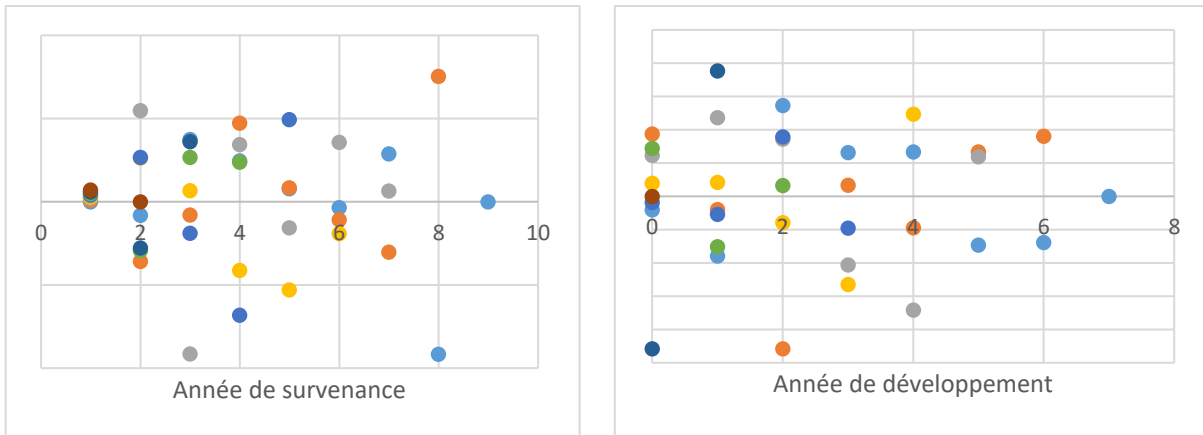


Figure 17 : résidus en fonction des années de survenance et de développement

La répartition des résidus est non structurée. Les hypothèses du modèle sont donc vérifiées.

On représente ensuite l'ACF qui représente la fonction empirique des résidus. On souhaite montrer l'indépendance entre les résidus.

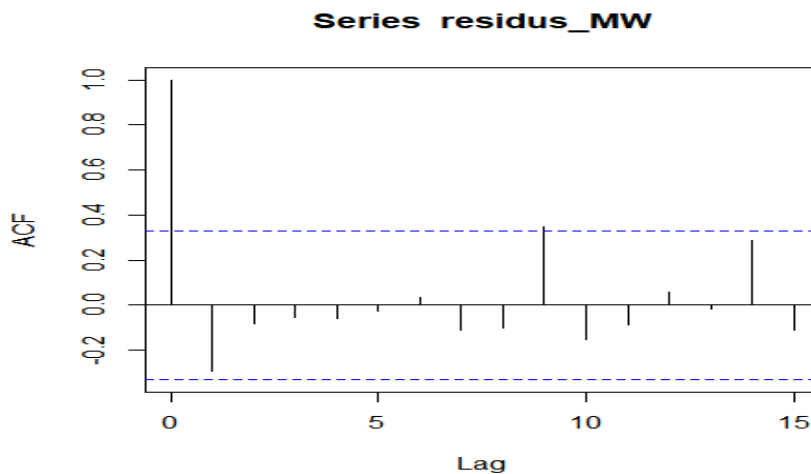


Figure 18 : ACF des résidus

Par définition de la fonction d'autocorrélation, la première valeur est égale à l'unité. On peut constater qu'à part la première valeur, presque toutes les covariances sont contenues dans l'intervalle en pointillé bleu, soit l'intervalle de confiance à 95%. On ne rejette donc pas l'hypothèse d'indépendance des résidus.

Notons que les estimateurs de Chain Ladder dépendent de la date retenue pour les données :

En $t=N$,

$$\widehat{\lambda}_j = \frac{\sum_{i=0}^{I-j-1} C_{i,j+1}}{\sum_{i=0}^{I-j-1} C_{i,j}}$$

En $t=N+1$,

$$\widehat{\lambda}^{I+1}_j = \frac{\sum_{i=0}^{I-j} C_{i,j+1}}{\sum_{i=0}^{I-j} C_{i,j}}$$

Ensuite nous déterminons les estimateurs sans biais des charges futures :

En $t=N, \forall I - i + 1 \leq j$

$$\widehat{C}_{i,j}^I = C_{i,I-i} \cdot \prod_{h=I-i}^{j-1} \widehat{\lambda}_h^I$$

$$R_i^I = C_{i,I} - C_{i,I-i}$$

En $t=N+1, \forall I - i + 2 \leq j$

$$\widehat{C}_{i,j}^{I+1} = C_{i,I-i+1} \cdot \prod_{h=I-i+1}^{j-1} \widehat{\lambda}_h^{I+1}$$

$$R_i^{I+1} = C_{i,I} - C_{i,I-i+1}$$

Merz-Wüthrich adaptent la méthode de Mack pour évaluer le risque à un an. Cette méthode est applicable si les hypothèses du modèle de Mack sont vérifiées.

IV.2.1. Claims Development Results (CDR)

L'estimation du risque à un an se fait en analysant l'incertitude liée au CDR qui est la différence entre deux estimations successives du montant des Best Estimate.

Notons que le CDR_i pour l'année de survenance i est :

$$CDR_i(I+1) = E(C_{i,I} | D_I) - E(C_{i,I} | D_{I+1})$$

$$CDR(I+1) = \sum_{i=1}^I CDR_i(I+1)$$

Nous pouvons observer l'erreur de prédiction du CDR de deux manières :

-Une vision prospective qui consiste à prédire le CDR sur l'année $t = I + 1$ à partir des observations des sinistres en $t = I$.

-Une vision rétrospective en date $I + 1$ afin d'obtenir une réalisation du CDR observable.

Les $(C_{i,j})_{j \geq 0}$ possèdent des propriétés d'une martingale c'est-à-dire :

$$E[CDR_i(I+1) | D_I] = 0$$

Cette propriété implique que le CDR réel serait nul si les facteurs de développement étaient parfaitement connus. Etant donné que le CDR réel n'est pas observable, nous utilisons par conséquent son estimateur qu'on appellera le CDR observable. Ce dernier est la différence entre le montant des règlements cumulés ultimes estimé à partir des données disponibles à la date $t=I$ et celui estimé à partir des informations à la date $t=I+1$. Ainsi, les valeurs inconnues du CDR réel sont remplacées par leurs valeurs estimées (référence faite à la méthode de Chain Ladder). Nous remplaçons alors :

$E(C_{i,I} | D_I)$ et $E(C_{i,I} | D_{I+1})$ par respectivement $\widehat{C}_i(I)$ et $\widehat{C}_i(I+1)$. Nous pouvons donc écrire :

$$\widehat{CDR}_i(I+1) = \widehat{C}_i(I) - \widehat{C}_i(I+1)$$

IV.2.2 Erreur de prédiction à 1 an

L'étude du changement dans la prédiction de la charge totale ou de la variation du Boni/mali d'une année à une autre a été faite par Merz et Wüthrich. Ces derniers ont montré que :

$$mse\widehat{pc}_{n-1}(CDR_i(t)) = \widehat{C}_{i,\infty}^2 (\widehat{\Gamma}_{i,n} + \widehat{\Delta}_{i,n})$$

$$\text{Où : } \hat{\Delta}_{i,n} = \frac{\hat{\sigma}_{n-i+1}^2}{\hat{\lambda}_{n-i+1}^2 \cdot S_{n-i+1}^{n+1}} + \sum_{j=n-i+2}^{n-1} \left(\frac{C_{n-j+1,j}}{S_j}\right)^2 \frac{\hat{\sigma}_j^2}{\hat{\lambda}_j^2 \cdot S_j^n}$$

$$\hat{\Gamma}_{i,n} = \left(1 + \frac{\hat{\sigma}_{n-i+1}^2}{\hat{\lambda}_{n-i+1}^2 \cdot C_{i,n-i+1}}\right) \prod_{j=n-i+2}^{n-1} \left[1 + \frac{\hat{\sigma}_j^2}{\hat{\lambda}_j^2 [S_j^{n+1}]^2} C_{n-j+1,j}\right] - 1$$

$$S_j^n = \sum_{i=0}^{n-j-1} C_{i,j} \quad S_j^{n+1} = \sum_{i=0}^{n-j} C_{i,j}$$

En procédant à un développement de la forme : $\prod(1 + v_i) \approx 1 + \sum v_i$ (qui se fait sous la condition : v_i très petit et $\frac{\hat{\sigma}_j^2}{\hat{\lambda}_j^2} \ll C_{n-j+1,j}$), nous approchons $\hat{\Gamma}_{i,n}$ par l'expression :

$$\hat{\Gamma}_{i,n} \approx \frac{\hat{\sigma}_{n-i+1}^2}{\hat{\lambda}_{n-i+1}^2 \cdot C_{i,n-i+1}} + \sum_{j=n-i+2}^{n-1} \left(\frac{C_{n-j+1,j}}{S_j^{n+1}}\right)^2 \frac{\hat{\sigma}_j^2}{\hat{\lambda}_j^2 \cdot C_{n-j+1,j}}$$

Dans le tableau suivant sont résumées l'erreur à 1 an de Merz-W et l'erreur à l'ultime de Mack :

i	MSEP Mack	MSEP M.W
0	0	0
1	6 989	6 989
2	57 410	57 148
3	69 760	28 638
4	78 086	33 029
5	74 819	32 790
6	104 530	54 535
7	137 622	100 529
Total	373 474	220 790

Tableau 65 : Erreur de Merz-Wüthrich à un an et de Mack à l'ultime

On voit clairement que l'erreur commise à un an est inférieure à celle réalisée à l'ultime.

Les critiques du modèle de Merz-Wüthrich :

- ✓ Avec le modèle de Merz-Wüthrich, la volatilité au niveau de la queue de distribution n'est pas correctement appréciée.
- ✓ Les hypothèses de Mack peuvent être non pertinentes au niveau de la queue de distribution et le modèle de Merz-Wüthrich est fondé sur les mêmes hypothèses.
- ✓ Ce modèle considère que le Best Estimate à horizon un an est sans biais. En pratique, ce n'est pas forcément le cas.
- ✓ L'hypothèse $\frac{\hat{\sigma}_j^2}{\hat{\lambda}_j^2} \ll C_{n-j+1,j}$ peut-être aussi mis en doute.
- ✓ Nous avons vu d'après les hypothèses précédentes que Merz-Wüthrich ont mis en place un modèle qui suit la méthode de Chain Ladder. En effet, ce modèle

fournit une expression fermée de la volatilité à un an de la variation calendaire de la charge de sinistres ultimes estimée.

Conclusion

Dans ce mémoire, nous avons étudié les méthodes classiques de provisionnement et comparé ensuite les résultats obtenus en faisant des applications numériques sur la branche automobile. La divergence de ces résultats nous a conduit à la mise en place des techniques permettant de choisir la plus adaptée à notre historique de données.

Pour expliquer les disparités entre les réserves estimées, nous avons effectué une analyse comparative entre triangles issus de trois différentes branches d'assurance dont : l'Automobile, l'Incendie et la RC Générale. Ceci nous a permis de prendre en compte la stabilité des facteurs de développement de Chain Ladder. Cependant l'analyse effectuée lors de cette étude comparative révèle que les résultats obtenus sont relatifs et ne représentent en aucun cas la généralité. A partir de la technique de Denuit et Charpentier, nous avons calculé la somme des carrés des erreurs (SCE) afin de repérer la méthode qui reflète mieux l'historique des règlements étudié.

Conscients des risques auxquels font face les compagnies d'assurances, nous avons quantifié les incertitudes liées aux réserves estimées en faisant recours au modèle établi par Mack en 1993, aux modèles GLM ainsi qu'à la modélisation par Bootstrap. A l'aide de cette dernière, nous avons déterminé les Values At Risk qui représentent les pertes maximales potentielles qui ne devraient être atteintes qu'avec une probabilité bien définie sur un horizon temporel donné. Dans notre cas, nous avons retenu les Values At Risk pour des probabilités élevées 90%, 95% et 99% dans le but d'obtenir des provisions suffisantes.

En guise d'enrichissement et de piste de développement de notre étude, nous avons mesuré grâce au modèle de Merz-Wüthrich les incertitudes à horizon un an, bien que celles-ci soient une directive suggérée par la solvabilité 2. Aujourd'hui le Maroc a opté pour une solvabilité basée sur les risques (risque de souscription, risque opérationnel, risque de marché, risque de contrepartie...) et travaille également sur la mise en place de la solvabilité 2 dans les prochaines années. Cette nouvelle régulation du secteur des assurances va probablement impacter les filiales marocaines dans la zone CIMA.

Par ailleurs les compagnies d'assurance de la zone CIMA sont souvent exposées à des problèmes de solvabilité c'est pourquoi, il serait intéressant d'estimer les erreurs de prédiction sur un an parce qu'il est difficile ou même impossible d'être solvable à long terme si la solvabilité n'est pas garantie à court terme.

Bibliographies

WÜTHRICH M., MERZ M., LYSENKO N., Uncertainty of the claims development result in the Chain Ladder method, Scandinavian Actuarial Journal, 2008

MICHAEL MERZ, MARIO V. WÜTHRICH, Modelling The Claims Development Result For Solvency Purposes

A. Charpentier et F. Bucchini (2004) Actuariat de l'assurance dommages ENSAE

LAGIER Raphaël, Provisionnement non-vie sur la branche Responsabilité Civile Professionnelle, 5 juin 2013, ENSAE Paris Tech.

LACOUME A., Mesure du risque de réserve sur un horizon un an, Mémoire ISFA 2008

Selma JAZIRI, Méthodes de provisionnement non-vie et risque de réserve à un an, le 12 Juillet 2011, l'Institut de Science Financière et d'Assurances.

THIBAUT Baron, Mesure de l'Incertitude sur les Provisions en Assurance Non Vie

Approche Bornhuetter-Ferguson, ENSAE ParisTech.

Christian Partrat, Provisionnement technique en assurance non vie : Perspectives actuarielles modernes, Edition Economica, 2007

Annexe I : Modalités de calcul

Article 334-12.

La provision pour sinistre à payer est calculée exercice par exercice.

Sans préjudice de l'application des règles spécifiques à certaines branches prévues à la présente section, l'évaluation des sinistres connus est effectuée dossier par dossier, le cout d'un dossier comprenant toutes les charges externes individualisables ; elle est augmentée d'une estimation du cout des sinistres survenus mais non déclarés. Les modalités d'estimation du cout des sinistres survenus mais non déclarés tardif sont fixées par circulaire de la commission de contrôle des assurances.

Annexe II : Triangle de règlements décumulés

	0	1	2	3	4	5	6	7
an sur 1	192 130	137 414	32 242	14 021	5 119	10 268	5 485	27 076
an sur 2	260 780	167 399	52 963	20 448	6 615	4 959	71 342	
an sur 3	327 916	107 605	47 496	14 651	12 925	10 340		
an sur 4	395 136	223 894	34 140	10 715	7 291			
an sur 5	457 964	239 622	30 775	40 454				
an sur 6	367 871	255 598	60 747					
an sur 7	548 962	78 519						
an sur 8	578 654							

Tableau 66 : Triangle initial de règlements

Annexe III : Estimation des paramètres de la loi de poisson

Call :

glm(formula = y ~ lig + col, family = poisson)

Deviance Residuals:

Min	1Q	Median	3Q	Max
-5668	-1106	160	1328	3492

Coefficients:

	Estimate	Std. Error	z value	Pr(> z)
(Intercept)	1.910e+01	5.302e-05	360291	<2e-16 ***
lig2	3.876e-01	6.505e-05	5959	<2e-16 ***
lig3	3.540e-01	6.728e-05	5262	<2e-16 ***
lig4	6.255e-01	6.411e-05	9757	<2e-16 ***
lig5	7.769e-01	6.268e-05	12395	<2e-16 ***
lig6	6.967e-01	6.405e-05	10877	<2e-16 ***
lig7	1.080e+00	6.118e-05	17654	<2e-16 ***
lig8	1.073e+00	6.737e-05	15931	<2e-16 ***
col2	-5.242e-01	3.247e-05	-16146	<2e-16 ***
col3	-2.030e+00	6.584e-05	-30838	<2e-16 ***
col4	-2.751e+00	1.025e-04	-26838	<2e-16 ***
col5	-3.575e+00	1.788e-04	-19996	<2e-16 ***
col6	-3.407e+00	2.001e-04	-17029	<2e-16 ***
col7	-1.851e+00	1.197e-04	-15468	<2e-16 ***
col8	-1.989e+00	1.994e-04	-9975	<2e-16 ***

Signif. codes: 0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

(Dispersion parameter for poison family taken to be 1)

Null deviance: 6551152055 on 35 degrees of freedom

Residual deviance: 149405718 on 21 degrees of freedom

(28 observations deleted due to missingness)

AIC: 149406456

Number of Fisher Scoring iterations: 5

Annexe IV : Estimation des paramètres de la loi normale

Call:

lm(formula = log(y) ~ lig + col)

Residuals:

Min	1Q	Median	3Q	Max
-1.03483	-0.12014	0.02375	0.17228	1.03483

Coefficients:

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t)
(Intercept)	19.1036	0.2591	73.742	< 2e-16 ***
lig2	0.4958	0.2553	1.942	0.06565 .
lig3	0.4482	0.2708	1.655	0.11270
lig4	0.3662	0.2889	1.268	0.21876
lig5	0.7435	0.3126	2.379	0.02694 *
lig6	0.7572	0.3472	2.181	0.04068 *
lig7	1.1086	0.4060	2.730	0.01253 *
lig8	1.0726	0.5433	1.974	0.06166 .
col2	-0.5492	0.2553	-2.151	0.04324 *
col3	-2.0287	0.2708	-7.493	2.32e-07 ***
col4	-2.8159	0.2889	-9.748	3.02e-09 ***
col5	-3.5986	0.3126	-11.513	1.56e-10 ***
col6	-3.5140	0.3472	-10.123	1.56e-09 ***
col7	-2.5512	0.4060	-6.283	3.13e-06 ***
col8	-1.9894	0.5433	-3.662	0.00145 **

Signif. codes: 0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 0.4776 on 21 degrees of freedom

(28 observations deleted due to missingness)

Multiple R-squared: 0.9434, Adjusted R-squared: 0.9056

F-statistic: 24.99 on 14 and 21 DF, p-value: 5.874e-10

Annexe V : Estimation de la loi gamma

Call:

glm(formula = y ~ lig + col, family = Gamma(link = "log"))

Deviance Residuals:

Min	1Q	Median	3Q	Max
-1.23069	-0.13004	0.00151	0.12708	0.64216

Coefficients:

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t)
(Intercept)	19.1360	0.2194	87.223	< 2e-16 ***
lig2	0.4415	0.2162	2.042	0.053864 .
lig3	0.4251	0.2293	1.854	0.077822 .
lig4	0.3597	0.2446	1.470	0.156332
lig5	0.7612	0.2647	2.876	0.009051 **
lig6	0.7162	0.2940	2.436	0.023830 *
lig7	1.0727	0.3439	3.120	0.005182 **
lig8	1.0402	0.4601	2.261	0.034516 *
col2	-0.5354	0.2162	-2.477	0.021846 *
col3	-2.0049	0.2293	-8.744	1.92e-08 ***
col4	-2.7849	0.2446	-11.384	1.91e-10 ***
col5	-3.5752	0.2647	-13.506	7.99e-12 ***
col6	-3.4126	0.2940	-11.608	1.34e-10 ***
col7	-2.0747	0.3439	-6.034	5.48e-06 ***
col8	-2.0218	0.4601	-4.394	0.000253 ***

Signif. codes: 0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

(Dispersion parameter for Gamma family taken to be 0.163578)

Null deviance: 67.9384 on 35 degrees of freedom

Residual deviance: 4.3419 on 21 degrees of freedom

(28 observations deleted due to missingness)

AIC: 1343

Number of Fisher Scoring iterations: 10

Annexe VI : Méthode de cout moyen et de cadence des règlements

Méthode de cout moyen

Dans cette méthode, il s'agit d'appliquer un cout moyen estimé aux sinistres connus. Elle est appliquée aux années pour lesquelles la provision pour sinistre à payer (PSAP) calculée par la méthode dossier/dossier est supérieure à 30% de la charge totale des sinistres de chacune de ces années.

$$\text{ChargeCM}_i = \text{PSAP}^{\text{Dossier/dossier}} + \text{Règlement}_i$$

$$\text{si } \frac{\text{PSAP}_i^{\text{Dossier}}}{\text{ChargeCM}_i} < 30\% \text{ ou } \frac{\text{PSAP}_i^{\text{Dossier}}}{\text{ChargeCM}_i} > 30\% \text{ et } N_i^{\text{ouvert}} * \text{CM} - \text{Règlement}_i^{\text{ouvert}} > 0$$

⇒

$$\text{PSAP}_i^{\text{CM}} = \text{PSAP}_i^{\text{Dossier/Dossier}}$$

$$\text{Sinon } \text{PSAP}_i^{\text{CM}} = N_i^{\text{ouvert}} * \text{CM} - \text{Règlement}_i^{\text{ouvert}} + \text{IBNR}_i$$

Méthode de cadence de règlements

Hypothèse

Dans cette méthode, on suppose l'absence des perturbations de règlements dans le temps en d'autre terme, le passé se reproduit :

- Absence d'évènements perturbateurs tels que : grève, manifestation...
- Les outils de traitements des données restent intacts
- La politique de souscription reste la même...

Par la suite, on détermine la cadence de paiements pour chaque année de liquidation à partir du triangle des règlements cumulés par exercice comptable et le triangle de l'évolution des charges.

Ainsi, la réserve pour l'année i est déterminée par :

$$\text{Reserve}_i = \text{Règlements cumulés}_{i,n-1-i} * \frac{1 - \text{Cadence}_{n-i-1}}{\text{Cadence}_{n-i-1}}$$

