

ROYAUME DU MAROC
*_**_*_*_*
HAUT COMMISSARIAT AU PLAN
*_**_*_*_*_*_*_*_*

INSTITUT NATIONAL
DE STATISTIQUE ET D'ECONOMIE APPLIQUEE

INSEA



Projet de Fin d'Etudes

**Solvabilité II :
application en assurance vie**

Préparé par : *Mlle EDDARAKI Hasnae*
Mlle ZITI Rabab

Sous la direction de : *Mr MARRI Fouad (INSEA)*
Mme ARICHI Zineb (SAHAM Assurance)
Mr NAHIL Anass (SAHAM Assurance)

Soutenu publiquement comme exigence partielle en vue de l'obtention du

Diplôme d'Ingénieur d'Etat

Option : Actuariat-Finance

Devant le jury composé de :

- *Mr MARRI Fouad (INSEA)*
- *Mr EL QALLI Yassine (INSEA)*
- *Mr NAHIL Anass (XXXX)*

Juin 2014

" Mon Seigneur ! Fais-moi entrer d'une entrée qui soit juste, et fais-moi sortir d'une sortie qui soit juste. Accorde-moi, venant de Toi, une autorité victorieuse ! "

Coran, AL-ISRA (LE VOYAGE NOCTURNE), verset 79.

Résumé.

A l'instar des pays européens le Maroc s'est orienté vers la mise en place d'une nouvelle réforme de la solvabilité des compagnies d'assurance. Il s'agit de la directive Solvabilité II, dictée par la Commission européenne dans un souci de protection des intérêts des assurés.

Cette nouvelle réforme s'articule autour de trois piliers. Le premier revêt un caractère quantitatif dans la mesure où il est destiné au calcul du minimum de capital requis MCR et du capital cible SCR. En revanche, le second pilier revêt un caractère qualitatif et exige la mise en place d'un système de gouvernance efficace, pour une gestion plus prudente des risques. Quant au troisième pilier, il définit les informations que doivent fournir les compagnies d'assurance dans le cadre de la transparence financière et de la diffusion de l'information.

La particularité de Solvabilité II réside dans sa prise en compte de tous les risques auxquels peuvent être soumis les assureurs et les réassureurs, tels que les risques de marché ou les risques opérationnels. Ainsi, cette réforme rejoint-elle les perspectives de la réforme Bâle II dans le domaine bancaire.

Ce présent travail se focalise sur le premier pilier de la réforme Solvabilité II en présentant, d'un point de vue théorique et pratique, des méthodes destinées au calcul du capital économique, tout en respectant les spécifications de la cinquième étude quantitative d'impact QIS 5.

Le SCR, capital économique, correspond au montant de fonds propres dont doit disposer la compagnie pour faire face à une ruine économique à horizon 1 an et au niveau de confiance 99,5%. Son calcul peut s'opérer suivant la formule standard, dans le cadre d'une approche « bottom up » qui consiste à agréger les exigences élémentaires en capital correspondant à une variation positive de l'actif net, suite à un choc prédéfini par QIS 5, tout en tenant compte des éventuelles corrélations entre les différents risques, moyennant les matrices de corrélation déterminées par QIS 5. Cependant, il s'avère être plus judicieux de mettre en place un modèle interne stochastique adapté aux spécificités du portefeuille de la compagnie d'assurance. Ce modèle peut être élaboré, en assurance vie, par le biais des simulations dans des simulations « SdS » ou par une réplique du passif en actifs « Replicating portfolio » ou bien en usant de méthodes de proxy tel que « LSMC » et « Curving fitting » dont le dessein est de pallier les défauts de la méthode de référence « SdS ».

L'objet de ce travail est de calculer un capital économique en assurance vie moyennant la formule standard et un modèle interne adapté aux spécificités des produits prépondérants du portefeuille de SAHAM Assurance, à savoir le produit Décès-Emprunteur et le produit Retraite.

Mots-clés.

Solvabilité II, capital économique (SCR), études quantitatives d'impact (QIS), formule standard, modèle interne, simulations dans simulations (SdS), Replicating Portfolio, Least Square Monte Carlo (LSMC), minimum de capital requis (MCR), générateur de scénarios économiques, risque de marché, risque opérationnel, bilan économique, gestion actif-passif (ALM).

Dédicace.

Tout d'abord, louange à « Allah » qui m'a guidé sur le droit chemin tout au long du travail et m'a inspiré les bons pas et les justes réflexes.

Je dédie ce travail aux personnes qui m'ont toujours aidée, encouragée et soutenue et qui ne cessent de le faire :

ma mère, la lumière de mes jours, la source de mes efforts, la flamme de mon cœur qui a œuvré pour ma réussite, qui a toujours cru en moi et qui a mis à ma disposition tous les moyens nécessaires pour que je réussisse dans mes études ;

mon père, celui qui ne se lassait jamais pour aménager tous ses efforts pour garantir ma réussite, qui peut être fier et trouver ici le résultat de son amour, son soutien, ses sacrifices consentis, ses précieux conseils, son assistance et sa présence dans ma vie ;

mes frères et mes sœurs qui n'ont cessé d'être pour moi des exemples de persévérance, de courage et de générosité ;

ma grand-mère, mon exemple éternel, mon soutien moral et ma source de joie et de bonheur. Merci pour les valeurs nobles, l'éducation et le soutien permanent venu de toi ;

Hamza, pieu, vertueux et modèle de persévérance, qui a toujours incarné à mes yeux, la bonté, la sagesse et l'honnêteté ;

Meriem, celle qui me reconforte et m'encourage dans les moments les plus difficiles de ma vie ;

mes tantes et mes oncles, ceux qui m'ont indiqué la bonne voie en me rappelant que la volonté fait toujours les grands hommes et qui ont attendu avec patience les fruits de leurs bonne éducation ;

ma famille, merci pour tout votre amour et votre confiance, pour m'avoir aidée à ranger mon éternel désordre et votre support pendant mon stage ;

Rabab, mon binôme, ma co-chambre et la meilleure amie que je n'ai jamais eu.

Hasnae.

Dédicace.

Cette dédicace est le moins que je puisse faire pour rendre hommage

aux personnes qui m'ont toujours soutenue,

qui m'ont toujours portée conseil

et qui m'ont toujours aidée de près ou de loin

pour apprendre, mûrir, croître et surtout pour réussir.

Qu'ils trouvent dans ces quelques lignes

le témoignage de ma profonde gratitude

et l'expression de mes sentiments les plus distingués.

Je dédie ce présent travail,

qui vient couronner non pas seulement mes quatre mois de stage

mais plutôt toutes les années de labeur et de zèle à compter

de mes premiers jours aux bancs de l'école,

à mes très chers parents pour leur bienveillance,

leur amour sans pareil et leurs sacrifices,

à mon frère Majid et mes sœurs Hasnaa et Amina

pour leurs encouragements, leurs conseils et leur attention,

au corps professoral de notre prestigieux institut pour son grand sérieux,

ses efforts et son sens de responsabilité,

à mes chers amis INSEAistes, particulièrement, Sara, Nawal et Bouchaib,

pour leur sens de partage, leur sens de collaboration et leurs encouragements,

et à mon binôme, Hasnae, pour son esprit d'équipe et d'initiative.

Rabab.

Remerciements.

Nous tenons à exprimer notre profonde gratitude envers le corps professoral de l'Institut National de Statistique et d'Economie Appliquée, particulièrement notre encadrant Monsieur MARRI Fouad pour sa disponibilité, son attention et son soutien tout au long de l'élaboration de notre Projet de Fin d'Etudes.

Nous tenons aussi à remercier Madame ARICHI Zineb et Monsieur NAHIL Anass qui ont fait preuve de patience, de rigueur et de bienveillance pour mener à bien l'encadrement de notre Projet de Fin d'Etudes au sein de SAHAM Assurance.

En outre, l'actuariat et la finance étant au cœur de notre Projet de Fin d'Etudes nous ne pouvons manquer l'expression de notre reconnaissance envers Monsieur OULIDI Abderrahim et Monsieur EL QALLI Yassine qui, pendant ces deux dernières années, nous ont garanti la maîtrise des acquis nécessaires pour appréhender un sujet dans le cadre de la réforme Solvabilité II, qui s'inscrit dans la même logique de Bâle II que nous avons eu l'opportunité de comprendre à travers les cours de Monsieur CHATER, que nous remercions par la même occasion.

Nous adressons aussi nos remerciements aux étudiants et aux lauréats de l'Institut National de Statistique et d'Economie Appliquée pour leur échange, leur collaboration et leur encouragement.

Nous ajoutons un vif remerciement à Monsieur DEVOLDER Pierre pour ses remarques et ses conseils avisés.

Enfin, une attention toute particulière à Monsieur EL OUALI Mohammed pour son esprit d'initiative et de responsabilité, ainsi qu'à tout le personnel de SAHAM Assurance particulièrement celui du département Réassurance et Actuariat pour son chaleureux accueil et sa générosité.

Liste des abréviations.

ADE	: <i>Assurance Décès-Emprunteur</i>
Adj	: <i>Adjustment</i>
ALM	: <i>Asset Liability Management</i>
ANCFCC	: <i>Agence Nationale de Conservation Foncière du Cadastre et de la Cartographie</i>
AOA	: <i>Absence d'Opportunité d'Arbitrage</i>
BAM	: <i>Bank Al-Maghrib</i>
BE	: <i>Best Estimate</i>
BEG	: <i>Best Estimate Garanti</i>
BS	: <i>Black & Scholes</i>
BSCR	: <i>Basic Solvency Capital Requirement (capital requis de base)</i>
CEIOPS	: <i>Committee of European Insurance and Occupational Pension Supervisors</i>
CRD	: <i>Capital Restant Du</i>
CIR	: <i>Cox, Ingersoll et Ross</i>
Corr	: <i>Corrélation</i>
CSR	: <i>Capital Sous Risque</i>
EIOPA	: <i>European Insurance Occupational Authority</i>
ESG	: <i>Economic scenarios generator</i>
EDS	: <i>Equation Différentielle Stochastique</i>
FDB	: <i>Futures Excédents Discretionnaires</i>
FP	: <i>Fonds Propres</i>
GARCH	: <i>Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedastic</i>
IASB	: <i>International Accounting Standards Board</i>
IFRS	: <i>International Financial Reporting Standards</i>
Inf	: <i>Inférieur</i>
LSMC	: <i>Least Square Monte Carlo</i>
Lifecat	: <i>Life Catastrophe</i>
Lifeexp	: <i>Life Expensive</i>
Lifelong	: <i>Life Longevity</i>

Lifemort	: <i>Life Mortality</i>
Liferev	: <i>Life Revision</i>
Max	: <i>Maximum</i>
MC	: <i>Market Consistent</i>
MSC	: <i>Marge de Solvabilité Constituée</i>
MCR	: <i>Minimum Capital Requirement (Capital Minimum requis)</i>
MSR	: <i>Marge de Solvabilité Réglementaire</i>
MV RFP	: <i>Valeur du Marché du Portefeuille Répliquant</i>
NAV	: <i>Net Assset Value</i>
ONCST	: <i>Autorité de Contrôle Prudentiel dans les Orientations Nationales Complémentaires aux Spécifications Techniques</i>
OPCVM	: <i>Organisme de Placement Collectif en Valeurs Mobilières</i>
Op	: <i>Opérationnel</i>
PB	: <i>Participation aux Bénéfices</i>
PM	: <i>Provisions Mathématiques</i>
ps	: <i>Presque surement</i>
PSAP	: <i>Provision Pour Sinistres à Payer</i>
PPNA	: <i>Provision Pour Primes Non Acquises</i>
QIS	: <i>Quantitative Impact Study</i>
RS	: <i>Rachat Structurel</i>
RC	: <i>Rachat Conjoncturel</i>
RT	: <i>Rachat Total</i>
SCR	: <i>Solvency Capital Requirement (Capital Cible)</i>
SCRIntang	: <i>SCR Intangible</i>
SdS	: <i>Simulations dans les Simulations</i>
Solva	: <i>Solvabilité</i>
TMG	: <i>Taux minimum garanti</i>
TMP	: <i>Taux moyen pondéré</i>
VaR	: <i>Value at Risk</i>
VEP	: <i>Valeur Economique des Passifs</i>
VIF	: <i>Value in Force</i>

Introduction.

Il va sans dire que tout assureur est tenu de fournir une vision prospective de sa solvabilité moyennant des indicateurs d'incertitude liée à sa capacité de couvrir ses engagements réglementaires. Cependant, la détermination de ces indicateurs, particulièrement en assurance vie, s'avère être délicate et ardue.

L'assurance vie présente un levier crucial d'action sur l'économie par le biais de ses produits diversifiés : retraite, épargne et décès emprunteur. Etant un outil encourageant l'investissement à long terme, elle constitue un moteur de l'économie avec son cycle de production inversé. En effet, l'assureur recueillant des primes et indemnisant des sinistres par la suite, confie entre temps des montants colossaux en faveur de l'intérêt de l'assuré. Dès lors, la gestion des risques demeure une préoccupation majeure de l'assurance vie et de sa réglementation.

Par ailleurs, l'incertitude des marchés et les risques supportés par les assureurs nécessitent un processus de diffusion d'information rigoureux. Ainsi, la fiabilité des renseignements constitue une exigence nécessaire pour que les investisseurs, les analystes et les superviseurs puissent avoir une idée complète sur la santé et la performance de la compagnie.

La disposition d'un ensemble d'indicateurs susceptibles d'évaluer la richesse ainsi que les engagements d'une compagnie d'assurance s'avère être nécessaire pour le pilotage de la gestion au niveau de la compétitivité ainsi qu'au niveau de la solvabilité. L'idée est de chercher un dispositif et des mesures qui reflètent un niveau suffisant pour tenir compte des différents risques inhérents à l'activité d'assurance et à améliorer la compréhension, la transparence et la comptabilité des informations fournies par les compagnies au sujet de leur situation financière dans le dessein d'assurer le plus fidèlement possible la pérennité de la société dans des conditions nuisibles.

Avec l'entrée en vigueur de la directive solvabilité II, les assureurs sont confrontés à une restructuration vigoureuse de leurs façons d'évaluation et de gestion de risque. La plus grande phase de cette mutation de l'assurance est la rénovation des outils de calcul du capital économique qui représente le capital nécessaire au titre de ses fonds propres pour assurer la solvabilité à l'horizon d'un an au seuil 99,5%.

Solvabilité II est un projet de réforme européenne qui s'inscrit dans la lignée du dispositif prudentiel Bâle II dans la mesure où il s'agit d'une réglementation prudentielle qui incite les organismes d'assurance et de réassurance à mesurer les risques auxquels ils s'exposent.

Cette réforme, s'appliquant au secteur de l'assurance, préconise une approche prospective et stochastique pour le calcul des exigences en capital contrairement à Solvabilité I qui propose une approche rétrospective et déterministe qui n'est pas le reflet de la réalité. La réglementation actuelle, Solvabilité I, veille à ce que les assureurs évaluent au mieux leurs engagements et met l'accent sur la constitution de provisions techniques prudentes. En

revanche, la solvabilité II destiner à harmoniser les normes de solvabilité ainsi que la meilleure prise en compte des risques au point de vue quantitatif que qualitatif.

Les dispositions réglementaires (Solvabilité II), de communication financières (EEV/MCEV) ou comptables (IFRS), s'inscrivent dans le but d'identifier les risques et les analyser le plus finement. Le but primordial de la Solva II est la détermination d'exigences de solvabilité auxquelles l'assureur doit répondre alors que l'information des marchés financiers est l'objectif crucial des autres dispositions, il n'en demeure pas moins que tous ces référentiels s'attachent à valoriser les indicateurs clé associés au bilan économique selon une vision économique en utilisant les outils de projection les plus performants (Best Estimate).

En présence des options et des garanties cachées qui génèrent des interactions fortes entre l'actif et le passif, la modélisation des éléments composant le capital cible s'avère particulièrement délicate. En effet, le calcul des provisions techniques dans le cadre du pilier 1 s'effectue le plus souvent par des simulations, ce qui conduit à une imbrication de simulations. Cependant, plusieurs techniques ont été développées pour remplacer le plus possible l'imbrication des simulations, soit par une sélection des trajectoires ou par une estimation des proxys du passif de la compagnie.

Dans quelle mesure Solvabilité II a-t-elle permis de mieux tenir compte des différents risques assurantiels dans la branche vie ? Pour répondre à cette problématique, le présent rapport explique les raisons qui se tiennent derrière le passage de Solvabilité I à Solvabilité II tout en explicitant le passage du bilan comptable au bilan économique (chapitres I et II). Par ailleurs, la vocation du projet étant le calcul du SCR pour un portefeuille Décès-Emprunteur et un portefeuille Retraite, un aperçu sur l'assurance vie, particulièrement, les options cachées et les garanties financières, s'avère être cruciale pour amorcer la théorie des simulations des simulations dans le cadre de l'élaboration d'un modèle interne qui permet tout comme la formule standard de calculer le SCR mais de manière plus adaptée aux spécificités du portefeuille de la compagnie (chapitres III et IV). Cependant, la méthode SdS ayant fait preuve de ses limites en termes de temps et d'allocation de mémoire, le recours à des méthodes de proxy notamment LSMC, « Replicating Portfolio » et « Curving Fitting » est de plus en plus fréquent (chapitre V). La mise en œuvre de ces diverses méthodes requière une modélisation de l'actif destiné à la couverture de chacun des portefeuilles précités et une description de leurs spécificités (chapitre VI et VII). Enfin, l'application de la formule standard et l'élaboration d'un modèle interne, moyennant l'outil Excel VBA, permettent d'obtenir le capital économique réduit par un coefficient pour des raisons de confidentialité (chapitre V).

Résumé.....	3
Mots-clés.....	4
Dédicace.....	5
Dédicace.....	6
Chapitre 1 : De Solvabilité I à Solvabilité II	18
I. SOLVABILITE I.....	18
I.1Présentation de la solvabilité I.....	18
I.2 La marge de solvabilité réglementaire.....	18
I.4Limites de la solvabilité I.....	18
II. SOLVABILITE II.....	19
II.1Objectifs de la solvabilité II.....	19
II.2Piliers de la solvabilité II.....	19
II.2.1Pilier I : exigences quantitatives en capital.....	19
II.2.2 Pilier II : surveillance prudentielle.....	19
II.2.3Pilier III : diffusion de l’information.....	20
II.2.4 Capital minimum requis.....	20
II.2.5 Capital cible.....	20
II.2.7 Value at Risk.....	20
III. ETUDES QUANTITATIVES D’IMPACT (QIS).....	22
III.1QIS 1.....	22
III.2QIS 2.....	22
III.3QIS 3.....	22
III.4QIS 4.....	22
III.5QIS 5.....	23
Chapitre 2 : Bilan économique vs bilan comptable.....	24
I. LE BILAN.....	24
I.1 L’actif (Asset).....	24
I.1 Le passif (Liability) :.....	25
I.1.1 Les fonds propres.....	25
I.1.1 Les provisions techniques.....	25
II. LE BILAN DANS LE REFERENTIEL SOLVABILITE II.....	28
II.1 Différence entre bilan comptable et bilan économique.....	28
II.2 Comparaison entre le bilan dans les deux dispositifs de solvabilité : I et II.....	28
Chapitre 3 : l’assurance vie.....	29
I. PRESENTATION DE L’ASSURANCE VIE.....	29
I.1Définition de l’assurance vie.....	29
I.2Types de l’assurance vie.....	29

II.	LES OPTIONS CACHEES ET GARANTIES FINANCIERES.	31
II.1	Taux minimum garanti TMG.	31
II.2	Les rachats.	31
II.3	Les versements libres.	31
III.	Les provisions techniques vision (QIS 5) :	31
III.1	Le Best Estimate :	32
III.1	La marge pour risque :	33
Chapitre 4 : calcul du SCR.		36
I.	Cartographie des risques assurantiels.	36
I.1	Le risque de marché.	36
I.2	Le risque de taux.	37
I.3	Le risque action.	37
I.4	Le risque immobilier.	37
I.5	Le risque de devise.	37
I.6	Le risque de spread.	37
I.7	Le risque de concentration.	37
I.8	Le risque d'illiquidité.	38
I.9	Le risque de défaut de contrepartie.	38
I.10	Le risque de souscription vie.	38
I.11	Le risque de souscription santé.	38
I.12	Le risque de souscription non vie.	38
I.13	Le risque opérationnel.	39
I.14	Cartographie des risques assurantiels.	39
II.	Le besoin en capital selon la formule standard dans le référentiel Solvabilité II.	40
II.1	Formule de calcul du SCR.	40
II.2	Calcul de l'exigence de capital propre élémentaire.	40
II.2.1	Le besoin en capital résultant du risque de souscription vie.	42
II.2.2	Le besoin en capital résultant du risque de marché.	44
II.3	Agrégation des modules.	48
II.4	Le SCR opérationnel.	48
II.5	Ajustement.	49
III.	Le capital économique dans le cadre d'un modèle interne.	50
III.1	La première approche (l'actualisation des résultats).	50
III.2	La deuxième approche (Best Estimate) :	51
IV.	Le modèle interne en assurance vie.	52
IV.1	Le Générateur d'assurance vie.	53
IV.2	Le modèle ALM :	53

V.	Capital économique approche par SdS (Nested Simulations).....	53
V.1	Projections futures : Univers Réel vs Risque-Neutre :	54
V.2	Description de l'approche SdS.....	55
Chapitre 5 : Problème de la méthode des simulations dans les simulations.....		57
I.	L'ACCELERATEUR DE SdS.....	57
II.	LA METHODE CURVING FITTING.....	57
III.	LA METHODE REPLICATING PORTFOLIO.	58
IV.	LA METHODE LSMC.	61
Chapitre 6 : modélisation de l'actif.		63
I.	FORMALISATION MATHEMATIQUE.....	63
I.1	Mouvement brownien.....	63
I.2	Processus stochastique.....	63
I.3	Lemme d'ito.	64
I.4	Méthode d'inversion de la fonction de répartition.	64
I.5	La discrédance.	64
II.	Générateur de nombres aléatoires.....	65
II.1	le générateur pseudo aléatoire.	65
II.2	Le générateur quasi aléatoire.....	65
III.	Simulation de variables aléatoires gaussiennes.	66
III.1	Algorithme de MORO.	66
III.2	Méthode de Box Muller.	66
IV.	Les tests statistiques des générateurs aléatoires.	66
IV.1	Test de X2 D'ajustement.	66
IV.2	Test de Kolmogrov Smirnov.	66
IV.3	Test d'Anderson-Darling.....	67
IV.4	Test de Shapiro-Wilk.....	67
V.	Modélisation des taux d'intérêt.	67
I.1	Le modèle de Vasicek.....	68
I.1.1	Présentation du modèle.	68
I.1.2	Prix du zéro coupon.....	69
I-1-3	Limites du modèle.	69
I.2	Le modèle de Cox Ingersoll Ross.....	70
I.2.1	Présentation du modèle.	70
I.2.2	Prix du zéro coupon.....	70
I.2.3	Discrétisation du modèle.	71
I.2.4	Estimation des paramètres.....	72
VI.	Modélisation des actions.	72

II.1 Le modèle de Black-Scholes.....	73
II.2 Le modèle de Merton.....	73
II.3 Le modèle GARCH.....	75
VII. Modélisation des obligations.....	75
VIII. Modélisation de l'actif immobilier.....	75
IX. Modélisation des OPCVM-taux.....	76
X. Les modèles de dépendances.....	76
Chapitre 7 : Présentation des portefeuilles étudiés.....	78
I. PORTEFEUILLE DE L'ASSURANCE DECES-EMPRUNTEUR.....	78
I.1 Définition d'une assurance emprunteur.....	78
I.2 Typologies des contrats Décès-Emprunteur.....	78
I.2.1 Les contrats groupes.....	78
I.2.2 Les contrats individuels.....	79
I.3 L'objet du contrat étudié.....	79
I.4 Le traitement de la base de données.....	79
I.5 Un aperçu sur la base de données.....	80
II. LE PORTEFEUILLE RETRAITE.....	81
II.1 Définition de la retraite complémentaire.....	81
II.2 L'objet du contrat étudié.....	81
II.2 Le traitement de la base de données.....	82
III. Modélisation des éléments dynamiques liés à ces portefeuilles.....	83
III.1 Modélisation du rachat.....	83
III.1.1 Les rachats structurels.....	83
III.1.2 Les rachats conjoncturels.....	84
III.1.3 Les rachats totaux.....	85
III.2 Modélisation de la mortalité.....	85
Chapitre 8 : Application en assurance vie.....	85
I. MODELISATION DES ACTIFS.....	86
II. APPLICATION AU PORTEFEUILLE DECES EMPRUNTEUR.....	88
II.1 Le modèle interne.....	88
II.2 La formule standard.....	91
III. APPLICATION AU PORTEFEUILLE RETRAITE.....	94
III.1 Le modèle interne.....	94
III.2 La formule standard.....	98
Conclusion.....	103
Bibliographie.....	104

Chapitre 1 : De Solvabilité I à Solvabilité II

Pouvoir faire face aux engagements est un souci majeur de la réglementation des compagnies d'assurance. Dès lors, le dispositif actuel, Solvabilité I, ayant fait preuve de plusieurs limites, la mise en place d'une nouvelle réforme s'avère être indispensable. A cet égard, une série d'études quantitatives d'impact QIS a été lancée par EIOPA, European Insurance Occupational Authority (ex CEIOPS), pour mener à bien la mise en place de la réforme Solvabilité II.

L'objet de ce chapitre est de présenter un aperçu des deux dispositifs de Solvabilité, I et II, tout en explicitant les limites du premier et les mesures prudentielles du second. L'accent est mis sur l'architecture de Solvabilité II et sur l'évolution des études quantitatives d'impact QIS dont le dessein est d'évaluer la faisabilité de Solvabilité II.

I. SOLVABILITE I.

Jusqu'à présent, les entreprises d'assurance marocaines adoptent une optique de solvabilité s'inspirant de la directive européenne Solvabilité I.

I.1 Présentation de la solvabilité I.

Solvabilité I impose aux assureurs de détenir des fonds propres équivalents à l'exigence de marge de solvabilité ou au fonds minimum de garantie si ce dernier est d'un montant supérieur. Solvabilité I est constitué par deux éléments : la marge de solvabilité réglementaire (MSR) et la marge de solvabilité constituée (MSC).

La marge de solvabilité réglementaire est indexée sur le risque de tarification. Le calcul est en effet proportionnel aux primes, aux sinistres et aux provisions techniques. Le montant ainsi calculé doit être couvert par la marge de solvabilité constituée, déterminée à partir de fonds propres, de quasi-fonds propres et les plus-values latentes sur les placements.

Le fonds minimum de garantie est fixé à un tiers de l'exigence de marge de solvabilité avec un minimum absolu donné.

I.2 La marge de solvabilité réglementaire.

$MS = 5\%$ des provisions nettes de réassurance, ramené à 1% si le risque de placement est transféré à l'adhérent, en intégrant un ratio destiné à tenir compte forfaitairement de la réassurance + $0,3\%$ des capitaux sous risque non négatifs, net de réassurance.

Certes, ce dispositif garantit un niveau de solvabilité pour les compagnies d'assurances, cependant il recèle des limites qui ne sont pas des moindres.

I.4 Limites de la solvabilité I.

Les limites de la réforme actuelle résident principalement dans le caractère statique de ses calculs qui ne prennent en compte que les montants de provisions de l'année courante, en plus de non prise en compte de tous les risques qui sont supportés par l'entreprise notamment, les risques de taux, les risques de crédit, les risques opérationnels et les risques actif/passif.

Pour mieux illustrer cette limite nous prenons l'exemple de deux entreprises A et B qui ont le même passif mais dont l'actif est investi différemment ; 40% en action et 60% en

obligations pour l'entreprise A et 100% en obligation pour l'entreprise B. Les deux entreprises ont le même besoin en capital sous solvabilité I, cependant, la première est beaucoup plus exposée au risque de marché.

En outre, l'hétérogénéité des systèmes prudentiels des pays ne permet pas de comparer deux compagnies et peut donner lieu à des avantages concurrentiels entre deux pays.

Ainsi, le dessein de la nouvelle réforme, solvabilité II, est de pallier les défauts de la réforme actuelle.

II. SOLVABILITE II.

Le contrat-programme signé en mai 2011 par le gouvernement marocain et le secteur des assurances a prévu la convergence vers Solvabilité II.

II.1 Objectifs de la solvabilité II.

L'objectif majeur de la nouvelle réglementation Solvabilité II est de renforcer la solvabilité des compagnies d'assurance et de garantir une meilleure gestion des risques à travers l'utilisation de modèles internes pour évaluer les besoins en fonds propres.

Par ailleurs, cette réforme vise la cohérence avec les normes internationales et intersectorielles comme les normes comptables internationales IFRS de l'IASB2 ou le système bancaire Bâle II et permet de faciliter la supervision de la solvabilité des entreprises par les autorités de contrôle.

Afin d'atteindre les objectifs précités, la nouvelle réforme se présente comme une architecture de trois piliers.

II.2 Piliers de la solvabilité II.

La réforme solvabilité II repose sur trois piliers dont le but est de répondre à trois exigences ; quantitatives, qualitatives et de transparence.

II.2.1 Pilier I : exigences quantitatives en capital.

Le premier pilier, exigences quantitatives en capital, définit des seuils quantitatifs aussi bien pour les provisions techniques que pour les fonds propres. Nous distinguons entre deux niveaux de fonds propres : le MCR (Minimum Capital Requirement ou Capital Minimum requis) et le SCR (Solvency Capital Requirement ou Capital cible) ; le premier représente le niveau minimum de fonds propres en dessous duquel l'intervention de l'autorité de contrôle devient automatique, tandis que le SCR représente le capital cible nécessaire pour absorber un choc provoqué par une sinistralité exceptionnelle.

II.2.2 Pilier II : surveillance prudentielle.

Le deuxième pilier, surveillance prudentielle, fixe des normes qualitatives de suivi des risques en interne aux sociétés et définit la manière avec laquelle l'autorité de contrôle doit exercer ses pouvoirs de surveillance dans ce contexte. En effet, les entreprises d'assurance et de réassurance sont tenues de mettre en place un système de gouvernance efficace leur permettant de garantir une gestion prudente de leur activité. Par ailleurs, elles devront procéder à l'évaluation de leur besoin global de solvabilité dans le cadre de leur système de gestion des risques. Les autorités de contrôle auront un droit de regard sur le fonctionnement et la gestion de la compagnie d'assurance ainsi que sur l'ensemble de ses risques.

II.2.3 Pilier III : diffusion de l'information.

Le troisième pilier, diffusion de l'information, a pour objectif de définir l'ensemble des informations détaillées que les autorités de contrôle jugeront nécessaires pour exercer leur pouvoir de surveillance. Les assureurs et réassureurs auront donc à fournir les informations clés nécessaires à la détermination de leur exigence de capital.

Le schéma suivant reprend les éléments de chaque pilier de Solvabilité II.

Solvabilité II		
Pilier 1	Pilier 2	Pilier 3
Exigences quantitatives	Processus de contrôle prudentiel	Transparence et communication
<ul style="list-style-type: none">➤ Provisions techniques➤ Fonds propres :<ul style="list-style-type: none">- capital minimum requis (MCR)- capital cible (SCR)	<ul style="list-style-type: none">➤ Gestion des risques➤ Contrôle interne➤ Gouvernance➤ Supervision	<ul style="list-style-type: none">➤ Transparence financière➤ Publication d'informations➤ Supervision par des mécanismes de marché
Formule standard // Modèle interne		

Figure 1. Piliers de Solvabilité II.

II.2.4 Capital minimum requis.

L'exigence minimale de capital ou (Minimum Capital Requirement) représente le niveau minimum de fonds propres en dessous duquel les intérêts des assurés se verraient sérieusement menacés si l'entreprise était autorisée à poursuivre son activité. En d'autres termes, c'est le niveau requis en dessous duquel l'intervention prudentielle de l'autorité de contrôle, incluant le retrait de l'agrément, est automatique.

La méthode de calcul diffère selon les QIS, le QIS5 suggère un calcul simplifié et fiable donné par le maximum entre l'intervalle 25% et 45% du SCR et une quantité fixée donnée par la directive de Solvabilité II.

II.2.5 Capital cible.

Le SCR est le capital réglementaire qui permet à l'assureur d'absorber les pertes imprévues et d'honorer ses engagements envers les assurés. Il indique le montant de capital requis pour qu'il puisse faire face à ses obligations pendant un horizon temporel d'un an avec un niveau de confiance de 99.5%. Autrement dit, il est censé refléter le seuil d'alerte qui nécessite une analyse afin de revenir à une situation plus solvable. Le QIS 5 permet de le calculer, au choix, suivant un modèle interne ou un modèle standard.

II.2.7 Value at Risk

Avant d'entamer la définition de la mesure de risque Value At Risk qui est au centre des principales réglementations récentes (Bâle II, Solvency II), il s'avère nécessaire d'éclaircir quelques notions importantes :

- Le risque :

Le risque est une perte potentielle, inséparable à une situation ou à une activité, associée à la probabilité de l'occurrence d'un événement.

- La gestion de risque :

La gestion de risque est une évaluation et anticipation des risques potentielles, avec une mise en place d'un système de surveillance.

- La mesure de risque :

La mesure de risque correspond au montant de capital indispensable pour tolérer l'incertitude au niveau des valeurs futures de la position.

En notant X la valeur future du portefeuille et r l'actif sûr, la vérification de la mesure s'effectue selon les cinq critères suivants :

- Sous-additivité :

La sous-additivité indique que la mesure de risque de la somme de deux portefeuilles est plus petite que la somme des mesures de risques des deux portefeuilles. En d'autres termes, l'agrégation des portefeuilles minimise l'exposition au risque calculé. Ce phénomène fait référence à l'effet de diversification.

$$\forall X, \forall Y \quad \mu(X + Y) \leq \mu(X) + \mu(Y)$$

- Homogénéité positive

Cette propriété montre que la taille du portefeuille ne doit pas avoir des effets sur la mesure de risque.

$$\forall X, \forall a \geq 0 \quad \mu(aX) = a\mu(X)$$

- Monotonie

Le sens de cet axiome explicite qu'un portefeuille est plus risqué s'il offre un rendement inférieur.

$$\forall X \geq Y \quad \mu(X) \leq \mu(Y)$$

- Invariance par translation

Ce principe confirme que l'ajout d'un montant au résultat de l'actif entraîne une diminution au niveau de la réserve.

$$\forall X, \forall a \quad \mu(X + (1 + r)b) = \mu(X) - b$$

- Pertinence

Ce principe est nécessaire afin d'empêcher l'oubli de certains risques.

$$\forall X \geq 0 \quad \mu(X) \geq 0$$

La VaR correspond à la perte maximale espérée sur un horizon donné et à un niveau de confiance donné. Autrement dit, c'est le montant de pertes qui ne devrait être devancé qu'avec une probabilité fixée et sur un horizon temporel fixé.

La Value At Risk d'un portefeuille est déterminée par les deux paramètres suivants :

- Le niveau de confiance ou le seuil de probabilité pour que les ruines éventuelles du portefeuille ne précèdent pas le montant de la VaR.
- L'horizon temporel qui représente un facteur important dans la mesure de risque, étant donné que les pertes augmentent avec les horizons longs.

La Value At Risk au niveau α s'interprète statiquement comme le quantile d'ordre α de la distribution de X :

$$\text{VaR}_\alpha(X) = \inf \{x \in \mathbb{R}, P(X \leq x) \geq \alpha\}$$

La VaR a plusieurs champs d'applications notamment le calcul du SCR sous Solvabilité II ou le calcul des capitaux réglementaires sous Bâle II.

En effet, la formule de calcul du SCR est donnée par :

$$\text{SCR} = \text{VaR}_{99,5\%}(X) = \text{FP}_0 - \text{VaR}_{0,5\%}(\text{FP}_1) * P(0,1)$$

avec :

$\text{VaR}_{99,5\%}$: Value At Risk au niveau 99.5% ;

$\text{VaR}_{0,5\%}$: Value At Risk au niveau 0.5% ;

FP_0 : les fonds propre à l'instant 0 ;

FP_1 : les fonds propre à l'instant 1 ;

$P(0,1)$: le prix en $t = 0$ d'un zéro-coupon de maturité 1 an.

III. ETUDES QUANTITATIVES D'IMPACT (QIS).

Une série d'études quantitatives d'impact (QIS) a été lancée par EIOPA, European Insurance Occupational Authority (ex CEIOPS), pour déterminer les impacts possibles de la future norme de Solvabilité visant d'une part l'évaluation de la faisabilité des calculs et de l'impact de Solvabilité II.

III.1 QIS 1.

La première étude d'impact, QIS1, s'est focalisée sur l'étude du niveau de prudence des provisions techniques courantes. L'enjeu étant de mieux calibrer le montant des provisions techniques qui devraient être estimées selon un calcul du « Best Estimate » majoré d'une marge de risque.

Cette étude se compose d'un questionnaire quantitatif et d'un questionnaire qualitatif. Le questionnaire quantitatif reprend les données comptables enregistrées au 31 décembre 2004 et l'estimation des provisions en VAR 75% et 90% à cette même date. Le questionnaire qualitatif reprend entre autres la méthodologie employée pour l'étude, les hypothèses choisies, les difficultés rencontrées dans les calculs. Les données obtenues à partir du QIS1 devraient donc aider le CEIOPS à développer ses positions sur les règles de Solvabilité II.

III.2 QIS 2.

Bien que l'objet affiché de la seconde étude QIS 2 était surtout méthodologique, elle a fourni un premier canevas d'évaluation du besoin en capital et de prise en compte de la diversification des risques élargissant ainsi le champ pour y intégrer une première structure de la formule standard

III.3 QIS 3.

Au-delà mille intervenants du monde de l'assurance ont participé à la troisième étude QIS 3 dont l'objectif principal était d'obtenir un calibrage des formules standards pour le calcul du MCR et du SCR tout en introduisant la problématique spécifique des groupes.

III.4 QIS 4.

La quatrième étude d'impact, QIS 4, permettait d'affiner et de détailler les mesures quantitatives, particulièrement le calibrage de la future exigence de solvabilité, sur les éléments éligibles du capital et les aspects groupes. Cette étude a comporté un questionnaire détaillé sur l'utilisation des modèles internes.

III.5QIS 5.

L'objectif de la dernière études, QIS 5, est de fournir des renseignements détaillés quant aux impacts quantitatifs de Solvabilité II sur le bilan des assureurs et de vérifier la cohérence des spécifications techniques avec les principes et les objectifs développés dans la directive Solvabilité II tout en collectant des données tant quantitatives que qualitatives sur les différentes options politiques qui seront évaluées dans le cadre de l'analyse d'impact sur les futures mesures. Par ailleurs, elle vise l'encouragement des organismes à se préparer à l'introduction de Solvabilité II et à identifier les domaines où leurs procédures internes peuvent nécessiter des améliorations.

Chapitre 2 : Bilan économique vs bilan comptable.

Sous Solvabilité II la valorisation du bilan se fait par une approche « Full balance sheet » où les actifs sont en valeur de marché et les passifs sont en valeur économique.

La vocation de ce chapitre est de présenter une description générale du bilan dans ses deux versions : comptable et économique, en adoptant une vision simplifiée du bilan. L'accent est mis essentiellement sur la valorisation des Fonds Propres économiques dans le référentiel Solvabilité II dans le dessein de faire apparaître la différence entre le bilan dans le cadre de Solvabilité I et celui exigé par la réforme Solvabilité II.

I. LE BILAN.

Le bilan d'une société d'assurance représente une image de la situation financière de la compagnie selon le point de vue qu'on adopte pour la perception : une vision comptable ou économique. Certes, solvabilité II intervient dans une optique de la valorisation économique, cependant, il s'avère nécessaire de comprendre la conception comptable dans la mesure où la valorisation fait intervenir des éléments de cette dernière.

La vision schématique suivante explicite bien la notion du bilan comptable :

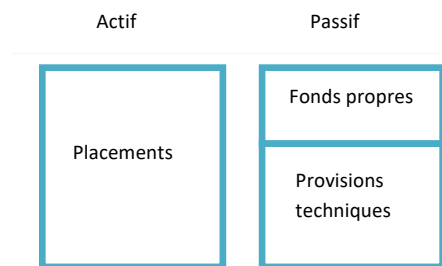


Figure : schéma basique du bilan comptable

Le bilan fait appel à deux notions à savoir l'actif et le passif.

I.1 L'actif (Asset).

Il représente l'ensemble des biens dont dispose la compagnie. Selon l'article 27 du code des assurances, les provisions techniques ainsi que les autres passifs sont représentés à l'actif des entreprises dans les conditions de dispersion, de limitation et de diversification et ne doivent faire l'objet d'aucun privilège que ceux prévues par l'article 276 du même code.

Dans ce sens l'article 27 de l'arrêté 2005 règle l'ensemble des actifs admissibles en représentation des engagements des passifs. De plus, l'article 33 du même arrêté précise l'ensemble des règles de diversification et de limitation afin de diversifier les investissements et limiter leurs concentrations dans un même type d'actif. Autrement dit, cet article vise à atténuer le risque de concentration dans une même catégorie.

En outre, l'article 32 de cet arrêté fixe un ensemble de règles concernant les limitations par rapport à chaque actif représentatif. Ces normes englobent les limitations par émetteurs et les limitations par éléments. Nous retenons essentiellement que les titres d'Etat ou les garanties par elles ne subissent aucune limitation.

I.1 Le passif (Liability) :

Il constitue l'ensemble des engagements contractés à l'égard des assurés et les fonds propres apportés par les actionnaires. Il comporte deux éléments constitutifs :

I.1.1 Les fonds propres.

Les fonds propres représentent les capitaux détenus par l'entreprise apportés par les actionnaires ou résultant de l'activité économique. Ils constituent la richesse intrinsèque qui reviendrait aux actionnaires en cas de dissolution de l'entreprise. Cependant, la conservation des fonds propres dans une entreprise représente un risque majeur pour les actionnaires dans la mesure où les capitaux propres sont absorbés par les pertes, en cas d'économie faible.

I.1.1 Les provisions techniques.

Les provisions techniques sont définies selon l'article premier du code des assurances comme étant un « compte d'épargne accumulé par l'entreprise d'assurances et de réassurance pour faire face à ses engagements envers les assurés et bénéficiaires de contrats d'assurance »

L'article 238 ajoute que « Les entreprises d'assurances et de réassurance doivent, à toute époque, inscrire à leur passif et représenter à leur actif les provisions techniques suffisantes pour le règlement intégral des engagements contractés à l'égard des assurés, souscripteurs et bénéficiaires de contrats et ceux relatifs aux acceptations en réassurance ; elles sont calculées sans déduction des réassurances cédées ». Dans ce sens, l'évaluation des provisions techniques doit être prudente pour que les cas d'insuffisances soient raisonnablement limités.

Ces provisions sont financées par les primes et permettent le règlement intégral des engagements pris envers les assurés ou les bénéficiaires des contrats. Elles sont explicitées dans l'arrêté du Ministre des Finances et de la Privatisation n° 1548-05 du 6 ramadan 1426 (10 octobre 2005) relatif aux entreprises d'assurances et de réassurance. Elles comprennent principalement :

- En assurances vie : les provisions mathématiques (PM).
- En assurances non vie : la provision pour sinistres à payer (PSAP).

1) Les principales composantes

Ce paragraphe décrit les principales composantes des provisions techniques respectivement pour les assurances vie et pour les assurances non vie.

✓ Les provisions techniques en assurance vie.

En assurances vie, le poste le plus important est la provision mathématique qui correspond à « la différence entre les valeurs actuelles des engagements respectivement pris par l'assureur et les assurés. Cette provision, qui est déterminée selon les bases tarifaires, ne peut être inférieure au montant calculé d'après les taux d'intérêt retenus pour l'établissement des tarifs et, s'ils comportent un élément viager, d'après les tables de mortalité TV 88-90 pour les assurances en cas de vie et TD 88-90 pour les assurances en cas de décès ».

Ainsi, le régulateur a encadré le calcul de cette provision en fixant un minimum calculé en fonction des tables de mortalités citées ci-dessus et un taux d'intérêt maximal communiqué semestriellement aux entreprises d'assurances.

Les entreprises pratiquant les opérations d'assurances sur la vie ou de capitalisation peuvent garantir, dans leurs contrats comportant une clause de participation des assurés aux bénéficiaires, un taux minimum incluant les taux d'intérêt retenus pour l'établissement des tarifs. Ce taux minimum, qui est fixé annuellement pour l'année suivante, ne peut excéder 85% de la

moyenne des taux de rendement des actifs de l'entreprise affectés aux opérations d'assurances sur la vie ou de capitalisation calculés pour les deux derniers exercices.

Le montant des participations aux bénéficiaires est porté à la provision pour participation aux bénéficiaires. Les sommes portées à cette provision sont affectées à la provision mathématique ou inscrites dans des comptes individuels ou versées aux souscripteurs, au cours des trois exercices suivant celui au titre duquel elles ont été portées à la provision pour participation aux bénéficiaires

Par ailleurs, le régulateur a défini une autre provision nommée provision de gestion puisque la provision mathématique est désormais calculée sur la base de la prime pure au lieu de la prime d'inventaire. Celle-ci est destinée à couvrir les charges de gestion futures non couvertes par les chargements contractuels.

✓ Les provisions techniques en assurance non vie.

La provision pour sinistres à payer (PSAP) présente le poste le plus important dans les provisions techniques non vie. Elle est calculée, pour estimer la valeur des sinistres survenus déclarés et des sinistres survenus mais non encore déclarés, selon différentes méthodes statistiques.

La méthode dossier par dossier représente l'approche de référence pour le calcul de ces provisions. En effet, la méthode préconisée pour les branches d'assurances hors la branche responsabilité civile automobile et accident de travail est basée sur les évaluations dossier par dossier, pour apprécier de façon quasi certaine le coût total du sinistre.

Alors que pour les branches d'assurances responsabilité civile automobile et accident de travail dont les sinistres sont à déroulement long, les entreprises d'assurances sont tenues de valider ces provisions par d'autres méthodes statistiques comme la méthode du coût moyen et la méthode de cadences des règlements, pour retenir en fin la méthode donnant les résultats supérieurs.

D'autre part, il y a lieu de noter que ces provisions sont définies par l'interdiction de l'escompte des provisions pour des raisons de prudence. En d'autres termes, les provisions techniques ne doivent pas être actualisées, sauf pour la provision de gestion et les provisions des assurances en cas de vie.

i. Méthode dossier par dossier :

Cette méthode découle de l'évaluation des dossiers physiques. Elle se base sur l'évaluation de chaque dossier en fonction des éléments contenus dans celui-ci. En cas d'absence des éléments nécessaires pour le calcul. La provision correspond donc à une évaluation moyenne s'appuyant sur les statistiques de la société.

ii. Méthode de cadence de règlement

C'est une méthode statistique qui se fonde sur un tableau triangulaire décrivant les règlements de sinistres par exercice de survenances et par exercice de développement.

Cette approche est considérée comme une bonne estimation de la PSAP dans la mesure où elle fournit des résultats proches de la méthode dossier par dossier.

iii. Méthode du coût moyen :

Cette méthode statistique n'est applicable que pour les assurances civiles automobiles et accident de travail. Elle vise à retrancher les règlements effectués des charges des sinistres. Cette dernière qui est déterminée par la multiplication des nombres de sinistres déclarés par

un coût moyen calculé sur la base du nombre et des couts de sinistres durant les cinq derniers exercices.

2) Les provisions techniques prudentielles.

Les entreprises d'assurances sont amenées à constituer en plus des provisions techniques financées par les primes servant au paiement des engagements envers les assurés et les ayants droits, des provisions techniques à caractère prudentiel financées par les actionnaires. Il s'agit essentiellement des provisions définies dans l'article 15 de l'arrêté du 10 octobre 2005 relatif aux entreprises d'assurances et de réassurance comme suit :

- Provision pour risque d'exigibilité : provision destinée à faire face aux engagements dans le cas de moins-value de l'ensemble des actifs mentionnés à l'article 40 de l'arrêté du 10 octobre 2005 relatif aux entreprises d'assurances et de réassurance. La provision à constituer est calculée dans les conditions définies à l'article 22 du même article.
- Provision pour fluctuations de sinistralité : provision destinée à faire face aux fluctuations de sinistralité afférentes aux opérations d'assurances de groupe en cas de décès. Cette provision est alimentée, pour chacun des exercices successifs, par un prélèvement d'au moins 70% de l'excédent dû à la mortalité effectivement constaté au cours de l'exercice.
- Provision de capitalisation : provision destinée à parer à la dépréciation des valeurs comprises dans l'actif de l'entreprise et à la diminution de leur revenu. Elle est déterminée conformément aux dispositions de l'article 25 de l'arrêté du 10 octobre 2005 relatif aux entreprises d'assurances et de réassurance.
- Provision pour aléas financiers : provision destinée à compenser la baisse de rendement de l'actif. Elle est calculée dans les conditions définies à l'article 26 de l'arrêté du 10 octobre 2005 relatif aux entreprises d'assurances et de réassurance.

3) Autres provisions techniques

Les compagnies d'assurances se trouvent obligées de constituer autres provisions techniques, en parallèle avec les techniques prudentielles qui ont fait l'objet d'une définition dans le paragraphe précédent, notamment :

- La provision pour primes non acquises (PPNA) : elle correspond à la fraction des primes brutes émises qui doit être allouée à l'exercice comptable suivant. Ces provisions s'expliquent par le fait qu'une partie des primes d'assurance payables au cours de celui-ci est destinée à couvrir des risques de la période suivante. Ces provisions sont alors calculées prorata temporis pour la durée restant à courir jusqu'à l'échéance du contrat.
- Provision pour risques en cours : est définie comme étant le montant à provisionner en supplément des primes non acquises pour couvrir les risques à assumer et destinée à faire face à toutes les demandes d'indemnisation et à tous les frais liés aux contrats d'assurance en cours excédant le montant des primes non acquises et des primes exigibles relatives aux dits contrats.

Il y a lieu de noter que d'un point de vue quantitatif, les provisions techniques constituent la grande partie du passif tandis que les fonds propres n'en présentent qu'une faible part.

II. LE BILAN DANS LE REFERENTIEL SOLVABILITE II.

II.1 Différence entre bilan comptable et bilan économique.

Le bilan comptable repose essentiellement sur une évaluation basée sur les principes de la continuité d'exploitation, de la prudence comptable et du coût historique dans la majorité des cas. En revanche, le bilan économique renvoie à la valeur du marché. En d'autres termes, il dévoile le prix qu'un tiers serait prêt à payer pour acquérir l'entreprise.

II.2 Comparaison entre le bilan dans les deux dispositifs de solvabilité : I et II.

La figure suivante permet de mettre en exergue la différence au niveau du bilan dans le référentiel Solvabilité I et le référentiel Solvabilité II.

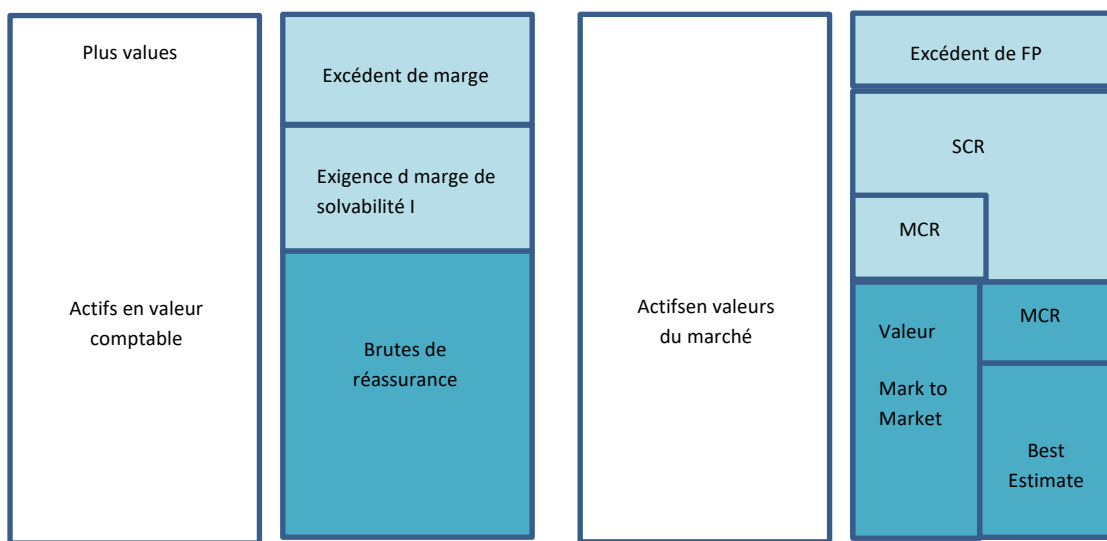


Figure : comparaison du bilan sous les deux dispositifs de solvabilité I et II.

Sous la réforme solvabilité II, on abandonne la vision comptable qui adoptée dans solvabilité I. En effet, les actifs et les provisions techniques sont évalués selon une approche économique. Autrement dit, les actifs sont uniquement évalués en valeur de marché, et les provisions techniques sont calculées comme la somme de deux composantes : le Best Estimate et la marge pour risque.

Chapitre 3 : l'assurance vie.

I. PRESENTATION DE L'ASSURANCE VIE.

Un contrat d'assurance vie est considéré comme étant un instrument de transmission de capital ou un moyen de constitution d'épargne selon qu'il s'agit d'une assurance en cas de décès ou d'une assurance en cas de vie. En effet, l'assurance vie sert à construire ou à fructifier un capital selon l'ensemble des choix et des possibilités qu'elle offre concernant à titre d'exemples le nombre de souscriptions, la nature des versements et les modalités de rachat.

Dans le cadre de ce chapitre, nous présentons d'abord l'assurance vie tout en décrivant son évolution au Maroc. Ensuite nous en explicitons certains traits caractéristiques notamment les options et les garanties cachées. Enfin, nous définissons les provisions techniques selon la vision de la cinquième étude quantitative d'impact QIS5.

I.1 Définition de l'assurance vie.

L'assurance vie est un contrat à prime unique ou à prime périodique permettant de constituer un capital en effectuant des versements libres ou réguliers. En contrepartie du paiement de primes, l'assureur s'engage à verser une somme déterminée, la prestation, au(x) bénéficiaire(s) du contrat.

Le versement de la prestation est conditionné par la survenance de l'un des deux risques selon le type de contrat souscrit :

- le risque de décès sur une période donnée ;
- le risque de survie à une ou plusieurs dates données.

Ainsi, à la différence de la branche non vie, l'assurance vie est-elle directement liée au risque viager dans la mesure où les niveaux de longévité et de mortalité l'impactent fortement.

I.2 Types de l'assurance vie.

L'assurance vie regroupe différents types d'assurance, notamment l'assurance prévoyance et l'assurance vie individuelle.

La prévoyance est la couverture des actifs financiers et des flux financiers des travailleurs indépendants et des familles, contre tout éventuel événement déplaisant, notamment le décès, les accidents, les maladies. En général, ces assurances sont contractées dans le cadre d'un prêt et prennent un caractère obligatoire en cas de décès pour une souscription à un prêt immobilier. En revanche, l'assurance vie individuelle renvoie aux contrats couvrant le risque de décès sur une période déterminée ou le risque de survie à une ou plusieurs dates données.

I.2 l'assurance vie au Maroc :

L'assurance vie constitue un instrument fondamental en matière de protection du patrimoine et de planification des revenus retraite. En se basant sur les sommes importantes qu'il mobilise, le secteur de l'assurance vie est un mécanisme crucial dans la collection de l'épargne et l'investissement pour promouvoir l'économie nationale.

Au cours de ces dernières années, l'assurance vie montre une progression prodigieuse et un trend haussier reflétant les changements du comportement des

consommateurs marocains qui ont recours de plus en plus aux produits d'assurance offrant un régime fiscal attractif.

L'excellente synergie entre les banques et les assurances met en exergue l'augmentation du chiffre d'affaire de l'assurance vie. En 2012, les primes d'assurance vie ont progressé de 2,3%, passant ainsi à 2621 milliards de dollars. La ventilation des émissions entre les catégories d'opérations vie et capitalisation fait apparaître que les assurances individuelles représentent 70,36% du total des émissions vie avec un montant de 6175,29 millions de dirhams. Les graphes suivants éclairent l'évolution des primes émises en assurance vie.

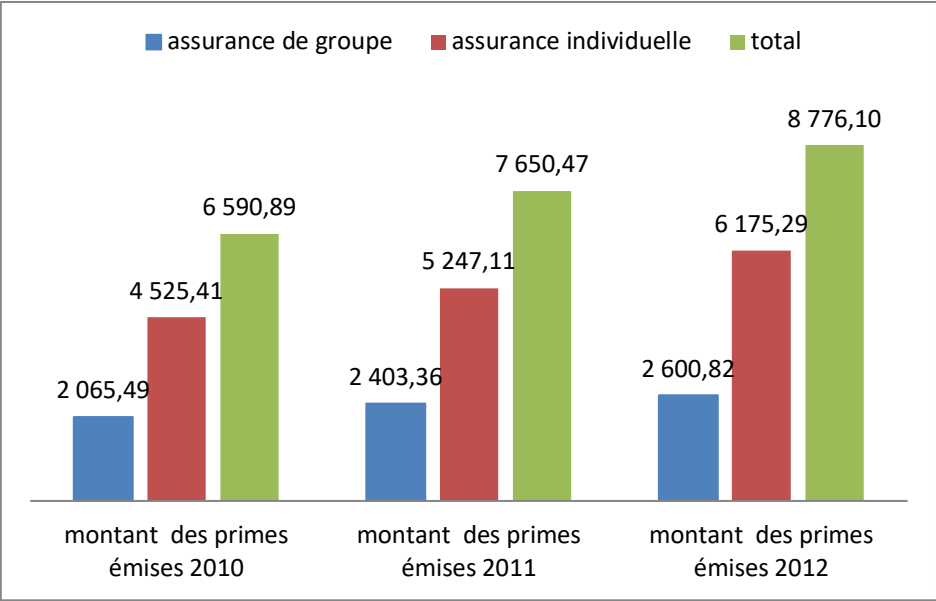


Figure : l'évolution du montant des primes émises

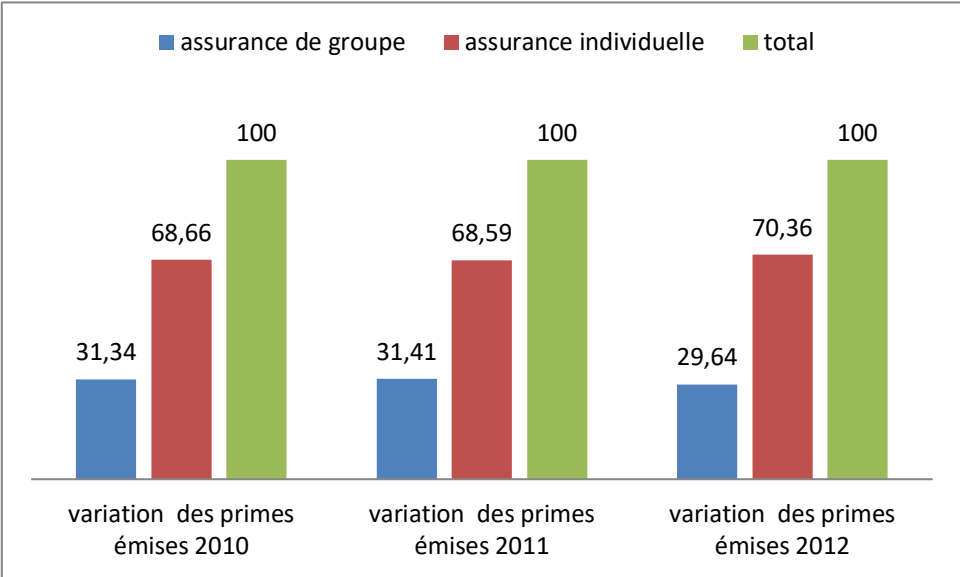


Figure : l'évolution de la variation des primes émises en %

II. LES OPTIONS CACHEES ET GARANTIES FINANCIERES.

Les options cachées et garanties financières rentrent dans le calcul du Best Estimate. Les options et garanties les plus communément intégrées dans les contrats de la branche vie sont :

- Garantie de taux minimum TMG ;
- Option de rachat ;
- Option de versement libre ;
- Option de conversion en rente ;
- Garantie plancher ;
- Option d'avance.

II.1 Taux minimum garanti TMG.

Lors d'une souscription à un contrat d'épargne, l'assureur peut s'engager à garantir un taux de rémunération minimum sur toute la durée du contrat. L'assurance vie étant caractérisée par des engagements à long terme, l'assureur doit garantir ce taux de rendement sur une longue période.

Le TMG est une contrainte forte pour les assureurs. En effet, les primes perçues par l'assureur étant investies dans un portefeuille d'actifs, le rendement de l'assureur est soumis aux aléas des marchés financiers, alors qu'il s'engage à verser un taux fixe, le TMG, à ses assurés.

II.2 Les rachats.

Le rachat peut être total ou partiel. Le premier accorde au souscripteur la faculté de mettre un terme au contrat avant l'échéance prévue et de demander le versement de l'intégralité de la provision mathématique constituée. Tandis que le second, rachat partiel, permet à l'assuré de récupérer une partie de la provision mathématique constituée sans pour autant rompre le contrat.

Les rachats sont souvent pénalisés, et leurs pénalités diffèrent selon les contrats et les compagnies d'assurance.

II.3 Les versements libres.

Les versements libres ne contraignent pas l'assuré à alimenter son contrat de manière régulière ; il paie des primes aux moments qu'il désire tout en respectant les clauses définies dans le contrat.

L'aléa des versements libres ne permet pas à l'assureur de prévoir les versements futurs. Dès lors ce type de versement constitue un risque pour l'assureur, particulièrement en cas d'un TMG élevé.

III. Les provisions techniques vision (QIS 5) :

Dans le cadre de Solvabilité II, la valeur des provisions techniques correspond au montant qu'une entreprise devrait payer si elle transférait son portefeuille à un tiers.

Dans ce sens, le calcul des provisions techniques distingue les passifs répliquables des passifs non répliquables. Dans la mesure où un passif répliquable est comptabilisé à sa valeur du

marché. Alors qu'un passif non répliquable doit être estimé par le calcul d'un Best Estimate et d'une marge de risque.

III.1 Le Best Estimate :

Selon la directive solvabilité 2, la meilleure estimation correspond à la moyenne pondérée par leurs probabilités des flux de trésorerie futurs, compte tenu de la valeur temporelle de l'argent, estimé sur la base de la courbe des taux sans risques.

En d'autres termes, c'est la valeur actuelle probable des cash-flows futurs jusqu'à extinction du portefeuille considéré, calculée sur la base d'hypothèses réalistes suivantes :

- ✓ L'horizon de simulation doit être suffisamment long pour approcher la durée du portefeuille ;
- ✓ Les flux sont actualisés au taux d'actualisation sans risque ;
- ✓ Les provisions en Best Estimate sont calculées brutes de réassurance.

Ainsi, le calcul du Best Estimate s'effectue selon deux étapes :

- ✓ La projection des flux de prestations et de frais à chaque date ;
- ✓ L'actualisation de tous les flux à la date initiale

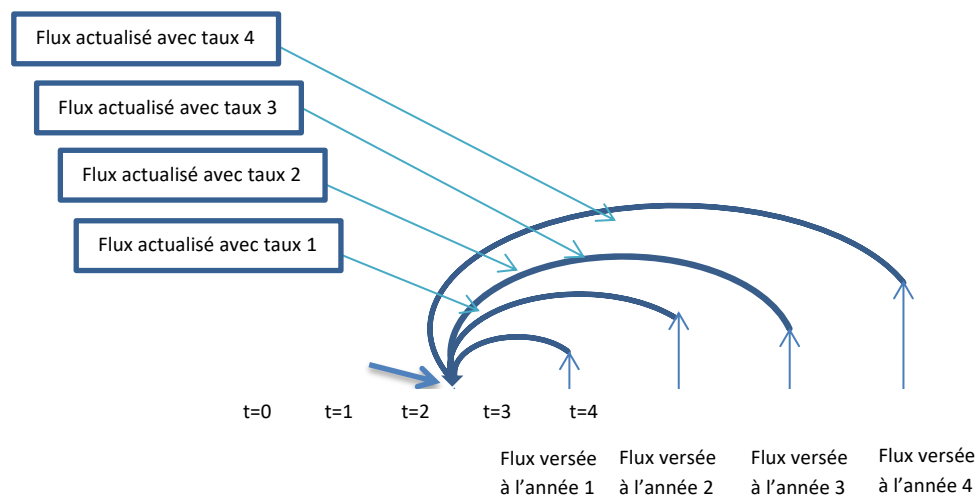


Figure . Calcul du Best Estimate

La provision est calculée selon la relation suivante :

$$BE = \sum_{t=1}^T \frac{F_t}{(1+i_t)^t}$$

avec :

- F_t : flux probable de l'année t ;
- i_t : taux sans risque de maturité t ;
- T : l'horizon de simulation.

En tenant compte de la participation au bénéfice, le calcul du Best Estimate, déduit par le calcul des flux projetés, suit le mécanisme suivant :

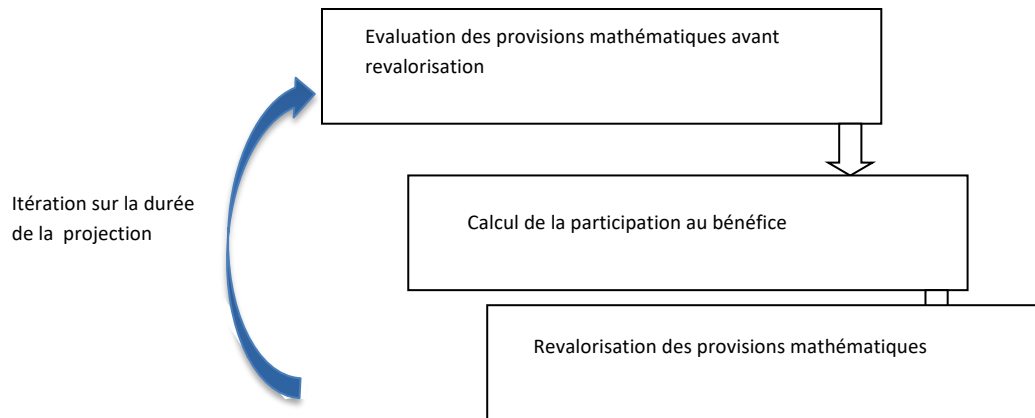


Figure : schéma de calcul du Best Estimate, compte tenu de la participation aux bénéfices.

III.1 La marge pour risque :

Selon le CEIOPS, une marge pour risque est constituée selon la nature répliquable ou non du passif d'assurance. Elle est calculée dans une logique CoC avec la prise en compte des risques de souscription vie, des risques opérationnels, des risques de défaut de contrepartie des réassureurs et du risque financier.

Par définition, la marge pour risque sert à couvrir le risque lié aux cash-flows futurs des engagements, en particulier relatifs aux incertitudes liées à l'évaluation en Best Estimate des provisions.

La marge pour risque correspond donc au montant que l'on doit ajouter au Best Estimate pour qu'un autre assureur accepte de reprendre le passif. Il s'agit du montant qui sert à dédommager le repreneur d'avoir immobilisé du capital pour supporter les engagements d'assurance qu'il va récupérer jusqu'à leur extinction. Les capitaux à immobiliser tout au long de la durée de vie restante du passif correspondent aux SCRs futurs générés par les engagements d'assurance.

Dans le cas où les risques sont couvrables, les provisions techniques correspondent au prix de la couverture financière permettant de construire une stratégie d'investissement dans des instruments financiers observables et liquides qui répliquent parfaitement les flux d'assurance. Un exemple de risque couvrable est le cas des contrats en unité de compte sans garantie plancher où l'assureur ne fait que placer l'argent confié par l'assuré dans les titres définis dans le contrat puis revendre ces titres et donner la contre-valeur à l'assuré à l'échéance ou au moment du rachat du contrat.

Dans le cas contraire, lorsque les risques ne sont pas couvrables, la provision technique est la somme du Best Estimate et de la marge pour risque. C'est le cas par exemple pour les contrats, pour lesquels il est impossible de mettre en place une stratégie financière qui permet de répliquer exactement les flux futurs.

La marge pour risque est calculée selon la formule suivante :

$$CoCM = CoC * \sum_{t=0} \frac{E(SCR(t))}{(1 + i_t)^{t+1}}$$

avec :

- $CoCM$: la marge pour risque ;
- CoC : le taux de coût capital ;
- i_t : le taux d'intérêt en t ;
- $SCR(t)$: désigne le SCR pour l'année t.

Il faut noter que la principale difficulté du calcul de la marge pour risque provient de la nécessité de savoir évaluer les SCRs futurs. Etant donnée la délicatesse des projections, il s'avère être crucial de procéder à des simplifications :

- Le calcul normal et complet de l'ensemble des futurs SCRs ;
- L'approximation des risques individuels des modules à considérer pour le calcul des futures SCRs ;
- L'approximation du SCR total pour chaque année future ;
- L'approximation de la marge comme un pourcentage du Best Estimate.

Nous retenons essentiellement deux approches proposées dans les spécifications techniques de la cinquième étude quantitative d'impact QIS 5, pour simplifier le calcul :

- ✓ La première repose sur la projection des futurs SCRs selon la formule :

$$SCR(t) = \frac{SCR(0)}{BE(0)} \times BE(t)$$

avec :

- $BE(0)$: Best Estimate net de réassurance à la date d'évaluation ;
- $BE(t)$: Best Estimate net de réassurance à l'année t.
- ✓ La seconde approche calcule la marge pour risque selon la formule :

$$CoCM = \frac{CoC}{(1 + i_1)} \times D(0) \times SCR(0)$$

Avec :

- $D(0)$: duration modifiée en 0 ;
- i_1 : taux sans risque en t = 1.

$$D(0) = \frac{\sum_{t \geq 1} t * F * \left(\frac{1}{1+r_t}\right)^t}{\sum_{t \geq 1} F * \left(\frac{1}{1+r_t}\right)^t}$$

$$D(0) = \frac{Dur(0)}{1 + r}$$

avec :

- $Dur(0)$: duration en 0 ;
- r : taux actuariel.

Il faut noter que le taux est fixé à 6% en absence d'informations crédibles.

Chapitre 4 : calcul du SCR.

Le SCR représente le niveau de capital qui permet à l'assureur d'absorber les pertes imprévues et significatives. Il est censé refléter le montant de capital requis pour que l'assureur puisse faire face à ses obligations pendant un horizon de temps et à un niveau de confiance donné.

Dans le dispositif Solvabilité II, le capital économique correspond au montant de fonds propres dont doit disposer la compagnie pour faire face à une ruine économique à horizon 1 an et au niveau de confiance 99,5%. Cette définition du capital repose sur trois notions :

- la ruine économique qui correspond à une situation où l'actif de la compagnie évalué en valeur de marché est inférieur à la valeur économique du passif ;
- l'horizon d'une année qui impose de pouvoir disposer de la distribution des fonds propres économiques dans un an ;
- le seuil 99,5% qui représente le niveau de solvabilité requis. La probabilité de l'événement « ruine économique » est dans ce cas inférieure à 0,5%.

Pour calculer le capital économique, différentes approches sont proposées aux compagnies : une formule standard qui permet un calcul simple applicable à toutes les sociétés quel que soit le pays, un modèle interne développé par les compagnies d'assurance et dont le but est d'avoir une approche estimant au mieux les risques, ou encore une combinaison des deux (modèles internes partiels) associant certains risques à la formule standard et d'autres risques au modèle interne.

Ce chapitre présente d'abord un aperçu des différents risques assurantiels que la réforme solvabilité II intègre dans le calcul du capital économique. L'accent est ensuite mis sur les différentes étapes d'application de la formule standard et d'élaboration du modèle interne par le biais des simulations dans des simulations SDS connue sous le nom « Nested Simulation ».

I. Cartographie des risques assurantiels.

L'EIOPA, autorité européenne de supervision des institutions d'assurance et de retraite, a proposé lors de sa cinquième phase de consultation des assureurs (QIS5) une formule standard de calcul du SCR regroupant le calcul du SCR en six modules rassemblant les familles de risques auxquels fait face l'assureur :

1. Marché ;
2. Défaut ;
3. Vie ;
4. Santé ;
5. Non-Vie ;
6. Intangible.

I.1 Le risque de marché.

Le risque de marché provient du niveau ou de la volatilité des cours de marché des instruments financiers. En effet, l'exposition au risque de marché est mesurée par l'impact des mouvements dans le niveau des variables financières notamment, les cours des actions, les cours de l'immobilier, les taux d'intérêt, et les taux de change.

I.2 Le risque de taux.

Le risque de taux d'intérêt concerne tous les actifs et passifs dont la valeur est sensible aux variations de la structure de la courbe de taux. Ce sous-module vise à quantifier le besoin en capital nécessaire pour faire face à l'impact d'une évolution de la structure de la courbe des taux, à la hausse ou la baisse, sur la valeur du bilan.

A l'actif les instruments financiers concernés par ce sous-module sont les produits de taux simples notamment les obligations d'entreprise et d'Etat, les titres de créance, les produits dérivés (option, swaps), les produits structurés et les OPCVM ayant une sensibilité taux non nulle.

Le besoin en capital au titre de ce risque correspond à la perte maximale générée par une hausse ou une baisse de la courbe de taux. Concrètement, la courbe de taux correspondant à chacun des produits financiers ci-dessus est choquée à la hausse ou à la baisse.

En effet, à titre d'exemple, une brusque augmentation des taux d'intérêt engendre une baisse de la valeur du portefeuille obligataire et peut inciter les assurés à racheter leurs contrats, les taux d'intérêt servis par l'assureur étant faibles. Dès lors, l'assureur se trouve contraint à vendre une partie de son portefeuille et enregistre des moins-values latentes. Inversement en cas de forte baisse des taux, il devient difficile pour l'assureur de satisfaire ses engagements c'est-à-dire de servir un taux d'intérêt supérieur au marché. Encore faut-il souligner que ceci impacte directement les calculs de provisions correspondant aux flux futurs actualisés au taux du marché.

I.3 Le risque action.

Le risque action provient du niveau ou de la volatilité des cours des actions. L'exposition au risque action concerne tous les actifs et passifs dont la valeur est sensible aux variations des cours des actions. La charge de capital couvrant ce risque se détermine comme l'effet immédiat sur la valeur nette des actifs et passifs espérée dans le cas d'un scénario de choc sur action.

I.4 Le risque immobilier.

Le risque immobilier provient du niveau ou de la volatilité des cours de l'immobilier. L'exigence en capital au titre de ce risque correspond à la variation de la valeur nette des actifs suite à un choc à la baisse.

I.5 Le risque de devise.

Le risque de devise provient du niveau ou de la volatilité des taux de change. Ce sous-module vise à quantifier le besoin en capital correspondant à la perte générée par l'effet de change sur la valeur des actifs. Il est relatif à tous les titres libellés en devises étrangères et les produits de change (options, futures, swaps, forwards).

I.6 Le risque de spread.

Le risque de spread est la part de risque issue des instruments financiers et qui est expliquée par la volatilité des spreads de crédit sur la structure de la courbe des taux d'intérêt sans risque. Il reflète la variation de valeur due à un mouvement de la courbe de crédit relative à la structure par terme des taux sans risque.

I.7 Le risque de concentration.

Le risque de concentration vient du fait que la volatilité d'un portefeuille augmente avec sa concentration sur un même émetteur, dans un même domaine d'activité ou dans une

même zone géographique. En effet, la diversification par rapport à tous ces éléments permet de diminuer le risque de perte en valeur des actifs.

Ce risque constitue un risque supplémentaire pour l'assureur en raison de la volatilité supplémentaire qui existe dans les portefeuilles d'actifs concentrés et du risque supplémentaire de perte de valeur partielle ou totale définitive en raison de la défaillance d'un émetteur.

I.8 Le risque d'illiquidité.

Le risque de liquidité correspond à un changement dans la liquidité du marché. Certains actifs peuvent présenter des problèmes de liquidité, c'est à dire que l'assureur peut rencontrer des problèmes lors de la vente de ses produits. Ainsi la capacité de l'assureur à faire face à ses obligations financières s'affaiblit-elle. Dès lors, une bonne gestion entre les durations et entre les créances et les dettes s'avère être cruciale pour limiter ce risque. En effet, l'assureur doit éviter les situations où la durée de son passif est supérieure à la durée de son actif.

I.9 Le risque de défaut de contrepartie.

Le risque de défaut de contrepartie est le risque qu'un emprunteur n'honore pas ses engagements dans les conditions initialement prévues.

I.10 Le risque de souscription vie.

Le risque de souscription vie regroupe l'ensemble des risques liés à une tarification insuffisamment prudente lors de la souscription ou du rachat du contrat :

- La charge de capital pour le risque de mortalité est obtenue en augmentant les taux de mortalité pour chaque âge et en calculant la variation de la valeur nette des actifs (NAV) suite à cette augmentation.
- La charge de capital pour le risque de longévité est obtenue en baissant les taux de mortalité pour chaque âge et en les appliquant à la variation de la NAV.
- La charge de capital pour le risque d'invalidité est obtenue en augmentant les taux d'invalidité pour l'année suivante avec une augmentation permanente du taux d'invalidité pour les années ultérieures. Cette augmentation est appliquée à la variation de la NAV.
- Le risque de rachat fait référence à un taux prévu, supérieur ou inférieur, de rachats de polices et de résiliations.
- Le risque de dépense est le résultat de la variation des dépenses associées aux contrats d'assurance.
- Le risque de révision a pour objectif de capturer une variation imprévue du montant des rentes issue d'une révision non anticipée du processus des sinistres.
- Le risque catastrophe vie résulte d'événements extrêmes ou irréguliers qui ne sont pas suffisamment pris en compte par les frais pour les autres sous-modules de risque de souscription vie.

I.11 Le risque de souscription santé.

Il couvre le risque de souscription pour toutes les garanties santé et accidents du travail.

I.12 Le risque de souscription non vie.

Le risque de souscription non vie est le risque d'assurance spécifique résultant des contrats d'assurance. Il fait référence à l'incertitude concernant les résultats de la souscription de l'assureur. Cela comprend l'incertitude au niveau :

- du montant et des délais des éventuels règlements de sinistres en relation avec les passifs existants ;
- du volume de l'activité à souscrire et des taux de primes auxquels le contrat sera souscrit ;
- des taux de prime qui seraient nécessaires pour couvrir les passifs créés par l'activité souscrite.

La charge de capital pour le risque de souscription non vie se détermine en fonction des charges de capital pour le risque de prime et de réserve ainsi que de la charge de capital pour le risque de catastrophe.

I.13 Le risque opérationnel.

Le risque opérationnel est le risque de perte résultant de processus, personnes, systèmes internes ou d'événements externes défailants ou inadéquats, y compris les risques juridiques.

Le module de risque opérationnel est conçu pour traiter les risques opérationnels dans la mesure où ils ne sont pas explicitement couverts dans les autres modules de risque. Le capital nécessaire pour couvrir ce risque correspond à un pourcentage en fonction des provisions techniques et des primes gagnées brutes de l'assurance des branches vie, non vie et santé.

I.14 Cartographie des risques assurantiels.

Le schéma ci-dessous reprend les différents modules et sous modules des risques intégrés dans le calcul du SCR.

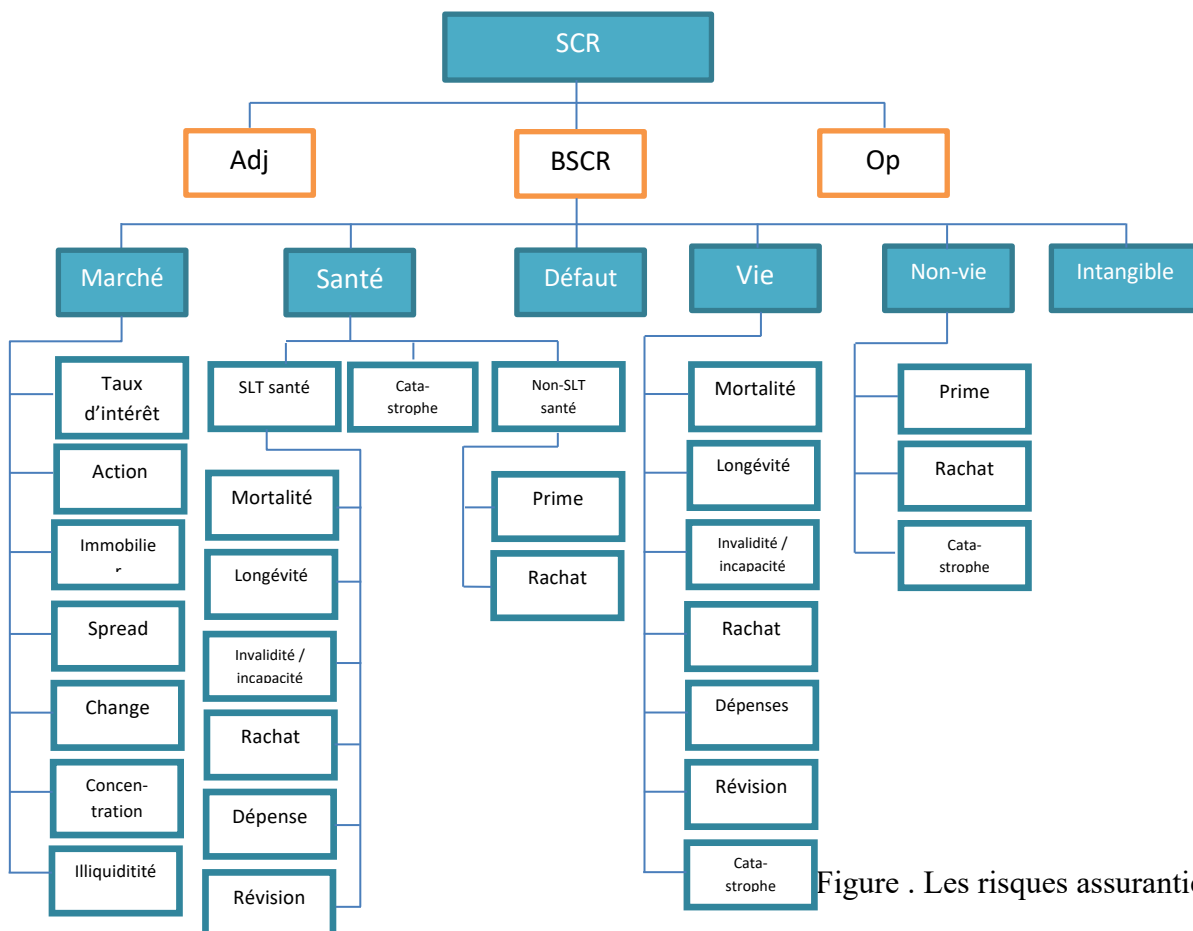


Figure . Les risques assurantiels.

Ce schéma présente les éléments nécessaires au calcul du capital économique par le biais de la formule standard.

II. Le besoin en capital selon la formule standard dans le référentiel Solvabilité II.

Le SCR doit couvrir une probabilité de ruine à 0.5% sur un horizon d'un an afin de respecter les engagements pris envers les assurés. La détermination de ce capital, par la formule standard, fait intervenir différents risques réels pris par la société.

II.1 Formule de calcul du SCR.

Le SCR est le résultat final issu d'une formule de calcul standard nécessitant la détermination de trois éléments :

- BSCR, « Basic Solvency Capital Requirement », est le capital requis de base, appelé aussi fonds propres requis de base ;
- Adj, « Adjustment », est l'ajustement au titre de la capacité d'absorption des pertes par les assurés et les impôts différés ;
- SCRop, « The capital Requirement for the Operational Risk » est le chargement en capital au titre du risque opérationnel.

$$\text{SCR} = \text{BSCR} - \text{Adj} + \text{SCRop}$$

Dans la formule standard, le premier calcul est celui du BSCR qui est le montant de capital global requis pour couvrir les risques hors risque opérationnel et hors effet d'atténuation que sont : la moindre distribution des excédents et les impôts en cas de choc.

Le calcul du BSCR est basé sur une approche dite « Bottom up », c'est-à-dire, les modules s'agrègent à chaque niveau en remontant.

L'architecture de type modulaire correspond à une cartographie des risques qui se décompose en 6 modules, eux-mêmes décomposés en sous-modules. Les risques sont appréciés indépendamment les uns des autres, ce qui simplifie l'approche, mais la complexité de la formule globale, étant donné l'intégration des corrélations à plusieurs niveaux, fait que cette formule se rapproche plutôt d'un modèle.

II.2 Calcul de l'exigence de capital propre élémentaire.

Pour chaque sous-module, facteur de risque, on calcule l'exigence de capital propre élémentaire en appliquant un choc instantané sur le facteur de risque. Le calibrage du choc retenu, imposé par le régulateur, correspond à une Value At Risk 0,5% sur un an, soit le scénario qui se produit une fois tous les deux cents ans. L'exigence de capital élémentaire correspond à l'impact de ce choc sur la NAV par rapport au scénario central du bilan prudentiel. Le besoin en capital n'est réel que si le choc dégrade la situation de l'assureur, c'est à dire si $\Delta NAV > 0$. En effet :

si $\Delta NAV > 0$

$$\begin{aligned} \text{Exigence de capital élémentaire} &= \Delta NAV = NAV_0 - NAV_{0+} \\ &= (A_0 - BE_0) - (A_{0+} - BE_{0+}) \end{aligned}$$

sinon,

$$\text{Exigence de capital élémentaire} = 0$$

avec :

- NAV_0 : la NAV du scénario central avant le choc ;
- NAV_{0+} : la NAV après choc instantané ;
- BE_0 : « Best Estimate » du bilan économique en valeur de marché à l'instant de l'évaluation ;
- BE_{0+} : « Best Estimate » calculé après un choc instantané sur le facteur de risque traité, toutes choses égales par ailleurs ;
- A_0 : montant de l'Actif du bilan économique en valeur de marché à l'instant de l'évaluation ;
- A_{0+} : montant de l'Actif après un choc instantané sur le facteur de risque traité, toutes choses égales par ailleurs.

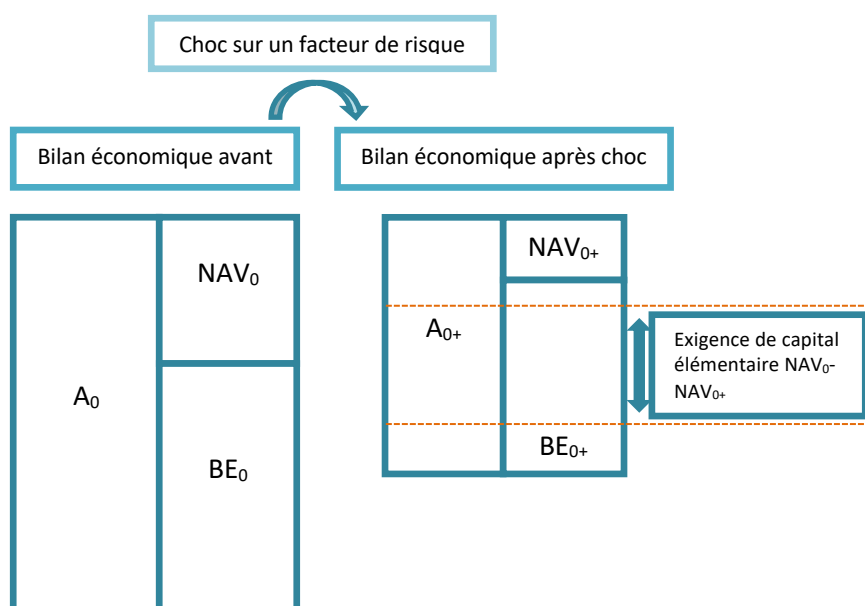


Figure . L'impact d'un choc sur les fonds propres économiques.

Par ailleurs, certains chocs n'impactent que le BE et n'ont pas d'impact sur la valeur de l'Actif, c'est-à-dire :

$$A_0 = A_{0+}$$

et par conséquent :

$$\begin{aligned}
 \text{exigence de capital élémentaire} &= \Delta NAV \\
 &= NAV_0 - NAV_{0+} \\
 &= (A_0 - BE_0) - (A_{0+} - BE_{0+}) \\
 &= BE_{0+} - BE_0
 \end{aligned}$$

C'est le cas, par exemple, pour des sous-modules du SCR de souscription vie (mortalité, longévité..). En revanche, pour le SCR de marché qui regroupe les sous-modules relatifs au risque de marché, les deux parties du bilan se trouvent impactées en cas de choc puisque le changement de la valeur de marché entraîne une modification au niveau des revenus futurs pour respecter la contrainte « Market consistant » impactant ainsi le BE. Cette section présente en détails les calculs relatifs à ces deux modules de risque : souscription vie et marché.

II.2.1 Le besoin en capital résultant du risque de souscription vie.

Le risque de souscription vie ne provient pas uniquement des engagements d'assurance vie mais aussi des engagements relevant de l'activité non vie dont les méthodes de calcul reposent sur des principes de l'assurance vie. Il résulte principalement d'une tarification insuffisante lors de la souscription et regroupe les sous-modules suivants : mortalité, longévité, incapacité/invalidité, rachat, dépenses, révision et catastrophe. L'agrégation des besoins en capital élémentaires de ces sous-modules permet d'obtenir le SCR life :

$$SCR\ life = \sqrt{\sum_{r \times c} corrlife_{r,c} \times life_r \times life_c}$$

avec :

- $corrlife_{r,c}$: coefficient de corrélation entre les sous-modules r et c donné par la matrice de corrélation ;
- $life_{mort}$: besoin en capital élémentaire au titre du risque de mortalité ;
- $life_{rev}$: besoin en capital élémentaire au titre du risque de révision ;
- $life_{long}$: besoin en capital élémentaire au titre du risque de longévité ;
- $life_{dis}$: besoin en capital élémentaire au titre du risque d'incapacité et d'invalidité ;
- $life_{lapse}$: besoin en capital élémentaire au titre du risque de rachat ;
- $life_{exp}$: besoin en capital élémentaire au titre du risque de dépenses ;
- $life_{CAT}$: besoin en capital élémentaire au titre du risque de catastrophe.

	Mortalité	Longévité	Invalidité	Rachat	Dépenses	Révision	Catastrophe
Mortalité	1						
Longévité	-0,25	1					
Invalidité	0,25	0	1				
Rachat	0	0,25	0	1			
Dépenses	0,25	0,25	0,5	0,5	1		
Révision	0	0,25	0	0	0,5	1	
Catastrophe	0,25	0	0,25	0,25	0,25	0	1

Tableau . Matrice de corrélation des sous-modules du risque de souscription vie.

Le risque de mortalité représente un risque de perte ou de détérioration de la valeur des engagements de la compagnie engendré par une augmentation des taux de mortalité. Cette augmentation correspond à une hausse de 15% des taux de mortalité selon la cinquième étude quantitative d'impact.

$$life_{mort} = \max(\Delta NAV_{choc\ de\ mortalité}; 0)$$

Le risque de longévité concerne les engagements d'assurance pour lesquels la compagnie garantit le paiement d'une série de montants jusqu'au décès de l'assuré. La baisse des taux de mortalité entraîne une augmentation des provisions techniques. Cette baisse correspond à une diminution de 20% des taux de mortalité selon QIS5.

$$life_{long} = \max (\Delta NAV_{choc\ de\ long\ evit\ e} ; 0)$$

Le risque d'incapacité ou d'invalidité est associé au risque de perte ou de changements défavorables au niveau des engagements d'assurance dû à l'évolution des taux d'incapacité et d'invalidité.

La cinquième étude quantitative d'impact exige que le capital réglementaire associé au risque d'invalidité ou d'incapacité soit défini comme la variation de la NAV suite à une augmentation de 35% des taux d'entrée en invalidité ou en incapacité de la première année et 25% des taux de maintien les années suivantes en plus d'une diminution de 20% des taux de sortie d'invalidité.

		Choc à appliquer selon QIS 5
Augmentation du taux d'invalidité	La 1 ^{ère} année	35%
	Les années suivantes	25%
Diminution du taux d'invalidité		20%

Tableau . Chocs à appliquer aux taux d'invalidité selon QIS 5.

Le risque de rachat est associé au risque de perte ou de changement au niveau du passif dû à un changement des taux servis. Le calcul du besoin en capital associé se détermine en appliquant des chocs à la hausse et à la baisse sur les taux de rachats.

$$life_{lapse} = \max (Lapse_{down} ; Lapse_{up} ; Lapse_{mass} ; 0)$$

avec :

$Lapse_{down}$: besoin en capital en cas d'une baisse permanente des taux de rachat ;

$$Lapse_{down} = \Delta NAV_{choc\ de\ rachat\ à\ la\ baisse}$$

$Lapse_{up}$: besoin en capital en cas d'une hausse permanente des taux de rachat ;

$$Lapse_{up} = \Delta NAV_{choc\ de\ rachat\ à\ la\ hausse}$$

$Lapse_{mass}$: besoin en capital en cas de rachats massifs ;

$$Lapse_{mas} = \Delta NAV_{choc\ de\ rachat\ massif}$$

En notant R le taux de rachat, les chocs à lui appliquer selon QIS 5 se résument dans le tableau suivant :

		Choc à appliquer selon QIS 5
Chocs à appliquer	à la baisse	Max (50% R ; R-20%)
	à la hausse	Min (150% R ; 100%)
Rachats massifs		30%

Tableau . Chocs à appliquer aux taux de rachats selon QIS 5.

Le risque de dépenses est associé à une augmentation des frais de gestion des contrats d'assurance. Le besoin en capital correspondant à ce risque est soumis selon QIS 5 au choc d'une hausse de 10% des dépenses futures par rapport aux anticipations du « Best Estimate » et de 1% par an au niveau du taux d'inflation des dépenses par rapport aux anticipations.

$$life_{exp} = \max (\Delta NAV_{choc\ de\ dépenses} ; 0)$$

	Choc à appliquer selon QIS 5
Augmentation des dépenses futures	10%
Augmentation du taux d'inflation des dépenses	1%

Tableau . Chocs à appliquer pour le sous-module des dépenses selon QIS 5.

Le risque de révision correspond au risque dû à une variation du montant d'une rente en raison d'une révision imprévue de la sinistralité. Il ne concerne que les rentes de l'activité non vie qui sont affiliées au module de souscription vie. Le choc préconisé par QIS 5 à cet égard correspond à une augmentation de 3%.

$$life_{rev} = \max (\Delta NAV_{choc\ de\ révision} ; 0)$$

Le risque de catastrophe en assurance vie tient compte des événements extrêmes ou irréguliers qui ne sont pas suffisamment pris en charge par les autres sous-modules de souscription vie. La cinquième étude quantitative d'impact lui associe, en guise de choc, une hausse de 0,15% de la mortalité des assurés la première année.

$$life_{CAT} = \max (\Delta NAV_{choc\ de\ catastrophe} ; 0)$$

II.2.2 Le besoin en capital résultant du risque de marché.

Le risque de marché provient du niveau ou de la volatilité des valeurs de marché des instruments financiers. Il regroupe sept sous-modules de risque : taux d'intérêt, action, immobilier, Spread, change, concentration et illiquidité.

Une agrégation intra-modulaire sous choc à la hausse ou à la baisse du taux d'intérêt permet d'obtenir le SCR Mkt en retenant le maximum des deux.

$$SCR\ Mkt = \max \left(\sqrt{\sum_{r \times c} corrMktUp_{r,c} \times Mkt_{Up,r} \times Mkt_{Up,c}} ; \sqrt{\sum_{r \times c} corrMktDown_{r,c} \times Mkt_{Down,r} \times Mkt_{Down,c}} \right)$$

avec :

- $corrMktUp_{r,c}$: coefficient de corrélation entre les sous-modules r et c en cas de choc haussier des taux ;
- $corrMktDown_{r,c}$: coefficient de corrélation entre les sous-modules r et c en cas de choc baissier des taux ;
- $Mkt_{Up,r}$: besoin en capital associé au sous-module r en cas de choc haussier des taux ;
- $Mkt_{Down,r}$: besoin en capital associé au sous-module r en cas de choc baissier des taux ;
- $Mkt_{Up,c}$: besoin en capital associé au sous-module c en cas de choc haussier des taux ;
- $Mkt_{Down,c}$: besoin en capital associé au sous-module c en cas de choc baissier des taux

Les coefficients de corrélation entre les sous-modules du risque de marché, selon la cinquième étude quantitative d'impact, sont définis dans les deux tableaux suivants :

Intérêt	Action	Immobilier	Spread	Change	Concentration	Illiquidité
---------	--------	------------	--------	--------	---------------	-------------

Intérêt	1						
Action	0,5	1					
Immobilier	0,5	0,75	1				
Spread	0,5	0,75	0,5	1			
Change	0,25	0,25	0,25	0,25	1		
Concentration	0	0	0	0	0	1	
Illiquidité	0	0	0	-0,5	0	0	1

Tableau . Matrice de corrélation des sous-modules du risque de marché (choc à la baisse).

	Intérêt	Action	Immobilier	Spread	Change	Concentration	Illiquidité
Intérêt	1						
Action	0	1					
Immobilier	0	0,75	1				
Spread	0	0,75	0,5	1			
Change	0,25	0,25	0,25	0,25	1		
Concentration	0	0	0	0	0	1	
Illiquidité	0	0	0	-0,5	0	0	1

Tableau . Matrice de corrélation des sous-modules du risque de marché (choc à la hausse).

Le risque de taux d'intérêt concerne les éléments de l'actif et du passif sensibles à un choc haussier ou baissier de la courbe des taux entraînant ainsi une variation au niveau de la valeur nette de l'actif :

$$Mkt_{int}^{up} = \Delta NAV_{up}$$

$$Mkt_{int}^{down} = \Delta NAV_{down}$$

avec :

- Mkt_{int}^{up} : besoin en capital élémentaire au titre du risque de taux à la hausse ;
- Mkt_{int}^{down} : besoin en capital élémentaire au titre du risque de taux à la baisse ;

Les chocs appliqués à cet égard sont définis par la cinquième étude quantitative d'impact selon l'échéance :

Maturité en années	Choc à la baisse	Choc à la hausse
0,25	70%	-75%
0,5	70%	-75%
1	70%	-75%
2	70%	-65%
3	64%	-56%

4	59%	-50%
5	55%	-46%
6	52%	-42%
7	49%	-39%
8	47%	-36%
9	44%	-33%
10	42%	-31%
11	39%	-30%
12	37%	-29%
13	35%	-28%
14	34%	-28%
15	33%	-27%
16	31%	-28%
17	30%	-28%
18	29%	-28%
19	27%	-29%
20	26%	-29%
21	26%	-29%
22	26%	-30%
23	26%	-30%
24	26%	-30%
25	26%	-30%
30	25%	-30%

Tableau .Chocs à la hausse et à la baisse des taux d'intérêt selon QIS 5.

Selon QIS 5 le choc appliqué pour mesurer le besoin en capital élémentaire au titre du risque action résultant du niveau ou de la volatilité de la valeur de marché des actions correspond à une baisse de 30% pour les actions cotées contre une baisse de 40% pour les actions non cotées :

$$Mkt_{equity} = \max(\Delta NAV_{choc\ action} ; 0)$$

Un choc de 25% à la baisse est appliqué à la valeur de l'immobilier pour mettre en exergue l'impact du niveau ou de la volatilité des prix de marché de l'immobilier sur la NAV reflétant ainsi le risque immobilier :

$$Mkt_{property} = \max(\Delta NAV_{choc\ immobilier} ; 0)$$

Le risque de change à l'instar du risque des taux d'intérêt exige l'application de deux chocs de 25% à la hausse et à la baisse de toutes les autres devises face à la devise locale.

$$Mkt_{currency} = \max(\Delta NAV_{choc\ hausse\ des\ devises} ; \Delta NAV_{choc\ baisse\ des\ devises} ; 0)$$

Le risque de concentration reflète le manque de diversification ou la surexposition au risque de défaut d'un émetteur. Cette concentration se détermine non pas au niveau de l'émetteur mais plutôt au niveau du groupe auquel se rattache l'émetteur.

Le calcul du coût de la concentration d'un groupe exige le calcul de l'exposition nette de ce groupe en sommant les expositions individuelles en plus de la détermination de la qualité de crédit en tant qu'une moyenne des qualités de crédits des expositions individuelles pondérées par le montant de celles-ci. L'excédent d'exposition est calculé par :

$$XS_i = \text{Max}(0; \frac{E_i}{Assets} - CT_i)$$

avec :

- E_i : exposition nette en cas de défaut de la contrepartie i ;
- Assets : montant des actifs ;
- CT : seuil de concentration (Concentration threshold), il est fixé selon la note de la contrepartie.

Qualité de crédit	CT
0	3%
1	3%
2	3%
3	1,5%
4	1,5%
5	1,5%
6	1,5%

Tableau . Seuils de concentration.

Le besoin en capital correspondant au risque de concentration est ensuite calculé selon la formule suivante :

$$SCR_{conc} = \sqrt{\sum_i (E_i \times XS_i \times g_i)^2}$$

avec :

- g_i : facteur pénalisant de la surexposition (risk factor).

Qualité de crédit	g_i
0	12%
1	12%
2	21%
3	27%
4	73%
5	73%

Tableau . Facteur de la surexposition.

Le risque d'illiquidité traduit la difficulté de vente ou d'achat d'un actif. Il est pris en compte par le biais de la prime de liquidité lorsque celle-ci est intégrée dans les provisions techniques. Un choc à la baisse de 65% au niveau de la prime de liquidité permet de calculer le besoin en capital élémentaire au titre de ce risque :

$$Mkt_{illiquidity} = \max(\Delta NAV_{choc\ illiquidité}; 0)$$

II.3 Agrégation des modules.

Après application de tous les chocs imposés par la régulation, les exigences de capital sont agrégées en tenant compte des corrélations retenues par la cinquième étude quantitative d'impact QIS5.

Une agrégation intra-modulaire permet de calculer les six différents SCR : SCR Market, SCR Health, SCR Life, SCR Non-Life, SCR Default et SCR Intang. Enfin, une agrégation inter-modulaire permet d'agréger les différents SCR précités au moyen de la matrice de corrélation de la formule standard, dite CorrSCR, pour obtenir le BSCR :

$$BSCR = \sqrt{\sum_{i,j} corrSCR_{i,j} \times SCR_i \times SCR_j}$$

avec :

- SCR_i, SCR_j : l'exigence de capital au titre des différents risques ;
- $corrSCR_{i,j}$: coefficient de corrélation défini dans la directive Solvabilité II comme suit :

	SCR _{mkt}	SCR _{def}	SCR _{life}	SCR _{health}	SCR _{nl}
SCR _{mkt}	1				
SCR _{def}	0,25	1			
SCR _{life}	0,25	0,25	1		
SCR _{health}	0,25	0,25	0,25	1	
SCR _{nl}	0,25	0,5	0	0	1

Tableau . Matrice de corrélation des modules de risques.

II.4 Le SCR opérationnel.

Le SCR opérationnel se déduit à partir du SCR de base présenté dans le paragraphe précédent. En effet :

$$SCR_{op} = \min(30\% \times BSCR; OP) + 0.25 Exp_{UC}$$

avec :

- OP : la charge de risque opérationnel de base relative aux contrats autres que les contrats en unité de compte :

$$OP = 0.04 \times Prime + 0.0045 \times Provisions\ Techniques$$

- Exp_{UC} : le montant annuel des dépenses, brute de réassurance, relatif aux contrats en unités de comptes.

II.5 Ajustement.

En cas de choc l'assureur peut, selon sa capacité d'ajustement, réviser sa politique de distribution des excédents et reporter sur l'assuré une partie du choc moyennant une moindre distribution des excédents.

Ces propriétés d'absorption des risques peuvent être quantifiées en calculant le SCR brut et le SCR net. Le premier, SCR brut, se calcule sous l'hypothèse que l'assureur ne peut pas modifier sa politique de distribution future des excédents en cas de survenance du choc considéré. En revanche, le SCR net, se calcule sous l'hypothèse que l'assureur peut adapter sa politique de distribution des excédents pour absorber un éventuel choc. Pour éviter toute confusion au niveau des notations, les exigences de capital nettes d'effet d'absorption sont notées $nSCR_i$.

Le $nBSCR$, SCR global net, peut être calculé selon la même méthode modulaire que le BSCR, au moyen des mêmes matrices de corrélation, mais en utilisant cette fois-ci les capitaux élémentaires nets.

Pour calculer les SCR_i bruts requis au titre des différents risques élémentaires i , il convient d'abord d'établir le bilan économique à la date d'évaluation tel que :

$$\begin{aligned} NAV_0 &= A_0 - BE_0 \\ FDB_0 &= BE_0 - BEG_0 \end{aligned}$$

avec :

- FDB_0 les futurs excédents discrétionnaires ;
- BEG_0 le Best Estimate Garanti.

L'étape suivante consiste en un calcul, pour chaque risque élémentaire i , des éléments du bilan économique et des futurs excédents discrétionnaires suite à un choc instantané sur le facteur de risque i . Le « Best Estimate » étant calculé net, le SCR relatif à chaque risque i qui en est déduit est net aussi :

$$nSCR_i = NAV_0 - NAV_{0+}^i$$

Enfin, le SCR relatif au risque i en brut est obtenu par le calcul suivant :

$$SCR_i = nSCR_i + (FDB_0 - FDB_{0+}^i)$$

En agrégeant les capitaux élémentaires au moyen des matrices de corrélation définies dans les spécifications techniques, il est possible d'obtenir le BSCR et le $nBSCR$. Ainsi :

$$Adj = -\min(BSCR - nBSCR; FDB)$$

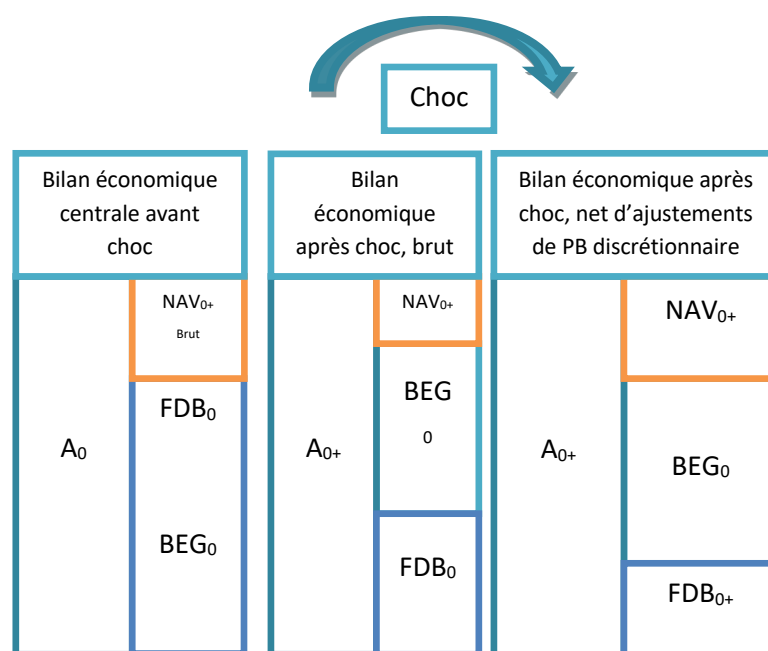


Figure . Evolution du bilan économique après choc et ajustement.

III. Le capital économique dans le cadre d'un modèle interne.

Dans le cadre d'un modèle interne, le SCR est défini comme la valeur en risque (value at risk) des fonds propres de base de l'entreprise d'assurance ou de réassurance, avec un niveau de confiance de 99.5% à l'horizon d'un an.

La formalisation mathématique relative au calcul de SCR est traitée sous différents aspects. D'une part, Planchet, Juillard & Guilbert proposent d'évaluer le SCR à l'aide de la variable aléatoire « Best Estimate ». Tandis que Loisel et Devineau proposent une approche directe en utilisant la variable « fonds propres ».

Ces approches sont similaires dans la mesure où les fonds propres peuvent être obtenus en actualisant la valeur probable des résultats futurs ou en calculant la différence de la valeur de marché de l'actif et du « Best Estimate ».

III.1 La première approche (l'actualisation des résultats).

La définition du capital dans l'environnement Solvabilité II repose sur une vision économique du bilan de la compagnie. A chaque date t , il est possible de construire le bilan économique suivant :

Bilan économique en t	
A_t	FP_t
	VEP_t

Figure . Schéma représentatif du bilan économique en t.

sous les notations :

- A_t : valeur de marché de l'actif en t ;
- VEP_t : valeur économique du passif en t ;
- FP_t : fonds propres économiques en t.

La valeur de chacun des postes du bilan correspond aux expressions suivantes :

$$VEP_0 = E_Q[\sum_{u \geq 1} \delta u * Pu \setminus F_0]$$

$$FP_0 = E_Q[\sum_{u \geq 1} \delta u * Ru \setminus F_0]$$

$$FP_1 = R_1 + E_Q[\sum_{u \geq 2} \delta u * Ru \setminus F_1^{MR}]$$

$$VEP_1 = E_Q[\sum_{u \geq 2} \delta u * Pu \setminus F_1^{MR}]$$

où :

- δu : le facteur d'actualisation qui s'exprime à l'aide du taux sans risque instantané r_u tel que $\delta u = e^{-\int_0^u r_n * dh}$;
- P_t : les cash-flows du passif en période t ;
- R_t : le résultat de la compagnie en période t ;
- F_1^{MR} : l'information monde réel de première année.

Le capital économique, défini par Solvabilité II, est le niveau minimal des fonds propres à la date initiale satisfaisant la contrainte :

$$P(FP_1 < 0) \leq 0.5\%.$$

Ce capital économique se calcule au moyen de la relation :

$$FP_0 - P(0,1) \times q_{0.5\%}(FP_1)$$

où :

- $P(0,1)$: le prix en $t = 0$ d'un zéro-coupon de maturité 1 an,
 - ☞ Sous l'hypothèse que l'apport du montant de capital $P(0,1) * q_{0.5\%}(FP_1)$ sous forme de cash n'a qu'une incidence négligeable sur la valeur du résultat de première période et des résultats ultérieurs.

III.2 La deuxième approche (Best Estimate) :

Afin de déterminer la distribution des fonds propres à horizon 1 an, nous devons développer la dynamique du bilan de $t=0$ à $t=1$.

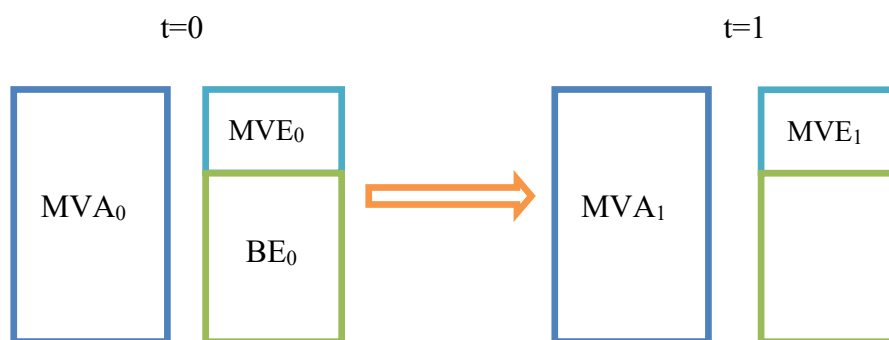


Figure . Le passage du bilan économique de t=0 à t=1.

avec :

- MVA_t : valeur de marché de l'actif à t=0 ;
- BE_t : valeur du Best Estimate à t, où $BE_t = E_Q[\sum_{i=t}^T L_t * D_t]$;
- MVE_t : valeur de marché des fonds propres à t ;
- L_t : flux du passif à t ;
- D_t : facteur d'actualisation à t ;
- R_t : taux de rendement de l'actif sur la période t ;
- F_t : flux de prestation servi au cours de la période t.

Notons que vu de t = 0, MVA_1 , MVE_1 et BE_1 sont des variables aléatoires.

Dans le cadre du bilan précédent (simplifié), on déduit le SCR de la relation suivante :

$$P(MVE_1 > 0) = P(MVA_1 - BE_1 > 0) = 99.5\%.$$

Avec P la probabilité historique.

Sous l'hypothèse simplificatrice « $MVE_0 = SCR$ » et en développant les calculs, on obtient l'expression suivante :

$$SCR = VAR_{99.5\%}\left(\frac{BE_1 + F_1}{1 + R_1}\right) - BE_0.$$

IV. Le modèle interne en assurance vie

Comme nous l'avons vu, le calcul du SCR en assurance vie par modèle interne nécessite la simulation de la distribution des fonds propres économiques à l'an. Ce calcul est rendu particulièrement complexe en assurance vie du fait des interactions entre l'actif et le passif du bilan, des garanties financières et des options cachées existant dans la plupart des contrats proposés sur le marché.

En effet, les garanties financières et les options cachées ont une valeur temps comme les options financières (swap, call, etc.) qui s'échangent sur les marchés. Sous Solvabilité II, le Best Estimate qui doit être évalué en valeur économique, doit contenir aussi cette valeur temps de ces options évalué par le biais de simulations stochastiques en univers risque-neutre. A titre d'exemple, nous allons développer l'option TMG avec participation au bénéfice.

Cette garantie induira un coût imputé sur les fonds propres de la compagnie d'assurance à l'année t si elle ne peut pas la satisfaire. Cela se produit lorsque les ressources dont elle dispose en t (revenus des actifs et résultat technique), notées S_t , sont inférieures au montant à verser aux assurés en t (intérêt techniques et participation aux bénéfices), noté K_t .

Le prix de la garantie pour l'année t est donné par l'expression suivante :

$$\text{Max}[0 ; (K_t - S_t)] = (K_t - S_t)^+$$

Cette garantie s'apparente à un put européen. Le prix de la garantie en t est donc donné par l'espérance de la somme actualisée des cash-flows futurs sous la probabilité risqué neutre Q. Soit :

$$\text{Prix option TMG avec PB}(t) = E^Q[\sum_{u=t}^T \delta_u (K_u - S_u)^+ | F_t]$$

avec :

- $(F_t)_{t \geq 0}$: la filtration qui caractérise l'information financière disponible,
- r_u : le taux sans risque instantané,
- δ_u : le facteur d'actualisation.

Ainsi le modèle interne classique peut-il se décomposer en deux structures principales :

- ❖ Le Générateur de scénarios économiques (ESG).
- ❖ Le modèle ALM.

IV.1 Le Générateur d'assurance vie.

L'ESG est un outil de simulation stochastique permettant de générer des scénarios économiques. Selon Planchet, un générateur économique correspond à une projection de grandeurs économiques et financières sur un horizon d'intérêt.

Dans la pratique, les outils de projections des portefeuilles d'assurance-vie sont alimentés par des tables de scénarios (scénarios économiques, scénarios de mortalité,...) générées en amont au moyen d'applicatifs dédiés (calculs stochastiques).

Par exemple pour chaque simulation, une table de scénarios peut contenir l'évolution des courbes des taux, de l'indice « actions », de l'inflation, etc.

IV.2 Le modèle ALM :

Le modèle ALM est un outil de gestion actif-passif. Selon Piermay, la gestion actif-passif consiste d'une part à analyser la couverture des engagements d'un assureur ou d'un investisseur institutionnel par les actifs dans une perspective de déroulement dans le temps.

Elle recouvre d'autre part l'ensemble des moyens d'actions visant à piloter le bilan de l'institution.

En effet, le modèle ALM modélise l'actif, le passif et surtout leur interaction mutuelle. A ce niveau, il introduit l'ensemble des stratégies dynamiques définies par l'organe décisionnel en ce qui concerne l'allocation d'actifs, la participation aux bénéfices et la réalisation de plus ou moins-values.

Une simulation dans un modèle ALM « vie » correspond à une projection déterministe de l'ensemble des éléments actuariels (éléments de bilan et de compte de résultat) effectuée sur la base d'un scénario particulier.

V. Capital économique approche par SdS (Nested Simulations)

La distribution de fonds propres est complexe à obtenir à cause du nombre important de facteurs de risques et de la sophistication des interactions Actif/Passif qui découlent principalement des mécanismes des options cachés et des garanties financières proposées aux assurés dont la valeur temps doit être évaluée pour déterminer le passif de l'entreprise et cette

évaluation ne peut se faire que par le biais des simulations stochastiques en univers risque-neutre.

V.1 Projections futures : Univers Réel vs Risque-Neutre :

Dans le but de formaliser les notions d'univers réel et d'univers risque-neutre, on considère un marché comportant un actif risqué et un actif non risqué.

L'actif risqué vérifie :

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu_t dt + \sigma_t dW_t$$

L'actif sans risque évolue selon :

$$\frac{dB^t}{B^t} = r_t dt$$

Sachant que r_t est le taux sans risque, que les processus sont définis sur un espace probabilisé filtré $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, que les trajectoires observées dans les historiques de cours apparaissent en particulier sous la probabilité historique, et que W est un mouvement brownien adapté à la filtration sous cette probabilité \mathbf{P} .

On définit la prime de risque λ_t comme l'excès de rendement par rapport au taux sans risque $(\mu - r)$ par unité de risque (σ) .

Alors l'EDS de l'actif risqué peut s'écrire selon la forme suivante :

$$\frac{dS_t}{S_t} = (r_t + \sigma_t \lambda_t) dt + \sigma_t dW_t = r_t dt + \sigma_t (dW_t + \lambda_t dt)$$

On introduit alors un nouveau processus \hat{W} , qui est défini par :

$$d\hat{W}_t = dW_t + \lambda_t dt$$

ainsi :

$$\frac{dS_t}{S_t} = r_t dt + \sigma_t d\hat{W}_t.$$

Cependant, bien que W est un mouvement brownien sous la probabilité \mathbf{P} , \hat{W} ne l'est pas. Toutefois, le théorème de Girsanov affirme l'existence d'une probabilité \mathbf{Q} équivalente à \mathbf{P} sous laquelle \hat{W} est une martingale.

Cette probabilité est appelée risque-neutre, car elle ne comporte plus de prime de risque. Le rendement de S sous cette probabilité est simplement le taux sans risque.

Dans le cas du calcul du capital économique, l'univers réel (l'univers historique) est un univers de projection à horizon un an qui représente l'état du monde observable sur le marché. Donc les valeurs estimées des paramètres dans cet univers reflètent les valeurs constatées dans la réalité.

L'univers risque-neutre est basé sur la neutralité des instruments financiers vis-à-vis du risque, en moyenne ils se comportent tous comme un actif sans risque. On peut déduire qu'en pratique les taux de rendement et les taux d'actualisation sont les mêmes et qu'il n'y a pas de prime de risque dans cet univers risque neutre. L'évaluation des postes du bilan est réalisée, selon cet univers financier, en considérant l'espérance des cash-flows futurs actualisés.

V.2 Description de l'approche SdS

Le schéma suivant illustre le principe de la méthode des simulations dans les simulations :

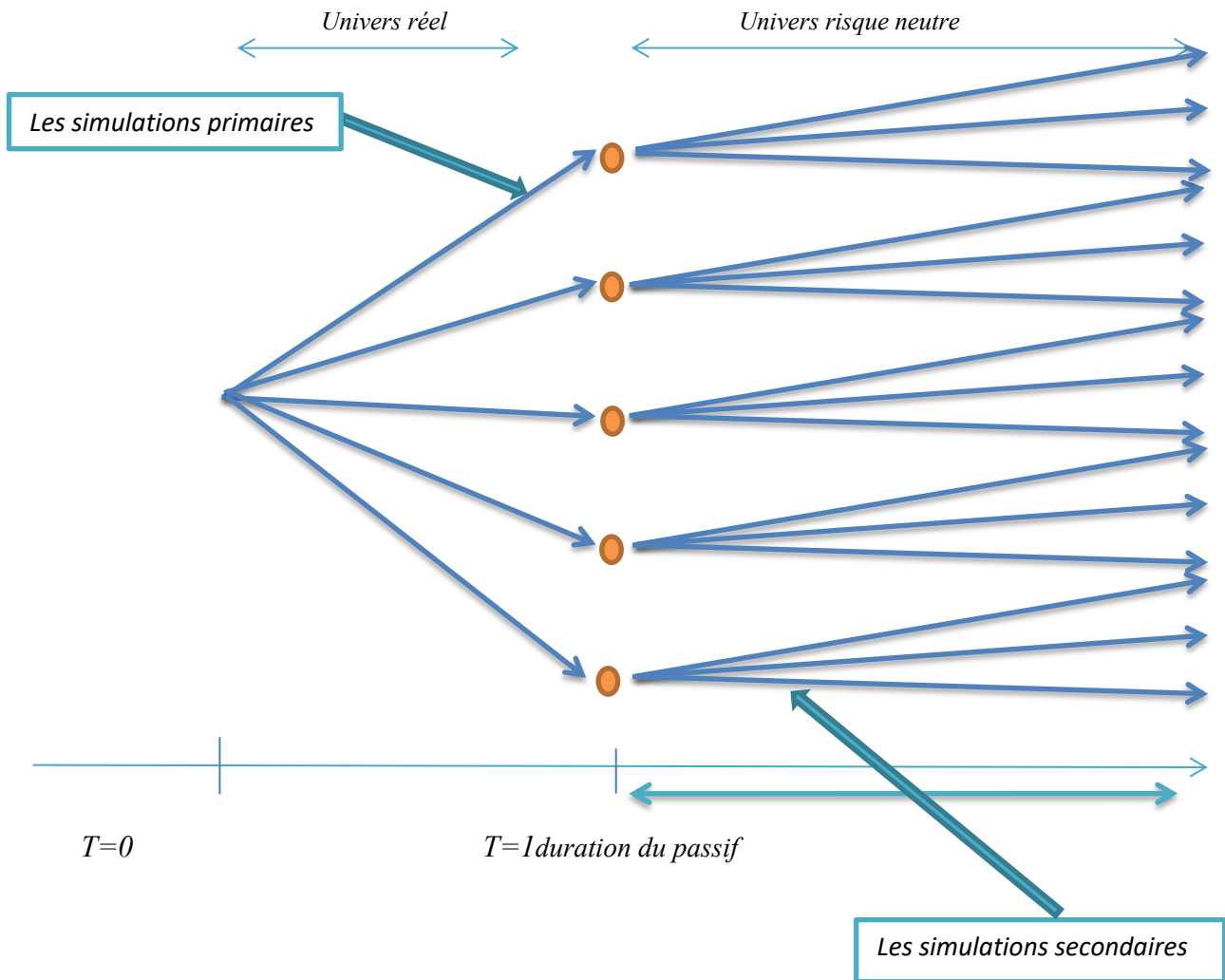


Figure . schéma représentatif de la méthode SdS

- ☞ Sur la première période (de $t=0$ à $t=1$)
 - La simulation de l'ensemble des variables financières pour la première année.
- ☞ En fin de première période (à partir de $t=1$)
 - L'ajustement des scénarios secondaires de manière à tenir compte de l'information véhiculée par les simulations primaires à la fin de la première période.
 - Pour chacun des scénarios primaires, un jeu complet de simulations est relancé de $t=1$ jusqu'à l'horizon de projection des cash-flows du passif.
 - Le calcul des moyennes empiriques permet d'estimer les valeurs économiques du passif en $t=1$.
 - La détermination du capital économique à la fin de la première période.

Les calculs de la valeur économique des passifs en tenant compte des liens de dépendances actif-passif provenant des mécanismes de participation aux bénéfices et des comportements de rachats dynamiques des assurés ne permettent pas une mise en œuvre de type formules fermées. Donc, il est nécessaire de recourir à des méthodes de type Monte Carlo pour l'estimation de la valeur économique des passifs et des fonds propres économiques.

Par le biais du modèle interne, on effectue des simulations monde-réel sur la première année (simulations primaires). Puis à l'issue de chacune de ces simulations on effectue de nouvelles simulations (simulations secondaires) qui ont pour but d'estimer les éléments du bilan.

Chapitre 5 : Alternatives à la méthode des simulations dans des simulations.

Etant donné la complexité potentielle de la distribution des facteurs de risque, il est nécessaire d'adopter une approche par simulation pour assurer la solvabilité sur un horizon pluriannuel.

Dans la pratique, chaque jeu de simulation nécessite entre mille et dix mille simulations, soit quelques dizaines ou centaines de milliers de simulations au total. Cependant, la puissance actuelle des ordinateurs ne permet pas un tel volume de calculs en un temps raisonnable.

Dès lors, bien que l'approche SdS soit simple en théorie, son implémentation demeure coûteuse en termes de temps et de ressources. Dans ce sens, plusieurs techniques ont été développées pour s'affranchir le plus possible des simulations secondaires en effectuant une sélection de trajectoires à projeter ou en estimant des proxys du passif de la compagnie.

Ce chapitre s'articule autour de quatre approches dont le dessein est de remédier à la complexité de SdS. Le premier titre porte sur l'accélérateur de SdS, le second renvoie à la méthode de « Curve Fitting » et le troisième à la méthode « Replicating Portfolio ». Enfin, ce chapitre est clôturé par un aperçu sur l'algorithme de LSMC.

I. L'ACCELERATEUR DE SdS.

L'accélérateur de SdS présente un automate de calcul décidant des simulations primaires à exécuter en fonction de leur niveau de risque. En effet, il associe à chaque scénario primaire une norme traduisant son niveau d'adversité. Ensuite, il effectue les simulations par ordre de norme décroissant jusqu'il y ait stabilité et convergence des pires valeurs des fonds propres économiques.

Cette méthode s'applique selon les étapes suivantes :

- la construction des facteurs de risques élémentaires (actions, taux, mortalité, etc.) et la détermination de la norme associée ;
- l'identification d'une région d'exécution associée à un seuil fixé : les simulations primaires sont effectuées lorsque les risques appartiennent à la région d'exécution ;
- l'incrémentation du seuil en intégrant à chaque fois un nombre supplémentaire de scénarios ;
- l'algorithme s'arrête lorsque les pires valeurs des fonds propres prises par l'algorithme sont stabilisées.

II. LA METHODE CURVE-FITTING.

Curve-Fitting est une méthode de proxy. Elle consiste à :

- sélectionner un nombre réduit de simulations primaires ;
- appliquer l'approche « Nested Simulations » aux simulations primaires sélectionnées.
- Régresser la série des fonds propres économiques, obtenue au moyen des simulations primaires, sur les facteurs de risque du portefeuille.

- appliquer la fonction de régression calibrée à l'ensemble des simulations primaires qui devaient être effectuées à l'aide de la méthode « Nested Simulations » normale.

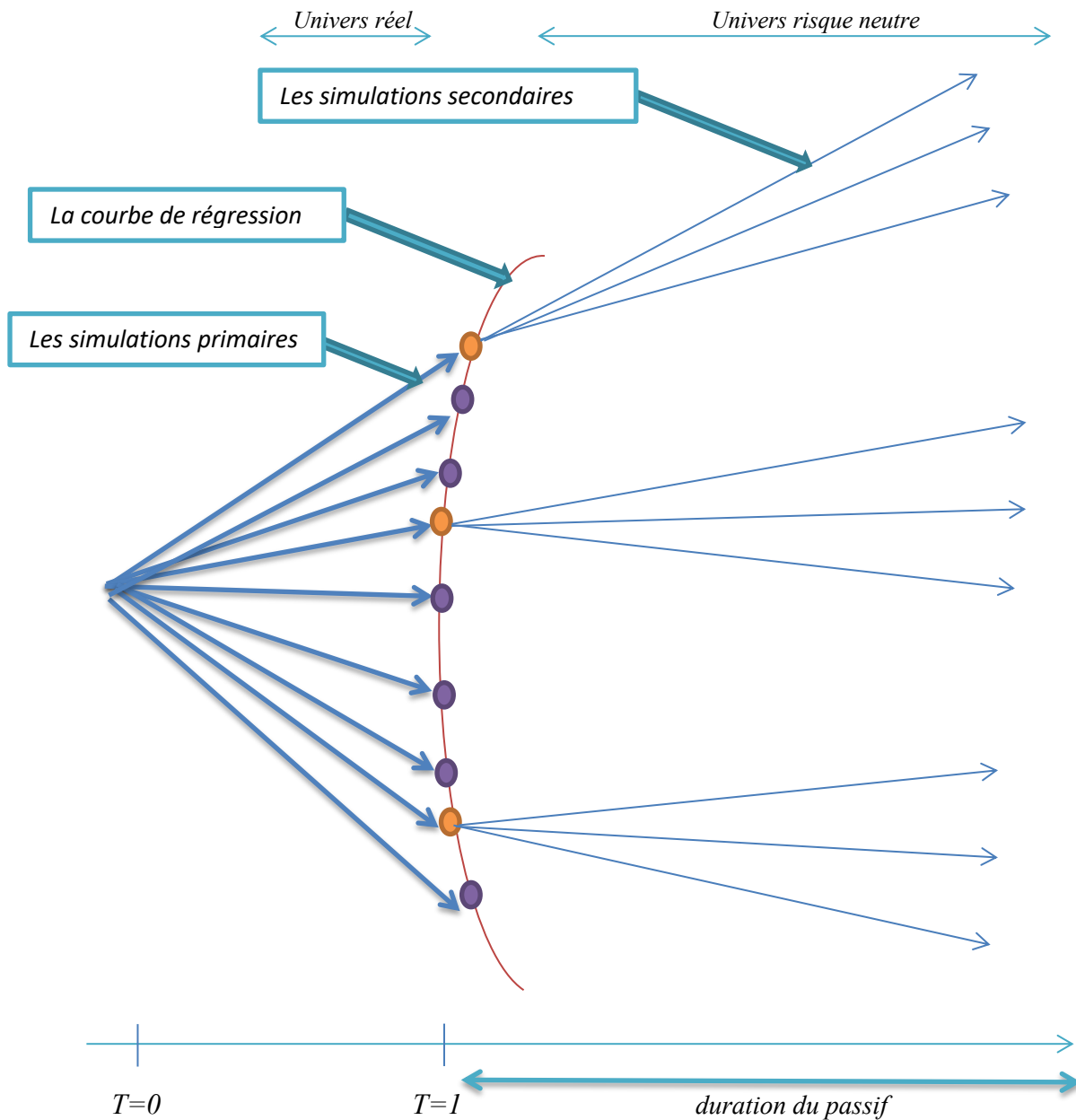


Figure. Schéma représentatif de la méthode « Curve-Fitting ».

Cette approche permet de minimiser le nombre de simulations et d'accélérer le calcul de la distribution des fonds propres. Néanmoins, le nombre de simulation demeure élevé en présence d'un grand nombre de facteurs de risques.

III. LA METHODE REPLICATING PORTFOLIO.

La méthode « Replicating Portfolio » semble être une piste de réflexion intéressante pour mettre en place une alternative à la méthode « Nested Simulations ». Elle repose sur la détermination d'un portefeuille d'actifs financiers valorisables par formules fermées permettant de répliquer le passif. Ce portefeuille répliquant est utilisé comme proxy des

passifs à $t=1$ en utilisant des formules fermées pour ne pas avoir recours à des simulations dans des simulations.

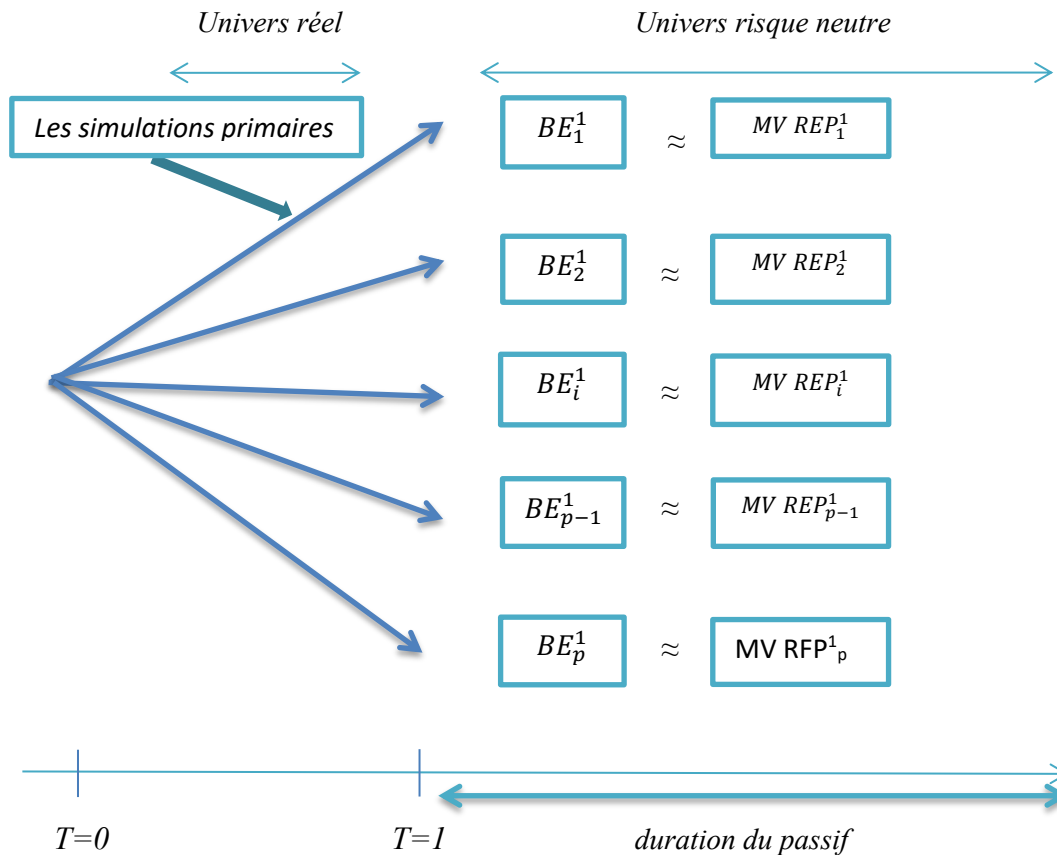


Figure. Schéma représentatif de la méthode « Replicating Portfolio ».

Cette méthode repose essentiellement sur l'approchement de la valeur du marché du portefeuille répliquant et celle du passif qui aurait été calculé par la méthodes SdS, les simulations dans les simulations, pour chaque scénario en $t=1$.

Vu la pluralité et la diversité des garanties financières proposées aux assurés il semble envisageable de vouloir répliquer un passif à l'aide d'instruments financiers. Toujours est-il que ce portefeuille répliquant n'est pas destiné à un usage de couverture. Il constitue un instrument permettant de calculer la valeur du marché du Best Estimate à $t=1$.

Le choix des actifs est le résultat d'une lecture optionnelle du contrat comme le montre le tableau suivant :

Instrument	Maturité	Strike	Terme	Objectif
Zéro coupon	Date de sortie de flux			Répliquer la composante fixe des flux
Equity	Date de dénouement de la position			Répliquer les flux fortement corrélés
Call/Put	Date de l'exercice de	Strike à fixer au		Répliquer les

	l'option	vue de la garantie		options implicites
Floors/ Caps	Durée de vie de contrat	Strike à fixer au vue de la garantie		Répliquer les options implicites
Swaption	Date de l'exercice de l'option	Strike à fixer en fonction du comportement de l'assuré	Durée de vie swap	Répliquer les options de rachat anticipé

Tableau. L'utilité des actifs dans la réplication.

Ainsi, connaissant le passif et les garanties proposées dans les contrats, l'univers d'actifs financiers associés à chaque garantie d'un contrat d'assurance vie se détermine comme suit :

Clause d'un contrat d'assurance vie	Instrument financier
Taux minimum garantie (TMG)	Obligation zéro coupon (ZCB)
Garantie de taux minimum sur versements	Swaption
Participation aux bénéfices	Option d'achat européenne, strike fixé
Garantie Plancher	Option de vente américaine, strike fixé
Rachat	Swaption, put américain (dépend du modèle de comportement des assurés).

Tableau. La réplication des garanties par les instruments financiers.

Ce travail est compliqué puisqu'il peut conduire à des actifs complexes ou inexistantes.

Le rôle du portefeuille répliquant est d'approcher la valeur de marché du passif en $t=1$. Autrement dit, l'objectif est de minimiser l'écart entre la valeur de marché du portefeuille répliquant MVRPF et celle du passif. Pour ce faire, il existe plusieurs approches de calibration du MVRPF appelés, souvent, métriques de réplication. Ainsi, la notion de réplication semble-t-elle avoir un sens plus faible dans la mesure où il est nécessaire d'avoir recours à ces métriques.

Les techniques de réplication ont pour dessein de faire correspondre les cash-flows du modèle de « Replicating Portfolio » à ceux du passif.

Parmi les techniques de réplication envisageables :

- La métrique « Present Value Matching »
- La métrique « Cash Flow Matching »
- La métrique « Terminal Value Matching »
- La métrique « Cash Flow Matching par période (time buckets) »

En somme, cette méthode se résume dans le schéma suivant :

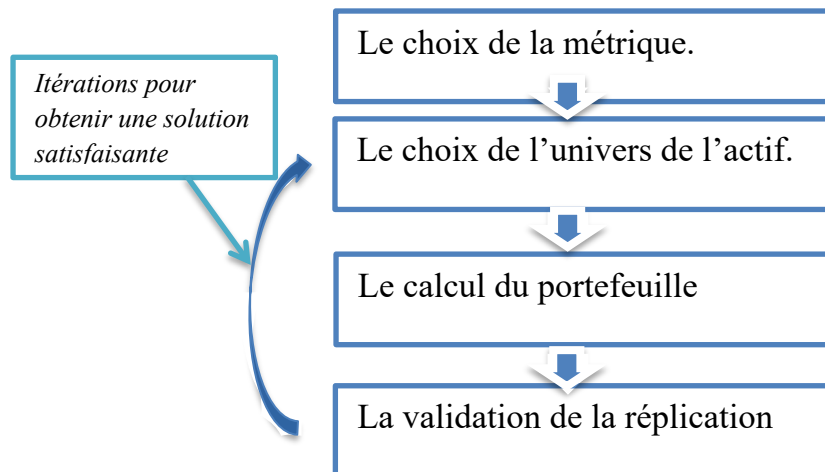


Figure. Schéma représentatif du processus de la méthode « Replicating Portfolio ».

IV. LA METHODE LSMC.

La méthode Least-Square Monte-Carlo est également une méthode de proxy de spassifs. Elle repose, comme son nom l'indique, sur un principe de régression via la méthode des moindres carrés.

Cet algorithme a comme but d'approximer numériquement le calcul de «Nested Simulations ». Il se contente de générer une seule trajectoire secondaire pour chaque simulation primaire, au lieu d'effectuer plusieurs simulations secondaires.

La valeur obtenue représente donc une valeur approximative de la valeur des fonds propres estimée par la moyenne des simulations secondaires.

Une courbe, qui décrit l'espérance des fonds propres, est tracée à la base d'une régression par rapport au nuage de points obtenu en fonction de plusieurs paramètres. Le schéma suivant illustre cette approche :

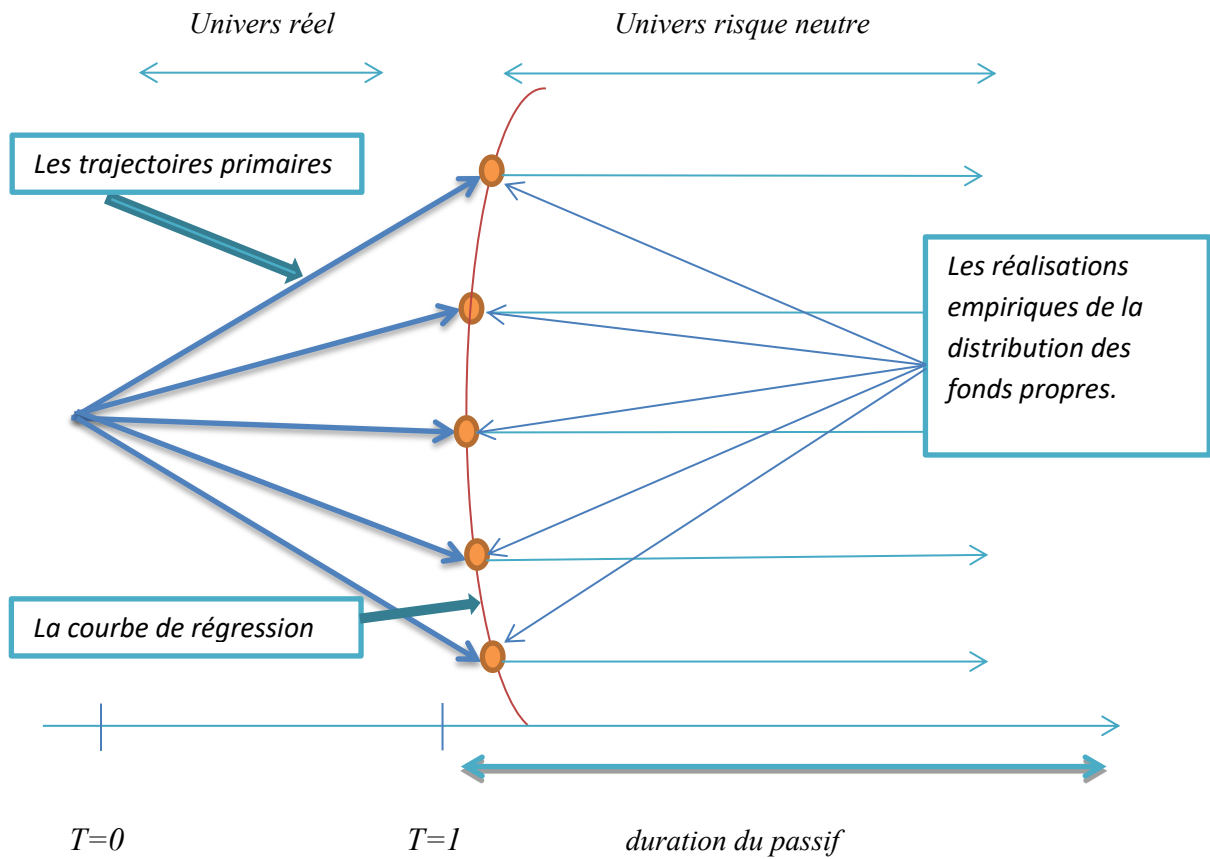


Figure. Schéma représentatif de la méthode LSMC.

La différence entre l'approche « Nested Simulations » et l'algorithme LSMC réside dans le fait que la première est une estimation point par point alors que la seconde est une estimation par fonction.

Comme présenté dans le graphe à gauche, la méthode des simulations dans les simulations permet d'estimer avec précision la fonction espérance des fonds propres pour chaque trajectoire primaire.

En revanche, l'estimation est moins précise si seule une trajectoire secondaire est retenue. D'où la nécessité de la compléter par une régression du nuage comme dans le graphe suivant :



Figure. L'estimation de l'espérance des fonds propres par la méthode « Nested Simulations » et l'algorithme LSMC.

Chapitre 6 : modélisation de l'actif.

La mise en œuvre des simulations des générateurs de scénarios économiques nécessite essentiellement une génération de variables aléatoires normales. En effet, il est réputé en finance d'émettre des hypothèses gaussiennes afin d'étudier l'évolution des actifs financiers. Cette hypothèse facilite la discrétisation ainsi que la programmation en pratique des modèles utilisés en finance. La modélisation stochastique des actifs se base sur la simulation des mouvements browniens par des lois normales indépendantes.

I. FORMALISATION MATHÉMATIQUE.

Il s'avère nécessaire d'explicitier quelques notions et propriétés incontournables utilisées dans la plupart des modèles.

I.1 Mouvement brownien.

Un mouvement brownien standard $\{W_t, t \geq 0\}$ est un processus stochastique probabilisé filtré et qui vérifie les propriétés suivantes :

- $\forall w \in \Omega, W_0 = 0$
- $\forall 0 \leq t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_k$, les variables aléatoires $W_{t_1}-W_{t_0}, W_{t_2}-W_{t_1}, \dots, W_{t_k}-W_{t_{k-1}}$ sont indépendantes.
- $\forall s, t \geq 0$, tels que $s \leq t$, la variable $W_t - W_s$ suit une loi normale centrée de variance $t-s$.
- $\forall w \in \Omega$, la trajectoire $t \rightarrow W_t(w)$ est continue.

Il est évident qu'un mouvement brownien, étant un processus continu, doit être discrétisé par un choix d'un pas de temps convenable Δt . Alors, la simulation d'une trajectoire d'un mouvement brownien revient à simuler des variables indépendantes et identiquement distribuées selon la loi $N(0, \Delta t)$.

I.2 Processus stochastique.

Un processus stochastique est une collection $\{X_t\}$ de variables aléatoires indexées par le temps et définies sur un même espace probabilisé (Ω, F, P) . Les termes processus et stochastique désignent, respectivement, fonction et aléatoire. Si la variable aléatoire X associe à chaque $w \in \Omega$ une réalisation, un processus stochastique lie chaque w à une trajectoire $\{X_t(w)\}_t$:

$$\begin{aligned} T &\rightarrow E \\ t &\rightarrow X_t(w) \end{aligned}$$

avec

- E : l'espace d'arrivée des variables aléatoires X_t ;
- $X_t(w)$: un état de processus à l'instant t ;
- T : l'espace des temps.

Il existe plusieurs familles de processus selon la nature de T et E :

- Suivant que E l'espace des états du processus soit fini, dénombrable ou continu, on dit que c'est un processus à un nombre fini d'état, un processus d'états dénombrable ou un processus d'états continus ;

- Si l'espace des temps T appartient à R, le processus est à temps continu.

Les actifs risqués sont généralement modélisés par des processus stochastiques à temps continu. Cependant, la simulation pratique de la trajectoire de l'actif exige que le temps soit discrétisé. Cette discrétisation reflète la réalité des marchés financiers qui ne cotent pas en continu.

I.3 Lemme d'ito.

Si X est solution de l'équation différentielle stochastique suivante :

$$X(t) = X(0) + \int_0^t m(X(s), s) ds + \int_0^t \sigma(X(s), s) dB(s)$$

ou

$$dX(t) = m(X(t), t)dt + \sigma(X(t), t)dB(t)$$

alors :

$$df(X(t), t) = \left(\frac{\partial f}{\partial t} + m(X(t), t) \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2} \sigma^2(X(t), t) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right) dt + \sigma(X(t), t) \frac{\partial f}{\partial x} dB(t)$$

avec :

- f : une fonction de classe $C^{1,2}(R_+, R)$;
- B : un mouvement brownien ;
- M : le drift du processus (la moyenne) ;
- σ : l'intensité de la volatilité.

I.4 Méthode d'inversion de la fonction de répartition.

La méthode de l'inversion des fonctions de répartition constitue la méthode la plus directe permettant de simuler une distribution continue selon une génération des variables aléatoires suivant une loi uniforme U(0,1).

Il n'est pas utile de supposer l'existence de la fonction inverse dans la mesure où on peut définir, sachant que la fonction à inverser est croissante au sens large et continue à droite, une fonction pseudo-inverse G continue à gauche par la formule suivante :

$$G(y) = \inf \{ x: F(x) \geq y \}$$

Sachant bien que si la fonction F est inversible, alors on aura :

$$G = F^{-1}$$

Cette méthode repose sur le résultat suivant :

Si U est une variable aléatoire réelle qui suit une loi uniforme sur l'intervalle [0,1]. Alors, la variable aléatoire réelle $F^{-1}(U)$ a pour fonction de répartition F.

I.5 La discrédance.

La discrédance est une grandeur intéressante pour la détermination du niveau de l'équirépartition d'une suite. De nombreux algorithmes proposent des moyens pour estimer ou même de majorer cette mesure de la non-uniformité qui s'avère être délicate au niveau du calcul.

Une suite est bien répartie dans son intervalle de confiance, si la limite de la discrédance d'une suite est faible. Autrement dit, une suite est équirépartie ou uniformément distribuée, si et seulement si :

$$\forall A \in P, \lim_{k \rightarrow \infty} D_k(A, x) = 0$$

avec

- P : l'ensemble des sous pavés de $[0,1]^n$;
- k : l'ordre de discrédance de la suite ;
- x : la suite $x = (x_n)_{n \geq 1} \in [0,1]^{\mathbb{N}}$
- γ_n : la mesure de Lebesgue
- $D_k(A, x)$: la discrédance locale d'ordre k par rapport à A, elle est donnée par la formule suivante :

$$D_k(A, x) = \frac{1}{k} \text{Card}\{i \in (1 \dots k), x_i \in A\} - \gamma_n(A)$$

II. Générateur de nombres aléatoires.

Un générateur de nombres aléatoires est un dispositif permettant de produire des nombres obtenus au hasard. La seule méthode étant capable de générer ces nombres consiste à mesurer certains phénomènes physiques, tels que les émissions de particules d'une source radioactive.

Dès lors, le recours à des générateurs purement déterministes est nécessaire afin de pouvoir imiter le hasard. Les résultats de ces générateurs ne sont pas donc complètement aléatoires, mais ils essaient de tendre vers les propriétés idéales d'une source purement aléatoire.

Il existe deux types d'algorithmes générateurs de nombres aléatoires de loi uniforme :

- le générateur pseudo aléatoire ;
- le générateur quasi aléatoire.

II.1 le générateur pseudo aléatoire.

Le générateur de nombres pseudo aléatoires est nommé aussi PRNG « Pseudo random Number Generator ». Il consiste à générer à partir d'un germe initial, un nombre pseudo aléatoire n'ayant aucune relation apparente avec le germe.

Ce nombre obtenu est utilisé pour créer un second nombre pseudo aléatoire. En suivant ce processus récursif, la génération d'une suite de nombres est réalisée par le biais d'une formule déterministe.

Le générateur Rnd(), étant un exemple des générateurs de nombres pseudo-aléatoires, est un générateur congruentiel, qui est disponible sous VBA à partir de la fonction Random.

II.2 Le générateur quasi aléatoire.

Il représente aussi l'un des générateurs pratiqués dans le cadre de simulation stochastique, notamment dans le champ de la finance. Ce générateur diffère du générateur pseudo aléatoire au niveau de la séquence, qui est entièrement déterministe. Autrement dit, le générateur quasi aléatoire génère un échantillon d'une distribution de loi de probabilité, alors qu'un PRNG simule une distribution de loi.

A titre d'exemple, l'algorithme de Tore génère une suite de nombres aléatoires uniformes (U_n) à l'aide d'un nombre premier p selon la formule suivante :

$$U_n = n\sqrt{p} - [n\sqrt{p}]$$

où [] désignent la partie entière.

III. Simulation de variables aléatoires gaussiennes.

La génération de la variable aléatoire gaussienne par la fonction de répartition et son inverse n'a pas une expression explicite. Cependant, plusieurs approches ont été proposées, permettant d'utiliser la méthode d'inversion de manière approximative.

III.1 Algorithme de MORO.

L'algorithme de Moro a comme but d'approcher l'inverse de la fonction de répartition par une méthode numérique, sachant bien que l'inversion n'est pas aisément calculable. Il y'a lieu de noter que cette méthode de simulation est l'une des plus précises parmi les approches proposées notamment au niveau de la queue.

III.2 Méthode de Box Muller.

Il est possible de générer une variable aléatoire gaussienne sans avoir recours à une approximation en procédant à la transformation de Box Muller. Cette méthode consiste à réaliser des paires de nombre aléatoires à distribution normale centrée réduite, en se basant sur deux variables aléatoires uniformes $U[0, 1]$. Elle s'appuie sur le résultat suivant :

Si U et V sont deux variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $[0,1]$ alors $X = \sqrt{-2\ln(U)}\cos(2\pi V)$ et $Y = \sqrt{-2\ln(U)}\sin(2\pi V)$ sont deux variables aléatoires indépendantes et telles que (X, Y) est un vecteur gaussien centré de matrice de covariance I_2 .

IV. Les tests statistiques des générateurs aléatoires.

L'utilisation de chaque générateur demande la vérification de sa justesse. Autrement dit, il est important de tester si le générateur répond approximativement à la loi théorique.

IV.1 Test de X2 D'ajustement.

L'idée de ce test est de découper le domaine de la distribution en intervalles. Dans chaque intervalle, la fréquence théorique est calculée selon la loi spécifiée. Ensuite, les fréquences observées sont comparées avec les fréquences théoriques de cette loi.

La statistique de ce test D^2 est définie comme suit :

$$D^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(n_i - np_i)^2}{np_i}$$

- k : nombre de classes ;
- n : effectif observé ;
- p_i : probabilité d'obtenir une observation de la loi théorique dans la classe i ;
- np_i : effectif théorique dans la classe i .

Cette statistique est asymptotiquement distribuée comme une variable de X^2_{d-1} .

IV.2 Test de Kolmogorov Smirnov.

Le test de Kolmogorov-Smirnov est un test d'hypothèse qui vérifie si un échantillon suit la loi spécifiée par sa fonction de répartition.

La statistique du test est définie comme suit :

$$D_n = \text{Sup} [F_n^*(x) - F(x)]$$

avec :

- $F_n^*(x)$: la fonction de répartition empirique du $n^{\text{ième}}$ échantillon ;
- $F(x)$: la fonction de répartition de la loi théorique ;

Cette statistique est asymptotiquement distribuée de la façon suivante :

$$P[\sqrt{n}D_n < y] \rightarrow \sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^k \exp(-2k^2 y^2)$$

IV.3 Test d'Anderson-Darling.

Le test de Anderson-Darling est une alternative du test de Kolmogorov-Smirnov avec une différence au niveau des queues de distribution. En effet, il permet de comparer une fonction de répartition observée cumulée à une autre fonction de répartition théorique cumulée.

La statistique du test est donnée par la relation suivante :

$$A = -n - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (2i - 1)(\ln[F_i] + \ln[1 - F_{n-i+1}])$$

avec :

- F_i : la fréquence théorique de la loi de répartition de la loi spécifiée.

IV.4 Test de Shapiro-Wilk.

Le test de Kolmogorov-Smirnov est un test d'hypothèse qui vérifie si un échantillon suit la loi spécifiée par sa fonction

Ce test est conçu spécialement pour étudier la normalité. Il est réputé pour sa puissance notamment pour les petits effectifs ($n \leq 50$).

La statistique de ce test est définie comme suit :

$$S = \frac{\sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} [a_i(x_{n-i+1} - x_i)]^2}{\sum_{i=1}^n [(x_i - x_m)]^2}$$

avec :

- x_i : correspond à la série des données triées ;
- $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$: la partie entière du rapport $\frac{n}{2}$;
- a_i : des constantes associées à la moyenne et à la matrice de variance-covariance des quantiles de l'échantillon.

V. Modélisation des taux d'intérêt.

Selon les critères de Rogers (1995), le modèle de taux idéal doit répondre à un certain nombre d'exigences. Il doit d'abord être réaliste, c'est-à-dire qu'il doit tenir compte des propriétés empiriques de la courbe des taux dont l'étude historique met en exergues les points suivants :

- les taux d'intérêt ne sont pas négatifs.
- les taux d'intérêt sont affectés par des effets de retour à la moyenne.
- les taux n'évoluent pas de façon parfaitement corrélée.
- les taux à court terme sont plus volatiles que les taux à long terme.
- le niveau, la pente et la courbure, sont à l'origine de plus de 95% des mouvements de la courbe des taux.

Par ailleurs, les paramètres du modèle doivent être observables sur le marché, facilement estimables, et fréquemment réajustables pour une bonne construction du modèle. Et outre la simplicité et la compatibilité avec les prix de marché de produits (obligations à taux fixe ou variable, swaptions, swaps standards...), le modèle doit tenir compte de tous les facteurs de risque et garantir une cohérence d'un point de vue théorique, c'est-à-dire qu'il doit satisfaire l'hypothèse d'absence d'opportunité d'arbitrage. Enfin, il doit offrir une méthode de couverture du produit de taux qui permet au vendeur de dupliquer aisément le produit sécurisant ainsi, tout au long de la vie du produit, la marge dégagée initialement lors de la vente.

Cependant, force est de constater que ce modèle idéal n'existe pas. Dès lors, différents modèles déterministes ou stochastiques, mono factoriels ou multifactoriels, à discrétisation exacte ou approximative, reposant sur l'équilibre du marché entre l'offre et la demande ou sur la théorie de l'absence d'opportunité d'arbitrage, se sont développés sans pour autant répondre à toutes les exigences de Rogers.

Cette section présente des modèles mono factoriels des taux ainsi que leurs mises en application. Il s'agit du modèle de Vasicek et celui de Cox Ingersoll Ross.

I.1 Le modèle de Vasicek.

I.1.1 Présentation du modèle.

Le modèle de Vasicek (1977) est l'un des premiers modèles stochastiques de taux d'intérêt. Il s'agit d'un processus gaussien qui explique l'effet de retour à la moyenne empiriquement observé sur les courbes de taux en se référant au processus d'Ornstein Uhlenbeck. En effet, empiriquement, des valeurs élevées de taux ont tendance à être suivies plus fréquemment par des baisses plutôt que des hausses et vice-versa. Selon ce modèle, le taux d'intérêt vérifie sous la probabilité historique l'équation différentielle stochastique ci-dessous :

$$dr_t = a(b - r_t)dt + r_t \sigma dW_t$$

avec :

- r_t : taux d'intérêt instantané
- a : force de rappel, vitesse de retour à la moyenne ($a > 0$).
- b : tendance, moyenne long terme du taux autour de laquelle évolue le taux court instantané ($b \geq 0$).
- σ : volatilité ($\sigma > 0$).
- W_t : processus de Wiener

De même, sous la probabilité risque neutre, la dynamique du processus est comme suit :

$$dr_t = a(b^* - r_t)dt + r_t \sigma dW_t^*$$

avec :

$$b^* = b - \frac{\lambda^* \sigma}{a}$$

W^* : mouvement brownien sous la probabilité risque neutre

λ : prime de risque

Cette modélisation a l'avantage d'être simple de compréhension et facile d'implémentation d'un point de vue informatique, étant donné l'existence d'une solution explicite à son EDS permettant d'avoir une discrétisation exacte de ce processus :

$$\tilde{r}_{t+\delta t} = \tilde{r}_t e^{-a\delta t} + b(1 - e^{-a\delta t}) + \sigma \sqrt{\frac{1 - e^{-2a\delta t}}{2a}} \varepsilon \text{ où } \varepsilon \sim N(0,1)$$

En outre, le modèle de Vasicek fournit des expressions analytiques pour les produits de taux standards comme les zéro-coupons et les obligations.

I.1.2 Prix du zéro coupon.

Le prix du zéro coupon se déduit à partir de l'expression du taux court selon la formule suivante :

$$P(t, T) = E^* \left[e^{-\int_t^T r_u du} \mid \mathcal{F}_t \right]$$

Le calcul de cette espérance permet d'obtenir une structure simplifiée pour le prix du zéro coupon :

$$P(t, T) = e^{\left[\frac{1 - e^{-a\tau}}{a} (R_\infty - r_t) - \tau R_\infty - \frac{\sigma^2}{4a^3\tau} (1 - e^{-a\tau})^2 \right]} \text{ pour } t \leq T$$

avec :

$$R_\infty = b - \frac{\lambda\sigma}{a} - \frac{\sigma^2}{2a^2} \text{ et } \tau = T - t$$

Par ailleurs, il est possible de construire une courbe de taux spots à partir du prix du zéro coupon. Pour cela, la relation entre le taux spot continûment composé $R(t, T)$ et le zéro coupon $P(t, T)$ est la suivante :

$$R(t, t) = -\frac{1}{T - t} \ln (P(t, T))$$

$$R(t, T) = \frac{1 - e^{-a\tau}}{a} (r_t - R_\infty) + R_\infty + \frac{\sigma^2}{4a^3\tau} (1 - e^{-a\tau})^2$$

Trois formes de courbes des taux réellement observées sur les marchés peuvent être obtenues au moyen de la structure par termes de $R(t, T)$ proposée par Vasicek

- Structure ascendante si $r_t \leq R_\infty - \frac{\sigma^2}{4a^2} = R_{\text{ascendante}}$
- Structure inversée si $r_t \geq R_\infty + \frac{\sigma^2}{4a^2} = R_{\text{inversée}}$
- Structure bosselée si $R_{\text{ascendante}} < r_t < R_{\text{inversée}}$

I-1-3 Limites du modèle.

Certes le modèle de Vasicek semble être le plus approprié en raison de sa simplicité, cependant il présente plusieurs limites et est dit non compatible avec la courbe des taux dans la mesure où bien qu'il permette d'obtenir la plupart des formes de la courbe des taux (croissante, décroissante, "bosselée"), il ne permet pas d'obtenir une forme de courbe en "creux" : décroissante sur le court terme ensuite croissante sur le long terme.

En outre, cette modélisation maintient constants les différents paramètres du processus de diffusion et suppose que les taux suivent un processus gaussien. Dès lors, il est possible d'obtenir des taux négatifs avec une probabilité non nulle, ce qui est incompatible avec

l'hypothèse d'absence d'opportunité d'arbitrage puisqu'un agent économique rationnel préférera toujours garder son argent plutôt que de le prêter à un taux négatif.

Cox, Ingersoll et Ross ont pallié, huit ans plus tard, les déficiences du modèle de Vasicek en proposant une autre dynamique CIR.

I.2 Le modèle de Cox Ingersoll Ross.

I.2.1 Présentation du modèle.

A l'instar du modèle de Vasicek, le modèle Cox, Ingersoll, Ross (1985) possède la propriété de retour à la moyenne des taux mais, contrairement au premier, n'a pas l'inconvénient de conduire à des taux négatifs grâce à l'introduction de la racine carrée dans l'équation différentielle stochastique du modèle qui s'écrit sous la probabilité historique comme suit :

$$dr_t = a(b - r_t)dt + \sigma\sqrt{r_t} dW_t$$

avec :

- r_t : taux d'intérêt instantané
- a : vitesse de retour à la moyenne, $a > 0$
- b : moyenne sur le long terme du taux instantané, $b > 0$
- σ : volatilité, $\sigma^2 > 2ab$
- W_t : processus de WIENER

De même, sous la probabilité risque neutre, la dynamique du processus est donnée par :

$$dr_t = a^*(b^* - r_t)dt + \sigma\sqrt{r_t} dW_t^*$$

avec : $b^* = \frac{1}{1+\tau}$ et $a^* = a(1 + \lambda)$

Ce modèle dispose d'expressions analytiques pour les produits de taux standards comme les zéro-coupons et les obligations.

I.2.2 Prix du zéro coupon.

Selon le modèle de CIR, le prix zéro coupon est donné par la formule suivante :

$$P(t, T) = A(t, T)\exp[-B(t, T)r_t] \text{ pour } t \leq T$$

avec :

$$\begin{aligned} \tau &= T - t \\ \gamma &= \sqrt{(a + \lambda)^2 + 2\sigma} \\ A(t, T) &= \left\{ \frac{2\gamma e^{\frac{\tau}{2}(\lambda + \gamma + a)}}{(\lambda + \gamma + a)(e^{\gamma\tau} - 1) + 2\gamma} \right\}^{\frac{2ab}{\sigma^2}} \\ B(t, T) &= \left\{ \frac{2(e^{\gamma\tau} - 1)}{(\lambda + \gamma + a)(e^{\gamma\tau} - 1) + 2\gamma} \right\} \end{aligned}$$

La structure par termes de la courbe des taux permet d'obtenir trois formes de celle-ci (ascendante, inversée et bosselée) à partir de la relation :

$$R(t, T) = \frac{1}{T-t} \ln(P(t, T))$$

Cependant, il n'existe pas de solution exacte à l'EDS du modèle de CIR. Plusieurs méthodes sont dès lors envisageables pour sa discrétisation, comme les schémas d'Euler ou de Milstein qui sont des développements de Taylor à des ordres plus ou moins importants de l'EDS.

1.2.3 Discrétisation du modèle.

4) Schéma d'Euler

La discrétisation d'Euler consiste en l'approximation du processus continu X par le processus discret \tilde{X} défini par :

$$\tilde{X}_{t+\delta} = \tilde{X}_t + \mu(\tilde{X}_t, t)\delta + \sigma(\tilde{X}_t, t)\sqrt{\delta}\varepsilon$$

Sachant que le processus X est défini par l'EDS suivante :

$$\begin{cases} dX_t = \mu(X_t, t)dt + \sigma(X_t, t)dB_t \\ X_0 = x \end{cases}$$

avec :

B : mouvement brownien standard.

Ce procédé de discrétisation s'obtient en négligeant le reste au premier ordre dans le développement d'Itô-Taylor.

$$X_t = x + \int_0^t \mu(X_s, s)ds + \int_0^t \sigma(X_s, s)dB_s$$

$$X_t = X_0 + \mu(X_0, 0) \int_0^t ds + \sigma(X_0, 0) \int_0^t dB_s + R_1(0, t)$$

avec :

$$\begin{aligned} R_1(0, t) &= \int_0^t \int_0^s L_0 \mu(X(u), u) dud s + \int_0^t \int_0^s L_1 \mu(X(u), u) dB_u ds \\ &+ \int_0^t \int_0^s L_0 \sigma(X(u), u) dud B_s + \int_0^t \int_0^s L_1 \sigma(X(u), u) dB_u dB_s \end{aligned}$$

où les opérateurs L_0 et L_1 sont définis pour toute fonction g de classe $C^{2,1}$, par :

$$\begin{cases} L_0 g(X_t, t) = g_t + g_x + \frac{\sigma^2}{2} g_{yy} \\ L_1 g(X_t, t) = \sigma g_x \end{cases}$$

Le schéma d'Euler revient donc à faire l'approximation suivante :

$$\int_0^t \mu(X_s, s)ds + \int_0^t \sigma(X_s, s)dB_s \approx \mu(X_0, 0)t + \sigma(X_0, 0)(B_t - B_0)$$

Sous certaines conditions de régularité, Koelden et Palten (1999) prouvent que le schéma d'Euler présente un ordre de convergence forte de 0,5.

Pour le modèle de Cox, Ingersoll et Ross (CIR), le processus discret \tilde{r} déterminé par le schéma d'Euler peut s'écrire :

$$\tilde{r}_{t+\delta} = \tilde{r}_t + a(b - \tilde{r}_t)\delta + \sigma\sqrt{\tilde{r}_t} \delta \varepsilon$$

Pour les équations différentielles ordinaires, il est possible d'améliorer le schéma d'Euler par les méthodes de Runge Kutta. D'ailleurs, différents schémas d'ordre supérieur ont été proposés pour les équations différentielles stochastiques. Toutefois, leur mise en œuvre étant délicate, le schéma d'ordre 2 de Milstein demeure le plus utilisé.

5) Schéma de Milstein

Le schéma de Milstein s'obtient en allant à un ordre supérieur dans le développement d'Itô-Taylor. Le processus discret \tilde{X} est défini alors par :

$$\tilde{X}_{t+\delta} = \tilde{X}_t + \mu(\tilde{X}_t, t)\delta + \sigma(\tilde{X}_t, t)\sqrt{\delta}\varepsilon + \frac{\sigma_x(\tilde{X}_t, t)\sigma(\tilde{X}_t, t)}{2} \delta(\varepsilon^2 - 1)$$

avec $\sigma_x(\tilde{X}_t, t)$ la dérivée par rapport au premier argument de la fonction $\sigma(.,.)$ évaluée en (\tilde{X}_t, t) .

Pour le modèle de Cox, Ingersoll et Ross (CIR), le processus discret \tilde{r} déterminé par le schéma de Milstein peut s'écrire :

$$\tilde{r}_{t+\delta} = \tilde{r}_t + a(b - \tilde{r}_t)\delta + \sigma\sqrt{\tilde{r}_t} \delta \varepsilon + \frac{\sigma^2}{4} \delta(\varepsilon^2 - 1)$$

Le schéma de Milstein garantit une vitesse de convergence supérieure dans les espaces L_p . Toutefois, pour une dimension strictement supérieure à 1, il s'avère être difficile à simuler et converge en loi à la même vitesse que le schéma d'Euler. Par ailleurs, il est possible d'obtenir des processus discrétisés d'ordre de convergence encore plus élevé en développant à des ordres supérieurs. Cependant, ces développements nécessitent d'innombrables calculs et peuvent faire intervenir plus d'une variable aléatoire amplifiant ainsi le temps de simulation.

1.2.4 Estimation des paramètres.

En divisant par $\sqrt{r_t}$ la discrétisation approximative suivant le schéma d'Euler, l'estimation se réalise par une régression linéaire suivant le modèle suivant :

$$\frac{r_{t+1}}{\sqrt{r_t}} = a b \frac{1}{\sqrt{r_t}} + (1-a) \frac{r_t}{\sqrt{r_t}} + \sigma \varepsilon \text{ avec } \varepsilon \sim N(0,1)$$

VI. MODELISATION DES ACTIONS.

Nombreux sont les modèles qui se sont développés pour modéliser l'évolution du cours des actions. Cependant, le modèle de Black-Scholes (1973) en dépit de ses hypothèses restrictives qui vont à l'encontre des observations empiriques, demeure le modèle le plus utilisé et le plus étudié. En effet, force est de constater que, contrairement aux hypothèses de B-S, les queues de distribution des rendements empiriques sont bien plus épaisses que celles d'une loi log-normale en raison des discontinuités des cours d'actions et de non constance de la volatilité. Des modèles à sauts et des modèles à volatilité stochastique ont dès lors été proposés pour tenir compte des éventuelles discontinuités des cours et des variations de la volatilité, tel que le modèle de Merton (1976) qui décrit l'arrivée des saut par un processus de

poisson et le modèle de Hull-White (1987) dont la volatilité est dirigée par des mouvements browniens.

Cette section présente le modèle de Black-Scholes et celui de Merton tout en explicitant vers la fin l'intérêt porté à l'introduction du modèle GARCH.

II.1 Le modèle de Black-Scholes.

Ce modèle suppose que le cours d'une action suit un mouvement brownien géométrique et qu'il est solution de l'EDS suivante :

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dW_t$$

pour tout instant $t > 0$, avec :

- S_t : le prix de l'action à la date t
- W_t : un processus de Wiener généralisé
- μ et σ : des constantes

L'avantage du modèle de Black-Scholes réside dans l'existence d'une solution explicite de son EDS. En effet, en appliquant le lemme d'Ito et en considérant comme condition à l'origine $S(0) = S_0$, la solution obtenue est :

$$S_t = S_0 e^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W_t}$$

Le cours de l'action, selon ce modèle, suit une loi log-normale $LN\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}, \sigma\sqrt{t}\right)$ étant donné que le processus de Wiener suit une loi normale $N(0, \sqrt{t})$. La simulation de ce modèle s'avère donc être simple puisqu'il suffit de simuler une loi normale.

Pour estimer les paramètres μ et σ du modèle, nous utilisons l'historique du cours de l'action modélisée en tenant compte du rendement « logarithmique » journalier dont la moyenne est égale à $\mu - \frac{\sigma^2}{2}$ et dont la variance est σ^2 :

$$R(t) = \ln\left(\frac{S(t)}{S(t-1)}\right) = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) + \sigma W(1)$$

L'usage de la méthode des moments ou celle du maximum de vraisemblance conduisent aux mêmes résultats d'estimation :

$$\begin{cases} \hat{\mu} - \frac{\hat{\sigma}^2}{2} = \bar{R} = \frac{1}{T} \sum_{t=0}^T R(t) \\ \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{T} \sum_{t=0}^T (R(t) - \bar{R})^2 \end{cases}$$

Bien que d'autres modèles furent développés ultérieurement dans le dessein de pallier les défauts du modèle de Black-Scholes, ce dernier demeure le modèle le plus utilisé et le plus étudié. Nous présentons à titre d'exemple le modèle de Merton.

II.2 Le modèle de Merton.

Le modèle de Merton introduit un saut dans la solution du modèle de Black-Scholes via un processus de Poisson.

$$S_t = S_0 e^{\left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma W_t + \sum_{k=1}^{N_t} U(k) \right]}$$

avec :

N : un processus de Poisson de paramètre λ

U : une suite de variables aléatoires iidsuivant une loi normale $N(0, \Omega)$.

Sous l'hypothèse que les processus W , N et U sont mutuellement indépendants, et que $\sum_{k=1}^{N_t} U(k) = 0$ si $N_t = 0$.

Dans ce modèle, le nombre de sauts suit un processus de Poisson homogène de paramètre λ et les discontinuités suivent des lois normales centrées de variance Ω^2 . Le cours de l'action peut, avec une même probabilité et une même intensité, avoir aussi bien une soudaine baisse hausse qu'une soudaine hausse.

Bien que le nombre de paramètres du modèle de Merton soit plus important que celui de Black-Scholes, l'estimation des paramètres $(\mu, \sigma, \lambda, \Omega)$ demeure simple étant donné qu'il s'agit d'une somme de lois normales indépendantes. En effet, les paramètres de ce modèle peuvent être estimés par la méthode des moments ou de maximum de vraisemblance. L'expression de la densité du rendement de ce modèle s'écrit :

$$f(x) = \frac{e^{-\lambda}}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{\lambda^n}{n! \sqrt{\sigma^2 + n\Omega^2}} e^{-\frac{\left(x - \mu + \frac{\sigma^2}{2}\right)^2}{2(\sigma^2 + n\Omega^2)}} \right]$$

En raison de la symétrie du modèle, les moments centrés d'ordre impairs sont nuls. En revanche, les moments centrés d'ordre pair se déduisent à partir de l'expression de la densité :

$$E \left[(R - E(R))^{2k} \right] = \frac{(2k)!}{2^k k!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!} (\sigma^2 + \lambda \Omega^2)^k$$

Enfin, l'estimation des paramètres s'obtient par la résolution du système d'équation suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{R} = \frac{1}{T} \sum_{t=0}^T R(t) = \mu - \frac{\sigma^2}{2} \\ \frac{1}{T} \sum_{t=0}^T (R(t) - \bar{R})^2 = E \left[(r - E(R))^{2 \times 1} \right] = \sigma^2 + \lambda \Omega^2 \\ \frac{1}{T} \sum_{t=0}^T (R(t) - \bar{R})^4 = E \left[(r - E(R))^{2 \times 2} \right] = 3e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} (\sigma^2 + \lambda \Omega^2)^2 \\ \frac{1}{T} \sum_{t=0}^T (R(t) - \bar{R})^6 = E \left[(r - E(R))^{2 \times 3} \right] = 3e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} (\sigma^2 + \lambda \Omega^2)^3 \end{array} \right.$$

avec T le nombre de données observées.

II.3 Le modèle GARCH.

Le modèle GARCH est introduit en 1986 par Bollerslev. Il permet de considérer une caractéristique essentielle des marchés : la volatilité n'est pas constante dans le temps

Le principe général consiste donc à remettre en cause la propriété d'homoscédasticité que l'on retient généralement dans le cadre du modèle linéaire. En principe, la prise en compte de ce phénomène accroît le potentiel prédictif des modèles.

le modèle GARCH(p,q) est une alternative du modèle ARCH(q) avec une structure de retards plus flexible, il est appelé aussi ARCH généralisé :

$$\sigma_t^2 = a_0 + \sum_{i=1}^q a_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^p b_i \sigma_{t-i}^2$$

Avec a_i et b_i sont des constantes positives et est a_0 une constante strictement positive

Il importe de vérifier la condition $\sum_{i=1}^q a_i + \sum_{i=1}^p b_i < 1$ pour assurer la stationnarité des erreurs. Dans ce cas le modèle GARCH(p,q) correspond exactement à un modèle ARCH d'ordre infini.

Dans la plupart des applications le modèle GARCH(1,1) est suffisant pour modéliser la variance conditionnelle. Ce modèle peut être estimé par la technique du maximum de vraisemblance, quasi-maximum de vraisemblance ou une technique d'estimation semi-paramétrique.

VII. Modélisation des obligations.

Les prix des obligations se calculent à partir des taux courts simulés suivant le modèle des taux retenu. Ainsi le prix en t d'une obligation de maturité T est donné par la formule ci-dessous :

$$\text{Prix de l'obligation}(t, T) = \sum_{\tau=\tau_1}^T C \times P(t, \tau) + N \times P(t, T)$$

avec :

- C : la valeur du coupon
- $P(t, \tau)$: le prix en t d'un zéro coupon de maturité τ
- N : le nominal de l'obligation

VIII. MODELISATION DE L'ACTIF IMMOBILIER.

L'évolution des prix des biens immobiliers renseigne sur l'évolution du risque immobilier et son impact sur le secteur financier. C'est dans ce cadre que Bank Al-Maghrib et l'ANCFCC Agence Nationale De Conservation Foncière Du Cadastre et de la Cartographie ont mis en place un indice des biens immobiliers. La modélisation de l'actif immobilier peut dès lors correspondre à :

$$\text{Imm}_{t+1} = \text{Imm}_t \times (1 + i)$$

avec :

- Imm_t : valeur de marché de l'immobilier de l'année t ;
- i : indice des prix des actifs immobiliers.

IX. MODELISATION DES OPCVM-TAUX.

Ces OPCVM constituent un outil d'épargne ou de placement à court terme, principalement utilisé par les entreprises pour gérer leur trésorerie. Ils permettent de créer de la monnaie à travers l'émission de titres convertibles à tout moment et sans risque important de perte en capital. Leur valeur de marché est modélisée par :

$$\text{OPCVM}_{t+1} = \text{OPCVM}_t \times (1 + r(\text{dur}(t)))$$

Avec :

- OPCVM_t : valeur de marché de l'OPCVM de l'année t ;
- $r(\text{dur}(t))$: taux zéro coupon dont l'échéance correspond à la durée du passif.

X. LES MODELES DE DEPENDANCES.

Les modèles de dépendances ont pour but de mettre en exergue les interactions entre les variables économiques simulées par le générateur de scénarios économiques. D'ailleurs, la « crise des subprimes » survenue en 2007 représente l'un des exemples récents qui illustrent la forte dépendance entre les différents marchés (taux, action, immobilier, etc.) et les variables macroéconomiques (inflation, chômage, croissance, etc.).

Une structure de dépendance demeure nécessaire pour une modélisation homogène des variables économiques dans la mesure où elle permet de simplifier la complexité du monde économique de manière réaliste.

La modélisation de la dépendance entre les variables économiques peut s'effectuer selon différentes approches. On peut citer à titre d'exemples :

- la corrélation linéaire ;
- les copules.

✓ La corrélation linéaire :

Le coefficient de corrélation linéaire représente une base pour évaluer la dépendance de deux variables gaussiennes. Il est défini selon la formule suivante :

$$\rho = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sigma_x \sigma_y}$$

Avec

- X, Y : deux variables gaussiennes ;
- Cov : la covariance de deux variables ;
- σ : l'écart type d'une variable.

✓ les copules.

Le coefficient de corrélation est très répandu en modélisation financière comme étant une mesure canonique de dépendance très simple en utilisation. Cependant d'autres mesures ont été adoptées pour régler les désavantages de la corrélation linéaire comme les copules.

Les copules sont définies comme une fonction C de $[0,1]^n \rightarrow [0,1]$ qui suit les conditions suivantes :

- Il existe des variables aléatoires U_1, \dots, U_n à valeurs dans $[0,1]$ telle que C soit leur fonction de répartition.

- C a des marginales uniformes tel que $\forall i \in [1, n] C(1, \dots, 1, u_i, 1, \dots, 1) = u_i$.

Chapitre 7 : Présentation des portefeuilles étudiés.

En assurance vie, les produits Décès-Emprunteur et Retraite comptent parmi les produits les plus répandus dans le marché.

Les contrats Décès-Emprunteur assure le remboursement du capital restant dû en cas de décès de l'emprunteur. Tandis que les contrats Retraite s'inscrivent dans le cadre des assurances destinées à la constitution d'un complément de retraite.

La première partie de ce chapitre est entièrement consacrée à une description détaillée du portefeuille décès-emprunteur et des différents traitements apportés à la base de données qui lui est associée. Tandis que la seconde partie précise l'objet du contrat du produit Addamane Chabbi avant de décrire la base de données et des modifications qui lui sont apportées. Enfin, cette partie est clore par une présentation de la modélisation du facteur rachat qui constitue une option du contrat précité.

I. PORTEFEUILLE DE L'ASSURANCE DECES-EMPRUNTEUR.

L'Assurance Décès-Emprunteur, ADE, est le produit le plus répandu et le plus problématique en micro assurance comme l'indique l'inventaire du Fonds pour l'Innovation en Micro Assurance. Cependant bien qu'il soit simple au niveau de sa technicité, il a des enjeux qui sous-tendent au niveau de l'impact social et économique.

Cette assurance est bien plus complexe qu'un simple fond de garantie. Elle participe au développement du micro-crédit et s'inscrit dans la logique d'un modèle partenarial entre assureurs et Institutions de Micro Finance réduisant ainsi la vulnérabilité des clients et accompagnant le développement de leurs portefeuilles.

I.1 Définition d'une assurance emprunteur

En général, l'assurance emprunteur se définit comme étant « Une assurance temporaire, limitée à la durée du crédit, qui garantit le remboursement de celui-ci en cas de décès. Elle est le plus souvent complétée par des garanties d'assurance de personnes couvrant les risques d'incapacité, d'invalidité et éventuellement de perte d'emploi ».

L'assurance emprunteur est généralement une condition nécessaire à l'obtention d'un prêt et une sécurité pour l'emprunteur et pour sa famille. Bien qu'il n'y ait pas d'obligation légale, les établissements de crédit demandent le plus souvent à leurs clients d'adhérer à une assurance collective, qui répond aux besoins de garantie des uns et des autres.

I.2 Typologies des contrats Décès-Emprunteur.

Les contrats Décès-Emprunteur peuvent être des contrats groupes ou bien des contrats individuels.

I.2.1 Les contrats groupes.

Un contrat groupe est une assurance proposée par un établissement de crédit basée sur la mutualisation des risques. Autrement dit, tous les souscripteurs disposent des mêmes garanties et le tarif est en général unique. Le règlement des garanties de ces contrats est puisé de toutes les primes versées par l'ensemble des clients.

Ce type de contrat, étant facile à gérer et permettant de bénéficier d'une commission, est généralement proposé par les banques et les établissements de crédits. Cependant, les garanties sont basiques et couvrent rarement l'ensemble des risques auxquels peut être soumis un emprunteur pendant la durée de remboursement de son prêt.

I.2.2 Les contrats individuels.

Un contrat individuel est une assurance qui est liée à l'emprunteur. En d'autres termes, il n'y a pas de mutualisation des risques. Le prix payé est déterminé en fonction des garanties choisies par l'emprunteur et du risque potentiel de non remboursement du crédit.

Ce type de contrat est recommandé pour les emprunteurs ayant une profession ou des loisirs à risque.

I.3 L'objet du contrat étudié.

Le contrat d'assurance emprunteur étudié a pour objet de garantir au contractant, en cas de décès ou d'invalidité définitive, permanente et totale des emprunteurs, le remboursement du capital assuré.

La compagnie paie au contractant le montant restant dû en capital à la date de la dernière échéance mensuelle précédant le décès, majoré de 6 mois d'intérêts, en cas de décès d'un emprunteur avant l'âge de 65 ans ou en cas d'invalidité permanente et totale survenant avant l'âge de 60 ans.

La compagnie d'assurance garantie le risque de mort, qu'elle qu'en soit la cause, sauf les réserves énumérées ci-après :

- Suicide : le suicide volontaire et conscient n'est pas couvert lorsqu'il survient moins de deux ans après l'admission de l'assuré.
- Navigation aérienne : la compagnie garantit les risques inhérents aux vols effectués par l'assuré en qualité de simple passager en temps de paix, à la condition que le pilote et l'appareil soient munis des autorisations réglementaires.
- Guerre : en cas de guerre, la garantie n'aura d'effet que dans les conditions qui seront déterminées par la législation à intervenir pour les assurances sur la vie en temps de guerre.

En cas de décès non couvert par ce contrat, la compagnie n'est tenue qu'au remboursement de la portion de prime payée et non encore absorbée.

Le décès de l'assuré doit être notifié à la compagnie par le contractant dès qu'il en aura connaissance, avec un acte de décès précisant la date de naissance, un certificat indiquant la cause du décès, un certificat indiquant la cause du décès et une attestation du montant dû au contractant à la date de décès.

Les garanties de ce contrat cessent pour chaque assuré à la date prévue pour le dernier remboursement.

I.4 Le traitement de la base de données.

Avant d'entamer le calcul des exigences de capital, les données de la base nécessitent plusieurs traitements selon la démarche suivante :

- Une analyse préliminaire des données.
- Détection et suppression ou modification des informations aberrantes, nous citons, à titre d'exemples, les données pour lesquelles la date d'effet du contrat est supérieure à celle d'évaluation ainsi que les données pour lesquelles la durée restante calculée est inférieure à zéro.

- Réduction de la durée du prêt pour les cas où la durée restante dépasse plus de 25 ans (cette réduction n'aura pas de conséquences sur l'évaluation du risque de la ruine puisque le risque va augmenter d'avantage avec la diminution de la durée.)

Pour effectuer notre étude, il est primordial d'introduire un de nouvelles variables calculées à partir des données de la base (voir annexe), notamment :

- Age de l'emprunteur
- Taux d'emprunt mensuel
- Durée restante en mois
- Durée de prêt en mois
- Annuité a
- CRD (le calcul est différent pour un taux de prêt nul)
- La part de l'année d'inventaire β
- CSR
- La clé (Durée restante&Taux d'emprunt& Age)

Le calcul du CRD se fait selon la formule suivante :

$$CRD_i = CRD_0 * \frac{a_{n-i}}{a_n}$$

Avec :

- n : la durée de prêt
- an : annuité

Le capital sous risque se calcule à travers le capital restant dû pour chaque année d'inventaire. Deux cas se présentent :

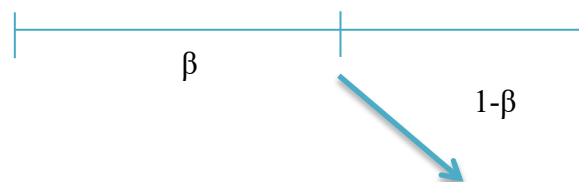
$$\begin{cases} CSR(i) = CRD & \text{Si la date d'inventaire coïncide avec celle d'anniversaire du contrat} \\ CSR(i) = \beta * CRD(i-1) + (1-\beta) * CRD(i) & \text{Sinon} \end{cases}$$

avec:

$$\beta = DE - DP / (365.25)$$

- β : la part de l'année d'inventaire dont le capital restant dû est celui de l'année précédente
- DE: date d'évaluation
- DP: date de prêt

31/12/i-1 31/12/i



Date d'effet du contrat

I.5 Un aperçu sur la base de données.

Le portefeuille Décès Emprunteur étudié se caractérise par les propriétés suivantes :

Nombre de contrats	173 179
Total des montants assurés	33 163 641 909,65 dhs
Age moyen	47 ans
Taux de prêt moyen	0,086900
Durée restante moyenne	93 mois
Total du CRD	18 204 651 055,44 dhs

Tableau . Quelques chiffres clés de la base de données du portefeuille Décès-Emprunteur.

II. LE PORTEFEUILLE RETRAITE.

La vocation d'un régime complémentaire est en général compléter et poursuivre la prestation du régime de base avec comme objectif de rapprocher le niveau de la pension calculée de celui du dernier salaire ou d'une fraction significative de ce dernier. Ce régime permet de s'affranchir des limites d'assiette et de montant fixées par le régime de base.

II.1 Définition de la retraite complémentaire.

La retraite complémentaire est une retraite conventionnelle qui vient s'ajouter à la retraite de base pour parer à ses éventuelles insuffisances. C'est donc une pension attribuée en complément des retraites servies par les régimes de retraite de base.

La naissance de la retraite complémentaire au Maroc, trouve sa source dans le plafonnement des cotisations et donc des prestations aux régimes de base. Elle va parfois jusqu'à se substituer aux régimes de base dans la mesure où un individu ne bénéficiant d'aucune couverture retraite de base peut adhérer à des produits de retraite complémentaire afin de se constituer une pension de retraite à l'âge de la retraite.

II.2 L'objet du contrat étudié.

Le contrat étudié a pour objet de constituer au profit de l'assuré une retraite complémentaire progressive assortie d'une assurance complémentaire décès. Les garanties objet de ce contrat sont les suivantes :

- La constitution progressive d'une retraite complémentaire sous forme d'un capital, d'une rente viagère ou d'une rente certaine payable sur une période fixée par le souscripteur, par achat de parts dont la valeur nominale est fixée en dirhams.
- Le paiement en cas de décès de l'assuré, d'un capital égal à la valeur des parts accumulées à cette date et d'un capital complémentaire décès.

L'épargne constituée par l'achat de parts augmente annuellement en fonction d'une capitalisation au taux d'intérêt technique en vigueur, auquel s'ajoute la participation aux bénéfices arrêteeconformément à la réglementation après la clôture de chaque exercice.

Cette revalorisation de l'épargne constituée majorée de la participation aux bénéfices est accordée à tous sous forme de bonus. Ces bonus viennent augmenter annuellement le nombre de parts constituées et produiront à leur tour pour les années suivantes des bénéfices dans les mêmes conditions que pour les parts réellement achetées.

Le souscripteur ayant souscrit régulièrement pendant 10 ans bénéficie, en cas de renouvellement de son contrat pour au moins 3 ans, d'un bonus supplémentaire dénommé bonus de fidélité.

Le souscripteur a la faculté de fixer librement l'âge de la retraite entre 55 ans et 65 ans au moment de la souscription. Cet âge peut être éventuellement prorogé ou modifié à la demande de l'assuré et avant la liquidation de la retraite.

Le contrat prend effet, dès le paiement de la première cotisation, après la signature dudit contrat et prend normalement fin à l'âge de retraite ou l'échéance fixée par le souscripteur aux conditions particulières.

Le souscripteur peut à tout moment demander le rachat total ou partiel, sous réserve des conditions déjà prédéfinies dans le contrat. La pénalité de rachat peut être modélisée selon le système suivant :

$$\pi(anc) = \sum_i^n a(anc_i) \times \mathbb{1}(anc_i)$$

avec :

- π : pénalité de rachat.
- anc : durée d'ancienneté du contrat au moment du rachat.
- $a(anc)$: le coefficient associé à chaque ancienneté.

La liquidation des prestations intervient à la date choisie par le souscripteur, et ce selon les options suivantes :

- Recevoir un capital égal à la valeur de rachat des parts accumulées à cette date.
- Transformer ce capital en une rente viagère versée trimestriellement à terme échu.(les rentes viagères cessent d'être dues au décès de l'assuré)
- Transformer ce capital en une rente certaine versée trimestriellement à terme échu pendant une période fixée par l'assuré au moment de la liquidation. Cette rente est versée, en cas de décès, aux bénéficiaires désignées sous deux formes au choix du bénéficiaire (rente certaine ou capital constitutif).
- Percevoir une partie en capital et le reste converti en rente viagère ou certaine versée trimestriellement à terme échu.

La compagnie peut accorder une avance jusqu'à concurrence de 80% de la valeur de rachat du contrat, sans pour autant dépasser les prestations décès et sous déduction des retenues légales.

Le contrat sera suspendu pour tout assuré n'ayant pas souscrit le minimum prévu (selon la date de souscription). L'épargne constitué par l'assureur antérieurement à la date de suspension reste à sa disposition dans les conditions normales, mais ne sera rémunérée durant la période de suspension qu'au taux d'intérêt technique fixé aux conditions particulières. Tout assuré dont le contrat est suspendu aura la faculté de le reconduire à tout moment à condition de souscrire le nombre minimum de parts. La période de suspension ne sera pas réduite de la durée de contrat, aussi bien dans le calcul du capital décès que dans le montant du rachat des parts souscrites.

nous citons à titre d'exemple les données pour lesquelles la date d'effet du contrat est supérieure à celle d'évaluation ou pour lesquelles la durée restante est inférieure à zéro.

II.2 Le traitement de la base de données.

Avant d'entamer le calcul des exigences de capital, les données de la base nécessitent des traitements selon la démarche suivante :

- Une analyse préliminaire des données.
- Détection et suppression ou modification des informations aberrantes, nous citons à titre d'exemple les données pour lesquelles la date d'effet du contrat est supérieure à celle d'évaluation ou pour lesquelles la durée restante est inférieure à zéro.
- L'agrégation des données historiques relatives aux cotisations pour pouvoir estimer la valeur des parts futures cotisées par les clients
- A l'instar du traitement du portefeuille Décès-Emprunteur, il s'avère être indispensable de créer de nouvelles variables à partir des données de la base, notamment:
 - Age du client
 - Année d'effet
 - Année de naissance
 - Clé (Année d'effet & Année de naissance)

III. Modélisation des éléments dynamiques liés à ces portefeuilles

III.1 Modélisation du rachat.

Le risque de rachat est omniprésent dans les problématiques de valorisation et de provisionnement des contrats d'épargne dans les sociétés d'assurance vie.

Les rachats observés sur le portefeuille sont la somme de deux types de rachats :

- les rachats structurels
- les rachats conjoncturels

III.1.1 Les rachats structurels.

Les rachats structurels sont les rachats qui surviennent indépendamment du contexte économique et sur lesquels l'assureur n'a aucun moyen d'action. Ce risque peut avoir un très fort impact sur les résultats d'une activité de l'entreprise et reste un risque de comportement humain, donc difficilement modélisable car faisant intervenir énormément de facteurs propres aux individus et à leur environnement.

Ces rachats dépendent principalement de la fiscalité en vigueur, de l'âge et de l'ancienneté. Il existe plusieurs approches pour modéliser ce rachat :

1) Approche économique.

C'est une approche individuelle qui se base sur la théorie de l'utilité espérée.

2) Approche probabiliste/économétrique.

Cette approche se base sur la segmentation dans le but de définir des classes de risque sur une population donnée.

3) Approche statistique.

Le modélisation se fait à partir des données empiriques de rachats pour calibrer la fonction de rachat suivante :

$$RS_x = RS_0 * [1 - a * \ln(x+1)] * (\ln(x+1) - b)$$

avec :

- RS_x : la part de rachat par rapport au nombre de contrats initiaux
- x : l'âge du contrat
- RS_0 : le pourcentage de contrats rachetés au cours de la première année
- a : facteur qui détermine la fréquence des rachats
- b : facteur qui règle les pics des rachats

III.1.2 Les rachats conjoncturels.

Les rachats conjoncturels sont ceux qui découlent de l'environnement économique et de la politique de revalorisation de l'assureur. Ils correspondent aux rachats qu'effectuent les assurés en arbitrant entre l'évolution des marchés financiers, en particulier des taux d'intérêts et les taux servis par l'assureur. En effet, Si le taux servi par l'assureur est inférieur au taux du marché, le taux de rachat sera supérieur au taux de rachat structurel car les assurés ont intérêt à racheter leur contrat pour aller vers la concurrence. Si, a contrario, le taux servi par l'assureur est beaucoup plus important que celui attendu, les assurés seront moins enclins à racheter leurs contrats et on observera alors une baisse du taux de rachat par rapport aux rachats structurels.

La modélisation des taux de rachats conjoncturels est celle préconisée par l'Autorité de Contrôle Prudential dans les Orientations Nationales Complémentaires aux Spécifications Techniques (ONCST) pour le QIS 5.

Le modèle se base sur la dépendance entre le taux de revalorisation servi par l'assureur et le taux de revalorisation observé sur le marché selon la formule suivante :

$$RC = \begin{cases} RC_{max} & \text{si } TA - TM < \alpha \\ RC_{max} \frac{TA - TM - \beta}{\alpha - \beta} & \text{si } \alpha < TA - TM < \beta \\ 0 & \\ RC_{min} \frac{TA - TM - \gamma}{\delta - \gamma} & \text{si } \gamma < TA - TM < \delta \\ RC_{min} & \text{si } TA - TM > \delta \end{cases}$$

avec :

α : le seuil en-deçà duquel les rachats conjoncturels sont constants et fixés à RC_{max} .

β et γ : les seuils d'indifférence respectifs à la baisse et à la hausse du TA.

δ : le seuil au-delà duquel les rachats conjoncturels sont constants et fixés à RC_{min} .

TA : le taux servi par l'assureur.

TM : le taux de revalorisation sur le marché.

Les paramètres limites pour cette fonction sont donnés par les préconisations des ONCST dans le tableau suivant :

	α	β	γ	δ	RC_{max}	RC_{min}
--	----------	---------	----------	----------	------------	------------

Maximum	-4%	0%	1%	4%	-4%	40%
minimum	-6%	-2%	1%	2%	-6%	20%

Tableau. Les paramètres limites donnés par les préconisations des ONCST

Dans le cadre de la modélisation, on considèrera la moyenne de ces paramètres :

	α	β	γ	δ	RC _{max}	RC _{min}
Maximum	-4%	-1%	1%	3%	-5%	30%

Tableau. Les paramètres limites estimés

III.1.3 Les rachats totaux

Le taux de rachat total est exprimé comme étant la somme des taux de rachats conjoncturelset des taux de rachats structurels. Ce taux doit toujours être positif. Il est modélisé selon la formule suivante :

$$RT(TA, TM, X) = \min(1, \max(0, RS(X) + RC(TA, TM)))$$

Les rachats totaux sont calculés proportionnellement à la provision d'ouverture de l'exercice en cours.

III.2 Modélisation de la mortalité

La modélisation stochastique de la mortalité peut être effectuée selon plusieurs modèles. Le modèle de Lee représente l'un des modèles les plus utilisés qui se base sur une table de mortalité déjà préétablie. Ce modèle s'écrit sous la forme suivante :

$$q_x^s = \alpha_{t,x} \times q_x^t + \beta_{t,x}$$

Avec

- q_x^s : la mortalité stochastique pour l'âge x.
- q_x^t : la mortalité théorique pour l'âge x.
- $\sigma_{t,x}$: la variance peut être estimée soit par les données historiques, soit approximée par un modèle de survie basé sur des générations des réalisations des variables suivant une loi de Bernoulli ;
- $\alpha_{t,x}$ et $\beta_{t,x}$: ce sont des modifications aléatoires qui suivent les lois normales. A titre d'exemple la modélisation de $\alpha_{t,x}$ peut s'effectuer selon deux optiques :
 - ☞ $\alpha_{t,x} \rightarrow N(1, \sigma_x)$: une modélisation qui vise à obtenir des quotients proche de la mortalité théorique ;
 - ☞ $\alpha_{t,x} \rightarrow N(\alpha_{t,x}, \sigma_{t,x})$: une modélisation avec un écart vis-à-vis de la mortalité théorique.

Chapitre 8 : Application en assurance vie.

L'application des normes de Solvabilité II en assurance vie pour les contrats Décès-Emprunteur et contrats Retraite, nous amène à calculer le capital économique en appliquant la formule standard et en mettant en place un modèle interne adapté aux spécificités des portefeuilles associés aux contrats précitées.

Ce chapitre reprend l'essentiel des calculs intermédiaires et de la modélisation retenue notamment celle des actifs en vue d'appliquer les méthodes préconisées par la cinquième étude quantitative d'impact : formule standard et modèle interne.

I. MODELISATION DES ACTIFS.

La gestion de l'actif « Asset Management » revêt un caractère important, particulièrement en assurance vie. Dès lors, une bonne répartition et une bonne modélisation demeurent de mise. L'objet de cette section est d'exposer la modélisation retenue pour les différentes composantes de l'actif :

- Actions
- Immobilier
- Obligations
- OPCVM Taux
- Trésorerie

La répartition de l'actif, illustrée par le graphe suivant, démontre bien qu'une grande part est allouée aux actifs sans risque notamment les obligations.

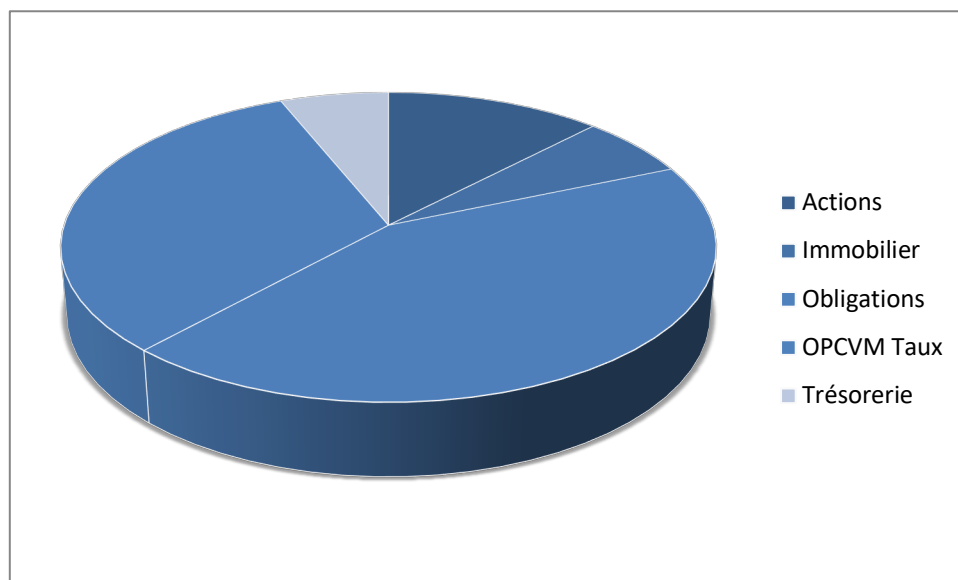


Figure . Répartition des actifs.

La modélisation de l'actif repose en grande partie sur la modélisation des taux. Nous avons présenté dans le sixième chapitre du présent rapport deux modèles destinés à cet égard. Cependant, le modèle de Vasicek ayant montré ses limites il est plus sage d'opter pour le modèle Cox-Ingersoll-Ross.

L'estimation des paramètres du modèle de CIR, à partir de la série du TMP de BAM à compter du 01/01/2008 au 31/12/2013, au moyen de différents logiciels notamment Eviews et VBA nous conduit aux résultats suivants :

a	0,13575
b	0,051281
σ	0,0010941

Tableau. Estimation des paramètres de CIR.

Les résultats obtenus correspondent à la régression donnée par l'équation suivante :

$$MODX = a \times b \times INVTX + (1 - a) \times RCTX + \varepsilon_t \text{ où } \varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2)$$

avec :

- $MODX = \frac{r_t}{\sqrt{r_{t-1}}}$
- $INVTX = \frac{1}{\sqrt{r_{t-1}}}$
- $RCTX = \sqrt{r_{t-1}}$

Sachant bien que les résultats d'estimation de a et b obtenues sous VBA et sous Eviews sont légèrement différentes.

Le modèle retenu pour la modélisation des actions est celui de Black-Scholes. L'historique du cours des actions nécessaire à l'estimation des paramètres de ce modèle est obtenu via les publications de la Bourse des Valeurs de Casablanca des actions cotées une à une. En revanche, la logique de l'Asset Management étant d'avoir un portefeuille d'actions peu volatile et homogène, l'évolution des actions non cotées peut être assimilée à celle des actions cotées en moyenne. La figure ci-dessous représente un extrait de l'estimation des paramètres relatifs à certaines actions :

BA		BB	
ACTIONS			
ACTION 1			
paramètres	estimés		
μ			1,87E-04
σ			1,91E-02
les données	utilisés		
h			1,00E-02
S0			1,76E+02
R_			5,02E-06
moy((R(t)-R_) ²)			3,64E-04
ACTION 2			
paramètres	estimés		
μ			1,06E-03
σ			2,59E-02
les données	utilisés		
h			1,00E-02
S0			1,00E+02
R_			7,22E-04
moy((R(t)-R_) ²)			6,73E-04
ACTION 3			
paramètres	estimés		
μ			1,22E-04
σ			2,13E-02

Figure .Extrait de la modélisation des actions, Excel VBA

L'actif immobilier est supposé suivre dans son évolution l'indice des biens immobiliers mis en place par BAM en collaboration avec ANCFCC.

Enfin, les OPCVM Taux sont assimilables dans leur évolution aux actifs sans risque de rendement égale au taux zéro coupon pour une échéance correspondant à la duration du passif.

II. APPLICATION AU PORTEFEUILLE DECES EMPRUNTEUR.

Cette section est consacrée à l'application des deux méthodes recommandées par QIS 5 au niveau du premier pilier de Solvabilité II. Il s'agit de l'application de la formule standard et de l'élaboration d'un modèle interne approprié au portefeuille Décès-Emprunteur.

II.1 Le modèle interne.

Le portefeuille d'application comptant plus de cent soixante-douze milles contrats, il est indispensable de réduire le nombre de cas en procédant à une agrégation selon l'âge la durée restante et le taux de crédit. Il s'agit d'un modèle point qui nous permet de limiter l'étude à soixante-six mille trois cent quarante cas disposant des mêmes caractéristiques précitées, la clé étant donné par la combinaison suivante :

Taux de Crédit & Durée restante & Age.

Nous dressons ensuite un tableau dynamique dans lequel pour chaque clé donnée nous faisons correspondre la somme du capital restant dû, la durée restante en mois, l'âge, le taux de crédit et le montant total assuré. Nous présentons dans les tableaux suivants des extraits du tableau dynamique obtenu :

Étiquette de lignes	Effectif	Somme de CRD au 31.12.2013	Moyenne de durée restante en mois
0,025A11A59	13	321 628,65	11
0,025A27A58	8	493 218,77	27
0,035A189A47	4	675 725,72	189
0,035A20A62	1	39 574,26	20
0,04A82A29	1	109 874,91	82
0,04A83A35	2	303 184,94	83
0,059A160A49	1	298 192,62	160
0,059A219A44	3	1 352 312,67	219
0,0585A75A59	1	311 817,32	75
0,0585A79A34	1	298 409,06	79
0,064A40A32	1	59 826,65	40

Tableau. Extrait du tableau dynamique représentant l'effectif, le CRD et la durée restante pour certains du portefeuille Décès-Emprunteur.

Étiquette de lignes	Taux moyen	Age moyen	Somme du montant assuré	Moyenne de alpha
0,025A11A59	0,025	59	1774350	0,83867521
0,025A27A58	0,025	58	2433827,142	0,49826388
0,035A189A47	0,035	47	914422,5	0,14583333
0,035A20A62	0,035	62	216727,5	1
0,04A82A29	0,04	29	213720	0,16666666
0,04A83A35	0,04	35	300000	1
0,059A160A49	0,059	49	379876,305	0,41388888
0,059A219A44	0,059	44	1582500	0,41388888

Tableau . Extrait du tableau dynamique représentant la moyenne des taux, l'âge moyen, le montant assuré et le coefficient α pour certains cas du portefeuille Décès-Emprunteur.

Cet extrait nous permet de constater la diversité de notre portefeuille en termes des caractéristiques afférentes aux crédits et aux bénéficiaires des crédits. En effet, au 31/12/2013 les âges varient dans un intervalle allant des vingtaines aux soixante dizaines. Le total des capitaux restant dus, arrêté à cette même date, s'élève à dix-huit milliards de dirhams contre un montant total de crédits, octroyés à différentes dates, qui dépasse de loin trente-trois milliards de dirhams. Les taux moyens de crédits varient dans un intervalle d'amplitude considérable et dont la borne inférieure correspond à un crédit sans intérêt, soit un taux de 0%. Enfin, les coefficients α nécessaires au calcul des capitaux sous risque diffèrent d'un cas à un autre en fonction de la date d'effet du contrat.

Ce portefeuille étant formé de contrats Décès-Emprunteur, il est possible d'émettre l'hypothèse « run of » selon laquelle nous supposons l'absence de toute nouvelle entrée. En d'autres termes nous retenons le total des cas arrêté le 31/12/2013 que nous réduisons au fur et à mesure que les crédits arrivent à échéance, jusqu'à extinction du portefeuille.

Les risques les plus déterminants que nous avons jugé être judicieux d'intégrer dans le calcul du SCR, notamment au niveau des scénarios des différentes simulations du modèle interne adapté à la compagnie, sont le risque de mortalité et le risque de taux. En effet, tel que son nom l'indique l'Assurance Décès-Emprunteur est directement impactée par les niveaux de la mortalité dans la mesure où l'assureur ne se trouve contraint de régler le capital restant dû qu'en cas de décès de l'emprunteur. Quant au risque taux, il s'avère être naturel de le prendre en considération du moment qu'il s'agit d'une assurance vie et par conséquent d'un engagement qui couvre une période étalée sur plusieurs années.

Le capital économique relatif à ce portefeuille peut se calculer par le biais d'un jeu de simulations qui consiste à projeter le bilan économique sur les 25 ans à venir à compter de l'année courante et jusqu'à extinction du portefeuille. Toutefois, les risques afférents à l'ADE étant limités au risque de marché et au risque de mortalité, nous avons jugé instructif d'appliquer, en sus, la méthode SdS. Nous soulignons à ce niveau, à titre comparatif entre les deux portefeuilles Décès-Emprunteur et Retraite, que contrairement au premier l'application de la méthode SdS ou d'une méthode de proxy l'approchant s'avère être indispensable en raison des options cachées et des garanties financières que comporte le contrat du produit retraite. Les méthodes retenues pour le calcul du SCR à la base de ce portefeuille sont donc :

- un jeu de 1000 simulations ;
- SdS ; nous effectuons pour cela 1000 simulations primaires et à l'issue de chacune de ces simulations nous effectuons 100 simulations secondaires.

Nous soulignons à ce niveau, à titre comparatif entre le portefeuille Décès-Emprunteur et le portefeuille Retraite, que contrairement au premier l'application de la méthode SdS ou d'une méthode de proxy l'approchant s'avère être indispensable pour le calcul du capital économique en raison des options cachées et des garanties financières que comporte le contrat du produit retraite.

Nous calculons d'abord les fonds propres FP_0 suivant la formule :

$$FP_0 = \frac{1}{S} \sum_{s=1}^S FP_0^s = \frac{1}{S} \sum_{s=1}^S \sum_{t \geq 1}^T (\delta_t^s R_t^s | F_0)$$

avec :

- $(F_t)_{t \geq 0}$: la filtration qui caractérise l'information financière disponible ;
- $\delta_t = e^{-\int_0^t r_u du}$: le facteur d'actualisation ;
- r_u : le taux sans risque instantané ;

- R_t : le résultat net de la société en t ;
- S : nombre de simulations ;
- T : horizon de projection.

Nous optons dans notre cas pour un jeu de 100 simulations. C'est-à-dire, $S=100$. Par ailleurs, nous fixons l'horizon de projection T à 25 ans c.à.d. jusqu'à extinction du portefeuille.

L'extrait suivant représente les données et les calculs relatifs au 2000^{ème} cas du modèle point du portefeuille Décès-Emprunteur. Il s'agit d'une feuille Excel qui associe à chaque cas, moyennant un code VBA, le montant de crédit, l'effectif, le taux de crédit et le paramètre α , en plus du capital restant dû, de l'âge et de la durée de crédit restante que nous projetons à l'horizon 2038. Ces données nous permettent de calculer les prestations et les réserves mathématiques à partir desquelles nous déduisons le résultat technique.

1	2	3	4	7	8	12	15	16	17	18
Année	age	durée rest.	passage CRD	CRD	taux décès	prest. Décès	Prestation	reserve mathématique	variation des RM	CSR
2014	56	23	74,88%	177 253,52	1,14%	2 364,00	2 364,00	1310,736583	- 661,03	236 702,89
2015	57	11	54,89%	129 934,59	1,23%	1 882,63	1 882,63	649,7079124	- 385,61	177 253,52
2016	58	0	0,00%	-	1,34%	-	-	264,1022199	-	129 934,59
2017	59	0	0,00%	-	1,44%	-	-	0	0	-
2018	60	0	0,00%	-	1,57%	-	-	0	0	-
2019	61	0	0,00%	-	1,69%	-	-	0	0	-
2020	62	0	0,00%	-	1,81%	-	-	0	0	-
2021	63	0	0,00%	-	1,94%	-	-	0	0	-
2022	64	0	0,00%	-	2,06%	-	-	0	0	-
2023	65	0	0,00%	-	2,20%	-	-	0	0	-
2024	66	0	0,00%	-	2,34%	-	-	0	0	-
2025	67	0	0,00%	-	2,53%	-	-	0	0	-
2026	68	0	0,00%	-	2,74%	-	-	0	0	-
2027	69	0	0,00%	-	2,97%	-	-	0	0	-
2028	70	0	0,00%	-	3,21%	-	-	0	0	-
2029	71	0	0,00%	-	3,55%	-	-	0	0	-
2030	72	0	0,00%	-	3,87%	-	-	0	0	-
2031	73	0	0,00%	-	4,24%	-	-	0	0	-
2032	74	0	0,00%	-	4,61%	-	-	0	0	-
2033	75	0	0,00%	-	5,08%	-	-	0	0	-
2034	76	0	0,00%	-	5,55%	-	-	0	0	-
2035	77	0	0,00%	-	6,15%	-	-	0	0	-
2036	78	0	0,00%	-	6,80%	-	-	0	0	-

Figure. Capture image des calculs préliminaires pour un cas donné du portefeuille Décès-Emprunteur.

L'étape suivante consiste à calculer les fonds propres moyennant un code sous VBA qui permet de mettre en place un générateur de scénarios économiques. Nous calculons ensuite, FP_1 par le biais des deux méthodes précitées de simulation. Nous obtenons à l'issue de ces calculs 1000 valeurs différentes que nous trions suivant un ordre décroissant pour faire apparaître la 995^{ème} valeur. C'est-à-dire FP_1 dont le classement correspond à $(1 - 0.5\% \times 1000)$, où 0.5% représente la probabilité de ruine économique maximale.

Tous calculs faits, nous obtenons :

$$SCR = 71\ 851\ 647,24 \text{ dhs.}$$

Ce montant correspond au montant des fonds propres dont doit disposer la compagnie pour faire face à une ruine économique à horizon un an au niveau de confiance 99,5%.

II.2 La formule standard.

Nous explicitons les risques retenus pour le calcul du SCR moyennant la formule standard par le biais du schéma suivant :

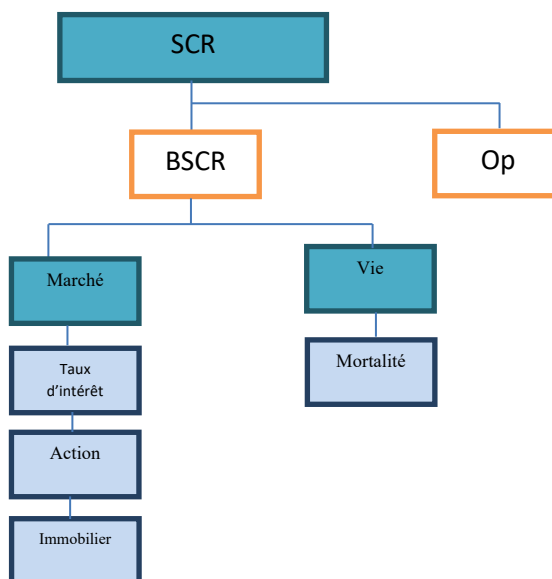


Figure. Les risques tenus en comptes pour le portefeuille Décès-Emprunteur.

D'abord, nous calculons le besoin en capital au titre du risque de marché en agrégeant les besoins élémentaires afférents aux risques : taux, action et actif immobilier. Pour ce faire, nous effectuons les chocs préconisés par la cinquième étude quantitative d'impact QIS 5 et nous calculons la variation de NAV (Net Asset Value) qui correspond, lorsqu'elle est positive, au besoin en capital élémentaire relatif à chaque sous-module.

Une hausse ou une baisse des taux selon la maturité conduisent aux variations suivantes au niveau de la NAV :

NAV avant choc	25 943 318,38
Passif après choc à la hausse	127 329 964,37
Actif après choc à la hausse	146 694 056,32
NAV après choc à la hausse	19 364 091,95
Passif après choc à la baisse	152 149 610,20
Actif après choc à la baisse	181 448 852,32
NAV après choc à la baisse	29 299 242,12
Variation de la NAV (en cas d'une hausse)	6 579 226,43
Variation de la NAV (en cas d'une baisse)	-3 355 923,74

Tableau. Résultats du calcul des exigences élémentaires en capital du sous-module taux, en dirhams.

Ces résultats reflètent le double impact des taux sur le bilan dans la mesure où un choc à la hausse ou à la baisse conduit à une variation simultanée du passif et de l'actif du bilan. Par ailleurs, en comparant la variation de la NAV en cas d'un choc à la hausse avec sa variation en cas de choc à la baisse nous déduisons que pour ce portefeuille la hausse des taux, contrairement à leur baisse, entraîne une exigence en capital assez importante.

Les résultats de variation de la NAV au titre des chocs associés aux actions cotées et aux actions non cotées sont agrégés en tenant compte de la corrélation déterminée par la cinquième étude quantitative d'impact QIS 5. Le coefficient de corrélation en question s'élève à 0,75 selon les spécifications de l'étude précitée.

Variation de la NAV	
Actions cotées	4 663 842,13
Actions non cotées	1 253 219,52

Tableau. Résultats du calcul des exigences élémentaires en capital du sous-module action, en dirhams.

Ce tableau met en exergue le fait que les actions cotées suscitent un besoin en capital beaucoup plus important que celui engendré par les actions non cotées. L'agrégation de ces deux résultats donne lieu à une exigence élémentaire en capital, au titre du risque action, qui s'élève à 3 378 094,39 dhs.

En appliquant un choc à la baisse de 25% à l'actif immobilier nous obtenons les résultats suivants :

NAV avant choc	25 943 318,38
NAV après choc	23 608 419,72
Variation de la NAV	2 334 898,65

Tableau. Résultats du calcul des exigences élémentaires en capital du sous-module immobilier, en dirhams.

Ces résultats traduisent le fait que le risque immobilier, en tenant compte des spécifications de QIS 5, entraîne un besoin élémentaire en capital de l'ordre de deux milliards de dirhams.

Enfin le besoin en capital résultant du risque de marché s'obtient en agrégeant les exigences élémentaires des sous-modules considérés, tout en tenant compte des coefficients de corrélations présentés dans les matrices suivantes :

	Intérêt	Action	Immobilier
Intérêt	1		
Action	0,5	1	
Immobilier	0,5	0,75	1

Tableau . Matrice de corrélation des sous-modules du risque de marché (choc à la baisse), portefeuille décès emprunteur.

	Intérêt	Action	Immobilier
Intérêt	1		
Action	0	1	
Immobilier	0	0,75	1

Tableau . Matrice de corrélation des sous-modules du risque de marché (choc à la hausse), portefeuille décès emprunteur.

Cette agrégation nous permet d'obtenir :

$$SCR Mkt = 10\,467\,465,34 \text{ dhs.}$$

Ce montant nous invite à prendre conscience de l'ampleur de l'importance octroyée au risque de marché dans le cadre de Solvabilité II.

A la différence du module de marché, le besoin en capital résultant du risque de souscription vie du portefeuille Décès-Emprunteur, est obtenu directement en calculant la variation du Best Estimate suite à une hausse de 15% de la mortalité :

Best Estimate avant choc	129 716 591,89
Best Estimate après choc	149 043 771,53
Variation du Best Estimate	19 327 179,65

Tableau. Calcul du Best Estimate avant et après choc de mortalité.

L'écart entre les deux valeurs du Best Estimate correspond à la variation de la NAV dans la mesure où le risque de mortalité n'impacte pas l'actif. Par ailleurs, la mortalité étant le seul sous-module tenu en compte pour calculer le SCR résultant de la souscription vie, nous obtenons :

$$SCR life = 19\,327\,179,65 \text{ dhs.}$$

Ce montant met en exergue l'importance qu'incarne le risque viager dans le domaine de l'assurance vie, particulièrement, le risque de mortalité pour un portefeuille Décès-Emprunteur.

L'étape suivante consiste à agréger le besoin en capital résultant du risque de marché et celui résultant du risque de souscription vie dans le dessein d'obtenir la capital économique de base :

$$BSCR = \sqrt{\begin{bmatrix} 10\,467\,465,34 & 19\,327\,179,65 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0,25 \\ 0,25 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 10\,467\,465,34 \\ 19\,327\,179,65 \end{bmatrix}}$$

Les coefficients de corrélations qui apparaissent dans la formule de calcul du BSCR sont donnés par la matrice des corrélations entre le risque de marché et le risque de souscription vie :

	Marché	Souscription vie
Marché	1	
Souscription vie	0.25	1

Tableau . Matrice des corrélations entre les modules retenus pour le portefeuille décès emprunteur.

Etant donné que ce portefeuille ne comporte pas de garantie en unité de compte, le SCR opérationnel se calcule selon la formule simplifiée suivante :

$$SCR_{op} = \min(30\% \times BSCR; OP)$$

En sommant le BSCR et le besoin en capital au titre du risque opérationnel, nous obtenons :

$$SCR = 24\,755\,216,04 \text{ dhs.}$$

Ce montant correspond au montant des fonds propres dont doit disposer la compagnie pour faire face à une ruine économique à horizon un an au niveau de confiance 99,5%.

Nous soulignons, à titre de comparaison entre le résultat de la formule standard et celui du modèle interne, que le capital économique calculé moyennant ce dernier est beaucoup plus important que le SCR obtenu par le biais de la formule standard.

III. APPLICATION AU PORTEFEUILLE RETRAITE.

Cette section est consacrée à l'application des deux méthodes recommandées par QIS 5 au niveau du premier pilier de Solvabilité II. Il s'agit de l'application de la formule standard et de l'élaboration d'un modèle interne approprié au portefeuille étudié.

III.1 Le modèle interne.

En suivant la même démarche appliquée au portefeuille décès emprunteur, le portefeuille retraite, englobant environ cent mille contrats, nécessite aussi une réduction du nombre de cas en recourant à une agrégation selon l'année de naissance du client et l'année d'effet du contrat. L'utilisation de ce modèle point permet de limiter l'analyse à mille-sept-quatre-vingt-dix cas ayant la même clé.

Le tableau dynamique, dans lequel pour chaque clé donnée nous faisons correspondre la moyenne de l'ancienneté, l'âge atteint, l'année de naissance, l'année d'effet ainsi que la somme des épargnes pour chaque taux technique spécifique est présenté dans l'extrait suivant :

La clé	Effectif	Année de naissance	Année d'effet	Age atteint	Ancienneté	Epargne 4,5	Epargne 3,25	Epargne 3	Epargne 2,75
2004AA1952	49	1952	2004	61,94	10,20	0	341608,36	63039,72	107313,01
2003AA1986	26	2003	1986	27,65	11,7	0	237603,27	33394,60	46576,36
2001AA1958	130	2001	1958	55,75	13,2	723721,12	1011604,01	120636,42	228289,29

Tableau. Extrait du tableau dynamique représentant l'effectif, l'ancienneté, l'âge, l'ancienneté et des générations d'épargne de certains cas du portefeuille Retraite.

Epargne 2,7	Epargne 2,5	Epargne 2,95	Epargne 2,9	Epargne 2,85	Epargne 2,8	Epargne 3,1	Epargne 3,35	Total Epargne
64540,86	63443,41	112253,69	76984,42	97330,85	66985,44	16572,25	16329,20	1026401,21
22583,69	26245,99	41827,75	29800,06	33859,36	23700,44	9357,53	7100,10	512056,19
112373,4	119228,9	216629,19	193963,9	199992,2	234026,6	78688,88	71032,89	3310187,55

Tableau. Extrait du tableau dynamique représentant des générations d'épargne de certains cas du portefeuille Retraite.

Contrairement au portefeuille Décès-Emprunteur, le portefeuille Retraite ne permet pas l'émission de l'hypothèse « run off » dans la mesure où les assurés continuent à cotiser au-delà le 31/12/2013. Dès lors, il s'avère crucial d'émettre des hypothèses pour déterminer les cotisations futures. C'est-à-dire qu'en tenant compte des hypothèses retenues, nous devons estimer la valeur des épargnes entrant chaque année ainsi que le taux technique associé. A cet égard, nous recourons à une approche statistique à la base de l'historique des cotisations qui s'étale sur l'exercice de 2013.

Nous estimons l'épargne annuelle que verse tout cotisant par la moyenne des valeurs des parts achetées durant l'année 2013. Quant au taux technique, nous le déduisons la base de la variation du taux technique durant les dernières années et de la trajectoire des rendements de la société.

Les risques les plus déterminants et que nous avons jugé être judicieux d'intégrer dans le calcul du SCR, notamment au niveau des scénarios des différentes simulations du modèle interne adapté à la compagnie, sont le risque de mortalité, le risque de marché et le risque de rachat. En effet, le portefeuille Retraite est directement impacté par les niveaux de la mortalité et les taux de rachats dans la mesure où l'assureur se trouve contraint à payer l'épargne cumulée selon les modalités, les options et les garanties cachées inscrites dans le contrat, en cas de rachat ou de mortalité. Quant au risque taux, il s'avère être naturel de le prendre en considération du moment qu'il s'agit d'une assurance vie et par conséquent d'un engagement qui couvre une période étalée sur plusieurs années avec en moyenne un horizon de quarante ans.

La méthode retenue pour le calcul du SCR pour ce portefeuille est l'algorithme Least Square Monte Carlo. Nous effectuons d'abord 5000 simulations primaires dans le but de projeter les flux de la première année. A l'issue de chacune de ces simulations nous recourant à des projections pluriannuelles du bilan économique jusqu'à l'horizon de 40 ans. Ensuite, nous réalisons une régression afin de pouvoir estimer les coefficients des risques considérés comme explicatifs de la variable cible FP_1 . Enfin nous calculons la VaR pour pouvoir approcher la valeur du SCR.

Les images suivantes donnent un aperçu des étapes de calcul du résultat technique. Il s'agit d'un cas dynamique qui permet d'afficher, pour chaque cas, l'âge, l'ancienneté, l'épargne et l'effectif.

En fonction de l'âge nous pouvons prévoir la mortalité et le départ en retraite. De même, en fonction de l'ancienneté nous pouvons estimer le comportement de rachat du cas étudié tout au long des années de projection.

Etant donnée la variation du taux technique à partir de 2002, nous nous trouvons devant une pluralité de générations d'épargne que nous projetons une à une, selon le taux technique en vigueur à la date de cotisation. Nous en déduisons en fonction de la mortalité, du rachat et du départ en retraite les prestations que nous incluons dans le calcul de l'intérêt crédité pour enfin obtenir les réserves mathématiques et le résultat technique.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
coef. Actual.	0,9699	Lancer ...										
Descriptif du profil	8	1790			taux de rentiers							
clé (ID)	2011AA2002	Age	11,00									
epargne totale	1 942,74	Anciennete	5,00		table de mortalité							
		Eff.	1									
Année	Age	Ancienneté	Taux de décès	Loi_rachat	Lois de Retraite	epargne 4,5%	epargne 3,25%	epargne 3%	epargne 2,75%	epargne 2,7%	epargne 2,5%	epargne 2,95%
2014	12	6	0,0151%	14,50%	0,00%	-	0	0	0	0	0	0
2015	13	7	0,0192%	14,26%	0,00%	0	0	0	0	0	0	0
2016	14	8	0,0212%	11,40%	0,00%	0	0	0	0	0	0	0
2017	15	9	0,0232%	16,02%	0,00%	0	0	0	0	0	0	0
2018	16	10	0,0293%	16,21%	0,00%	0	0	0	0	0	0	0
2019	17	11	0,0343%	13,01%	0,00%	0	0	0	0	0	0	0
2020	18	12	0,0424%	12,91%	0,00%	0	0	0	0	0	0	0
2021	19	13	0,0445%	11,70%	0,00%	0	0	0	0	0	0	0
2022	20	14	0,0465%	12,83%	0,00%	0	0	0	0	0	0	0
2023	21	15	0,0455%	13,76%	0,00%	0	0	0	0	0	0	0
2024	22	16	0,0445%	13,43%	0,00%	0	0	0	0	0	0	0
2025	23	17	0,0456%	10,17%	0,00%	0	0	0	0	0	0	0
2026	24	18	0,0497%	6,12%	0,00%	0	0	0	0	0	0	0
2027	25	19	0,0507%	8,85%	0,00%	0	0	0	0	0	0	0
2028	26	20	0,0538%	8,27%	0,00%	0	0	0	0	0	0	0
2029	27	21	0,0558%	6,56%	0,00%	0	0	0	0	0	0	0
2030	28	22	0,0548%	4,65%	0,00%	0	0	0	0	0	0	0
2031	29	23	0,0579%	4,65%	0,00%	0	0	0	0	0	0	0

Figure. Capture image des calculs du résultat technique pour un cas donné.

N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
										4,50%	0	2,75%
										3,25%	0	2,70%
						TV_68_90				3,00%	0	2,50%
14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
epargne 2,9%	epargne 2,85%	epargne 2,8%	epargne 3,1%	epargne 3,5%	epargne 3,1%	epargne Ouverture	Capital des actifs	Prestations décès	Prestations rachat	Capital retraite	atons Retraite_C	tations Retraite_R
0	1998,107577	0	0	0	746,0504274	1943	1943	0	141	0	0	0
0	2055,053643	0	0	0	1515,228418	1828	1802	0	128	0	0	0
0	2113,622672	0	0	0	2308,250926	1725	1673	0	95	0	0	0
0	2173,860918	0	0	0	3125,857133	1653	1578	0	126	0	0	0
0	2235,815954	0	0	0	3968,809131	1550	1451	0	118	0	0	0
0	2299,536709	0	0	0	4837,892641	1453	1333	0	87	0	0	0
0	2365,073505	0	0	0	5733,917741	1387	1246	0	80	0	0	0
0	2432,4781	0	0	0	6657,719618	1326	1166	0	68	0	0	0
0	2501,803726	0	0	0	7610,159354	1277	1097	0	70	0	0	0
0	2573,105132	0	0	0	8592,124721	1224	1026	0	71	0	0	0
0	2646,438628	0	0	0	9604,531015	1171	956	0	64	0	0	0
0	2721,862129	0	0	0	10648,3219	1124	891	0	45	0	0	0
0	2799,4352	0	0	0	11724,47031	1094	846	0	26	0	0	0
0	2879,219103	0	0	0	12833,97932	1085	820	0	36	0	0	0
0	2961,276847	0	0	0	13977,8831	1064	783	0	32	0	0	0
0	3045,673237	0	0	0	15157,24791	1047	751	0	25	0	0	0
0	3132,474925	0	0	0	16373,17302	1038	726	0	17	0	0	0
0	3221,75046	0	0	0	17626,79181	1037	709	0	16	0	0	0

Figure. Capture image des calculs du résultat technique pour un cas donné.

AA	AB	AC	AD	AE	AF	AG
cas traité : taux de rente =0,0%						
Intérêt Crédité	PM d'oture	taux d'actualisat	temps	reserve mathematique	variation de reserve mathématique	RESULTAT TECHIQUE
26	1 828	0,029179672	1	28 767,02	- 1 041,95	784
25	1 725	0,029561	2	27 725,06	- 955,90	742
24	1 653	0,029805019	3	26 769,16	- 904,65	752
23	1 550	0,029974539	4	25 864,51	- 820,74	664
22	1 453	0,030099133	5	25 043,77	- 743,27	620
21	1 387	0,03019455	6	24 300,51	- 695,15	625
20	1 326	0,030269948	7	23 605,36	- 651,66	609
19	1 277	0,030331016	8	22 953,70	- 619,20	608
18	1 224	0,030381474	9	22 334,50	- 583,03	588
18	1 171	0,030423858	10	21 751,47	- 544,96	568
17	1 124	0,030459953	11	21 206,50	- 511,84	557
16	1 094	0,030491057	12	20 694,66	- 496,86	577
16	1 085	0,030518133	13	20 197,80	- 501,43	615
16	1 064	0,030541911	14	19 696,37	- 495,20	614
16	1 047	0,030562954	15	19 201,16	- 492,62	630
16	1 038	0,030581705	16	18 708,55	- 497,88	658
16	1 037	0,030598517	17	18 210,66	- 511,34	694
16	1 036	0,030613672	18	17 699,32	- 525,66	724
16	1 035	0,030627401	19	17 173,66	- 540,83	755
16	1 035	0,030639895	20	16 632,83	- 556,89	788
16	1 035	0,030651311	21	16 075,94	- 573,87	822
16	1 035	0,030661781	22	15 502,07	- 591,75	857
16	1 036	0,030671416	23	14 910,32	- 610,57	894
16	1 037	0,030680311	24	14 299,75	- 630,34	933

Figure. Capture image des calculs du résultat technique pour un cas donné.

Après le calcul de la PB et son intégration dans les réserves mathématiques nous recalculons le résultat technique en tenant compte de la participation aux bénéficiaires. Ensuite, à l'instar des calculs explicités dans l'application consacrée au portefeuille Décès-Emprunteur, nous calculons les fonds propres FP_1 et FP_0 en actualisant les résultats techniques.

A la base des valeurs obtenues des fonds propres FP_1 , nous estimons les coefficients des facteurs de risque. Ensuite, à la lumière de cette estimation nous recalculons les fonds propres FP_1 que nous trions selon un ordre décroissant pour faire apparaître la 4975^{ème} valeur. C'est-à-dire FP_1 dont le classement correspond à $(1 - 0.5\% \times 5000)$, où 0.5% représente la probabilité de ruine économique maximale.

Tous calculs faits, nous obtenons :

$$SCR = 65\,983\,160,28 \text{ dhs.}$$

Ce montant correspond au montant des fonds propres dont doit disposer la compagnie pour faire face à une ruine économique à horizon un an au niveau de confiance 99,5%.

III.2 La formule standard.

Nous explicitons les risques retenus pour le calcul du SCR moyennant la formule standard par le biais du schéma suivant :

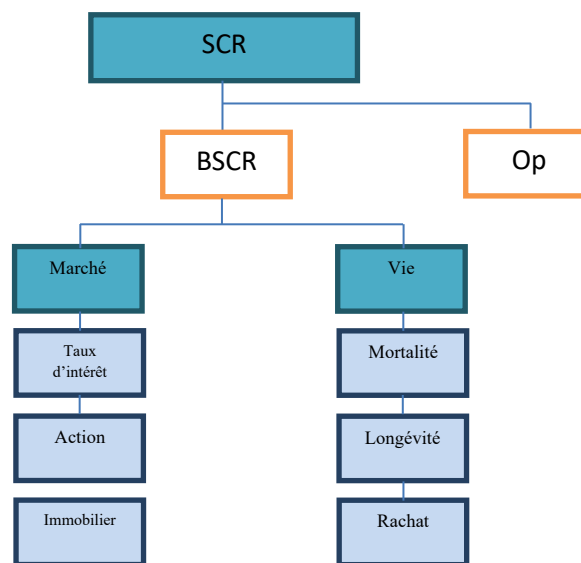


Figure .Les risques tenus en comptes pour le portefeuille retraite.

A l'instar de l'enchaînement des calculs nécessaires au calcul du SCR pour le portefeuille décès emprunteur, nous calculons d'abord le besoin en capital au titre du risque de marché en agrégeant les besoins élémentaires suscités par les risques : taux, action et actif immobilier. A cet égard, nous effectuons les chocs préconisés par la cinquième étude quantitative d'impact QIS 5 et nous calculons la variation de la NAV à partir de laquelle nous déduisons le besoin en capital élémentaire relatif à chaque sous-module.

Une hausse ou une baisse des taux en tenant compte des spécifications de QIS 5 conduisent aux variations suivantes au niveau de la NAV :

NAV avant choc	78 289 887,49
Passif après choc à la hausse	391 449 437,47

Actif après choc à la hausse	442 682 813,30
NAV après choc à la hausse	51 233 375,83
Passif après choc à la baisse	391 449 437,47
Actif après choc à la baisse	547 563 346,65
NAV après choc à la baisse	156 113 909,19
Variation de la NAV (en cas d'une hausse)	27 056 511,66
Variation de la NAV (en cas d'une baisse)	77 824 021,69

Tableau. Résultats du calcul des exigences élémentaires en capital du sous-module taux.

A l'instar des résultats obtenus pour le portefeuille Décès-Emprunteur, l'accent est mis sur le double impact des taux sur le bilan dans la mesure où un choc à la hausse ou à la baisse conduit à une variation simultanée du passif et de l'actif du bilan. En revanche, contrairement à la conclusion de comparaison de la variation de la NAV en cas d'un choc à la hausse avec sa variation en cas d'un choc à la baisse au niveau de portefeuille Décès-Emprunteur, nous remarquons que c'est plutôt la baisse des taux qui engendre une variation importante de la NAV, et par conséquent une exigence en capital considérable pour le portefeuille Retraite.

En tenant compte de la corrélation entre les risques afférents aux actions cotées et aux actions non cotées, arrêtée à 0,75 selon la cinquième étude quantitative d'impact QIS 5. Nous agrégeons les résultats de la variation de la NAV suite aux chocs associés aux risques précités tels qu'ils sont spécifiés par cette même étude.

Variation de la NAV	
Action cotées	14 074 208,65
Actions non cotées	3 781 876,07

Tableau. Résultats du calcul des exigences élémentaires en capital du sous-module action.

Ce tableau reprend les résultats de la variation de la NAV tout en dévoilant le fait que les actions cotées engendrent un besoin en capital beaucoup plus important que celui suscité par les actions non cotées. L'agrégation de ces deux résultats donne lieu à une exigence élémentaire en capital, au titre du risque action, qui s'élève à 10 194 171,23 dhs.

En appliquant un choc à la baisse de 25% à l'actif immobilier nous obtenons les résultats suivants :

NAV avant choc	78 289 887,49
NAV après choc	71 243 797,62
Variation de la NAV	7 046 089,87

Tableau. Résultats du calcul des exigences élémentaires en capital du sous-module immobilier.

Ces résultats traduisent le fait que le risque immobilier, en tenant compte des spécifications de QIS 5, entraîne un besoin élémentaire en capital de l'ordre de sept milliards de dirhams.

Enfin le besoin en capital résultant du risque de marché s'obtient en agréant les exigences élémentaires tout en tenant compte des corrélations intra-modulaires telles qu'elles sont présentées dans les matrices suivantes :

	Intérêt	Action	Immobilier
Intérêt	1		
Action	0,5	1	
Immobilier	0,5	0,75	1

Tableau . Matrice de corrélation des sous-modules du risque de marché (choc à la baisse), portefeuille Retraite.

Cette agrégation nous permet d'obtenir :

$$SCR Mkt = 48\,322\,596,76 \text{ dhs.}$$

Ce montant, à l'instar de celui obtenu pour le portefeuille Décès-Emprunteur, dévoile le poids du risque de marché dans le cadre de Solvabilité II.

Le calcul du besoin en capital résultant du risque de souscription vie pour le portefeuille Retraite diffère de celui du portefeuille Décès-Emprunteur dans la mesure où le présent portefeuille nous amène à tenir compte de plusieurs sous-modules à savoir la mortalité, la longévité, le rachat et les dépenses. Les corrélations entre ces sous-modules sont déterminées par les spécifications de la cinquième étude quantitative d'impact QIS 5 que nous résumons dans la matrice suivante :

	Mortalité	Longévité	Rachat	Dépenses
Mortalité	1			
Longévité	-0,25	1		
Rachat	0	0,25	1	
Dépenses	0,25	0,25	0,5	1

Tableau . Matrice de corrélation des sous-modules du risque de souscription vie, portefeuille retraite.

Etant donné que chacun de ces risques n'impactent que le passif de la compagnie, l'exigence élémentaire en capital qui leur est associée n'est autre que la variation du Best Estimate suite aux chocs préconisés par la cinquième étude quantitative d'impact QIS 5. La figure suivante reprend les différentes valeurs du Best Estimate avant et après choc.

Best Estimate avant choc	391 449 437,47
Best Estimate après choc hausse mortalité	391 343 882,05
Best Estimate après choc baisse Rachats	422 922 983,66
Best Estimate après choc hausse Rachats	341 959 285,19
Best Estimate après choc Rachats massif	325 507 032,91
Best estimate après choc dépenses	422 467 012,05

Tableau. Résultat du calcul du Best Estimate avant et après choc.

La figure suivante montre bien que seuls les sous-modules relatifs au rachat et aux dépenses engendrent un besoin en capital au titre du risque de souscription vie. Nous limitons donc l'agrégation intra-modulaire à ces deux sous-modules.

Nous réduisons davantage la matrice des corrélations pour ne tenir compte que du rachat et des dépenses. Nous agrégeons les exigences en capital qui leurs sont associées par le biais du calcul suivant :

$$SCR_{life} = \sqrt{[31\ 473\ 546,19 \quad 31\ 017\ 574,58] \times \begin{bmatrix} 1 & 0,5 \\ 0,5 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 31\ 473\ 546,19 \\ 31\ 017\ 574,58 \end{bmatrix}}$$

	Dépenses	Rachat
Dépenses	1	
Rachat	0,5	1

Tableau . Matrice de corrélation entre le risque de rachat et le risque de dépense.

Nous obtenons :

$$SCR_{life} = 54\ 191\ 157,09 \text{ dhs.}$$

Ce montant met l'accent sur l'importance qu'accorde la réforme Solvabilité II au risque de souscription vie

Enfin, au niveau inter-modulaire, nous agrégeons le SCR_{life} et le SCR_{mkt} pour obtenir le SCR de base, en effectuant le calcul suivant :

$$BSCR = \sqrt{[48\ 322\ 596,76 \quad 54\ 191\ 157,09] \times \begin{bmatrix} 1 & 0,25 \\ 0,25 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 48\ 322\ 596,76 \\ 54\ 191\ 157,09 \end{bmatrix}}$$

La corrélation entre les deux modules retenus est déterminée grâce à la matrice des corrélations définie par QIS 5 :

	Souscription vie	Marché
Souscription vie	1	0.25
Marché	0.25	1

Tableau . Matrice des corrélations entre les modules retenus pour le portefeuille retraite.

Quant au SCR opérationnel, il s'obtient directement en appliquant la formule simplifiée suivante dans la mesure où ce portefeuille ne comporte pas de garantie en unité de compte :

$$SCR_{op} = \min(30\% \times BSCR; OP)$$

En sommant le BSCR et le besoin en capital au titre du risque opérationnel, nous obtenons :

$$SCR = 82\ 885\ 400,46 \text{ dhs.}$$

Ce montant correspond au montant des fonds propres dont doit disposer la compagnie pour faire face à une ruine économique à horizon un an au niveau de confiance 99,5%.

Nous soulignons, à titre de comparaison entre le résultat de la formule standard et celui du modèle interne, que le capital économique calculé moyennant ce dernier est moins important que le SCR obtenu par le biais de la formule standard.

Conclusion.

En somme, Solvabilité II, à l'instar de Bâle II dans le domaine bancaire, a apporté des changements de taille dans le domaine assurantiel en tenant compte de tous les risques auxquels s'exposent les assureurs et les réassureurs. Ce travail, ayant comme objectif le calcul du capital économique en assurance vie, met en exergues la délicatesse des calculs et de la modélisation qui requièrent une maîtrise des outils actuariels et financiers.

La série d'études quantitatives d'impact menées par European Insurance Occupational Authority (ex CEIOPS) met à la disposition des compagnies d'assurance et de réassurance, dans sa cinquième édition, un cadre d'application de Solvabilité II en leur proposant deux méthodes différentes de calcul du capital économique à savoir la formule standard et le modèle interne. La première méthode s'applique selon une approche « bottom up » qui consiste à effectuer une agrégation intra-modulaire puis inter-modulaire pour agréger les exigences en capital élémentaires résultant de la variation de l'actif diminué du passif suite à un choc au niveau d'un sous-module toutes choses étant égales par ailleurs. Certes la formule standard nécessite peu de ressources humaines et financières mais demeure peu adaptée aux spécificités du portefeuille de la compagnie d'assurance. En revanche, la deuxième méthode qui consiste à l'élaboration d'un modèle interne s'avère être beaucoup plus adaptée.

Le capital économique calculé pour les deux portefeuilles ADE et retraite complémentaire dévoile la différence entre les résultats obtenus moyennant la formule standard et le modèle interne. Ainsi, les compagnies d'assurance préfèrent-elles la méthode qui leur garantit le SCR minimal.

Bibliographie.

✓ Mémoires :

- Ben Dbabis M. *Modèles des risques et solvabilité en assurance vie*. mémoire d'actuariat. 2009.
- Ben Dbabis M. *Modèles et méthodes actuarielles pour l'évaluation quantitative des risques en environnement solvabilité II*. thèse de doctorat en mathématique. université Paris. 2012.
- Devineau L. et Loisel S. *Construction d'un article d'accélération de la méthode des simulations dans simulations pour le calcul du capital économique solvabilité II*. Bulletin Français d'Actuariat. 2009.
- Gerber G. *Allocations d'actifs sous solvabilité 2 en cas de l'assurance vie épargne*, thèse de Master, Université Paris Dauphine. 2010.
- GORNOUCHKINA O. *Application des normes de Solvency II en assurance vie*. mémoire de stage. 2006.
- Lafond J. *Valorisation économique d'un contrat épargne multi support*. thèse de Master. Université de Strasbourg. 2010.
- Le Mer S. *Calcul du capital économique en assurance vie*. thèse de Master. 2010.
- LeVallois F. Tosetti A. Paris B. et Palsky P. *Gestion Actif Passif en Assurance Vie : Réglementation, Outils, Méthodes*. Economica. 2003.
- NAHIL A. et ABERKANE M. Solvency II application au cas d'un portefeuille Décès Emprunteur. Projet de fin d'étude. 2011.
- Piermay M. Cohen A. et Mathoulin P. *La gestion actif passif d'une compagnie d'assurance ou d'un investisseur institutionnel*. Economica. 2002.
- Planchet F, Thérond P et Kamega A. *Scénarios économiques en assurance*. Economica, 2009.
- Planchet F. *Calcul du SCR dans le cadre de l'ORSA ou du modèle interne*. rapport technique. 2012.
- RAMANAMPISOA T. *Application de la méthode Least Square Monte Carlo pour la mise en place de l'ORSA en assurance vie*. mémoire d'actuariat. 2012.
- REVELLEN J. Replicating portfolio et capital économique en assurance vie. université Claude Bernard. 2011.
- TRABELSI I. *Calcul du capital économique d'assurance vie via les approches : les simulations dans les simulations, le Replicating Portfolio et l'accélérateur SdS*. université Pierre et Marie Curie. 2010.

✓ Sites Webs

- Site de la fédération marocaine d'assurances et de réassurance
<http://www.fmsar.org.ma/fonction-de-collecte-de-epargne.html> consulté le 02/05/2014.
- Site du CEIOPS (Committee of European Insurance and Occupational Pensions Supervisors)
<https://eiopa.europa.eu/en/consultations/qis/insurance/long-term-guaranteesassessment/technical-specifications/index.html> consulté le 11/03/2014.
- Site de la FFSA (Fédération Française des Sociétés d'Assurances) :
<http://www.ffsa.fr>, consulté le 10/03/2014.
- Site du CEA (Comité Européen des Assurances) :
<http://www.cea-assurances.fr/documentation/base-documentaire> , consulté le 24/04/2014.

Annexe I : l'indice des prix des actifs immobiliers.

L'élaboration de l'indice des prix des actifs immobiliers s'intéresse uniquement aux biens qui ont fait l'objet d'au moins deux ventes durant la période de l'étude. La confection de l'indice adopte la méthode des ventes répétées dans le but de remédier au problème d'hétérogénéité des biens immobiliers. Les bases de données utilisées à cet égard proviennent des données de l'ANCFCC relatives à l'immatriculation des biens immobiliers et à l'inscription des transferts de propriété des biens immobiliers et fonciers.

A partir de la base de 3 millions d'enregistrements réalisés au niveau de l'ANCFCC, les concepteurs de l'indice se sont retrouvés avec un échantillon, après sélection des ventes réalisées depuis 2003 et des traitements de données et l'application de la règle de biens immobiliers ayant fait l'objet d'au moins une 2ème transaction, comprenant :

- ✓ 41 000 biens résidentiels (appartements, villas et maisons) ;
- ✓ 15 700 biens fonciers ;
- ✓ 3 100 biens commerciaux.

L'indice des prix des actifs immobiliers global (IPAI) est donc une combinaison des trois indices obtenus :

- ✓ IPA résidentiels ;
- ✓ IPA fonciers ;
- ✓ IPA commerciaux.

Il y'a lieu de noter la corrélation entre l'IPA appartement et IPA terrain urbain avec un écart d'un trimestre. En d'autres termes, les prix des appartements ont tendance à suivre ceux du foncier urbain avec un décalage de 3 mois.

Annexe II : algorithme de MORO.

L'inverse de la fonction de répartition de la loi Normale centrée réduite n'étant pas aisément calculable, l'algorithme de Moro permet d'approcher l'inverse de la fonction de répartition par une méthode numérique. Il est à noter que cette méthode de simulation est l'une des plus précises parmi l'ensemble des algorithmes existants, notamment au niveau de la queue de distribution.

✓ Algorithme de Moro :

Soit y la valeur de loi uniforme générée, alors $y = \Phi(x)$. Posons $z = y - 0,5$.

- Si $z \leq 42,0$ alors x est approché par :

$$x = \frac{\sum_{i=0}^3 a_i z^{2i}}{\sum_{j=0}^4 b_j z^{2j}}$$

- si $z > 42,0$ alors :

$$x = \varepsilon \left(\sum_{i=0}^8 c_i T_i(t) \right) - \varepsilon \frac{c_0}{2}$$

et

$$t = k_1 \left\{ 2 \ln \left(\ln \left(\frac{1}{2} - |z| \right) \right) - k_2 \right\}$$

La fonction $f(t)$ peut être approximer par la formule suivante :

$$f(t) = t d_1 - d_2 + c_0/2$$

avec :

- a_i, b_i, c_i, k_i : des réels à déterminer.
- $d_i = 2t d_{i-1} - d_{i+2} + c_i$
- $F(x) = \Phi \left(\frac{x-\mu}{\sigma} \right)$
- $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$
- $f(t) = \left(\sum_{i=0}^8 c_i T_i(t) \right) - \frac{c_0}{2}$

Annexe III : la duration.

La duration revêt un caractère important dans l'univers des obligations dans la mesure où elle donne une indication de la sensibilité du prix d'une obligation aux taux d'intérêts. En effet, plus la duration d'une obligation est grande, plus elle sera sensible aux taux d'intérêts. La duration permet donc d'obtenir une valeur approchée de cette sensibilité.

Il s'agit essentiellement d'une mesure patrimoniale statistique, qui met à la disposition des gestionnaires de fonds ou des gestionnaires d'actif/passif une grandeur qu'ils peuvent comparer à la durée moyenne d'un mandat de gestion, ou à une durée moyenne d'emploi des fonds. Cependant, cette mesure demeure imprécise pour être utilisée sur les marchés financiers dans la mesure où elle ne tient pas compte de la forme, de la dynamique et des déformations de la courbe des taux.

La duration modifiée peut être définie comme une mesure de la sensibilité d'un produit aux variations de taux d'intérêts. Ainsi, la duration modifiée mesure cette sensibilité en pourcentage alors que la duration la mesure en absolue.

La formulation mathématique du prix d'une obligation touchant les flux F_i lors des n périodes restantes, est développée par la formule suivante :

$$D = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{t(i) \times F_i}{(1+r)^{t(i)}}}{\sum_{i=1}^n \frac{F_i}{(1+r)^{t(i)}}$$

avec :

- $t(i)$: l'intervalle de temps exprimé en années, séparant la date d'actualisation de la date du flux F_i ;
- r : le taux actuariel de l'obligation ;

La mesure de risque de taux instantané dP/dr peut être déduite des formules suivantes :

$$\begin{aligned} \text{➤} \quad & \frac{dP}{dr} = -\frac{P \cdot D}{1+r} = -P \cdot D^* \\ \text{➤} \quad & \frac{dP}{P} = -D^* \cdot dr \\ \text{➤} \quad & D = \frac{\frac{dP}{P}}{\frac{dr}{1+r}} \end{aligned}$$

avec :

- P : le prix observé de l'obligation qui correspond à la valeur actualisée des flux selon la formule suivante : $P = \sum_{i=1}^n \frac{F_i}{(1+r)^{t(i)}}$

Annexe IV : la méthode de Monte Carlo.

La méthode de Monte Carlo est un processus numérique, permettant l'approximation de certaines caractéristiques d'une loi de probabilité $F(X)$ (comme la moyenne, l'écart type, les quantiles..), à partir de la densité de la loi X .

Cette procédure consiste à une génération d'un ensemble de tirages aléatoires indépendants : $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ selon la densité de probabilité X . A l'issue de ces tirages, les caractéristiques de la loi de probabilité de $F(X)$ se déduisent selon les statistiques établies sur l'échantillon des résultats obtenus : $F(x_1), F(x_2), F(x_3), \dots, F(x_n)$.

A titre d'exemple, le calcul d'une espérance moyennant cette méthode est décrit selon le théorème suivant :

Soit X une variable aléatoire réelle et soient $X_1, X_2, X_3, \dots, X_N$ des variables iid de même loi que X . L'espérance de X peut être approchée par un estimateur m , convergeant fortement vers elle, défini selon la formule suivante :

$$m = \sum_{i=1}^n X_i \text{ où } m = \hat{E}(X)$$

Annexe V : processus de mise en œuvre de LSMC.

Process de la méthode LSMC

1) Identifier les facteurs de risques du portefeuille (économiques, actuariels)

2) Sélectionner des scénarios de trajectoires de ces facteurs de risque

3) Lancer des simulations Monte-carlo en univers réel puis risque neutre selon chaque scénario et en déterminer les fonds propres associés

4) Choisir les fonctions de base qui vont servir à l'approximation

5) Effectuer une régression de la série des fonds propres en t sur les facteurs de risque (Taux, actions, rachats)

6) Ajuster cette régression avec la méthode des moindres carrés

7) Mesurer l'erreur obtenue et valider la fonction choisie

8) utiliser cette fonction ajustée pour suivre l'indicateur de besoin de solvabilité.

- Étape 1

Le but de cette première étape est de discerner les différents paramètres sources d'aléas et donc du risque au niveau du portefeuille d'assurance vie considéré. Outre cette identification, cette étape s'intéresse au tri des facteurs de risques selon la sensibilité des fonds propres à ces facteurs dans l'intérêt d'en réduire le nombre pour éviter qu'il y ait trop de paramètres dans la modélisation et pour garder uniquement les facteurs qui impactent significativement les fonds propres.

- Étape 2

Cette étape requiert un Générateur de Scénarios Economiques qui permet de faire une trajectoire simulée sous probabilité historique sur une première période puis sous probabilité risque neutre pour le temps restant jusqu'à l'horizon de projection déterminé. A titre d'exemple, le calcul du SCR en assurance vie, nécessite des projections de l'évolution des paramètres économiques comme les cours des actions ou les taux en univers réel jusqu'en $t=1$, puis faire des projections en univers risque neutre à partir de $t=1$ sur une période de 30 ou 40 ans afin d'évaluer chaque poste du bilan et notamment le Best Estimate.

- Étape 3

Les simulations Monte-Carlo requière, particulièrement en assurance vie, l'usage d'un outil de projection des flux et des états financiers qui soit en mesure de tenir compte des interactions entre l'actif et le passif. Une valeur de fonds propres est calculée à la base de chaque trajectoire $(Y(i); D(i))_{i=1, \dots, N}$. Le N -uplet des valeurs de fonds propres obtenu constitue l'échantillon sur lequel reposera la régression.

- Étape 4

Cette étape revêt un caractère déterminant dans la mesure où elle permet de choisir les fonctions $e_k(Y; D)$ nécessaires à la régression. L'enjeu de cette étape est de sélectionner des fonctions suffisamment complexes et simples à la fois ; complexes pour mieux tenir compte des différentes sensibilités aux facteurs de risque et simples pour la faisabilité de la mise en œuvre opérationnelle. Il est commun d'opter pour une base de polynômes.

- Étape 6

Cette étape est consacrée à la mesure de l'erreur commise selon deux manières différentes :

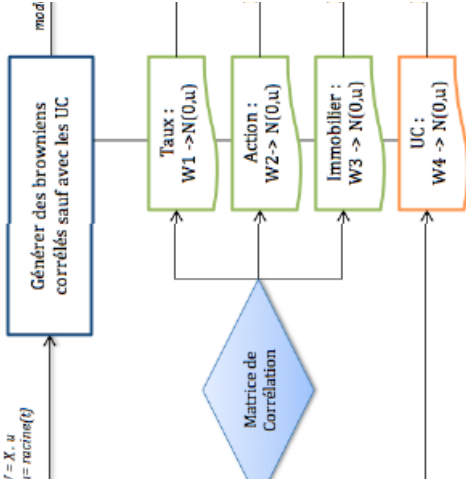
- soit par un calcul de fonds propres réels s'il y a à disposition un modèle ALM en mesure d'effectuer un jeu de quelques simulations dans des simulations. Il suffit donc de comparer les valeurs obtenues par la fonction estimée avec celles fournies par les modèles toutes choses étant égales par ailleurs.
- soit en définissant un intervalle de confiance de la fonction à estimer pour lequel la marge d'erreur est assez faible pour valider les coefficients obtenus. Cet intervalle de confiance peut être obtenu en usant de techniques statistiques comme le Bootstrap.

- Étape 7

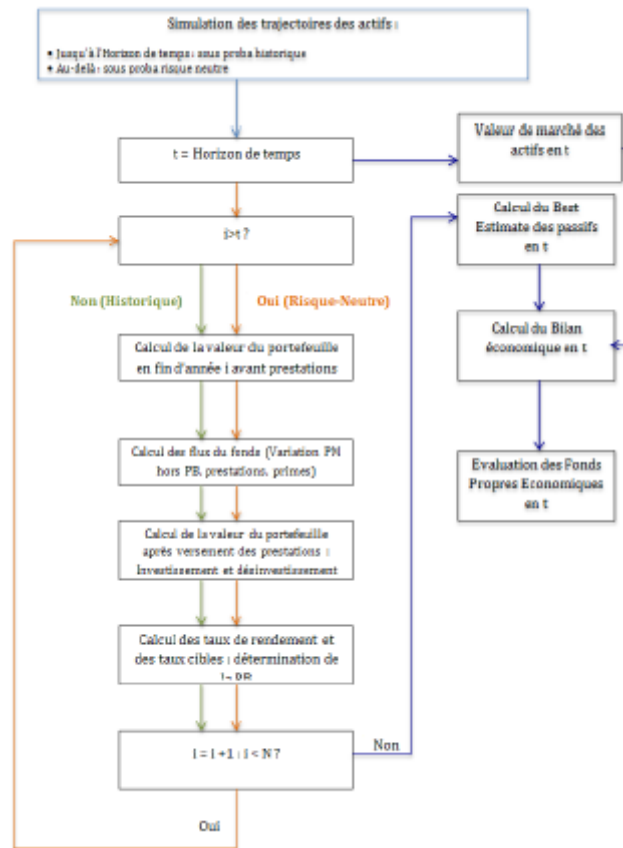
Enfin, les fonctions obtenues constituent un moyen efficace et rapide pour déterminer la distribution des fonds propres à une date donnée t . L'expression obtenue est relativement simple et moins onéreuse en termes de temps de calcul et de ressources des fonds propres à une date t en fonction des principaux facteurs de risques du portefeuille considéré dont les valeurs sont observables sur le marché. Elles permettent l'évaluation du SCR à cette même date et constituent un outil idéal pour le suivi de l'indicateur de besoin global en solvabilité défini préalablement en fonction du SCR.

Annexe VI: le fonctionnement du Générateur de Scénarios.

Le schéma suivant explicite le fonctionnement du générateur de scénarios :



Annexe VII : la projection des flux futurs.



Comme déjà explicité dans la figure précédente, la projection des flux et le calcul des éléments du bilan économique reposent sur le processus suivant :

- ✓ Simulation d'une trajectoire pour les actifs : cette trajectoire est évaluée sous probabilité historique pour la première année, puis sous probabilité risque-neutre pour les N années suivantes.
- ✓ Calcul pour chaque année i ; étant donné la valeur des actifs à la fin de l'année $i - 1$, leur évolution tout au long de la trajectoire simulée jusqu'en fin d'année i avant le versement des prestations en fin d'année.
- ✓ Evaluation des différents flux des fonds, principalement les flux de prestations.
- ✓ Calcul de la valeur du portefeuille d'actifs de la compagnie suite au versement des prestations tout en respectant l'allocation du portefeuille.
- ✓ Evaluation, à partir de cette valeur de portefeuille, des taux de rendements financiers et des taux cibles servant à évaluer le montant de la participation aux bénéfices à verser aux assurés.
- ✓ Répétition de la démarche jusqu'à la fin des N années de projection.
- ✓ Calcul du Best Estimate des passifs de l'année i au terme des N années de projection, en sommant les flux futurs actualisés au taux sans risque.
- ✓ Détermination du bilan économique et des fonds propres économiques de l'année i pour laquelle la valeur de marché des actifs est déjà déterminée.

Annexe VIII: analyse SWOT des méthodes de calcul du SCR.

Nous présentons dans ce présent annexe des matrices SWOT que nous avons élaborées dans le cadre d'une étude comparative entre la méthode SdS et certaines méthodes de proxy à savoir la méthode dite « Replicating Portfolio » et la méthode « Least Square Monte Carlo ».

La matrice ci-dessous correspond à une matrice SWOT de la méthode « Nested Simulations » :

Forces	Faiblesses
Conformité aux exigences de la solva II Une modélisation plus proche et précise des risques supportés par l'assureur	Temps de calcul extrêmement long
Opportunités	Menaces
Accélérateur SDS pour restreindre le nombre de simulations primaire en se basant sur les facteurs de risque par la détermination des scénarios les plus averses	Le recalibrage des tables de scénarios par rapport à l'information disponible en fin de la première période nécessite une régénération de ces scénarios.

Cette matrice vient corroborer l'idée que nous avons abordée dans le quatrième chapitre de ce présent travail selon laquelle la méthode SDS revêt un caractère important en raison de sa précision. Cependant cette méthode présente des limites qui ne sont pas des moindres. D'où le recours à des méthodes de proxy.

Nous présentons dans les matrices suivantes des matrices SWOT des deux méthodes de proxy les plus fréquemment utilisées pour remédier aux problèmes que présente la méthode des simulations dans les simulations notamment en terme du facteur temps et de l'allocation de la mémoire.

La matrice SOWT de la méthode « répliquing portfolio » est la suivante :

Forces	Faiblesses
Gain en temps par rapport aux « simulation dans les simulations »	les garanties d'assurance présentent d'autres spécificités : -- le caractère discrétionnaire de la participation aux bénéfices et la latitude dans la gestion des rendements financiers, -- un comportement d'assuré différent d'un investisseur rationnel sur un marché organisé (aléa morale),
Opportunités	Menaces
Un calcul opérationnel du besoin en capital de la compagnie	Limites traditionnelles de la théorie financière interdépendance des risques financiers et non financiers.

Enfin, afin de finaliser cette analyse, nous présentons la matrice SWOT correspondant à l'algorithme LSMC.

Forces	Faiblesses
Possibilité de lancer un grand nombre de simulations, Facilité de mise en oeuvre, Possibilité d'automatisation des calculs, Prise en compte d'une large gamme de distribution de risque	Le choix des régresseurs nécessite l'avis d'un expert.
Opportunités	Menaces
Flexibilité au niveau des dépendances entre les risques.	Difficulté de calibration des risques techniques

Annexe IX : Vision synthétique des chocs pour le calcul du SCR.

Module de risque	Sous module de risque	Détail des chocs	Description des chocs	
Marché	Taux	↑ Taux	Hausse des taux sans risque	
		↓ Taux	Baisse des taux sans risque	
	Prime de liquidité	Prime de liquidité	Baisse de 65%	
	Spread	Spread	Choc sur le niveau ou volatilité de spread	
	Actions	Actions Globales		Baisse de 49% de la valeur de marché
		Actions Autres		Baisse de 59% de la valeur de marché
	Immobilier	Immobilier		Baisse de 25% de la valeur de marché
Souscription vie	↑ Mortalité	↑ Mortalité	Majoration de 15% du taux de mortalité à chaque âge	
	↓ Mortalité (longévitité)	↓ Mortalité (longévitité)	Diminution de 15% du taux de mortalité à chaque âge	
	Rachat	↑ Rachat		Taux de rachat majoré de 50%
		↓ Rachat		Taux de rachat minoré de 50%
		Rachat massif		30% des encours rachetés la première année
		dépense	Dépense	Majoration de frais de gestion des contrats de 10%