ROYAUME DU MAROC

--*-*-*

HAUT COMMISSARIAT AU PLAN

--*-*-*-*-*-*

INSTITUT NATIONAL
DE STATISTIQUE ET D'ECONOMIE APPLIQUEE

INSEA

Projet de Fin d'Etudes

*****

Modélisations et projections ALM en assurance non-vie

Préparé par : AMEWUNU Kokou Venunye & Hamado DABRE

Sous la direction de : ***M. Abderrahim OULIDI* (INSEA)**
***M. Abdelkrim KHIRAOUI* (A.R.M Consultants)**

Soutenu publiquement comme exigence partielle en vue de l'obtention du

Diplôme d'Ingénieur d'Etat

Option : Actuariat-Finance

Devant le jury composé de :

M. Abderrahim OULIDI (INSEA)
M. L. BAGHAGHA (INSEA)
M. Abdelkrim KHIRAOUI (A.R.M Consultants)

JUIN 2014

RESUME

Les méthodes déterministes ont longtemps été utilisées par les décideurs dans les compagnies d'assurance non vie. Cependant, l'incertitude liée à l'évolution futur des différents éléments du bilan et montrant la réelle exposition de l'assureur nécessite une utilisation des modèles plus sophistiqués entrant dans le cadre de mesure de risques et intégrant ainsi des méthodes stochastiques. Pour ce faire, les décideurs ont recours à la Dynamic Financial Analysis (DFA) pour la modélisation stochastique du bilan. L'objectif de ce mémoire est donc de présenter ce modèle dans une optique de gestion actif passif et d'élaborer des indicateurs reflétant la réelle exposition de l'assureur : probabilité de ruine, probabilité de perte, etc.

Pour aboutir à ces indicateurs, plusieurs méthodes de modélisation stochastique ont été utilisées afin de déterminer certaines variables. Par ailleurs, il est à préciser que les analyses portent sur un bilan partiel à une seule garantie à savoir la garantie Responsabilité Civile automobile. Parmi les modèles utilisés figurent les modèles de Cox Ingersoll Ross (taux d'intérêt), Black & Scholes (actions), log-normal (provisions) etc.

Après la modélisation de tous les éléments entrant dans la détermination des indicateurs, un algorithme de simulation a été mis en place afin de dérouler les différents éléments de notre bilan et de tester les différents scénarios.

L'allocation stratégique des actifs s'effectuera sur le critère d'optimisation du couple rentabilité-risque donc selon le modèle Markowitz.

Les méthodes utilisées sont illustrées par une application axée sur l'évaluation de la probabilité de ruine, de la marge de solvabilité et de la probabilité de perte et ce à travers des simulations.

Mots clés : Assurance non vie, actif, passif, taux d'intérêt, taux d'inflation, modélisation, actions, obligations, monétaires, immobiliers, allocation d'actifs, provisions, primes, solvabilité, taux de couverture, résultat, probabilité de ruine, probabilité de perte.

DEDICACES

A mes formidables parents AMEWUNU Messanvi et EDOH Afiwa Eugénie,

A mes sœurs adorées Xolali, Essenam et Ewenam,

A mon oncle AFANSI Yawo Maurice et sa famille,

A mon ami et collègue Hamado DABRE,

A mes ainés, Ingénieurs d'Etat AKOWOE K. Gilbert, KAKABOU Kossi et DARE Saley

Je dédie ce mémoire.

Kokou V. AMEWUNU

Je dédie ce modeste travail à mes très chers parents (Papa et Maman) afin de leur témoigner ma reconnaissance pour leur amour et leur soutien incontestable tout au long de mon existence. Pour moi vous incarnez des parents idéaux pour tout enfant sur terre. Puisse Dieu vous gratifier de sa bienfaisance.

A Kokou AMEWUNU, un ami qui a rendu mon séjour à l'Institut et au Royaume inoubliable. Toute mon admiration et toute ma considération pour lui restent sans conteste.

A toute la famille DABRE à Bittou au Burkina Faso.

Hamado DABRE

A notre camarade défunte Meryem AZOUZI. Puisse le Tout Puissant accueillir son âme et pardonner ses manquements ici-bas.

Kokou V. AMEWUNU et Hamado DABRE

REMERCIEMENTS

- Avant toute chose nous aimerions remercier de prime abord Dieu Tout Puissant, Créateur de toute chose. Nous ne saurions le remercier pour Ses innombrables bienfaits sur terre.
- Nous adressons nos remerciements les plus vifs à Monsieur **Abdelkrim KHIRAOUI**, notre maître de stage et par ailleurs Associé ARM Consultants, pour nous avoir ouverts les portes de son Cabinet et pour ses précieux conseils.
- Nos remerciements vont également à l'adresse de Monsieur **Abderrahim OULIDI** notre professeur et encadrant interne pour sa disponibilité et ses précieux conseils et remarques très enrichissantes tout au long du déroulement de notre stage.
- Nous n'oublions pas également Monsieur **Marouan ABOULOUAFA**, ex-actuaire chez ARM Consultants, pour sa disponibilité, ses suggestions et son aide en matière de documentation.
- Nous remercions également tous les employés du cabinet ARM Consultants en particulier Madame Houriya BENSALTANA, pour leur accueil chaleureux et leur sympathie tout au long de notre stage.
- Nous adressons nos sincères remerciements aux corps administratif et professoral de ***l'Institut National de Statistique et d'Economie Appliquée*** pour leurs efforts aussi bien au niveau administratif que pédagogique afin de mettre à notre disposition les moyens nécessaires à la bonne réussite de notre formation.
- Pour finir nous adressons nos derniers remerciements à toutes celles et tous ceux, de près ou de loin, ayant participé à la rédaction de ce mémoire et à sa réussite.

LISTE DES FIGURES

LISTE DES TABLEAUX

ABREVIATIONS

GAP : Gestion **A**ctif/**P**assif

ALM : Assets **L**iability **M**anagement

AFD : Analyse **F**inancière **D**ynamique

DFA : Dynamic **F**inancial **A**nalysis

IARD : Incendies **A**ccidents **R**isques **D**ivers

MENA : Mean **E**ast and **N**orth **A**frica (MoyenOrient et Afrique du Nord)

ARM : Actuariat **R**isk **M**anagement

AMOA : Assistance à **M**aîtrise d**'O**uvrage

PMO : Project **M**anagement **O**ffice (Service de Gestion de Projet

IAS 19 : International **A**ccounting **S**tandard (Norme internationale régissant les avantages de personnel)

GDR IAMS :

PIB : Produit **I**ntérieur **B**rut

AT & MP : Accidents de **T**ravail **& M**aladies **P**rofessionnelles

RC auto : Responsabilité **C**ivile **Auto**mobile

DAPS : Direction des **A**ssurances et de la **P**révoyance **S**ociale

SCR : Société **C**entrale de **R**éassurance

MS : Marge de **S**olvabilité

PSAP : Provisions pour **S**inistres **A P**ayer

PPNA : Provisions pour **P**rimes **N**on **A**cquises

GLM : Generalized **L**inear **M**odels

AR() : Auto **R**égressif

MCO : Moindres **C**arrés **O**rdinaires

OCDE : Organisation de **C**oopération et de **D**éveloppement **É**conomiques

CIR : Cox **I**ngersoll **R**oss

HJM : Heath **J**arrow and **M**orton

MEDAF : Méthodes d'**E**valuation **D**es **A**ctifs **F**inanciers

CAPM : Capital **A**sset **P**ricing **M**odels

APT : Arbitrage **P**ricing **T**heory

SLM : Security **M**arket **L**ine

Table des matières

INTRODUCTION

La recherche appliquée en finance a abouti à la fin du dernier siècle à une découverte qui va devenir incontournable pour les décideurs de ce domaine : il s'agit de la Gestion Actif Passif (GAP) en anglais Asset Liability Management (ALM). Longtemps utilisée dans les cellules de gestion de trésorerie des banques afin d'identifier et de combler les gaps de trésorerie, créateurs de risques, elle a été par la suite empruntée par les assureurs. Le succès rencontré par cette activité est tellement grandiose qu'aujourd'hui il n'est plus convenable de gérer une société sans recourir de façon systématique à des études et des modélisations actif-passif. Par ailleurs les désastres auxquels ont pu conduire dans le passé les grands déséquilibres actif passif identifiés ou non gérés, réveillent les consciences de tous les acteurs de la profession quant au recours à l'utilisation de ces techniques aux fins d'une gestion saine du bilan. Cette technique est longtemps utilisée par les assureurs vie. Elle a ensuite suscité la création d'un outil semblable en assurance non-vie. On peut le remarquer dans le code français des assurances du 3 août 1999 dans son article R. 332-1-2 : *« les entreprises d'assurance doivent procéder à une évaluation de leurs risques financiers en effectuant notamment des simulations de l'impact de la variation de taux d'intérêt et des cours boursiers sur leur actif et leur passif et des estimations comparées de l'exigibilité de leur passif et de la liquidité de leur actif* [1]». Cette technique est connue sous le nom de ***Dynamic Financial Analysis (***DFA) ou en français ***Analyse Financière Dynamique*** (AFD). En effet, la DFA est un outil de gestion et d'aide à la décision utilisé dans les compagnies d'assurance IARD. Au vu de la différence dans les problèmes de gestion financière entre les compagnies d'assurance vie où la volatilité du passif est jugée faible par rapport à celle de l'actif, et les compagnies d'assurance IARD où le risque passif est d'une grande importance, la transition du modèle ALM en assurance vie vers le modèle DFA en assurance non vie ne saurait s'effectuer sans tenir compte de ces différences.

Toutefois la Dynamic Financial Analysis répond au besoin de compréhension de liens entre le risque et le capital et aussi de vérification d'adéquation entre le capital et le niveau de l'activité.

L'objectif de ce mémoire est donc de définir des indicateurs et méthodologie permettant d'évaluer la situation actif/passif de la société et partant de là de mesurer l'équilibre actif passif. Par ailleurs, une attention particulière sera également portée à l'allocation stratégique des actifs de la société. Ce qui nous amènera à nous attacher dans le premier chapitre à décrire le contexte général (notamment la présentation du secteur) de cette étude, à la présentation et à la mise en œuvre d'une analyse financière dynamique dans respectivement le deuxième et le troisième chapitre. Le quatrième et dernier chapitre de ce mémoire est consacré à l'application de cette technique à une société d'assurance IARD fictive que nous appellerons « ***Zabra Assurance*** ».

---

[1] Gestion Actif Passif En Assurance Vie, Réglementation, Outils, Méthodes, de F. Le Vallois, P. Palsky, B. Paris et A. Tosseti.

CHAPITRE 1 GENERALITES

I- Présentation de l'organisme d'accueil

Actuariat & Risk Management c'est la définition du sigle ARM, dénomination du premier cabinet opérant dans le domaine du conseil en actuariat au Maroc, dans la région MENA et en Afrique francophone. ARM Consultants dont le capital est détenu à 100% par ses associés est un cabinet totalement indépendant qui a vu le jour en 1996. Il intervient dans plusieurs domaines tels le Risk-Management, l'assurance, la prévoyance sociale etc. et offre ses services à divers organismes tels que :

- Les institutions financières qui souhaitent innover et maitriser leurs risques, pour devenir leaders dans les domaines de l'assurance, de la bancassurance, de la réassurance, de la prévoyance sociale, de la retraite ou du crédit bancaire.
- Les entreprises et les établissements publics, qui souhaitent optimiser leurs performances en matière de gestion de leurs risques, de leurs assurances et de leurs engagements sociaux.
- Les administrations qui cherchent à élaborer des études actuarielles pour améliorer les systèmes existants de couvertures sociales ou mettre en place de nouveaux régimes de prévoyance sociale.

Afin de couvrir l'ensemble de ses spécificités et offrir des services de qualités, ARM Consultants est organisé autour de deux pôles distincts à savoir le pôle Institutionnel qui est dédié aux services aux institutionnels et le pôle *Corporate* qui accompagne les entreprises dans leurs tâches quotidiennes relatives aux conseils dans les domaines relevant des compétences d'ARM Consultant. Ce faisant, il serait intéressant de présenter ses différents services.

SERVICES AUX INSTITUTIONNELS

A l'heure où la concurrence s'exacerbe à un rythme très vite, et du fait de la complexité et de la technicité des exigences de certains domaines comme celui de l'actuariat, certains organismes ont recours à des spécialistes. C'est à ce moment qu'ARM Consultant intervient à travers ses actuaires consultants de haut niveau dotés d'une formation supérieure pluridisciplinaires, en conseillant ses clients institutionnels, Administrations, assureurs et banquiers, sur les domaines stratégiques et techniques nécessitant une expertise actuarielle pointue.

Le cabinet accompagne également les professionnels, Sociétés d'assurance, Réassurance, Mutuelles, Caisse de retraite, Organisme de Prévoyance, Administrations et Investisseurs, dans différentes tâches. En effet, il leur assure des services pour tout ce qui relève de :

- **La création de Produits :** Conception de produits, Etude de marché, Refonte technique et juridique de produits, Tarification (vie et non vie), Profit Testing, AMOA pour la mise en production.
- **Provisionnement :** Revues réglementaire et économique des provisions techniques, Anticipation d'impacts réglementaires.
- **Etudes actuarielles :** de tarification ou d'équilibre de régime.
- **Bilan actuariel :** Elaboration et mise à jour du bilan actuariel.
- **Missions de pilotage stratégique :** Fusions & Acquisitions, Embedded Value, Appraisal value, Contrôle interne, Rapport de solvabilité, Dossier d'agrément pour création de société, Business Plan, ALM.
- **Assistance actuarielle :** en cas de besoin d'actuaire.
- **Réassurance :** Audit et optimisation des programmes de réassurance.
- **Actifs & ALM :** Analyse de portefeuille, Modélisations financières, Allocations d'actifs.
- **AMOA et conduite de changement :** Cahier des spécifications techniques, PMO, AMOA, Recettage.
- **Développement de progiciels** spécifiques aux activités Assurance.
- **Modélisation** des risques de crédit.
- **Cartographie** des risques de crédits.
- **Scoring,** Tarification des risques

SERVICES AUX ENTREPRISES

Au niveau du pôle Corporate, A.R.M CONSULTANTS accompagne ses clients Entreprises privées et Etablissements Publics, aussi bien dans leurs missions de valorisation et de préservation de leur Capital Humain et Patrimoine, que dans la maitrise de leurs risques. Les services offerts sont entre autres les conseils en matière de :

- **IAS 19 :** Identification, évaluation et comptabilisation des engagements sociaux.
- **Avantages sociaux :** Audit de conformité des avantages sociaux, Optimisation des coûts et des couvertures, enquêtes et études de Benchmark.
- **Rémunération et Epargne salariale :** Etudes d'optimisation et conseil.
- **Couvertures et Régimes de prévoyance complémentaire :** Conception et assistance dans la mise en place de plans de retraite complémentaire et de couverture médicale, indemnité de fin de carrière.
- **Risk Management :** Cartographie des risques, Réduction des risques, transfert des risques.
- **Progiciel de Risk-Management :** Mise en place de la gestion des risques au sein de l'Entreprise avec livraison et formation sur le Progiciel de GDR ARM Risk Enterprise.
- **Assurance :** Audit et optimisation des programmes d'assurance du Capital Humain, du Patrimoine, et des Responsabilités Civiles de l'Entreprise.

II- Présentation de l'activité d'assurance non-vie au Maroc

Dans cette section nous présenterons globalement les informations relatives à l'activité d'assurance non-vie ainsi que les normes règlementaires qui régissent cette activité.

1- Le marché d'assurance non-vie au Maroc

Le secteur des assurances, à travers la collecte et l'injection de flux financiers dans les rouages de l'économie, joue un rôle important dans la croissance de l'économie. Ainsi, en 2012, le volume total des primes émises au niveau mondial s'est établit à 4612.51 milliards de dollars et enregistre un taux de progression de 1.02% en valeur nominale. Les primes émises par les assureurs vie ont été de l'ordre 2621 milliards de dollars correspondant ainsi à un taux de progression de 2.3%. Pour leurs parts, les activités non vie ont enregistré un volume total de 1992 milliards de dollars soit un taux de progression de 2.6%.

En Millions de dollars	***Primes émises non vie***	***Part en %***	***Primes émises vie***	***Part en %***
Amérique	870781	43,72%	691372	26,38%
Europe	658732	33,07%	876444	33,44%
Asie	388511	19,51%	957712	36,54%
Afrique	22126	1,11%	50013	1,91%
Océanie	51623	2,59%	45448	1,73%
Monde	***1991650***	***100%***	***2620864***	***100%***

Tableau 1: Primes émises par marché continental (Source : Swiss Ré)

En 2012 le volume des primes émises confondues (vie comme non vie) pour le marché africain s'est établi à 72.13 milliards de dollars contre 69.27 milliards de dollars une année auparavant soit une progression de 3.96%.

Pour sa part, le Maroc a réalisé un montant total de primes émises de près de 26 milliards de dirhams à fin 2012. Du fait de nouveaux défis (libéralisation du secteur, concentration, assurance maladie obligatoire, bancassurance…) qui se présentent à lui, l'avenir du secteur marocain des assurances s'agissant de sa croissance est conditionné par la bonne maîtrise de ces nouvelles tendances. Avec un nombre de 18 compagnies et 1600 agents généraux et coursiers opérant sur le marché, le secteur enregistre un taux de pénétration (primes émises sur PIB) estimé à environ 3.14% (1.05% pour la branche vie et 2.07% pour la non vie) laissant ainsi comprendre que le marché présente toujours de grandes perspectives. Selon le directeur de Wafa Assurance, le marché national de l'assurance enregistre un rythme de croissance de l'ordre de 5 à 6% par an soit un peu plus vite que le reste de l'économie. Leader dans le monde arabe et vice leader sur le continent africain, le Maroc occupe la 47$^{\text{ème}}$ place au niveau mondial. S'agissant de la densité, le marché national enregistre une moyenne de 95.25% dollars. Cependant force est de constater que la répartition entre vie et non vie laisse entrevoir une forte domination de la non vie avec une part avoisinant les 70% (dont 30% auto) à fin 2012. Le tableau suivant est un exemple parfait d'illustration de cette dominance des activités non vie.

	2010	2011	2012	Evolution 2010/2011	Evolution 2011/2012
Capitalisation et Vie	**6659,5**	**7717**	**8839,1**	**15,9%**	**14,5%**
Part	**30,4%**	**32,3%**	**34,0%**	**-**	**-**
Assurances individuelles	4303,2	4626,1	5596,8	7,5%	21,0%
Assurances de groupe	1532	1727,2	2026,9	12,7%	17,4%
Assurances populaires		0,2	0,24		20,0%
Capitalisation	468	967	933,5	106,6%	-3,5%
Contrats à Capital variable	287,7	330,1	218,9	14,7%	-33,7%
Acceptations vie	68,6	66,4	62,8	-3,2%	-5,4%
Assurance Non Vie	**15213**	**16177**	**17189**	**6,3%**	**6,3%**
Part	**69,6%**	**67,7%**	**66,0%**	**-**	**-**
Accidents Corporels	2726,8	2799,6	2941,2	2,7%	5,1%
Accidents du Travail	1894,3	1957,3	2039,5	3,3%	4,2%
Automobile	7075,8	7531,3	8020,9	6,4%	6,5%
Responsabilité Civile Générale	458,2	490,5	477	7,0%	-2,8%
Incendies	1032,6	1062,7	1223,6	2,9%	15,1%
Risques Techniques	304,4	339,5	337,7	11,5%	-0,5%
Transports	706,3	730	657,5	3,4%	-9,9%
Autres Opérations Non Vie	189,8	405,6	525,8	113,7%	29,6%
Assistance-Crédits-Cautions	699,3	763,7	840,6	9,2%	10,1%
Acceptations Non Vie	125,8	96,8	124,9	-23,1%	29,0%
Total	**21873**	**23894**	**26028**	**9,2%**	**8,9%**

Tableau 2 : Répartition du marché d'assurance marocain par branche (Source : DAPS)

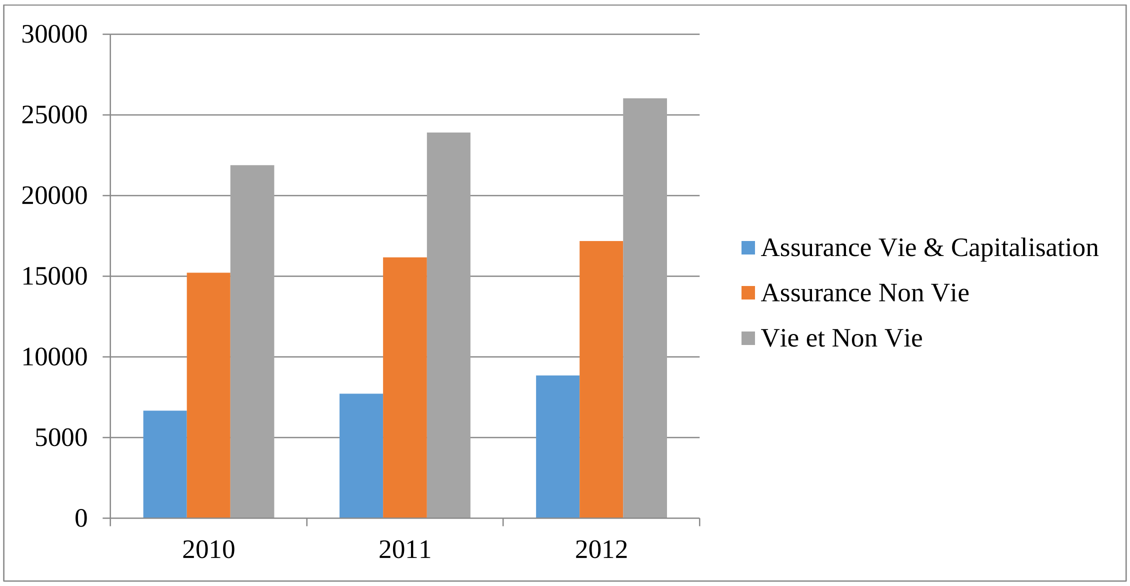


Figure 1 : Part du marché d'assurance par branche d'activité (Source : DAPS)

Comme le laisse entrevoir le tableau et l'histogramme, le chiffre d'affaire total du secteur était de 21 873 millions de Dirhams en 2010 (dont 69.6% issu de la branche non vie). Ce chiffre atteint 26 028 millions de Dirhams en 2012 (66% pour la Non Vie) soit une progression de 19% (13% pour la partie Vie) sur les deux années. Même si la branche Vie et Capitalisation commence à grignoter des parts, il est à noter que la branche Non Vie reste toujours la plus importante et présente également de bonnes perspectives de développement.

Le marché national, reste encore largement sous équipé du fait notamment du nombre de branches obligatoires très limité (Auto et AT).

Sur le marché de la non vie, quatre (04) leaders (Wafa Assurance, RMA Watanya, Axa Assurance et CNIA Saada) de taille presqu'identique s'accaparent un RC similaire compris entre 95% et 99% en moyenne sur la période 2008-2011. Les deux premières sont également deux bancassureurs disposant de plus larges réseaux de distribution sur le marché de l'épargne et de la retraite. Wafa Assurance a enregistré un fort développement marqué sur le marché de la non vie et gagne ainsi quatre (04) points de part de marché entre 2008 et 2011. Les quatre leaders sont suivis par Atlanta/Sanad qui n'ont pas encore opérationnellement fusionné. Le graphique suivant permet de mieux percevoir cette structuration du marché.

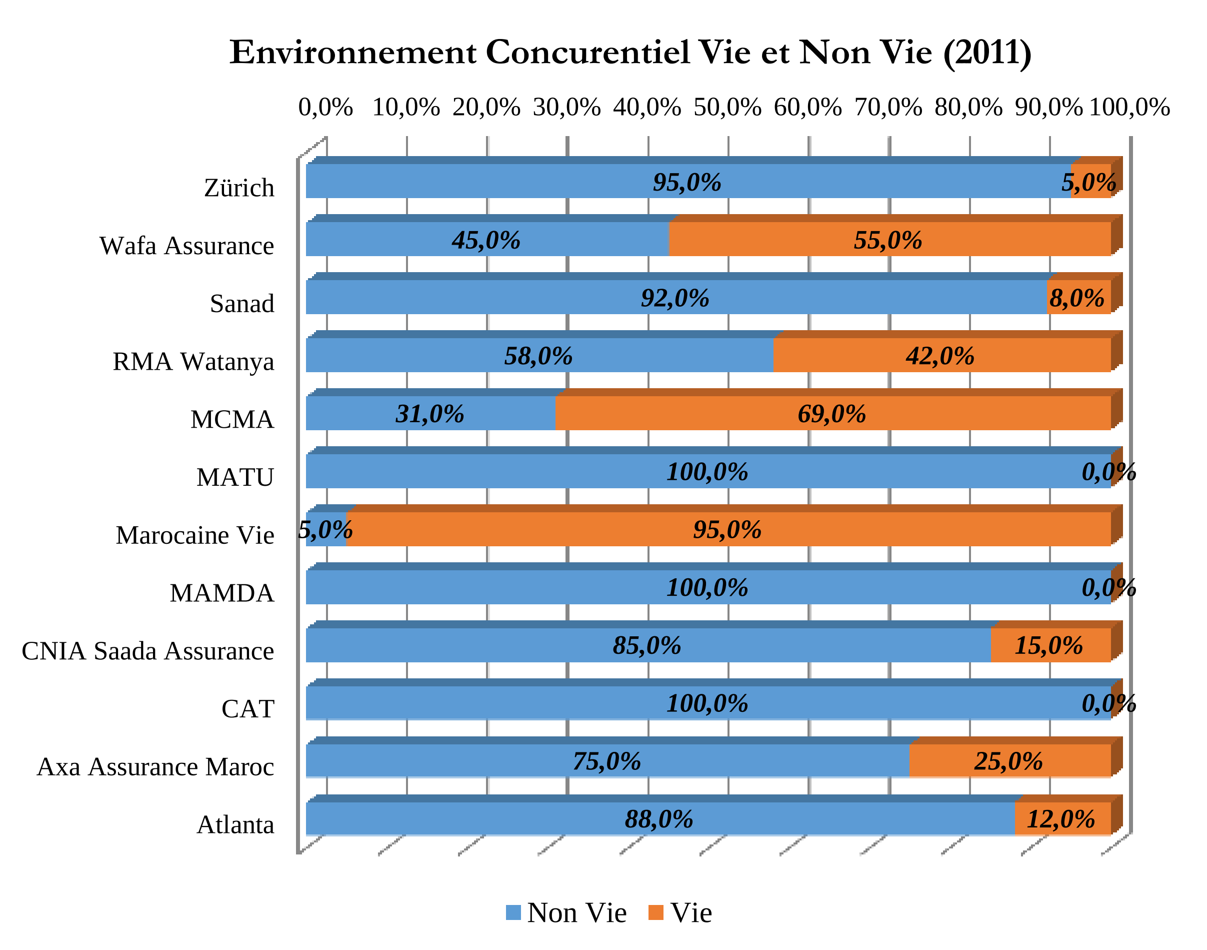


Figure 2 : Activité d'assurances par compagnie (Source : DAPS)

2- Les garanties d'assurance non-vie

L'article 55 de l'arrêté du ministre des finances et des privatisations n° 1548-05 du 6 ramadan 1426 (10 octobre 2005) relatif aux entreprises d'assurances et de réassurance tel qu'il a été modifié et complété présente la classification des opérations d'assurances selon trois branches. Les opérations non-vie (assurance non-vie) constituent l'une de ces branches (outre les opérations vie et capitalisation et les opérations d'acceptation en réassurance). L'activité d'assurance non-vie se résume à trois types d'activité. Il s'agit de :

- Assurance de biens : Le code des assurances la définit comme étant « un contrat d'indemnité ». Cette assurance couvre les biens contre les dommages involontaires causés lors des événements tels que l'incendie, le vol, …
- Assurance de personnes : il s'agit de garantir la personne humaine. Sont couverts en activité d'assurance non-vie, les risques portant atteinte à la personne dans son intégrité physique.
- Assurance de responsabilité : c'est l'assurance qui permet à une personne, involontairement responsable de dommages subis par autrui, de se faire substituer dans son obligation de réparer ces dommages.

Les principales garanties qui concernent l'activité d'assurance non-vie sont ainsi présentées comme suit, et ce, par catégories conformément à la classification adoptée par les autorités de contrôle.

Accidents corporels : Les contrats dits « Accidents corporels » garantissent le remboursement des frais de soins en cas de maladies ou d'accidents, ou le versement d'indemnités en cas d'incapacité de travail ou d'invalidité, ou d'une rente ou d'un capital en cas de décès ou d'infirmité permanente. Les prestations proposées sont en réalité des compléments des régimes obligatoires de la Sécurité Sociale. L'assureur insère la plupart du temps des exclusions de garanties faisant référence aux événements ne constituant pas des accidents ou des événements d'aggravation de risque

Accidents de travail et Maladies Professionnelles : Ce contrat couvre les conséquences pécuniaires de la responsabilité légale de l'employeur en cas d'accidents du travail pouvant atteindre ses préposés au cours de leur activité professionnelle y compris les risques du trajet. Cette assurance est obligatoire pour tout sociétaire.

Véhicules terrestres : Cette catégorie concerne principalement la Responsabilité Civile Automobile, une assurance obligatoire pour toute personne physique ou morale autre que l'Etat voulant faire circuler un véhicule terrestre à moteur dont elle dispose.

Responsabilité Civile générale : Elle rassemble toutes les assurances de responsabilité civile autre que la RC Auto. Il s'agit notamment de la responsabilité civile résultant de l'emploi de véhicules fluviaux et maritimes et de véhicules aériens.

Incendies et éléments naturels : cette catégorie regroupe les assurances contre les dommages causés aux biens mobiliers et bâtiments de l'assuré, résultant d'un incendie ou une explosion, ou d'un phénomène naturel. On définit une assurance pour chaque événement donné. Mais ces assurances sont généralement souscrites conjointement. On distingue ainsi les assurances contre l'incendie, les événements naturels et les pertes pécuniaires.

Assurances des risques techniques : il s'agit des assurances contre les dommages subis par les équipements industriels, matériels ou machines. Les principales garanties sont : bris de machines, tous risques chantiers, tous risques montages, tous risques informatiques.

Transport : c'une l'assurance pour toute personne ou société ayant un intérêt financier concernant des marchandises, des produits manufacturés ou des valeurs transportés et/ou le véhicule de transport, qu'il soit terrestre, maritime ou aérien.

Assistance-Crédit-Caution : cette catégorie regroupe l'assurance-crédit, l'assurance-caution et l'assistance. L'assurance-crédit permet à une entreprise de se prémunir contre le risque de défaillance de paiement des clients débiteurs alors que l'assurance-caution permet aux entreprises émettrices de garanties contractuelles d'avoir une protection sur les engagements qu'elles ont souscrits.

3- Présentation du bilan d’une activité non-vie

A une date donnée, la situation patrimoniale d’une société est représentée par le bilan. Le tableau ci-dessous donne l’architecture du bilan simplifié d’une société d’assurance non-vie et présente les principaux postes du bilan.

<table>
<tr><th>ACTIFS</th><th>PASSIFS</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Immobilisations/Placements
70% à 80%</td><td>Capitaux propres
10% à 20%</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Provisions techniques
(brutes de réassurance)
60% à 80%</td></tr>
<tr><td>Parts des réassureurs dans les provisions techniques
10% à 20%</td></tr>
<tr><td>Créances et autres actifs
10% à 20%</td><td>Dettes et autres passifs
10% à 20%</td></tr>
</table>

Tableau **3** : Bilan simplifié d’une activité non-vie

Les principaux éléments du bilan sont détaillés comme suit :

Les placements : Ils sont constitués des biens immobiliers, d’obligations, d’actions, etc…

Dettes et autres passifs : elles couvrent principalement les opérations les plus courantes avec les services de distribution.

Capitaux propres : Aussi dénommés fonds propres, ils regroupent le capital social, les réserves et le résultat de l’exercice.

Provisions techniques : La constitution des provisions techniques répond à la nécessité pour l’assureur de faire face en tout moment à ses engagements vis-à-vis des assurés et des bénéficiaires de contrat. Elles sont dites techniques du fait que leur évaluation soit régie par des règles techniques. Représentant 70 à 80% du total du passif, les provisions sont des corrections comptables apportées à l’inventaire et destinées à couvrir ou pallier à :

- Une insuffisance des tarifs : provisions pour risques en cours
- Une moins-value sur un élément d’actif : provision pour dépréciation
- Une charge prévisible : provisions pour risque en cours
- Une croissance du risque assuré au cours du temps : provisions pour risques croissants
- Un montant de sinistres survenus et non payés : provisions pour sinistres à payer
- Etc…

4- Les normes règlementaires

La réglementation et la comptabilité de l'assurance sont étroitement liées. Elles sont le fruit d'une évolution continue de lois et règlements applicables aux entreprises en générale et aux compagnies d'assurance en particulier. L'ensemble des dispositifs relatifs à ces lois et règlements sont inscrits dans un livre appelé code des assurances.

Au Maroc, tout comme dans plusieurs pays à travers le monde, le secteur des assurances, est fortement règlementé et soumis à un ensemble de dispositifs de contrôle. L'autorité de tutelle chargée de règlementer les opérations d'assurance est le Ministère de la Finance. Ce dernier, intervient par l'intermédiaire de la Direction des Assurances et de la Prévoyance Sociale (DAPS) qui assure le contrôle de la conformité réglementaire, de protection des droits des assurés et de régulation du secteur. Ainsi dans l'exercice de sa mission, la DAPS met en place un cadre règlementaire qui doit être respecté par tous les assureurs et ce afin de protéger le marché. La protection du marché passe par la mise en place d'un ensemble de dispositifs réglementaires et de contrôle Via :

- L'Office des Changes pour les flux financiers « de » et « vers » l'étranger
- La DAPS pour les contrôles de conformité (Agréments- Homologation des Contrats – Réserves –Solvabilité…)
- La DAPS et la SCR pour les opérations de réassurance (Traités et Réassurance facultative…)

Les opérations d'assurances terrestres sont régies par le code des assurances (loi 17.99 portant code des assurances promulguée par le dahir n°1-02-238 du 25 rejeb 1423 (3octobre 2002)). Dans notre modèle, nous serons amenés à tenir compte d'un certain nombre de contraintes à savoir celles portant sur le niveau de la marge de solvabilité, sur le calcul des provisions techniques, la répartition, l'évaluation comptable des placements et la tarification des primes. Pour ce faire, nous allons appeler ces règles et indiquer pour chacune d'elles le traitement qui en a été fait dans le modèle.

- **Marge de solvabilité**

Selon les dispositions règlementaires internationales, afin d'être solvable, toute entreprise d'assurance se doit de disposer de fonds propres nécessaires à son activité courante. Ces fonds propres correspondent en quelque sorte à une garantie qui vient s'ajouter aux actifs détenus en contrepartie des provisions techniques. La dotation en fonds propres est ainsi appelée marge de solvabilité. Pour ainsi dire, la marge de solvabilité pour une entreprise, correspond à sa richesse libre de tout engagement. L'article 52 du premier chapitre sur les conditions d'exercice des entreprises d'assurance et de réassurance du code des assurances (Maroc) énumère les éléments constitutifs de cette marge de solvabilité. Quant au montant minimal qui doit en être consacré, il est défini par l'article 53 du même chapitre. Il est déterminé, soit par rapport au montant annuel des primes ou cotisations, soit par rapport à la charge moyenne annuelle des sinistres, soit par rapport aux montants de la provision pour sinistres à payer et de la provision pour primes non acquises. Ce montant est égal au plus élevé des résultats obtenus par application des trois méthodes suivantes :

- ***Première méthode*** (calcul par rapport aux primes ou cotisations) :

$$MS = [CA\ Net + Primes\ de\ Réassurance] * 20\% * \alpha$$

Avec :

$CA\ Net =$
$Total\ Primes\ ou\ Cotisations\ émises\ en\ affaires\ directes(Coût\ de\ polices\ compris) -$
$Taxes - Annulations$

et

$\alpha = \frac{Charges\ de\ sinistres\ net\ de\ réassurance\ des\ 3\ derniers\ exercices}{Charges\ de\ sinistres\ brut\ de\ réassurance\ des\ 3\ derniers\ exercices}$ C'est le taux de rétention.

Pour les opérations d'assurances contre les risques résultants d'accidents et maladie de travail et les opérations d'assurances contre les risques de responsabilité civile des véhicules terrestres à moteur, le taux de 20% doit être majoré de 50%.

Par ailleurs le niveau de α doit être au moins égal à 70% pour les opérations précitées et 50% pour les autres opérations.

- ***Deuxième méthode*** (calcul par rapport à la charge de sinistres) :

$$MS = Charges\ totales\ nettes * \frac{1}{3} * 27\% * \alpha$$

Avec comme $Charges\ totales\ nettes = (sinistres\ payés\ au\ cours\ des\ 3\ derniers\ exercices +$
$sinistres\ payés\ au\ titre\ des\ acceptations\ en\ réassurances\ pour\ les\ mêmes\ exercices +$
$PSAP\ constituées\ à\ la\ fin\ du\ dernier\ exercice) -$
$(PSAP\ constituées\ au\ début\ du\ 2ème\ exercice\ précédent\ le\ dernier + Récours\ encaissés)$

Le taux de 27% est majoré de 50% pour les mêmes opérations citées dans la première méthode.

Et α reste le même que déterminé précédemment avec les mêmes limites.

Pour les opérations d'assistance, le montant des sinistres payés entrant dans le calcul du résultat déterminé par application de cette méthode est le coût résultant pour l'entreprise des interventions effectuées en matière d'assistance, y compris les coûts d'assistance directs internes. Pour les opérations de crédit, il est tenu compte, pour le calcul, de la charge moyenne annuelle des sinistres des sept derniers exercices.

- ***Troisième méthode*** (calcul par rapport aux provisions) :

$$MS = [10\% * PPNA + 5\% * PSAP(y\ compris\ acceptation\ en\ réassurance)] * \alpha$$

Le taux appliqué aux PSAP est majoré de 50% pour les opérations d'assurance pour les risques contre les accidents et maladies de travail.

α : idem

Lorsqu'un sinistre exceptionnel pour lequel l'entreprise d'assurances et de réassurance conserve moins de 10% influe d'une manière significative sur la rétention, une autorisation de ne pas tenir compte de ce sinistre dans la détermination du montant minimum de la marge de solvabilité peut être accordée par le ministre des finances à l'entreprise concernée.

Calcul des provisions techniques

En assurance vie comme en assurance non vie, diverses provisions doivent être constituées afin de faire face aux engagements futurs. De ce fait, les assureurs non vie déterminent les provisions techniques suivantes : provisions pour primes non acquises, provisions pour sinistres à payer, provisions pour risques en cours, provisions pour égalisation et provisions pour risques d'exigibilité. Les modalités de constitution et de représentation de ces provisions sont données par l'arrêté du ministre des finances et de la privatisation n° 1548-05 du 6 ramadan 1426 (10 octobre 2005) relatif au contrôle des entreprises d'assurances et de réassurance.

- ***Provision pour primes non acquises (articles 16, 17, 18)*** : elle est destinée à constater pour chacun des contrats à prime payable d'avance, la part des primes émises de l'exercice et des primes restant à émettre la période couvrant la date de l'inventaire et la date de la prochaine échéance de prime ou, à défaut, du terme du contrat. Elle est calculée au *prorata temporis* par branche, par catégorie et par sous-catégories (article 55)
- ***Provision pour risques en cours (article 18)*** : cette provision, exigée pour les entreprises pratiquant des opérations d'assurances de marchandises transportées et de crédit, est destinée à couvrir, pour chacun des contrats à prime payable d'avance, la charge des sinistres et des frais afférents au contrat, pour la période s'écoulant entre la date de l'inventaire et la prochaine échéance de prime ou à défaut le terme du contrat, pour la part de ce coût non couverte par la provision pour primes non acquises. Elle est constituée si le pourcentage obtenu en additionnant, d'une part le rapport des sinistres survenus aux primes acquises des deux derniers exercices et, d'autre part, la moitié du rapport des autres charges d'exploitation aux primes émises au cours de l'exercice inventorié, est supérieur à 100%. Dans ce cas, la provision pour risques en cours est obtenue en appliquant l'écart constaté par rapport à 100% au montant des provisions pour primes non acquises. Toutefois, le rapport des autres charges d'exploitation aux primes émises sera au moins de 10% (article55).
- ***Provision pour sinistres à payer (article 17)*** : c'est la valeur estimative des dépenses pour sinistres non réglés et le montant des dépenses pour sinistres réglés restant à payer à la date de l'inventaire y compris les capitaux constitutifs de rentes non encore mises à la charge de l'entreprise. Elle est calculée pour son montant brut sans tenir compte des recours à exercer comme suit :
    - exercice par exercice
    - dossier par dossier augmentée d'une estimation du coût des sinistres survenus mais non déclarés à la date de l'inventaire. Elle est majorée d'un chargement de

gestion de 5%. Cette estimation s'obtient par application du nombre des sinistres survenus mais non déclarés au coût moyen des sinistres. Le montant ainsi obtenu doit être supérieur au plus élevé de l'évaluation dégagée par les méthodes indiquées suivantes. Dans le cas contraire, ce montant est complété de la différence. Les méthodes utilisées sont les suivantes :

- ***Première méthode (Coût Moyen des sinistres des exercices antérieurs)***: Le coût moyen est obtenu en divisant le coût total des sinistres terminés au cours des cinq dernières années par le nombre des sinistres définitivement réglés ou classés sans suite pendant ce temps. Ce coût moyen est appliqué au nombre total des sinistres survenus (y compris l'estimation de ceux non déclarés à la date de l'inventaire), pour chaque exercice dont la provision résiduelle, calculée dossier par dossier, est supérieure ou égale à 30% de la charge de sinistres. Toutefois, cette méthode n'est applicable que pour les dix derniers exercices au plus. L'estimation du nombre de sinistres survenus et non déclarés à la date de l'inventaire est basée sur les cadences de déclaration observées dans l'entreprise sur une période de cinq exercices au moins précédant l'exercice en cours.
- ***Deuxième méthode (Cadence de Règlement)*** : cette évaluation est basée sur les cadences de règlement observées dans l'entreprise sur une période de dix exercices au moins y compris l'exercice en cours ;
- Pour les autres sinistres : les sinistres sont évalués dossier par dossier. Toutefois, l'utilisation de cette méthode n'est pas obligatoire pour les sinistres survenus au cours des deux derniers exercices. Cette évaluation est augmentée d'une estimation du coût des sinistres survenus mais non déclarés à la date de l'inventaire. L'évaluation obtenue ne doit pas être inférieure à l'évaluation dégagée par référence au coût moyen des sinistres des exercices antérieurs sous peine d'être complétée de la différence.

- ***Provision pour risque d'exigibilité (article 22)*** : La provision pour risque d'exigibilité est constituée par nature de placements, lorsque la valeur globale inscrite au bilan (à leur valeur d'entrée ou valeur d'origine) des placements visés à l'article 40 est supérieure à la valeur globale de ces mêmes placements évalués selon les règles prévues audit article (juste valeur ou valeur de marché). La provision à constituer est égale à la différence constatée entre les deux évaluations. L'évaluation de la juste valeur est faite sur la base de la valeur de réalisation, dans les conditions ci-après :
  - pour les valeurs mobilières cotées, le cours le plus bas au jour de l'inventaire ;
  - pour les actions non cotées, la valeur mathématique de l'action sauf le cas où une autre valeur résulte d'une évaluation effectuée conformément à l'article 42, auquel cas cette valeur est retenue ;
  - pour les actions de sociétés d'investissement à capital variable et les parts de fonds communs de placement, le dernier prix de rachat publié au jour de l'inventaire ;
  - pour les autres valeurs mobilières non cotées, la valeur vénale correspondant au prix qui en serait obtenu dans des conditions normales de marché ;

- pour les immeubles et les parts ou actions des sociétés immobilières non cotées, la valeur estimée comme il est prévu à l'article 39, sauf les cas où une autre valeur résulte d'une expertise effectuée conformément à l'article 42, auxquels cas cette valeur est retenue ;
- pour les prêts hypothécaires, le montant à retenir pour la présente évaluation ne peut être réduit que dans les deux cas ci-après :
  - s'il est reconnu que la valeur de l'immeuble, au moment de la réalisation du prêt, était inférieure aux quatre tiers du montant des sommes prêtées. Dans ce cas, la valeur du prêt à retenir est égale à 75% de la valeur de l'immeuble ;
  - si, à une époque postérieure à la réalisation du prêt, la valeur de l'immeuble est tombée au-dessous du montant de la somme restant à rembourser. Dans ce cas, la valeur du prêt à retenir est égale à la valeur de l'immeuble;

- pour les autres placements, la valeur d'entrée comme il est prévu à l'article 39, sauf les cas où une autre valeur résulte d'un accord entre le ministre chargé des finances et l'entreprise d'assurances, auquel cas, cette valeur est retenue.

- ***Provision pour égalisation*** : dans l'exercice de leurs missions, les compagnies d'assurance en général et particulièrement celles réalisant des opérations non vie, sont souvent confrontées à des chocs comme les catastrophes, les mauvaises années, etc. De ce fait, elles peuvent constituer des provisions en vue d'amortir ces chocs. Ces provisions appelées provision pour égalisation constituent donc une sorte de sécurité venant en complément de la marge de solvabilité. Elles servent donc à faire face aux évolutions des taux de sinistralité dans le temps et comme réserves dans les cas de survenance de chocs. Selon l'art 20 de l'arrêté ministériel relatif au contrôle des sociétés d'assurance et de réassurance, cette provision est constituée à 75% du bénéfice technique net de cessions de la catégorie des risques concernés. Pour chaque catégorie concernée, le bénéfice technique net de cessions, correspond à la différence entre, d'une part, les primes de l'exercice nettes d'annulations, diminuées de la dotation aux provisions (pour risques en cours, pour primes non acquise) et augmentées, éventuellement, des produits techniques d'exploitation et, d'autre part, le montant des charges de sinistres nettes de recours augmenté des charges techniques directement imputables à la catégorie et d'une quote-part des autres charges.

Les placements

L'objectif visé par la réglementation en ce qui concerne les placements c'est la garantie de la couverture des engagements. Un des principes fondateurs du droit prudentiel de l'assurance est le privilège accordé aux assurés et aux bénéficiaires de contrats sur l'actif mobilier et immobilier des entreprises d'assurance. Pour ce faire, il convient donc pour l'entreprise d'assurance d'avoir un montant suffisant d'actif de « bonne qualité » en couverture de ses engagements pour pouvoir honorer ses engagements en cas de liquidation. Dans ce sens, le code marocain des assurances cherchera à imposer aux entreprises d'assurances et de réassurance une dispersion des risques (pour éviter les effets d'une baisse des cours) et à adapter le principe comptable de prudence à l'activité spécifique des compagnies d'assurance.

Règlementation de représentation

Selon les dispositions de l'arrêté du ministre des finances et de la privatisation n°1548-05 du 6 ramadan 1426 (10 octobre 2005) relatif au contrôle des entreprises d'assurances et de réassurance, les limitations (article 33) qu'il convient d'appliquer pour les différentes catégorie de placements sont les suivantes :

- Pour les obligations émises par les banques, leur montant est sans limitation, avec un minimum de 30% des provisions techniques ;
- Pour les immeubles urbains situés au Maroc et les parts et actions de sociétés immobilières y compris les avances en compte courant, leur valeur est limitée 30% des provisions techniques.
- Pour les titres de créances négociables (certificats de dépôts), les obligations et actions cotées à la bourse de valeurs et les actions des sociétés d'investissement à capital variable ou parts de fonds communs de placement, leur valeur est limitée à 50% des provisions techniques ;
- Les prêts en première hypothèque sur des immeubles situés au Maroc, les titres de créances négociables (bons des sociétés de financement et billets de trésorerie), les primes ou cotisations à recevoir, afférentes à des opérations d'assurances non-vie, de deux mois de date au plus, nettes de taxes et de charges d'acquisition ne peuvent dépasser 10% des provisions techniques. L'ensemble des hypothèques inscrites en premier rang sur un même immeuble ne peut excéder 75% de sa valeur estimative.
- Les autres obligations dont l'émission a reçu le visa du Conseil déontologique des valeurs mobilières sont limitées à 5% de la valeur des provisions techniques ;
- Les prêts sur l'Etat, les obligations émises par les fonds de placements collectifs en titrisation, et les autres placements, la limite est de 15% des provisions techniques ;

Les créances nettes sur les cédants au titre des acceptations en réassurance sont admises sans limitation pour la représentation des provisions techniques correspondantes.

NB : « Pour respecter le principe de prudence, les placements représentatifs des engagements doivent être sûrs, liquides et rentables ».

La règle de sécurité voudrait bien que les sociétés d'assurance ne spéculent pas l'argent des assurés. Elles doivent privilégier les actifs émis par des entités solvables et s'assurer de la disponibilité des actifs en cas de liquidation. D'où la liste des placements admis en représentation des engagements réglementés donnée par l'article 27 de l'arrêté ministériel relatif au contrôle des sociétés d'assurances et de réassurances.

La réglementation exige que les actifs admis en représentation des provisions techniques soient liquides et rentables afin de s'assurer que ces placements soient facilement et rapidement réalisables pour leur valeur comptable d'autant plus que les engagements sont à court terme (pour les assureurs non vie).

Règlementation sur l'évaluation

Les règles d'évaluations sont déterminées par l'arrêté ministériel évoqué précédemment en ses articles 38 à 47. En effet, les obligations et les titres de créances négociables sont évalués à leur prix d'achat à la date d'acquisition. Toutefois, lorsque le prix d'achat de ces titres est supérieur à leur prix de remboursement, la différence est amortie sur la durée de vie résiduelle des titres. En revanche si ce prix est inférieur au remboursement, la différence est portée en produits sur la durée de vie résiduelle des titres. Le prix d'achat et le prix de remboursement sont pris hors intérêts courus. Pour ce premier cas, les moins-values ne font l'objet d'une provision pour dépréciation qu'à condition que le débiteur soit dans l'incapacité de respecter ses engagements, soit pour le paiement des intérêts, soit pour le remboursement du principal.

Pour les autres placements, ils sont évalués à leur valeur d'entrée. Pour les valeurs mobilières enregistrant une moins-value d'au moins 25%, une provision pour dépréciation d'une valeur équivalente à la moins-value constatée est constituée ; la moins-value étant obtenue par différence entre la valeur d'entrée et la valeur de marché moyenne des trois derniers mois précédant la date d'inventaire.

Cette règlementation conduit donc à calculer deux valeurs distinctes à savoir la valeur comptable des placements qui sert à déterminer le résultat et la valeur de réalisation des placements.

III- Nécessité de la Gestion Actif-Passif

La bonne évaluation des engagements, la bonne gestion des frais admis au titre de ces engagements et la suffisance des fonds propres sont les priorités d'un assureur IARD. Il est donc nécessaire de suivre de près les actifs et les passifs d'une compagnie d'assurance IARD.

La forte volatilité des taux au cours des années 1980 a rendu les gains générés par l'activité d'intermédiation des banques américaines plus incertains. Ce qui amena les banquiers à s'intéresser à la qualité et la structure des actifs et des passifs, aux divers revenus futurs que peut générer une banque et mettre ces éléments en relation. Ils ont ainsi mis en place des outils, en mettant l’accent sur les risques de taux et de liquidité, qui permettent d’évaluer les flux futurs ainsi que les conséquences des variations de taux sur ces flux. Ceci a donné lieu à des appellations telles que : Gestion des risques, Gestion de bilan, ou encore Gestion Actif-Passif.

Connue par son acronyme ALM (Asset Liability Management), la gestion Actif-Passif consiste à mener des analyses et faire des modélisations afin de mieux connaître et maîtriser l’ensemble des risques auxquels une institution financière s’expose en exerçant ses activités. Il s’agit en effet de mettre en rapport les gains et les risques encourus. Les analyses doivent donc permettre d’adopter une politique de financement et d’allocation qui soit optimale.

Etant également touchée par les fluctuations des données financières, l’activité d’assurance sera dotée d’outils d’analyse actif-passif dans les années 1990 grâce aux chercheurs Anglais et Nord-Américains. De multiples décisions concomitantes généralement corrélées, sont prises dans le cadre d’un pilotage stratégique d’une entreprise. Ces décisions sont influencées par environnement économique et financier changeant. Il donc est important de dresser les conséquences qui peuvent en découler. Dans ce sens, la gestion actif-passif permet d’établir les conséquences probables des décisions ainsi que leur sensibilité suite à des variations de la conjoncture. Ce processus peut être illustré par le schéma suivant :

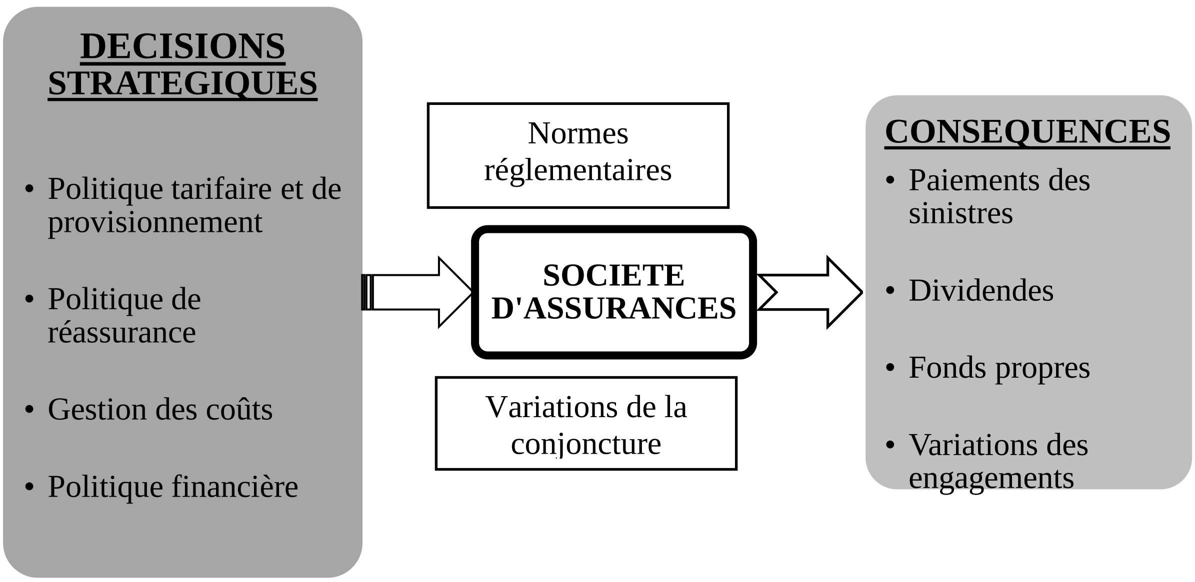


Figure 3 : Scénario de la gestion actif-passif en assurance non-vie

Il faut tout de même rappeler que les caractéristiques du domaine des assurances telles que l’inversion du cycle de production, la constitution des provisions techniques et d’une marge de solvabilité sont les principales raisons qui ont conduit à la mise en place de méthodes de gestion actif-passif en assurance. Mais on peut encore constater une différenciation des méthodes selon les branches : la gestion actif-passif proprement dite en assurance vie et les modèles DFA (Dynamic Financial Analysis) en assurance non-vie. Notre rapport est consacré aux modèles DFA.

IV- Particularité de la Gestion Actif-Passif en assurance non-vie

Les sociétés d'assurances évoluent dans un domaine très risqué. En effet, le principe de l'assurance est de proposer une prestation sous forme financière (une garantie financière) à un individu appelé assuré en cas de la réalisation d'un évènement (risque) pouvant avoir de lourdes conséquences financières. En contrepartie de cette prestation, l'assuré paie une cotisation (la prime) représentant une vision moyenne du total des sinistres pouvant survenir dans la population d'assurés. Cette spécificité de l'activité d'assurance conduit à une inversion du cycle de production par rapport aux entreprises classiques. En effet, la cotisation ou prime est perçue par l'assureur avant la survenance de l'évènement assuré conduisant ainsi à la connaissance du prix de vente (prime) avant celle du prix de revient (charge de sinistre). De ce fait, le bilan de la société d'assurance, du fait que les primes soient encaissées avant que les prestations correspondantes ne soient payées, montre comment les engagements (passif) envers les assurés sont couverts par les placements (actif) et donc comment l'actif est utilisé pour faire face aux engagements pris dans le passif. Il convient également de noter que l'activité d'assurance non vie comprend trois types d'activités. On distingue les assurances de choses et de biens, les assurances de responsabilité ou de dette et les assurances de personnes (incapacité, invalidité, maladie, etc.). Ces activités ne sont pas homogènes dans la mesure où pour certaines, le préjudice provient de l'atteinte aux biens et pour d'autres, c'est l'atteinte à la personne physique qui donne lieu au préjudice. La gestion actif-passif dans une compagnie d'assurance non vie diffère de celle pratiquée dans une compagnie d'assurance vie en ce sens que, dans cette dernière le taux d'intérêt apparait explicitement aussi bien à l'actif qu'au passif. Les modèles développés par les assureurs vie sont donc structurés autour de l'analyse du risque de taux d'autant plus que les engagements pris sont en moyenne plus longs. Pour les assureurs non vie, parce que les engagements pris sont de court terme, le risque de taux n'apparait qu'à l'actif. Pour les engagements non vie à long terme (comme la rente d'invalidité, la garantie décennale en assurance construction), le risque de taux est représenté par des titres de plus court terme puisqu'il y a un risque de réinvestissement rendant nécessaire la gestion du risque de taux.

CHAPITRE 2 PRESENTATION DES MODELES DFA

I- Définition et historique de la DFA

Les méthodes d'analyse actuarielle traditionnelles s'intéressent à un nombre restreint d'aspects du bilan d'une entreprise et traitent les risques individuellement. La DFA est une nouvelle méthodologie qui considère tout l'ensemble des éléments financiers de la compagnie et analyse sa santé bilancielle dans un univers changeant et incertain. Nombreux sont les professionnels du domaine des assurances qui ne sont pas au fait de ces méthodes d'analyse- bien que plusieurs articles et conférences sont consacrés aux modèles DFA- ainsi que le sens de la combinaison des termes *Dynamic, Financial* et *Analysis* ou de l'**Analyse Dynamique Financière**. D'abord « Analyse » nous amène à l'examen de tous les éléments constituant le modèle de même que leurs interactions. En suite « Dynamique » parce que l'on prend en compte l'incertitude liée aux flux futurs, opposition donc faite à statique et déterministe. Enfin « Financière » du fait que les postes d'actifs et de passifs sont intégrés dans les modèles au lieu de ne viser que la partie souscription.

La combinaison de ces termes ainsi définis nous permet de constituer une définition de travail présentée comme suit : L'*Analyse Financière Dynamique* (DFA) est le procédé d'analyse et d'examen de la structure complète du bilan d'une compagnie d'assurance non-vie en prenant en compte non seulement les interactions entre les postes intégrés, mais aussi la nature stochastique des éléments susceptibles d'affecter les résultats.

La DFA est plus qu'un simple modèle. Elle est une démarche et un ensemble de méthodes aussi économiques que mathématiques qui visent à intégrer l'ensemble des facteurs ayant un impact sur le bien-être de la compagnie d'assurance non-vie en vue de disposer des informations sur la distribution d'une variable d'intérêt donnée; la variable d'intérêt pouvant être le résultat, le niveau des fonds propres ou encore la probabilité de ruine.

L'intérêt porté par les assureurs non-vie à la *Dynamic Financial Analysis* n'a pas cessé de grandir au cours de ces dernières années. On pourrait légitimement demander les raisons qui poussent les assureurs à s'intéresser de plus en plus aux modèles DFA. En effet, des méthodes classiques de gestion actif-passif bien connues permettent de traiter les problématiques telles que l'optimisation de l'actif en fonction du passif. Mais ces méthodes présentent beaucoup de lacunes parmi lesquelles on peut citer la seule prise en compte du taux d'intérêt, l'ignorance de l'activité future et la modélisation déterministe du flux du passif. Eventuellement, on peut se passer de ces inconvénients dans le cadre d'une optimisation de premier ordre ou dans les cas où le passif est peu volatil (certains cas en assurance vie). Ceci ne peut être le cas pour une modélisation plus fine, intégrant plusieurs facteurs de risque et prenant en compte la poursuite de l'activité. C'est ainsi que les modèles DFA se sont introduits, permettant de se tourner vers une modélisation plus complexe focalisée sur la globalité des flux financiers tout en abandonnant les approches traditionnelles de gestion actif-passif.

Historiquement, l'Analyse Financière Dynamique est une discipline qui s'applique potentiellement à toute industrie confrontée à des risques que l'on peut traduire en termes financiers. Ainsi, Royal Dutch/Shell fut l'un des premiers acteurs à faire appel à la DFA dans les années 1970 en expérimentant la « *gestion de scénarii* ». La DFA fait son apparition dans le secteur de l'assurance vers la fin des années 1980 grâce aux recherches des groupes de travail anglais et finlandais sur la solvabilité des assureurs.

II- Les approches de la DFA

1- Comparaison avec l'ALM en assurance vie

Dans le cadre de son pilotage technique, une compagnie d'assurance sera amenée à développer un système de gestion pour ses actifs. Une réflexion a été menée en assurance vie et a donné lieu au développement de modèle ALM. En effet, en assurance vie, entre l'encaissement des primes et le décaissement des prestations, on note en moyenne une durée de cinq (05) à dix (10) ans. Du fait donc de l'importance de leur durée et de leur faible variabilité, les dettes du passif des assureurs vie sont déterministes selon l'approche GAP. En revanche, l'approche DFA plus adaptée pour l'assurance non vie et basée sur les modèles stochastiques, cherche à intégrer explicitement l'aléa en dépassant la simple approche moyenne/variance (déterministe) dans la mesure où les cash-flows du passif sont plus volatiles et sont fortement sensibles à l'inflation et aux conditions macroéconomiques. En d'autres propos, les modèles DFA se basent sur une modélisation stochastique des principaux facteurs financiers de la société d'assurance et ce à travers une simulation des éléments de l'actif et de ceux du passif. L'approche de modélisation des risques des modèles DFA est une approche intégrée qui prend en compte l'ensemble des risques et les corrèle scénario par scénario à la différence de l'approche par silos qui ne considère généralement qu'un seul scénario de risques. L'avantage de l'approche intégrée réside dans le faite qu'elle permet d'appréhender les problématiques de toutes les parties prenantes.

2- Objectifs des modèles DFA

Les modèles traditionnels de gestion actif-passif (déterministes) ont été longtemps utilisés dans le domaine de l'assurance vie. L'objectif de ces modèles c'est d'immuniser le bilan contre le risque de taux afin de permettre de piloter efficacement la solvabilité prospective et les fonds propres par l'utilisation de leviers d'actif et de passif. Au niveau de l'activité non vie, on constate chez les décideurs un intérêt particulier de comprendre les liens entre le risque et le capital et l'adéquation entre ce dernier et le niveau d'activité. Les modèles déterministes ne pouvant pas combler ces besoins d'analyses, la DFA devient donc plus que nécessaire pour la modélisation du bilan et du compte de résultat. Se servant de nombreux concepts et méthodes tirés des mathématiques et statistiques, les modèles DFA tentent de mettre en évidences plusieurs éléments tout en prenant en compte les différents intérêts en conflit à savoir les intérêts des actionnaires, ceux des assurés, ceux des commissaires contrôleurs, sans oublier également ceux des inspecteurs du FISC. Les éléments qu'ils cherchent à mettre évidence sont les suivants :

- Allocation stratégique d'actif,
- Allocation de capital,
- Mesure de la performance,
- Stratégies de marché,
- Tarification,
- Création de produits,
- Etc.

La mise au point du modèle DFA nous amènera à nous intéresser de savoir quels sont les principaux bénéficiaires (actionnaire, manager ou assurés) du modèle et quels les principaux objectifs de la société.

Pour ce qui est des limites de ces modèles, elles sont au nombre de deux. En effet, la première limite est commune à toutes les méthodes de gestion actif-passif et réside dans le fait que les méthodes utilisés n'offrent en général aucune prise sur les risques non identifiés à la date d'étude. La seconde, propre à la DFA est que l'étape de modélisation et de simulation qu'elle suppose nécessite de faire nombreux choix de modèles et d'hypothèses qui doivent pouvoir s'appuyer sur des données exhaustives et fiables. Ce qui conduit à des résultats et méthodes très variables.

3- Scénario testing contre simulations stochastiques

Par définition, l'activité de l'assurance consiste à octroyer une garantie sous forme financière contre la survenance d'événements futurs pouvant avoir des conséquences pécuniaires importantes en contrepartie de primes payées par l'assuré. Elle donc est sujet non seulement à des résultats dépendant de la réalisation de l'aléa et donc volatils mais aussi à des pertes de types catastrophiques plus importantes. Domaine très règlementé, toute entreprise est tenue au respect d'un certain niveau de solvabilité sans oublier qu'elle également répondre aux besoins des actionnaires. Comme toute entreprise, l'objectif des compagnies d'assurance est de satisfaire ces derniers et d'augmenter la valeur globale de l'entreprise dans le temps. Pour ce faire, une bonne stratégie d'adéquation actif/passif est plus que nécessaire. Les premières méthodes utilisées à cet effet sont les outils d'analyse des flux de trésorerie. Mais ces outils se sont très vite inadéquats car ne permettant de résoudre qu'une petite partie de problèmes. Pour pallier ces problèmes, il convient traiter la variabilité et faire une projection dynamique des flux financier et faire des simulations pour discriminer des allocations d'actifs possibles. Il existe actuellement deux méthodes permettant d'analyser l'adéquation actif/passif :

- ***Les scénarios testing*** : ils sont utilisés pour vérifier si le modèle bilanciel reflète bien le fonctionnement de la société. Ils utilisent quelques situations potentielles spécifiques. En effet, la variabilité des flux du passif est fortement corrélée à la variation des taux d'intérêt obligataire. Pour ce faire, une projection dynamique des flux financiers futurs tenant compte des éléments du passif (primes futures) et permettant de mesurer l'impact de cette projection sur le rendement financier des actifs s'avère nécessaire. Le scenario testing, longtemps utilisé par les actuaires permettra grâce à des simulations déterministes, d'examiner un éventail de scénarios plus vaste. On remarque par ailleurs que les variations instantanées de taux ont peu d'influence sur le bilan. Par conséquent, les actuaires font des simulations de chocs plus importants (forte augmentation ou forte baisse des taux, krach boursier, etc) afin de contrôler la résistance du bilan à des scénarios économiques adverses. Les prises de décisions basées sur une telle approche ne sont pas forcément sans intérêt ; étant plus simples que les modélisations stochastiques, leur mise en œuvre est plus rapide et moins coûteuse. Elles sont cependant plus dangereuses. En effet, ce procédé projette dans le futur les résultats obtenus à partir d'une sélection de scénarii déterministes. Ainsi, les outputs obtenus pour un des scénarii ne sont valables que pour ce seul et unique scénario et ne sont exploitables que dans la mesure où le scénario choisi est correct.
- ***La Simulation stochastique*** : la simulation stochastique permet de projeter l'évolution de l'actif et du passif période par période en fonction de scénarios déterministes décrivant l'évolution des marchés. En effet, certains facteurs comme les taux d'intérêt, la fréquence, le coût des sinistres, etc., du fait de leur caractère incertain peuvent jouer négativement sur l'adéquation actif/passif et donc sur la solvabilité de l'entreprise. Il est donc nécessaire de faire des simulations sur ces facteurs afin de définir une politique de compromis raisonnable assurant le maintien de la solvabilité de l'entreprise et pérenniser ainsi son activité. Basées sur les distributions associées à des modèles reflétant l'incertitude des éléments de l'actifs et du passif, les valeurs à simuler sont sélectionnées au hasard et utilisées pour calculer un large éventail d'outputs. La distribution complète de ces outputs peut alors être utilisée pour l'analyse. Une fois cette analyse faite, il s'agira de déterminer la proportion des résultats « inacceptables (défavorables)». Si cette proportion est considérée comme trop importante, des modifications dans la position financière de la société doivent être envisagées en vue de réduire cette proportion.

La simulation stochastique se base sur les scénarios déterministes pour faire les projections et donc fournit beaucoup plus d'informations que le scenario testing ; la limite du scenario testing est que les résultats obtenus indiquent seulement si l'assureur est dans une position viable, et si un événement ou une série d'événements déterminés surviennent. En revanche la simulation stochastique au vu de multitudes d'informations fournies, permet au décideur de prendre de mieux gérer l'adéquation actif/passif. Généralement, les modèles DFA sont basés sur des simulations stochastiques. A cet égard, il faut être en mesure d'estimer les lois qui gouvernent les différentes variables modélisées ; cet exercice peut s'avérer assez délicat.

III- Comment construire un modèle DFA

1- La variable temps

Un outil DFA a la particularité de permettre de mener une analyse prospective. Pour cela, la première étape dans la conception d'un modèle DFA est le choix de l'horizon temporel. L'idéal serait de choisir un horizon temporel aussi long que possible pour pouvoir relater les effets à long terme des stratégies adoptées. Cependant, on se retrouve confronté à deux préoccupations majeures dans le choix de l'horizon temporel :

- Pour aboutir à des conclusions intéressantes, il est nécessaire de projeter les exercices sur plusieurs années
- La fiabilité des résultats obtenus implique un choix d'horizon raisonnable (relativement moins long)

En effet, plus l'horizon de temps est long, moins les outputs sont fiables puisque les valeurs simulées deviennent de moins en moins précises. Par exemple, il est donc inutile de vouloir projeter les règles de décision sur 20 ans. De même, pour un horizon court (un horizon de 2ans par exemple), les analyses ne peuvent pas donner des recommandations plus captivantes que celles auxquelles l'on peut aboutir à base de méthodes plus simples. Pour trouver un compromis intérêt-fiabilité, un horizon de projection de 5 à 10 ans semble être raisonnable. Par la suite, on peut envisager des fractionnements mensuel, trimestriel ou semestriel.

2- Fixer les objectifs

Un modèle est une version simplifiée de la réalité puisque tous les risques ne sont pas forcément modélisés. Il convient donc de préciser en premier lieu les finalités du modèle. Un outil DFA idéalement conçu peut fournir les informations non seulement sur les éléments qui mettent la société d'assurance en situation délicate mais aussi sur les lois qui gouvernent la distribution des variables clés. Le modèle doit à la fois aboutir aux objectifs fixés et répondre à la problématique d'optimisation. Pour cela, il est nécessaire d'identifier les facteurs suivants :

- Facteur d'optimisation : dépend principalement du nombre et des spécificités des classes d'actifs considérées.
- Facteur de rentabilité : une mesure de l'enrichissement de la société au cours de la période d'analyse
- Facteur de risque : mesurée par une probabilité de ruine

Une fois ces facteurs définis, le modèle permettra d'associer un niveau rentabilité-risque à toute valeur du paramètre d'optimisation.

3- Choix des variables influentes

L'un des objectifs de la DFA étant de projeter le bilan et les états financiers, il est nécessaire d'identifier les variables à intégrer dans la modélisation et la simulation de la valeur de la compagnie. Il faut prendre en compte les risques qui affectent significativement l'actif, le passif, la souscription et les investissements financiers. Il faut aussi différencier les éléments qui auront une nature stochastique des éléments que l'on supposera déterministes.

Les facteurs les plus importants à prendre en compte en ce qui concerne l'actif sont les taux d'intérêt, le risque de défaut, les mouvements des marchés financiers. Par contre, les risques du passif dépendent des garanties que propose la société d'assurance, et donc propre à chaque assureur ou réassureur.

4- Les simulations

En assurance vie comme en assurance non-vie, il est impossible de se passer des simulations. L'appel aux méthodes de simulations dans les modèles DFA est incontournable. En effet, la modélisation des éléments tels que l'inflation, le taux d'intérêt, les provisions, etc… nécessite un recours aux simulations lorsqu'il n'est pas possible de définir des formules d'évaluation fermées. La mise en œuvre des méthodes de simulations connait un développement rapide dû à l'effet conjugué de la grande capacité de calcul des ordinateurs et le besoin de l'évaluation des niveaux de précision des résultats. Bien qu'une mise place de ces méthodes est fastidieuse, elles permettent de gagner en précision d'autant plus qu'on peut déterminer la distribution d'une variable, son espérance et aussi un intervalle de confiance autour de cette espérance.

Intégrer les techniques de simulations dans les modèles DFA permet donc de prendre en compte les variables non linéaires ainsi que les dépendances entre facteurs et les traiter de manière efficace et rigoureuse.

Une partie de ce document est consacrée aux techniques de simulations, présentant une vue d'ensemble des outils que l'actuaire peut utiliser.

5- Analyse des « Outputs »

La DFA permet de tester plusieurs stratégies. Selon les critères prédéfinis, on peut isoler la stratégie optimale. L'entreprise doit donc fournir un outil de décision pour une analyse rigoureuse des résultats des scénarii testés, pour ensuite aboutir à des conclusions assez intéressantes.

Le but est de trouver un meilleur compromis risque-rentabilité. L'outil le plus utilisé dans ce sens est la frontière efficiente. On définit une mesure du rendement et une mesure du risque en premier lieu. Les mesures associées à chaque stratégie sont ensuite représentées graphiquement comme illustré sur la figure ci-dessous.

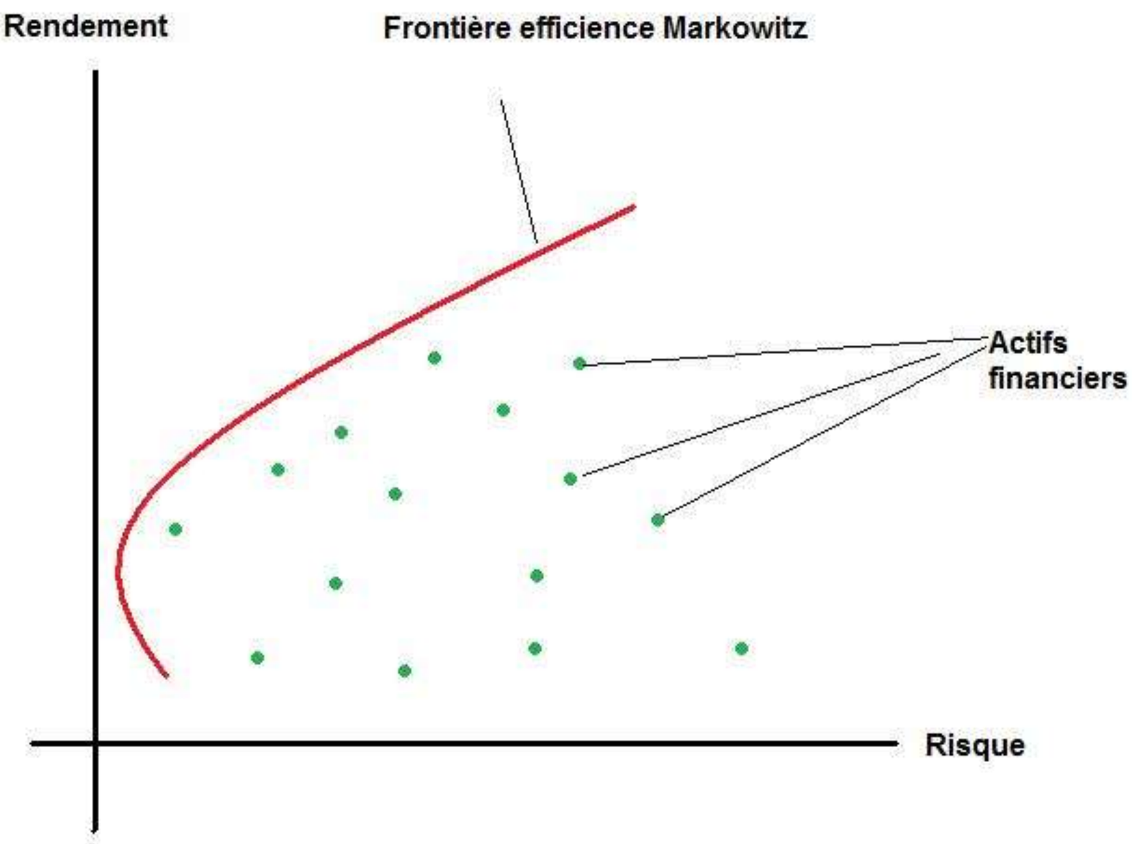


Figure 4 : Frontière efficiente

IV- Récapitulation

L'élaboration d'un modèle DFA suit une logique basée sur trois parties principales. En effet, une première partie est consacrée à l'identification, au choix et à la modélisation des variables en fonction du contexte financier en général et du contexte assurantiel en particulier. A ce niveau un générateur stochastique produit les réalisations des variables aléatoires des principaux facteurs du modèle. La seconde étape concerne la simulation des données propres à la compagnie avec prise en compte des hypothèses relatives aux paramètres du modèle et des hypothèses stratégiques. La dernière partie est consacrée à l'analyse des résultats du modèle. Cette analyse permettra de modifier si besoin est, des hypothèses stratégiques et faire apparaître ainsi la stratégie optimale.

Le schéma suivant récapitule donc l'ensemble des éléments et choix permettant d'aboutir à un modèle DFA.

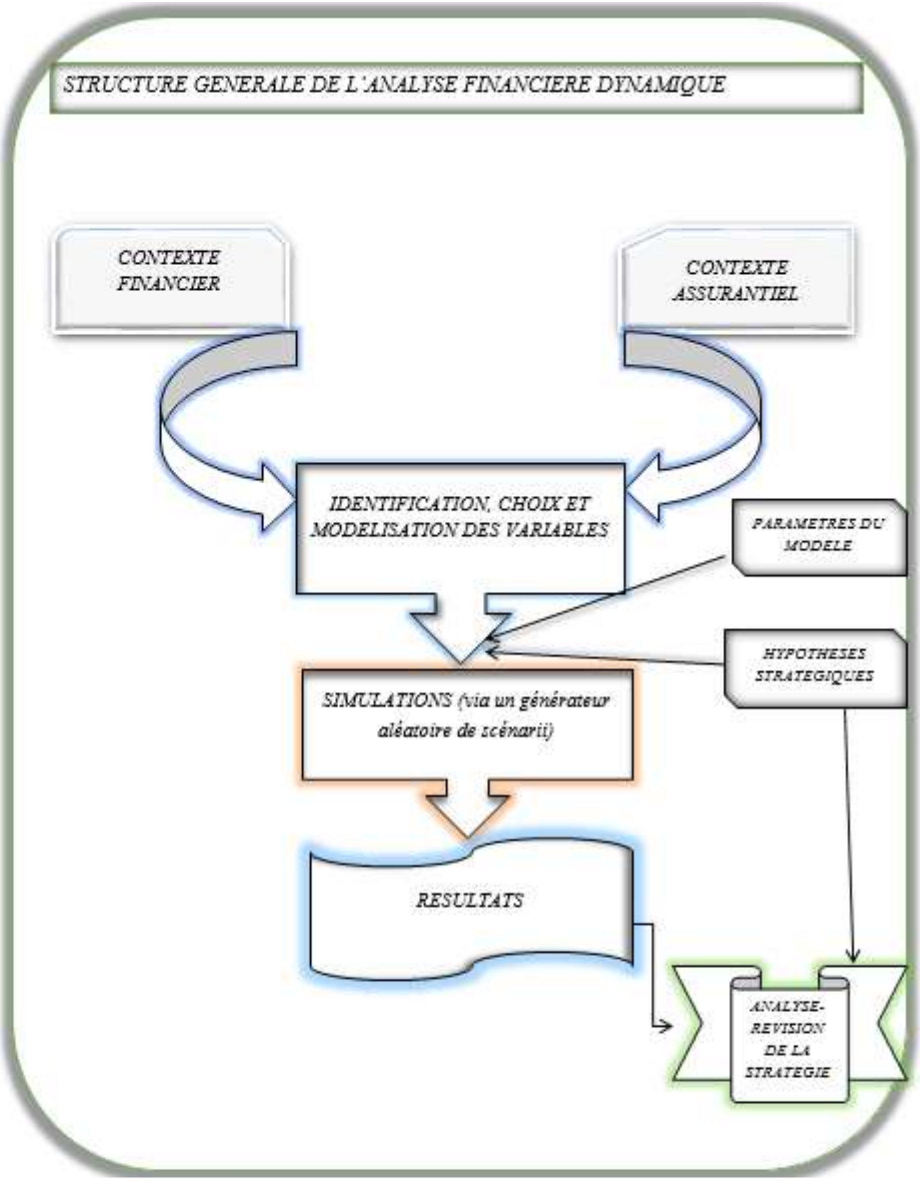


Figure 5 : Processus de mise en place d'un modèle DFA

CHAPITRE 3 MISE AU POINT D'UN MODELE DE GESTION ACTTIF-PASSIF

I- Modélisation d'éléments du passif

La règlementation en matière d'assurance est très stricte et vise à protéger les droits des assurés en priorité. L'objectif est de s'assurer que l'assureur pourra honorer les engagements pris et faire face au risque que les assurés lui cèdent lors de la signature de contrats.

Dans le cas particulier de l'assurance non-vie, et dans notre étude, nous nous intéresserons essentiellement à la Provision pour Sinistres à Payer (PSAP). Ainsi donc le problème de l'assureur est de savoir quel doit être le niveau suffisant de la PSAP pour couvrir les risques endossés lors de la souscription de contrats. Tout particulièrement dans un contexte prudentiel régit par la « *Best Estimate* », c'est-à-dire l'obligation d'une estimation des soldes prudentiels intégrant tous les risques.

Si l'estimation de la charge dossier par dossier est toujours considérée comme la méthode la plus précise, car basée sur l'expérience personnelle de l'actuaire, elle est difficilement applicable dans les compagnies d'assurance au regard du grand nombre de dossiers et de la complexité de certains cas. Les professionnels ont donc recours à une estimation par des méthodes statistiques de synthèse de l'information.

Il est vrai que le code des assurances du Maroc présente dans le détail les modes de calcul des provisions techniques pour les différentes branches. Cependant, la vision déterministe qui caractérise ces méthodes n'est pas adaptée si on veut évaluer la précision des estimations obtenues. D'où l'intérêt porté aux méthodes stochastiques d'estimation. Nous avons identifié trois grandes classes de méthodes stochastiques dans l'estimation de la PSAP que nous présenterons tour à tour. Dans ce rapport, nous présenterons les principales méthodes d'évaluation :

- La méthode de « Chain-Ladder », méthode déterministe de référence et la plus répandue
- Les méthodes stochastiques, qui permettent d'évaluer les incertitudes liées aux estimations

1- <u>Les provisions</u>

a- <u>Notations mathématiques et présentation de la problématique</u>

On suppose que les sinistres d’une branche donnée se déroulent sur $n+1$ années. Dans la suite du travail, on adopte les notations suivantes :

i : année de survenance (ou indice de l’année de référence) en ligne

j : année de développement (ou indice du délai de paiement) en colonne

X_{ij} : croisement de la ligne i et de la colonne j, paiement de sinistres survenus en i après j années de développement

C_{ij} : cumul des paiements de sinistres survenus en i pendant les j premières années de développement

A la date d’inventaire, le triangle de liquidation, comprenant $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ valeurs, se présente comme suit :

Année de survenance	Délai de règlement								
	0	**1**	**...**	**j**	**...**	**n-i**	**...**	**n-1**	**n**
0	X_{00}	X_{01}	...	X_{0j}	...	$X_{0;n-i}$	...	$X_{0;n-1}$	X_{0n}
1	X_{10}	X_{11}	...	X_{1j}	...	$X_{0;n-i}$	...	$X_{1;n-1}$	
...	...	...	...	...	...	...	...		
i	X_{i0}	X_{i1}	...	X_{ij}	...	$X_{i;n-i}$			
...	...	...	...	...	...				
...	...	...	...	...					
...	...	...	...						
n-1	$X_{n-1;0}$	$X_{n-1;1}$							
n	$X_{n;0}$								

Figure 6 : Triangle des incréments

On retrouve le triangle des paiements cumulés avec la formule :

$$C_{ij} = \sum_{k=0}^{j} X_{ik} \ avec \ C_{i0} = X_{i0}$$

Disposant des triangles de paiements, on peut les compléter à base des informations qu’ils contiennent à l’origine. Il s’agit des valeurs de la partie grise du triangle ci-dessus. Les résultats cherchés sont donc :

- Les paiements ultérieurs à la date d’inventaire : C_{ij} et $X_{ij}, i+j>n$
- Le résultat de la réserve pour chaque année de survenance : $R_i = C_{in} - C_{i,n-i}$
- Le montant de la provision totale à constituer : $R = \sum_{i=0}^{n} R_i$

b- La méthode de Chain-Ladder standard

C'est une extension de la méthode de cadence de règlement de sinistres, une méthode déterministe règlementaire que propose le code des assurances marocain. La méthode de Chain-Ladder est basée sur l'utilisation des Link-ratios. Ses hypothèses de base sont :

- ✓ Les années de survenance sont indépendantes entres elles
- ✓ Les années de développement sont les variables qui expliquent le comportement des sinistres à venir

On peut reformuler les hypothèses ci-dessus sous la forme suivante: $\forall\, j = 0, \dots, n-1,$ les ratios $\frac{C_{i,j+1}}{C_{ij}}$ sont indépendants de l'année de survenance i. Ceci voudrait dire que les ratios $\frac{C_{i,j+1}}{C_{ij}}$ sont sensiblement constants sur chaque colonne considérée.

La méthode va donc consister à supposer que les paiements cumulés (C_{ij}) sont liés par de type $AR(1)$ de la forme :

$$C_{i,j+1} = f_j * C_{ij}$$

Le coefficient f_j, appelé facteur de développement est estimé par :

$$\hat{f}_j = \frac{\sum_{i=0}^{n-j-1} C_{i,j+1}}{\sum_{i=0}^{n-j-1} C_{ij}}$$

Après l'estimation de ces paramètres, on peut ensuite procéder à la détermination de la partie inférieure des triangles de paiements :

$$\forall\, i + j > n, \begin{pmatrix} \hat{C}_{ij} = \hat{C}_{i,n-i} * \prod_{k=n-i}^{j-1} \hat{f}_k \\ \hat{R}_i = \hat{C}_{in} - \hat{C}_{i,n-i} \\ \hat{R} = \sum_{i=0}^{n} \hat{R}_i \end{pmatrix}$$

Année de survenance	Délai de règlement									Charge Ult	Réserve
	0	1	...	j	...	n-i	...	n-1	n		
0	C_{00}	C_{01}	...	C_{0j}	...	$C_{0;n-i}$	...	$C_{0;n-1}$	C_{0n}	C_{0n}	R_0
1	C_{10}	C_{11}	...	C_{1j}	...	$C_{0;n-i}$	...	$C_{1;n-1}$		C_{1n}	R_1
...	...	...	...	...	...	...	...			...	...
i	C_{i0}	C_{i1}	...	C_{ij}	...	$C_{i;n-i}$				C_{in}	R_i
...	...	...	...	...	...					...	...
...	...	...	...	...						...	...
...	...	...	...			C_{ij} , $i+j>n$				...	...
n-1	$C_{n-1;0}$	$C_{n-1;1}$								$C_{n-1,n}$	R_{n-1}
n	$C_{n;0}$									C_{nn}	R_n
										Total	R

Figure 7 : Evaluation des réserves

On peut aussi faire appel aux méthodes stochastiques pour l'évaluation des provisions. Contrairement aux méthodes déterministes, les méthodes stochastiques permettent de déterminer les erreurs d'estimation et la distribution des provisions. Dans ces approches, on suppose en effet que les paiements de sinistres (incréments et cumuls) sont des variables aléatoires. Disposant des observations pour $i+j<n$, on peut non seulement mesurer l'incertitude liée aux triangles mais aussi analyser la variabilité des provisions fournies par le modèle et les résidus. Dans les paragraphes à suivre, nous donnera un aperçu des méthodes stochastiques les plus utilisées que sont le modèle Log-normal et les modèles GLM.

c- Le modèle Log-normal

On suppose que X_{ij} représentant le paiement de sinistre correspondant à l'année d'origine i et à l'année de développement j est une variable aléatoire. Les variables aléatoires X_{ij} sont supposées être indépendantes et distribuées selon une loi log-normale de moyenne m_{ij} et de variance σ^2, $X_{ij} \sim \mathcal{LN}(m_{ij}, \sigma^2)$.

On estime les paramètres par le biais d'une régression linéaire sur les log-incréments. Dans ce sens, on retient la formule suivante :

$\ln X_{ij} = m + a_i + b_j + \sigma\varepsilon_{ij}$, ε_{ij} distribué suivant une loi normale centrée réduite

Les paramètres m, a_i et b_j sont estimés par la méthode des moindres carrés ordinaires. A cet effet, le modèle se réécrit sous la forme suivante :

$$Y = \ln X = Z\beta + \varepsilon$$

$$Y = \begin{pmatrix} \ln X_{00} \\ \ln X_{01} \\ \dots \\ \ln X_{0,n-1} \\ \ln X_{10} \\ \dots \\ \ln X_{n0} \end{pmatrix} \text{ de taille } N = \frac{(n+1)(n+2)}{2}, \beta = \begin{pmatrix} m \\ a_0 \\ \dots \\ a_n \\ b_0 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix} \text{ de taille } p = 2n+3$$

Z est la matrice de régression. Elle correspond à la matrice Jacobienne de la transformation : $M: \beta \rightarrow M(\beta)$ définie par :

$$\frac{\partial m_{ij}}{\partial m} = 1$$
$$\frac{\partial m_{ij}}{\partial a_k} = 1 si\ k = i, o\ sinon$$
$$\frac{\partial m_{ij}}{\partial b_l} = 1\ si\ l = j, 0\ sinon$$

La formule classique de la méthode des moindres carrés ordinaires permet d'obtenir :

$$\hat{\beta} = (Z'Z)^{-1}.Z'Y$$

Les paramètres de la loi des log-incréments sont donnés par :

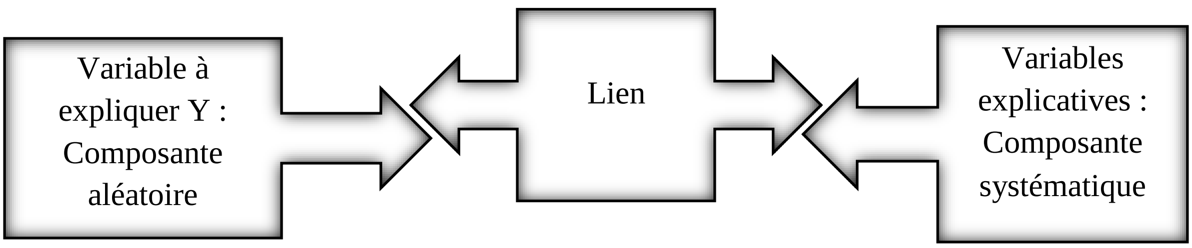
$$\widehat{m}_{ij} = \widehat{m} + \hat{a}_i + \hat{b}_j\ et\ \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{N-p} * \left(Y - Z\hat{\beta}\right)' \left(Y - Z\hat{\beta}\right)$$

L'estimation des incréments est donc donnée par : $\widehat{X}_{ij} = \exp\left(\widehat{m}_{ij} + \frac{\widehat{\sigma}^2}{2}\right)$. Celle de la provision totale est : $R = \sum_{i+j>n} \widehat{X}_{ij}$.

d- Les modèles GLM

Présentation

Les Modèles Linéaires Généralisés, comme l'indique bien le nom, sont en fait une 3généralisation du modèle linéaire normal. Ils ont été introduits en 1972 par J. Nelder et R. Wedderburn mais ils ne commenceront à être véritablement utilisés que dans les années 1990 (pour la modélisation stochastiques des provisions pour sinistres). Ces modèles qui permettent d'unifier divers modèles statistiques tels que la régression linéaire, la régression de logistique et la régression de Poisson, sont formés de trois composantes principales que nous présentons dans le schéma ci-dessous :



Y suit une loi de densité de la forme (famille exponentielle) :

$$f_\theta(\varphi) = \exp\left(\frac{y\theta - b(\theta)}{a(\varphi)} + c(y, \varphi)\right)$$

$E(y)$ dépend de η(X) donnée par la fonction de lien : $g\big(E(y)\big) = g(\mu) =$ η(X) avecg une fonction inversible

On construit un modèle de régression comme suit : η(x) $= \sum_1^P x_j \beta_j$
η peut être vue comme une variable "synthétique", un résumé linéaire des variables explicatives ou une direction dans R^P.

On note dans la fonction de densité que :

y est la variable à expliquer

b : une fonction définie sur R dérivable trois fois. Sa dérivée première est inversible

a : une fonction non nulle définie sur R continue et dérivable

c : une fonction non nulle définie sur R² continue et dérivable

θ : un paramètre de la moyenne appartenant à R

φ : un paramètre de dispersion appartenant à R

Le choix de l'utilisation d'un modèle GLM suppose donc que la variable à expliquer y suive une loi appartenant à la famille exponentielle et que la fonction de lien soit inversible. Ces modèles possèdent deux propriétés majeures à savoir l'espérance et la variance.

$$\begin{cases} E(y) = b'(\theta) \\ Var(y) = b''(\theta).a(\varphi) = b''\left[b'^{-1}\big(E(y)\big)\right].a(\varphi) = v.\big(E(y)\big).a(\varphi) \end{cases}$$

avec v définie comme une fonction de la variance du modèle.

Avec p variables explicatives X_i $(i = 1, \dots, p)$ et une variable expliquée Y, nous associons la fonction de lien définie par :

$g\big(E(Y)\big) = \sum_1^p a_k x_k$ avec g une fonction strictement monotone et dérivable et les x_k les réalisations des variables X_k ; les a_k sont les coefficients de régression.

L'expression du paramètre de la moyenne ou du paramètre canonique peut alors se réécrire comme suit : $\theta_i = b'^{-1}\big(E(Y_i)\big) = b'^{-1}\left(g^{-1}\big(\sum_1^p a_k x_k\big)\right)$.

Pour utiliser un modèle GLM, il faudra estimer d'abord ses paramètres.

Estimation des paramètres

L'estimation des paramètres du modèle GLM se fait par Maximum de Vraisemblance. La vraisemblance étant un produit de fonctions de densité par définition, son maximum est donné par la valeur du paramètre qui annule la fonction tout en gardant la dérivée seconde négative. Le maximum d'une fonction logarithmique correspond au maximum de la fonction elle-même puisque la fonction logarithme est strictement croissante. Ainsi la vraisemblance d'un *n*-échantillon de réalisations de Y peut s'écrire : $L(y_1, y_2, \dots, y_n) = \prod_{i=1}^n exp\left\{\frac{y\theta - b(\theta)}{a(\varphi)} + c(y, a(\varphi)\right\}$

Le logarithme de la vraisemblance est donné par :

$$lnL(y_1, y_2, \dots, y_n) = \sum_1^n \left[\frac{y_i . b'^{-1}\left(g^{-1}(\sum_1^p a_k x_k)\right) - b\left(b'^{-1}\left(g^{-1}(\sum_1^p a_k x_k)\right)\right)}{a(\varphi)} + c\left(y_i, a(\varphi)\right) \right]$$

La déviance du modèle peut être obtenue alors par :

$$D(Y, \mu, \varphi) = 2 * \left(L(Y, \mu^{max}, \varphi) - L(Y, \mu, \varphi)\right)$$

μ^{max} : est un vecteur qui maximise le modèle saturé et le terme $L(Y, \mu^{max}, \varphi)$ est indépendant de β. De ce fait, minimiser la déviance revient alors à maximiser la log-vraisemblance.

La valeur des différents paramètres de certaines lois discrètes et continues dressée dans le tableau ci-dessous, sert d'exemple illustratif :

Loi	**Fonction de densité**	**θ**	$\boldsymbol{a(\varphi)}$	**B(θ)**	**E(Y)**	**Fonction de variance (v)**
Bernoulli B(1,p)	$P(Y = y) = e^{yln\left(\frac{p}{1-p}\right) + \ln(1-p)}$	$ln\left(\frac{p}{1-p}\right)$	1	0	p	$v(p) = p(1-p)$
Poisson P(λ)	$P(Y = y) = e^{(yln\lambda - \lambda) + c(y)}$	$ln\lambda$	1	e^{θ}	λ	$v(\lambda) = \lambda$
Normale N(μ,σ²)	$f(x) = \exp\left[\frac{\left(\mu y - \frac{\mu^2}{2}\right)}{\sigma^2} + c(y, \sigma^2)\right]$	μ	σ^2	$\frac{\theta^2}{2}$	μ	$v(\mu) = 1$
Gamma G[v,v/μ]	$f(x) = \exp\left[\left(-\frac{y}{\mu} - ln\mu\right) . v + c(y, v)\right]$	$-\frac{1}{\mu}$	$\frac{1}{v}$	$\ln\left(-\frac{1}{\theta}\right)$	μ	$v(\mu) = \mu^2$
Inverse Gaussienne IG(μ,σ²)	$f(x) = \exp\left[\left(-\frac{y}{2\mu^2} + \frac{1}{\mu}\right) . \frac{1}{\sigma^2} + c(y, \sigma^2)\right]$	$\frac{-1}{2\mu^2}$	σ^2	$-\sqrt{-2.\theta}$	μ	$v(\mu) = \mu^3$

Validation du modèle

Pour vérifier la qualité d'un modèle linéaire classique, on le décompose en deux parties : l'une explicative et l'autre résiduelle. Cette décomposition permettra de déterminer le coefficient de détermination qui mesure la qualité de l'ajustement du modèle. En revanche, on ne peut transposer cette décomposition dans le modèle GLM. Ce qui rend plus difficile de vérifier la validité du modèle. Pour cela on peut recourir au test du Chi-deux et les déviances.

Application au provisionnement

On suppose une variable aléatoire Y_{ij} représentant le paiement correspondant à l'année d'origine *i* et au délai de règlement *j(* avec les Y_{ij} indépendantes et appartenant à la famille exponentielle). On cherche donc à expliquer la variable aléatoire *Y* en fonction des variables « année d'origine » et « délai de règlement ». C'est l'objet de tout modèle GLM. Mais d'après Renshaw et Verral, il existe une famille particulière de modèles GLM permettant de modéliser de façon stochastique les provisions pour sinistres. La structure de ces GLM est donnée par :

$Y_{ij} \sim f(y, \mu_{ij}, \varphi)$. f est la densité de Y_{ij} et μ_{ij} est l'espérance de Y ;

$\eta_{ij} = c + k_i + b_j \;\; avec\; k_0 = b_0 = 0$ pour éviter un surparamétrage du modèle. C'est la composante systématique du modèle ;

$\eta_{ij} = g(\mu_{ij})$ avec g comme fonction de lien.

Cette dernière fonction qui établit un pont entre la composante aléatoire et la composante systématique prend deux formes :

Lien identité : $\mu_{ij} = E(Y_{ij}) = \eta_{ij} = c + k_i + b_j$

Lien logarithme : $\ln(\mu_{ij}) = \eta_{ij} = c + k_i + b_j \; avec\; \mu_{ij} = e^{\eta_{ij}}$.

En général, on note que les variables aléatoires Y_{ij} suivent fréquemment trois distributions à savoir la distribution lognormal, la distribution Gamma et la distribution Poisson.

Pour la distribution log-normale la fonction de lien est donnée par : $\eta_{ij} = \mu_{ij}$

Dans le cas de la distribution gamma ou poisson du montant des sinistres, la fonction de lien est de type log et on peut estimer l'espérance par : $\hat{\mu}_{ij} = exp(\hat{c} + \hat{k}_i + \hat{b}_j)$.

Les lois les plus utilisées pour les modèles GLM restent les lois Gamma et Poisson. La loi Poisson dans ce cas donne les mêmes résultats que la méthode standard Chain-Ladder.

e- Le Bootstrap

Les méthodes de bootstrap ne nécessitent pas d'autres informations que celles disponibles dans l'échantillon de travail. Ainsi, il n'est pas nécessaire de formuler des hypothèses supplémentaires sur la distribution supposée des paiements pour pouvoir évaluer l'incertitude liée à l'estimation du niveau de réserve. Nous allons dans cette section présenter brièvement la démarche à suivre pour la mise en œuvre d'une méthode bootstrap sur le triangle de paiements incrémentaux.

La première étape de cette démarche consiste en une estimation des facteurs de Chain-Ladder pour le triangle des paiements cumulés. Ce faisant, nous supposons bien sûr que l'estimation du niveau de réserve via le Chain-Ladder constitue un bon benchmark. Une fois tous les facteurs de développement obtenus, nous pouvons obtenir les valeurs espérées, sous Chain-Ladder, des éléments du triangle supérieur (incréments et cumul). Notons que cette démarche va à contrario de ce qui est fait dans la section sur la méthode de Chain-Ladder puisque nous n'estimons pas les éléments du triangle inférieur mais ceux du triangle supérieur.

$$\hat{C}_{ij} = C_{i,n-i} * \left(\prod_{k=1}^{j} \hat{f}_{n-i-k}\right)^{-1} \quad \forall\, j = 0, \dots, n-i-1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \hat{C}_{i,n-i-1} = \dfrac{C_{i,n-i}}{\hat{f}_{n-i-1}} \\ \hat{C}_{ij} = \dfrac{C_{i,j+1}}{\hat{f}_j}, \quad \forall j = 0, \dots, n-i-2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \hat{X}_{ij} = \hat{C}_{i,j+1} - \hat{C}_{ij}$$

Une fois les valeurs espérées définies, on procède à l'estimation des erreurs de prévision par simple différence entre les valeurs estimées et les valeurs réelles. Nous obtenons ainsi une série d'erreurs estimées correspondant à l'échantillon de base. A partir des résidus on calcule les résidus standardisés de Pearson, r.

$$\hat{e}_{ij} = X_{ij} - \hat{X}_{ij} \Rightarrow \hat{r}_{ij} = \frac{\hat{e}_{ij}}{\sqrt{\hat{X}_{ij}}} = \frac{X_{ij} - \hat{X}_{ij}}{\sqrt{\hat{X}_{ij}}}, \forall\, i = 0, \dots, n \; et \; \forall j = 0, \dots, n-i$$

On en déduit une écriture des paiements incrémentaux, X_{ij}, en fonction des résidus de Pearson, $\hat{r}_{ij}$, et des valeurs espérées $\hat{X}_{ij}$.

$$X_{ij} = \hat{X}_{ij} + \hat{r}_{ij} * \sqrt{\hat{X}_{ij}}$$

L'étape suivante est le ré échantillonnage. Nous allons remplir aléatoirement, par un tirage avec remise des valeurs de $\hat{r}_{ij}$, un grand nombre (*N*) de triangles de résidus. Puis, en reconstituant pour chaque triangle ainsi obtenu la valeur de X_{ij}, nous obtiendrons *N* triangles randomisés de paiements incrémentaux qui nous permettront de déduire *N* triangles de paiements cumulés. Enfin, sur chaque triangle de cumul de paiement ainsi obtenus, nous allons appliquer l'algorithme du Chain-Ladder pour remplir le triangle inférieur. En fin de compte, nous obtenons un *N*-échantillon randomisé du niveau total de réserve estimé. Nous pouvons ainsi estimer les quantiles pour cette distribution empirique. Il faut préciser que plus le nombre d'échantillon est grand, plus l'estimation est précise.

2- Les primes

Comme les sinistres, les primes apparaissent dans le compte de résultat. Elles constituent le chiffre d'affaire de la société. Omettre donc de l'aborder serait une grosse erreur dans toute stratégie de gestion actif/passif et en particulier pour la construction d'un modèle DFA. Mais avant de parler de modélisation notons qu'il y a deux types de primes.

Il y a la prime pure qui correspond à l'espérance du montant de sinistres S pour une période d'assurance donnée. Pour modéliser cette prime l'opération d'assurance consiste à substituer une constante c à la variable aléatoire S. Partant de là, on cherche c qui soit le plus proche possible de S en introduisant une distance pénalisant systématiquement $[(c < S) et\ (c > S)]$. On a donc $d(S,c)^2 := E(S-c)^2 \rightarrow d(S-c) = (E(S)-c)^2 + V(S)$

Donc cette distance est minimale pour $c = E(S)$ sous certaines conditions. Cette prime sert de base pour la détermination de la seconde prime puisque insuffisante : la prime commerciale payée effectivement par l'assuré.

La prime commerciale (π) se calcule alors par chargements (de diverses charges : frais de gestion, frais d'administration, etc.) de la prime pure. Les principes de calcul les plus fréquemment utilisés sont les suivants :

- Chargement proportionnel : $\pi(S) = (1 + \eta) * E(S), (\eta > 0)$;
- Chargement par écart-type : $\pi(S) = E(S) + \eta\sigma, (\eta > 0)$; ce type de chargement a l'avantage de mieux prendre en compte la dangerosité du risque.
- Chargement par variance : $\pi(S) = E(S) + \eta V(S), (\eta > 0)$.

Il est à noter que la détermination de la prime doit respecter certaines propriétés à savoir les propriétés d'homogénéité, d'invariance par translation, de convexité et d'additivité ou de sous additivité ou d'additivité forte.

II- Modélisation d'éléments de l'actif

1- Modélisation de l'inflation

En général, les montants de règlement augmentent avec le temps. Ceci peut s'expliquer par divers facteurs tels que la règlementation, la jurisprudence, l'évolution de la médecine, … Mais l'inflation reste le facteur le plus déterminant dans l'évolution des coûts.

L'inflation intervient aussi bien dans l'actif que dans le passif. En effet, les données historiques laissent entrevoir un lien relativement fort entre l'évolution du taux d'intérêt et celle du taux d'inflation. On peut expliquer cette corrélation par le fait que les salaires d'une année donnée sont revalorisés sur la base du taux d'inflation de l'année précédente, créant de nouveau un impact sur le niveau d'inflation de la même année. En ce qui concerne le passif, les règlements de sinistres s'étalent sur des périodes plus ou moins longues selon les branches. Il va donc de soi que le niveau de provisions sera impacté par l'inflation puisque les indemnités en dépendent.

Dans cette section, nous nous intéresserons aux principales dynamiques permettant de modéliser l'inflation. Il s'agit de :

- L'approche de Kaufmann-Gadmer-Klett qui exprime le taux d'inflation linéairement en fonction du taux d'intérêt court
- Le modèle de Wilkie

a- Approche de KAUFMANN, GADMER et KLETT

Dans l'article de référence « *Introduction to dynamic financial analysis* », les auteurs, Kaufmann et al, proposent de modéliser la valeur du taux d'inflation en fonction de celle du taux d'intérêt court :

$$i_t = \alpha + \beta . r_t + \varepsilon_t$$

Où $i_t\ et\ r_t$ désignent respectivement le taux d'inflation et le taux d'intérêt court terme à l'instant t ;

ε_t : Bruit blanc de variance σ^2

$\alpha, \beta\ et\ \sigma$: Paramètres estimables à partir des données historiques

Résolution par la méthode des Moindres Carrés Ordinaires

Pour estimer les paramètres du modèle, on peut utiliser la méthode des moindres carrés ordinaires (MCO). En effet, le modèle peut s'écrire sous la forme :

$$i = X . \lambda + \varepsilon$$

Avec $\lambda = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$, X une matrice de dimension $(n, 2)$, (n correspond au nombre d'observations, $i\ et\ \varepsilon$ sont des vecteurs colonnes de dimension n). La première colonne correspond au terme constant et la deuxième colonne correspond aux valeurs successives de r_t. Il est à noter aussi que la matrice variance covariance de ε est égale à $\sigma^2 I_n$. Le coefficient λ est déterminé en minimisant la variance des résidus :

$$Var(\varepsilon) = \frac{1}{n}\ (i - X\lambda)'(i - X\lambda) = \frac{1}{n}(ii' - 2\lambda' X' + \lambda' X' X\lambda)$$

On en déduit que :

$$\frac{\partial Var(\varepsilon)}{\partial \lambda} = \frac{1}{n}(-2X' i + 2X' X\lambda)$$

Ce résultat nous permet de trouver l'expression usuelle des estimateurs des moindres carrés :

$$\lambda = (X' X)^{-1} X' i$$

Ces estimateurs sont principalement sans biais et à variance minimum. Pour les résidus, on a :

$$\hat{\varepsilon} = i - X\hat{\lambda}\ et\ \hat{\sigma} = \frac{n}{n-2}\ Var(\varepsilon)$$

A l'aide du test de Durbin-Watson, on peut analyser l'indépendance des résidus. Plus précisément, on mène le test :

- H0 : Non corrélation des résidus

- H1 : Les résidus suivent un processus AR(1)[2]

La statistique utilisée dans ces conditions est :

$$d = \frac{\sum_{i=2}^{n}(\hat{\varepsilon}_i - \hat{\varepsilon}_{i-1})}{\sum_{i=1}^{n}\hat{\varepsilon}_i{}^2}$$

Dans le cas où l'hypothèse nulle n'est pas acceptée, on peut considérer que les résidus sont identiquement distribués et que l'estimateur des MCO n'est pas de variance minimale. On procède donc à la résolution en utilisant les moindres carrés généralisés.

Résolution par la méthode des moindres carrés généralisés

On garde les mêmes dimensions des matrices utilisées précédemment et on définit le modèle comme suit :

$$i = X.\lambda + \varepsilon$$

Où ε est de matrice variance covariance Σ définie positive, symétrique et inversible. Par hypothèse, les résidus suivent un processus auto régressif d'ordre 1 ; ceci nous permet d'écrire :

$$Var(\varepsilon) = \rho^2 Var(\varepsilon) + v^2$$

ce qui fournit le résultat suivant :

$$Var(\varepsilon) = \frac{v^2}{1-\rho^2}$$

Dans ces conditions, la matrice variance covariance s'écrit sous la forme suivante :

$$\Sigma = \frac{v^2}{1-\rho^2}\begin{bmatrix} 1 & \rho & \rho^2 & \cdots & \rho^{n-1} \\ \rho & 1 & \rho & \cdots & \rho^{n-2} \\ \rho^2 & \rho & 1 & \cdots & \rho^{n-3} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \rho^{n-1} & \rho^{n-2} & \rho^{n-3} & \ldots & 1 \end{bmatrix} = v^2\Omega$$

Les valeurs des différents éléments de cette matrice doivent être estimées du fait qu'elles sont inconnues. On utilise la méthode des moindres carrés quasi généralisés pour retrouver la valeur de $\hat{\lambda}$.

La matrice $\widehat{\Omega}$ est symétrique, de même que $\widehat{\Omega}^{-1}$. On peut donc la réécrire sous la forme : $\widehat{\Omega}^{-1} = D'D$. On multiplie ensuite $i = X\lambda + \varepsilon$ par D pour avoir $Di = DX\lambda + D\varepsilon$. On vérifie que $E[\varepsilon] = 0$ et $E[(D\varepsilon)(D\varepsilon)'] = I$. En se référant à la méthode des moindres carrés généralisés, on aboutit après simplification au résultat suivant :

[2] On peut l'écrire sous la forme : $\varepsilon_i = \rho\varepsilon_{i-1} + u_i$ où $u_i \sim N(0, v)$

$$\hat{\hat{\lambda}} = (X'\widehat{\Omega}^{-1}X)^{-1}(X'\widehat{\Omega}^{-1}i)$$

Où

$$\widehat{\Omega}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -\rho & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -\rho & 1-\rho^2 & -\rho & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\rho & 1-\rho^2 & -\rho & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & -\rho & 0 \\ 0 & \dots & 0 & -\rho & 1-\rho^2 & -\rho \\ 0 & \dots & 0 & 0 & -\rho & 1 \end{bmatrix}$$

Le caractère explicatif du modèle peut être vérifié avec la statistique R^2 qui fait apparaître la valeur estimée du taux d'inflation $\hat{i}$ et la moyenne de l'inflation $\bar{i}$ observée :

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_t (i_t - \hat{i}_t)^2}{\sum_t (i_t - \bar{i})^2}$$

Plus cette statistique est proche de l'unité, plus l'adéquation des données au modèle est meilleure. Elle est donc égale à l'unité dans le cas où le modèle est parfait.

Pour tester la significativité de la régression, on utilise la statistique $\frac{R^2}{1-R^2} * (n-2)$ qui suit une loi de Fisher de paramètres $(1,\ n-2)$ sous l'hypothèse de nullité du paramètre β. On rejette l'hypothèse de nullité de β si le rapport est trop grand (plus grand qu'un seuil donné).

b- Modèle de WILKIE

Le modèle de Wilkie est présenté ici comme un modèle de l'inflation, mais il s'agit en réalité, d'un modèle général qui inclut toutes les variables macro-économiques et financières. L'un des avantages de ce modèle est la simplicité de sa mise en œuvre. Pour cela, il est devenu très vite populaire et est considéré comme une méthode de référence durant les deux décennies suivantes. La première version du modèle a été appliquée en 1986 par la *Faculty of Actuaries* dans le cadre de la mesure de la solvabilité d'une société d'assurance.

L'inflation est la variable clé dans le modèle de Wilkie. En effet, Wilkie postule que la variable indépendante est l'inflation, dont la détermination se fait en premier lieu pour ensuite donner lieu à la déduction des valeurs des autres variables telles que les dividendes, les taux d'intérêts, la croissance des salaires, … La figure ci-dessous illustre la structure du modèle de Wilkie.

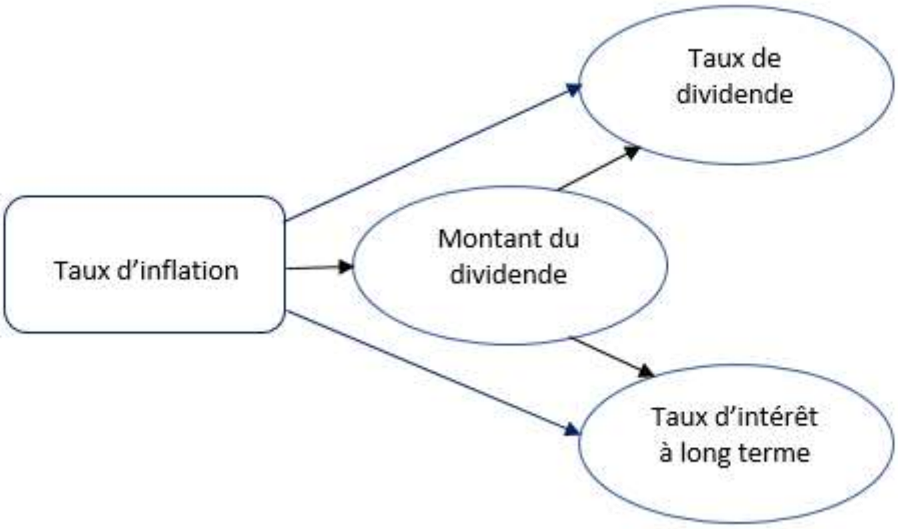


Figure 8 : Lien entre inflation et taux d'intérêt

Le modèle est principalement empirique, et ainsi établi sur des données économiques du Royaume Uni de 1919 à 1982. Wilkie propose une modélisation de l'inflation par un processus autorégressif détaillé ci-après.

Modélisation

Il s'agit d'un modèle auto régressif dont l'évolution est régie par l'équation suivante :

$$i(t) - i_m = a * [i(t-1) - i_m] + \sigma\varepsilon_t$$

Avec les notations suivantes :

$i(t)$: taux d'augmentation de l'indice des prix

i_m: taux d'inflation long terme

a : coefficient de retour à la moyenne

σ : écart-type du bruit

ε : variable aléatoire distribuée selon une loi normale centrée réduite

Le modèle ainsi présenté par Wilkie n'est pas utilisé tel quel. Il opte pour une formulation basée sur le logarithme des indices de prix en remarquant que seules les variations relatives des indices de prix sont importantes et non les variations absolues. En se référant aux données empiriques de plusieurs pays de l'OCDE, il remarque que la variable $\delta(t) = \ln I(t) - \ln I(t-1)$ suit une distribution qui peut être approchée par une loi normale centrée. Le modèle proposé prend finalement la forme suivante :

$$\ln \frac{I(t)}{I(t-1)} = i_m + a * \left[\ln \frac{I(t-1)}{I(t-2)} - i_m\right] + \sigma.\varepsilon_t$$

où $I(t)$ correspond à l'indice des prix à l'année t. On peut réécrire l'équation de la manière suivante :

$$\ln[1 + i(t)] = i_m + a * [\ln[1 + i(t-1)] - i_m] + \sigma\varepsilon_t$$

Exemple de résultats numériques

En se basant sur les données empiriques du Royaume Uni entre 1919 et 1982, Wilkie a obtenu les valeurs numériques suivantes :

$$i_m = 5{,}75\,\% \,;\, a = 0{,}6\,\% \,;\; \sigma = 0{,}05$$

Il faut remarquer que l'inflation peut connaître des évolutions radicalement différentes sur le long terme. Le choix de la période sur laquelle on estime les différents paramètres est important. Il faut aussi faire en sorte que cette période ne connaisse pas de phénomènes économiques exceptionnels. On peut à cet effet se demander si le fait que les estimations de Wilkie sont basées sur une période aussi longue est judicieux.

2- Modélisation des taux d'intérêt

Avec des stratégies de placements correspondants à des prêts de maturités différentes, la modélisation de l'évolution des taux d'intérêt du marché correspondant à ces différentes maturités reste d'une grande importance pour les compagnies d'assurance. Une bonne gestion active du bilan doit être à même d'assurer une visibilité assez claire sur les résultats futurs de la compagnie ainsi que sur les aléas qui les affectent. Ainsi, une gestion actif/passif doit être assimilée également aux techniques relatives à la maîtrise du risque de taux puisque la structure de taux d'intérêt se caractérise par un mouvement aléatoire. Pour ce faire, l'objectif principal de cette section est de reproduire l'évolution de la structure des taux des titres du marché obligataire. Cette structure peut également servir dans l'évaluation du prix d'une obligation ou des produits dérivés. Plusieurs méthodes visant à maîtriser la sensibilité globale du résultat à l'évolution des taux ont été développés. Ces modèles se répartissent dans trois grandes catégories. La première catégorie qui regroupe les modèles de Vasicek (1977) et de Brennan et Schwartz (1979) est basée sur un raisonnement par arbitrage et vise un équilibre partiel. La deuxième famille vise un équilibre général à travers une description globale de l'économie. On y retrouve le célèbre modèle de Cox-Ross-Ingersoll. La dernière catégorie est appelée modèles de déformation. Ces modèles partent de la structure des taux d'intérêt observée et lui font subir des chocs. Les modèles les plus connus de cette catégories sont ceux de Ho et Lee, et de Heath, Jarrow et Morton.

D'autres modèles (empiriques) comme le modèle de Wilkie peuvent être utilisés pour calculer les taux d'intérêt.

L'ensemble de ces méthodes sont construits sur la base d'un certain nombre d'hypothèses. Ces hypothèses sont entre autres :

- Absence de coût de transaction ;
- Titres parfaitement divisibles ;
- Tous les agents disposent de la même information (pas d'asymétrie d'informations) et sont rationnels ;
- Marchés efficients (Absence d'Opportunité d'Arbitrage) ;
- Taux d'emprunts et taux de prêt identiques

Le modèle de taux d'intérêt est construit aussi bien en temps discret qu'en temps continu.

a- Dynamique du taux d'intérêt en temps continu

On pose : r le taux d'intérêt instantané ; dr sa variation à l'instant dt ; $\mu(r,t)$ la moyenne des changements instantanés du taux par unité de temps (ou encore coefficient de dérive) ; $\sigma(r,t)$ l'écart-type des changements instantanés du taux par unité de temps (ou coefficient de diffusion ou encore volatilité) ; dW_t un processus standard de Gauss-Wiener tel que : $E(dW_t) = 0 \; et \; E\left(dW_t{}^2\right) = dt.$

La dynamique de taux en temps continue suppose de se placer à une date t donnée et quel est le processus qui caractérise les mouvements du taux instantané. Sous l'hypothèse qu'à la date t, le taux suit un processus de diffusion caractérisé par une équation de la forme : $dr = \mu(r,t)dt + \sigma(r,t)dW_t.$

C'est la structure de base de la dynamique des taux en temps continu. Plusieurs modèles se sont développés en basant sur cette formule. Le tableau suivant donne la liste de principaux modèles issus de cette formule.

Libellés	**Dynamiques**
Vasicek	$dr = a(b-r)dt + \sigma dz$
Cox, Ingersoll et Ross	$dr = a(b-r)dt + \sigma\sqrt{r}dz$
Dothan	$dr = ardt + \sigma rdz$
Black Derman et Toy	$dr = \theta(t)rdt + \sigma(t)rdz$
Ho et Lee	$dr = \theta(t)dt + \sigma(t)dz$
Hull et White : Vasicek	$dr = (\theta(t) - a(t)r)dt + \sigma(t)dz$
Hull White : CIR étendu	$dr = (\theta(t) - a(t)r)dt + rdz$

Tableau 4 : Les principales dynamiques de taux

i- Equation différentielle du prix zéro-coupon

Classiquement, les équations différentielles servant à déterminer le prix d'un zéro-coupon sont basées dans un premier temps sur le lemme d'Itô et puis dans un second temps sur le théorème de Girsanov.

Ainsi en notant P(t,T) le prix d'un zéro-coupon, et en appliquant le lemme d'Itô, on obtient l'équation suivante :

$$dP = \left[P_t + \mu(r,t)P_r + \frac{1}{2} * \sigma^2(r,t)P_{rr}\right]dt + \sigma(r,t)P_r dW$$

Avec P_t la dérivée partielle première du prix par rapport à t ; P_r la dérivée partielle première du prix par rapport à r P_{rr} la dérivée partielle second du prix par rapport à r.

L'application du théorème de Girsanov donne la transformation du modèle suivante :

$$dP = \left[P_t + \mu(r,t)P_r + \frac{1}{2} * \sigma^2(r,t)P_{rr} - \lambda(r,t)\sigma(r,t)P_r\right]dt + \sigma(r,t)P_r d\widetilde{W}$$

avec $d\widetilde{W} = dW_t + \lambda(r,t)dt$ et λ le prix du marché du risque.

Ainsi pour neutraliser le risque la relation suivante doit être vérifiée. $dP = rPdt$. Pour aboutir à cette relation permettant par ailleurs de déterminer la valeur du taux d'intérêt r modélisé par différentes dynamiques, on pose :

$$P_t + [\mu(r,t) - \lambda(r,t)\sigma(r,T)]P_r + \frac{1}{2} * \sigma^2(r,t)P_{rr} = 0.$$

ii- Modèle de Vasicek

En 1977 Vasicek s'est intéressé à l'effet de retour à la moyenne empiriquement observé sur les courbes de taux. Pour parvenir à ses fins, il fait recours au processus d'Ornstein Uhlenbeck. Le modèle développé par Vasicek est une modélisation du taux d'intérêt instantané à court terme utilisant un processus autorégressif. Il s'écrit sous la forme suivante :

$$dr = a(b - r)dt + \sigma dW_t$$

Avec r: le taux d'intérêt instantané ;

a : la vitesse de retour à la moyenne ; b : moyenne long terme du taux autour de laquelle évolue le taux court instantané ;

σ : la volatilité du taux et W_t : un processus de WIENER.

On suppose le taux du marché λ constant.

Pour résoudre, l'équation, on se propose d'affecter à P(t,T) la forme suivante :

$$P(t,T) = \exp(A(t,T) + B(t,T)r(t)).$$

Par cette formulation, nous obtenons la valeur du zéro-coupon de la manière suivante :

$$P(t,T) = exp\left\{\frac{1}{a} * (1 - e^{-a\tau})[R(\infty) - r(t)] - \tau R(\infty) - \sigma^2/4a^3 * (1 - e^{-a\tau})^2\right\}.$$

On a : $\begin{cases} \tau = T - t,\ \tau > 0 \\ R = b + \frac{\lambda\sigma}{a} - \frac{\sigma^2}{2a^2} \\ \lambda\ indépendant\ de\ r \end{cases}$

La valeur de r est ainsi obtenue par la relation $r(t,T) = -\frac{1}{T-t} lnP(t,T)$.

La valeur du taux r est donc :

$$r(t,T) = R(\infty) + [r(t) - R(\infty)] * \frac{1}{a\tau}(1 - e^{-a\tau}) + \frac{\sigma^2}{4a^3\tau} * (1 - e^{-a\tau})^2.$$

Avec ce modèle on peut obtenir la plupart des formes de courbes de taux :

- Structure ascendante si $r(t) \leq R(\infty) - \frac{\sigma^2}{4a^2}$
- Structure inversée si $r(t) \leq R(\infty) + \frac{\sigma^2}{2a^2}$
- Structure bosselée si $R(\infty) + \frac{\sigma^2}{2a^2} < r(t) < R(\infty) - \frac{\sigma^2}{4a^2}$

Les valeurs à remarquer sont les suivantes :

$$r(T,0) = r(T) + \frac{\sigma^2}{4a^2}\ et\ r(t,\infty) = R(\infty)$$

Cette modélisation a l'avantage d'être simple de compréhension et intuitive du fait de l'interprétation de ses paramètres, dans la mesure où ces derniers sont observables, facilement estimable et fréquemment réajustables. Par ailleurs, elle est simple d'utilisation et d'implémentation d'un point de vue informatique.

En revanche, les différents paramètres de diffusion du modèle sont constants. Tout se passe comme si ce n'était que le taux d'intérêt instantané qui était à l'origine de la déformation des courbes de taux. Ce qui suppose que les taux soient parfaitement corrélés. En outre, le modèle peut donner une courbe de taux en forme de « creux » (c'est-à-dire décroissante sur le court terme et croissante sur le long terme). Par ailleurs, puisque la modélisation suit un processus gaussien, des valeurs négatives peuvent être obtenue avec une probabilité non nulle. Ce qui conduit à une contradiction de l'hypothèse d'absence d'opportunité d'arbitrage.

Pour remédier à cette contradiction un autre modèle a été proposé : c'est le modèle de Cox-Ingersoll-Ross.

iii- Modèle de Cox-Ingersoll-Ross

Ce modèle, établi en 985, conserve toujours la propriété de retour à la moyenne. En revanche, il introduit un processus en racine carrée interdisant à tout taux initialement positif de prendre des valeurs négatives par la suite. Ce nouveau modèle, plus utilisé dans la pratique que le précédent, peut être écrit :

$$dr = a(b - r)dt + \sigma\sqrt{r}dW_t$$

Pour obtenir la valeur du zéro-coupon, on a recours à la formule suivante :

$$P(r,t,T) = A(t,T)\exp(-B(t,T)r(t))$$

Avec : $$\begin{cases} t<T \\ A(t,T)=\left[\frac{2\gamma e^{(\gamma+a+\lambda)\frac{T-t}{2}}}{(\gamma+a+\lambda)(e^{\gamma(T-t)}-1)+2\gamma}\right]^{\frac{2ab}{\sigma^2}} \\ B(t,T)=\frac{2(e^{\gamma(T-t)}-1)}{(\gamma+a+\lambda)(e^{\gamma(T-t)}-1)+2\gamma} \\ \gamma=\sqrt{(a+\lambda)^2+2\sigma^2} \\ \lambda(r,t) = \frac{\lambda}{\sigma}\sqrt{r} \end{cases}$$

Ainsi la structure par terme des taux sera obtenue par la relation :

$$R(r,t,T) = -\frac{1}{T-t}lnP(r,t,T) \rightarrow R(r,t,T) = \frac{B(t,T)r(t)-lnA(t,T)}{T-t}$$

Les formes de courbes de taux obtenues par ce modèle sont les suivantes :

- Forme ascendante si $r(t) \leq R(r,t,\infty)$
- Forme inversée si $r(t) \geq \frac{ab}{a+\lambda}$
- Structure bosselée si $R(r,t,\infty) \leq r(t) \leq \frac{ab}{a+\lambda}$

Comme pour le modèle de Vasicek, ce modèle est simple d'utilisation et intuitive du fait de l'interprétation de ses paramètres. Il permet également de prendre en compte l'effet de retour à la moyenne empiriquement constatée sur les taux d'intérêt. Contrairement au modèle de Vasicek, ce modèle n'a pas le caractère gaussien et donc les taux ne peuvent devenir négatifs. On peut constater par ailleurs, que la variance du processus croît avec r.

Le modèle présente plusieurs inconvénients, qu'il est intéressant de préciser. En effet, les différents paramètres de diffusion sont constants. En plus on ne peut obtenir toutes les formes de courbe.

iv- Modèle de Heath, Jarrow et Morton

Le modèle HJM, développé en 1990, repose sur une modélisation de la structure à terme de taux d'intérêt du point de vue de la théorie d'arbitrage. Il englobe toute une série de taux de taux « *forward* » et prend en considération les insuffisances relevées dans les structures de taux des modèles précédents. Le modèle propose plus un cadre de travail qu'une structure dynamique spécifique. Il ne repose plus sur la diffusion du taux instantané mais sur la diffusion de l'ensemble des taux instantanés « *forward* ». C'est un modèle plus général puisqu'il y a équivalence entre la connaissance des taux instantané « *forward* » $f(t,t)$ et celle des prix zéro-coupon $r(t)$. Le modèle HJM étant donc général, il regroupe plusieurs modèles. Cependant, nous nous intéressons ici au modèle de Ho et Lee et à celui de Hull et White encore appelé Vasicek généralisé. Les notations que nous allons utiliser dans la suite sont les suivantes :

- $P(t,T)$: prix d'une obligation zéro coupon en t payable en T.
- $f(t,T) = -\frac{\partial}{\partial T} lnP(t,T)$: $le\ taux\ forward\ instantané$; $f(t,T)$étant le taux d'intérêt sans risque contracté au temps t et débutant à T pour une période infinitésimale
- $R(t,T) = -\frac{1}{T-t} lnP(t,T)$: le taux de rendement continu.
- $r(t) = \lim_{T\to t} R(t,T)$: le taux sans risque instantané.
- A travers ces définitions, on obtient les relations suivantes :

$f(t,t) = r(t)$: l'équivalence annoncée précédemment et

$P(t,T) = e^{-\int_t^T f(t,s)ds}$

La dynamique du taux *forward* instantané est donnée par l'équation différentielle stochastique suivante correspondant à l'équation générale d'un modèle HJM :

$df(t,T) = \mu(t,T)dt + \sigma(t,T)dW_t$ avec dW_t comme un processus de Wiener standard sous la probabilité historique P.

En intégrant l'équation précédente, on obtient :

$f(t,T) = f(0,T) + \int_0^t \mu(s,T)ds + \int_0^t \sigma(s,T)dW_s$ avec $f(0,T) = f^*(0,T)$ où $f^*(0,T)$ représente le taux forward instantané observable sur le marché.

Les modèles qui se basent sur cette équation font donc référence à une structure de taux initiale tout en utilisant des paramètres dépendants du temps et de la maturité. En supposant l'absence d'opportunité d'arbitrage, on suppose que la prime de risque du marché est indépendante de la maturité T : $\lambda(t,T)=\lambda(t)$. Par ailleurs, cette hypothèse impose également une condition qui doit relier le drift et le terme de diffusion. Cette condition est donnée par : $\mu(t,T) = \sigma(t,T)\int_t^T \sigma(t,s)ds$ cette équivalence est obtenue en éliminant la prime de risque de marché du fait de sa complexité d'estimation à partir des titres du marché obligataire.

Ainsi nous obtenons la dynamique du taux *forward* instantané écrit dans l'univers risque neutre est donné définie comme suit : $df(t,T) = \mu(t,T)dt + \sigma(t,T)d\widetilde{W_t}$.

Pour obtenir la valeur d'une obligation sans risque de défaut, plusieurs étapes doivent être suivies.

- On observe sur le marché la courbe des taux forward instantanés $f^*(0,T)$
- On choisit un processus de volatilité$\sigma(t,T)$.
- On déduit la valeur de $\mu(t,T)$ à partir de la relation la reliant à la volatilité.

- On détermine le taux forward instantané dans l'univers risque neutre
$$\begin{cases} f(t,T) = f(0,T) + \int_0^t \mu(s,T)ds + \int_0^t \sigma(s,T)dW_s \\ f(0,T) = f^*(0,T) \end{cases}$$
- On retrouve le taux court terme en utilisant la relation suivante :
$$r(t) = f(t,t) = f(0,t) + \int_0^t \mu(s,t)ds + \int_0^t \sigma(s,t)dW_s$$
- Pour finir, on détermine le prix d'une obligation zéro-coupon n'ayant pas de risque de défaut par l'expression suivante :

$$P(t,T) = \exp\left\{-(\int_t^T f(0,u)du + \int_0^t \int_t^T \mu(s,u)duds + \int_0^t (\int_t^T \sigma(s,u)du)d\widetilde{W}(s))\right\}$$

L'avantage de cette classe de modèles (HJM) est le fait qu'elle introduit comme paramètre de départ la courbe des taux forward instantanés au temps 0. Par ailleurs, les modèles issus de cette classe sont compatibles avec la courbe de taux du marché.

v- Le modèle de Ho et Lee

Considéré comme étant le plus connu des modèles HJM, le modèle de Ho et Lee a pour hypothèse de base de considérer le coefficient de diffusion comme suit : $\sigma(t,T) = \sigma$.

La relation définie précédemment entre la moyenne et la volatilité conduit à la détermination de la dérive de la façon suivante :

$$\mu(t,T) = \sigma(t,T) \int_t^T \sigma(t,s)ds = \sigma^2(T-t)$$

L'équation différentielle stochastique permettant d'obtenir la valeur du taux forward instantané se présente comme : $df(t,T) = \sigma^2(T-t)dt + \sigma d\widetilde{W}_t$

Cette équation permet d'obtenir après intégration la relation suivante :

$f(t,T) = \sigma^2 t\left(T - \frac{t}{2}\right) + \sigma\widetilde{W}_t$. Et donc le taux court terme se déduit comme suit :

$$r(t) = f(t,t) = f(0,t) + \frac{\sigma^2 t^2}{2} + \sigma\widetilde{W}_t$$

La valeur de l'obligation zéro-coupon est obtenue par la relation :

$$P(t,T) = \exp\left(-\int_t^T \left(f(0,s) + \sigma^2 t\left(s - \frac{t}{2}\right) + \sigma\widetilde{W}(t)\right)ds\right)$$
$$= \frac{P(0,T)}{P(0,t)}\exp\left(-\frac{\sigma^2}{2}Tt(T-t) - \sigma(T-t)\widetilde{W}(t)\right)$$

De ces équations, il convient de noter certaines remarques :

- $f(t,T)$suit une distribution normale d'espérance $f(0,T)+\sigma^2 t\left(T-\frac{t}{2}\right)$ et de variance $\sigma^2 t$.
- De même r suit une loi normale de moyenne $f(0,T)+\frac{\sigma^2 t^2}{2}$ et de variance $\sigma^2 t$.
- $P(t,T)$ suit une distribution log-normale
- Quant aux valeurs $f(0,T)$ et $P(0,T)$, elles sont observées directement sur le marché.

vi- Le modèle de Hull et White (Vasicek Généralisé)

Le modèle de Vasicek généralisé considère le coefficient de diffusion comme étant une fonction exponentielle de la maturité. Ce processus vérifie donc la relation suivante : $\sigma(t,T)=\sigma e^{-k(T-t)}$. Dans cette équation k est une constante nécessairement positive.

Sous la condition d'absence d'opportunité d'arbitrage dans l'univers risque neutre, le processus de dérive se déduit de l'expression de $\sigma(t,T)$:

$$\mu(t,T)=\sigma(t,T)\int_t^T \sigma(t,s)ds=\frac{\sigma^2}{k}(\,e^{-k(T-t)}-e^{-2k(T-t)})$$

Partant de là, on retrouve l'EDS de ce modèle pour le taux *forward* instantané :

$df(t,T)=\frac{\sigma^2}{k}\left(e^{-k(T-t)}-e^{-2k(T-t)}\right)dt+\sigma e^{-k(T-t)}d\widetilde{W}_t$. Ce qui donne après intégration l'équation suivante :

$$f(t,T)=f(t,T)=\frac{\sigma^2}{2k}\left((1-e^{-k(T-t)})^2+\frac{\sigma^2}{2k}(1-e^{-kT})^2\right)+\sigma\int_0^t e^{-k(t-s)}d\widetilde{W}_s$$

Ainsi on obtient le prix de l'obligation zéro-coupon par l'équation suivante :

$$P(t,T)=\frac{P(0,T)}{P(0,t)}\exp\left(-\frac{K^2(t,T)}{2}L(t)+K(t,T)\big(f(0,t)-r(t)\big)\right)$$ avec :

$K(t,T)=\frac{1-e^{-k(T-t)}}{k}$ et $L(t)=\int_0^t \sigma^2 e^{-2k(T-s)}ds$

Comme pour le modèle de Ho et Lee, les fonctions $f(t,T)\ et\ r(t)$ suivent une distribution normale avec des espérances respectivement

$f(0,T)-\frac{\sigma^2}{2k}\left((1-e^{-k(T-t)})^2+\frac{\sigma^2}{2k}(1-e^{-kT})^2\right)$ et $f(t0,t)+(+(1-e^{-kT})^2)$ et de même variance respective $\sigma^2\int_0^t e^{-2k(T-s)}ds$

Pour la distribution de la valeur obligation zéro-coupon, elle est log-normale, les valeurs $f(0,T)\ et\ P(0,T)$ étant observées sur le marché.

Les modèles de Ho et Lee et de Hull et White présentent l'avantage d'être compatibles avec la courbe des taux du marché dans la mesure où toutes les formes de courbes peuvent être obtenues. Par ailleurs, le modèle de Hull et White, en faisant dépendre la volatilité de la maturité, fait diminuer cette volatilité au fur et à mesure que la maturité diminue. En revanche, ces deux modèles gardent leur caractère gaussien. Ce qui fait que les taux peuvent prendre des valeurs négatives avec une probabilité non nulle. Dès lors, il convient de se tourner vers d'autres modèles appartenant à cette famille (HJM) mais n'ayant pas ce caractère. On recourt alors au modèle Cox-Ingersoll-Ross augmenté qui est représenté par l'équation stochastique différentielle suivante :

$$dr_t = (\theta(t) - \alpha(t)r_t) + \sigma(t)\sqrt{r_t}dW_t$$

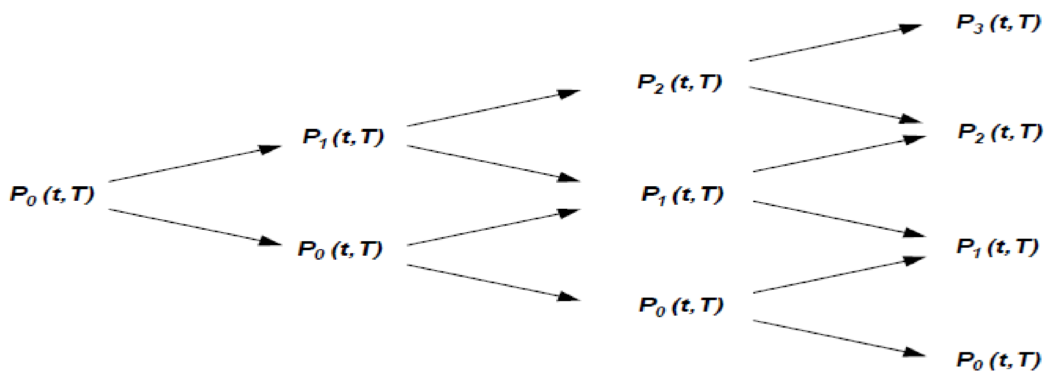
Mais le plus grand problème avec ce modèle c'est qu'il est très difficile à coder et à paramétrer à cause du caractère temporel de ses paramètres. En outre, il dépend de la courbe des taux instantanés *forward* qui est difficilement observable sur le marché.

b- Dynamique du taux d'intérêt en temps discret

La modélisation du taux d'intérêt en temps continu implique d'établir autant de trajectoires que d'états du monde. Le nombre d'états du monde est donc maîtrisé. Cependant, pour la modélisation en temps discret, ce nombre est représenté par des nœuds sur des treillis. Plusieurs modèles permettent de modéliser les taux d'intérêt en temps discret.

i- Le modèle de Ho et Lee

Apparu dans les années 1986, le modèle développé par Ho et Lee, se base sur des hypothèses plus ou moins cohérentes avec le comportement du marché obligataire en ce sens qu'il prend en comptes les phénomènes discrets. Un autre avantage du modèle est sa simplicité dans sa mise en œuvre. En effet, considérons $P_i(t,T)$ comme le prix d'une obligation zéro-coupon ayant pour maturité $T-t$. L'indice i représente le nombre de mouvements à la hausse. On peut construire alors un treillis binomial montrant l'évolution à la hausse ou à la baisse du prix du zéro-coupon. Cette logique peut être matérialisée par ce treillis à trois mouvements :



La fonction de perturbation permettant d'obtenir le prix de l'obligation suivant l'évolution dans le treillis est définie par :

$P_{i+1}(t,T) = \frac{P_i(t-1,T)}{P_i(t-1,t)} * h(t,T-t)$ s'il s'agit d'une augmentation ;

$P_{i+1}(t,T) = \frac{P_i(t-1,T)}{P_i(t-1,t)} * h^*(t,T-t)$ si c'est une baisse ;

avec $h^*(0) = 1$ et $h(0) = 1$

Il convient de préciser que l'évolution à la hausse puis à la baisse et l'évolution à la baisse puis à la hausse ne génère pas une courbe de taux différente. La courbe des taux est donc indépendante du chemin suivi. On dit ici que Up Down =Down Up et

$h^*(t,T-t+1)h(T-t)h(1) = h(t,T-t+1)h^*(T-t)h^*(1)$.

Pour que le marché soit sans arbitrage, on convient de créer un portefeuille avec deux zéro-coupons d'échéances différentes (T et δ). Le nombre de zéro-coupons venant à échéance δ est choisi de sorte à avoir une même valeur pour le portefeuille quel que soit l'état du monde (hausse ou baisse). La condition d'absence d'opportunité d'arbitrage est alors comme suit :

$$\pi = \frac{1-h^*(T-t)}{h(T-t)-h^*(T-t)} = \frac{1-h^*(\delta-t)}{h(\delta-t)-h^*(\delta-t)} \; avec \; \delta > \mathrm{t}$$

On aboutit alors à la condition finale suivante : $\pi h(T-t) + (1-\pi)h^*(T-t) = 1$.

Après avoir déterminé la condition d'absence d'opportunité d'arbitrage, nous déterminons à présent les fonctions de perturbation comme suit :

- $h(T-t) = \frac{1}{\pi+(1-\pi)\varphi^{T-t}}$, avec $\varphi = \frac{h^*(1)}{h(1)}$
- $h^*(T-t) = \frac{\varphi^{T-t}}{\pi+(1-\pi)\varphi^{T-t}}$

Partant donc de ces fonctions de perturbation nous obtenons de manière récursive le prix du zéro-coupon à l'état i et à la date t par la relation suivante :

$$P_i(t,T) = \frac{\big(P(0,t+T) * h(T+t-1) * h(T+t-2) * \dots * h(T)\big)\varphi^{T(t-i)}}{(P_0(0,t) * h(t-1) * h(t-2) * h(t-1) * h(t-2) ** \dots * h(1))}$$

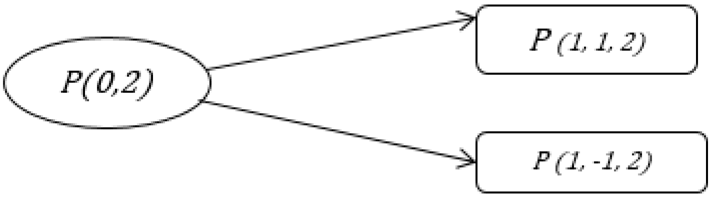
Il est à noter la construction de modèle n'exclut pas le fait d'avoir des taux négatifs. Par ailleurs, l'hypothèse d'indépendance du chemin suivi n'est pas toujours respectée en pratique. Ces insuffisances donneront suite à l'émergence d'autres modèles parmi lesquels nous pouvons citer le modèle de Black, Derman et Toy et celui de Hull et White.

ii- Modèle de Black, Derman et Toy

Développé par Fisher BLACK et Emanuel DERMAN dans les années 1980 pour une utilisation en interne par Goldman Sachs, ce modèle de taux court a été publié dans les années 1990 dans le Financial Analysts Journal. Le modèle suppose que la structure du taux court est modélisée comme la présente dynamique :

- $\Delta lnr(t) = \mu(r,t)\Delta t + \sigma(t)\Delta W$ avec μ une fonction de r et de t et σ la volatilité conditionnelle du logarithme du taux court et dont la structure est définie par la dynamique des taux des zéro-coupon. Prenons y(t,s) comme le taux en t venant à échéance en s. Sa dynamique est donnée par :
- $\Delta lny = f(r,t) + \sigma_y(t,s)\Delta w$

L'évolution du taux peut être modélisée suivant un branchage binomial sous l'hypothèse d'identité de la probabilité de hausse et de celle de baisse. Partant de là, on se pose comme objectif de déterminer la valeur P(0,2). Pour ce faire, on considère l'évolution suivante :



On peut alors déterminer cette valeur comme suit : $P(0,2) = \frac{P(1,1,2)+P(1,-1,2)}{2} * \frac{1}{1+r(0).\Delta t}$

Avec $P(1,1,2) = \frac{1}{1+r(1,1).\Delta t}$ et $P(1,-1,2) = \frac{1}{1+r(1,-1).\Delta t}$.

Il est également possible de déterminer la valeur du risque (volatilité) : $\sigma_y(0,2) = \frac{1}{2}\ln\frac{r(1,1)}{r(1,-1)}$

iii- Modèle de Hull et white

Ce modèle est également un modèle de taux court. Se référant à ce modèle, le taux court est modélisé par l'équation suivante :

$\Delta r = (\theta(t) - ar)\Delta t + \sigma\Delta w$

Avec :

Δr : désignant l'augmentation du taux entre t et t+Δt ;

θ : une fonction positive de t

a: la vitesse de retour à la moyenne et doit être positif ;

σ : représente la volatilité

w : une fonction aléatoire associé au mouvement brownien.

A la différence du modèle précédent, l'évolution du taux s'opère suivant une branche trinomiale avec une probabilité associée à la réalisation de l'état de chaque branche :

Valeur initiale → *Branche haute P_u*

Valeur initiale → *Branche milieu P_m*

Valeur initiale → *Branche basse P_d*

P_u, P_m, P_d représente respectivement les probabilités de passer à la branche haute, milieu et basse.

Pour déterminer les valeurs définitives, Hull et White élaborent un algorithme à deux étapes principales. En effet, ils préconisent en premier lieu de construire un arbre compatible avec la structure des taux puis en second lieu de déterminer la fonction de θ en basant sur la structure initiale des taux.

Sous l'hypothèse d'indépendance du chemin suivi, on peut choisir un pas de temps respectant la condition suivante : $\Delta r = \sigma\sqrt{3.\Delta t}$.

- Dans la première étape (étape de construction d l'arbre), on suppose que $(t) = 0 \ \ et\ r(0) = 0$. On obtient donc l'arbre suivant sous des probabilités de changement des états :

$$(i,j) \xrightarrow{P_u} (i+1, j+1)$$
$$(i,j) \xrightarrow{P_m} (i+1, j)$$
$$(i,j) \xrightarrow{P_d} (i+1, j-1)$$

La dynamique permettant de déterminer la valeur du zéro –coupon est alors la suivante :

$$\begin{cases} E\left(\frac{r+dt}{r(t)} = j.\Delta r\right) = -ar(t).\Delta t = -aj.\Delta r.\Delta t \\ Var\left(\frac{r(t+dt)}{r(t)} = j.\Delta r\right) = \sigma^2.\Delta t \end{cases}$$

On peut également s'intéresser au branchage ; ce qui permet d'aboutir aux relations suivantes :

$$\begin{cases} E\left(\frac{r+dt}{r(t)} = j.\Delta r\right) = (P_u - P_d).\Delta r \\ Var\left(\frac{r(t+dt)}{r(t)} = j.\Delta r\right) = (P_u + P_d)(\Delta r)^2 - a^2.j^2(\Delta t)^2(\Delta r)^2 \end{cases}$$

Ces deux équations nous permettent de poser le système d'équation suivant :

$$\begin{cases} P_u - P_d = -a.j.\Delta t \\ P_u + P_d = \frac{1}{3} + j^2.(-a\Delta t)^2 \end{cases}$$

Les tentatives de résolution de ce système d'équation, nous donne les différentes probabilités de branchage pour chaque type de branchage donné (Haut, Intermédiaire, Bas). A titre d'exemple, pour le branchage intermédiaire, nous obtenons les probabilités suivantes :

$P_u = \frac{1}{6} + \frac{(-j.a.\Delta t)^2 + j(-a\Delta t)}{2}$; $P_m = \frac{2}{3} - (-j.a.\Delta t)^2$; $P_d = \frac{1}{6} + \frac{(-j.a.\Delta t)^2 - j(-a\Delta t)}{2}$

- Dans la seconde étape, on considère la structure de taux initiale et à partir de l'arbre construit, on ajoute au taux de la date i la valeur α_i avec $\alpha_0 = r(0)$.

L'un des points les plus importants dans cette étape est l'ajout de l'actif d'Arrow-Debreu. En effet, Arrow et Debreu se sont intéressés à l'équilibre général des prix qui peut exister dans un marché concurrentiel. L'actif d'Arrow-Debreu en question prend la valeur 1 au niveau du nœud (i,j) et 0 dans les autres cas. Cet actif est noté $Q(i,j)$. Ce qui nous permet d'aboutir à la valeur suivante :

$$P(0,\Delta t) = (P_u + P_m + P_d).e^{-r(0).\Delta t} = Q(0,0)e^{-r(0).\Delta t} \text{et} \begin{cases} Q(1,1) = P_u.e^{-r(0).\Delta t} \\ Q(1,0) = P_m.e^{-r(0).\Delta t} \\ Q(1,-1) = P_d.e^{-r(0).\Delta t} \end{cases}$$

En introduisant les α_i au pas de temps, on obtient l'équation suivante :

$P(0,2\Delta t) = \left(P_u.e^{-(\alpha_1+\Delta r).\Delta t} + P_d.e^{-\alpha_1.\Delta t} + P_m.e^{-(\alpha_1-\Delta r).\Delta t}\right).e^{-r(0).\Delta t}$

On a alors : $P(0,2\Delta t) = Q(1,1).e^{-(\alpha_1+\Delta r).\Delta t} + Q(1,0).e^{-\alpha_1.\Delta t} + Q(1,-1).e^{-(\alpha_1-\Delta r).\Delta t}$.

La valeur de α_1 peut se déduire aisément de ces relations et on peut également déterminer l'actif $Q(2,j)$ avec ($j\ dans\ \{-2,-1,0,1,2\}$) et calculer la valeur de $P(0,3\Delta t)$. On déduit aussi la valeur de α_2 … et ainsi de suite.

Les valeurs successives des $\alpha_i$sont obtenues par la formule générale suivante :

$$P(0,(i+1)\Delta t) = \sum_{j=-n(i)}^{n(i)} Q(i,j)e^{-(\alpha_1+j.\Delta r).\Delta t}$$

D'où : $\alpha_i = \frac{ln\left[\sum_{j=-n(i)}^{n(i)} Q(i,j)e^{-j.\Delta r.\Delta t}\right] - \ln[P(0,(i+1)\Delta t)]}{\Delta t}$

On détermine les prix des actifs Arrow-Debreu par :

$Q(i,j) = \sum_k (Q(i-1,k).p(k,j).e^{-(\alpha_{i-1}+k.\Delta r).\Delta t}$. Les $p(k,j)$ correspondent à la probabilité de passer du nœud $(i-1,k)$ au nœud(i,j)

3- Modélisation des actions

Aujourd'hui, plusieurs modèles sont proposés pour la modélisation du cours d'une action. Mais le modèle de Black & Scholes reste le modèle de référence du fait qu'il est simple, et facile à calibrer et à estimer, considérant que la trajectoire des rendements des prix des actifs décrit un mouvement brownien.

Historiquement, l'idée de modéliser l'évolution des cours par un processus remonte aux travaux du Français Louis BACHELIER (1900) qui utilise le phénomène de mouvement brownien pour modéliser les mouvements de prix d'une option. En 1973, un modèle basé sur les hypothèses telles que la continuité des trajectoires, la constance de la volatilité et la log-normalité des rendements, est proposé par BLACK et SCHOLES. Les hypothèses du modèle sont assez restrictives et sont contredites par les observations empiriques. On remarque en effet qu'en réalité, les queues de distribution des rendements sont plus épaisses que celles d'une loi log-normale. Et ceci peut être expliqué par certains éléments que le modèle ne prend pas en compte :

- Le cours d'une action n'est pas forcément continu : il peut présenter des discontinuités
- La volatilité n'est pas constante en réalité

Pour mieux rendre compte de la réalité du marché, plusieurs autres modèles ont été développés :

- Les modèles à sauts qui permettent de tenir compte d'éventuelles discontinuités des cours et présentent une queue de distribution plus lourde que celle du modèle de Black et Scholes. C'est le cas par exemple du modèle de MERTON (1976) ou du modèle de KOU (2002) qui décrivent l'arrivée des sauts par le processus de Poisson, ou encore le modèle de BELLAMY (1999) qui introduit les processus mixtes brownien-Poisson.
- Les modèles à volatilité stochastique tels que le modèle de HULL et WHITE (1987) pour modéliser les variations de la volatilité

Malgré ses nombreuses limites, le modèle de Black et Scholes reste le modèle le plus étudié et le plus utilisé.

Dans cette section, nous présenterons non seulement le modèle de référence de Black et Scholes mais aussi le modèle à sauts de Merton.

a- Modèle de Black et Scholes

Ce modèle est basé sur la résolution d'une équation différentielle stochastique (EDS), en supposant que le cours d'une action suit un mouvement brownien géométrique. Il est le plus utilisé dans la modélisation et l'évaluation des prix d'actions ou d'options.

Pour tout instant $t > 0$, l'équation EDS s'écrit comme suit :

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dB_t$$

Où S_t est le prix de l'action à la date t,

μ(la dérive) et σ(la volatilité) sont des constantes,

B_t est un mouvement brownien géométrique (ou processus de Wiener généralisé)

Rappel : *Lemme d'ITÔ*

Enoncé : Soit un processus dit d'Itô X_t, processus stochastique vérifiant :

$$dX_t = \mu_t dt + \sigma_t dB_t$$

Ou la forme d'intégrale :

$$X_t = X_0 + \int_0^t \mu_s ds + \int_0^t \sigma_s dB_s$$

Si $f(X_t, t)$ est une fonction de classe $C^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \mathbb{R})$, alors la formule d'Itô s'écrit comme suit :

$$\boxed{df(X_t, t) = \frac{\partial f}{\partial t}(X_t, t)dt + \frac{\partial f}{\partial x}(X_t, t)dX_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(X_t, t)\sigma_t^2 dt}$$

Dans le cas du modèle de Black-Scholes, on a :

$$\forall t > 0, \mu_t = \mu S_t \ et \ \sigma_t = \sigma S_t$$

S_t est bien un processus d'Itô. On pose $X_t = S_t$ et $f(X_t, t) = \ln X_t$ puis on applique la formule d'Itô. On a à priori :

$$\frac{\partial f}{\partial t}(X_t, t) = \frac{\partial(\ln X_t)}{\partial t} = 0, \frac{\partial f}{\partial x}(X_t, t) = \frac{\partial(\ln X_t)}{\partial x} = \frac{1}{X_t} \ et \ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(X_t, t) = \frac{\partial^2(\ln X_t)}{\partial x^2} = -\frac{1}{X_t^2}$$

En agrégeant ces résultats, on obtient après simplification :

$$d(\ln S_t) = \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)dt + \sigma dB_t$$

On intègre pour ainsi obtenir le résultat suivant :

$$\boxed{\boldsymbol{S_t = S_0 \exp\left[\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma B_t\right]}}$$

Le cours d'une action suit une loi log-normale de moyenne $\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)$ et de variance $\sigma^2 t$ puisque le processus de Wiener B_t suit une loi normale $\mathcal{N}(0, \sqrt{t})$.

b- Modèle de Merton

Comme mentionné plus haut, le modèle de Black et Scholes présente un certain nombre d'inconvénients. Notamment le fait que le modèle ne tient pas compte des sauts éventuels des cours et le fait qu'il ne présente pas une queue de distribution assez épaisse pour bien interpréter la réalité. Plusieurs modèles sont ainsi proposés pour remédier à cela. Le modèle de Merton est l'un de ces modèles. Il consiste en fait en l'introduction de saut dans la solution de Black et Scholes à base d'un processus de Poisson. La solution s'écrit alors :

$$\boldsymbol{S_t = S_0 \exp\left[\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma B_t + \sum_{k=1}^{N_t} U_k\right]}$$

N : processus de Poisson de paramètre λ

U : suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées selon une loi normale $\mathcal{N}(0,\Omega)$.

$N, U\ et\ B$ sont mutuellement indépendants

Dans ce modèle en effet, la hausse et la baisse du cours de l'action ont une même probabilité de réalisation et une même intensité. Le processus de Poisson permet de modéliser le nombre de sauts des cours, et les discontinuités sont modélisées par des lois normales $\mathcal{N}(0,\Omega)$.

On remarque très vite qu'il y a un plus grand nombre de paramètres dans le modèle de Merton, par comparaison au modèle de Black & Scholes. En plus des paramètres $\mu\ et\ \sigma$, on a les paramètres $\lambda\ et\ \Omega$. Cependant il est simple de faire la para métrisation du modèle du fait le modèle est une somme de lois normales indépendantes. L'estimation des paramètres peut se faire par la méthode des moments ou la méthode du maximum de vraisemblance. En effet, le rendement du cours selon ce modèle est $R_t = \ln\left(\frac{S_t}{S_{t-1}}\right) = \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) + B_1 + \sum_{k=1}^{N_1} U_k$. On montre ensuite que sa fonction de densité s'écrit :

$$f(x) = \frac{\exp(-\lambda)}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{\lambda^n}{n!\sqrt{\sigma^2 + n\Omega^2}} \exp\left(-\frac{\left(x - \mu + \frac{\sigma}{2}\right)^2}{2(\sigma^2 + n\Omega^2)}\right)\right]$$

On déduit les moments centrés comme suit :

- Les moments centrés d'ordre impair sont nuls puisque le modèle est symétrique
- Les moments centrés d'ordre pair s'écrivent :

$$E\left[\left(R - E(R)\right)^{2k}\right] = \frac{(2k)!}{2^k k!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n \exp(-\lambda)}{n!} (\sigma^2 + n\Omega^2)^k$$

Il suffit donc de disposer de trois moments centrés en plus de la moyenne (l'espérance) pour estimer les différents paramètres. On a le système suivant :

$$\begin{cases} \bar{R} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} R_t = \mu - \frac{\sigma^2}{2} \\ \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}(R_t - \bar{R})^2 = \sigma^2 + \lambda\Omega^2 \\ \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}(R_t - \bar{R})^4 = 3e^{-\lambda}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda^n}{n!}(\sigma^2 + n\Omega^2)^2 \\ \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}(R_t - \bar{R})^6 = 15e^{-\lambda}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda^n}{n!}(\sigma^2 + n\Omega^2)^3 \end{cases}$$

T désigne le nombre d'observations

4- Modélisation de l'immobilier

L'immobilier est une catégorie d'investissement des compagnies d'assurances, outre les actions et les obligations. Pour modéliser ce type de placement, deux modélisations peuvent être retenus :

- Le modèle de Black & Scholes comme précédemment avec les actions
- La dynamique : $P_t = (1 + \lambda)P_{t-1} + \sigma\varepsilon_t$

Dans le cas de la dynamique proposée ci-dessus, on a les notations suivantes :

P_t : prix de l'actif immobilier à la date t

λ : taux de croissance du marché immobilier

σ : volatilité du marché immobilier

ε_t : bruit blanc gaussien

Les paramètres composant la dynamique sont fortement liés à l'entreprise cible. Leur estimation varie donc de société en société. Pour ce faire, les paramètres doivent être estimés à base des données historiques de la société d'assurances concernée par l'étude.

5- Corrélations entre les actifs

L'intérêt de cette section est la prise en compte des dépendances entre les différents actifs. Cette problématique peut être traitée en faisant appel aux copules. Mais dans notre étude, le traitement se fera dans un cadre linéaire. On utilisera ainsi la décomposition de Cholesky.

Rappel : Théorème

Soit A une matrice symétrique définie positive. Alors il existe une matrice L triangulaire inférieure telle que : $A = L.L'$ *(avec L' la matrice transposée de L).*

On peut imposer que les éléments de la diagonale de L soient tous positifs. Dans ce cas, la factorisation correspondante est unique.

Algorithme :

On note $A = [a_{i,j}]_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,n}}$. On cherche à trouver la matrice

$$L = \begin{bmatrix} l_{11} & & & \\ l_{21} & l_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & l_{nn} \end{bmatrix}$$

Vérifiant $A = L.L'$

$$A = L.L' \rightarrow a_{ij} = \sum_{k=1}^{n} l_{ik}.l_{kj}\,, \forall\ 1 \leq i,j \leq n$$

Comme A est symétrique et L est triangulaire inférieure, on aboutit au système d'équations suivant :

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{i} l_{ik}.l_{jk}\,, \forall\ 1 \leq i \leq j \leq n$$

Pour $i = 1$, on peut déterminer la première colonne de la matrice L :

$$\begin{cases} a_{11} = l_{11}.l_{11} \rightarrow l_{11} = \sqrt{a_{11}} \\ a_{1j} = l_{11}.l_{j1} \rightarrow l_{j1} = \dfrac{a_{1j}}{\sqrt{a_{11}}}\ pour\ 2 \leq j \leq n \end{cases}$$

La détermination des autres colonnes de la matrice se fait par récurrence. On détermine la i^ecolonne à partir des $(i-1)$ premières colonnes.

$$\begin{cases} a_{ii} = l_{i1}.l_{i1} + \cdots + l_{ii}.l_{ii} \rightarrow l_{ii} = \sqrt{a_{ij} - \displaystyle\sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}^2} \\ a_{ij} = l_{i1}.l_{j1} + \cdots + l_{ii}.l_{ji} \rightarrow l_{ji} = \dfrac{a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}.l_{jk}}{l_{ii}} \end{cases}$$

<u>Application à un portefeuille</u> :

A partir de la matrice de corrélation entre les différents actifs, on détermine la matrice de variance-covariance donnée par :

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} & \sigma_{14} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} & \sigma_{24} \\ \sigma_{13} & \sigma_{32} & \sigma_{33} & \sigma_{34} \\ \sigma_{14} & \sigma_{24} & \sigma_{34} & \sigma_{44} \end{bmatrix}$$

On note $\mu' = (\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4)$ la moyenne du vecteur gaussien représentant les actifs.

La matrice variance-covariance Σ est symétrique et définie positive. D'après le théorème présenté précédemment, il existe une matrice $\mathrm{L} = \left(l_{ij}\right)_{1\leq i,j\leq 4}$ triangulaire inférieure telle que : $\Sigma = \mathrm{L}.\mathrm{L}'$

Soit $\varepsilon' = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4)$ un vecteur distribué selon une loi normale centrée réduite. Alors le vecteur $\mathrm{X} = \mathrm{L}.\varepsilon + \mu$, représentant les dynamiques des actifs du portefeuille, est un vecteur gaussien de moyenne μ et de matrice variance-covariance Σ. $\mathrm{X}' = (X_1, X_2, X_3, X_4)$ et les valeurs décorrélées sont données par :

$$\begin{cases} X_1 = l_{11}.\varepsilon_1 + \mu_1 \\ X_2 = l_{21}.\varepsilon_1 + l_{22}.\varepsilon_2 + \mu_2 \\ X_3 = l_{31}.\varepsilon_1 + l_{32}.\varepsilon_2 + l_{33}.\varepsilon_3 + \mu_3 \\ X_4 = l_{41}.\varepsilon_1 + l_{42}.\varepsilon_2 + l_{43}.\varepsilon_3 + l_{44}.\varepsilon_4 + \mu_4 \end{cases}$$

En utilisant la décomposition de Cholesky, on détermine les valeurs des coefficients de la matrice L, nous permettant ainsi de décorréler les dynamiques des actifs en portefeuille.

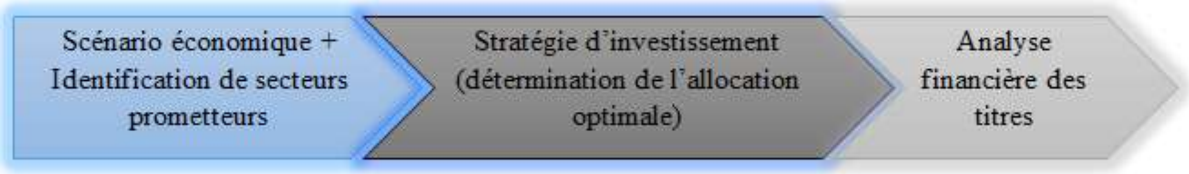
III- <u>Allocation stratégique</u>

En assurance, parce que les primes sont perçues avant le paiement des prestations ou charges de sinistres, il convient pour les sociétés d'assurance de constituer des provisions afin de pouvoir faire face à leurs engagements futurs. Mieux encore, elles sont amenées à faire fructifier le montant de ces provisions. Pour ce faire, elles font des placements dans les marchés financiers. Une bonne gestion impliquerait donc que l'entreprise veuille à placer ses actifs de façon optimale tout en ne mettant pas en cause sa solvabilité d'autant plus qu'une mauvaise gestion peut avoir des conséquences désastreuses comme ce fut le cas de la compagnie japonaise Tokyo Mutual Life. Dès lors, le problème qui se pose c'est comment allouer les actifs entre différentes classes. Quelle est la structure du portefeuille permettant de garantir le montant correspondant aux engagements futurs. Pour répondre à ces questions nous allons voir dans un premier temps le processus de placement et la règlementation y afférente et dans un second temps nous aborderons les modèles théoriques d'allocations d'actifs.

1- Le processus de placement

L'allocation d'actifs étant une technique de gestion de portefeuille consistant à revoir périodiquement la composition du portefeuille des classes d'actifs et visant donc à choisir la meilleure répartition possible entre les grandes classes d'actifs telles que les actions, les immobilisations, les titres monétaires etc. apporte toujours la contribution la plus importante à la performance de l'entreprise. A noter donc qu'il n'y a pas de performance sans risque, nous distinguons principalement deux types d'allocations d'actifs :

- ***L'allocation stratégique ou stratégie d'investissement*** : elle répond à un critère de répartition de la fortune de la société entre classes d'actifs et zones géographiques. Elle permet de répartir donc les actifs à moyen et long terme. Pour ce faire, l'allocation stratégique implique un diagnostic de l'environnement, du contexte économique, des cours, du niveau des taux d'intérêt ou encore des parités de change. Elle permet donc de faire un benchmark (c'est-à-dire de déterminer un indice de référence) reproduisant la performance potentielle d'un portefeuille. L'allocation stratégique doit respecter les objectifs de l'entreprise en matière de rendement, de tolérance au risque et des dispositions règlementaires. Le respect donc de ces éléments amène à la détermination de la volatilité (risque) du portefeuille globale et de sa rentabilité. Parce qu'elle contribue à 70% de la performance du portefeuille, la détermination des paramètres précités reste une tache très délicate. Le processus de définition d'une allocation stratégique peut être représenté par le schéma suivant :



- ***L'allocation tactique :*** elle repose sur une stratégie d'intégration des développements conjoncturels. En effet, l'allocation tactique permet de profiter des opportunités sur les marchés sur (ou sous) pondérant une classe d'actifs donnée en fonction de sa valorisation. Cette stratégie permet donc de corriger l'allocation stratégique quand les rendements attendus à court termes s'éloignent des rendements normaux. Partant donc de là, l'allocation tactique permet de déterminer pour chaque classe d'actifs, les titres à investir à court, moyen et long terme.

Après avoir déterminé le processus de placement des actifs, nous allons maintenant nous intéresser aux modèles théoriques permettant d'allouer efficacement les actifs en fonction des profils des investisseurs.

2- Modèles théoriques

On distingue entre autre le modèle Markowitz basé sur l'espérance et la variance, le modèle de marché ou modèle de Sharpe, le Modèle d'Evaluation des Actifs Financiers (MEDAF), etc.

- ***Le modèle markowitz :*** Markowitz se base sur la combinaison des titres pour déterminer la structure du portefeuille efficient. Pour ce faire, il base son analyse sur la caractérisation des risques des titres et portefeuilles. Ainsi pour lui le portefeuille a une rentabilité correspondant au cumul des espérances de rentabilité des titres. De ce fait, tout investisseur rationnel choisira le portefeuille qui présente la plus grande espérance de rentabilité. Par ailleurs, il affirme que l'investisseur rationnel, plutôt que de se baser uniquement sur la rentabilité, optimisera le couple rentabilité-risque. Ainsi, tout investisseur optera pour tout portefeuille parmi les portefeuilles, présentant la plus grande espérance de rendement pour un même niveau de risque ou une petite variance pour une même espérance de rendement ou encore une plus grande espérance pour une plus petite variance (c'est le meilleur profil de portefeuille). L'approche de Markowitz suppose que les rendements des actifs, les variations de taux d'intérêt ou de taux de change suivent une loi normale. Cette hypothèse résulte du théorème central limite pour qui la somme ou la moyenne de n réalisations indépendante d'un même processus ayant une variance finie approche une distribution gaussienne quand n tend vers l'infini. En considérant la rentabilité d'un portefeuille p telle que :

$R_p = \sum_1^n x_i * (R_i)$. Les x_i représentent les proportions de richesses investies dans l'actifs i.

L'espérance de rentabilité sera donnée par : $E(R_p) = \sum_1^n x_i * E(R_i)$,

Avec $E(R_i) = \frac{1}{n}\sum_1^n (R_i)$.

Le risque total du portefeuille mesuré par la variance (écart-type) des rentabilités est obtenu par l'équation suivante : $Var(R_p) = \sum_1^n \sum_1^n x_i x_j cov(R_i, R_j)$.

Le risque global du portefeuille correspond donc à la somme des risques représentant une matrice dont la diagonale est constituée par les variances de rentabilités des titres i.

- ***Le modèle de marché :*** ce modèle est basé sur la description de la rentabilité et du risque d'un investissement en valeurs mobilière ; c'est-à-dire sur le marché boursier. Selon le modèle, les variations des cours des valeurs mobilières résultent des fluctuations du marché d'une part et des évènements propres à la société d'autre part. Pour ce faire, il distingue deux types de risques. Le premier est un risque systématique. Ce type de risque ne peut être diversifié puisqu'il est lié au marché. En effet, une variation à la hausse du marché ou un déséquilibre de la balance commerciale, ou encore une évolution des taux d'intérêt, entrainera nécessairement une variation dans le même sens du cours des actions. L'investisseur ne peut rien faire pour réduire ce risque. Le second type de risque est le risque spécifique ou risque diversifiable. Ce risque est dû aux caractéristiques propres du titre. Il est peut donc être réduit par diversification. Le modèle mathématique décrivant la rentabilité du titre i se définit alors par la relation suivante : $R_i = \alpha_i + \beta_i R_M + \varepsilon_i$.

R_M est la rentabilité de l'indice du marché, α_i et β_i sont les coefficients de la droite de régression linéaire et ε_i représente le terme d'erreur. Le risque de l'action étant composé du risque de marché et de celui spécifique à l'entreprise, il est représenté par l'équation suivante :

$Var(R_i) = \beta^2 Var(R_M) + Var\ (\varepsilon_i)$ Avec les correspondances suivantes :

$Var(R_i)$:Variance des taux de rentabilité du titre i ;

$Var(R_M)$:Variance des taux de rentabilité du marché ;

$Var(\varepsilon_i)$: Variance des erreurs.

Le risque du portefeuille pourrait donc être réduit alors une combinaison de diverses actions. Pour illustrer cette affirmation mathématiquement, on suppose n titres avec une proportion x_i de capital investi dans l'actif i. Le risque total du portefeuille est alors donné par la somme des risques du marché et de chaque actif du portefeuille.

$$Var(R_p) = {\beta_p}^2 Var(R_M) + \sum_1^n {x_i}^2\ Var(\ \varepsilon_i)\ et\ \beta_p = \sum_1^n x_i \beta_i$$

avec β_p la sensibilité du portefeuille face au marché. Il correspond à une moyenne pondérée des bêtas des différents titres composant le portefeuille.

- ***Le Modèle d'Evaluation des Actifs Financiers (MEDAF) :*** son acronyme en anglais est Capital Asset Pricing Model (CAPM). Il a été introduit dans les années 1964 par William SHARPE. Ce modèle s'intéresse à l'identification d'une relation linéaire entre la prime de risque offerte par un titre risqué et celle offerte par le portefeuille de marché. Il est construit sur la base d'hypothèses très simplificatrices :

  - ***Absence de taxes et de coûts de transaction***
  - ***Tous les agents investisseurs sont averses au risque et ont le même horizon d'investissement***
  - ***L'existence d'un agent représentatif (les agents ont les mêmes anticipations sur les rendements)***
  - ***Les actifs sont indéfiniment divisibles.***

L'illustration mathématique du CAPM est obtenue par la relation suivante :

$E(R_i) = R_f + \beta(E(R_M) - R_f)$ avec R_M le rendement du marché et R_f le rendement de l'actif sans risque.

Cette équation représente l'équation de la droite de marché des titres ou Security Market Line (SML). L'idée derrière cette formulation est que la rentabilité du titre i est donnée par celle de l'actif sans risque et une prime de risque déterminée par la différence entre l'espérance de rentabilité du marché et le rendement de l'actif sans risque. Dans ce cas précis, il convient de noter que le marché ne rémunère pas le risque spécifique puisque ce dernier peut être éliminé par diversification. La validité de ce modèle est testée empiriquement à partir des cours réels historiques des titres.

Il existe d'autres modèles (modèle d'évaluation par arbitrage ou *asset pricing theory (APT)*) pour déterminer l'allocation optimale des actifs mais que nous n'allons pas aborder ici.

CHAPITRE 4 MISE EN ŒUVRE PRATIQUE

Après avoir présenté la démarche de la construction d'un modèle DFA, nous avons consacré ce dernier chapitre à une étude de cas pratique. Ainsi avons-nous mis au point une application VBA-Excel dont le cadre d'utilisation reste essentiellement la stratégie de financement d'une entreprise d'activité non-vie. L'application permet en effet d'avoir un aperçu de la suffisance des fonds propres par rapport à la marge de solvabilité et le niveau des résultats des différents exercices de l'entreprise sur un horizon temporel.

I- Cadre général : présentation des données

1- Activité de la compagnie

Pour l'étude de cas pratique, l'idéal serait de construire un modèle général, applicable à une compagnie d'assurance non-vie et incluant plusieurs branches d'activités. Mais, outre le problème de disponibilité des données nécessaires à l'étude, la contrainte de temps de réalisation du modèle serait un grand obstacle. L'effet conjugué de ces deux contraintes nous a amenés à reconsidérer la situation. Dans notre cas pratique on va ainsi s'intéresser à une compagnie d'assurance fictive de profil marocain, donc soumise aux normes de règlementation marocaines. Cette compagnie sera nommée Zabra Assurance, et opère seulement dans la branche RC Auto (Responsabilité Civile Automobile).

Initialement, on disposait des données relatives à la gestion et à la production de la compagnie. Elles sont détaillées dans la section consacrée aux hypothèses et paramétrages. A base de ces données nous avons constitué le bilan de l'entreprise. Ainsi, au 31/12/2013, la situation initiale de Zabra Assurance se présente comme suit :

BILAN COMPTABLE SIMPLIFIE

ACTIF		PASSIF	
Placements	1810904800	Capitaux propres	800000000
Part des cessionnaires dans les provisions techniques	112375200	Provisions techniques brutes	1123752000
Créances et autres actifs	150000000	Autres dettes	149528000
TOTAL ACTIF	2073280000	TOTAL PASSIF	2073280000

Figure 9 : Bilan de la compagnie au 31/12/2013

RESULTATS TECHNIQUES				
Charges			**Produits**	
Prestations (règlements)	134783000		Primes acquises	246050000
Frais d'acquisition	24605000		Variation FSAP	8000000
Frais de gestion de police	24605000			
Frais de gestion de sinistres	24605000			
Resultats Techniques		**45452000**		

RESULTATS NON TECHNIQUES	
Resultats techniques	45452000
Produits de placements	73341644,4
Charges des placements	14487238,4
Impôts	31291921,8
RESULTAT DE L'EXERCICE	164572804,6

Figure 10 : Comptes de résultats

MINIMUM REGLEMENTAIRE(MARGE DE SOLVABILITE)	
1. Calcul par rapport aux primes	
Résultat1	148122100
2. Calcul par rapport à la charge	
Résultat2	109942910
MARGE A CONSTITUER	148122100

ELEMENTS CONSTITUTIFS DE LA MARGE	
Capital social	**200000000**
Réserves	**20000000**
Report à nouveau	**30000000**
MARGE	250000000
TAUX DE COUVERTURE DE LA MARGE	169%

Figure 11 : Constitution de la marge de solvabilité

TRIANGLE DE PAIEMENTS CUMULES	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	600	4505	7389	14097	17978	23642	31539	37087	40755	48499
2	790	5974	9920	12163	19692	30540	39946	47414	57183	
3	783	5858	7610	12104	19186	28107	36919	51428		
4	686	6190	10433	17434	29243	43790	65602			
5	751	5179	11101	22789	40463	60868				
6	571	4349	11329	26692	47340					
7	618	6489	19393	37852						
8	910	7496	20191							
9	699	8552								
10	889									

Figure 12 : Triangle des paiements cumulés

2- Paramètres généraux du modèle

Pour modéliser la réalisation des variables telles que le taux d'intérêt, l'inflation, les actions, les provisions, etc… il est nécessaire de faire appel aux méthodes de simulation. On parle généralement de méthodes de Monte-Carlo. Une fois le modèle établi, l'application permettra de générer plusieurs réalisations un grand nombre de fois. On s'intéresse ensuite aux moyennes des différentes réalisations.

Il faut rappeler que la performance des méthodes de simulation a un effet sur l'efficience des résultats obtenus à travers le modèle. Pour cela, en prenant aussi en compte le temps de simulation, il faudra faire usage de générateurs de nombres à la fois performants et rapides. Ce qui nous ramène aux générateurs quasi-aléatoires et aux générateurs pseudo-aléatoires. Ces générateurs permettent de générer des nombres aléatoires suivant une loi uniforme sur (0,1). D'autres méthodes existantes permettent de générer par la suite des variables distribuées selon une loi normale centrée réduite.

Dans notre cas, nous avons utilisé l'algorithme de « Tore mélangé » pour simuler les réalisations de loi uniforme (0 ; 1). La méthode de Box-Muller est celle retenue dans le cadre de la simulation des variables centrées réduites. Les détails de ces méthodes sont présentés dans l'annexe « Simulations »

Tous les modèles sont agencés puis simulés en 10000 runs.

II- Choix des modèles

Dans cette section, nous nous intéressons aux différents modèles implémentés pour mettre en place l'application qui illustre les diverses notions abordées dans notre mémoire.

1- Modèle de taux d'intérêt : modèle de Cox Ingersoll Ross

Pour la modélisation des taux d'intérêts, nous avons retenu le modèle de Cox-Ingersoll-Ross d'abord parce que c'est un modèle simple à mettre en œuvre, ensuite parce qu'il permet de prendre en compte l'effet de retour à la moyenne. Rappelons que le modèle définit la dynamique de taux par :

$$dr_t = a(b - r_t)dt + \sigma\sqrt{r_t}dB_t$$

Les paramètres $a, b\ et\ \sigma$ doivent être entrés par l'utilisateur. Leur choix doit se faire de manière à ne pas aboutir à un taux de valeur négative à un instant donné. On montre que les paramètres doivent dans ce sens vérifier la condition suivante : $\sigma^2 < 2ab$

La forme des prix zéro-coupons est définie dans la section II-2- ii) du chapitre précédent.

Discrétisation de la dynamique de taux

Pour le modèle CIR, il n'existe pas une discrétisation facile à programmer. On fait donc recours à une discrétisation approximative. Dans notre application, nous utiliserons le schéma d'Euler (on peut aussi utiliser le schéma de Milstein).

En utilisant le schéma d'Euler, la discrétisation de la dynamique s'écrit :

$$\Delta\tilde{r}_t = \tilde{r}_{t+\delta} - \tilde{r}_t = a(b - \tilde{r}_t)\Delta t + \sigma\sqrt{\tilde{r}_t}(B_{t+\delta} - B_t)$$

On rappelle que $(B_{t+\delta} - B_t)$ suit une loi normale d'espérance nulle et de variance δ. Ainsi, en supposant que ε_t suit une loi normale centrée réduite, le terme $\sqrt{\delta}\varepsilon_t$ a la même loi de distribution que $(B_{t+\delta} - B_t)$. La discrétisation se réécrit de la façon suivante :

$$\tilde{r}_{t+\delta} = (1 - a.\Delta t)\tilde{r}_t + ab.\Delta t + \sigma\sqrt{\delta.\tilde{r}_t}\varepsilon_t$$

δ : désigne le pas de discrétisation

La simulation de ce taux revient donc à calculer le taux r_t récursivement pour chaque instant t. A chaque instant t, le problème se réduit à la simulation d'une variable suivant la loi normale centrée réduite. Il faut aussi déterminer la valeur initiale du taux court r_0.

Estimations des paramètres

Pour estimer les différents paramètres on utilise la méthode des moindres carrés ordinaires. En effet, on détermine les paramètres en minimisant l'écart quadratique entre les prix du marché $P(0,T)$ et les prix que nous avons estimés $\hat{P}(0,T)$.

Les prix du marché sont obtenus à partir de la courbe de taux publiée par Bank Al Maghrib.

On estime en premier lieu la valeur du taux court à la date d'évaluation. On procède par interpolation à base d'un polynôme de degré 3, en supposant que les points de la courbe vérifient :

$$R(0,T) = \beta_0 + \beta_1 T + \beta_2 T^2 + \beta_3 T^3$$

En choisissant quatre points $(T_i, R(0,T_i)), i = 1,2,3,4$ on aboutit au système d'équations suivant :

$$\begin{cases} R(0,T_1) = \beta_0 + \beta_1 T_1 + \beta_2 T_1^2 + \beta_3 T_1^3 \\ R(0,T_2) = \beta_0 + \beta_1 T_2 + \beta_2 T_2^2 + \beta_3 T_2^3 \\ R(0,T_3) = \beta_0 + \beta_1 T_3 + \beta_2 T_3^2 + \beta_3 T_3^3 \\ R(0,T_4) = \beta_0 + \beta_1 T_4 + \beta_2 T_4^2 + \beta_3 T_4^3 \end{cases}$$

La résolution du système nous permet de disposer des paramètres β_i. Ensuite on a :

$$r_0 = \lim_{T \to 0} R(0,T) = \beta_0$$

La valeur de σ

Enfin on estime $a\ et\ b$ par minimisation de l'écart quadratique :

$$(a,b) = \text{argmin} \sum_{i=1}^{N} \left(P_i(0,T) - \hat{P}_i(0,T)\right)^2$$

N désigne le nombre d'obligations prises en compte pour l'ajustement

2- Modèle d'inflation : modèle de Kaufman-Gadmer-Klett

Le modèle de Kaufmann-Gadmer-Klett lie le taux d'inflation au taux d'intérêt court par la formule suivante :

$$i_t = \alpha + \beta r_t + \varepsilon_t \text{ où } \varepsilon_t\ est\ un\ bruit\ blanc\ de\ variance\ \sigma^2$$

En connaissant le taux court à instant donné, on peut calculer l'inflation correspondante. Les paramètres sont estimés à partir des données historiques. Une fois les paramètres estimés, la simulation de l'inflation se résume à la simulation d'une réalisation d'une loi normale centrée réduite à chaque instant de l'horizon temporel.

Les paramètres du modèle sont estimés à base de données historiques de l'évolution du taux d'intérêt et de l'inflation.

3- Modèle pour les actions : modèle de Black & Scholes

En ce qui concerne la modélisation de l'évolution du cours des actions, le modèle de Black & Scholes constitue une référence. On choisit une modélisation dans un univers risque-neutre et on introduit un taux de dividende. Le prix d'une action est ainsi modélisé par la dynamique suivante :

$$\frac{dS_t}{S_t} = (r_t - q)d_t + \sigma.dB_t$$

S_t : prix de l'action à la date t, r_t : taux d'intérêt court instantané, q : taux de dividende, σ : volatilité de l'action, B_t : mouvement brownien

Rappelons que la solution de l'équation montre que le prix de l'action suit une loi log-normale et s'écrit sous la forme :

$$S_t = S_0 \exp\left[\int_0^t \left(r_s - q - \frac{\sigma^2}{2}\right) ds + \sigma.dB_t\right]$$

Il faut noter que les évolutions des cours des actions et des taux d'intérêts sont corrélées. On utilise alors la décomposition de Cholesky pour la prise en compte de la corrélation. Pour cela on suppose que le coefficient de corrélation des dynamiques des taux et des actions est ρ, soit la matrice de corrélation $\Sigma = \begin{bmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{bmatrix}$. Si on suppose que $B^1 \; et \; B^2$ sont les browniens qui régissent respectivement la dynamique de taux d'intérêt et la dynamique des actions, simuler (B^1, B^2) de matrice de variance-covariance Σ revient à simuler un couple de variables gaussiennes centrées réduites $(\varepsilon^1, \varepsilon^2)$. La dynamique des cours d'action s'écrit alors :

$$\frac{dS_t}{S_t} = (r_t - q)d_t + \rho.\sigma.d\varepsilon_t^1 + \sigma\sqrt{1-\rho^2}d\varepsilon_t^2$$

A ce niveau, on utilise de nouveau la discrétisation d'Euler pour discrétiser la dynamique. Le prix de l'action s'écrit :

$$\hat{S}_{t+\delta} = \hat{S}_t \exp\left[\left(\hat{r}_t - q - \frac{\sigma^2}{2}\right)\delta + \rho.\sigma\sqrt{\delta}\varepsilon_t^1 + \sigma\sqrt{(1-\rho^2).\delta}\varepsilon_t^2\right]$$

Les paramètres $q \; et \; \sigma$ sont fournis par l'utilisateur. La simulation se résume à la génération de deux variables aléatoires normales centrées réduites à chaque étape.

4- Modélisation des obligations

A partir des taux que nous avons simulés avec le modèle CIR, on calcule les prix zéro-coupon qu'on intègre par la suite dans l'évaluation des prix des obligations. A chaque instant t, le prix d'une obligation de maturité T est donné par la formule suivante :

$$P_{oblig(t,T)} = P(t,T) * Nominal + \sum_{\tau=t}^{T} P(t,\tau) * Coupon$$

La rentabilité du portefeuille obligataire est donnée par :

$$R(t) = -\frac{1}{T-t} * \ln P(t,T)$$

5- Modélisation de l'immobilier

Une modélisation stochastique du prix de l'immobilier permettrait de mieux simuler l'évolution du marché. Mais l'estimation des paramètres du modèle dépend de l'historique des données immobilières de la société sur laquelle l'étude porte. Etant donné que notre étude concerne une compagnie fictive, nous avons cru bon ne pas adopter une modélisation stochastique. On suppose à cet effet que le rendement de l'immobilier est constant sur la période de l'étude. Le prix de l'immobilier est ainsi modélisé comme suit :

$$P_{t+1} = P_t * (1 + R_{immob})$$

Où P_t désigne le prix de l'immobilier à la date t et R_{immob} le rendement

6- Modèle de sinistralité et de primes

On ne prendra pas en compte les sinistres graves. Les sinistres attritionnels sont modélisés comme suit :

- Nombre de sinistres (N) : processus de Poisson de paramètre λ.
- Coûts des sinistres (X) : loi log-normale de paramètres μ et σ.

Simuler le coût de sinistre pour un instant de l'horizon temporel revient à simuler d'abord une réalisation n de la variable aléatoire N. Ensuite simuler le coût pour chacune des n réalisations ; soit $(X_i)_{i=1,\dots,n}$, variables indépendantes et identiquement distribuées selon la loi de X. La charge totale de sinistre pour une année de survenance k est donnée par :

$$S_k = \sum_{i=1}^{N} X_i$$

Pour chaque date de l'horizon temporel, la prime perçue est donnée par :

$$Prime_i = E(S) * (1 + \alpha) = E(N) * E(X) * (1 + \alpha)$$

α : taux de chargement de prime

N suit une loi de Poisson de paramètre λ. Alors $E(N) = \lambda$

Xsuit une loi log-normale (μ, σ). Donc $E(X) = \exp\left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right)$

La prime s'exprime alors par :

$$Prime_i = \lambda * \exp\left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right) * (1 + \alpha)$$

$\lambda = N_c^i * p$ où N_c^i désigne le nombre de contrat à la date i de l'horizon temporel et p la fréquence moyenne de sinistre. En supposant que le nombre de contrats s'accroît d'année en année avec un taux annuel β, on peut exprimer N_c^i en fonction du nombre de contrats initial N_c. Soit $N_c^i = N_c * (1 + \beta)^{i-1}$. La formule finale de la prime est exprimée comme suit :

$$Prime_i = p * N_c * (1 + \beta)^{i-1} * \exp\left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right) * (1 + \alpha)$$

Les valeurs des différents paramètres sont fournies par l'utilisateur.

III- Evaluation des différents indicateurs

Pour l'analyse des outputs, nous avons retenu comme indicateurs la probabilité de perte, la probabilité de ruine et la solvabilité. Les valeurs des différents indicateurs sont évaluées comme suit :

- Probabilité de perte : nombre de fois que la perte a été constatée rapporté au nombre total de simulation
- Probabilité de ruine : nombre de fois que la ruine a été constatée rapporté au nombre total de simulation
- Solvabilité : taux moyen de couverture de la marge de solvabilité

IV- Hypothèses et paramétrages

La modélisation du passif comme celle de l'actif repose nécessairement sur des hypothèses théoriques qu'il est important de souligner. En effet, pour ce qui du passif, afin de déterminer les engagements actuels comme futur de l'assureur, nous faisons hypothèses d'un taux d'augmentation de nouvelles affaires estimé à 5% et d'un taux d'annulation de 2% durant nos projections. Cependant, ces hypothèses ne sont pas les seules à être formulées. L'ensemble des hypothèses utilisées à cet effet est présenté dans le tableau suivant :

Paramètres de gestion			
Taux de Chargement	Augmentation de primes	Acquisition	Gestion de polices
35%	3%	10%	10%
Annulation de contrats	Nouvelles affaires	Chargement de sécurité	Gestion de sinistres
2%	5%	5%	10%

Il convient de préciser également que la société fait appel à la réassurance, traduite par un taux de rétention à hauteur de dix pourcent (10%). En outre, notons que la branche étudiée est la branche automobile. Cependant, nous ne nous intéressons qu'à la garantie responsabilité civile automobile. Encore pour simplifier les choses nous ne faisons pas de segmentation parmi les assurés. Par ailleurs, il est à préciser que nous ne modélisons pas l'ensemble des postes du passif mais ceux que nous jugeons les plus importants en l'occurrence les fonds propres, les provisions techniques (uniquement PSAP et PPNA), les autres dettes. L'horizon de projection choisi est de cinq années (5ans) et le nombre de simulations de dix milles (10 000).

La structure initiale de notre base de données nous a permis de déterminer un certain nombre de paramètres. Ces paramètres sont présentés dans le tableau suivant :

Paramètres généraux			
Nombre de contrats	Fréquence moyenne	Moyenne	Ecart-type
201088	0,093	8,352	1,268
		Loi Log-normale	

S'agissant de la modélisation de l'actif, plusieurs hypothèses théoriques ont également été formulées comme pour le passif. En effet, il convient de préciser que n'ayant pas eu une structure initiale sur la structure du portefeuille, nous avons considéré la structure suivante pour l'allocation initiale et cette structure constituera en même temps l'allocation cible pour les années futures.

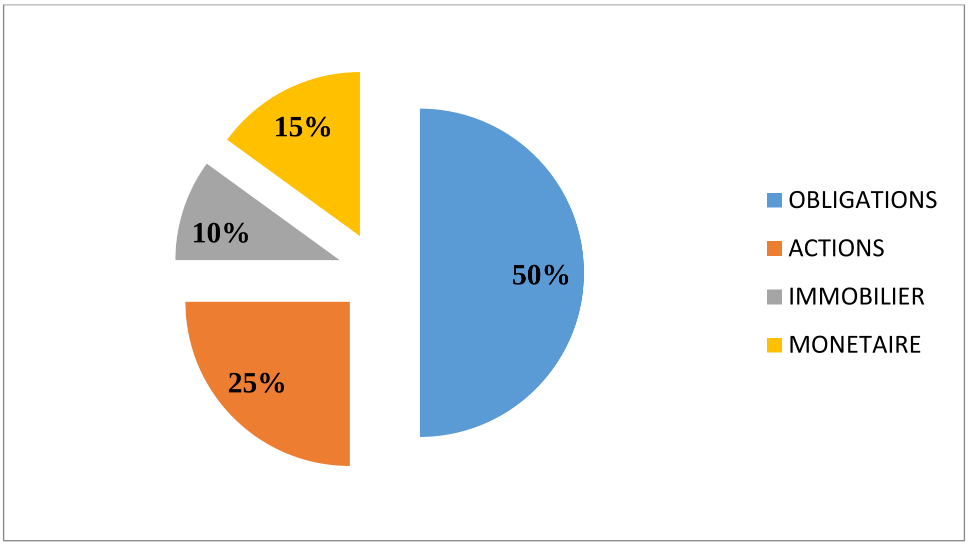


Figure 13 : allocation stratégique d'actifs

Pour chaque classe d'actif des hypothèses sont faites quant à leur rentabilité et le risque pris en y investissant. Dans certaines classes nous supposons que la société se trouve dans un univers risque neutre (tous les investisseurs n'exigent aucune prime de risque comme rentabilité supplémentaire) n'exigent aucune prime de risque comme rentabilité supplémentaire) et donc le taux de rentabilité serait égal au taux de sans risque. Il s'agit du monétaire et de l'immobilier avec des taux de rentabilité fixe égal respectivement à ***2%*** et ***5%***. Quant aux actions, on a supposé la prime de risque nulle. Une autre hypothèse très importante est la supposition du marché comme étant un marché liquide et de supposer que les actifs sont infiniment divisibles avec un coût de transaction nul ; c'est-à-dire que notre compagnie peut acheter ou vendre des actifs à tout moment dans les quantités voulues. Par ailleurs, nous supposons, pour des raisons de simplification, qu'il n'existe pas de corrélation entre les actions et les taux d'intérêts. Cette hypothèse est aussi due au fait que nous dispose pas de données nécessaires pour estimer le coefficient de corrélation. Elle implique donc l'usage d'une variable réelle centrée réduite indépendante de celle utilisée lors la simulation du taux. D'où la nécessité de la méthode de Box-Muller. En ce qui concerne la volatilité de l'action, l'estimation est faite à base de l'historique (période de Janvier 2012 – Mai 2014, voir *Figure 14*) de l'indice MASI de *Bourse de Casablanca*. Elle a été estimée à ***0,347%.*** Le taux de dividende est fixé à ***2,5%***.

Figure 14 : L'évolution de l'indice "MASI" du 01/07/2012 au 26/05/2014 (Source : Bourse de Casablanca www.casablanca-bourse.com)

Pour les obligations, elles sont modélisées sur la base des taux sans risques.

Contrairement à l'assurance vie où le taux d'intérêt n'entre que dans la modélisation du passif, l'assurance non-vie elle fait appel pour la modélisation des deux masses du bilan. Le taux d'intérêt est modélisé à l'aide du modèle de Cox-Ingersoll-Ross. Les paramètres du modèle CIR ont été estimés à partir de la courbe de taux publiée par BAM qui fournit les taux moyens pondérés en fonction de la maturité. Nous avons procédé à un ajustement des données, et ensuite à une interpolation polynomiale comme l'indique la figure 15.

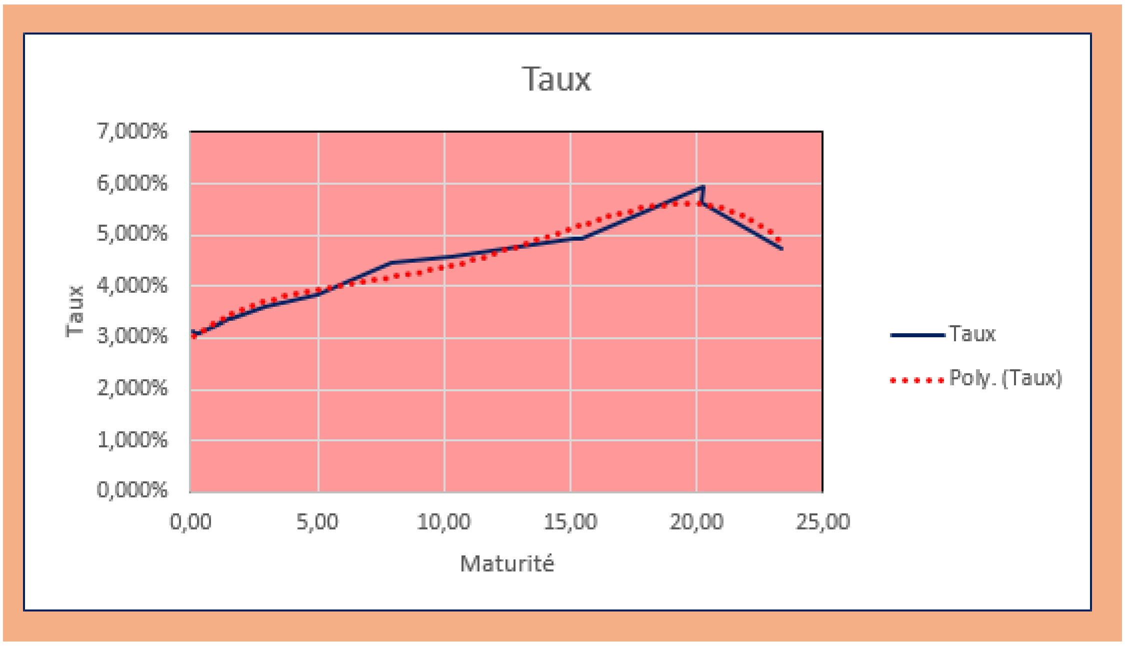


Figure 15 : Courbe de taux

Les valeurs estimées des paramètres sont les suivantes :

	PARAMETRAGE DU TAUX D'INTERÊT du modèle CIR	
	a	30,305%
	b	4,788%
	Sigma	0,73%
	Lambda	0%
	r0	2,974%
	Gamma	30%
à minimiser	**Ecart**	**0,000000196**

Ces paramètres sont estimés sur la base de la courbe de taux de la Bank Al Maghrib.

a représente le coefficient de retour à la moyenne et **b** correspond à la moyenne à long terme du taux court. **r0** est le taux court à l'instant 0. **écart** indique l'écart quadratique entre les prix zéro-coupons théoriques et les prix zéro-coupons estimés à l'aide du modèle de CIR

sigma : volatilité du taux court. **Lambda** et **Gamma** sont des paramètres du modèle CIR.

Les projections sont faites en tenant compte de l'influence du taux d'inflation. D'où la nécessité de la modéliser. On rappelle que la modélisation de l'inflation est faite à l'aide du modèle de Kaufmann *et al* qui suppose que le niveau du taux d'inflation peut être expliqué par le taux court. Les paramétrages de ce taux se présentent comme suit :

PARAMETRAGE DU TAUX D'INFLATION	
Alpha	-1,3956
Beta	0,7557
Sigma	1,5397
R^2	0,4765

Beta : est le seul paramètre du modèle et il mesure la sensibilité du taux d'intérêt à la date t+1 face à une variation d'une unité de celui de la date t. sigma est correspond à l'écart type ;

R^2 : est le coefficient de détermination, mesurant la qualité de l'ajustement. Contrairement à l'intuition que cette mesure pourrait laisser imaginer, nous jugeons que la qualité de l'ajustement est bonne.

Alpha : représente le terme constant du modèle.

Ces paramètres ont été estimés par une simple régression linéaire comme le propose Kaufmann, Gadmer et Klett. La régression a été faite sur l'historique des taux d'intérêt et d'inflation du Maroc sur la période 1989-2012, issue des publications de la Banque Mondiale. Les données sont dressées dans le tableau suivant :

Année	Taux d'intérêt	Inflation
1989	8,50%	3,30%
1990	8,50%	6,80%
1991	8,50%	8,00%
1998	7,30%	2,80%
1999	6,40%	0,70%
2000	5,20%	1,90%
2001	5,00%	0,60%
2002	4,50%	2,80%
2003	3,80%	1,20%
2004	3,60%	1,50%
2005	3,50%	1,00%
2006	3,70%	3,30%
2007	3,70%	2,00%
2008	3,90%	3,70%
2009	3,80%	1,00%
2010	3,70%	1,00%
2011	3,80%	0,90%
2012	3,80%	1,30%

Tableau 5 : Historique des taux d'intérêt et d'inflation du Maroc sur la période 1989-2012
Source : Banque Mondiale http://donnees.banquemondiale.org/indicateur

V- Rentabilité du portefeuille

Avant de parler de rentabilité, il conviendrait mieux de connaître la structure même du portefeuille. Notre portefeuille est composé essentiellement des quatre classes d’actifs présentées plus haut. Les informations disponibles en plus de la proportion de chaque classe d’actifs dans le portefeuille concernent le nombre d’actifs détenus dans chaque classe et les prix à la date zéro. Dès lors le rendement du portefeuille est donné par le cumul pondéré des taux de rentabilité de chaque actif qui composent le portefeuille. Mais comme nous l’avons dit tant tôt les placements monétaires et les immobiliers ont chacun un rendement fixe. La variation globale du rendement de ces classes d’actifs résulte donc de la variation de la proportion d’actifs qui leur est allouée. Les obligations sont modélisées par les prix des zéro coupons de maturité une année considérés ici comme modélisant le taux sans risque. Ainsi le prix de l’obligation à la date t est donné par :

$$Prix_{obligation_t} = Prix_{obligation_{t-1}} + Nominal * ZeroCoupon$$

Le ZeroCoupon est modélisé par le modèle de CIR comme suit :

$ZeroCoupon = At * Exp(-Bt * rt)$ avec rt le taux court instantané. At et Bt sont les mêmes que précédemment déterminés dans la modélisation du taux d’intérêt. Dès lors on peut déterminer le taux de rendement des obligations de deux manières :

- La première consiste à comparer les prix des obligations sur deux périodes consécutives de façon discrète et donc comme suit : $Rdt_{oblig_t} = \frac{Prix_{obligation_t}}{Prix_{obligation_{t-1}}} - 1$
- Le taux de rendement continu des obligations est une fonction logarithmique du prix de l'obligation. Il est donné par : $Rdt_{oblig_t} = -\frac{1}{T-t}\ln\mathrm{P}(t,T)$

Pour le rendement des obligations de notre portefeuille, nous avons utilisé cette dernière formule vu la cohérence des résultats fournis.

Pour ce qui est du rendement des actions, les prix étant modélisés par le modèle de Black and Scholes et pour la simplicité nous calculons la rentabilité des actions, nous nous intéressons à l'évolution des prix des actions sur deux périodes. En effet, le rendement de l'action est calculé comme suit :

$Rdt_{action_t} = \frac{S_t}{S_{t-1}}$ S_t est le prix de l'action (calculé par le modèle de Black and Scholes) à l'instant t.

Dès lors le rendement moyen du portefeuille sera donné par la somme des espérances de rendements des différentes catégories d'actifs pondérés par leur poids respectifs dans le portefeuille. De ce fait, pour calculer ce rendement moyen, nous construisons un tableau d'allocation d'actifs comme suit :

date	***Actions***		***Obligations***		***Monétaires***		***Immobiliers***			***Portefeuille***
	Part	***Rdt***	***Part***	***Rdt***	***Part***	***Rdt***	***Part***	***Rdt***		***Rdt moyen***
1	η_Actions	X1%	η_Obligations	Y1%	η_Monétaires	Z1%	η_Immobiliers	W1%	Rdt Moyen portefeuille= Cumul (Part*Rdt)	Rdt moyen
2	λ_Actions	X2%	λ_obligations	Y2%	λ_Monétaires	Z2%	λ_Immobiliers	W2%		Rdt moyen
3	δ_Actions	X3%	δ_Obligations	Y3%	δ_Monétaires	Z3%	δ_Immobiliers	W3%		Rdt moyen
4	θ_Actions	X4%	θ_Obligations	Y4%	θ_Monétaires	Z4%	θ_Immobiliers	W4%		Rdt moyen
5	α_Actions	X5%	α_Obligations	Y5%	α_Monétaires	Z5%	α_Immobiliers	W5%		Rdt moyen

Tableau 7 : allocation d'actifs et rendement

VI- <u>Résultats et commentaires</u>

Pour rappel, l'application nous permet de générer les valeurs d'un certain nombre d'indicateurs préalablement choisis. Il s'agit de la probabilité de perte, de la probabilité de ruine et du taux de couverture de la marge minimum réglementaire. Ainsi, comme output, l'application rassemble les valeurs des indicateurs, montrant les variations sur les cinq années de projections. En ce qui concerne le cas de notre étude, les résultats sont illustrés par la figure ci-après :

Indicateurs clés	1 an	2 ans	3 ans	4 ans	5 ans
Resultat de l'exercice	23029866,29	19321830,82	13234064,69	14128423,58	20477423,74
Minimum régl. (MSR)	179154522,48	193845899,02	210028990,27	227817025,77	247080611,29
Fonds propres	281971953,73	292798333,60	303133457,10	312485751,55	322208182,14
TAUX DE COUVERTURE	158%	151%	145%	137%	131%
PROBA. DE PERTE	5,01%	4,80%	5,01%	4,80%	4,96%
PROBA. DE RUINE	0,08%	0,03%	0,03%	0,02%	0,07%

Figure 16 : Projections des indicateurs

Les niveaux des probabilités de perte et de ruine sont assez bons. On note que la valeur de la probabilité de perte oscille autour de ***5%*** et celle de la probabilité de ruine autour de ***0,05%.*** Mais ceci n'est pas le cas pour le taux de couverture. Il apparait que la couverture de la marge de solvabilité se dégrade sensiblement d'année en année. Il convient donc d'adopter des stratégies financières afin d'élargir la couverture. En effet, cette couverture dépend de la rentabilité de la compagnie. Ici la dégradation du niveau de couverture peut s'expliquer par une de nos hypothèses selon laquelle la compagnie distribue tout le résultat net de l'exercice.

La figure qui suit montre l'évolution des parts et des rentabilités de chaque classe d'actif :

	1 an		2 ans		3 ans		4 ans		5 ans	
llocation et Rendemei	Part	Renta.	Part	Renta.	Part	Renta.	Part	Renta.	Part	Renta.
OBLIGATIONS	50,49%	4,76%	51%	4,78%	51,45%	4,78%	51,93%	4,79%	52,41%	4,78%
ACTIONS	24,65%	2,28%	24%	2,31%	23,95%	2,31%	23,60%	2,31%	23,25%	2,31%
IMMOBILIER	10,12%	5,00%	10%	5,00%	10,36%	5,00%	10,48%	5,00%	10,59%	5,00%
MONETAIRE	14,75%	2,00%	14%	2,00%	14,24%	2,00%	13,99%	2,00%	13,75%	2,00%
RENTABILITE MOYENNE		3,90%		3,68%		3,90%		3,60%		3,97%

Figure 17 : Evolution des parts et rentabilités des classes d'actifs

Pour aboutir à ces résultats, les valeurs des sinistres, des prestations et des primes ont été simulées à priori. Pour rappel, le coût des sinistres est simulé à l'aide d'une loi log-normale. La valeur ainsi obtenue nous permet de compléter le triangle des paiements et ensuite estimer les prestations de sinistres annuelles. La prime est calculée sous forme d'espérance du coût de sinistres augmentée de différents frais de chargement. Le tableau ci-après récapitule les valeurs de ces paramètres.

	Sinistres	Primes	Prestations
1	172944462	253652636	149712806
2	184706158	269100081	168620505
3	186694474	285488276	190755206
4	195116684	302874512	204182579
5	203955853	321319570	211188300

VII- Tests de sensibilité

L'objectif de cette section est d'étudier l'influence de certains paramètres comme le niveau de fonds propres et le taux de chargement sur les probabilités de perte et de ruine. D'après les résultats des simulations, on peut remarquer que l'entreprise étudiée a une situation assez confortable d'un point de vue probabilité de ruine. Mais ceci ne peut pas faire l'objet d'une généralisation.

Il va de soi que les probabilités de ruine diminuent quand le niveau de fonds propres augmente. Il en est de même quand le taux de chargement augmente. L'intérêt des tests ne porte donc pas sur la tendance que suit l'évolution des probabilités par rapport à une augmentation ou une baisse des paramètres étudiés. Ces tests doivent nous permettre de répondre aux questions telles que : « de combien pouvons-nous réduire la probabilité de ruine à l'horizon 2 ans si on augmente le niveau des fonds propres de 25% ? » ou encore « Quel est l'impact de la réduction du taux de chargement peux avoir sur la probabilité de perte/ruine ? ». Les tests que nous allons mener doivent en effet servir d'outils d'aide à la décision dans le pilotage stratégique (financier et concurrentiel dans notre cas de figure) de l'entreprise.

Les figures ci-après illustrent l'évolution de la probabilité de ruine de la première année de l'horizon temporel.

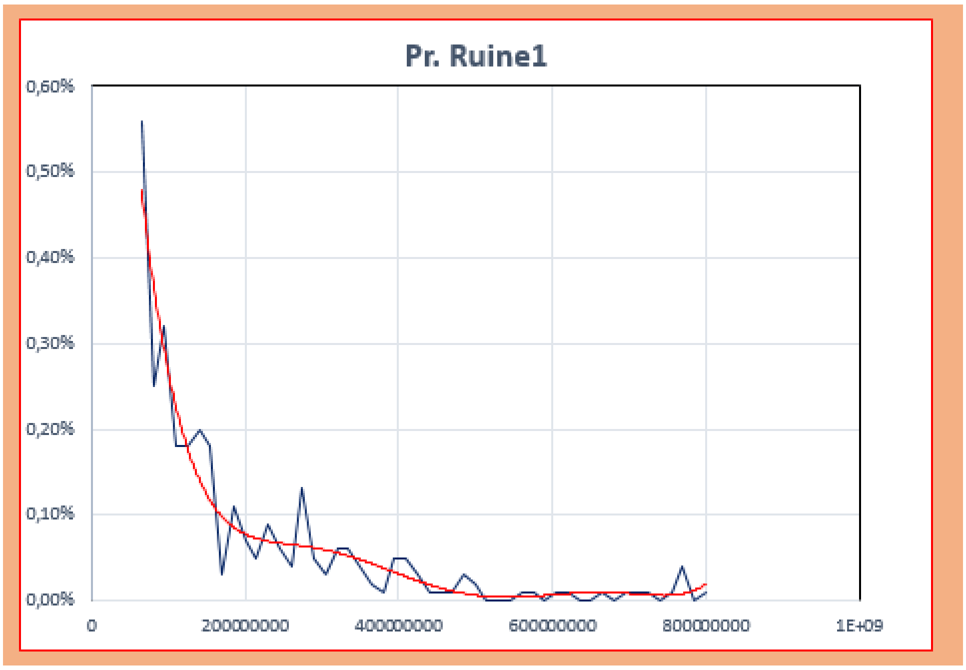


Figure 18 : Influence du niveau des fonds propres (courbe avec lissage)

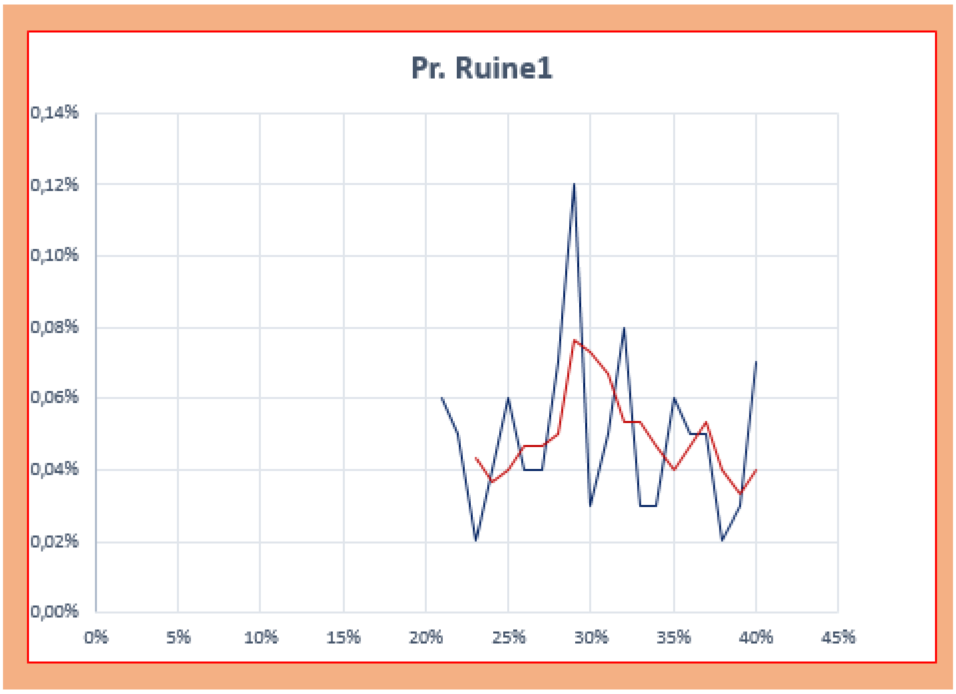


Figure 19: Influence du niveau du taux de chargement (courbe avec lissage)

Les irrégularités de la continuité des courbes sont dues au nombre de simulations. On devrait procéder aux simulations un plus grand nombre de fois, pour atteindre un bon niveau de convergence. Mais avec la contrainte de temps, on n'a pas pu refaire les tests avec un nombre de runs plus élevé.

On remarque que l'impact de la variation des fonds propres sur le niveau de la probabilité de ruine est nettement réduit à partir de 300 000 000 dhs (*Figure 18*). Par contre, pour les valeurs inférieures à 200 000 000 dhs, on note une grande sensibilité de la probabilité de ruine.

On conclut que la compagnie Zabra Assurance minimise ses risques de ruine en disposant de capitaux propres de valeur supérieure à 200 millions de dirhams.

En ce qui concerne l'influence du niveau du taux de chargement, on remarque que la probabilité de ruine semble être stable. Ceci peut en effet s'expliquer par la conclusion formulée plus haut. La compagnie étudiée dispose initialement de 250 millions de dirhams comme fonds propres. Elle se trouve ainsi la zone de stabilité. Ce résultat est corroboré par le fait que le taux de chargement est généralement moins influent que les facteurs tels que les fonds propres, l'exposition au risque et la couverture en réassurance.

Recommandations :

- Selon la distribution du niveau de la probabilité de ruine en fonction du niveau des fonds propres, à partir de 200 millions de dirhams, on réduit de peu le risque de ruine en augmentant les fonds propres. En plus, pour ces valeurs, la probabilité de ruine oscille autour de 0,02% ; ce qui est plutôt confortable comme situation. La valeur des fonds propres de la compagnie étudiée étant de 250 millions de dirhams, nous jugeons donc qu'il n'y a pas d'intérêt (d'un point de vue ruine) à procéder à un financement des activités : par exemple, augmenter le capital social. Pour illustrer ceci, augmenter les fonds propres de 260 millions de dirhams à 305 millions permettrait de rabaisser la probabilité de ruine de 0,04% à 0,035% environ.
- On a pu remarquer que le taux de chargement n'améliore pas la situation de l'entreprise en termes de risque pour de ruine. Il ne serait donc pas nécessaire de rehausser la valeur du chargement, bien que ceci puisse améliorer les résultats de l'entreprise. Aussi, le marché des assurances étant très concurrentiel, une augmentation du taux de chargement pourrait conduire à une dégradation de la part de marché de la société.

CONCLUSION

Le principal fondement de ce mémoire est la modélisation et l'intégration des éléments non seulement d'actif mais aussi du passif. En effet, les éléments tels que les provisions, les sinistres, les primes, … ont été modélisés au même titre que le taux d'intérêt ou encore l'action ; c'est-à-dire des modélisations faisant appel aux processus stochastiques. Le but de ces modélisations est d'aboutir à des résultats concluants et fondés qui puissent servir d'outils d'aide à la décision dans le cadre de la gestion financière d'une société d'assurance non-vie et de la régulation des probabilités de ruine et de perte.

Dans un premier temps, nous avons abordé les approches théoriques fondamentales de la DFA. Les sujets relatifs à la mise au point d'un modèle de type DFA ont ainsi été abordés. Nous avons aussi présenté les modèles existants que l'on peut utiliser pour modéliser les différents éléments que l'on souhaiterait intégrer dans un modèle DFA. Ce qui fait de ce document un véritable outil qui peut aider le lecteur à mettre en place son propre modèle DFA selon l'objectif recherché.

En second et dernier lieu, nous avons procédé à une étude de cas afin d'illustrer l'usage que l'on peut faire des modèles DFA. Une application a donc été mise au point, et les éléments d'analyse retenus sont axés sur la mesure du risque. Il s'agit de la probabilité de perte et de la probabilité de perte. Afin d'illustrer le fonctionnement de l'application, elle a été mise en œuvre en utilisant des donnés d'une société fictive qui opère dans une seule branche (RC Auto).

Rappelons que plusieurs éléments ont été omis lors de notre étude pratique. L'entreprise considérée est une société monobranche (faute de temps). Il est possible de généraliser le modèle à plusieurs branches d'activités. Dans ce cas, il sera nécessaire de tenir compte de la dépendance entre branches et procéder à une modélisation à l'aide des copules.

En fonction des éléments pris en compte dans la modélisation, les temps de simulations peuvent paraitre assez longs. Pour ce faire, des simplifications peuvent être faites pour réaliser les calculs dans des temps acceptables. Ces simplifications peuvent concerner les méthodes de simulations utilisées. Certaines méthodes sont en fait plus rapides que d'autres. Mais les méthodes les plus lentes sont généralement les plus performantes. Il revient donc à l'actuaire de faire la part des choses et faire des choix convenables.

Les méthodes DFA proposent des outils d'analyse étendus et très diversifiés. La construction d'un modèle DFA dépend de l'objectif visé. Aujourd'hui on présente la Dynamic Financial Analysis comme une technique de l'actuariat moderne.

BIBLIOGRAPHIE

- S. HAMI, *Les modèles DFA : présentation, utilité et application*. Mémoire ISFA 2003
- X. AGENOS, *Appétit pour le risque et gestion stratégique d'une société d'assurance non-vie*. Mémoire Centre d'Etudes Actuarielles, 2006
- L. ALLAG, *Modélisation et allocation stratégique d'actifs dans le cadre du référentiel Solvabilité 2*. Mémoire ISFA, 2008
- A. COSMA, *Modélisation de type DFA d'une institution de prévoyance. Application à la détermination d'une stratégie optimale d'allocation d'actifs.* Mémoire, avril 2005
- R. KAUFMANN, A. GADMER et R. KLETT, *Introduction to dynamic financial analysis*. Pages 215-247
- F. PLANCHET, *DFA- Evaluer les options cachées de votre bilan*. Présentation, Winter & Associés
- H. BELHIMER, *La gestion actif-passif dans une compagnie d'assurances*. Recueil de colloque 2011
- Pierre-Emmanuel THÉROND, *Mesure et gestion des risques d'assurance : analyse critiquedes futurs référentiels prudentiel et d'information financière*, mémoire de thèse. Université Claude-Bernard Lyon1, 2007

Sites internet :
http://www.ressources-actuarielles.net/memoires

ANNEXES

I. Simulations

L’usage des processus stochastiques est très fréquent dans les domaines de finance et d’assurance. Le traitement de plusieurs problématiques de ces secteurs renvoie donc à la simulation des trajectoires des processus utilisés. Il existe plusieurs techniques de simulations, et les différences entre ces techniques peuvent se remarquer tant au niveau de la performance qu’au niveau de la facilité de la mise en œuvre, ou encore au niveau de la rapidité. Ici, nous ne présentons que les techniques dont nous avons fait usage dans notre application. Il s’agit bien de l’algorithme du « Tore mélangé », pour générer des variables aléatoires uniforme sur (0, 1), et la méthode de Box-Muller utilisée pour simuler les variables aléatoires centrées réduites.

1. Algorithme du « Tore mélangé »

L’algorithme du tore mélangé est une méthode dérivée principalement de la technique appelée la « Translation irrationnelle de Tore ». En effet, la méthode originale qu’est l’algorithme du Tore permet de générer une suite de variables aléatoires uniformes. Cependant, elle présente un grand inconvénient : la dépendance terme à terme des nombres générés. C’est dans ce sens que l’algorithme du Tore mélangé a été conçu. L’objectif est donc de remédier au problème de dépendance des variables générées. Avant de présenter l’algorithme du Tore mélangé, nous allons donner à un aperçu de la technique de la « Translation irrationnelle de Tore ».

Rappel : *Translation irrationnelle de Tore*

L’algorithme génère une suite (U_n) de nombres aléatoires uniformes avec usage d’un nombre premier p comme paramètre. La suite s’écrit :

$$U_n = n * \sqrt{p} - \lfloor n * \sqrt{p} \rfloor$$

où $\lfloor \quad \rfloor$ désigne l’opérateur partie entière

En ce qui concerne l’algorithme du Tore mélangé, on prend la valeur U_m à la place de U_n au $n^{\text{è}}$ tirage, où m est une variable aléatoire tel que :

$$\begin{cases} U_m = U_{\varphi(n)} \\ \varphi(n) = \lfloor \alpha * u * N + 1 \rfloor \end{cases}$$

$\alpha \geq 1$: facteur permettant de réduire les chances qu’un nombre soit tiré plusieurs fois

u : réalisation d’une variable aléatoire de loi uniforme

N : Nombre total de tirages à réaliser

Dans notre application, nous avons généré la variable aléatoire uniforme à l'aide de la fonction Rnd de VBA-Excel. Par référence à Pierre-Emmanuel THÉROND dans sa thèse «*Mesure et gestion des risques d'assurance : analyse critique des futurs référentiels prudentiel et d'information financière* », nous avons pris $\alpha = 10$.

2. Méthode de Box-Muller

Il s'agit là de la méthode de simulation de variables aléatoires distribuées selon une loi normale la plus connue. La méthode de Box-Muller à la principale caractéristique de générer des couples de variables aléatoires réelles indépendantes. La paire en question est donnée par :

$$\begin{cases} X_1 = \sqrt{-2 * \ln U_1} * \cos 2 * \pi * U_2 \\ X_2 = \sqrt{-2 * \ln U_1} * \sin(2 * \pi * U_2) \end{cases}$$

U_1 et U_2 sont deux variables aléatoires réelles de loi uniforme, qui sont à priori générées à l'aide de l'algorithme du tore mélangé. On montre que X_1 et X_2 sont indépendants.

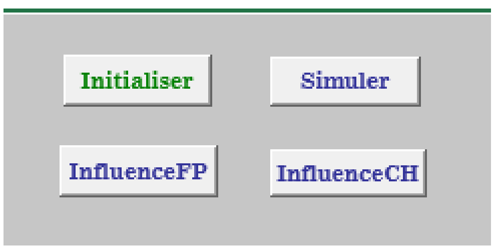
L'un des avantages de cette méthode est la facilité de sa mise en œuvre.

II. Présentation de l'application développée

L'application mise en place dans le cadre de notre étude pratique concerne essentiellement les compagnies d'assurance non-vie opérant dans une seule branche. Les normes règlementaires sont celles du Maroc. La plupart des différents traitements et calculs sont effectués à l'aide de codes VBA. Les résultats que fournit l'application sont :

a. les probabilités de perte et de ruine, et le taux de couverture du minimum règlementaire au fil des différentes dates de l'horizon temporel (l'horizon est **fixé** à **5ans**).
b. Evolution des parts et rentabilité des différents actifs du portefeuille pour chacune des cinq années de projection
c. Etude de l'influence du niveau des fonds propres sur les probabilités de perte des années de l'horizon
d. Etude de l'influence du taux de chargement sur les probabilités de perte des années de projection
e. Tableau de bord

Quatre boutons principaux permettent de manipuler l'application et de générer le résultat voulu.



- Le bouton **Simuler** permet de générer les résultats a, b et e.
- Les boutons **InfluenceFP** et **InfluenceCH** permettent d'avoir un aperçu de l'impact qu'ont respectivement la variation de capitaux propres et de taux de chargement sur les probabilités de perte.

Indicateurs clés	1 an	2 ans	3 ans	4 ans	5 ans
Resultat de l'exercice	22968480	19105983	12947001	12488879	19376228
Minimum régl. (MSR)	179278993	193979983	209962996	228518250	246824840
Fonds propres	281968737	292780920	303063294	312345312	321744124
TAUX DE COUVERTU	158%	151%	145%	137%	131%
PROBA. DE PERTE	4,80%	4,74%	5,02%	5,04%	4,80%
PROBA. DE RUINE	0,10%	0,06%	0,02%	0,04%	0,06%

Initialiser Simuler

InfluenceFP InfluenceCH

Allocation et Rendement	1 an		2 ans		3 ans		4 ans		5 ans	
	Part	Renta.	Part	Renta.	Part	Renta.	Part	Renta.	Part	Renta.
OBLIGATIONS	50,49%	4,76%	51%	4,78%	51,45%	4,78%	51,93%	4,78%	52,41%	4,78%
ACTIONS	24,64%	2,28%	24%	2,31%	23,95%	2,31%	23,60%	2,31%	23,25%	2,31%
IMMOBILIER	10,12%	5,00%	10%	5,00%	10,36%	5,00%	10,48%	5,00%	10,59%	5,00%
MONETAIRE	14,75%	2,00%	14%	2,00%	14,24%	2,00%	13,99%	2,00%	13,75%	2,00%
RENTABILITE MOYENNE		3,80%		3,84%		3,84%		3,90%		3,64%

TABLEAU DE BORD

	Horizon 1 an		Horizon 2 ans		Horizon 3 ans		Horizon 4 ans		Horizon 5 ans	
	Couverture de marge	Proba de perte	Couverture de marge	Proba de perte	Couverture de marge	Proba de perte	Couverture de marge	Proba de perte	Couverture de marge	Proba de perte
Valeur limite	200%	3%	180%	3%	180%	3%	180%	3%	180%	3%
valeur estimée	158%	0,10%	151%	0,06%	145%	0,02%	137%	0,04%	131%	0,06%

Figure 20 : Outputs avec le bouton **Simuler**

FP	Pr. Ruine1	Pr. Ruine2	Pr. Ruine3	Pr. Ruine4	Pr. Ruine5
65000000	0,56%	0,31%	0,59%	0,58%	0,45%
80000000	0,25%	0,34%	0,41%	0,47%	0,45%
95000000	0,32%	0,35%	0,32%	0,26%	0,38%
110000000	0,18%	0,28%	0,20%	0,32%	0,30%
125000000	0,18%	0,18%	0,28%	0,31%	0,22%
140000000	0,20%	0,17%	0,23%	0,22%	0,24%
155000000	0,18%	0,15%	0,23%	0,20%	0,15%
170000000	0,03%	0,12%	0,15%	0,12%	0,07%
185000000	0,11%	0,16%	0,11%	0,17%	0,05%
200000000	0,07%	0,11%	0,06%	0,06%	0,11%
215000000	0,05%	0,08%	0,10%	0,07%	0,08%
230000000	0,09%	0,09%	0,08%	0,08%	0,02%
245000000	0,06%	0,03%	0,06%	0,05%	0,05%
260000000	0,04%	0,06%	0,05%	0,04%	0,07%
275000000	0,13%	0,02%	0,03%	0,04%	0,07%
290000000	0,05%	0,09%	0,07%	0,09%	0,07%
305000000	0,03%	0,04%	0,03%	0,04%	0,04%
320000000	0,06%	0,05%	0,07%	0,07%	0,08%
335000000	0,06%	0,03%	0,00%	0,02%	0,02%

Chargemen	Pr. Ruine1	Pr. Ruine2	Pr. Ruine3	Pr. Ruine4	Pr. Ruine5
21%	0,06%	0,07%	0,06%	0,10%	0,02%
22%	0,05%	0,06%	0,06%	0,06%	0,04%
23%	0,02%	0,06%	0,08%	0,06%	0,08%
24%	0,04%	0,04%	0,07%	0,03%	0,04%
25%	0,06%	0,07%	0,05%	0,11%	0,07%
26%	0,04%	0,07%	0,11%	0,10%	0,07%
27%	0,04%	0,03%	0,11%	0,05%	0,06%
28%	0,07%	0,01%	0,04%	0,06%	0,05%
29%	0,12%	0,05%	0,07%	0,07%	0,05%
30%	0,03%	0,04%	0,10%	0,04%	0,05%
31%	0,05%	0,07%	0,05%	0,04%	0,07%
32%	0,08%	0,01%	0,03%	0,05%	0,07%
33%	0,03%	0,06%	0,07%	0,06%	0,07%
34%	0,03%	0,14%	0,05%	0,08%	0,10%
35%	0,06%	0,01%	0,06%	0,08%	0,02%
36%	0,05%	0,03%	0,08%	0,03%	0,04%
37%	0,05%	0,03%	0,03%	0,05%	0,04%
38%	0,02%	0,09%	0,05%	0,08%	0,08%
39%	0,03%	0,03%	0,02%	0,02%	0,01%

Figure 21 : Influence de la variation de fonds propres et de taux de chargement

L'étude d'impact d'un paramètre permet en fait de créer un tableau contenant les différentes valeurs de probabilités correspondantes à chaque niveau. A l'aide de ces données, on trace les courbes associées puis on procède à un lissage. Le lissage de la courbe de la probabilité de ruine en fonction des fonds propres est fait par une fonction polynômiale de degré6. Par contre la courbe de l'influence du taux de chargement est lissée par une moyenne mobile d'ordre 2. Les deux lissages en question sont illustrés par la figure ci-dessous :

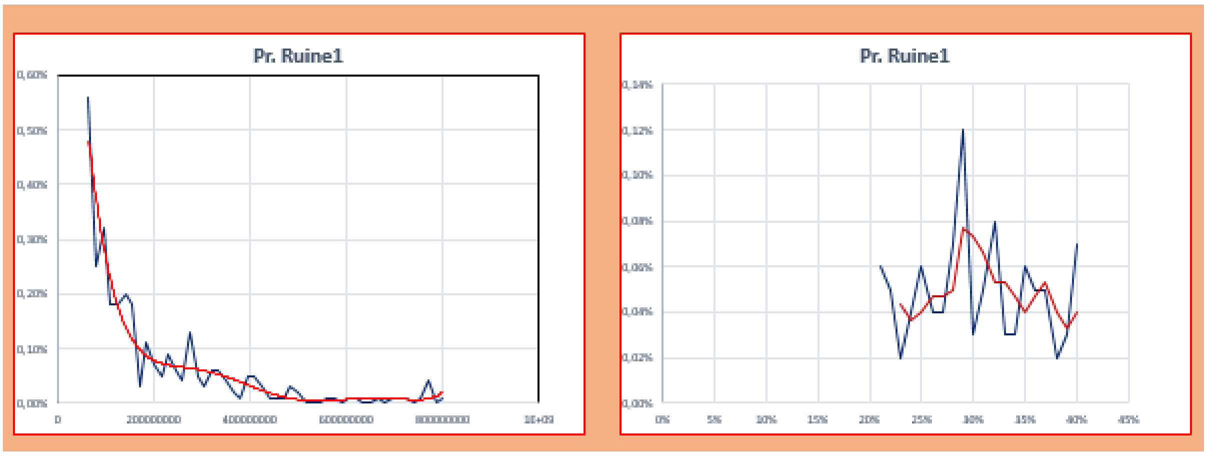


Figure 22 : Courbes de l'influence des fonds propres et du taux de chargement (horizon 1 an)

Avant de procéder aux différentes simulations, l'utilisateur doit fournir tous les renseignements concernant l'activité de la société de même que les valeurs des différents paramètres utilisés lors de la modélisation des facteurs comme le taux d'intérêt, l'inflation, la sinistralité, … toutes les hypothèses et paramètres nécessaires sont renseignés dans la feuille « Hyp_para » de l'application dont les cellules sont illustrées par la figure suivante :

Paramètres généraux

Nombre de contrats	Fréquence moyenne	Moyenne	Ecart-type
201088	0,093	8,352	1,268

Loi Log-normale

Paramètres de taux (CIR)

a	b	r0	Sigma
30,305%	4,788%	2,974%	0,730%

Paramètres de gestion

Taux de Chargement	Augmentation de primes	Acquisition	Gestion de polices
35%	3%	10%	10%

Annulation de contrats	Nouvelles affaires	Chargement de sécurité	Gestion de sinistres
2%	5%	5%	10%

Paramètres Actions

Dividende	Volatilité	Coef. de corr.	Prix initial
2,5%	0,347%	0	8000,00

Paramètres Oblig. Et Immob

Coupon Oblig.	Loyer Immob.	Rendement Immob.
5,00%	2,00%	5,00%

Paramètres inflation

alpha	beta	sigma
-0,0140%	0,7557%	1,5397%

Allocation initiale

	Actions	Obligation	Immobilier	Monétaire
Part	25,00%	50,00%	10,00%	15,00%
Valeur	452726200	905452400	181090480	271635720

Figure 23 : Hypothèses et paramètres

En plus des paramètres, l'utilisateur doit aussi renseigner les chiffres liés à la situation initiale de l'entreprise : le triangle de paiements, le bilan, le compte de résultat, la constitution de la marge. Une feuille est conçue spécialement pour l'enregistrement de ces données.

Rappelons que l'évaluation des provisions est faite à priori. En effet, on construit un tableau de cadences de paiements sur 10 ans à base duquel on constitue les triangles de paiements des années de projection. Une fois les triangles constitués, on procède à l'évaluation des PSAP dont les valeurs sont utilisées par la suite lors des simulations.