



المندوبية السامية للتخطيط  
HAUT-COMMISSARIAT AU PLAN

ROYAUME DU MAROC  
\*.\*.\*.\*.\*  
HAUT COMMISSARIAT AU PLAN  
\*.\*.\*.\*.\*  
INSTITUT NATIONAL  
DE STATISTIQUE ET D'ECONOMIE APPLIQUEE



**INSEA**

## Projet de Fin d'Etudes

\*\*\*\*\*

Solvabilité II :

Calcul du Best Estimate et du Solvency Capital Requirement

Préparé par : **M. Maurel EDZIVANTALI**  
**M. Mericain CLAUDE**

Sous la direction de : **M. Abderrahim OULIDI (INSEA)**  
**M. Taoufik LACHKER (LA MAROCAINE VIE)**

*Soutenu publiquement comme exigence partielle en vue de l'obtention du*

**Diplôme d'Ingénieur d'Etat**

Option : Actuariat-Finance

*Devant le jury composé de :*

- **M. Abderrahim OULIDI (INSEA)**
- **M. Driss EFFINA (INSEA)**
- **M. Taoufik LACHKER (LA MAROCAINE VIE)**



## Résumé

Le calcul des provisions techniques et la connaissance du niveau des fonds propres sont pour les assureurs une priorité pour une gestion saine et durable de leurs activités. La suffisance du passif constitue donc une condition sine qua non à la poursuite des activités. Depuis quelques années l'Union Européenne se prépare à l'entrée en vigueur de nouvelles normes de solvabilité pour les compagnies d'assurance, et par conséquent à de forts changements dans le système d'évaluation des provisions techniques et du niveau des fonds propres réglementaires.

La réforme Solvabilité II comme Bâle II pour les banques se veut innovant, en créant une rupture avec le système d'évaluation préexistant jugé: dépassé, inadapté et incohérent. La cohérence Solvabilité II l'emmène avec une évaluation économique des actifs et passifs d'assurance. Dorénavant, les provisions techniques seront calculées en projetant les flux jusqu'à extinction du portefeuille et ceci pour un grand nombre de simulations. La rupture c'est aussi dans le calcul des fonds propres. Le niveau des fonds propres ne sera plus évalué à partir d'un ratio fixé d'avance mais par rapport aux risques réellement encourus par les passifs et actifs de la compagnie.

Les outils apportés par Solvabilité II à travers l'évaluation économique du passif reviennent à réaliser aussi un test de suffisance du passif et à calibrer le niveau des fonds propres requis de manière à réduire la probabilité de ruine à une fois tous les deux cent ans.

Le présent rapport a pour objet le calcul des provisions techniques et l'évaluation du niveau des fonds propres sous les directives de Solvabilité II en assurance vie. Pour se faire, dans une première partie nous présenterons l'assurance vie et le cadre d'application de Solvabilité II. Le bien-fondé de cette partie réside essentiellement dans la présentation des spécifications techniques qui constituent l'outil de base pour mettre en place un générateur de scénarii économique respectant les normes de Solvabilité II.

Dans une seconde partie nous présenterons les outils nécessaires à l'élaboration d'un générateur stochastique de scénarii économiques. En prélude de cette partie nous décrirons la méthode utilisée pour la génération des nombres aléatoires. Puis, nous décrirons les étapes indispensables à l'élaboration d'un générateur de scénarii économiques, à savoir: la modélisation de l'actif, la modélisation du passif et la modélisation des interactions actifs-passifs.

La dernière partie est consacrée à l'analyse des résultats.

L'application a été faite sur un des produits d'épargne de LA MAROCAINE VIE.

**Mots clés : Solvabilité II, Solvency Capital Requirement, Net Asset Value, Marge de risque, Best estimate, QIS4, QIS5, Exigence.**

## Dédicaces

---

*A mon père Athanase EDZIVANTALI, le meilleur père qu'un fils n'ait jamais eu.*

*A ma mère Alphonsine MABEYIWE, une femme exceptionnelle, maman tu es un miracle vivant.*

*A Mericain CLAUDE, un ami dont l'estime et l'admiration que je lui porte sont sans pareilles.*

## Dédicaces

---

A mon Père **CLAUDE**, le meilleur père du monde,

A ma défunte Mère **JILIAMINOSY**, une meilleure mère du monde. Même si tu n'es plus de ce monde, je te garde pour toujours dans mon cœur Maman,

A mes frères et sœurs, mes amis les plus chers et les plus confidents au monde,

A ma famille,

A tous mes amis et amies,

A tous les Inseaistes,

A **Ndèye Oumy Diagne, Constance Oho Kambiré et Stéphanie Soedjede Akos Pamela**, des sœurs pour moi,

A **Maurel Edzivantali Herman**, un frère pour moi,

Je dédie ce modeste travail.

**Mericain CLAUDE**

## Remerciements

---

Nous remercions de prime abord Dieu, le Créateur de toutes choses. On ne saurait jamais le remercier pour tout ce qu'Il fait dans la vie.

Nous tenons à exprimer nos remerciements les plus sincères et à témoigner toute notre reconnaissance à Monsieur **Taoufik Lachker**, notre responsable de stage pour son accueil, sa disponibilité, ses précieux conseils tout le long du stage et sa participation au bon cheminement de ce rapport.

Nous remercions Monsieur **Abderrahim Oulidi**, qui nous a été d'une grande aide tout au long de la réalisation de ce projet en nous donnant ses conseils et ses remarques qui ont été très constructifs.

Nous tenons à remercier sincèrement tous les cadres et les employés de **LA MAROCAINE VIE** pour leur accueil, leur sympathie et leur bonne humeur.

Nos remerciements vont également à tous les enseignants de **l'Institut National de Statistique et d'Economie Appliquée** pour leurs efforts et pour la formation qu'ils nous ont inculquée le long de notre parcours au sein de cet institut.

Nos remerciements vont à toutes et tous ceux qui, de loin ou de proche, ont contribué à l'aboutissement de ce travail.

# Table des matières

---

<b>Résumé</b> .....	- 1 -
<b>Dédicaces</b> .....	- 4 -
<b>Liste des abréviations</b> .....	- 10 -
<b>Liste des figures</b> .....	- 11 -
<b>Liste des tableaux</b> .....	- 12 -
<b>Introduction</b> .....	- 13 -
Chapitre 1 : Présentation de l'assurance vie Maroc.....	- 14 -
<b>I. Evolution du marché de l'assurance vie au Maroc</b> .....	- 14 -
<b>II. Les principaux types de contrats</b> .....	- 15 -
<b>II.1 Les contrats d'épargne</b> .....	- 15 -
<b>II.2 Les contrats de prévoyance</b> .....	- 15 -
Chapitre 2 : Présentation de la Marocaine vie.....	- 16 -
Chapitre 3: La réforme solvabilité II .....	- 17 -
<b>I. De Solvabilité I à Solvabilité II</b> .....	- 17 -
<b>I.1. Historique</b> .....	- 17 -
<b>I.2. Le processus de mise en place de Solvabilité II</b> .....	- 18 -
<b>I.3. Les objectifs de Solvabilité II</b> .....	- 18 -
<b>I.4. Les piliers de la réforme Solvabilité II</b> .....	- 19 -
<b>I.5. Les Etudes quantitatives d'impact (QIS)</b> .....	- 20 -
<b>II. Comparaison entre Solvabilité I et les exigences de Solvabilité au Maroc</b> .....	- 21 -
Chapitre 4: Les spécifications techniques du QIS5 .....	- 23 -
<b>I. Les provisions techniques</b> .....	- 23 -
<b>I.1. Le Best estimate</b> .....	- 23 -
<b>I.2. La Marge de risque</b> .....	- 25 -
<b>II. Les capitaux requis</b> .....	- 26 -
<b>II.1 Minimum Capital Requirement (MCR)</b> .....	- 26 -
<b>II.2 Solvency Capital Requirement</b> .....	- 27 -
Chapitre 5: Générateur de scénarios économiques.....	- 40 -
<b>I. Modélisation de l'actif</b> .....	- 40 -
<b>I.1. Outils mathématiques</b> .....	- 41 -
<b>I.2. Génération de nombres aléatoires</b> .....	- 44 -
<b>I.3. Validation de la loi uniforme de l'échantillon simulé</b> .....	- 47 -
<b>I.4. Simulation de variables aléatoires gaussiennes</b> .....	- 52 -
<b>I.5. La structure par terme des taux d'intérêt</b> .....	- 57 -
<b>I.6. Choix du modèle : Le modèle Cox Ingersoll et Ross (CIR)</b> .....	- 59 -
<b>I.7. Modélisation des obligations</b> .....	- 64 -
<b>I.8. Modélisation des actions</b> .....	- 64 -
<b>I.9. Modélisation de l'immobilier</b> .....	- 67 -
<b>I.10. Modélisation de l'OPCVM</b> .....	- 67 -
<b>II. Modélisation du passif</b> .....	- 67 -

II.1.	Nombre d'adhérent .....	- 67 -
II.2.	Versements.....	- 68 -
II.3.	Réserves au début de l'année.....	- 69 -
II.4.	Montant des décès.....	- 69 -
II.5.	Rachats nets de pénalité .....	- 69 -
II.6.	Capitaux à échéance.....	- 70 -
II.7.	Réserves à la fin de l'année .....	- 70 -
II.8.	Participation au bénéfice .....	- 71 -
II.9.	Pénalités .....	- 71 -
II.10.	Les charges de gestion .....	- 71 -
II.11.	Modélisation des rachats conjoncturels.....	- 72 -
III.	Modélisation des interactions entre l'actif et le passif.....	- 73 -
III.1.	Les produits financiers.....	- 73 -
III.2.	L'allocation stratégique d'actifs .....	- 74 -
III.3.	La revalorisation du passif .....	- 74 -
IV.	Schéma d'un générateur stochastique de scénarios économique .....	- 75 -
Chapitre 6 : Analyse des résultats .....		76
I.	Calcul du Best Estimate .....	76
II.	Présentation des projections des flux .....	78
II.1	Projection des primes.....	79
II.2	Projection des prestations dues aux rachats.....	79
II.3	Projections des prestations dues aux décès.....	80
II.4	Projection des frais de gestion des contrats.....	81
II.5	Les frais de placements.....	81
II.6	Les flux totaux.....	81
II.7	Valeur du Best estimate .....	82
III.	Calcul du Solvency Capital Requirement sous le QIS 5.....	84
III.1.	Le risque rachat.....	84
III.2.	Le risque de dépenses .....	86
III.3.	Le risque action.....	86
III.4.	Le risque taux d'intérêt .....	87
III.5.	Agrégation des sous modules et valeur du SCR sous le QIS5 .....	88
IV.	Calcul du SCR sous les spécifications du QIS 4.....	89
IV.1.	Le capital requis au titre du risque action.....	89
IV.2.	Le capital requis au titre du risque taux d'intérêt QIS4.....	90
IV.3.	Agrégation et calcul du SCR sous le QIS 4.....	91
V.	Calcul de la marge de risque .....	91
IV.4.	La Duration du passif.....	92
IV.5.	Valeur de la marge de risque.....	92
VI.	Bilan de Solvabilité II.....	92
VI.1.	Sous le QIS5.....	93
VI.2.	Sous le QIS 4.....	93
Conclusion.....		95
Annexes .....		97
Annexe 1 : Les constantes de Moro .....		97
Annexe 2 : la méthode du Bootstrap .....		97

<b>Annexe 3 : Table de mortalité TD 88-90</b> .....	98
<b>Annexe 4 : Structure par terme des taux court</b> .....	99
<b>Annexe 5 : Le modèle de MERTON</b> .....	105
<b>Annexe 6 : Courbe d'actualisation (celle de BAM)</b> .....	106
<b>Annexe 7 : Données historiques de MASI de Bourse de CASABLANCA : 2009-2011</b> .....	106
<b><i>Bibliographie</i></b> .....	107
<b><i>Publications</i></b> .....	107
<b><i>Sites Internet</i></b> .....	107

# Liste des abréviations

---

- **BAM** : Bank AL Maghrib
- **B&S** : **Black and Scholes**
- **CEIOP** : Committee of European Insurance and Occupational Pensions
- **CIR** : Cox Ingersoll Ross
- **DAPS** : Direction des Assurances et de la Prévoyance Sociale
- **EEE** : Espace Economique Européen
- **EIOPA** : European Insurance and Occupational Pensions Authority
- **IAS** : International Accounting Standards
- **IFRS** : International Financial Reporting Standards
- **IS** : Impôt sur les Sociétés
- **MASI** : Moroccan All Shares Index
- **MCR** : Minimum Capital Requirement
- **NAV** : Net Asset Value
- **OCDE** : Organisation de Coopération et de Développement Economiques
- **ORSA** : Own Risk and Solvency Assessment
- **OPCVM** : Organisme de Placement Collectif en Valeurs Mobilières
- **PPNA**: Provisions Pour Primes Non Acquises
- **PSAP** : Provisions Pour Sinistres à Payer
- **QIS** : Quantitative Impact Studies
- **RC** : Rachat Conjoncturels
- **RTS** : Reporting To Supervisor
- **SCR** : Solvency Capital Requirement
- **SFCR** : Solvency and Financial Condition Report
- **SICAV** : Société d'Investissement à Capital Variable
- **TA** : Taux Attendu
- **VBA** : Visual Basic for Application
- **VaR** : Value at Risk

# Liste des figures

---

Figure 1 : Evolution des primes émises 2011-2012 .....	14 -
Figure 2 : Processus de Lamfalussy.....	18 -
Figure 3 : Bilan de Solvabilité II.....	19 -
Figure 4 : Chronologie des QIS .....	21 -
Figure 5 : illustration du calcul Best Estimate.....	24 -
Figure 6 : Cartographie de risques.....	27 -
Figure 7 : Processus pour générer des scénarios financiers stochastiques de T périodes.....	40 -
Figure 8 : Simulation de 500 nombres aléatoires grâce à la fonction <b>Rnd()</b> sous VBA.....	45 -
Figure 9 : Simulation de 500 nombres aléatoires par l'algorithme du Tore .....	46 -
Figure 10 : Test d'adéquation de loi uniforme sur le générateur Rnd de VBA.....	47 -
Figure 11 : Test d'adéquation de loi uniforme sur le générateur du Tore .....	48 -
Figure 12 : Mise en évidence des corrélations du générateur de Tore .....	49 -
Figure 13 : Corrélogramme de la suite générée par l'algorithme du Tore (p=5) .....	50 -
Figure 14 : Mise en évidence de corrélation des nombres simulés par Tore mélangé .....	51 -
Figure 15 : Corrélogramme de la suite générée par Tore mélangé (N=15000, p=5) .....	52 -
Figure 16 : Application de l'inversion de la fonction de répartition par Tore mélangé sous SAS .....	55 -
Figure 17 : Application de la méthode de Box-Müller sous SAS.....	55 -
Figure 18 : Application d'inversion de la fonction de répartition par Tore mélangé.....	56 -
Figure 19 : application de la méthode du Box-Müller .....	57 -
Figure 20 : Evolution du taux court.....	63 -
Figure 21 : Scénario moyen avec le CIR .....	63 -
Figure 22 : Cours de l'action.....	66 -
Figure 23 : générateur de scénarios économiques.....	75 -
Figure 24 : Interface d'application sous VBA-EXCEL pour effectuer les calculs .....	77
Figure 25 : Nombre d'épargnants.....	78
Figure 26 : projection des primes .....	79
Figure 27 : Projection des rachats .....	79
Figure 28 : Projection des prestations décès .....	80
Figure 29 : Projection des frais de gestion .....	81
Figure 30 : projection des frais de placements .....	81
Figure 31 : Projection des flux totaux .....	82
Figure 32 : Flux de chaque exercice pour obtenir la valeur du Best Estimate .....	83
Figure 33 : Graphique de convergence du Best Estimate .....	84
Figure 34 : Bilan de Solvabilité II QIS 5.....	93
Figure 35 : Bilan de solvabilité II QIS 4 .....	93
Figure 36 : courbe d'actualisation .....	106
Figure 37 : Données historiques de MASI 2009-2011 .....	106

# Liste des tableaux

---

Tableau 1 : Les 3 piliers de solvabilité II .....	- 20 -
Tableau 2 : Comparaison entre le système marocain et solvabilité I .....	- 21 -
Tableau 3 : Matrice de corrélation entre les risques sous solvabilité II .....	- 28 -
Tableau 4 : Matrice de corrélation entre les sous modules d'un risque .....	- 29 -
Tableau 5 : choc pour le risque de mortalité .....	- 30 -
Tableau 6 : choc pour le risque de longévité.....	- 30 -
Tableau 7 : choc pour le risque d'invalidité .....	- 31 -
Tableau 8 : choc pour le rachat .....	- 31 -
Tableau 9 : choc pour la dépense .....	- 32 -
Tableau 10 : choc pour le risque marché.....	- 34 -
Tableau 11 : choc pour le risque taux.....	- 35 -
Tableau 12 : choc pour le risque action .....	- 36 -
Tableau 13 : risque des spreads pour les obligations .....	- 37 -
Tableau 14 : Note de la contrepartie .....	- 38 -
Tableau 15 : Note de crédit .....	- 38 -
Tableau 16 : Paramètres du modèle CIR.....	- 62 -
Tableau 17 : paramètres pour le rachat conjoncturel .....	- 73 -
Tableau 18 : Hypothèses de projections .....	76
Tableau 19 : Duration du passif .....	92
Tableau 20 : Constantes de l'algorithme de Moro .....	97
Tableau 21 : Table de mortalité TD 88-90.....	98

# Introduction

---

La conformité à Solvabilité II est aujourd'hui l'une des grandes préoccupations des équipes actuarielles au sein des compagnies d'assurance et des centres de recherches spécialisés en actuariat. La grande réforme assurantielle change en grande partie les méthodes classiques d'évaluation du passif en modifiant la façon d'appréhender le capital et la façon de calculer les provisions techniques. Ces changements de méthodes demandent de plus en plus de réflexions au vu de nombreuses exigences qu'apporte la réforme. Les exigences de Solvabilité II sont de nature quantitative et qualitative, elles constituent donc le socle de l'avenir du cadre réglementaire de l'assurance. Le mieux, les compagnies le savent c'est d'être prêt le plus tôt possible en constituant en leur sein des équipes qui réfléchissent sur la mise en place de la réforme.

Dans ce contexte de réflexion de la mise en place de solvabilité II, les compagnies d'assurance au Maroc ne veulent pas être à la traîne. A cet effet les assureurs marocains pensent déjà à se conformer aux méthodes de calcul exigées par Solvabilité II. Cette conformité leur permettra de connaître les fonds propres nécessaires lors d'un éventuel passage aux directives de Solvabilité II. Le passage aux exigences de Solvabilité II passe par une évaluation approfondit des engagements de l'assureur et du capital permettant de garantir ces engagements. Il paraît alors évident aux assureurs de réfléchir premièrement sur le pilier1 de solvabilité II. Le pilier1 de solvabilité II exige l'évaluation économique du passif en passant par le calcul du Solvency Capital requirement (SCR), du Minimum Capital Requirement (MCR), de la provision Best Estimate pour les passifs répliquables et à l'évaluation en valeur de marché pour les passifs non répliquables. Le SCR est calibré de manière à réduire la probabilité de ruine à une fois tous les deux cent ans. Il peut être calculé sous une formule standard ou en appliquant un modèle interne conformément à la nature des risques encourus. Le Best Estimate est déterminé en projetant les flux financiers jusqu'à extinction du portefeuille.

Pour respecter les exigences d'évaluation économique de Solvabilité II une modélisation stochastique est de mise. Elle doit tenir en compte les allocations stratégiques d'actifs, les interactions actifs-passifs et le comportement des assurés face à l'évolution du marché.

C'est dans cet univers dominé par la maîtrise du risque et la conformité aux exigences réglementaires que La MAROCAINE VIE nous a reçus au sein de son équipe actuarielle afin de réfléchir sur le calcul de la provision Best Estimate et du Solvency Capital Requirement généré par le risque de souscription vie et le risque de marché.

## Chapitre 1 : Présentation de l'assurance vie Maroc

L'assurance vie constitue un outil fondamental de protection et de planification. C'est un contrat par lequel l'assureur s'engage envers le souscripteur à verser au bénéficiaire désigné une somme déterminée dont l'exécution dépend d'un événement ou d'un terme convenu dans le contrat.

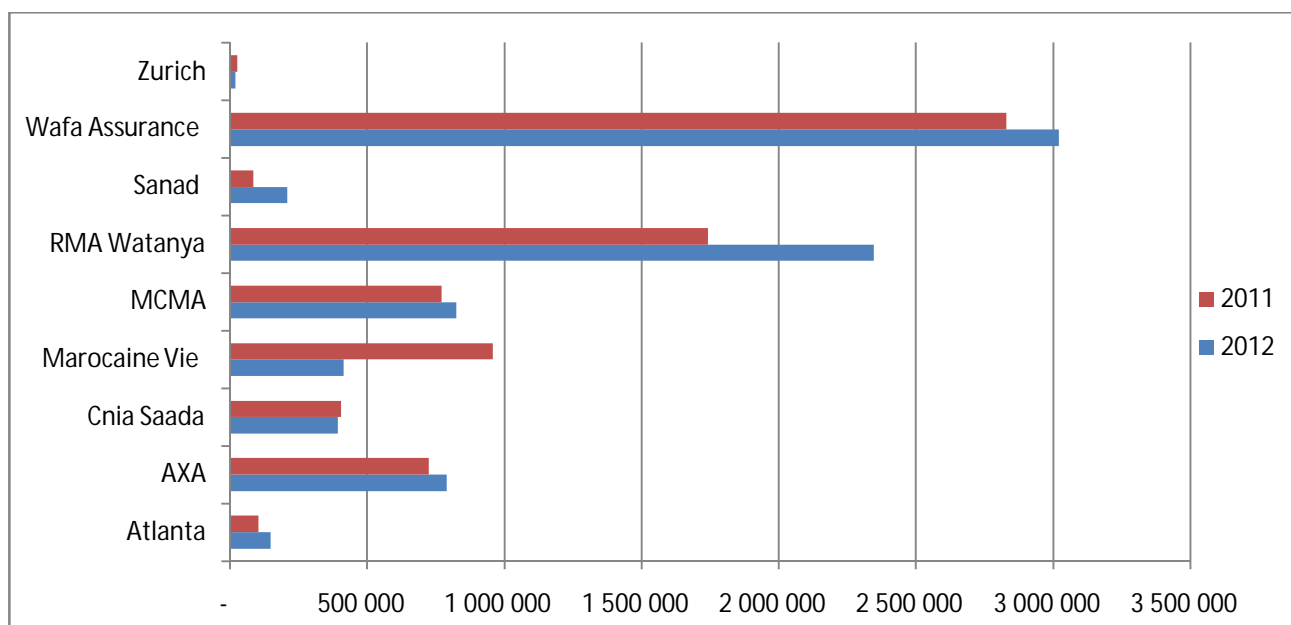
A travers les sommes importantes qu'il mobilise, le secteur de l'assurance vie est un acteur important dans la collecte de l'épargne intérieure et dans son acheminement vers le financement des besoins de l'économie. Depuis quelques années le marché de l'assurance vie au Maroc est dans une phase d'expansion vertigineuse, progressant à une vitesse phénoménale, il est devenu le garant du bel avenir de l'assurance au Maroc. La progression est démesurée : 16,08% en 2011 et 14,71% en 2012. Avec ces taux de croissance inédits, nul ne doute que l'assurance vie est l'un des secteurs les plus dynamiques de l'économie marocaine.

### I. Evolution du marché de l'assurance vie au Maroc

Porté par une excellente synergie entre les banques et les assurances, le chiffre d'affaire de l'assurance vie au Maroc ne cesse d'augmenter. Il est passé de 4 122,51 millions en 2006 à 7650,62 millions en 2011, soit une hausse de 85,58%. Avec 32% des primes émises la branche vie et capitalisation est avec l'automobile les branches les plus dominantes du marché de l'assurance.

Le graphique ci-dessous montre l'évolution des primes émises en assurance vie et capitalisation entre 2011 et 2012 pour les principaux assureurs.

Figure 1 : Evolution des primes émises 2011-2012



## II. Les principaux types de contrats

Le marché de l'assurance vie au Maroc est composé principalement des contrats modernes, dans lesquels l'assuré vise à constituer une épargne. A ce type de contrat s'ajoutent les contrats de retraite dans lesquels l'assuré vise à compléter sa retraite et les contrats de prévoyance dans lesquels l'assuré vise à se prémunir contre les risques de décès, d'incapacité, d'invalidité, etc.

### II.1 Les contrats d'épargne

Il existe schématiquement deux types de contrats d'épargne qui conduisent à des prises de risques totalement différentes pour l'assureur :

- Les produits en devises :

Les produits en devises se caractérisent par le fait que leur garantie est exprimée en dirhams. Cette garantie correspond toujours pour l'assureur à un engagement de taux de rendement envers ses clients.

*Exemple : L'assuré verse 1000 dirhams et l'assureur s'engage à revaloriser cette somme à un taux annuel au moins à 3%. En d'autres termes, l'assureur s'engage sur un montant d'épargne acquise au moins égale à 1030 dirhams à la fin de l'année (à laquelle peuvent s'ajouter des participations aux bénéfices).*

- Les contrats en unités de compte :

Un contrat en unités de compte se caractérise par une garantie exprimée par un nombre d'unités de compte (action, obligation, OPCVM ...). En d'autres termes, l'assureur garantit à son assuré en contrepartie des primes versées un nombre de titres sans s'engager sur la valeur de ces titres.

*Exemple : L'assuré verse 1000 dirhams avec lesquels l'assureur achète des parts de la SICAV X. La part vaut à cette date 100 dirhams. L'assureur acquiert donc 10 parts et s'engage à verser à toute date la valeur de 10 parts de la SICAV X. Si au bout d'un an l'assuré souhaite récupérer son épargne, l'assureur lui verse ainsi 1200 dirhams si la valeur de la part a augmenté de 20% et 800 dirhams si la valeur de la part a baissé de 20%.*

### II.2 Les contrats de prévoyance

Ces contrats ont pour vocation de couvrir les risques de décès, avec des modulations éventuelles selon que le décès résulte d'une maladie ou d'un accident, ainsi que les risques d'arrêt de travail et d'invalidité.

## Chapitre 2 : Présentation de la Marocaine vie

---

Créée en 1978, La Marocaine Vie est la seule compagnie d'assurance au Maroc spécialisée dans les branches d'assurance de personnes.

Parmi les valeurs essentielles fixées par la Marocaine Vie nous trouvons :

- Le professionnalisme : Cette caractéristique est renforcée par le développement du savoir-faire et de l'échange de l'expérience.
- L'esprit d'équipe : Le partage du savoir et du savoir-faire est l'une des caractéristiques du travail en groupe qui permet d'aboutir à un travail efficace et par suite une amélioration remarquable des prestations.
- L'innovation : La marocaine vie essaye d'inventer de nouveaux produits et de nouveaux services qui répondent aux besoins de sa clientèle et attirent des nouveaux adhérents.

Après avoir été acquise par le Groupe Société Générale en 2001, la Marocaine Vie s'est fixé comme objectif le développement de la bancassurance à travers les réseaux et les filiales de la Société Générale au Maroc. Ainsi une gamme de produits de bancassurance a été mise en place. Il s'agit de Vital Retraite, Vital Education, Vital Protection et Vital Hospitalisation.

En 2007, la Marocaine Vie a lancé les premiers contrats multi-supports en unités de compte avec la Société Générale.

L'année 2010, La Marocaine Vie vient de lancer «Retraite Multi support Entreprise». Il s'agit d'une solution d'assurance complémentaire collective destinée aux entreprises. Les contrats souscrits sont adossés à des supports en dirhams, des OPCVM actions, monétaires ou encore obligataires. Ce type de contrat suppose une prise de risque sur les marchés. De même il offre un ensemble d'avantages :

- ❖ Il permet de basculer d'un support à l'autre sans imposition.
- ❖ Chaque salarié pourra gérer son épargne selon sa propre politique d'investissement.
- ❖ Plusieurs avantages fiscaux accompagnent ce contrat.
- ❖ Pour l'entreprise, Les primes versées sont déductibles du calcul de l'IS.
- ❖ Pour le salarié, l'avantage fiscal se situe à l'entrée et au moment du départ à la retraite.
- ❖ Le capital et la rente bénéficient d'un abattement de 40%.

## Chapitre 3: La réforme solvabilité II

---

Dans un monde en perpétuelle évolution rien ne doit demeurer stable, tout doit avancer, tout doit être amélioré. Dans ce contexte d'optimisation de la gestion et de la meilleure évaluation du risque, une idée naquit il y'a déjà près d'une décennie, celle de réformer le cadre réglementaire de l'assurance européenne en s'inspirant de la grande réforme bancaire de Bâle II. C'est ainsi que commencèrent les premières réflexions sur la réforme Solvabilité II.

La solvabilité d'une compagnie se définit comme la capacité de l'assureur à tenir ses engagements envers ses assurés et ses autres créanciers. Dans le but d'assurer une meilleure protection de ses engagements, Solvabilité II innove avec une nouvelle approche de calcul des provisions techniques et du capital réglementaire. De ce fait les outils apportés par Solvabilité II permettent de réduire la probabilité de ruine à une fois tous les deux cent ans.

### **I. De Solvabilité I à Solvabilité II.**

#### **I.1. Historique**

Depuis l'instauration de Solvabilité I, peu de modifications ont été faites en vue d'améliorer le cadre réglementaire. Le calcul de la solvabilité est resté quasiment inchangé, seules certaines composantes ont été ajoutées pour mieux refléter la situation réelle de la compagnie. Avec Solvabilité I, la solvabilité de la compagnie est évaluée au  $31/12/N$ , et l'assureur est tenu d'avoir des fonds propres au moins égale à sa marge de solvabilité. Cette exigence de marge de solvabilité est évaluée en pourcentage des provisions techniques, des primes ou des sinistres mais sans prendre en compte les risques réellement encourus par l'assureur. Par contre la réforme Solvabilité II nous emmène vers une nouvelle façon d'appréhender le risque et de calculer les fonds propres. Avec Solvabilité II tous les risques encourus par l'assureur sont pris en compte dans la détermination des fonds propres. Aussi les provisions techniques sont calculées sous une nouvelle vision pour avoir une meilleure estimation du passif. Dans solvabilité II chaque risque a sa contrepartie au niveau des fonds propres sous forme d'un capital généré par ce risque.

#### **Critique de Solvabilité I**

Après plusieurs consultations et réflexions, la commission européenne a estimé que la réforme Solvabilité I présentait plusieurs faiblesses :

- Le système ne prend pas en compte tous les risques réellement encourus par la compagnie
- Elle n'est pas bien adaptée aux normes internationales IAS-IFRS
- Solvabilité I pénalise les compagnies qui sur-provisionnent par rapport a celles qui sous-provisionnent.
- Solvabilité I se base selon l'hypothèse que le passé reflète le futur (ce qui n'est pas toujours vrai).

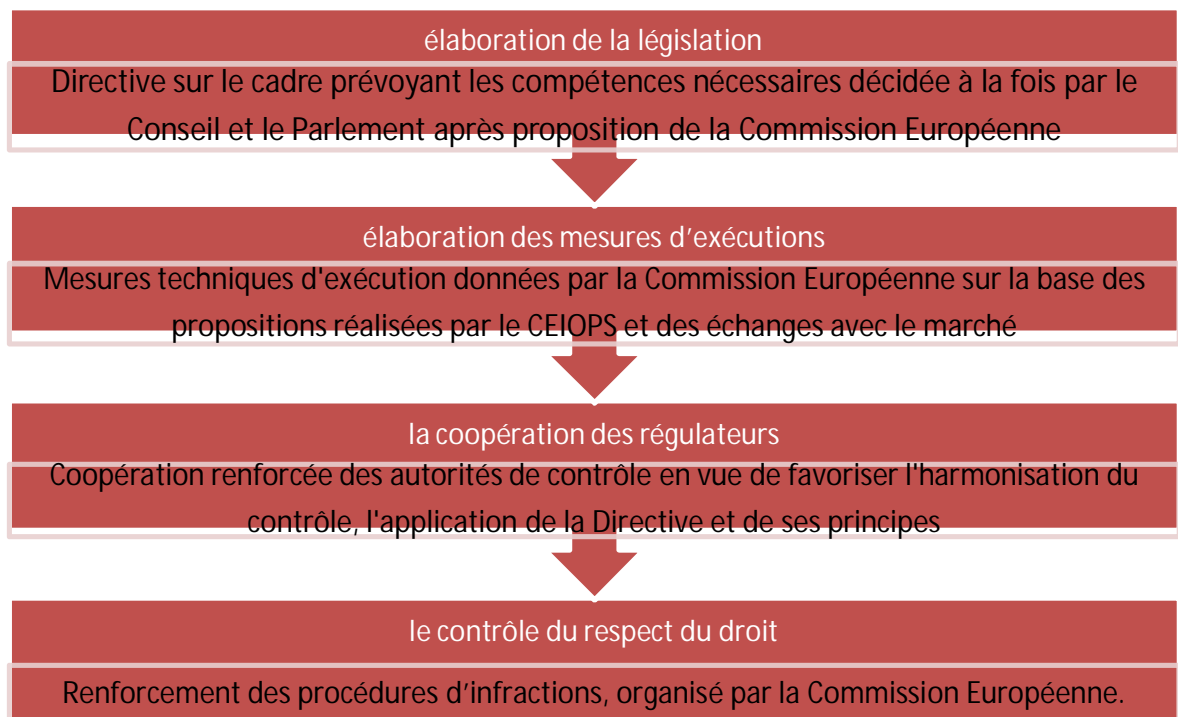
De ces faiblesses s'ajoute la volonté de l'union européenne d'harmoniser les textes régissant l'assurance au sein de tous les Etats membres.

## **I.2. Le processus de mise en place de Solvabilité II**

La mise en place de Solvabilité II suit le processus de Lamfalussy. Le processus de Lamfalussy est la démarche utilisée par l'Union Européenne pour concevoir les réglementations du secteur de la finance. Il est composé de quatre niveaux :

- Premier niveau : l'élaboration de la législation
- Second niveau : l'élaboration des mesures d'exécutions
- Troisième niveau : la coopération des régulateurs
- Quatrième niveau : le contrôle du respect du droit.

Figure 2 : Processus de Lamfalussy



Le rôle de ce processus est de faire converger les pratiques de régulation.

## **I.3. Les objectifs de Solvabilité II**

Les objectifs principaux de la réforme Solvabilité II sont :

- Accroître l'intégration et l'harmonisation du marché communautaire d'assurance et réassurance au sein de l'Union Européenne.
- Renforcer l'efficacité des mécanismes de protection des preneurs d'assurance et autres bénéficiaires et quantifier ce niveau de protection
- Rehausser la compétitivité internationale des assureurs et réassureurs de l'Union Européenne.

## I.4. Les piliers de la réforme Solvabilité II

La réforme Solvabilité II est constituée de trois piliers respectant chacun des exigences bien définies.

### I.4.1 Le pilier 1

Le pilier I se rapporte aux exigences quantitatives de la réforme. Ces exigences se portent essentiellement sur trois niveaux :

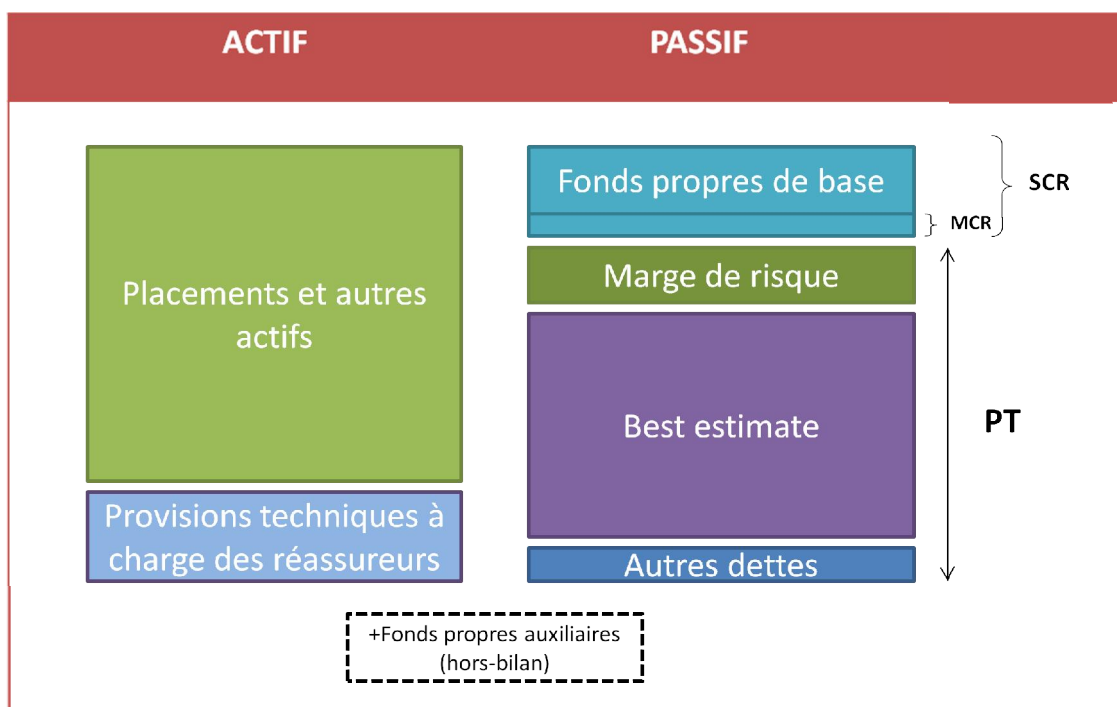
- La valorisation et le calcul des provisions techniques
- L'exigence de capital calculée sur deux niveaux le SCR et le MCR
- La définition et les règles d'éligibilité des éléments de capital

Le MCR (Minimum Capital Requirement) représente le niveau des fonds propres minimal en dessous duquel l'intervention de l'autorité de contrôle est automatique.

Le SCR (Solvency Capital Requirement) est un indicateur basé sur l'exposition aux risques des compagnies d'assurance. Il prend en compte tous les risques liés à l'activité de la compagnie. Son calcul repose sur une formule standard ou sur l'utilisation d'un modèle interne total ou partiel propre à la compagnie d'assurance.

Dans le cadre de solvabilité II la représentation du bilan de la compagnie d'assurance devient alors :

Figure 3 : Bilan de Solvabilité II



## **I.4.2 Le Pilier 2**

Le deuxième pilier a pour but de fixer les normes qualitatives. Ces normes concernent le processus de suivi des risques des compagnies, la gouvernance, le risk-management ainsi que la mise en place du processus de surveillance par les autorités de contrôle. Avec le pilier 2 les entreprises sont incitées à identifier leur exposition face aux différents types de risque et à connaître leur capacité à les gérer. Elles doivent pouvoir contrôler en interne le suivi de leurs risques. Pour se faire Solvabilité II introduit le processus d'évaluation des risques ORSA (Own Risk and Solvency Assessment). L'ORSA est un processus complet qui permet de suivre en continu le besoin en capital d'une entreprise en fonction de sa stratégie commerciale notamment. L'ORSA est un outil de gestion de risques et une source d'information pour les autorités de contrôle. Le rôle de l'ORSA est de faire en sorte que les entreprises ne se limitent pas aux calculs réglementaires mais qu'elles aillent plus loin dans le processus de gestion de leurs risques.

## **I.4.3 Le pilier 3**

Le troisième pilier définit les informations qui doivent être publiées par les compagnies. Les informations publiées sont destinées à différents acteurs. Deux types de rapport sont à fournir :

- Le SFCR (Solvency and Financial Condition Report), publié annuellement dans le but d'informer les actionnaires et les analystes de marché
- Le RTS (Reporting To Supervisor) permettant de vérifier le calcul de l'exigence en capital, publié trimestriellement à l'attention des autorités de contrôle.

Une version abrégée du SFCR sera également publiée à l'attention du public.

Le pilier 3 prévoit la réalisation d'états voués à remplacer les états existants actuellement. Ces nouveaux états de synthèses auront une vocation plus actuarielle que ceux existants. L'information actuarielle publiée représentera 40% contre 10% avec les états existants actuellement qui sont dominés par l'information comptable.

Tableau 1 : Les 3 piliers de solvabilité II

<b>Pilier 1 Exigences quantitatives</b>	<b>Pilier 2 Exigences qualitative</b>	<b>Pilier 3 Transparence et discipline du marché</b>
<b>Provisions Techniques SCR MCR Fonds Propres</b>	<b>Système de gouvernance Gestion des risques ORSA Audit et Contrôle interne</b>	<b>Information pour les superviseurs Information publique</b>

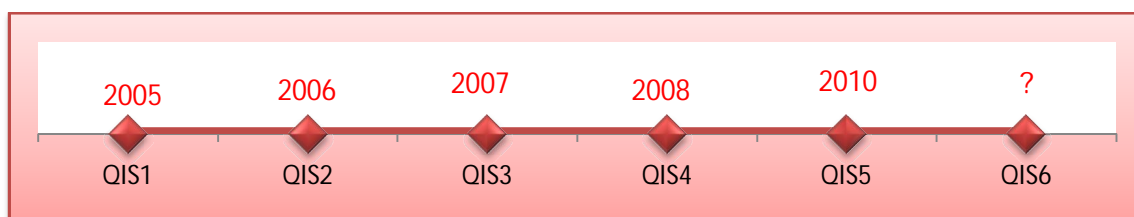
## **I.5. Les Etudes quantitatives d'impact (QIS)**

Pour une meilleure préparation des assureurs de Solvabilité I à Solvabilité II la commission européenne conformément au processus de Lamfalussy a jugé bon de faire des

études d'impact sur la mise en œuvre de Solvabilité II. Dans ce sens cinq études quantitatives d'impact ont été faites. Du QIS1 (Quantitative Impact Study 1) au QIS5, la commission européenne teste non seulement la capacité d'adaptation des assureurs lors du passage de Solvabilité I à Solvabilité II mais aussi l'efficacité de Solvabilité II.

Pour l'instant le QIS5 est la dernière étude d'impact lancée par le CEIOP dont l'appellation a changé récemment en devenant EIOPA. Le calendrier de mise en place de Solvabilité II prévoyait son instauration en 2013. Vu que cette instauration n'a pas eu lieu, il est probable qu'il y'ait une autre étude quantitative d'impact.

Figure 4 : Chronologie des QIS



## II. Comparaison entre Solvabilité I et les exigences de Solvabilité au Maroc

Au moment où l'Europe prépare son entrée à Solvabilité II, la comparaison entre Solvabilité I et les exigences de solvabilité au Maroc est d'une grande utilité dans la mesure où elle permet de connaître si nécessaire les points d'application de solvabilité II au Maroc.

Tableau 2 : Comparaison entre le système marocain et solvabilité I

Mesures	Système marocain	Solvabilité I
Marge de solvabilité activité vie	Méthode de type fixed-ratio Ratio de référence : 5%	Méthode de type fixed-ratio Ratio de référence : 4%
Marge de solvabilité activité non vie	Le montant minimum de la marge de solvabilité est égal au plus élevé des résultats obtenus par application de deux méthodes, basées sur des facteurs représentatifs du risque : <ul style="list-style-type: none"> <li>• Les primes</li> <li>• Les sinistres</li> <li>• Les provisions (PSAP &amp; PPN)</li> </ul> Application directe du ratio sur le facteur représentatif du risque	Le montant minimum de la marge de solvabilité est égal au plus élevé des résultats obtenus par application de deux méthodes, basées sur des facteurs représentatifs du risque : <ul style="list-style-type: none"> <li>• Les primes</li> <li>• Les sinistres</li> </ul> Principe de ventilation du facteur représentatif du risque par « tranches » et distinction des ratios appliqués qui suivent ces « tranches »

De ce tableau on remarque une ressemblance quasi-parfaite entre Solvabilité I et les exigences de solvabilité au Maroc. En ce qui concerne le contrôle interne des dispositions ont été prises dans Solvabilité I. Au niveau du Maroc la DAPS a émis le 26 Août 2008 une

circulaire sur le contrôle interne visant une instauration progressive du système de contrôle interne.

## Chapitre 4: Les spécifications techniques du QIS5

---

Comme nous l'avons vu précédemment, pour une meilleure application de la réforme Solvabilité II l'EIOPA mène des études sur l'impact de l'introduction de Solvabilité II et sur la capacité des assureurs à s'y conformer. Chaque étude menée est accompagnée des spécifications techniques. Les spécifications techniques correspondent aux instructions et méthodes de calcul données par l'EIOPA pour permettre aux compagnies d'appliquer Solvabilité II. Les spécifications techniques ont un caractère particulier du moment qu'elles représentent l'outil de base de la mise en œuvre de solvabilité II. Dans ce chapitre nous ne décrirons uniquement la partie des spécifications techniques en rapport avec notre travail, c'est-à-dire la partie relative aux provisions techniques et celle relative au calcul du SCR en assurance vie.

### **I. Les provisions techniques**

Les provisions techniques constituent une partie très délicate du passif d'une compagnie d'assurance. Elles représentent les engagements de l'assureur envers les assurés, représentant ainsi la composante principale du passif. De cette place importante qu'elles occupent elles doivent être estimées à juste valeur. Pour Solvabilité II, elles doivent correspondre au montant qu'une entreprise devrait payer si elle transférait immédiatement ses engagements d'assurance et de réassurance à une autre compagnie.

Le calcul des provisions techniques distinguent les passifs répliquables et les passifs non répliquables. Les passifs répliquables sont comptabilisés en valeur de marché tandis que pour les passifs non répliquables la valeur des provisions techniques est déterminée par le calcul du Best Estimate et d'une marge de risque. Au niveau du Maroc, rare sont des passifs qui répliquent le marché et en particulier au niveau de La Marocaine Vie le passif ne réplique pas le marché. De ce fait l'approche du Best Estimate et de la marge de risque est celle qui est adaptée à notre cas.

#### **I.1. Le Best estimate**

Le Best Estimate correspond à l'espérance des flux probables actualisés permettant à la compagnie de tenir tous ses engagements. Le QIS5 le définit comme : « la meilleure estimation correspondant à la moyenne pondérée par leur probabilité des flux de trésorerie futurs, compte tenu de la valeur temporelle de l'argent, des dépenses, des garanties financières et des options contractuelles estimée sur la base de la courbe des taux sans risque pertinents ». De cette définition nous remarquons que le Best Estimate doit prendre en compte toutes les entrées et sorties de capital relatives aux engagements de l'assureur et des assurés. Selon les spécifications techniques du QIS5 le Best estimate doit être calculé sous les hypothèses suivantes :

- L'horizon de projection utilisé doit couvrir complètement la durée de vie de tous les flux requis pour régler les engagements ou toute autre durée (à partir d'une information crédible) permettant d'avoir une évaluation précise.

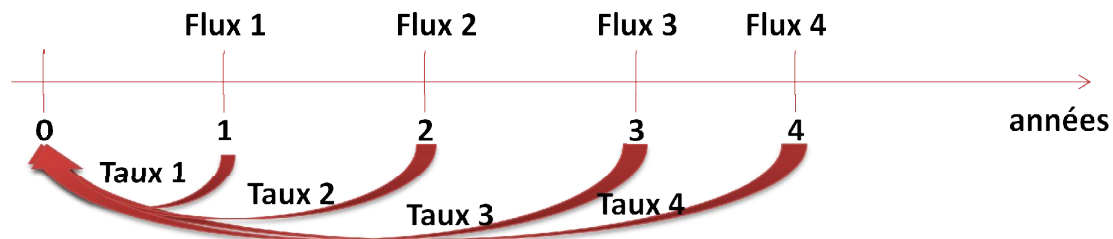
- Les flux doivent être actualisés à partir d'une courbe de taux sans risque crédible intégrant une prime de liquidité
- Le calcul des provisions techniques se fait brut de réassurance.
- Possibilité de tenir en compte une partie de prime future.

Le best estimate doit couvrir :

- Les prestations
- Les coûts liés à l'exploitation
- Les impôts et taxes.

Le calcul du Best Estimate est globalement la projection des flux et leurs actualisations sur la courbe des taux sans risque.

Figure 5 : illustration du calcul Best Estimate



Schématiquement le *Best Estimate* en assurance vie est :

$$BE = \sum_{t=1}^N \frac{Flux_t}{(1+r)^t}$$

Avec :

$Flux_t$ : Flux probables de l'année  $t$

$r_t$ : taux sans risque de maturité  $t$

$N$ : l'horizon de simulation

Ce qui en pratique s'effectue par simulation est :

$$BE = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \sum_{t=1}^T \frac{Flux_{t,n}}{(1+r_n)^t}$$

Avec :

$N$ : nombre de scénarios

*T: horizon de simulation*

Lorsqu'il y'a des interactions entre l'actif et le passif le taux d'actualisation n'est pas directement le taux zéro-coupon, il subit une légère modification. Soit  $R$  le taux d'actualisation et  $r$  le taux zéro-coupon, la transformation à effectuer pour un pas de discrétisation constant  $t_i = i \times \frac{t}{n}$  est la suivante :

$$R = \left( \prod_{i=1}^n e^{r t_{i-1}} \right)^{\frac{1}{n}} - 1$$

Pour un pas annuel :  $R = \exp(r) - 1$

Dans le QIS5, une recommandation est faite sur l'intégration de la prime de liquidité dans la courbe d'actualisation. La prime de liquidité est liée à la différence de rendements entre les actifs liquides et illiquides et doit traduire la capacité de l'assureur à investir dans des actifs moins liquides et donc plus risqués.

Cette prime de liquidité dépend du type de passif d'assurance considéré :

- 100% pour les passifs d'assurance pour lesquels les seuls risques sont longévité et le risque de dépense, l'assureur n'a aucun risque lié au rachat et l'ensemble des primes a déjà été versé. Il s'agit notamment des rentes viagères.
- 75% pour les autres passifs d'assurance avec participation aux bénéfices. Il s'agit notamment des contrats en assurance vie.
- 50% pour les autres passifs d'assurance

## **I.2. La Marge de risque**

La marge de risque est une composante des provisions techniques destinée à garantir que leur valeur est équivalente au montant dont les entreprises d'assurance et de réassurance auraient besoin pour reprendre et honorer les engagements d'assurance et de réassurance.

La marge de risque doit être calculée en déterminant le coût que représente la mobilisation d'un montant de fonds propres éligibles égal au SCR nécessaire pour honorer les engagements d'assurance et de réassurance sur leur durée de vie. Le taux appliqué dans la détermination du coût de mobilisation de ce montant de fonds propres éligibles est appelé taux de coût du capital.

$$CoCM = CoC \cdot \sum_{t \geq 0} \frac{SCR_{RU}(t)}{(1 + r_{t+1})^{t+1}}$$

Avec :

*CoCM: La marge de risque*

*SCR<sub>RU</sub>(t): Le SCR pour l'année t de l'entreprise de référence*

$r_t$ : taux sans risque sans prime de liquidité de maturité  $t$ .

Le taux sans risque  $r_t$  est utilisé sans prime de liquidité car l'entreprise de référence ne pourra peut-être pas acquérir la prime de liquidité dans les conditions du scénario de transfert.

Une formule simplifiée existe pour calculer du  $SCR_{RU}(t)$  est :

$$SCR_{RU}(t) = \frac{SCR_{RU}(0)}{BE_{NET}(0)} \times BE_{NET}(t)$$

Avec :

$BE_{NET}(0)$ : Best Estimate net de réassurance à la date d'évaluation

$BE_{NET}(t)$ : Best Estimate net de réassurance l'année  $t$

Dans les spécifications techniques du QIS5 une formule simplifiée du calcul de la marge de risque est aussi proposée.

$$CoCM = \frac{CoC}{(1 + r_1)} \times Dur_{mod}(0) \times SCR_{RU}(0)$$

Avec :

$Dur_{mod}(0)$  : duration modifiée en 0

$r_1$  : taux sans risque de maturité 1

$$Dur(0) = \frac{\sum_{t \geq 1} t \times Flux_t \times \left(\frac{1}{1 + r_t}\right)^t}{\sum_{t \geq 1} Flux_t \times \left(\frac{1}{1 + r_t}\right)^t}$$

$$Dur_{mod}(0) = \frac{Dur(0)}{1 + r_a}$$

$r_a$ : taux actuariel

**NB:** le QIS5 recommande d'utiliser un taux de capital de 6% en absence d'une information crédible

Les modules de risques à prendre dans le calcul du coût du capital sont le risque opérationnel, le risque de souscription et le risque de contrepartie.

## **II. Les capitaux requis**

### **II.1 Minimum Capital Requirement (MCR)**

Le MCR est le minimum de capital requis en dessous duquel l'intervention de l'autorité de contrôle est automatique. Le MCR doit être compris entre 25% et 45% du SCR.

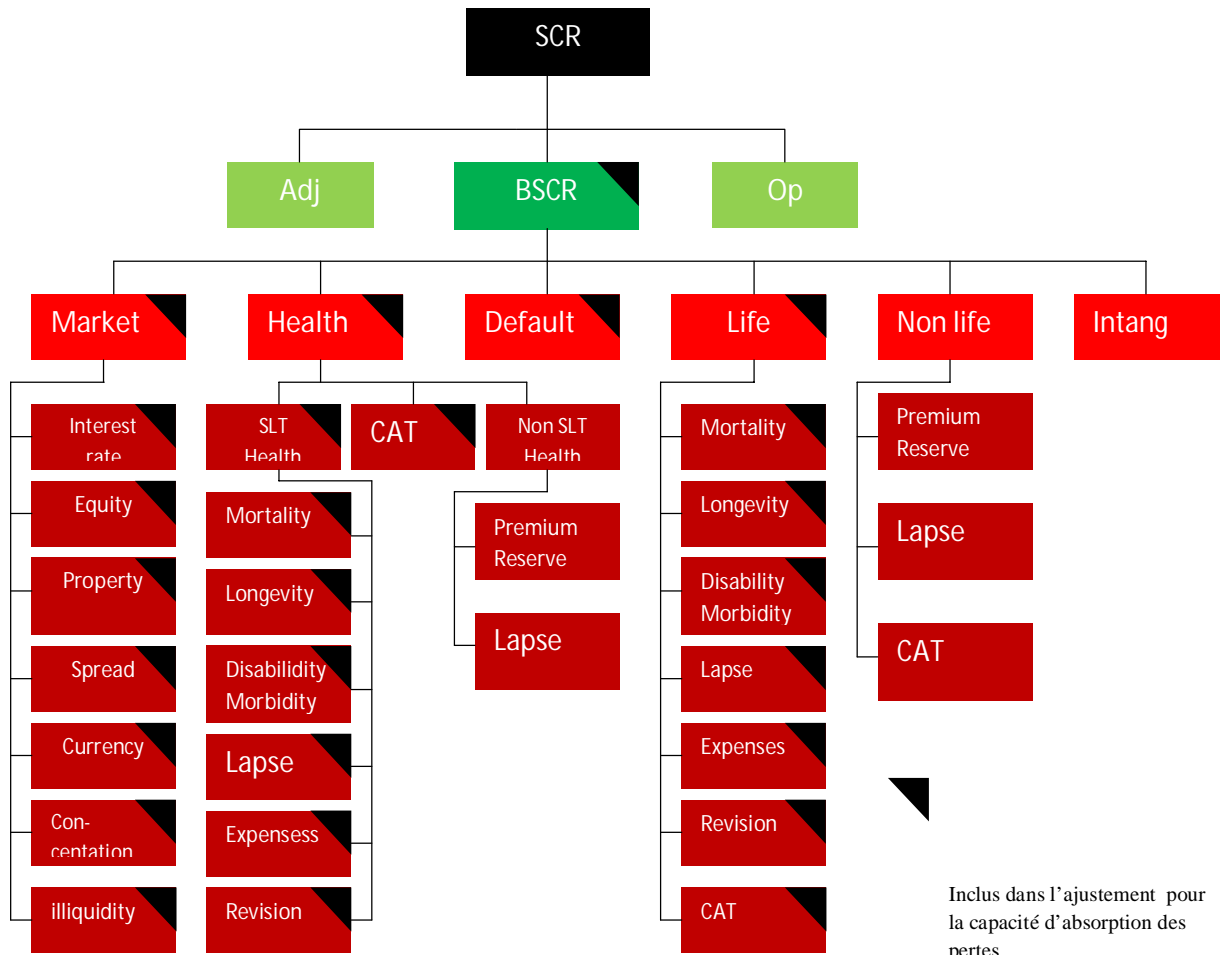
## II.2 Solvency Capital Requirement

Le SCR est le capital réglementaire requis sous Solvabilité II. Il correspond au niveau des fonds propres nécessaire pour absorber des pertes importantes imprévues. Les paramètres et hypothèses entrant dans le calcul du SCR sont calibrés de manière à représenter la Value at Risk (VaR) à un horizon temporel d'un an avec un niveau de confiance de 99,5%. Le SCR doit couvrir une probabilité de ruine de 0,5% sur un horizon d'un an ce qui correspond à une faillite tous les 200 ans. Le QIS5 donne le choix aux entreprises de calculer le SCR suivant un modèle standard ou interne. Dans le cas d'un modèle interne l'entreprise prépare elle seule son propre modèle pour certains risques tout en suivant les recommandations du QIS5 pour les modèles internes. Les résultats obtenus du modèle interne doivent ensuite être agrégés avec ceux calculés par la formule standard afin de déterminer le SCR. Pour ce projet nous appliquerons uniquement la formule standard.

### 1. Structure générale du SCR selon la formule standard du QIS5

Le calcul du SCR sous la formule standard est décomposé en plusieurs modules de risque comportant eux-mêmes différents sous-modules. La valeur du SCR est déterminée à partir des valeurs générées par chaque sous module. Les modules qui composent le SCR de base sont : les modules risque de marché, risque santé, risque de défaut de la contrepartie, risque de souscription vie, risque de souscription non-vie et le module de risque pour les actifs intangibles.

Figure 6 : Cartographie de risques



La formule de calcul du SCR est la suivante :

$$SCR = BSCR - Adj + SCR_{op}$$

Avec :

*BSCR* : Capital de solvabilité requis de base (Basic Solvency Capital Requirement)

*Adj* : ajustements dus aux effets d'absorption des provisions techniques

*SCR<sub>op</sub>* : Capital requis de solvabilité généré par le risque opérationnel

## 2. Basic Solvency Capital requirement

Le BSCR correspond à la valeur du Capital généré par chaque module de risque sans intégrer le risque opérationnel et les ajustements dus aux effets d'absorption.

Le BSCR se calcule de la manière suivante :

$$BSCR = \sqrt{\sum_{ij} Corr_{ij} \times SCR_i \times SCR_j} + SCR_{actifs incorporels}$$

Avec :

*SCR<sub>mkt</sub>* : Capital généré par le risque de marché

*SCR<sub>def</sub>* : Capital généré par le risque de défaut de la contrepartie

*SCR<sub>life</sub>* : Capital généré par le risque de souscription vie

*SCR<sub>nl</sub>* : Capital généré par le risque de souscription non vie

*SCR<sub>health</sub>* : Capital généré par le risque de souscription santé

*SCR<sub>actifs incorporels</sub>* : Capital généré par les actifs incorporels

*Corr<sub>ij</sub>* : Coefficient de corrélation entre les modules de risque *i* et *j*

Les corrélations entre les risques sont données par la matrice suivante :

Tableau 3 :Matrice de corrélation entre les risques sous solvabilité II

	Market	Default	Life	Health	Non-Life
Market	1				
Default	0.25	1			
Life	0.25	0.25	1		
Health	0.25	0.25	0.25	1	
Non-life	0.25	0.5	0	0	1

Pour notre travail nous n'utiliserons que les modules du risque de souscription vie et du risque de marché. Les autres modules ne sont pas concernés par notre travail.

## 2.1. Le SCR résultant du risque de souscription vie.

Le risque de souscription vie provient des engagements d'assurance vie mais pas seulement. Tout engagement relevant de l'activité non-vie mais dont les méthodes de calcul se fondent sur l'assurance vie comme une rente provenant d'un contrat d'assurance non-vie qui ne serait à l'assurance santé dans le module de souscription vie.

Le risque de souscription vie résulte par exemple d'une tarification insuffisante lors de la souscription. Il est composé des sous modules suivantes : mortalité, longévité incapacité-invalidité, rachat, dépenses, révision, catastrophe.

Pour obtenir le capital de Solvabilité requis au titre du risque de souscription vie, il faut agréger les capitaux requis de ses sous-modules de la manière suivante :

$$SCR_{life} = \sqrt{\sum_{r \times c} CorrLife_{r,c} \times Life_r \times Life_c}$$

Avec :

$Life_{rev}$  : Capital requis au titre du risque de révision

$Life_{mort}$  : Capital requis au titre du risque de mortalité

$Life_{long}$  : Capital requis au titre du risque de longévité

$Life_{dis}$  : Capital requis au titre du risque d'invalidité/incapacité

$Life_{exp}$  : Capital requis au titre du risque de dépenses

$Life_{CAT}$  : Capital requis au titre du risque de catastrophe

$CorrLife_{r,c}$  : Coefficient de corrélation entre les modules  $r$  et  $c$

La matrice de corrélation entre les sous modules est la suivante :

Tableau 4 : Matrice de corrélation entre les sous modules d'un risque

	Mortalité	Longévité	Invalidité	Rachat	Dépenses	Révision	Catastrophe
Mortalité	1						
Longévité	-0.25	1					
Invalidité	0.25	0	1				
Rachat	0	0.25	0	1			
Dépenses	0.25	0.25	0.5	0.5	1		
Révision	0	0.25	0	0	0.5	1	
Catastrophe	0.25	0	0.25	0.25	0.25	0	1

### 2.1.1. Le risque de Mortalité

Le risque de mortalité est associé avec les engagements où les entreprises qui garantissent le paiement d'un montant en cas de survenance du décès pendant la période contractuelle. C'est un risque de perte ou de détérioration de la valeur des engagements de l'entreprise dû à une augmentation des taux de mortalité.

Le capital réglementaire pour le risque de mortalité est défini comme la variation de la NAV (Net Asset Value) après la hausse des taux de mortalité.

$$Life_{mort} = \max(\Delta NAV_{choc\ de\ mortalité}; 0)$$

Le niveau de choc a légèrement évolué entre le QIS4 et le QIS5

Tableau 5 : choc pour le risque de mortalité

	QIS4	QIS5
<b>Choc à appliquer</b>	10%	15%

### 2.1.2. Le risque de Longévité

Le risque de longévité est associé aux engagements d'assurance dont l'entreprise garantit de payer des séries de montant jusqu'au décès de l'assuré. La diminution des taux de mortalité entraîne pour l'assureur une augmentation des provisions techniques allouées aux contrats.

Le capital réglementaire pour le risque de longévité doit être défini comme la variation de la NAV après un choc à la baisse des taux de mortalité.

$$Life_{long} = \max(\Delta NAV_{choc\ de\ longevité}; 0)$$

Entre le QIS4 et le QIS5 le niveau de choc a diminué de 5%.

Tableau 6 : choc pour le risque de longévité

	QIS4	QIS5
<b>Choc à appliquer</b>	25%	20%

### 2.1.3. Le risque d'Incapacité/Invalidité

Le risque d'incapacité ou d'invalidité est le risque de perte, ou de changements défavorables de la valeur des engagements d'assurance résultant des changements au niveau de l'évolution des taux d'incapacité et d'invalidité.

Le QIS5 spécifie que le capital réglementaire pour le risque d'invalidité/incapacité doit être défini comme la variation de la NAV après une augmentation de 35% des taux d'entrée en invalidité et en incapacité de la première année et 25% des taux de maintien les années suivantes ainsi qu'une diminution de 20% des taux de sortie d'invalidité.

Tableau 7 : choc pour le risque d'invalidité

		QIS4	QIS5
<b>augmentation du taux d'invalidité</b>	la 1 <sup>ère</sup> année	35%	35%
	les années suivantes	25%	25%
<b>diminution des taux</b>			20%

### 2.1.4. Le risque de Rachat

Le risque de rachat est le risque de perte ou de changements dans le passif en raison d'un changement des taux servis.

Le QIS5 spécifie que la charge en capital relative au risque de rachat est obtenue en calculant la variation de la NAV après l'application des chocs à la hausse et à la baisse sur les taux de rachats. Le capital généré par le risque rachat est déterminé de la manière suivante :

$$Life_{lapse} = \max (Lapse_{down}; Lapse_{up}; Lapse_{mass}; 0)$$

Avec :

$Life_{lapse}$ : Capital requis pour le risque de rachat

$Lapse_{down}$ : Capital requis en cas de diminution permanente des taux de rachat

$Laps_{up}$ : Capital requis en cas d'augmentation permanente des taux de rachat

$Laps_{mass}$ : Capital requis en cas de rachats massifs

Les besoins en capital de chaque scénario de rachats sont calculés de la manière suivante :

$$Lapse_{down} = \Delta NAV_{choc\ de\ rachat\ à\ la\ baisse}$$

$$Lapse_{up} = \Delta NAV_{choc\ de\ rachat\ à\ la\ hausse}$$

$$Lapse_{up} = \Delta NAV_{choc\ de\ rachat\ massif}$$

Soit R le taux rachat avant les chocs. Entre le QIS4 et le QIS5 le calibrage du risque rachat a évolué comme suit

Tableau 8 : choc pour le rachat

		QIS4	QIS5
<b>Chocs appliqués</b>	à la baisse	50%R	max (50% R ; R-20%)
	à la hausse	150%R	min (150%R ; 100%)
<b>Rachats massifs</b>		30%	30%

### 2.1.5. Le risque de dépenses

Le risque de dépenses est dû à une augmentation des frais de gestion des contrats d'assurance. Le capital requis pour le risque de dépenses correspond à la variation de la NAV suite à une augmentation de 10% des dépenses futures par rapport aux anticipations du Best Estimate et à une augmentation de 1% par an du taux d'inflation des dépenses par rapport aux anticipations.

$$Life_{exp} = \max(\Delta NAV_{choc\ de\ dépenses}; 0)$$

Entre le QIS4 et le QIS5 la détermination du capital requis pour le risque de dépenses n'a pas changé.

Tableau 9 : choc pour la dépense

	QIS4	QIS5
<b>Augmentation des dépenses futures</b>	10%	10%
<b>Augmentation du taux d'inflation</b>	1%	1%

### 2.1.6. Le risque de Révision

Le risque de révision représente le risque d'une variation du montant d'une rente du fait d'une révision imprévue de la sinistralité. Ce module de risque ne concerne que les rentes de l'activité non-vie qui sont affiliées au module de souscription vie. Le capital requis du risque de révision correspond à la variation de la NAV suite à une augmentation de 3% du montant annuel à payer pour les rentes exposées au risque de révision.

$$Life_{rev} = \max(\Delta NAV_{choc\ de\ revision}; 0)$$

Le choc à appliquer entre le QIS4 et le QIS5 pour le risque de révision n'a pas été révisé.

	QIS4	QIS5
<b>Choc à appliquer</b>	3%	3%

### 2.1.7. Le risque catastrophe

Le risque de catastrophe en assurance vie prend en compte les événements extrêmes ou irréguliers qui ne sont pas suffisamment pris en compte dans les autres sous modules de souscription vie. Il concerne tous les contrats proposant une garantie en cas de décès. Le capital requis pour le risque catastrophe correspond à la variation de la NAV après un choc à la hausse de 0,15% de la mortalité des assurés la première année. Le choc n'a pas été modifié entre le QIS4 et le QIS5

$$Life_{cat} = \max(\Delta NAV_{choc\ catastrophe}; 0)$$

	QIS4	QIS5
<b>Choc à appliquer</b>	0,15%	0,15%

## 2.2. Le risque de marché

Le risque de marché résulte du niveau ou de la volatilité de la valeur de marché des instruments financiers. L'exposition au risque de marché est mesurée par l'impact de mouvements de variables financières telles que les cours des actions, les taux d'intérêt, les prix de l'immobilier et les taux de change. Le risque de marché est composé des sous modules suivantes :

- Le risque de taux d'intérêt
- Le risque de spread
- Le risque immobilier
- Le risque action
- Le risque de change
- Le risque de concentration
- Le risque d'illiquidité

Le SCR marché est défini comme le maximum entre l'agrégation des sous-modules avec un choc de taux à la hausse et à la baisse.

$$SCR_{mkt} = \max \left( \sqrt{\sum_{r*c} CorrMktUp_{r,c} * Mkt_{upr} * Mkt_{upc}}, \sqrt{\sum_{r*c} CorrMktDown_{r,c} * Mkt_{down,r} * Mkt_{down,c}} \right)$$

Avec :

$CorrMktUp_{r,c}$ : coefficient de corrélation entre les sous modules de  $r$  et  $c$  pour le choc haussier

$Mkt_{upr}$ : Chargement en capital du sous module  $r$  pour le choc haussier

$Mkt_{upc}$ : Chargement en capital du sous module  $c$  pour un choc baissier

$CorrMktDown_{r,c}$ : coefficient de corrélation entre les sous modules de  $r$  et  $c$  pour le choc baissier

$Mkt_{down,r}$ : Chargement en capital du sous module  $r$  pour le choc baissier

$Mkt_{down,c}$ : Chargement en capital du sous module  $c$  pour le choc baissier

Les QIS5 défini ainsi deux matrices de corrélation au regard du choc appliqué.

Tableau 10 : choc pour le risque marché

Pour le cas du choc à la baisse la matrice de corrélation est la suivante :

CorrMktDown	Intérêt	Action	Immobilier	Spread	Change	Concentration	Illiquidité
Intérêt	1						
Action	0.5	1					
Immobilier	0.5	0.75	1				
Spread	0.5	0.75	0.5	1			
Change	0.25	0.25	0.25	0.25	1		
Concentration	0	0	0	0	0	1	
Illiquidité	0	0	0	-0.5	0	0	1

Pour le cas du choc à la hausse la matrice de corrélation est la suivante :

CorrMktUp	Intérêt	Action	Immobilier	Spread	Change	Concentration	Illiquidité
Intérêt	1						
Action	0	1					
Immobilier	0	0.75	1				
Spread	0	0.75	0.5	1			
Change	0.25	0.25	0.25	0.25	1		
Concentration	0	0	0	0	0	1	
Illiquidité	0	0	0	-0.5	0	0	1

### 2.2.1. Le risque de taux d'intérêt

Le risque de taux d'intérêt existe pour tous les actifs et passifs dont la valeur d'actif nette est sensible aux variations de la structure par terme des taux d'intérêt ou à la volatilité des taux. Les actifs et passifs sensibles aux variations des taux d'intérêt sont les investissements en instruments à taux fixes, les passifs d'assurance ainsi que les instruments financiers et les dérivés de taux d'intérêt. Le capital requis du risque de taux d'intérêt correspond à la variation de la NAV après application de deux scénarios de choc sur les taux, un scénario haussier et un baissier.

$$Mkt_{int}^{up} = \Delta NAV_{up}$$

$$Mkt_{int}^{down} = \Delta NAV_{down}$$

Entre le QIS4 et le QIS5 les coefficients de chocs à appliquer à la courbe de taux ont été modifiés. Pour le calcul du SCR taux d'intérêt, les structures par termes modifiées sont dérivées en multipliant la courbe des taux d'intérêt actuelle par  $(1 + S^{up})$  et  $(1 + S^{down})$ . Le tableau ci-dessous montre les modifications à appliquer à la courbe des taux.

Tableau 11 : choc pour le risque taux

Echéance t (années)	QIS5		QIS4	
	S <sup>up</sup> (t)	S <sup>down</sup> (t)	S <sup>up</sup> (t)	S <sup>down</sup> (t)
1	0.70	-0.75	0.94	-0.51
2	0.70	-0.65	0.77	-0.47
3	0.64	-0.56	0.69	-0.44
4	0.59	-0.50	0.62	-0.42
5	0.55	-0.46	0.56	-0.40
6	0.52	-0.42	0.52	-0.38
7	0.49	-0.39	0.49	-0.37
8	0.47	-0.36	0.46	-0.35
9	0.44	-0.33	0.44	-0.34
10	0.42	-0.31	0.42	-0.34
11	0.39	-0.30	0.42	-0.34
12	0.37	-0.29	0.42	-0.34
13	0.35	-0.28	0.42	-0.34
14	0.34	-0.28	0.42	-0.34
15	0.33	-0.27	0.42	-0.34
16	0.31	-0.28	0.41	-0.33
17	0.30	-0.28	0.40	-0.33
18	0.29	-0.28	0.39	-0.32
19	0.27	-0.29	0.38	-0.31
20	0.26	-0.29	0.37	-0.31
21	0.26	-0.29	0.37	-0.31
22	0.26	-0.30	0.37	-0.31
23	0.26	-0.30	0.37	-0.31
24	0.26	-0.30	0.37	-0.31
25	0.26	-0.30	0.37	-0.31
30	0.25	-0.30	0.37	-0.31

### 2.2.2. Le risque action

Le risque action résulte du niveau ou de la volatilité de la valeur de marché des actions. L'exposition au risque action concerne tous les actifs et passifs dont la valeur est sensible aux variations des cours de la bourse.

Pour calculer le SCR action, il faut faire une distinction entre deux catégories d'actions, les actions dites « globales » et les « autres ». Pour chaque type d'action le capital requis est obtenu suite à la variation de la NAV après l'application d'un choc spécifique.

$$Mkt_{equity} = \max(\Delta NAV_{choc\ action}; 0)$$

Actions « globales » :

- actions cotées dans les pays de l'Espace Economique Européen (EEE) et de l'Organisation de Coopération et de Développement Economique (OCDE)
- application d'un choc de 30% comprenant un ajustement de -9%

« Autres » actions :

- actions non cotées, actions cotées uniquement sur les marchés émergents, fonds spéculatifs et autres investissements
- application d'un choc de 40% comprenant un ajustement de -9%

Les deux résultats obtenus sont ensuite agrégés avec une corrélation de 75%.

Tableau 12 : choc pour le risque action

CorrIndex	Global	Autres
Global	1	
Autres	0.75	1

Chocs action	QIS4	QIS5
Globales	-32%	-39%
Autres	-40%	-49%

### 2.2.3. Le risque immobilier

Le risque immobilier résulte du niveau ou de la volatilité des prix de marché de l'immobilier. Le capital requis pour le risque immobilier est obtenu suite à une variation de la NAV après un choc à la baisse de 25% sur la valeur de l'immobilier.

$$Mkt_{property} = \max(\Delta NAV_{choc\ immobilier}; 0)$$

	QIS4	QIS5
Choc immobilier	-20%	-25%

### 2.2.4. Le risque de change

Le risque de change résulte du niveau ou de la volatilité des taux de change. Le capital requis pour le risque de change est obtenu suite à la variation de la NAV après application d'un choc haussier de 25% et d'un choc baissier de 25% de toutes les autres devises face à la devise locale (celle dans laquelle l'entreprise établit ses comptes).

$$Mkt_{fx} = \max(\Delta NAV_{choc\ hausse\ des\ taux}; \Delta NAV_{choc\ baisse\ des\ taux}; 0)$$

### 2.2.5. Le risque de spread des obligations

Le risque de spread est la partie du risque inhérent aux instruments financiers qui résulte de la volatilité des spreads de crédit par rapport à la structure par terme des taux sans risque. Il représente la variation de valeur due à un mouvement de la courbe des rendements relativement à la structure par terme des taux sans risque.

Le chargement en capital au titre du risque de spread des obligations est calculé comme suit :

$$Mkt_{sp}^{bonds} = \nabla NAV_{choc\ de\ spread\ obligations}$$

Le QIS5 propose une formule simplifiée pour le calcul du capital requis pour le risque de spread des obligations.

$$Mkt_{sp}^{bonds} = MV^{bonds} \cdot \sum_i \%MV_i^{bonds} \cdot F^{up}(r_{rating_i}) \cdot duration_i + \Delta Liab_{ul}$$

Avec :

$MV^{bonds}$ : Valeur de marché du portefeuille d'obligations

$\%MV_i^{bonds}$ : Proportion d'obligations de rating<sub>i</sub> dans le portefeuille

$F^{up}$ : fonction de la catégorie de notation de l'exposition au risque de crédit

rating<sub>i</sub>: Note externe de l'exposition au risque crédit i

$\Delta Liab_{ul}$  : Impact global du scénario de choc côté passif

duration<sub>i</sub>: duration modifiée de l'exposition au risque de crédit i

Les facteurs  $F^{up}$  suivants doivent être utilisés

Tableau 13 : risque des spreads pour les obligations

Note	$F^{up}$	Duration Floor	Duration Cap
AAA	0.9%	1	36
AA	1.1%	1	29
A	1.4%	1	23
BBB	2.5%	1	13
BB	4.5%	1	10
Bou moins	7.5%	1	8

### 2.2.6. Le risque de concentration

Le risque de concentration est lié à l'accumulation de positions auprès d'une même contrepartie. Par exemple si l'assureur détient une grande quantité de titre d'un même émetteur, en cas de défaillance cela peut causer des pertes importantes. Donc les concentrations de risques de marché présentent un risque supplémentaire pour un assureur en raison :

- de la volatilité supplémentaire inhérente aux portefeuilles d'actifs concentrés
- le risque supplémentaire de perte de valeur permanente partielle ou totale résultant de la défaillance d'un émetteur

Le calcul du capital requis pour le risque de concentration se fait en trois étapes :

### 1. La détermination de l'excédent d'exposition

L'excédent d'exposition est calculé comme suit :

$$XS_i = \max\left(0; \frac{E_i}{Assets_{xl}} - CT\right)$$

$E_i$ : Exposition nette en cas de défaut de la contrepartie  $i$

$Assets_{xl}$ : Montant des actifs totaux

$CT$ : Seuil de concentration fixé

Selon la note de la contrepartie le seuil de concentration est fixé comme suit :

Tableau 14 : Note de la contrepartie

Note <sub>i</sub>	CT
AA-AAA	3%
A	3%
BBB	1.5%
BB ou moins	1.5%

### 2. Le chargement au titre de la concentration des risques par émetteur

Le chargement au titre de la concentration des risques par émetteur est calculé par la formule suivante :

$$Con_i = Asset_{xl} \cdot XS_i \cdot g_i + \Delta Liab_{ul}$$

Le paramètre  $g$  est déterminé comme suit en fonction de la note de crédit de la contrepartie :

Tableau 15 : Note de crédit

Note	Echelon de qualité de crédit	$g_i$
AAA	1A	0.12
AA	1B	0.12
A	2	0.21
BBB	3	0.27
BB ou moins	4-6	0.73

### 3. L'agrégation

L'agrégation pour le risque de concentration se fait en supposant une indépendance entre les capitaux requis pour chaque contrepartie, elle est donnée par la formule suivante :

$$Mkt_{con} = \sqrt{\sum_i Conc_i^2}$$

### 2.2.7. Le risque d'illiquidité

Le risque d'illiquidité résulte de la difficulté à vendre ou à acheter un actif. Un actif est illiquide lorsqu'il est difficilement achetable ou vendable. Ce risque est pris en compte lorsque la prime d'illiquidité est intégrée dans le calcul des provisions techniques. Le risque de liquidité concerne la baisse de la prime de liquidité, les effets de la hausse de la prime étant pris en considération dans le module du risque de spread.

Le chargement de capital pour le risque d'illiquidité est déterminé suite à la variation de la NAV après un choc de 65% à la baisse de la prime d'illiquidité.

$$Mkt_{ip} = \max(\Delta NAV_{choc\ illiquidité}; 0)$$

# Chapitre 5: Générateur de scénarios économiques

## I. Modélisation de l'actif

La particularité comptable d'une compagnie d'assurance, par rapport à toute autre compagnie, est son cycle inversé de production. Cette particularité nécessite la constitution de provisions réglementaire, afin d'honorer les engagements de la compagnie, et réciproquement elle nécessite la gestion d'un actif lourd.

Le modèle « actif stochastique » doit être conçu comme une boîte à outils générique capable de générer des trajectoires simulées pour les différents actifs composant le portefeuille.

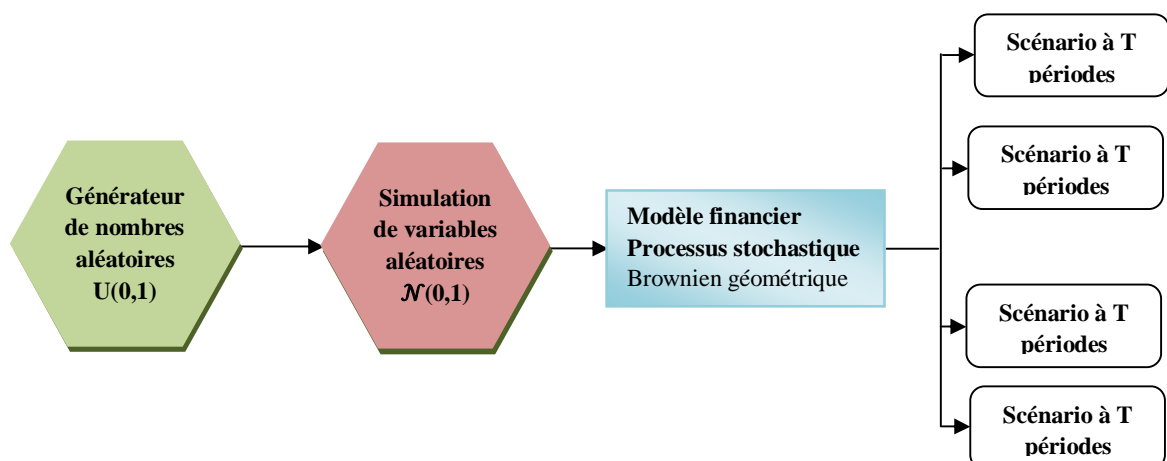
Définir une modélisation stochastique opérationnelle nécessite la sélection de modèles pour les différents types de placements et le choix de leur discrétisation afin d'être en mesure de simuler l'évolution des différents cours. La base de cette simulation consiste à créer l'aléa du modèle. Une attention toute particulière doit donc être accordée à cette étape car la qualité du générateur va entièrement dépendre du caractère aléatoire de ces nombres.

On va donc chercher à reproduire des tirages de variables aléatoires suivant certaines lois de probabilité. Une série de tirage va donc permettre, grâce au modèle, de créer un scénario à T périodes. En reproduisant cette étape un très grand nombre de fois, nous pourrons appliquer la loi des grands nombres. Cette technique s'appelle la méthode de Monte-Carlo.

Cette simulation nécessite ainsi de savoir générer des nombres aléatoires et passe donc par le choix d'un générateur de nombres aléatoires.

Dans le cadre de ce mémoire, par souci de simplifications le portefeuille d'actifs de l'assureur est composé uniquement d'actions, d'obligations, d'OPCVM obligataire et d'immobilier. On doit utiliser donc un modèle financier pour les actions, un pour les taux, et une hypothèse pour l'immobilier

Figure 7 : Processus pour générer des scénarios financiers stochastiques de T périodes



## I.1. Outils mathématiques

Certains aspects des tests essentiels sont rappelés, ainsi que les principales propriétés de quelques outils incontournables utilisés dans la plupart des modèles.

### I.1.1. Définition d'un processus stochastique

Un processus stochastique est un modèle permettant d'étudier un phénomène aléatoire évoluant au cours du temps. Le calcul stochastique est devenu, d'abord en finance, puis en assurance, un outil incontournable. Pour le décrire, on suppose donnés :

- Un espace probabilisé  $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$  avec  $\Omega$  un ensemble non vide,  $\mathfrak{A}$  un ensemble de parties de  $\Omega$  muni d'une structure de tribu et  $\mathbb{P}$  une mesure de probabilité sur la tribu  $\mathfrak{A}$  ;
- Un espace mesurable  $(E, \mathfrak{B})$  où  $E$  est l'ensemble des états du processus.

Un processus stochastique correspond alors une famille  $X = (X_t)_{t \in T}$  de variables aléatoires définie sur  $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$  et à valeurs dans  $E$ . L'ensemble  $T$  des indices est l'espace des temps. Pour  $\omega \in \Omega$  et  $t \in T$ , la quantité  $X_t(\omega)$  est appelée état du processus à l'instant  $t$ . Etant donné  $\omega \in \Omega$ , l'application qui à tout  $t$  dans  $T$  fait correspondre  $X_t(\omega)$ , l'état du processus à l'instant  $t$ , est appelée la trajectoire de  $\omega$ . Lorsque  $E$  et  $t$  sont discrets, toute trajectoire est constituée par une suite de points dans le plan.

On distingue plusieurs types de processus suivant que  $T$  et  $E$  sont discrets ou continus. Si  $T \subset \mathbb{R}$ , le processus est à temps continu. Suivant que  $E$  est fini, dénombrable ou continu, on dit que le processus a un nombre fini d'états, a un espace d'états dénombrable, a un espace d'états continu.

Par commodité mathématique, les actifs risqués sont généralement représentés par des processus stochastiques à temps continu. Toutefois, la simulation effective de la trajectoire d'un actif risqué nécessitera que le temps soit discrétisé. Il est, de fait, impossible de tracer une trajectoire continue. De plus, un processus de prix à temps discret convient mieux de tracer à la réalité des marchés financiers, qui ne cotent pas en continu.

### I.1.2. Lemme d'ITO pour les processus stochastiques

Si  $X$  est la solution de l'équation différentielle stochastique (EDS) :

$$X(t) = X(0) + \int_0^t m(X(s), s) ds + \int_0^t \sigma(X(s), s) dB(s)$$

Ou encore de :  $dX(t) = m(X(t), t)dt + \sigma(X(t), t)dB(t)$

Avec :

- $B$  : un mouvement brownien
- $M$  : la moyenne, le drift du processus
- $\Sigma$  : l'intensité de la volatilité

Si  $f(t, x)$  est une fonction de classe  $C^{1,2}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$  alors :

$$df(X(t), t) = \left( \frac{\partial f}{\partial t} + m(X(t), t) \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2} \sigma(X(t), t)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right) dt + \sigma(X(t), t) \frac{\partial f}{\partial x} dB(t)$$

### I.1.3. La décomposition de CHOLESKY

La décomposition de Cholesky permet de corrélérer des vecteurs gaussiens.

**Théorème de Cholesky** : soit  $\Gamma$  une matrice symétrique définie positive, il existe une unique matrice  $A$  triangulaire inférieure à diagonale positive telle que:  $\Gamma = A'A$  . On appelle  $A$  la « racine carrée de  $\Gamma$  » et on note par convention  $A = \sqrt{\Gamma}$  . On désigne également  $A$  sous le terme de « la décomposée de Cholesky de  $\Gamma$  ».

De manière pratique, il existe un mécanisme simple de construction explicite de  $A$  qui comporte 2 étapes :

➤ Etape 1 : construction de la première colonne.

On pose  $\Sigma_{1,1} = \sqrt{\Gamma_{1,1}}$  puis pour  $i = 2, \dots, d$   $\Sigma_{i,1} = \frac{\Gamma_{i,1}}{\Sigma_{1,1}}$ .

➤ Etape 2 : construction par récurrence des colonnes  $j \in \{2, \dots, d\}$ .

On pose

$$i = 1, \dots, j - 1 \quad \Sigma_{i,j} = 0,$$

$$\Sigma_{j,j} = \left( \Gamma_{j,j} - \sum_{k=1}^{j-1} \Sigma_{j,k}^2 \right)^{1/2}, i = j + 1, \dots, d \quad \Sigma_{i,j} = \frac{\Gamma_{i,j} - \sum_{k=1}^{j-1} \Sigma_{j,k} \Sigma_{i,k}}{\Sigma_{j,j}}$$

#### Application aux vecteurs gaussiens

En particulier, si on se donne  $\Gamma$  une matrice symétrique, définie positive, et si  $X \sim \mathcal{N}(0_d, Id_d)$  suit une loi gaussienne centrée  $d$ -dimensionnelle, on dispose d'une construction explicite d'une variable aléatoire de loi  $\mathcal{N}(m, \Gamma)$ .

En effet, il existe une unique matrice  $A$  triangulaire inférieure à diagonale positive telle que  $\Gamma = AA'$  : si on pose  $Y = m + AX$ , alors il découle de ce qui précède que  $Y \sim \mathcal{N}(m, \Gamma)$ .

Démonstration : Posons  $Y = m + AX$  ; on a trivialement

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Y) &= \mathbb{E}(m + AX) \\ &= m + A \underbrace{\mathbb{E}(X)} \\ &= m + A \times 0 = m \end{aligned}$$

Par ailleurs,  $\Gamma_Y = \mathbb{E} \left( (Y - \mathbb{E}(Y))(Y - \mathbb{E}(Y))' \right) = \mathbb{E} \left( (AX)(AX)' \right)$ .

Or,  $(AX)(AX)' = AX(X'A')$  et  $\mathbb{E}(AX(X'A')) = A\mathbb{E}(XX')A' = AA' = \Gamma$ , donc  $\Gamma_Y = \Gamma$ .

Toute combinaison linéaire des composantes de  $Y$  est combinaison linéaire des composantes de  $X$  qui sont des lois gaussiennes indépendantes, donc  $Y$  suit une loi gaussienne. On a donc bien  $Y \sim \mathcal{N}(m, \Gamma)$ .

Exemple :

Soit la matrice de corrélation  $\Gamma_{3 \times 3} = \begin{pmatrix} 1 & 0.3 & 0.7 \\ 0.3 & 1 & 0.5 \\ 0.7 & 0.5 & 1 \end{pmatrix}$

En appliquant l'algorithme de la décomposition de Cholesky nous obtenons :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.3 & 0.9539 & 0 \\ 0.7 & 0.3040 & 0.6462 \end{pmatrix}$$

Nous pouvons rapidement vérifier qu'il y a bien :  $AA' = \Gamma$

#### 1.1.4. TESTS STATISTIQUES DES GENERATEURS

La première qualité exigée d'un générateur est sa justesse, c'est-à-dire qu'il faudra tester s'il répond ou non à la suite théorique désirée. Dans ce but nous allons examiner différents types de tests nécessaires pour la modélisation.

##### 1. Tests d'adéquation

Ce test d'hypothèse permet de rejeter ou non l'hypothèse nulle  $H_0$  selon laquelle la loi d'une variable aléatoire  $X$  suit une loi théorique donnée  $\mathbb{P}_0$  pour un certain risque  $\alpha$ .

Pour rejeter ou non l'hypothèse nulle on compare  $\alpha$  à une p-valeur  $\hat{\alpha}$  :

- Si  $\hat{\alpha} > \alpha$  on ne peut pas rejeter l'hypothèse nulle :  $X$  suit la loi théorique  $\mathbb{P}_0$ ,
- Sinon on rejette l'hypothèse nulle, c'est-à-dire la variable  $X$  ne suit pas la loi théorique donnée  $\mathbb{P}_0$ .

##### 2. Test du $\chi^2$ d'ajustement

Soit  $X$  une variable aléatoire à valeurs dans  $E$  de loi  $\mathbb{P}_X$  inconnue et  $\mathbb{P}_0$  une loi connue sur  $E$ . Soit  $A_1, \dots, A_d$  une partition de  $E$  telle que  $\pi_k = \mathbb{P}_0[A_k] > 0$  pour tout  $k$ . On dispose d'un  $n$ -échantillon indépendant et identiquement distribué  $(X_1, \dots, X_n)$  de  $X$ . Soit  $N_k$  le nombre de variables aléatoires  $X_i$  dans  $A_k$ .

Si  $\mathbb{P}_X = \mathbb{P}_0(H_0)$  considérons la statistique  $\mathcal{D}^2$  définie comme suit :  $\mathcal{D}^2 = \sum_{k=1}^d \frac{(N_k - n\pi_k)^2}{n\pi_k}$ .

La statistique  $\mathcal{D}^2$  est asymptotiquement distribuée comme une variable de  $\chi_{d-1}^2$ . La p-valeur de ce test est donnée par:  $\hat{\alpha} = P[\chi_{d-1}^2 > \mathcal{D}^2]$

##### 3. Test de Kolmogorov-Smirnov

Si  $F_n^*$  est la fonction de répartition empirique d'un  $n$ -échantillon d'une variable aléatoire  $X$  de fonction de répartition  $F$ , alors la statistique  $D_n = \text{Sup}|F_n^*(x) - F(x)|$  est asymptotiquement distribuée comme suit :  $P[\sqrt{n}D_n < y] \rightarrow \sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^k \exp(-2k^2y^2)$ .

La statistique  $D_n$  est comparée à la valeur critique  $D_c$  donnée par la table de Kolmogorov-Smirnov. La p-valeur de ce test est donné par  $\hat{\alpha} = P[D_n > D_c]$ .

#### 4. Test d'Anderson-Darling

Ce test repose sur l'écart d'Anderson-Darling  $A_n^2$  défini comme suit :

$$A_n^2 = n \int_0^{\infty} \frac{(F_n^*(x) - F(x))^2}{F(x)(1-F(x))} dF_0(x).$$

Cet écart permet de tester l'hypothèse nulle, l'expression opérationnelle de  $A_n^2$  étant :

$$A_n^2 = -n - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (2i-1) \{ \ln F(x_{(i)}) + \ln [1 - F(x_{(n-i+1)})] \},$$

Où  $x_{(i)}$  désigne la  $i$ -ème plus petite réalisation de  $X$  dans l'échantillon. La  $p$ -valeur de ce test est donnée par  $\hat{\alpha} = P[A_n^2 > A_c]$ , avec  $A_c$  est la valeur critique donnée par la table d'Anderson-Darling.

#### 5. Test de Shapiro-Wilk

Le test de Shapiro-Wilk est conçu spécialement pour étudier la normalité d'une variable continue  $X$ . C'est le test le plus puissant pour tester la normalité d'une distribution.

La statistique de test de l'échantillon  $(x_i)_{i=1 \dots n}$  est donnée par :  $W = \frac{T^2}{\hat{\sigma}^2}$  où

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2, T^2 = \frac{1}{n-1} \left[ \sum_{i=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} a_i (X_{(n-i+1)} - X_{(i)}) \right]^2$$

Avec  $\bar{X}$  est la moyenne empirique de l'échantillon,  $\lfloor \cdot \rfloor$  est l'opérateur partie entière, et les  $a_i$  sont des coefficients donnés par la table de Shapiro-Wilk que l'on trouve dans la plupart des recueils de tables statistiques. La  $p$ -valeur de ce test est donnée par  $\hat{\alpha} = P[W > W_c]$ , où  $W_c$  est la valeur critique donnée par la table de Shapiro-Wilk.

### I.2. Génération de nombres aléatoires

Toute simulation de réalisation des différentes lois de probabilité nécessite d'être capable de générer des nombres aléatoires distribués selon la loi uniforme sur  $[0, 1]$ . Le problème qui se pose est de simuler une réalisation d'une variable aléatoire réelle  $U$  distribuée selon la loi uniforme continue sur l'intervalle  $[0, 1]$ , de fonction de répartition donnée par :

$$F_U(u) = \begin{cases} 0 & \text{si } u \leq 0, \\ u & \text{si } 0 \leq u \leq 1, \\ 1 & \text{si } u \geq 1. \end{cases}$$

On notera  $f_U(u) = 1_{[0,1]}(u)$  sa densité.

La génération de nombres aléatoires de loi uniforme est essentielle à la mise en œuvre des simulations, du fait de l'utilisation de méthodes du type « inversion de la fonction de répartition » que nous allons décrire ultérieurement. Il existe deux types d'algorithmes générateurs de nombres aléatoires de loi uniforme :

- Les générateurs pseudo-aléatoires (exemple :  $Rnd()$  de VBA-Excel),
- Les générateurs quasi aléatoires (exemple : algorithme du Tore).

### I.2.1. Le générateur Rnd()

Un générateur de nombres aléatoires est disponible sous VBA à partir de la fonction Random. C'est un générateur congruentiel, il fait partie des générateurs pseudo-aléatoires. Un générateur congruentiel est défini par :

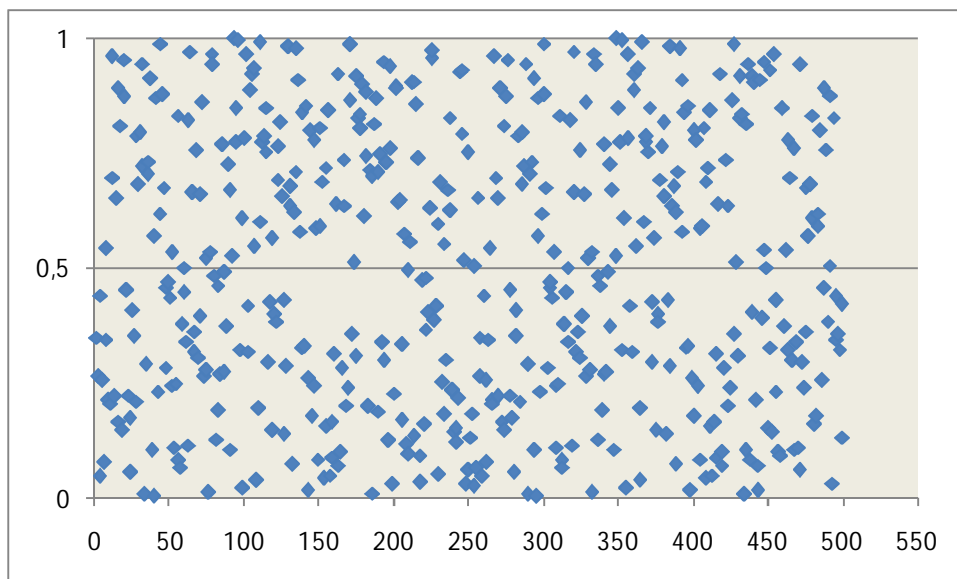
Le choix d'une graine X0 qui définit la qualité de la simulation,

un calcul récursif à partir de cette graine:  $X_{n+1} = (kX_n + p) \bmod m$ , avec k, p et m des entiers positifs.

Il suffit ensuite de diviser par m les Xi obtenus ainsi pour obtenir les réalisations  $u_i = \frac{X_i}{m}$  d'une variable U de loi uniforme sur l'intervalle [0,1]. On notera p la période du générateur, cette dernière étant inférieure ou égale à m, les Xi prenant leurs valeurs dans l'ensemble  $\{0, \dots, p - 1\}$ . Dans le cas où  $p=m$ , la période du générateur sera dite complète.

En prenant un petit échantillon de 500 réalisations de loi uniforme générées par le générateur Rnd() sous VBA, nous obtenons le graphe ci-dessous :

Figure 8 : Simulation de 500 nombres aléatoires grâce à la fonction Rnd() sous VBA



Ce graphique représente la réalisation de chaque variable aléatoire en fonction de la simulation correspondante. On obtient bien une distribution aléatoire comprise entre [0; 1].

Il existe des générateurs de meilleure qualité que les pseudo-aléatoires, ce sont les générateurs quasi-aléatoires. C'est ce type de générateur qui va être utilisé pour simuler des variables de loi uniforme.

Le générateur choisi pour simuler des nombres aléatoires est le générateur quasi-aléatoire du Tore mélangé. Ce choix sera expliqué ultérieurement. Ce générateur a l'avantage d'être performant tout en étant simple à mettre en place. Le générateur du Tore mélangé est

dérivé du générateur du Tore mais assure l'indépendance entre les nombres aléatoires simulés contrairement au générateur du Tore.

### I.2.2. La translation irrationnelle du Tore:

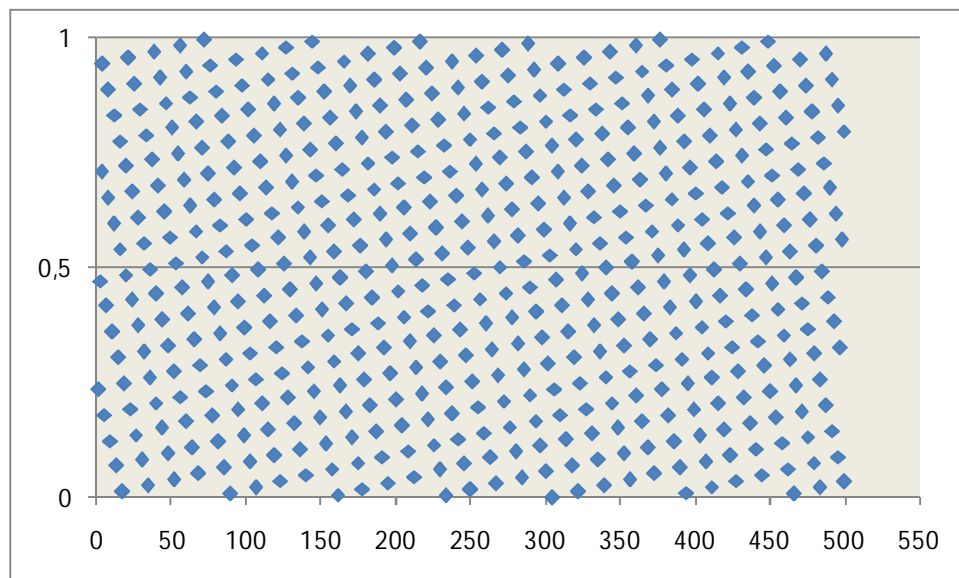
L'algorithme du Tore génère une suite de nombres aléatoires uniformes  $(U_n)$  grâce au nombre premier  $p$ . Le nombre  $U_n$  est défini comme suit :

$$U_n = n * \sqrt{p} - [n * \sqrt{p}]$$

Où  $[ \ ]$  désigne l'opérateur partie entière.

Pour le même échantillon que précédemment, nous calculons la suite  $U_n$ , pour  $n = 1 \dots 500$ , avec  $p = 5$ . On obtient le graphe ci-dessous :

Figure 9 : Simulation de 500 nombres aléatoires par l'algorithme du Tore



On constate immédiatement que la discrétion de ce générateur est très faible.

### La Discrétion

La discrétion est un bon outil pour pouvoir juger de l'équirépartition d'une suite. Plus la discrétion d'une suite est faible, mieux celle-ci est répartie sur son intervalle de définition. Si la limite de la discrétion est nulle, alors la suite est équirépartie. Ces définitions permettent ainsi de définir les suites équiréparties, et aussi les suites à discrétion faible.

**Définition.** Discrétion locale : soit  $x = (x_n)_{n \geq 1} \in [0; 1]^n$ ,  $\lambda_n$  la mesure de Lebesgue sur  $[0; 1]^n$  et  $A$  un sous-ensemble de  $[0; 1]^n$ .

La discrétion locale d'ordre  $k$  de  $x$  par rapport à  $A$  est donné par :

$$D_k(A, x) = \frac{1}{k} \text{Card}\{i \in (1 \dots k), x_i \in A\} - \lambda_n(A)$$

On en déduit la discrédance totale :

**Définition.** Discrédance : soit  $P$  l'ensemble des sous-pavés de  $[0; 1]^n$ . La discrédance d'ordre  $k$  de la suite  $x$  est donnée par :  $D(x) = \sup\{|D_k(A, x)|, A \in P\}$ .

Définition. La suite est équirépartie, ou uniformément distribuée, si et seulement si :  $\forall A \in P : \lim_{k \rightarrow \infty} D_k(A, x) = 0$

**Définition.** Discrédance faible : soit  $x = (x_n)_{n \geq 1} \in [0; 1]^n$ . On dit que  $x$  est à discrédance faible si :  $D_k^\infty(x) = O_{k \rightarrow \infty} \left( \frac{(\ln k)^n}{k} \right)$

La discrédance des suites à discrédance faible est bien meilleure que celle des suites pseudo-aléatoires.

### I.3. Validation de la loi uniforme de l'échantillon simulé

Pour vérifier si les nombres aléatoires que nous simulons sont de loi uniforme, nous avons effectué les tests d'adéquation décrits précédemment sur 15000 réalisations pour chacun de ces générateurs sous le logiciel EVIEWS.

**Figure 10 : Test d'adéquation de loi uniforme sur le générateur Rnd de VBA**

Empirical Distribution Test for ALEA			
Hypothesis: Uniform			
Date: 05/15/13 Time: 08:21			
Sample: 1 15000			
Included observations: 15000			
Method	Value	Adj. Value	P-Value
Kolmogorov (D+)	0.003240	0.397212	<b>0.7294</b>
Kolmogorov (D-)	0.004172	0.511480	<b>0.5926</b>
Kolmogorov (D)	0.004172	0.511480	<b>0.9561</b>
Anderson-Darling (A2)	0.377578	0.377578	<b>0.8707</b>

On ne peut pas donc rejeter l'hypothèse nulle de l'uniformité de nombres générés par le générateur Rnd au seuil  $\alpha=5\%$  car les p-values sont toutes supérieures à 5%.

Figure 11 : Test d'adéquation de loi uniforme sur le générateur du Tore

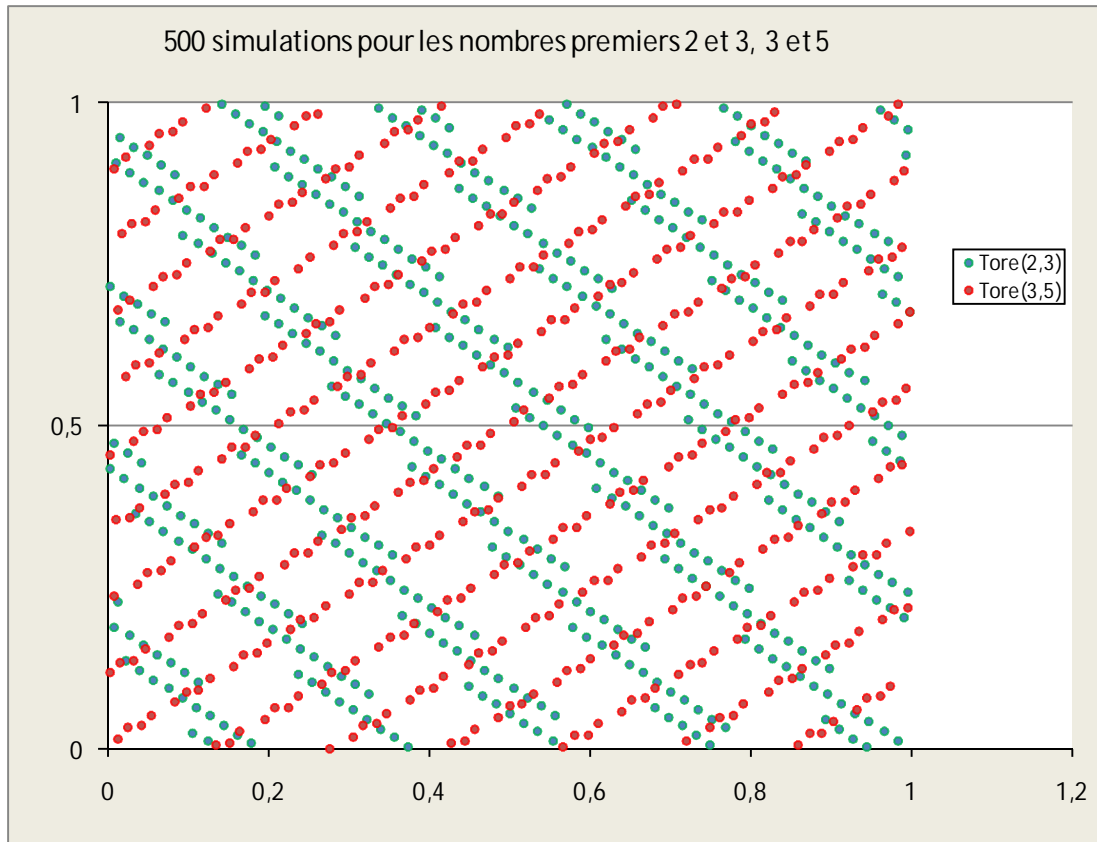
Empirical Distribution Test for TORE			
Hypothesis: Uniform			
Date: 05/15/13 Time: 09:18			
Sample: 1 15000			
Included observations: 15000			
Method	Value	Adj. Value	P-Value
Kolmogorov (D+)	0.000162	0.019878	<b>0.9992</b>
Kolmogorov (D-)	0.000159	0.019527	<b>0.9992</b>
Kolmogorov (D)	0.000162	0.019878	<b>1.0000</b>
Anderson-Darling (A2)	0.000684	0.000684	<b>1.0000</b>

Les nombres générés par le générateur du Tore sont significativement de loi uniforme au seuil  $\alpha=5\%$  d'après cette figure car les p-values sont toutes supérieures à 5%.

D'après ces résultats, on constate que les 15000 réalisations du Tore sont bien mieux réparties par rapport à celles du générateur du Rnd de VBA car les p-values de tests effectués sur le Tore sont supérieures à celles du Rnd. La qualité d'ajustement du Tore est bien supérieure à celle du RND de VBA.

L'algorithme irrationnel du Tore qui permet d'avoir une équirépartition semblable entraîne d'autres inconvénients que l'on peut mettre en évidence en étudiant ce que l'on obtient d'une période à l'autre. C'est-à-dire que pour un n donné, on représente les résultats obtenus pour deux nombres premiers successifs.

Figure 12 : Mise en évidence des corrélations du générateur de Tore



On observe ainsi qu'il n'y a certainement pas indépendance terme à terme des valeurs générées par l'algorithme du Tore, or dans la suite du simulateur, nous aurons besoin de générer des réalisations de loi normale indépendantes à partir de nombres uniformes.

### 1.3.1. Evaluation de la corrélation

Le graphe de la fonction d'auto-corrélation  $\hat{\rho}$  en fonction de  $h$  est appelé **corrélogramme** :

$$h \rightarrow \hat{\rho}_h = \frac{\overline{cov}(u_k, u_{k+h})}{\sqrt{s^2}\sqrt{s^2}} = \frac{\sum_{k=1}^{N-h} (u_k - \bar{u})(u_{k+h} - \bar{u})}{\sum_{k=1}^N (u_k - \bar{u})^2}$$

Avec :

$s^2$  : la variance empirique

$\overline{cov}$  : la covariance empirique

$\bar{u}$  : la moyenne empirique de l'échantillon  $(u_i)_{i=1 \dots N}$

$h \in [1; N - 1]$

$\hat{\rho}_h$  : la fonction d'autocorrélation estimée entre  $(u_1, \dots, u_{N-h})$  et  $(u_{h+1}, \dots, u_N)$

### I.3.2. Test de Bartlett

Le test de Bartlett (1944) permet de tester la nullité du coefficient d'autocorrélation théorique de  $u_i$  :  $\begin{cases} H_0 : \rho_h = 0 \\ H_1 : \rho_h \neq 0 \end{cases}$  Sous  $H_0$  : il montre que  $B_h = \sqrt{N} \times \hat{\rho}_h \sim \mathcal{N}(0,1)$

On accepte la nullité du coefficient d'autocorrélation au seuil de  $\alpha$  si  $\hat{\rho}_h \in \left[ -\frac{z_{\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{N}}, \frac{z_{\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{N}} \right]$ , où

$\frac{z_{\alpha}}{2}$  est la quantile au seuil  $\alpha$  d'une loi normale standard.

Figure 13 : Corrélogramme de la suite générée par l'algorithme du Tore (p=5)

Date: 05/15/13 Time: 10:46				
Sample: 1 15000				
Included observations: 15000				
Correlogram of Tore				
Autocorrelation	H	AC	Q-Stat	P-Value
	1	-0.082	100.95672	0.000
	2	-0.495	3780.8986	0.000
	3	-0.240	4643.8605	0.000
	4	0.684	11665.892	0.000
	5	0.113	11857.494	0.000
	6	-0.458	15001.969	0.000
	7	-0.360	16949.346	0.000
	8	0.405	19416.249	0.000
	9	0.345	21202.727	0.000
	10	-0.383	23405.795	0.000
	11	-0.443	26354.029	0.000
	12	0.165	26760.563	0.000
	13	0.614	32419.110	0.000
	14	-0.271	33524.625	0.000
	15	-0.489	37113.903	0.000
	16	-0.039	37136.878	0.000
	17	0.920	49848.281	0.000
	18	-0.122	50072.614	0.000
	19	-0.497	53789.819	0.000
	20	-0.206	54424.722	0.000

L'application du test de Bartlett sous EViews nous conduit à rejeter l'hypothèse de l'absence de corrélation des nombres générés par le générateur du Tore au seuil de 5% car les coefficients d'autocorrélation AC pour tout retard H sont en dehors de l'intervalle de confiance  $[-0,016; 0,016]$ .

On perd ainsi le caractère indispensable d'indépendance entre les variables aléatoires. Il faut donc trouver une alternative entre la qualité de la simulation de la translation irrationnelle du Tore et la nécessité d'indépendance.

On va donc tout simplement mélanger les simulations afin de casser l'ordre qui créait cette dépendance.

### I.3.3. L'algorithme du « Tore mélangé »

Pour contourner le problème posé par la dépendance terme à terme des nombres générés par l'algorithme du Tore, une solution consiste à mélanger les valeurs obtenues avant de les utiliser. Ceci ayant pour objectif de minimiser les tendances observées sur l'algorithme du Tore.

L'algorithme du Tore mélangé consiste à prendre au nième tirage la valeur  $U_m$ , au lieu de  $U_n$ , avec  $m$  une fonction d'une variable aléatoire uniforme :

$$U_m = U_{\varphi(n)}$$

Où : 
$$\varphi(n) = [\alpha * N * \tilde{u} + 1]$$

Avec  $[ ]$  désigne l'opérateur partie entière.

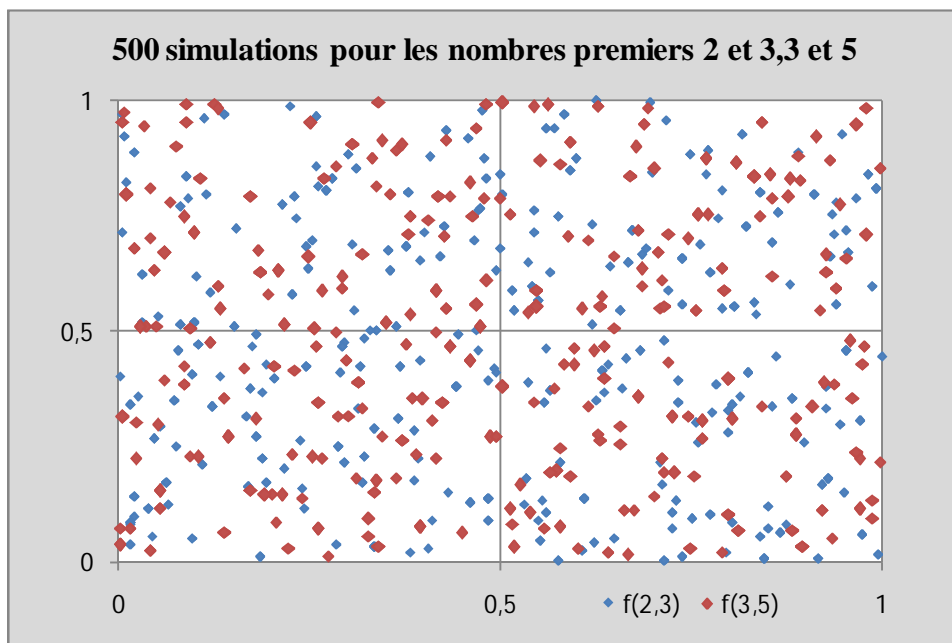
Les paramètres sont :

**N** : nombre total à simuler

$\alpha \geq 1$ . Ce facteur a pour vocation de réduire le nombre de tirages donnant le même nombre aléatoire. En effet, plus  $\alpha$  est grand plus la probabilité de tirer deux fois le même nombre aléatoire est faible. Dans la pratique,  $\alpha = 10$  est satisfaisant.

$\tilde{u}$ : réalisation d'une variable aléatoire uniforme. Cette valeur est obtenue à partir du générateur *Rnd de VBA d'Excel*.

Figure 14 : Mise en évidence de corrélation des nombres simulés par Tore mélangé



D'après ce graphique, on constate qu'il n'y a pas de dépendance de terme à terme des nombres simulés par Tore mélangé contrairement à celui du Tore. Ce constat est vérifié par le test de Bartlett représenté ci-dessous.

Figure 15 : Corrélogramme de la suite générée par Tore mélangé (N=15000, p=5)

Correlogram of Tore melange				
Date: 05/15/13 Time: 14:47				
Sample: 1 15000				
Included observations: 15000				
Autocorrelation	H	AC	Q-Stat	P-Value
	1	-0.003	0.1562	0.693
	2	-0.001	0.1620	0.922
	3	0.007	0.8912	0.828
	4	0.000	0.8913	0.926
	5	0.000	0.8943	0.971
	6	-0.001	0.9005	0.989
	7	-0.000	0.9021	0.996
	8	-0.002	0.9745	0.998
	9	-0.004	1.1718	0.999
	10	-0.003	1.3230	0.999
	11	-0.003	1.4217	1.000
	12	-0.009	2.7649	0.997
	13	0.008	3.6776	0.994
	14	0.008	4.7525	0.989
	15	0.019	10.001	0.820
	16	0.000	10.004	0.866
	17	0.015	13.390	0.710
	18	0.007	14.149	0.719
	19	-0.010	15.526	0.689
	20	0.002	15.583	0.742

Le test de Bartlett appliqué aux nombres simulés sous EVIEWS nous a permis d'accepter l'absence de corrélation des nombres simulés par l'algorithme du tore mélangé au niveau de signification de 5% car les coefficients d'autocorrélation AC pour tout retard H sont tous à l'intérieur de l'intervalle de confiance  $[-0,016; 0,016]$ .

Dans la suite, nous allons utiliser l'algorithme du tore mélangé pour générer un nombre aléatoire de loi uniforme.

Pour la mise en œuvre de l'algorithme, nous avons choisi  $\alpha = 1000$  et  $p = 5$ .

#### I.4. Simulation de variables aléatoires gaussiennes.

Il est courant, voir systématique en finance, que l'on fasse des hypothèses gaussiennes concernant l'évolution des actifs financiers. Cette hypothèse a l'avantage de créer des processus que l'on maîtrise bien pour ensuite les discrétiser et les programmer en pratique.

On cherchera à aboutir à la simulation de réalisations de variables aléatoires indépendantes, suivant une loi normale afin de simuler des mouvements browniens que nécessitent les modèles stochastiques utilisés par la suite pour les actions et les taux.

**Définition :** un mouvement brownien standard  $\{W_t, t \geq 0\}$  est un processus stochastique adapté construit sur un espace probabilisé filtré  $(\Omega, \mathcal{F}, F, P)$  et qui vérifie les propriétés suivantes :

➤  $\forall \omega \in \Omega, W_0 = 0.$

- $\forall 0 \leq t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_k$ , les variables aléatoires  $W_{t_1} - W_{t_0}, W_{t_2} - W_{t_1}, \dots, W_{t_k} - W_{t_{k-1}}$  sont indépendantes.
- $\forall s, t \geq 0$  tels que  $s \leq t$ , la variable aléatoire  $W_t - W_s$  suit une loi normale centrée de variance  $t-s$ .
- $\forall \omega \in \Omega$ , la trajectoire  $t \rightarrow W_t(\omega)$  est continue.

Le mouvement brownien étant un processus continu il faut donc commencer par discrétiser le temps en choisissant un pas de temps  $\Delta t$ .

Simuler une trajectoire de mouvement brownien revient donc à simuler des variables gaussiennes indépendantes et identiquement distribuées de loi  $\mathfrak{N}(0, \Delta t)$ .

#### I.4.1. Méthode d'inversion de la fonction de répartition

L'inversion des fonctions de répartition est une méthode permettant de simuler une distribution continue à partir de réalisations de variables aléatoires de loi uniforme  $U(0, 1)$ .

L'existence de la fonction de répartition inverse (ou réciproque) étant acquise, cette méthode est fondée sur le résultat suivant :

**Propriété :** soit  $U$  une variable aléatoire réelle suivant la loi uniforme sur l'intervalle  $[0, 1]$ . Alors la variable aléatoire réelle  $F^{-1}(U)$  a pour fonction de répartition  $F$ .

### 1. Algorithme de Moro

Les paramètres de la loi normale sont  $\mu$  réel, et  $\sigma > 0$ . Il s'agit d'une loi régulièrement utilisée en assurance vie (notamment par l'application du théorème central limite). Ces principales caractéristiques sont reprises ci-après :

- $F(x) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$  : fonction de répartition d'une loi normale  $\mathfrak{N}(\mu, \sigma^2)$ ;
- $\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$  : fonction de répartition d'une loi normale standard ;
- $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$  : fonction de densité d'une loi normale ;
- $h(x) = \frac{1}{\sigma} Z\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$  : fonction de hasard, et où  $Z$  est le ratio de Mills défini par :  $Z(x) = \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}(1-\phi(x))}$  ;
- $m_k = \begin{cases} (k-1)(k-3) \dots 3\sigma^2 & \text{si } k \text{ pair} \\ 0 & \text{si } k \text{ impair} \end{cases}$  : moments ;
- $V = \sigma^2$  : variance ;
- $CV = \frac{\mu}{\sigma}$  : coefficient de variation ;
- Quantile : la loi normale ne présente pas de formule analytique.

Le problème de la simulation de  $\mathfrak{N}(\mu, \sigma^2)$  peut donc être vu comme le problème de l'inversion de la fonction de répartition de  $\mathfrak{N}(0, 1)$ . En effet, si  $Y \sim \mathfrak{N}(0, 1)$ , alors  $X = \mu + \sigma Y$  suit  $\mathfrak{N}(\mu, \sigma^2)$ . L'expression de la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite n'étant pas facilement inversable, l'algorithme de MORO permet d'approcher le résultat par

une méthode numérique. Cette méthode de simulation est l'une des plus précises parmi l'ensemble des algorithmes existants, notamment au niveau de la queue de distribution.

### Description de l'algorithme de MORO

Soit  $y$  la valeur de loi uniforme générée. On a donc  $y = \phi(x)$  d'après ce qui précède.

- On pose  $z = y - 0,5$ .

- si  $|z| \leq 0,42$  alors on approche  $x$  par:  $x = z * \frac{\sum_{i=0}^3 a_i z^{2i}}{\sum_{i=0}^4 b_i z^{2i}}$ .

- dans le cas contraire, si  $|z| > 0,42$ , alors :

$$x = \varepsilon \left( \sum_{i=0}^8 c_i T_i(t) \right) - \varepsilon \frac{c_0}{2}, \text{ avec } \varepsilon \text{ signe de } z, \text{ et } t = k_1 \left\{ 2 \ln \left( -\ln \left( \frac{1}{2} - |z| \right) \right) - k_2 \right\},$$

La fonction  $f(t) = \left( \sum_{i=0}^8 c_i T_i(t) \right) - \frac{c_0}{2}$  pouvant être approchée par l'algorithme suivant :

- soit  $d_{10} = 0$  et  $d_9 = 0$ .

- Soient  $d_i$  les réels déterminés par la relation récursive :

$$d_i = 2td_{i+1} - d_{i+2} + c_i \text{ pour } i = 8, 7, \dots, 1.$$

Alors on a  $f(t) = td_1 - d_2 + \frac{c_0}{2}$ .

Les valeurs  $a_i, b_i, c_i, k_i$  sont les constantes de l'algorithme de Moro qui sont données en annexe<sup>1</sup>.

Pour la mise en œuvre de l'algorithme, nous avons utilisé l'algorithme du Tore mélangé pour simuler une variable aléatoire  $U$  suivant une loi uniforme sur l'intervalle  $[0,1]$ . En lui appliquant l'inverse de la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite disponible sur VBA d'Excel, on obtient la valeur de la variable normale centrée réduite  $X$ .

Pour obtenir le mouvement brownien  $Z = W_t - W_s$ , il suffit de multiplier  $X$  par  $\sqrt{t-s}$ . Alors  $Z = \sqrt{t-s} \cdot X$  suit une  $\mathfrak{N}(0, t-s)$ .

## 2. Méthode de BOX-MULLER

C'est la méthode de simulation de variable aléatoire réelle distribuée normalement la plus connue. Elle permet de produire des couples normalement distribués, de corrélation nulle. Cet algorithme est très simple à mettre en œuvre.

Proposition : Algorithme de BOX-MULLER : soient  $U_1$  et  $U_2$  deux variables aléatoires réelles de loi  $U[0; 1]$ . Alors les variables aléatoires réelles :

$$X_1 = \sqrt{-2\ln(U_1)} \cos(2\pi U_2)$$

$$X_2 = \sqrt{-2\ln(U_1)} \sin(2\pi U_2),$$

---

<sup>1</sup>. Voir annexe1

sont normalement distribuées de corrélation nulle.

Démonstration :

La transformation : 
$$\begin{cases} X_1 = \sqrt{-2\ln(U_1)}\cos(2\pi U_2) \\ X_2 = \sqrt{-2\ln(U_1)}\sin(2\pi U_2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} U_1 = e^{-\frac{1}{2}(X_1^2+X_2^2)} \\ U_2 = \frac{1}{2\pi}\tan^{-1}\left(\frac{X_2}{X_1}\right) \end{cases} \text{ a pour}$$

Jacobien  $|J| = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^2 e^{-\frac{1}{2}(X_1^2+X_2^2)}$  qui est la densité d'une loi normale bivariée de corrélation nulle.

### I.4.2. Validation de la normalité de l'échantillon simulé

Pour valider l'adéquation de l'échantillon  $(x_i)_{i=1\dots n}$  généré à la loi normale, on va effectuer de tests sur un échantillon de  $n=1000$  réalisations de variables aléatoires.

#### 1. Tests d'ajustement

Figure 16 : Application de l'inversion de la fonction de répartition par Tore mélangé sous SAS

Tests de normalité			
Test	-Statistique--	-Seuil de significativité-	
Shapiro-Wilk	W 0.998808	Pr < W	0.7604
Kolmogorov-Smirnov	D 0.015444	Pr > D	>0.1500
Cramer-von Mises	W-Sq 0.034414	Pr > W-Sq	>0.2500
Anderson-Darling	A-Sq 0.231199	Pr > A-Sq	>0.2500

Figure 17 : Application de la méthode de Box-Müller sous SAS

Tests de normalité			
Test	-Statistique--	-Seuil de significativité-	
Shapiro-Wilk	W 0.998777	Pr < W	0.7399
Kolmogorov-Smirnov	D 0.025319	Pr > D	0.1203
Cramer-von Mises	W-Sq 0.053799	Pr > W-Sq	>0.2500
Anderson-Darling	A-Sq 0.294852	Pr > A-Sq	>0.2500

D'après ces résultats sous SAS, on ne peut pas rejeter l'hypothèse nulle de normalité des 1000 réalisations gaussiennes simulées en utilisant l'inversion de la fonction de répartition par le Tore mélangé et la méthode de Box-Müller, au seuil de 5% car les p-valeurs associées aux statistiques de tests sont toutes supérieures à 5%.

## 2. Indépendance de variables simulées

On rappelle que pour une variable normale, si deux variables sont non corrélées alors elles sont indépendantes. Il suffit donc d'analyser le corrélogramme de variables simulées.

Figure 18 : Application d'inversion de la fonction de répartition par Tore mélangé

<b>Correlogram of Tore Melange</b>				
<b>Date: 05/17/13 Time: 01:32</b>				
<b>Sample: 1 1000</b>				
<b>Included observations: 1000</b>				
<b>Autocorrelation</b>	<b>H</b>	<b>AC</b>	<b>Q-Stat</b>	<b>P-Value</b>
	1	-0.009	0.1378	<b>0.711</b>
	2	0.001	0.1385	<b>0.933</b>
	3	-0.004	0.1737	<b>0.982</b>
	4	-0.027	1.5758	<b>0.813</b>
	5	-0.010	1.7667	<b>0.880</b>
	6	-0.010	1.9639	<b>0.923</b>
	7	-0.036	4.3715	<b>0.736</b>
	8	0.006	4.4304	<b>0.816</b>
	9	0.040	7.4387	<b>0.592</b>
	10	-0.004	7.4659	<b>0.681</b>
	11	0.035	9.8618	<b>0.543</b>
	12	0.006	9.9210	<b>0.623</b>
	13	-0.012	10.179	<b>0.679</b>
	14	0.019	10.855	<b>0.697</b>
	15	0.009	10.995	<b>0.753</b>
	16	-0.029	12.652	<b>0.698</b>
	17	-0.023	13.677	<b>0.690</b>
	18	0.023	14.732	<b>0.680</b>
	19	0.000	14.732	<b>0.739</b>
	20	-0.013	15.039	<b>0.774</b>
	21	-0.004	15.073	<b>0.819</b>

Figure 19 : application de la méthode du Box-Müller

Correlogram of Box-Müller				
Date: 05/17/13 Time: 01:24				
Sample: 1 1000				
Included observations: 1000				
Autocorrelation	H	AC	Q-Stat	P-Value
	1	0.017	0.5754	0.448
	2	0.028	2.0244	0.363
	3	-0.001	2.0256	0.567
	4	0.027	3.3755	0.497
	5	-0.023	4.4197	0.491
	6	-0.014	4.7894	0.571
	7	0.048	9.2352	0.236
	8	0.016	9.7157	0.286
	9	-0.001	9.7187	0.374
	10	-0.012	10.001	0.440
	11	-0.001	10.002	0.530
	12	0.015	10.425	0.579
	13	0.014	10.777	0.629
	14	-0.013	11.091	0.679
	15	-0.003	11.110	0.745
	16	0.005	11.160	0.799
	17	-0.031	12.951	0.739
	18	-0.015	13.364	0.770
	19	0.028	14.867	0.731
	20	0.058	21.301	0.380
	21	-0.023	22.344	0.380

D'après ces correlogrammes obtenus sous EViews, on ne peut pas rejeter l'hypothèse nulle d'absence de corrélation des variables gaussiennes générées par ces deux méthodes au seuil de 5%. En effet, les coefficients d'autocorrélation AC pour tout retard H sont tous à l'intérieur de l'intervalle de confiance  $[-0,06; 0,06]$ .

En conclusion, nous pouvons utiliser ces méthodes décrites ci-dessus pour générer des nombres aléatoires.

Nous allons utiliser dans la suite la méthode d'inversion de fonction de répartition .

### **I.5. La structure par terme des taux d'intérêt**

L'objectif principal d'une structure de taux d'intérêt est de reproduire l'évolution du prix des titres actifs qui dépendent du taux d'intérêt plus particulièrement celui du marché obligataire. En effet, le prix d'une obligation sans risque de défaut de nominal N, de maturité T et de taux facial  $\rho$  se déduit des prix des zéro-coupons  $P(t, T)$  via la formule :

$$O_t = N * (\rho \sum_{i=t+1}^T P(t, i) + P(t, T)).$$

On déduit en particulier de cette formule le taux auquel une obligation doit être émise pour être au pair en égalant son prix à son nominal N, ce qui donne :

$$\rho = (1 - P(t, T)) / (\sum_{i=t+1}^T P(t, i)).$$

On est donc amené pour valoriser des titres obligataires à déterminer le prix des zéro-coupons  $P(t, T)$ . La courbe des taux obtenue va permettre en outre d'actualiser les flux des passifs.

Les modèles d'évaluation de la structure temporelle des taux d'intérêt peuvent être classés en trois catégories (cf. ZEMMOUR [2002]) selon l'approche utilisée :

- Les modèles d'équilibre partiel reposant sur un raisonnement d'arbitrage : celui de VASICEK par exemple qui comporte une variable d'état.
- Les modèles d'équilibre général, tels que le modèle de COX, INGERSOLL et ROSS basés sur une description globale de l'économie.
- Les modèles de déformation qui partent de la structure des taux d'intérêt observée et lui font subir des chocs. Le modèle de HO et LEE ainsi que sa généralisation proposée par HEALTH, JARROX et MORTON sont les plus connues dans cette catégorie.

Les principales caractéristiques d'un modèle de taux d'intérêt à court terme doivent être, selon AHLGRIM et al. [1999], les suivantes :

- La volatilité ne doit pas être la même à chaque maturité ;
- Le modèle doit être autorégressif ;
- Il doit intégrer une corrélation entre les taux à différentes maturité ;
- Le taux d'intérêt ne doit jamais être négatif et enfin
- La volatilité doit être proportionnelle à la valeur du taux.

ROGERS [1995] propose quant à lui des conditions pragmatiques en suggérant qu'un modèle de taux d'intérêt doit être suffisamment flexible pour couvrir un maximum de situations réelles, suffisamment simple pour pouvoir donner des résultats dans un temps correct, tel que l'on puisse observer ou estimer ses paramètres d'entrée et enfin réaliste.

Dans les problématiques d'assurance on s'attachera à privilégier les approches qui permettent une bonne représentation des prix des obligations sur les maturités concernées.

## Notations

Dans la suite nous allons utiliser les notations suivantes :

- $P(t, T)$  le prix d'une obligation sans coupon définie par la valeur en  $t$  d'une unité monétaire qui sera payé en  $T$ .
- $R(t, T) = -\frac{1}{T-t} \ln P(t, T)$  le taux de rendement continu.
- $r(t) = \lim_{T \rightarrow t} R(t, T)$  le taux sans risque instantané.
- $f(t, T) = -\frac{\partial}{\partial T} \ln P(t, T)$  le taux à terme (taux forward) instantané qui représente le taux d'intérêt sans risque pour un prêt contracté au temps  $t$  débutant à  $T$  pour une période infinitésimale.

Ces diverses définitions impliquent en particulier que :

$$P(t, T) = \exp \left[ - \int_t^T f(t, s) ds \right] \text{ et } r(t) = f(t, t).$$

### I.5.1. Modélisation des taux en temps continu

Les hypothèses de base sur lesquelles reposent ces modèles sont les hypothèses classiques d'absence de coûts de transaction et de titres parfaitement divisibles ; on suppose également que les agents sont rationnels et disposent du même niveau d'information, que les marchés sont efficients (ils ne permettent pas de possibilité d'arbitrage) et que les taux d'emprunts et de prêts sont identiques.

On fait alors l'hypothèse que le taux instantané  $r$  suit un processus de diffusion caractérisé par l'équation suivante :

$$dr(t) = \mu(r, t)dt + \sigma(r, t)dW(t)$$

Avec  $dr$  la variation du taux  $r$  au cours de l'instant  $dt$ ,  $\mu(r, t)$  la moyenne des changements instantanés du taux par unité de temps (ou coefficient de dérive),  $\sigma(r, t)$  l'écart-type des changements instantanés du taux par unité de temps (ou coefficient de diffusion, ou encore volatilité) et  $W_t$  un mouvement brownien standard vérifiant :  $E(dW_t) = 0$  et  $E(dW_t^2) = dt$ .

Cette formulation de base inclut les principales dynamiques continues de taux.

### I.6. Choix du modèle : Le modèle Cox Ingersoll et Ross (CIR)

Le modèle retenu parmi ces modèles<sup>2</sup> mentionnés ci-dessus pour modéliser l'évolution du taux court instantané est le modèle de Cox, Ingersoll et Ross car il est simple à mettre en application et présente l'avantage de prendre en compte un effet de retour à la moyenne. Enfin ce modèle présente le grand avantage d'avoir une probabilité de taux négatifs égale à zéro dès lors que la condition  $b \geq \frac{\sigma^2}{2a} > 0$  est satisfaite ce qui est vérifié dans notre modélisation.

L'évolution du taux court instantané est modélisée suivant l'équation différentielle stochastique :  $dr_t = a(b - r_t)dt + \sigma\sqrt{r_t}dW_t$

Où :

- $r_t$  : taux d'intérêt instantané ;
- $a$  : vitesse de retour à la moyenne ;
- $b$  : moyenne long terme du taux autour de laquelle évolue le taux court instantané ;
- $\sigma$  : volatilité telle que  $\sigma\sqrt{r_t}$  corresponde à l'écart type instantané du taux court ;
- $W_t$  : mouvement brownien standard.

#### I.6.1. Discrétisation du processus

Le problème se situe au niveau de la discrétisation car il n'existe pas une discrétisation exacte facilement programmable pour ce modèle. Il faut donc avoir recours à une technique de discrétisation approximative telle le schéma d'EULER ou de MILSTEIN. Nous avons utilisé le schéma d'EULER explicite pour la discrétisation.

---

<sup>2</sup> .voir annexe 4

L'utilisation de schéma d'EULER permet de donner une discrétisation approximative de premier ordre suivante :

$$\tilde{r}_{t+\delta} = \tilde{r}_t + a(b - \tilde{r}_t)\delta + \sigma\sqrt{\tilde{r}_t\delta} \times \varepsilon_t$$

Où :

- $\delta$  est le pas de temps utilisé pour la modélisation (dans notre cas 1)
- $\varepsilon_t$  est une variable aléatoire suivant une loi normale centrée réduite.

On procède par récurrence pour obtenir les taux instantanés jusqu'à la date de fin de la projection.

Le problème se réduit donc à la simulation d'une loi normale centrée réduite et à la détermination des paramètres  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{\sigma}$  et du taux court initial  $r_0$ .

### I.6.2. Prix des zéro-coupons et taux zéro-coupons

Le taux court instantané permet de reconstituer la structure par terme des taux à n'importe quelle date. En effet, le prix en  $t$  du zéro-coupon de maturité sous le modèle CIR est comme décrit précédemment déterminé par la formule suivante :

$$\tilde{P}(t, T) = A(t, T)e^{-B(t, T)r_t}, \forall t < T$$

Où,  $\forall t < T$ :

$$A(t, T) = \left( \frac{2\gamma e^{\frac{(\gamma+a+\lambda)(T-t)}{2}}}{(\gamma + a + \lambda)(e^{\gamma(T-t)} - 1) + 2\gamma} \right)^{\frac{2ab}{\sigma^2}}$$

$$B(t, T) = \frac{2(e^{\gamma(T-t)} - 1)}{(\gamma + a + \lambda)(e^{\gamma(T-t)} - 1) + 2\gamma}$$

$$\gamma = \sqrt{(a + \lambda)^2 + 2\sigma^2}$$

Le paramètre  $\lambda$  est la prime de risque. La prime de risque mesure l'écart entre la rentabilité attendue d'un actif risqué et le taux d'intérêt sans risque. Elle correspond au prix qu'un individu serait prêt à payer pour prendre un risque. Dans le modèle réalisé en univers risque neutre, elle vaut zéro ; c'est ce que nous allons utiliser par la suite.

Les taux zéro-coupons sont déduits du prix des obligations zéro-coupon par la formule :  $\tilde{R}(t, T) = -\frac{\ln(\tilde{P}(t, T))}{T-t}$

Une obligation zéro-coupon est un titre dont la rémunération est constituée exclusivement par l'écart entre son prix d'émission et son prix de remboursement. Cette obligation ne verse aucun coupon intermédiaire entre sa date d'émission et sa date de remboursement.

### I.6.3. Estimation des paramètres

Afin d'estimer les différents paramètres du modèle de CIR, nous allons calibrer le processus de manière à reproduire le plus fidèlement possible les prix de marché  $P(0, T)$  des zéro-coupons à la date d'évaluation.

La calibration du modèle est faite par la méthode des moindres carrés ordinaires : nous cherchons les paramètres qui minimisent l'écart quadratique entre les prix de marché et les prix estimés qui sont donnés par  $\tilde{P}(0, T)$  à la date d'évaluation 2012.

Pour obtenir les prix de marché, il nous faut une courbe des taux fiables. Nous avons pris celle publiée par BANK AL MAGHRIB (BAM). Elle fournit les taux moyens pondérés en fonction de maturité. On peut donc en déduire le prix de marché des zéro-coupons par la formule suivante :

$$P(0, T) = \text{Exp}(-T \times R(0, T))$$

Le premier paramètre à estimer est le taux court instantané à la date d'évaluation  $r_0$ . Pour estimer ce paramètre, nous procédons à une interpolation cubique en considérant les 4 points de la courbe qui exprime les taux zéro-coupons en fonction de la maturité, suivant la relation:

$$R(0, T) = \alpha T^3 + \beta T^2 + \gamma T + \delta$$

Avec

$$R(0, T) = -\frac{\ln(P(0, T))}{T}$$

Sous l'hypothèse que la courbe passe par les quatre points choisis  $(T_1, R(0, T_1))$ ,  $(T_2, R(0, T_2))$ ,  $(T_3, R(0, T_3))$  et  $(T_4, R(0, T_4))$ , nous obtenons alors un système à quatre équations qui nous permet d'estimer les paramètres  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  :

$$\begin{cases} R(0, T_1) = \alpha T_1^3 + \beta T_1^2 + \gamma T_1 + \delta \\ R(0, T_2) = \alpha T_2^3 + \beta T_2^2 + \gamma T_2 + \delta \\ R(0, T_3) = \alpha T_3^3 + \beta T_3^2 + \gamma T_3 + \delta \\ R(0, T_4) = \alpha T_4^3 + \beta T_4^2 + \gamma T_4 + \delta \end{cases}$$

En résolvant ce système nous trouvons les paramètres  $\alpha, \beta, \gamma$  et  $\delta$ .

Comme  $r_0 = \lim_{T \rightarrow 0} R(0, T)$ , le taux court instantané  $r_0$  est égal à  $\delta$ .

La volatilité  $\sigma$  du taux court dans le modèle de CIR est fixée arbitrairement car une étude statistique sur données historiques est largement dépendante de la plage de données retenue. Nous avons pris pour la volatilité l'écart-type des taux moyens pondérés de BAM.

Enfin, pour estimer a et b nous appliquons une estimation ad hoc sur les prix des zéro-coupons. C'est-à-dire que nous utilisons la méthode des moindres carrés pour déterminer les paramètres du modèle permettant de représenter au mieux les prix des zéro-coupons observables sur le marché. Nous cherchons alors à trouver le couple (a, b) qui minimise la distance quadratique (critère caractéristique de la qualité de notre ajustement) :

$$D = \sum_{j=1}^N (\text{prix marché}_j - \text{prix estimé}_j)^2$$

Où :

- D est la distance à minimiser ;
- N est le nombre d'obligations envisagées pour l'ajustement ;
- Le prix marché est le prix calculé à partir de la courbe des taux moyens pondérés de BAM ;
- Le prix estimé est le prix calculé sur la base du modèle CIR.

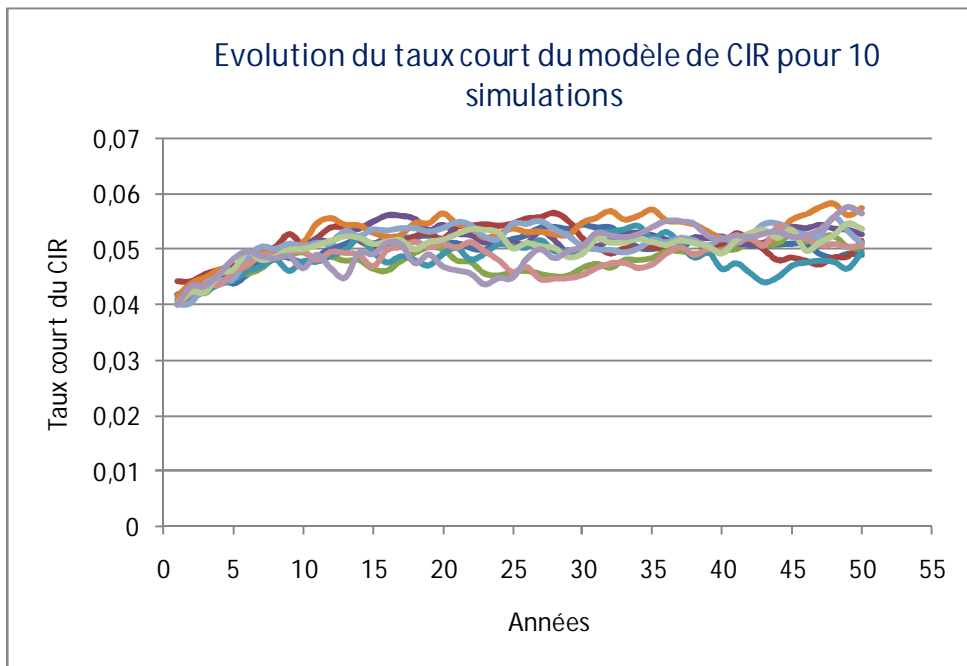
Nous obtenons les estimations suivantes par application de cette méthode ci-dessus:

Tableau 16 : Paramètres du modèle CIR

<b>Paramètres du modèle CIR à partir de la courbe des taux moyens pondérés de BAM</b>	
a	13,56%
b	5,20%
$\sigma$	0,58%
$r_0$	3,95%

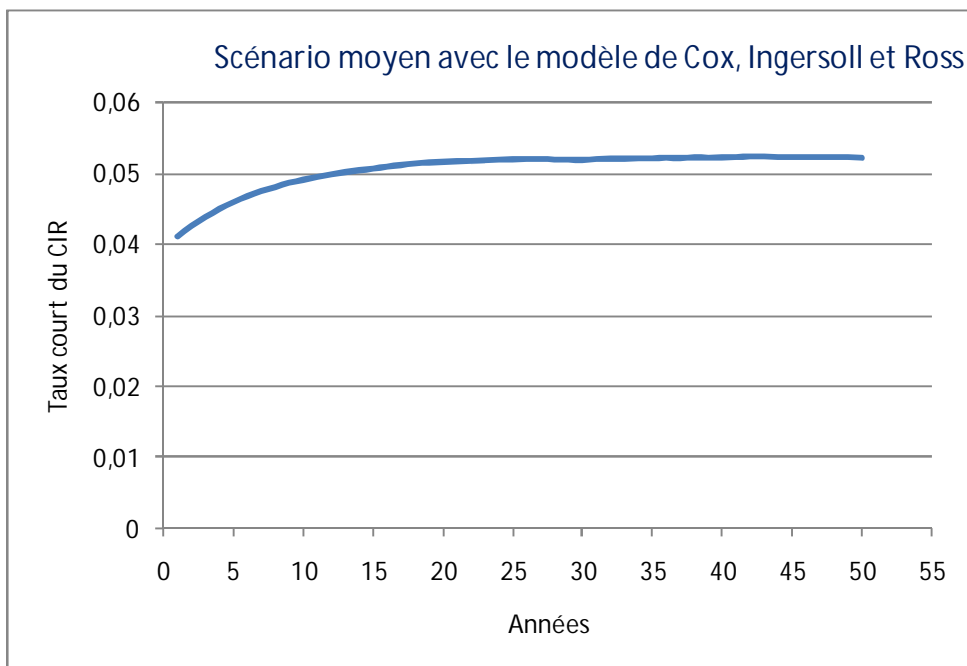
Le graphique suivant montre l'évolution du taux d'intérêt annuel dans 10 scénarios stochastiques générés grâce au modèle de CIR :

Figure 20 : Evolution du taux court



La moyenne de 1000 scénarios donne le graphique de la courbe du taux d'intérêt suivant :

Figure 21 : Scénario moyen avec le CIR



De la courbe des taux zéro-coupons, nous pouvons déduire la fonction d'actualisation qui représente le prix des zéro-coupons en fonction de leur maturité grâce à la relation définie précédemment :

$$R(0, T) = -\frac{\ln(P(0, T))}{T}$$

## I.7. Modélisation des obligations

Le prix des obligations est donné à partir des taux courts simulés suivant le modèle CIR. Le prix en  $t$  d'une obligation est donné par la formule suivante :

$$\text{Prix oblig}(t, T) = \sum_{\tau=\tau_1}^T C \times P(t, \tau) + N \times P(t, T)$$

Avec :

- $N$  : le nominal de l'obligation ;
- $T$  : la maturité de l'obligation ;
- $C$  : la valeur du coupon aux différents instants  $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n = T$  ;
- $P(t, \tau)$  : le prix en  $t$  du zéro-coupon de maturité  $\tau$ .

## I.8. Modélisation des actions

Le cours des actions est simulé par une méthode stochastique.

De nombreux modèles ont été proposés pour modéliser l'évolution du cours des actions et une littérature abondante est consacrée à ce sujet.

On peut faire remonter l'idée de modéliser l'évolution des cours par ce que nous appelons aujourd'hui un processus stochastique à BACHELIER [1990] qui, dans sa thèse de doctorat, utilise la loi normale pour modéliser le prix d'un actif boursier. Le modèle de référence est proposé par BLACK et SCHOLES [1973] en considérant le mouvement brownien géométrique comme processus décrivant les trajectoires des prix des actifs financiers. Les hypothèses de ce modèle sont très restrictives : continuité des trajectoires, constance de la volatilité, log-normalité des rendements, etc. un certain nombre d'observations empiriques contredisent manifestement ces hypothèses : les prix sautent soudainement, les études empiriques montrent que la volatilité n'est pas constante et au surplus les queues de distribution sont plus épaisses que celle d'une loi log-normale.

Pour tenir compte des sauts qui peuvent se produire, des modèles à sauts ont été introduites, en décrivant l'arrivée des sauts par le processus de poisson (MERTON3 [1976]), ou par des processus mixtes brownien Poisson (BELLAMY [1999]), ou encore des martingales discontinues (DRITSCHER et PROTTER [1999]). Pour modéliser les variations de la volatilité, des modèles à volatilité stochastique (dirigés par des mouvements browniens) sont apparus, comme par exemple HULL et WHITE [1987].

Dans ce mémoire, nous avons utilisé le modèle de référence de BLACK & SCHOLES pour modéliser l'action.

---

<sup>3</sup>. Voir annexe 5

### I.8.1. Le modèle de Black et Scholes avec modèle de taux d'intérêt de CIR

Le modèle de BLACK et SCHOLLES [1973], est le modèle de référence pour la modélisation de l'évolution du cours des actions. La modélisation choisie s'opère en univers risque neutre avec présence d'un taux de dividende. De plus, nous introduisons un taux de rendement instantané aléatoire. Le prix d'une action évolue selon le processus suivant :

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = (r(t) - q)dt + \sigma dB(t)$$

Où :

- $S(t)$  est le prix de l'action à la date  $t$  ;
- $r(t)$  est le taux sans risque correspondant au taux d'intérêt court instantané simulé grâce au modèle de CIR. Ce taux est constant sur chaque période  $[t, t + \delta[$ , où  $\delta$  est le pas du temps ( $0 < \delta \leq 1$ );
- $q$  est le taux de dividende. Ce taux est supposé stable dans le temps ;
- $\sigma$  est la volatilité déterministe de l'action ;
- $B$  est un mouvement brownien de l'univers risque neutre.

En utilisant le lemme d'ITÔ à l'équation différentielle stochastique précédente et la condition à l'origine  $S(0) = S_0$ , la solution de cette équation s'écrit :

$$S(t) = S_0 \times \exp \left[ \int_0^t \left( r(s) - q - \frac{\sigma^2}{2} \right) ds + \sigma B(t) \right]$$

Le processus de prix de l'action est donc log-normal.

#### 1. Prise en compte des corrélations

En réalité, les évolutions des différentes actions et du taux court instantané sont corrélées. Pour prendre en compte cette dépendance linéaire la décomposition de Cholesky est utilisée. Par cette méthode, il va être possible de corréliser les dynamiques du taux court et du prix des actions avec un coefficient de corrélation  $\rho$ .

Soient :

- $B^1$  est le mouvement brownien régissant l'évolution du taux court instantané ;
- $B^2$  est le mouvement brownien régissant l'évolution du cours de l'action.

D'après la décomposition de Cholesky, pour simuler le couple  $(B^1, B^2)$  de matrice de variance-covariance  $\Gamma = \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix}$ , il suffit de simuler  $(\varepsilon^1, \varepsilon^2)$  un couple de variables gaussiennes centrées réduites indépendantes, par la méthode d'inversion de fonction de répartition de la loi normale. On aura alors les dynamiques suivantes :

$$dr(t) = a(b - r(t))dt + \sigma_1 \sqrt{r(t)} d\varepsilon^1(t)$$

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = (r(t) - q)dt + \rho \sigma d\varepsilon^1(t) + \sigma_2 \sqrt{1 - \rho^2} d\varepsilon^2(t)$$

Avec :

- $\sigma_1$  est la volatilité du taux court instantané du modèle CIR ;
- $\sigma_2$  est la volatilité de l'action.

## 2. Discrétisation du processus

Pour discrétiser le processus du prix de l'action  $S(t)$ , nous utilisons a nouveau le schéma d'Euler. Le processus  $\tilde{S}_t$  discrétisé s'écrit :

$$\tilde{S}_{t+\delta} \approx \tilde{S}_t * \exp \left\{ \left( \tilde{r}(t) - q - \frac{\sigma^2}{2} \right) \delta + \rho \sigma_2 \sqrt{\delta} * \varepsilon_t^1 + \sigma_2 \sqrt{(1 - \rho^2) \delta} * \varepsilon_t^2 \right\}$$

Où  $\varepsilon_t^i$ ,  $i = 1, 2$  est une variable aléatoire normale  $\mathcal{N}(0,1)$  et  $\delta$  est le pas du temps ( $\sigma \leq 1$ ).

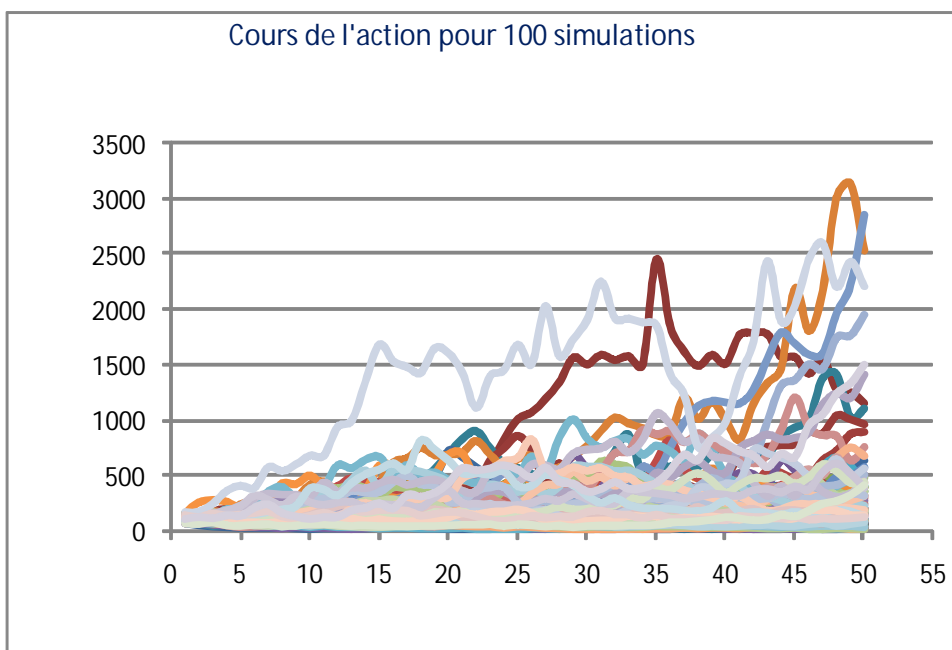
Le problème se réduit donc à la simulation d'une loi normale centrée réduite. Cette simulation est effectuée par inversion de la fonction de répartition de la loi normale via l'algorithme du Tore mélangé.

## 3. Calibrage du modèle

Le taux de dividende  $q$  étant supposé constant (égal à 5% pour notre modélisation), le seul paramètre à estimer est la volatilité  $\sigma$  de l'action. La volatilité d'une action est l'écart-type des rentabilités. Nous l'estimons empiriquement à partir de données historiques journalières de la période Janvier 2010-Décembre 2012 de l'indice de MASI4 publiée par la BOURSE de CASABLANCA. Nous avons trouvé une volatilité  $\hat{\sigma}$  de 18,5%.

Pour illustration, voici l'évolution annuelle du cours de l'action de rendement égal au taux sans risque de CIR et de volatilité égale à 18,5% pour 100 simulations :

Figure 22 : Cours de l'action



### **I.9. Modélisation de l'immobilier**

Pour l'immobilier aucune modélisation stochastique n'a été faite. On a supposé que le rendement immobilier est constant tout le long de la projection.

$$VM_{fin}(t) = VM_{debut}(t) * (1 + r_{im}) * (1 - q_{im})$$

Avec :

$VM_{debut}(t)$ : Valeur de marché de l'immobilier au début de l'année  $t$  après rebalancement

$r_{im}$ : rendement de l'immobilier

$q_{im}$ : dividende versé par l'immobilier

### **I.10. Modélisation de l'OPCVM**

L'allocation de l'OPCVM-taux est déduite de celle des obligations en respectant l'allocation cible. Sa valeur de marché est modélisée de la manière suivante :

$$OPCVM_{fin}(t) = OPCVM_{debut}(t) * (1 + r(dur(t)))$$

Avec :

$OPCVM_{debut}(t)$ : Valeur de marché de l'OPCVM au début de l'année  $t$  après rebalancement

$dur(t)$  : duration à  $t$  du passif

$r(dur(t))$  : correspond au taux zéro coupon dont l'échéance est égale à la duration du passif

## **II. Modélisation du passif**

Le passif représente les engagements de l'assureur envers les assurés. A travers l'inversion du cycle production en assurance, il constitue la partie la plus délicate du bilan. Il doit être évalué à juste valeur afin de ne pas compromettre la solvabilité de l'entreprise. Par conséquent il est important de segmenter la modélisation du passif selon le type de produit. Pour le produit d'épargne qui nous a été confié, un regroupement par génération de contrat permet de mieux évaluer les flux du passif qu'un regroupement par âge du fait que les assurés de la même génération ont en générale un comportement similaire.

### **II.1. Nombre d'adhérent**

Le nombre d'adhérent représente les contrats pour lesquels l'assureur à encore des engagements.

$$\begin{aligned} \text{Survivants}(n, g) &= \text{survivants}(n - 1, a(g, n)) * (1 - \text{TauxRachats}(A(g, n))) \\ &* (1 - \text{TauxMortalité}(a(g, n))) * (1 - \text{Echeance}(n, a(g, n))) \end{aligned}$$

Avec :

*Survivants*(n, g): nombre d'adhérents de la génération g

*A*(g, n): Ancienneté de la génération g l'année n

*a*(g, n): age moyen de la génération g l'année n

*TauxRachats*(a(g, n)): taux de rachats de la génération g l'année n

*TauxMortalité*(a(g, n)): taux de mortalité de la génération g l'année n

*Echeance*(n, a(g, n)): Taux des sorties à terme de la génération g l'année n

## II.2. Versements

Les versements au cours d'une année représentent les primes payées par les assurés au cours de cette année.

$$\begin{aligned} \text{versements}(n, g) &= \text{versements}(n - 1, g) * (1 - \text{TauxRachats}(A(g, n))) \\ &* (1 + \text{TauxIndexation}(n)) * (1 - \text{TauxMortalité}(a(g, n))) \\ &* \text{TauxReversement}(g, n) \end{aligned}$$

Avec :

*versements*(n, g): montant des versements de primes de la génération g l'année n

*A*(g, n): Ancienneté de la génération g l'année n

*a*(g, n): age moyen de la génération g l'année n

*TauxRachats*(a(g, n)): taux de rachats de la génération g l'année n

*TauxMortalité*(a(g, n)): taux de mortalité de la génération g l'année n

*TauxIndexation*(n): taux d'indexation des primes versées l'année n

*TauxReversement*(g, n)

: Taux de reversement des primes des adhérents de la génération g l'année n

### II.3. Réserves au début de l'année

Les réserves au début de l'année représentent la provision constituée par l'assureur pour faire face à ces engagements.

$$Reserves_{ouverture}(n, g) = Reserves_{fin.ann\acute{e}e}(n - 1, g) + Participation(n - 1, g)$$

Avec :

$Reserves_{ouverture}(n, g)$ : montant des réserves au début de l'année  $n$  pour la génération  $g$

$Reserves_{fin.ann\acute{e}e}(n, g)$ : montant des réserves à la fin de l'année  $n$  pour la génération  $g$

$Participation(n, g)$ : montant de la participation au bénéfice de la génération  $g$  l'année  $n$

### II.4. Montant des décès

Le montant des décès est la somme payée par l'assureur suite aux décès des assurés. Pour les contrats d'épargne cette somme correspond à l'épargne constituée.

$$Deces(n, g) = Reserves_{ouverture}(n, g) * ((1 + TMG)^{0,5}) * (1 + TauxMajoration) * TauxMortalit\acute{e}(a(g, n))$$

Avec :

$a(g, n)$ : age moyen de la génération  $g$  pour l'année  $n$

$Deces(n, g)$ : montant des prestations dues aux décès des adhérents de la génération  $g$  l'année  $n$

$TauxMortalit\acute{e}(a(g, n))$ : taux de mortalité de la génération  $g$  l'année  $n$

$TauxMajoration$ : taux de majoration du capital en cas de décès

$TMG$ : taux minimum garanti

### II.5. Rachats nets de pénalité

Le montant des rachats est la somme payée par l'assureur suite à une interruption du contrat par l'assuré. Pour les contrats d'épargne cette somme correspond à l'épargne constituée.

$$Rachats(n, g) = Reserves_{ouverture}(n, g) * TauxRachats(A(g, n)) * (1 - TauxPenalit\acute{e}(A(g, n))) * (1 - TauxMortalit\acute{e}(a(g, n))) * ((1 + TMG)^{0,5})$$

Avec :

$A(g, n)$ : Ancienneté de la génération  $g$  l'année  $n$

$Rachats(n, g)$ : montant des prestations dues aux rachats des adhérents de la génération  $g$  l'année  $n$

$TauxRachats(a(g, n))$ : taux de rachats de la génération  $g$  l'année  $n$

$TauxPenalité(A)$ : taux de pénalité dû aux rachats des adhérents d'âge  $a$  et d'ancienneté  $A$

$TauxMortalité(a)$ : taux de mortalité des adhérents d'âge  $a$

## II.6. Capitaux à échéance

Les capitaux à échéances sont des prestations payées par l'assureur pour les contrats à terme.

$$Capital(n, g) = Reserves_{ouverture}(n, g) * ((1 + TMG)^{0,5})$$

$Capital(n, g)$ : montant des prestations pour la génération  $g$  l'année  $n$  pour les contrats à échéance

$Reserves_{ouverture}(n, g)$ : montant des réserves au début de l'année de la génération  $g$  l'année  $n$

## II.7. Réserves à la fin de l'année

Elles représentent la provision constituée après la collecte des primes et le paiement des prestations.

$$\begin{aligned} Reserves_{fin.année}(n, g) &= Reserves_{ouverture}(n, g) * (1 + TMG) \\ &- \left( Deces(n, g) - Versements(n, g) + \left( \frac{Rachats(n, g)}{1 - TauxPenalité(A(g, n))} \right) + Capital(n, g) \right) \\ &* (1 + TMG)^{0,5} \end{aligned}$$

Avec :

$Reserves_{fin.année}(n, g)$ : montant des réserves à la fin de la génération  $g$  l'année  $n$

$Reserves_{ouverture}(n, g)$ : montant des réserves au début de l'année de la génération  $g$  l'année  $n$

$Capital(n, g)$ : montant des prestations de la génération  $g$  pour les contrats à échéance l'année  $n$

$Rachats(n, g)$ : montant des prestations dues aux rachats pour la génération  $g$  l'année  $n$

$versements(n, g)$ : montant des versements de primes de la génération  $g$  l'année  $n$

*Deces(n, a): montant des prestations dues aux décès des adhérents d'âge a et d'ancienneté n*

*TauxPenalite(A): taux de penalite dû aux rachats des adhérents d'ancienneté A*

*A(g, n): Ancienneté de la génération g l'année n*

## II.8. Participation au bénéfice

La participation au bénéfice représente le surplus accordé aux assurés. Elle provient des produits financiers

$$\begin{aligned} \text{Participation}(n, g) &= (90\% * \text{rendement}(n) - \text{TauxGestion} - \text{TMG}) \\ &* \left( \text{Reserve}_{\text{ouverture}}(n, g) + \text{Reserves}_{\text{fin.année}}(n, g) \right) * 0,5 \end{aligned}$$

Avec :

*Participation(n, g): montant de la participation au bénéfice de la génération g l'année n*

*Reserves<sub>fin.année</sub>(n, g): montant des réserves à la fin de l'année de la génération g l'année n*

*Reserves<sub>ouverture</sub>(n, g): montant des réserves au début de l'année de la génération g l'année n*

*rendement(n): rendement de l'actif l'année n*

*TauxGestion: taux de gestion*

## II.9. Pénalités

La pénalité de rachats est le montant retiré à l'épargne de l'assuré suite à un rachat avant une date convenue dans le contrat.

$$\begin{aligned} \text{Penalite}(n, g) &= \text{Reserves}_{\text{ouverture}}(n, g) * ((1 + \text{TMG})^{0,5}) * \text{TauxRachats}(A(g, n)) \\ &* \text{TauxPenalite}(A(g, n)) \end{aligned}$$

*Penalite(n, g): montant perçu de la pénalité pour la génération g l'année n*

*Reserves<sub>ouverture</sub>(n, g): montant des réserves au début de l'année de la génération g l'année n*

*TauxRachats(A): taux de rachats des adhérents d'ancienneté A*

## II.10. Les charges de gestion

Les charges gestion représentent les frais nécessaire pour gérer les contrats.

$$\text{fraisDecès}(n, g) = \text{CUD} * N_d(g, n)$$

$$faisRachats(n, g) = CUR * N_r(g, n)$$

$$fraisVigueur(n, g) = CUV * N(g, n)$$

Avec:

*fraisDécès(n, g): frais de gestion dus aux des adhérents de la génération g l'année n*

*faisRachats(n, g): frais de gestion dus aux rachats de la génération g l'année n*

*fraisVigueur(n, g): frais de gestion des contrats en vigueur de la génération g l'année n*

*CUD: coût unitaire de gestion des décès*

*CUR: coût unitaire de gestion des rachats*

*CUV: coût unitaire de gestion d'un contrat en vigueur*

*N<sub>a</sub>(g, n): nombre de décès de la génération g l'année n*

*N<sub>r</sub>(g, n): nombre de rachats de la génération g l'année n*

*N(g, n): Nombre de contrats en vigueur de la génération g l'année*

## II.11. Modélisation des rachats conjoncturels

Pour la modélisation des rachats conjoncturels, on utilise souvent une fonction dépendant seulement de l'écart entre le taux servi et le taux espéré par l'assuré. Compte tenu de leur nature, les rachats conjoncturels ne peuvent pas être estimés à l'aide des lois d'expériences. Le taux de rachats conjoncturel est ajouté au taux de rachat structurel. Si le taux servi est inférieur au taux attendu par les assurés, ces derniers auront tendance l'année suivante à racheter plus que la courbe de rachats structurels l'indique. En revanche, si les assurés se voient servir un taux supérieur à leurs attentes, ils rachèteront l'année suivante moins que l'indique la courbe de rachats structurels. Pour la modélisation des rachats conjoncturels nous avons utilisé la fonction proposée par l'autorité de contrôle française dans les orientations nationales complémentaires du QIS5.

Pour le taux attendu nous avons pris le TME à dix ans. La fonction proposée dans les ONC du QIS 5 est la suivante :

$$RC(R) = \begin{cases} RC_{max} & \text{si } R - TA < \alpha \\ RC_{max} \frac{(R - TA - \beta)}{\alpha - \beta} & \text{si } \alpha < R - TA < \beta \\ 0 & \text{si } \beta < R - TA < \gamma \\ RC_{min} \frac{(R - TA - \gamma)}{\alpha - \gamma} & \text{si } \gamma < R - TA < \delta \\ RC_{min} & \text{si } R - TA > \delta \end{cases}$$

Avec :

$R$ : le taux servi

$TA$ : le taux attendu

$\alpha$ : seuil en dessous duquel les rachats conjoncturels sont constants et fixés à  $RC_{max}$

$\beta$  et  $\gamma$  sont respectivement les seuils d'indifférence à la baisse et à la hausse du taux servi

$\delta$  est le seuil au delà duquel la diminution du taux de rachat structurel est constante et fixés à  $RC_{min}$

Deux lois de rachats ont été proposées, l'une correspondant à un minimum et l'autre à un maximum.

Tableau 17 : paramètres pour le rachat conjoncturel

	$\alpha$	$\beta$	$\gamma$	$\delta$	$RC_{min}$	$RC_{max}$
Plafond max	-4%	0%	1%	4%	-4%	40%
Plafond min	-6%	-2%	1%	2%	-6%	20%

Le taux de rachat total devient alors :

$$RT(R, TA, A) = \min(1; \max(0; RS(A) + RC(R, TA)))$$

Avec :

$RS(A)$ : taux de rachat structurel d'ancienneté  $A$

$RC(R, TA)$ : taux de rachat conjoncturel pour un taux servi  $R$  et un taux attendu  $TA$

### III. Modélisation des interactions entre l'actif et le passif

Cette partie concerne essentiellement le respect de l'allocation d'actif cible et de la politique de participation au bénéfice.

#### III.1. Les produits financiers

Chaque année, une partie des produits financiers réalisés par l'assureur est destinée à la revalorisation de l'épargne gérée.

Les produits financiers sont calculés chaque année comme suit :

$$PF_{brut}(t) = Coupons(t) + dividendes_{action}(t) + revenus_{immobilier}(t) + revenus_{OPCVM}(t)$$

avec:

$$dividendes_{actions} = q_{action} * VM_{action}(t)$$

$$revenus_{immobilier} = q_{im} * VM_{immobilier}(t)$$

$$revenus_{OPCVM} = r(dur(t)) * VM_{OPCVM}(t)$$

$q_i$ : dividende versé par l'actif  $i$

$r(dur(t))$

: correspond au taux zéro coupon dont l'échéance est égale à la durée du passif

$VM_i$ : Valeur de marché de l'actif  $i$  au début de l'année  $t$  après rebalancement

### III.2. L'allocation stratégique d'actifs

L'allocation d'actif est donnée par une allocation cible en actions, immobilier, OPCVM et en obligations. L'allocation cible est suivie tout au long de la projection. Chaque année, on vérifie si l'allocation cible est respectée. Si ce n'est pas le cas on procède à des investissements et des désinvestissements entre actifs afin de respecter l'allocation-cible. Chaque année on soustrait de la collecte le montant à payer. Le solde obtenu est distribué proportionnellement à l'allocation cible de chaque actif.

$$collecte(t) = PF(t) + Remboursement_{obligataire}(t) + Primes(t)$$

$$Montant \ à \ payer(t) = Prestation(t) + frais(t)$$

Pour respecter la stratégie d'allocation cible on procède de la manière suivante :

- ❖ Si le solde est négatif: chaque actif est vendu de manière à couvrir le solde proportionnellement à son allocation cible. Dans le cas où la vente d'un actif n'arrive pas à couvrir la partie du solde qui lui ait dû, on procède à la vente d'autres actifs. Si la vente de tous les actifs ne suffit pas à couvrir le solde, on recourt aux fonds propres (normalement). Dans notre modélisation ce dernier cas est traité en rendant la valeur de l'actif à zéro.
- ❖ Si le solde est positif on procède à l'achat de chaque actif proportionnellement à son allocation cible.

NB : On suppose que les actifs sont infiniment divisibles.

### III.3. La revalorisation du passif

L'assuré pouvant racheter à tout moment son contrat et partir à la concurrence, l'assureur doit proposer un taux de revalorisation de l'épargne permettant aux épargnants de rester dans le portefeuille.

Le taux de revalorisation servi est fonction du rendement du portefeuille et du taux minimum garanti.

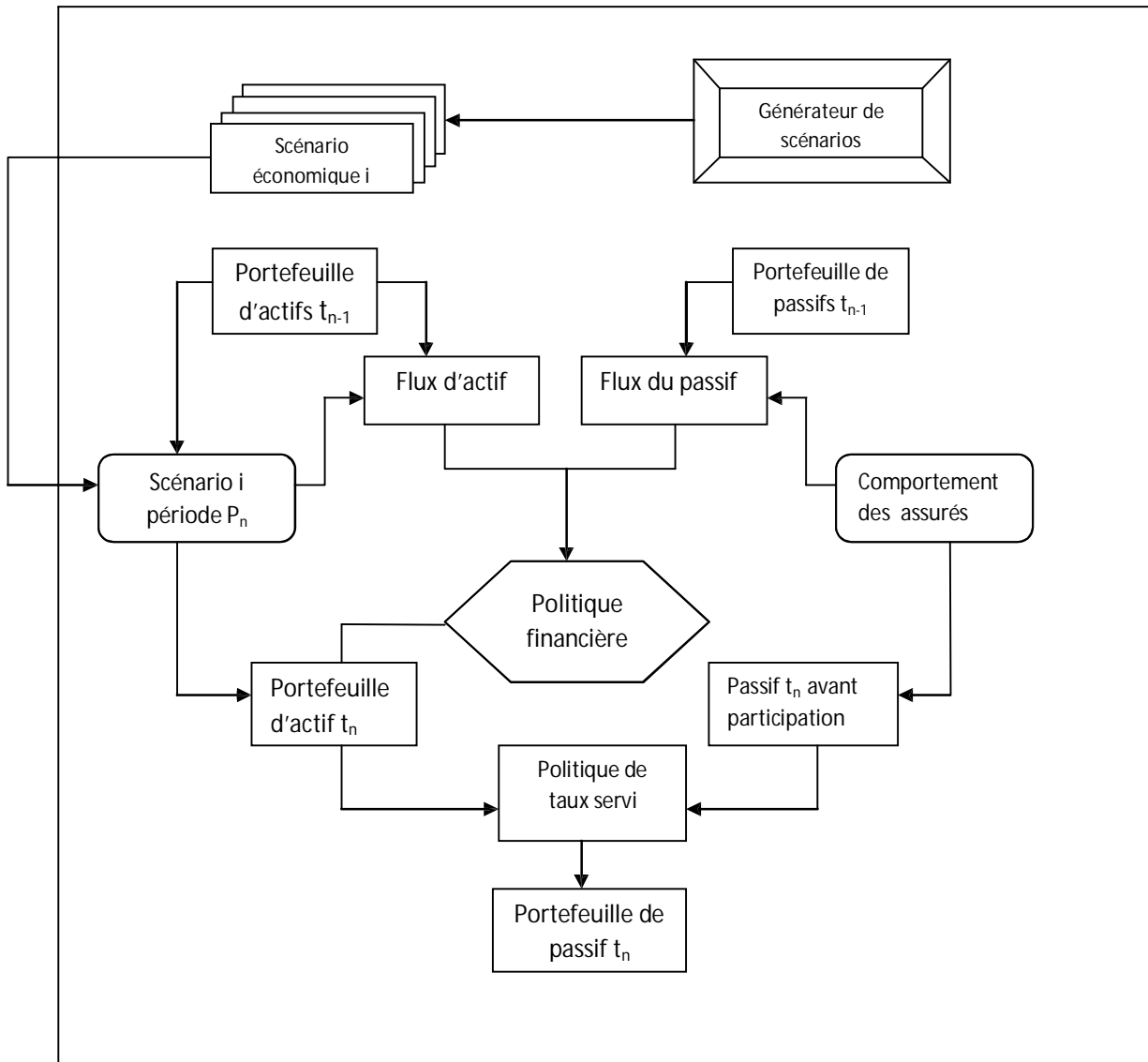
$$taux_{servi} = \max(TMG; 0,9 * rendement_{actif} - TxGestion)$$

avec:

$$rendement_{actif}(t) = \frac{PF(t)}{Placements_{moyenne}(t)}$$

#### IV. Schéma d'un générateur stochastique de scénarios économique

Figure 23 : générateur de scénarios économiques



## Chapitre 6 : Analyse des résultats

### I. Calcul du Best Estimate

Le portefeuille utilisé pour les simulations et projections est un portefeuille de contrat d'épargne. Les calculs ont été faits sous l'application VBA-EXCEL conçue dans le cadre de ce projet. Les hypothèses de projections se résument comme suit :

Tableau 18 : Hypothèses de projections

Libellés		Hypothèses	Commentaires
Taux minimum garanti		3,25%	Taux garanti conformément à la réglementation marocaine
Durée des projections		24 ans	Durée de projection jusqu'à extinction du passif
Coût unitaire par acte de rachat		152	Données historiques
Coût unitaire décès		101	Données historiques
Coût unitaire de gestion des contrats en vigueur		85	Données historiques
Actifs	Immobilier	15%	Stratégie annuelle d'investissement
	Action	10%	Stratégie annuelle d'investissement
	OPCVM	25%	Stratégie annuelle d'investissement
	Obligation	50%	Stratégie annuelle d'investissement
Clause de participation		90%	90% des produits financiers sont versés aux assurés
Table de mortalité		TD 88-90	Elle a été utilisée sans abattement
Courbe d'actualisation		BAM	Courbe de taux d'intérêt du marché secondaire fournie par BANK AL MAGHRIB
Portefeuille fermé		Oui	Hypothèse recommandée par le QIS5
Modèle de taux		CIR	Ne génère pas de taux négatifs
Modèle Action		B&S	Simple à appliquer

**NB :** Les valeurs des coûts unitaires présentées dans ce tableau ne sont pas celles utilisées. Elles ont été changées afin de respecter la clause de confidentialité qui leurs ait due.

L'Interface de l'application présentée ci-dessous implémentée sous VBA-EXCEL récapitule les hypothèses faites pour la modélisation de l'actif et celle du passif pour démarrer le déroulement de la projection pour calculer le Best Estimate des Provisions Mathématiques.

Figure 24 : Interface d'application sous VBA-EXCEL pour effectuer les calculs

Il suffit à l'utilisateur de faire entrer les données pour faire le calcul.

Le rendement de l'action est calculé à partir du taux court simulé par le modèle de Cox Ingersoll Ross.

Le taux facial, pour déterminer les coupons dégagés par les obligations, est calculé via le programme en se basant sur notre hypothèse du travail sur les obligations qui sont des obligations au pair. Le nominal 100 d'obligation sert à déterminer le taux facial.

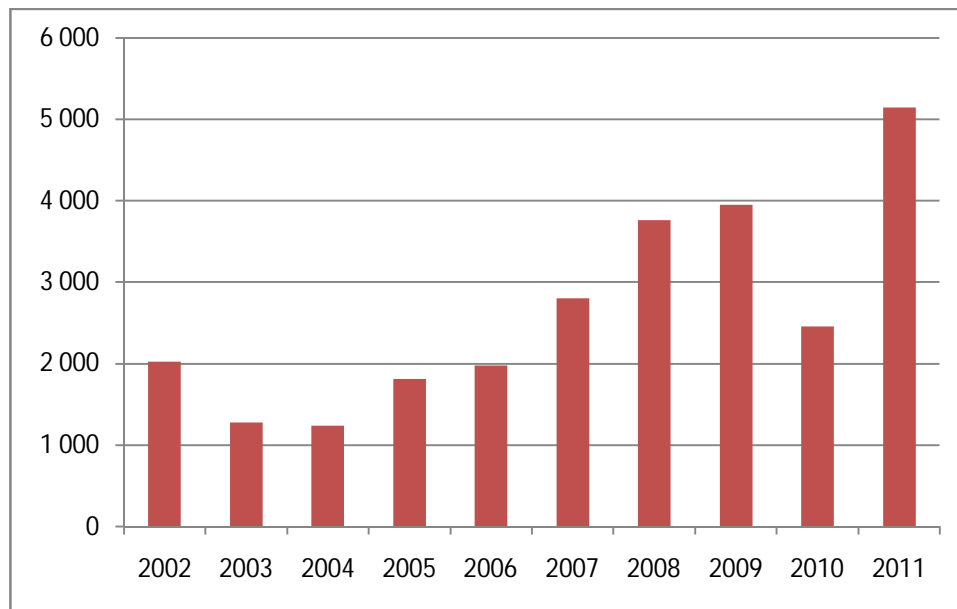
Le rendement pour l'OPCVM obligataire correspond au taux zéro\_coupon de maturité égal à la durée du passif.

Une fois les données remplies, l'utilisateur clique sur le bouton de Commande : « Calculer BE de PM » pour le lancement du programme et le résultat sera stocké dans la case intitulée « Best Estimate de PM » qui n'est activée qu'après avoir effectué le calcul via le code sous VBA-EXCEL.

### Description du portefeuille

Les regroupements dans le portefeuille ont été faits par génération de contrat. Les générations sont attribuées par rapport à la date d'entrée. Par exemple les assurés ayant contracté le produit en 2010 correspondent à la génération 2010. Le graphe suivant montre le nombre d'épargnants par génération.

Figure 25 : Nombre d'épargnants



Le Best Estimate correspond à l'espérance des flux probables actualisés par rapport à la courbe des taux sans risques.

$$BE = \sum_{t=1}^N \frac{Flux_t}{(1+r)^t}$$

Le calcul des flux, puis du Best Estimate qui s'en déduit sont effectués par le générateur de scénarios économiques. Les prix des actifs sont calculés en absence d'opportunité d'arbitrage afin de fournir une évaluation cohérente des actifs et du passif. Du fait de la réalisation d'un nombre important de simulations, la méthode de Monte Carlo a été utilisée pour la convergence du Best Estimate. La méthode de Monte Carlo se repose sur la loi faible des grands nombres qui s'énoncent comme suit :

Soit  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de variables aléatoires indépendantes, de même loi de probabilité, intégrables, i.e  $\forall p \in \mathbb{N}, E(|X_p|) < +\infty$  alors :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_n}{n} = E(X_p)$$

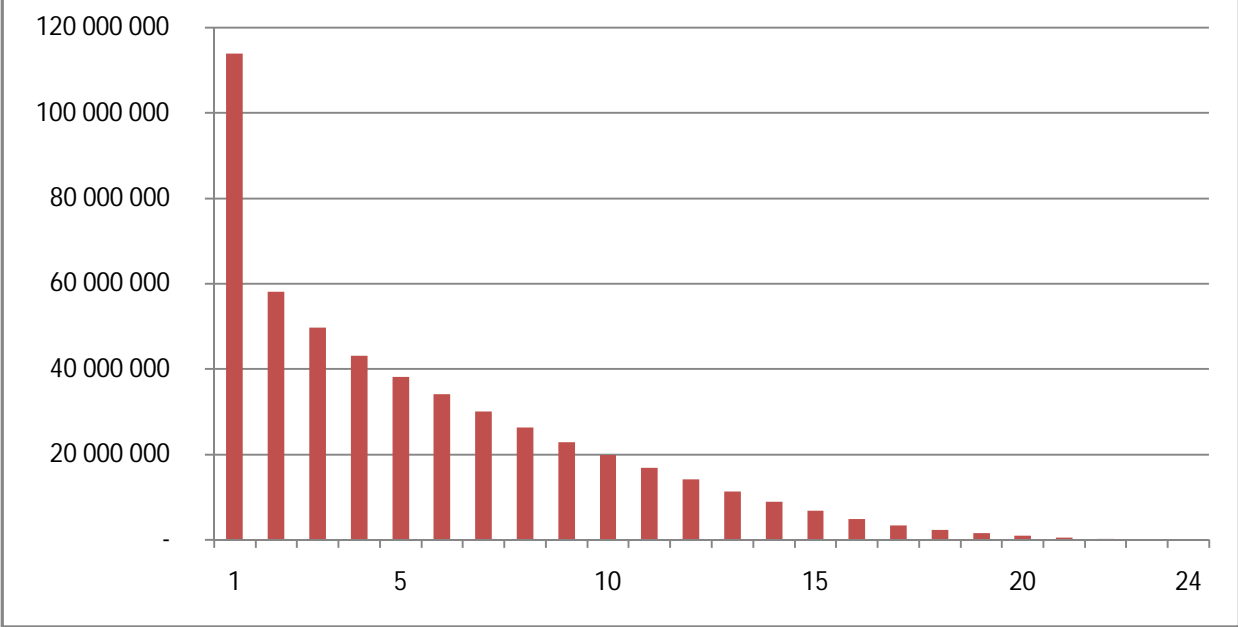
Avec :  $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$

## II. Présentation des projections des flux

Le calcul du best estimate nécessite la projection flux du passif. Nous avons choisi un scénario quelconque afin d'illustrer l'évolution des flux permettant le calcul du Best Estimate

**II.1 Projection des primes**

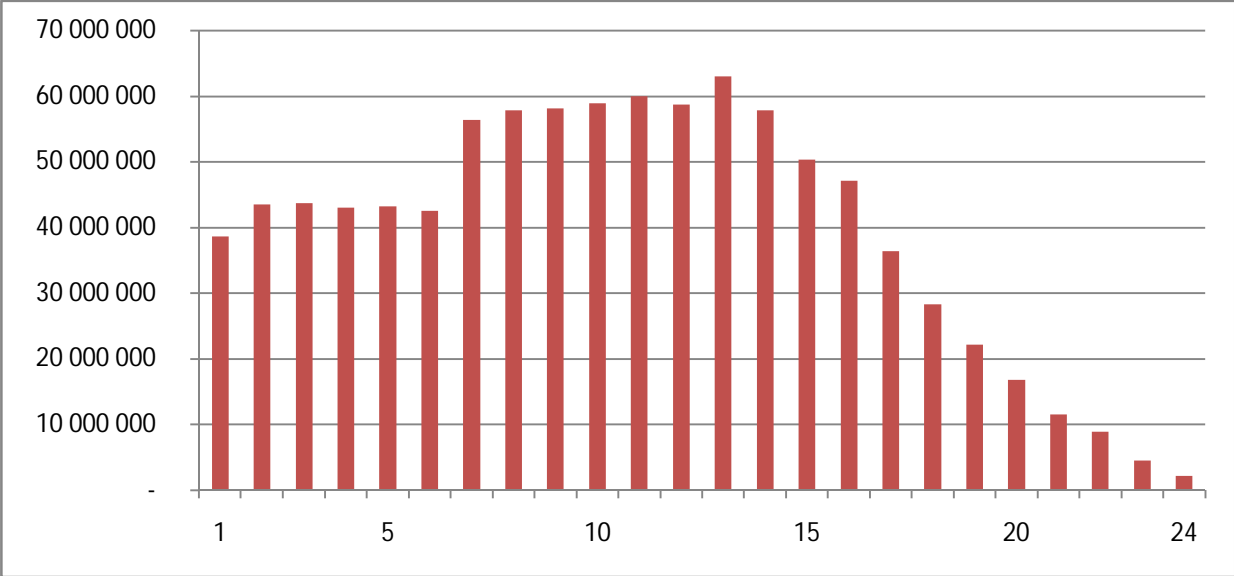
Figure 26 : projection des primes



Les primes décroissent avec le temps. Ceci est tout à fait normal compte tenu de nombreuses sorties dans le portefeuille au fil des années. Ces sorties sont principalement les rachats et les décès. A ces sorties s'ajoute aussi le taux de reversement qui décroît avec de l'ancienneté.

**II.2 Projection des prestations dues aux rachats**

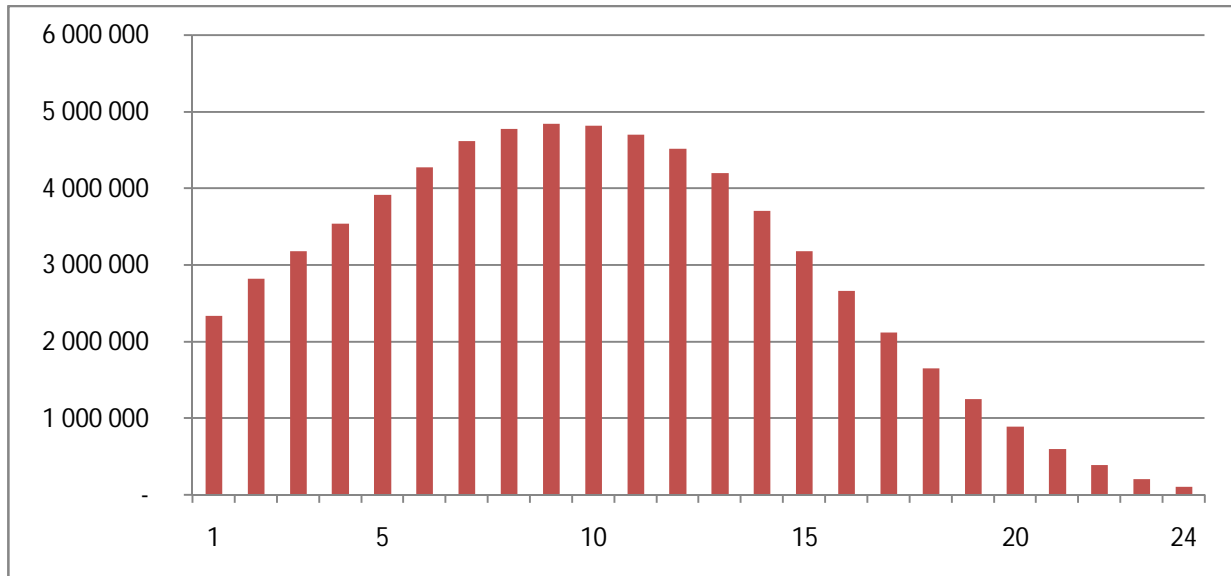
Figure 27 : Projection des rachats



De la projection des rachats on remarque une très forte augmentation des rachats après la sixième année. Cela se traduit par le fait qu'après 8 ans d'existence les contrats d'épargne en assurance ne sont plus exemptés d'impôts. En effet notre portefeuille est composé de 10 générations de 2002 à 2011. Six ans plus tard, plus de la moitié du portefeuille aura déjà atteint sa date limite d'exemption provoquant ainsi une hausse significative des rachats.

### II.3 Projections des prestations dues aux décès

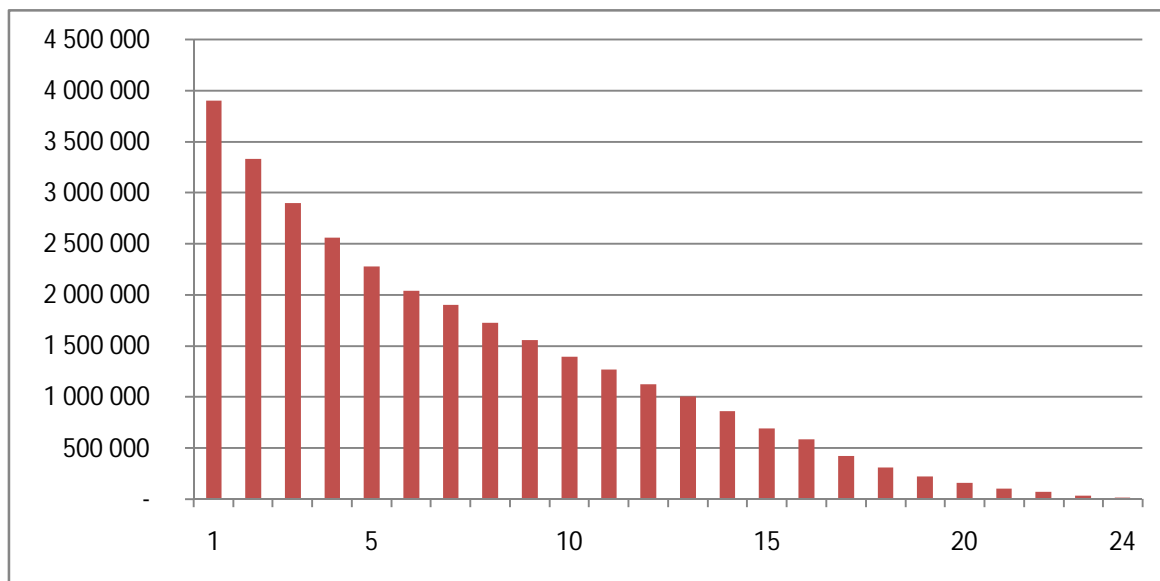
Figure 28 : Projection des prestations décès



La projection des prestations dues aux décès montrent un pic autour de la dixième année. Ces projections reflètent les taux de mortalité de table TD 88-90 [Voir Annexe. En effet l'âge moyen des adhérents à la date d'évaluation de 46,7 ans et dix ans plus tard les taux de décès correspondants à ces adhérents auront plus que doublés, ce qui se traduit une par hausse des prestations. La diminution à la fin est due à une réduction considérable du nombre des assurés dans le portefeuille.

## II.4 Projection des frais de gestion des contrats

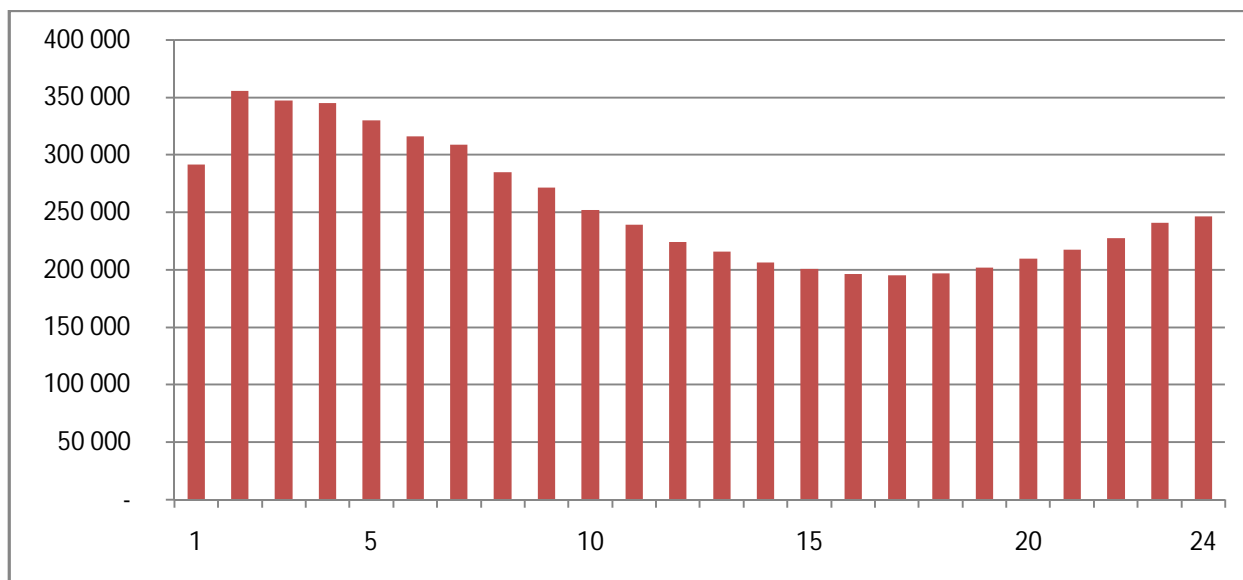
Figure 29 : Projection des frais de gestion



Au fur et à mesure que les années passent, le nombre d'adhérent diminue dans le portefeuille. Cela se traduit par une baisse des frais de gestion.

## II.5 Les frais de placements

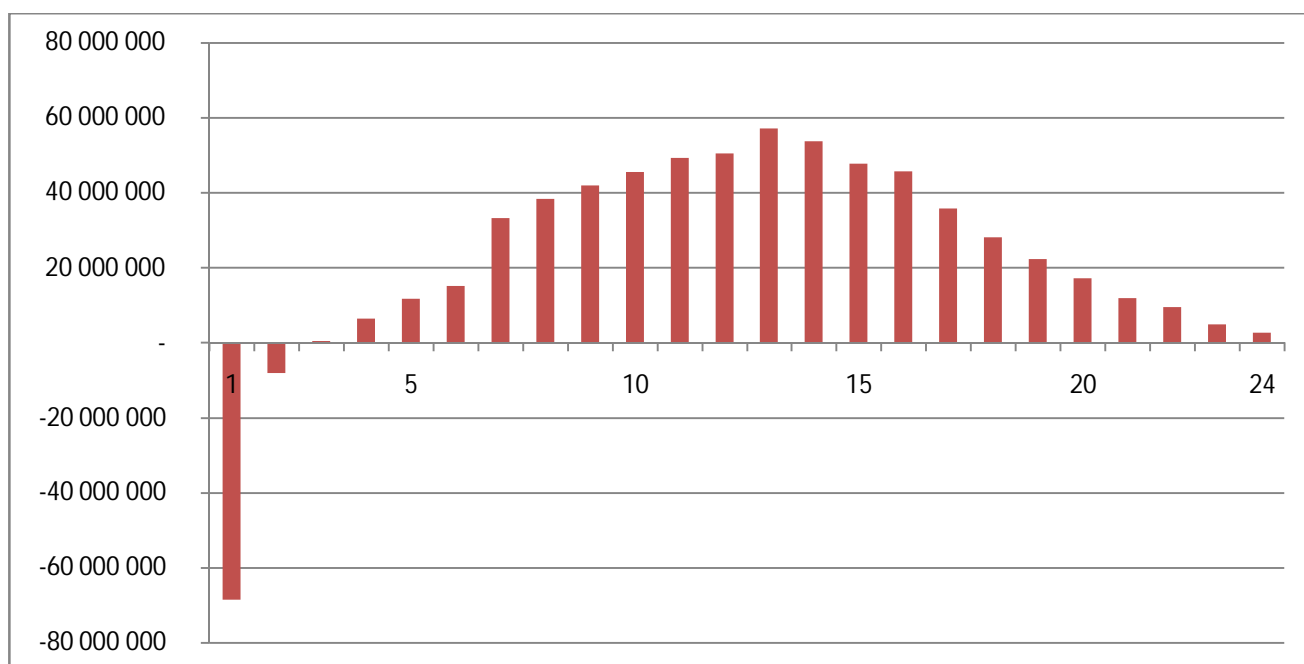
Figure 30 : projection des frais de placements



Les frais de placements ont une tendance baissière au cours des seize premières années. Cela est dû au fait que l'actif diminue suite au paiement des prestations. Après la seizième année les prestations diminuent, favorisant ainsi une hausse de l'actif et par conséquent des frais de placements.

## II.6 Les flux totaux

Figure 31 : Projection des flux totaux



La différence entre les flux sortants et entrants est négative les deux premières années parce qu’au cours de ces années les primes reçues sont supérieures aux prestations. Plus qu’on avance dans le temps les primes diminuent et les prestations augmentent. Le pic de la treizième année coïncide avec le pic des rachats. Cela confirme le fait que les rachats sont les prestations les plus importantes du portefeuille.

## II.7 Valeur du Best estimate

La valeur de la provision Best estimate trouvée pour 3000 scénarios est: **307 088 172**

Cette dernière a été obtenue comme décrit précédemment en actualisant les flux futurs entrants et sortants avec la courbe d’actualisation. Pour chaque exercice, on aura des flux entrants : primes et les flux sortants : prestations et les frais de gestion de contrats comme le montre la figure ci-après :

Figure 32 : Flux de chaque exercice pour obtenir la valeur du Best Estimate

Exercice	Primes Pures	Prestations Totales	Frais de placement	Frais de Gestion
2012	106 773 418	77 034 366	291 535	4 692 690
2013	47 004 456	77 500 750	348 055	3 618 542
2014	36 229 617	71 420 201	352 092	2 844 636
2015	28 316 075	64 730 046	349 167	2 265 182
2016	22 631 340	59 184 047	330 548	1 824 210
2017	18 228 313	53 217 178	318 786	1 474 930
2018	14 460 335	55 511 019	309 782	1 236 896
2019	11 394 592	49 662 581	297 861	1 008 078
2020	8 933 841	43 737 415	276 784	817 686
2021	6 964 095	38 486 355	256 251	654 668
2022	5 308 629	33 724 666	233 611	532 938
2023	3 972 215	28 635 184	226 606	420 816
2024	2 848 822	25 519 324	219 231	334 484
2025	1 979 145	20 255 273	208 413	253 506
2026	1 341 658	15 360 420	197 108	182 774
2027	846 860	12 200 693	200 564	134 146
2028	526 916	8 238 588	203 994	85 914
2029	319 952	5 563 390	205 667	55 246
2030	185 017	3 762 408	211 134	34 602
2031	100 713	2 424 435	221 071	22 362
2032	52 086	1 435 558	223 596	12 512
2033	20 907	934 232	234 026	7 770
2034	8 352	386 335	250 818	3 108
2035	3 313	158 568	262 747	1 446

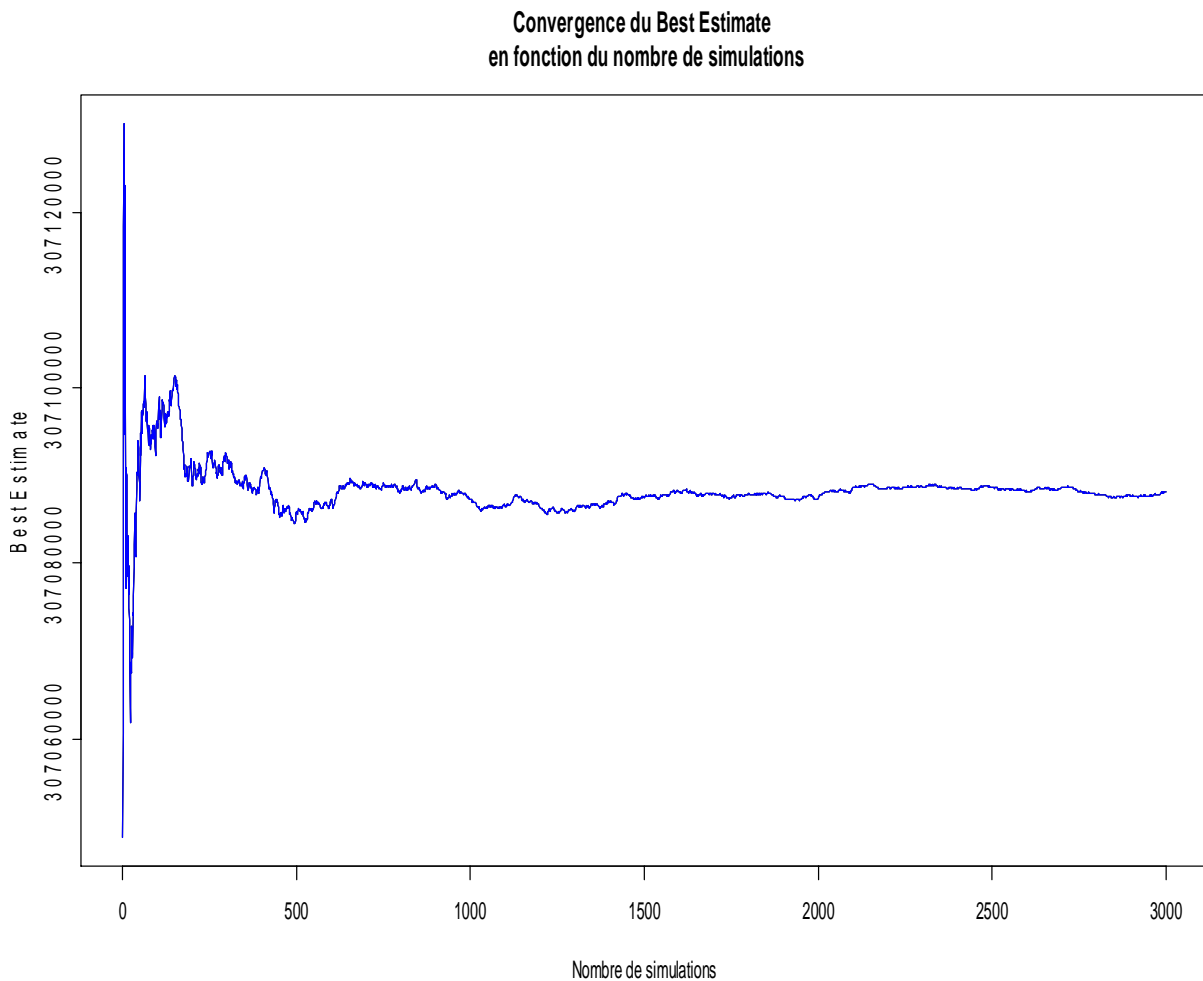
Pour parvenir à 3000 scénarios nous avons simulé premièrement 1000 scénarios avec notre générateur de scénarios. Puis nous avons appliqué le Bootstrap [Voir Annexe] sous le Logiciel R.

Après application du Bootstrap nous avons établi l'intervalle de confiance du best estimate à 99% en prenant les quantiles à 0.5% et 99,5%.

$$IC(BE, 99\%) = [306\ 812\ 571; 307\ 371\ 553 ]$$

Le graphe ci-dessous montre la convergence du Best Estimate en fonction du nombre de simulations sous le scénario central.

Figure 33 : Graphique de convergence du Best Estimate



De ce graphique on remarque qu’ autour de 1500 scénarios, il y’a déjà la convergence.

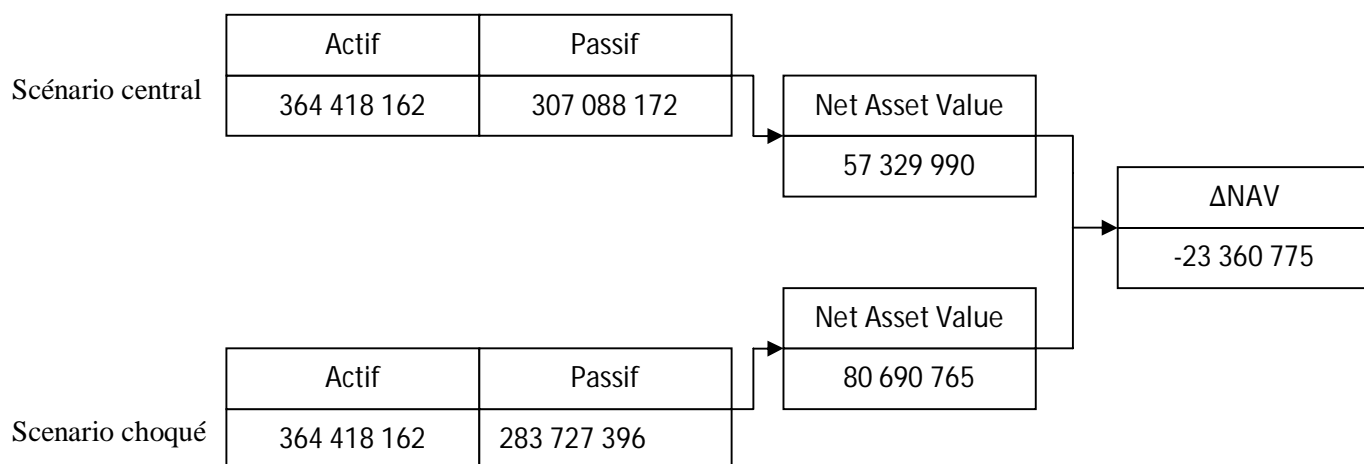
### **III. Calcul du Solvency Capital Requirement sous le QIS 5**

Le calcul du SCR a été fait uniquement pour les modules de souscription vie et de marché. Dans ces deux modules seul les principaux risques ont été pris, à savoir : le risque de rachat et le risque dépense pour le module de souscription vie, le risque action et le risque taux d’intérêt pour le module marché.

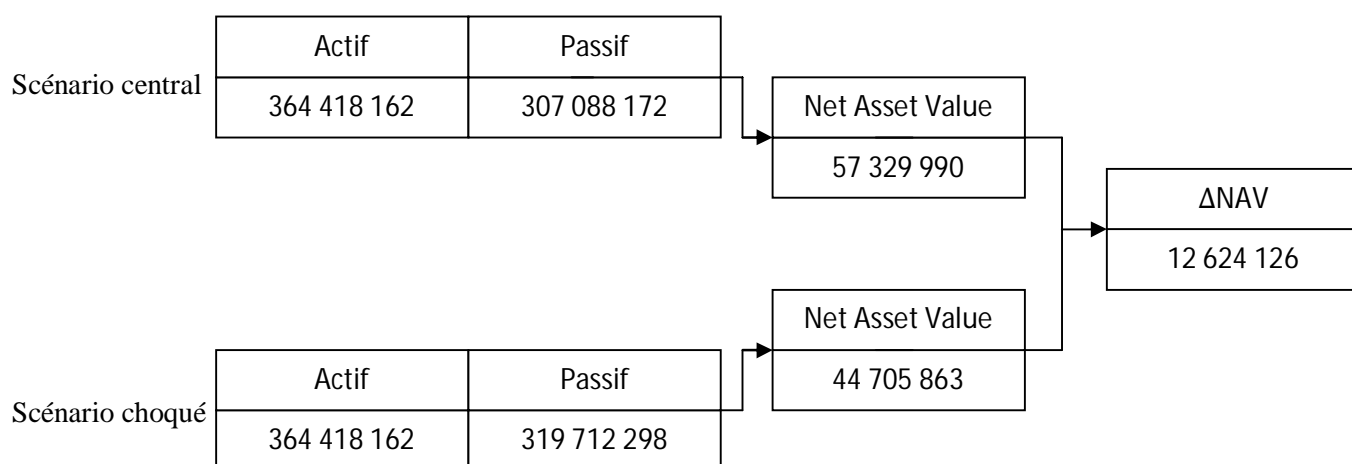
#### **III.1. Le risque rachat**

Le risque de rachat est le risque de perte ou de changements dans le passif en raison d’un changement des taux servis. La valeur du capital requis pour le risque rachat sous les spécifications du QIS5 est de : **32 512 838**. Elle a été calculée comme suit :

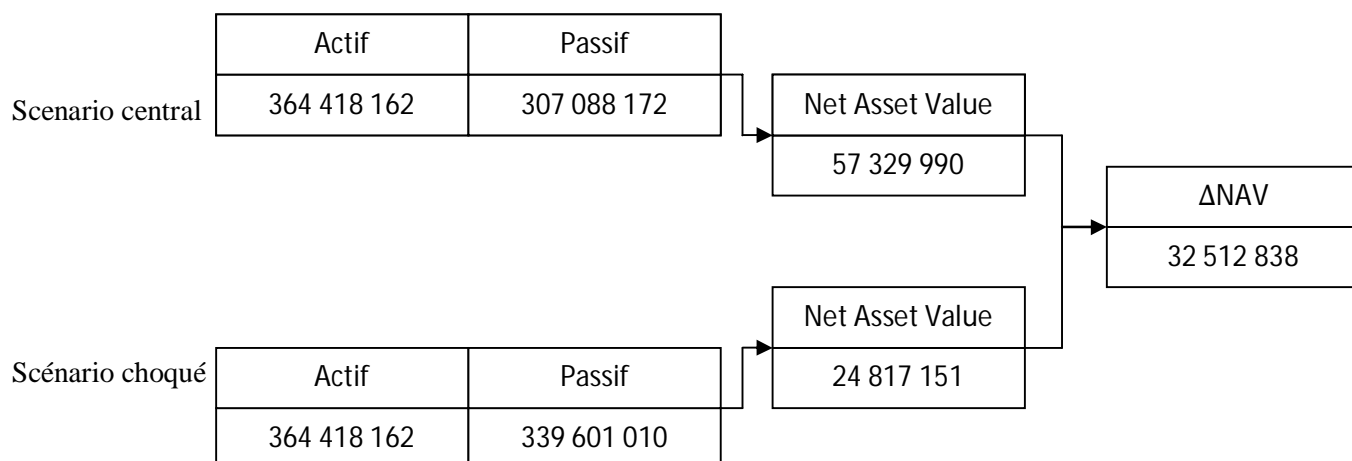
- **Choc baisse des rachats** : diminution de moitié des taux de rachats structurels



- **Choc hausse des rachats** : Augmentation de 150% des taux de rachats structurels.



- **Choc rachats massifs** : Tous les taux de rachats structurels sont fixés à 30%



$$Life_{lapse} = \max(-23\,360\,775; 12\,624\,126; 32512838; 0)$$

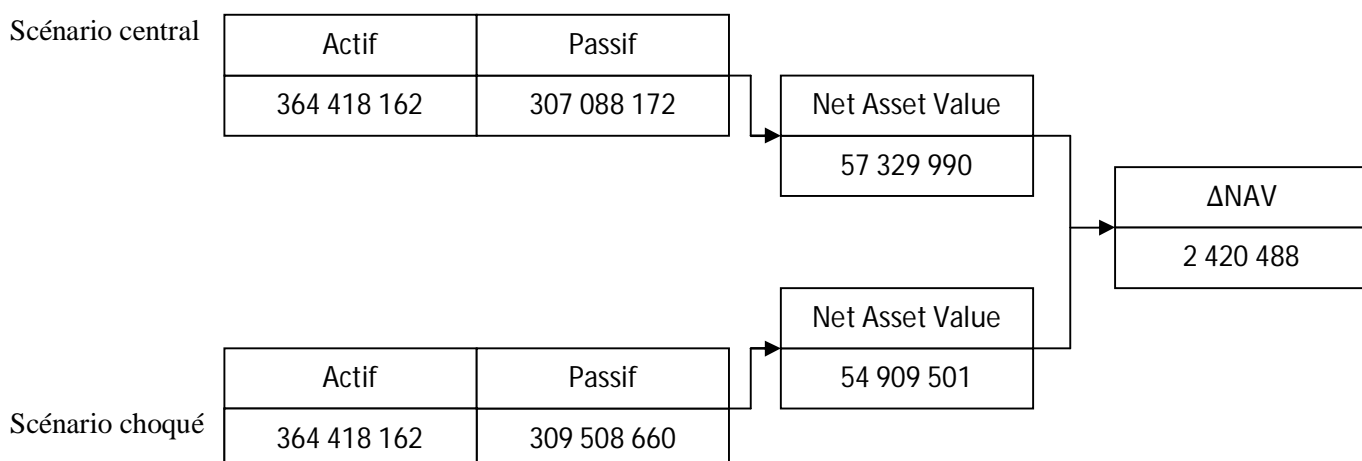
$$Life_{lapse} = 32\,512\,838$$

Le capital requis au titre du risque rachat provient du choc de rachats massifs. Cela s'explique par le fait que les rachats massifs déclenchent perpétuellement de nombreuses sorties. Ces sorties nombreuses ont pour conséquence une hausse considérable des flux sortants.

### III.2. Le risque de dépenses

Le risque de dépenses est dû à une augmentation des frais de gestion des contrats d'assurance. Le capital requis pour le risque dépenses sous le QIS5 est : 2 420 488. Il a été déterminé comme suit :

**Choc :** Augmentation de 10% des frais de gestion



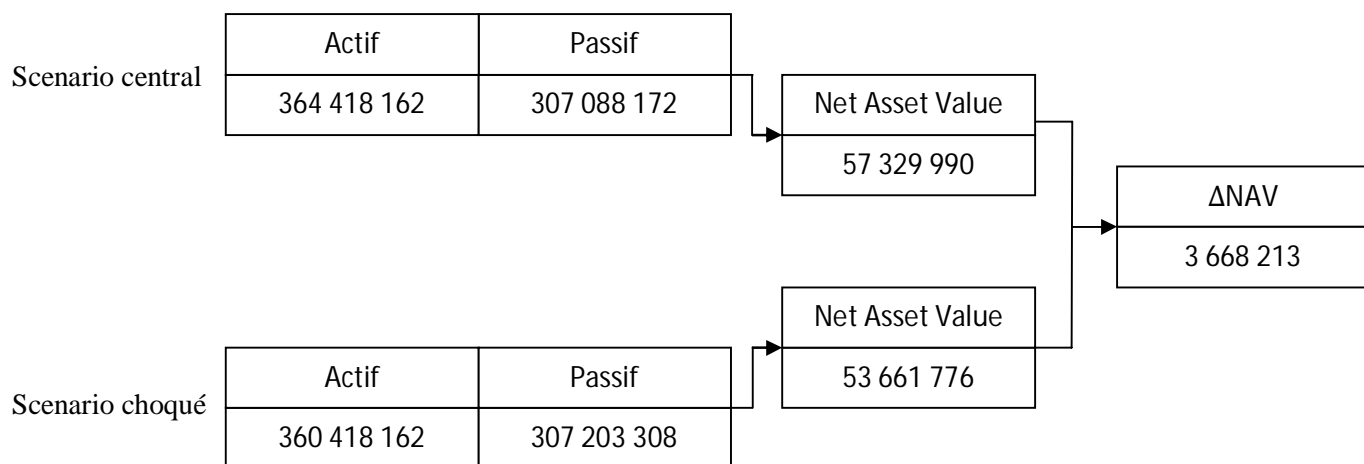
$$life_{exp} = 2\,420\,488$$

Le capital requis au titre du risque de dépenses est faible. Pour ce portefeuille, les dépenses sont maîtrisées.

### III.3. Le risque action

Le risque action résulte du niveau ou de la volatilité de la valeur de marché des actions. Sous les spécifications du QIS 5, le capital généré par le risque action est : 3 668 213. Il a été calculé comme suit :

**Choc :** baisse de 39% de la valeur de marché de l'action



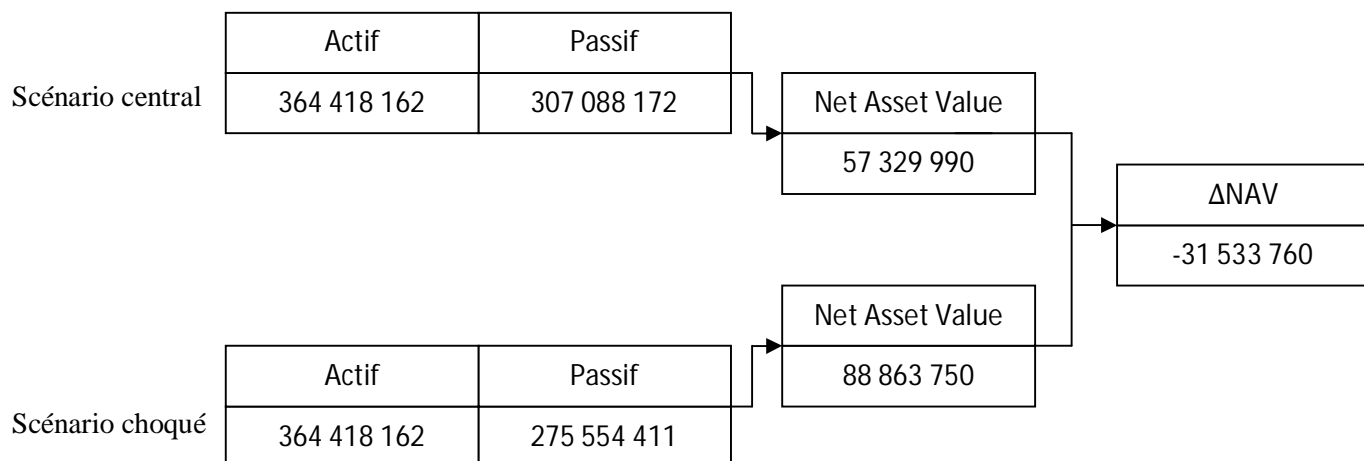
$$Mkt_{equity} = 3\,668\,213$$

Alors que l'action représente 10% du portefeuille, une baisse de 39% de sa valeur de marché conduit un capital risque que nous pouvons qualifier de faible. Cela s'explique par les allocations stratégiques d'actifs. Au cours de l'année qui suit la baisse de l'action la perte est répartie au niveau des autres actifs. Cette répartition à travers l'allocation stratégique permet d'atténuer la perte.

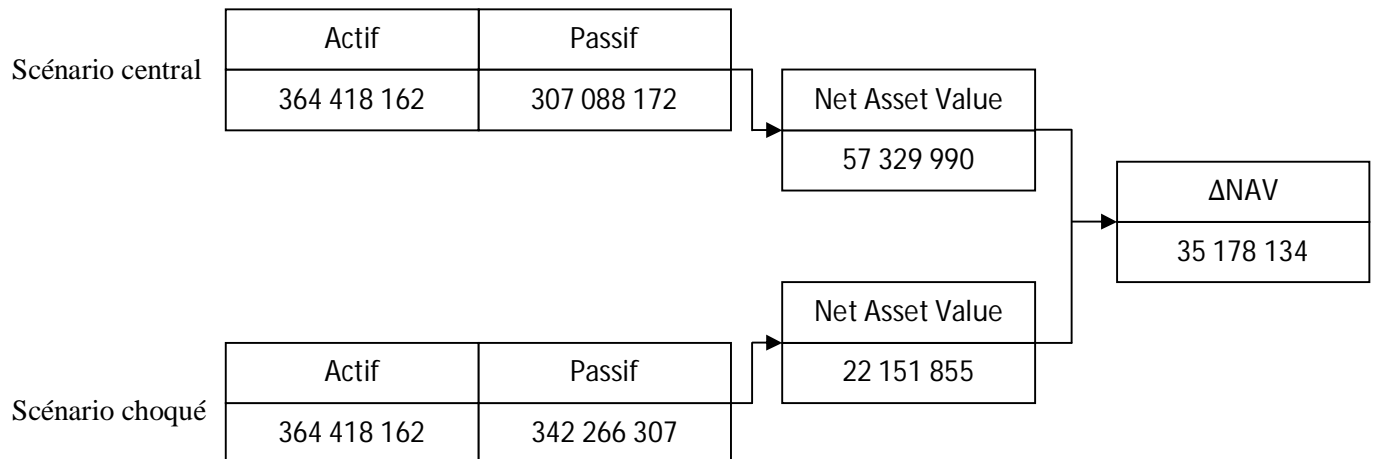
#### III.4. Le risque taux d'intérêt

Le risque taux d'intérêt est le risque lié aux variations de la structure par terme des taux d'intérêt. La valeur du capital générée par le risque taux d'intérêt sous le QIS5 est : 35 178 134. Elle a été déterminée comme suit :

- **Choc hausse des taux** : multiplication de la courbe des taux par  $1+S^{up}(t)$



- **Choc baisse des taux** : multiplication de la courbe des taux par  $1+S^{\text{down}}(t)$



$$Mkt_{int} = \max (0; -31\,533\,760 ; 35\,178\,134)$$

$$Mkt_{int} = 35\,178\,134$$

La baisse des taux conduit à un capital risque élevé. Cela s'explique d'une part le fait que la baisse des taux conduit à des rendements d'actifs très faibles par rapport aux garanties contractuelles. En effet notre actif est composé à 75% des actifs de taux. La perte entraînée par 75% du portefeuille et les allocations stratégiques d'actifs conduisent à une baisse totale de l'actif. La diminution des actifs de taux et donc de l'actif en générale impacte alors la revalorisation du passif. La revalorisation du passif se fait dans ce cas avec des taux plus élevés que ceux de l'actif. Cela crée un gap entre l'actif et le passif.

D'autre part, la baisse des taux entraîne la hausse des rachats au travers les rachats conjoncturels. La diminution de l'actif combinée à la hausse des rachats produisent un capital risque très élevé lors de la baisse des taux.

### III.5. Agrégation des sous modules et valeur du SCR sous le QIS5

$$SCR_{mkt} = SCR_{mkt}^{dow} = \sqrt{[35178134 \quad 3668213] \begin{bmatrix} 1 & 0,5 \\ 0,5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 35178134 \\ 3668213 \end{bmatrix}}$$

$$SCR_{mkt} = 37\,148\,322$$

$$SCR_{life} = \sqrt{[32512838 \quad 2420488] \begin{bmatrix} 1 & 0,5 \\ 0,5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 32512838 \\ 2240488 \end{bmatrix}}$$

$$SCR_{life} = 33\,788\,169$$

$$BSCR = \sqrt{[37148322 \quad 33788169] \begin{bmatrix} 1 & 0,25 \\ 0,25 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 35950125 \\ 33788169 \end{bmatrix}}$$

$$BSCR = 56\,117\,957$$

### III.6. Comparaison du besoin de capital entre Solvabilité 1, Solvabilité 2 et le système marocain sous le QIS 5

Dans solvabilité 1 et le système marocain les marges de solvabilité sont les suivantes :

$$MS_{Maroc} = 5\% \times 307088172$$

$$MS_{solvabilité\ 1} = 4\% \times 307088172$$

	Solvabilité II	Solvabilité I	Maroc
Besoin de capital	<b>56 117 957</b>	<b>12 283 526</b>	<b>15 354 408</b>

La différence en terme de besoin en capital entre Solvabilité II et les autres systèmes est considérable. Par ailleurs nous avons constaté une baisse de la provision (notre actif initial représente la valeur des provisions calculée sans tenir compte des recommandations de Solvabilité II). Ce cas est pris en considération lors des ajustements du capital requis, c'est-à-dire, solvabilité II permet qu'une partie du capital soit supportée par les assurés. Rappelez-vous de la formule suivante :

$$SCR = BSCR - Adj + SCR_{op}$$

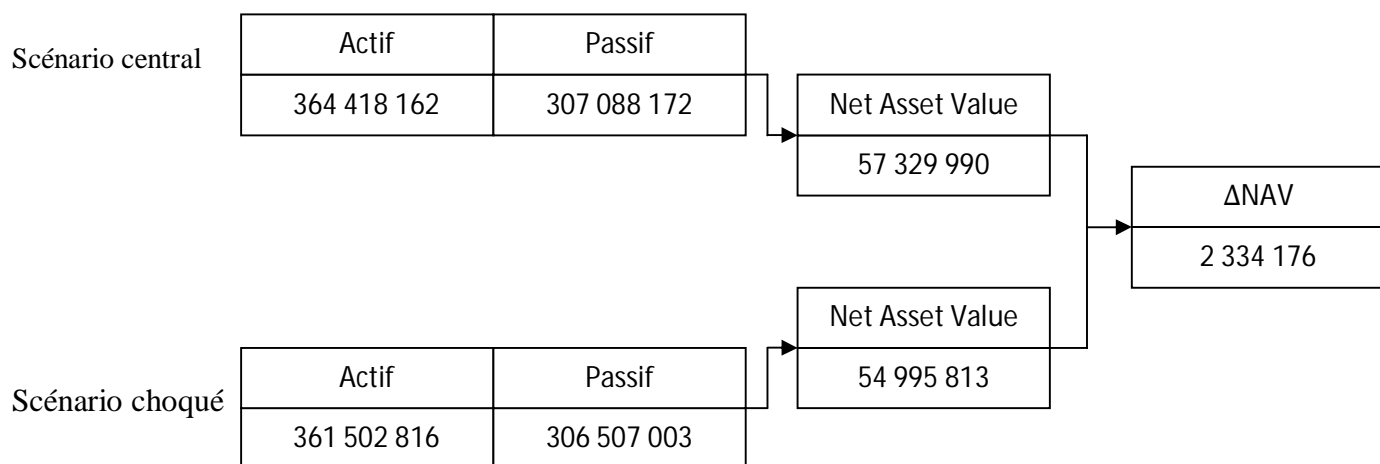
Où *Adj* représente les ajustements dus à la capacité d'absorption des pertes.

Cependant dans notre étude nous n'avons pas inclus le calcul des ajustements.

## IV. Calcul du SCR sous les spécifications du QIS 4

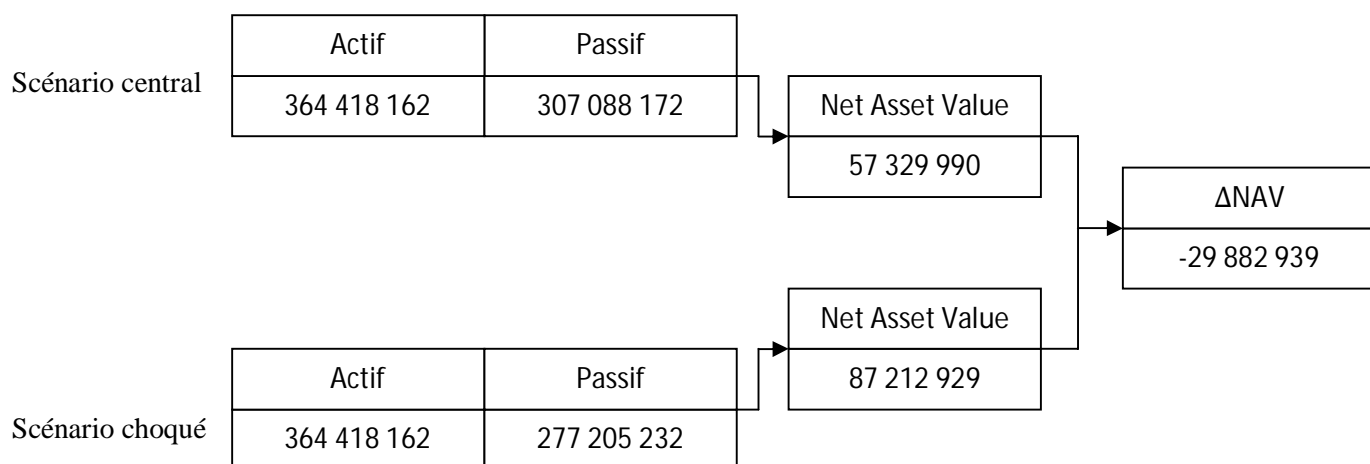
Entre le QIS4 et le QIS 5 au niveau des sous-modules du risque de souscription vie utilisée dans notre étude aucune modification des chocs n'a été faite. Par conséquent pour calculer le BSCR sous le QIS 4, il nous suffira uniquement de recalculer le SCR marché sous le QIS4 que nous agrégerons avec le SCR de souscription calculé précédemment. Les commentaires des chocs restent les mêmes que ceux qui ont été faits déjà avec dans le cas du QIS5.

### IV.1. Le capital requis au titre du risque action

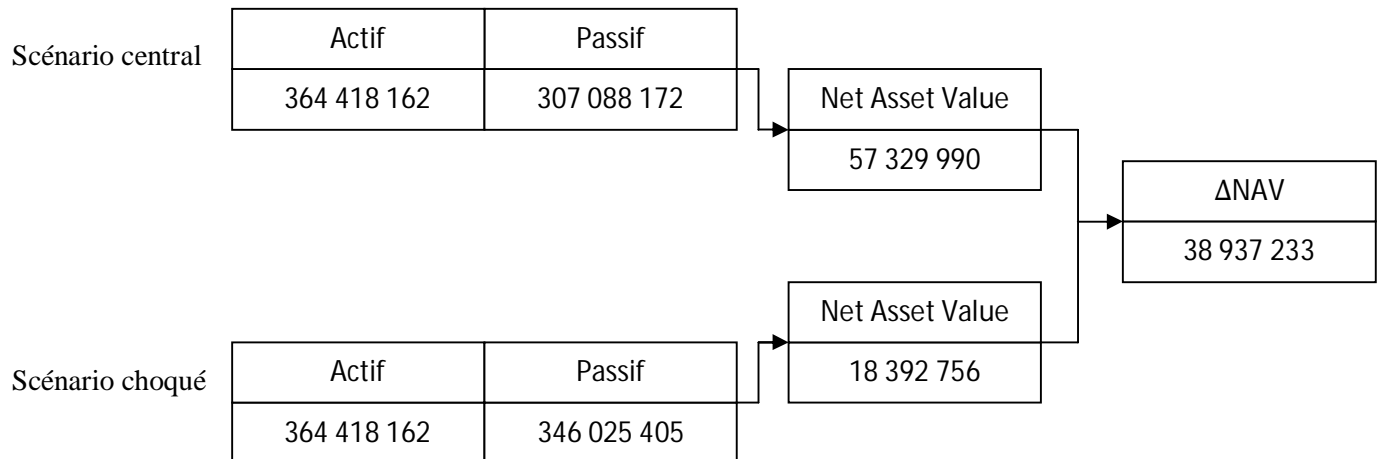


#### IV.2. Le capital requis au titre du risque taux d'intérêt QIS4

- Choc hausse des taux



- Choc baisse des taux



#### IV.3. Agrégation et calcul du SCR sous le QIS 4

$$SCR_{mkt} = SCR_{mkt}^{dow} = \sqrt{[2334176 \quad 38\,937\,233] \begin{bmatrix} 1 & 0,5 \\ 0,5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 38937233 \\ 2334176 \end{bmatrix}}$$

$$SCR_{mkt} = 38\,937\,233$$

$$SCR_{life} = 33\,788\,169$$

$$BSCR = \sqrt{[38937233 \quad 33788169] \begin{bmatrix} 1 & 0,25 \\ 0,25 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 38937233 \\ 33788169 \end{bmatrix}}$$

$$BSCR = 58\,587\,27$$

#### V. Calcul de la marge de risque

#### IV.4. La Duration du passif

Les tableaux ci-dessous donnent les résultats de la duration à t des flux du passif.

Tableau 19 : Duration du passif

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8
dur(t)	8,560	8,119	7,663	7,251	6,686	6,160	5,572	5,353	4,956

t	9	10	11	12	13	14	15	16	17
dur(t)	4,567	4,199	3,836	3,556	3,295	3,028	2,838	2,619	2,376

t	18	19	20	21	22
dur(t)	2,130	1,876	1,560	1,327	1

#### IV.5. Valeur de la marge de risque

Pour le calcul de la marge de risque nous avons fait l'hypothèse que l'entreprise de référence est encore LA MAROCAINE VIE afin d'utiliser le SCR de souscription vie précédemment calculé comme  $SCR_U$  (SCR de l'entreprise de référence). Dans notre étude le capital requis pour le risque de souscription est le même pour le QIS5 et le QIS 4. Par conséquent la marge de risque calculée correspond à la marge requise sous les deux études quantitatives d'impact

$$CoCM = \frac{6\%}{(1 + r_1)} \times Dur_{mod}(0) \times SCR_U(0)$$

$$Dur_{mod}(0) = \frac{Dur(0)}{(1 + r_a)}$$

Le taux actuariel  $r_a$  est le taux qui appliqué aux flux donne la même duration que celle calculée avec la courbe des taux. Le calcul de la duration et du taux actuariel a donné les valeurs suivantes :  $Dur(0) = 8,560$  ans ;  $r_a = 5,26\%$

$$Dur_{mod} = 8,13 \text{ ans}$$

$$CoCM = \frac{6\% \times 8,13 \times 33788169}{(1 + 3,49\%)}$$

$$CoCM = 15 662 567$$

## VI. Bilan de Solvabilité II

## VI.1. Sous le QIS5

Figure 34 : Bilan de Solvabilité II QIS 5

Actif		Passif		
Placements	364 418 162	Fonds propres	55 148 856	
		Provisions techniques	Marge de risque	15 662 567
			Best Estimate	307 088 172

## VI.2. Sous le QIS 4

Figure 35 : Bilan de solvabilité II QIS 4

Actif		Passif		
Placements	364 418 162	Fonds propres	58 587 27	
		Provisions techniques	Marge de risque	15 662 567
			Best Estimate	307 088 172

Au regard de ces deux bilan, nous constatons qu'il y'a peu de changements. Ceci est dû à une nos hypothèses.

Le QIS 5 recommande la prise en compte de la prime d'illiquidité dans le calcul du best estimate ce que nous n'avons pas fait. Nos valeurs du best estimate entre le QIS4 et le QIS5 sont les mêmes ce qui ne serait pas vrai si on avait intégré la prime d'illiquidité.

Par ailleurs le changement intervenu au niveau des fonds propres est dû à la baisse des taux qui a entraîné un capital risque plus important au niveau du QIS4 qu'au niveau du QIS5. Cela vient probablement d'une part de la courbe des taux et d'autre part de la fonction de rachat conjoncturel. En effet lorsqu'on applique le choc de la baisse des taux, pour les premières années sous le QIS4 les rachats conjoncturels atteignent déjà le maximum. Une augmentation du choc de baisse sous le QIS5 ne changera rien car les taux de rachats conjoncturels auront déjà atteint leur maximum. L'augmentation du capital sous le QIS 4 provient du niveau des chocs sur la courbe de taux après la dixième année. Après la dixième année les rachats seront toujours plus élevés sous le QIS 4 que sous le QIS 5.

# Conclusion

---

Dès les premières réflexions sur la réforme solvabilité II, le passage de Solvabilité I à Solvabilité II s'est avéré d'une grande utilité au vu des méthodes rudimentaires utilisées dans Solvabilité I pour déterminer le montant minimum des fonds propres. Pour les autorités de contrôle le passage à Solvabilité II semble indéniable et inéluctable car il s'agit de protéger premièrement les assurés. Les garanties de fonds propres fixées par ratio ne semblent plus approprier compte tenu du niveau d'exposition aux risques.

Solvabilité II remet en question tout le système d'évaluation du passif d'une compagnie d'assurance. Les provisions techniques doivent désormais être composées d'une provision Best Estimate et d'une marge de risque. Les fonds propres détenus par les compagnies doivent refléter le niveau de risques encourus par leurs actifs et passifs. L'exigence d'évaluer avec la plus haute précision possible à changer le système d'évaluation passant du déterministe au stochastique. Il faut désormais faire un grand nombre de scénarios dans les évaluations afin de prendre en considération les scénarios économiques les plus extrêmes qui puissent exister dans la limite du possible. Cette évaluation « à juste titre » impose aussi aux assureurs d'être capables de projeter leurs actifs et passifs à des horizons temporels très lointains permettant de couvrir tous les flux. La plus grande difficulté dans ces projections réside dans la modélisation du comportement des assurés. Les rachats qui constituent la pièce maîtresse dans la modélisation du comportement des assurés obéissent certainement à une logique que nous pouvons qualifier de floue. Même en instaurant les rachats conjoncturels, nous pensons que le gap entre les simulations et la réalité existera toujours.

Au-delà de ces méthodes de calcul complexes, solvabilité II cache une évidence. En effet les résultats de calcul sous les spécifications de Solvabilité II concluent à une hausse significative des fonds propres. Bien sûr que cette hausse conduit à la diminution de la probabilité de ruine mais elle semble très élevée. Par exemple au niveau de nos résultats sous le QIS 5 nous avons constaté que dans le cas d'un passage à Solvabilité II pour le portefeuille utilisé, le niveau des fonds propres doit augmenter de considérablement. Or les risques pris en compte dans notre étude ne sont que les risques de souscription vie et de marché. Plusieurs risques n'ont pas été pris en considération comme le risque opérationnel et le risque des actifs intangibles. La prise en compte de ces risques non considérés engendrait vraisemblablement une hausse supplémentaire des fonds propres.

Toutefois, il est important de souligner que Solvabilité II a mis en place des mesures d'ajustements du capital requis. Aussi les chocs appliqués dans la détermination du capital requis ont été faits selon l'exposition au risque du marché européen. Les questions à se poser sont les suivantes : ces chocs reflètent-ils les degrés de risques du marché marocain? La DAPS et la fédération des assurances ne doivent-elles pas envisager de déterminer le niveau de chocs adapté au marché marocain?

A ces questions il existe une vérité irréfutable : quel que soit l'émetteur des directives sur la réforme du cadre réglementaire, le passage aux nouvelles normes de solvabilité exigera des investissements financiers importants de la part des actionnaires.

# Annexes

## Annexe 1 : Les constantes de Moro

Tableau 20 : Constantes de l'algorithme de Moro

	a	b	c	k
0	2,50662823884	1	7,71088707054879	0,417988642492643
1	-18,61500062529	-8,4735109309	2,7772013533685169	4,2454686881376569
2	41,39119773534	23,08336743743	0,3614964129261002	
3	-25,44106049637	-21,06224101826	0,0373418233434554	
4		3,13082909833	0,0028297143036967	
5			0,0001625716917922	
6			0,000008017330474	
7			0,0000003840919865	
8			0,000000012970717	

## Annexe 2 : la méthode du Bootstrap

Les techniques de rééchantillonnage, appelées aussi méthodes du bootstrap, consistent à utiliser l'information présente dans un échantillon de valeurs observées  $(x_1, \dots, x_n)$  pour approcher la loi des variables aléatoires i.i.d.  $X_1, \dots, X_n$  ayant généré cet échantillon. Etant donné que la loi de ces variables aléatoires peut être décrite au moyen de la fonction de répartition  $F_X$  de ces variables et étant donné qu'il est possible d'approcher cette fonction de répartition par  $\hat{F}_{X_n}$ . L'idée du bootstrap consiste alors à générer plusieurs jeux d'observations  $x_1^* = (x_{1,1}^*, \dots, x_{n,1}^*), \dots, x_B^* = (x_{1,B}^*, \dots, x_{n,B}^*)$  en suivant la loi décrite par  $\hat{F}_{X_n}$  (qui est connue) et non par  $F_X$  (qui est inconnue en pratique). Nous considérons alors que les nouvelles données que nous sommes capables de générer ainsi auront sensiblement les mêmes propriétés que les observations que nous obtiendrons si nous pouvions utiliser à notre guise le générateur fondé sur  $F_X$  (ce qui n'est pas le cas en pratique). Nous utiliserons ensuite d'autres techniques statistiques pour estimer le biais et la variance de l'estimateur  $\hat{\theta}(X_1, \dots, X_n)$  d'un paramètre inconnu  $\theta$  par respectivement :

$$\frac{1}{B} \sum_{b=1}^B \hat{\theta}(x_{1,b}^*, \dots, x_{n,b}^*) - \hat{\theta}(x_1, \dots, x_n)$$

et

$$\frac{1}{B} \sum_{b=1}^B \left( \hat{\theta}(x_{1,b}^*, \dots, x_{n,b}^*) - \frac{1}{B} \sum_{b=1}^B \hat{\theta}(x_{1,b}^*, \dots, x_{n,b}^*) \right)^2$$

### Annexe 3 : Table de mortalité TD 88-90

Tableau 21 : Table de mortalité TD 88-90

Age	taux				
0	0,871%	38	0,252%	77	6,149%
1	0,073%	39	0,264%	78	6,804%
2	0,047%	40	0,285%	79	7,492%
3	0,033%	41	0,311%	80	8,240%
4	0,029%	42	0,333%	81	9,228%
5	0,027%	43	0,376%	82	10,142%
6	0,024%	44	0,408%	83	11,150%
7	0,021%	45	0,436%	84	12,256%
8	0,021%	46	0,466%	85	13,411%
9	0,020%	47	0,501%	86	14,611%
10	0,021%	48	0,546%	87	16,090%
11	0,021%	49	0,607%	88	17,746%
12	0,022%	50	0,669%	89	19,234%
13	0,026%	51	0,732%	90	20,780%
14	0,033%	52	0,804%	91	22,519%
15	0,046%	53	0,878%	92	24,518%
16	0,062%	54	0,961%	93	26,184%
17	0,087%	55	1,060%	94	27,904%
18	0,116%	56	1,142%	95	29,374%
19	0,131%	57	1,226%	96	31,804%
20	0,142%	58	1,339%	97	33,632%
21	0,153%	59	1,443%	98	38,784%
22	0,160%	60	1,566%	99	41,943%
23	0,156%	61	1,686%	100	44,867%
24	0,154%	62	1,812%	101	47,586%
25	0,158%	63	1,943%	102	51,316%
26	0,155%	64	2,064%	103	54,054%
27	0,156%	65	2,202%	104	58,824%
28	0,159%	66	2,339%	105	71,429%
29	0,162%	67	2,532%	106	100,000%
30	0,167%	68	2,737%		
31	0,174%	69	2,965%		
32	0,180%	70	3,208%		
33	0,191%	71	3,553%		
34	0,201%	72	3,874%		
35	0,211%	73	4,235%		
36	0,223%	74	4,605%		
37	0,237%	75	5,076%		
		76	5,549%		

## Annexe 4 : Structure par terme des taux court

### 4.1. Le modèle de VASICEK

L'une des premières modélisations stochastiques des taux a été développée par VASICEK [1977]. Cette modélisation du taux instantané à court terme utilise le processus autorégressif (dit d'ORNSTEIN-UHLENBECK) défini comme suit :

$$dr_t = a(b - r_t)dt + \sigma dW_t$$

Où les paramètres  $a$ ,  $b$  et  $\sigma$  (tous positifs), représentent respectivement la vitesse de convergence à la moyenne (la force de retour à la moyenne), le taux limite (valeur moyenne à long terme) et la volatilité. Il convient d'indiquer que le taux du marché  $\lambda$  est supposé constant et que  $W_t$  correspond à un mouvement brownien standard (processus de Wiener).

La solution de ce modèle est donnée par l'équation suivante :

$$r_t = r_0 e^{-at} + b(1 - e^{-at}) + \sigma e^{-at} \int_0^t e^{as} dW_s, \quad r_0 \text{ représente la valeur initiale du taux d'intérêt.}$$

Une méthode de résolution assez classique propose d'affecter à  $P(t, T)$  la forme suivante :

$$P(t, T) = \exp (A(t, T) + B(t, T)r_t).$$

Cette structure affine permet alors d'obtenir la valeur du zéro-coupon :

$$P(t, T) = \exp \left\{ \frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a} (R_\infty - r_t) - (T - t)R_\infty - \frac{\sigma^2}{4a^3} (1 - e^{-a(T-t)})^2 \right\},$$

$$\text{où } R_\infty = b + \frac{\lambda\sigma}{a} - \frac{\sigma^2}{2a^2}.$$

La relation  $R(t, T) = -\frac{1}{T-t} \ln P(t, T)$  conduit finalement à :

$$r(t, T - t) = R_\infty + (r_t - R_\infty) \frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a(T-t)} + \frac{\sigma^2}{4a^3(T-t)} (1 - e^{-a(T-t)})^2.$$

Ce modèle permet d'obtenir la plupart des formes de courbe des taux :

- Structure ascendante si  $r_t \leq R_\infty - \frac{\sigma^2}{4a^2}$ ,
- Structure inversée si  $r_t \geq R_\infty + \frac{\sigma^2}{4a^2}$ ,
- Structure bosselée si  $R_\infty + \frac{\sigma^2}{4a^2} \leq r_t \leq R_\infty - \frac{\sigma^2}{4a^2}$ .

On dispose de certaines remarquables :  $r(T, 0) = r(T) + \frac{\sigma^2}{4a^2}$  et  $r(t, \infty) = R_\infty$ . Ce modèle dit de « déport normal » présente néanmoins quelques inconvénients : les différents paramètres du processus de diffusion sont constants, il n'est pas possible d'obtenir une courbe de taux en forme de cuvette et enfin les valeurs négatives du taux d'intérêt ne sont pas censurées.

Pour éviter ce désagrément, on peut faire appel à une modélisation proposant une barrière réfléchissante en zéro ; c'est l'objet du modèle de COX, INGERSOLL et ROSS (CIR).

#### 4.2. Le modèle de Cox, INGERSOLL et Ross [1985]

Ce modèle, présenté en 1985, introduit un processus en racine carrée (dit « processus de FELLER ») qui interdit à un taux initialement positif de prendre des valeurs négatives, tout en conservant la simplicité du processus d'ORNSTEIN-UHLENBECK. En reprenant les notations de la partie précédente, le processus de taux s'écrit sous la forme :

$$dr_t = a(b - r_t)dt + \sigma\sqrt{r_t}dW_t.$$

La valeur du zéro-coupon est déterminée, comme précédemment, par la formule suivante :

$$P(t, T) = A(t, T)\exp[-B(t, T)r_t]$$

Avec pour  $t < T$ ,

$$\triangleright A(t, T) = \left\{ \frac{2\gamma \exp\{(\gamma+a+\lambda)(T-t)/2\}}{(\gamma+a+\lambda)(\exp\{\gamma(T-t)\}-1)+2\gamma} \right\}^{ab/\sigma^2},$$

$$\triangleright B(t, T) = \frac{2\exp\{\gamma(T-t)-1\}}{(\gamma+a+\lambda)(\exp\{\gamma(T-t)\}-1)+2\gamma},$$

$$\triangleright \gamma = \sqrt{(a + \lambda)^2 + 2\sigma^2},$$

$$\triangleright \lambda(r, t) = \frac{\lambda}{\sigma}\sqrt{r}.$$

La relation  $R(t, T) = -\frac{1}{T-t} \ln P(t, T)$  permet d'aboutir à la structure par terme des taux :

$$R(r, t, T) = \frac{B(t, T) - \ln A(t, T)}{T - t}.$$

Comme pour le modèle de VASICEK, il est possible d'obtenir plusieurs formes pour la courbe des taux :

- Structure ascendante si  $r(t) \leq R(r, t, \infty)$ ,
- Structure inversée si  $r(t) \geq \frac{ab}{a+\lambda}$ ,
- Structure bosselée si  $R(r, t, \infty) \leq r(t) \leq \frac{ab}{a+\lambda}$ .

On peut remarquer que la variance du processus croît avec  $r$  et que le taux court ne peut prendre une valeur nulle que si la condition  $\sigma^2 > 2ab$  est satisfaite.

Les limites de ces modèles CIR et VASICEK

Ces modèles présentent l'inconvénient de stabiliser la queue de la structure des taux ; le taux à long terme est réduit à une constante indépendante de la forme de la structure. Or, d'un point de vue purement économique, il n'est pas toujours approprié d'expliquer le marché des titres obligataires par une seule variable explicative, le taux sans risque instantané. Ces

processus mono-factoriels, ne dépendant que d'une variable d'état, supposent une parfaite corrélation entre les taux  $r(t, T)$ , non satisfaite dans la pratique.

#### 4.3. La démarche de HEALTH, JARROW et MORTON

La méthodologie de HEALTH, JARROW et MORTON [1990] (dite « HJM ») permet de modéliser la structure à terme de taux d'intérêt du point de vue de la théorie d'arbitrage. L'approche HJM prend en considération les différentes limites énoncées supra pour les structures de taux. HJM ne propose d'ailleurs pas une structure dynamique spécifique, mais plutôt un cadre de travail.

La méthodologie :

On suppose que la dynamique du taux à terme (forward) instantané est donnée par l'équation différentielle stochastique suivante :

$$df(t, T) = \mu(t, T)dt + \sigma(t, T)dW_t$$

Où  $W$  est un mouvement brownien standard sous la probabilité historique.

L'équation différentielle est complétée par la donnée de la valeur initiale :

$$f(0, T) = f^*(0, T)$$

Où  $f^*(0, T)$  représente le taux forward instantané observable sur le marché.

D'autre part, l'hypothèse d'absence d'arbitrage impose une condition sur  $\mu()$  et  $\sigma()$ . Plus précisément, si  $\lambda(t, T)$  est le processus vérifiant la relation :

$$\mu(t, T) = \sigma(t, T) \left[ \int_t^T \sigma(t, s)ds - \lambda(t, T) \right],$$

Alors la condition d'absence d'arbitrage s'exprime par l'indépendance de  $\lambda(t, T) = \lambda(t)$ . L'unicité est assurée dès lors que l'on a presque sûrement  $\sigma^*(t, T) = \int_t^T \sigma(t, s)ds > 0$ .

Mais la complexité d'estimation de la prime de risque  $\lambda(t)$  à partir du marché des titres obligataires pose problème. Pour contourner le problème, HJM propose de faire appel à la mesure risque neutre  $Q$ . Sous cette mesure, l'évaluation du prix d'une obligation ne fait en effet pas intervenir  $\lambda(t)$ .

Dorénavant, on suppose donc que la dynamique du taux forward instantané dans l'univers risque neutre est donnée par :

$$df(t, T) = \mu(t, T)dt + \sigma(t, T)d\tilde{W}_t.$$

L'hypothèse d'absence d'arbitrage conduit à la relation  $\mu(t, T) = \sigma(t, T) \int_t^T \sigma(t, s)ds$ .

Ainsi, pour déterminer la valeur d'une obligation sans risque de défaut, il suffit de suivre les différentes étapes ci-après :

- On observe sur le marché la courbe des taux forward instantanés  $f^*(0, T)$ .
- On choisit un processus de volatilité  $\sigma(t, T)$ .
- Via la relation donnée quelques lignes plus haut, on en déduit la valeur de  $\mu(t, T)$ . On détermine le taux forward instantané dans l'univers risque neutre :

$$f(t, T) = f(0, T) + \int_0^t \mu(s, T) ds + \int_0^t \sigma(s, T) d\tilde{W}_s,$$

$$\text{avec } f(0, T) = f^*(0, T).$$

– On retrouve le taux court terme en utilisant la relation suivante :

$$r(t) = f(t, t) = f(0, t) + \int_0^t \mu(s, t) ds + \int_0^t \sigma(s, t) d\tilde{W}_s.$$

Finalement, l'expression du prix d'une obligation sans coupon et sans risque de défaut s'écrit, comme  $P(t, T) = \exp(-\int_t^T f(t, u) du)$  :

$$P(t, T) = \exp\left(-\left\{\int_t^T (0, u) du + \int_t^T \int_0^t \mu(s, u) ds du + \int_t^T \int_0^t \sigma(s, u) d\tilde{W}_s du\right\}\right).$$

Le grand avantage de la méthodologie HJM est d'introduire comme paramètre de départ la courbe des taux forward instantanés au temps 0. Les parties suivantes sont des illustrations de cette méthodologie.

#### 4.4. Le modèle de HO et LEE

Ce modèle est l'application la plus connue de la méthodologie de HJM.

L'hypothèse de base de ce modèle consiste à considérer le coefficient de diffusion comme constant :

$$\sigma(t, T) = \sigma.$$

La relation  $\mu(t, T) = \sigma(t, T)\sigma^*(t, T)$  nous permet d'obtenir le coefficient de dérive :

$$\mu(t, T) = \sigma^2 * (T - t).$$

L'équation différentielle stochastique régissant la valeur du taux forward instantané s'écrit alors :

$$df(t, T) = \sigma^2(T - t)dt + \sigma d\tilde{W}_t.$$

Après intégration, cette relation devient :

$$f(t, T) = f(0, T) + \sigma^2 t \left(T - \frac{t}{2}\right) + \sigma \tilde{W}_t.$$

La valeur du taux à court terme s'en déduit aisément :

$$r(t) = f(t, t) = f(0, T) + \frac{\sigma^2 t^2}{2} + \sigma \tilde{W}_t.$$

Et la relation  $P(t, T) = \exp\left\{-\int_t^T f(t, s) ds\right\}$  permet d'aboutir à la valeur de l'obligation sans coupon :

$$P(t, T) = \exp\left\{-\int_t^T \left(f(0, s) + \sigma^2 t * (s - t/2) + \sigma \tilde{W}_t\right) ds\right\}$$

$$= \frac{P(0, T)}{P(0, t)} \exp \left\{ -\frac{\sigma^2}{2} T \times t \times (T - t) - \sigma(T - t) \tilde{W}_t \right\}$$

Dans ce modèle,  $f(t, T)$  possède une distribution normale d'espérance  $f(0, T) + \sigma^2 t(T - \frac{t}{2})$  et de variance  $\sigma^2 t$ ,  $r$  possède une distribution normale d'espérance  $f(0, t) + \frac{\sigma^2 t^2}{2}$  et de variance  $\sigma^2 t$ ,  $P(t, T)$  possède une distribution log normale et  $f(0, T)$  et  $P(0, T)$  sont directement observés sur le marché.

#### 4.5. Le modèle de VASICEK généralisé

Dans ce modèle, le processus de volatilité est supposé vérifier la relation suivante, où  $k$  est une constante positive :

$$\sigma(t, T) = \sigma e^{-k(T-t)}.$$

Cette forme est facilement interprétable : plus on se rapproche de l'échéance, plus la volatilité diminue. Comme pour le modèle de HO et LEE, le processus de dérive se déduit de l'expression de  $\sigma(t, T)$  :

$$\mu(t, T) = \sigma(t, T) \int_t^T \sigma(t, s) ds = \frac{\sigma^2}{k} (e^{-k(T-t)} - e^{-2k(T-t)}).$$

On retrouve ensuite l'équation stochastique forward instantané :

$$df(t, T) = \frac{\sigma^2}{k} (e^{-k(T-t)} - e^{-2k(T-t)}) dt + \sigma e^{-k(T-t)} d\tilde{W}_t.$$

L'intégration de cette équation donne :

$$f(t, T) = f(0, T) - \frac{\sigma^2}{2k^2} (1 - e^{-k(T-t)})^2 + \frac{\sigma^2}{2k^2} (1 - e^{-kT})^2 + \sigma \int_0^t e^{-k(T-s)} d\tilde{W}_s$$

On déduit ensuite la valeur du taux court terme à partir de la valeur du taux forward :

$$r(t) = f(0, t) + \frac{\sigma^2}{2k^2} (1 - e^{-kt})^2 + \sigma \int_0^t e^{-k(t-s)} d\tilde{W}_s.$$

Comme dans la section précédente, la relation  $P(t, T) = \exp \left\{ -\int_t^T f(t, s) ds \right\}$  permet d'aboutir à la valeur de l'obligation sans coupon :

$$P(t, T) = \frac{P(0, T)}{P(0, t)} \exp \left[ -\frac{K^2(T-t)}{2} L(t) + K(T-t)(f(0, t) - r(t)) \right],$$

Avec :  $K(T-t) = \frac{1 - e^{-k(T-t)}}{k}$  et  $L(t) = \int_0^t \sigma^2 e^{-2k(T-s)} ds = \frac{\sigma^2}{2k} (1 - e^{-2kt})$ .

Dans ce modèle,  $f(t, T)$  possède une distribution normale d'espérance

$f(0, T) - \frac{\sigma^2}{2k^2}(1 - e^{-k(T-t)})^2 + \frac{\sigma^2}{2k^2}(1 - e^{-kT})^2$  et de variance  $L(t)$ ,  $r(t)$  possède une distribution normale d'espérance  $f(0, t) + \frac{\sigma^2}{2}K^2(t)$  et de variance  $L(t)$  et  $P(t, T)$  possède une distribution log normale de caractéristiques :

- $E(\ln P(t, T)) = \ln \frac{P(0, T)}{P(0, t)} - \frac{K^2(T-t)}{2} \left( L(t) + \frac{\sigma^2}{2} K(T-t) \right)$  ;
- $V(\ln P(t, T)) = K^2(T-t) \times L(t)$ .

On observe  $f(0, T)$  et  $P(0, T)$  directement sur le marché. Ce modèle peut être considéré comme le modèle à un facteur le plus général dans lequel les prix des zéro-coupons restent log-normaux.

#### 4.6. Le modèle de CIR augmenté

L'adaptation du modèle CIR au cadre HJM est plus délicate. On cherche donc une dynamique du taux forward qui conduise à la dynamique du taux court suivante :

$$dr_t = a(t)(b(t) - r_t)dt + \sigma\sqrt{r_t}dW_t.$$

On peut montrer que le processus de volatilité HJM doit être de la forme :

$$\sigma(t, T) = \sigma\sqrt{r_t}D(t, T), \quad \sigma^*(t, T) = \sigma\sqrt{r_t}B(t, T),$$

Avec  $D(t, T) = \frac{\partial B}{\partial t}(t, T)$  et  $B$  vérifie l'équation différentielle de **RICATTI** suivante :

$$\frac{\partial B}{\partial t}(t, T) = \frac{\sigma^2}{2}B^2(t, T) + a(t)B(t, T) - 1,$$

Avec la condition aux limites  $B(T, T) = 0$ . Enfin, on doit reproduire la courbe des taux forward initiale :

$$f(0, T) = r_0D(0, T) + \int_0^T a(s)b(s)D(s, T)ds.$$

Le prix d'une obligation zéro-coupon est alors donné par la formule :

$$P(t, T) = \exp\left(-r_tB(t, T) - \int_t^T a(s)b(s)B(s, T)ds\right).$$

La mise en œuvre pratique de ce modèle n'est pas simple car l'équation différentielle vérifiée par  $B$  n'a pas de solution explicite et il faut donc se tourner vers une résolution numérique.

Limites du modèle HJM :

Le cadre de travail proposé par HJM présente en pratique une limite importante en s'appuyant sur la courbe des taux forward instantanés, grandeur qui n'est pas directement observable.

## Annexe 5 : Le modèle de MERTON

Dans le modèle de BLACK et SCHOLES, l'expression du rendement de l'actif entre  $t$  et  $t+\delta$  s'écrit  $u(\delta) = \left(r(t) - q - \frac{1}{2}\sigma^2\right) * \delta + \rho\sigma\sqrt{\delta} * \varepsilon_t^1 + \sigma\sqrt{(1 - \rho^2)\delta} * \varepsilon_t^2$ .

Ce modèle n'intègre pas les variations brutales du cours du sous-jacent, dues à l'arrivée discontinue d'informations, bonnes ou mauvaises. MERTON [1976] a proposé de les modéliser en introduisant une composante au modèle log-normal d'origine.

Par la suite, nous considérons que le prix de l'actif  $S_t$  présente des sauts  $U_1, \dots, U_j$  à des instants aléatoires  $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_j$ . Entre deux instants de saut on suppose que la dynamique du cours respecte le modèle de BLACK et SCHOLES. Cela conduit après quelques manipulations à l'expression suivante du cours :

$$S(t + \delta) = S_t * \exp\left\{\left(r(t) - q - \frac{\sigma^2}{2}\right) \delta + \rho\sigma\sqrt{\delta} * \varepsilon_t^1 + \sigma\sqrt{(1 - \rho^2)\delta} * \varepsilon_t^2 + \sum_{k=1}^{N_{t+\delta}} U_k\right\},$$

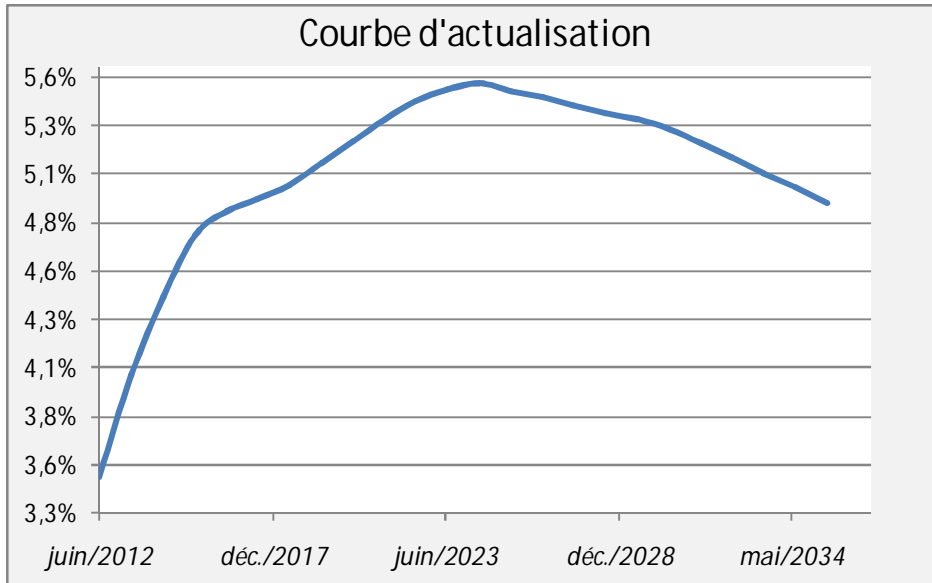
Où :

- $N = (N_t)_{t \geq 0}$  est un processus de Poisson d'intensité  $\lambda$  ;
- $U = (U_k)_{(k \geq 1)}$  est une suite de variables aléatoires indépendantes identiquement distribués de loi normale  $\mathcal{N}(0, \sigma_u)$  ;
- Les processus  $N$ ,  $\varepsilon$  et  $U$  sont mutuellement indépendants.

Les sauts sont supposés symétriques et en moyenne nuls.

## Annexe 6 : Courbe d'actualisation (celle de BAM)

Figure 36 : courbe d'actualisation



## Annexe 7 : Données historiques de MASI de Bourse de CASABLANCA : 2009-2011

Figure 37 : Données historiques de MASI 2009-2011



Source : <http://www.casablanca-bourse.com/bourseweb/indice-historique.aspx?Cat=22&IdLink=299>

## Bibliographie

- Franck LE VALLOIS, Patrice PALSKEY, Bernard PARIS, Alain TOSETTI - Gestion actif passif en assurance vie, réglementation, outils, méthodes – Economica
- Frédéric PLANCHET, Pierre THEROND, Julien JACQUEMIN- Modèles financiers en assurance, analyses de risque dynamiques – Economica
- Pierre Laffaye de Micheaux, Rémy Drouillet, Benoît Liquet- Le logiciel R , maîtriser le langage, effectuer des analyses statistiques- collection statistique et probabilités appliquées

## Publications

- EUROPEAN COMMISSION – QIS5 Technical Specifications
- EUROPEAN COMMISSION – QIS4 Technical Specifications
- ACP – Orientations Nationales Complémentaires aux Spécifications Techniques du QIS5- 2013
- Dossier Optimind - Solvabilité II : Point d'étape, actualités de la réforme et enjeux du moment
- Dossier Optimind –Volatilités des marchés : quels impacts concrets pour les organismes assureurs ?
- Fédération marocaine des sociétés d'assurance et de réassurance - Situation liminaire 2011

## Sites Internet

- [www.fmsar.org.ma](http://www.fmsar.org.ma)
- <https://eiopa.europa.eu/>
- <https://Ressources-actuarielles.net>