

Chapitre 6 : Contrats d'assurance et de rente sur plusieurs têtes : (Multiple Life Models)

Assurance vie entière (premier décès) : Whole life insurance A_{xy}

L'assureur verse une prestation d'un dollar à la fin de l'année du premier décès, peu importe quand ce dernier survient. La valeur présente de la prestation est :

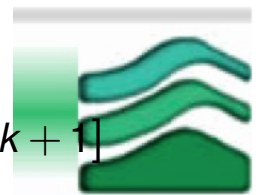
- $Z = v^{K_{xy}+1}$, $K_{xy} = [\min(T_x, T_y)] = 0, 1, 2, \dots$

- La prime nette de cette assurance est :

$$A_{xy} := E(Z) = \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1} Pr[K_{xy} = k] = \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1} \left({}_k p_{x \cdot k} p_y - {}_{k+1} p_{x \cdot k+1} p_y \right)$$

Démonstration

$$\begin{aligned} Pr[K_{xy} = k] &= Pr[k \leq \min(T_x, T_y) < k+1] \\ &= Pr[\min(T_x, T_y) \geq k] - Pr[\min(T_x, T_y) \geq k+1] \\ &= {}_k p_{x \cdot k} p_y - {}_{k+1} p_{x \cdot k+1} p_y \end{aligned}$$



fmagri@insea.ac.ma

Assurance vie entière (second décès) : Whole life insurance $A_{\overline{xy}}$

L'assureur verse une prestation d'un dollar à la fin de l'année du second décès, peu importe quand ce dernier survient. La valeur présente de la prestation est :

- $Z = v^{K_{\overline{xy}}+1}$, $K_{\overline{xy}} = [\max(T_x, T_y)] = 0, 1, 2, \dots$

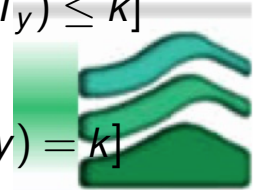
- La prime nette de cette assurance est

$$A_{\overline{xy}} := E(Z) = \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1} Pr[K(\overline{xy}) = k] = \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1} ({}_{k+1}q_{x \cdot k+1} q_y - {}_k q_{x \cdot k} q_y)$$

- $A_{\overline{xy}} = A_x + A_y - A_{xy}$

Démonstration

$$\begin{aligned} Pr[K(\overline{xy}) = k] &= Pr[k \leq \max(T_x, T_y) < k+1] \\ &= Pr[\max(T_x, T_y) \leq k+1] - Pr[\max(T_x, T_y) \leq k] \\ &= {}_{k+1}q_{x \cdot k+1} q_y - {}_k q_{x \cdot k} q_y \\ &= Pr[K(x) = k] + Pr[K(y) = k] - Pr[K(xy) = k] \end{aligned}$$



fmagri@insea.ac.ma

Rente versée jusqu'au premier décès parmi (x) et (y)

Rente versée jusqu'au premier décès parmi (x) et (y)

Un contrat de rente émis à (x) et (y) . Une rente d'un dollar est versée jusqu'au premier décès parmi (x) et (y) .

$$\ddot{a}_{xy} = \sum_{k=0}^{\infty} v^k \cdot {}_k p_{xy} = \sum_{k=0}^{\infty} v^k \cdot {}_k p_x \cdot {}_k p_y$$



fmarrri@insea.ac.ma

Rente versée jusqu'au second décès

Rente versée jusqu'au second décès parmi (x) et (y)

Un contrat de rente émis à (x) et (y) : La rente d'un dollar est versée jusqu'au second décès c'est-à-dire jusqu'au moment de déchéance du statut (xy)

$$\ddot{a}_{\overline{xy}} = \sum_{k=0}^{\infty} v^k \cdot {}_k p_{\overline{xy}}$$

$$\ddot{a}_{\overline{xy}} = \sum_{k=0}^{\infty} v^k \cdot ({}_k p_x + {}_k p_y - {}_k p_x \cdot {}_k p_y)$$

$$\ddot{a}_{\overline{xy}} = \ddot{a}_x + \ddot{a}_y - \ddot{a}_{xy}$$



Rentes réversible (Reversionary annuities)

Rentes réversible(Reversionary annuities)

On définit par $a_{x|y}$ la valeur présente actuarielle d'une rente réversible de 1 \$ où la rente est versée au statut (y) à compter de la déchéance du statut (x).

$$\begin{aligned} a_{x|y} &= \sum_{k=1}^{\infty} v^k \cdot Pr(T_x < k < T_y) = \sum_{k=1}^{\infty} v^k \cdot {}_kq_x \cdot {}_kp_y \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} v^k \cdot {}_kp_y - \sum_{k=1}^{\infty} v^k \cdot {}_kp_x \cdot {}_kp_y = a_y - a_{xy} \end{aligned}$$



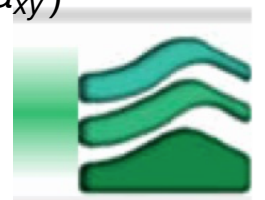
fmarri@insea.ac.ma

Rentes réversible (Reversionary annuities)

Exemple

Un assuré x d'âge $x=30$ ans marié à y d'âge $y=25$ ans souscrit une rente viagère réversible de début de période qui prévoit le versement de $R = 10000\$$ au début de chaque année si l'assuré x est vivant à la date du versement, et $\alpha.R = 50\%.R$ à son conjoint y si l'assuré x est décédé et son conjoint vivant à la date du versement ($i = 2.5\%$ TV88-90).

$$VAP(\text{assureur}) = R.\ddot{a}_x + \alpha.R.a_{x|y} = R.\ddot{a}_x + \alpha.R.(a_y - a_{xy})$$



fmagri@insea.ac.ma

Rentes réversible avec différé fixe n (n-year deferred life reversionary annuities)

Rentes réversible avec différé fixe n

On définit par ${}_n|a_{x|y}$ la valeur présente actuarielle d'une rente réversible avec différé n, qui prévoit le versement de 1\$,mais pas durant les n premières années au statut (y) à compter de la déchéance du statut (x).

$$\begin{aligned} {}_n|a_{x|y} &= \sum_{k=n}^{\infty} v^k \cdot Pr(T_x < k < T_y) = \sum_{k=n}^{\infty} v^k \cdot {}_kq_x \cdot {}_kp_y \\ &= \sum_{k=n}^{\infty} v^k \cdot {}_kp_y - \sum_{k=n}^{\infty} v^k \cdot {}_kp_x \cdot {}_kp_y = {}_n|a_y - {}_n|a_{xy} \end{aligned}$$



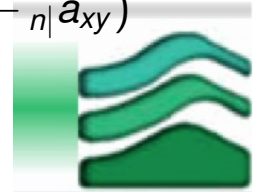
fmarri@insea.ac.ma

Rentes réversible avec différé fixe n

Exemple

Un assuré x d'âge $x=30$ ans marié à y d'âge $y=25$ souscrit une rente réversible de début de période avec différé fixe $n=35$ qui prévoit le versement de $R = 10000\$$, mais pas durant les n premières années, si l'assuré x est vivant à la date du versement, et $\alpha.R = 50\%.R$ à son conjoint y si l'assuré x est décédé et son conjoint vivant à la date du versement ($i = 2.5\%$ TV88-90).

$$VAP(\text{assureur}) = R \cdot {}_n| \ddot{a}_x + \alpha \cdot R \cdot {}_n| a_{x|y} = R \cdot {}_n| \ddot{a}_x + \alpha \cdot R \cdot ({}_n| a_y - {}_n| a_{xy})$$



fmagri@insea.ac.ma

Chapitre 6 : Contrats d'assurance et de rente sur plusieurs têtes : (Multiple Life Models)

Assurance vie entière (premier décès) : Whole life insurance A_{xy}

L'assureur verse une prestation d'un dollar à la fin de l'année du premier décès, peu importe quand ce dernier survient. La valeur présente de la prestation est :

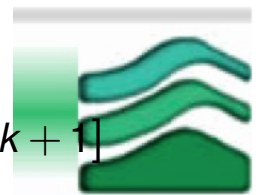
- $Z = v^{K_{xy}+1}$, $K_{xy} = [\min(T_x, T_y)] = 0, 1, 2, \dots$

- La prime nette de cette assurance est :

$$A_{xy} := E(Z) = \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1} Pr[K_{xy} = k] = \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1} \left({}_k p_{x \cdot k} p_y - {}_{k+1} p_{x \cdot k+1} p_y \right)$$

Démonstration

$$\begin{aligned} Pr[K_{xy} = k] &= Pr[k \leq \min(T_x, T_y) < k+1] \\ &= Pr[\min(T_x, T_y) \geq k] - Pr[\min(T_x, T_y) \geq k+1] \\ &= {}_k p_{x \cdot k} p_y - {}_{k+1} p_{x \cdot k+1} p_y \end{aligned}$$



fmagri@insea.ac.ma

Assurance vie entière (second décès) : Whole life insurance $A_{\overline{xy}}$

L'assureur verse une prestation d'un dollar à la fin de l'année du second décès, peu importe quand ce dernier survient. La valeur présente de la prestation est :

- $Z = v^{K_{\overline{xy}}+1}$, $K_{\overline{xy}} = [\max(T_x, T_y)] = 0, 1, 2, \dots$

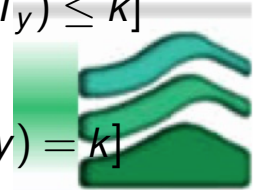
- La prime nette de cette assurance est

$$A_{\overline{xy}} := E(Z) = \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1} Pr[K(\overline{xy}) = k] = \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1} ({}_{k+1}q_{x \cdot k+1} q_y - {}_k q_{x \cdot k} q_y)$$

- $A_{\overline{xy}} = A_x + A_y - A_{xy}$

Démonstration

$$\begin{aligned} Pr[K(\overline{xy}) = k] &= Pr[k \leq \max(T_x, T_y) < k+1] \\ &= Pr[\max(T_x, T_y) \leq k+1] - Pr[\max(T_x, T_y) \leq k] \\ &= {}_{k+1}q_{x \cdot k+1} q_y - {}_k q_{x \cdot k} q_y \\ &= Pr[K(x) = k] + Pr[K(y) = k] - Pr[K(xy) = k] \end{aligned}$$



fmagri@insea.ac.ma

Rente versée jusqu'au premier décès parmi (x) et (y)

Rente versée jusqu'au premier décès parmi (x) et (y)

Un contrat de rente émis à (x) et (y) . Une rente d'un dollar est versée jusqu'au premier décès parmi (x) et (y) .

$$\ddot{a}_{xy} = \sum_{k=0}^{\infty} v^k \cdot {}_k p_{xy} = \sum_{k=0}^{\infty} v^k \cdot {}_k p_x \cdot {}_k p_y$$



fmarrri@insea.ac.ma

Rente versée jusqu'au second décès

Rente versée jusqu'au second décès parmi (x) et (y)

Un contrat de rente émis à (x) et (y) : La rente d'un dollar est versée jusqu'au second décès c'est-à-dire jusqu'au moment de déchéance du statut (xy)

$$\ddot{a}_{\overline{xy}} = \sum_{k=0}^{\infty} v^k \cdot {}_k p_{\overline{xy}}$$

$$\ddot{a}_{\overline{xy}} = \sum_{k=0}^{\infty} v^k \cdot ({}_k p_x + {}_k p_y - {}_k p_x \cdot {}_k p_y)$$

$$\ddot{a}_{\overline{xy}} = \ddot{a}_x + \ddot{a}_y - \ddot{a}_{xy}$$



Rentes réversible (Reversionary annuities)

Rentes réversible(Reversionary annuities)

On définit par $a_{x|y}$ la valeur présente actuarielle d'une rente réversible de 1 \$ où la rente est versée au statut (y) à compter de la déchéance du statut (x).

$$\begin{aligned} a_{x|y} &= \sum_{k=1}^{\infty} v^k \cdot Pr(T_x < k < T_y) = \sum_{k=1}^{\infty} v^k \cdot {}_kq_x \cdot {}_kp_y \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} v^k \cdot {}_kp_y - \sum_{k=1}^{\infty} v^k \cdot {}_kp_x \cdot {}_kp_y = a_y - a_{xy} \end{aligned}$$



fmarri@insea.ac.ma

Rentes réversible (Reversionary annuities)

Exemple

Un assuré x d'âge $x=30$ ans marié à y d'âge $y=25$ ans souscrit une rente viagère réversible de début de période qui prévoit le versement de $R = 10000\$$ au début de chaque année si l'assuré x est vivant à la date du versement, et $\alpha.R = 50\%.R$ à son conjoint y si l'assuré x est décédé et son conjoint vivant à la date du versement ($i = 2.5\%$ TV88-90).

$$VAP(\text{assureur}) = R.\ddot{a}_x + \alpha.R.a_{x|y} = R.\ddot{a}_x + \alpha.R.(a_y - a_{xy})$$



fmagri@insea.ac.ma

Rentes réversible avec différé fixe n (n-year deferred life reversionary annuities)

Rentes réversible avec différé fixe n

On définit par ${}_n|a_{x|y}$ la valeur présente actuarielle d'une rente réversible avec différé n, qui prévoit le versement de 1\$,mais pas durant les n premières années au statut (y) à compter de la déchéance du statut (x).

$$\begin{aligned} {}_n|a_{x|y} &= \sum_{k=n}^{\infty} v^k \cdot \Pr(T_x < k < T_y) = \sum_{k=n}^{\infty} v^k \cdot {}_kq_x \cdot {}_kp_y \\ &= \sum_{k=n}^{\infty} v^k \cdot {}_kp_y - \sum_{k=n}^{\infty} v^k \cdot {}_kp_x \cdot {}_kp_y = {}_n|a_y - {}_n|a_{xy} \end{aligned}$$



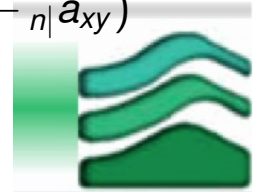
fmarri@insea.ac.ma

Rentes réversible avec différé fixe n

Exemple

Un assuré x d'âge $x=30$ ans marié à y d'âge $y=25$ souscrit une rente réversible de début de période avec différé fixe $n=35$ qui prévoit le versement de $R = 10000\$$, mais pas durant les n premières années, si l'assuré x est vivant à la date du versement, et $\alpha.R = 50\%.R$ à son conjoint y si l'assuré x est décédé et son conjoint vivant à la date du versement ($i = 2.5\%$ TV88-90).

$$VAP(\text{assureur}) = R \cdot {}_n| \ddot{a}_x + \alpha \cdot R \cdot {}_n| a_{x|y} = R \cdot {}_n| \ddot{a}_x + \alpha \cdot R \cdot ({}_n| a_y - {}_n| a_{xy})$$



fmagri@insea.ac.ma