



المندوبية السامية للتخطيط  
HAUT-COMMISSARIAT AU PLAN

ROYAUME DU MAROC  
\*.\*.\*.\*.\*  
HAUT COMMISSARIAT AU PLAN  
\*.\*.\*.\*.\*  
INSTITUT NATIONAL  
DE STATISTIQUE ET D'ECONOMIE APPLIQUEE



## Projet de Fin d'Etudes

\*\*\*\*\*

**Etude et calcul du "Solvency Capital Requirement (SCR)" sous Solvabilité II pour les branches "automobile" et "accident de travail" :**

***Formule standard (QIS5) vs modélisation interne***

Préparé par : *BOUZINAB Faris*  
*BOUABDILLAH Kamal*

***Soutenu publiquement comme exigence partielle en vue de l'obtention du  
Diplôme d'Ingénieur d'Etat***

**Option : Actuariat-finance**

*Devant le jury composé de :*

**Pr. ABDELKHALAK Touhami (INSEA)**

**Pr. OULIDI Abderrahim (INSEA)**

**DBICH Abderrahim (AXA Assurance)**

*Année universitaire : 2012-2013*



## Résumé :

L'exigence de capital réglementaire en assurance non vie est définie dans la directive *Solvency I*, comme un pourcentage des primes reçues, ou comme un pourcentage des provisions, cependant cette méthode présente une certaine ambiguïté, par exemple prenons deux compagnies d'assurance : une qui provisionne peu et qui tire un résultat, et une autre qui provisionne plus pour plus de prudence et qui ne dégage pas autant de bénéfice, dans ces deux cas la première compagnie profitera d'un capital réglementaire exigé bien inférieur que la deuxième compagnie (la plus prudente), ce qui est irrationnel.

Par conséquent, la directive *Solvency II* vient pour corriger ce défaut et propose deux nouvelles méthodes pour déterminer cette exigence de capital réglementaire qui dépendra de tout le profil de risque de la compagnie et non pas que du risque liée aux primes et réserves. Une compagnie d'assurance pourra l'évaluer soit à l'aide de la formule standard, soit à l'aide d'un modèle interne partiel.

L'existence de ces deux méthodes entraîne plusieurs interrogations. Le *SCR (Solvency Capital Requirement)* obtenu à l'aide de la formule standard est-il différent de celui déterminé par un modèle interne partiel ? Le calibrage de la formule standard est-il adapté à tous les profils de risque ?

Afin de répondre à ces questions, le *SCR* est déterminé dans un premier temps à l'aide de la formule standard présentée dans le QIS 5. Il est ensuite évalué à l'aide d'un modèle interne partiel. Afin de créer ce modèle interne partiel, deux risques sont modélisés : le risque souscription non-vie et le risque de marché. L'étude est réalisée sur 2 branches différentes, branche auto et branche AT. La modélisation de la provision pour sinistres est effectuée pour chaque triangle de liquidation à l'aide de la méthode de *Bootstrap* appliquée à *Chain Ladder*. La modélisation liée à l'actif est faite par le modèle *Cox-Ingersoll -Ross* pour la valorisation des obligations et par *Regime Switching LogNormal* pour la valorisation des actions.

Ce mémoire a pour but de démontrer que le calibrage de la formule standard détaillé dans les spécifications techniques du QIS5 n'est pas adapté à tous les profils de risque. Cependant, l'étude réalisée ne fait intervenir que les risques souscription non-vie, le risque de marché et le risque opérationnel. Il serait donc intéressant d'approfondir cette étude et de déterminer l'exigence de capital réglementaire globale de la compagnie d'assurance et pas seulement l'exigence de capital liée aux risques cités ci-avant.

**Les mots clés :** Solvency II, QIS5 ,Best Estimate, Bilan économique, Bilan prudentiel, SCR, marge de risque, modèle CIR, modèle RSLN, formule standard, modèle interne...

## Dédicace :

*Je dédie ce travail*

*À mes très chers parents*

*Tous les mots du monde ne sauraient exprimer l'immense amour que je vous porte, ni la profonde gratitude que je vous témoigne pour tous les efforts et les sacrifices que vous n'avez jamais cessé de consentir pour mon instruction et mon bien-être. C'est à travers vos encouragements et vos critiques que je me suis réalisée.*

*À mes chers frères Jad et Badr*

*Pour leurs encouragements et leur soutien permanents.*

*À ma chère famille*

*Quoique je puisse dire, je ne peux exprimer mes sentiments d'amour et de respect à votre égard.*

*À mes meilleurs amis*

*Avec qui j'ai passé de très agréables moments, je dédie ce travail en guise de gratitude pour leur grand soutien et pour leur affection sans limite.*

*À Kamal*

*À mon binôme Kamal, un spécial remerciement pour son grand sérieux et son grand esprit d'équipe qui rendait agréable toute tâche.*

*Faris*

**Dédicace :**

*Je dédie ce modeste de travail en premier lieu à mes  
très chers parents :*

*Pour l'amour et l'affection sans mesure  
qu'ils m'ont procurés tout  
au long de ma vie  
Pour leur sacrifice, leur confiance  
ainsi que leur patience  
Qu'ils trouvent ici le témoignage  
de mon entière gratitude  
et que Dieu les protège*

*A mes chères sœurs Fatine et Nour  
A toutes ma grande famille  
A tous mes amis  
A Faris*

*Kamal*

## Remerciement

*Nous ne saurions commencer ce rapport sans remercier le tout puissant **ALLAH** miséricordieux, qui nous a permis d'effectuer notre stage au sein d'AXA Assurance Maroc dans de bonnes conditions et sans difficultés majeures.*

*Aussi nous remercions du fond du cœur **M. Abderrahim OULIDI** notre encadrant interne de l'INSEA qui n'a ménagé aucun effort pour nous aider à mener à terme notre projet. Nous remercions également **M. Abderrahim DBICH** notre encadrant externe, Directeur Marché des Particuliers pour avoir fait de son mieux pour nous mettre à l'aise avec son équipe de travail, et pour ses directives pertinentes tout au long de notre stage.*

*Nous tenons également à exprimer notre gratitude à Monsieur le professeur **ABDELKHALEK Touhami** d'avoir accepté de faire partie des membres du jury.*

*Nous saisissons l'occasion pour remercier tout les membres de l'équipe de travail pour leur accueil et leur grande disponibilité.*

*Nos remerciements vont également à **M. MARRI Fouad** et **Mme. ZAOUJAL Nouzha** pour leurs conseils et leurs grandes disponibilités.*

*Un grand merci également à **M. Frédérique PLANCHET** Actuaire associé chez Winter et associés et **M. Pierre DEVOLDER** Professeur à l'INSEA pour un échange de mails aussi constructif que sympathique.*

*Nous ne saurions oublier dans nos remerciements tout le corps professoral de l'INSEA, pour la formation prodigieuse qu'il nous a prodiguée.*

*Que tout ceux qui nous ont aidés, de près ou de loin, trouvent ici l'expression de nos sentiments les meilleurs.*

## Table des matières

Résumé : .....	3
Dédicaces : .....	4
Remerciement .....	6
Liste des abréviations .....	10
Liste des tableaux .....	11
Liste des figures : .....	13
Introduction : .....	15
Partie 1 : présentation de la réglementation solvabilité 2 en assurance non vie .....	17
I. Définition des branches étudiées « auto » et « AT » .....	18
I.1. Branche auto .....	18
I.2. Branche AT.....	18
II. Solvabilité 2, QIS 5.....	18
II.1. L'impact de la directive Solvabilité 2 .....	19
II.2. Problématique des fonds propres nécessaires.....	20
II.3. Bilan prudentiel en assurance non vie : .....	20
III. Le best estimate et le cas particulier de l'assurance non vie.....	21
III.1. Définition selon la directive cadre.....	21
III.2. Particularité du best estimate en assurance non vie .....	22
IV. SCR « Solvency Capital Requirement ».....	23
IV.1. Bilan économique.....	23
IV.2. Définition.....	23
IV.3. Méthode de calcul du SCR.....	24
Partie 2 : Présentation de l'outil du calcul du best estimate et la construction du bilan économique.....	29
Chapitre 1 : best estimate des sinistres.....	30
I. Best estimate des sinistres des tableaux bruts .....	30
I.1. Définition .....	30
I.2. Traitement de données utilisées : .....	30
I.3. Corrections de données : .....	30
I.4.. Méthode de calcul : .....	31
II. Redressement des tableaux triangulaires et prise en compte de l'inflation .....	43
II.1. Problématique .....	43
II.2. L'enjeu de l'inflation .....	44

II.3. Méthodologie de l'intégration de l'inflation : .....	44
III. Comparaison des résultats des tableaux tenant compte de l'inflation et des tableaux ne tenant pas compte de l'inflation : .....	47
III.1. Comparaison des réserves par année de survenance .....	47
III.2. Comparaisons des écarts types par année de survenance : .....	48
III.3. Comparaison des quantiles d'ordre 95% par année de survenance : .....	48
IV. Calcul du Best estimate des sinistres pour chaque branche : .....	49
IV.1. Application numérique sur les branches d'études : .....	50
IV.2. Conclusion .....	52
Chapitre 2 : Best estimate des primes et marge de risque .....	52
I. Best estimate des primes .....	52
I.1. Définition .....	52
I.2. Méthode de calcul .....	52
I.3. Résultat .....	52
II. Marge de risque .....	52
II.1. Définition .....	52
II.2. Méthode .....	52
II.3. Résultat .....	53
Chapitre 4 : Présentation de l'actif .....	53
I. Hypothèse de travail .....	54
II. Construction des bilans prudentiels .....	54
Partie 3 : cartographie des risques et calcul du SCR standard .....	55
I. Notion de risque .....	56
II. Cartographie des risques .....	56
II.1. Les risques actuariels .....	57
II.2. Risques opérationnels .....	57
II.3. Risques de marché .....	58
II.4. Risques de défaut de contrepartie .....	58
II.5. Risques d'inflation .....	59
III. La part des risques et la décomposition du SCR des organismes non-vie : .....	59
IV. Calcul du SCR vision modèle standard .....	59
IV.1. Calcul du SCR souscription non vie .....	59
IV.2. La formule standard pour le SCR marché .....	63
IV.3. SCR opérationnel .....	68
IV.4. SCR globale « auto » et « AT » : .....	68
IV.5. Conclusion et synthèse : .....	69
Partie 4 : Calcul du SCR à l'aide d'un modèle interne .....	71

I. Modélisation du taux d'intérêt .....	72
I.1. Introduction.....	72
I.2. Modèle de Vasicek .....	72
I.3. le modèle de Cox-Ingersoll-Ross (CIR) :.....	74
II. Modélisation des actions .....	80
II.1. Introduction.....	80
II.2. le modèle de Black et Scholes.....	82
II.3. le modèle RSLN :.....	83
II.4. Comparaison entre le modèle Black-Scholes et le modèle RSLN .....	87
III. Calcul du SCR interne partiel :.....	87
III.1. SCR souscription non vie interne :.....	87
III.2. Calcul du SCR de marché : .....	94
PARTIE 5 : Comparaison et analyse des deux SCR, « standard » et « interne ».....	100
I. Comparaison des SCR de souscription :.....	101
II. Comparaison des SCR marchés pour les deux branches.....	103
II.1. Comparaison des SCR taux : .....	103
II.2. comparaison des SCR action :.....	104
Conclusion : .....	105
Bibliographie :.....	106
Annexe :.....	- 2 -
Annexe 1 : Vérification des hypothèses de Mack Chain Ladder : .....	- 2 -
Annexe 2 : Modèle linéaire généralisé :.....	- 8 -

## Liste des abréviations

<b>S1</b>	Solvabilité 1
<b>S2</b>	Solvabilité 2
<b>auto</b>	Branche Responsabilité Civile automobile
<b>AT</b>	Accident de travail
<b>SCR</b>	Solvency Capital Requirement
<b>BE</b>	Best Estimate
<b>NAV</b>	Net Actif Value
<b>CF</b>	Les Cash flows
<b>VaR</b>	Value At Risk
<b>GLM</b>	Modèle Linéaire Généralisé
<b>CEIOPS</b>	Committee of European Insurance and Occupational Pensions Supervisors.
<b>QIS</b>	Les études quantitatives d'impact
<b>CC</b>	Coût de capital
<b>DUR<sub>MOD</sub></b>	Duration modifiée
<b>PT</b>	Provisions Techniques
<b>PPNA</b>	Provision pour Primes Non Acquises
<b>VM</b>	Valeur du marché
<b>RSLN</b>	Regime Switching LogNormal
<b>CIR</b>	Cox-Ingersoll-Ross
<b>B&amp;S</b>	Black-Sholes
<b>MR</b>	Marge de risque
<b>ACF</b>	Autocorrelation function
<b>AR</b>	Autorégressif

## Liste des tableaux

Tableau 1 : tableau triangulaires des règlements de la branche auto matériel non corrigé .....	30
Tableau 2 : tableau triangulaires des règlements .....	32
Tableau 3 : tableau triangulaires des règlements cumulés.....	33
Tableau 4 : tableau des réserves.....	34
Tableau 5 : tableau triangulaires et facteurs de développement.....	34
Tableau 7 : la charge ultime et la réserve par année de survenance calculé par les 3 méthodes pour le cas ZP .....	41
Tableau 6 : la charge ultime et la réserve par année de survenance calculé par les 3 méthodes pour le cas ZU.....	40
Tableau 8 : la charge ultime et la réserve par année de survenance calculé par les 3 méthodes pour le cas U .....	41
Tableau 9 : la charge ultime et la réserve par année de survenance calculé par les 3 méthodes pour le cas P.....	41
Tableau 10 : la charge ultime et la réserve par année de survenance calculé par les 3 méthodes pour l'auto corporel .....	42
Tableau 11 : la charge ultime et la réserve par année de survenance calculé par les 3 méthodes pour l'AT .....	42
Tableau 12 : Comparaison des résultats des 4 cas de la branche auto matériel .....	43
Tableau 13 : Tableau des indices d'inflation correcteurs.....	44
Tableau 14 : les indices d'inflation futurs.....	46
Tableau 15 : matrice des indices d'inflation à réinjecter .....	46
Tableau 16 : les réserves par année de survenance avec inflation et sans inflation pour les 3 branches d'études .....	47
Tableau 17 : les écart-types des réserves par année de survenance avec inflation et sans inflation pour les 3 branches d'études .....	48
Tableau 18 : les quantiles (95%) des réserves par année de survenance avec inflation et sans inflation pour les 3 branches d'études.....	48
Tableau 19 : L'actualisation des flux futurs et le calcul du Best Estimate des sinistres AT.....	50
Tableau 20 : L'actualisation des flux futurs et le calcul du Best Estimate des sinistres auto matériel. 50	
Tableau 21 : L'actualisation des flux futurs et le calcul du Best Estimate des sinistres auto corporel . 51	
Tableau 22 : Calcul du Best Estimate des primes.....	52
Tableau 23 : Calcul de la marge de risque.....	53
Tableau 24 : volatilité des primes par branche QIS5.....	61
Tableau 25 : volatilité des réserves par branche QIS5 .....	62
Tableau 26 : Matrice de corrélation entre les branches .....	62
Tableau 28 : volatilité des branches.....	63
Tableau 27 : volume des branches.....	63
Tableau 29 : Calcul du SCR taux standard pour la branche auto et AT .....	65
Tableau 30 : Calcul du SCR action standard pour la branche auto et AT .....	67
Tableau 31 : calcul du risque opérationnel .....	68
Tableau 32 : test de rapport de vraisemblance entre B-S et RSLN .....	87
Tableau 33 : distribution des Best Estimate des sinistres.....	91
Tableau 34 : distribution du Best Estimate des sinistres pour la branche « auto » et « AT ».....	91

Tableau 35 : distribution du S/P pour la branche « auto » et « AT » .....	92
Tableau 36 : distribution du Best Estimate des primes pour la branche « auto » et « AT » .....	92
Tableau 37 : distribution du Best Estimate total pour la branche « auto » et « AT » à t=1 .....	93
Tableau 38 : Calcul de SCR souscription interne pour la branche « auto » et « AT » .....	93
Tableau 39 : les paramètres des courbes de taux choquées .....	95
Tableau 40 : les courbes des taux sans chocs et avec chocs .....	96
Tableau 41 : Calcul du SCR taux interne pour les branches « auto » et « AT » .....	96
Tableau 42 : Calcul du SCR action interne pour la branche « auto » et « AT » .....	99
Tableau 43 : Comparaison entre le SCR souscription interne et standard pour la branche « auto » et « AT » .....	102
Tableau 44 : comparaison entre les volatilités interne et standard des branches « auto » et « AT »	102
Tableau 45 : Comparaison entre le SCR taux interne et standard pour la branche « auto » et « AT »	103
Tableau 46 : les chocs haussiers et baissiers de la courbe des taux interne .....	104
Tableau 47 : les chocs haussiers et baissiers de la courbe des taux standard (QIS5) .....	104
Tableau 48 : : Comparaison entre le SCR action interne et standard pour la branche « auto » et « AT » .....	104

## Liste des figures :

Figure 1 : Solvabilité 2, un projet qui repose sur trois piliers.....	18
Figure 2 : vision actuelle vs vision solvency 2.....	20
Figure 3 : bilan économique.....	23
Figure 4 : Calcul du SCR à partir de la distribution des pertes à un an.....	24
Figure 5 : Approche bottom-up pour le calcul du BSCR.....	25
Figure 6 : Calcul des capitaux élémentaires.....	26
Figure 7 : les étapes de calcul du SCR.....	28
Figure 8 : comparaison des écart-types des 4 cas auto matériel.....	43
Figure 9 : l'inflation observée vs l'inflation estimé à partir du modèle.....	46
Figure 10 : les réserves par année de survénance avec inflation et sans inflation pour les 3 branches d'études.....	47
Figure 11 : les écart-types des réserves par année de survénance avec inflation et sans inflation pour les 3 branches d'études.....	48
Figure 12 : les quantiles (95%) des réserves par année de survénance avec inflation et sans inflation pour les 3 branches d'études.....	49
Figure 13 : courbe des taux zéro-coupon au 31/12/2012.....	49
Figure 14 : flux futurs actualisés pour la branche AT.....	50
Figure 15 : flux futurs actualisés pour la branche auto matériel.....	51
Figure 16 : flux futurs actualisés pour la branche auto corporel.....	51
Figure 17 : les bilans prudentiels de la branche « auto » et « AT ».....	54
Figure 18 : les facteurs de risques en assurances selon Solvency 2.....	57
Figure 19 : décomposition de SCR d'une compagnie d'assurance non vie.....	59
Figure 20 : la décomposition du SCR de la branche « auto » en sous-modules.....	69
Figure 21 : la décomposition du SCR de la branche « AT » en sous-modules.....	69
Figure 22 : les bilans prudentiels solvency 2 pour la branche « auto » et « AT » (QIS5).....	70
Figure 23 : Estimation des paramètres du modèle CIR.....	75
Figure 24 : Test d'hétéroscédasticité de White.....	76
Figure 25 : corrélogramme des résidus.....	76
Figure 26 : Test de normalité des résidus.....	77
Figure 27 : Courbe de taux CIR sans prime de risque.....	78
Figure 28 : Courbe de taux CIR.....	78
Figure 29 : Comparaison entre la courbe des taux du marché et de CIR.....	79
Figure 30 : Comparaison entre la courbe des taux du marché et de CIR (avec $r_0=3,64\%$ ).....	79
Figure 31 : Série journalière des valeurs MASI.....	80
Figure 32 : Série journalières des rendements MASI.....	81
Figure 33 : Distribution des rendements journaliers MASI.....	81
Figure 34 : Série des Valeurs MASI.....	81
Figure 35 : Série mensuelle des rendements MASI.....	82
Figure 36 : Distribution des rendements mensuels MASI.....	82
Figure 37 : distribution du Best Estimate des sinistres pour la branche auto corporel.....	88
Figure 38 : Test de normalité de la distribution du Best Estimate des sinistres pour la branche auto corporel.....	88
Figure 39 : Distribution du Best Estimate des sinistres pour la branche auto matériel.....	89

Figure 40 : Test de normalité de la distribution du Best Estimate des sinistres pour la branche auto matériel .....	89
Figure 41 : Distribution du Best Estimate des sinistres pour la branche AT .....	90
Figure 42 : Test de normalité de la distribution du Best Estimate des sinistres pour la branche AT....	90
Figure 43 : Distribution de Best Estimate à $t=1$ pour la branche « auto » .....	93
Figure 44 : Distribution de Best Estimate à $t=1$ pour la branche AT .....	93
Figure 45 : Distribution des rendements $r_{360}$ .....	95
Figure 46 : représentation graphique de la courbe des taux et des chocs.....	96
Figure 47 : schéma représentant la simulation des trajectoires des cours des actions MASI à l'aide du modèle RSLN .....	98
Figure 48 : Distribution des rendements des actions à 1 an .....	98
Figure 49 : Schéma récapitulatif des SCR interne pour la branche auto.....	99
Figure 50 : Schéma récapitulatif des SCR interne pour la branche AT.....	99
Figure 51 : Comparaison entre les SCR standard et interne pour la branche auto.....	101
Figure 52 : Comparaison entre les SCR standard et interne pour la branche AT.....	101
Figure 53 : SCR souscription en fonction de la volatilité pour la branche « auto » .....	102
Figure 54 : SCR souscription en fonction de la volatilité pour la branche « AT » .....	103

## Introduction :

Le respect des engagements d'une compagnie d'assurance envers ses assurés est le cœur du métier de l'actuaire. Il oblige une entreprise d'assurance à disposer d'un capital qui doit être déterminé de sorte à éviter une possible faillite. Ce capital, élément du passif du bilan, est la conséquence de l'inversion du cycle de production.

L'inversion du cycle de production constitue une des particularités propres à l'assurance. En comparant une compagnie d'assurance à une entreprise "standard", il semble naturel de remarquer qu'une grande différence est présente au moment du règlement de la facture. Une « entreprise standard » fournit le bien au client au moment de son règlement. À l'inverse, un assuré verse, en début d'année, à la compagnie d'assurance, une prime qui entraînera une indemnisation en cas de survenance de sinistres couverts par le contrat. Ainsi la compagnie d'assurance a un engagement à respecter durant toute la durée du contrat. Sa faillite n'est donc pas envisageable.

La directive européenne Solvency II, qui remplacera la directive européenne Solvency I à compter de 2015, définit entre autres, à travers son premier pilier, les différents éléments composant le capital que doit détenir une compagnie, et ses différentes méthodes de calcul. Un des objectifs de cette nouvelle directive européenne est d'obliger les compagnies d'assurance à disposer de fonds propres supérieurs à un capital minimum réglementaire, de sorte à limiter la probabilité de ruine à 0,5%, à horizon d'un an. Le capital que doit détenir une compagnie d'assurance peut être scindée en deux éléments qui sont les provisions techniques et l'exigence de capital réglementaire.

La directive Solvency II se place du point de vue prudentiel et précise que les provisions sont calculées, dans son référentiel, en « best estimate », c'est-à-dire comme l'espérance des flux futurs probables actualisés.

Une compagnie qui ne constituerait comme capital que la provision best estimate aura une probabilité de ruine assez élevée. Un complément, nommé marge de risque, est donc ajouté à la provision best estimate pour composer la provision technique. Celle-ci reste toutefois insuffisante pour éviter une possible faillite. Un besoin en fonds propres supérieur à un seuil nommé SCR (Solvency Capital Requirement) est donc exigé par la directive Solvency II.

Le SCR peut être déterminé à l'aide de deux méthodes différentes : une formule standard définie dans les spécifications techniques du QIS 5 (Quantitative Impact Study) et un modèle interne partiel.

Ces différentes méthodes entraînent plusieurs interrogations. Est-ce que les SCR obtenus par les deux méthodes sont équivalents ? Est-ce que les hypothèses de la formule standard sont adaptées à tous les profils de risque ? L'objectif de ce mémoire est de répondre à ces différentes questions.

Pour ce faire, dans la première partie du mémoire, Une brève mais indispensable présentation de la directive Solvency II est réalisée, les notions de provision best estimate, de marge de risque et d'exigence de capital réglementaire et ses méthodologies de calcul standard et interne partiel sont rappelées.

La deuxième partie se concentre sur le calcul de ces différents éléments cités ci avant et cela dans le but de construire les bilans économiques relatifs à chaque branche. Ces bilans économiques vont nous permettre dans la troisième partie de calculer le SCR et cela à l'aide des formules standards données par QIS 5 (Quantitative Impact Study), ce SCR global qui servira à couvrir les risque de souscription, de marché et l'opérationnel.

La quatrième partie du mémoire sera tout de même consacré au calcul du SCR relative à chaque branche mais cette fois ci d'une manière interne. Ce qui nous poussera à faire appel à la modélisation mathématique : une modélisation de passif en se concentrant sur la déduction des distributions du best estimate des sinistres et le best estimate des primes et qui permettront de calculer le SCR souscription à partir de la mesure de risque VaR( value-at-risk). Après une modélisation de l'actif sera faite pour la déduction du SCR marché et cela en utilisant le modèle de CIR pour la valorisation des obligations et le modèle *Regime Switching LogNormal* pour la valorisation des actions après une présentation des limites des modèles de Vasicek pour les obligations et Black-Sholes pour les actions.

Enfin dans la cinquième et dernière partie, une comparaison entre les SCR obtenus par la formule standard et par le modèle interne partiel et des stress test seront faits pour la déduction de la source de la provenance de ces écarts.

**Partie 1 : présentation de la réglementation solvabilité 2 en assurance non vie**

## I. Définition des branches étudiées « auto » et « AT »

### I.1. Branche auto

Le contrat assurance automobile est une assurance obligatoire qui a pour but de garantir le conducteur d'un véhicule automobile contre les conséquences des dommages matériels ou corporels causés par son véhicule à des tiers.

En fonction du type de contrat souscrit, l'assurance automobile peut également couvrir les dommages matériels pour le véhicule assuré et les dommages corporels du conducteur. Dans cette étude, nous nous intéressons à la branche RC automobile.

### I.2. Branche AT

Le Dahir n° 1-60-223 du 12 ramadan 1382 (6 février 1963) portant modification en la forme du Dahir du 25 hija 1345 (25 juin 1927) relatif à la réparation des accidents du travail, définit les accidents du travail comme ceux dont sont victimes les personnes appartenant aux catégories définies aux articles 7 à 12 du même Dahir, et qui donnent droit au profit de la victime ou de ses représentants à une indemnité à la charge de l'entreprise ou de l'employeur, si ces accidents sont survenus par le fait ou à l'occasion du travail.

Ce Dahir, institue une procédure qui devrait être suivie en cas de survenance de l'accident du travail, comportant l'information de l'employeur, la déclaration par l'employeur, son préposé ou la victime de l'accident auprès des autorités compétentes, l'enquête judiciaire menée par le juge de première instance, à l'issue de laquelle une décision statuant sur les indemnités dues par l'employeur ou son assureur au profit de la victime.

## II. Solvabilité 2, QIS 5

La réforme Solvabilité 2, qui est en chantier depuis quelques années et qui devrait entrer en vigueur fin 2012, est une réforme de la réglementation européenne du monde de l'assurance qui a pour objectif d'harmoniser et d'améliorer l'évaluation et le contrôle des risques des sociétés d'assurance de toute l'Europe.



Figure : Solvabilité 2, un projet qui repose sur trois piliers

**Pilier 1 :** Ce pilier a pour objectif de définir les normes quantitatives de calcul des provisions techniques et des fonds propres. Ces niveaux règlementaires sont définis pour les fonds propres : le MCR et le SCR :

- le MCR représente le niveau minimum de fonds propres en dessous duquel l'intervention de l'autorité de contrôle sera automatique ;
- le SCR représente le capital cible nécessaire pour absorber le choc provoqué par un risque majeur (par exemple : un sinistre exceptionnel, un choc sur les actifs...).

**Pilier 2 :** Ce deuxième pilier a pour objectif de fixer des normes qualitatives de suivi des risques en interne aux sociétés et comment l'autorité de contrôle doit exercer ses pouvoirs de surveillance dans ce contexte.

**Pilier 3 :** Le troisième pilier a pour objectif de définir l'ensemble des informations détaillées auquel le public aura accès, d'une part, et auquel les autorités de contrôle pourront avoir accès pour exercer leur pouvoir de surveillance, d'autre part.

Au niveau quantitatif qui nous intéressera dans ce mémoire, la grande révolution apportée par Solvabilité 2 et que nous étudierons dans les chapitres suivants réside dans le fait que le calcul des provisions techniques et des exigences de fonds propres sont effectués en tenant compte des risques spécifiques de chaque assureur. En particulier, Solvabilité 2 prend en compte le risque d'investissement, ce que ne faisait pas Solvabilité 1.

La directive cadre qui définit les grands principes de Solvabilité 2 est entrée en vigueur en 2009. Actuellement nous nous trouvons dans la phase de définition de la façon dont ces grands principes seront mis en œuvre.

En particulier, le CEIOPS travaille, au niveau du pilier 1, à définir les méthodes et les paramètres (appelés spécifications techniques) qui seront utilisés pour calculer les différents postes du bilan selon Solvabilité 2 et les exigences en matières de fonds propres. De façon à tester ses avancées dans ce domaine, le CEIOPS lance des études quantitatives d'impact (QIS pour « Quantitative Impact Studies ») en demandant aux organismes d'assurance européens d'appliquer à leur propre cas les dernières spécifications techniques qu'il publie à l'occasion de ces QIS. Les résultats obtenus permettent alors au CEIOPS de mesurer les impacts quantitatifs « grandeur nature » et d'affiner encore les règles et les paramètres de calcul qui deviendront définitifs fin 2012.

Le QIS 5 constitue la dernière de ces études d'impact. Celle-ci a débuté en août 2010 et doit s'achever en octobre-novembre 2010, les résultats quantitatifs obtenus par les assureurs étant envoyés aux organismes de contrôle fin octobre pour les entreprises solo et mi-novembre pour les groupes.

## II.1. L'impact de la directive Solvabilité 2

La mise en œuvre du nouveau cadre prudentiel imposé par Solvabilité 2 a des conséquences importantes à plusieurs niveaux :

- technique : recours plus systématique aux modèles stochastiques de provisionnement, analyse prospective des risques, prise en compte explicite des risques financiers ;
- organisationnel : mise en place d'un système de gestion des risques, réforme de la gouvernance, relations avec les tiers (publication d'informations) ;

- pilotage des risques : nouvelle prise en compte de la réassurance, coût du capital modifié du fait d'une mesure différente du capital réglementaire (SCR) ; impact potentiel sur la sélection de portefeuille. L'impact financier (associé aux risques d'actifs) est également un élément important à considérer (40 % de l'exigence de marge S2 en non-vie).

## II.2. Problématique des fonds propres nécessaires

Solvabilité II est une réforme réglementaire européenne du monde de l'assurance. Dans la lignée de Bâle II, son objectif est de mieux adapter les fonds propres exigés des compagnies d'assurances et de réassurance avec les risques que celles-ci encourent dans leur activité.

Le changement radical d'approche amené par Solvabilité 2 risque de bouleverser la façon dont les assureurs vont construire leur fond propre.

En effet, le calcul du SCR est d'une importance primordiale car il est le seul à être fondé sur l'exposition aux risques, en incorporant tous les risques liés à l'activité de la compagnie, c'est-à-dire principalement : le risque de souscription, le risque de crédit, le risque opérationnel, le risque de liquidité et le risque de marché. Par conséquent, une compagnie qui ne serait pas en mesure de démontrer que son niveau de fonds propres est suffisant pour couvrir ces risques devra soumettre à son autorité de contrôle pour approbation un plan précisant comment et quand elle pourra à nouveau respecter ces critères.

## II.3. Bilan prudentiel en assurance non vie :

Nous allons présenter dans ce paragraphe les deux éléments les plus importants qui composent le bilan prudentiel selon solvabilité 2 à savoir les provisions techniques (Best Estimate + Marge pour risque) et les exigences quantitatives (SCR). Pour cela nous nous sommes basés sur les dernières spécifications techniques de QIS 5. Mais avant cela nous allons mettre en lumière les spécificités du nouveau bilan prudentiel et les évolutions par rapport à l'ancien.

Pour bien comprendre le changement de philosophie que propose le futur environnement prudentiel, il est éclairant de comparer le bilan selon la nouvelle norme solvabilité 2 avec celui de solvabilité 1 encore actuellement en vigueur :

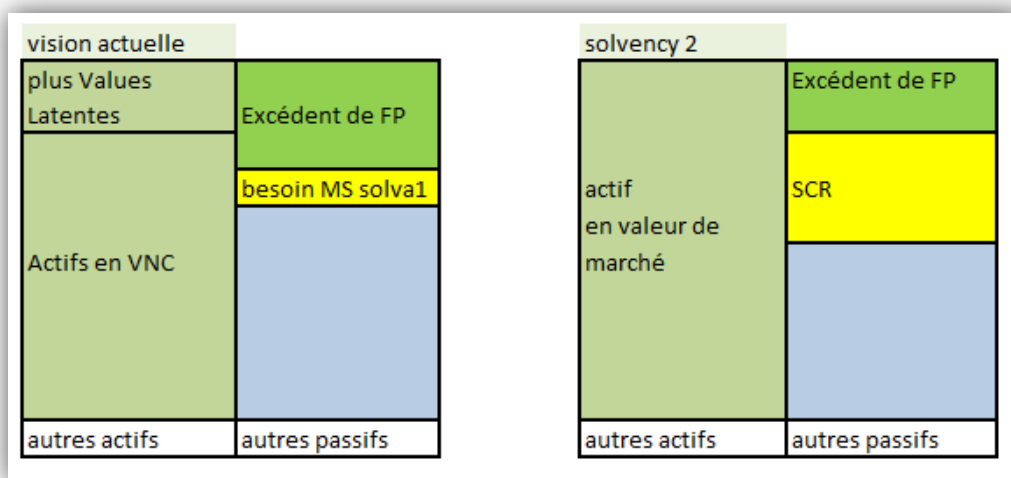


Figure : vision actuelle vs vision solvency 2

On peut constater que dans Solvabilité 2, on abandonne complètement la vision comptable qui existe dans Solvabilité 1. Sous Solvabilité 2, les actifs sont uniquement évalués en valeur de marché. De même, les provisions techniques y sont évaluées selon une approche économique. Les provisions techniques sont en fait calculées comme la somme de deux composantes :

- Le Best Estimate de la valeur des engagements d'assurance,
- Une marge pour risque.

Par rapport au régime Solvabilité 1, au sein duquel il peut y avoir de fortes différences au niveau des méthodes de calcul des provisions techniques utilisées par les différents assureurs en raison du flou existant sur les règles imposées dans ce domaine, la vision économique des provisions techniques dans Solvabilité 2 est sensée permettre une meilleure harmonisation.

Enfin, concernant le niveau minimal de capital que l'assureur doit détenir en plus des provisions techniques pour couvrir ses risques (le matelas de sécurité en cas d'événement exceptionnel), là aussi l'approche Solvabilité 2 rompt radicalement avec l'approche Solvabilité 1.

Sous Solvabilité 1, l'exigence de marge de solvabilité est calculée de façon simpliste et forfaitaire.

Au contraire Solvabilité 2, introduit avec le SCR (le capital de solvabilité requis) une approche qui vise à s'adapter au profil de risque spécifique de chaque société d'assurance. Ainsi, le SCR est calculé via l'estimation de l'impact sur les fonds propres de la survenance possible de chacun des risques auxquels la société est effectivement soumise.

### III. Le best estimate et le cas particulier de l'assurance non vie

Dans cette partie nous allons définir la notion de Best Estimate et nous verrons ce que les spécificités de l'assurance non vie impliquent pour son calcul.

#### III.1. Définition selon la directive cadre

L'article 76 de la Directive Solvabilité 2 précise :

*« La valeur des provisions techniques correspond au montant actuel que les entreprises d'assurance et de réassurance devraient payer si elles transféraient sur le champ leurs engagements d'assurance et de réassurance à une autre entreprise d'assurance ou de réassurance. »*

De manière générale les provisions techniques sont constituées de la somme du *best estimate* (vision en espérance) et d'une marge pour risque.

Ainsi, la Directive Solvabilité 2 (art. 77) et l'EIOPA (cf. CP n°26 et TS.V.2.2 des spécifications techniques du QIS5) retiennent comme définition du *best estimate* :

*« La moyenne pondérée en fonction de leur probabilité des futurs flux de trésorerie compte tenu de la valeur temporelle de l'argent, laquelle est estimée sur la base de la courbe des taux sans risque pertinente. »*

La directive européenne stipule que le *best estimate* doit être calculé brut de réassurance, en contrepartie un actif de réassurance, tenant compte des probabilités de défaut du réassureur est reconnu à l'actif (art. 77-2 et art. 81).

Sous forme mathématique, cela peut s'écrire :

$$BE = \sum_{i=1}^n \frac{F_i}{(1 + r_i)^i}$$

### III.2. Particularité du best estimate en assurance non vie

En non vie le best estimate total correspond à la somme de deux best estimate : L'évaluation du *best estimate* des provisions pour sinistres à payer (sinistres déjà survenus) et celles des provisions pour primes non acquises qui doivent être effectués séparément (*best estimate* de sinistralité et *best estimate* de primes).

#### III.2.1. Best estimate des provisions pour sinistres à payer :

La provision *best estimate* pour sinistres à payer est l'actualisation des flux futurs engendrés par les sinistres survenus avant la date d'inventaire (31/12/N), mais non encore réglés. Ces flux comprennent donc les prestations et les frais liés à ces prestations.

#### III.2.2. Best estimate pour primes :

La provision des primes correspond à l'incertitude sur la charge ultime des sinistres non encore survenus qui seront financés par les primes émises non acquises à l'inventaire, c'est-à-dire, l'actualisation des flux entrants et sortants résultant d'une nouvelle année d'activité (dans le cadre des contrats annuels renouvelés dès le 01/01/N+1). Ces flux comprennent donc les cotisations qui seront reçues en N+1, les prestations qui seront versées dans les années futures au titre des sinistres survenus en N+1, ainsi que les frais engendrés par ces cotisations et prestations. La provision *best estimate* pour primes est négative si le contrat est rentable.

#### III.2.3. La marge pour risque

Comme indiqué *supra*, Les provisions techniques sont constituées de la somme du *best estimate* et, le cas échéant, d'une marge pour risque.

L'article 77-3 de la directive Solvabilité 2 indique que :

« *La marge de risque est calculée de manière à garantir que la valeur des provisions techniques est équivalente au montant que les entreprises d'assurance et de réassurance demanderaient pour reprendre et honorer les engagements d'assurance et de réassurance* ».

Elle est calculée séparément du *best estimate* des flux de trésorerie.

En effet, l'article 77-4 de la directive Solvabilité 2 dispose que : « *Les entreprises d'assurance et de réassurance calculent la marge de risque en déterminant le cout que représente la mobilisation d'un montant de fonds propres éligibles égal au capital de solvabilité requis nécessaire pour faire face aux engagements d'assurance et de réassurance pendant toute la durée de ceux-ci* »

En théorie, la RM est calculée globalement à partir du coût d'immobilisation des fonds propres éligibles nécessaires pour atteindre le SCR (cf. TP.5.3):

$$RM = 6\% \sum_{t>0} \frac{SCR_t}{(1+r_t)^t}$$

-RM désigne la marge pour risque ;

-r désigne le taux d'intérêt de maturité t (courbe fournie par l'EIOPA) ;

-SCRt désigne le SCR pour l'année t ;

-6% est le taux de coût du capital.

Les SCR à considérer retiennent comme risque :

-les risques de souscription selon les activités transférées ;

-le risque opérationnel ;

## IV. SCR « Solvency Capital Requirement »

Le SCR correspond au capital économique de Solvabilité 2. C'est le montant de fonds propres dont doit disposer la compagnie pour être considérée par le régulateur comme suffisamment solide pour garantir sa solvabilité. De manière à pouvoir le définir, nous allons d'abord introduire le concept de bilan économique.

### IV.1. Bilan économique

Solvabilité 2 repose sur une vision économique. A chaque date  $t$ , on peut définir le bilan économique de la compagnie d'assurance de la façon suivante :

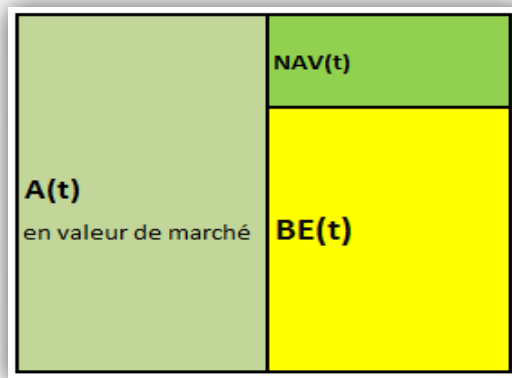


Figure : bilan économique

Avec les notations suivantes :

$A_t$  : l'actif de l'assureur en valeur de marché.

$BE_t$  : le Best Estimate soit la valeur économique des passifs.

$NAV_t$  (Net Asset Value) : les fonds propres économiques qui sont définis en utilisant l'équation d'équilibre du bilan :  $NAV_t = A_t - BE_t$

La valeur de chacun de ces postes du bilan correspond à l'espérance sous la probabilité risque neutre des flux futurs correspondants actualisés.

Ainsi, tout comme le Best Estimate correspond à la valeur actuelle probable des flux générés par les passifs, les fonds propres sont définis comme la valeur actuelle probable des résultats futurs :

$$FP = E\left(\sum_{i \geq 1} \frac{R_i}{(1+r_i)^i}\right)$$

Avec  $r_i$  : le taux d'actualisation et  $F_i$  : le flux  $i$

### IV.2. Définition

Le SCR est le montant de fonds propres économiques dont doit disposer la compagnie d'assurance pour être sûr à 99,5% de ne pas être ruiné dans 1 an. Autrement dit, il s'agit des fonds propres nécessaires à la compagnie pour absorber les pertes sur un horizon d'un an et ce pour un niveau de confiance de 99,5%.

Mathématiquement, on peut définir le SCR comme le montant de fonds propre minimal dont doit disposer la compagnie pour satisfaire la contrainte :

$$P(NAV_1 < 0) \leq 0,05$$

Où  $P$  est la probabilité du monde réel.

On peut montrer que :

$$SCR = NAV_0 - P(0,1) * q_{0,5\%}NAV_1$$

Où  $NAV_0$  : fonds propres économiques aujourd'hui en  $t=0$  (déterministe)

$NAV_1$  : fonds propres économiques en  $t=1$  (variable aléatoire).

$P(0,1)$  : est le prix d'un zéro-coupon 1 an (qui joue le rôle de facteur d'actualisation ici).

$q_{0,5\%}NAV_1$  : le quantile 0,5% de la distribution des fonds propres économiques.

De sorte que le SCR peut être vu comme la variation de la NAV qui correspond à la pire possible sur un an au seuil de risque 0,5% ou bien la VaR (Value at Risk) à 99,5% de la perte en fonds propres économiques à horizon d'un an :

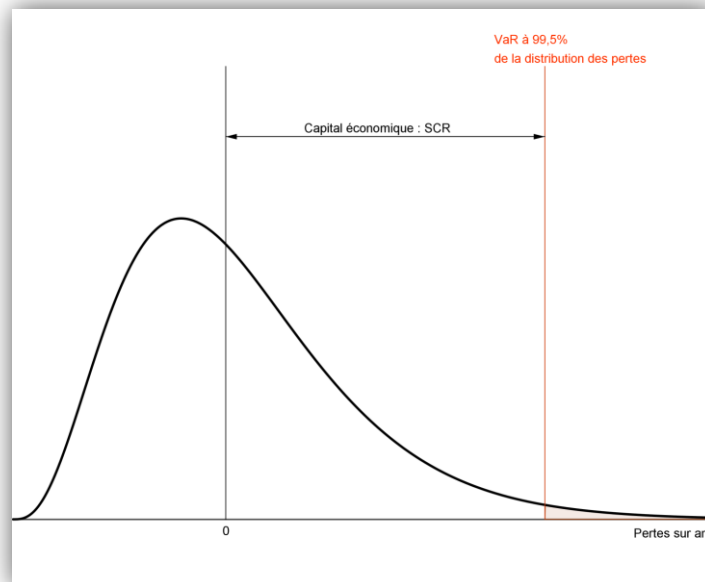


Figure : Calcul du SCR à partir de la distribution des pertes à un an

### IV.3. Méthode de calcul du SCR

#### IV.3.1. Formules standard

Selon les spécifications techniques du QIS 5 qui décrivent la méthode de la formule standard, le SCR est basé sur la formule suivante :

$$SCR = BSCR - Adj. + SCR_{op}$$

Où :

- $BSCR$  : SCR de base.
- $Adj.$  : Ajustement au titre des propriétés d'absorption du risque des futures PB et des impôts différés.
- $SCR_{op}$  : exigence de capital au titre du risque opérationnel.



$$CR = \Delta NAV = NAV_0 - NAV_{0+} = A_0 - BE_0 - (A_{0+} - BE_{0+})$$

Où :

- $A_0$  : valeur de marché de l'actif à la date d'évaluation.

- $BE_0$  : Best Estimate calculé à la date d'évaluation (cas central).

- $A_{0+}$  : valeur de marché de l'actif après un choc instantané sur le facteur de risque R au niveau de risque 0,5%.

- $BE_{0+}$  : Best Estimate calculé après choc instantané sur le facteur de risque R au niveau de risque 0,5%.

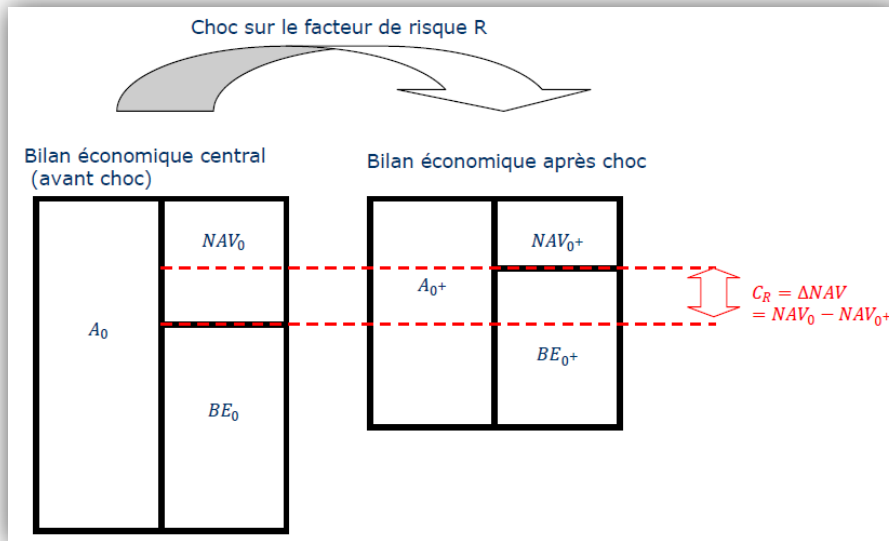


Figure : Calcul des capitaux élémentaires

### 3) Agrégation des capitaux élémentaires.

Chaque exigence de capital  $CR$  au titre d'un risque élémentaire R est calculée au niveau de risque 0,5%. Mais à ce niveau de risque 0,5%, les risques élémentaires ne surviendront « jamais » simultanément chacun selon un choc correspondant au niveau de risque de 0,5%.

Pour tenir compte de cela, on ne somme pas directement tous les capitaux élémentaires, mais on les agrège via des matrices de corrélation qui sont représentatives du niveau de diversification entre les différents risques élémentaires.

Si on note  $C_{Ri}$  le capital requis au titre du risque  $i$  et si on note  $C$  le capital requis global, résultat de l'agrégation des  $C_{Ri}$ , on a :

$$C = \sqrt{\sum_{i,j} \rho_{i,j} * C_{Ri} * C_{Rj}} \leq \sum_i C_{Ri}$$

Où  $\rho_{i,j}$  correspond à la corrélation entre les risques  $i$  et  $j$ .

D'où un bénéfice de diversification.

Ainsi par exemple, si on regarde uniquement le module de marché en ne considérant que les risques action, de taux et de spread, et si on suppose que la compagnie est plus sensible à la baisse qu'à la hausse des taux, on a d'après les spécifications du QIS 5 :

$$SCR_{market} = \sqrt{(Mkt_{int} \quad Mkt_{eq} \quad Mkt_{sp}) \begin{pmatrix} 1 & 0,5 & 0,5 \\ 0,5 & 1 & 0,75 \\ 0,5 & 0,75 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Mkt_{int} \\ Mkt_{eq} \\ Mkt_{sp} \end{pmatrix}}$$

### IV.3.2. L'approche par modèle interne

D'aucuns trouvent la formule standard imparfaite, à cause de son origine mathématique et la forte hypothèse de normalité dont elle se base. La seule solution alternative possible consiste en l'adoption d'un modèle interne (partiel ou complet). Or, malgré son imperfection, certaines sociétés envisagent d'opter pour la formule standard pour la principale raison qu'elles trouvent le recours au modèle interne coûteux et complexe. Donc, l'objectif de cette partie, est de définir le concept du modèle interne et de lister les différentes étapes de sa mise en œuvre.

#### 1) Objectif :

L'objectif commun de la formule standard et d'un modèle interne est l'évaluation des besoins en capital.

La formule standard étudiée précédemment aboutissait à cet objectif sur la base de données comptable réévaluée en valeur de marché et de dispositions réglementaires. Cependant, l'aspect généraliste des hypothèses et des paramètres retenus ne tient pas compte des particularités de l'entreprise. En accord avec la directive Solvency 2, un modèle interne a pour objectif de déterminer l'exigence minimale en éléments admis en fonds propres pour faire face avec une probabilité de 99.5% à une ruine à horizon un an.

#### 2) Définitions :

##### Définition 1 :

Un modèle interne de solvabilité d'une compagnie d'assurance dans le référentiel prudentiel Solvency 2 a pour objectif d'apprécier les risques inhérents aux activités de l'entreprise de manière plus fidèle. Il constitue une alternative à l'analyse par la formule standard qui est proposée par les autorités de contrôle. L'avantage d'un modèle interne réside dans la liberté laissée aux assureurs quant à sa construction.

La littérature fait état de deux types de modèles internes :

- les modèles internes partiels
- les modèles internes globaux.

Les modèles internes partiels prennent appui sur la formule standard en y apportant des modifications, par exemple sur la corrélation et la composition des modules de risque.

Les modèles internes globaux s'attachent à l'évaluation du besoin en capital d'une compagnie d'assurance sans faire appel à la formule standard. Ils sont toutefois soumis aux principes de la directive Solvency 2.

##### Définition 2 :

Dans le cadre des modèles internes le régulateur n'a pas formulé de définition du besoin en fonds propres. Néanmoins, les éléments admis en couverture doivent être suffisants pour faire face à une probabilité de ruine à un an, engendrée par l'agrégation de tous les risques supportés par l'entreprise, avec une probabilité de 99.5% comme l'impose l'univers Solvency 2.

En l'absence d'indication réglementaire concernant les éléments admis en couverture, étant donné que les modèles internes évoluent dans le référentiel Solvency 2 et que le sujet du mémoire est la comparaison entre la formule standard QIS5 et le modèle interne partiel, nous prendrons comme hypothèse que les éléments admis en couverture seront les mêmes que ceux décrits dans la partie précédente pour la formule standard.

### 3) Méthodologie :

La méthodologie de création d'un modèle interne partiel se résume en quelques étapes menant au calcul du SCR global. Les étapes sont sous formes de calcul des différents capitaux économiques relatifs à chaque risque à travers une détermination d'une distribution et d'une mesure de risque (VaR, TVaR,...) et puis une agrégation de ces capitaux sera faite à partir des corrélations données par QIS5 d'où le mot « partiel » et ce la pour déterminer un seul capital agrégé qui couvrira tous ces risques « le SCR global ».

Suite aux définitions données pour le calcul du SCR standard ou interne , seul la méthode de détermination des capitaux nécessaires aux risque de marché et de souscription qui changent .

Dans cette partie on s'intéressera au calcul pratique en suivant les étapes ci-dessous :

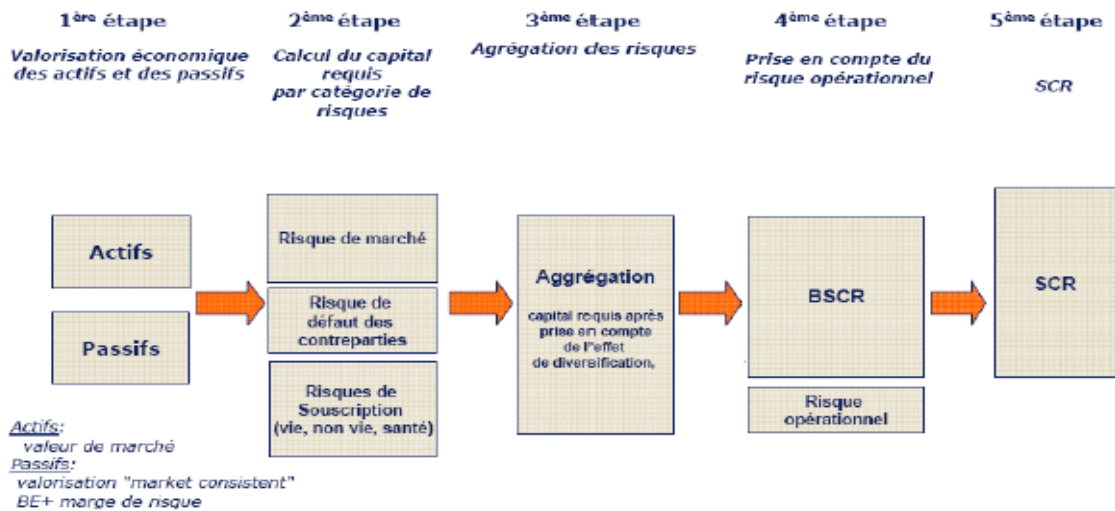


Figure : les étapes de calcul du SCR



**Partie 2 : Présentation de l'outil du calcul du best estimate et la construction du bilan économique**

## Chapitre 1 : best estimate des sinistres

Comme précisé dans le QIS5, le best estimate des provisions pour sinistres et le best estimate des provisions pour primes doivent être calculé séparément.

Dans ce qui suit nous allons présenter les méthodes de calcul ainsi que les résultats.

### I. Best estimate des sinistres des tableaux bruts

#### I.1. Définition

Le best estimate des sinistres correspond à l'incertitude sur la charge ultime des sinistres déjà survenus a la date d'inventaire c'est-à-dire « *La moyenne pondérée en fonction de leur probabilité des futurs flux de trésorerie compte tenu de la valeur temporelle de l'argent, laquelle est estimée sur la base de la courbe des taux sans risque pertinente.* »

Elles représentent la partie la plus importante du passif d'une entreprise. Pour faire face à ses engagements, l'assureur doit être en mesure d'évaluer correctement ses provisions mais aussi l'incertitude autour de ce montant.

#### I.2. Traitement de données utilisées :

Les données utilisées pour le calcul de BE des sinistres sont les tableaux triangulaires des règlements pour la branche auto matériel, corporel et accident de travail.

#### I.3. Corrections de données :

Dans un premier temps, nous serons face à une correction des montants de règlements de la branche auto matériel, des montants négatifs qui sont dus à un changement de nature entre la branche corporel et la branche matériel.

année de survenance	0	1	2	3	4	5	6	7	8
2004				-8 240 685					
2005					-407 326				
2006									
2007									
2008									
2009									
2010									
2011									
2012									

Tableau : tableaux triangulaires des règlements de la branche auto matériel non corrigé

Pour ce faire nous avons distingué quatre cas de figure :

- 1: remplacer la cellule négative par 0 et distribuer le montant négative uniformément sur les années précédentes (notés ZU).
- 2 : remplacer la cellule négative par 0 et distribuer le montant négative proportionnellement sur les années précédentes (noté ZP).
- 3 : remplacer la cellule négative par la moyenne de l'année qui suit et l'année qui précède et distribuer le montant restant uniformément sur les années précédentes (noté U).
- 4 : remplacer la cellule négative par la moyenne de l'année qui suit et l'année qui précède et distribuer le montant restant proportionnellement sur les années précédentes (noté P).

## I.4.. Méthode de calcul :

De nombreuses méthodes, déterministes (Chain Ladder, London Chain,...) et stochastique (Mack, modélisation GLM, Bootstrap), permettent d'estimer ces valeurs. Dans notre cas nous allons effectuer nos calculs à l'aide des méthodes suivantes : Mack, Bootstrap et GLM(quasipoisson), qui sont des méthodes stochastiques qui permettent de calculer les montants des réserves par année de survenance ainsi de mesurer les risques d'incertitudes relatives à ces montants.

Au suivant, nous allons faire une présentation théorique de chaque méthode :

### -Présentation des méthodes de calculs :

Comme nous l'avons indiqué, une proportion significative du passif des compagnies d'assurance est constituée par les provisions techniques.

Les méthodes présentées ici sont destinées à renseigner sur le montant statistique des réserves nécessaires, mais aussi sur l'incertitude accompagnant ces évaluations. Sur les branches considérées, les sinistres sont constatés (avec plus ou moins de retard), puis payés (là aussi avec un laps de temps plus ou moins long). Les prestations à payer pour une compagnie d'assurance couvrent alors plusieurs années de développement (dépendant des caractéristiques propres de la branche considérée). L'objet de cette partie est de présenter les principales méthodes qui permettent d'aboutir aux montants à provisionner et d'estimer des mesures de risque ainsi que la distribution :

- La première méthode proposée est stochastique, et assez répandue : **Mack Chain Ladder** : c'est la version stochastique de la méthode Chain Ladder standard et qui se base sur des hypothèses qu'on évoquera après.

C'est une méthode qui sert généralement de référence à la mise en place d'autres concepts.

- La deuxième méthode est aussi stochastique, c'est la méthode de Bootstrap qui fait appel à la simulation, c'est une méthode pratique et facile à mettre en œuvre, elle permet de donner la distribution de chaque case du tableau des incréments et par la suite une distribution des réserves en se basant sur un rééchantillonnage des résidus.

- La troisième méthode est celle de la modélisation GLM (general linear model) qui modélise la distribution de chaque cellule du tableau, en supposant son appartenance à la classe exponentielle et permet par la suite via des formules analytiques à trouver les différentes caractéristiques des réserves.

Au suivant, nous allons faire une présentation théorique de chaque méthode :

### *I.4.1. Présentation de la méthode de Mack Chain Ladder*

Le modèle de Mack est la version stochastique de la méthode de Chain Ladder ; en effet, le montant des provisions estimé est identique. Il a cependant l'avantage d'estimer une erreur de prédiction des provisions.

Ce modèle non paramétrique repose sur trois hypothèses :

H1 - L'indépendance des années d'origine :  
 $\{C_{i,0}, \dots, C_{i,n}\}$  et  $\{C_{k,0}, \dots, C_{k,n}\}$  sont indépendants pour  $i \neq k$

H2 - Il existe  $f_j$  tel que  $E(C_{i,j+1} | C_{i,1}, \dots, C_{i,n}) = f_j C_{i,j}$  pour  $0 \leq i \leq n, 0 \leq j \leq n$

H3 - Il existe  $\sigma_j$  tel que  $Var(C_{i,j+1} | C_{i,1}, \dots, C_{i,n}) = \sigma_j^2 C_{i,j}$  pour  $0 \leq i \leq n, 0 \leq j \leq n$

1) La méthodologie de travail de Chain Ladder :

Pour une branche dont les sinistres se déroulent sur **n+1** années, nous retenons les notations suivantes :

- L'année d'origine est notée **i**. Elle peut prendre différentes significations :
  - année de survenance ;
  - année de souscription ;
  - année de déclaration.
- Le délai de développement est noté **j**.
- Et **X<sub>ij</sub>**, correspondant à l'intersection de la ligne **i** et de la colonne **j**, peut représenter divers éléments :
  - paiement de sinistres ;
  - nombre de sinistres ;
  - cotisations émises ou acquises ;
  - loss ratio ;
  - etc.

En ce qui concerne notre étude, nous nous focaliserons principalement sur la PSAP pour illustrer les différentes méthodes. Le triangle de liquidation (à la date d'inventaire) « non complété » comprend généralement  $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$  valeurs et se présente sous la forme d'un tableau :

Année d'origine	Délai de règlement								
	0	1	...	j	...	n-i	...	n-1	n
0	X <sub>0,0</sub>	X <sub>0,1</sub>	...	X <sub>0,i</sub>	...	X <sub>0,n-i</sub>	...	X <sub>0,n-1</sub>	X <sub>0,n</sub>
1	X <sub>1,0</sub>	X <sub>1,1</sub>	...	X <sub>1,i</sub>	...	X <sub>1,i</sub>	...	X <sub>1,n-1</sub>	
...	...	...	...	...	...	...	...		
...	...	...	...	...	...	...	...		
i	X <sub>i,0</sub>	X <sub>i,1</sub>	...	X <sub>i,i</sub>	...				
...	...	...	...	...	...				
...	...	...	...	...	...				
n-1	X <sub>n-1,0</sub>	X <sub>n-1,1</sub>							
n	X <sub>n,0</sub>								

Tableau : tableau triangulaires des règlements

Les années calendaires se confondent avec les diagonales du triangle et chaque année calendaire donne lieu au paiement total  $\sum_{i=0}^n X_{i,n-i}$  (ex : la somme des cases en bleu est égale au total des paiements de l'année calendaire **1**). A partir du triangle des incréments, il est possible de constituer un triangle des montants cumulés. Les relations ci-dessous établissent les liens entre les deux représentations :

- $C_{i,j} = \sum_{k=0}^j X_{i,k}$  permet de passer du triangle des incréments au triangle des montants cumulés.
- $X_{i,0} = C_{i,0}$  et  $X_{ij} = C_{i,j} - C_{i,j-1}$  permettent d'effectuer le passage inverse.

	Délai de règlement									
	0	1	...	j	...	n-i	...	n-1	n	
0	$C_{0,0}$	$C_{0,1}$	...	$C_{0,i}$	...	$C_{0,n-i}$	...	$C_{0,n-1}$	$C_{0,n}$	
1	$C_{1,0}$	$C_{1,1}$	...	$C_{1,i}$	...	$C_{1,n-i}$	...	$C_{1,n-1}$		
...	...	...	...	...	...	...	...			
...	...	...	...	...	...	...	...			
i	$C_{i,0}$	$C_{i,1}$	...	$C_{i,i}$	...					
...	...	...	...	...						
...	...	...	...							
n-1	$C_{n-1,0}$	$C_{n-1,1}$								
n	$C_{n,0}$									

Tableau : tableau triangulaires des règlements cumulés

2) Problématique :

Il est nécessaire pour une compagnie d'assurance d'avoir suffisamment de réserves, à la fin de l'année n afin de pouvoir payer l'ensemble des sinistres survenus pendant cette même année. Le calcul des réserves consiste alors à prévoir le montant total des sinistres afin de provisionner les paiements non encore effectués. L'objectif est donc de compléter le rectangle ci-dessus à partir des informations qu'il contient à l'origine. Plus précisément, il s'agit d'obtenir les résultats suivants :

- les paiements ultérieurs à la date d'inventaire :  $C_{i,j}$  avec  $i + j > n$ 
  - le montant de réserve pour chaque année **i** :  $R_i = C_{i,n} - C_{i,n-1}$
- le montant total de la provision à constituer :  $R = \sum_{i=1}^n R_i$ 
  - les cash-flows futurs de paiement au cours de l'année **n+k** au titre des années **0** à **n**, soit  $\sum_{i+j=n+k} X_{ij}$

Année d'origine	Délai de règlement									provisions	
	0	1	...	j	...	n-i	...	n-1	n		
0	$C_{0,0}$	$C_{0,1}$	...	$C_{0,i}$	...	$C_{0,n-i}$	...	$C_{0,n-1}$	$C_{0,n}$	$R_0$	
1	$C_{1,0}$	$C_{1,1}$	...	$C_{1,i}$	...	$C_{1,n-i}$	...	$C_{1,n-1}$	$C_{1,n}$	$R_1$	
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	
i	$C_{i,0}$	$C_{i,1}$	...	$C_{i,i}$	...	$C_{i,n-i}$	...	$C_{i,n-1}$	$C_{i,n}$	$R_i$	
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	
n-1	$C_{n-1,0}$	$C_{n-1,1}$	...	$C_{n-1,i}$	...	$C_{n-1,n-i}$	...	$C_{n-1,n-1}$	$C_{n-1,n}$	$R_{n-1}$	
n	$C_{n,0}$	$C_{n,1}$	...	$C_{n,i}$	...	$C_{n,n-i}$	...	$C_{n,n-1}$	$C_{n,n}$	$R_n$	
										total	R

Tableau : tableau des réserves

3) Présentation de Chain Ladder standard :

C'est la méthode déterministe la plus répandue et la plus connue. Elle est fondée sur l'utilisation de link-ratios  $f_k$

La méthode standard de **Chain Ladder** consiste à supposer que les  $(C_{ij})$  sont liés par un modèle de type **AR(1)** de la forme  $C_{i,j} = f_k \cdot C_{i,j-1}$ . Le facteur de développement commun  $f_j$  est estimé par :

$$\hat{f}_j = \frac{\sum_{i=1}^{n-j+1} C_{i,j}}{\sum_{i=1}^{n-j+1} C_{i,j-1}}, \forall j \in \{2, \dots, n\}$$

Une fois ces facteurs de développement calculés, il est possible de compléter les valeurs du triangle inférieur :

Pour  $i + j > n$ ,

$$\hat{C}_{ij} = C_{i,n-i} \cdot \prod_{k=n-i}^{j-i} \hat{f}_k \quad \hat{R}_i = \hat{C}_{i,n} - C_{i,n-i} \quad R = \sum_{i=1}^n R_i$$

Année d'origine	Délai de règlement								
	0	1	...	j	...	...	...	n-1	n
0	$C_{0,0}$	$C_{0,1}$	...	$C_{0,i}$	...	...	...	$C_{0,n-1}$	$C_{0,n}$
1	$C_{1,0}$	$C_{1,1}$	...	$C_{1,i}$	...	...	...	$C_{1,n-1}$	
...	...	...	...	...	...	...	...		
...	...	...	...	...	...	...	...		
i	$C_{i,0}$	$C_{i,1}$	...	$C_{i,i}$	...				
...	...	...	...	...					
...	...	...	...						
n-1	$C_{n-1,0}$	$C_{n-1,1}$							
n	$C_{n,0}$								

Tableau : tableau triangulaires et facteurs de développement

## 4) Vérification des hypothèses de la méthode de Mack :

**Hypothèse H1 : l'indépendance entre les années de survenances.**

Pour tester l'hypothèse H1, on procède par un test non paramétrique se basant sur le D.triangle et les éléments diagonaux. En effet, ce test consiste à calculer la médiane pour chaque colonne du D.triangle.

Notons par  $A_j$  le vecteur qui regroupe les éléments de la  $J^{\text{ème}}$  diagonale du D.triangle pour  $j=0, \dots, n$ .

Il faut ensuite compter le nombre des éléments du vecteur  $A_j$  supérieurs à la médiane déjà calculée ainsi que le nombre des éléments du vecteur  $A_j$  inférieurs à la médiane. On les notes respectivement par  $G_j$  et  $P_j$ .

On note par  $Z_j = \min(G_j, P_j)$  et on calcule l'espérance et la variance de  $Z_j$  par les formules suivantes (sans démonstration) :

$$E(Z) = \frac{n}{2} - C_{n-1}^m \frac{n}{2^n}$$

$$V(Z) = \frac{n(n-1)}{4} - C_{n-1}^m \frac{n(n-1)}{2^n} + E(Z) - E(Z)^2$$

Avec  $n=G+P$

Prenons  $Z$  la somme des  $Z_j$  pour  $j=1, \dots, n$ . Donc l'espérance de  $Z$  est la somme des espérances des  $Z_j$  et la variance de  $Z$  est, sous l'hypothèse d'indépendance, égale à la somme des variances des  $Z_j$ .

On suppose que  $Z$  suit une distribution normale et on accepte l'hypothèse au seuil 5% si  $Z$  appartient à l'intervalle de confiance au seuil 5%.

$$IC_{5\%} = \left[ E(Z) - 1,96\sqrt{Var(Z)}, E(Z) + 1,96\sqrt{Var(Z)} \right]$$

Pour toutes les branches on constate que la valeur de  $Z_j$  appartient bien aux intervalles de confiance donc on accepte l'hypothèse de la non significativité de l'effet d'une année calendaire. (Voir annexe 1)

**Hypothèse H2 : l'hypothèse de la proportionnalité entre les paiements (l'existence d'une relation linéaire)**

L'hypothèse H2 peut être vue comme une hypothèse sur une régression linéaire entre les deux séries successives  $C_j$  et  $C_{j+1}$ . Cette droite ne doit pas avoir de constante. Sa courbe doit donc passer par l'origine. Ainsi, on peut se contenter d'une vérification graphique. (voir annexe 1).

Les graphes en annexe montrent clairement l'existence d'une droite de régression qui passe par l'origine et par conséquent l'acceptation de l'hypothèse H2.

**Hypothèse H3 :**

Une fois H2 vérifiée, on procède à la vérification de H3. Pour ce faire, on a recours aux résidus normalisés  $r_{ij} = \frac{C_{i,j+1} - f_j C_{ij}}{\sqrt{C_{ij}}}$  pour  $i=0, \dots, n-j-1$ . On trace par la suite le graphe de ces résidus. Pour valider l'hypothèse, la courbe obtenue ne doit pas laisser entrevoir l'existence d'une composante déterministe et surtout une tendance. (voir annexe 1).

Les graphes font apparaître une distribution aléatoire des résidus sans aucune tendance, et par conséquent l'acceptation de l'hypothèse 3.

#### 1.4.2. Présentation de la méthode de BOOTSTRAP

La théorie du Bootstrap a été introduite par Efron (1979). Elle permet d'ajuster la distribution d'un estimateur ou d'une statistique de test en « ré échantillonnant » des données.

Elle consiste donc en un prélèvement d'échantillons avec remplacement de l'échantillon de données observées pour créer un grand nombre de jeux de « pseudo-données », qui sont compatibles avec la distribution sous-jacente.

Le Bootstrap des résidus utilise le « ré échantillonnage » des résidus calculés entre les valeurs observées et les valeurs prédites par le modèle.

Le Bootstrap peut être appliqué à partir de tout type de modèle de provisionnement. Dans la pratique, le modèle Chain Ladder est le modèle le plus utilisé.

##### 1) La méthode du Bootstrap appliquée à Chain Ladder

Le processus est très simple et se résume ainsi :

- Calcul du triangle des résidus sur les données initiales
- Tirage avec remise pour constituer des « pseudo-triangles »
- Application de la méthode de Chain Ladder sur chaque « pseudo-triangle »

Avant de présenter les différentes étapes de la méthode du Bootstrap, les hypothèses du modèle portant sur les résidus sont décrites ci-dessous :

1.  $E(r_i) = 0, \forall i = 1, \dots, n$
2.  $V(r_i) = \sigma^2, \forall i = 1, \dots, n$
3. les résidus sont indépendants et identiquement distribués.

Les différentes étapes de cette méthode développée à partir de Chain Ladder sont détaillées ci dessous :

1. Rechercher les coefficients de développement du triangle cumulé à l'aide de la méthode Chain Ladder. Pour rappel,  $C_{i,j}$  représente les paiements cumulés pour l'année de survenance  $i$  et l'année de développement  $j$ . Les facteurs de développement sont :

$$\hat{f}_j = \frac{\sum_{i=1}^{n-j+1} C_{i,j}}{\sum_{i=1}^{n-j+1} C_{i,j-1}}, \forall j \in \{2, \dots, n\}$$

2. Estimation de la partie basse du triangle :

$$\hat{C}_{i,j} = \left( \prod_{k=n-i+2}^j \hat{f}_k \right) C_{i,n-i+1}, i \in \{2, \dots, n\}, \forall j > n - i + 1$$

3. Calculer les valeurs prédites par le modèle pour la partie supérieure du triangle, en gardant seulement la diagonale (dernière année calendaire) :

$$\hat{C}_{i,j} = \frac{\hat{C}_{i,n}}{\prod_{k=j+1}^n f_k}, i \in \{1, \dots, n\}, \forall j \leq n - i + 1$$

4. Dédurre de ce triangle cumulé, le triangle des paiements incrémentaux :

$$\hat{Z}_{i,j} = \hat{C}_{i,j} - \hat{C}_{i,j-1}, i \in \{1, \dots, n\}, \forall j \leq n - i + 1$$

5. Calculer les résidus de Pearson non standardisés pour chaque montant du triangle

$$r_{ij} = \frac{Z_{i,j} - \hat{Z}_{i,j}}{\sqrt{\hat{Z}_{i,j}}}$$

6. A partir d'un ré échantillonnage aléatoire des résidus de Pearson, un nouveau du triangle des règlements non cumulés est obtenu de la façon suivante :

$$\hat{Z}_{i,j}^{(1)} = \hat{Z}_{i,j} + r_{i,j}^{(1)} \sqrt{\hat{Z}_{i,j}}, \forall j \leq n - i + 1$$

7. Appliquer la méthode de Chain Ladder sur le nouveau triangle des règlements cumulés obtenu.
8. Renouveler les étapes 6 et 7 N fois (avec N très grand).

Ainsi, nous déduisons une distribution empirique de l'estimation de la provision.

**Conclusion** : Le Bootstrap est aujourd'hui une technique fréquemment utilisée en inférence statistique. Très souple à mettre en œuvre, il constitue une alternative intéressante aux méthodes d'estimation de la variance classiques (analytiques) surtout lorsque ces dernières ne peuvent être appliquées.

### 1.4.3. Présentation de la méthode des GLM

Les méthodes GLM (Generalized linear models) sont des méthodes stochastiques pures puisque chaque élément du triangle de liquidation est considéré comme une variable aléatoire, qui est décrite par une loi de probabilité.

L'objectif des méthodes GLM est d'expliquer une variable quantitative Y par un ensemble de variables explicatives  $X_1, \dots, X_p$ . Ces variables explicatives peuvent être qualitatives ou quantitatives.

#### 1) Caractéristiques des GLM

Il y a trois éléments à choisir :

- La loi de Y qui doit appartenir à la classe exponentielle, c'est-à-dire que sa densité s'écrit sous la forme :

$$f(y, \theta, \phi) = \exp \left\{ \frac{y\theta - b(\theta)}{a(\phi)} + c(y, \phi) \right\}$$

$\phi$  est appelé paramètre de dispersion,  $\theta$  paramètre de moyenne, et  $b''(\theta)$  fonction de variance.

-Le prédicteur linéaire  $\eta_i$  pour l'individu  $i$  qui est défini comme  $\eta_i = x_i' \beta$  où  $x_i' = (1, x_{i1} \dots x_{ip})$  est le vecteur des variables exogènes pour l'individu  $i$  et  $\beta = \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_p \end{pmatrix}$  est le vecteur des paramètres de la régression.

-La fonction de lien  $g$  défini par  $g(\mu_i) = \eta_i = x_i' \beta$  où  $\mu_i = E(Y_i)$  lie le prédicteur linéaire  $\eta_i$  à la moyenne  $\mu_i$  de  $Y_i$ .

Il a été montré que :

$$-E(Y) = b'(\theta)$$

$$-Var(Y) = a(\varphi) b''(\theta)$$

## 2) Estimation des paramètres $\beta$ .

Pour déterminer  $E(Y)$ , il est indispensable d'estimer dans un premier temps les paramètres  $\beta$ . Ils sont estimés par la méthode du maximum de vraisemblance.

Par indépendance des observations, la vraisemblance s'écrit :

$$L(y_1, \dots, y_n, \beta) = \exp \left\{ \sum_{i=1}^n \frac{y_i \theta_i - b(\theta_i)}{a_i(\varphi)} + c(y_i, \varphi) \right\}$$

En dérivant la log-vraisemblance par rapport à  $\beta_j$ , les équations de vraisemblance suivantes sont obtenues :

$$\sum_{i=1}^n x_{i,j} \omega_i \frac{Y_i - b'(\theta_i)}{b''(\theta_i) g'(\mu_i)} = 0,$$

Où  $a_i(\varphi) = \frac{\varphi}{w_i}$ ,  $w_i$  est un poids connu à priori.

La démonstration des équations de vraisemblance n'est pas réalisée. Notons toutefois que pour dériver la log-vraisemblance par rapport à  $\beta_j$ , il est nécessaire de remarquer que  $\theta_i$  s'exprime en fonction de  $\mu_i$  qui s'exprime en fonction de  $\eta_i = x_i' \beta$ .

Les équations de vraisemblance ne permettent pas en général d'obtenir  $\hat{\beta}_j$  explicitement.

Dans ce cas, une résolution numérique à l'aide de l'algorithme de Newton Raphson doit être réalisée.

## 3) Qualité d'ajustement

Il s'agit d'estimer la qualité d'ajustement du modèle sur la base des différences entre observations et estimations.

Les principaux critères existants pour cet ajustement sont :

- la déviance standardisée
- la statistique du Chi-deux de Pearson

### La déviance standardisée :

Le modèle estimé est comparé au modèle dit saturé, c'est à dire le modèle possédant autant de paramètres que d'observations, et estimant donc exactement les données.

Cette comparaison est basée sur l'expression de la déviance standardisée  $\hat{D}$  qui est définie comme deux fois la différence entre la log-vraisemblance maximisée du modèle saturé et la log-vraisemblance maximisée du modèle qui nous intéresse, c'est à dire :

$$\hat{D}(y, \mu) = 2 \{ \log L(y, y) - \log L(y, \mu) \}$$

La déviance, définie par  $D(y, \mu) = \varphi \hat{D}(y, \mu)$ , permet :

- d'estimer le paramètre de dispersion  $\varphi$
- de mesurer le degré d'ajustement du modèle aux données.

En effet, la déviance standardisée suit asymptotiquement une loi de Chi-Deux à  $n - p - 1$  degrés de liberté  $\chi^2(n - p - 1)$  ce qui permet de construire un test de rejet ou d'acceptation du modèle selon que la déviance est significative ou non.

### La statistique du Chi-deux de Pearson :

La statistique du  $\chi^2$  est également utilisée pour comparer les valeurs observées  $y_i$  à leur prévision par le modèle. La statistique du Chi-deux de Pearson est définie par :

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^n \omega_i \frac{(y_i - \hat{\mu}_i)^2}{V(\hat{\mu}_i)},$$

où  $V(\mu_i) = b''(\theta_i)$

La loi de la statistique ci-dessus est asymptotiquement la même que celle de la déviance. (Admis)

### Estimation du paramètre de dispersion

Le paramètre de dispersion  $\varphi$  peut être estimé de deux façons différentes :

- la déviance  $D(y, \mu) = \varphi \hat{D}(y, \mu)$  peut être utilisée. Dans ce cas, nous avons  $\hat{\varphi} = \frac{D}{n-p-1}$ ,  $\hat{\varphi}$  étant très instable, l'estimateur suivant est utilisé :  $\tilde{\varphi} = \frac{\chi^2}{n-p-1}$ .

D'autre part, il a été montré que  $Var(Y) = \varphi b''(\theta) = \varphi V(\mu)$ .

Cette fonction  $V$  est appelée fonction de variance de la distribution.

#### 4) Choix du modèle

Lors de la réalisation d'un GLM, le choix du meilleur modèle est très important. Plusieurs méthodes permettent de sélectionner le modèle le plus adapté :

- le critère AIC (Akaike Information Criterion) :

$$AIC = -2 \times \log(L) + 2 \times k$$

où  $L$  est la vraisemblance maximisée et  $k$  est le nombre de paramètres du modèle.

Plus l'AIC est faible et meilleur est le modèle.

- Nelder a introduit la quasi-vraisemblance étendue  $q^+$  donnée par l'équation ci-dessous :

$$-2q^+(x, \mu) = \frac{1}{\phi} \sum_{i+j \leq n+1} d_{ij} + \sum_{i+j \leq n+1} \ln [2\pi\phi V(x_{ij})]$$

Avec :

$$d_{i,j} = 2 \int_{\mu_{i,j}}^{x_{i,j}} \frac{x_{i,j} - u}{V(u)} du$$

Plus la quasi-vraisemblance étendue est grande et meilleur est le modèle.  
Remarquons que maximiser la statistique  $q^+$  revient à minimiser  $-2q^+$ .

#### 5) Analyse des résidus

Avant l'application de tout modèle statistique, il est indispensable de tester les différentes hypothèses. Pour ce faire, nous procédons à l'analyse des résidus.

**Propriétés des résidus** L'analyse des résidus est réalisée sur les résidus de déviance définis de la manière suivante :

$$r_{i,j} = \text{signe}(x_{i,j} - \hat{\mu}_{i,j}) \times \sqrt{\left| x_{i,j} \times \left( \ln \left| \frac{x_{i,j}}{\hat{\mu}_{i,j}} \right| - (x_{i,j} - \hat{\mu}_{i,j}) \right) \right|}, \text{ pour } i + j \leq n$$

Les résidus normalisés sont :

$$r_{i,j}^S = \frac{r_{i,j}}{\sqrt{\hat{\phi}}}$$

Les résidus normalisés d'un modèle GLM doivent satisfaire les propriétés suivantes:  
– leurs valeurs absolues sont inférieures à 2  
– ils sont indépendants et identiquement distribués  
– ils sont distribués selon une loi normale  $N(0, \sigma^2)$  de paramètre inconnu.

Afin de tester la normalité des résidus, nous traçons le Q-Q Plot des résidus.

Dans notre cas nous allons utiliser la loi quasi poisson pour la modélisation GLM. L'analyse des résidus effectuée (voir annexe 2) montre bien que les propriétés précédentes sont bien vérifiées.

#### 1.4.4. Résultats

Dans cette partie, on s'intéresse aux résultats donnés par ces différentes méthodes appliquée sur les branches étudiées :

#### La branche Auto matériel :

- **1<sup>er</sup> cas : ZU (zéro uniforme)**

	Réserve par année de survenance		autoZU			
	Mack		bootstrap		GLM quasipoisson	
	charge ultime	reserve	charge ultime	reserve	charge ultime	reserve
2004	64 500 000	-	64 835 512	-	64 528 645	-
2005	67 100 000	184 000	66 857 272	171 001	67 083 856	183 701
2006	47 800 000	644 000	47 927 203	648 712	47 788 762	643 969
2007	59 700 000	1 280 000	59 645 460	1 297 975	59 663 435	1 277 758
2008	81 000 000	2 400 000	80 896 911	2 421 876	81 017 161	2 397 207
2009	95 000 000	4 110 000	95 459 403	4 149 592	95 007 450	4 108 520
2010	108 000 000	8 540 000	107 971 752	8 572 714	107 908 440	8 539 119
2011	148 000 000	22 700 000	147 440 756	22 604 707	148 119 376	22 685 372
2012	215 000 000	118 000 000	215 481 063	118 547 182	215 222 660	118 497 141
totale	886 100 000	157 858 000	886 515 331	158 413 761	886 339 787	158 332 787

Tableau : la charge ultime et la réserve par année de survenance calculé par les 3 méthodes pour le cas ZU

- **2<sup>ème</sup> cas : ZP (zéro proportionnel)**

Réserve par année de survenance		autoZP				
	Mack		bootstrap		GLM quasipoisson	
	charge ultime	reserve	charge ultime	reserve	charge ultime	reserve
2004	64 500 000	-	64 434 767	-	64 528 645	-
2005	67 100 000	184 000	66 667 399	191 869	67 083 856	183 701
2006	47 800 000	644 000	47 754 239	651 935	47 788 762	643 969
2007	59 700 000	1 280 000	59 846 925	1 280 361	59 663 435	1 277 758
2008	81 000 000	2 400 000	81 327 674	2 410 577	81 017 161	2 397 207
2009	95 000 000	4 110 000	94 623 523	4 109 454	95 007 450	4 108 520
2010	108 000 000	8 560 000	107 786 432	8 576 740	107 926 571	8 557 250
2011	149 000 000	23 200 000	148 536 730	23 272 761	148 651 497	23 217 493
2012	216 000 000	119 000 000	215 888 502	119 530 289	216 018 649	119 293 130
<b>totale</b>	<b>888 100 000</b>	<b>159 378 000</b>	<b>886 866 192</b>	<b>160 023 987</b>	<b>887 686 028</b>	<b>159 679 028</b>

Tableau : la charge ultime et la réserve par année de survenance calculé par les 3 méthodes pour le cas ZP

- 3<sup>ème</sup> cas : U ( moyenne uniforme)

Réserve par année de survenance		autoU				
	Mack		bootstrap		GLM quasipoisson	
	charge ultime	reserve	charge ultime	reserve	charge ultime	reserve
2004	64 500 000	-	64 730 417	-	62 996 558	-
2005	67 100 000	184 000	67 284 493	195 296	65 491 101	183 701
2006	47 800 000	644 000	48 261 029	658 691	46 654 126	643 969
2007	59 700 000	1 280 000	59 883 021	1 295 288	58 246 861	1 277 758
2008	81 000 000	2 400 000	81 744 029	2 448 681	79 093 592	2 397 207
2009	96 000 000	5 120 000	96 038 911	5 180 253	93 740 049	5 120 893
2010	109 000 000	10 000 000	109 001 720	10 000 937	106 793 334	10 021 245
2011	156 000 000	30 100 000	155 982 841	30 408 478	151 873 388	30 132 970
2012	226 000 000	129 000 000	226 295 124	129 308 760	220 232 109	128 862 673
<b>totale</b>	<b>907 100 000</b>	<b>178 728 000</b>	<b>909 221 585</b>	<b>179 496 384</b>	<b>885 121 119</b>	<b>178 640 416</b>

Tableau : la charge ultime et la réserve par année de survenance calculé par les 3 méthodes pour le cas U

- 4<sup>ème</sup> cas : P (moyenne proportionnelle)

Réserve par année de survenance		autoP				
	Mack		bootstrap		GLM quasipoisson	
	charge ultime	reserve	charge ultime	reserve	charge ultime	reserve
2004	64 500 000	-	64 499 528	-	64 528 645	-
2005	67 100 000	184 000	66 850 718	195 251	67 083 856	183 701
2006	47 800 000	644 000	47 800 828	638 170	47 788 763	643 969
2007	59 700 000	1 280 000	59 468 285	1 275 600	59 663 435	1 277 758
2008	81 000 000	2 400 000	81 372 329	2 404 663	81 017 161	2 397 207
2009	96 000 000	5 120 000	95 929 566	5 134 694	96 019 823	5 120 893
2010	110 000 000	10 200 000	109 199 710	10 186 506	109 556 713	10 187 392
2011	151 000 000	25 400 000	150 800 072	25 489 843	150 883 239	25 449 235
2012	219 000 000	123 000 000	220 181 689	123 317 724	219 395 048	122 669 529
<b>totale</b>	<b>896 100 000</b>	<b>168 228 000</b>	<b>896 102 726</b>	<b>168 642 451</b>	<b>895 936 683</b>	<b>167 929 683</b>

Tableau : la charge ultime et la réserve par année de survenance calculé par les 3 méthodes pour le cas P

- La branche Auto corporel :

Réserve par année de survenance		autocorporel				
	Mack		bootstrap		GLM quasipoisson	
	charge ultime	reserve	charge ultime	reserve	charge ultime	reserve
2004	266 000 000	-	263 793 850	-	266 027 711	-
2005	255 000 000	6 010 000	254 562 274	6 026 929	254 893 931	6 006 216
2006	244 000 000	13 800 000	242 416 530	13 741 837	243 677 833	13 845 698
2007	275 000 000	28 800 000	275 088 023	28 844 571	274 825 080	28 784 696
2008	291 000 000	55 600 000	291 589 298	55 913 312	290 596 084	55 593 079
2009	287 000 000	96 100 000	286 270 403	96 121 080	286 604 492	96 124 139
2010	249 000 000	139 000 000	248 719 052	139 660 474	248 675 434	139 417 277
2011	237 000 000	189 000 000	240 176 552	192 284 095	236 683 729	189 247 486
2012	208 000 000	199 000 000	215 048 675	206 097 212	207 545 049	198 714 543
totale	2 312 000 000	727 310 000	2 317 664 656	738 689 510	2 309 529 343	727 733 134

Tableau : la charge ultime et la réserve par année de survenance calculé par les 3 méthodes pour l'auto corporel

- **La branche AT :**

Réserve par année de survenance		AT				
	Mack		bootstrap		GLM quasipoisson	
	charge ultime	reserve	charge ultime	reserve	charge ultime	reserve
2004	105 000 000	-	105 552 744	-	104 705 335	-
2005	121 000 000	2 850 000	122 499 021	2 926 791	121 091 554	2 853 693
2006	142 000 000	8 980 000	142 507 471	9 146 362	141 726 388	8 981 601
2007	161 000 000	21 600 000	163 100 979	22 337 352	161 175 633	21 632 809
2008	213 000 000	47 700 000	214 555 980	48 328 559	213 497 898	47 714 490
2009	240 000 000	86 000 000	241 611 918	86 870 110	239 974 922	85 970 926
2010	236 000 000	127 000 000	237 347 016	128 162 167	236 287 814	127 391 683
2011	243 000 000	180 000 000	245 854 003	182 353 884	242 925 317	179 943 336
2012	263 000 000	248 000 000	266 362 408	251 983 971	262 648 093	248 262 203
totale	1 724 000 000	722 130 000	1 739 391 541	732 109 195	1 724 032 954	722 750 741

Tableau : la charge ultime et la réserve par année de survenance calculé par les 3 méthodes pour l'AT

Trois méthodes de calcul de provisions stochastiques ont été présentées. Ces dernières donnent des résultats semblables. Cependant la méthode de Bootstrap est préférée dans la suite du mémoire dans la mesure où en plus de fournir une distribution de la provision pour sinistres, elle fournit également une loi de probabilité à chaque cellule du triangle d'une manière assez simple et pratique.

**Remarque :**

Pour la branche auto, afin de comparer entre ces quatre cas et de manière à pouvoir choisir par la suite le cas le plus logique et le plus optimal, nous avons procédé à une comparaison des écart- types relatifs aux réserves de chaque cas et nous avons pris le 4<sup>ème</sup> cas vue qu'il minimise cet écart type :

bootstrap		ZP		ZU		P		U	
année	reserve	ecart type	reserve	ecart type	reserve	ecart type	reserve	ecart type	
2004	-	-	-	-	-	-	-	-	
2005	191 869	385 519	171 001	415 179	195 251	357 652	195 296	476 134	
2006	651 935	487 233	648 712	520 505	638 170	424 742	658 691	589 148	
2007	1 280 361	710 805	1 297 975	739 285	1 275 600	640 122	1 295 288	870 733	
2008	2 410 577	1 075 086	2 421 876	1 099 869	2 404 663	984 672	2 448 681	1 287 600	
2009	4 109 454	1 429 926	4 149 592	1 433 250	5 134 694	1 389 257	5 180 253	1 865 475	
2010	8 576 740	1 973 869	8 572 714	2 044 290	10 186 506	2 000 668	10 000 937	2 483 604	
2011	23 272 761	3 383 793	22 604 707	3 645 158	25 489 843	3 432 091	30 408 478	5 136 834	
2012	119 530 289	13 916 667	118 547 182	14 939 498	123 317 724	12 674 020	129 308 760	17 458 063	
totale	160 023 987	17 829 671	158 413 761	18 665 765	168 642 451	16 532 813	179 496 384	22 436 164	

Tableau : Comparaison des résultats des 4 cas de la branche auto matériel

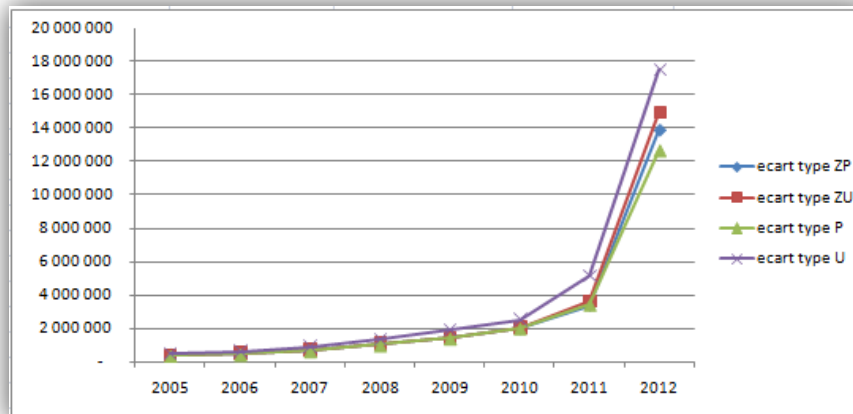


Figure : comparaison des écart-types des 4 cas auto matériel

## II. Redressement des tableaux triangulaires et prise en compte de l'inflation

### II.1. Problématique

Les méthodes présentées en première partie n'aboutissent aux provisions exactes que si les hypothèses de stabilité des cadences de règlement et de l'inflation sont respectées. Donc les redressements suivants sont à effectuer sur les tableaux triangulaire dans le cas de la non vérification de ces hypothèses :

- les charges de sinistres n'étant pas comparables d'une année à l'autre, une procédure "as if" a été réalisée. Celle-ci permet les corrections des éléments des différents sinistres suivantes : évolution de la taille du portefeuille pour obtenir un portefeuille de taille constante, correction de l'inflation pour avoir les sinistres en Dirhames constants, évolution des franchises pour comparer les sinistres avec un même seuil de franchise, changement de la politique tarifaire de la compagnie...

- les charges de sinistres ne sont pas toutes stabilisées : des sinistres tardifs peuvent encore être déclarés, des modifications d'évaluation et des règlements complémentaires des sinistres en cours de gestions peuvent intervenir. Le montant des sinistres correspond donc à la charge finale prévisible.

Cependant, la compagnie n'a pas signalé de changement de politique important, ni de modification conséquente de la taille de son portefeuille. C'est pourquoi, les données utilisées ont simplement été corrigées de l'inflation.

## II.2. L'enjeu de l'inflation

Au moment du règlement d'un sinistre, l'assureur a, auparavant, estimé les coûts de l'indemnisation : réparation, frais médicaux, etc. en tenant compte de multiples paramètres tels que le prix de la main d'œuvre, des matières premières, soins médicaux...

Or d'une année à l'autre, les prix de ces différents facteurs changent. Il est indispensable pour l'assureur de faire cas de ce point, car l'omission peut aboutir à un provisionnement insuffisant ou trop important. En effet, étant donné que les estimations des facteurs de développement (et donc in fine des réserves) se basent sur l'hypothèse que l'inflation passée est constante et qu'elle le restera dans le futur, alors un changement à ce niveau va donc nécessairement perturber les cadences futures, et les réserves finales avec. Par exemple, si un changement de jurisprudence mène à une augmentation de l'inflation, les prix futurs (et donc les réserves) seront sous-estimés, conduisant de cette manière à un sous-provisionnement.

## II.3. Méthodologie de l'intégration de l'inflation :

Afin de pouvoir travailler sur des montants en valeur réelle, et éviter ainsi les phénomènes de sur et sous-provisionnement présentés précédemment, nous allons corriger le triangle de l'inflation. Le processus est le suivant :

1. Nous travaillons sur le triangle des accroissements, pour distinguer chaque année et sa propre inflation.
2. Nous pourrions alors effectuer l'actualisation des valeurs à l'année 0 grâce aux indices d'inflation passée. Le triangle est en as if.
3. Ce n'est qu'ensuite que nous procéderons à l'estimation des provisions à l'aide de Chain-Ladder par exemple.
4. Enfin, nous rajouterons l'inflation sur les montants passés et futurs, de sorte à obtenir les montants des réserves en valeur nominale.

**Première étape :** construction du triangle des indices cumulés d'inflation passée.

En prenant comme année de base l'année 2012, nous allons calculer les indices cumulés de l'inflation comme suit

$$Indice_i = \prod_{j=2012}^i Indice_j$$

Avec  $i = 2012; 2013; \dots; 2004$  et  $Indice_{2012} = 1$

indices cumulés	0	1	2	3	4	5	6	7	8
2004	1,15309003	1,13612267	1,12506729	1,08928681	1,0674878	1,02932738	1,01918823	1,0092236	1
2005	1,13612267	1,12506729	1,08928681	1,0674878	1,02932738	1,01918823	1,0092236	1	
2006	1,12506729	1,08928681	1,0674878	1,02932738	1,01918823	1,0092236	1		
2007	1,08928681	1,0674878	1,02932738	1,01918823	1,0092236	1			
2008	1,0674878	1,02932738	1,01918823	1,0092236	1				
2009	1,02932738	1,01918823	1,0092236	1					
2010	1,01918823	1,0092236	1						
2011	1,0092236	1							
2012	1								

Tableau : Tableau des indices d'inflation correcteurs

**Deuxième étape** : pondération du triangle des accroissements des charges.

Pour modérer l'influence des années anciennes (trop éloignées de la réalité actuelle), ou bien annuler l'effet de certaines cellules porteuses de données aberrantes. Un des moyens consiste à multiplier le triangle des charges par une matrice de poids (matrice des indices cumulés)  $W = (w_{i,j})_{i \in \{2004; \dots; 2012\}, j \in \{0; \dots; 8\}}$

Concrètement, le triangle à étudier n'est plus T (ancien triangle des charges) mais WT (produit terme à terme et non matriciel), c'est-à-dire que dans les nouvelles formules s'obtiennent en remplaçant  $C_{i,j}$  par  $\tilde{C}_{i,j} = w_{i,j} \cdot C_{i,j}$ .

**Troisième étape** : estimation des provisions

Après avoir multiplié les accroissements par l'indice cumulé de l'inflation selon leur année calendaire. Nous obtenons ainsi un triangle de développement sans inflation. Ce n'est qu'ensuite que nous utilisons la méthode de Chain-Ladder pour l'estimation des provisions. L'inflation étant nulle, elle est a fortiori constante, et l'application de la méthode a donc un sens.

**Quatrième étape** : prédiction de l'inflation

La dernière étape consiste à réinjecter l'inflation dans le triangle complet. Il est donc nécessaire d'estimer les indices de l'inflation future. Plusieurs modèles ont été développés à ce sujet ; cependant cela ne constitue pas l'essentiel de cette partie, nous retiendrons ici un modèle simple du type autorégressif d'ordre 1 (AR(1)), avec des données de l'historique des indices de l'inflation depuis 1960 jusqu'à 2012. Le principe est simplement de considérer que l'indice d'inflation est, chaque année, fonction linéaire de l'indice de l'année précédente uniquement. Autrement dit, en notant  $X_t = \ln(\text{Indice}_t)$ ,  $t = 1960, \dots; 2012$

$$X_t = \mu + \phi \cdot (X_{t-1} - \mu) + \sigma \cdot \varepsilon_t$$

Où  $\varepsilon_t \rightarrow N(0,1)$  et  $\mu = E[(X_t)_t]$ . Ou encore, en travaillant sur les données centrées  $Y_t = X_t - \mu$

$$Y_t = \phi \cdot Y_{t-1} + \sigma \cdot \varepsilon_t$$

L'estimation du paramètre  $\mu$  est simple, il s'agit de la moyenne empirique, ce qui nous permet d'obtenir les données  $(Y_t)_t$ . Reste à estimer le paramètre  $\phi$ . Pour cela, une simple régression linéaire suffit.

Les résultats de l'estimation de la série sont les suivants :

$$\begin{aligned} \hat{\mu} &= 1,298739 \\ \hat{\phi} &= 0,9880 \\ \hat{\sigma} &= 0,05826 \end{aligned}$$

Graphiquement, nous obtenons :

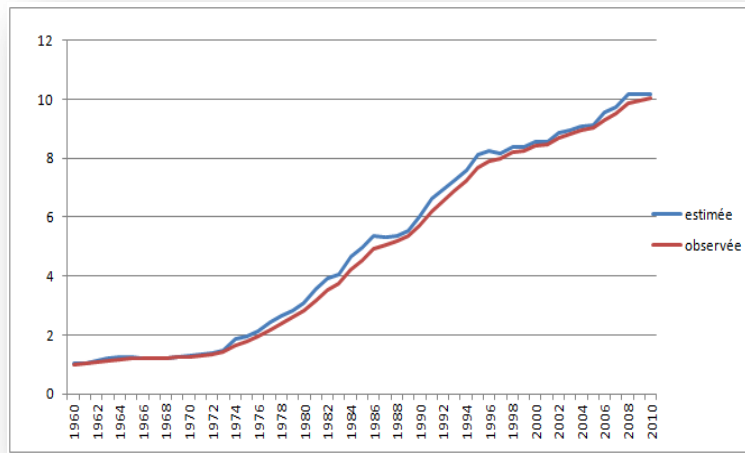


Figure : l'inflation observée vs l'inflation estimé à partir du modèle

Sur la base de ces estimations nous allons projeter les indices futurs notés

$(\hat{Indice}_i)_{i=2013; \dots; 2020}$ , calculés par la formule :  $X_t = \mu + \phi \cdot (X_{t-1} - \mu) + \sigma \cdot \varepsilon$

année	$\hat{Indice}_i$
2013	1,010252
2014	1,020611
2015	1,031074
2016	1,041645
2017	1,052324
2018	1,063114
2019	1,074013
2020	1,085024

Tableau : les indices d'inflation futurs

**Dernière étape** : Réinjection de l'inflation pour le calcul des réserves

matrice des indices à réinjecter	0	1	2	3	4	5	6	7	8
2004	1,153090	1,136123	1,125067	1,089287	1,067488	1,029327	1,019188	1,009224	1
2005	1,136123	1,125067	1,089287	1,067488	1,029327	1,019188	1,009224	1	0,989852
2006	1,125067	1,089287	1,067488	1,029327	1,019188	1,009224	1	0,989852	0,979806
2007	1,089287	1,067488	1,029327	1,019188	1,009224	1	0,989852	0,979806	0,969862
2008	1,067488	1,029327	1,019188	1,009224	1	0,989852	0,979806	0,969862	0,960020
2009	1,029327	1,019188	1,009224	1	0,989852	0,979806	0,969862	0,960020	0,950278
2010	1,019188	1,009224	1	0,989852	0,979806	0,969862	0,960020	0,950278	0,940633
2011	1,009224	1	0,989852	0,979806	0,969862	0,960020	0,950278	0,940633	0,931088
2012	1	0,989852	0,979806	0,969862	0,960020	0,950278	0,940633	0,931088	0,921639

Tableau : matrice des indices d'inflation à réinjecter

Désormais, il est possible de réinjecter les inflations passées et celles projetées, dans le triangle complet précédent (as if, dépourvu d'inflation), en le multipliant par la matrice M de termes des produits cumulés des indices présentée ci-dessus.

### III. Comparaison des résultats des tableaux tenant compte de l'inflation et des tableaux ne tenant pas compte de l'inflation :

#### III.1. Comparaison des réserves par année de survenance

AT	réserve		auto matière	réserve		auto corporel	réserve				
	année de sur	sans inflation		avec inflation	année de sur		sans inflation	avec inflation	année de sur	sans inflation	avec inflation
2004		-			-	2004		-			-
2005		2 926 791,04			195 250,64	2005		6 026 929,12			5 973 174,97
2006		9 146 362,22			638 169,68	2006		13 741 836,64			13 422 636,46
2007		22 337 351,64			1 275 599,72	2007		28 844 571,45			27 990 495,06
2008		48 328 558,81			2 404 663,26	2008		55 913 311,53			54 046 171,88
2009		86 870 109,66			5 134 694,21	2009		96 121 080,13			92 918 086,79
2010		128 162 167,22			10 186 506,44	2010		139 660 474,09			135 372 596,07
2011		182 353 883,77			25 489 842,89	2011		192 284 095,27			186 963 651,72
2012		251 983 971,01			123 317 724,12	2012		206 097 211,84			200 446 659,23
		732 109 195,38			168 642 450,95			738 689 510,07			717 133 472,18

Tableau : les réserves par année de survenance avec inflation et sans inflation pour les 3 branches d'études

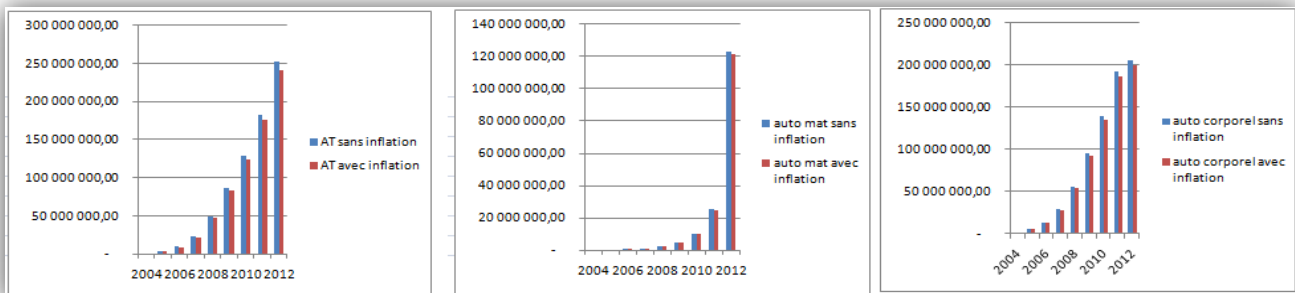


Figure : les réserves par année de survenance avec inflation et sans inflation pour les 3 branches d'études

D'après ces graphiques, on constate que les réserves qui tiennent compte de l'inflation sont inférieures que celles ne tenant pas compte de l'inflation.

### III.2. Comparaisons des écarts types par année de survenance :

AT	écart type	
	sans inflation	avec inflation
2004	-	0
2005	2 348 723,69	2412061,335
2006	3 889 833,47	3936911,718
2007	5 897 969,59	5895185,007
2008	9 575 260,68	9467587,128
2009	13 804 676,84	13635526,75
2010	19 996 901,83	19851490,62
2011	34 266 644,42	34054111,74
2012	94 709 416,13	93170918,12
	119 341 663,51	117591409,1

auto matière	écart type	
	sans inflation	avec inflation
2004	0	-
2005	357 652	357 396
2006	424 742	422 918
2007	640 122	627 191
2008	984 672	949 757
2009	1 389 257	1 333 674
2010	2 000 668	1 931 952
2011	3 432 091	3 337 366
2012	12 674 020	12 508 599
	16532813,44	16 183 494

auto corporel	écart type	
	sans inflation	avec inflation
2004	0	-
2005	3 037 175,91	2 943 919,06
2006	3 882 831,33	3 840 243,25
2007	5 648 525,30	5 626 796,05
2008	8 006 763,28	8 034 534,10
2009	11 780 984,18	11 806 239,28
2010	18 284 692,98	18 313 757,68
2011	35 891 089,15	35 686 040,68
2012	84 861 473,42	84 005 993,24
	102 895 737,06	102 371 731,27

Tableau : les écart-types des réserves par année de survenance avec inflation et sans inflation pour les 3 branches d'études

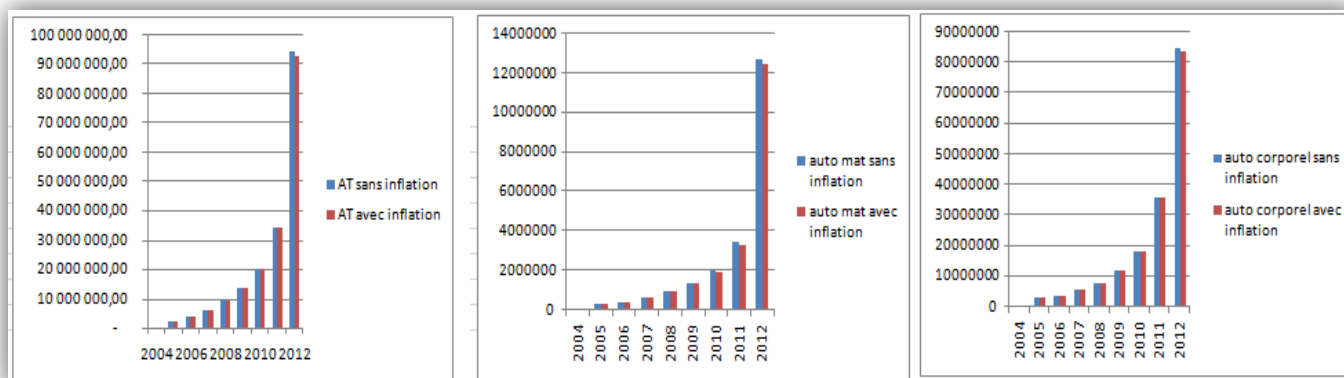


Figure : les écart-types des réserves par année de survenance avec inflation et sans inflation pour les 3 branches d'études

D'après ces graphiques, on constate que les écarts types par année de survenance sont à peu près semblables avec une légère diminution de ceux qui tiennent compte de l'inflation.

### III.3. Comparaison des quantiles d'ordre 95% par année de survenance :

AT	quantile 95%	
	sans inflation	avec inflation
2004	-	-
2005	7 014 926	7 042 978
2006	15 669 274	15 549 916
2007	32 128 812	31 762 778
2008	65 410 563	63 400 860
2009	111 604 693	108 044 209
2010	162 956 474	158 425 809
2011	242 712 573	235 247 453
2012	417 981 658	404 378 815
	933 306 874	903 713 750

auto matière	quantile 95%	
	sans inflation	avec inflation
2004	-	-
2005	849 774	851 401
2006	1 361 660	1 339 972
2007	2 347 439	2 295 488
2008	4 082 238	3 930 598
2009	7 541 136	7 242 764
2010	13 645 979	13 163 859
2011	31 138 158	30 500 135
2012	144 391 220	142 765 933
	196 921 134	192 769 615

auto corporel	quantile 95%	
	sans inflation	avec inflation
2004	-	-
2005	11 218 388	11 466 880
2006	19 973 294	19 704 349
2007	38 929 266	38 210 987
2008	70 440 769	68 511 247
2009	116 088 202	113 126 792
2010	170 077 355	165 652 607
2011	250 985 606	245 770 943
2012	345 975 416	343 267 768
	903 978 012	886 174 288

Tableau : les quantiles (95%) des réserves par année de survenance avec inflation et sans inflation pour les 3 branches d'études

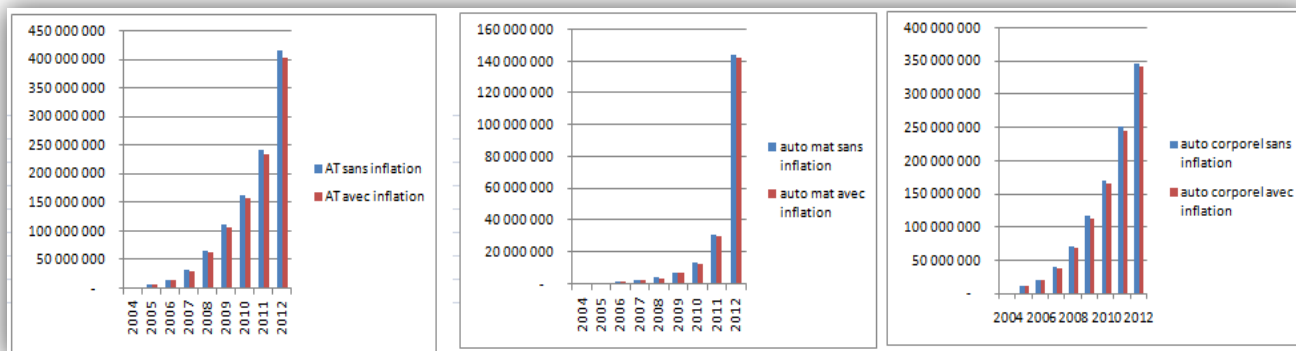


Figure : les quantiles (95%) des réserves par année de survénance avec inflation et sans inflation pour les 3 branches d'études

De même pour les quantiles d'ordre 95%, on constate que ceux qui tiennent compte de l'inflation sont inférieurs à ceux qu'en ne tiennent pas compte. Ce qui va nous pousser par la suite à travailler que sur les tableaux qui tiennent compte de l'inflation pour le calcul du best estimate des sinistres.

#### IV. Calcul du Best estimate des sinistres pour chaque branche :

A partir de la définition qui dit que le Best estimate correspond à « La moyenne pondérée en fonction de leur probabilité des **flux futurs** de trésorerie compte tenu de la valeur temporelle de l'argent, laquelle est estimée sur la base de la **courbe des taux** sans risque pertinente. »

-les **flux futurs** annuels correspondent donc aux diagonales du triangle de liquidation inférieur.

-La **courbe des taux** qui sert pour l'actualisation est la courbe des taux zéro coupon produite par la banque centrale du Maroc.

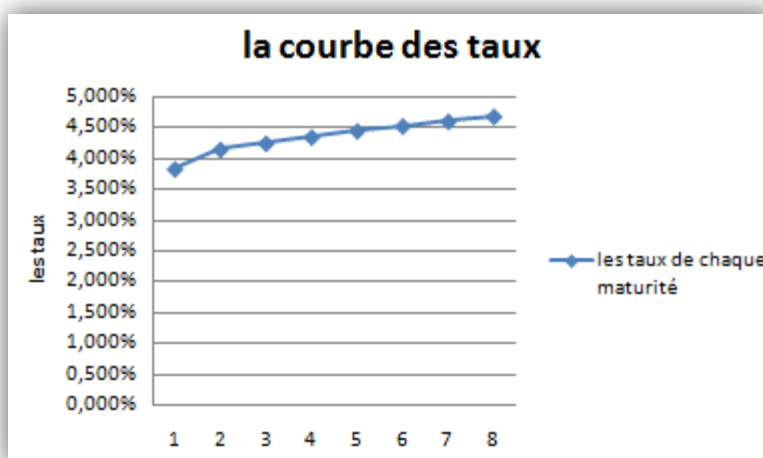


Figure : courbe des taux zéro-coupon au 31/12/2012

## IV.1. Application numérique sur les branches d'études :

Les tableaux suivants représentent le résultat final des best estimate des sinistres

### Branche AT :

	flux futur	maturité	courbe des taux	1+taux	flux actualisé
2012	213 621 105			1	213 621 105,08
2013	213 755 362	1	3,827%	1,03827	205 876 469,24
2014	171 228 785	2	4,141%	1,04141	157 882 243,41
2015	126 900 559	3	4,240%	1,0424	112 036 705,18
2016	85 209 614	4	4,340%	1,0434	71 892 778,90
2017	53 480 879	5	4,439%	1,04439	43 041 263,60
2018	32 714 314	6	4,516%	1,04516	25 098 116,92
2019	15 378 642	7	4,593%	1,04593	11 230 514,61
2020	5 836 168	8	4,670%	1,0467	4 050 885,61
	<b>BE des sinistres</b>		<b>631 108 977,46</b>		

Tableau : L'actualisation des flux futurs et le calcul du Best Estimate des sinistres AT

Après avoir calculé les flux futur, somme des diagonales du triangle inférieur, et après leur actualisation, on trouve un best estimate des sinistres pour la branche AT d'ordre de 631 108 977,46.

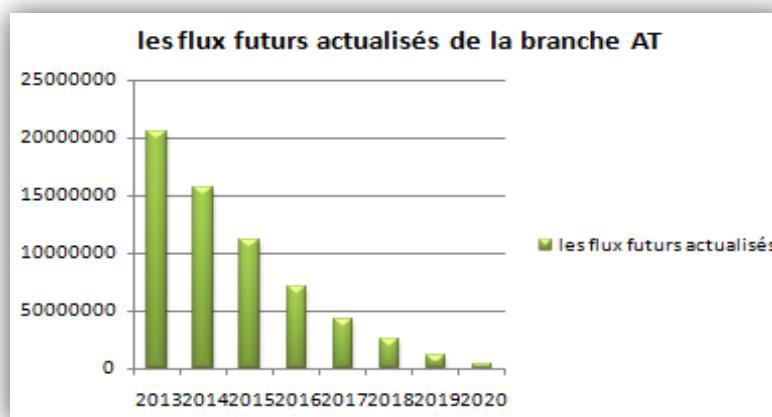


Figure : flux futurs actualisés pour la branche AT

### Branche auto matériel :

	flux futur	maturité	courbe des taux	1+taux	flux actualisé
2012	171 486 490			1	171 486 490,10
2013	105 990 003	1	3,827%	1,03827	102 083 276,03
2014	27 492 254	2	4,141%	1,04141	25 349 351,47
2015	15 046 295	3	4,240%	1,0424	13 283 923,18
2016	8 625 964	4	4,340%	1,0434	7 277 870,40
2017	4 422 766	5	4,439%	1,04439	3 559 429,53
2018	3 685 309	6	4,516%	1,04516	2 827 335,01
2019	2 738 962	7	4,593%	1,04593	2 000 173,22
2020	640 899	8	4,670%	1,0467	444 848,20
	<b>BE des sinistres</b>		<b>156 826 207,04</b>		

Tableau : L'actualisation des flux futurs et le calcul du Best Estimate des sinistres auto matériel.

Après avoir calculé les flux futur, somme des diagonales du triangle inférieur, et après leur actualisation, on trouve un best estimate des sinistres pour la branche auto matériel d'ordre de 156 826 207,04.

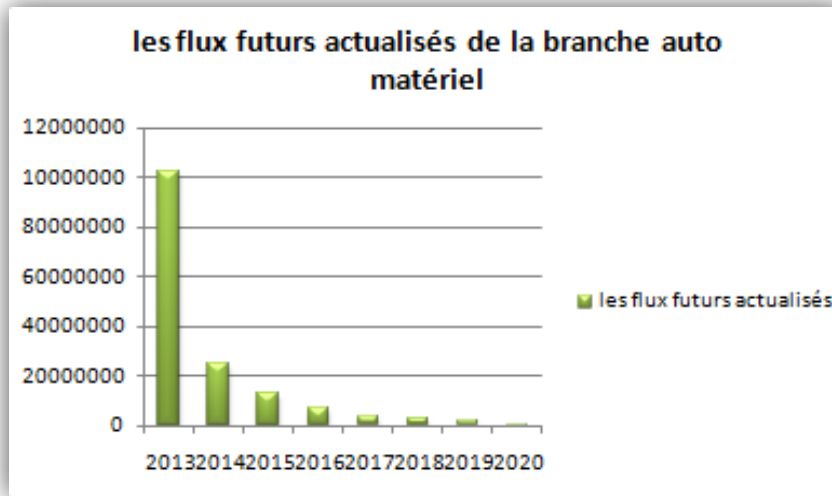


Figure : flus futurs actualisés pour la branche auto matériel

**Branche auto corporel :**

	flux futur	maturité	courbe des taux	1+taux	flux actualisé
2012	259 671 761			1	259 671 761,09
2013	237 097 989	1	3,827%	1,03827	228 358 701,33
2014	190 447 500	2	4,141%	1,04141	175 602 942,55
2015	130 124 182	3	4,240%	1,0424	114 882 745,18
2016	76 811 426	4	4,340%	1,0434	64 807 086,80
2017	43 009 153	5	4,439%	1,04439	34 613 647,81
2018	22 833 958	6	4,516%	1,04516	17 517 999,60
2019	12 073 455	7	4,593%	1,04593	8 816 845,13
2020	4 735 809	8	4,670%	1,0467	3 287 126,35
	<b>BE des sinistres</b>		<b>647 887 094,76</b>		

Tableau : L'actualisation des flux futurs et le calcul du Best Estimate des sinistres auto corporel

De la même manière pour cette branche auto corporel, on a trouvé un best estimate de l'ordre de 647 887 094,76.

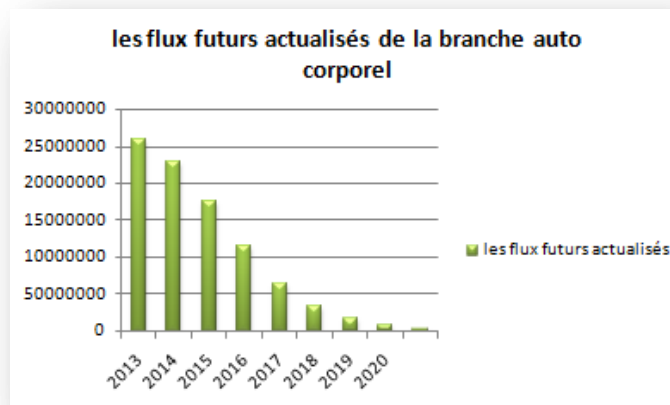


Figure : flus futurs actualisés pour la branche auto corporel

## IV.2. Conclusion

Les résultats finaux des Best estimate des sinistres pour les branches « auto » et « AT » sont les suivants :

branche	BE sinistres
auto	804 712 287,52
AT	631 107 512,09

## Chapitre 2 : Best estimate des primes et marge de risque

### I. Best estimate des primes

#### I.1. Définition

Le best estimate des primes correspond à l'incertitude sur la charge des sinistres non encore survenus qui seront financés par les primes émises non acquises à l'inventaire.

#### I.2. Méthode de calcul

En pratique le calcul de ce best estimate est souvent évalué via l'approche S/P par la formule suivante :

$$\text{Best estimate des primes} = PPNA * S/P_{moyen}$$

$$\text{Avec : } S/P_{moyen} = \frac{1}{h+1} \sum_{k=N-h}^N \frac{C_{k,n}}{P_k}$$

#### I.3. Résultat

Les résultats finaux des Best estimate des primes pour les branches « auto » et « AT » sont les suivants :

branche	PPNA	S/Pmoyen	BE prime
auto	546 218 000,00	47%	258 287 456,20
AT	216 326 188,14	64%	138 718 500,14

Tableau : Calcul du Best Estimate des primes

### II. Marge de risque

#### II.1. Définition

La marge de risque correspond au montant que l'on doit ajouter au Best estimate pour qu'un autre assureur accepte de reprendre le passif. Il s'agit du montant qui sert à dédommager le reprenneur d'avoir à immobiliser du capital pour supporter les engagements d'assurance qu'il va récupérer, et ce, jusqu'à leur extinction.

#### II.2. Méthode

Selon QIS 5, le calcul des provisions techniques se fait en sommant le « Best Estimate » et la marge du risque. Par suite on sera mené à calculer la marge de risque via la formule simplifiée suivante :

$$MR \approx CC \cdot (0.5 + Dur_{mod}) \cdot SCR(0)$$

**SCR(0)** obtenu à partir du risque de souscription non-vie et du risque opérationnel. Les détails concernant le calcul de ces capitaux de risques seront donnés dans la suite de ce document.

**Dur<sub>mod</sub>** obtenu à partir de la formule suivante  $D = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{t(i) \cdot F_i}{(1+r)^{t(i)}}}{\sum_{i=1}^n \frac{F_i}{(1+r)^{t(i)}}}$  et  $Dur_{mod} = \frac{D}{(1+r_1)}$  avec  $F_i$  le flux  $i$ .  
**CC** le cout du capital fixé à 6%.

### II.3. Résultat

Les résultats finaux des marges de risque pour les branches « auto » et « AT » sont les suivants :

branche	CC	Duration D	Dur <sub>mod</sub>	SCR(0)	Marge de risque
auto	0,06	2,27	2,18	429 809 441,52	69 183 764,70
AT	0,06	2,57	2,48	383 404 594,40	68 450 315,23

Tableau : Calcul de la marge de risque

**Remarque :** le calcul du SCR(0) sera explicité après.

#### Conclusion provisions techniques :

Comme définie au début les provisions techniques en assurance non vie se constituent des best estimates des sinistres et des primes qui doivent être calculés séparément et de la marge de risque, ce qui mène aux résultats finaux suivants :

**PT= Best estimate + marge de risque**

branche	Marge de risque	BE total	PT
auto	69 183 764,70	1 062 999 744,00	1 132 183 508,70
AT	68 450 315,23	769 826 012,00	838 276 327,23

## Chapitre 4 : Présentation de l'actif

## I. Hypothèse de travail

Concernant l'actif, nous avons formulé les hypothèses suivantes :

- Le Best Estimate et la marge de risque sont investis en actifs.
- Les actifs sur lesquels est investi le passif de ce portefeuille sont les actions et les obligations de maturité 1 an.
- Les actions représentent 30% du portefeuille et les obligations 70% du portefeuille.

## II. Construction des bilans prudents

Ce qui nous permet de construire les bilans économiques suivants pour les deux branches « auto » et « AT »

le bilan économique relative à la branche AUTO		le bilan économique relative à la branche AT	
ACTIF	PASSIF	ACTIF	PASSIF
la valeur des obligations 792 528 456,09	la valeur du passif 1 132 183 508,70	la valeur des obligations 586 793 429,06	la valeur du passif 838 276 327,23
la valeur des actions 339 655 052,61		la valeur des actions 251 482 898,17	

Figure : les bilans prudents de la branche « auto » et « AT »

### **Partie 3 : cartographie des risques et calcul du SCR standard**

## I. Notion de risque

L'origine du mot risque remonte au XIV<sup>ème</sup> siècle, celui-ci fut apparu en Italie avec l'avènement de l'assurance maritime. Le mot « risco » désignait l'écueil qui menace les navires avant de signifier tout danger auquel sont exposées les marchandises en mer.

Actuellement, le mot risque prend plusieurs définitions selon le domaine où il intervient :

- De manière générale, le risque est défini selon Larousse comme « un danger, un inconvénient plus ou moins probable auquel on est exposé ».
  - Juridiquement, le risque est « l'éventualité d'un événement ne dépendant pas exclusivement de la volonté des parties et pouvant causer la perte d'un objet ou tout autre dommage ».
  - De manière légale, on définit le risque comme étant « la probabilité qu'un effet spécifique se produise dans une période donnée ou dans des circonstances déterminées ».
- Dans le domaine d'assurance on trouve deux éléments qui s'y rapportent tout le temps : la notion d'incertitude, et la survenance d'un événement au moins est indésirable. Ainsi nous admettons la définition suivante du risque en assurance: le risque est un événement futur probable causant une déviation défavorable (perte ou généralement un sinistre) par rapport aux résultats attendus ou espérés. Il est ainsi fortement lié à la notion de solvabilité.

## II. Cartographie des risques

Une cartographie est une représentation graphique qui donne à voir l'ensemble des processus que l'entreprise met en œuvre pour assurer les missions qui sont les siennes, qui peut se compléter par les éléments suivants :

- ❖ Intrusion approfondie des processus ainsi identifiés en détaillant les processus complexes dans un modèle d'interactions entre procédures.
- ❖ Zoomage sur chaque procédure dans un logigramme avec commentaires.

Ainsi, la cartographie des processus permet une lecture synthétique de ce qui est fait dans l'entreprise, avec les finalités, ressources et objectifs bien mis en évidence.

La cartographie des risques nous permet de déceler les risques qui impactent une société d'assurance commercialisant des produits d'assurance vie et de retraite. Concernant les produits qui font l'objet de notre étude, nous distinguons trois (3) grands groupes de risques : les risques actuariels, les risques financiers, et les risques opérationnels.

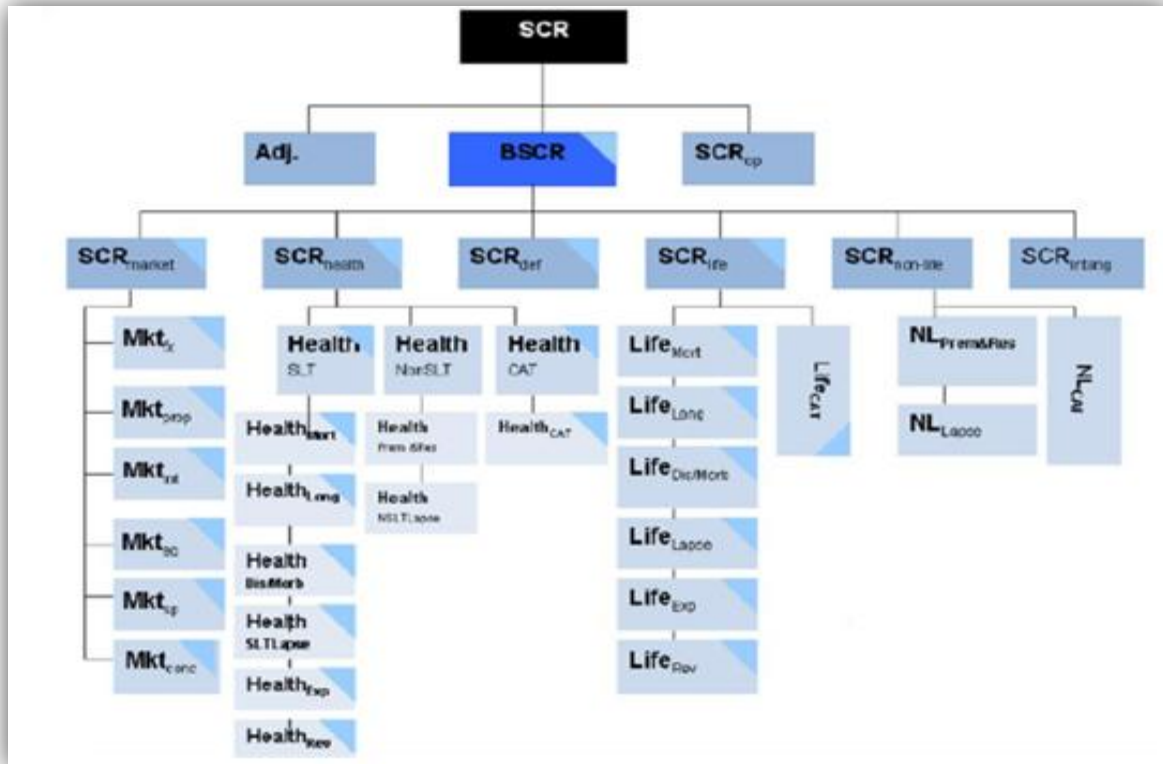


Figure : les facteurs de risques en assurances selon Solvency 2

## II.1. Les risques actuariels

C'est l'ensemble des risques liés à la tarification non suffisante des produits d'assurance non- vie ou de rachats. Les principaux risques appartenant à ce groupe sont :

**Le risque de réserve et prime** : ce risque regroupe le risque lié à la nature aléatoire de l'évaluation des sinistres et à leur mauvaise estimation et le risque que le coût des futurs sinistres soit supérieur aux primes perçues.

**Le risque de rachat** : risque lié à une augmentation (ou une baisse) du taux des rachats des contrats d'assurance. Le risque de rachat entraîne la perte ou la modification défavorable de la valeur des passifs d'assurance résultant d'une variation du niveau ou de la volatilité des taux de déchéance, de résiliation, et de rachat des polices. La formule standard tient compte du risque de changement permanent des taux et du risque de rachat massif.

**Le risque de catastrophes** : risque résultant d'évènements extrêmes ou irréguliers, non suffisamment pris en compte par les frais pour les autres sous modules. Un exemple de risque de catastrophe est le risque de pandémie sur un portefeuille d'assurés.

## II.2. Risques opérationnels

Le risque opérationnel pour les établissements financiers (banque et assurance) est le risque de pertes directes ou indirectes dues à une inadéquation ou à une défaillances des procédures de l'établissement (analyse ou contrôle absent ou incomplet, procédure non sécurisée), de son personnel (erreur, malveillance et fraude), des systèmes internes (panne de

l'informatique) ou à des risques externes (inondation, incendie). Le risque opérationnel inclut également les risques juridiques. Par contre, le risque de réputation et les risques résultant de décisions stratégiques ne sont pas inclus dans le risque opérationnel. Le module de risque opérationnel est conçu pour traiter les risques opérationnels dans la mesure où ils n'ont pas été explicitement couverts dans les autres modules de risque. Le capital nécessaire pour couvrir ce risque correspond à un pourcentage en fonction des provisions techniques de l'assurance des branches vie, non vie et santé ainsi que des primes gagnées brutes de réassurance pour les mêmes branches.

### II.3. Risques de marché

Ce sont les risques résultant du niveau ou de la volatilité des cours des instruments financiers (actions, obligations, options, immobilier, etc.). Parmi ces risques, on distingue :

**Le risque de taux d'intérêt** : risque existant pour tous les actifs et les passifs sensibles aux variations de la courbe de taux d'intérêt et qui ne sont pas affectés aux polices dans lesquelles les souscripteurs supportent le risque d'investissement. Il est obtenu en effectuant des variations à la baisse ou à la hausse de la structure des courbes des taux servant à l'actualisation des flux financiers pour différentes maturités données.

**Le risque d'action** : risque résultant de la variation ou de la volatilité des cours d'action. La charge de capital pour couvrir ce risque est déterminée comme l'effet immédiat sur la valeur nette des actifs et passifs espérée dans le cas d'un scénario de choc sur action.

**Le risque immobilier** : risque résultant de la variation ou de la volatilité des cours de l'immobilier. La charge de capital pour le risque immobilier est déterminée en effectuant une chute de 20% des benchmark immobiliers sur la valeur nette des actifs et des passifs.

**Le risque de spread** : est la part de risque issue des instruments financiers et qui est expliqué par la volatilité des spreads de crédit sur la structure de courbe de taux d'intérêt sans risque. Il reflète la variation de valeur due à un mouvement de la courbe de crédit relative à la structure de courbe sans risque.

**Les concentrations des risques de marché** qui présentent un risque supplémentaire pour un assureur en raison de :

- La volatilité supplémentaire qui existe dans les portefeuilles d'actifs concentrés.
- Le risque supplémentaire de perte de valeur partielle ou totale définitive en raison de la défaillance d'un émetteur.

### II.4. Risques de défaut de contrepartie

Risque qu'un emprunteur n'honore pas ces engagements dans les conditions initialement prévues. S'il était à l'origine une préoccupation pour les seuls organismes bancaires, il concerne pourtant toutes les entreprises (notamment via les créances qu'elles accordent à leurs clients, qui sont des formes de prêt à court terme), et nombreuses sont aujourd'hui amenées à l'intégrer dans leur gestion afin de le minimiser. Ce risque est en effet lourd de conséquences pour toute entreprise: toute dette non remboursée est économiquement une perte sèche que supporte le créancier. Le principal défaut à redouter pour une compagnie d'assurance vie est le défaut de réassurance.

## II.5. Risques d'inflation

C'est le risque d'être remboursé dans une monnaie dépréciée, ou d'obtenir un taux de rentabilité inférieur au taux d'inflation. L'inflation joue un rôle majeur, dans la mesure où plusieurs paramètres économiques en découlent, comprenant les prix, les hausses inflationnistes des salaires, les taux courts, les performances des actions et dividendes et les taux de change.

## III. La part des risques et la décomposition du SCR des organismes non-vie :

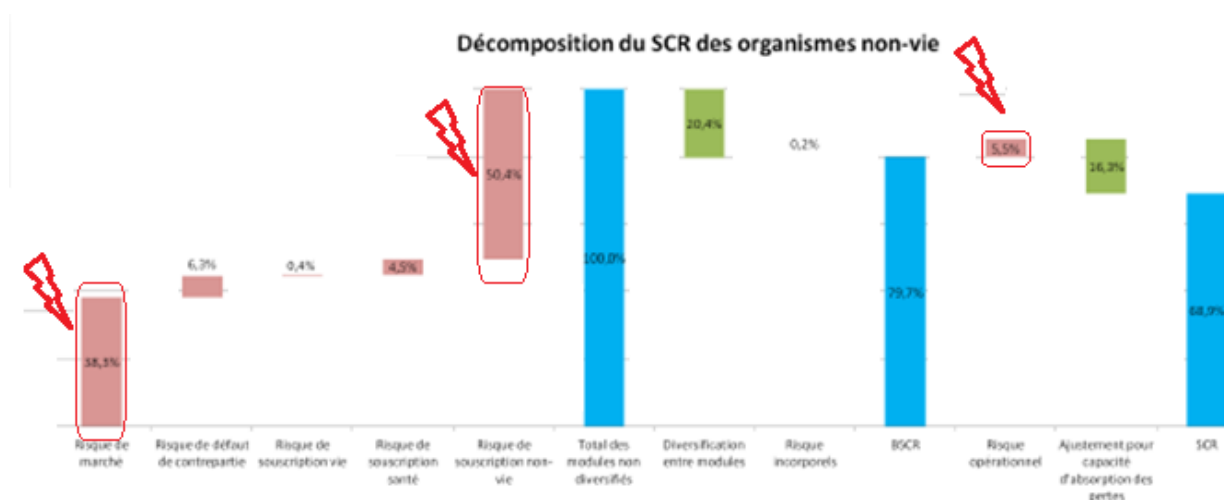


Figure : décomposition de SCR d'une compagnie d'assurance non vie

En remarquant que les risques les plus forts en assurance non-vie sont les risques de souscription avec une part de 50% et le risque de marché avec 39% et face à la non suffisance des données pour le calcul complexe de risque de défaut de contrepartie et le risque incorporé qui ne représentent qu'une part négligeable dans la décomposition du SCR, alors nous avons pris en considération dans notre rapport que le risque de souscription (risque de réserve et primes), le risque de marché (dans notre exemple, il est réduit aux risque d'actions et risque de taux ) et le risque opérationnel.

## IV. Calcul du SCR vision modèle standard

### IV.1. Calcul du SCR souscription non vie

Cette section n'est pas destinée à présenter les différentes méthodes de calcul du SCR non vie. Le lecteur pourra se référer aux spécifications techniques du 5 juillet 2010 pour plus de détails.

Le risque non vie est décomposé en différentes branches (LOB, Lines of Business). Le QIS 5 propose d'en créer 12 qui sont les suivantes :

1. Auto : RC
2. Auto : autres
3. Marine, Aviation, Transport
4. Incendie et autres dommages

5. RC
6. Crédit
7. Protection juridique
8. Assistance
9. Risques Divers
10. Réassurance non proportionnelle branche IARD (dommage aux biens)
11. Réassurance non proportionnelle branche IARD (dommage aux personnes)
12. Réassurance non proportionnelle branche Marine, Aviation, Transport

#### IV.1.1. Introduction et aspect théorique

Le besoin en capital lié aux risques de prime et de provision est calculé en fonction de deux paramètres, qui sont le volume d'affaires de la compagnie et l'écart type de ses risques. Ainsi le CEIOPS nous fournit la formule suivante :

$$Non - vie_{prime,prov} = \rho(\sigma) \times V$$

Où V représente une mesure de volume,  $\sigma$  est une estimation de l'écart-type du ratio combiné du portefeuille global d'assurance non-vie,  $\rho(\sigma)$  étant une fonction de cet écart-type.

La fonction  $\rho(\sigma)$  a été définie en supposant une distribution des risques selon une loi log-normale :

$$\rho(\sigma) = \frac{\exp(N_{0,995} \times \sqrt{\log(1 + \sigma^2)})}{\sqrt{1 + \sigma^2}} - 1$$

Où  $N_{0,995}$  est le quantile à 99,5% de la loi normale centrée réduite.

Les mesures de volume V et la volatilité  $\sigma$  du ratio combiné pour le portefeuille global des activités non vie sont déterminées selon les étapes suivantes :

- Étape 1 : pour chaque branche d'activité, déterminer la volatilité et la mesure de volume pour le risque de primes et de provisions
- Étape 2 : agréger la volatilité et les volumes pour le risque de primes et de provisions de chaque branche pour obtenir une volatilité globale et une mesure de volume globale du portefeuille d'activités non vie.

Les données nécessaires au calcul du besoin en capital non vie sont les suivantes:

- $PCO_{branche}$  : les provisions pour sinistres à payer nettes, pour la branche considérée
- $P_{t,branche,souscr}$  : le montant estimé des primes émises pour l'exercice suivant, pour la branche considérée
- $P_{t,branche,acqui}$  : le montant estimé des primes acquises pour l'exercice suivant, pour la branche considérée

#### Étape 1 : Calcul de la mesure de volume V et de la volatilité $\sigma$ par branche

- $P_{t-1,branche,souscr}$  : le montant des primes émises pour le dernier exercice, pour la branche considérée
- $PPP_{branche}$  : Valeur actuelle probable des primes nettes dues aux contrats existants. Les primes sont celles attendues après l'année suivante.

Le terme  $PPP_{branche}$  est nul pour les contrats annuels sans option de renouvellement.

Les primes émises correspondent aux primes facturées aux clients alors que les primes acquises sont les primes afférentes à l'exercice comptable en cours reçues par la compagnie.

Dans chaque branche, les mesures de volume et les volatilités sont définies comme suit :

- $V_{prime,branche}$  = volume pour le risque de prime
- $V_{prov,branche}$  = volume pour le risque de provision
- $\sigma_{prime,branche}$  = volatilité pour le risque de prime
- $\sigma_{prov,branche}$  = volatilité pour le risque de provision.

La mesure relative aux primes se calcule de la façon suivante :

$$V_{primes,branche} = \text{Max}(P_{t,branche,souscr}; P_{t,branche,acq}; P_{t-1,branche,souscr}) + P_{branche}^{pp}$$

Si l'assureur s'engage auprès de l'autorité de contrôle locale sur le fait que les primes émises sur la période future sont restreintes de sorte que les primes émises (ou acquises) effectives ne seront pas supérieures au volume estimé, alors la formule suivante peut être utilisée à la place de la précédente :

$$V_{primes,branche} = \text{Max}(P_{t,branche,souscr}; P_{t,branche,acq}) + P_{branche}^{pp}$$

La volatilité des primes par branche,  $\sigma_{prime,branche}$  est définie par branche, selon le tableau suivant :

branche	$\sigma_{prime,branche}$	branche	$\sigma_{prime,branche}$
1	10% NP branche	7	6,5% NP branche
2	7% NP branche	8	5% NP branche
3	17% NP branche	9	13% NP branche
4	10% NP branche	10	17,50%
5	15% NP branche	11	17%
6	21,5% NP branche	12	16%

Tableau : volatilité des primes par branche QIS5

Où  $NP_{branche}$  est détaillé dans l'annexe N des spécifications techniques du QIS.

Dans l'application numérique,  $NP_{branche}$  est égal à 1.

### Calcul par rapport aux provisions

La mesure relative aux provisions s'effectue de la façon suivante :

- $V_{prov,branche} = PCO_{branche}$
- $\sigma_{prov,branche}$  est défini par branche, selon le tableau suivant :

branche	$\sigma_{prov,branche}$	branche	$\sigma_{prov,branche}$
1	9,5%	7	9%
2	10%	8	11%
3	14%	9	15%
4	11%	10	20%
5	11%	11	20%
6	19%	12	20%

Tableau : volatilité des réserves par branche QISS

**Agrégation des différentes volatilités par branche :**

Les volatilités des primes et des provisions par branche permettent de calculer l'écart type global de la branche :

$$\sigma_{branche} = \frac{\sqrt{(\sigma_{primes,branche} V_{primes,branche})^2 + 2\alpha \sigma_{primes,branche} \sigma_{prov,branche} V_{primes,branche} V_{prov,branche} + (\sigma_{prov,branche} V_{prov,branche})^2}}{V_{primes,branche} + V_{prov,branches}}$$

Avec  $\alpha = 0,5$ .

La volatilité par branche est fonction de la volatilité et du volume de primes et de provisions.

L'écart-type global est défini par :

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{V^2} \left( \sum_{r,c} CorrBranche_{r,c} \times \sigma_r \times \sigma_c \times V_r \times V_c \right)}$$

où r, et de la même façon c, désignent les différentes branches,  $V_r$  et  $V_c$  sont les mesures de volume individuelles définies précédemment, V représente le volume global, et  $CorrBranche_{r,c}$  est la corrélation entre les couples r et c définie par la matrice de corrélation  $CorrBranche$  suivante :

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	1											
2	0,5	1										
3	0,5	0,25	1									
4	0,25	0,25	0,25	1								
5	0,5	0,25	0,25	0,25	1							
6	0,25	0,25	0,25	0,25	0,5	1						
7	0,5	0,5	0,25	0,25	0,5	0,5	1					
8	0,25	0,5	0,5	0,5	0,25	0,25	0,25	1				
9	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	1			
10	0,25	0,25	0,25	0,5	0,25	0,25	0,25	0,5	0,25	1		
11	0,25	0,25	0,25	0,25	0,5	0,5	0,5	0,25	0,25	0,25	1	
12	0,25	0,25	0,5	0,5	0,25	0,25	0,25	0,25	0,5	0,25	0,25	1

Tableau : Matrice de corrélation entre les branches

La matrice ci-dessus est fournie par le CEIOPS. Elle détermine les différentes corrélations utilisées afin d'agréger les branches entre elles.

#### IV.1.2. Application numérique sur les branches d'études

Pour l'application numérique nous allons suivre les étapes énoncées précédemment :

##### 1<sup>ère</sup> étape : Calcul de la mesure de volume V :

branche	Volume des primes	volume des réserves	Volume total
auto	536 756 500,00	802 197 814,28	1 338 954 314,28
AT	216 325 188,00	631 107 512,09	847 432 700,09

Tableau : volume des branches

##### 2<sup>ème</sup> étape : Calcul de la mesure de volatilité $\sigma$ :

branche	Volatilité des prime	volatilité des réserves	Volatilité globale
auto	10,00%	9,50%	10,27%
AT	8,50%	14%	14,21%

Tableau : volatilité des branches

##### 3<sup>ème</sup> étape : Calcul de $\rho(\sigma)$ :

branche	$\rho(\sigma)$
auto	29,51%
AT	42,52%

##### 4<sup>ème</sup> étape : calcul de SCR prime et réserve :

branche	SCR souscription
auto	397 604 051,52
AT	360 309 814,03

## IV.2. La formule standard pour le SCR marché

### Description

Le risque de marché résulte du niveau ou de la volatilité de la valeur de marché des instruments financiers. L'exposition au risque de marché est mesurée par l'impact des mouvements de variables financières telles que les cours des actions, les taux d'intérêt, les prix de l'immobilier et les taux de change.

## Données requises

Ce module requiert les données suivantes :

$SCR_{\text{taux}}$  = Chargement en capital au titre du risqué de taux d'intérêt

$SCR_{\text{actions}}$  = Chargement en capital au titre du risqué sur actions

## Résultats

Les résultats obtenus sont les suivants :

$SCR_{\text{marché}}$  = Chargement en capital au titre du risqué de marché

## Calcul

Les sous-risques de marché doivent être agrégés en un chargement global  $SCR_{\text{marché}}$  au titre du risque de marché en utilisant les matrices de corrélation comme suit :

$$SCR_{\text{marché}} = \max \left[ \begin{array}{l} \sqrt{SCR_{\text{actions}}^2 + SCR_{\text{tauxbaissier}}^2 + \rho_{\text{actions,tauxbaissier}} * SCR_{\text{actions}} * SCR_{\text{tauxbaissier}} ; \\ \sqrt{SCR_{\text{actions}}^2 + SCR_{\text{tauxhaussier}}^2 + \rho_{\text{actions,tauxhaussier}} * SCR_{\text{actions}} * SCR_{\text{tauxhaussier}} } \end{array} \right]$$

Où :  $\rho_{\text{actions,taux}}$  = coefficient de corrélation entre  $SCR_{\text{actions}}$  et  $SCR_{\text{taux}}$

Les coefficients  $\rho_{\text{actions,taux}}$  donnés par QIS 5 sont définis selon les matrices de corrélation suivantes :

corrélacion	actions	taux d'intérêt
marché baissier		
actions	1	
taux d'intérêt	0,5	1

corrélacion	actions	taux d'intérêt
marché haussier		
actions	1	
taux d'intérêt	0	1

### IV.2.1. Risque de taux d'intérêt : $SCR_{\text{taux}}$

#### Description

Un risque de taux d'intérêt existe pour tous les actifs et passifs dont la valeur d'actif nette est sensible aux variations de la structure par terme des taux d'intérêt ou à la volatilité des taux. Les actifs et passifs sensibles aux variations des taux d'intérêt sont les investissements en instruments à taux fixe, les passifs d'assurance ainsi que les instruments financiers (capitaux empruntés) et les dérivés de taux d'intérêt. Les flux de passifs futurs seront sensibles à une modification du taux d'actualisation de ces flux.

La valeur des actifs et passifs sensibles aux variations des taux d'intérêt peut être déterminée au moyen de la structure par terme des taux d'intérêt (« taux zéro »). Cette structure peut évidemment changer au cours d'une année.

#### Données requises

Ce module requiert les données suivantes :

VAN = Valeur de l'actif net

#### Résultat

Les résultats obtenus sont les suivants :

$SCR_{\text{taux}}^{\text{hausse}}$  = Chargement en capital au titre du risque de taux d'intérêt après un choc haussier

$SCR_{\text{taux}}^{\text{baisse}}$  = Chargement en capital au titre du risque de taux d'intérêt après un choc baissier

$SCR_{\text{taux}}$  = Chargement en capital au titre du risque de taux d'intérêt

### Calcul

Le chargement en capital au titre du risque de taux d'intérêt est le résultat d'un scénario prédéfini :

$$\begin{aligned} SCR_{\text{taux}}^{\text{hausse}} &= \Delta VAN|_{\text{choc haussier}} \\ SCR_{\text{taux}}^{\text{baisse}} &= \Delta VAN|_{\text{choc baissier}} \end{aligned}$$

Où :  $\Delta VAN|_{\text{choc haussier}}$  et  $\Delta VAN|_{\text{choc baissier}}$  sont les variations de valeur de l'actif net résultant de la réévaluation de tous les instruments sensibles aux taux d'intérêt en fonction de structures par terme modifiées.

Les structures par terme modifiées sont dérivées en multipliant la courbe des taux d'intérêt actuelle par  $(1 + Shausse)$  et  $(1 + Sbaisse)$ , où le choc haussier  $Shausse(t)$  et le choc baissier  $Sbaisse(t)$  pour les différentes échéances  $t$  sont affichés en annexe.

Le chargement en capital au titre du risque de taux d'intérêt découle du type de choc qui requiert le chargement en capital le plus élevé.

$$SCR_{\text{taux}} = \begin{cases} \max(SCR_{\text{taux}}^{\text{hausse}}; 0) & \text{si } SCR_{\text{taux}}^{\text{hausse}} \geq SCR_{\text{taux}}^{\text{baisse}} \\ \max(SCR_{\text{taux}}^{\text{baisse}}; 0) & \text{si } SCR_{\text{taux}}^{\text{baisse}} \geq SCR_{\text{taux}}^{\text{hausse}} \end{cases}$$

### Application numériques sur les branches d'étude :

En appliquant les chocs définis sur QIS5 sur la courbe des taux donnée par la banque centrale du Maroc, sur le portefeuille de l'actif et du passif, nous obtenons les résultats suivants :

SCR taux AUTO				SCR taux AT					
		normale	hausse	normale	hausse	baisse			
actif	capital actuel	792 528 456		586 793 429			capital actuel		
	taux	3,83%	6,51%	0,96%	3,83%	6,51%	0,96%		
	capital futur	822 858 226			609 249 796				
	capital après choc		772 594 488	815 060 213		572 034 185	603 476 094		
passif	capital actuel	744 099 821		538 878 209			capital actuel		
	capital après choc		713 304 328	774 847 302		511 875 499	565 513 991		
	NAV	48 428 635	59 290 160	40 212 911	47 915 220	60 158 686	37 962 103		
	$\Delta NAV$	0	- 10 861 525	8 215 724	0	- 12 243 465	9 953 117		
		SCR taux		8 215 724			SCR taux		9 953 117

Tableau : Calcul du SCR taux standard pour la branche auto et AT

Ces tableaux montrent que le SCR taux pour la branche auto (resp. AT) est de l'ordre

8 215 724 (resp. 9 953 117).

#### IV.2.2. Risque sur actions $SCR_{actions}$

##### Description

Le risque sur actions résulte du niveau ou de la volatilité de la valeur de marché des actions. L'exposition au risque sur actions concerne tous les actifs et passifs dont la valeur est sensible aux variations des cours de bourse.

Le sous-module Risque sur actions fait appel à des indices comme indicateurs de risque. Par conséquent, les données relatives à la volatilité et aux corrélations sont dérivées de ces indices. On suppose que toutes les actions peuvent être affectées à un indice de l'ensemble fourni.

Les scénarios de choc envisagés pour les différents indices illustrent le risque systématique inhérent à ce portefeuille de marché. On suppose que l'exposition au risque systématique du portefeuille d'actions des compagnies d'assurance est identique à l'exposition de l'indice (indicateur du risque) lui-même, c'est-à-dire que le bêta est égal à 1.

Les participants ne doivent pas supposer qu'ils achètent d'autres instruments de couverture (par exemple, dans le cadre d'un programme de couverture glissant) outre ceux qui sont en vigueur à la date de clôture des comptes.

##### Données requises

Ce module requiert les données suivantes :

VAN = Valeur de l'actif net

##### Résultat

Les résultats sont les suivants :

$SCR_{actions}$  = Chargement en capital au titre du risque sur actions

##### Calcul

La détermination du chargement en capital au titre du risque sur actions fait appel à un indice « Global », qui regroupe les actions cotées dans les pays de l'EEE et de l'OCDE, et à un indice « Autres » qui comprend les actions exclusivement cotées sur les marchés émergents, les actions non cotées, les fonds spéculatifs et les autres investissements alternatifs.

Le chargement en capital est déterminé comme le résultat d'un scénario de choc prédéfini pour cet indice :

$$SCR_{actions} = \max (\Delta VAN|_{\text{choc sur actions}} ; 0)$$

Où le choc boursier s'analyse comme suit :

Choc sur actions	
Global	Autres
30 %	40%

##### Application numériques sur les branches d'étude :

Le chargement en capital SCR actions est l'effet immédiat attendu du scénario de choc sur actions sur la valeur de l'actif net compte tenu de l'ensemble des expositions directes et indirectes du participant aux cours des actions.

SCR action AUTO	Situation normale	Situation après le choc
Valeur de l'actif	339 655 052,61	203 793 031,57
Valeur du passif	318 899 923,20	318 899 923,20
NAV	20 755 129,41	-115 106 891,63
ΔNAV		135 862 021,04
SCR action		135 862 021,04

SCR action AT	Situation normale	Situation après le choc
Valeur de l'actif	251 482 898,17	150 889 738,90
Valeur du passif	230 947 803,60	230 947 803,60
NAV	20 535 094,57	-80 058 064,70
ΔNAV		100 593 159,27
SCR action		100 593 159,27

Tableau : Calcul du SCR action standard pour la branche auto et AT

Ces tableaux montrent que le SCR action pour la branche auto (resp. AT) est de l'ordre 135 862 021 (resp. 100 593 159).

#### IV.2.3. SCR marché global

Après le calcul des différents besoins de capitaux requis pour chaque sous-module de risque (taux, action), il est possible de définir le capital requis au titre du risque du marché dans sa globalité en agrégeant les capitaux requis selon une matrice de corrélation. Par la suite, comme défini précédemment, le SCR marché dans sa globalité correspond à la charge de capital la plus élevée entre un scénario de taux d'intérêt haussier et un scénario de taux d'intérêt baissier après agrégation au charge de capital relative au risque d'action via la formule suivante :

$$SCR_{marché} = \max \left[ \begin{array}{l} \sqrt{SCR_{actions}^2 + SCR_{tauxbaissier}^2 + \rho_{actions,tauxbaissier} * SCR_{actions} * SCR_{tauxbaissier}} ; \\ \sqrt{SCR_{actions}^2 + SCR_{tauxhaussier}^2 + \rho_{actions,tauxhaussier} * SCR_{actions} * SCR_{tauxhaussier}} \end{array} \right]$$

Et les corrélations suivantes :

corrélation marché baissier	actions	taux d'intérêt
actions	1	
taux d'intérêt	0,5	1

corrélation marché haussier	actions	taux d'intérêt
actions	1	
taux d'intérêt	0	1

Ce qui permet d'obtenir les résultats suivants :

branche	SCR marché
AT	101 084 361,98
auto	138 145 174,85

### IV.3. SCR opérationnel

#### IV.3.1. Définition

Le CEIOPS définit le risque opérationnel comme étant le risque de pertes résultant de procédures internes inadaptées ou défaillantes, ou de membre du personnel et de systèmes, ou d'événements extérieurs. Le risque opérationnel ainsi défini comprend les risques juridiques mais non les risques découlant de décisions stratégiques ni les risques de réputation.

Le risque opérationnel n'est pas un concept nouveau puisqu'il existe depuis toujours dans les compagnies d'assurance du fait même qu'elles aient des clients, qu'elles utilisent des outils informatiques, qu'elles fassent des placements financiers... Le risque opérationnel est partout dans les entreprises. La nouveauté provient de la mise en place d'outils de mesure et de contrôle des risques opérationnels comme pour les risques de marche, de crédit et d'assurance.

#### IV.3.2. Calcul

Le capital requis pour le risque opérationnel est déterminé par QIS5 de la manière suivante :

$$SCR_{op} = \min (0.3 * BSCR ; Op)$$

Avec

$$Op = \max ( Op_{primes} ; Op_{provisions} )$$

$$Op_{primes} = 0.03 * Prime \text{ acquise}_{non-vie}$$

$$Op_{provisions} = 0.03 * \max ( 0 ; BE_{non-vie} )$$

#### IV.3.3. Application numérique sur les branches d'études

branche	Op <sub>prime</sub>	Op <sub>réserve</sub>	SCR Op
AT	12 958 976	23 094 780	23 094 780
auto	32 205 390	31 889 992	32 205 390

Tableau : calcul du risque opérationnel

### IV.4. SCR globale « auto » et « AT » :

Ainsi, pour pouvoir trouver le SCR global qui permettra de couvrir tous les sous risques calculés ci-dessus, il faudra :

1- agréger les différents capitaux relatifs à chaque risque via la matrice de corrélation entre module fournie par QIS5 pour calculer le BSCR.

CorrModule	marché	non vie
marché	1	
non vie	0,25	1

2- une fois le BSCR calculé, pour aboutir au SCR global, il suffit d'ajouter le SCR opérationnel.

#### Application numérique aux branches d'études :

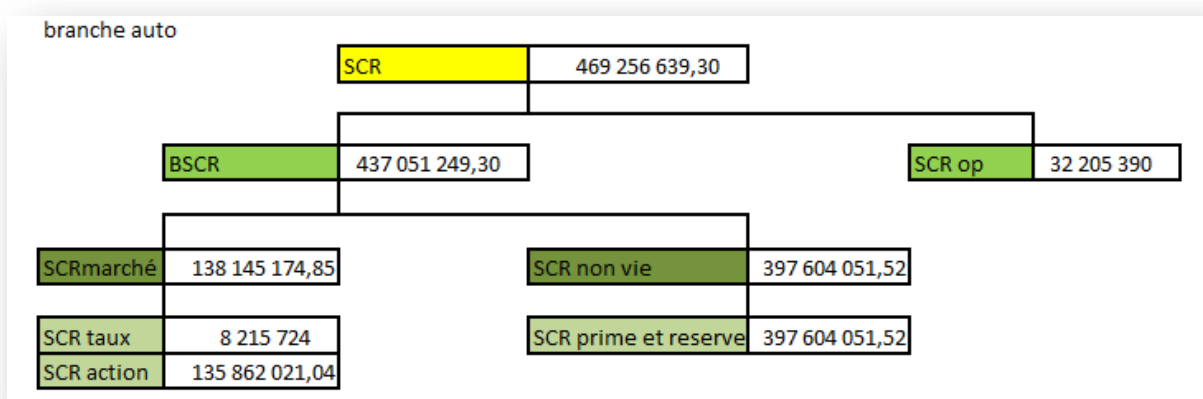


Figure : la décomposition du SCR de la branche « auto » en sous-modules

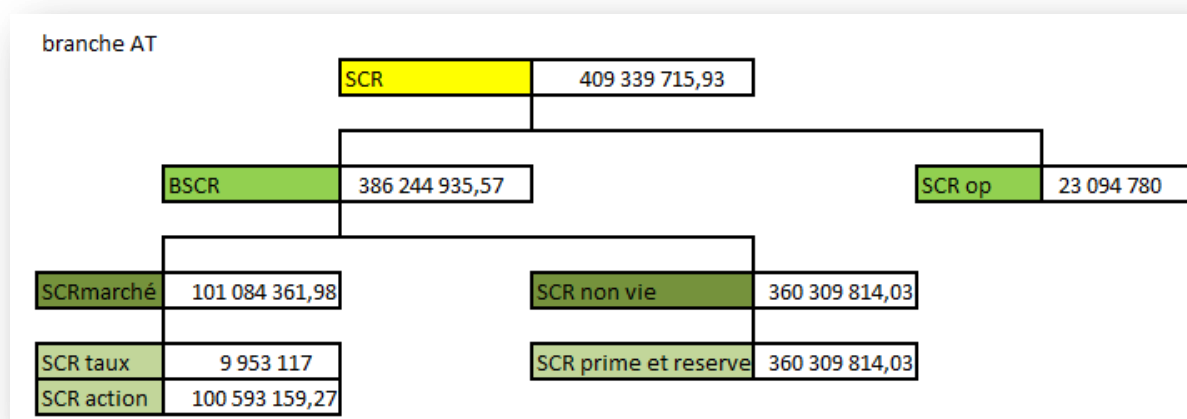


Figure : la décomposition du SCR de la branche « AT » en sous-modules

#### IV.5. Conclusion et synthèse :

Ces deux parties, celle relative au calcul du Best estimate et celle relative aux calculs des SCR standard, nous ont permis de chiffrer et de quantifier les différents risques (souscription, marché et opérationnel) relatives aux branches « AT » et « auto » et par conséquent la construction du bilan prudentiel sous les normes de solvabilité 2 et les études associées de QIS5.

En effet les deux bilans pruden­tiels construits représentant les éléments du passif et de l'actif ainsi la part de chaque élément sont les suivants :

Bilan prudentiel AUTO		Bilan prudentiel AT	
ACTIF	PASSIF	ACTIF	PASSIF
Actif en valeur de marché 1 601 440 147,99	SCR 469 256 639,30 29,3%	Actif en valeur de marché 1 247 616 043,17	SCR 409 339 715,93 32,8%
	marge de risque 69 183 764,70 4,3%		marge de risque 68 450 315,23 5,5%
	Best estimate 1 062 999 744,00 66,4%		Best estimate 769 826 012,00 61,7%

Figure : les bilans pruden­tiels solvency 2 pour la branche « auto » et « AT » (QIS5)

## **Partie 4 : Calcul du SCR à l'aide d'un modèle interne**

## I. Modélisation du taux d'intérêt

### I.1. Introduction

Cette section, on présente quelques modèles de taux les plus étudiés ainsi que leurs mises en application. Il existe une multitude de modèles de taux d'intérêt. Dans la pratique nous pouvons distinguer deux familles de modèles stochastiques.

Ceux reposant sur une approche dite d'évaluation d'équilibre : En effet on parle d'équilibre général quand il s'applique à l'ensemble de l'économie (consommation/production, offre/demande). Mais une telle approche implique de poser des hypothèses restrictives qui peuvent entraîner un biais dans la modélisation. Le modèle de COX, INGERSOLL, ROSS (1985), que nous étudierons dans la suite de cette section, est un modèle répondant à une telle approche.

Et ceux reposant sur une approche dite d'évaluation d'arbitrage : Comme le modèle de VASICEK (1977). Cette approche est moins restrictive, mais il faut noter que si l'approche précédente basée sur une économie globale en équilibre implique toujours l'absence d'opportunité d'arbitrage, la réciproque n'est pas toujours vérifiée.

### I.2. Modèle de vasicek

#### ➤ Présentation du modèle

Le modèle de VASICEK, l'un des premiers modèles stochastiques de taux d'intérêt, est fondé sur l'idée que le taux est le seul paramètre qui régit les prix des titres obligataires.

Le taux d'intérêt court suit un processus d'ORNSTEIN-UHLENBECK :

$$dr_t = a \cdot [b - r_t] \cdot dt + \sigma \cdot dw_t$$

Avec

$r_t$  : le taux d'intérêt court à l'instant  $t$ .

$b$  : la moyenne à long terme du taux court.

$a$  : la vitesse d'ajustement du taux court actuel vers sa moyenne de long terme.

$w_t$  : mouvement Brownien standard.

Cette modélisation permet de prendre en compte l'effet de retour à la moyenne constatée sur les taux d'intérêt. En effet, des valeurs élevées des taux ont tendance à être suivies plus fréquemment par des baisses que par des hausses. L'effet inverse est également constaté pour des niveaux de taux inhabituellement bas.

Lorsque  $r(t)$  est éloigné de  $b$ , l'espérance de variation instantanée de  $r(t)$ , égale à  $a(b-r(t))$  est positive si  $r(t) < b$ . Dans ce cas, le taux court a tendance à augmenter, se rapprochant de la moyenne sur long terme d'autant plus intensément qu'il s'en est écarté et que le paramètre  $a$  est grand. A l'inverse, si  $r(t) > b$ , l'espérance de variation instantanée de  $r(t)$  est négative et  $r(t)$  diminue dans le temps pour se rapprocher de  $b$ .

La solution de l'EDS :  $dr_t = a \cdot [b - r_t] \cdot dt + \sigma \cdot dB_t$  s'écrit sous la forme :

$$r_t = r_0 \cdot e^{-at} + b \cdot (1 - e^{-at}) + \sigma \cdot e^{-at} \cdot \int_0^t e^{as} \cdot dB_s$$

La solution de l'équation liée aux prix des zéro-coupons :

$$P(t, T) = E \left[ \exp \left( - \int_t^T r_s \cdot ds \right) / F_t \right]$$

Ce qui implique que Le prix des obligations zéro coupon s'écrit *sous la forme* :

$$P(t, T) = A(t, T) \cdot \exp[-B(t, T) \cdot r_t] \quad \text{Avec les fonctions } A(t, T) \text{ et } B(t, T) \text{ définies par :}$$

$$B(t, T) = \frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a}$$

$$A(t, T) = \exp \left[ (B(t, T) - (T - t)) \cdot R_\infty - \frac{\sigma^2 \cdot B(t, T)^2}{4 \cdot a} \right]$$

$$\text{Avec} \quad R_\infty = b + \frac{\lambda}{a} + \frac{\sigma^2}{2 \cdot a^2}$$

$\lambda$ , correspond à la prime de risque supposée constante.

La mise en œuvre pratique des processus stochastiques nécessite de les discrétiser que ce soit pour l'estimation des paramètres ou pour la simulation des trajectoires.

En utilisant les propriétés de l'intégrale d'une fonction déterministe par rapport au mouvement brownien, on obtient la discrétisation exacte du processus d'ORNSTEIN-UHLENBECK sous la forme :

$$r_{t+1} = r_t \cdot e^{-a} + b \cdot (1 - e^{-a}) + \sigma \cdot \sqrt{\frac{1 - e^{-2a}}{2 \cdot a}} \cdot \varepsilon \quad \text{Avec } \varepsilon \text{ suit } N(0, 1).$$

### ➤ Estimation des paramètres :

L'estimation des paramètres d'un processus d'ORNSTEIN-UHLENBECK peut s'effectuer en recourant soit à la méthode des moindres carrés ordinaires, soit à celle de maximum de vraisemblance. Le point de départ de cette méthode consiste à régresser la série des taux courts à l'aide de la formule :

$$r_t = b \cdot (1 - e^{-a}) + e^{-a} \cdot r_{t-1} + \varepsilon$$

$$\text{Avec} \quad \varepsilon \text{ suit } N(0, \frac{\sigma^2}{2a} \cdot (1 - e^{-2a}))$$

Malgré que le modèle de Vasicek étant plus réaliste que les modèles qui l'ont précédé dans l'histoire, ce dernier comporte un défaut majeur lié à la spécification de la variance instantanée de l'évolution du taux court : celle-ci ne permet pas d'exclure des valeurs négatives de  $r(t)$ . En effet lorsque  $r(t)$  s'approche de zéro, sa dynamique tend à ressembler à

un mouvement Brownien généralisé qui peut prendre une valeur négative, ainsi, le taux peut devenir lui-même négatif.

Pour éviter cela, il est nécessaire que la variance du processus dépende de son niveau, afin de l'empêcher de franchir la limite zéro. C'est la raison qui nous a poussés à faire la modélisation de notre courbe des taux avec un autre modèle qui paraît plus adéquat.

### I.3. le modèle de Cox-Ingersoll-Ross (CIR) :

#### ➤ Présentation du modèle :

Afin d'éviter l'apparition des taux d'intérêt négatifs, Cox-Ingersoll et Ross ont eu recours au processus racine carrée dont la dynamique des taux est modélisée par :

$$dr_t = a \cdot [b - r_t] \cdot dt + \sigma \cdot \sqrt{r_t} \cdot dB_t$$

Ce processus est identique au précédent à la seule différence que le poids accordé à la relation de proportionnalité est ici égale à 1/2 alors qu'il était nul dans le modèle de VASICEK.

Lorsqu'on impose la condition  $2 \cdot ab > \sigma^2$ , le taux d'intérêt est toujours strictement positif. Si cette condition n'est pas vérifiée, on peut garantir la non-négativité des taux, mais avec une probabilité non nulle d'avoir des taux nuls.

La solution de l'équation régissant le prix d'un zéro-coupon est la suivante :

$$P(t, T) = A(t, T) \cdot \exp[-B(t, T) \cdot r_t]$$

Avec :

$$A(t, T) = \left[ \frac{2 \cdot \gamma \cdot \exp\left(\frac{(a + \lambda + \gamma) \cdot (T - t)}{2}\right)}{(a + \lambda + \gamma) \cdot (e^{\gamma \cdot (T - t)} - 1) + 2 \cdot \gamma} \right]^{\frac{2 \cdot a \cdot b}{\sigma^2}}$$

$$B(t, T) = \left[ \frac{2 \cdot (e^{\gamma \cdot (T - t)} - 1)}{(a + \lambda + \gamma) \cdot (e^{\gamma \cdot t} - 1) + 2 \cdot \gamma} \right]$$

$$\gamma = \sqrt{(a + \lambda)^2 + \sigma^2}$$

Les données disponibles sont discrètes, et par conséquent, l'estimation des paramètres des modèles en temps continu n'est pas immédiate.

Lorsque la discrétisation exacte n'existe pas, comme dans le cadre du processus CIR, il convient de se tourner vers des approximations discrètes du processus continu sous-jacent. Le schéma d'EULER et de MILSTEIN sont les procédés de discrétisation les plus répandus. Le processus de discrétisation d'EULER consiste, dans le modèle de CIR, en l'approximation du processus continu  $r_t$  par le processus discret  $\tilde{r}_t$  défini avec les mêmes notations que précédemment par :

$$\tilde{r}_{t+1} = \tilde{r}_t + a \cdot (b - \tilde{r}_t) + \sigma \cdot \sqrt{\tilde{r}_t} \cdot \varepsilon$$

Avec  $\varepsilon$  suit  $N(0,1)$

### ➤ Estimation des paramètres

L'estimation des paramètres d'un processus racine carrée peut s'effectuer en recourant soit à la méthode des moindres carrés ordinaires, soit à celle de maximum de vraisemblance. Le point de départ de cette méthode consiste à régresser la série des taux courts à l'aide de la formule :

$$r_t = a \cdot b + (1-a) \cdot r_{t-1} + \sigma \cdot \sqrt{r_{t-1}} \cdot \varepsilon_t$$

Où, 
$$\frac{r_t}{\sqrt{r_{t-1}}} = \frac{a \cdot b}{\sqrt{r_{t-1}}} + (1-a) \cdot \sqrt{r_{t-1}} + \sigma \cdot \varepsilon_t$$

Posons

$$Y = \frac{r_t}{\sqrt{r_{t-1}}} \quad ; \quad Z = \frac{1}{\sqrt{r_{t-1}}} \quad ; \quad X = \sqrt{r_{t-1}}$$

Alors, on obtient une équation de régression sous la forme suivante :

$$Y = ab \cdot Z + (1-a) \cdot X + \sigma \cdot \varepsilon_t$$

Cette forme de régression est mieux appropriée pour estimer les paramètres du processus racine carrée à partir de la méthode des moindres carrés ordinaires.

Pour estimer les paramètres désirés, nous avons choisi comme taux court terme, le taux moyen pondéré (TMP) qui est un taux au jour le jour du marché monétaire. C'est un taux moyen pondéré par les montants des transactions déclarées, pour un échantillon représentatif d'établissements admis au marché interbancaire.

Nous nous sommes référés dans notre étude à la base des données journalières du TMP s'étalant du 1<sup>er</sup> Janvier 2007 au 31 décembre 2012, soit 2192 observations.

Dependent Variable: Y  
Method: Least Squares  
Date: 06/03/13 Time: 09:15  
Sample: 1/02/2007 12/31/2012  
Included observations: 2191

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
Z	0.004932	0.000367	13.43638	0.0000
X	0.850176	0.011189	75.98075	0.0000
R-squared	0.310174	Mean dependent var	0.181361	
Adjusted R-squared	0.309859	S.D. dependent var	0.008901	
S.E. of regression	0.007395	Akaike info criterion	-6.975221	
Sum squared resid	0.119695	Schwarz criterion	-6.970025	
Log likelihood	7643.355	Hannan-Quinn criter.	-6.973322	
Durbin-Watson stat	2.010817			

Figure : Estimation des paramètres du modèle CIR

Avant d'estimer les paramètres  $a$ , et  $b$  de notre modèle, il est nécessaire de valider le modèle de régression utilisé.

Premièrement, on remarque que la statistique de Durbin-Watson est proche de 2, donc on peut confirmer l'absence d'autocorrelation entre les erreurs.

Ensuite, on teste l'hypothèse d'homoscédasticité des erreurs à l'aide du test de White :

Heteroskedasticity Test: White			
F-statistic	1.956766	Prob. F(2,2188)	0.1416
Obs*R-squared	3.911901	Prob. Chi-Square(2)	0.1414
Scaled explained SS	3.825890	Prob. Chi-Square(2)	0.1476

Figure : Test d'hétéroscédasticité de White

La statistique de Fisher 1.956766 et la statistique LM 3.911901 confirment le non rejet de l'hypothèse d'homoscédasticité des erreurs avec des p-values supérieures au seuil d'erreur critique de 0.05.

Finalement, il nous reste de tester l'hypothèse de la normalité des erreurs :

Correlogram of Residuals						
Date: 06/03/13 Time: 10:56						
Sample: 1/02/2007 12/31/2012						
Included observations: 2191						
Autocorrelation	Partial Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob	
		1	-0.006	-0.006	0.0735	0.786
		2	-0.025	-0.025	1.4720	0.479
		3	0.003	0.003	1.4907	0.684
		4	0.005	0.004	1.5448	0.819
		5	-0.008	-0.007	1.6723	0.892
		6	-0.002	-0.002	1.6816	0.947
		7	0.027	0.027	3.3229	0.854
		8	0.003	0.003	3.3416	0.911
		9	-0.010	-0.009	3.5776	0.937
		10	-0.009	-0.009	3.7490	0.958
		11	0.002	0.002	3.7624	0.976
		12	0.012	0.012	4.0730	0.982
		13	0.052	0.052	9.9737	0.696
		14	-0.019	-0.019	10.776	0.704
		15	0.031	0.033	12.897	0.610
		16	-0.007	-0.008	13.007	0.672
		17	0.015	0.017	13.514	0.701
		18	0.002	0.003	13.524	0.760
		19	0.025	0.025	14.939	0.726
		20	0.023	0.020	16.062	0.713
		21	0.045	0.048	20.484	0.491
		22	0.020	0.022	21.409	0.496
		23	-0.023	-0.019	22.536	0.488
		24	0.003	0.002	22.551	0.546
		25	-0.014	-0.016	22.976	0.579
		26	0.025	0.022	24.331	0.557
		27	0.004	0.005	24.366	0.610
		28	-0.022	-0.027	25.454	0.603
		29	0.038	0.039	28.666	0.483
		30	-0.019	-0.021	29.458	0.494
		31	0.011	0.015	29.725	0.532
		32	-0.009	-0.014	29.923	0.572

Figure : correlogramme des résidus

Le corrélogramme des résidus du modèle montre que les résidus forment un bruit blanc puisque tous les termes ne sont pas significativement différents de zéro. Cette hypothèse se confirme par des p-values largement supérieures au seuil critique de 0,05.

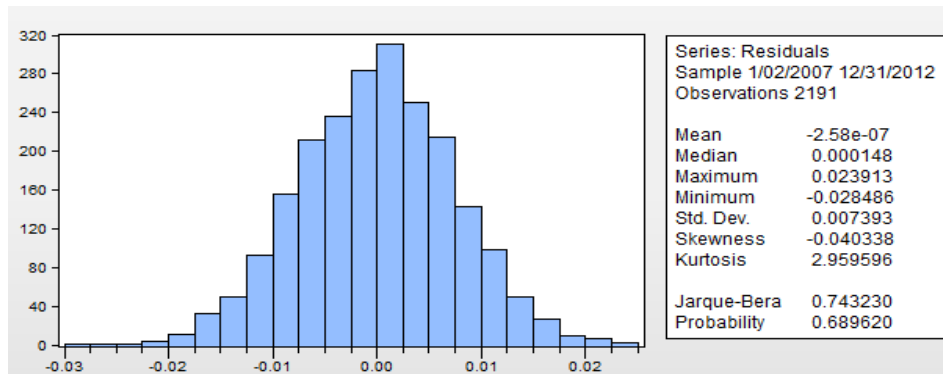


Figure : Test de normalité des résidus

Ainsi nous ne rejetons pas l'hypothèse de normalité des résidus, ce qui est confirmé par la statistique de Jarque-Bera, donc les résidus forment un bruit blanc gaussien.

L'analyse de cette régression nous montre, au regard du t de student, que les coefficients estimés sont significativement différents de zéro avec un niveau de confiance de 95%.

Alors, on peut déduire les paramètres du modèle de Cox Ingersoll Ross :

$$\begin{cases} a \cdot b = 0.004932 \\ 1 - a = 0.850176 \end{cases}$$

ce qui implique que  $a = 0.149824$ ,  $b = 0.032919$ , et  $\sigma = 0.007395$

Maintenant, que les paramètres du processus de diffusion sont estimés, il reste un seul paramètre à spécifier afin de pouvoir déterminer les prix des zéro-coupon. Ce paramètre est le

prix du risque du marché  $\Phi(t, T) = \frac{\lambda}{a} \cdot (e^{-a(T-t)} - 1)$  exprimé en fonction de la constante  $\lambda$ .

Cette variable mesure le point auquel les investisseurs exigent des rendements plus élevés pour les compenser du risque auquel ils seront exposés en détenant cette obligation. Malheureusement, ce prix du risque de marché n'est pas directement observé sur le marché. Ainsi, différentes méthodes sont employées pour spécifier sa valeur.

L'estimation de  $\lambda$  est obtenue par la minimisation des carrés des erreurs entre les taux zéro-coupon théoriques et ceux du marché

Afin de réaliser cette estimation, on utilisera le solveur d'Excel pour effectuer cette minimisation en initiant la valeur de  $\lambda$  par zéro.

Le solveur Excel nous donne la valeur suivante :

$$\lambda = -0.09544$$

Avec une somme des erreurs carrées égale à :  $\sum_T \text{erreurs}^2 = 0.0003109$

### ➤ Résultats du modèle

Ainsi, nous pouvons résumer les résultats obtenues pour la modélisation de la courbe des taux zéro coupon par le modèle de Cox Ingersoll Ross avec les graphes des courbes théoriques ci-dessous en prenant dans le premier graphe une prime de risque nulle, alors que dans la deuxième la valeur estimée à l'aide du solveur d'Excel :

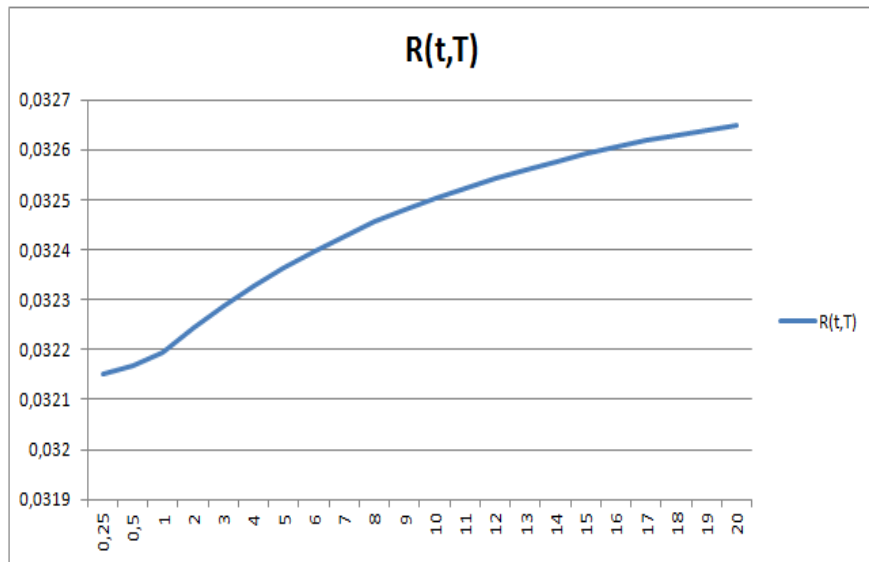


Figure : Courbe de taux CIR sans prime de risque

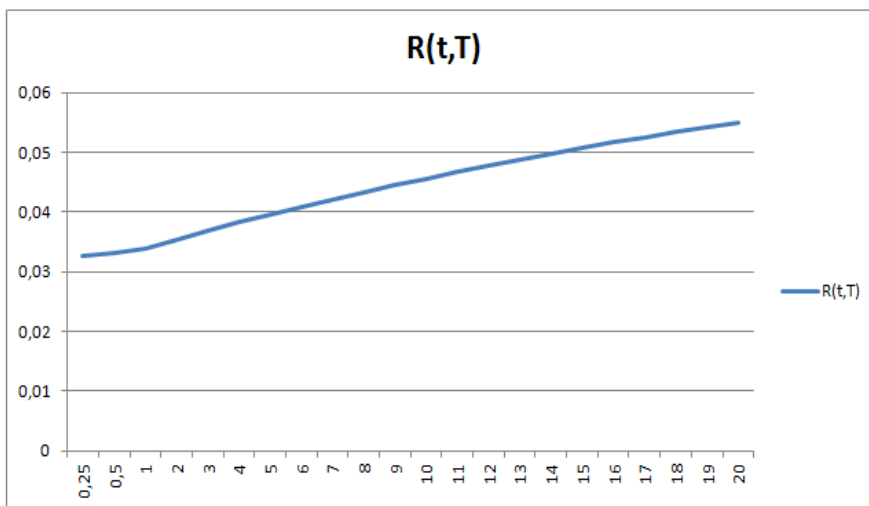


Figure : Courbe de taux CIR

Ensuite, on comparera cette structure de taux zéro coupon théorique avec la prime de risque du marché non nulle à la courbe des taux zéro-coupon du marché au 1<sup>er</sup> janvier 2013. Les courbes des taux zéro-coupon théorique et taux zéro-coupon du marché sont représenté sur le même graphe suivant :

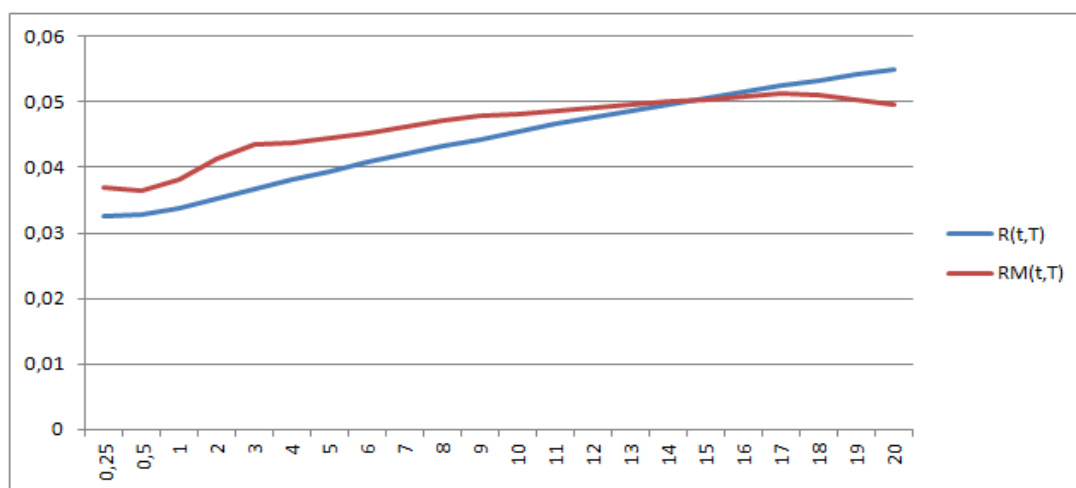
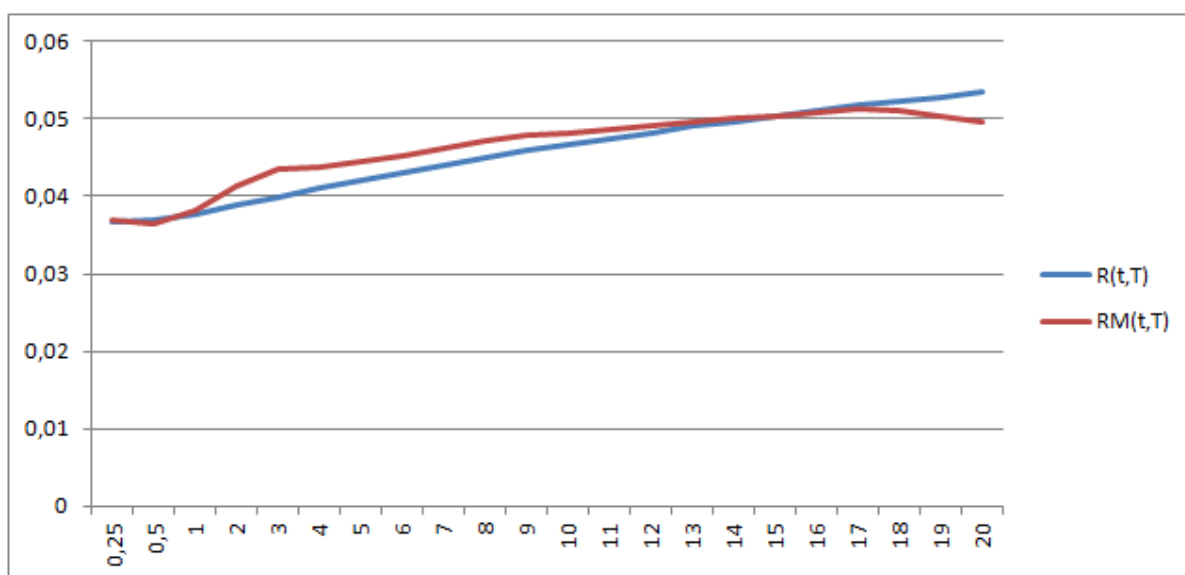


Figure : Comparaison entre la courbe des taux du marché et de CIR

On voit que les deux courbes évoluent presque partout de la même manière, on peut donc affirmer que le modèle de CIR nous a permis d'obtenir une courbe très rapprochée de celle du marché et il est même possible que la courbe théorique puisse être celle qui reflète le mieux la réalité du marché national.

On peut aussi remarquer que la différence qui existe entre les deux courbes, celle du marché et l'autre estimée avec le modèle de CIR, est due à la différence entre le taux court terme du marché et le taux moyen pondéré, considéré comme taux cours dans notre estimation. Par conséquent, si on considère que  $r_0$  est égale au taux court terme du marché  $r_0=3,64\%$ , notre nouvelle courbe estimée à l'aide du modèle de CIR sera :

Figure : Comparaison entre la courbe des taux du marché et de CIR (avec  $r_0=3,64\%$ )

Remarque : la prime de risque du marché est reestimée à l'aide de la méthode précédente et est égale à  $\lambda = -0.08401$

## II. Modélisation des actions

### II.1. Introduction

La mise en œuvre d'un modèle interne nécessite l'implémentation de processus d'évolution du rendement des actions.

Le modèle retenu doit représenter au mieux les phénomènes observés, y compris dans la queue de distribution dans laquelle se situe la variable d'intérêt (la VaR à 99,5 %).

Si le mouvement brownien géométrique (Black & Scholes) s'est imposé comme un standard, un certain nombre de ses propriétés sont infirmées par les observations ce qui pose la question du « bon modèle ».

Pour le calibrage de notre modèles utilisés dans la suite, nous avons fait l'hypothèse que les actions de notre portefeuille évoluent de la même manière que le marché représenté par l'indice boursier MASI (Moroccan All shares Index) ; C'est un indice qui intègre toutes les valeurs de type actions cotées à la Bourse des Valeurs de Casablanca. Il a pour objectif de présenter l'évolution du marché dans son ensemble et de fournir une mesure de référence à long terme pour la gestion du portefeuille actions. Il est large, dans la mesure où il permet de suivre de façon optimale le développement de l'ensemble de la population de valeurs de la cote.

Après la non vérification de l'hypothèse de la normalité des rendements journaliers, on a pris comme série d'observation les cours mensuels de l'indice MASI entre le 1<sup>er</sup> janvier 2006 et le 31 décembre 2012.

Les caractéristiques de ces séries sont les suivantes :

#### Série journalière :

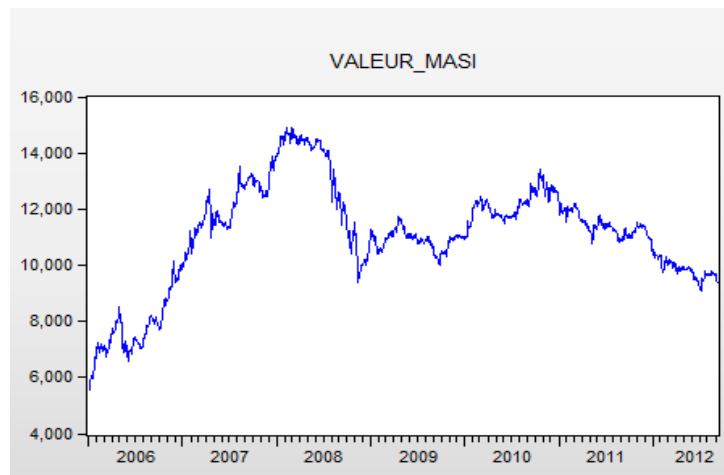


Figure : Série journalière des valeurs MASI

Ce graphe montre clairement l'existence de trois phases :

- 1- de 2006 à 2008 : une phase haussière due à une croissance forte de l'indice boursier.
- 2- en 2008 : une forte chute de l'indice justifiée par la crise économique mondiale.
- 3- à partir de 2009 : une certaine stabilité est remarquée.

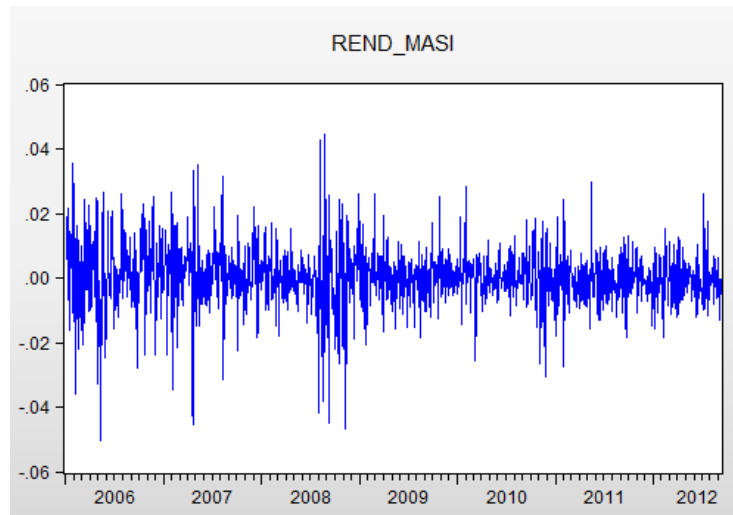


Figure : Série journalières des rendements MASI

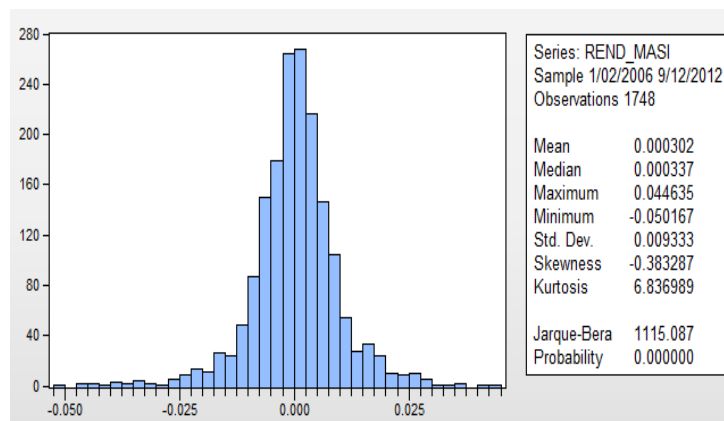


Figure : Distribution des rendements journaliers MASI

On remarque la statistique de Jarque-Bera est très grande ; la p-value est inférieure au seuil d'erreur critique de 5%. Donc on rejette l'hypothèse de la normalité des rendements journaliers du MASI.

**Série mensuelle :**

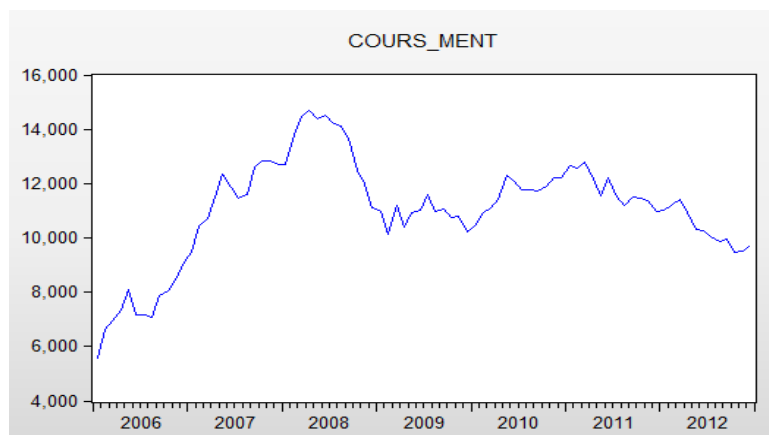


Figure : Série des Valeurs MASI

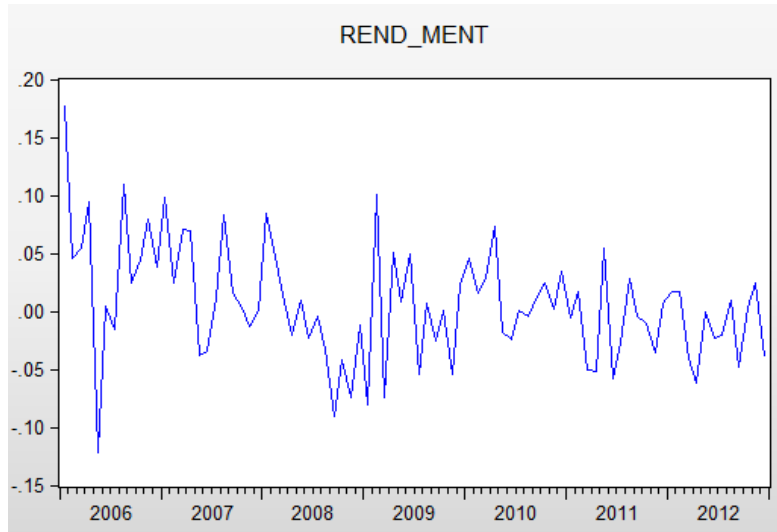


Figure : Série mensuelle des rendements MASI

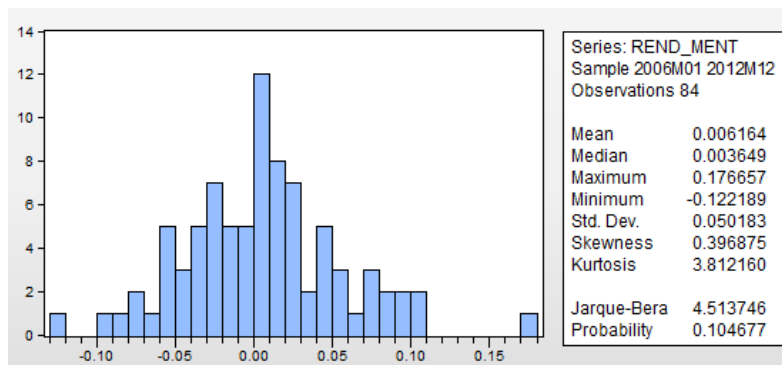


Figure : Distribution des rendements mensuels MASI

Cependant, pour les rendements mensuels de l'indice MASI, on ne rejette pas l'hypothèse de la normalité avec un niveau de confiance de 95%.

## II.2. le modèle de black et scholes

### ➤ présentation du modèle :

Les actions suivent un processus dit *brownien géométrique* qui a la forme suivante :

$$dS_t = \mu \cdot S_t \cdot dt + \sigma \cdot S_t \cdot dB_t$$

Avec

$S_t$  : est le prix de l'action à l'instant t.

$\mu$  : est le taux de rendement attendu.

$\sigma$  : est la volatilité de l'action.

$dB_t$  : est un processus de Wiener qui a la forme suivante :  $dB_t = \varepsilon \cdot \sqrt{dt}$  ou  $\varepsilon$  suit  $N(0,1)$ .

Un tel processus appartient à la famille des processus de Markov. Cela implique que la distribution des prix à tout instant du temps dépend uniquement du prix de l'action au temps  $t$ . La solution de cette équation est un processus de prix log-normal. Elle est donnée par la formule suivante :

$$S_t = \exp\left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) \cdot t + \sigma \cdot W_t\right]$$

Ou encore par :

$$S_t = S_0 \cdot \exp\left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) \cdot t + \sigma \cdot W_t\right]$$

Dans ces conditions, on peut affirmer que si le rendement des actions suit un processus brownien géométrique, alors le rendement en composition continue des actions entre  $t-1$  et  $t$  suit une loi normale de moyenne  $\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)$  et de variance  $\sigma^2$ .

$$\ln\left(\frac{S_t}{S_{t-1}}\right) = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) + \sigma \cdot (W_t - W_{t-1})$$

### ➤ Estimation des paramètres :

Afin de calibrer les paramètres de ce modèle nous avons utilisé la série d'observation mensuelle de l'indice MASI présentée et analysée dans la partie précédente. Ainsi on trouve les résultats suivants :

$$\mu = 0.007423 \quad \text{et} \quad \sigma = 0.050183$$

L'approche originale de Black & Sholes suppose que les rendements des prix des actifs financiers suivent un mouvement brownien géométrique. Ce modèle est simple et flexible. En outre, il donne des approximations raisonnables quand on l'applique à court terme. Cependant, des études empiriques ont montré que le modèle de Black & Sholes atteint ses limites lorsqu'on approche le mouvement extrême des prix des actifs (à long terme) ainsi que la variation de leurs volatilités.

## II.3. le modèle RSLN :

### ➤ Présentation du modèle

Le Processus RSLN a été introduit par Bollen en 1998 pour évaluer le prix des options américaines puis repris par Hardy en 2003 pour modéliser les rendements mensuels de TSE 300 et S & P 500. Il peut être considéré comme une alternative au modèle de Black & Sholes.

Une façon simple d'améliorer le modèle de Black & Sholes consiste à se donner  $k$  régimes  $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_k$ , chacun étant décrit par une loi normale  $N(\mu_i, \sigma_i^2)$  où le passage d'un régime à un autre est aléatoire. Pour simplifier, on suppose que le processus nous informant du régime en cours à un instant donné est markovien. Autrement dit, les probabilités de changement de régime dépendent uniquement du régime courant et non de l'historique du processus des régimes. Sous cette hypothèse, les changements de régimes sont complètement décrits par une matrice carrée  $(P_{i,j})_{1 \leq i, j \leq k}$  de probabilités de transition ( $P_{i,j}$  désigne la probabilité de passage du régime  $\rho_i$  au régime  $\rho_j$ ). Le modèle ainsi obtenu se

note RSLN(k). Le modèle de Black & Sholes est un ILN (Independent log normal) et le modèle dont il est question dans ce chapitre est un RSLN(2) (noté simplement RSLN2).

Hardy démontre que les modèles Régime-Switching en général et le RSLN2 en particulier appréhendent statistiquement mieux que les autres (Arima, Arch, Garch, ...) les périodes de trouble ou incertitude financière.

Le marché ou l'actif étudié va passer d'un régime de « croisière » à volatilité faible (stable) et moyenne haute à un autre de « crise » dont la volatilité est forte (instable) et la moyenne faible (chute des cours). La haute volatilité peut provenir alors de troubles économiques et politiques à court terme.

Ce que nous avons comme données sont les cours  $S_t$  du MASI durant la période étudiée. La série  $Y_t$  des logarithmes des rendements journaliers du MASI est donnée par :

$$Y_{t+1} = \ln\left(\frac{S_{t+1}}{S_t}\right)$$

L'hypothèse du processus RSLN2 est que  $(Y_t)_{0 \leq t \leq n}$  Switch entre deux lois normales  $N(\mu_1, \sigma_1^2)$  et  $N(\mu_2, \sigma_2^2)$ .

Soit  $(P_{i,j})_{1 \leq i, j \leq k}$  la matrice des probabilités de transition, on a :

$$P_{i,j} = P(\rho_t = j / \rho_{t-1} = i) ; \text{ La probabilité de passage du régime } i \text{ au régime } j.$$

Comme on a visiblement  $P_{1,1} + P_{1,2} = 1$ , et  $P_{2,1} + P_{2,2} = 1$ , il reste 6 paramètres à estimer pour notre modèle.

L'ensemble de ces paramètres est :  $\Theta = \{\mu_1, \mu_2, \sigma_1, \sigma_2, P_{1,2}, P_{2,1}\}$ .

### ➤ Estimation des paramètres :

Pour estimer ces paramètres, nous utilisons la méthode du maximum de vraisemblance.

La vraisemblance du vecteur aléatoire  $Y = (y_1, \dots, y_n)$  représentant l'ensemble de nos observations est :

$$L(\Theta) = f(y_1 / \Theta) \cdot f(y_2 / y_1, \Theta) \cdot f(y_3 / y_2, y_1, \Theta) \times \dots \times f(y_n / y_{n-1}, y_{n-2}, \dots, y_1, \Theta)$$

Où  $f(y_i)$  est la fonction de densité marginale de  $y_i$ . Notons que  $f$  est entièrement déterminée une fois connu le régime suivi à un certain instant, c'est simplement la fonction de densité de l'une des deux lois normales  $N(\mu_1, \sigma_1^2)$  ou  $N(\mu_2, \sigma_2^2)$ .

Pour calculer  $L(\Theta)$ , nous devons calculer pour tout  $t$  :

$$f(y_t / y_{t-1}, y_{t-2}, \dots, y_1, \Theta)$$

Ce calcul utilise des relations de récurrence qu'on trouvera dans Hamilton & Susmel (1994), reprises aussi dans Hardy (2003). On rappelle ces relations dans ce qui suit :

L'étape initiale consiste au calcul des formules suivantes :

$$f(\rho_1 = 1, y_1 / \Theta) = \frac{\pi_1}{\sigma_1} \cdot \phi\left(\frac{y_1 - \mu_1}{\sigma_1}\right)$$

$$f(\rho_1 = 2, y_1 / \Theta) = \frac{\pi_2}{\sigma_2} \cdot \phi\left(\frac{y_1 - \mu_2}{\sigma_2}\right)$$

Où  $\phi$  désigne la fonction de densité de la loi normale centrée réduite et  $\pi_i$  désigne la probabilité pour que le processus RSLN2 en question soit au régime  $i$ . On montre aisément que l'on a :

$$\pi_1 = \frac{P_{2,1}}{P_{1,2} + P_{2,1}} \quad \pi_2 = \frac{P_{1,2}}{P_{1,2} + P_{2,1}}$$

Ensuite,

$$f(y_1 / \Theta) = f(\rho_1 = 1, y_1 / \Theta) + f(\rho_1 = 2, y_1 / \Theta)$$

$$\text{Et, } p(\rho_1 / y_1, \Theta) = \frac{p(\rho_1, y_1 / \Theta)}{p(y_1 / \Theta)}$$

L'étape suivante consiste au calcul des formules récurrentes :

Pour tout  $t$ , en supposant connu  $f(y_{t-1} / y_{t-2}, y_{t-3}, \dots, y_1, \Theta)$  alors,

$f(y_t / y_{t-1}, y_{t-2}, \dots, y_1, \Theta)$  se calcule grâce aux trois formules récurrentes suivantes :

$$f(y_t / y_{t-1}, y_{t-2}, \dots, y_1, \Theta) = \sum_{1 \leq i, j \leq 2} f(\rho_t = i, \rho_{t-1} = j, y_t / y_{t-1}, y_{t-2}, \dots, y_1, \Theta)$$

Avec

$f(\rho_t = i, \rho_{t-1} = j, y_t / y_1, y_2, \dots, y_{t-1}, \Theta)$ , peut être décomposée de la manière suivante :

$$f(\rho_t = i, \rho_{t-1} = j, y_t / y_{t-1}, y_{t-2}, \dots, y_1, \Theta) = p(\rho_{t-1} = j / y_{t-1}, \dots, y_1, \Theta) \times p(\rho_t = i / \rho_{t-1} = j, \Theta) \times f(y_t / \rho_t = i, \Theta)$$

Ou,

$p(\rho_t = i / \rho_{t-1} = j, \Theta)$ , est la probabilité de transition du régime  $j$  au régime  $i$ .

Et  $f(y_t / \rho_t = i, \Theta) = \frac{1}{\sigma_i} \phi\left(\frac{y_t - \mu_i}{\sigma_i}\right)$  avec  $\phi$  la fonction de densité de la loi normale centrée

réduite. En ce qui concerne la partie  $p(\rho_{t-1} = j / y_1, \dots, y_{t-1}, \Theta)$  elle est égale à :

$$\frac{f(\rho_{t-1} = j, \rho_{t-2} = 1, y_{t-1} / y_{t-2}, \dots, y_1, \Theta) + f(\rho_{t-1} = j, \rho_{t-2} = 2, y_{t-1} / y_{t-2}, \dots, y_1, \Theta)}{f(y_{t-1} / y_{t-2}, \dots, y_1, \Theta)}$$

Pour la résolution du programme de maximisation de vraisemblance, on a définie une fonction  $\log(L(\Theta))$  à 6 paramètres  $\{\mu_1, \mu_2, \sigma_1, \sigma_2, p_{1,2}, p_{2,1}\}$  qui calcule le logarithme de vraisemblance du modèle RSLN2, correspondant à la série des cours du MASI (pour la série d'observation mensuelle MASI définie et analysée précédemment).

On a initialisé ces paramètres par la moyenne et l'écart type empiriques constatés sur notre série des log-rendements du MASI :

mu1	0,0061643
sigma1	0,0501827
mu2	0,0061643
sigma2	0,0501827
p12	0,5
p21	0,5

La valeur de la fonction  $\log(L(\Theta))$  avec ces paramètres est : 132,6442.

Par le solveur Excel, on a maximisé  $\log(L(\Theta))$  par la modification des valeurs initiales de chacun des paramètres en question, tout en imposant les contraintes naturelles :

$$0 \leq p_{1,2} \leq 1 ; 0 \leq p_{2,1} \leq 1 ; \sigma_1 > 0 ; \text{ et } \sigma_2 > 0$$

Le solveur nous a renvoyé les solutions suivantes :

mu1	0,0397757
sigma1	0,0612886
mu2	-0,0049608
sigma2	0,0396353
p12	0,0218229
p21	0,0119147

Elles maximisent notre fonction vraisemblance avec  $\log(L(\Theta)) = 139.5247$

Ensuite, on déduit de ces paramètres estimés les valeurs suivantes :

$$\pi_1 = 35,32\% \quad \pi_2 = 64,68\% \quad p_{1,1} = 97,82\% \quad p_{2,2} = 98,81\%$$

D'après les résultats obtenus, on peut distinguer aisément les deux régimes définis dans la partie théorique. Le premier régime correspond à une phase de croisière avec une moyenne élevée ainsi que le deuxième régime correspond à une phase de crise avec une moyenne faible.

Cependant, pour l'écart type, on constate que le deuxième régime de crise est moins volatile que le premier régime ce qui est causé principalement par notre série d'observation qui contient en majorité des observations prises en état de crise. Ce qui nous mène à considérer que la période de crise est la phase normale de notre série d'observation. Cette remarque se renforce par la valeur importante de  $\pi_2$  définie comme la probabilité d'être dans le deuxième régime.

## II.4. Comparaison entre le modèle Black-scholes et le modèle RSLN

Les modèles les plus complexes doivent apporter des améliorations significatives en rapport avec leur complexité (c'est le principe de parcimonie). Pour les modèles à complexité identique (i.e., le même nombre de paramètres), il est naturel de choisir celui qui possède la plus forte vraisemblance. Cependant, ce même critère de choix ne peut s'appliquer pour des modèles à complexités différentes car, tout simplement, il ne tient pas compte de ces dernières. Pour remédier à cette problématique, on utilisera le test du rapport de vraisemblance afin de choisir le bon modèle.

Le test du rapport de vraisemblance permet de comparer entre deux modèles, l'un emboîté dans l'autre. Soit  $M_1$  un modèle à  $k_1$  paramètres, emboîté dans un autre modèle  $M_2$  à  $k_2$  paramètres (c'est-à-dire que  $M_1$  est un cas particulier de  $M_2$ ). On a donc  $k_1 < k_2$ . Soient  $l_1$  et  $l_2$  les logarithmes des vraisemblances respectives des deux modèles  $M_1$  et  $M_2$ . Le test statistique du critère LRT est :  $2*(l_2-l_1)$

L'hypothèse nulle est :

$H_0$  : Pas d'amélioration significative apportée par  $M_2$ .

Sous l'hypothèse nulle, la statistique suit une loi  $\chi^2$  de degré de liberté égale à la différence entre le nombre des paramètres des deux modèles (i.e.,  $k_2-k_1$ ). La petite p-value du test entraîne alors le rejet de l'hypothèse nulle.

Puisque le modèle de Black et Scholes est un cas particulier du modèle RSLN2, alors on peut utiliser le test du rapport de vraisemblance pour tester la significativité de l'amélioration apportée par le modèle RSLN2.

D'après les paramètres estimés des deux modèles, on peut calculer les logarithmes des vraisemblances des deux modèles.

Les résultats de ce test sont représentés dans le tableau suivant :

modèle	nombre de paramètres (k)	logarithme de la vraisemblance (l)	statistique du test LRT
B&S	2	132,6442496	13,76080736
RSLN	6	139,5246533	

Tableau : test de rapport de vraisemblance entre B-S et RSLN

En comparant la statistique du test du rapport de vraisemblance avec la valeur de khi-deux à 4 degrés de libertés, on rejette l'hypothèse  $H_0$  avec un seuil d'erreur de 5% et on confirme l'amélioration apportée par le modèle RSLN2 dans la modélisation des rendements de notre portefeuille d'action.

De ce fait, dans la suite, le calcul du SCR action sera calculé à l'aide du modèle de RSLN.

## III. Calcul du SCR interne partiel :

### III.1. SCR souscription non vie interne :

Une seconde façon de déterminer le SCR non vie de la compagnie consiste à créer un modèle interne partiel. Pour ce faire, il est nécessaire de modéliser dans un premier temps la provision pour sinistres et dans un second temps la provision pour primes. Ces deux risques

sont ensuite agrégés afin d'obtenir la modélisation du passif en date 1. Le capital exigé réglementaire pour le risque non vie est obtenu en soustrayant la VaR à 99,5% de la distribution du passif à la date 1 et la provision best estimate globale de la date 0.

### III.1.1. Modélisation du Best estimate $t=1$ :

#### 1) Modélisation du best estimate des sinistres :

Pour la modélisation du best estimate des sinistres, nous avons fait appel aux différents résultats énoncés dans la partie relative aux calculs du best estimate via la méthode de Bootstrap et qui nous a permis de trouver la distribution du Best estimate des sinistres associée à chaque branche.

#### Distribution du best estimate des sinistres auto :

##### Branche auto corporel :

La méthode de Bootstrap appliquée pour le calcul du best estimate des sinistres pour la branche auto corporel donne le résultat et la distribution suivants :

- Best estimate des sinistres = 647886178
- Ecart type =90563378
- Distribution des best estimate auto corporel :

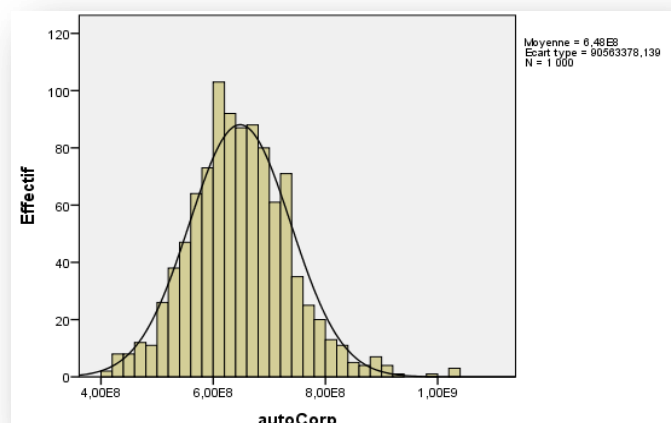


Figure : distribution du Best Estimata des sinistres pour la branche auto corporel

A première vue, on constate que la distribution de ce best estimate est gaussienne, mais une justification analytique doit être faite pour affirmer cette hypothèse, pour cela nous avons fait appel au test de Kolmogorov-Smirnov pour tester l'adéquation de la distribution normale.

```
> B=rnorm(1000,mean=mean(donnéecac),sd=sd(donnéecac))
> plot(B)
> ks.test(B,donnéecac$F1)

Two-sample Kolmogorov-Smirnov test

data: B and donnéecac$F1
D = 0.0504, p-value = 0.1571
alternative hypothesis: two-sided
```

Figure : Test de normalité de la distribution du Best Estimate des sinistres pour la branche auto corporel

Le test de Kolmogorov-Smirnov a bien donné une  $P_{\text{value}} = 0,1571$  bien supérieure à 0,05 ce qui permet d'accepter l'hypothèse de normalité de cette distribution.

### Branche auto matériel :

De même pour la branche auto matériel, la méthode de Bootstrap appliquée pour le calcul du best estimate des sinistres donne le résultat et la distribution suivants :

- Best estimate des sinistres = 156826109,71
- Ecart type = 14593263
- Distribution des best estimate auto matériel :

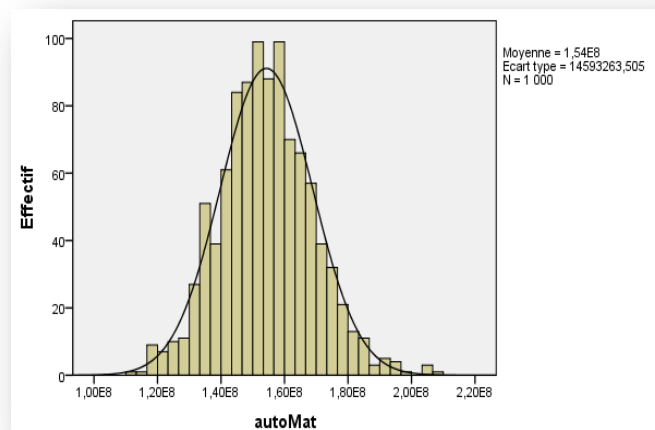


Figure : Distribution du Best Estimate des sinistres pour la branche auto matériel

A première vue, on constate aussi que la distribution de ce best estimate est gaussienne, mais une justification analytique doit être faite pour affirmer cette hypothèse, pour cela nous avons fait appel au test de Kolmogorov-Smirnov pour tester l'adéquation de la distribution normale.

```
> C=rnorm(1000,mean=mean(donnéeam),sd=sd(donnéeam))
> ks.test(C,donnéeam$F1)

Two-sample Kolmogorov-Smirnov test

data: C and donnéeam$F1
D = 0.0317, p-value = 0.6977
alternative hypothesis: two-sided
```

Figure : Test de normalité de la distribution du Best Estimate des sinistres pour la branche auto matériel

Le test de Kolmogorov-Smirnov a bien donné une  $P_{\text{value}} = 0,6977$  bien supérieure à 0,05 ce qui permet d'accepter l'hypothèse de normalité de cette distribution.

### Distribution du best estimate des sinistres AT :

De même pour la branche AT, la méthode de Bootstrap appliquée pour le calcul du best estimate des sinistres donne le résultat et la distribution suivants :

- Best estimate des sinistres = 631107512
- Ecart type = 102574100,14
- Distribution des best estimate AT :

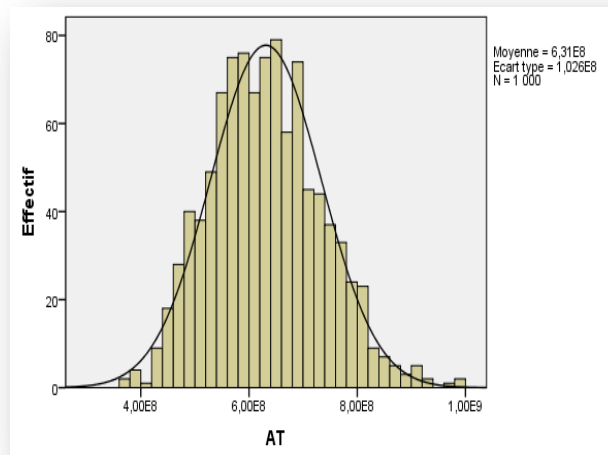


Figure : Distribution du Best Estimate des sinistres pour la branche AT

De la même manière, on constate aussi que la distribution de ce best estimate est gaussienne, mais une justification analytique doit être faite pour affirmer cette hypothèse, pour cela nous avons fait appel au test de Kolmogorov-Smirnov pour tester l'adéquation de la distribution normale.

```
> D=rnorm(1000,mean=mean(donnéeat),sd=sd(donnéeat))
> ks.test(D,donnéeat$F1)

Two-sample Kolmogorov-Smirnov test

data: D and donnéeat$F1
D = 0.0258, p-value = 0.8945
alternative hypothesis: two-sided
```

Figure : Test de normalité de la distribution du Best Estimate des sinistres pour la branche AT

Le test de Kolmogorov-Smirnov a bien donné une  $P_{\text{value}} = 0,8945$  bien supérieure à 0,05 ce qui permet d'accepter l'hypothèse de normalité de cette distribution.

**Synthèse :**

Les différentes analyses et test sur les branches d'étude nous ont permis d'accepter les suppositions suivantes :

branche	distribution	espérance	écart type
auto matériel	Normale	156 826 109,71	14 593 263,48
auto corporel	Normale	647 886 177,81	90 563 378,14
AT	Normale	631 107 512,09	102 574 100,14

Tableau : distribution des Best Estimate des sinistres

Et on supposant une indépendance entre la branche auto matériel et auto corporel, nous pouvons conclure que la branche auto et la branche AT suivent les distributions ci-dessous et cela via le théorème suivant de la stabilité de la loi normale :

**Théorème de la stabilité de la loi normale :**

Une combinaison linéaire de variables normales indépendantes est elle-même une variable normale.

Ainsi si :

$$X \sim N(\mu_x, \sigma_x) \text{ et } Y \sim N(\mu_y, \sigma_y), X \text{ et } Y \text{ étant indépendantes, alors}$$

$$\alpha X + \beta Y \sim N(\alpha\mu_x + \beta\mu_y, \sqrt{\alpha^2\sigma_x^2 + \beta^2\sigma_y^2}) \text{ Avec } \alpha \text{ et } \beta \text{ deux réels}$$

branche	distrubtion	esperance	ecart-type
auto	Normale	802 197 814	91 731 613
AT	Normale	631 107 512	102 574 100

Tableau : distribution du Best Estimate des sinistres pour la branche « auto » et « AT »

## 2) Modélisation de best estimate des primes :

La provision pour primes permet de couvrir la sinistralité de l'année N+1 pour les contrats souscrits durant l'année N.

Nous nous intéressons donc à la détermination de la sinistralité due aux contrats souscrits l'année N et encore en vigueur en N+1.

Pour effectuer cette modélisation du best estimate des primes, calculé dans la 2<sup>ème</sup> partie par la formule suivante :

$$\text{Best estimate des primes} = PPNA * S/p_{moyen}$$

$$\text{Avec : } S/p_{moyen} = \frac{1}{h+1} \sum_{k=N-h}^N \frac{C_{k,n}}{P_k}$$

Nous avons supposé que le S/P pour chaque branche suit une loi normale de moyenne  $\mu$  et écart-type  $\sigma$  estimés à partir d'un historique.

Et par la suite, nous aboutissons à une distribution du best estimate des primes en appliquant le théorème énoncé ci-dessus de la stabilité de la loi normale.

### Distribution des S/P :

branche	distribution	espérance S/P	écart type S/P
auto	Normale	47%	7%
AT	Normale	64%	4%

Tableau : distribution du S/P pour la branche « auto » et « AT »

Donc la distribution du ratio S/P pour la branche auto (resp la branche AT) est normale de paramètre 47%, 7% (resp 64%, 4%).

### Distribution du best estimate des primes :

branche	distribution	PPNA	espérance	écart-type
auto	Normale	546 218 000,00	258 287 456,20	38 235 260,00
AT	Normale	216 326 188,14	138 718 500,14	8 653 047,53

Tableau : distribution du Best Estimate des primes pour la branche « auto » et « AT »

Donc la distribution du Best estimate des primes pour la branche auto (resp la branche AT) est normale de paramètre 258287456,2 ; 38235260 (resp 138718500,14 ; 8653047,53).

### 3) Modélisation du best estimate total :

L'exigence de capital réglementaire est déterminée de sorte à limiter la probabilité de ruine à horizon un an à 0,5%. Le SCR non vie à horizon 1 an correspond donc à la différence entre la Value at Risk à 99,5% du passif en date 1 et la provision best estimate en date 0.

Afin d'obtenir la distribution de la provision best estimate globale, il suffit d'agrèger la distribution de la provision pour sinistres et la distribution de la provision pour primes. Or ces deux risques peuvent être supposés indépendants, dans la mesure où la provision pour sinistres fait intervenir les sinistres dont l'année de survenance est antérieure à la date 1 alors que la provision pour primes fait référence aux sinistres dont l'année de survenance correspond à la date 1.

Ce qui nous permettra à travers le théorème de la stabilité de la loi normale et la distribution normale qui caractérise les différentes provisions d'aboutir aux résultats suivants :

BE	distribution	espérance	écart type
auto	Normale	1 062 999 743,72	99 381 204,99
at	Normale	847 433 700,23	102 938 434,27

Tableau : distribution du Best Estimate total pour la branche « auto » et « AT » à t=1

Donc la distribution du Best estimate global à t=1 pour la branche auto (resp la branche AT) est normale de paramètre 1062999743,72 ; 99381204,99 (resp 847433700,23 ; 102938434,27).

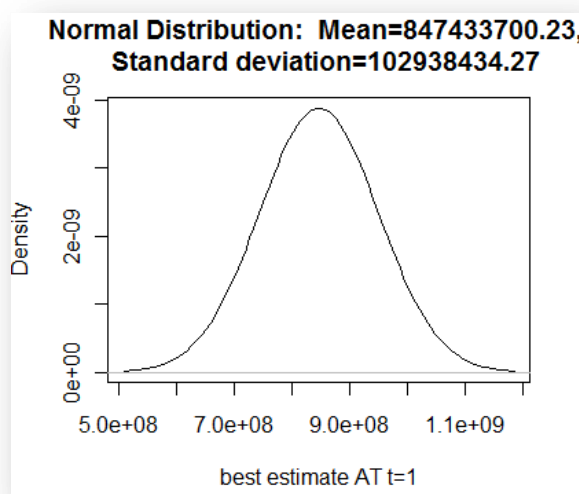


Figure : Distribution de Best Estimate à t=1 pour la branche AT

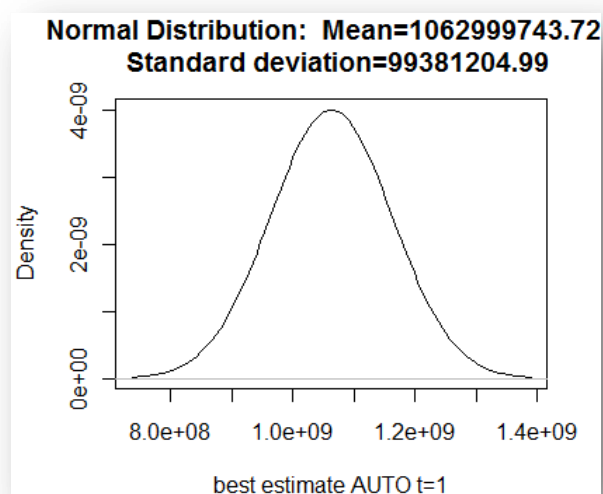


Figure : Distribution de Best Estimate à t=1 pour la branche « auto »

### III.1.2. Calcul du SCR souscription interne :

Après avoir déterminé la distribution du passif en date 1, il reste à calculer la provision best estimate à la date 0 pour obtenir le SCR non vie de la date 1.

La provision best estimate à la date t=0 ou ce qu'on appelle la provision d'ouverture qui est pour nous une donnée déterminée.

La différence entre ce montant et la VaR à 99,5% de la distribution du passif à la date 1 donne le SCR non vie.

branche	VaR(0,995) t=1	BE t=0	SCR souscription
auto	1 316 474 291,00	960 236 726,00	356 237 565,00
AT	1 112 585 536	814 262 081,00	298 323 455,00

Tableau : Calcul de SCR souscription interne pour la branche « auto » et « AT »

Le SCR non vie obtenu à l'aide du modèle interne partiel est donc évalué pour la branche auto à **356237565** et pour la branche AT à **298323455**.

### III.2. Calcul du SCR de marché :

#### Remarque :

La modification du SCR de souscription va entraîner une modification de la marge de risque pour les deux branches :

branche	cc	Duration D	Dur <sub>mod</sub>	SCR(0)	Marge de risque
auto	0,06	2,27	2,18	388 442 955,00	50 808 338,51
AT	0,06	2,57	2,48	321 418 235,37	47 827 033,42

Avec  $SCR(0) = SCR \text{ souscription interne} + SCR \text{ opérationnel (supposé fixe)}$

#### III.2.1. Calcul de $SCR_{\text{taux}}$ modèle interne :

Rappelons qu'un risque de taux d'intérêt existe pour tous les actifs et passifs dont la valeur d'actif nette est sensible aux variations de la structure par terme des taux d'intérêt ou à la volatilité des taux. Les actifs et passifs sensibles aux variations des taux d'intérêt sont les investissements en instruments à taux fixe, les passifs d'assurance ainsi que les instruments financiers (capitaux empruntés) et les dérivés de taux d'intérêt. Les flux de passifs futurs seront sensibles à une modification du taux d'actualisation de ces flux.

La valeur des actifs et passifs sensibles aux variations des taux d'intérêt peut être déterminée au moyen de la structure par terme des taux d'intérêt (« taux zéro »). Cette structure peut évidemment changer au cours d'une année, et de manière à pouvoir le calculer à travers la formule standard, on a utilisé des chocs prédéfinis par QIS5.

Par conséquent, le chargement en capital au titre du risque de taux d'intérêt est le résultat d'un scénario prédéfini :

$$\begin{aligned} SCR_{\text{taux}}^{\text{hausse}} &= \Delta VAN|_{\text{choc haussier}} \\ SCR_{\text{taux}}^{\text{baisse}} &= \Delta VAN|_{\text{choc baissier}} \end{aligned}$$

Où :  $\Delta VAN|_{\text{choc haussier}}$  et  $\Delta VAN|_{\text{choc baissier}}$  sont les variations de valeur de l'actif net résultant de la réévaluation de tous les instruments sensibles aux taux d'intérêt en fonction de structures par terme modifiées.

Dans cette partie nous allons nous intéresser à modéliser des chocs internes dont on se servira pour choquer notre courbe des taux.

Une fois ces deux courbes choquées finies, on procédera de la même manière que la formule standard pour calculer le  $SCR_{\text{taux}}$ .

#### 1) Modélisation des chocs internes :

De manière à pouvoir le faire nous allons suivre les étapes suivantes :

1<sup>ère</sup> étape : estimation des paramètres  $a$ ,  $b$ ,  $\sigma$ ,  $\lambda$  et  $r_0$  dans la partie modélisation du taux d'intérêt on a abouti au résultat suivant :

$$a = 0,149824$$

$$b = 0,032919$$

$$\sigma = 0,007395$$

$$\lambda = -0,09544$$

$$r_0 = 0,032318$$

2<sup>ème</sup> étape : prévision du paramètre  $r_{360}$  qui correspond au paramètre  $r_0$  d'ici une année.

Le modèle suivant relative à la méthode de Vasicek nous permettra de simuler d'une manière itérative 1000  $r_{360}$  :

$$r_{t+1} = r_t \cdot e^{-a} + b \cdot (1 - e^{-a}) + \sigma \cdot \sqrt{\frac{1 - e^{-2a}}{2 \cdot a}} \cdot \varepsilon$$

$$\text{Avec } \varepsilon \sim N(0,1)$$

3<sup>ème</sup> étape : déduction de la distribution de  $r_{360}$  ainsi que le quantile d'ordre 0,5% et 99,5%, comme étant deux cas extrêmes qui vont permettre de construire les deux courbes choquées.

La distribution du taux de rendement  $r_{360}$  :

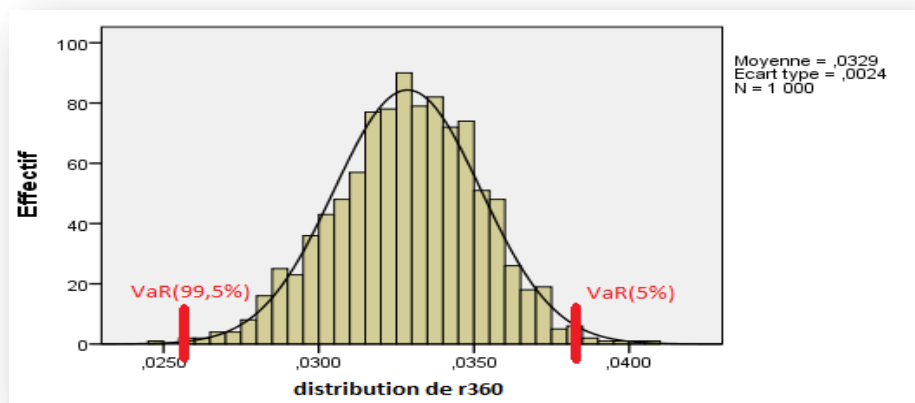


Figure : Distribution des rendements  $r_{360}$

A partir de cette distribution, on déduit les résultats suivant :

$$\text{Moyenne } (r_{360}) = 0,0329$$

$$\text{VaR } (r_{360}; 0,005) = 0,03965$$

$$\text{VaR } (r_{360}; 0,995) = 0,026704$$

4<sup>ème</sup> étape : construction de la courbe des taux haussière (resp. baissière) en réinjectant les paramètres ci-dessous dans la formule de  $R(t,T)$  donnée à partir du modèle CIR :

	courbe haussière	courbe baissière
a	0,149824	0,149824
b	0,032919	0,032919
$\sigma$	0,007395	0,007395
$\lambda$	-0,09544	-0,09544
$r_0$	0,039655	0,02674

Tableau : les paramètres des courbes de taux choquées

Cette formule permet de donner les courbes suivantes :

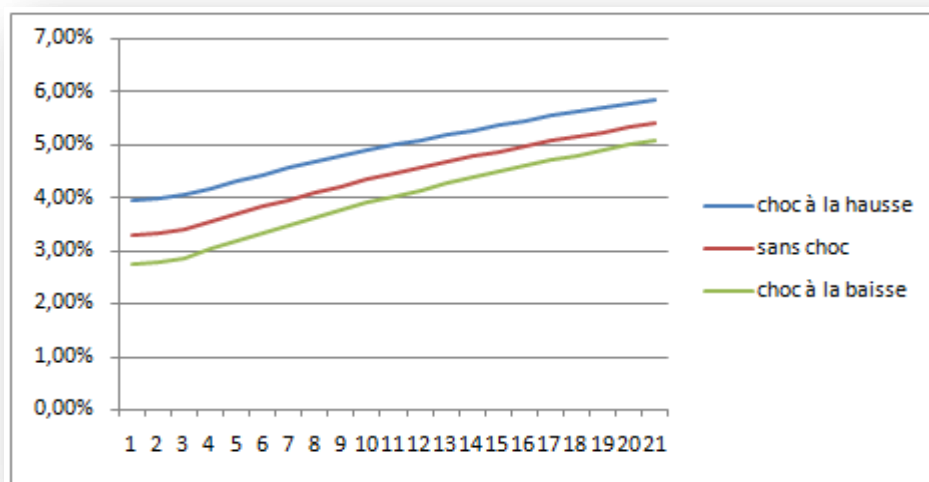


Figure : représentation graphique de la courbe des taux et des chocs

Numériquement on aboutit aux taux suivants :

maturité	0,25	0,5	1	2	3	4	5	6	7	8
choc haussier	3,94%	3,97%	4,04%	4,17%	4,30%	4,42%	4,54%	4,66%	4,77%	4,88%
taux normale	3,27%	3,31%	3,39%	3,54%	3,68%	3,82%	3,96%	4,09%	4,21%	4,33%
choc baissier	2,75%	2,79%	2,87%	3,04%	3,20%	3,35%	3,50%	3,64%	3,77%	3,91%

	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
	4,98%	5,08%	5,18%	5,27%	5,36%	5,45%	5,53%	5,61%	5,69%	5,77%	5,84%
	4,45%	4,56%	4,67%	4,78%	4,88%	4,98%	5,07%	5,17%	5,25%	5,34%	5,42%
	4,03%	4,16%	4,28%	4,39%	4,50%	4,61%	4,71%	4,81%	4,91%	5,00%	5,09%

Tableau : les courbes des taux sans chocs et avec chocs

## 2) Calcul du SCR<sub>taux</sub> :

D'une manière brève le calcul de SCR taux se fait de la même manière que la formule standard mais avec les nouvelles courbes choquées :

SCR taux AUTO		normale	hausse	baisse	SCR taux AT		normale	hausse	baisse
actif	capital actuel	783 453 173			actif	capital actuel	578 813 631		
	taux	3,39%	4,04%	2,87%		taux	3,39%	4,04%	2,87%
	capital futur	809 993 845				capital futur	598 421 826		
	capital après choc		778 543 053	787 366 830		capital après choc		575 186 044	581 705 033
passif	capital actuel	744 099 821			passif	capital actuel	538 878 209		
	capital après choc		740 575 949	753 906 330		capital après choc		537 355 472	546 810 117
	NAV	39 353 352	37 967 104	33 460 500		NAV	39 935 423	37 830 572	34 894 916
	ΔNAV	0	1 386 249	5 892 853		ΔNAV	0	2 104 851	5 040 507
		SCR taux	5 892 853				SCR taux	5 040 507	

Tableau : Calcul du SCR taux interne pour les branches « auto » et « AT »

Ce qui montre que le SCR taux pour la branche « auto » est de 5892853 et le SCR taux pour la branche AT est de 5040507.

### III.2.2. Calcul du SCR action modèle interne :

Le risque sur actions résulte du niveau ou de la volatilité de la valeur de marché des actions. L'exposition au risque sur actions concerne tous les actifs et passifs dont la valeur est sensible aux variations des cours de bourse.

Le sous-module Risque sur actions fait appel à des indices comme indicateurs de risque. Par conséquent, les données relatives à la volatilité et aux corrélations sont dérivées de ces indices. On suppose que toutes les actions peuvent être affectées à un indice de l'ensemble fourni.

Les scénarios de choc envisagés pour les différents indices illustrent le risque systématique inhérent à ce portefeuille de marché. On suppose que l'exposition au risque systématique du portefeuille d'actions des compagnies d'assurance est identique à l'exposition de l'indice (indicateur du risque) lui-même, c'est-à-dire que le bêta est égal à 1.

Les participants ne doivent pas supposer qu'ils achètent d'autres instruments de couverture (par exemple, dans le cadre d'un programme de couverture glissant) outre ceux qui sont en vigueur à la date de clôture des comptes.

Le chargement en capital est déterminé comme le résultat d'un scénario de choc prédéfini pour cet indice :

$$SCR_{actions} = \max (\Delta VAN|_{\text{choc sur actions}} ; 0)$$

Où le choc boursier se modélise en interne à partir des modèles des rendements d'action de la façon suivante :

#### 1) Modélisation du choc interne à partir du modèle de RSLN :

Dans ce paragraphe, nous allons nous intéresser à expliquer la manière dont on modélise le choc d'action :

- Premièrement, à travers l'estimation des différents paramètres du modèle de RSLN, nous sommes arrivés à simuler un certain nombre de trajectoire de l'évolution de cours des actions sur les prochaines années.
- Deuxièmement, afin de pouvoir dégager un choc, nous devons prendre l'évolution la plus défavorable correspondante à VaR(99,5%) à 1 an, par suite on appliquera ce choc baissier sur notre portefeuille d'action pour les branches d'études.

L'écart entre ce portefeuille défavorable projeté et le portefeuille d'action à l'instant t=0 correspond au SCR action.

Le schéma suivant donne un aperçu simple sur cette méthode :

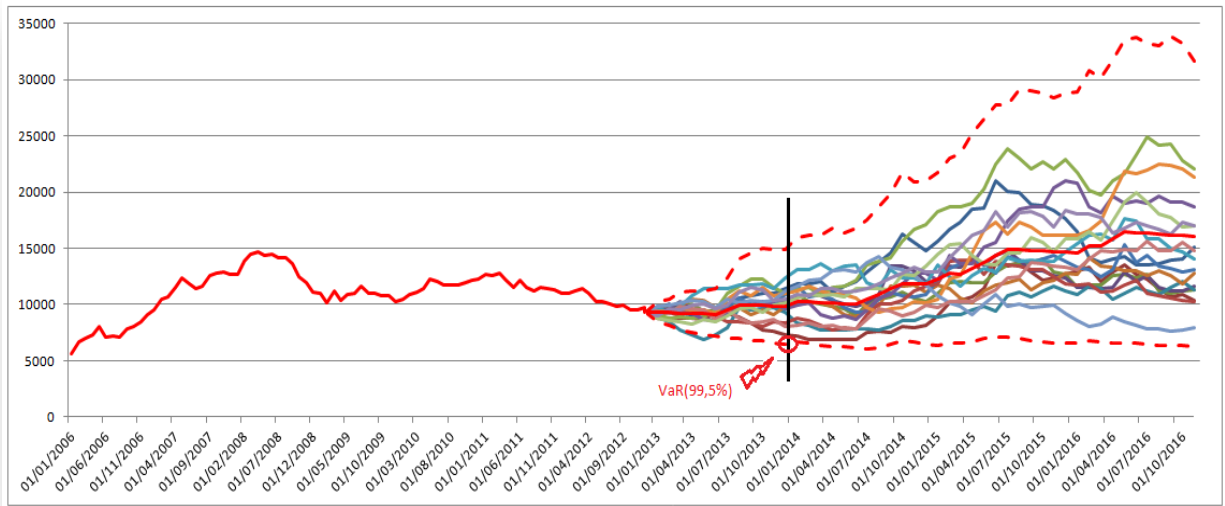


Figure : schéma représentant la simulation des trajectoires des cours des actions MASI à l'aide du modèle RSLN

Ce schéma montre clairement les différents scénarios prévus par le modèle pour fin 2013. Ce qui nous permis de déduire la distribution des rendements :

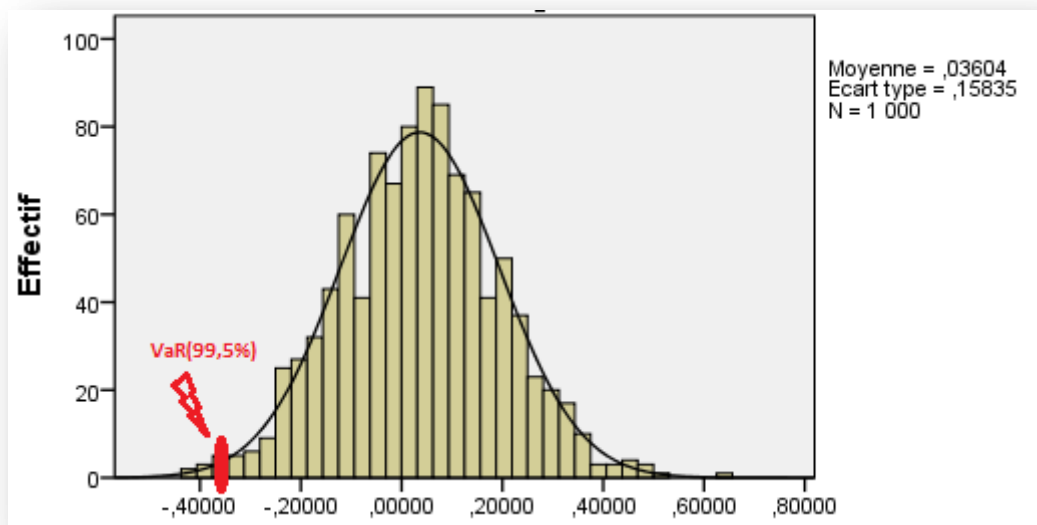


Figure : Distribution des rendements des actions à 1 an

Le choc donné par le modèle RSLN au niveau 99,5% correspond à -37,12% et pour rappel le choc appliqué par QIS5 est de -40%.

2) Calcul du SCR action interne :

En appliquant ce choc sur notre actif et passif de la même manière que la formule standard, on aboutit aux résultats suivants pour les deux branches :

	Situation normale	Situation après le choc
Valeur de l'actif	334 142 424,67	210 108 756,63
Valeur du passif	318 899 923,12	318 899 923,12
NAV	15 242 501,55	-108 791 166,48
$\Delta$ NAV	-----	124 033 668,04

	Situation normale	Situation après le choc
Valeur de l'actif	245 295 913,70	154 242 070,53
Valeur du passif	230 947 803,67	230 947 803,67
NAV	14 348 110,03	-76 705 733,14
$\Delta$ NAV		91 053 843,16

SCR action	124 033 668,04
------------	----------------

SCR action	91 053 843,16
------------	---------------

Tableau : Calcul du SCR action interne pour la branche « auto » et « AT »

Le SCR action trouvé pour la branche auto est de l'ordre de 124033668,04 et de 91053843 pour la branche AT.

**Synthèse :**

Les deux schémas suivants récapitulent les résultats trouvés pour les risques étudiés et cela pour les deux branches :

branche auto

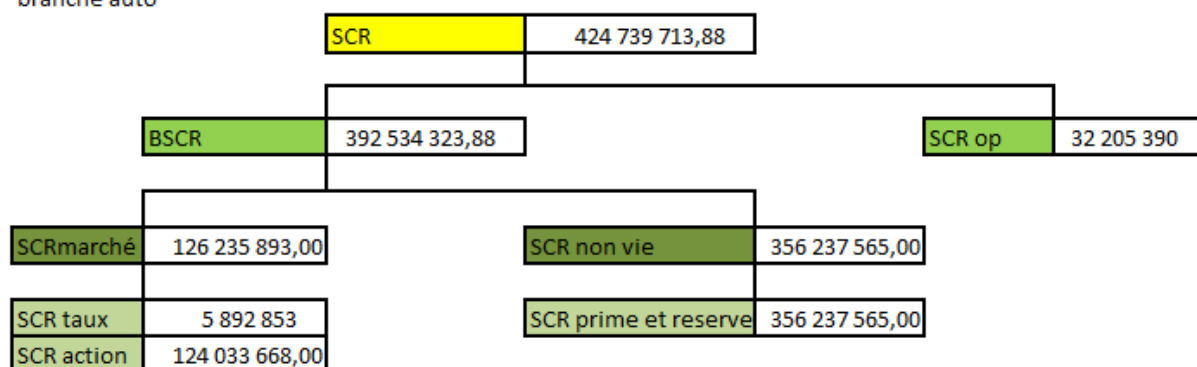


Figure : Schéma récapitulatif des SCR interne pour la branche auto

branche AT

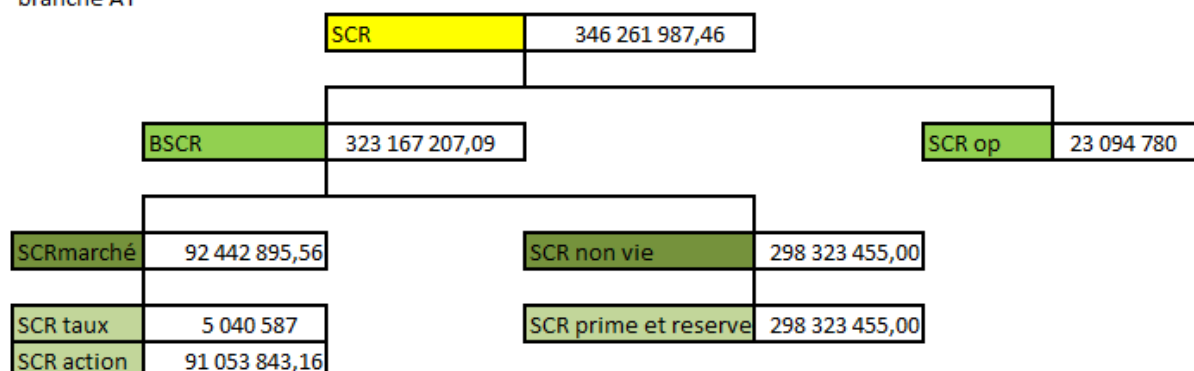


Figure : Schéma récapitulatif des SCR interne pour la branche AT

**PARTIE 5 : Comparaison et analyse des deux SCR, « standard » et « interne ».**

Dans cette partie, nous allons nous intéresser à l'explication de la provenance des différents écarts constatés entre le calcul à travers le modèle standard (QIS5) et travers la modélisation interne.

Les deux graphiques suivants montrent les différents écarts pour les deux branches « auto » et « AT » :

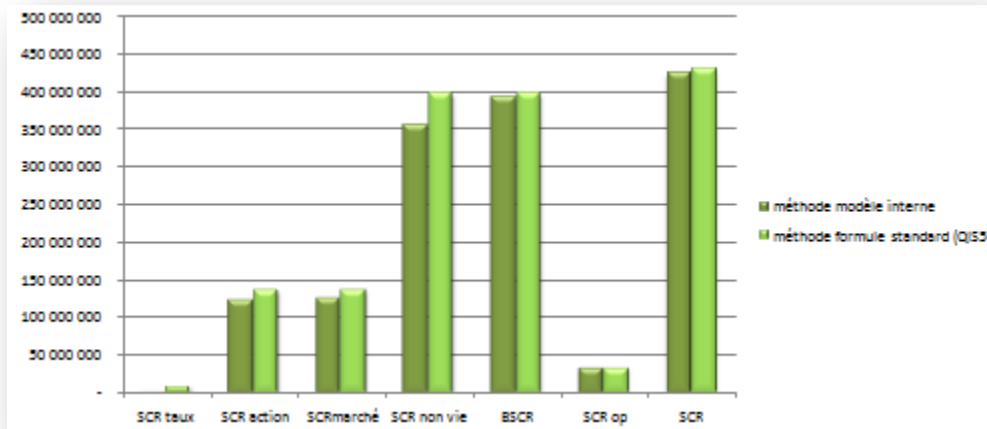


Figure : Comparaison entre les SCR standard et interne pour la branche auto

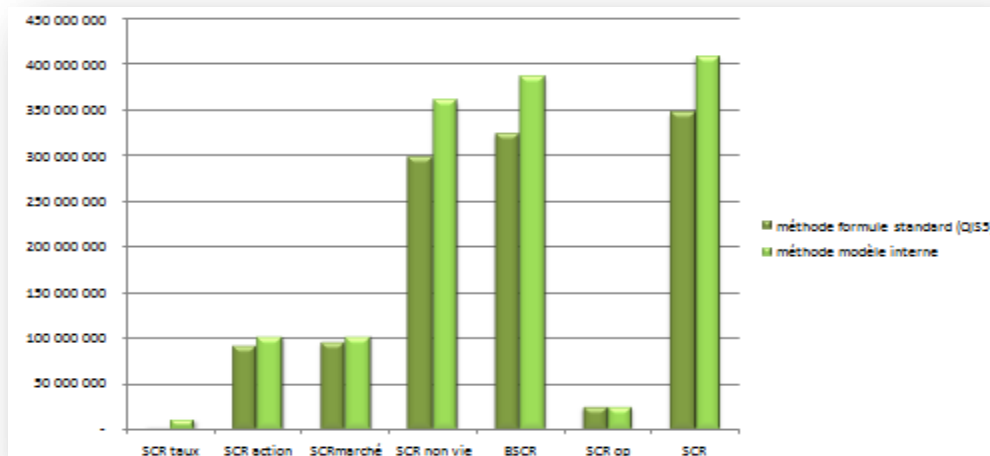


Figure : Comparaison entre les SCR standard et interne pour la branche AT

## I. Comparaison des SCR de souscription :

Pour rappel, le SCR non vie obtenu à partir de la formule standard s'élève pour la branche auto (resp. AT) à 397604051,52 (resp. 360309814,03) tandis que celui obtenu à l'aide du modèle interne partiel est de 356237565 (resp. 298323455).

branche	SCR souscription standard	SCR souscription interne
auto	397 604 051,52	356 237 565,00
AT	360 309 814,03	298 323 455,00

Tableau : Comparaison entre le SCR souscription interne et standard pour la branche « auto » et « AT »

La différence entre ces deux SCR peut sembler au premier abord importante.

Une analyse des résultats est donc indispensable afin de comprendre la provenance de cet écart.

Le SCR non vie obtenu à l'aide d'un modèle interne correspond, dans notre exemple, à la différence entre la provision best estimate de la date 0 et la VaR à 99,5% de la distribution du passif à la date 1. La différence entre les deux provisions best estimate (de date 1 et de date 0). La première source de différence entre les deux SCR réside donc dans la volatilité du passif de la date 1.

Pour rappel, les volatilités pour la branche auto (resp. AT) calculé dans la partie relative au calcul des SCR non vie par la formule standard sont de l'ordre de 10,24% (resp. 14,21%)

Or à partir des distributions des best estimate global à t=1 pour la branche auto (resp. AT), il est déduit que le best estimate est de l'ordre de 1062999743,72 (resp 847433700,23) ainsi qu'un écart type empirique de 99381204,99 (resp 102938434,27). Ce qui conduit à une volatilité de 9,34% (resp 12,1%)

branche	Volatilité QIS5	Volatilité modèle interne
auto	10,24%	9,35%
AT	14,21%	12,15%

Tableau : comparaison entre les volatilités interne et standard des branches « auto » et « AT »

Au suivant nous allons faire des stress test sur les volatilités du modèle standard et cela pour chaque branche :

### Stress-test pour la branche auto :

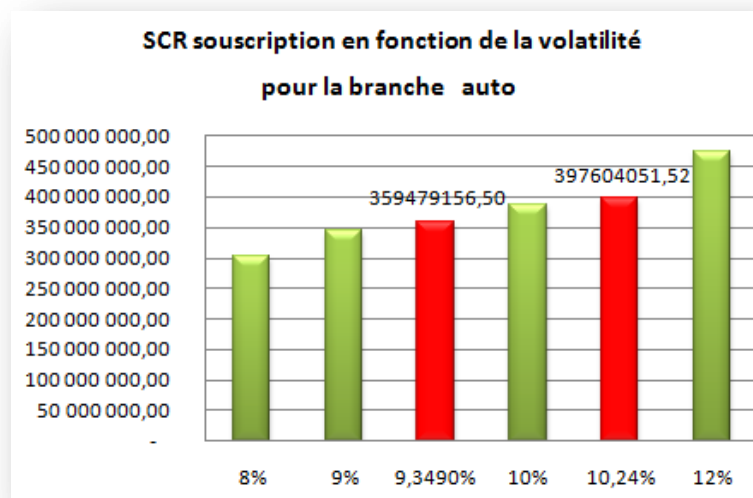


Figure : SCR souscription en fonction de la volatilité pour la branche « auto »

Ce graphique montre clairement que si la volatilité du modèle standard qui est égale à 10,24% est remplacé par la volatilité du modèle interne, alors la valeur du SCR de souscription serait de 359479156,50 (très proche du SCR souscription donnée par le modèle interne égale à 356237565) ce qui justifie que l'écart entre les deux SCR est dû essentiellement à la volatilité du best estimate, l'écart qui reste est donc provenant de l'erreur d'estimation des modèles.

### Stress -test pour la branche AT :

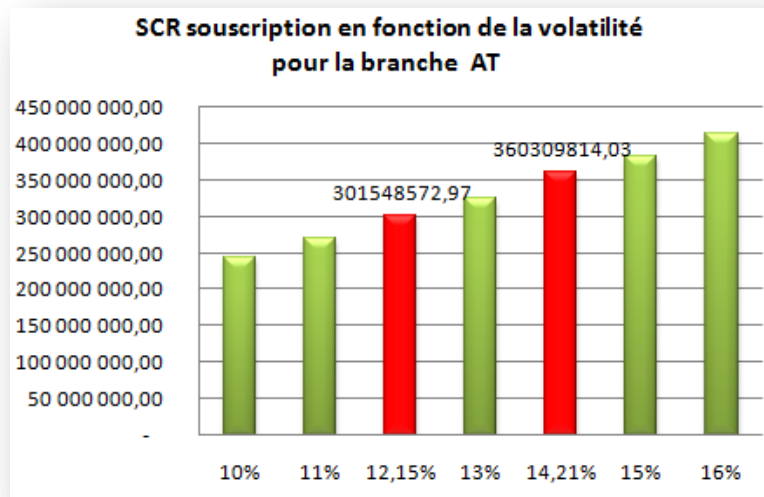


Figure : SCR souscription en fonction de la volatilité pour la branche « AT »

De même pour la branche AT, ce graphique montre clairement que si la volatilité du modèle standard qui est égale à 14,21% est remplacé par la volatilité du modèle interne 12,15%, alors la valeur du SCR de souscription serait de 301548572,97 (très proche du SCR souscription donnée par le modèle interne égale à 298323455) ce qui justifie que l'écart entre les deux SCR est du essentiellement à la volatilité du best estimate, l'écart qui reste est donc provenant de l'erreur d'estimation des modèles.

### Synthèse :

Les volatilités fournies par le QIS 5 sont plus fortes que celles obtenues avec le modèle interne partiel ce qui mènent à engendrer un excédent de capital règlementaire, et cela pour les deux branches ce qui explique l'écart entre les deux SCR. En résumé, le SCR non vie plus élevé est celui calculé à partir de la formule standard qui reflète mal le profil de risque très spécifique de la compagnie.

## II. Comparaison des SCR marchés pour les deux branches

### II.1. Comparaison des SCR taux :

branche	SCR taux standard	SCR taux interne
auto	8 215 724	5 892 853
AT	9 953 117	5 040 507

Tableau : Comparaison entre le SCR taux interne et standard pour la branche « auto » et « AT »

On constate que Les SCR taux donnés par le modèle interne partiel sont bien inférieurs à ceux donnés par la formule standard et cela pour les deux branches. En comparant entre les chocs suivant données par QIS5 et les chocs internes modélisés on constate que la cause de cet excédent de capital issu de la formule standard est la supériorité des chocs de la formule standard par rapport au modèle interne, cette formule standard qui reflète mal le profil de risque.

Chocs du modèle interne :

maturité	0,25	0,5	1	2	3	4	5	6	7	8
choc haussier	20,34%	19,96%	19,25%	17,94%	16,78%	15,75%	14,82%	13,98%	13,22%	12,53%
choc baissier	-16,03%	-15,73%	-15,17%	-14,14%	-13,23%	-12,41%	-11,68%	-11,02%	-10,42%	-9,87%

	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
	11,89%	11,31%	10,78%	10,29%	9,83%	9,41%	9,02%	8,65%	8,31%	7,99%	7,69%
	-9,37%	-8,92%	-8,50%	-8,11%	-7,75%	-7,42%	-7,11%	-6,82%	-6,55%	-6,29%	-6,06%

Tableau : les chocs haussiers et baissiers de la courbe des taux interne

Chocs donnés par la formule standard (QIS5) :

maturité	0,25	0,5	1	2	3	4	5	6	7	8
choc haussier	70%	70%	70%	70%	64%	59%	55%	52%	49%	47%
choc baissier	-75%	-75%	-75%	-65%	-56%	-50%	-46%	-42%	-39%	-36%

	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
	44%	42%	39%	37%	35%	34%	33%	31%	30%	29%	27%
	-33%	-31%	-30%	-29%	-28%	-28%	-27%	-28%	-28%	-28%	-29%

Tableau : les chocs haussiers et baissiers de la courbe des taux standard (QIS5)

## II.2. comparaison des SCR action :

branche	SCR action interne	SCR action standard
auto	124 033 668,04	135 862 021,04
AT	91 053 843,16	100 593 159,27

Tableau : : Comparaison entre le SCR action interne et standard pour la branche « auto » et « AT »

On constate que les SCR actions calculés par la formule standard sont pour les deux branches auto et AT supérieurs aux SCR de marché donnés par le modèle interne partiel, cela est du aux chocs internes calculés à partir de la méthode de simulations issue du modèle de RSLN et qui s'est avérée qu'ils sont bien inférieurs aux chocs donnés par la formule standard (QIS5). Ce qui mène à engendrer un excédent de capital réglementaire pour la méthode standard par conséquence cette méthode reflète mal le profil de risque de marché lié à la compagnie.

## Conclusion :

La nouvelle directive européenne Solvency II modifie considérablement les méthodes de déterminations des provisions techniques et de l'exigence de capital réglementaire. Solvency I déterminait l'exigence de capital d'une façon assez simpliste à l'aide des primes ou des provisions, c'est-à-dire l'exigence de capital tenait compte que du risque de souscription non-vie.

Et par la suite, l'apparition de Solvency II pour une correction des défauts de Solvency I, dont le nouveau objectif est de mieux adapter les fonds propres exigés des compagnies d'assurances et de réassurance avec les risques que celles-ci encourent dans leur activité ce qui veut dire que cette fois-ci le capital réglementaire devra couvrir tous les risques et non pas seulement le risque de souscription.

Cette Solvency II qui fera appel à de nouvelles méthodes plus complexe pour le calcul de ce capital réglementaire qui sera déterminée de sorte à limiter la probabilité de ruine à horizon un an à 0,5%.

La première méthode de calcul est une méthode standard (QIS5) que peuvent utiliser les compagnies d'assurance dans un soucis de simplification, mais cette méthode peut engendrer, dans certains cas, un excédent de capital réglementaire qui pourra être d'un poids lourd.

La deuxième méthode utilisée est la méthode de modélisation interne partielle. Malgré que c'est une méthode complexe et que sa mise en place engendrera des coûts supplémentaires pour la compagnie, cette méthode nous a permis de conclure dans notre cas que c'est la méthode qui représente le mieux notre profil de risque vu qu'elle nous a permis de dégager des exigences de capital réglementaire bien inférieures aux capitaux calculés par la méthode standard.

Ces écarts entre les différents capitaux réglementaires relatifs à chaque risque sont justifiés par :

**Pour le risque de souscription non vie :** la volatilité des branches était la cause principale de la provenance de l'écart. Ayant eu comme volatilité interne des valeurs inférieures à celles données par la formule standard (QIS5)

**Pour le risque de marché :** La différence entre les deux capitaux réglementaires couvrant ce risque provient des chocs donnés par QIS5 qui s'avèrent supérieurs aux chocs donnés par le modèle interne et qui reflètent le mieux le profil de risque.

Cependant, dans ce mémoire, seule l'exigence de capital pour le risque non vie, marché et opérationnel ont été modélisées. Il serait donc intéressant de modéliser tous les risques aussi importants propres à une compagnie d'assurance comme le risque de crédit, de liquidité, de défaut de contrepartie, de catastrophe et des actifs intangibles..., et de quantifier l'écart observé entre un modèle interne et la formule standard. Le travail réalisé ici n'est qu'une étape intermédiaire.

## Bibliographie :

- QIS5 Technical Specifications.
- Winter & associés : Assurance de biens et de responsabilité « Enjeux actuariels ».
- [www.ressources-actuarielles.net](http://www.ressources-actuarielles.net).
- ROB KAAS - MARC GOOVAERTS -JAN DHAENE - MICHEL DENUIT : Modern Actuarial Risk Theory Using R.
- [www.institutdesactuaire.com/docs/evaluation-stochastique-PSAP-20-01-2004.ppt](http://www.institutdesactuaire.com/docs/evaluation-stochastique-PSAP-20-01-2004.ppt).
- [www.slideserve.com/ananda/evaluation-stochastique-de-la-provision-pour-sinistres](http://www.slideserve.com/ananda/evaluation-stochastique-de-la-provision-pour-sinistres).
- R graphical manual : [rgm2.lab.nig.jp/RGM2/func.php?rd\\_id=ChainLadder:MackChainLadder](http://rgm2.lab.nig.jp/RGM2/func.php?rd_id=ChainLadder:MackChainLadder).
- Pr. Arthur Charpentier : Statistique de l'assurance, STT 6705V , Statistique de l'assurance 2 - <http://freakonometrics.blog.free.fr/>.
- Chain Ladder Package : [opensourceoftware.casat.org/chain-ladder-package](http://opensourceoftware.casat.org/chain-ladder-package).
- Pr.OULIDI Abderahim : Notes de cours d' IARD (INSEA).
- M.Dbich Abderahim : Notes de cours d'assurance non vie (INSEA)
- Pr.EL QALLI Yassin : Notes de cours d'économétrie de la finance et modèles mathématiques appliquées à la finance (INSEA)
- Projets de fin d'étude des ingénieurs d'Etat de l'INSEA.

## Annexe :

### Annexe 1 : Vérification des hypothèses de Mack Chain Ladder :

**Hypothèse 1 : l'indépendance entre les années de survenances.**

**Branche autoP :**

	diag	G <sub>t</sub>	P <sub>t</sub>	Z <sub>t</sub>	n <sub>t</sub> =G <sub>t</sub> +P <sub>t</sub>	m <sub>t</sub>	E(Z <sub>t</sub> )	V(Z <sub>t</sub> )		
2005	1	0	2	0	2	0	0,5	0,25		
2006	2	2	1	0	3	1	0,75	0,1875		
2007	3	4	0	0	4	1	1,25	0,4375		
2008	4	4	1	2	5	2	1,5625	0,37109375		
2009	5	0	4	3	4	1	1,25	0,4375		
2010	6	4	3	3	7	3	2,40625	0,55371094		
2011	7	1	5	3	6	2	2,0625	0,62109375		
2012	8	8	0	3	8	3	2,90625	0,80371094	borne inf	borne sup
			total	14			12,6875	3,66210938	5,50976563	19,8652344

**Branche auto corporel :**

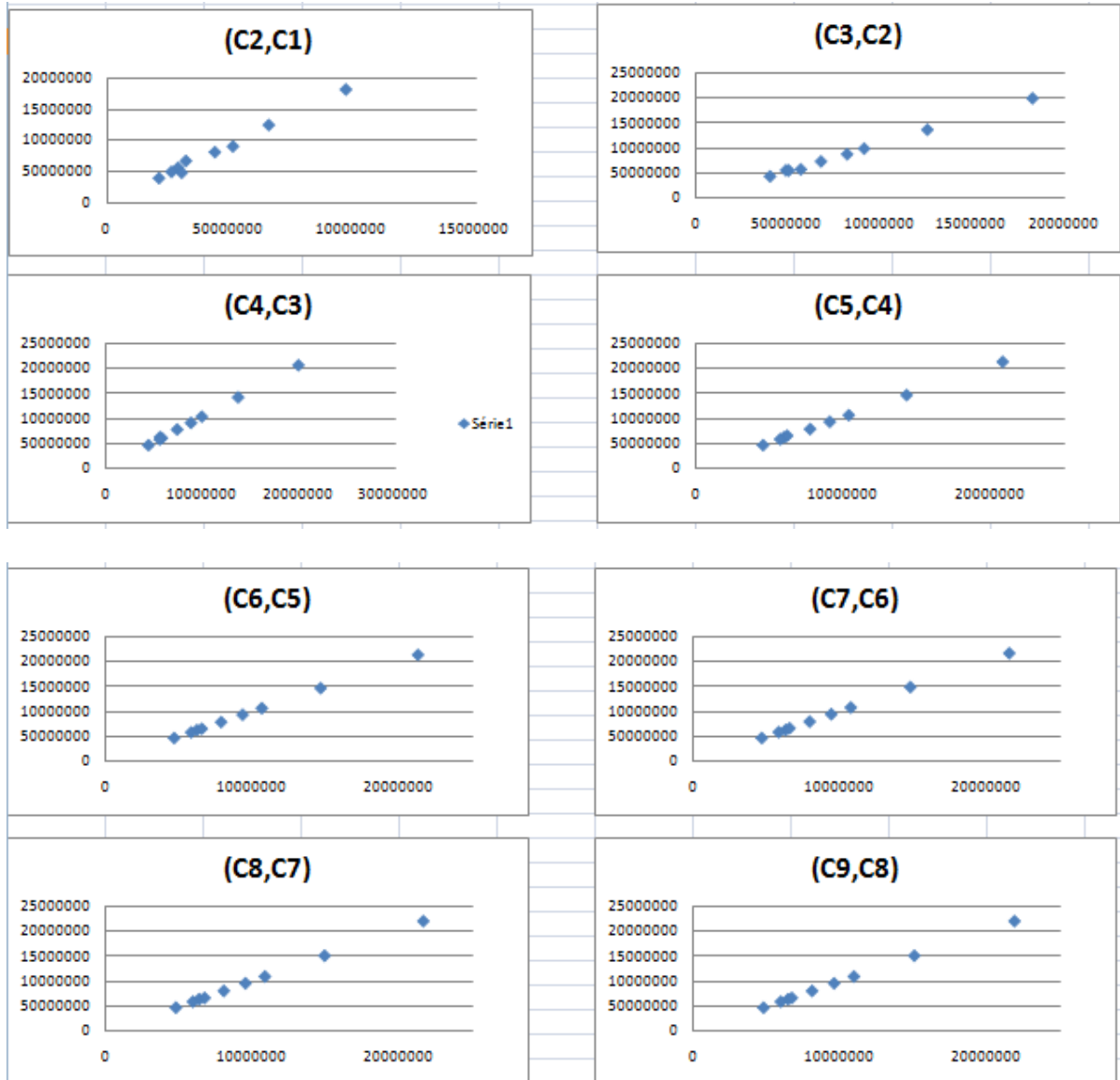
	diag	G <sub>t</sub>	P <sub>t</sub>	Z <sub>t</sub>	n <sub>t</sub> =G <sub>t</sub> +P <sub>t</sub>	m <sub>t</sub>	E(Z <sub>t</sub> )	V(Z <sub>t</sub> )		
2005	1	1	1	0	2	0	0,5	0,25		
2006	2	2	0	0	2	0	0,5	0,25		
2007	3	3	1	0	4	1	1,25	0,4375		
2008	4	0	5	2	5	2	1,5625	0,37109375		
2009	5	0	6	3	6	2	2,0625	0,62109375		
2010	6	3	2	3	5	2	1,5625	0,37109375		
2011	7	7	0	3	7	3	2,40625	0,55371094		
2012	8	0	8	3	8	3	2,90625	0,80371094	borne inf	borne sup
			total	14			12,75	3,65820313	5,57992188	19,9200781

**Branche AT :**

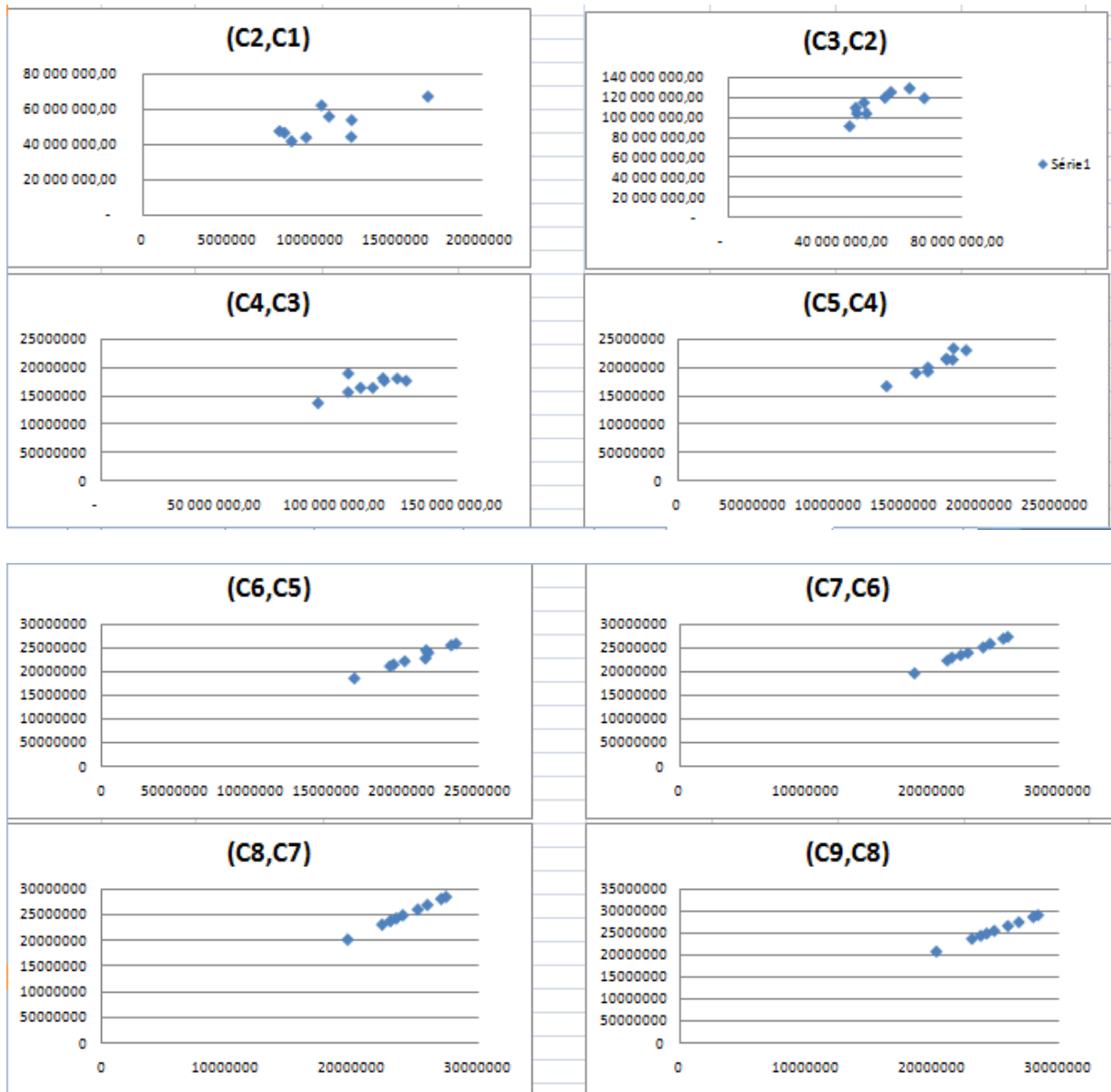
	diag	G <sub>t</sub>	P <sub>t</sub>	Z <sub>t</sub>	n <sub>t</sub> =G <sub>t</sub> +P <sub>t</sub>	m <sub>t</sub>	E(Z <sub>t</sub> )	V(Z <sub>t</sub> )		
2005	1	0	2	0	2	0	0,5	0,25		
2006	2	1	1	0	2	0	0,5	0,25		
2007	3	0	4	0	4	1	1,25	0,4375		
2008	4	1	3	2	4	1	1,25	0,4375		
2009	5	6	0	3	6	2	2,0625	0,62109375		
2010	6	3	4	3	7	3	2,40625	0,55371094		
2011	7	5	1	3	6	2	2,0625	0,62109375		
2012	8	0	8	3	8	3	2,90625	0,80371094	borne inf	borne sup
			total	14			12,9375	3,97460938	5,14726563	20,7277344

**Hypothèse 2 : l'hypothèse de la proportionnalité entre les paiements (l'existence d'une relation linéaire)**

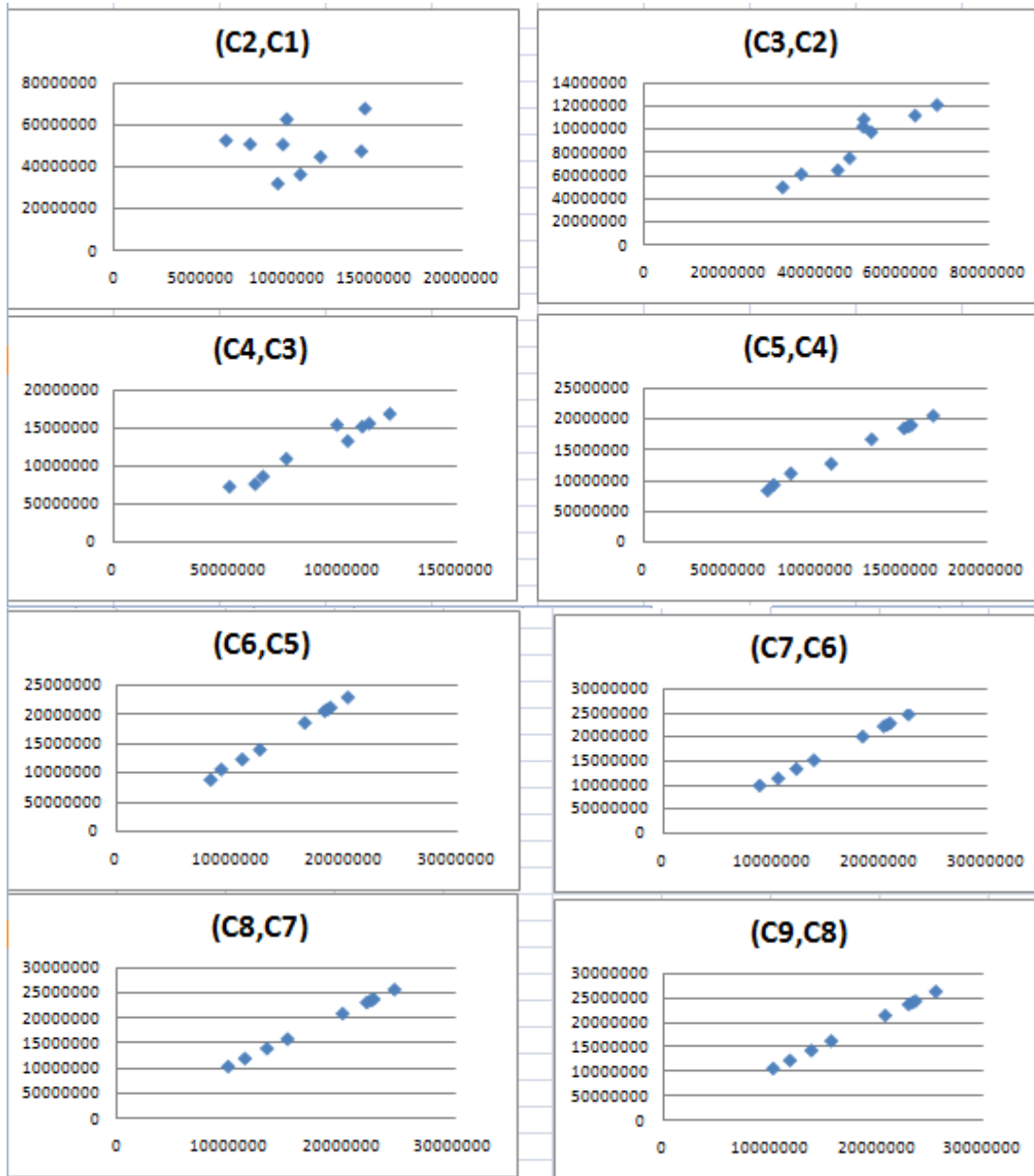
**Branche autoP :**



**Branche auto corporel :**

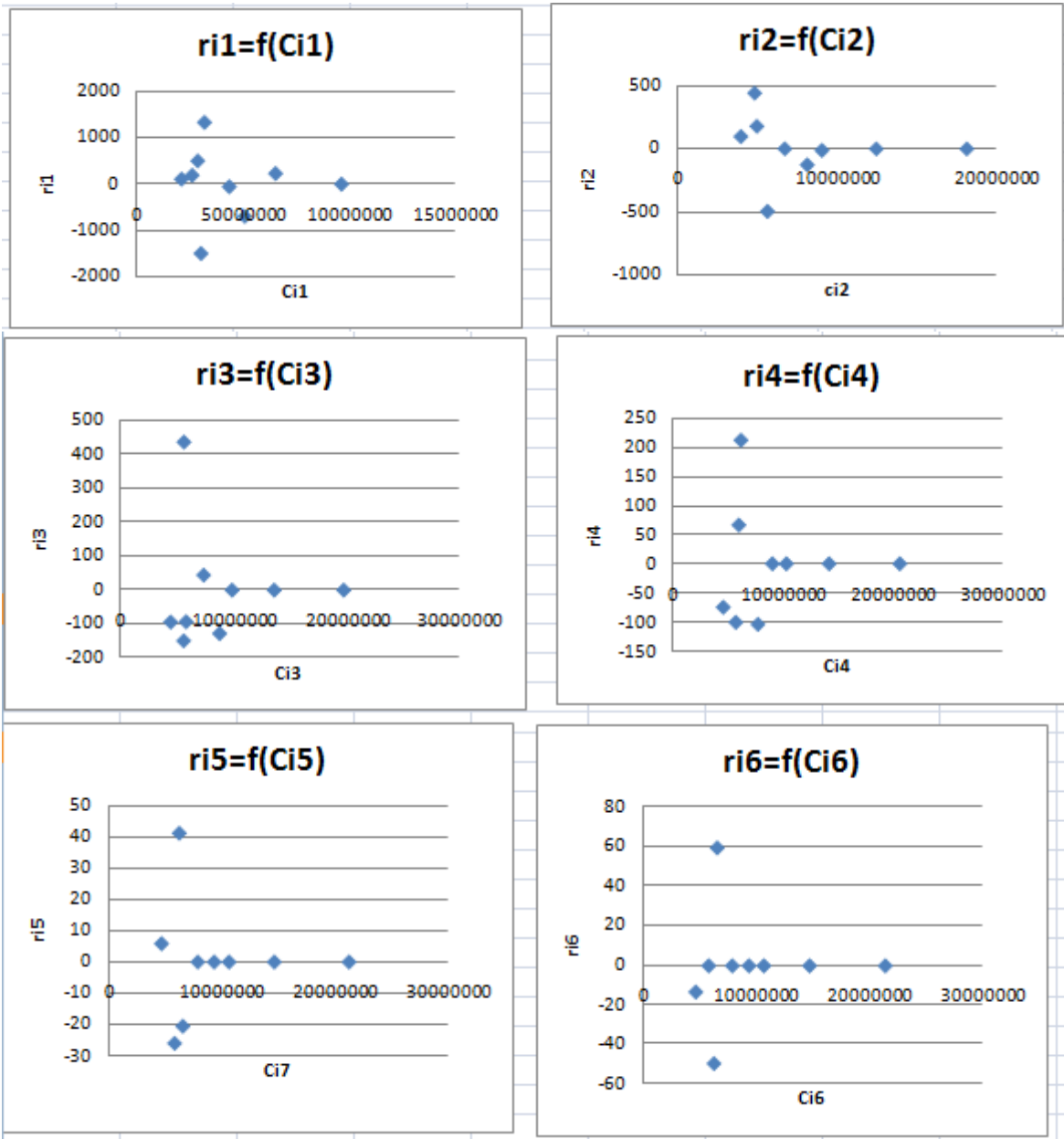


**Branche AT :**

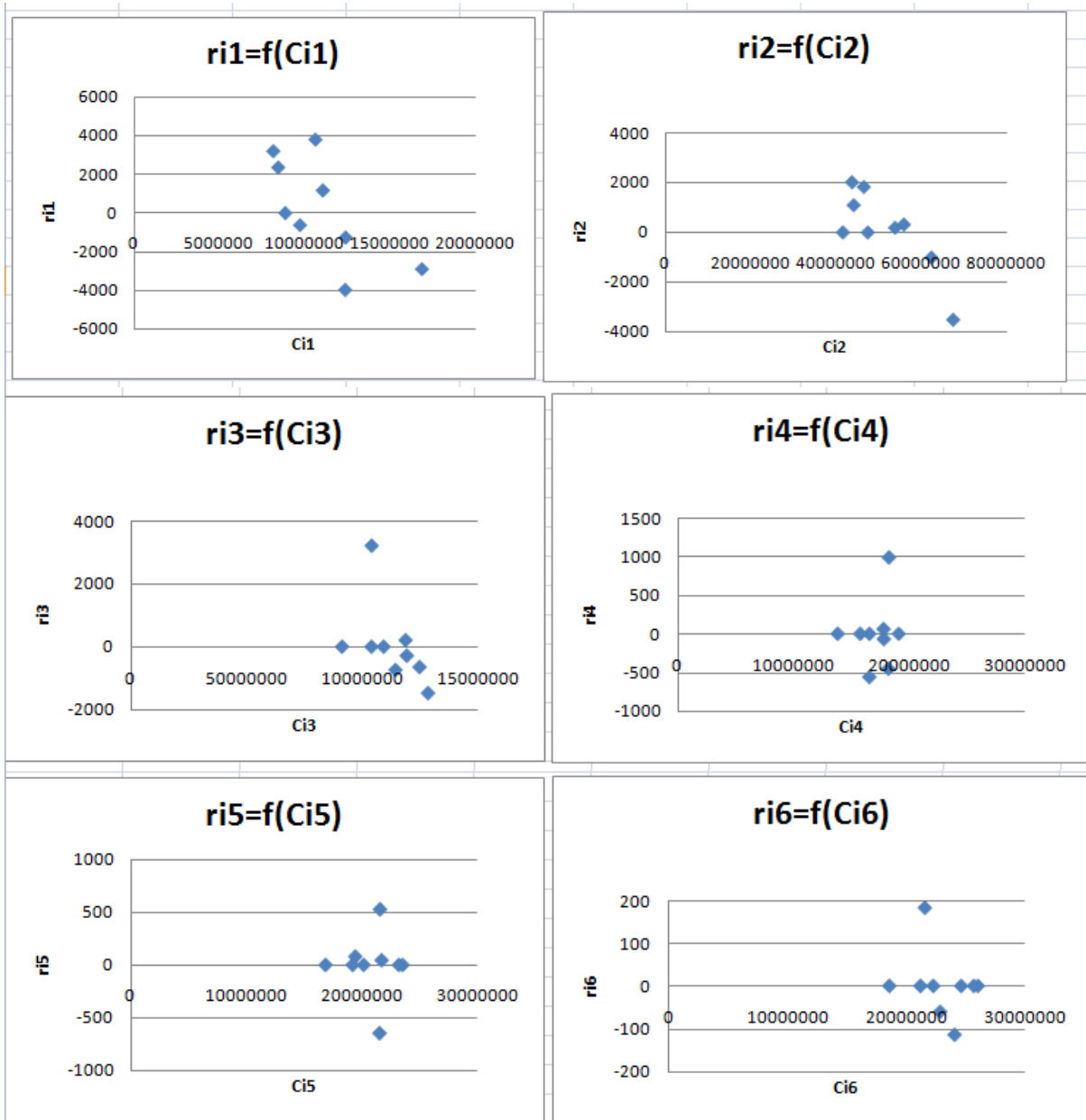


**Hypothèse 3 :**

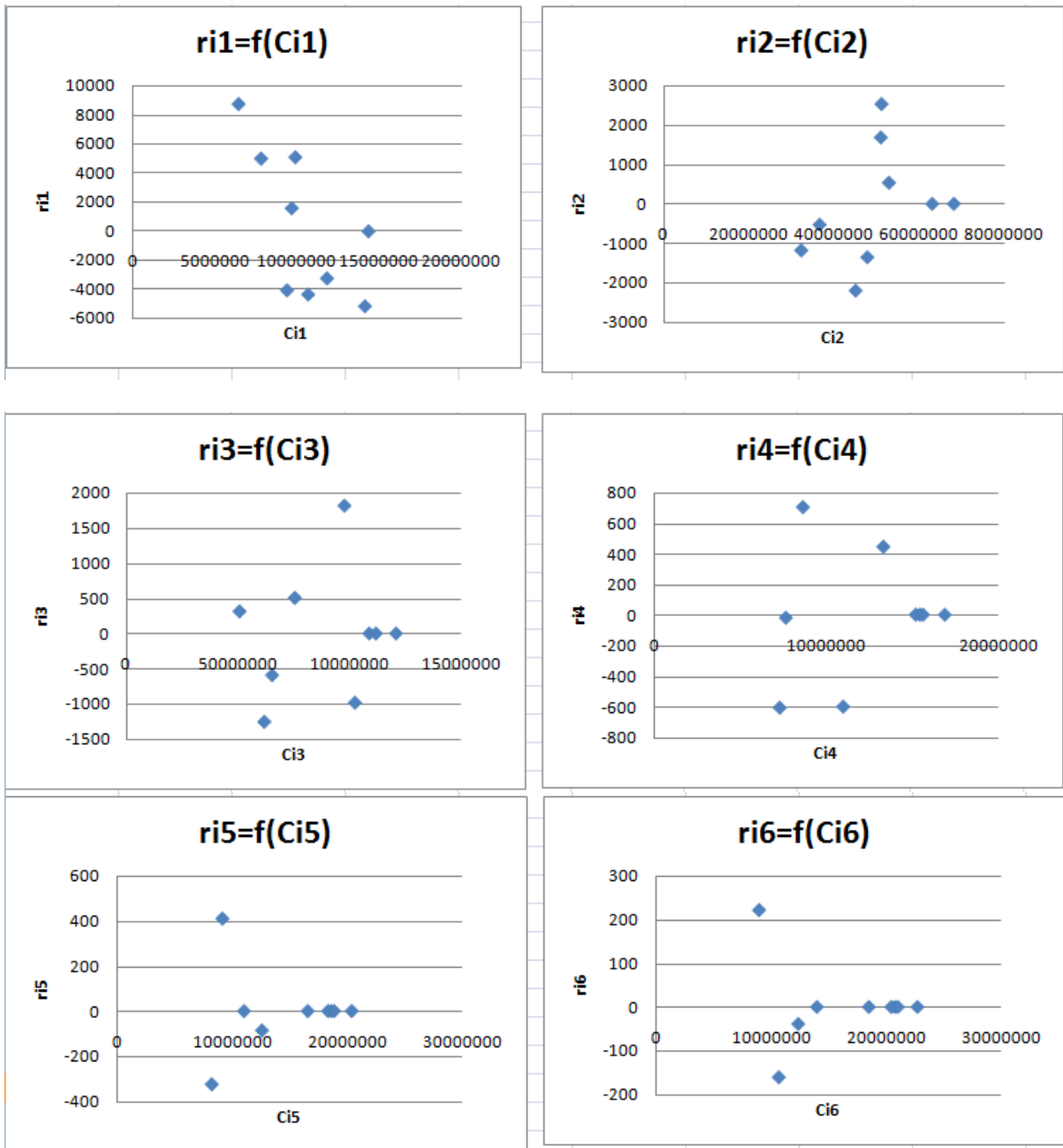
**Branche autoP :**



**Branche auto corporel :**



**Branche AT :**



## Annexe 2 : Modèle linéaire généralisé :

**AUTO matériel :**

Estimation des paramètres :

```

glm(formula = value ~ origin + dev, family = quasipoisson(log),
    data = automatP)

Deviance Residuals:
    Min       1Q   Median       3Q      Max
-1856.3  -444.6    0.0    341.8   1632.2

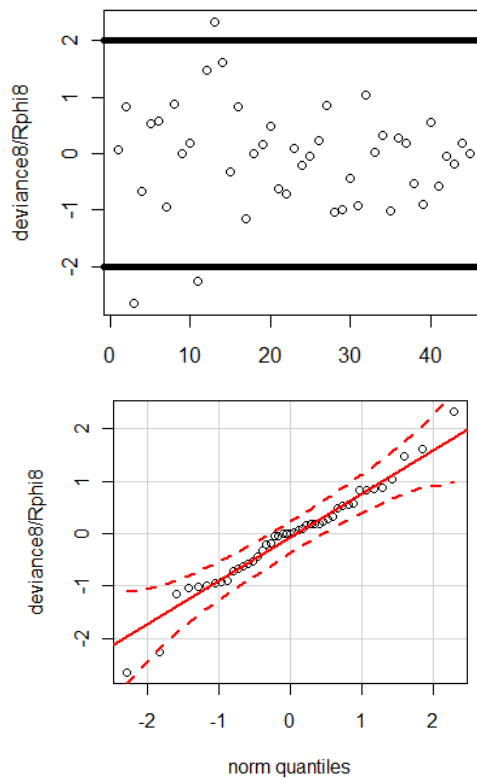
Coefficients:
            Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept) 17.16362    0.10643 161.270 < 2e-16 ***
origin2      0.03883    0.13983   0.278 0.783264
origin3     -0.30032    0.15370  -1.954 0.060759 .
origin4     -0.07839    0.14503  -0.541 0.593113
origin5      0.22755    0.13501   1.685 0.103029
origin6      0.39745    0.13107   3.032 0.005184 **
origin7      0.52933    0.12903   4.102 0.000319 ***
origin8      0.84940    0.12422   6.838 1.98e-07 ***
origin9      1.22376    0.13400   9.132 6.86e-10 ***
dev2        -0.12144    0.06766  -1.795 0.083486 .
dev3        -1.76223    0.13638 -12.922 2.55e-13 ***
dev4        -2.40852    0.20420 -11.795 2.24e-12 ***
dev5        -2.92148    0.29616  -9.865 1.30e-10 ***
dev6        -3.98795    0.57642  -6.918 1.61e-07 ***
dev7        -4.01675    0.67462  -5.954 2.07e-06 ***
dev8        -3.71507    0.67830  -5.477 7.54e-06 ***
dev9        -5.08139    1.90806  -2.663 0.012689 *
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

(Dispersion parameter for quasipoisson family taken to be 641326.7)

Null deviance: 1103284734 on 44 degrees of freedom
Residual deviance: 18215317 on 28 degrees of freedom
AIC: NA

```

Analyse des résidus :



**AT :**

Estimation des paramètres :

```
> summary(GLM.3)
```

```
Call:
```

```
glm(formula = value ~ origin + dev, family = quasipoisson(log),
    data = AT)
```

```
Deviance Residuals:
```

Min	1Q	Median	3Q	Max
-2047.8	-748.3	0.0	749.1	1865.9

```
Coefficients:
```

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t )
(Intercept)	15.5621	0.1895	82.109	< 2e-16 ***
origin2	0.1454	0.1699	0.856	0.399471
origin3	0.3027	0.1665	1.818	0.079712 .
origin4	0.4313	0.1659	2.600	0.014701 *
origin5	0.7125	0.1616	4.409	0.000139 ***
origin6	0.8294	0.1656	5.008	2.71e-05 ***
origin7	0.8139	0.1807	4.503	0.000108 ***
origin8	0.8416	0.2132	3.947	0.000484 ***
origin9	0.9197	0.3821	2.407	0.022922 *
dev2	1.3173	0.1584	8.319	4.74e-09 ***
dev3	1.3031	0.1645	7.922	1.25e-08 ***
dev4	1.1947	0.1738	6.874	1.80e-07 ***
dev5	0.9003	0.1948	4.623	7.78e-05 ***
dev6	0.4885	0.2382	2.050	0.049795 *
dev7	0.2573	0.2925	0.880	0.386441
dev8	-0.3192	0.4514	-0.707	0.485388
dev9	-0.8434	0.8231	-1.025	0.314338

```
---
```

```
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```

```
(Dispersion parameter for quasipoisson family taken to be 1583273)
```

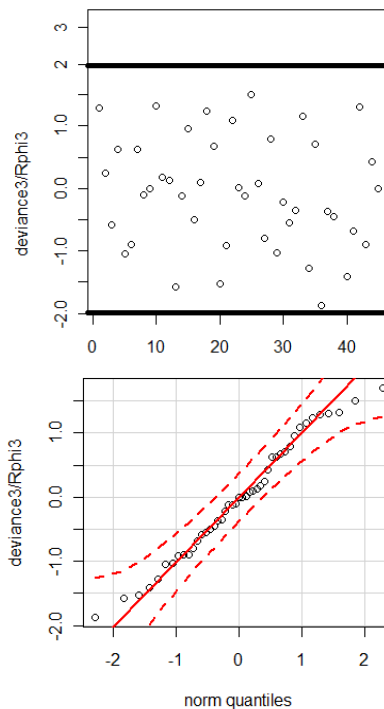
```
Null deviance: 447544571 on 44 degrees of freedom
```

```
Residual deviance: 44297627 on 28 degrees of freedom
```

```
AIC: NA
```

```
Number of Fisher Scoring iterations: 4
```

Analyse des résidus :



**AUTO corporel :**

Estimation des paramètres :

```
> summary(GLM.2)

Call:
glm(formula = value ~ origin + dev, family = quasipoisson(log),
    data = Autoco)

Deviance Residuals:
    Min       1Q   Median       3Q      Max
-2267.5  -474.7    0.0    316.0   2583.5

Coefficients:
            Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)  16.24197   0.14785  109.855 < 2e-16 ***
origin2      -0.04275   0.10690  -0.400  0.692241
origin3     -0.08775   0.10960  -0.801  0.430066
origin4      0.03253   0.10818   0.301  0.765840
origin5      0.08833   0.11022   0.801  0.429624
origin6      0.07450   0.11784   0.632  0.532351
origin7     -0.06745   0.14229  -0.474  0.639151
origin8     -0.11688   0.19921  -0.587  0.562116
origin9     -0.24825   0.43168  -0.575  0.569826
dev2         1.31117   0.14359   9.131  6.88e-10 ***
dev3         1.72559   0.14120  12.221  9.68e-13 ***
dev4         1.66659   0.14471  11.517  3.90e-12 ***
dev5         1.21977   0.15755   7.742  1.96e-08 ***
dev6         0.71032   0.18374   3.866  0.000601 ***
dev7         0.11888   0.24047   0.494  0.624892
dev8        -0.24638   0.32089  -0.768  0.449023
dev9        -0.59092   0.50356  -1.173  0.250488
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

(Dispersion parameter for quasipoisson family taken to be 1452500)

Null deviance: 660368321 on 44 degrees of freedom
Residual deviance: 40992250 on 28 degrees of freedom
AIC: NA

Number of Fisher Scoring iterations: 4
```

Analyse des résidus :

