



المندوبية السامية للتخطيط  
HAUT-COMMISSARIAT AU PLAN

ROYAUME DU MAROC  
\*\_\*\*\_\*\_\*  
HAUT COMMISSARIAT AU PLAN  
\*\_\*\*\_\*\_\*\_\*\_\*\_\*\_\*\_\*\_\*  
INSTITUT NATIONAL  
DE STATISTIQUE ET D'ECONOMIE APPLIQUEE



**INSEA**

## Projet de Fin d'Etudes

\*\*\*\*\*

### Etude des contrats d'assurance vie mono-supports et multi-supports

Préparé par : *Mlle Fadoua BOUKHSIMI*

Sous la direction de : *M. Fouad MARRI (INSEA)*  
*M. Noureddine DENOUNE (Crédit Du Maroc Assurance)*

*Soutenu publiquement comme exigence partielle en vue de l'obtention du*

Diplôme d'Ingénieur d'Etat

Option : Actuariat-Finance

*Devant le jury composé de :*

*M. Fouad Marri (INSEA)*  
*M. Said Ramadan NCIRI (INSEA)*  
*M. Noureddine DENOUNE (CDMA)*

Juin 2013



*« La théorie, c'est quand on sait tout et que rien ne fonctionne. La pratique, c'est quand tout fonctionne et que personne ne sait pourquoi. Si la pratique et la théorie sont réunies, rien ne fonctionne et personne ne sait pourquoi. »*

*Albert Einstein*

## Résumé :

La notion du risque est très déterminante dans le monde des affaires, et c'est notamment la raison pour laquelle l'assurance est sans doute le métier de demain.

Le secteur des assurances est en pleine expansion en raison des fortes opportunités de développement qu'il présente, favorisé par le changement des habitudes des consommateurs mais surtout par l'émergence de la bancassurance. Cette dernière permet aux compagnies d'assurance de profiter d'un réseau de distribution des banques assez large, chose qui fait de la banque une partie intégrante de ce processus.

Le présent document constitue la synthèse de notre travail dans le cadre du projet de fin d'étude, sa perspective générale se constitue de deux grands axes, le premier consiste en la modélisation du cours des actions représentant la part du lion du portefeuille du contrat multi-supports en question, et le deuxième sera matérialisé par la conception d'un système de calcul des prestations garanties par la gamme Valorem dans le cadre des contrats mono-supports, c'est un outil qui mettra fin à tous les problèmes d'informations à donner ou à recevoir soit de la part du personnel du crédit du Maroc ou de la part de clientèle.

Vu la portée stratégique de notre travail, comme guide dans le processus d'élaboration de la politique d'investissement et de suivi des états, nous avons choisi pour la modélisation des actions non seulement un modèle stochastique permettant d'intégrer le caractère aléatoire de la situation future mais aussi l'un des modèles stochastiques les plus utilisés en pratique et les plus connus dans la finance de marché qui est le modèle de Black and Scholes, mais avant d'y arriver il nous a été nécessaire de passer par la modélisation du taux d'intérêt sans risque. Pour ce faire, nous avons fait appel au modèle de Cox-Ingersoll-Ross connu pour sa simplicité et sa pertinence.

L'autre fruit de notre intervention, est l'outil informatique de simulation qui est programmé sous VBA Excel, ce code de programmation prend en considération les particularités de chacun des produits de la gamme VALOREM et concevant ainsi une interface particulière pour chacun d'entre eux.

**Mots clés :** bancassurance, contrat d'assurance, simulation, assurance-vie, taux d'intérêt, contrat mono-support, contrat multi-supports, modèle de CIR, modèle de B&S.

### ***Dédicace :***

*Je dédie ce modeste travail à toutes les personnes qui m'ont porté conseil et soutenu durant toute la période du stage.*

*A mes parents pour leur soutien, leur sacrifice, leur encouragement et leur aide.*

*A mon frère Mohammed Aiman pour sa tendresse, sa confiance et son respect.*

*A mes amis et à ma famille en témoignage de ma grande affection.*

*Je vous aime tous et j'espère que vous serez toujours fiers de moi.*

## **Remerciements :**

*Il m'est agréable de m'acquitter d'une dette de reconnaissance auprès de toutes les personnes, qui ont, à leur manière, contribué à l'aboutissement de ce projet.*

*Qu'il me soit permis tout d'abords, de remercier M. Fouad MARRI, mon encadrant à l'INSEA, pour l'intérêt et l'effort particulier qu'il a déployé, pour sa disponibilité, ses conseils et sa compétence qu'il a su me prodiguer tout au long de mon projet de fin d'études.*

*Ma sincère reconnaissance va à tous les enseignants qui m'ont accompagné durant mon cursus scolaire et particulièrement aux professeurs de l'INSEA ainsi qu'à sa direction.*

*J'aimerais également exprimer ma gratitude et vifs remerciements à tous le personnel de Crédit du Maroc Assurance en particulier au directeur M. Noureddine DENOUNE, pour m'avoir accueillie et dirigé mon projet de fin d'étude, à Mme Aicha SEBBATA, Mme Mina AIT EL MOUMEN, et à Mlle Halima KOUNDI pour leur aide précieuse, leur soutien ferme et leurs encouragements continus.*

*Je ne saurais oublier d'adresser un grand merci à M. Saïd Ramadan NCIRI pour le temps consacré à l'évaluation de mon travail.*

*Je tiens finalement à remercier mon père et ma mère pour leur soutien et leur encouragement, qu'ils trouvent ici l'expression de mon amour et de ma profonde gratitude*

## **Table de matière :**

RESUME :.....	3
DEDICACE :.....	4
REMERCIEMENTS :.....	5
LISTE DES ABREVIATIONS :.....	9
LISTE DES TABLEAUX ET FIGURES : .....	10
INTRODUCTION :.....	11
PREMIERE PARTIE : CONTEXTE DE L'ETUDE.....	12
CHAPITRE 1 : PRESENTATION DE LA BANCASSURANCE.....	13
I. CONCEPT DE LA BANCASSURANCE :.....	13
I.1. Historique de la bancassurance : .....	13
I.2. Définition de la bancassurance : .....	14
I.3. Modèle de développement de la bancassurance :.....	15
I.3.1 les accords commerciaux : .....	15
I.3.2 Les joints ventures :.....	15
I.3.3 Le contrôle de l'activité de l'assurance :.....	15
1. Croissance externe : participation et acquisition. ....	15
2. Croissance interne : développement d'une branche en interne.....	15
II. ASPECTS DE LA BANCASSURANCE :.....	16
II.1. Volet juridique : .....	16
II.2. Volet fiscal :.....	17
II.2.1 Les contrats d'assurance-vie :.....	17
1. Taxe sur les assurances : .....	17
2. Impôt sur les revenus : .....	17
3. Contribution sociale de solidarité : .....	18
II.2.2 Les contrats d'assurance retraite :.....	19
1. En cas de déduction des versements : .....	19
2. En cas de non déduction des versements :.....	19
CHAPITRE 2 : EVOLUTION DE LA BANCASSURANCE AU MAROC .....	21
I. LA BANCASSURANCE EN CHIFFRES :.....	21
II. LE PAYSAGE DE LA BANCASSURANCE AU MAROC : .....	22
III. LE DIAGNOSTIC DE LA SITUATION SUR LE MARCHE MAROCAIN :.....	23
DEUXIEME PARTIE : LE CONTRAT D'ASSURANCE-VIE MULTI-SUPPORTS .....	27
CHAPITRE 1 : FONDEMENTS TECHNIQUES DES CONTRATS MULTI-SUPPORTS : 29	
I. DESCRIPTION GENERAL DE L'EPARGNE EN ASSURANCE VIE : .....	29
I.1. Quelques chiffres : .....	29
I.2. Supports financiers de l'épargne en assurance-vie : .....	30
II. CARACTERISTIQUES DES CONTRATS MULTI-SUPPORTS : .....	31
II.1. Souscription et renonciation : .....	31
II.2. Cotisation : .....	31
II.3. Gestion financière :.....	31
II.4. Structure tarifaire : .....	31
III. RISQUES ASSOCIES AUX CONTRATS D'ASSURANCE MULTI-SUPPORTS :.....	32
III.1. Risque de contrepartie : .....	32
III.2. Risque de liquidité :.....	32
III.3. Risque lié au comportement des assurés : .....	32

III.4. Risque des placements financiers : .....	32
III.4.1 Risque de baisse du marché des actions : .....	32
III.4.2 Risque de taux : .....	33
1. En cas de hausse des taux, le risque d'exigibilité : .....	33
2. En cas de baisse des taux, le risque de réinvestissement : .....	33
CHAPITRE 2 : PRINCIPES DE LA MODELISATION STOCHASTIQUE .....	35
I. MODELES STOCHASTIQUES : .....	35
I.1. Des modèles déterministes ...aux modèles stochastiques : .....	35
II. NOTIONS SUR LA MODELISATION DU TAUX D'INTERET : .....	35
II.1. Quelques définitions : .....	36
II.1.1 Notions sur les taux d'intérêts : .....	36
1. Taux nominal et taux réel .....	36
2. Taux court et taux long : .....	36
3. Taux zéro-coupon : .....	37
4. Taux à terme ou taux forward : .....	37
II.1.2 Notions sur la courbe de taux : .....	37
1. Différentes courbes : .....	37
2. Forme de la courbe des taux : .....	38
II.2. Théorie de modélisation de la courbe de taux : .....	38
II.2.1 Modèles stochastiques de la courbe des taux : .....	38
II.2.2 Modèle d'analyse en composante principale : .....	39
II.2.3 Modèle de reconstitution de la courbe des taux : .....	39
CHAPITRE 3 : MODELES STOCHASTIQUES DE LA COURBE DES TAUX .....	40
I. ANALYSE STATISTIQUE DES DONNEES : .....	40
I.1. Indicateurs standards : .....	40
I.2. Analyse de la distribution : .....	41
I.3. Analyse de la stationnarité : .....	42
II. MODELE DE VASICEK : .....	43
II.1. Solution de l'équation différentielle : .....	44
II.2. Discrétisation du processus d'Ornstein-Uhlenbeck : .....	45
II.3. Estimation des paramètres : .....	45
II.4. Inconvénients du modèle : .....	45
III. MODELE DE COX-INGERSOLL-ROSS: .....	46
III.1. Solution de l'équation différentielle : .....	46
III.2. Discrétisation du processus racine carré: .....	47
III.3. Calibrage du modèle : .....	47
III.4. Application du modèle de CIR : .....	48
III.4.1 Génération des nombres aléatoires : .....	48
III.4.2 Simulation de variable aléatoire gaussienne : .....	49
III.4.3 Présentation des résultats : .....	49
1. Test de normalité des variables aléatoires générées : .....	49
2. Implémentation du modèle : .....	50
CHAPITRE 4 : MODELISATION DES ACTIONS .....	52
I. PRESENTATION DU MODELE DE BLACK AND SCHOLLES: .....	52
II. PRISE EN COMPTE DES CORRELATIONS : .....	53
III. DISCRETISATION DU PROCESSUS : .....	53
IV. APPLICATION DU MODELE : .....	54

TROISIEME PARTIE : LE CONTRAT D'ASSURANCE-VIE MONO-SUPPORT.....	57
CHAPITRE 1 : PRESENTATION ET ETUDE DES PRODUITS D'EPARGNE ET PLACEMENT .....	59
I. PRESENTATION DES PRODUITS : .....	59
I.1. VALOREM Epargne programmée : .....	59
I.1.1 Les garanties :.....	60
1. en cas de vie au terme du contrat : .....	60
2. en cas de décès avant le terme .....	60
I.1.2 Les primes : .....	61
I.1.3 La disponibilité du capital constitué : .....	62
1. Rachat total : .....	62
2. Rachat partiel : .....	62
3. Avance : .....	62
4. Nantissement du capital constitué :.....	62
I.2. VALOREM capitalisation/distribution : .....	63
I.2.1 VALOREM capitalisation : .....	63
1. Avance : .....	63
2. Rachat partiel : .....	63
3. Rachat total : .....	63
I.2.2 VALOREM Distribution :.....	64
II. DEFINITION DES PARAMETRES : .....	64
CHAPITRE 2 : CONCEPTION DU SYSTEME DE CALCUL DES PRESTATIONS DES PRODUITS DE LA GAMME VALOREM.....	66
I. FORMULES DE CALCUL :.....	66
I.1. Valorem capitalisation : .....	66
I.2. Valorem distribution : .....	66
I.3. Valorem Epargne capital :.....	67
I.4. Valorem Epargne rente viagère :.....	67
II. PHASES DE CONCEPTION DE L'OUTIL DE SIMULATION : .....	68
CONCLUSION .....	73
BIBLIOGRAPHIE : .....	74
ANNEXE .....	75
ANNEXE I : APERÇU SUR L'ORGANISME D'ACCUEIL .....	76
ANNEXE II : QUELQUES ARTICLES DU CODE DES ASSURANCES REGISSANT L'ACTIVITE DE BANCASSURANCE :.....	78
ANNEXE III : LE MOUVEMENT BROWNIEN .....	79
ANNEXE VI : DEMONSTRATION RELATIVE AU MODELE DE COX-INGERSOLL-ROSS .....	80
ANNEXE V : SOLUTION DE L'EDS DU MODELE DE BLACK & SCHOLES .....	83
ANNEXE VI : LA DECOMPOSITION DE CHOLESKY .....	84

## Liste des abréviations :

ADF	Dickey-fuller augmenté
AOA	Absence d'opportunité d'arbitrage
BAM	Banque al maghrib
BB	Bruit blanc
BS	Black and Scholes
CDMA	Crédit Du Maroc Assurance
CGI	Code Général des Impôts
DAPS	Direction des Assurances et de la Prévoyance Sociale
DF	Dickey-Fuller
EDP	Equation aux dérivées partielles
EDS	Equation différentielles stochastique
FCP	Fond Commun de Placement
FMSAR	Fondation Marocaine des Sociétés d'Assurance et de Réassurance
HJM	Heath, Jarrow et Morton
IARD	Incendie, Accident et Risques divers
IR	Impôt sur les Revenus
JB	Jarque-Bera
LN	Loi Log-Normal
MASI	Moroccan All Shares Index
MRE	Marocain Résident à l'Etrangers
OPCVM	Organisme de Placement Collectif en Valeurs Mobilières
PB	Participation aux Bénéfices
SA	Société Anonyme
SGMB	Société Générale Marocaine des Banques
SICAV	Société d'Investissement à Capital Variable
UC	Unité de Compte
VB	Visual Basic pour Applications

## Liste des tableaux et figures :

<b>Tableau 1 :</b> Evolution de la bancassurance dans le monde.....	14
<b>Tableau 2:</b> les trois modèles de développement de la bancassurance.....	16
<b>Tableau 3:</b> chiffre d'affaires par banque et parts de marché.....	21
<b>Tableau 4 :</b> La production consolidée des sociétés de courtage captives .....	22
<b>Tableau 5:</b> statistiques descriptives des taux de bon de trésor.....	40
<b>Tableau 6 :</b> La statistique de Jarque-Bera pour les taux marocains .....	41
<b>Tableau 7:</b> Résultat du test de la racine unitaire pour le modèle 3 .....	43
<b>Tableau 8:</b> Résultat du test de la racine unitaire pour le modèle 2 .....	43
<b>Figure 1 :</b> Evolution du chiffre d'affaire de la branche d'assurance-vie & Capitalisation .....	29
<b>Figure 2:</b> Evolution du chiffre d'affaire des contrats à capital variable.....	30
<b>Figure 3 :</b> Corrélogramme de la série des taux zéro-coupons.....	42
<b>Figure 4 :</b> les résultats du test de normalité des variables générées .....	49
<b>Figure 5:</b> Implémentation du modèle de CIR sous Excel .....	50
<b>Figure 6:</b> comparaison de la courbe des prix zéro-coupon simulée avec le modèle CIR et les prix de marchés.....	50
<b>Figure 7 :</b> évolution des taux courts simulés par le modèle de CIR pour 200 simulations....	51
<b>Figure 8:</b> évolution du cours de l'action entre 2010 et 2013.....	54
<b>Figure 9:</b> calcul des paramètres du modèle de B&S : .....	55
<b>Figure 10 :</b> implémentation du modèle de B&S sous Excel .....	55
<b>Figure 11 :</b> évolution du cours estimé par le modèle de B&S .....	56

## Introduction :

Dans le cadre de son métier, la banque a pu maîtriser l'art de faire fructifier l'argent en développant ses métiers de banque d'affaire, de marché de capitaux, et de banque des entreprises, en répondant au mieux au besoin de sa clientèle, et en élargissant son audience. Ainsi et depuis plusieurs années, les établissements de crédit se sont fortement implantés sur le marché de l'assurance en particulier celui de l'assurance-vie, sur lequel leurs filiales occupent aujourd'hui une place très importante et sont en concurrence directe avec les assureurs traditionnels.

Ces dernières années, les chiffres confirment une croissance presque soutenue de l'activité de l'assurance et surtout la branche de l'assurance vie. C'est la raison principale qui a poussé les banques à se lancer dans ce domaine en vue non seulement de puiser de ses richesses mais aussi de contribuer à son extension.

Dans leurs approches classiques, les contrats d'assurance vie prennent la forme de contrat mono-support, ce sont des contrats dans lesquels les sommes versées par le souscripteur sont investies dans des fonds en dhs composées majoritairement par des obligations.

Par ailleurs, une nouvelle formule est mise en place sur les marchés, au Maroc elle est très récente mais, ce qui est sûr c'est qu'elle attire tous les grands acteurs du secteur, il s'agit des contrats multi-supports.

Choisir mais surtout assumer, c'est la règle de jeu pour un tel type de contrat. En effet, ce sont des placements libellés en dhs et aussi en « unités de compte », ces dernières sont adossées à des produits financiers qui sont des parts d'OPCVM (SICAV, FCP), dont l'assureur garantit non pas la valeur, mais le nombre.

Certes, ce type de contrat offre des perspectives de rendements plus développées, permet d'exploiter le dynamisme des places financières mais, il n'y a pas de repas gratuit, les sommes investies sur les unités de compte ne sont pas garanties et ainsi tout le risque est transféré aux souscripteurs.

Le présent mémoire traitera les deux types de contrats d'assurance-vie susmentionnés, mais de point de vue complètement différents nous permettant ainsi de faire preuve des compétences aussi bien actuarielles que financières acquises.

En effet, d'une part l'étude du contrat multi-support vise la modélisation des actions considérées comme le support le plus attractif pour les preneurs de risque et chercheurs de rendement plus élevé, d'autre part, l'étude du contrat mono-support vise principalement le déploiement des compétences actuarielles pour l'étude des fiches techniques des quatre produits étudiés et ainsi concevoir un système de calcul des prestations qu'ils garantissent.

Dans ce cadre, notre mémoire sera réparti en trois grands angles, le premier est considéré comme une introduction du travail permettant de présenter les principales notions utilisées, d'avoir une idée sur le secteur de la bancassurance et ainsi comprendre le contexte de l'étude, le deuxième traitera le contrat multi-support qui est pour le Crédit du Maroc un projet en cours de confection, c'est pour cette raison que nous avons choisi de modéliser le cours des actions pour aider à la prise de décision quant au processus d'arbitrage et d'allocation d'actif, cette modélisation sera précédée par un tour d'horizon sur la notion du taux d'intérêt élément moteur des cours des actions, et qui va jusqu'à l'élaboration d'un modèle de taux prenant en compte les spécificités du marché marocain. Et finalement nous allons essayer d'apporter une solution aux problèmes de non disponibilité d'information précise, fiable et surtout unifiée sur les prestations garanties par les produits de la gamme VALOREM, et ce par la conception d'un outil informatique permettant de calculer ses garanties conformément aux conditions générales de mise en place des quatre produits.

# **PREMIERE PARTIE**

## **Contexte de l'étude**

## Chapitre 1 : présentation de la bancassurance

La frontière entre la banque et l'assurance, qui ont longtemps vécu séparés, a progressivement disparu avec l'apparition du modèle de la bancassurance. À l'heure actuelle, cette dernière est devenue un phénomène international. Pour ceci, connaître la source et le statut du développement de la bancassurance nous paraît important pour une meilleure compréhension du sujet. C'est notamment dans ce cadre que se situe ce premier chapitre visant à mettre en claire la notion de la bancassurance son émergence et son développement.

### **I. Concept de la bancassurance :**

#### **I.1. Historique de la bancassurance :**

La bancassurance est une notion qui trouble par la multiplicité de ses interprétations. Concrètement, elle recouvre un bouquet de services financiers destiné à satisfaire tous les besoins en matière de finance et d'assurance. Les services financiers se composent de plusieurs éléments au nombre desquels nous comptons, outre les principes centraux que sont l'épargne, la finance et l'assurance.

Le fait de fournir des services financiers combinant diverses fonctions en matière de placement, de financement et d'assurance nous paraît aujourd'hui presque révolutionnaire. Or, leur rapprochement a commencé très tôt dans l'histoire de l'économie et a été réalisé en plusieurs étapes.

Il y a environ vingt ans, les banques et les assurances ont tenté de s'évincer mutuellement de certains marchés, en lançant des produits novateurs, puis elles ont décidé de coopérer, en choisissant diverses voies. Il s'ensuit que le paysage de la bancassurance présente aujourd'hui une image multiple.

D'un point de vue purement historique, la bancassurance a été apparue en septembre 1965 en grande Bretagne, depuis lors, les Britanniques sont considérés comme les véritables pionniers en le domaine.

Au début des années 70, les ACM<sup>1</sup>Vie et IARD obtiennent leur agrément, marquant ainsi l'histoire de l'assurance. L'idée leur est venue de se passer d'intermédiaire pour l'assurance des crédits emprunteurs, et de devenir eux-mêmes assureurs de leurs propres clients de banque.

De leur côté, les Espagnols se lancent dans l'aventure au début des années 80, quand le groupe BANCO DE BILBAO acquiert une part majoritaire de EUROSEGUROS SA (une compagnie d'assurance et de réassurance). Mais le contrôle n'est dans un premier temps que financier, puisque la législation espagnole interdit aux banques de vendre de l'assurance vie. Cette barrière réglementaire disparaît en 1991.

En Europe, la bancassurance italienne s'est très rapidement développée et ce grâce à la Loi Amato<sup>2</sup> de 1990. A cela s'est ajouté, entre 1995 et 1998, des contextes fiscaux favorables aux produits d'assurance Vie, un important réseau bancaire, bien réparti sur le territoire, et une confiance confirmée des italiens en leurs banquiers. En Europe comme en Asie, et surtout après l'autorisation donnée en 2003 par le gouvernement, la bancassurance commence à se lancer et les banques coréennes déjà en place sur le marché s'y intéressent encore plus.

---

<sup>1</sup> Assurances du Crédit Mutuel qui, en obtenant l'agrément ont devenues des précurseurs de la bancassurance.

<sup>2</sup> la loi Amato est une loi mise en place en Italie prévoyant la transformation des banques du secteur public en sociétés par action et autorisant ainsi les banques à détenir des participations dans des compagnies d'assurance.

Sur les marchés où la bancassurance est suffisamment développée, comme en France ou encore en Belgique, nous constatons que les entreprises passent à une autre étape de l'évolution :

- L'implantation dans les pays où la bancassurance commence seulement à voir le jour.
- Le regroupement de grandes sociétés comme le Crédit Agricole et le Crédit Lyonnais en France qui place le nouveau bancassureurs, parmi les leaders .

En résumé, le développement de la bancassurance au niveau mondial peut se présenter dans le tableau suivant :

**Tableau 1 : Evolution de la bancassurance dans le monde<sup>3</sup>**

Commencement	Maturité	Diversification	Concentration
1975 - 1985	1985 - 2000	2000 - 2005	Aujourd'hui
Coopération externes / Création de filiales (interne)	Offre publiques d'achat / croissance externe	Alliances partenariats	rachats
Simple distribution	Intégration de services	Approche personnalisée	

## **I.2. Définition de la bancassurance :**

Nouveau concept, la bancassurance relie deux secteurs de l'économie : la banque et l'assurance. Son actuelle définition est incomplète et source de discussion, cependant, elle donne une idée du service offert aux clients des banques. Ainsi, est incluse dans le terme "bancassurance", toute banque qui offre à ses clients, en complément aux services bancaires, des produits d'assurance.

En effet, la bancassurance se définit comme « la pratique des opérations d'assurance par les banques » selon le Petit Larousse. Cette définition doit être complétée par celle de l'Encyclopédie Universalis selon laquelle le terme désigne « l'offre conjointe de services bancaires et de produits d'assurance par un même réseau de distribution ». Ces services peuvent donc être proposés aussi bien par les banques que par les compagnies d'assurances.

D'un point de vue technique, on peut définir la bancassurance selon deux points de vue : fonctionnel et institutionnel.

D'abord d'un point de vue fonctionnel, la bancassurance s'entend des « services financiers intégrant des produits de la banque et de l'assurance », par exemple l'assurance de perte de revenus (chômage, invalidité, etc.) associée à la tenue d'un compte courant ou la souscription d'assurance des moyens de paiement (perte de carte, de chéquier, etc.). Dans ce cas, les établissements bancaires interviennent directement en vendant des produits d'assurances dans leurs agences, ou indirectement à travers la prise de participation dans des sociétés d'assurance sur le marché.

Ensuite, d'un point de vue institutionnel, l'expression fait appel à la manière dont est organisée la collaboration entre la banque et l'assurance ou d'autres organismes non bancaires, en terme notamment de création ou d'achat de sociétés d'assurances par des groupes bancaires, et en sens inverse de la diversification de groupes d'assurance dans la banque.

<sup>3</sup> Source : Analyse de la situation de la bancassurance dans le monde. Focus octobre 2005

### **I.3. Modèle de développement de la bancassurance :**

Il n'existe pas un seul modèle à suivre pour créer un bancassureur, en effet, suivant le pays où nous nous trouvons, la bancassurance prend des dimensions différentes et c'est ce que nous allons essayer de mettre en exergue à travers le passage en revue des différents modes de développement. Les trois modes suivants sont les plus utilisés:

#### **I.3.1 les accords commerciaux :**

La banque passe des accords de distribution avec une compagnie d'assurance. La banque est alors considérée comme un simple intermédiaire entre les clients et la compagnie d'assurance, c'est le plus bas niveau de bancassurance qui peut être mis en place, son analyse nous mène vers un certain nombre d'avantages parmi lesquels nous citons : la faiblesse du coût d'investissement initial, le transfert du risque à la compagnie d'assurance, le drainage régulier des ressources sous forme de commission sans devoir mobiliser beaucoup de capitaux et le respect de l'indépendance des deux entités. En contrepartie, toutes les retombées financières sont partagées entre la banque et l'assurance.

#### **I.3.2 Les joints ventures :**

Cette option de pratique bancassurance consiste en la création d'une nouvelle société d'assurance dans laquelle une compagnie d'assurance et une banque qui existent déjà, se partagent les parts sociales afin de faciliter la gestion d'activités communes.

#### **I.3.3 Le contrôle de l'activité de l'assurance :**

##### **1. Croissance externe : participation et acquisition.**

Via la croissance externe, la banque peut exercer un contrôle via une prise de participation dans la compagnie d'assurance, les avantages d'une telle action c'est qu'elle permet d'une part, de renforcer les fonds propres et d'accumuler avec les années un certain savoir-faire, d'autre part, une telle participation permet à la compagnie de garder une approche beaucoup plus professionnelle des problèmes de l'assurance en ce qui concerne la création, la distribution et la gestion des nouveaux produits. Notons toutefois que ceci crée un risque de confrontation des cultures d'entreprises et un problème quant à la séparation des commissions.

Lors de la participation croisée, les fonds propres des deux partenaires figurent aux bilans des deux ; il y a alors un grand risque lié à la double utilisation des fonds propres comme garanties, en d'autre terme c'est le risque d'insolvabilité des deux établissements mais c'est aussi un risque de contagion lorsque l'un des deux établissements connaît des difficultés.

##### **2. Croissance interne : développement d'une branche en interne.**

Une autre alternative se présente pour pratiquer de la bancassurance, c'est l'adoption de la stratégie consistant à créer une filiale ex nihilo, ce qui en résulte une activité d'assurance totalement intégrée aux autres activités.

Cette intégration totale présente plusieurs avantages : elle fait disparaître la concurrence interne puisqu'il y a un unique réseau, elle limite les coûts de « duplications des tâches » en évitant la superposition des structures, et elle permet aussi d'éliminer le problème de répartition des commissions puisqu'elles reviennent intégralement à l'établissement initiateur.

Cependant, c'est une structure qui exige des capitaux très importants pour sa mise en place, et qui fait supporter tous les risques à la banque.

**Tableau 2: les trois modèles de développement de la bancassurance<sup>4</sup>**

	<b>Descriptions</b>	<b>Avantages</b>	<b>Inconvénients</b>
<b>Accords de distribution</b>	La banque joue un rôle d'intermédiaire pour la compagnie d'assurance	Début rapide des opérations. Aucun investissement en capital (moins onéreux)	Manque de flexibilité pour le lancement de nouveau produit. Divergence dans les cultures d'entreprises.
<b>Joint -venture</b>	La banque est associée à une ou plusieurs compagnies	Transfert de savoir-faire	Gestion difficile sur le long terme
<b>Intégration complète</b>	La création d'une filiale ex nihilo	Maintien de la culture maintenue	Investissement élevé

## **II. Aspects de la bancassurance :**

### **II.1. Volet juridique :**

La bancassurance a permis le rapprochement entre les établissements de crédit et les sociétés d'assurances. Or chacune des deux activités est soumise à un régime juridique propre. Ceci impose au processus de mise en place d'une part le respect des règles du droit bancaire et d'autre part la soumission aux prescriptions du droit des assurances.

L'examen respectif du cadre juridique de l'activité bancaire puis celui des assurances nous permettra de comprendre d'une part, dans quelle mesure les banques peuvent vendre des contrats d'assurances de personnes; d'autre part, quelles sont les précautions à prendre par une banque qui désire diffuser des contrats d'assurances dommages.

#### **II.1.1 Dans le cadre de la loi bancaire de 1993 :**

Les articles 1 à 12 de la loi bancaire de 1993 délimitent les opérations que peuvent effectuer lesdits établissements et l'intermédiation en assurance n'y figure absolument pas. Cela n'a pas pu empêcher les banques de placer les produits correspondants. Cependant, le 3ème alinéa de l'article 6 de la loi précitée allait être une échappatoire pour les banques. En effet, il dispose que les établissements de crédit peuvent aussi effectuer, sous réserve du respect des dispositions législatives et réglementaires applicables en la matière, les opérations connexes à leur activité, tels que « le placement, la souscription, l'achat, la gestion, la garde et la vente de valeurs mobilières ou de tout produit financier ». La justification apportée par les banques était qu'elles ne sont que simples souscripteurs de produits d'assurance pour le compte de leurs clients. Au fait, cette situation arrangeait les trois acteurs principaux que sont les établissements de crédits, les assurances, et la banque centrale. Les premiers pouvaient générer des bénéfices considérables grâce aux rémunérations facturées aux clients, satisfaisant ainsi la banque centrale soucieuse entre autres du dynamisme du secteur bancaire. Et les

<sup>4</sup> Source : Analyse de la situation de la bancassurance dans le monde. Focus du GROUP SCOR octobre 2005

assurances de leur part trouvaient dans les banques un réseau de proximité, géographiquement bien implanté et disposant d'un portefeuille-clients important pour vendre leurs produits.

### **II.1.2 Après le nouveau code des assurances de 2002 <sup>5</sup>:**

Le code des assurances de 2002 a introduit pour la première fois le terme de la bancassurance et le régit par 9 articles, le principale apport de ce nouveau code est la clarification de l'ambiguïté légale sur le rôle des banques en matière d'assurance.

Si nous voulons adopter un raisonnement basé sur les typologies d'assurance formant principalement deux grands pôles de produits d'assurance, qui sont assurance de personne et assurance de dommages. D'une part la distribution de l'assurance de personne par les banques, peut être faite soit en tant qu'activité connexe soit en tant qu'activité annexe.

D'autre part, l'assurance dommage n'est pas exclue du champ de la bancassurance, la banque contribue pour de grandes parts à la diffusion des assurances dommages en agissant la plus part du temps en tant que souscripteur pour le compte des clients ainsi la banque aura à choisir un intermédiaire agréé auprès duquel elle fera la souscription des contrats.

## **II.2. Volet fiscal :**

Le cadre fiscal influence fortement le développement de la bancassurance surtout les opérations relevant de l'assurance vie et la retraite, ce qui fait que tout changement des dispositions fiscales peut impacter de façon positive ou négative l'essor de la bancassurance.

Les principales mesures fiscales visant l'encouragement des produits d'assurance commercialisés via le réseau bancaire concernent surtout les contrats d'assurances de personnes, dans ce sens deux catégories sont concernées, il s'agit des cotisations d'assurance sur la vie ouvrant droit à réduction d'impôt, et les cotisations de retraite qui bénéficiaient de la déduction au niveau des revenus salariaux.

Au niveau du régime fiscal, les mesures d'encouragement de ces catégories d'assurance sur les personnes peuvent être mises en évidence aussi bien de côté des cotisations que de celui des prestations y afférentes.

### **II.2.1 Les contrats d'assurance-vie :**

Le contrat d'assurance-vie est défini comme étant un contrat par lequel en échange d'une prime, l'assureur s'engage à verser au souscripteur ou au tiers désigné par lui, une somme déterminée (capital ou rente) en cas de décès de la personne assurée ou sa survie après une époque déterminée.

#### **1. Taxe sur les assurances :**

Sont exonérées de la taxe sur les assurances, les opérations d'assurance comportant des engagements dont l'exécution dépend de la vie humaine. Ainsi, les contrats d'assurance-vie ne sont pas soumis à la taxe d'assurance.

#### **2. Impôt sur les revenus :**

Dans le cadre de l'impôt sur les revenus, d'une part le régime des cotisations au titre des contrats d'assurance sur la vie et des contrats de capitalisation fait que les primes

---

<sup>5</sup> Voir annexe II pour plus de détails sur les articles du nouveau code des assurances de 2002 concernant les opérations de bancassurance.

d'assurance sur la vie ou des contrats de capitalisation<sup>6</sup> versées périodiquement ou en un seul coup n'ouvrent droit à aucune déduction d'impôt. Et d'autre part, le régime des prestations servies au terme de ces mêmes contrats dont la durée est au moins égale à 8 ans bénéficient de l'exonération totale de l'IR. De même, les indemnités servies aux bénéficiaires, suite au décès de l'assuré, ne sont pas soumises à l'IR quelle que soit la date de souscription du contrat d'assurance. Il en est de même pour les indemnités servies dans le cadre du contrat décès en cas d'invalidité absolue et définitive de l'assuré.

Ainsi, Lorsqu'un contrat d'assurance sur la vie ou un contrat de capitalisation arrive à son terme au bout de 8 années de cotisations, la prestation servie à l'assuré est totalement exonérée d'impôt. Cependant, si les prestations sont versées avant 8 ans ou si le contribuable rachète ses cotisations au contrat avant l'écoulement des huit ans, les prestations perçues au terme du contrat sont alors imposables au taux du barème de l'IR par voie de retenue à la source effectuée par la compagnie d'assurance au titre de l'année de versement. Ainsi, en cas de dénouement du contrat d'assurance-vie ou de capitalisation avant la durée de 8 ans, il convient de distinguer les situations suivantes :

- ✓ En cas de décès de l'assuré avant le terme du contrat ou en cas d'invalidité absolue ou définitive (suivant les modalités du contrat), les prestations perçues par lui ou par les bénéficiaires ne sont pas soumises à l'IR quelle que soit la durée écoulée du contrat.
- ✓ Lorsque la prestation est versée sous forme de capital, les produits de la plus-value qui est la différence entre le montant du capital perçu et le montant global des cotisations ou primes versées par l'assuré durant toute la durée du contrat, sont imposables à l'IR au taux du barème en vigueur.
- ✓ Lorsque la prestation correspond à une rente viagère, celle-ci est imposable à l'IR au taux du barème en vigueur, après un abattement de 55%.
- ✓ Lorsque la prestation consiste en le versement d'une rente certaine, le montant imposable correspond à la part de la rente constituée des produits générés durant la période de cotisation. Ce montant est imposable à l'IR au taux du barème en vigueur. Pour déterminer la part de la rente constituée des produits générés pendant la durée des cotisations, il y a lieu de calculer, pour chaque période de versement, la différence entre le montant de la rente versé et la quote-part du montant total des cotisations afférent à cette période. Et nous entendons par quote-part du montant total des cotisations afférentes à une période donnée, le rapport entre le total des cotisations effectuées par l'assuré et le total des périodes durant lesquelles la rente est servie.

### **3. Contribution sociale de solidarité :**

Dans le but de poursuivre les efforts de mobilisation de ressources en faveur des populations démunies et de renforcer la solidarité sociale, la loi de finances n°115-12 a complété le C.G.I. par un titre instituant une nouvelle contributions sociales de solidarité, qui est la contribution sociale de solidarité sur les bénéfices et revenus, Cette dernière concerne les sociétés et les personnes physiques et est destinée à alimenter un compte d'affectation spécial intitulé "Fonds d'appui à la cohésion sociale".

Les personnes physiques concernées sont celles ayant des revenus professionnels, des revenus salariaux et revenus assimilés ainsi que ceux disposant des revenus fonciers.

---

<sup>6</sup> un contrat de capitalisation est un contrat où la probabilité de décès ou de survie n'intervient pas dans la détermination de la prestation en ce sens qu'en échange de primes uniques ou périodiques, le bénéficiaire perçoit le capital constitué par les versements effectués, augmenté des intérêts et des participations aux bénéfices.

A cet effet, les titulaires des revenus susvisés sont soumis à ladite contribution, et la base de calcul est le revenu de source marocaine net impôt. La répartition de la taxe par tranche de revenu se présente comme suit :

- ✓ 2% sur les revenus annuels situés entre 360 000 DH et 600 000 DH
- ✓ 4% sur les revenus annuels situés entre 601 000 et 840 000 DH
- ✓ 6% sur les revenus annuels situés au-delà de 840 000 DH.

**Exemple de calcul de la cotisation social de solidarité :**

Supposant un contrat d'assurance sur la vie qui arrive à son terme après l'écoulement de 8 années à compter de la date de sa souscription. Le 1er Janvier 2014 la société d'assurance verse à l'assuré un capital de 1. 320.000 DH.

Les prestations perçues dans ce cas ne feront l'objet d'aucune retenue à la source par l'assureur étant donné que la durée du contrat est au moins égale à 8 ans. Toutefois, le débirentier est tenu de liquider la contribution par voie de retenue à la source, le calcul se fait comme suit :

Montant du capital versé à l'assuré : ..... 1. 320.000 DH  
Montant total des cotisations versées : .....950.000 DH  
Montant de la prestation exonérée : .....370.000 DH  
Montant de la contribution retenu à la source par l'assureur :  
(370.000 x 2%) = 7.400 DH

**II.2.2 Les contrats d'assurance retraite :**

**1. En cas de déduction des versements :**

Les dispositions fiscales confirmées par la loi de finance, autorisent les employeurs de procéder à la déduction des versements des produits retraite à la source au profit de leurs salariés clients. Si le client dispose de revenus autres que salariaux, il a le choix de déduire annuellement ses versements : Soit à hauteur de 6% du revenu globale imposable ; Soit sans limite de son revenu salarial.

**2. En cas de non déduction des versements :**

Les épargnes constituées et les plus-values relatives aux contrats d'épargne et de retraite sont exonérées de l'IR en cas de liquidation ou de rachat quel que soit la durée des contrats. Le produit de retraite offre la possibilité aux clients de déduire l'ensemble de leurs versements (initiaux, périodiques et exceptionnels) effectués durant l'exercice au niveau de leurs revenus imposables. Si le client dispose d'un revenu salarial, il pourra déduire ses versements à hauteur de 100% dudit revenu.

En conclusion, les dispositions de l'article 9 de la loi de finances n°115-12 relative à l'année de 2013 ont relevé le taux de l'abattement forfaitaire sur le montant brut imposable

desdites pensions et rentes de 40% à 55%. Par ailleurs, il convient de préciser que l'abattement de 55% précité est accordé aux prestations servies au bénéficiaire sous forme de rente viagère au terme d'un contrat individuel ou collectif d'assurance retraite prévu à l'article 28-III du CGI. Quant à celles servies sous forme de capital ou de rente certaine, elles bénéficient de l'abattement de 40%.

S'agissant des contrats d'assurance sur la vie ou contrats de capitalisation, lorsque la prestation est versée sous forme de rente viagère avant le délai de 8 ans, celle-ci reste imposable à l'I.R au taux du barème, après un abattement de 55%. Cet abattement s'applique aux pensions de retraite et rentes viagères acquises à compter du 1 janvier 2013.

## Chapitre 2 : Evolution de la bancassurance au Maroc

L'objectif de cette première partie étant de tracer les grandes lignes de notre mémoire, présenter le contexte de l'étude qui sera menée dans les deux parties suivantes, et permettre au lecteur de comprendre l'environnement d'action non pas des produits d'assurance mais surtout des produits d'assurance distribués dans le cadre de la bancassurance.

Dans ce même cadre, le présent chapitre tentera de relever la particularité de l'activité de la bancassurance au Maroc à travers le diagnostic de la situation sur les marchés et ainsi la lecture des chiffres les plus parlant permettant de juger l'état de son développement.

### I. La bancassurance en chiffres :

#### ❖ Chiffre d'affaires par banque et parts de marché <sup>7</sup>:

Les réalisations par établissement bancaire, en termes de primes émises et de commissions perçues, se rapportant aux deux derniers exercices, auxquelles sont associées les parts de marché respectives, se présentent comme suit :

Tableau 3: chiffre d'affaires par banque et parts de marché

Banque	Montants TTC en Millions de DH							
	P. émises 2010	Part de marché	P. émises 2011	Part de marché	Commissions 2010	Part de marché	Commissions 2011	Part de marché
1. AW Bank	1.642,88	36,33%	2.001,12	40,89%	83,34	33,96%	90,95	38,40%
2. BMCE Bank	1.435,75	31,75%	1.255,46	25,66%	37,62	15,33%	33,76	14,25%
3. CPM (BP)	699,02	15,46%	849,02	17,35%	49,60	20,21%	56,01	23,65%
5. CDM	298,93	6,61%	368,15	7,52%	33,85	13,79%	12,00	5,07%
4. BMCI	158,18	3,50%	159,96	3,27%	17,25	7,03%	19,10	8,06%
6. Al Barid Bank	144,07	3,19%	132,61	2,71%	9,59	3,91%	9,47	4,00%
8. CIH	60,31	1,33%	38,79	0,79%	9,65	3,93%	12,70	5,36%
7. CAM	59,42	1,31%	58,95	1,20%	2,64	1,07%	2,57	1,09%
9. SGMB	23,43	0,52%	28,84	0,59%	1,86	0,76%	0,28	0,12%
10. CDG Capital	0,10	0,002%	0,50	0,01%	0,004	0,002%	0,02	0,01%
<b>Ensemble</b>	<b>4.522,09</b>	<b>100%</b>	<b>4.893,40</b>	<b>100%</b>	<b>245,40</b>	<b>100%</b>	<b>236,85</b>	<b>100%</b>

Au niveau des émissions 2011, le CDM, comme en 2010, enregistre le taux de croissance le plus important du marché, soit un plus de 23,16%, sa part de marché ayant progressé, de 6,61% à 7,47%.

#### ❖ Production consolidée des sociétés de courtage captives de banques :

Les états de production consolidés des sociétés de courtage captives de banques font ressortir un chiffre d'affaires global, en termes de primes émises, de 1.417,29 millions de DH (MDH) soit un accroissement de +27,75% par rapport à l'exercice précédent. Le montant total des commissions allouées aux captives de banques s'élève à 191,02 MDH en hausse de 52,7% par rapport à 2010. Cet état se présente comme suit :

<sup>7</sup> Source : rapport de la bancassurance publié par la DAPS relative à l'exercice 2011

Tableau 4 : La production consolidée des sociétés de courtage captives

*Montants en millions de Dirhams (MDH) TTC*

Catégories	Exercice 2010		Exercice 2011	
	Primes TTC	Commissions TTC	Primes TTC	Commissions TTC
Incendie (y compris les contrats MR)	131,19	26,97	148,88	31,02
Accidents-risques divers :	169,43	30,21	231,32	50,09
- Assistance	9,31	1,14	26,81	2,99
- Maladie - Accidents corporels	90,32	7,18	89,03	11,04
- Automobile	23,84	4,24	27,70	5,45
Maritime-transport	0,98	0,19	1,19	0,23
Total Non Vie	301,60	57,37	381,39	81,34
Vie-capitalisation	807,84	67,68	1035,90	109,68
Crédit				
Réassurance				
Ensemble	1 109,45	125,06	1 417,29	191,02

*Source : Etats 4 communiqués par les sociétés de courtage captives – aux 31.12.2010 et 2011.*

Il ressort des données ci-dessus que, si les réalisations des banques en termes d'émissions de primes représentent 20,6% de l'ensemble des émissions du marché, toutes catégories confondues l'apport de leurs sociétés de courtage captives représentent 26,56% du chiffre d'affaires du marché.

Par ailleurs, les commissions perçues par les captives de banques d'un montant de 191,02 MDH, portent le montant global des commissions encaissées par le secteur bancaire, à 427,87 MDH, ce qui équivaut à une appréciation de +15,5%.

## **II. Le paysage de la bancassurance au Maroc :**

La bancassurance recouvre la stratégie des banques et des assurances visant une exploitation intégrée du marché des prestations financières. C'est une pratique qui a vu le jour au Maroc depuis plusieurs années.

En effet, c'est vers la moitié des années 70 (1973), avec la convention d'assistance de rapatriement de corps destinée initialement aux MRE lors de leurs déplacements, que cette technique est née.

A partir des années 80, l'activité prend forme et se développe grâce à l'entrée des banques marocaines sur le marché de l'assurance-vie et de la capitalisation qui va redéfinir le paysage financier.

La bancassurance au Maroc, a pu trouver un terrain de développement, notamment à la suite des processus de transformation et de concentration en cours dans le secteur financier marocain tout entier, comme en témoignent les fortes participations stratégiques des compagnies d'assurance dans les capitaux des établissements bancaires. Réciproquement, des compagnies d'assurances distribuent leurs produits à travers des partenariats commerciaux avec les banques, tels AXA avec la BMCI et le Crédit Du Maroc, la CNIA, Atlanta et la SANAD avec la BCP, le CIH ou le Crédit agricole, tandis que les compagnies d'assurances mutualistes se contentent de servir leurs propres clients.

Certes la bancassurance s'est beaucoup développée au Maroc depuis sa réglementation par le Code des Assurances et depuis lors, elle a réalisé des performances impressionnantes. Ce qu'il faut savoir, c'est qu'il y a au moins deux types de stratégies à mener dans ce cadre. La

première est offensive et se matérialise par l'acquisition par une banque d'une compagnie d'assurances. La banque devient alors maîtresse du métier et développe des moyens importants pour déployer cette activité à travers son réseau. L'autre stratégie se traduit par un partenariat commercial entre une banque et une compagnie d'assurances. Celle-ci lui offre des produits que la banque se limite à distribuer.

Dans notre pays, les deux stratégies coexistent même si, de plus en plus, les grandes banques ont des filiales d'assurance, comme le Groupe Attijariwafa Bank et le Groupe BMCE Bank.

Aujourd'hui, les résultats réalisés par la bancassurance au Maroc sont éloquents, avec une hausse des émissions de primes relevant des opérations de bancassurance de 8,21 % en 2011 par rapport à 2010 après un repli de -0,5 % en 2010 par rapport à 2009, cette hausse est essentiellement le fait des opérations « Vie et capitalisation » dont les primes émises bancassurance ont augmenté de 8,74 %. Les primes d'assurances collectées par les banques au titre de l'année 2011 interviennent à hauteur de 43,6 % du montant global des émissions du marché, et les commissions allouées aux banques par les assureurs représentent 10,26 % des commissions du marché toutes catégories confondues.

En 2011, les réalisations des banques et les sociétés de courtage captives de banques se sont établies à 6 310,69 MDH, soit 26,56 % du chiffre d'affaires du marché. Tous ces chiffres réunis témoignent du développement du secteur, et ce grâce à des ménages qui s'intéressent davantage à la gestion de leur épargne, qui sont mieux avertis, moins adverses aux risques, beaucoup plus conscient de la possibilité de gérer directement leurs patrimoines, chose qui va orienter la demande de produits financiers vers un concept plus global de patrimoine. Ce qui traduit une volonté de rentabilité (profiter des nouveaux produits financiers) et en même temps de sécurité (se protéger contre les aléas liés au vieillissement de la population).

### **III. Le diagnostic de la situation sur le marché marocain :**

« Banque Assurance », « Banque & Assurance »... rares sont aujourd'hui les banques de réseau au sein desquels nous n'entendons pas en parler. A quelques déclinaisons près, ces expressions, sont symboles d'une offre qui se veut globale. A croire que les banques n'ont pas mesuré les impacts induits par cette diversification sur leur métier bancaire d'origine. A croire également que cette incursion dans le monde de l'assurance n'a pas été prolongée par une réflexion sur une nécessaire refondation de l'identité bancaire.

La bancassurance limite les perspectives de développement des compagnies d'assurance mutualistes qui se contentent de servir leurs seuls clients, mais offre en revanche un bon nombre d'opportunités qu'il serait possible de conforter. Les avantages de passer par la bancassurance plutôt que par une compagnie d'assurance classique sont nombreux aussi bien pour les clients que pour les différentes parties prenantes dans ce processus, suite à ceci, ce paragraphe vient pour mettre en évidence ces avantages ainsi que tout autres éléments contraignant ce processus de développement.

En premier lieu pour les clients, la bancassurance leur permet de souscrire à des produits bon marché, parce qu'il s'agit d'une distribution large qui pousse les compagnies à consentir une tarification très compétitive. La banque négocie avec sa compagnie une vente de masse, qui lui permet de réduire les prix au maximum.

Le courtier, quant à lui, devra inclure tous ses frais de démarchage envers la clientèle pour calculer ses gains au moment où la banque mène une action commerciale à la marge, emploie ses agences et sa force de vente pour proposer des produits d'assurance qu'elle commercialise en masse à côté d'autres services bancaires, dits classiques.

Par ailleurs, les compagnies d'assurances recourent à des courtiers, lesquels sont obligés de se déplacer pour gagner la clientèle alors que la bancassurance présente un caractère de

proximité. Un client qui fréquente couramment son agence bancaire est ainsi mis en situation d'obtenir des renseignements dans le cadre d'une confiance mutuelle, sur des offres concernant les produits d'assurance en profitant des conseillers d'agence qui le connaissent depuis longtemps.

### **Un packaging simple.**

En deuxième lieu, les banques ont développé des produits simples, avec des contrats facilement compréhensibles et des propositions de packages qui sont dans la plus part des cas liées aux crédits.

En effet, le processus de simplification des produits d'assurance est un phénomène réel. Il y a quelques années seulement, les produits d'assurance vie étaient extrêmement sophistiqués en termes de technicité et de calcul de l'épargne. Aujourd'hui, les produits de bancassurance sont similaires aux produits bancaires, simples et accessibles. Le client peut suivre par exemple l'évolution de son épargne. Il sait qu'elle est rémunérée à un taux minimum garanti et qu'à la fin de l'année, il bénéficie d'un bonus supplémentaire puisque la compagnie place l'argent et distribue une partie sous forme de participation aux bénéficiaires.

De plus, il y a aujourd'hui une grande souplesse dans les produits et notamment ceux d'épargne retraite. Un client peut cotiser le montant qu'il veut sans passer en dessous d'un minimum, il peut sortir quand il veut, voire demander une avance et effectuer des retraits partiels.

### **Un gain fiscal ...**

Par ailleurs, les avantages fiscaux sont probants pour un produit d'épargne retraite et sont incomparables avec les produits d'OPCVM qui sont, eux, fiscalisés. En effet, l'épargne retraite est totalement défiscalisée en cas de non-déduction des cotisations du revenu.

Quant à l'épargne éducation, c'est un produit défiscalisé si les prestations sont servies après 10 ans, et fiscalisé à l'IR sur la plus-value si les prestations sont servies avant 10 ans. Ce type d'épargne marche très bien car les clients sont conscients qu'une grosse dépense les attend à partir du moment où l'un de leurs enfants atteint les dix-huit ans.

Des produits variés...

L'assurance Vie prévoyance intègre une garantie décès. Généralement, Il s'agit d'une formule liée au solde du compte, qu'il soit débiteur ou créancier, et la prestation est servie aux bénéficiaires sous forme de capital. Si le solde est débiteur, c'est l'assurance qui paie le débit et non la famille de l'assuré. S'il est créancier, l'assurance paie l'équivalent du montant aux héritiers.

Les autres assurances de prévoyance sont relatives aux accidents de la vie privée notamment la couverture des frais médicaux et d'hospitalisation. Généralement, ces produits se déclinent en plusieurs options afin que toutes les catégories de clientèle puissent s'y retrouver, selon leurs revenus.

Bref, ce qui est sûr c'est que tout le monde profite de l'activité bancassurance, et si nous voulons adopter un raisonnement par partie, nous allons faire la distinction suivante :

- ✓ pour la banque : La banque voit dans la bancassurance un moyen de créer un nouveau flux de revenus et de diversifier son activité. Elle devient un fournisseur unique, où le client peut trouver réponse à tous ses besoins.
- ✓ pour l'assureur : L'assureur a l'opportunité de varier ses modes de distribution, afin d'éviter le problème de la dépendance vis-à-vis un réseau unique. Il profite souvent de la bonne image et de la confiance que l'on témoigne à la banque.

Il a également l'avantage de la réduction des coûts de distribution par rapport aux frais unis aux agents traditionnels, puisque le réseau de vente est en général le même pour les produits bancaires et les produits d'assurance. Ainsi, ça peut être un facteur permettant l'implantation rapide d'un assureur sur un nouveau marché.

- ✓ Pour le consommateur : Les coûts de distribution étant réduits par rapport à un réseau de distribution traditionnel, le consommateur peut bénéficier des produits d'assurance à des prix plus intéressants.

Le consommateur profite aussi de l'opportunité de se procurer des produits d'assurance simples avec un paiement des primes adapté à ses besoins et avec une accessibilité facile puisque le réseau bancaire est généralement plus fort que celui des agences d'assurance.

Bien que les contrats d'assurances distribués dans le cadre de l'activité bancassurance bénéficient de plusieurs avantages le meilleur d'entre eux c'est celui fiscal; la Bancassurance présente certaines limites, qu'on va essayer d'identifier dans ce qui suit.

La commercialisation des produits via les guichets bancaires présente un risque majeur qui est celui de toucher à l'image et à la notoriété des banques, dans ce cadre la séparation entre la vente d'un côté et la gestion des sinistres de l'autre doit permettre de limiter l'impact sur la relation bancaire en cas de mécontentement d'un client. La qualité du service doit être parfaite afin d'éviter que l'assuré résilie son contrat, qu'il ferme ses comptes bancaires et qu'il propage une image négative de la banque. C'est pourquoi la banque doit assister le client et avoir une qualité de règlement du sinistre irréprochable.

La bancassurance nécessite des efforts de marketing et une force de vente active ; la vente de quelques polices d'assurance vie ne suffit pas pour faire d'une banque traditionnelle un véritable bancassureur ; pour obtenir une rentabilité suffisante, l'activité de bancassurance exige des volumes importants. Ce n'est qu'à partir d'un certain nombre de contrats, détenu dans son portefeuille que la banque peut rentabiliser sa nouvelle activité.

En plus, bien que les produits proposés par chacune de ces deux professions sont similaires, la banque et l'assurance ont des approches fondamentalement différentes du risque et de la manière de l'assumer ; cette différence des stratégies entre les banques et les assurances génère des difficultés commerciales lié principalement à la performance et à l'efficacité des commerciaux ; l'efficacité des commerciaux de la banque est généralement inférieure à celle des commerciaux de l'assurance.

Les stratégies des deux institutions diffèrent également en matière de ciblage de la clientèle ainsi que des objectifs qui peuvent être divergents voir même incompatibles.

Les banques visent l'attraction d'une clientèle de jeunes, même peu fortunée, pariant ainsi sur sa fidélité à moyen terme. Néanmoins cette clientèle n'est pas attirée par l'assurance étant donné qu'elle est moins averse au risques associée à ce type d'assurance que d'autres groupes d'âge, elle souscrit notamment l'assurance automobile, où elle souffre d'un taux de sinistralité beaucoup plus important.

La quête de la distribution croisée pourrait s'avérer dérisoire avec le temps, en raison des éloignements culturels entre les métiers et des risques propres issus de la confusion des métiers. Le risque est grand que cette diversification n'aboutisse à la création d'un panier de produits ingérables et à une tendance à utiliser les profits des branches performantes pour masquer et renflouer les pertes ou les moins bons résultats des branches non ou peu performantes.

La Bancassurance souffre aussi de certaines limites imposées par le marché ; en effet la diffusion des produits par le secteur complémentaire est limitée, d'abord par les réseaux de commercialisations déjà existants, puis par la capacité du marché qui n'est pas indéfiniment extensible.

Le développement de ce modèle est aussi entravé par les intermédiaires qui opèrent déjà sur le marché, et notamment les agents d'assurance, qui sont considérés pour longtemps la destination des clients pour s'assurer.

Donc, et suite à l'apparition et au développement de la Bancassurance, les deux partenaires à savoir la banque et la compagnie d'assurance doivent agir pour rester compétitifs ; en effet et d'une part, la diversification des activités bancaires doit être pratiquée avec beaucoup d'attention pour que la qualité du service bancaire ne s'en trouve pas amoindrie ; d'autre part, les agents d'assurance sont appelés à diminuer leur taux de commission.

**DEUXIEME PARTIE**  
**Le contrat d'assurance-vie**  
**Multi-supports**

Cette deuxième partie de notre mémoire traitera les contrats multi supports. Sur le marché marocain, c'est une nouvelle formule récemment mise en place sur les marchés<sup>8</sup>, sortant du cadre classique des contrats d'assurance-vie ou d'épargne retraite.

Les contrats d'assurance-vie multi-supports permettent d'investir sur de nombreux supports (OPCVM, SICAV...), en fonction de la sensibilité au risque du souscripteur. Ces contrats, plus risqués que les contrats classiques offrent des perspectives de rendement plus importantes. Le souscripteur peut opter pour une gestion libre de son contrat multi-supports, dans ce cas, c'est lui qui détermine la composition de son portefeuille. A l'inverse, dans le cas d'une gestion profilée, c'est l'assureur qui répartit les différents supports en fonction du niveau de risque retenu par le souscripteur.

Dans ce cadre, Autant de thématiques et autant de portes ouvertes, ce dont il faut être sûr c'est qu'entre assurance et finance, entre théorie juridique et pratiques professionnelles, l'arbitrage constitue l'un des nœuds essentiels de l'opération d'assurance multi-supports. L'allocation des valeurs sur les unités de compte et entre fonds monétaire et unité de compte est l'acte où se dénouent les intérêts financiers du contrat et autour de laquelle se tissent les relations des intervenants divers à l'opération.

Conscient de l'impact des mouvements consenti sur les places financières sur les rendements de tel produits investi pour leur grandes part en unités de comptes, la modélisation de ces supports d'investissement sollicitera beaucoup d'intérêt dans la mesure où elle permettra de mieux appréhender la situation du marché et de mieux connaître le risque parcouru et ainsi la réalisation de l'arbitrage définissant la formule d'optimisation de l'investissement.

Pour pouvoir atteindre l'objectif de cette partie qui est la modélisation des actions étant donné qu'il est certes le support le plus risqué mais entre-temps celui le plus rentable, nous allons tout d'abord, définir ce qu'est un contrat multi-support, ses caractéristiques et ses particularités, puis nous allons présenter les théories de modélisation les plus couramment utilisées et finalement nous allons nous concentrer sur le modèle retenue et jugée comme le plus performant permettant de tracer les grandes lignes de l'évolution des actions sur le marché marocain.

---

<sup>8</sup> La première compagnie d'assurance à mettre en place un contrat d'assurance multi-support est la marocaine vie avec son produit vital multi-supports lancé en 2010

## Chapitre 1 : Fondements techniques des contrats multi-supports :

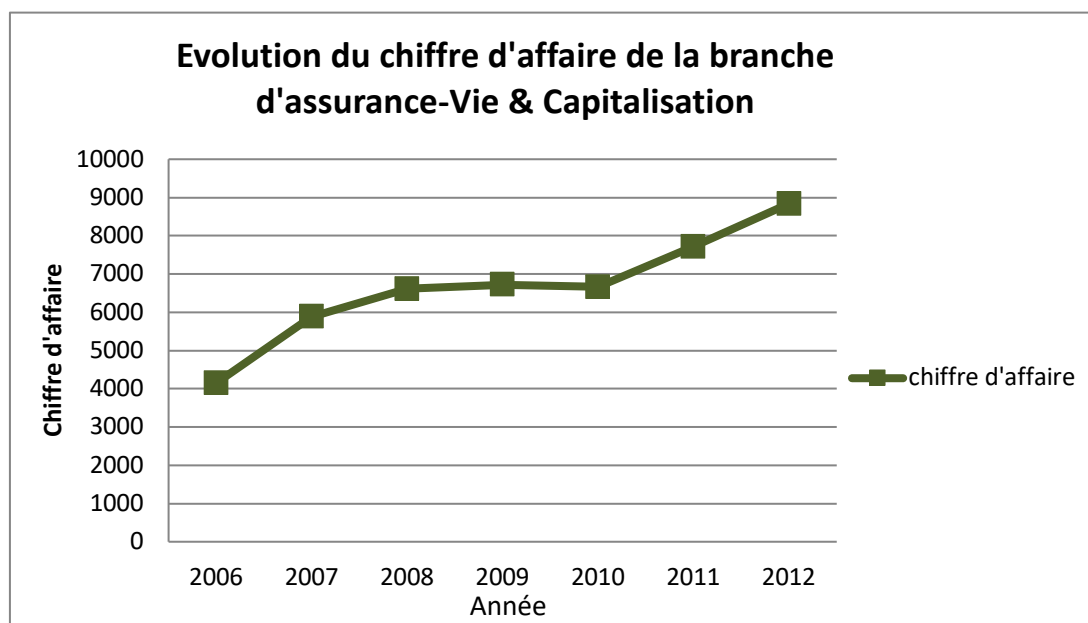
### I. Description général de l'épargne en assurance vie :

L'assurance vie repose sur l'approche de capitalisation viagère. En effet, le souscripteur ne reçoit pas de revenus durant la vie du contrat, mis à part le versement éventuel des intérêts techniques et de la participation aux bénéfices. Les produits provenant des primes versées par le souscripteur sont à chaque fois incorporés au montant épargné.

Pourtant les contrats d'épargne d'assurance vie ne sont pas des placements purement financiers, dans le sens où ils font intervenir à la fois un paramètre viager et un paramètre financier.

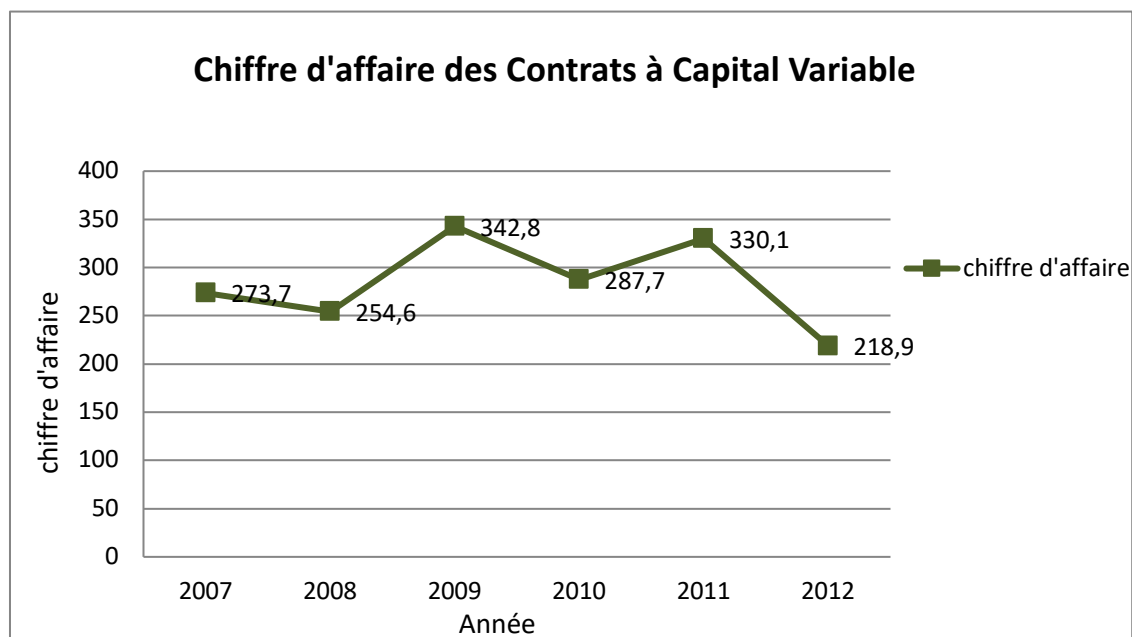
#### I.1. Quelques chiffres :

Figure 1 : Evolution du chiffre d'affaire de la branche d'assurance-vie & Capitalisation



D'après les rapports d'activité de la FMSAR, les contrats d'épargne d'assurance-vie restent toujours un moyen apprécié pour placer ses liquidités. En effet, en 2012, ils ont été alimentés par 8 839,1 millions de dhs soit un plus de 14,5% par rapport à 2011.

Figure 2: Evolution du chiffre d'affaire des contrats à capital variable



Les marocains restent cependant dans leur majorité très averses au risque et préfèrent placer leur épargne sur des contrats plus classiques, et plus particulièrement sur des supports proposant un taux de rendement garanti. Ainsi, la part des cotisations en contrat à capital variable (2,48% en 2012) reste assez faible.

## **I.2. Supports financiers de l'épargne en assurance-vie :**

Pour les contrats d'épargne, il existe plusieurs supports d'investissement.

- ❖ Les supports en dirhams : ils se caractérisent par le fait que leur garantie est exprimée en dirhams. Ces contrats sont les produits les moins risqués pour l'assuré et lui garantit la disponibilité du capital à tout moment. Sous réserve du respect des dispositions réglementaire, les fonds dédiés à ces contrats sont librement gérés par l'assureur et sont majoritairement investis en obligations.
- ❖ Les contrats en unités de comptes : Il s'agit de contrats d'assurance vie qui au lieu d'être exprimés en dirhams sont exprimés en parts de valeurs mobilières<sup>9</sup>. Le risque financier est ici supporté par le souscripteur qui subit directement la fluctuation des supports sur lesquels son contrat est adossé.  
Les contrats en UC sont en phase de démarrage sur le marché marocain. Ils ont beaucoup plus vocation à être distribués par les réseaux bancaires que par les réseaux traditionnels d'agents et courtiers.  
Ce type de contrats nécessite une certaine culture des marchés financiers de la part des souscripteurs pour qu'ils puissent mesurer les risques de placement qu'ils prennent.  
Les risques sont toutefois atténués eu égard au caractère « long terme » du placement auprès d'une société d'assurance.
- ❖ Les contrats multi-supports : l'épargne dans ce type de contrat est investie pour une part en des supports en dirhams et le reste dans des supports en unités de compte. Suivant les

<sup>9</sup> Au maroc le législateur est très strict dans ce cadre en ne permettant l'investissement de l'épargne collecté que dans des supports OPCVM (FCP, SICAV).

contrats, la répartition de l'investissement suit généralement le profil du souscripteur traduisant son degré d'aversion au risque, allant du profil le plus prudent à celui dynamique.

## **II. Caractéristiques des contrats multi-supports :**

### **II.1. Souscription et renonciation :**

La durée d'un contrat d'épargne est généralement fixée à plus de 8 ans, afin d'optimiser la fiscalité applicable aux plus-values obtenues. Au-delà de cette période, les contrats sont tacitement reconductibles année après année en préservant l'antériorité fiscale acquise en date de souscription. Dans tous les cas, au décès de l'assuré, le contrat prend fin lors du versement de l'épargne constituée aux bénéficiaires.

### **II.2. Cotisation :**

Les cotisations peuvent être réalisées sous différentes formes. Il peut s'agir d'une prime unique lors de la souscription ou de cotisation périodique si le souscripteur verse à intervalles réguliers des montants préalablement définis. Notant que d'une part, ces versements n'ont pas un caractère obligatoire. Et que d'autre part, à tout moment, ces cotisations peuvent être augmentées par des versements libres à la convenance du souscripteur.

### **II.3. Gestion financière :**

Au Maroc, la notion des contrats multi-supports est encore très nouvelle, puisque sur la place seule la SGMB et sa compagnie d'assurance, La Marocaine-Vie, offre ce genre de prestations utilisant pour la première fois au Maroc la technique des unités de compte. Ces produits permettent, dans le cadre privilégié de l'assurance épargne, de profiter des opportunités et des performances offertes par les marchés financiers, notamment le marché des actions.

Dans ce cadre, il existe trois grands modes de gestion :

- ❖ L'épargnant peut construire lui-même une allocation de son épargne-assurance en optant pour la gestion libre de son épargne.
- ❖ la gestion profilée, pour laquelle les versements sont investis entre différents supports selon une clé de répartition reflétant le profil de l'épargnant (prudent, équilibré, dynamique...) et dont l'épargne est rebalancée périodiquement pour ne pas dévier de cette allocation d'actif cible.
- ❖ L'épargnant peut également décider de se libérer de tout souci de gestion et profiter des connaissances des experts en optant pour la gestion pilotée. C'est une formule dans laquelle l'assuré donne mandat à l'assureur pour construire l'allocation lui paraissant optimale selon les conditions de marché.

### **II.4. Structure tarifaire :**

L'épargnant qui souscrit ou qui vend ses parts d'OPCVM (souscription ou rachat de contrat) réalise ses opérations sur la base de la valeur liquidative calculé hebdomadairement ou le cas échéant quotidiennement. Cette valeur liquidative est majorée d'une commission de souscription appelée droit d'entrée ou minorée d'une commission de rachat appelée droit de

sortie. Ces droits ont pour but de faire payer au nouvel actionnaire ou à l'actionnaire sortant les frais qu'entraîne son arrivée ou sa sortie.

En plus des droits d'entrée et de sortie, s'ajoute des chargements pour frais de gestion qui représentent le pourcentage prélevé de l'encours OPCVM, destiné à couvrir les frais de fonctionnement et à rémunérer la société de gestion.

### **III. Risques associés aux contrats d'assurance multi-supports :**

#### **III.1. Risque de contrepartie :**

C'est le risque auquel la compagnie doit faire face suite à la concentration de ses placements sur les actifs de certaines sociétés. En effet c'est le risque de défaut de la contrepartie qui devient de moins en moins intense avec une politique d'investissement garantissant la diversification des placements.

A cet effet, le législateur intervient pour limiter les incidences d'un tel risque en obligeant les compagnies à mener une politique d'investissement diversifié, par exemple il n'est pas autorisé d'investir plus de 10% du portefeuille (OPCVM) dans les actifs d'une même société.

#### **III.2. Risque de liquidité :**

Pour l'assureur, le risque de liquidité correspond à l'impossibilité de céder un actif sur les marchés. De par leur nature, certaines classes d'actifs comme l'immobilier peuvent être ponctuellement non liquides.

#### **III.3. Risque lié au comportement des assurés :**

De manière générale, le risque de comportement survient en cas de modification sensible du comportement des assurés qui provoque une modification importante des flux futurs estimés des contrats. En effet, cela se traduit par une modification de la durée et de la survenance des flux du passif.

C'est un risque est lié au comportement des assurés en termes de rachats, arbitrages, transformations, prorogation qui peut influencer considérablement les cash-flows du passif. Ce comportement peut dépendre des caractéristiques socioprofessionnelles, de la situation économique, du mode de commercialisation du contrat, de la concurrence (interne ou externe), de l'environnement institutionnel...etc.

Il s'en suit que l'assureur doit adapter son allocation d'actifs pour une meilleure adéquation des flux de l'actif et du passif. Il peut dans certains cas se trouver contraint à vendre des actifs et éventuellement à comptabiliser des moins-values.

#### **III.4. Risque des placements financiers :**

##### **III.4.1 Risque de baisse du marché des actions :**

La baisse du marché des actions est synonyme de la baisse de la performance financière, c'est une insuffisance de rendement financier qui se répercute sur les taux servis aux assurés et peut entraîner d'une part, des comportements de vagues de rachat ou d'arbitrage qui vont contraindre l'assureur à céder les actions , et d'autre part, ça met l'assureur dans l'obligation de doter la provision pour dépréciation durable et la provision

pour risque d'exigibilité des engagements techniques et ce pour pouvoir rester le maximum possible solvable vis-à-vis les clients assurés.

### **III.4.2 Risque de taux :**

Le risque de taux est le risque lié aux variations des taux d'intérêts sur le marché obligataire. Dans ce marché deux situations peuvent se distinguer qui sont toutes les deux liées au sens de variations des taux, la situation où il y a un risque d'exigibilité lié à la hausse des taux d'intérêts, et la situation où la baisse des taux pose un risque de réinvestissement.

#### **1. En cas de hausse des taux, le risque d'exigibilité :**

Il s'agit du risque d'avoir à céder les obligations avant leur remboursement, alors que ces obligations sont en moins-value par rapport à leur prix d'achat. En effet, si les taux d'intérêts augmentent, les obligations achetées antérieurement sont en moins-value latente. Dans ce cas, les sociétés doivent céder leurs obligations pour couvrir d'éventuelle impasse de trésorerie, elles peuvent être amenées à réaliser des moins-values et se trouver face à des insuffisances de rendement. Cette situation se présente soit suite à un effet concurrence dans la mesure où la compagnie doit revaloriser les contrats au même niveau que ceux des autres compagnies sur le marché, soit pour limiter les comportements de rachat anticipé, et surtout si la réserve de capitalisation est insuffisante. Notons que ce risque devient de plus en plus important lorsque l'option de rachat est possible.

En effet, suite à une hausse des taux rapide les événements s'enchaînent. Ainsi, après la hausse des taux, la concurrence s'intensifie, de nouveaux acteurs entrent sur le marché de l'assurance vie et se lancent dans la conquête de parts de marchés en proposant des taux de rémunération intéressants, les anciens acteurs du marché sont alors dans l'obligation de puiser dans leur provision pour maintenir un taux de rentabilité suffisant notamment pour distribuer une participation aux bénéficiaires au même niveau que celle offerte par les concurrents. Si les taux se maintiennent à de haut niveau, les assureurs épuisent cette provision et n'arrive plus à servir un taux de rendement compétitif. Cette faiblesse des taux servis impliquent des vagues de rachats massifs ou d'arbitrages vers les fonds UC étant donné une clientèle fortement guidée par l'ambition « rentabilité ». Donc pour assurer la continuité du paiement des prestations, les assureurs sont dans l'obligation de réaliser des moins-values obligataires qui engendrent une importante baisse des produits financiers une fois la réserve de capitalisation épuisée. Et ceci ne fait qu'aggraver la situation en rendant le produit encore moins compétitif. Si les produits financiers deviennent nuls voire négatifs, les assureurs devront honorer leurs engagements au taux technique de 0% ce qui engendrera des pertes pouvant mettre en cause la solvabilité de la société d'assurance.

#### **2. En cas de baisse des taux, le risque de réinvestissement :**

En cas de baisse des taux, les flux sont investis ou réinvestis à un taux de plus en plus bas. L'assureur risque alors de ne pas pouvoir faire face aux engagements de taux qu'il a proposés aux clients à cause de l'insuffisance de rendement financier. En d'autres termes, l'arrivée à l'échéance d'une obligation conduit la compagnie d'assurance à procéder à un réinvestissement du nominal remboursé. Cependant, en cas de baisse des taux, l'entreprise ne trouvera pas de placements aussi rentables que le précédent et à niveau de risque inchangé. Ceci dit qu'il y a possibilité d'obtenir un différentiel négatif entre le taux de rendement des placements et le taux garanti aux assurés. Ce différentiel diminuera d'autant plus rapidement que la durée moyenne de détention des placements est inférieure à la durée des engagements.

Sans oublier qu'il y a aussi le risque de ne plus pouvoir couvrir les frais de structure et de fonctionnement si la rémunération devient inférieure au coût de structure.

## Chapitre 2 : Principes de la modélisation stochastique

La projection des cash-flows pour les contrats d'épargne multi-supports peut s'avérer très complexe, en raison de la complexité des montages financiers optimisant les allocations des actifs et en raison de la diversité des options et garanties offertes. Afin de prendre en compte ces éléments, la modélisation des actions, qui constituent le principale poste des actifs alloués aux contrats en unités de compte sera réalisée via des modèles stochastiques.

### **I. Modèles stochastiques :**

#### **I.1. Des modèles déterministes ...aux modèles stochastiques :**

En assurance vie, les contrats peuvent être compliqués à modéliser car ce sont des contrats de longue durée qui dépendent souvent d'options cachées. Celles-ci représentent des garanties ou des droits variés conférés aux assurés par la réglementation ou par des clauses contractuelles pour rendre les contrats plus souples et plus attractifs. Il peut notamment s'agir d'un taux minimum garanti, d'une participation bénéficiaire, d'une garantie de capital, d'une possibilité de rachat, etc. Ces options peuvent représenter une charge significative pour l'assureur et sont donc à prendre en compte lors de l'évaluation de la compagnie.

Or, les méthodes déterministes d'évaluation ne sont pas adaptées pour tenir compte des risques financiers liés à ce genre d'options et de garanties qui sont soit sous-évaluées, soit complètement ignorées. Par exemple, dans le cas d'un contrat d'épargne à taux minimum garanti, la garantie ne sera pas valorisée si l'unique taux de rendement moyen des actifs utilisé lors de la projection est toujours supérieur au taux minimum garanti. Pourtant, si le taux de rendement des actifs devient inférieur à ce taux minimum, l'assureur subit une charge effective supplémentaire diminuant ainsi son résultat.

En fait, les options présentent un caractère volatil qu'il n'est pas possible de modéliser de façon satisfaisante en basant la projection sur un unique scénario financier qui est celui le plus probable adopté dans le cadre de la modélisation déterministe.

Par conséquent, l'obtention d'une évaluation juste et cohérente en fonction de la réelle exposition au risque, nécessite le passage par des projections basé sur une approche stochastique.

Un modèle stochastique est un modèle qui vise à prendre en compte la volatilité des phénomènes considérés dans ses résultats. Pour ce faire, de nombreux scénarios financiers sont tirés aléatoirement -correspondant à autant d'états du marché- et les risques sont alors évalués statistiquement.

D'une manière générale, l'idée est de tenir compte de la volatilité de presque toutes les variables économiques et financières qui entreront en jeu dans les différentes étapes d'évaluation (taux, cours des actions, mortalité...etc.). Ainsi, ces modèles permettent de visualiser et de connaître les fluctuations et donc les quantiles autour de la valeur tendancielle. Ils s'appuient sur les mêmes données que celles utilisées dans une évaluation déterministe mais la modélisation stochastique considère de nombreux scénarios représentatifs de toutes les possibilités de la réalisation du risque.

### **II. Notions sur la Modélisation du taux d'intérêt :**

Une compagnie d'assurance vie doit faire face au risque lié au taux d'intérêt. Elle doit évaluer ses placements monétaires et reproduire l'évolution des titres du marché obligataire pour éviter le déséquilibre entre l'actif et le passif qui peut être créé suite à cette évolution. Il

convient donc de modéliser la structure des taux d'intérêts afin de traduire les fluctuations des produits de taux (monétaires, obligations...).

Le taux sans risque permet d'évaluer une large part des actifs de l'assureur, puisqu'il s'agit du taux utilisé pour reconstituer la valeur des titres obligataires en portefeuille ainsi que ceux traités sur le marché par l'intermédiaire des taux zéro-coupons.

Enfin, ce taux intervient également dans le processus de projection de la rentabilité des actifs de type action. En effet, le rendement des actions peut être égal au taux sans risque -dans le cas d'une évaluation en univers risque-neutre- augmenté d'une prime de risque -dans le cas d'une évaluation en univers réel-.

La modélisation du taux d'intérêt a fait l'objet de beaucoup de travaux menés par des grands chercheurs statisticiens financiers partageant tous le même souci qui est celui de cerner au mieux les circonstances de fonctionnement d'une telle variable qui à elle seule peut revenir le succès ou l'échec des places financières les plus dynamiques au monde.

Avant de présenter les différents travaux traitant la modélisation du taux d'intérêt nous allons passer en revue quelques notions qui seront utilisées dans ce cadre pour une meilleure compréhension du contexte.

## **II.1. Quelques définitions :**

### **II.1.1 Notions sur les taux d'intérêts :**

L'intérêt représente le coût d'emprunt de l'argent sur une certaine durée, c'est-à-dire le prix que les prêteurs demandent aux emprunteurs pour l'usage de l'argent qu'ils mettent à leur disposition. Ce coût est calculé en multipliant le montant emprunté par le taux d'intérêt.

Si pendant longtemps, l'analyse théorique s'est contentée d'évoquer le «taux d'intérêt », en pratique la diversité des taux est telle qu'il est indispensable de définir les différentes notions de taux d'intérêt.

#### **1. Taux nominal et taux réel**

Si nous prenons l'exemple d'un placement d'une année dans un instrument financier à échéance d'une année au taux nominal  $R$  un capital d'une unité monétaire génère, à échéance, une somme de  $(1+R)$  unités monétaires.

Notons respectivement,  $P$  et  $p$  le niveau des prix initial et le taux d'inflation durant la durée de portage de l'instrument. Un capital réel de  $C$  génère donc, à échéance, une valeur réelle de  $C * \frac{(1+R)}{(1+\pi)}$

Le taux de rendement réel du  $r$  du placement est donc le suivant :  $1 - C * \frac{(1+R)}{(1+\pi)}$

il est plus commode d'approximer<sup>10</sup> cette relation entre le taux réel  $r$ , le taux nominal  $R$  et le taux d'inflation  $\pi$  par :  $r = R - \pi$ .

#### **2. Taux court et taux long :**

La valeur du taux d'intérêt est liée la durée, ou à ce qu'on appelle la maturité car une opération d'emprunt (ou de prêt) sur 10 ans n'est évidemment pas la même chose qu'un emprunt (ou prêt) sur un mois. Une différence de coût ou de rémunération<sup>11</sup> donc de taux va en découler. Il est d'usage d'appeler :

<sup>10</sup> C'est la fameuse relation entre le taux d'intérêt nominal et réel introduite par Fisher

<sup>11</sup> Nous parlons de coût pour un emprunt et d'une rémunération pour un prêt

- ✓ Taux court terme : les taux appliqués aux opérations sur des périodes allant jusqu'à 2 ans;
- ✓ Taux moyen terme : les taux appliqués aux opérations de 2 à 5 ans ;
- ✓ Taux long terme : les taux appliqués aux opérations au-delà de 5 ans<sup>12</sup>.

### **3. Taux zéro-coupon :**

Le taux zéro coupon est le taux de rendement actuariel d'un instrument financier ne comportant aucun détachement de coupon jusqu'à la maturité. Il ne donne, alors, lieu qu'à deux flux : un flux initial (son prix d'achat) et un flux final de remboursement du nominal plus les intérêts.

En d'autre terme, c'est le taux d'actualisation permettant d'égaliser le prix du titre et le cash-flow généré en fin de période.

### **4. Taux à terme ou taux forward :**

L'idée derrière cette notion de taux à terme repose sur le fait qu'il est possible de construire, à un instant donné, un portefeuille de titres (notamment des obligations) permettant de déterminer à l'avance le taux de rendement actuariel d'un prêt sur une période futur.

Prenons l'exemple d'un investisseur qui peut librement acheter et vendre des titres de maturités différentes. Pour fixer, dès aujourd'hui, le taux de rendement sur un investissement qu'il réalisera dans le futur ( $T_2$ ) ; il lui suffit d'acheter un zéro-coupon venant à la date de maturité ( $T_1$ ) souhaitée ( $T_2 > T_1$ ), et, simultanément, de vendre des zéro-coupon venant à échéance à une date ( $T_1$ ) où il désire débiter son investissement. Le choix de montants appropriés pour les positions prêteuses et emprunteuses permet de faire en sorte que l'investissement net actuel ( $t$ ) soit nul. Lorsque la position emprunteuse vient à échéance, l'investisseur rembourse la valeur faciale du zéro-coupon et reçoit inversement la valeur faciale du titre acheté lorsque ce dernier vient à maturité. Le taux de rendement actuariel de cette stratégie est appelé taux de rendement à terme ou taux forward.

## **II.1.2 Notions sur la courbe de taux :**

La courbe de taux <sup>13</sup> est la fonction qui à une date donnée et pour chaque maturité, indique le niveau du taux d'intérêt associé. A une date donnée et dans un pays ou une zone économique unifiée, il existe une multitude de courbes de taux. A noter que les maturités sont portées en abscisses et les taux correspondant en ordonnés.

### **1. Différentes courbes :**

Nous pouvons distinguer plusieurs courbes de taux, parmi lesquels nous présentons :

- ✓ **La courbe des taux à maturité :** c'est une courbe associée aux obligations à taux fixes<sup>14</sup>, qui est cotée classiquement soit en prix soit en taux, ce taux est celui de rendement à maturité de l'obligation. Cette courbe associe à chaque maturité d'une obligation son taux de rendement.
- ✓ **la courbe des taux zéro-coupon :** cette courbe fait référence à la notion de bon zéro-coupon. Un bon zéro-coupon de maturité  $T$ , comme son nom l'indique qui ne donne

---

<sup>12</sup> même si la référence taux long repose généralement sur du 10 ans.

<sup>13</sup> Appelé encore la structure par terme des taux d'intérêts ou encore la gamme des taux

<sup>14</sup> L'obligation à taux fixe est évaluée par actualisation des flux futurs qu'elle délivre, notamment les coupons qui sont supposés fixes.

pas droit au détachement de coupon. En fait, tous les intérêts sont capitalisés jusqu'à la fin de la durée de vie du titre et le détenteur du bon ne perçoit aucun coupon durant la durée de vie du titre. La relation entre le bon et son rendement est assez simple et change selon à ce que nous travaillons avec des données discrètes ou continues. Par exemple notons  $P(t, T)$  le prix du titre de maturité  $T$  à l'instant  $t$ , et  $r(t, T)$  taux de rendement, dans le cas discret la relation est la suivante :

$$P(t, T) = \frac{1}{(1 + r(t, T))^T}$$

A un instant donné, la structure par terme des taux d'intérêts se définit comme la valeur prise par  $r(t, T)$  pour différentes valeurs de la maturité  $T$ .

## **2. Forme de la courbe des taux :**

La courbe des taux peut prendre diverses formes, en fonction des variables endogènes et exogènes faisant varier la situation sur les marchés, on peut notamment citer les formes suivantes :

- ✓ Croissante ;
- ✓ Décroissante ;
- ✓ courbe en « creux » : Décroissante sur le court terme, puis croissante ;
- ✓ courbe « bosselé » : Croissante sur le court terme puis décroissante ;
- ✓ Quasi-plate.

## **II.2. Théorie de modélisation de la courbe de taux :**

L'objet de ce paragraphe étant la modélisation de la courbe des taux, il apparaît logique de commencer par une énumération des modèles existants dans la littérature. Ainsi, on distingue trois grands types de modèles de taux:

### **II.2.1 Modèles stochastiques de la courbe des taux :**

Ce type de modèle de déformation de la courbe des taux est utilisé essentiellement d'un part, pour évaluer et couvrir les produits de taux délivrant des flux aléatoires dans le futur. Le vendeur type de produit doit être capable de lui donner un prix, mais surtout de pouvoir le car il encourt une perte illimitée. Ces modèles sont surtout utilisés dans les cellules de contrôle des risques et dans les salles de marché dans un contexte de trading. Et d'autre part, pour permettre la mise en place de l'analyse par scénario qui est très utile pour les responsables de gestion des portefeuilles, chargés non seulement de mettre en place une stratégie, mais aussi d'évaluer cette stratégie et l'impact du scénario de déformation de la courbe des taux qu'ils anticipent. Cependant, étant donné que la réalisation du scénario anticipé n'est pas sûre, ils se voient obliger de mesurer le risque couru si ce scénario ne se réalise pas dans les faits. Pour cela, le besoin de mettre en place un outil qui permet d'envisager tous les scénarios possibles de déformation de la courbe des taux est sans aucun doute incontestable.

### **II.2.2 Modèle d'analyse en composante principale :**

Le but de la modélisation de la courbe des taux via les modèles d'analyse en composantes principales est de mettre en évidence les principaux facteurs qui expliquent les déformations de la courbe des taux. C'est un modèle qui permet d'avoir concrètement une meilleure connaissance de l'évolution empirique de la courbe des taux, et fondamentale la mise en place d'un modèle stochastique réaliste. Il est également utilisé pour la couverture contre le risque de taux de produits à flux déterministes.

### **II.2.3 Modèle de reconstitution de la courbe des taux :**

La mise en place de la méthode de modélisation via la reconstitution de la courbe des taux est rendue nécessaire par le fait qu'il n'existe pas suffisamment d'obligation zéro-coupon cotées sur le marché. Par conséquent, il n'est pas possible d'obtenir les taux zéro-coupon pour un continuum de maturité. En outre, les obligations zéro-coupon ont souvent une moindre liquidité que les obligations à coupons.

La littérature est très riche en ce qui concerne les méthodes de modélisation de la courbe de taux ; conscient de l'importance du taux d'intérêt dans les divers processus financiers, les intervenant se sont multipliés essayant chacun de sa part de cerner au mieux cette notion et surtout de remédier aux problèmes des théories déjà mise en place et ainsi les compléter. Dans le présent mémoire, nous n'allons s'intéresser qu'au modèle reposant sur une démarche stochastique de modélisation, qui une fois mise en place selon les règles de l'art, permettent d'optimiser la stratégie d'allocation entre actifs.

## **Chapitre 3 : Modèles stochastiques de la courbe des taux**

Depuis plusieurs années, les modèles d'évaluation de structure temporelle des taux d'intérêts ont beaucoup inspiré les chercheurs. Selon l'approche utilisée, ces modèles d'évaluation peuvent être classés en trois catégories. Les premiers travaux sont ceux qui, à partir d'hypothèses relatives au comportement d'une variable jugée pertinente ou de plusieurs, dérivent les équations de prix en faisant appel à un raisonnement d'arbitrage, ce type de modèle est notamment celui surnommé « modèle d'équilibre partiel ». Parmi ces modèles citons par exemple celui de Vasicek (1977) qui comporte une variable d'état et celui de Brennan et Schwartz (1979) qui en compte deux. Ensuite, portant un peu plus d'ambition, nous trouvons « les modèles d'équilibre général », tels que le modèle de Cox, Ingersoll et Ross (1985), qui tente à partir d'une description globale de l'économie et d'hypothèses sur les fonctions d'utilité des investisseurs, de construire ces équations de prix. Enfin les modèles de déformation adoptent une approche absolument opposée puisqu'ils partent de la structure des taux d'intérêts observés et lui font subir des chocs. Dans cette catégorie, le modèle de Ho et Lee (1986) ainsi que sa généralisation proposée par Heath, Jarrow et Morton (1992) (HJM) sont les plus connus.

Ce chapitre est consacré à l'étude de modèles des deux premières catégories. Nous allons prendre le modèle de Vasicek comme exemple pour la première catégorie, et celui de CIR pour la deuxième. Le point commun à ces deux modèles est le choix du taux à court terme comme variable d'état, et la différence se sent quant aux hypothèses que l'on pose concernant le comportement de cette variable. Ces hypothèses prennent la forme d'un processus stochastique censé présenter convenablement le comportement de la variable d'état qui y est associée. Nous pouvons en toute logique s'attendre à ce que les processus mettant en œuvre un plus grand nombre de paramètres obtiennent de meilleurs scores mais la complexité du processus rend difficile l'obtention d'une solution au problème d'évaluation de l'actif considéré. Donc, il s'agit de trouver un compromis conjuguant simplicité et représentativité, simplicité quant à sa formulation et une représentativité du comportement de la variable d'état.

### **I. Analyse statistique des données :**

Rappelons que les données utilisées sont constituées des taux actuariels de référence des bons de trésor, de maturité allant de 13 semaines jusqu'à 23 ans observées quotidiennement, à partir de mai 2011 et jusqu'au mai 2013.

#### **I.1. Indicateurs standards :**

Nous allons en premier lieu réaliser une étude de statistiques descriptives sur les taux de bon de trésor susmentionnés :

**Tableau 5: statistiques descriptives des taux de bon de trésor**

Moyenne	4,969%
Médiane	5,098%
Maximum	5,29%
Minimum	3,80%
Ecart type	0,003
Asymétrie	-1,44
aplatissement	4,42

## I.2. Analyse de la distribution :

Dans un deuxième lieu nous passons au test de normalité des données à l'aide de test de Jarque-Bera, cette statistique repose sur les coefficients d'aplatissement et d'asymétrie selon la formule suivante :

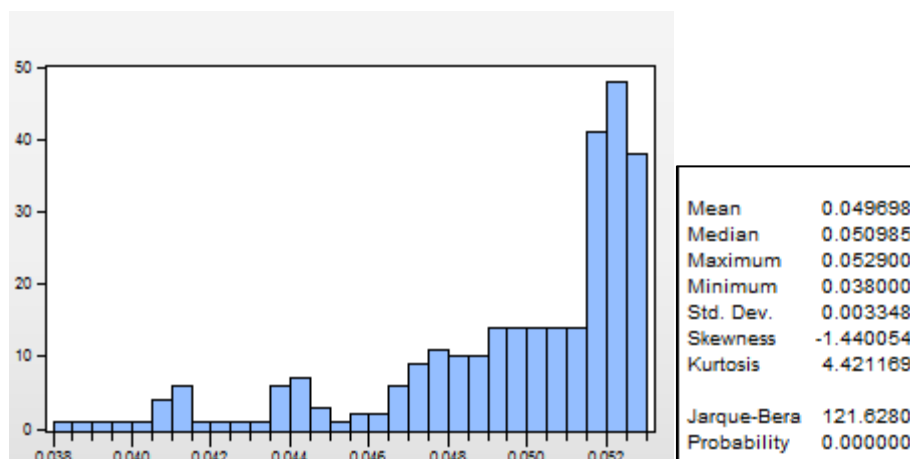
$$JB = \frac{N - k}{6} \left[ S^2 + \frac{1}{4}(k - 3)^2 \right]$$

Où :

- N représente la taille de l'échantillon ;
- K le coefficient d'aplatissement (kurtosis) ;
- S le coefficient d'asymétrie (skewness).

La statistique JB suit une loi khi-deux à deux degré de liberté, ainsi la règle de décision est la suivante : si  $JB \geq \chi^2_{1-\alpha}$  l'hypothèse de normalité de la distribution est rejetée au seuil  $\alpha$ .

Tableau 6 : La statistique de Jarque-Bera pour les taux marocains



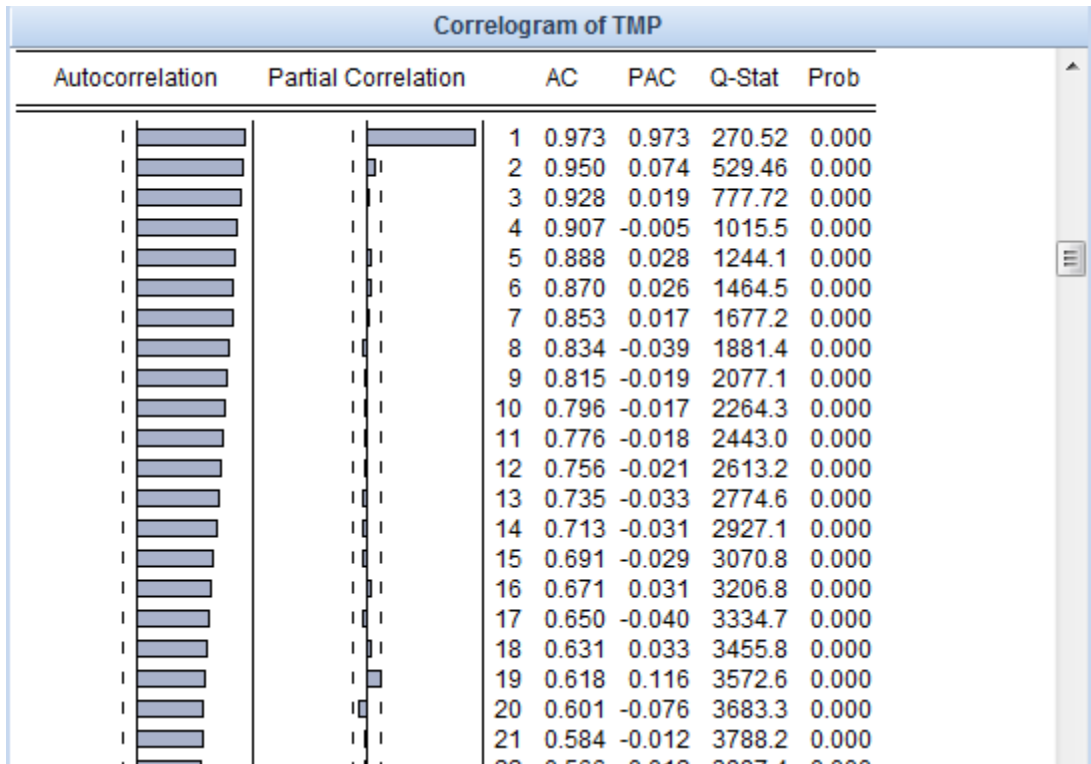
La statistique de Jarque-Bera a des valeurs très grandes par rapport à la valeur critique de 5,991 (niveau 95%). Ainsi nous pouvons rejeter l'hypothèse de normalité des séries des taux.

### I.3. Analyse de la stationnarité :

Ici il est question de savoir si le changement de repère temporel affecte les propriétés de la série. Deux méthodes peuvent être utilisées pour détecter la non stationnarité d'une série :

La première consiste en l'observation du corrélogramme de la série, ce dernier se présente comme suit :

Figure 3 : Corrélogramme de la série des taux zéro-coupons



La deuxième méthode est beaucoup plus fondée en se basant sur un test de racine unitaire par la méthode de Dickey-Fuller augmenté. Ce dernier est venu remédier aux problèmes du test Dickey-Fuller qui considère que par hypothèse les erreurs  $\varepsilon_t$  sont des bruits blanc, hypothèse qui n'est, à priori, pas toujours vérifié. D'où l'intérêt de l'ADF qui prend en compte l'autocorrélation des erreurs. Les trois modèles utilisés pour effectuer ce test sont les suivants :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta X_t = \rho X_{t-1} + \alpha + \beta t + \sum_{j=1}^p \theta_j \Delta X_{t-1} + a_t \\ \Delta X_t = \rho X_{t-1} + \alpha + \sum_{j=1}^p \theta_j \Delta X_{t-1} + a_t \\ \Delta X_t = \rho X_{t-1} + \sum_{j=1}^p \theta_j \Delta X_{t-1} + a_t \end{array} \right.$$

Où  $a_t$  sont IID et  $\sim BB(0, \sigma^2)$ .

Nous cherchons à tester l'hypothèse de racine unitaire :

$$\begin{cases} H_0 : \rho = 0 \\ H_1 : \rho < 0 \end{cases}$$

Sous Eviews les résultats de ce test sont les suivants :

Tableau 7: Résultat du test de la racine unitaire pour le modèle 3

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
TMP(-1)	-0.020931	0.005402	-3.874850	0.0001
D(TMP(-1))	-0.482327	0.058153	-8.294114	0.0000
D(TMP(-2))	-0.172423	0.058247	-2.960213	0.0033
C	0.001298	0.000264	4.909766	0.0000
@TREND(1)	-1.47E-06	2.31E-07	-6.344081	0.0000
R-squared	0.275715	Mean dependent var		2.71E-05
Adjusted R-squared	0.265180	S.D. dependent var		0.000314
S.E. of regression	0.000269	Akaike info criterion		-13.58535
Sum squared resid	1.99E-05	Schwarz criterion		-13.52044
Log likelihood	1906.949	Hannan-Quinn criter.		-13.55932
F-statistic	26.17124	Durbin-Watson stat		2.027418
Prob(F-statistic)	0.000000			

Nous remarquons que la valeur de la statistique t est inférieure à celle de la table ainsi nous pouvons accepter la nullité du coefficient de tendance et nous passons au test du modèle 2.

Tableau 8: Résultat du test de la racine unitaire pour le modèle 2

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
TMP(-1)	-0.029380	0.005330	-5.511993	0.0000
D(TMP(-1))	-0.333300	0.055146	-6.043914	0.0000
C	0.001501	0.000266	5.643255	0.0000

Ainsi nous pouvons confirmer la stationnarité de la série du fait que statistique t pour la constante est supérieure à celle de table de DF (au seuil de 5%), ce qui fait que l'hypothèse de nullité de la constance est rejetée et ainsi nous pouvons garder le modèle 2.

## II. Modèle de Vasicek :

Dans cette section, nous traiterons le modèle de Vasicek, l'un des premiers modèles de la structure par terme des taux d'intérêt. Dans ce modèle à un facteur (le taux court), le principal résultat est une équation aux dérivées partielles devant être respectée par la fonction prix des bons sans coupon, appelée *équation de structure par terme*.

Dans ce qui suit, nous détaillerons toutes les étapes par lesquelles passe l'élaboration de la structure par terme des taux d'intérêt dans le cadre du modèle de Vasicek.

Dans ce modèle, le taux court est censé suivre un processus d'Ornstein-Uhlenbeck dont l'évolution stochastique obéit à l'équation différentielle de type :

$$dr(t) = a(b - r(t))dt + \sigma dW(t)$$

Où :

- a : vitesse d'ajustement du taux court actuel vers sa moyenne de long terme
- b : moyenne sur le long terme du taux court
- r(t) : taux court en t
- W(t) : mouvement brownien standard<sup>15</sup>

Selon ce processus, le taux court subit deux contraintes d'évolution. La première représente l'aptitude du taux d'intérêt à reprendre sa valeur moyenne à long terme, c'est le phénomène de retour à la moyenne vérifié dans la plus part du temps en pratique qui fait que les valeurs élevées de taux ont tendance à être suivies plus fréquemment par des baisses que par des hausses et vis-vers ça. Tandis que la seconde de faire fluctuer le taux court autour de sa moyenne à la vitesse a d'autant plus rapide qu'il s'en écarte davantage.

Ainsi, si r(t) s'éloigne de b, l'espérance de la variation instantanée de r(t), égale à a(b-r(t)) est positive si b>r(t), dans ce cas, le taux court a tendance à augmenter se rapprochant de sa moyenne sur le long terme. A l'inverse, si b<r(t), le taux diminue dans le temps pour se rapprocher de b.

### II.1. Solution de l'équation différentielle :

Avant de présenter la forme explicite la solution de l'équation différentielle, il est nécessaire de rappeler que le prix de marché notamment la prime de risque est supposé constante par ce modèle chose qui n'influe pas la forme de la dynamique si nous passons à l'univers risqué. La solution de la dynamique est la suivante :

$$r_t = b + (r_0 - b)e^{-at} + \sigma \int_0^t e^{-a(t-s)} dW(s)$$

Notons  $\gamma = T-t$ , la solution de EDP à laquelle le prix d'un titre doit obéir est la suivante :

$$P(t, T) = A(t, T)e^{-B(t, T)r(t)}$$

Où :  $B(t, T) = \frac{1 - e^{-a\gamma}}{a}$

$$A(t, T) = \exp \left[ (B(t, T) - \gamma)R(\infty) - \frac{\sigma^2 B(t, T)^2}{4a} \right]$$

$$R(\infty) = b + \frac{\sigma\pi}{a} - 0,5 \frac{\sigma^2}{a^2} ; \text{représente le taux à long terme}$$

$\pi$  : La prime de risque supposée constante

L'utilisation du modèle de Vasicek pose un problème majeur quant à la spécification de la prime du risque qui n'est certes pas la même pour toutes les obligations et qui est en même temps indépendante de la durée de vie du titre. Cette prime ne peut être obtenue que par la minimisation de l'écart entre les prix observés et les prix estimés à l'aide du modèle, c'est-à-dire d'une manière arbitraire.

<sup>15</sup> Voir annexe III pour la définition d'un mouvement Brownien

L'estimation des paramètres du processus d'où ainsi que la simulation des trajectoires, nécessite la discrétisation du processus stochastique. C'est ce que nous allons détailler dans le paragraphe qui suit.

## **II.2. Discrétisation du processus d'Ornstein-Uhlenbeck :**

Nous pouvons parler de discrétisation exacte d'un processus  $Y$  dès lors qu'il est possible de résoudre explicitement EDS qui lui est associée. C'est notamment le cas du processus d'Ornstein-Uhlenbeck retenu par Vasicek pour modéliser le taux d'intérêt  $r$ , la dynamique du taux est comme suit :

$$dr(t) = a(b - r(t))dt + \sigma dW(t)$$

Cette dynamique admet la solution suivante :

$$r_t = b + (r_0 - b)e^{-at} + \sigma \int_0^t e^{-a(t-s)} dW(s)$$

La discrétisation exacte se présente comme suit :

$$r_{t+\delta t} = b + (r_t - b)e^{-a\delta t} + \sigma \sqrt{\frac{1-e^{-2a\delta t}}{2a}} \varepsilon \quad \text{Avec } \varepsilon \sim N(0,1)$$

## **II.3. Estimation des paramètres :**

Dans le cas du processus d'Ornstein-Uhlenbeck, l'estimation des paramètres peut se faire soit à l'aide la méthode du maximum de vraisemblance ou celle des moindres carrés ordinaires, à quelque différence près, les deux méthodes aboutissent aux mêmes résultats. Pour la méthode des moindres carrés ordinaires, le point de départ consiste à régresser la série des taux courts à l'aide de la formule suivante :

$$r_t = b(1 - e^{-a}) + e^{-a} r_{t-1} + \varepsilon_t$$

Avec

$$\varepsilon_t: \text{résidu de la régression est suivent une } N(0, \frac{\sigma^2}{2a}(1 - e^{-2a}))$$

Cette équation indique que l'ajustement du taux court peut se faire avec un processus autorégressif d'ordre 1. Toutefois, notons que pour l'application de ce modèle il faut vérifier si les données utilisées dans l'estimation vérifient cette hypothèse.

## **II.4. Inconvénients du modèle :**

Ce modèle est simple d'utilisation et d'implémentation d'un point de vue informatique, et permet de prendre en compte l'effet de retour à la moyenne constatée sur les taux d'intérêt, ce qui correspond aux observations empiriques. Cependant, il possède plusieurs inconvénients.

D'une part, les différents paramètres du processus de diffusion sont constants. Tout se passe comme si un seul facteur (le taux instantané) était à l'origine des déformations de la courbe des taux ; ce qui suppose que les taux soient parfaitement corrélés. D'autre part, cette modélisation du taux suit un processus gaussien, donc est négatif avec une probabilité non nulle. Ce qui est incompatible avec l'hypothèse d'absence d'opportunité d'arbitrage. En effet, un agent économique rationnel préférera toujours garder son argent plutôt que de le prêter à

un taux négatif. L'AOA est vérifiée si les agents ne peuvent pas investir dans le compte d'épargne court terme, bien que cette hypothèse ne soit pas réaliste.

### **III. Modèle de Cox-Ingersoll-Ross:**

L'avantage de ce modèle c'est que sous certaine condition, il ne modélisera jamais des taux négatifs. Ce dernier point est considéré comme le principal reproche adressé au modèle de « Vasicek » qui peut produire parfois des taux négatifs, ce qui n'est pas compatible avec l'hypothèse d'absence d'opportunité d'arbitrage.

Les taux courts sont supposés suivre un processus « racine carrée » dont la dynamique des taux est matérialisée par cette équation différentielle :

$$dr_t = a(b - r_t)dt + \sigma\sqrt{r_t}dW_t$$

Avec :  $a > 0$  : la force de retour à la moyenne, c'est-à-dire la vitesse d'ajustement du taux court simuler vers sa moyenne de long terme ;

$b > 0$  : la valeur moyenne sur le long terme du taux court ;

$\sigma > 0$  : la volatilité telle que  $\sigma\sqrt{r_t}$  est l'écart type instantané du taux court ;

$W_t$  : Un mouvement brownien standard.

Le modèle de CIR explique les variations du taux court par un effet de retour à la moyenne et un effet aléatoire dû au mouvement brownien.

La condition à joindre à ce processus pour assurer la stricte positivité des taux d'intérêt obtenu est telle que :  $\sigma^2 < 2ab$ <sup>16</sup>.

#### **III.1. Solution de l'équation différentielle :**

La solution du processus carré est donnée par :

$$r_t = r_0 + \int_0^t a(b - r_s) ds + \sigma \int_0^t \sqrt{r_s} dW(s)$$

Le prix en t d'une obligation zéro-coupon de maturité T, peut être déterminé par la formule <sup>17</sup>suivante :

$$P(t, T) = A(t, T)e^{-B(t, T)r_t}$$

Avec :

$$\diamond A(t, T) = \left( \frac{2\gamma e^{\frac{(\gamma+a)(T-t)}{2}}}{(\gamma+a)(e^{\gamma(T-t)} - 1) + 2\gamma} \right)^{\frac{2ab}{\sigma^2}}$$

<sup>16</sup> Voir démonstration 1 de l'annexe IV

<sup>17</sup> Voir démonstration 2 de l'annexe IV

$$\begin{aligned} \diamond B(t, T) &= \frac{2(e^{\gamma(T-t)} - 1)}{(\gamma + a)(e^{\gamma(T-t)} - 1) + 2\gamma} \\ \diamond \gamma &= \sqrt{a^2 + 2\sigma^2} \end{aligned}$$

Comme dans le modèle de Vasicek, les données disponibles sont discrètes, et par conséquent l'estimation des paramètres du modèle en temps continu n'est pas immédiate. Nous devons passer par la discrétisation du processus.

### **III.2. Discrétisation du processus racine carré:**

Lorsque la discrétisation exacte d'un processus n'existe pas, comme dans le cas du processus de CIR, il convient de se tourner vers des approximations discrètes du processus continu sous-jacent. Les plus connus des procédés de discrétisation sont les schémas d'Euler et de Milstein, qui sont tous les deux des développements d'Itô-Taylor de la solution de l'EDP à des ordres différents (ordre 1 pour Euler, ordre 2 pour Milstein). Dans ce travail, nous allons utiliser le schéma d'Euler.

Le procédé de discrétisation d'Euler définit la variation des taux comme suit :

$$r_{t+\delta t} - r_t = a(b - r_t)\delta + \sigma\sqrt{\delta r_t}\varepsilon \quad \text{avec } \varepsilon \sim N(0,1)$$

### **III.3. Calibrage du modèle :**

Le modèle ne sera complet que si nous déterminons l'ensemble de ces paramètres, ainsi, nous allons commencer par la détermination du taux court instantané à la date d'évaluation  $r_0$ . Pour les prix du marché, nous allons utiliser la courbe des taux de référence des bons de trésor distribuée par BAM fin mai 2013. Elle fournit les taux zéro-coupons  $R_a(0, T)$  pour une période de 23 ans, à travers cette courbe de taux nous pouvons déduire facilement le prix de marché :

$$P_M(0, T) = e^{-R_a(0, T) * T}$$

Les taux continus correspondant sont les suivants :

$$R_c(O, T) = \frac{-\ln(P_M(O, T))}{T}$$

Ainsi, nous estimons  $r_0 = \lim_{T \rightarrow 0} R_c(O, T)$ , qui est le taux instantané à la date d'évaluation en procédant à une interpolation cubique en considérant les 4 points de la courbe qui exprime les taux zéro-coupons en fonction de la maturité, avec la relation :

$$R_c(O, T_1) = \alpha T_1^3 + \beta T_1^2 + \gamma T_1 + \delta$$

$$R_c(O, T_2) = \alpha T_2^3 + \beta T_2^2 + \gamma T_2 + \delta$$

$$R_c(O, T_3) = \alpha T_3^3 + \beta T_3^2 + \gamma T_3 + \delta$$

$$R_c(O, T_4) = \alpha T_4^3 + \beta T_4^2 + \gamma T_4 + \delta$$

Or,  $r_0 = \lim_{T \rightarrow 0} R_c(O, T)$ , donc  $r_0 = \delta$

Pour déterminer les paramètres a et b, nous allons utiliser la méthode des moindres carrés ordinaires. Cette méthode consiste à trouver le couple des paramètres (a, b) qui minimise l'écart quadratique entre les prix simulés par le modèle CIR et les prix de marché.

$$D = \sum_{k=1}^N (PT_k - PE_k)^2$$

Où D : la distance à minimiser,  
 N : le nombre d'obligations envisagées pour la simulation,  
 PT : le prix théorique obtenu à partir de la courbe des taux de BAM,  
 PE : le prix estimé calculer sur la base du modèle CIR.

Reste à déterminer l'écart type. Ce dernier ne sera pas estimé mais calculé à partir de la base de données des taux zéro-coupons.

### **III.4. Application du modèle de CIR :**

#### **III.4.1 Génération des nombres aléatoires :**

La simulation des réalisations d'une loi de probabilité nécessite la génération des nombres aléatoires distribués selon une loi uniforme [0,1]. Ainsi ces nombres obtenus vont permettre de générer des variables aléatoires suivant une loi normale centrée réduite.

Sous VBA excel, la fonction Random permet de générer des nombres aléatoires, c'est un générateur qui fait partie de la catégorie des générateurs congruentiels dans lesquels le calcul se fait de manière récursive et dépend donc de la graine qui définit la qualité de la simulation.

En pratique, il existe des générateurs de meilleure qualité que les pseudo-aléatoire, ce sont les générateurs quasi-aléatoire et c'est notamment ce type de générateur auquel nous ferons appel dans notre application et plus particulièrement le générateur du Tore mélangé.

Le Tore mélangé est simple et facile à mettre en place, il est dérivé de l'algorithme de Tore tout en assurant l'indépendance entre les nombres aléatoires simulés.

L'algorithme du Tore mélangé génère des nombres aléatoires de loi uniforme, ainsi la n-ème réalisation d'une suite de variables aléatoires uniformes  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est définie comme suit :

$$u_{\rho(n)} = \rho(n)\sqrt{p} - [\rho(n)\sqrt{p}]$$

$$\rho(n) = [\alpha * n * \tilde{u} + 1]$$

Où :

[..] L'opérateur de partie entière

P : un nombre premier

$\alpha$  : supérieur ou égal à 1, son rôle est de réduire le nombre de tirages donnant le même nombre aléatoire. Plus il est élevé plus la probabilité d'avoir deux fois le même nombre aléatoire est faible.

n : le nombre de période de projection

$\tilde{u}$ : la réalisation d'une variable aléatoire uniforme, sous excel cette valeur est obtenue à partir du générateur Rnd.

La littérature sur le sujet estime que dans la pratique  $\alpha = 10$  est suffisant pour assurer que la probabilité de tirer deux fois le même nombre aléatoire est assez faible.

### III.4.2 Simulation de variable aléatoire gaussienne :

Les modèles utilisés pour simuler les taux et les actions reposent sur la simulation de mouvements browniens.

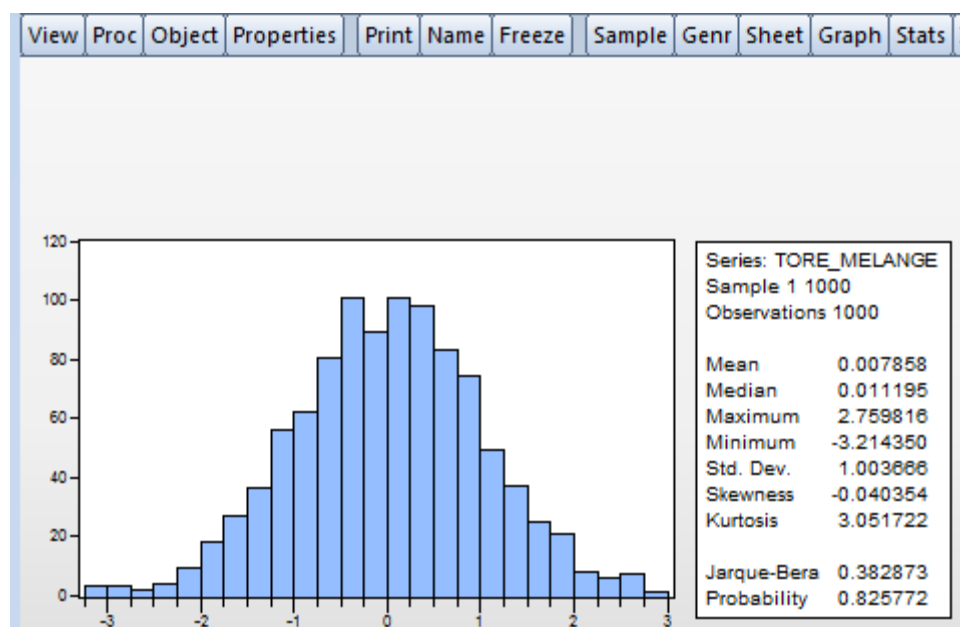
Simuler une trajectoire de mouvement brownien revient à simuler des variables gaussiennes indépendantes et identiquement distribuées. Pour ce faire les théories se multiplient en donnant un large choix de méthode de génération de variable normale, nous choisissons d'appliquer aux variables uniformes obtenues via le générateur de Tore mélangé, l'inverse de la fonction de répartition d'une loi normale.

### III.4.3 Présentation des résultats :

#### 1. Test de normalité des variables aléatoires générées :

Nous cherchons à travers ce teste à confirmer statistiquement que la variable, générée en appliquant l'inverse de la fonction de répartition normale au variable obtenue par l'algorithme de Tore mélangé, est une variable normale. Ainsi nous ferons appel à la statistique de Jarque-bera pour effectuer ce test. Sur Eviews les résultats se présentent comme suit :

Figure 4 : les résultats du test de normalité des variables générées



Nous avons obtenu une p-value supérieure à 5% ce qui fait que la variable en question est bien une variable normale, ainsi ça confirme la pertinence et la fiabilité de l'algorithme de tore mélangé dans la génération de variable normale.

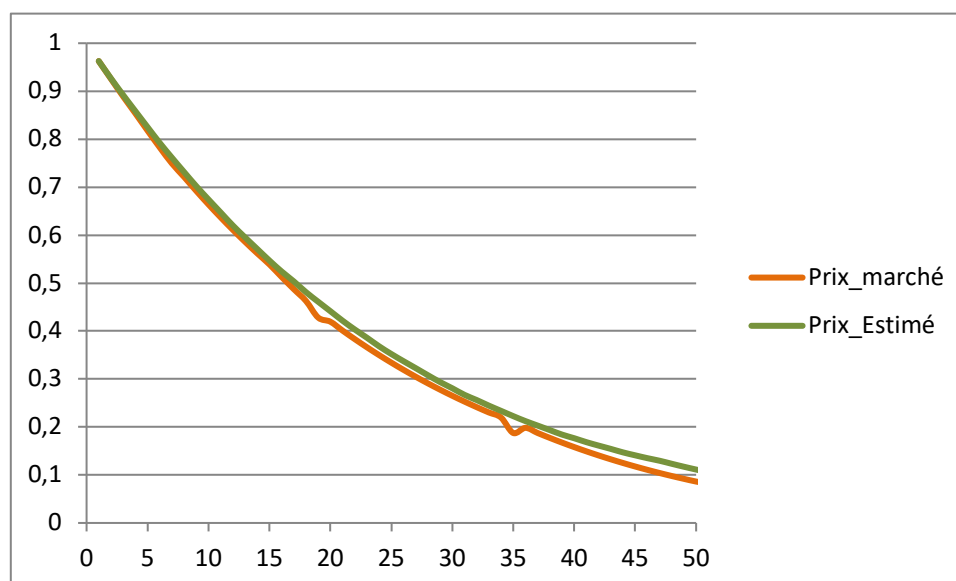
## 2. Implémentation du modèle :

Après avoir fixé les valeurs des paramètres du modèle, sa mise en place devient assez facile. Sous VBA Excel, les résultats se présentent comme suit :

Figure 5: Implémentation du modèle de CIR sous Excel

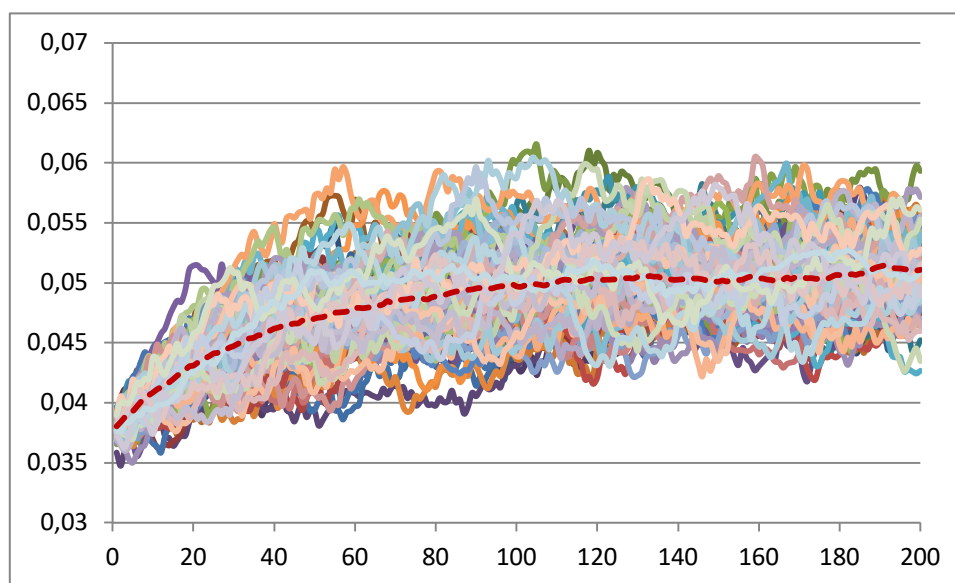
maturité	tmp	PM	Y	erreur	cir	A	B	PE	d
1	3,800%	0,96271294	0,02654	0,01479121	3,776%	0,99934	0,98705346	0,96278583	5,3131E-09
2	3,862%	0,92567692			3,804%	0,9974	1,9486528	0,92613836	2,1292E-07
3	3,923%	0,88897159			3,787%	0,9942	2,88544434	0,89127391	5,3007E-06
4	3,950%	0,85384978			3,803%	0,9898	3,79805849	0,85668515	8,0393E-06
5	4,020%	0,81791243			3,801%	0,98424	4,68711014	0,82364056	3,2812E-05
6	4,080%	0,78286109			3,826%	0,97757	5,55319901	0,79044513	5,7518E-05
7	4,121%	0,74940929			3,829%	0,96985	6,39691001	0,75914367	9,4758E-05
8	4,085%	0,72122076			3,831%	0,96113	7,21881355	0,72891556	5,921E-05
9	4,090%	0,6920324			3,846%	0,95146	8,01946591	0,69892752	4,7543E-05
10	4,095%	0,66395726			3,864%	0,9409	8,79940957	0,66970439	3,3029E-05
11	4,101%	0,63695581			3,898%	0,92951	9,5591735	0,6403445	1,1483E-05
12	4,106%	0,61098981			3,900%	0,91734	10,2992735	0,61389956	8,4667E-06
13	4,111%	0,58602226			3,923%	0,90446	11,0202126	0,58701029	9,7621E-07
14	4,116%	0,56201738			3,925%	0,89091	11,7224811	0,56237484	1,2777E-07
15	4,121%	0,53894056			3,911%	0,87677	12,4065571	0,5396876	5,5807E-07

Figure 6: comparaison de la courbe des prix zéro-coupon simulée avec le modèle CIR et les prix de marchés



Le calibrage des paramètres du modèle de Cox-Ingersoll-Ross avec les données actuelles, nous a donné des cohérents avec les prix des obligations zéro-coupon disponibles sur le marché en date d'évaluation. En effet, la courbe des prix de marché des obligations zéro-coupon en fonction de leur maturité et celle des prix donnés par le modèle coïncident.

Figure 7 : évolution des taux courts simulés par le modèle de CIR pour 200 simulations



Nous remarquons que le modèle de Cox-Ingersoll-Ross précédent est adapté aux conditions actuelles du marché. Les 200 simulations présentées dans le graphique ci-dessus confirment ce constat. En effet, le taux court actuel  $r_0$  en date initiale a une moyenne à long terme d'environ 5,08%, et nous remarquons sur le graphe la moyenne remonte pour s'établir aux alentours de 5%.

## Chapitre 4 : Modélisation des actions

Le chapitre précédent qui avait pour but la modélisation du taux d'intérêt était une étape intermédiaire pour pouvoir modéliser le cours des actions qui fera l'objet de ce chapitre. Dans la courses vers la mise en place du modèle le plus réaliste et plus fiables, les théories de modélisation du cours de l'action se sont multiplié, ayant chacune ses propres caractéristiques et notamment ses hypothèses de validation.

Aujourd'hui le modèle de référence pour la modélisation du cours d'une action reste le modèle de BLACK et SCHOLES (1973). Il a l'avantage d'être un modèle simple, facile à calibrer et à estimer en considérant que la trajectoire des rendements des prix des actifs financiers décrit un mouvement brownien. Mais l'utilisation de ce modèle implique des hypothèses assez restrictives, contredites par les observations empiriques et qui sont surtout de plus en plus critiquées.

En effet, la réalité montre que bien souvent les queues de distribution des rendements empiriques sont plus épaisses que celles d'une loi log-normale. Cet écart est notamment lié à deux éléments non pris en compte par ce modèle, le premier est que le cours d'une action n'est pas forcément continu, et il peut présenter des discontinuités, et le deuxième est que la volatilité n'est pas réellement constante.

Depuis lors, plusieurs autres modèles ont été développés pour mieux rendre compte de la réalité du marché, nous pouvons citer:

- ❖ Les modèles sauts qui permettent d'intégrer des éventuelles discontinuités des cours et donnent une queue de distribution plus lourde que le modèle de BLACK et SCHOLES. Les plus connus de ces modèles sont le modèle de MERTON (1976) et le modèle de KOU (2002) qui introduisent un processus de POISSON.
- ❖ Les modèles utilisant une volatilité stochastique tel que le modèle de HULL et WHITE (1987)

Malgré tout, le modèle de BLACK et SCHOLES reste le modèle le plus utilisé et le plus étudié. Et c'est notamment le modèle auquel nous ferons appel pour la modélisation des cours de l'action considérée<sup>18</sup>.

### **I. Présentation du modèle de Black and Scholes:**

Ce modèle repose sur la résolution d'une équation différentielle stochastique et suppose que le cours de l'action suit un mouvement brownien géométrique. La formule du modèle de Black & Scholes donne explicitement les prix des actions.

Le prix d'une action évolue selon le processus suivant :

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = \mu dt + \sigma dB(t)$$

Cette formule est valable pour les actions ne versant pas de dividendes. Pour celle versant des dividendes la formule utilisée est la suivante :

<sup>18</sup> A noter que notre modélisation portera sur l'indice MASI comme étant le principal indice boursier de la bourse de Casablanca, représentant l'ensemble des valeurs cotées.

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = (\mu - q)dt + \sigma dB(t)$$

Où :

- S(t) : le prix de l'obligation à la date t ;
- $\mu$  : La rentabilité espérée de l'action ;
- q : Le taux de dividende versé ;
- $\sigma$  : La volatilité de l'action ;
- B(t) : un mouvement brownien.

En utilisant le lemme d'ITÔ, la solution de cette équation différentielle stochastique est la suivante<sup>19</sup> :

❖ **Action ne versant pas de dividende :**

$$S(t) = S(0) * e^{\left\{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma B(t)\right\}}$$

❖ **Action versant des dividendes :**

$$S(t) = S(0) * e^{\left\{\left(\mu - q - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma B(t)\right\}}$$

Puisque le mouvement Brownien suit une normale  $N(0, \sqrt{t})$ , donc le cours de l'action ainsi modéliser suit une log-normale  $LN(\mu - \sigma^2/2, \sigma \sqrt{t})$

## **II. Prise en compte des corrélations :**

Le modèle de Black et Scholes avec corrélation au modèle de taux d'intérêt permet de se rapprocher au plus près de la réalité en tenant compte des corrélations existantes entre les différents actifs et donc entre les différents mouvements browniens entrant en jeu dans l'évolution des actifs.

A noter que puisque nous raisonnons en univers risque neutre. Tout actif a le même rendement espéré : le taux sans risque.

Nous allons tenir compte de la corrélation entre les taux zéro coupons et le cours des actions en utilisant la décomposition de Cholesky<sup>20</sup>, qui permettra de corréler les dynamiques des taux et du prix de l'action avec un coefficient de corrélation  $\rho$ . Dans l'univers risque neutre, les prix seront calculés selon la formule suivante :

$$S(t) = S(0) * e^{\left\{\left(\mu - q - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma \rho B_{t,1} + \sigma \sqrt{1 - \rho^2} B_{t,2}\right\}}$$

Avec  $B_{t,1}$  et  $B_{t,2}$  des mouvements Browniens indépendants.

## **III. Discrétisation du processus :**

Nous allons procéder pour la discrétisation du processus de black and scholes de la même façon que dans le modèle de CIR en utilisant la méthode d'Euler :

<sup>19</sup> Voir annexe V pour la démonstration

<sup>20</sup> Voir annexe VI pour la démonstration

$$S_{t+\delta t} = S_t * e^{\left\{ \left( r_t - q - \frac{\sigma^2}{2} \right) \delta t + \sigma \rho \sqrt{\delta t} \varepsilon_{t,1} + \sigma \sqrt{1-\rho^2} \sqrt{\delta t} \varepsilon_{t,2} \right\}}$$

Où :

$r_t$  : le taux court instantané obtenue avec le modèle de taux CIR ;

$\delta t$  : le pas de temps de discrétisation ;

$\varepsilon_{t,1}$  : La variable aléatoire normale centrée réduite utilisé dans le modèle de CIR ;

$\varepsilon_{t,2}$  : Une variable aléatoire normale centrée réduite indépendante de  $\varepsilon_{t,1}$ .

#### IV. Application du modèle :

Le cours de l'action utilisée pour l'application du modèle de Black and Scholes, évolue comme suit :

Figure 8: évolution du cours de l'action entre 2010 et 2013



Nous remarquons que le cours considéré ne présente pas une très grande volatilité, c'est ce que nous allons essayer de confirmer à travers le calcul de la valeur exacte de la volatilité dans ce qui suit. Le graphe nous permet aussi de constater que le cours est en baisse continue depuis presque la moitié de 2010, chose qui peut être expliquée par l'effet crise qu'a connu le monde en 2008 et qui a laissé souffrir beaucoup d'économie et parmi lesquelles le Maroc.

Pour calibrer les paramètres du modèle notamment  $\mu$  et  $\sigma$  nous allons procéder comme suit : D'une part, étant donné que nous travaillons dans l'univers risque neutre, comme nous l'avons déjà évoqué,  $\mu$  sera égale au taux sans risque modélisé dans le chapitre précédent par le CIR et ainsi la prime du risque sera nulle, d'autre part,  $\sigma$  et notamment  $\rho$  seront calculés à partir de l'historique considéré.

Définissant tout d'abord, le rendement logarithmique qui a pour moyenne  $\mu - \frac{\sigma^2}{2}$  et pour variance  $\sigma^2$  comme suit :

$$R(t) = \ln \left\{ \frac{S(t)}{S(t-1)} \right\} = \left\{ \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right\} + \sigma W(1)$$

Ainsi, les résultats du calibrage du modèle sont les suivants :

Figure 9: calcul des paramètres du modèle de B&S :

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1									
2									
3		maturité	taux zéro-coupon	Rendement		correlation	Ecart type	variance	
4		1	0,038	0,004531519		0,083856125	0,00724455	0,01%	
5		2	0,038615	0,000269309					
6		3	0,03923	-0,003190938					
7		4	0,0395	-0,005253711					
8		5	0,0402	0,00464247					
9		6	0,0408	-0,010402605					
10		7	0,04121	-0,005687599					
11		8	0,04085125	-0,002479353					
12		9	0,0409025	-0,001936892					
13		10	0,04095375	-0,005098817					
14		11	0,041005	0,006921244					
15		12	0,04105625	0,000555615					
16		13	0,0411075	-0,003911617					
17		14	0,04115875	-0,006248377					

Comme nous l'avons déjà mentionné, la prise en compte des corrélations entre l'actif considéré et les taux zéro-coupons se fera selon le schéma de cholesky, et comme l'interaction considérée est entre un actif nous aurons une matrice de dimension 2, cette dernière se présente comme suit :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0,083 \\ 0,083 & 1 \end{pmatrix}$$

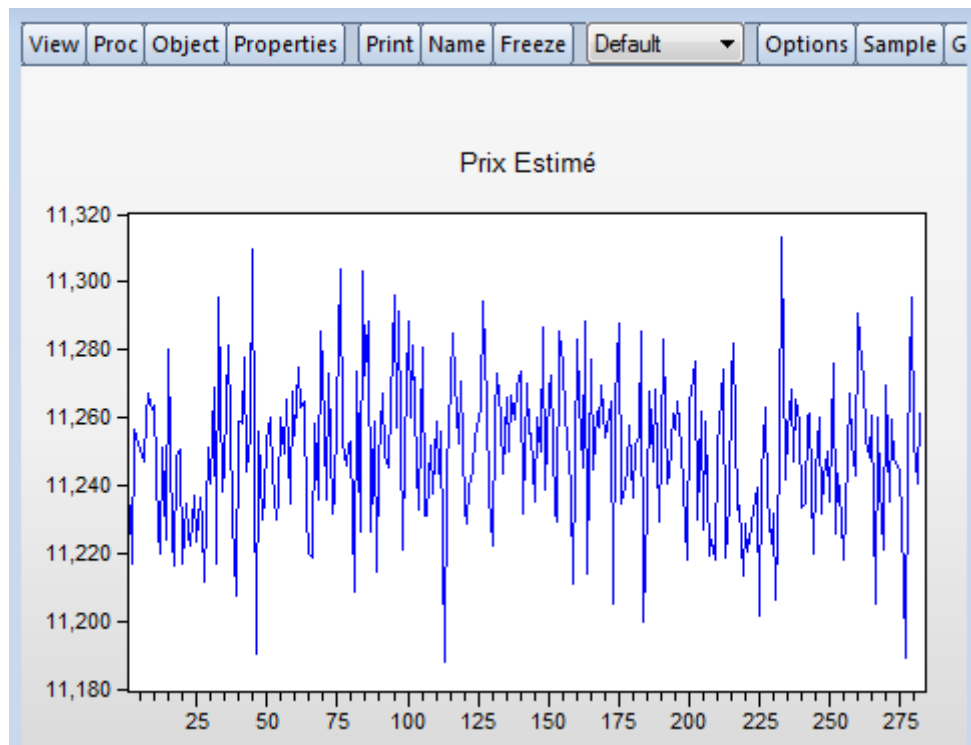
La mise en place de la formule de calcul du prix estimé avec les paramètres définis ci-dessus donne le résultat suivant :

Figure 10 : implémentation du modèle de B&S sous Excel

	A	B	C	D	E	F	G
1							
2	<b>N°</b>	<b>cir</b>	<b>sigma</b>	<b>s0</b>	<b>coef corr</b>	<b>Prix Estimé</b>	
3	1	3,815%	10,756%	11202,95	0,079561758	10653,8162	
4	2	3,871%				11220,5361	
5	3	3,922%				10788,2198	
6	4	3,958%				10441,759	
7	5	4,010%				11567,4955	
8	6	4,086%				10732,3135	
9	7	4,112%				10932,1202	
10	8	4,100%				11345,5424	
11	9	4,099%				11300,0613	
12	10	4,088%				11970,3742	
13	11	4,100%				10959,4944	
14	12	4,108%				11753,8795	
15	13	4,116%				11330,6502	
16	14	4,102%				11591,7094	
17	15	4,131%				11111,5722	

Navigation: CIR Black & sholes **B&S avc corr** MASI prix B&S correlation

Figure 11 : évolution du cours estimé par le modèle de B&S



**TROISIEME PARTIE**

**Le contrat d'assurance-vie**

**Mono-support**

Un contrat d'assurance-vie c'est un contrat d'assurance vie, rien ne change que nous parlons de mono-support ou multi-supports, à quelques différences près, les prestations, les garanties, les conditions de souscription sont les mêmes.

Mais un contrat d'assurance, c'est avant tout un placement, et notamment sous cet angle que nous pouvant faire la différence entre les différents supports proposés.

Comme son nom l'indique, un contrat mono-support ne propose qu'un seul support qui est le support en dhs, ce dernier permet de garantir le capital ainsi qu'un rendement minimum annuel. De sa part, comme nous l'avons pu comprendre de la partie précédente, le contrat multi-supports de conception récente, offre le choix entre le fond en dhs et d'autres permettant généralement d'investir en actions, ces supports permettent d'espérer un rendement plus élevé mais comme nous disons « There Is no free lunch », le risque est d'autant plus élevé que la contrepartie rendement est plus importante.

Ainsi, Cette troisième partie présentera ce type de contrat classique, en particulier les produits faisant partie de la gamme « VALOREM » distribué par crédit du Maroc et garanti par la RMA Wataniya, nous allons étudier ces produits, relever leurs caractéristiques, définir les formules de calcul des prestations garanti et ainsi les paramètres qui seront mis en jeux, et puis nous allons finir par la présentation de l'interface conçue via VBA Excel conçue pour la simulation des prestations de la gamme valorem avec ces quatre produits.

## Chapitre 1 : Présentation et étude des produits d'épargne et placement

Nous allons entamer cette dernière partie de ce mémoire, par une présentation des produits proposés dans le cadre de la gamme VALOREM, cernant toutes leurs caractéristiques et tous les éléments permettant de comprendre le fonctionnement technique de ces produits, ensuite dans un deuxième temps nous allons dégager toutes les formules de calculs depuis les conditions générales et les fiches techniques des produits pour pouvoir tracer après les étapes de conception et de mise en place notre système de calcul des prestations.

La gamme VALOREM récemment lancée dans le marché, regroupe 4 produits ayant des cibles différentes et par suite un fonctionnement différent, il s'agit de :

$\left\{ \begin{array}{l} \textit{Valorem capitalisation} \\ \textit{Valorem distribution} \end{array} \right.$	Souscrit via des versements libres
$\left\{ \begin{array}{l} \textit{Valorem capital} \\ \textit{Valorem rente viagère} \end{array} \right.$	Souscrit via des versements programmés

### **I. Présentation des produits :**

#### **I.1. VALOREM Epargne programmée :**

Le Crédit du Maroc, en sa qualité d'intermédiaire d'assurance agréé, intervient dans le présent contrat en tant qu'intermédiaire entre le souscripteur assuré et l'assureur.

Il s'agit d'une assurance sur la vie, à primes périodiques, qui a pour objet de garantir les prestations suivantes :

- ✓ En cas de vie de souscripteur assuré au terme du contrat : le versement du capital constitué et/ou d'une rente viagère. La liquidation, sous forme de rente viagère, est fixée à 60 ans. Cependant le souscripteur assuré a la possibilité de demander la liquidation anticipée de ses droits à partir de l'âge de 50 ans révolus.
- ✓ En cas de décès naturel du souscripteur assuré avant le terme du contrat : le versement au (x) bénéficiaire (s) désigné (s) sur le contrat, à défaut aux ayants droit du souscripteur assuré, du capital constitué à la date du décès.
- ✓ En cas du décès accidentel avant le terme du contrat : le versement au (x) bénéficiaires (s), à défaut aux ayants droits du souscripteur assuré, du capital constitué à la date du décès auquel s'ajoute un capital complémentaire, dont le montant est fixé aux conditions particulières.

La souscription de ce contrat est réservée aux personnes physiques âgées de plus de 18 ans, titulaires d'un ou plusieurs comptes auprès du Crédit du Maroc.

Chaque souscripteur assuré devra signer les conditions particulières par lesquelles il donne son consentement à l'assurance.

Les déclarations du souscripteur assuré servent de base au contrat qui est incontestable dès qu'il a pris existence sous réserve des dispositions des articles 30, 31, 94 et 95 de la loi 17-99.

### **I.1.1 Les garanties :**

#### **1. en cas de vie au terme du contrat :**

Au début de chaque année, un taux minimum garanti annuel pour l'exercice civil en cours est fixé par l'assureur et ce conformément aux dispositions de l'article 15 de l'arrêté du ministre de la finance.

Le capital constitué en cours d'exercice correspond au capital constitué en début d'exercice augmenté des primes versées, nette des frais d'acquisition, le tout valorisé au taux minimum garanti annuel.

Le premier janvier suivant, et sous réserve que le contrat soit en cours à cette date, le capital constitué est calculé sur la base du taux de revalorisation effectivement attribué au titre de l'exercice précédent compte tenu de la participation aux bénéfices.

La valeur de rachat de chaque contrat en cours d'exercice correspond au capital constitué en début d'exercice augmenté des primes versées dans l'exercice en cours nettes de frais d'acquisition.

#### **2. en cas de décès avant le terme**

En cas de décès, le souscripteur assuré bénéficie des garanties définies ci-après :

- ✓ en cas de décès naturel :

En cas de décès naturel le souscripteur assuré avant le terme du contrat, l'assureur versera au (x) bénéficiaire (s) à défaut aux ayants droits le capital constitué à la date du décès.

- ✓ en cas de décès accidentel :

En cas de décès accidentel le Souscripteur assuré avant le terme du contrat, l'assureur versera au (x) bénéficiaire (s) à défaut aux ayants droits le capital constitué à la date du décès auquel s'ajoute un capital complémentaire, dont le montant est fixé aux conditions particulières.

Par décès accidentel, il faut entendre le décès résultant de l'action violente, soudaine, imprévisible, d'une cause extérieure au souscripteur assuré, et non intentionnelle de sa part, survenue postérieurement à la date d'effet de son contrat.

L'accident doit être la cause exclusive du décès et la garantie ne s'applique que si le décès survient dans un délai de 6 mois à compter de la date d'accident.

La preuve de l'accident et de ses conséquences incombe au (x) bénéficiaire sur le contrat, à défaut aux ayants droit du souscripteur assuré.

Sont exclus de la présente garantie :

- ✓ Le décès consécutif à un suicide conscient et volontaire pendant les deux premières années de souscription.
- ✓ Le décès résultant d'infarctus ou d'accidents vasculaires cérébraux.
- ✓ Le décès résultant causé à l'occasion d'actes chirurgicaux ou de traitements pratiqués par des médecins et auxiliaires médicaux.
- ✓ Le décès résultant de l'ivresse ou de la toxicomanie de l'assuré de l'assuré.
- ✓ Le décès résultant d'accidents causés ou provoqués intentionnellement par le bénéficiaire.

- ✓ Le décès résultant d'accidents causés ou provoqués intentionnellement par l'assuré lui-même.
- ✓ Le décès résultant de la pratique de sports aériens, de sport à titre professionnel, de sports de combats et arts martiaux ou de compétitions sportives motorisées.
- ✓ Les accidents ou maladies occasionnées par des cataclysmes tels que les tremblements de terre, éruption volcaniques, raz de marée ou par la désintégration des noyaux atomiques.
- ✓ Le décès consécutif à des faits de guerres, d'accidents nucléaires, d'attentats, d'acte de terrorisme ou de sabotage, d'émeutes, de mouvements populaires ou de rixes.

### **I.1.2 Les primes :**

La prime est constituée d'une prime initiale versée à la date de souscription du contrat, de primes périodiques et le cas échéant, de primes complémentaires que le souscripteur assuré a la possibilité d'effectuer à tout moment.

Les primes initiales, périodiques et complémentaires, seront payées par prélèvement sur le compte bancaire de l'assuré.

Le montant de chaque prime, nette des frais d'acquisition, sera valorisé par l'assureur à la date de son encaissement conformément aux dispositions de l'article.

Le souscripteur assuré peut à tout moment demander la suspension des primes périodiques et continuer à bénéficier de la revalorisation de son épargne.

A l'exception des frais d'acquisition, les frais de gestion et la prime relative à la garantie décès accidentel, seront prélevés en fin d'année d'assurance sur le capital constitué lors de l'établissement du compte de la participation aux bénéfices.

La prime annuelle de l'assurance décès accidentel est fixée aux conditions particulières. Cette prime cesse d'être prélevée dès que le souscripteur assuré atteint l'âge limite fixé aux conditions particulières et la garantie décès accidentel ne lui est plus acquise dès lors.

Les frais de fonctionnement regroupent, des frais d'acquisition prélevés sur le montant de chaque prime initiale, périodique ou complémentaire et des frais de gestion prélevés sur le capital constitué à la fin de chaque exercice lors de l'établissement du compte de la participation aux bénéfices. Les deux taux correspondants à ces frais sont fixés aux conditions particulières du contrat.

### **La participation aux bénéfices :**

L'assureur établit annuellement le compte de la participation aux bénéfices conformément à la réglementation en vigueur.

Le montant de la participation aux bénéfices est arrêté après la clôture de chaque exercice sur la base des bénéfices techniques et financiers effectivement réalisés durant l'année considérée.

L'assureur s'engage à en faire participer les souscripteurs assurés selon le taux fixé aux conditions particulières et ce, conformément à l'article 12 de l'arrêté du ministre des finances et de la privatisation n° 2240-04 du 27 décembre 2004 relatif au contrat d'assurance. Le mode d'attribution de cette participation aux bénéfices est fixé aux conditions particulières du contrat.

### **I.1.3 La disponibilité du capital constitué :**

A tout moment, le souscripteur assuré a la possibilité de demander le paiement de tout ou partie de son capital constitué comme suit :

#### **1. Rachat total :**

Le souscripteur assuré a la faculté de demander à tout moment la récupération du capital constitué.

Lorsque le rachat est effectué après trois années d'assurance, le souscripteur assuré récupère 100% de la valeur de rachat de son capital constitué conformément aux dispositions de l'article 5.1 du contrat.

Si le rachat est effectué avant la clôture de la 3<sup>ème</sup> année d'assurance, une retenue de 2% correspondant aux charges de gestion non amorties, sera prélevée sur la valeur de rachat de son capital constitué. Le rachat total du compte met fin au contrat.

#### **2. Rachat partiel :**

Le souscripteur assuré peut à tout moment demander la récupération d'une partie du capital constitué sous la forme d'un rachat partiel.

Le rachat partiel ne peut être accordé plus de deux fois au cours de la durée de vie de vie du contrat. A chaque demande, le montant du rachat partiel ne pourra être supérieur à 50% de la valeur de rachat du capital constitué.

Une retenue de 2% de la valeur du rachat partiel sera opérée par l'assureur si la demande est formulée avant la clôture de la 3<sup>ème</sup> année d'assurance. Au-delà de 3ans, le rachat partiel sera accordé sans abattement.

#### **3. Avance :**

A la demande du souscripteur assuré, l'assureur peut octroyer une avance dont le montant ne doit pas dépasser 80% de la valeur de rachat.

L'octroi d'une nouvelle avance est subordonné au remboursement total de toute autre avance consenti au titre du même contrat.

L'avance est consentie pour une durée qui ne peut excéder 5 années. Passé ce délai, l'assureur doit procéder d'office à un rachat partiel du contrat, à concurrence du montant de l'avance augmenté des intérêts y afférents.

L'avance est consentie moyennant rémunération. Le taux d'intérêt annuel de cette rémunération sera clairement indiqué au souscripteur au moment de l'octroi de l'avance. Ce taux d'intérêt doit être au moins égal au taux de revalorisation du contrat, constaté au titre du dernier exercice inventorié. Sachant que toute avance non remboursée en partie ou en totalité sera déduite de toute prestation due par l'assureur.

#### **4. Nantissement du capital constitué :**

Lorsque le contrat est conclu avec nantissement, le capital constitué est consenti en tant que gage garantissant les créances éventuelles du créancier. Le souscripteur assuré ne peut bénéficier ni d'avance ni de rachat au titre de son contrat, ni procéder à la liquidation de son capital au terme du contrat sans l'autorisation préalable de ce dernier.

En cas d'exigibilité de créances, le souscripteur assuré consent d'ores et déjà à ce que le capital qui lui est dû par l'assureur, soit versé même hors sa présence et sans son

consentement, entre les mains du créancier jusqu'à concurrence du montant de la créance sans que celle-ci puisse dépasser la valeur de rachat.

A noter que la durée du contrat, sa date de prise d'effet et sa date de fin sont indiquées aux conditions particulières, et que la date de prise d'effet reste conditionnée par la signature du contrat et l'encaissement de la prime.

## **I.2. VALOREM capitalisation/distribution :**

### **I.2.1 VALOREM capitalisation :**

VALOREM capitalisation est un produit vie capitalisation garanti par la compagnie d'assurance RMA WATANIYA, qui permet de faire fructifier un capital moyen et long terme et de garantir un capital complémentaire en cas de décès accidentel.

La souscription d'un tel produit se fait via un versement initial d'un montant minimal 50 000 Dhs avec la possibilité d'effectuer des versements complémentaire libre ayant pour montant minimal la même somme que le versement initial (50 000 dhs).

Le versement initial et les versements complémentaires sont revalorisés sur la base d'un taux minimum garanti révisable annuellement qui est de l'ordre de 4,15% pour l'année 2013 plus une part de la participation aux bénéfices.

Valorem capitalisation est un contrat souple, offrant la possibilité de se procurer une partie ou la totalité de l'épargne constitué et ce à tout moment, en demandant une avance, un rachat partiel ou carrément un rachat total mettant fin au contrat.

#### **1. Avance :**

Le montant de l'avance ne peut dépasser 80% de la valeur de rachat à la date de la demande, elle est consentie pour une durée qui ne peut dépasser cinq années, passé ce délai l'assureur procède à un rachat partiel du contrat.

L'avance est consentie moyennant une rémunération, le taux d'intérêt annuel de cette rémunération est le dernier taux de rendement servi + 2%.

#### **2. Rachat partiel :**

Le souscripteur peut à tout moment demander une partie du capital constitué sous forme d'un rachat partiel. Ce dernier ne peut être accordé plus de deux fois au cours de la durée de vie du contrat, et à chaque demande le montant du rachat ne pourra être supérieur à 50% de la valeur de rachat à chaque demande.

Pour toute demande formulée avant la clôture de la troisième année de souscription, une retenue de 2% de la valeur du rachat sera opérée comme étant une pénalité de rachat.

#### **3. Rachat total :**

Le rachat total met fin au contrat qui a pour durée minimale 8 ans, dans ce cadre, tout rachat effectué avant la clôture de la troisième année de souscription donne lieu à une retenue de 2% de la valeur de rachat correspondant aux charges de gestion non amorties.

Valorem capitalisation offre un cadre fiscal avantageux aux souscripteurs en leur assurant l'exonération des plus-values après 8 ans de souscription.

Au terme du contrat l'épargne revalorisée est disponible soit sous forme de capital, soit sous forme de rente certaine trimestrielle sur 10 ans maximum, soit sous formule d'une formule mixte offrant une partie comme capital et le reliquat comme rente certaine. La prestation

garanti ne s'arrête pas à l'épargne revalorisée, mais offre aussi un capital supplémentaire en cas de décès accidentel. Dans ce cas, un capital complémentaire égal à 5 fois le montant du versement initial plafonné à 1 000 000 dhs sera versé aux bénéficiaires ou à défaut aux ayants droit.

En contrepartie des garanties, il sera prélevé des frais de fonctionnement, couvrant des frais d'acquisition opérés sur le montant de chaque versement, des frais de gestion prélevés en fin d'exercice sur le compte de la PB, plus des frais couvrant la gestion de la garantie décès prélevés eux aussi en fin d'exercice sur le compte de la participation aux bénéfices.

### **I.2.2 VALOREM Distribution :**

Valorem distribution est un produit d'assurance vie, garantie par la compagnie d'assurance RMA WATANIYA. Il permet de faire fructifier un capital à moyen et long terme, de garantir un capital complémentaire en cas de décès accidentel, et de bénéficier de la distribution du rendement annuel de son épargne.

La souscription est réservée aux personnes physiques âgées de 18 ans minimum et titulaire d'un compte au crédit du Maroc, le versement initial et les versements complémentaires ont pour montant minimal 50 000 dhs/ chacun.

La revalorisation des versements se fait moyennant un taux minimum garanti révisable annuellement (4,15% en 2013) auquel s'ajoute part de la participation aux bénéfices.

Le cadre fiscal avantageux est toujours présent dans ce contrat, avec l'exonération des plus-values réalisées pour toute durée de souscription supérieure à 8 ans.

Valorem permet une gestion souple du patrimoine en offrant la possibilité de demande d'avance, de rachat partiel ou de rachat total pour mettre fin au contrat.

Le rachat partiel peut se faire au maximum deux fois durant la vie du contrat, d'un montant maximal de 50% de la valeur de rachat à chaque demande, en contrepartie si la demande est formulée avant la clôture de la troisième année de souscription une retenue de 2% sera opérée sur la valeur de rachat.

Pour le rachat total, il est fait dans les mêmes conditions du rachat partiel quant aux frais et pénalités de rachat, sauf que son montant n'est pas limité puisqu'il s'agit du retrait de la totalité de l'épargne et de la clôture du compte.

La liquidation des droits au terme du contrat, se fait dans les mêmes conditions que Valorem capitalisation, avec la possibilité d'opter pour l'option capital, l'option rente certaine sur au maximum 10 ans ou d'opter pour une formule mixte combinant un capital et une rente certaine.

Les frais engagés dans le cadre de ce contrat, se résument en des frais d'acquisition prélevés sur chaque versement, des frais de gestion de la garantie principale et celle relative au décès accidentel qui sont prélevés en fin d'exercice sur le compte de la participation aux bénéfices.

## **II. Définition des paramètres :**

Comme nous venons de présenter la gamme de produits concernée par notre étude est une gamme regroupant des produits d'épargne et placement, qui vont de la pure capitalisation au pure épargne.

Le premier produit, est un produit d'assurance vie visant à garantir le paiement d'un capital en cas de survie de l'assuré au terme du contrat. Dans ce cadre, le mécanisme de fonctionnement ne sort pas du cadre général de celui de l'assurance vie, faisant jouer principalement un taux d'intérêt soit pour l'actualisation soit pour les opérations de revalorisation des prestations, une table de mortalité pour la prise en considération de l'effet aléatoire du risque parcouru et bien sûr une cotisation périodique ou unique dont le montant

est fixé selon la volonté de l'assuré et est précisé dans les conditions particulières du contrat d'assurance.

Le deuxième volet de la gamme Valorem représente deux produits, Valorem capitalisation et Valorem distribution, se sont deux produits qui fonctionnent de la même manière, la seule différence qui existe c'est que dans le deuxième cas –Valorem distribution – le montant annuel dégagé de la participation aux bénéfices est distribué aux souscripteurs au 30 avril de chaque année, pourtant que Valorem capitalisation les intérêts sont intégrés dans l'épargne accumulée et sont eux-mêmes capitalisés jusqu'au terme du contrat.

Certes, ces paramètres sont définis selon des critères bien précis, des critères qui doivent permettre la prise en considération de l'effet conjoncture, la fiscalité, l'évolution démographique...etc. pour pouvoir trouver le juste milieu et satisfaire au mieux les ambitions de rendement de l'assureur et servir au mieux les besoins assurantiels de l'assuré.

Comme nous venons de préciser, ces paramètres sont très décisifs pour l'assureur soucieux de la réalisation de bénéfices permettant sa continuité et son existence sur le marché, et de la fidélisation de sa clientèle et l'élargissement du réseau dans le cadre d'une concurrence de plus en plus accrue. Pour toutes ces raisons, leur détermination suit un processus très délicat. Leur intégration dans le calcul des prestations dues est faite selon des formules bien déterminées, ces formules seront détaillées dans la partie qui suit.

## **Chapitre 2 : Conception du système de calcul des prestations des produits de la gamme VALOREM**

Le parcours de la spécificité des produits en termes de fonctionnement, de souscription et des conditions de liquidation, nous est avéré primordial pour que la conception du système de simulation permettant de calculer les prestations dues dans le cadre du produit VALOREM, soit faite conformément aux dispositions en vigueur et surtout conformément à la pratique.

Ce dernier chapitre de cette première partie présentera l'outil de simulation conçue, ainsi que les différentes interfaces mise en place relatives aux quatre produits en question.

### **I. Formules de calcul :**

#### **I.1. Valorem capitalisation :**

Dans le cadre de la capitalisation, valorem capitalisation garantit un capital calculé comme suit :

$$Capital_{brut} = V_i * (1 - q) * (1 + i)^n + V_c * (1 - q) * (1 + i)^m$$

Avec

- Vi : Montant du versement initial ;
- Vc : Montant du versement complémentaire ;
- q : frais d'acquisition ;
- i : taux de rendement ;
- n : durée du versement initial ;
- m : durée du versement complémentaire.

Le capital net se calcul comme suit :

$$Capital_{net} = capital_{brut} - pénalité - IR$$

La pénalité et celle de rachat, elle est appliquée si le rachat se fait pendant les trois premières années de souscription du contrat. Si c'est le cas, elle se calcul comme suit :

$$pénalité = capital_{brut} * 2\%$$

Pour le calcul du montant de l'IR, il se fait selon le barème en vigueur lors du calcul de la prestation.

#### **I.2. Valorem distribution :**

Dans le cadre de la distribution, valorem distribution garantie le versement du montant des intérêts annuels accumulés à la fin de chaque année, le calcul du montant des intérêts à distribuer se fait comme suit :

#### **Pour la première année :**

$$Distribution_{brut} = V_i * (1 - q) * i$$

$$Distribution_{net} = Distribution_{brut} - prime\ DC - IR$$

$$prime\ DC = V_i * g$$

**Pour les autres années :**

$$Distribution_{brut} = V_i * i$$

$$Distribution_{net} = Distribution_{brut} - IR$$

**Pour les années au-delà de la 8<sup>ème</sup> année :**

$$Distribution_{net} = Distribution_{brut} = V_i * i$$

Avec  $V_i$  : Montant du versement initial ;  
 $q$  : Chargement pour frais d'acquisition ;  
 $g$  : Chargement pour frais de prime de décès ;  
 $i$  : Taux de revalorisation annuel.

**I.3. Valorem Epargne capital :**

Pour Valorem épargne programmé, les prestations à terme sont versées soit sous forme de capital ou de rente viagère et elles sont calculées comme suit :

$$Capital_L = \sum_{u=1}^L \sum_{j=1}^N VP_u^j * (1 + i_u)^{N-j/N}$$

Où  $VP_u^j$  : j<sup>ème</sup> versement périodique de l'année u net des frais d'acquisition  
 $i_u$  : Taux de revalorisation annuel de l'année u  
 $N$  : nombre de période sur l'année  
 $L$  : année de calcul du capital épargne (L=1...n)

**I.4. Valorem Epargne rente viagère :**

Le fonctionnement de Valorem épargne capital et valorem épargne rente viagère est le même, la seule différence c'est la forme de liquidation des prestations au terme du contrat, dans ce cadre, le montant de la rente viagère non réversible du en fin de période ne sera que le capital constitué à ce terme transformé selon une formule convenue en rente :

$$RVN = \frac{1}{T} * \frac{Capital_L}{(1 + r) * a_x^T}$$

$$a_x^T = \frac{N_{x+1}}{D_x} * \frac{T - 1}{2 * T}$$

$$D_x = l_x * \mu^x \quad ; \quad N_x = \sum_{k=0}^{\infty} D_{x+k} \quad ; \quad \mu = 1/(1 + i)$$

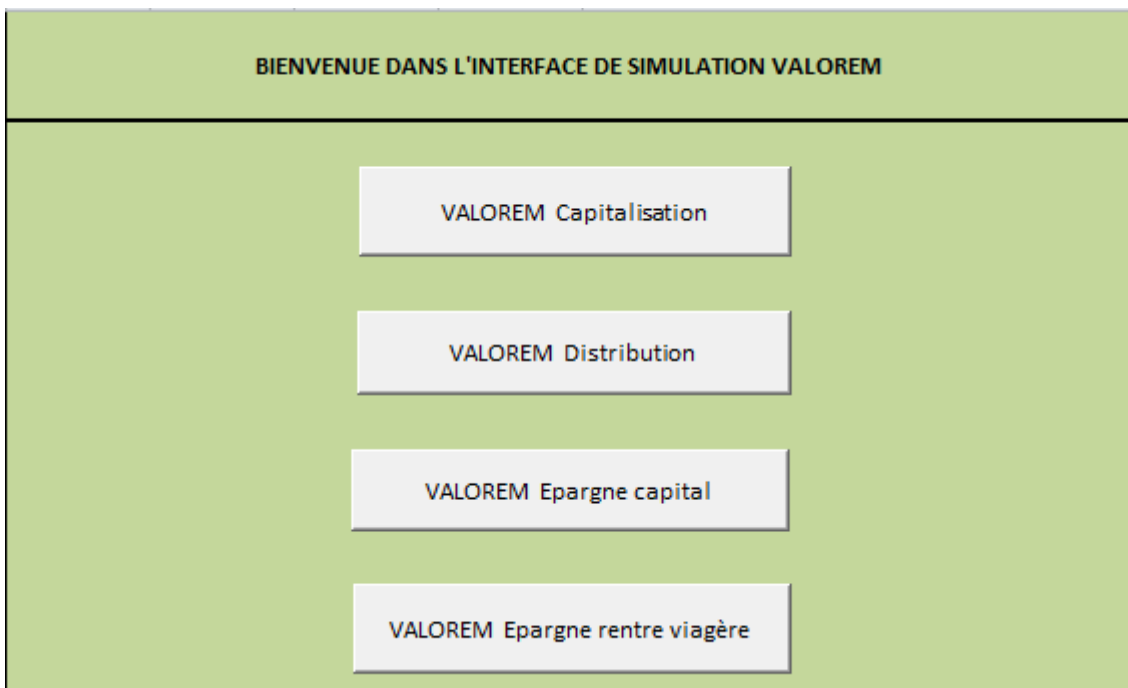
Où x : l'âge de l'assuré ;  
r : Les frais de gestion de la rente ;  
T : La périodicité de la rente ;  
i : le taux d'intérêt pour les opérations d'assurance sur la vie et capitalisation.

## **II. Phases de conception de l'outil de simulation :**

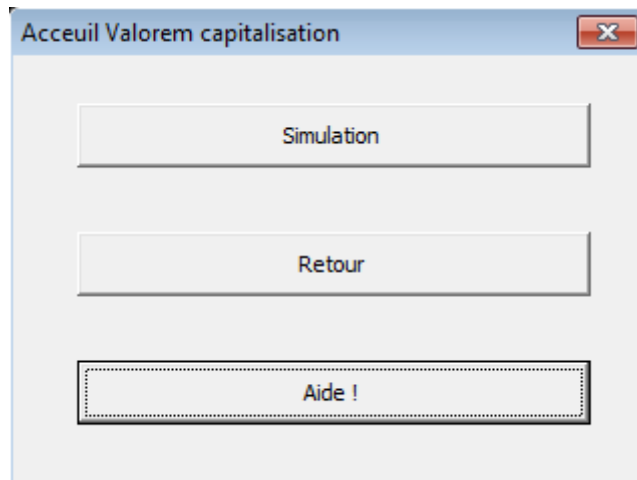
L'outil de simulation en question concerne quatre produits qui n'ont pas tous le même fonctionnement, pour cette raison nous avons créé des interfaces de simulation différentes pour respecter la spécificité des paramètres d'entrée exigés comme input par chacun des produits.

L'interface de simulation est conçue à l'aide de VBA Excel, elle engage tout un code de programmation derrière, un code qui permettra de récupérer les valeurs d'entrée manipulées par l'utilisateur et de les intégrer dans les formules adéquates et puis récupérer les résultats et les afficher tout avertissant l'utilisateur en cas d'erreur ou d'entrée non conforme au code ou au paramètre .

L'interface d'accueil se présente comme suit :

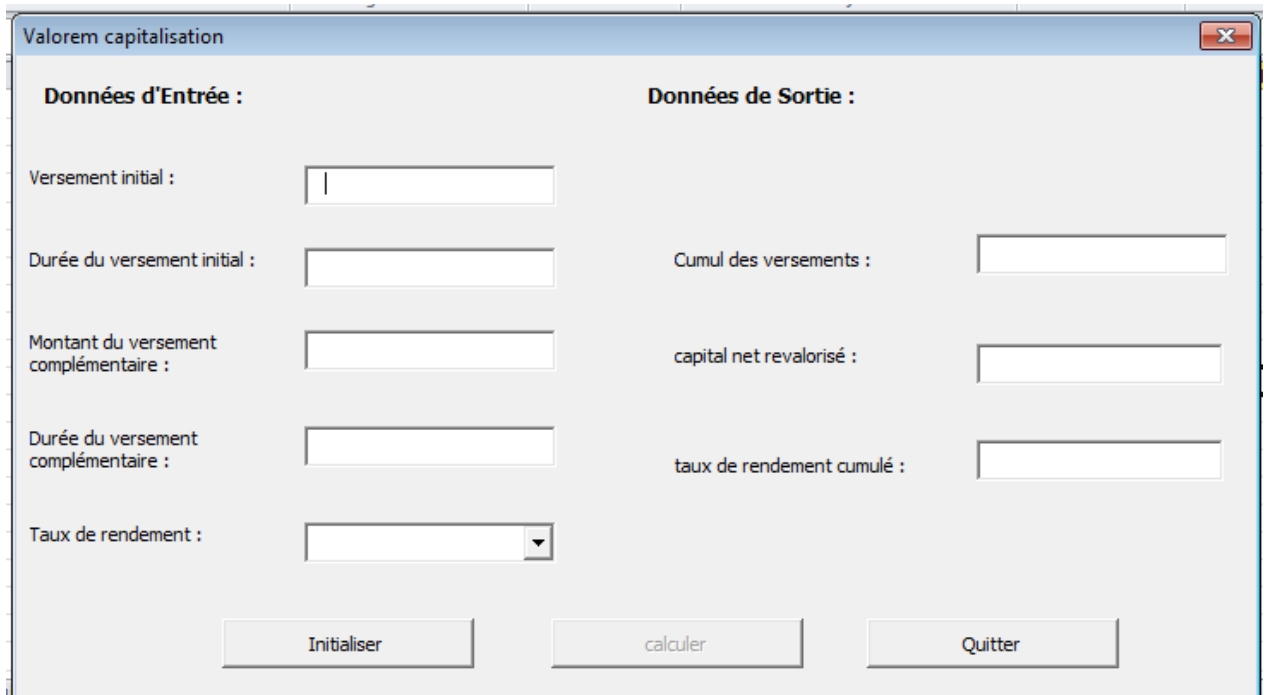


Le choix du produit nous mène vers une autre interface où il est possible de choisir entre l'accès à l'espace simulation ou l'espace aide ou de sortir de l'interface :



Le bouton simulation affiche l'interface de simulation des prestations du produit choisi, le bouton retour permet de quitter cette interface pour changer de produit, et finalement le bouton aide permet de donner une petite définition du produit choisi.

L'espace de simulation est différent pour chacun des produits, puisque chacun d'eux inclut des paramètres d'entrée différents de l'autre et donne des outputs qui ne sont les mêmes en fonction des garanties fournit par le produit, les interfaces des quatre produits se présentent comme suit :



Il suffit d'indiquer le montant des versements initial et complémentaire s'il y en a ainsi que leurs durées et le taux de rendement pour avoir le montant du capital revalorisé net d'impôt ainsi que les cumuls des versements initial et ceux complémentaire et le taux de rendement cumulé sur toute la durée du contrat. A noter que le bouton calculer restera désactivé jusqu'à ce que le formulaire soit rempli en entier.

**Valorem Distribution**

**Données d'Entrée :**

Versement initial :

Durée du versement initial :

Taux de rendement :

**Données de Sortie :**

Montant brut de la 1ère distribution :

Montant net de la 1ère distribution :

Montant brut des autres distribution :

Montant net des autres distribution :

Montant de la distribution au-delà de la 8ème année :

Initialiser      calculer      Quitter

Dans le cadre de valorem distribution, il faut préciser le montant du versement initial, la durée du contrat ainsi que le taux de rendement pour avoir le montant des distributions brutes et nettes d'impôts en fonction de la durée du contrat.

**Valorem Epargne Capital**

**Données d'Entrée :**

Périodicité :

Montant de la cotisation :

Taux de rendement :

Durée du contrat :

**Données de Sortie :**

Cumul des versements :

Capital revalorisé :

Initialiser      Calculer      Quitter

Pour valorem épargne capital, il faut préciser la périodicité des cotisations leurs montants ainsi que le taux de rendement et la durée du contrat. Pour avoir le montant de la prestation de fin de période versée sous forme de capital ainsi que le cumul des versements sur toute la période du contrat

Valorem rente viagère

**Données d'Entrée :**

Périodicité des cotisations :

Montant des cotisations :

Durée du contrat :

Taux de rendement :

Age de l'assuré :

Périodicité de la rente :

**Données de Sortie :**

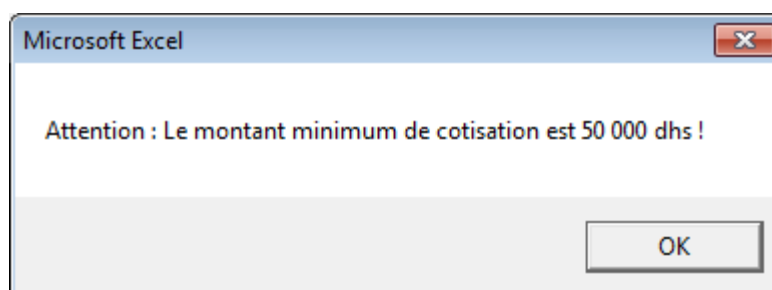
Cumul des versements :

Rente viagère :

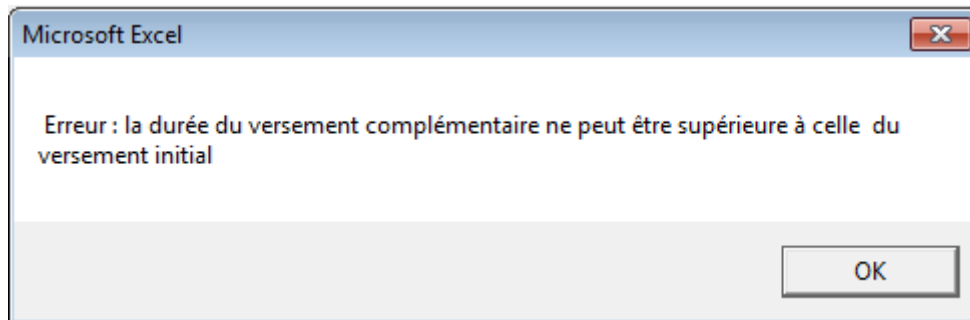
Initialiser      Calculer      Quitter

Pour les rentes viagères, il faut préciser la périodicité des cotisations et leur montant, le durée du contrat, le taux de rendement, la périodicité de la rente versée ainsi que l'âge de l'assuré pour avoir le montant de la rente viagère ainsi que le cumul des versements.

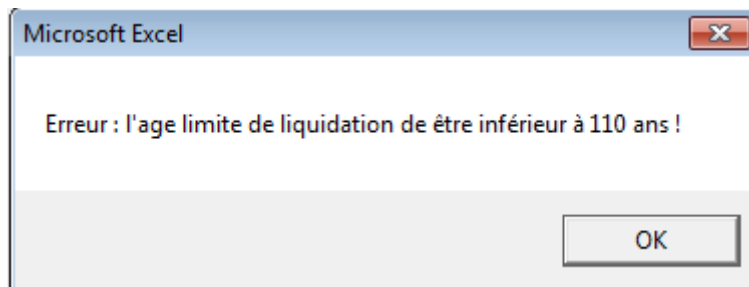
La conception du système de simulation a été faite conformément aux conditions générales des produits en question, ainsi nous avons programmé plusieurs messages d'erreurs pour avertir l'utilisateur si une condition pour un produit n'est pas respectée. Par exemple si le montant des cotisations est inférieur au montant minimal exigé pour la souscription, le message suivant s'affiche :



Ou si pas omission nous avons entré une durée de versement complémentaire supérieure à la durée du versement initial, le message suivant s'affiche :



Ou si par exemple, dans le cadre de valorem épargne rente viagère, l'utilisateur entre un âge supérieur à 110 qui est l'âge maximum de survie dans le cadre de la table de mortalité considérée dans les calculs, le message suivant s'affiche :



## Conclusion

Au terme de ce mémoire, il serait utile de rappeler que le fonctionnement des contrats d'assurance et les montages financiers qui sont derrière, figurent parmi les questions sur lesquels il a été très difficile de trancher. Il s'agit en fait, d'un sujet qui a fait couler tant d'encre depuis plusieurs années.

Dans ce sens, le présent mémoire permet d'une part d'éclaircir les idées sur le fonctionnement des contrats classiques, et d'autre part de présenter un type de contrat beaucoup moins connu et en même beaucoup plus innovateur qui est le contrat multi-support. Pour ce faire, et dans un souci de bien fonder nos résultats, notre raisonnement est basé sur une approche conjuguant à la fois théorie et pratique.

Au niveau de la première partie, nous avons essayé de poser les fondements de notre travail en passant en revue l'évolution de l'activité de la bancassurance dans le monde en général et au Maroc en particulier, ainsi que ses différents aspects matérialisant son double engagement celui du respect des dispositions du code des assurances et celui de rester conforme à la loi régissant l'activité bancaire.

C'est dans la deuxième partie que nous avons exposé toute la théorie relative à la modélisation que ce soit de la courbe des taux ou des cours des actions, pour la courbe des taux nous avons exposé deux modèles et nous avons appliqué celui le plus pertinent sur les données relatives au marché marocain. Pour les actions, étant donné la pertinence que reconnaît la théorie au modèle de B&S, nous l'avons choisi pour l'appliquer à notre base de données et obtenir ainsi après fixation des paramètres, une estimation des cours de l'action pour différentes maturités. Cette partie donnera une idée plus précise sur la technique mise en place derrière toute opération d'arbitrage, et permettra au crédit du Maroc de mieux se placer en tant que partenaire de la compagnie d'assurance pour la détermination de la stratégie d'investissement.

La troisième et dernière partie traite un autre aspect, en essayant de rendre plus performante l'action marketing, et ce en mettant à la disposition du personnel du crédit du Maroc un outil de calcul des prestations de la gamme VALOREM permettant à la fois de se concentrer sur l'aspect commercial plutôt que celui technique dans la commercialisation des nouveaux contrats et aussi de répondre à toute demande d'information pour les contrats déjà souscrits.

Enfin, il est utile de rappeler que tout travail surtout de modélisation d'un phénomène aléatoire lié au futur, aussi précis soit-il, ne permet pas une parfaite anticipation des marchés. En ce sens, la rigueur scientifique exige un esprit averti, une démarche bien fondée, de la performance statistique et du bon sens économique afin de prendre en considération tous les facteurs mis en jeu par le phénomène en question.

## **Bibliographie :**

- ❖ Planchet F., Théron P., Jacquemin J., « Modèles financiers en assurance : Analyse de risque dynamiques » Economica 2005.
- ❖ COX J.C., INGERSOLL J.E., ROSS S.A., (1985), “A theory of the term structure of interest rate”. Econometrica
- ❖ Broze.L, Scaillet.O, Zakoian.J.M, “ Estimation des modèles de la structure par terme des taux d’intérêt ”, Revue économique
- ❖ MARRI Fouad : Notes de cours « Série chronologique » INSEA 2012
- ❖ EL QALLI Yassine : Notes de cours « Modèles mathématiques de la finance » INSEA 2012
- ❖ TAAMOUTI Mohamed : Notes de cours « marché financier » INSEA 2012
- ❖ EL QALLI Yassine : Notes de cours « Econométrie Financière » INSEA 2012
- ❖ Stéphanie Fauvel et Maryse Le Pévédic (mémoire2007) : Analyse des rachats d’un portefeuille vie individuelle : Approche théorique et Application pratique.
- ❖ Rihab BEDOUI (mémoire 2007) : Recherche d’une allocation stratégique optimale dans le cadre de la gestion actif-passif
- ❖ Rojwan SULSU (mémoire 2012) : Générateurs de scénarios économiques en assurance
- ❖ El HASSAR Sidi Mohamed Karim (mémoire 1992) : conception d'un environnement de simulation intelligent
- ❖ Fiche de l’évolution de la bancassurance (exercice 2011)
- ❖ Newsletters techniques SCOR, février 2003 :la bancassurance dans le monde
- ❖ Code des assurances
- ❖ Bulletin officiel 31 décembre 2012
- ❖ Note circulaire n° 721 relative aux dispositions fiscales de la loi de finance N°115-12 pour l’année budgétaire 2013.
- ❖ Projet de loi de finance 2013
- ❖ Rapport d’activité du secteur des assurances 2008, 2009, 2010, 2011
- ❖ Fiches techniques des produits de la gamme VALOREM

## **Webographie :**

- ❖ [www.Cdm.co.ma](http://www.Cdm.co.ma)
- ❖ [www.casablanca-bourse.co.ma/bourseweb/index.aspx](http://www.casablanca-bourse.co.ma/bourseweb/index.aspx)
- ❖ [www.bkam.ma](http://www.bkam.ma)
- ❖ [www.finances.gov.ma](http://www.finances.gov.ma)

# **ANNEXE**

## **Annexe I : Aperçu sur l'organisme d'accueil**

### **CDM Assurance: un courtier en assurance**

Le Crédit Du Maroc Assurance est une société captive de courtage créée en 2005, elle joue le rôle d'intermédiaire entre différentes parties actives dans le secteur financier notamment entre les banques et les assurances, son particularité vient du fait qu'elle ne peut avoir affaire qu'avec les clients de crédit du Maroc qui constitue son principal et unique client. Le CDMA a aussi pour mission de créer et innover en matière des produits de bancassurance qu'il commercialise pour répondre au mieux aux besoins des clients qui sont devenus de plus en plus exigeants. La société possède actuellement plus de 500 000 clients potentiels et gère plus que 200 000 contrats d'assurance et conquiert une part de marché très importante.

La rémunération de la CDM Assurance vient des commissions perçues de la part de diverses compagnies d'assurance avec qui elle entre en relation, et son volume d'affaire est estimé à 38 millions de Dhs pour l'année 2012.

#### **❖ les différents produits commercialisés par la CDM assurance :**

##### **✓ Cdm RETRAITE :**

Cdm RETRAITE est un plan d'épargne retraite, offrant un large choix de prestations et bénéficiant d'allègements fiscaux. Il donne à l'adhérent la possibilité de définir le montant ainsi que la période des cotisations.

Les placements effectués sont valorisés de façon sûre et régulière avec un rendement minimum garanti par l'Etat de l'ordre de 3,25 %, plus une participation aux bénéfices. Fiscalement, Les cotisations sont déductibles du revenu imposable dans les limites définies par la loi. Et à la sortie, les prestations bénéficient d'un abattement sur l'IR.

##### **✓ Cdm EDUCATION :**

Cdm EDUCATION permet de préparer l'avenir des enfants en constituant à leur profit une épargne dont ils pourront disposer à l'âge de 18 ans et au plus tard à 25 ans. La souscription se fait via des cotisations d'un montant minimal 200 DHS par mois et par enfant avec un libre choix de la périodicité de paiement.

##### **✓ CDM DAWAM :**

Cdm DAWAM est un produit de prévoyance garantissant le solde du compte. Il permet le remboursement de la dette du souscripteur envers sa banque en cas de son décès avec un solde débiteur dans son compte bancaire et puis le versement du reliquat – s'il y'en a – aux bénéficiaires ou à défaut aux ayants droit. Le capital garanti peut aller jusqu'à 5 000 000 DH, selon la formule et l'option choisies sachant qu'il est possible à tout moment la changer d'option.

##### **✓ CDM DIRASSA :**

La souscription de CDM DIRASSA garantit le versement d'une rente allant de 1 500 à 18 000 DH par trimestre pour le financement de la scolarité des enfants jusqu'à l'âge de 25 ans en cas de décès ou invalidité du souscripteur. Le montant de cette rente varie selon l'option choisie et évoluera en fonction de l'âge de l'enfant bénéficiaire. Ainsi, la rente change lors du trimestre qui suit celui au cours duquel le bénéficiaire passe d'une tranche d'âge à une autre (7 ans, 12 ans ou 19 ans).

La rente sera payée trimestriellement à terme échu à partir du premier trimestre civil qui suit le décès de l'adhérent ou la reconnaissance de son invalidité absolue et définitive.

#### ✓ **Hospitalisation :**

L'Assurance Hospitalisation est une garantie qui vous couvre à l'occasion d'une hospitalisation au Maroc ou à l'Etranger. Toute hospitalisation en clinique ou à l'hôpital, à la suite d'une maladie, d'une intervention chirurgicale ou d'un accident est assurée et ce pour une période allant de 1 à 120 jours par an.

#### ✓ **Sécurité :**

Il s'agit d'une assurance décès-accidentel et d'autorisation de découvert contracté sur simple engagement de domiciliation du salaire. L'assurance garantit en cas de décès accidentel un capital dont le montant peut représenter, selon l'option choisie, de 3 à 36 fois la moyenne des revenus domiciliés. Le découvert autorisé peut atteindre un mois de salaire, utilisable pendant un mois avant le virement en compte du salaire, le remboursement est automatique via le crédit du compte chaque fin de mois.

#### ✓ **Isaaf Mondial Assistance :**

C'est un produit offrant une gamme diversifiée de prestations au Maroc et à l'étrangers, allant de l'assistance en cas de décès en prenant en charge des frais de rapatriement du corps, y compris les mort-nés, du lieu du décès jusqu'au lieu d'inhumation, jusqu'à offrir un billet d'avion aller-retour pour l'adhérent en cas de décès de l'épouse, de la mère, ou de l'un des enfants, pour assister aux obsèques.

#### ✓ **Maroc Assistance :**

##### ➤ **Assistance médicale :**

Ce produit garanti le transport sanitaire du bénéficiaire à l'hôpital après avis du médecin, ainsi qu'une avance des frais médicaux, pharmaceutiques et d'hospitalisation à concurrence de 50 000 dhs dont 20 000 dhs sont pris en charge si les dits frais sont non couverts par un organisme social, dans le cas où la durée de l'hospitalisation dépasse 10 jours Maroc assistance garanti **la mise à la disposition** d'un proche parent d'un titre de transport aller-retour pour être au chevet du malade.

##### ➤ **Assistance technique :**

En cas d'immobilisation du véhicule suite à une panne, un accident ou un vol la garanti assistance technique assure le remboursement des frais de séjour en hôtel à hauteur de 500 dhs par personne et par jour (plafond 2 500 dhs) si la durée est entre 2 et 5 jours, et pour toute période supérieure à 5 jours Maroc assistance prend en charge le billet de transport pour permettre aux assurés de regagner leur domicile ou de continuer leur voyage, prise en charge du rapatriement du véhicule et remboursement des frais de remorquage et de gardiennage.

## **Annexe II : Quelques articles du code des assurances régissant l'activité de bancassurance :**

- ❖ **L'article 306** :« l'exercice de l'activité des établissements de crédit et de leur contrôle, ne peuvent présenter au public des opérations d'assurances qu'après obtention d'un agrément de l'administration à cet effet. », ainsi Les banques ne peuvent pas être à la fois vendeur et souscripteur de contrat. Elles ne peuvent qu'encaisser les primes et régler les sinistres dans le cadre de contrats individuels pour le compte des compagnies d'assurances, cela contre une commission, et pour se faire il faut demander un agrément qui devait être déposées à la (DAPS) conformément à la loi.
- ❖ **L'article 109**:« Le souscripteur ne peut percevoir aucune rétribution, directe ou indirecte et sous quelque forme que ce soit, au titre de son intervention dans le cadre d'un contrat d'assurance de groupe. », c'est ainsi que les banques doivent Individualiser les contrats groupe afin d'être rémunérer.
- ❖ **L'article 306**:« La présentation des opérations d'assurances par Barid Al-Maghrib et par les banques est limitée aux assurances de personnes, à l'assistance et à l'assurance-crédit. », ainsi les établissements bancaires ont créé leurs propres bureaux de courtage pour pouvoir commercialiser tous types de produits et préserver leurs revenus provenant de l'activité bancassurance.

## Annexe III : Le mouvement Brownien

### Définition :

Considérons un espace  $(\Omega, F, P)$  et un processus  $(B_t)_{t \geq 0}$  sur cet espace. Le processus  $(B_t)_{t \geq 0}$  est un mouvement Brownien (standards) si :

1.  $B_0 = 0$  (le mouvement Brownien issu de l'origine)
2. Les trajectoires  $t \rightarrow B_t$  sont presque sûrement continues.
3. Le processus  $(B_t)_{t \geq 0}$  est à accroissement indépendants et stationnaires :
  - ❖  $\forall s < t, B_t - B_s$  est indépendant de  $F_s^B = \sigma(B_u; u \leq s)$
  - ❖  $\forall s < t, B_t - B_s \sim B_{t-s}$

### Propriétés :

Soit B un mouvement Brownien :

1.  $\forall s < t, B_t - B_s \sim N(0, t - s)$
2.  $\forall s > 0$ , le processus  $\{B_{t-s} - B_s; t \geq 0\}$  est un mouvement Brownien indépendant de  $F_t^B$
3. Le processus  $\{-B_t; t \geq 0\}$  est un mouvement Brownien
4.  $\forall c > 0$ , le processus  $\{cB_{t/c^2}; t \geq 0\}$  est un mouvement Brownien
5. Le processus  $\{X_t = tB_{1/t}; t \geq 0\}$  avec  $X_0 = 0$  est un mouvement Brownien
6. La trajectoire du mouvement Brownien n'est différentiable en aucun point.

## Annexe VI : démonstration relative au modèle de Cox-Ingersoll-Ross

**Démonstration 1** : la condition  $2ab > \sigma^2$  implique que  $r(t)$  est positif.

Le modèle de CIR propose la dynamique suivante pour le taux d'intérêt :

$$dr_t = a(b - r_t)dt + \sigma\sqrt{r_t}dW_t$$

**Lemme d'Itô** :

Soit  $(F_t)_{t \geq 0}$  une filtration,  $(W_t)$  un mouvement brownien standard par rapport à  $(F_t)_{t \geq 0}$  et soit  $(S_t)_{t \geq 0}$  un processus aléatoire solution de l'équation différentiel stochastique suivant :

$$dS_t = \mu_t dt + \sigma_t dW_t$$

Les processus  $(\mu_t)_{t \geq 0}$  et  $(\sigma_t)_{t \geq 0}$  sont supposés adaptés par rapport à la filtration  $(F_t)_{t \geq 0}$ .

Soit  $f$  une fonction  $C^{1,2}(R^+, R)$  à valeurs réelles.

$$F(S_t) = F(S_0) + \int_0^t F'(S_x) dS_x + \frac{1}{2} \int_0^t F''(S_x) d\langle S, S \rangle_x$$

$$\langle S, S \rangle_t = \int_0^t \sigma^2 ds$$

Notons  $y(t) = \sqrt{r(t)}$ , et appliquons ce lemme à  $y(t)$  donne :

$$dy(t) = \left( \frac{2ab - \sigma^2}{4\sqrt{r(t)}} - \frac{a\sqrt{r(t)}}{2} \right) dt + \frac{\sigma}{2} dW_t$$

Lorsque le taux court  $r(t)$  est suffisamment petit, le premier terme domine les autres.

Ainsi, si  $2ab < \sigma^2$  le premier terme se retrouve négatif et alors le taux sera négatif.

**Démonstration 2 :** selon de modèle de CIR, le prix d'une obligation zéro-coupon à date t de maturité T est calculé selon la formule suivante :

$$P(t, T) = A(t, T)e^{-B(t, T)r_t} \quad \forall t < T$$

Avec :

$$\diamond A(t, T) = \left( \frac{2\gamma e^{\frac{(\gamma+a)(T-t)}{2}}}{(\gamma+a)(e^{\gamma(T-t)}-1)+2\gamma} \right)^{\frac{2ab}{\sigma^2}}$$

$$\diamond B(t, T) = \frac{2(e^{\gamma(T-t)}-1)}{(\gamma+a)(e^{\gamma(T-t)}-1)+2\gamma}$$

$$\diamond \gamma = \sqrt{a^2 + 2\sigma^2}$$

La dynamique du taux court est la suivante :

$$dr(t) = \mu(r(t), t)dt + \sigma(r(t), t)dW_t$$

L'application du lemme d'Itô à la date t d'une obligation zéro-coupon d'échéance T nous permet d'écrire la dynamique sous la forme suivante :

$$dP(r(t), t) = \left( P_t + \mu(r(t), t)P_r + \frac{\sigma^2(r(t), t)}{2}P_{r,r} \right) dt + \sigma(r(t), t)P_r dW_t$$

Où  $P_t, P_r, P_{r,r}$  désignent respectivement les dérivées partielles premières par rapport à t et r(t) et seconde par rapport à r(t).

Nous appliquons le **théorème de Girsanov** :

Soit  $(\Omega, (F_t)_{0 \leq t \leq T}, P)$  un espace un espace probabilisé filtré, dont la filtration est la filtration naturelle d'un mouvement brownien standard  $(B_t, t \in [0, T])$ .

Soit  $(\theta_t)_{0 \leq t \leq T}$  un processus adapté vérifiant  $\int_0^T \theta_s^2 ds < \infty$  presque sûrement, et tel que le processus  $(L_t)_{0 \leq t \leq T}$  défini par :

$$L_t = \exp \left\{ - \int_0^t \theta_s^2 dB_s - \frac{1}{2} \int_0^t \theta_s^2 ds \right\} \text{ Soit une martingale.}$$

Alors, sous la probabilité  $P^{(L)}$  de densité  $L_T$  par rapport à P, le processus  $(W_t)_{0 \leq t \leq T}$  défini par :

$$W_t = B_t + \int_0^t \theta_s ds \text{ est un mouvement brownien standard.}$$

Ainsi, nous prenons  $d\bar{W}_t = dW_t + \gamma(r(t), t)dt$  où  $\bar{W}_t$  est un processus de Wiener dans l'univers risque neutre.

L'équation différentielle stochastique devient :

$$dP(r(t), t) = \left( P_t + [\mu(r(t), t) - \gamma(r(t), t)\sigma(r(t), t)]P_r + \frac{\sigma^2(r(t), t)}{2}P_{r,r} \right) dt + \sigma(r(t), t)P_r dW_t$$

Sachant que  $\gamma(r(t), t) = \frac{\mu(r(t), t) - r(t)}{\sigma(r(t), t)}$

Etant donné que nous raisonnons dans l'univers risque-neutre :

$$dP(r(t), t) = r(t)P(r(t), t)dt$$

Ainsi,

$$P_t + [\mu(r(t), t) - \gamma(r(t), t)\sigma(r(t), t)]P_r + \frac{\sigma^2(r(t), t)}{2}P_{r,r} = r(t)P(r(t), t)$$

Nous supposons que le prix du marché est constant :  $\gamma(r(t), t) = \gamma$

La forme particulière de la solution est :

$$P(t, T, r(t)) = \exp \{ A(T - t) + B(T - t)r(t) \}$$

Nous obtiendrons le système suivant :

$$\begin{cases} A'(x) = abB(x) \\ B'(x) + (a + \gamma\sigma)B(x) - \frac{\sigma^2}{2}B^2(x) + 1 = 0 \end{cases}$$

Rappelons les conditions initiales :  $\begin{cases} A(0) = 0 \\ B(0) = 0 \end{cases}$

Ainsi nous pouvons vérifier que

$$\begin{cases} A(x) = \frac{ab}{\sigma^2} \left[ 2 \ln \left( \frac{2\theta}{g(x)} \right) + (a + \gamma\sigma + \theta)x \right] \\ B(x) = \frac{2}{g(x)} (1 - \exp(\theta x)) \end{cases}$$

Avec :

$$\theta = \sqrt{(a + \gamma\sigma)^2 + 2\sigma^2} \quad ; \quad g(x) = (a + \gamma\sigma + \theta)(\exp(\theta x) - 1) + 2\theta$$

A la fin de la démonstration il est utile de rappeler que nous avons démontré la formule générale, et que le cas considéré dans notre étude est le cas de l'univers risque-neutre dans lequel  $\gamma = 0$

## **Annexe V : solution de l'EDS du modèle de Black & Scholes**

Nous allons démontrer la solution de l'équation différentielle, dans le cadre de B&S.

Nous avons :

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = \mu dt + \sigma dB(t)$$

Le lemme d'Itô appliqué à la fonction logarithmique, donne le résultat suivant :

$$d\ln(S_t) = \frac{1}{S_t} dS_t - \frac{1}{2} * \frac{1}{S_t^2} d\langle S_t, S_t \rangle$$

Or,

$$d\langle S_t, S_t \rangle = \sigma^2 S_t^2 dt$$

Ainsi,

$$d\ln(S_t) = \frac{1}{S_t} dS_t - \frac{1}{2} * \frac{1}{S_t^2} \sigma^2 S_t^2 dt$$

$$d\ln(S_t) = \mu dt + \sigma dB(t) - \frac{1}{2} \sigma^2 dt$$

$$d\ln(S_t) = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) dt + \sigma dB(t)$$

Or,

$$\int_0^T d\ln(S_t) = \ln(S_T) - \ln(S_0) = \int_0^T \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) dt + \int_0^T \sigma dB(t)$$

Ainsi

$$\ln\left(\frac{S_T}{S_0}\right) = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) T + \sigma dB(T)$$

Par conséquent :

$$S_T = S_0 \exp\left\{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) T + \sigma dB(T)\right\}$$

## Annexe VI : la décomposition de cholesky

### Théorème de cholesky :

Si  $M$  est une matrice symétrique définie positive, alors il existe au moins une matrice triangulaire inférieure  $L$  telle que :

$$M = LL^T$$

S'il est imposé que les éléments diagonaux de la matrice  $L$  soient tous positifs, alors la décomposition est unique.

La matrice  $L$  s'appelle la décomposée de Cholesky de  $M$ .

### Dans le cadre de vecteurs gaussiens :

Considérons par exemple  $W_1$  et  $W_2$  deux vecteurs gaussiens tels que :

$$W_1 \sim N(0, I_d) \quad \text{et} \quad W_2 \sim N(\mu, M)$$

Où  $I_d$  est une matrice identité de dimension  $d$ ,  $M$  une matrice symétrique définie positive et  $\mu$  un réel.

Alors il existe une unique matrice triangulaire inférieure à diagonale positive  $L$  vérifiant :

$$M = LL^T \quad W_2 = \mu + LW_1$$

La preuve de ce dernier résultat est la suivante :

$$\begin{aligned} \diamond E(W_2) &= E(\mu + LW_1) = \mu + LE(W_1) = \mu \\ \diamond \text{Var}(W_2) &= E[(W_2 - E(W_2))(W_2 - E(W_2))^T] \\ &= E[(\mu + LW_1 - \mu)(\mu + LW_1 - \mu)^T] \\ &= E[(LW_1)(LW_1)^T] \\ &= E[L(W_1W_1^T)L^T] \\ &= L E[W_1W_1^T] L^T \\ &= L L^T \\ &= M \end{aligned}$$

## Cas particulier où d=2

Il s'agit du cas utilisé dans le modèle de B&S avec prise en considération des corrélations entre le taux court et le cours des actions au niveau du mouvement brownien.

Soit  $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} \sim N(\mu, M)$  où  $M = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_1\sigma_2\rho \\ \sigma_1\sigma_2\rho & \sigma_2^2 \end{pmatrix}$  avec  $\rho$  représentant le coefficient de corrélation entre les variables  $X_1$  et  $X_2$

D'après le théorème de Cholesky, il existe une matrice  $L = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix}$  telle que  $M = LL^T$

Donc nous aurons le système suivant à résoudre :

$$\begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_1\sigma_2\rho \\ \sigma_1\sigma_2\rho & \sigma_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & ab \\ ab & b^2 + c^2 \end{pmatrix}$$

Nous aurons donc les résultats suivant :

$$\begin{cases} \sigma_1 = a \\ \sigma_2 = b \\ \sigma_2\sqrt{1-\rho^2} = c \end{cases} \quad \text{et} \quad L = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 \\ \sigma_2\rho & \sigma_2\sqrt{1-\rho^2} \end{pmatrix}$$

Si  $X_1$  et  $X_2$  sont supposées centrées, alors  $\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 \\ \sigma_2\rho & \sigma_2\sqrt{1-\rho^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N_1 \\ N_2 \end{pmatrix}$  avec  $N_1$  et  $N_2$  des

variables normales centrées réduites et indépendantes.