



المندوبية السامية للتخطيط
HAUT-COMMISSARIAT AU PLAN

ROYAUME DU MAROC
*_*_*_*_*
HAUT COMMISSARIAT AU PLAN
*_*_*_*_*_*_*_*_*_*
INSTITUT NATIONAL
DE STATISTIQUE ET D'ECONOMIE APPLIQUEE



INSEA

Projet de Fin d'Études

**Projection du portefeuille des placements en couverture
des provisions pour sinistres en réassurance non-vie**

Préparé par : M. BLALI Achraf

Sous la direction de : **M. LEBBAR Mustapha (INSEA)**
M. YOUSSEFI Anasse (SCR)
M. EL OUADRHIRI Majd (SCR)

Soutenu publiquement comme exigence partielle en vue de l'obtention du

Diplôme d'Ingénieur d'Etat

Filière : ACTUARIAT-FINANCE

Devant le jury composé de :

- **M. MECHRAFI Abdellatif (INSEA)**
- **M. LEBBAR Mustapha (INSEA)**
- **M. YOUSSEFI Anasse (SCR)**
- **M. EL OUADRHIRI Majd (SCR)**

Résumé et mots clés

Dans le cadre des travaux budgétaires, les assureurs sont souvent limités dans le choix des méthodes de projection du portefeuille des placements aux approches déterministes basées sur des taux d'évolution forfaitaires et à priori. Il est tout de même intéressant d'introduire l'aspect stochastique de l'évolution des variables discriminantes sur lesquelles le portefeuille des actifs pourrait être indexé.

De plus, les réassureurs sont tenus de calculer leurs provisions techniques par des méthodes prédéterminées par la réglementation en vigueur, basées souvent sur des simplifications proposées par les autorités de contrôle du secteur.

Dans le cadre de ce mémoire, nous traitons la problématique suivante :

- Comment procéder pour projeter le portefeuille des placements en couverture des provisions techniques de la compagnie ?
- Quelle approche suivre pour estimer la valeur des provisions pour sinistres pour des branches de réassurance non-vie de natures différentes?

Nous présentons dans la suite de ce mémoire les pistes testées pour répondre à ces deux questions dans le cadre de la gestion actif-passif au sein de la Société Centrale de Réassurance.

Mots Clés : Réassurance ; Gestion actif-passif ; Provisionnement non-vie ; l'algorithme EM ; La loi NIG.

Dédicace

À mes parents

Remerciements

Je tiens à remercier en premier lieu M. Anasse YOUSSEFI, responsable ALM et M. Majd ELOUADRHIRI, responsable Actuariat Corporate et modélisation des risques à la Société Centrale de Réassurance(SCR), de m'avoir accueilli au sein de l'équipe et permis de me consacrer en grande partie à la rédaction de ce mémoire. Je leur témoigne toute ma gratitude pour l'attention qu'ils ont pu porter à mon travail.

Je tiens également à remercier l'ensemble des professeurs de l'Institut National de Statistique et de l'économie appliquée (INSEA) pour leurs enseignements qui m'ont conforté dans mon choix de travailler dans le monde de l'actuariat. Je remercie en particulier mon tuteur pédagogique M. Mustapha LEBBAR pour ses conseils et sa relecture attentive de mon travail.

Enfin, the last but not least, je remercie ma famille, et tout particulièrement mes parents pour le soutien qu'ils m'ont apporté pendant toute ma scolarité

Table des matières

Résumé et mots clés	2
Dédicace	3
Remerciements	4
Liste des abréviations	8
Liste des tableaux	9
Liste des figures	10
Introduction	11
Chapitre préliminaire : La Société Centrale de Réassurance (SCR)	13
1. La Société Centrale de Réassurance : un réassureur international de référence	14
2. Techniques de la réassurance	14
3. L'importance de l'ALM dans la réassurance :	15
Chapitre 1 : Projection du portefeuille des placements de la SCR	17
1. Structure du portefeuille de placements de la SCR	18
1.1. Portefeuille des parts des OPCVM	20
1.2. Portefeuille des Obligations	20
1.3. Portefeuille des actions :	21
2. Modélisation et projection du portefeuille actions	22
2.1. Procédure de la projection du portefeuille actions	22
2.2. Le Modèle d'Évaluation Des Actifs Financiers (MEDAF)	22
2.3. Rendement	24
2.3.1. Rendement d'un actif.....	24
2.3.2. Rendement du portefeuille.....	24
2.4. Sélection du rendement de référence	24
2.4.1. Catégories et caractéristiques.....	24
2.4.2. Période historique.....	24
2.4.3. L'indice du marché des actions : MOROCCAN ALL SHARES INDEX.....	24
2.5. Modélisation paramétrique du MASI : outils théoriques	25
2.5.1. Loi Log-Normale.....	26
2.5.2. Loi Normale Inverse.....	26
2.5.3. Loi Normale Inverse Gaussienne.....	26
2.5.4. The Generalized Hyperbolic skew Student's t distribution.....	27
2.5.5. Test d'adéquation de l'ajustement.....	28
2.6. Modélisation du MASI : estimations et choix de loi paramétrique	28
2.6.1. Étude exploratoire des données historiques.....	28
2.6.2. Estimation des paramètres des lois proposées.....	29
2.6.3. Test d'adéquation et qualité d'ajustement.....	30
2.6.4. Génération des scénarios.....	31
2.6.5. Projections de la valeur d'une action.....	33
2.6.6. Projection du portefeuille actions par canton.....	34
2.6.7. Projection du portefeuille global des actions.....	36

3. Modélisation et projection du portefeuille obligataire	36
3.1. Méthodologie de Projection.....	36
3.2. Méthodes d'interpolation de la courbe des taux.....	37
3.2.1. Une méthode directe d'interpolation: Interpolation linéaire.....	37
3.2.2. Les modèles paramétriques de type Nelson-Siegel.....	37
3.2.2.1. Présentation de la fonctionnelle des taux de Nelson-Siegel	37
3.2.2.2. Avantages de ces modèles	38
3.3. Projection du portefeuille des obligations	39
4. Modélisation et projection du portefeuille OPCVM	40
4.1. Les organismes de placement collectif en valeurs mobilières	40
4.2. Méthodologie de projection.....	40
5. Synthèse	41
Chapitre 2 : Provisionnement non-vie adapté aux spécialités de la réassurance non-vie ...	43
1. Présentation des données	44
1.1. Le triangle de liquidation	44
1.2. Les données de la SCR.....	45
2. Méthodes déterministes.....	46
2.1. Méthode d'évaluation des provisions pour sinistres par la SCR	46
2.2. Méthode de Chain Ladder	47
2.2.1. Hypothèses du modèle	47
2.2.2. Test des hypothèses.....	48
2.2.2.1. Indépendance des années de souscription	48
2.2.2.2. Existence des facteurs de développement.....	49
2.2.2.3. Stabilité des règlements	49
2.2.3. Illustration de la méthode	50
2.2.3.1. Validation du modèle	52
2.2.4. Analyse des résultats	55
2.3. La méthode du Loss Ratio	57
2.3.1. Présentation de la méthode	57
2.3.2. Estimation du Loss Ratio	58
2.3.3. Illustration de la méthode Loss Ratio	61
2.3.3.1. Estimation des Loss Ratios.....	61
2.3.3.2. Calcul de la provision.....	62
2.4. La méthode de Bornhuetter Ferguson	64
2.4.1. Présentation de la méthode	64
2.4.2. Illustration de la méthode Bornhuetter Ferguson	65
2.5. La méthode de Benktander	66
2.5.1. Présentation de la méthode	66
2.5.2. Illustration de la méthode Benktander.....	66
2.6. Gestion de la liquidation incomplète des triangles : Estimation des « Tail Factors »	67
2.6.1. Notations	68
2.6.2. Méthode d'ajustement exponentiel	68
2.6.3. Méthode de SHERMAN	69
2.6.4. Illustration de l'estimation du Tail Factor	69
2.7. Récapitulatif des méthodes déterministes de provisionnement	70

3. Méthodes Stochastiques	70
3.1. Modèle de Mack.....	71
3.2. Bootstrap pour le modèle de Mack	73
3.2.1. Bootstrap	73
3.2.2. Principe de la méthode	73
3.2.3. Bootstrap pour le modèle de Mack	74
3.3. Illustration des modèles stochastiques	75
3.4. Récapitulatif des modèles stochastiques	77
4. Récapitulatif des méthodes de provisionnement.....	77
Conclusion	79
Bibliographie	80
Annexes.....	81
Annexe1 : Méthodes de provisionnement en réassurance non-vie, illustrations et exemples	81
Annexe2 : L'algorithme EM pour l'estimation du maximum de vraisemblance (EMV)	85

Liste des abréviations

AETR : *Affaires étrangères*

AMAR : *Affaires marocaines*

BF : *Bornhuetter Ferguson*

CL : *Chain Ladder*

CLEG : *Cession légale*

LR : *Loss Ratio*

MAD : *Dirham Marocain*

SCR : *Société centrale de réassurance*

Liste des tableaux

Tableau 1: Structure du portefeuille des placements	18
Tableau 2: Structure du portefeuille des placements en OPCVM.....	20
Tableau 3: Structure du portefeuille des placements en obligations	20
Tableau 4: Structure du portefeuille des placements en actions par secteur	21
Tableau 5 : Valeurs critiques courantes du test de Kolmogorov-Smirnov	28
Tableau 6: Statistiques descriptives du MASI (2010-2017).....	29
Tableau 7: Statistiques descriptives du rendement du MASI (2010-2017).....	29
Tableau 8: Ajustement de la loi log-normale au MASI.....	30
Tableau 9 : Ajustement de la loi normale inverse gaussienne (NIG) aux rendements du MASI.....	30
Tableau 10:Ajustement de la loi inverse gaussienne au MASI.....	30
Tableau 11:Ajustement de la loi Generalized hyperbolic skew t-student aux rendements du MASI...	30
Tableau 12: Résultats du test de Kolmogorov-Smirnov	30
Tableau 13: Quantiles principaux des projections du MASI (2018-2022)	32
Tableau 14:L'écart à la moyenne annuelle du MASI (2018-2022)	33
Tableau 15: L'écart du MASI 2018-2022 au MASI du 31/12/2017	33
Tableau 16: Estimation des paramètres du modèle Nelson Siegel.....	38
Tableau 17:projection de la valeur du marché du portefeuille obligataire(en millions de MAD)	39
Tableau 18: Projection de la valeur du marché des placements en OPCVM par canton(en millions de MAD)	41
Tableau 19: Rendement des placements en OPCVM projetés 2018-2022	41
Tableau 20: Tableau des règlements cumulés ENGINEERING Traités étrangers	51
Tableau 21: Test d'indépendance des années de souscription.....	52
Tableau 22: Synthèse des résultats de l'application de la méthode de Chain Ladder	55
Tableau 23: Triangle complété.....	56
Tableau 24: Calcul des Loss Ratios Observés	61
Tableau 25: Estimation des Loss Ratios.....	62
Tableau 26: Calcul de la provision par la méthode du Loss Ratio	63
Tableau 27: Bornes de l'intervalle de confiance de la provision calculé par la méthode Loss Ratio (5%)	63
Tableau 28: Résultats de l'estimation de la provision par la méthode Bornhuetter Ferguson	65
Tableau 29: Résultats de l'estimation de la provision par la méthode Benktander	67
Tableau 30: Résultats de l'estimation du Tail Factor	69
Tableau 31: Comparaison des estimations des provisions par les méthodes déterministes	70
Tableau 32: Résultats de l'estimation de la provision par le modèle de Mack.....	75
Tableau 33:Résultats de l'estimation de la provision par la méthode Bootstrap-Mack.....	76
Tableau 34: Quantiles de l'estimation de la provision par la méthode Bootstrap-Mack	77
Tableau 35: Comparaison des provisions stochastiques.....	77
Tableau 36: Facteurs partiels de la méthode de Chain Ladder	82

Liste des figures

Figure 1: Composition du portefeuille des placements	19
Figure 2: Structure du portefeuille des placements par canton	19
Figure 3: Structure du portefeuille des placements en OPCVM	20
Figure 4: Structure du portefeuille des placements en obligations.....	21
Figure 5: Composition du portefeuille des placements en actions par secteur.....	21
Figure 6: Évolution de l'indice MASI (2010-2017)	29
Figure 7: comparaison des fonction de répartition empiriques des loi ajustées pour le MASI	30
Figure 8: comparaison des fonctions de répartition empiriques des lois ajustées pour le rendement du MASI	31
Figure 9:Quantiles sur 10.000 scénarios du MASI (2018-2022)	32
Figure 10:Projection de la valeur du marché du portefeuille actions - Cession Légale	35
Figure 11:Projection de la valeur du marché du portefeuille actions - Affaires étrangères.....	35
Figure 12:Projection de la valeur du marché du portefeuille actions - Affaires marocaines.....	35
Figure 13:Projection de la valeur du marché du portefeuille actions - libre	35
Figure 14:Projection de la valeur du marché du portefeuille actions.....	36
Figure 15: Interpolation de la courbe des taux par le modèle de Nelson Siegel	39
Figure 16:Projection de la valeur du marché des placements en OPCVM 2018-2022	41
Figure 17: C-C plot pour l'année de développement $j=1$	52
Figure 18:C-C plot pour l'année de développement $j=2$	53
Figure 19: Comparaison des facteurs partiels à la moyenne pour $j=1$	54
Figure 20:Comparaison des facteurs partiels à la moyenne pour $j=3$	54
Figure 21: Évolution de la part de règlements développée	57
Figure 22: Test de linéarité-Méthode de Chain Ladder	81
Figure 23: Test de l'hypothèse d'égalité des facteurs partiels – Chain Ladder.....	83
Figure 24: Test de la forme de la variance-modèle de Mack	84

Introduction

La particularité de l'activité d'une compagnie d'assurance ou de réassurance se base sur l'inversion de son cycle de production : les primes sont encaissées avant que les sinistres ne soient connus. Ce qui explique la différence de la représentation du bilan et du compte de résultat de celle-ci des entreprises classiques.

Le réassureur doit constituer des provisions techniques représentant une sorte de dettes envers ses clients. Il doit également détenir suffisamment de fonds propres pour rester solvable même après une éventuelle perte imprévue. Enfin, il place les fonds dont il dispose sur les marchés financiers.

Pour assurer sa solvabilité, le réassureur veille à disposer d'une bonne gestion de ses placements dans les marchés financiers et à évaluer prudemment ses provisions : Le sous-provisionnement et/ou la dégradation des marchés financiers peuvent affecter gravement la solidité financière de l'entreprise, et même la ruiner dans des cas plus extrêmes. Le réassureur cherche alors en principe à avoir une idée précise sur la performance de son portefeuille de placements sur le court et moyen terme, de plus du choix de la méthode d'estimation des provisions pour sinistres (étant les plus importantes des provisions techniques).

L'objectif de ce mémoire est, dans un premier temps, d'étudier l'évolution du portefeuille des placements de la Société Centrale de Réassurance (SCR). Pour une seconde partie, nous nous intéressons au choix des méthodes déterministes et stochastiques pour le calcul de la provision pour sinistres de la SCR. Ainsi la problématique traitée dans ce mémoire est la suivante :

Comment projeter les valeurs de marché du portefeuille des placements de la compagnie? Comment évaluer les provisions pour sinistres dans la réassurance non-vie ?

Afin d'y répondre, et dans l'optique de l'évolution de la réglementation prudentielle mettant en avant la possibilité pour les assureurs de tester leur risque de défaillance à l'aide de modèles actuariels, l'objectif de ce mémoire est de proposer une méthodologie de la projection de la valeur de marché du portefeuille des placements de la compagnie par catégorie d'actifs. Le portefeuille des actions est projeté selon une approche stochastique en passant par le modèle d'évaluation des actifs financiers (MEDAF) et un ajustement paramétrique des rendements du MASI par la loi Normale Inverse Gaussienne (NIG). La valeur du portefeuille obligataire est projetée après la modélisation du taux d'intérêt par le modèle

de Nelson Siegel. La projection de la valeur du portefeuille des OPCVM est projetée en se basant sur les performances historiques des OPCVM sur les 5 dernières années.

La deuxième partie est consacrée à l'étude des méthodes d'évaluation déterministes et stochastiques des provisions pour sinistres, qui constituent la part la plus importante des provisions techniques de la SCR. Nous présentons en premier la méthode classique de Chain Ladder, puis nous présentons quelques variantes de Chain Ladder pour challenger cette méthode, à savoir : La méthode Loss Ratio, Bornhuetter Ferguson et Benktander. Enfin, pour avoir une vision stochastique sur la variabilité des provisions, nous présentons l'extension de la méthode de Chain Ladder établie par Mack, puis introduisons les techniques de Bootstrap dans le provisionnement.

Chapitre préliminaire : La Société Centrale de Réassurance (SCR)

En préambule et pour les besoins de notre étude, il semble opportun de donner une vision globale sur les techniques de réassurance, et de rappeler l'importance de la gestion actif-passif pour une compagnie de réassurance, surtout quand celle-ci opère sur plusieurs marchés internationaux soumis à différents cadres réglementaires.

1. La Société Centrale de Réassurance : un réassureur international de référence

Filiale du Groupe Caisse de Dépôt et de Gestion (CDG), la Société Centrale de Réassurance a la capacité de fournir divers produits de réassurance pour les compagnies d'assurance. Elle est aujourd'hui un partenaire de choix des différentes institutions financières grâce à sa réputation (selon laquelle elle a un bilan solide et une gestion de risques avancée). À la fin de 2017, elle disposait d'un capital de 1500 MDH pour un chiffre d'affaires de 1600 MDH. Elle notée par les agences de notation, telles que A.M.Best (B++ Good), Standard & Poors (BBB-/Stable) et Fitch (AAA). Depuis plusieurs années, elle figure dans le classement des 5 premiers réassureurs arabes et africains.

Fondée en 1960, la SCR est la première compagnie de réassurance du marché marocain, avec plus de 70 % de part de marché. À l'échelle nationale, la SCR a pour mission de conserver, réguler et sécuriser le marché de réassurance. Elle offre également des couvertures en réassurance pour l'ensemble des risques (toutes les branches IARD, Vie, Aviation, Maritime,.....etc.). À l'international, la SCR se positionne en tant que réassureur de référence au niveau africain et dans le monde arabe.

2. Techniques de la réassurance

La réassurance est l'assurance pour les assureurs. Les principaux clients d'un réassureur sont des sociétés d'assurance, même si un réassureur peut parfois travailler avec d'autres types de clients, comme des gouvernements locaux par exemple.

Elle peut apporter de multiples bénéfices aux assureurs directs et à l'économie :

- ✓ Réduire la probabilité de faillite des assureurs directs dans des sinistres graves ou des catastrophes humaines et naturelles.
- ✓ Assister les assureurs qui voudraient élargir leurs champs d'activité en souscrivant des risques dans une nouvelle branche d'activité. Par le biais de la réassurance, ces assureurs peuvent limiter la perte potentielle financière et contrôler leurs

responsabilités, et ce, en prenant le temps de mieux comprendre le nouveau portefeuille.

Nous distinguons plusieurs formes de réassurance en fonction de la sélection des risques à céder et du mode de cession.

Au niveau de la sélection des risques, il y a la réassurance **facultative** où l'assureur a le droit de sélectionner des risques particuliers qu'il souhaite céder, puis à son tour, le réassureur décidera s'il souhaite ou non les accepter. Au contraire, la réassurance **obligatoire** implique la responsabilité de l'assureur de céder toutes les polices au sein du traité, et celle du réassureur d'accepter tous ces risques. À partir de ce caractère obligatoire, un portefeuille entier de la cédante sera l'objet d'une garantie, c'est la raison pour laquelle cette forme représente toujours la majorité dans le portefeuille global des réassureurs.

Au niveau du mode de cession des risques, il y a la réassurance **proportionnelle** et la réassurance **non proportionnelle**.

Dans le cas de la réassurance proportionnelle, les deux parties définiront à l'avance dans un contrat un ratio pour répartir la prime originale et la charge finale. Ce ratio peut varier d'un risque à l'autre, ou rester inchangé pour toutes les polices dans le traité.

Concernant la réassurance **non proportionnelle**, ce ratio n'existe pas et la charge finale de la part du réassureur est calculée en fonction du montant des sinistres. En effet, l'assureur direct règle la totalité des sinistres qui sont au-dessous d'un seuil défini dans le contrat (la priorité) et le réassureur n'intervient que si la charge dépasse ce seuil.

3. L'importance de l'ALM dans la réassurance :

L'ALM (Asset and Liability management) ou encore Gestion Actif-Passif est un outil qui sert à la fois au pilotage stratégique mais aussi à l'aide à la décision. Il consiste à garantir l'équilibre entre l'actif et le passif au regard des engagements pris par l'entreprise et des risques liés à ses placements sous contrainte d'un niveau de rendement, tout en respectant le cadre réglementaire. Le but final est alors d'aider les assureurs à garantir le financement des engagements pris envers leurs assurés.

L'activité de l'assurance étant caractérisé par l'inversion du cycle de production, le rôle de l'ALM est devenu prépondérant dans le contrôle des risques induits par les marchés financiers. En effet, les primes d'assurance sont perçues alors que les engagements pris envers les assurés ne sont pas encore tout à fait connus de l'assureur. Ce fonctionnement se traduit

par la constitution de provisions technique placées dans différents actifs financiers et ce sont les montants ainsi capitalisés qui permettent à l'assureur d'honorer ses engagements. Cependant, les actifs financiers sont soumis à de nombreux risques. Il faut alors prendre en compte les interactions entre l'actif et les engagements du passif, et les différents risques qui pourraient les affecter.

Chapitre 1 : Projection du portefeuille des placements de la SCR

L'objectif de cette partie est d'établir une méthodologie pour la projection des différents actifs constituant le portefeuille des placements de la SCR. Cette méthodologie est basée sur la valorisation des actifs constituant le portefeuille des placements tout en tenant en compte les différents paramètres économiques auxquelles est sensible chaque classe d'actifs. Il sera tout d'abord nécessaire de simuler le taux sans risque. Ce taux sans risque permettra d'établir une valorisation des actifs obligataires. Quant aux parts d'organismes de placements, aucune modélisation n'est mise en place et la valorisation est basée sur les performances historiques des organismes de placement publiées par l'association des sociétés de gestion et fonds d'investissement marocains (ASFIM). Notre étude se focalisera en particulier sur le risque actions, du coup nous établirons une modélisation paramétrique de l'indice boursier MASI, nous permettant ainsi de simuler plusieurs scénarios d'évolution du marché boursier. En passant par le modèle d'évaluation des actifs financiers (MEDAF), nous évaluons et projetons le portefeuille actions par valeur. Il est tout de même intéressant d'avoir une idée sur la composition de ce portefeuille et des différentes classes d'actifs le constituant.

Au cours de ce chapitre, plusieurs informations sensibles seront cachées pour respecter les normes de confidentialité des informations de la SCR.

1. Structure du portefeuille de placements de la SCR

Le portefeuille des placements affectés aux opérations de réassurance de la SCR est constitué de 4 catégories d'actifs :

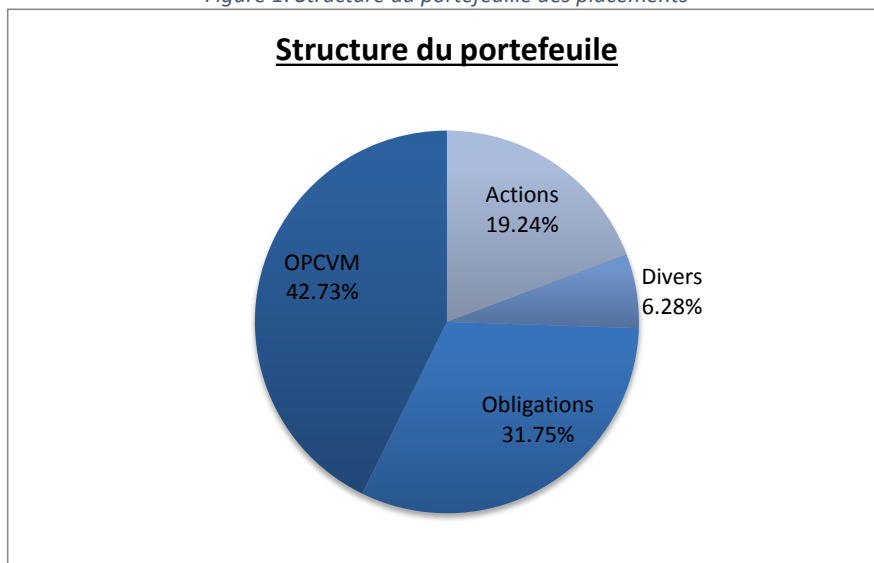
- ✓ Portefeuille obligataire
- ✓ Portefeuille actions
- ✓ Portefeuille OPCVM
- ✓ Portefeuille d'actifs divers (...)

À fin décembre 2017, la valeur nette comptable du portefeuille des placements s'élève à ##### Milliards de MAD, pour une valeur de marché de ##### Milliards de MAD, soit une plus-value latente globale de ##### Milliards de MAD.

Tableau 1: Structure du portefeuille des placements

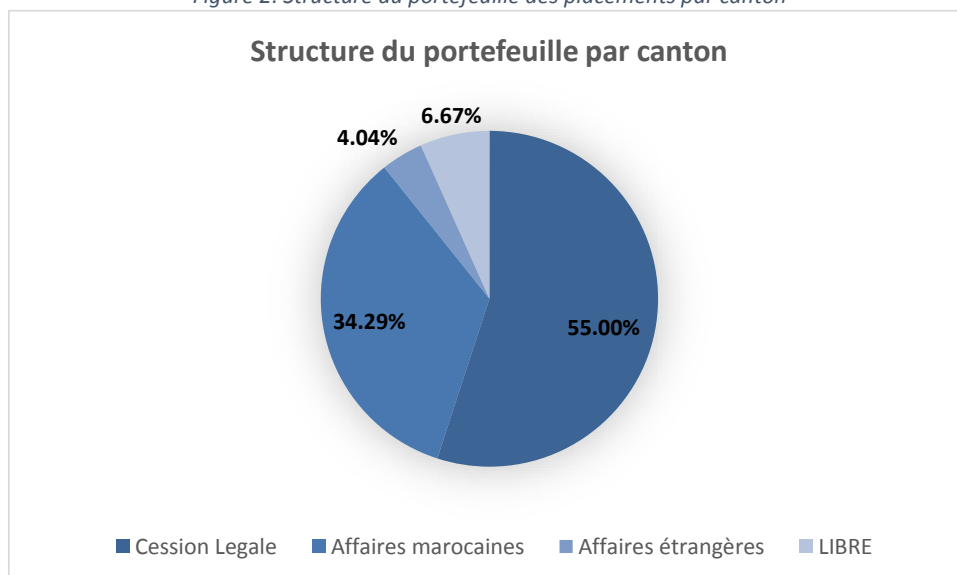
Au titre de placements de ses provisions, la SCR est dotée d'un portefeuille constitué de 42.73% de parts en OPCVM, 31.75% d'obligations et 19.42% d'actions.

Figure 1: Structure du portefeuille des placements



En termes de représentation, le portefeuille des placements de la SCR est reparti en 4 cantons, 55% du portefeuille sert à la couverture des engagements de la compagnie en Cession légale, 34.29% pour la couverture des affaires marocaines et 4.04% couvre les engagements étrangers de la compagnie. (Figure 2: Structure du portefeuille des placements par canton)

Figure 2: Structure du portefeuille des placements par canton



Dans le cadre de notre étude, nous allons projeter la valeur marché des portefeuilles des actions, obligataire et OPCVM, soit 93.72% du portefeuille global des placements de la SCR.

Nous détaillons dans les 3 sections qui suivent, la composition et caractéristiques des portefeuilles de chaque classe d'actifs.

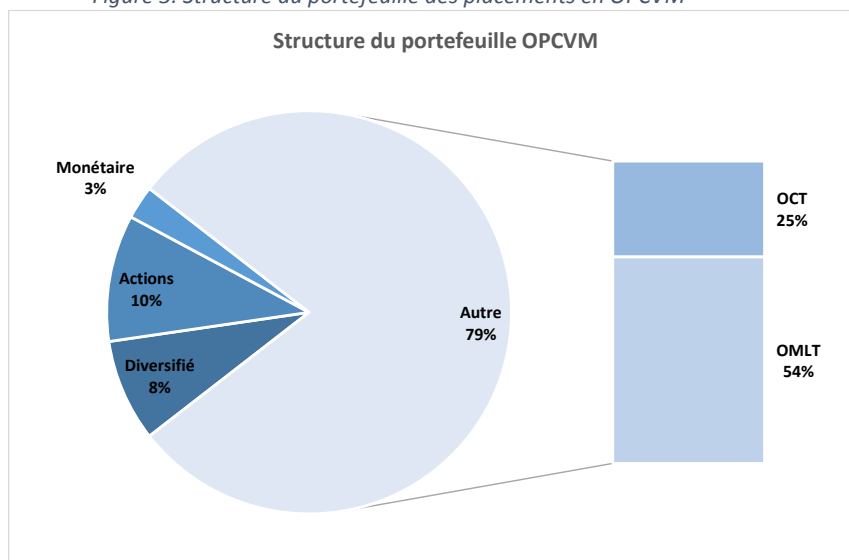
1.1. Portefeuille des parts des OPCVM

Le portefeuille OPCVM a réalisé en 2017 une plus-value latente de ##### Millions de MAD, soit 94.20% de la plus-value du portefeuille global des placements de la SCR. Environ 66% de cette plus-value proviennent des parts des OPCVM investissant dans les obligations court terme.

Tableau 2: Structure du portefeuille des placements en OPCVM

Le portefeuille OPCVM se compose principalement des parts de fonds spécialisés dans les placements obligataires (78.94%) dont les OPCVM spécialisés dans les obligations moyen et long terme représentent une part importante (53.92%).

Figure 3: Structure du portefeuille des placements en OPCVM

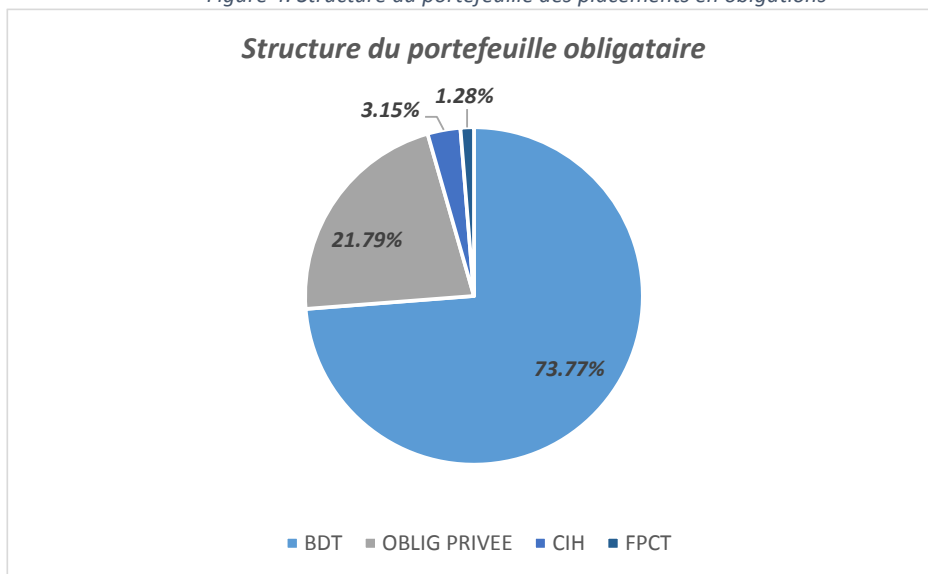


1.2. Portefeuille des Obligations

Le portefeuille obligataire de la SCR est composé principalement des bons de trésor de l'Etat (73.77%) et des obligations privées (21.79%). (Voir Figure 4 et Tableau 3: Structure du portefeuille des placements en obligations)

Tableau 3: Structure du portefeuille des placements en obligations

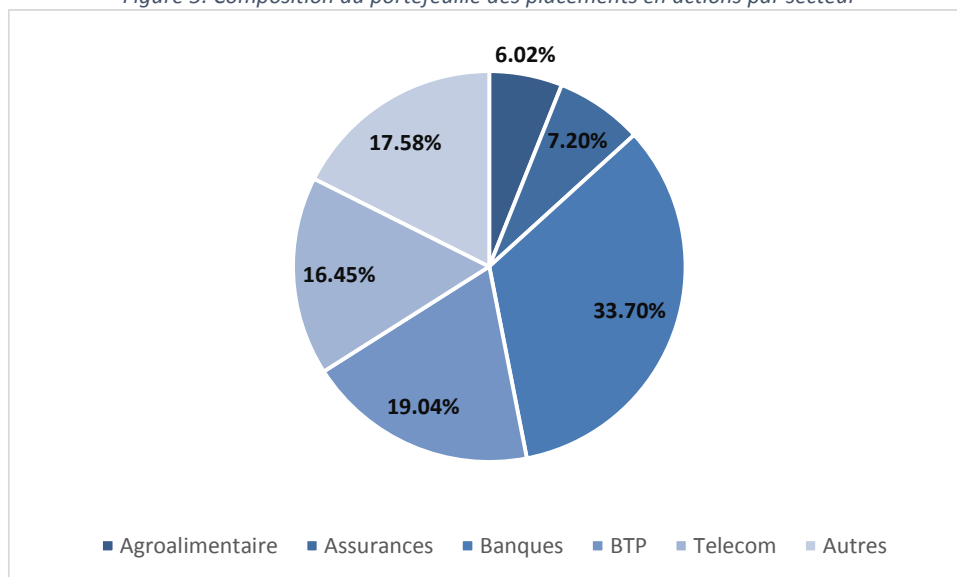
Figure 4: Structure du portefeuille des placements en obligations



1.3. Portefeuille des actions :

Le portefeuille des actions représente 19.23% de la valeur global du portefeuille des placements de la SCR. Sa composition est dominée par les valeurs appartenant aux secteurs : bancaire, Telecom et BTP (Bâtiments et travaux publics).

Figure 5: Composition du portefeuille des placements en actions par secteur



Le rendement global du portefeuille actions est de 5.35%. Le portefeuille actions du secteur bancaire a marqué la plus grande performance évoluant de 33.7% en 2017.

Tableau 4: Structure du portefeuille des placements en actions par secteur

Les performances des actions des secteurs agroalimentaire et télécom sont négatives (soit -2.43% et -5.63% respectivement).

2. Modélisation et projection du portefeuille actions

2.1. Procédure de la projection du portefeuille actions

L'objectif étant de projeter la valeur de marché du portefeuille des actions, nous mettons à profit le modèle d'évaluation des actifs financiers (MEDAF) pour établir les rendements des actions pour chaque période de projection et ainsi déduire les valeurs des actions constituant le portefeuille. Pour ce, il suffit d'avoir un modèle stochastique pour un indice de marché (ou pour son rendement). En procédant après par la génération de scénarios d'évolution de cet indice, nous pouvons projeter les valeurs de chaque action dans chaque scénario.

Il est donc essentiel de bien choisir l'indice de référence, selon les caractéristiques du portefeuille, en plus la modélisation de cet indice doit être pertinente et adéquate pour que les scénarios générés seront-ils crédibles.

2.2. Le Modèle d'Évaluation Des Actifs Financiers (MEDAF)

Le Modèle d'Évaluation Des Actifs Financiers est un prolongement des travaux de Markowitz sur la diversification et la théorie moderne du portefeuille. Il permet, de calculer le rendement requis d'un actif risqué en fonction de son risque systématique. Il montre, en particulier, qu'aucun investisseur ne devrait systématiquement réaliser de meilleures performances que celles d'un portefeuille obtenu par combinaison du portefeuille de marché (contenant tous les titres risqués) et d'opérations de prêt ou d'emprunt, sans risque.

Généralement le MEDAF repose sur des hypothèses fondamentales définissant l'univers de la gestion du portefeuille :

- Les investisseurs sont averse au risque, ils cherchent à maximiser leur utilité espérée.
- Les investisseurs se basent sur le rendement espéré et l'écart-type du rendement des portefeuilles pour prendre leurs décisions d'investissement.
- L'horizon de planification de l'investissement est d'une période.
- Les investisseurs anticipent, de façon homogène, le rendement et le risque de tout actif sur le marché.

- Les investisseurs peuvent prêter ou emprunter à un taux sans risque et uniforme pour tous.
- Les marchés des capitaux sont parfaits: pas de frais de transaction, l'information est gratuite et disponible à tous simultanément, les actifs sont divisibles, etc.
- Les investisseurs ont la possibilité de vendre à découvert les actifs sans aucune restriction.
- Les opérations d'achats et de ventes effectuées par tout investisseur n'affectent pas le prix des actifs.

La plupart des hypothèses ci-dessus ne représentent pas une description exacte de la réalité. Dans ces conditions, et en supposant que ce modèle soit testable, seuls les résultats de tests empiriques permettront de vérifier la validité de ce modèle.

Ce modèle permet d'estimer le taux espéré de la rentabilité d'un portefeuille à partir de trois composantes: **le taux d'intérêt sans risque, le coefficient de risque lié au portefeuille, et l'espérance de rentabilité du marché**, soit :

$$R_t - R_f = \beta \cdot (R_t^M - R_f)$$

Où :

R_t : Rendement de l'actif

R_t^M : Rendement du marché

R_t^M : Rendement d'actif sans risque (fixe)

On appelle « bêta » d'un actif (β) le paramètre :

$$\beta = \frac{\text{cov}(R, R^M)}{\text{var}(R^M)}$$

Il s'interprète comme la sensibilité du rendement de l'actif au rendement du marché, c'est-à-dire la variation du rendement expliquée par celle du marché.

Si les rentabilités sont « normalement » distribuées et qu'on effectue la régression linéaire (par les MCO) de R sur R^M , on obtient la relation :

$$R_t = \alpha + \beta \cdot R_t^M + \varepsilon_t$$

α et β sont les coefficients de la régression

ε_t est le résidu, d'espérance nulle, par hypothèse, les résidus ne sont pas corrélés à R^M .

D'où l'idée de considérer la rentabilité du titre comme suit :

$$R_t = \alpha + \beta \cdot R_t^M + \varepsilon_t$$

En prenant l'espérance mathématique, on obtient :

$$E(R_t) = \alpha + \beta \cdot R_t^M \quad \text{où} \quad \alpha = (1 - \beta) \cdot R_f$$

2.3. Rendement

2.3.1. Rendement d'un actif

$R_t = \ln\left(\frac{P_t}{P_{t-1}}\right)$ ou \ln est le logarithme népérien

2.3.2. Rendement du portefeuille

Pour un portefeuille comportant n actifs :

$$R_p = \sum_{i=1}^n \omega_i \times R_i$$

2.4. Sélection du rendement de référence

2.4.1. Catégories et caractéristiques

Avant de sélectionner un rendement de référence, il conviendrait d'examiner la politique d'investissement de la société.

Nous allons pas avoir recours à un indice de marché spécifique à un secteur : la moyenne et la volatilité ne serviront pas pour estimer les rendements attendus sur des périodes longues, vu leur variabilité non négligeable.

2.4.2. Période historique

La période historique la plus adéquate pour avoir la meilleure estimation du rendement des actifs, est la plus longue dont les données sont disponibles, vu que la période de projection est très longue (5 ans). Cette approche permet d'établir des projections plus stables. Elle couvre plusieurs périodes de croissance, et des ralentissements du marché se produiront inévitablement, bien que de manière imprévisible.

Nous allons exploiter les données historiques du 01/01/2010 au 31/12/2017, nous considérons que les conditions de cette période sont reproductibles sur l'horizon de projection.

2.4.3. L'indice du marché des actions : MOROCCAN ALL SHARES INDEX

Un indice boursier correspond à une mesure statistique calculée par le regroupement des valeurs des titres de plusieurs sociétés cotées en bourse. Il sert généralement à mesurer la performance d'une bourse ou d'un marché.

Le principal indice au Maroc est le MASI, c'est un indice de capitalisation retraçant l'évolution globale du marché et prenant en considération toutes les valeurs cotées à la Bourse de Casablanca, qui sont au nombre de 74 (Fin 2017).

Vu la composition du portefeuille et des éléments stratégiques de la SCR, nous avons jugé incohérent de prendre les sous-indices du MASI. (Portefeuille construit de façon à ce que le beta du portefeuille soit proche de 1 pour que l'évolution du portefeuille suive l'évolution du marché).

2.5. Modélisation paramétrique du MASI : outils théoriques

Les rendements des variables du marché financier tels que les taux de change, les cours des actions et les taux d'intérêt, mesurés sur de courts intervalles de temps, c'est-à-dire tous les jours ou toutes les semaines, sont caractérisés par la non-normalité. La distribution empirique de ces rendements est plus pointue et elle a des queues plus épaisses que la distribution normale, ce qui implique que de très grands changements dans les rendements se produisent avec une plus grande fréquence que sous la normalité. En outre, ils sont souvent asymétriques à gauche avec des queues plus épaisses, indiquant que les pertes extrêmes sont plus fréquentes que les gains importants.

Une des distributions les plus prometteuses dans la littérature pour la modélisation de tels rendements est la distribution normale gaussienne inverse (NIG), qui a été introduite par Barndorff-Nielsen (1997). Le comportement de queue de NIG est souvent classé comme semi lourd. Autrement dit, les queues sont beaucoup plus épaisses que dans la distribution gaussienne, mais la distribution peut ne pas être adéquate pour les cas de queues extrêmement lourdes. Pourtant, l'expérience empirique suggère un excellent ajustement de la NIG à de nombreux types de séries chronologiques financières. De plus, la distribution NIG possède un certain nombre de propriétés théoriques attrayantes, parmi d'autres sa traçabilité analytique.

La distribution NIG est une sous-classe de la distribution hyperbolique généralisée (GH) (Barndorff-Nielsen, 1977). Une sous-classe moins étudiée de cette distribution est une extension asymétrique de la distribution t de Student. Cette distribution, désignée ici par la distribution hyperbolique généralisée de Student, est presque aussi analytiquement traçable que la distribution NIG. De plus, elle permet des queues très épaisses et une asymétrie substantielle. Enfin, l'estimation du maximum de vraisemblance de ses paramètres est assez simple à l'aide de l'algorithme EM (Dempster et al. 1977), ce qui le rend très utile pour les applications financières.

Dans ce mémoire nous allons tester, tout d'abord, les distributions Log-Normale et Normale Inverse, étant les plus basiques pour la modélisation des instruments financiers, puis

nous allons ajuster les lois NIG et GH de Student. Pour mesurer la qualité d'ajustement de chaque distribution, nous utilisons le test de Kolmogorov-Smirnov dont le principe est présenté ci-dessous.

2.5.1. Loi Log-Normale

Une variable aléatoire suit une loi Log-Normale de paramètres μ et σ^2 si son logarithme suit une loi Normale de paramètres μ et σ^2 .

$$X \sim \text{LN}(\mu, \sigma^2) \iff \ln(X) \sim N(\mu, \sigma^2)$$

La fonction densité de la loi Log-Normale de paramètres μ et σ^2 est :

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln(x) - \mu}{\sigma}\right)^2\right)$$

L'espérance et la variance de la distribution Log-Normale sont données par :

$$E(X) = \exp\left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right) \text{ et } \text{Var}(X) = \exp(2\mu + \sigma^2) \cdot (\exp(\sigma^2) - 1)$$

2.5.2. Loi Normale Inverse

C'est une loi de probabilité continue à deux paramètres et à valeurs strictement positives.

La densité de probabilité de la loi Normale Inverse est :

$$X \sim \text{IG}(\mu, \lambda): f_X(x) = \left(\frac{\lambda}{2\pi x^3}\right)^{1/2} \cdot \exp\left(\frac{-\lambda \cdot (x - \mu)^2}{2\mu^2 x}\right)$$

Où $\mu > 0$ est son espérance et $\lambda > 0$ est un paramètre de forme.

La variance de la loi Normale Inverse est donnée par :

$$\text{Var}(X) = \frac{\mu^3}{\lambda}$$

2.5.3. Loi Normale Inverse Gaussienne

La distribution NIG peut être paramétrée de plusieurs façons. Nous suivons la paramétrisation de Karlis (2002) et Venter et De Jongh (2002), La densité de probabilité de la loi Normale Inverse Gaussienne est donnée par:

$$X \sim \text{NIG}(\mu, \delta, \alpha, \beta): f_X(x) = \frac{\delta \cdot \alpha}{\pi \cdot q(x)} \cdot \exp(p(x)) \cdot K_1(\alpha \cdot q(x))$$

Où :

$$p(x) = \delta\sqrt{\alpha^2 - \beta^2} + \beta \cdot (x - \mu) ; ; q(x) = \sqrt{\delta^2 + (x - \mu)^2}$$

$\delta > 0$ et $0 < |\beta| < \alpha$

K_j est la fonction modifiée de Bessel du second type d'ordre j .

Les paramètres μ et δ déterminent respectivement l'emplacement et l'échelle, tandis que α et β contrôlent la forme de la densité.

L'espérance et la variance de la distribution NIG sont données par :

$$E(X) = \mu + \frac{\delta\beta}{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}} \text{ et } \text{Var}(X) = \frac{\delta\alpha^2}{(\alpha^2 - \beta^2)^{3/2}}$$

L'estimation du maximum de vraisemblance est recommandée pour déterminer les paramètres de la distribution NIG. Des méthodes d'optimisation numérique doivent être utilisées, car les expressions explicites pour les estimateurs du maximum de vraisemblance ne sont disponibles pour aucune des paramétrisations de la distribution.

Karlis (2002) a proposé un algorithme EM (Dempster et al. 1977) pour la maximisation de vraisemblance des paramètres de la distribution NIG. L'algorithme EM consiste à itérer deux étapes, l'étape d'espérance (étape E) et l'étape de maximisation (étape M). Dans le cas NIG, l'étape E comprend le calcul de l'espérance conditionnelle des statistiques suffisantes de la distribution GIG (Generalized Inverse Gaussian) (Barndorff-Nielsen, 1977), tandis que l'étape M implique la mise à jour des paramètres en utilisant les espérances de l'étape E. Pour plus de détails sur l'algorithme EM, voir l'annexe 2.

2.5.4. The Generalized Hyperbolic skew Student's t distribution

La distribution GHT est une des plus intéressants variétés de la distribution hyperbolique généralisée pour la modélisation des rendements financiers du fait qu'elle permet des queues très lourdes et une asymétrie substantielle, soit deux caractéristiques des variables aléatoires en finance. La densité de probabilité de la loi GHT est donnée par :

$X \sim \text{GH} - t(\beta, \delta, \mu, \vartheta)$:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{2^{\frac{1-\vartheta}{2}} \cdot \delta^\vartheta \cdot |\beta|^{\frac{\vartheta+1}{2}} \cdot K_{\vartheta+1}(\sqrt{\beta^2(\delta^2 + (x-\mu)^2)}) \cdot \exp(\beta \cdot (x-\mu))}{\Gamma\left(\frac{\vartheta}{2}\right) \cdot \sqrt{\pi} \cdot \left(\sqrt{(\delta^2 + (x-\mu)^2)}\right)^{\frac{\vartheta+1}{2}}}, & \beta \neq 0 \\ \frac{\Gamma\left(\frac{\vartheta+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\vartheta}{2}\right) \cdot \sqrt{\pi}} \cdot \left(1 + \frac{(x-\mu)^2}{\delta^2}\right)^{-\frac{\vartheta+1}{2}}, & \beta = 0 \end{cases}$$

La moyenne et la variance d'une variable aléatoire X de loi GH-t sont :

$$E(X) = \mu + \frac{\delta^2 \cdot \beta}{\vartheta - 2} \text{ et } \text{Var}(X) = \frac{2\delta^4\beta^2}{(\vartheta - 2)^2(\vartheta - 4)} + \frac{\delta^2}{\vartheta - 2}$$

De même que pour la loi NIG, l'estimation du maximum de vraisemblance est recommandée pour déterminer les paramètres de la distribution GH-t de Student.

2.5.5. Test d'adéquation de l'ajustement

Nous allons exploiter le test de Kolmogorov-Smirnov dont les hypothèses nulle et alternative sont :

- $\left\{ \begin{array}{l} H_0: \text{les deux échantillons ont la même fonction de répartition empirique} \\ H_1: \text{les deux échantillons n'ont pas la même fonction de répartition empirique} \end{array} \right.$

La statistique du test est :

$$D_{n,m} = \sup_x |F_{1,n}(x) - F_{2,m}(x)|$$

Où $F_{1,n}$ et $F_{2,m}$ sont les fonctions de répartition empiriques des deux échantillons à comparer de tailles respectives n et m

L'hypothèse nulle est rejetée au seuil α si $D_{n,m} \geq c(\alpha) \sqrt{\frac{n+m}{n.m}}$

La valeur de $C(\alpha)$ pour les valeurs courantes de α est donnée dans le tableau suivant :

Tableau 5 : Valeurs critiques courantes du test de Kolmogorov-Smirnov

α	0.10	0.05	0.025	0.01	0.005	0.001
C(α)	1.22	1.36	1.48	1.63	1.73	1.95

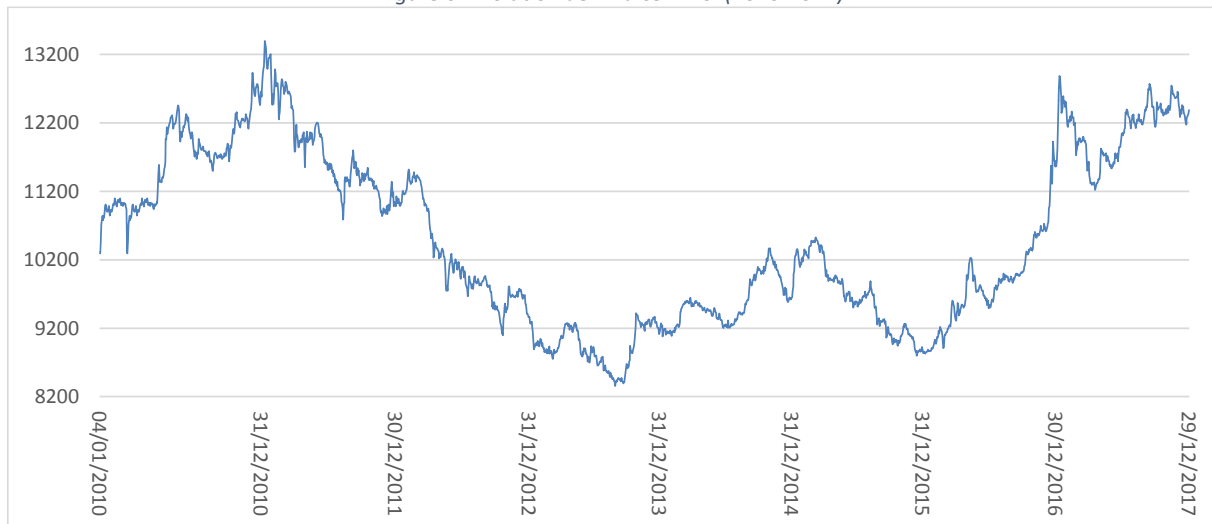
De façon plus générale: $c(\alpha) = \sqrt{-\frac{1}{2} \ln \left(\frac{\alpha}{2} \right)}$

2.6. Modélisation du MASI : estimations et choix de loi paramétrique

2.6.1. Étude exploratoire des données historiques

Comme discuté ci-dessus, nous exploitons les valeurs de l'indice du marché MASI entre 2010 et 2017 dans notre étude. Le MASI passe de 10312.35 au 01/01/2010 à 12388.82 à fin 2017, soit une évolution globale de 20.14% avec une valeur moyenne 10505.97.

Figure 6: Évolution de l'indice MASI (2010-2017)



La médiane du MASI est de 10208.77, inférieure à la moyenne indiquant que la tendance de l'évolution historique du MASI est haussière.

Tableau 6: Statistiques descriptives du MASI (2010-2017)

Min	Médiane	Max	Moyenne
8356.40	10208.77	13397.47	10505.97

Quant aux rendements du MASI, ils sont compris entre -0.05895 et 0.03295 avec une moyenne de 0.000089. La moyenne des rendements étant positive, la tendance historique est haussière mais avec des baisses plus intenses (intervalle asymétrique vers les valeurs négatives $[-0.05895, 0.03295]$).

Tableau 7: Statistiques descriptives du rendement du MASI (2010-2017)

Min	Médiane	Max	Moyenne	Kurtosis	Asymétrie
-0.0589593	0.000114	0.03295451	0.000089	6.325757	-0.08789887

Les coefficients d'asymétrie et d'aplatissement (Kurtosis) observés sont différents de ceux d'une loi normale ($k=3, s=0$), l'ajustement des rendements par une loi normale (ou du MASI par une loi log normale) n'est, fort probablement, donc pas adéquat.

Nous présentons dans ce qui suit, l'estimation des paramètres des lois proposées ci-dessus, ainsi que les résultats du test d'ajustement de Kolmogorov Smirnov.

2.6.2. Estimation des paramètres des lois proposées

L'estimation des paramètres des lois ajustées est mise en place par maximisation de la vraisemblance. Dans le cas de la loi NIG, l'estimation des paramètres a nécessité

l'implémentation de l'algorithme EM pour converger vers l'estimateur de maximum de vraisemblance. (Les détails l'algorithme EM sont donnés dans en annexe).

Tableau 8: Ajustement de la loi log-normale au MASI

μ	9.25276844
σ	0.11746841

Tableau 10: Ajustement de la loi inverse gaussienne au MASI

μ	10505.97
λ	757233.12

Tableau 9 : Ajustement de la loi normale inverse gaussienne (NIG) aux rendements du MASI

α	139.618822957897
β	4.72246395533045
δ	0.00544977817029125
μ	-0.0000947310099484174

Tableau 11: Ajustement de la loi Generalized hyperbolic skew t-student aux rendements du MASI

β	4.9250336829
δ	0.0084661750
μ	-0.0001120485
ν	3.7149136643

2.6.3. Test d'adéquation et qualité d'ajustement

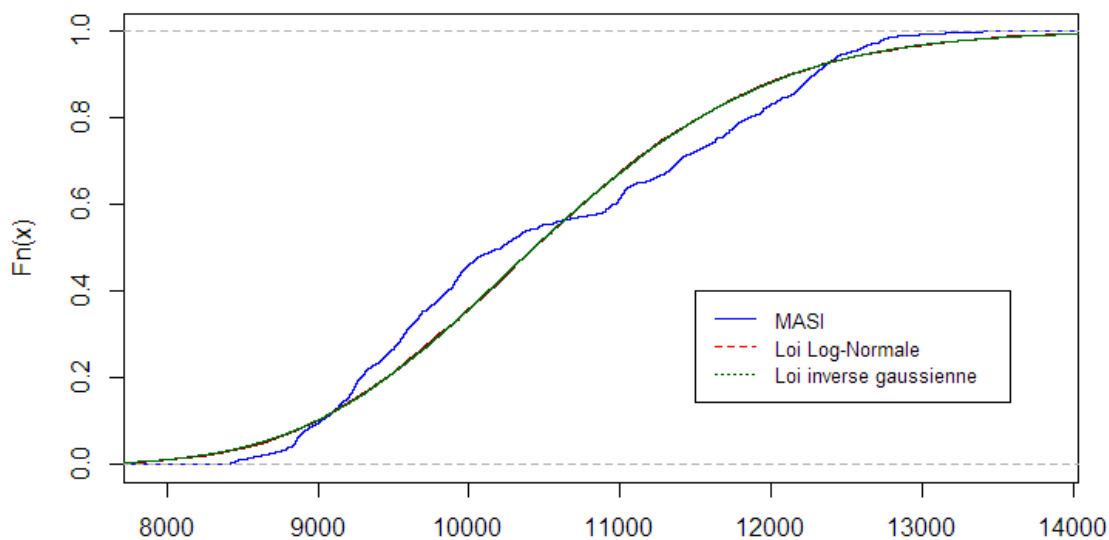
L'hypothèse nulle du test de Kolmogorov-Smirnov est rejetée pour toutes les lois sauf la loi normale inverse gaussienne.

Tableau 12: Résultats du test de Kolmogorov-Smirnov

TEST DE KOLMOGOROV-SMIRNOV				
Variable	MASI		Rendement du MASI	
Distribution	Log-Normale	Normale Inverse	NIG	GHT
Statistique du test	0.10194	0.12656	0.014149	0.092382
P-value	2.20E-16	8.92E-10	0.8859	1.44E-15

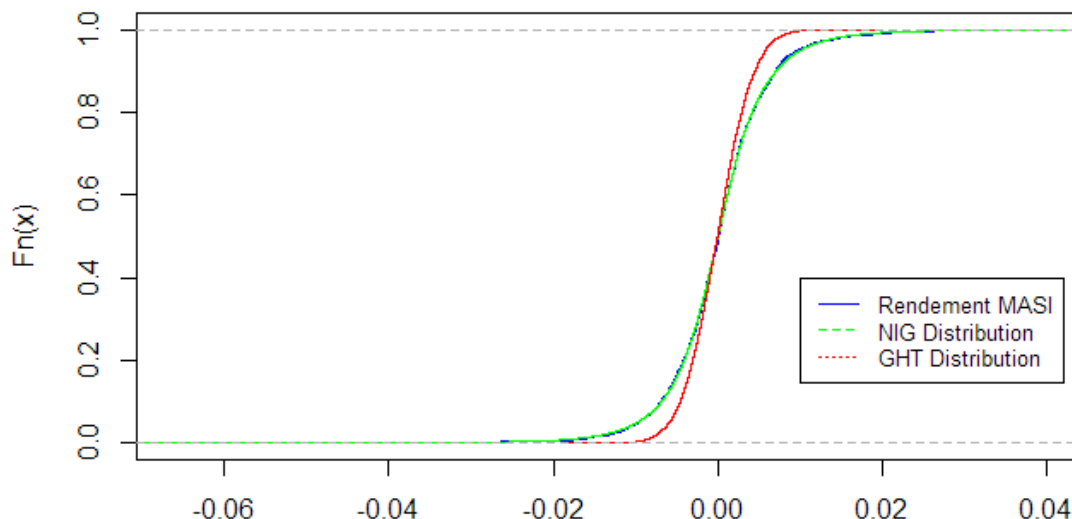
La comparaison des graphiques des fonctions de répartition empiriques de chaque loi avec celle de la variable objet de modélisation confirme les résultats du test K-S.

Figure 7: comparaison des fonction de répartition empiriques des loi ajustées pour le MASI



La fonction de répartition empirique du MASI est loin d'être approchée de celles des lois Log-Normale et Normale Inverse (figure ci-dessus). Par contre la fonction de répartition empirique des rendements du MASI est de la même allure que celle de la loi Normale Inverse Gaussienne (figure ci-dessous).

Figure 8: comparaison des fonctions de répartition empiriques des lois ajustées pour le rendement du MASI



La loi NIG est retenue comme modèle pour les rendements du MASI.

2.6.4. Génération des scénarios

L'étape suivante est de générer des scénarios de l'évolution du MASI durant toute la période de projection.

Nous avons procédé à la simulation de 10000 scénarios aléatoires des rendements du MASI sur la période 2018-2022, soit 1260 rendements pour chaque scénario (une année d'activité boursière compte 252 jours).

Un scénario est une suite de 1260 rendements du MASI indépendants selon la loi NIG avec les paramètres estimés ci-dessus. Le passage des rendements aux valeurs du MASI se fait à travers la formule suivante :

$$\text{MASI}_t = \text{MASI}_{t-1} \cdot e^{R_t^M} \text{ pour } t \in \llbracket 1, 1260 \rrbracket$$

$$\text{MASI}_0 = \text{MASI}_{31-12-2017} = 12388.82$$

Où R_t^M est le rendement simulé du MASI pour t .

Le tableau suivant résume les principaux quantiles des projections sur la période 2018-2022 :

Tableau 13: Quantiles principaux des projections du MASI (2018-2022)

	31/12/2017	31/12/2018	31/12/2019	31/12/2020	31/12/2021	31/12/2022
10%	12 388.82	11 118.40	10 712.65	10 508.25	10 335.05	10 189.95
25%	12 388.82	11 792.06	11 686.38	11 639.53	11 618.11	11 627.16
50%	12 388.82	12 608.86	12 841.58	13 052.28	13 283.32	13 519.15
75%	12 388.82	13 508.66	14 150.71	14 678.09	15 214.42	15 704.10
90%	12 388.82	14 355.69	15 444.00	16 392.09	17 199.75	18 038.86
99%	12 388.82	15 916.30	17 856.76	19 457.03	21 147.60	22 972.61
Moyenne	12 388.82	12 683.85	12 977.14	13 273.96	13 574.30	13 881.63

La tendance moyenne est haussière, le MASI moyen passe de 12388.82 à 13881.63 avec une hausse 12.05% sur 5 ans, ou 2.30% par an.

La moyenne est au-dessus de la médiane pour toute la période de projection : il y a une asymétrie non paramétrique à droite de la distribution des évolutions du MASI, de plus les tendances haussières dominant suffisamment pour tirer la moyenne au-dessus de la médiane.

Figure 9: Quantiles sur 10.000 scénarios du MASI (2018-2022)



Il y a plus de chance de hausse que de baisse, en effet l'écart à la moyenne annuelle pour les grands quantiles est largement supérieur à l'écart à la moyenne annuelle des quantiles inférieurs.

Tableau 14: L'écart à la moyenne annuelle du MASI (2018-2022)

	31/12/2018	31/12/2019	31/12/2020	31/12/2021	31/12/2022
10%	-12.34%	-17.45%	-20.84%	-23.86%	-26.59%
25%	-7.03%	-9.95%	-12.31%	-14.41%	-16.24%
50%	-0.59%	-1.04%	-1.67%	-2.14%	-2.61%
75%	6.50%	9.04%	10.58%	12.08%	13.13%
90%	13.18%	19.01%	23.49%	26.71%	29.95%

En termes d'évolution par rapport au 31/12/2017, la tendance moyenne est haussière : +2.38% en 2018 qui augmente pour atteindre 12.04% en 2022.

Tableau 15: L'écart du MASI 2018-2022 au MASI du 31/12/2017

	31/12/2018	31/12/2019	31/12/2020	31/12/2021	31/12/2022
10%	-10.25%	-13.53%	-15.18%	-16.58%	-17.75%
25%	-4.82%	-5.67%	-6.05%	-6.22%	-6.15%
50%	1.78%	3.65%	5.36%	7.22%	9.12%
75%	9.04%	14.22%	18.48%	22.81%	26.76%
90%	15.88%	24.66%	32.31%	38.83%	45.61%
Moyenne	2.38%	4.75%	7.14%	9.57%	12.05%

Les écarts (en valeurs absolue) au MASI du 31/12/2017 pour les grands quantiles sont supérieurs à ceux des quantiles inférieurs : le modèle est plutôt optimiste quant à l'évolution du marché.

2.6.5. Projections de la valeur d'une action

Rappelons tout d'abord, les formules du modèle d'évaluation des actifs financiers :

Si :

R_t : Rendement de l'actif

R_t^M : Rendement du marché

Nous écrivons :

$$R_t = \alpha + \beta \cdot R_t^M + \varepsilon_t$$

Nous effectuons une régression linéaire (par les MCO) de R sur R^M , se servant des données historiques des valeurs du MASI et du cours de l'action entre 2010 et 2017.

Nous illustrons ce processus pour la valeur de l'action « ATTIJARIWAFABANK » notée ATW :

La méthode des MCO fournit les estimations suivantes des paramètres :

$$\alpha = -0.003929513 \text{ et } \beta = 0.802577$$

L'espérance du rendement de l'action ATW s'écrit alors :

$$R_t = -0.003929513 + 0.802577 \cdot R_t^M$$

Nous en déduisons la valeur de l'action à chaque instant t comme suit :

$$ATW_t = ATW_{t-1} \cdot e^{R_t}$$

$$ATW = ATW_{t-1} \cdot e^{-0.003929513 + 0.802577 \cdot R_t^M} \text{ pour } t \in \llbracket 1, 1260 \rrbracket$$

$$\text{Où : } ATW_0 = ATW_{31-12-2017} = 484.0 \text{ MAD}$$

Le passage des projections des valeurs des actions à la projection de la valeur totale du portefeuille se fait en sommant les valeurs des actions pondérées par le nombre de titres de chaque action dans le portefeuille, soit :

$$PTF = \sum Action_i \cdot Nombre \ d'actions_i$$

Et ce pour chaque période de projection et pour chaque scénario.

2.6.6. Projection du portefeuille actions par canton

Le portefeuille des placements de la SCR se décompose en 4 cantons :

- ✓ Cession légale
- ✓ Affaires marocaines
- ✓ Affaires étrangères
- ✓ Libre

Les figures 9, 10, 11 et 12 présentent la médiane et la moyenne de l'évolution du portefeuille actions par canton.

L'allure des évolutions des moyennes et des médianes est la même que l'évolution de la moyenne et de la médiane du MASI.

L'évolution moyenne est haussière pour tous les cantons :

- ⊗ La valeur du portefeuille actions affecté aux opérations de la cession légale passe de ##### milliards de MAD en 2017 à ##### milliards de MAD en 2022, soit une évolution de 2.79%.
- ⊗ La valeur du portefeuille actions affecté aux affaires marocaines passe de ##### millions de MAD en 2017 à ##### millions de MAD en 2022, soit une évolution de 7.11%.
- ⊗ La valeur du portefeuille affecté aux affaires étrangères passe de ##### milles MAD en 2017 à ##### milles MAD en 2022, soit une évolution 6.59%.
- ⊗ La valeur du portefeuille actions libre passe de ##### millions de MAD en 2017 à ##### millions de MAD en 2022, soit une évolution de 16.66%.

Figure 10:Projection de la valeur du marché du portefeuille actions - Cession Légale

Figure 11:Projection de la valeur du marché du portefeuille actions - Affaires étrangères

Figure 12:Projection de la valeur du marché du portefeuille actions - Affaires marocaines

Figure 13:Projection de la valeur du marché du portefeuille actions - libre

2.6.7. Projection du portefeuille global des actions

Les quantiles des projections du portefeuille global des actions sont de forme similaire à ceux des projections du MASI.

Figure 14: Projection de la valeur du marché du portefeuille actions

La valeur moyenne du portefeuille actions augmente de 3.81%, en passant de ##### millions de MAD en 2017 à ##### millions de MAD en 2022. Le positionnement de la médiane et de la moyenne indique la dominance des scénarios où l'évolution est haussière.

La valeur moyenne du portefeuille en 2022 peut varier de +10.07% à la hausse et de -9.42% à la baisse. L'asymétrie de cet intervalle confirme encore plus la hausse de la valeur du portefeuille actions.

3. Modélisation et projection du portefeuille obligataire

Les obligations, comme tout produit de taux, sont complexes à modéliser. En effet, elles dépendent directement de la modélisation des zéro-coupon et donc de la modélisation des courbes de taux. Par la suite, il sera intéressant d'avoir un modèle de taux significativement bon pour avoir une valorisation crédibles des obligations.

3.1. Méthodologie de Projection

Soit $V(t)$ la valeur d'une obligation de duration D , à l'instant t , ayant des flux F_i aux instants $i=0, \dots, D$ et r_i le taux d'intérêt à l'instant i .

$V(t)$ est pratiquement la valeur actuelle des flux futurs espérés de l'obligation, soit :

$$V(t) = \sum_{i \geq t}^D \frac{F_i}{(1 + r_i)^i}$$

Il est donc indispensable d'avoir un modèle adéquat des taux d'intérêts futurs.

Dans le cadre de cette étude, nous n'allons pas chercher à modéliser le taux d'intérêt mais plutôt essayons d'établir une modélisation paramétrique basée sur des données exogènes issues de Bank AlMaghrib.

La banque centrale marocaine, Bank AlMarghrib, publie régulièrement la valeur des taux d'intérêt pour des maturités déterminées. Cependant, nous ne possédons pas cette information pour toutes les échéances et cette information est souvent utile pour calculer les valeurs actuelles nettes (VAN).

Ainsi, pour obtenir la valeur des taux d'intérêt pour d'autres maturités, il est nécessaire d'interpoler la courbe de taux. La question du choix de la méthode d'interpolation se pose alors. Il existe une multitude de techniques plus ou moins complexes aboutissant à une valeur approchée du taux d'intérêt.

3.2. Méthodes d'interpolation de la courbe des taux

Nous nous limiterons dans le cadre de cette étude au modèle d'interpolation de Nelson-Siegel. Néanmoins, nous présentons dans un premier temps le modèle d'interpolation le plus basique : Interpolation linéaire.

3.2.1. Une méthode directe d'interpolation: Interpolation linéaire

Cette méthode est la plus simple. Supposons que l'on connait la valeur de deux taux de maturités m_1 et m_2 et que l'on cherche la valeur du taux de maturité m telle que $m_1 < m < m_2$. La valeur du taux interpolé linéairement $r(t, m)$ entre les deux autres est donnée par l'expression suivante :

$$r(t, m) = \frac{(m_2 - m).r(t, m_2) + (m - m_1).r(t, m_1)}{m_2 - m_1}$$

3.2.2. Les modèles paramétriques de type Nelson-Siegel

3.2.2.1. Présentation de la fonctionnelle des taux de Nelson-Siegel

L'idée sous-jacente dans le modèle de Nelson-Siegel est de trouver une famille de fonctions paramétriques capable de générer des courbes suffisamment flexibles pour suivre les fluctuations usuelles de la courbe des taux zéro-coupon mais également suffisamment lisses. Le modèle recherché doit aussi être d'une complexité réduite en comportant peu de paramètres à estimer.

Nelson et Siegel(1987) ont donc proposé de modéliser les taux zéro-coupon par une fonction non linéaire par rapport aux paramètres d'estimation :

$$r(m) = \beta_0 + \beta_1 \cdot \left(\frac{1 - e^{-\frac{m}{\lambda}}}{\frac{m}{\lambda}} \right) + \beta_2 \cdot \left(\frac{1 - e^{-\frac{m}{\lambda}}}{\frac{m}{\lambda}} - e^{-\frac{m}{\lambda}} \right)$$

Où $\beta_0, \beta_1, \beta_2$ et λ sont quatre paramètres à estimer. Ces paramètres ont tous un rôle bien spécifique et influencent la forme de la courbe. De plus, une particularité du modèle de Nelson-Siegel est que ces paramètres ont une interprétation économique et financière.

L'expression du taux à terme instantané de maturité m et à la date t peut alors être déduite de cette expression. En effet, nous rappelons que le taux zéro-coupon est la valeur moyenne du taux à terme instantané sur l'intervalle de maturité considéré.

$$r(m) = \frac{1}{m} \cdot \int_0^m r(t, s) \cdot ds$$

Où $r(t, s)$ est le taux forward instantané déterminé à la date t et commençant à la date s . soit alors :

$$r(t, m) = \beta_0 + \beta_1 \cdot e^{-\frac{m}{\lambda}} + \beta_2 \cdot \left(\frac{m}{\lambda}\right) \cdot e^{-\frac{m}{\lambda}}$$

Les paramètres s'interprètent en se basant sur l'expression du taux zéro coupon, ainsi :

β_0 Facteur de niveau ; il s'agit du taux long.

β_1 Facteur de rotation ; il s'agit de l'écart entre le taux court et le taux long

β_2 Facteur de courbure ; il s'agit de l'écart entre le taux court et le taux moyen

λ Paramètre d'échelle destiné à rester fixe au cours du temps

Le modèle de Nelson-Siegel possède ainsi trois contraintes

$$\begin{cases} \beta_0 > 0 \\ \beta_0 + \beta_1 > 0 \\ \lambda > 0 \end{cases}$$

3.2.2.2. Avantages de ces modèles

Le plus gros avantage de ce modèle est qu'il est interprétable économiquement et financièrement, son application a réellement un sens. Les paramètres ont de plus un rôle bien spécifique sur la forme de la courbe des taux.

Nous exploitons la courbe des taux publié par BANK ALMAGHRIB, pour estimer les paramètres du modèle de NELSON SIEGEL de la courbe des taux.

L'ajustement du modèle est fait par la méthode des moindres carrés ordinaires (MCO) en minimisant la somme quadratique des erreurs des mesures aux prédictions. Le résultat de l'estimation des paramètres du modèle est donné dans le tableau ci-dessous :

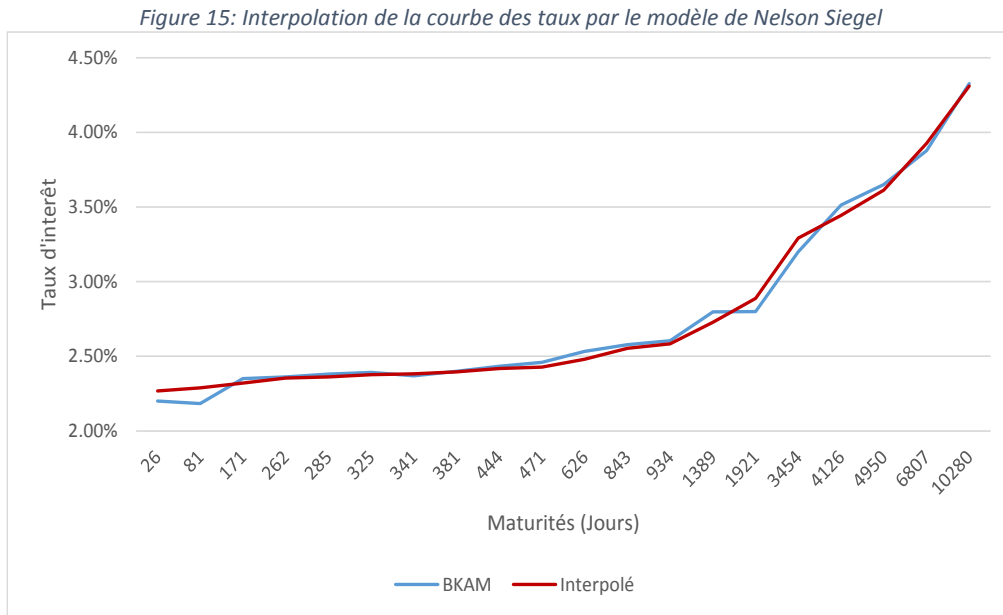
Tableau 16: Estimation des paramètres du modèle Nelson Siegel

β_0	0.02250683789	β_1	0.00008312189
β_2	0.06202289196	λ	46.25685664860

Le modèle s'écrit alors :

$$r(t, m) = 0.02250683789 + 0.00008312189 \cdot e^{-\frac{m}{46.25685664860}} + 0.06202289196 \cdot \left(\frac{m}{46.25685664860}\right) \cdot e^{-\frac{m}{46.25685664860}}$$

Le coefficient de détermination du modèle est de **85.267%**. Le modèle explique bien les données. Nous pouvons ainsi exploiter ce modèle pour l'estimation de la valeur des obligations dans le portefeuille.



La figure 15 montre l'évolution de la courbe des taux de Bank Al Maghrib en comparaison avec celle interpolée par nous-même. Nous constatons que les deux courbes suivent la même allure et possèdent les mêmes fluctuations. De plus, la courbe interpolée est lisse comme prévu par le modèle.

3.3. Projection du portefeuille des obligations

Après avoir estimé les paramètres du modèle de Nelson-Siegel, nous exploitons les valeurs des taux d'intérêt pour l'actualisation des flux futurs du portefeuille obligataire. Le principe du calcul de la valeur du marché du portefeuille pour chaque année est d'actualiser les flux futur à partir de l'année de projection sans oublier de calculer le montant des nominaux remboursés l'année dernière puisqu'on ne s'intéresse pas à leurs réinvestissement.

Le tableau suivant résume les résultats des projections par canton, ainsi que le montant des nominaux remboursés à la fin de chaque année.

Tableau 17: projection de la valeur du marché du portefeuille obligataire(en millions de MAD)

On ne peut pourtant pas juger de l'évolution du portefeuille obligataire sans recours à une hypothèse de réinvestissement adaptée à la vision d'investissement de la société.

Nous remarquons que la duration du portefeuille obligataire est courte vu qu'une grande partie des nominaux est remboursée au bout de la troisième année de projection.

4. Modélisation et projection du portefeuille OPCVM

4.1. Les organismes de placement collectif en valeurs mobilières

Un organisme de placements collectif en valeurs mobilières (OPCVM) est un organisme ayant l'objectif de gérer un portefeuille investi dans des fonds de valeurs mobilières ou autres instruments financiers pour le compte de ses clients.

Les OPCVM sont investis, selon leurs spécificités, sur différents marchés dans le monde et sur différents produits. Ainsi on distingue des OPCVM actions, monétaires, obligataires et diversifiés. Cette classification est faite sur la base de la nature des fonds de valeurs mobilière géré par l'organisme.

Nous distinguons aussi deux types d'OPCVM. Les plus courants sont les suivants :

La SICAV

La SICAV (Société d'Investissement à Capital Variable) : Cette société gère au profit de ses clients un portefeuille de titres. Chaque client possède des actions de la SICAV qui sont cotées sur un marché. La valeur de la SICAV est donc fluctuante. Cependant elle ne varie pas en fonction de l'offre et de la demande comme la plupart des actions, mais en fonction de la performance du portefeuille détenu par la SICAV. Les investisseurs qui placent leur argent dans une SICAV peuvent à tout moment se retirer en vendant leurs actions de la SICAV.

Le FCP

Le FCP (Fond Commun de Placement) : Ce n'est pas une société comme l'est une SICAV, mais une copropriété de valeurs mobilières. Pour faire partie d'un FCP il faut acheter des parts de ce FCP. L'organisme de gestion chargé de faire vivre ce FCP va donc émettre des nouvelles parts et lorsqu'un souscripteur veut se retirer, il va racheter ses parts. La valeur d'un FCP est cotée en fonction du cours des valeurs mobilières qui le composent.

4.2. Méthodologie de projection

Les valeurs de marché des différents OPCVM du portefeuille de la SCR sont projetées via leurs performances moyennes historiques vu l'indisponibilité d'indice par rapport auquel on pourrait mesurer leurs sensibilités. Cette approche repose sur l'hypothèse suivante : la

performance des OPCVM durant les 5 dernières années se reproduirait sur les 5 prochaines années.

L'association des sociétés de gestion des fonds d'investissement marocains (ASFIM) publie quotidiennement un tableau des performances des OPCVM indiquant l'évolution historique de chaque OPCVM sur les périodes suivantes : 1 jour, 1 semaine, 1 mois, 1 trimestre, 1 semestre, 1 an, 2 ans, 3 ans et 5 ans. Nous exploitons les performances annuelles comme base de projection. Ne disposant pas de taux de performance sur 4 ans, nous procédons à l'estimation de l'évolution sur 4 ans par le principe d'équivalence des taux comme expliqué ci-dessous :

$$r_4 = (1 + r_5)^{4/5} - 1$$

Où : r_4 et r_5 sont respectivement le taux d'évolution sur 4 et 5 ans.

Disposant de tous les outils nécessaire pour projeter le portefeuille des placements en OPCVM, nous effectuons une projection par canton. Les résultats des projections sont détaillés dans le tableau suivant :

Tableau 18: Projection de la valeur du marché des placements en OPCVM par canton(en millions de MAD)

La valeur du portefeuille OPCVM augmente significativement en passant de 4.8 milliards MAD au 31/12/2017 à 6.4 milliards MAD au 31/12/2022, soit une évolution de 32.78%.

Tableau 19: Rendement des placements en OPCVM projetés 2018-2022

Le rendement moyen annualisé du portefeuille OPCVM, selon ces projections, est de 5.23%.

Figure 16:Projection de la valeur du marché des placements en OPCVM 2018-2022

5. Synthèse

Le portefeuille des placements de la SCR a été décomposé en 3 portefeuilles selon les principales classes des actifs le constituant : les actions, les obligations et les OPCVM, qui représentent environ 94% du portefeuille global des placements.

Les méthodologies développées pour la projection de la valeur du marché du portefeuille de chaque classe d'actifs diffèrent selon la nature de la classe des actifs et la disponibilité des données.

Le traitement des actions est basé sur le modèle MEDAF et l'ajustement des rendements de l'indice du marché boursier marocains MASI par une loi paramétrique. Cette approche stochastique nous permet d'avoir une idée sur l'évolution moyenne du portefeuille et de borner cette évolution dans le temps par des quantiles.

Les résultats de notre modélisation sont plutôt optimistes en moyenne et prévoient une augmentation de 3.81% dans la valeur marché du portefeuille actions de la compagnie à l'horizon 2018.

Quant aux OPCVM, notre approche se base sur les performances historiques des OPCVM publié par l'association des sociétés de gestion et fonds d'investissement marocains (ASFIM), en supposant que l'évolution du marché des OPCVM se reproduira durant la période de projection. L'évolution annuelle moyenne qui en résulte s'élève à 5.23%.

L'approche retenue pour la projection de la valeur du marché du portefeuille obligataire est fondé sur la courbe des taux publiée par Bank AlMaghrib qu'on interpole par le modèle de Nelson-Siegel.

Pour bien interpréter les résultats de la projection du portefeuille obligataire, il est indispensable d'avoir une idée sur la stratégie de réinvestissement des nominaux remboursés calculé ci-dessus.

Chapitre 2 : Provisionnement non-vie adapté aux spécialités de la réassurance non-vie

Afin d'honorer leurs engagements, les compagnies d'assurance sont tenues d'établir et de maintenir certaines provisions techniques. Ces provisions sont essentielles pour assurer la stabilité de la compagnie.

L'évaluation des provisions est l'une des tâches actuarielles de base. Partant des données observées de développement des sinistres, l'actuaire doit estimer la valeur ultime de la charge (ou des règlements) des sinistres pour chaque branche d'activité ainsi que pour l'ensemble du portefeuille de la compagnie.

Ainsi, il est nécessaire de se doter d'une méthode appropriée d'évaluation des provisions : leur surévaluation ou sous-évaluation impact l'activité de la compagnie. Les provisions sous-évaluées limitent la capacité de la compagnie d'honorer ses engagements, alors que la surévaluation des provisions restreint l'activité d'exploitation de la compagnie.

De plus, l'activité de l'assurance (ou de réassurance) est réglementée. Les autorités de contrôle imposent des règles bien précises d'évaluation des provisions.

L'objet de cette partie est de présenter un ensemble de méthodes qui servent à évaluer les provisions pour sinistres à payer pour une société de réassurance non-vie. Nous présentons tout d'abord la méthode poursuivie par la SCR pour l'évaluation des provisions pour sinistres. Ensuite nous étudions les caractéristiques de quelques méthodes déterministes et stochastiques adaptées à l'activité de la réassurance non-vie.

Notre objectif est de déterminer une estimation adéquate des provisions pour sinistres et d'avoir une idée sur l'intervalle de variabilité de cette estimation.

1. Présentation des données

1.1. Le triangle de liquidation

Les méthodes de calcul de provisions en réassurance non vie se basent sur les données historiques. Les données sont agrégées et regroupées dans un triangle « de liquidation ». Ce triangle est composé des montants réglés par la compagnie de réassurance pour honorer ses engagements vis-à-vis de ses clients. Ces montants sont rangés par année de souscription (en lignes) et par année de développement (en colonnes).

L'année de souscription correspond à l'année à partir de laquelle le contrat de réassurance (traité ou facultative, dans la suite de cette partie, l'appellation « contrat »

désigne un traité ou une facultative) est souscrit et l'année de développement correspond à l'année de règlement du sinistre.

De façon générale, nous considérons un triangle de liquidation composé de n années de souscription. Nous notons :

- $i \in [1, n]$ la i – ième année de souscription
- $j \in [1, n]$ la j – ième année de développement
- $C_{i,j}$ représente le montant cumulé jusqu'à la j -ième année de développement, des règlements de l'année de souscription i .

Le triangle des règlements est présenté comme suit :

	1	2	...	j	...	n
1	$C_{1,1}$	$C_{1,2}$		$C_{1,j}$		$C_{1,n}$
2	$C_{2,1}$	$C_{2,2}$				
...						
i	$C_{i,1}$					
...						
N	$C_{n,1}$					

$C_{2,2}$ représente les règlements pour les contrats souscrits la seconde année et réglés les deux premières années de développement.

Certaines approches d'évaluation des provisions pour sinistres peuvent reposer sur d'autres données historiques : montants des charges, nombres de sinistres ou encore les couts moyens des sinistres. Le triangle est de la même forme que celle présentée ci-dessus.

1.2. Les données de la SCR

Le portefeuille de réassurance sur lequel porte l'étude de ce mémoire comprend diverses branches de risques non-vie (responsabilité civile, Automobile, Incendie, Engineering etc.) et de nombreuses années de souscription allant de 1961 à 2017.

Les opérations de réassurance de la SCR sont classifiées selon leurs natures et leurs régions. Nous distinguons cinq types d'opérations:

- Cession Légale ;
- Traités Marocains ;
- Traités Étrangers ;
- Facultatives Marocaines ;

➤ Facultatifs Étrangères ;

Les méthodes de provisionnement présentées dans la suite de ce mémoire sont à chaque fois illustrées par des applications numériques sur le triangle des règlements de la branche : ENGINEERING des Traités étrangers. Il s'agit des triangles des cumuls des règlements par années de souscription et de développement. Les années de souscription s'étalent de 2000 à 2016, et les montants sont exprimés en milliers de MAD. Le triangle sélectionné est présenté en annexe.

2. Méthodes déterministes

Avant de se pencher sur des modèles qui prennent en compte les effets aléatoires de la sinistralité, il convient de commencer par une approche déterministe, qui puisse nous permettre de mieux appréhender les données et le déroulement temporel des remboursements, ainsi que de suivre l'évolution de la charge de sinistre de la compagnie.

2.1. Méthode d'évaluation des provisions pour sinistres par la SCR

Nous présentons en premier la méthode que suit la Société Centrale de Réassurance pour l'évaluation des provisions pour sinistres à payer. Cette méthode repose sur les données historiques des primes et règlements des années antérieures.

Faute d'informations sur les provisions au 31/12/N, la SCR procède, sous des hypothèses de calcul, à l'estimation des PSAP en utilisant la formule citée au-dessous.

La formule de calcul des provisions est, à titre d'exemple pour l'année 2015 :

$PSAP_{Exc\ 2016}$

$$= PSAP_{Exc\ 2015\ et\ anterieurs}^{Déclarées} + \frac{S}{P} * Primes_{Exs\ 2016}^{acquises} + IBNR_{Exc\ 2015\ et\ anterieurs}$$

– Règlements au cours de l'année 2016 au titre des années de souscription 2015 et antérieures

– Règlements au cours de l'année 2016 au titre de l'année de souscription 2016

Avec :

- **Exc** : Exercice comptable ;
- **Exs** : Exercice de souscription ;
- $\frac{S}{P} = \text{moyenne} \left(\frac{\text{Charge de sinistre}}{\text{Primes émises estimée à l'ultime}} \right)$
- $Primes_{Exs\ 2016}^{acquises} = \text{Primes émises estimées Exs2016} - \text{PPNA estimées 2016}$.

Les hypothèses de calcul concernent principalement :

- ✓ Le calcul du Loss Ratio S/P est basé sur les données des triangles de charge de sinistres et de primes. Nous retenons la moyenne des Loss Ratio qui ne représentent pas un caractère fluctuant autour de la moyenne de -20% et + 30%.

- ✓ Nous retenons la valeur des provisions pour sinistres à payer déclarées par la cédante au 31/12/N-1 pour les années de souscription N-1 et antérieures.
- ✓ Le recul des triangles est choisi en fonction de la nature de liquidation des sinistres de la branche, long terme ou moyen terme.

2.2. Méthode de Chain Ladder

La méthode de Chain Ladder est la plus connue des méthodes de provisionnement. Elle est basée sur l'idée suivante : « l'évolution des règlements cumulés d'une année de développement à une autre est similaire pour toutes les années de souscription ».

Nous caractérisons cette évolution par un facteur multiplicatif « de développement » propre à chaque année de développement. Nous appliquons ensuite ces facteurs de développement aux années d'origine les plus récentes pour d'estimer leur charge de sinistres future.

La méthode de Chain Ladder est une méthode de référence dans l'évaluation des provisions du fait qu'elle est simple et intuitive. Elle est souvent utilisée pour avoir une première idée sur l'estimation des provisions.

2.2.1. Hypothèses du modèle

Le modèle de Chain Ladder repose sur les hypothèses suivantes :

- ✓ Les montants cumulés sont indépendants par année de souscription, soit :
 $\forall i \neq j, (C_{i,1}, \dots, C_{i,n}) \text{ et } (C_{j,1}, \dots, C_{j,n})$ sont indépendants
- ✓ Ils existent des facteurs λ_j pour $j = 0, 1, \dots, n - 1$ strictement positifs tels que :

$$\text{Pour } i, j = 0, 1, \dots, n - 1 : E(C_{i,j+1} \setminus C_{i,1}, \dots, C_{i,k}) = \lambda_j C_{i,j}$$

Ainsi, la méthode repose sur l'indépendance des facteurs de développement d'une période à une autre, de l'année de souscription. En d'autres termes :

$$\frac{C_{1,j}}{C_{1,j-1}} = \frac{C_{2,j}}{C_{2,j-1}} = \dots = \frac{C_{i,j}}{C_{i,j-1}} = \dots = \frac{C_{N-1,j}}{C_{N-1,j-1}} = f_j$$

En pratique, cette hypothèse n'est jamais exactement vérifiée, il paraît donc judicieux, pour aboutir à la meilleure approximation possible, de choisir comme estimateur de l'unique facteur de développement d'une période à une autre le facteur commun à toutes les années de souscription :

$$f_j = \frac{\sum_{i=1}^{n-j+1} C_{i,j}}{\sum_{i=1}^{n-j+1} C_{i,j-1}}$$

Des ajustements opérationnels peuvent se justifier pour tenir compte d'informations exogènes, une modification des règles d'indemnisation par exemple peut avoir un impact sur la cadence des paiements futurs. L'observation de pics, de points « aberrants » ou d'irrégularités dans les données remontant des systèmes d'informations peut également amener à l'exclusion du calcul des facteurs de développement.

Un critère d'exclusion pourrait être de se fixer un seuil (+/- X % autour de la moyenne) au-delà duquel les ratios sont exclus. Cependant, il est plus fiable de se baser sur une approche plus subjective, qui consiste à exclure les coefficients qui nous semblent inappropriés relativement aux informations connues sur la branche, sur l'année de souscription concernée ou sur les observations historiques. Les critères objectifs ne sont en effet pas toujours représentatifs de la réalité, l'approche subjective permet notamment de pouvoir appliquer une sélection plus prudente. De plus, le seuil du critère objectif à choisir n'est pas évident.

Une fois les facteurs de développement estimés, il convient de remplir la partie basse du triangle de liquidation. Les montants cumulés sont estimés par :

$$\hat{C}_{i,j} = \left(\prod_{k=n-i+2}^j f_k \right) C_{i,n-i+1}$$

Le triangle de liquidation complété, le calcul de la provision totale se fait comme suit:

$$\hat{R} = \sum \hat{R}_i$$

Avec $\hat{R}_i = \hat{C}_{i,n} - C_{i,n-i+1}, \forall i = 1, \dots, n$

Avant d'appliquer la méthode de Chain Ladder, il est nécessaire de vérifier l'adéquation du triangle utilisé aux hypothèses de la méthode.

2.2.2. Test des hypothèses

Nous allons présenter les méthodes utilisées pour la vérification des hypothèses sous-jacentes du modèle de Chain Ladder. La qualité des résultats de ce modèle dépend du fait que les données du triangle respectent ces hypothèses.

2.2.2.1. Indépendance des années de souscription

Dans un premier temps, nous allons calculer les facteurs de développement individuels observés pour toutes les années de souscription. Nous allons tester l'existence d'un effet calendaire par la suite :

Nous notons S_j le nombre de facteurs supérieurs à la médiane de chaque année de développement et I_j le nombre de facteurs inférieurs à la médiane. On note aussi $Z_j = \min(S_j; I_j)$

Comme S_j et I_j suivent des lois binomiales, en notant $t = I_j + S_j$ et m la partie entière de $\frac{t-1}{2}$, nous avons :

$$E(Z_j) = \frac{t}{2} - C_{t-1}^m \cdot \frac{t}{2^t}$$

$$V(Z_j) = \frac{t(t-1)}{4} - C_{t-1}^m \cdot \frac{t(t-1)}{2^t} + E(Z_j) - (E(Z_j))^2$$

Nous testons plutôt $Z = Z_1 + \dots + Z_{n-1}$, S'il n'y a pas d'effet calendaire, les différents Z_j ne sont pas corrélés et donc :

$$E(Z) = \sum E(Z_j) \text{ Et } V(Z) = \sum V(Z_j)$$

En supposant que Z suive approximativement une loi Normale, nous rejettons donc l'existence d'effet calendaire, au seuil 5%, si :

$$E(Z) - N^{-1}(97.5\%).V(Z) \leq Z \leq E(Z) + N^{-1}(97.5\%).V(Z)$$

2.2.2.2. Existence des facteurs de développement

Pour vérifier cette hypothèse, nous allons vérifier la linéarité de $C_{i,j+1}$ par rapport à $C_{i,j}$ pour chaque année de développement. L'hypothèse sera acceptée si ces points sont approximativement alignés sur une droite passant par l'origine. Nous effectuons alors une régression linéaire des montants de l'année de développement $j+1$ en fonction de l'année j . Si une droite (courbe de tendance) passant par l'origine du repère est obtenue, et que le coefficient de détermination est proche de 1 alors il y a une bonne adéquation au modèle de Chain Ladder.

2.2.2.3. Stabilité des règlements

Le d-triangle est constitué des facteurs de développement partiels (soit $f_{i,j} = \frac{C_{i,j}}{C_{i,j-1}}$).

Pour tester la stabilité des règlements pour chaque année de développement, il suffit de vérifier que les coefficients de passage partiels ont une variabilité limitée et donc les montants de règlement sont stables. Ce point doit être particulièrement vérifié pour les premières colonnes. Nous allons tester cette hypothèse graphiquement en observons le comportement des facteurs de développement partiels autour de leur moyenne.

2.2.3. Illustration de la méthode

Nous appliquons la méthode de Chain Ladder sur le triangle des règlements cumulés de la branche Engineering (Tableau 20). Nous testons tout d'abord les hypothèses du modèle avant d'estimer le triangle inférieur.

Tableau 20: Tableau des règlements cumulés ENGINEERING Traités étrangers

En milliers de MAD	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
2000	251.17	729.89	1 039.24	1 349.03	1 618.84	1 724.11	1 789.78	1 869.72	1 945.59	2 004.44	2 021.54	2 041.41	2 038.29	2 038.31	2 038.31	2 040.31	2 041.31	2 041.31
2001	141.22	408.10	817.56	1 089.52	1 319.18	1 503.13	1 517.16	1 545.56	1 568.49	1 568.63	1 583.13	1 585.85	1 586.30	1 587.29	1 612.24	1 612.24	1 612.24	
2002	119.78	355.29	680.49	830.09	922.43	966.45	987.13	988.63	989.04	990.65	995.19	999.72	1 001.35	1 001.36	1 001.40	1 001.40		
2003	307.19	416.65	536.70	770.93	880.43	1 277.01	1 341.03	1 886.22	1 889.74	1 904.69	1 914.03	1 914.27	1 914.32	1 914.44	1 914.44			
2004	329.85	749.95	1 116.57	1 187.65	1 825.79	1 913.95	1 970.66	1 859.79	1 867.07	1 874.76	1 875.25	1 875.63	1 882.64	1 943.83				
2005	986.30	1 607.22	2 214.60	2 878.56	3 659.08	3 945.33	3 851.66	3 929.16	3 932.81	3 962.88	3 913.89	3 935.26	3 935.27					
2006	202.67	2 501.75	4 375.19	5 981.06	9 268.33	9 679.09	10 212.30	10 380.39	10 728.60	10 759.24	10 663.86	10 665.36						
2007	772.85	4 005.52	6 398.49	7 942.66	13 293.07	15 539.40	16 208.00	16 446.01	17 014.28	17 068.97	17 768.60							
2008	890.09	3 842.68	6 846.44	7 644.21	11 291.63	12 714.58	13 296.32	13 866.13	14 216.04	14 230.33								
2009	1 882.96	6 270.36	9 195.42	11 001.16	15 825.28	18 342.32	19 746.41	20 358.39	20 396.39									
2010	1 556.99	6 124.99	10 170.67	10 502.97	15 262.53	17 217.18	18 676.08	18 811.38										
2011	1 863.41	6 461.10	9 396.44	11 003.34	18 221.94	21 402.58	22 099.87											
2012	4 276.44	13 718.46	18 460.65	19 145.04	22 669.50	22 914.68												
2013	2 138.03	10 770.78	13 407.68	14 429.72	14 956.46													
2014	1 975.79	8 635.80	10 577.29	10 769.60														
2015	2 948.93	8 924.77	9 876.40															
2016	3 021.43	5 053.09																
2017	11.31																	

2.2.3.1. Validation du modèle

L'hypothèse d'indépendance des années de souscription est testée, comme décrit ci-dessus, en calculant les valeurs de Z, son espérance et sa variance :

$$Z = 77 ; E(Z) = 54.19 ; V(Z) = 14.29$$

Au seuil de 5%, $N^{-1}(97.5\%) = 1.96$

Donc $E(Z) - N^{-1}(97.5\%).V(Z) = 26.17$ et $E(Z) + N^{-1}(97.5\%).V(Z) = 82.21$

Z étant compris entre ces valeurs, On accepte l'hypothèse de l'indépendance des années de souscription.

Tableau 21: Test d'indépendance des années de souscription

Z	56
E(Z)	47.7659
V(Z)	12.7642
Seuil	5.0%
Borne supérieure	22.7485
Borne inférieure	72.7832

Si l'hypothèse selon laquelle il existe une relation linéaire entre les paiements cumulés d'une année de déroulement à l'autre est vérifiée, les points $(C_i, j, C_i, j+1)$ pour $i=0, \dots, i-j$ doivent être alignés sur une droite passant par l'origine.

Afin de vérifier cette hypothèse, nous avons tracé le C-C-plot représentant l'ensemble de ces points pour chaque année de développement (Figure 22 annexe 1). On donne ci-dessus les C-C-plot pour la première et deuxième année de développement.

Figure 17: C-C plot pour l'année de développement $j=1$

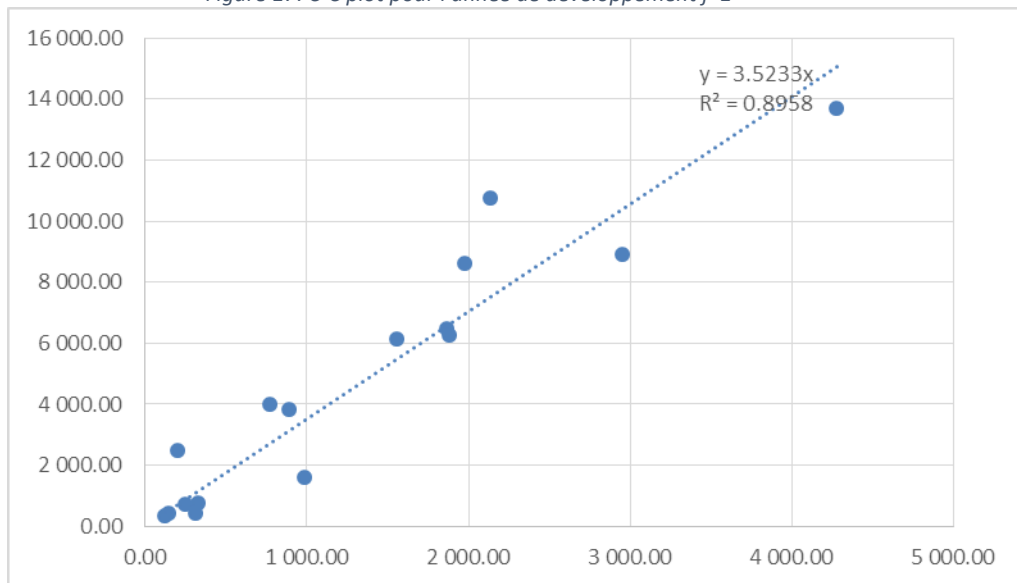
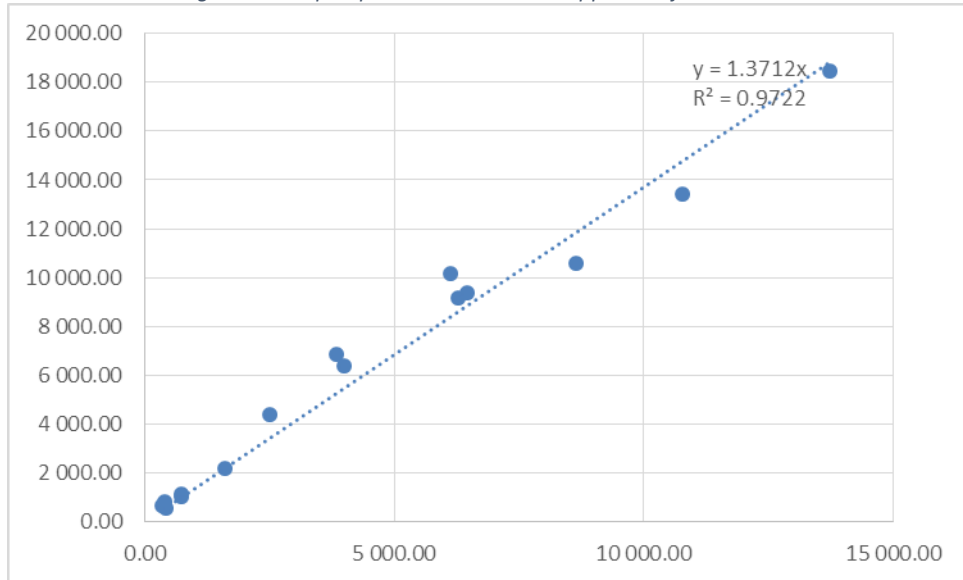


Figure 18:C-C plot pour l'année de développement j=2



Au regard de ces figures, l'hypothèse paraît raisonnable car les points semblent alignés sur des droites issues de l'origine pour chaque année de développement à partir de la deuxième année, pour la première année nous remarquons que les points sont un peu plus dispersés que pour les autres années, le coefficient de détermination est de 0.8958.

La troisième hypothèse à vérifier est que le coefficient de linéarité est identique sur les années de souscription : $f_{i, k} = f_k$ pour $i = 0, \dots, i-k-1$, et $k = 0, \dots, j-1$. Pour chaque année de développement k , il s'agit de calculer les $(f_{i, k})_{i=0, \dots, i-k-1}$ et les comparer à leur moyenne $f_{\bullet k}$ (s'ils sont identiques, alors ils valent la moyenne).

Le calcul préalable des coefficients nous donne, dans notre exemple, les résultats présentés dans le Tableau 36 dans l'annexe 1.

Nous entendons par moyenne pondérée le facteur de développement calculé par la formule :

$$f_j = \frac{\sum_{i=1}^{n-j+1} C_{i,j}}{\sum_{i=1}^{n-j+1} C_{i,j-1}}$$

Le deuxième facteur, par exemple, s'interprète comme ceci : le passage d'un encours cumulé de l'année de développement 2, à celui de l'année de développement 3, se fait par un facteur de développement de 1.430.

Pour vérifier l'hypothèse, nous comparons graphiquement les facteurs de développement partiels à leur moyenne, les figures Figure 19 et Figure 20 en présente l'exemple

de cette comparaison pour les années de développement 1 et 2. Les graphiques des autres années de développement sont présentés dans la Figure 23 dans l'annexe 1.

Figure 19: Comparaison des facteurs partiels à la moyenne pour $j=1$

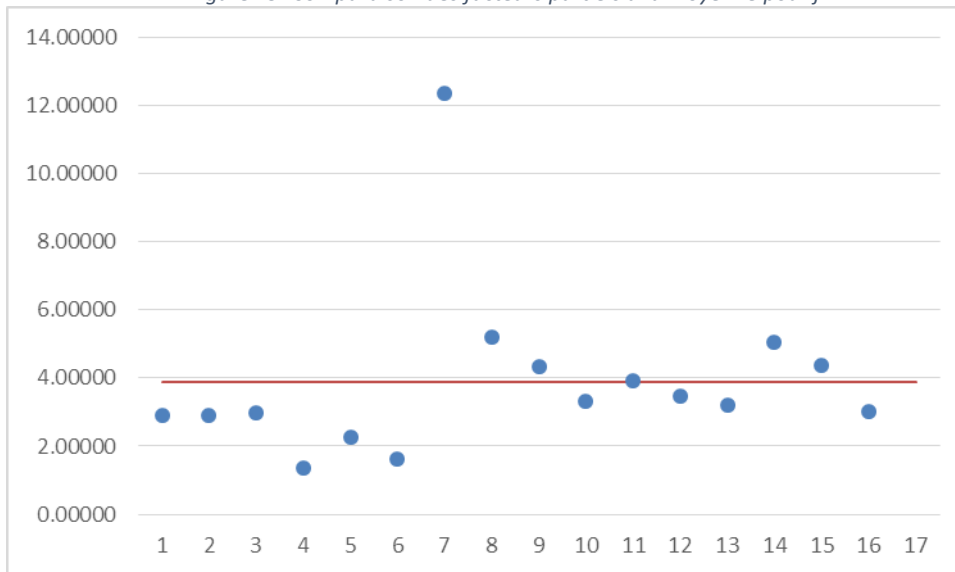
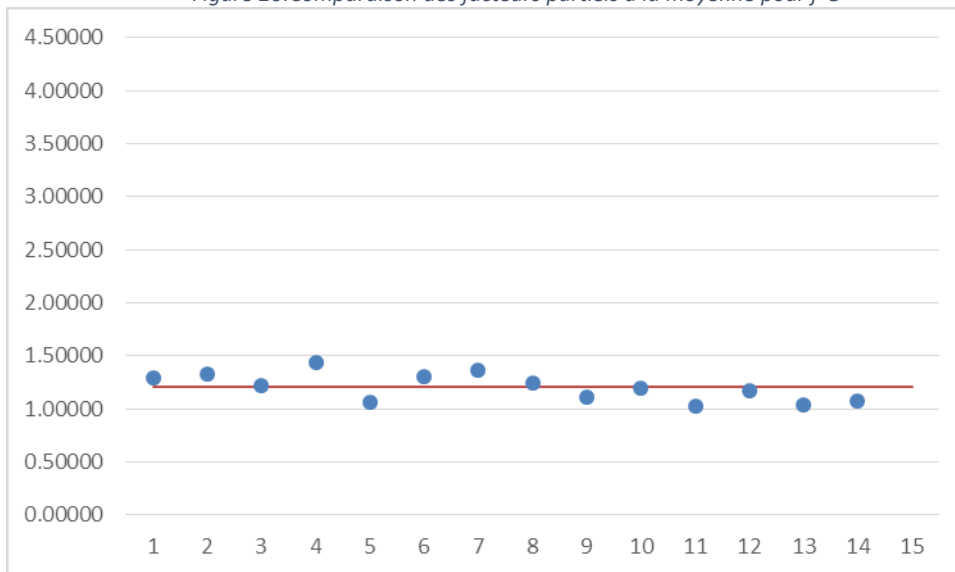


Figure 20: Comparaison des facteurs partiels à la moyenne pour $j=3$



Pour la première année de développement (voir Figure 19), l'hypothèse d'égalité des coefficients sur les années de souscription n'est pas vérifiée, les coefficients par année sont plutôt volatiles autour de la moyenne.

En revanche, elle paraît plus vraisemblable à partir de la 2^{ème} années de développement. À titre d'exemple, la Figure 20 montre que les facteurs sont relativement stables pour la troisième année de développement. Il en est de même pour les autres années : les facteurs de Chain-Ladder sont proches des moyennes des facteurs évalués.

Nous considérons donc que les hypothèses du modèle de Chain- Ladder sont ici vérifiées, et nous pouvons appliquer le modèle.

2.2.4. Analyse des résultats

Le Tableau 23 présente les résultats détaillés de l'application de la méthode de Chain Ladder. Le triangle inférieur est estimé en multipliant les derniers règlements cumulés par les facteurs de développement après que nous avons vérifié la compatibilité de la méthode au triangle étudié. Nous synthétisons les résultats dans le tableau ci-dessous.

Tableau 22: Synthèse des résultats de l'application de la méthode de Chain Ladder

	Règlements actuels	Charge ultime	Provision
2000	2 041.31	2 041.31	0.00
2001	1 612.24	1 613.91	1.67
2002	1 001.40	1 007.81	6.42
2003	1 914.44	1 926.99	12.55
2004	1 882.64	1 889.39	6.75
2005	3 935.26	3 958.35	23.09
2006	10 663.86	10 835.02	171.17
2007	17 068.97	17 219.35	150.38
2008	14 216.04	14 400.25	184.21
2009	20 358.39	21 145.93	787.54
2010	18 676.08	19 475.14	799.06
2011	21 402.58	23 444.82	2 042.24
2012	22 669.50	35 152.27	12 482.77
2013	14 429.72	27 845.68	13 415.96
2014	10 577.29	25 646.72	15 069.43
2015	8 924.77	32 039.65	23 114.87
2016	3 021.43	32 827.28	29 805.85
Total	174 395.91	272 469.87	98 073.96

En milliers de MAD

En supposant que le dernier règlement est effectué dans la 17ième année de développement, la provision est calculé en soustrayant le montant des règlements actuels (diagonale du triangle d'entrée) du montant des règlements estimés à l'ultime, et ce pour chaque année de souscription.

La provision totale s'établit en sommant les provisions de chaque année de souscription, et s'élève à 98 073.96 mille MAD pour notre cas pratique.

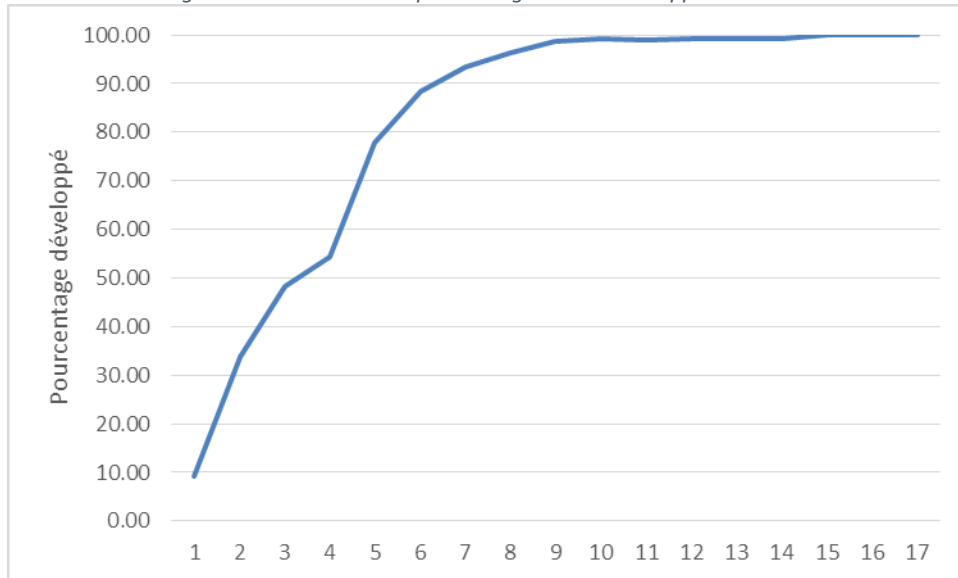
On constate que la provision pour les années de souscription récentes est remarquablement importante par rapport aux premières années : la plupart des paiements se font durant les premières années de développement.

Tableau 23: Triangle complété

En milliers de MAD	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
2000	251.17	729.89	1 039.24	1 349.03	1 618.84	1 724.11	1 789.78	1 869.72	1 945.59	2 004.44	2 021.54	2 041.41	2 038.29	2 038.31	2 038.31	2 040.31	2 041.31	2 041.31
2001	141.22	408.10	817.56	1 089.52	1 319.18	1 503.13	1 517.16	1 545.56	1 568.49	1 568.63	1 583.13	1 585.85	1 586.30	1 587.29	1 612.24	1 612.24	1 612.68	1 612.68
2002	119.78	355.29	680.49	830.09	922.43	966.45	987.13	988.63	989.04	990.65	995.19	999.72	1 001.35	1 001.36	1 001.40	1 001.83	1 002.10	1 002.10
2003	307.19	416.65	536.70	770.93	880.43	1 277.01	1 341.03	1 886.22	1 889.74	1 904.69	1 914.03	1 914.27	1 914.32	1 914.44	1 921.75	1 922.58	1 923.10	1 923.10
2004	329.85	749.95	1 116.57	1 187.65	1 825.79	1 913.95	1 970.66	1 859.79	1 867.07	1 874.76	1 875.25	1 875.63	1 882.64	1 896.57	1 903.82	1 904.63	1 905.15	1 905.15
2005	986.30	1 607.22	2 214.60	2 878.56	3 659.08	3 945.33	3 851.66	3 929.16	3 932.81	3 962.88	3 913.89	3 935.26	3 937.18	3 966.32	3 981.47	3 983.18	3 984.27	3 984.27
2006	202.67	2 501.75	4 375.19	5 981.06	9 268.33	9 679.09	10 212.30	10 380.39	10 728.60	10 759.24	10 663.86	10 687.35	10 692.58	10 771.71	10 812.86	10 817.50	10 820.45	10 820.45
2007	772.85	4 005.52	6 398.49	7 942.66	13 293.07	15 539.40	16 208.00	16 446.01	17 014.28	17 068.97	17 324.67	17 362.84	17 371.33	17 499.89	17 566.74	17 574.28	17 579.08	17 579.08
2008	890.09	3 842.68	6 846.44	7 644.21	11 291.63	12 714.58	13 296.32	13 866.13	14 216.04	14 271.94	14 485.74	14 517.65	14 524.75	14 632.24	14 688.14	14 694.45	14 698.45	14 698.45
2009	1 882.96	6 270.36	9 195.42	11 001.16	15 825.28	18 342.32	19 746.41	20 358.39	20 753.15	20 834.76	21 146.87	21 193.46	21 203.82	21 360.75	21 442.34	21 451.55	21 457.40	21 457.40
2010	1 556.99	6 124.99	10 170.67	10 502.97	15 262.53	17 217.18	18 676.08	19 164.85	19 536.47	19 613.30	19 907.11	19 950.97	19 960.72	20 108.45	20 185.26	20 193.93	20 199.44	20 199.44
2011	1 863.41	6 461.10	9 396.44	11 003.34	18 221.94	21 402.58	22 504.95	23 093.93	23 541.74	23 634.31	23 988.37	24 041.21	24 052.97	24 230.98	24 323.54	24 333.98	24 340.62	24 340.62
2012	4 276.44	13 718.46	18 460.65	19 145.04	22 669.50	25 224.75	26 523.99	27 218.15	27 745.93	27 855.03	28 272.32	28 334.60	28 348.45	28 558.26	28 667.35	28 679.66	28 687.48	28 687.48
2013	2 138.03	10 770.78	13 407.68	14 429.72	19 742.93	21 968.30	23 099.81	23 704.36	24 164.01	24 259.02	24 622.43	24 676.68	24 688.74	24 871.46	24 966.47	24 977.19	24 984.00	24 984.00
2014	1 975.79	8 635.80	10 577.29	11 831.46	16 187.96	18 012.63	18 940.40	19 436.08	19 812.97	19 890.88	20 188.85	20 233.33	20 243.22	20 393.04	20 470.93	20 479.72	20 485.31	20 485.31
2015	2 948.93	8 924.77	12 421.09	13 893.89	19 009.80	21 152.54	22 242.03	22 824.13	23 266.71	23 358.20	23 708.11	23 760.34	23 771.96	23 947.89	24 039.37	24 049.69	24 056.25	24 056.25
2016	3 021.43	10 287.54	14 317.72	16 015.41	21 912.49	24 382.41	25 638.26	26 309.24	26 819.40	26 924.86	27 328.20	27 388.41	27 401.80	27 604.60	27 710.04	27 721.94	27 729.50	27 729.50
2017	11.31	38.52	53.61	59.97	82.05	91.30	96.00	98.51	100.43	100.82	102.33	102.56	102.61	103.37	103.76	103.80	103.83	103.83
Facteurs de développements	3.4049	1.3918	1.1186	1.3682	1.1127	1.0515	1.0262	1.0194	1.0039	1.0150	1.0022	1.0005	1.0074	1.0038	1.0004	1.0003	1.0000	1.0000
Facteurs de dev. à l'ultime	9.1776	2.6954	1.9367	1.7314	1.2655	1.1373	1.0816	1.0540	1.0339	1.0299	1.0147	1.0125	1.0120	1.0045	1.0007	1.0003	1.0000	1.0000
Pourcentage développé(en %)	10.90	37.10	51.63	57.76	79.02	87.93	92.46	94.88	96.72	97.10	98.55	98.77	98.82	99.55	99.93	99.97	100.00	100.00

La Figure 21 montre qu'au bout de 7 années de développement, nous réglons environ 93.38% du montant ultime des règlements. Ceci conforme le constat qui précède.

Figure 21: Évolution de la part de règlements développée



Notons que cette modélisation est faite sous l'hypothèse forte que les derniers règlements se font pendant la dernière année de développement du triangle. Pour pallier à cette restriction, il est possible d'introduire un Tail factor. Le traitement du problème de la liquidation incomplète est abordé ultérieurement dans ce mémoire.

2.3. La méthode du Loss Ratio

2.3.1. Présentation de la méthode

Cette méthode est basée sur l'hypothèse que le ratio de sinistres sur primes ultimes, appelé aussi Loss Ratio, est connu a priori. Ce dernier est noté LR_i et correspond à un indicateur d'exposition au risque. Il est déterminé de différentes façons : selon l'expérience passée, à partir d'une évaluation liée à la tarification initiale des contrats ou sur une bonne connaissance du marché.

La charge ultime de sinistres s'écrit ainsi :

$$E(C_{i,n}) = LR_i \times P_i$$

Où P_i dénote les primes pour l'année de souscription $i=1, \dots, n$

Le niveau de provisions est alors directement déduit par différence entre la charge ultime estimée et les sinistres déjà réglés après j années :

$$R_i^{LR} = E(C_{i,n}) - C_{i,n-i+1} = LR_i \times P_i - C_{i,n-i+1}$$

Cette méthode paraît très simple, elle n'utilise pas les déroulés des triangles, elle ne dépend que d'un paramètre exogène.

Elle n'est pourtant efficace que sur des branches stables car elle n'utilise pas l'expérience passée des sinistres dans l'évaluation de la charge finale, même si cette expérience est incluse dans le choix du Loss Ratio. Elle est utile pour une première estimation des sinistres ultimes sur les années de souscription récentes qui n'ont pas ou peu d'historique.

La fiabilité des résultats de cette méthode repose sur les Loss Ratios choisis, il convient alors d'avoir une méthode rigoureuse pour les déterminer. Le paragraphe suivant en présente une des méthodes stochastiques pour l'estimation des Loss Ratios.

2.3.2. Estimation du Loss Ratio

Les estimations du Loss Ratio changent avec le temps. En effet, nous estimons initialement un Loss Ratio qui provient de l'analyse des primes et sinistres pour chaque branche, cette estimation cède bientôt la place à une nouvelle estimation au fur et à mesure que le temps passe et que les déclarations des sinistres commencent à émerger (ou non). Au moment où tous les sinistres ont été payés, le Loss Ratio a probablement été réévalué plusieurs fois. Notre objectif dans cette section est d'établir un modèle des futures révisions du Loss Ratio initial.

Nous exploiterons les travaux de Roger M. HAYNE et Michael G. Wacek sur l'estimation des Loss Ratios, en se basant sur le modèle de développement log-normal de Hayne ((Wacek, M.G., 2007, The Path of the Ultimate Loss Ratio Estimate. Casualty Actuarial Society Forum, Winter 2007, 339-370)) : nous supposons que les facteurs de développement soient log-normaux.

Il y a plusieurs propriétés utiles de la distribution log normale, qui ont motivés son choix comme modèle statistique ici : Tout d'abord, elle est définie pour les valeurs positives (les facteurs de développement, sauf pour les situations extrêmes, sont positifs). Ensuite, la distribution est asymétrique vers la droite mais conserve des probabilités positives pour les facteurs importants. Les facteurs de développement peuvent également être très importants et subir des variations anormales. La troisième, et la plus utile propriété de la distribution log-normale qui a suggéré sa considération est sa propriété reproductive. Comme il sera indiqué dans une forme plus précise et plus générale ci-dessous. Le produit de deux variables aléatoires log-normales est, sous certaines hypothèses, lui-même log-normal. De plus, les

paramètres de la distribution du produit peuvent être facilement déterminés à partir de ceux des deux distributions. En termes de facteurs de développement, cela permet de faire des inférences concernant les facteurs de développement à l'ultime en fonction d'hypothèses sur les facteurs de développement.

Les paramètres log-normaux μ et σ des facteurs de développement peuvent être estimés par plusieurs méthodes, nous utiliserons le critère de sans biais comme critère de meilleurs estimation.

Les estimateurs des paramètres du j-ème facteur de développement sont donnés par :

$$\mu_j = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \log(f_{i,j}) \text{ et } \sigma_j^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (\log(f_{i,j}) - \mu_j)^2$$

Le j-ème facteur de développement est donc estimé par $\hat{f}_j = e^{\mu_j + \frac{1}{2}\sigma_j^2}$

La propriété reproductrice de la loi Log-Normale implique que les facteurs de développement à l'ultime sont log-normaux. Comme le produit d'une variable aléatoire Log-Normale par une constante est log-normal, si nous disposons des Loss Ratio par année de souscription et des paramètres estimés des facteurs de développement à l'ultime correspondant, nous pouvons déterminer les estimations des paramètres des Loss Ratio. En utilisant ces paramètres, nous pouvons estimer les Loss Ratio ultimes attendus (que nous prenions comme la «meilleure» estimation) ainsi que les intervalles de confiance autour de ces estimations.

Le produit de deux loi log normale de paramètres respectives (μ_1, σ^2_1) et (μ_2, σ^2_2) est une loi log-normale de paramètres $(\mu_1 + \mu_2, \sigma^2_1 + \sigma^2_2)$

Le facteur de développement de l'année j à l'ultime est donc donnée par :

$$\hat{F}_j = \prod_{i \geq j} \hat{f}_i = e^{\sum_{i=j}^n \mu_i + \frac{1}{2} \sum_{i=j}^n \sigma_i^2} = e^{\mu^j + \frac{1}{2} \sigma^{j^2}}$$

Avec $\mu^j = \sum_{i=j}^n \mu_i$ et $\sigma^j = \sqrt{\sum_{i=j}^n \sigma_i^2}$

Un intervalle de confiance au seuil α de cette estimation est donnée par :

$$\left[e^{\mu^j - N^{-1} \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \cdot \sigma^{j^2}}, e^{\mu^j + N^{-1} \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \cdot \sigma^{j^2}} \right]$$

Ou $N^{-1} \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)$ denote le quantile d'ordre $1 - \frac{\alpha}{2}$ d'une loi normale centrée réduite.

Étant donné les facteurs développement à l'ultime et les Loss Ratios actuels, nous estimons aisément les Loss Ratios ultimes :

$$LR_{j,ult} = LR_{j,actuel} * \hat{F}_j$$

Et l'intervalle de confiance de l'estimation du Loss Ratio est donné par :

$$\left[LR_{j,actuel} \cdot e^{\mu_j - N^{-1}(1-\frac{\alpha}{2}) \cdot \sigma_j^2}, LR_{j,actuel} \cdot e^{\mu_j + N^{-1}(1-\frac{\alpha}{2}) \cdot \sigma_j^2} \right]$$

Avant de les projeter, les Loss Ratios sont filtré en se basant sur leurs variabilités autour de leur moyenne LR^m :

LR_i est retenu si $LR_i \in [LR^m - \sqrt{V(LR)}; LR^m + \sqrt{V(LR)}]$ où $V(LR)$ est la variance des Loss Ratios de la branche étudiée. L'estimation des Loss Ratio non retenus, à l'ultime est donnée par la moyenne des loss ratio ultimes estimés.

La procédure d'estimation des Loss Ratios est schématisée donc comme suit :

-
- Calcul des Loss Ratios par année de souscription $LR_i = \frac{\text{Charge de sinistres}_i}{\text{Primes acquises}_i}$
 - Sélection des Loss Ratios à prendre en considération dans l'estimation (compris entre Min_LR et Max_LR)
 - Calcul des facteurs de développement de la charge de sinistres (Chain Ladder)
 - Sélection des facteurs de développement à prendre en considération dans l'estimation (compris entre Min et Max)
 - Calcul de $Log(f_{i,j})$, $\mu_j = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \log(f_{i,j})$, et $\sigma_j^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (\log(f_{i,j}) - \mu_j)^2$
 - Calcul les facteurs de développement par la formule $f_{i,j} = e^{\mu_j + 0.5 \cdot \sigma_j^2}$
 - On exploite la propriété reproductive de la loi log normale et on estime les facteurs de développement à l'ultime : $F_j = e^{\tilde{\mu}_j + 0.5 \cdot \tilde{\sigma}_j^2}$ avec $\tilde{\mu}_j = \sum_{i=j}^n \mu_i$ et $\tilde{\sigma}_j^2 = \sqrt{\sum_{i=j}^n \sigma_i^2}$
 - On établit un intervalle de confiance du facteur de développement à l'ultime au seuil α comme suit : $F_j \in [e^{\tilde{\mu}_j - N^{-1}(1-\frac{\alpha}{2}) \cdot \tilde{\sigma}_j}, e^{\tilde{\mu}_j + N^{-1}(1-\frac{\alpha}{2}) \cdot \tilde{\sigma}_j}]$
 - On projette les Loss Ratios via les facteurs des développements à l'ultime
- $$LR_i^{ULT} = LR_i * F_{n-i}$$
-

2.3.3. Illustration de la méthode Loss Ratio

2.3.3.1. Estimation des Loss Ratios

La première étape de l'estimation des Loss Ratios est de calculer les derniers Loss Ratios observés (Tableau 24: Calcul des Loss Ratios Observés).

Tableau 24: Calcul des Loss Ratios Observés

	primes	charges	s/p	
2000	3 870.6	2 138.7	55.26%	Retenu
2001	3 224.9	1 798.0	55.75%	Retenu
2002	2 888.8	1 113.8	38.56%	Retenu
2003	2 507.2	3 344.1	133.38%	Non Retenu
2004	4 457.4	2 960.5	66.42%	Retenu
2005	10 245.0	4 178.0	40.78%	Retenu
2006	21 729.0	11 603.3	53.40%	Retenu
2007	41 981.4	19 220.1	45.78%	Retenu
2008	39 304.7	17 042.4	43.36%	Retenu
2009	62 344.5	25 022.2	40.14%	Retenu
2010	48 179.3	24 531.1	50.92%	Retenu
2011	47 465.3	32 290.8	68.03%	Retenu
2012	65 693.3	37 321.4	56.81%	Retenu
2013	35 880.6	18 194.6	50.71%	Retenu
2014	30 980.2	12 702.3	41.00%	Retenu
2015	28 625.7	11 810.8	41.26%	Retenu
2016	25 539.9	3 236.5	12.67%	Non Retenu

La moyenne des Loss Ratios actuels est de 52.60% et leur écart-type 0.2433, l'intervalle des Loss Ratio à conserver pour la projection est [23.76%,75.60%]. Les Loss Ratios retenus pour l'estimation sont ceux appartenant à cet intervalle.

L'estimation des paramètres des lois log-normale est basée sur le triangle des charges cumulées de la branche étudiée. Les résultats de cette étape sont les facteurs de développement à l'ultime ainsi que les bornes des intervalles de confiance de ces facteurs.

L'estimation des Loss Ratios est donc le produit des Loss Ratios observés par ces facteurs de développement.

Les bornes de l'intervalle de confiance de cette estimation sont obtenus en multipliant les Loss Ratios observés par les bornes de l'intervalle de confiance des facteurs de développement obtenues l'étape précédente. (Tableau 25: Estimation des Loss Ratios)

Tableau 25: Estimation des Loss Ratios

	LR observé	Fi	Fi min	Fi max	LRI min	LRI estimé	LRI max
2000	55.26%	1.0000	1.0000	1.0000	55.26%	55.26%	55.26%
2001	55.75%	0.9950	0.9929	0.9972	55.36%	55.48%	55.59%
2002	38.56%	0.9844	0.9769	0.9920	37.66%	37.95%	38.24%
2003	0.00%	0.9935	0.9795	0.9978	45.80%	46.46%	46.66%
2004	66.42%	1.0058	0.9799	1.0004	65.08%	66.81%	66.45%
2005	40.78%	0.9636	0.8928	1.0164	36.41%	39.30%	41.45%
2006	53.40%	0.9525	0.8813	1.0092	47.06%	50.86%	53.89%
2007	45.78%	0.9946	0.8819	1.0180	40.38%	45.54%	46.61%
2008	43.36%	0.9945	0.8610	1.0216	37.33%	43.12%	44.29%
2009	40.14%	0.9899	0.8574	1.0261	34.41%	39.73%	41.18%
2010	50.92%	0.9879	0.8403	1.0215	42.79%	50.30%	52.01%
2011	68.03%	1.0025	0.8417	1.0503	57.26%	68.20%	71.46%
2012	56.81%	1.0447	0.8417	1.1128	47.82%	59.35%	63.22%
2013	50.71%	1.2162	0.8604	1.5187	43.63%	61.67%	77.01%
2014	41.00%	1.3359	0.8715	1.9159	35.73%	54.77%	78.55%
2015	41.26%	1.4290	0.9793	2.7202	40.40%	58.96%	112.24%
2016	0.00%	1.6519	0.9793	2.7202	45.79%	77.24%	127.20%

Il est remarquable que l'amplitude de l'intervalle de confiance de l'estimation des Loss Ratios est supérieure pour les années de souscription les plus récentes : plus on possède d'information plus notre estimation est précise et stable.

Nous notons que les intervalles de confiance établit sont au seuil de 5% pour tous les exemples présentés dans ce mémoire.

2.3.3.2. Calcul de la provision

Après avoir estimé les Loss Ratios ultimes par année de souscription, nous les exploitons pour le calcul de la provision pour sinistres comme décrit dans la méthode Loss Ratio ci-dessus :

Tableau 26: Calcul de la provision par la méthode du Loss Ratio

	Primes	LRi	Charges ultime	Règlements actuels	Provision
2000	3 870.57	55.26%	2 138.74	2 041.31	97.44
2001	3 230.59	55.48%	1 792.18	1 612.24	179.94
2002	2 901.17	37.95%	1 101.07	1 001.40	99.68
2003	2 517.97	46.46%	1 169.81	1 914.44	-744.63
2004	4 476.53	66.81%	2 990.60	1 882.64	1 107.96
2005	10 288.36	39.30%	4 043.07	3 935.26	107.82
2006	21 797.45	50.86%	11 086.80	10 663.86	422.94
2007	42 168.48	45.54%	19 202.32	17 068.97	2 133.35
2008	39 623.06	43.12%	17 086.17	14 216.04	2 870.13
2009	62 776.27	39.73%	24 940.76	20 358.39	4 582.37
2010	49 367.56	50.30%	24 831.49	18 676.08	6 155.41
2011	49 668.90	68.20%	33 873.16	21 402.58	12 470.57
2012	73 297.03	59.35%	43 501.59	22 669.50	20 832.09
2013	41 901.35	61.67%	25 840.70	14 429.72	11 410.98
2014	38 213.19	54.77%	20 931.23	10 577.29	10 353.95
2015	42 367.77	58.96%	24 979.35	8 924.77	16 054.57
2016	40 027.84	77.24%	30 919.10	3 021.43	27 897.67
Total			290 428.15	174 395.91	116 032.24

En milliers de MAD

La charge ultime est le produit des primes de l'année de souscription et du Loss Ratio estimé. L'estimation de la provision est obtenue en soustrayant les règlements actuels de la charge ultime estimée. La provision totale est la somme des provisions par année de souscription.

Étant donné les intervalles de confiance des Loss Ratio estimés, nous pouvons également établir un intervalle de confiance de la provision totale.

Tableau 27: Bornes de l'intervalle de confiance de la provision calculé par la méthode Loss Ratio (5%)

Intervalle de confiance de la provision LR	
Min	Max
54 109.64	182 128.38

En milliers de MAD

Nous constatons que l'intervalle n'est pas centré sur la valeur estimée de la provision. Il faut noter aussi que l'amplitude de l'intervalle est très importante et ce parce que la précision des intervalles de confiance des Loss Ratio diffère d'une année de souscription à une autre puisqu'elle dépend de la quantité d'information disponible pour leurs estimations.

Contrairement aux estimations de Chain Ladder, l'estimation des provisions via la méthode Loss Ratio n'a pas de caractère spécial en fonction des années de souscription. La crédibilité et la précision des estimations de cette méthode dépendent de l'estimation des Loss Ratios.

2.4. La méthode de Bornhuetter Ferguson

2.4.1. Présentation de la méthode

Bien que plus sophistiquée, la méthode de Bornhuetter-Ferguson est basée sur une combinaison des principes des méthodes du Loss Ratio et Chain Ladder. En effet, elle utilise une cadence et un paramètre exogène pour estimer la charge ultime de sinistres d'une année d'origine donnée.

Elle repose sur trois hypothèses principales :

- ✓ Une estimation existante des sinistres est déterminée comme dans la méthode du Loss Ratio :

$$E(C_{i,N}) = LR_i \times P_i$$

- ✓ Les sinistres non connus (ou non réglés) sont indépendants des sinistres déjà connus (ou réglés)

$$C_{i,j} \perp C_{i,N} - C_{i,j}$$

- ✓ Les facteurs de développement $F_{i,j}$ sont tels que :

$$F_{i,j} = \frac{C_{i,N}}{C_{i,j}}$$

La détermination des $F_{i,j}$ est généralement issue des cadences de développement de la méthode de Chain Ladder.

Une estimation de la charge ultime de sinistres est obtenue avec la formule suivante :

$$\hat{C}_{i,N}^{BF} = C_{i,j} + \left(1 - \frac{1}{F_{i,j}}\right) \times \hat{C}_{i,N}$$

La provision se déduit alors :

$$R_i^{BF} = \hat{C}_{i,N}^{BF} - C_{i,j} = \left(1 - \frac{1}{F_{i,j}}\right) \times \hat{C}_{i,N}$$

L'ultime du Bornhuetter-Ferguson peut encore s'écrire :

$$\hat{C}_{i,N}^{BF} = \frac{1}{F_{i,j}} \times C_{i,j} \times F_{i,j} + \left(1 - \frac{1}{F_{i,j}}\right) \times \hat{C}_{i,N}$$

Ainsi, l'estimation de la charge ultime selon la méthode de Bornhuetter Ferguson correspond à une pondération entre une estimation de la méthode de cadencement de référence par exemple de type Chain Ladder et la charge de sinistres ultimes supposée connue via un Loss Ratio ultime défini a priori. Soit encore :

$$\hat{C}_{i,N}^{BF} = \omega_{i,j} \times C_{i,N}^{CL} + (1 - \omega_{i,j}) \times \hat{C}_{i,N}^{LR} ; \quad \omega_{i,j} = \frac{1}{F_{i,j}}$$

Un désavantage ou difficulté de cette méthode est qu'elle utilise un Loss Ratio attendu qui n'est pas toujours connu. Les résultats dépendent fortement de ce ratio.

En revanche, et contrairement à la méthode du « Loss Ratio », cette méthode tient compte des sinistres déjà connus dans le calcul de la charge ultime de sinistres à l'aide d'une cadence de développement.

2.4.2. Illustration de la méthode Bornhuetter Ferguson

Pour estimer la provision par la méthode de Bornhuetter Ferguson, nous exploitons les estimations des Loss Ratios établit dans la section précédente (Tableau 25).

Le calcul de la provision pour chaque année de souscription se base sur les facteurs de développement à l'ultime des charges.

Tableau 28: Résultats de l'estimation de la provision par la méthode Bornhuetter Ferguson

	Primes	LRI	Fi	Charges ultime	Règlements actuels	Provision
2000	3 870.57	55.26%	1.0000	2 138.74	2 041.31	0.00
2001	3 230.59	55.48%	1.0005	1 792.18	1 612.24	0.87
2002	2 901.17	37.95%	1.0010	1 101.07	1 001.40	1.14
2003	2 517.97	46.46%	1.0064	1 169.81	1 914.44	7.49
2004	4 476.53	66.81%	1.0066	2 990.60	1 882.64	19.66
2005	10 288.36	39.30%	1.0073	4 043.07	3 935.26	29.45
2006	21 797.45	50.86%	1.0114	11 086.80	10 663.86	124.51
2007	42 168.48	45.54%	1.0070	19 202.32	17 068.97	134.31
2008	39 623.06	43.12%	1.0121	17 086.17	14 216.04	203.49
2009	62 776.27	39.73%	1.0385	24 940.76	20 358.39	925.07
2010	49 367.56	50.30%	1.0709	24 831.49	18 676.08	1 643.45
2011	49 668.90	68.20%	1.1311	33 873.16	21 402.58	3 927.28
2012	73 297.03	59.35%	1.2866	43 501.59	22 669.50	9 691.00
2013	41 901.35	61.67%	1.8361	25 840.70	14 429.72	11 767.04
2014	38 213.19	54.77%	2.0768	20 931.23	10 577.29	10 852.86
2015	42 367.77	58.96%	2.9698	24 979.35	8 924.77	16 568.26
2016	40 027.84	77.24%	10.8648	30 919.10	3 021.43	28 073.30
Total				290 428.15	174 395.91	83 969.19

En milliers de MAD

L'estimation de la provision par cette méthode dépend des règlements des premières années de développement : la provision pour les anciennes années de souscription est remarquablement faible par rapport aux années de souscription les plus récentes.

On reprend l'aspect de l'importance que prend la provision lors des dernières années de souscription vu qu'on réintègre les facteurs de développement dans le calcul de la provision : la méthode Bornhuetter Ferguson est préférable alors pour des branches à développement long du fait qu'elle estime la provision des dernières années de souscription (dont on ne dispose que de peu d'information sur les règlements) en se basant sur une

information exogène (Loss Ratio) et une cadence de règlements issue des facteurs de Chain Ladder.

2.5. La méthode de Benktander

2.5.1. Présentation de la méthode

La méthode de Benktander estime les provisions comme une combinaison linéaire entre les estimations des provisions des méthodes Chain Ladder et Bornhuetter Ferguson.

La provision pour l'année de souscription i s'écrit alors :

$$R_i^{BK} = \omega \times R_i^{CL} + (1 - \omega) \times R_i^{BF}$$

La pondération w proposée dans la méthode correspond à la part déjà connue des sinistres.

$$\omega = \frac{1}{F_{i,N-i+1}}$$

Avec F_i , $N-i+1$ estimé à l'aide de la méthode de Chain Ladder.

L'idée sous-jacente est que plus l'expérience augmente, plus l'estimation réalisée par la méthode de Chain Ladder est fiable.

Ainsi, la provision s'écrit :

$$R_i^{BK} = \frac{1}{F_{i,N-i+1}} \times R_i^{CL} + \left(1 - \frac{1}{F_{i,N-i+1}}\right) \times R_i^{BF}$$

Ce résultat est à rapprocher de la formule du modèle de Bornhuetter-Ferguson :

- ✓ La cadence de développement retenue dans l'estimation des charges ultimes est celle de la méthode de Chain Ladder.
- ✓ La charge de sinistre attendue utilisée dans le second terme de l'équation n'est plus celle établie a priori mais celle estimée in fine dans la méthode de Bornhuetter-Ferguson.

À ce titre cette méthode est aussi appelée la méthode de Bornhuetter Ferguson itérative.

2.5.2. Illustration de la méthode Benktander

L'estimation des provisions par la méthode de Benktander est basée sur les résultats des provisions estimées par les méthodes Chain Ladder et Bornhuetter Ferguson. Le tableau suivant résume les résultats du calcul des provisions de Benktander par année de souscription:

Tableau 29: Résultats de l'estimation de la provision par la méthode Benktander

	Provsion CL	Provision BF	Fi	Provision
2000	0.00	0.00	1.0000	0.00
2001	1.67	0.87	1.0005	0.87
2002	6.42	1.14	1.0010	1.14
2003	12.55	7.49	1.0064	7.52
2004	6.75	19.66	1.0066	19.58
2005	23.09	29.45	1.0073	29.41
2006	171.17	124.51	1.0114	125.04
2007	150.38	134.31	1.0070	134.42
2008	184.21	203.49	1.0121	203.26
2009	787.54	925.07	1.0385	919.97
2010	799.06	1 643.45	1.0709	1 587.56
2011	2 042.24	3 927.28	1.1311	3 708.72
2012	12 482.77	9 691.00	1.2866	10 312.93
2013	13 415.96	11 767.04	1.8361	12 517.90
2014	15 069.43	10 852.86	2.0768	13 039.15
2015	23 114.87	16 568.26	2.9698	20 910.49
2016	29 805.85	28 073.30	10.8648	29 646.39
Total				93 164.37

En milliers de MAD

L'estimation de la provision est croissante en fonction des années de souscription, mais les écarts ne sont pas si apparents que pour la méthode de Chain Ladder

La méthode Benktander vise à éliminer les défauts des méthodes Chain Ladder et Bornhuetter Ferguson en pondérant leurs estimation par des facteur de cadencement pour mieux exploiter l'information historique (poids de 'estimation CL) tout en ayant plus de précision en se basant sur une information exogène (Loss Ratio) qui apparait dans l'estimation de Bornhuetter Ferguson.

2.6. Gestion de la liquidation incomplète des triangles : Estimation des « Tail Factors »

Avant de traiter l'aspect aléatoire du provisionnement, nous nous intéressons à l'estimation de la proportion de développement non prise en considération à la fin de la dernière année de développement, en supposant que la première année (1ere ligne) n'est pas close.

Une stratégie pour développer des Tail Factors consiste à établir une relation entre les facteurs de développement à différentes périodes et à utiliser cette relation comme hypothèse pour ajuster les ratios.

Les facteurs de développement projetés dans les années de développement couverts par le Tail factor peuvent alors être générés.

Tous les facteurs projetés peuvent ensuite être multipliés pour fournir une estimation du Tail factor.

Dans la pratique, les facteurs sont estimés par l'utilisation de lois à deux paramètres permettant l'ajustement des facteurs de développement et ainsi l'estimation des facteurs de développements pour les années ultérieures. Le Tail Factor est donc le produit des facteurs estimés entre la dernière année de développement et l'année de développement ultime.

Nous présentons dans cette section deux méthodes d'ajustement de la courbe des facteurs de développement, étant les plus répandus dans la pratique.

2.6.1. Notations

Nous utilisons les notations suivantes tout au long de cette section :

w	année de souscription
d	année de développement
n	dernière année de développement dont les données sont disponibles
$C_{w,d}$	sinistres payés cumulés en d pour des contrats souscrits en w
f_d	facteur de développement pour la période d provenant de la méthode de Chain Ladder
$v_d = f_d - 1$	la part de développement dans f_d
F_d	le facteur de développement à l'ultime ($C_{w,u} = F_d \cdot C_{w,d}$)
T_n	Tail Factor en n

2.6.2. Méthode d'ajustement exponentiel

La méthode d'ajustement exponentiel consiste à supposer que

$$v_{(d+1)} = r \cdot v_d = v_{d-m} \cdot r^{m+1}$$

Où : m est la première année de développement dans l'estimation du modèle et r est le taux d'évolution des facteurs de développement.

Le processus consiste à ajuster d'abord une courbe exponentielle au v (d) puis projeter les facteurs de développement jusqu'à l'ultime.

Le développement restant, à partir d'un âge de développement donné, peut être estimé comme suit:

$$T(n) = \prod_{d=1}^{\infty} (1 + v(m) \cdot r^d)$$

Cette méthode est assez simple à construire, intuitive dans la nature et il existe une approximation explicite, qui peut être appliquée dans la plupart des situations. Les hypothèses sous-jacentes à la méthode sont:

- ✓ Le développement des pertes d'une période à l'autre évolue de façon constamment décroissante;
- ✓ Le taux de décroissance exponentielle est constant tout au long du développement des pertes.

2.6.3. Méthode de SHERMAN

Cette méthode repose sur l'ajustement des courbes de "puissance inverse" pour lier les facteurs de développement.

$$f(d) = 1 + a \cdot (d - c)^b$$

On estime les paramètres a, b et c par moindres carrés ordinaires (appliqué au modèle : $\ln(f(d)-1) = \ln(a) + b \cdot \ln(d-c)$)

Le Tail factor (T) est ensuite estimé comme le produit des rapports de liaison pour les âges de développement ultérieurs.

2.6.4. Illustration de l'estimation du Tail Factor

On illustre l'estimation du « Tail factor » sur le triangle des charges cumulées de la branche Engineering Traités Étrangers :

Tableau 30: Résultats de l'estimation du Tail Factor

Méthode de SHERMAN				
a	b	c	Erreur	Tail Factor
225451.63	-5.87	-6.94	85.783	1.00827
Méthode d'ajustements exponentiel				
r	v(d)		Erreur	Tail Factor
0.691974	0.725210		4.741	1.00443

L'estimation des paramètres est réalisée par la minimisation de l'erreur quadratique.

Nous considérons l'erreur d'ajustement comme critère de choix de méthode d'ajustement adéquate, pour notre exemple, la courbe s'ajuste mieux par un modèle exponentiel.

Nous notons que l'introduction du Tail Factor dans l'estimation de la provision pour la méthode de Chain Ladder augmente la provision d'environ 0.0029%. L'impact de l'introduction du Tail Factor peut être négligeable dans l'exemple étudié (vu que le Tail Factor estimé est proche de 1) mais pour des branches à développement long (cas où le Tail Factor serait plus loin de 1) l'introduction du Tail Factor serait indispensable pour avoir une idée plus claire sur la charge future de la société.

2.7. Récapitulatif des méthodes déterministes de provisionnement

La qualité de l'estimation des méthodes déterministes de provisionnement dépend principalement de la quantité de données exogène utilisées et de leurs dépendances aux données les plus anciennes.

La méthode de Chain Ladder, assez simple qu'elle soit, repose sur des hypothèses fortes sur les données du triangle. La valeur des règlements des années de souscription les plus récentes reste le point le plus faible de cette méthode : leur projection dépend des facteurs de développement estimé en supposons que le mode de gestion de la liquidation ne change jamais, ainsi nous risquons de sous-estimer les provisions.

Pour surpasser la dépendance de l'estimation de la provision des données historiques, la méthode du Loss Ratio se base sur une information exogène : Loss Ratio. La fiabilité des résultats de cette méthode repose sur la qualité d'estimation du Loss Ratio. De plus la méthode Loss Ratio donne une estimation supérieure à toutes les autres méthodes : on surestime les provisions vu qu'on utilise la charge de sinistre pour l'estimation du Loss Ratio. Cette méthode est utile pour les branches faiblement développées : nous n'avons pas besoin d'information sur le développement des règlements, l'estimation du Loss Ratio étant la base de la méthode.

Pour les branches à développement long dont nous nous disposons d'informations suffisantes de l'évolution de la charge, il convient d'utiliser la méthode Bornhuetter Ferguson.

La méthode Benktander quant à elle donne l'estimation de la provision la plus crédible : c'est une combinaison linéaire entre l'estimation de Chain Ladder et celle de Bornhuetter Ferguson, elle prend en considération la cadence de développement des règlements en plus de l'information exogène contenus dans le Loss Ratio. Elle est donc utile pour les branches de natures différentes.

Tableau 31: Comparaison des estimations des provisions par les méthodes déterministes

Méthode	Estimation des provisions
Chain Ladder	98 073.96
Loss Ratio	116 032.24
Bornhuetter Ferguson	83 969.19
Benktander	93 164.37

En milliers de MAD

3. Méthodes Stochastiques

La simplicité de mise en place des méthodes déterministes est certes un atout majeur mais il ne faut pas oublier les hypothèses fondamentales sur lesquelles elles reposent :

l'existence de coefficients de passage entre les $C_{i,j}$ et $C_{i,j+1}$ pour la méthode Chain et la crédibilité des informations exogènes (Loss Ratio) pour les méthodes Bornhuetter Ferguson et Loss Ratio.

L'idée dans cette partie est de pouvoir quantifier la variabilité des provisions estimées, notamment par la construction d'intervalles de confiance, et ainsi d'obtenir une marge d'erreur sur le montant des provisions. Pour cela, les méthodes stochastiques sont adaptées, puisqu'elles considèrent les réserves sous un angle probabiliste.

3.1. Modèle de Mack

On s'intéresse naturellement à mesurer la volatilité de l'estimation des réserves proposée par la méthode de Chain Ladder. Dans son article « Distribution-free calculation of the standard error of Chain Ladder reserve estimates », Thomas Mack a présenté une formule pour calculer l'écart type de ces estimations.

Le modèle de Mack (1993) est une version stochastique du modèle de Chain Ladder. Il ne fait aucune hypothèse sur la forme de la distribution des réserves estimées et ne peut pas donc établir d'intervalles de confiance selon différents niveaux de risques. Ceci a l'avantage de rester très général, mais il ne peut donner aucune information sur la marge de variabilité des provisions.

Les hypothèses de ce modèle sont :

- ✓ Les montants cumulés sont indépendants année de souscription par année de souscription, soit : $\forall i \neq j, (C_{i,1}, \dots, C_{i,n})$ et $(C_{j,1}, \dots, C_{j,n})$ sont indépendants
- ✓ Les estimateurs conditionnels sont sans biais, soit : $E(C_{i,k+1} \setminus C_{i,1}, \dots, C_{i,k}) = \lambda_k C_{i,k}$
- ✓ La variance conditionnelle de est calculée par : $V(C_{i,k+1} \setminus C_{i,1}, \dots, C_{i,k}) = \sigma_k^2 \cdot C_{i,k}$

La deuxième et la troisième expriment le fait que chaque facteur de développement est une variable aléatoire d'espérance conditionnelle $E\left(\frac{C_{i,k+1}}{C_{i,k}} \setminus C_{i,1}, \dots, C_{i,k}\right) = \lambda_k$ et de variance conditionnelle $E\left(\frac{C_{i,k+1}}{C_{i,k}} \setminus C_{i,1}, \dots, C_{i,k}\right) = \frac{\sigma_k^2}{C_{i,k}}$

Les facteurs de développement de la méthode de Chain Ladder sont sans biais car :

$$E(\widehat{\lambda}_k) = E\left(E\left(\frac{\sum_{j=1}^{n-k} C_{i,k+1}}{\sum_{j=1}^{n-k} C_{i,k}} \setminus C_{l,k}\right)\right) = E\left(\frac{\sum_{j=1}^{n-k} \lambda_k \cdot C_{i,k+1}}{\sum_{j=1}^{n-k} C_{i,k}}\right) = \lambda_k, \quad l = 1, \dots, n - k$$

La variance est estimée par : $\widehat{\sigma}_k^2 = \frac{1}{n-k-1} \sum_{j=1}^{n-k} C_{j,k} \left(\frac{C_{j,k+1}}{C_{j,k}} - \lambda_k \right)^2$

Pourtant, on ne peut pas utiliser cette formule pour estimer avec une seule observation ($n-k-1=0$ dans ce cas). On introduit donc une autre formule comme suit : $\widehat{\sigma}_{n-1}^2 = \min \left(\frac{\widehat{\sigma}_{n-2}^4}{\widehat{\sigma}_{n-3}^2}, \min(\widehat{\sigma}_{n-3}^2, \widehat{\sigma}_{n-2}^2) \right)$

Sous les hypothèses de Mack, ces estimateurs sont sans biais.

La partie inférieure de liquidation est estimée de la même façon que dans la méthode de Chain Ladder :

$$C_{i,j} = C_{i,n-i+1} \cdot \lambda_{j-1} \cdot \lambda_{j-2} \dots \lambda_{n-i+1}$$

Ces estimateurs sont aussi sans biais sous les hypothèses de Mack.

Ensuite, on essaie de calculer la variance de la charge ultime pour chaque année de souscription :

$$\begin{aligned} \text{mse}(\widehat{C}_{i,n}) &= E \left((\widehat{C}_{i,n} - C_{i,n})^2 \mid C_{i,k}, i+k \leq n+1 \right) \\ &= V(C_{i,n} \mid C_{i,k}, i+k \leq n+1) + (E(C_{i,n} \mid C_{i,k}, i+k \leq n+1) - \widehat{C}_{i,n})^2 \\ V(C_{i,n} \mid C_{i,k}, i+k \leq n+1) &= V(C_{i,n}) = E \left(V(C_{i,n} \mid C_{i,n-1}) \right) + V \left(E(C_{i,n} \mid C_{i,n-1}) \right) \\ &= E(\widehat{\sigma}_{n-1}^2 C_{i,n-1}) + V(\lambda_{n-1} C_{i,n-1}) = \widehat{\sigma}_{n-1}^2 E(C_{i,n-1}) + \lambda_{n-1}^2 V(C_{i,n-1}) \\ &= \widehat{\sigma}_{n-1}^2 \lambda_{n-2} E(C_{i,n-2}) + \lambda_{n-1}^2 \left(\widehat{\sigma}_{n-2}^2 E(C_{i,n-2}) + \lambda_{n-2}^2 V(C_{i,n-2}) \right) = \dots \\ &= C_{i,n-i+1} \sum_{k=n-i+1}^{n-1} \lambda_{n-i+1} \dots \lambda_{k-1} \widehat{\sigma}_k^2 \lambda_{k+1}^2 \dots \lambda_{n-1}^2 + V(C_{i,n-i+1}) \dots \end{aligned}$$

En remplaçant et par leurs estimateurs, on aura :

$$\begin{aligned} V(C_{i,n} \mid C_{i,k}, i+k \leq n+1) &= \widehat{C}_{i,n}^2 \sum_{k=n-i+1}^{n-1} \frac{\widehat{\sigma}_k^2}{\widehat{\lambda}_k^2 \cdot \widehat{C}_{i,k}} \\ (E(C_{i,n} \mid C_{i,k}) - \widehat{C}_{i,n})^2 &= C_{i,n-i+1}^2 (\lambda_{n-i+1} \dots \lambda_{n-1} - \widehat{\lambda}_{n-i+1} \dots \widehat{\lambda}_{n-1})^2 = \dots \\ &= C_{i,n}^2 \sum_{k=n-i+1}^{n-1} \frac{\widehat{\sigma}_k^2}{\widehat{\lambda}_k^2 \cdot \sum_{j=1}^{n-k} \widehat{C}_{j,k}} \\ (se(\widehat{C}_{i,n}))^2 &= \widehat{C}_{i,n}^2 \sum_{k=n-i+1}^{n-1} \frac{\widehat{\sigma}_k^2}{\widehat{\lambda}_k^2} \left(\frac{1}{\widehat{C}_{i,k}} + \frac{1}{\sum_{j=1}^{n-k} \widehat{C}_{j,k}} \right) = (se(\widehat{R}_i))^2 \end{aligned}$$

On a ainsi une estimation des réserves nécessaires pour l'année de souscription i . L'hypothèse de l'indépendance entre des années de souscription nous permet d'écrire $V(R) = \sum_{i=2}^n V(R_i)$.

3.2. Bootstrap pour le modèle de Mack

3.2.1. Bootstrap

En statistiques, les techniques de Bootstrap sont des méthodes d'inférence statistique modernes. Ces techniques ont pour but d'estimer des estimations sur une statistique comme la moyenne, la dispersion, des intervalles de confiance... Cette approche se base sur des simulations, tout comme la méthode de Monte-Carlo ou des méthodes numériques bayésiennes. Pourtant, elle n'a pas besoin d'autres informations supplémentaires que celles disponibles dans l'échantillon

Le Bootstrap nous permet d'estimer les caractéristiques d'un échantillon. Pour ce qui concerne les échantillons de petite taille, cette méthode est préférée parmi les méthodes stochastiques de provisionnement car elle donne les meilleures estimations. En tant que méthode non paramétrique, elle a des conditions d'application moins strictes que les méthodes d'inférence statistique classiques.

Il s'agit d'une méthode non paramétrique basée sur le ré-échantillonnage des données. Elle permet d'obtenir d'autres échantillons à partir d'un échantillon observé, ce qui la rend très puissante.

3.2.2. Principe de la méthode

Le Bootstrap a trois caractéristiques essentielles :

- ✓ Il ne fait aucune hypothèse sur la distribution sous-jacente (non paramétrique).
- ✓ Il a recours à des calculs numériques très lourds.
- ✓ C'est la méthode préférée à des méthodes paramétriques lorsque celles-ci conduisent à des calculs inextricables.

Nous distinguons deux approches pour que le Bootstrap: le Bootstrap sur les observations et le Bootstrap sur les résidus. En théorie, les variables aléatoires utilisées par le Bootstrap devraient être indépendantes et identiquement distribuées (*i.i.d*). Comme les observations ne vérifient pas souvent cette propriété (elles sont indépendantes mais non identiquement distribuées), on travaillera plutôt avec les résidus.

Le Bootstrap non paramétrique est basé en fait sur un échantillonnage avec remise de données indépendantes et identiquement distribuées, mais il ne crée pas de données.

La procédure du calcul pour obtenir une distribution par le Bootstrap non paramétrique :

-Préliminaire : nous calculons les résidus du modèle de Mack d'après la formule décrite ci-dessous.

-Procédure itérative : nous échantillons les résidus M fois. Plus le nombre d'itérations n'est important, meilleurs seront les estimations. Pour chaque itération $m = 1, \dots, M$, le processus se fait ainsi :

**On crée un nouveau triangle de résidus par tirage aléatoire avec remise.

**On calcule la table des pseudos facteurs de développement individuels (Mack) en inversant la formule des résidus.

**On en déduit les facteurs de développement individuels futurs (Mack).

**On simule la process error :

$$C_{i,j+1} \sim N(\hat{\lambda}_{i,j} \cdot \hat{C}_{i,j}, \hat{\sigma}_j^2 \cdot \hat{C}_{i,j}) \text{ pour le modèle de Mack}$$

**On estime les montants cumulés et on en déduit les provisions.

En itérant la procédure B fois, on aura un échantillon de M réalisations des montants des provisions. Puis on pourrait estimer la distribution et les quantiles sans aucune hypothèse de distribution a priori.

3.2.3. Bootstrap pour le modèle de Mack

Dans le cadre de ce mémoire, on s'intéresse au modèle de Mack qui s'applique sur les triangles de règlements cumulés.

Dans un premier temps on estime $\lambda_{i,j}$ et σ_j . Puis on calcule les résidus normalisés.

$$r_{i,k} = \frac{\sqrt{C_{i,j}}(\lambda_{i,j} - \hat{\lambda}_j)}{\hat{\sigma}_j}$$

D'après England et Verrall (1999), nous allons faire un ajustement de ces résidus. Cet ajustement nous permet de corriger le biais dans la comparaison des estimations analytiques et Bootstrap de l'erreur de prédiction. Le facteur d'ajustement est $\sqrt{\frac{N}{N-p}}$ avec N le nombre d'observations, $p = 2n - 1$ le nombre de paramètres estimés.

Cet ajustement n'a pas beaucoup d'influence sur la moyenne des résidus, comme ces derniers sont en moyenne proches de zéro. C'est leur variance qui est le plus affectée.

On calcule la moyenne des résidus : $r_M = \frac{\sum r_{i,j}}{N}$

Les résidus finaux utilisés pour l'échantillonnage sont les $r'_{i,j} = r_{i,j} - r_M$

3.3. Illustration des modèles stochastiques

On applique le modèle de Mack et Bootstrap-Mack sur le triangle utilisé dans l'illustration des méthodes déterministes.

Une fois que les facteurs de développement sont déterminés, il est possible de compléter le triangle. Puis pour chaque année de souscription, le règlement ultime calculé par la méthode de Chain Ladder se trouve dans la colonne $C_{i,n}$, sur la ligne correspondante. Les réserves de chaque année R_i est la différence entre le règlement final estimé et ce qu'on a déjà payé. La provision par année de souscription est donc égale à :

Tableau 32: Résultats de l'estimation de la provision par le modèle de Mack

	Réglements actuels	Réglements ultimes	Provisions	Ecart type des provisions
2000	2 041.31	2 041.31	0.00	0.00
2001	1 612.24	1 613.03	0.79	0.13
2002	1 001.40	1 002.43	1.04	1.05
2003	1 914.44	1 926.77	12.33	18.75
2004	1 882.64	1 895.10	12.46	18.56
2005	3 935.26	3 964.14	28.88	31.49
2006	10 663.86	10 784.98	121.12	73.32
2007	17 068.97	17 189.20	120.23	137.66
2008	14 216.04	14 387.39	171.35	135.00
2009	20 358.39	21 142.58	784.20	245.97
2010	18 676.08	19 999.74	1 323.66	813.55
2011	21 402.58	24 209.44	2 806.86	1 008.01
2012	22 669.50	29 167.17	6 497.67	1 461.00
2013	14 429.72	26 494.45	12 064.73	2 850.20
2014	10 577.29	21 967.39	11 390.11	3 034.44
2015	8 924.77	26 504.91	17 580.13	4 291.30
2016	3 021.43	32 827.28	29 805.85	9 375.68
Total	174 395.91	257 117.32	82 721.41	23 496.10

En milliers de MAD

Ensuite, on essaie d'estimer la variance des facteurs de développement grâce aux facteurs individuels de chaque année de souscription d'après les formules précisées précédemment.

L'erreur quadratique moyenne et l'écart type sont obtenus d'après les formules précisées précédemment.

Test des hypothèses : Forme de la variance

Les hypothèses d'indépendance entre les années de souscription et de la forme de l'espérance sont testées de la même manière décrite lors de la présentation de la méthode de Chain Ladder.

Nous allons tester l'hypothèse de la forme de la variance en vérifiant que les résidus $r_{i,k} = \frac{C_{i,k+1} - \lambda_k \cdot C_{i,k}}{\sqrt{C_{i,k}}}$ ne présentent pas de tendance spécifique en fonction des $C_{i,k}$. Par la suite, nous examinerons le comportement des résidus pour chaque année de développement. (Voir Figure 24 annexe 1).

Les points ne révèlent pas de structure particulière, nous acceptons l'hypothèse même si la dispersion des points est très grande pour la première année de souscription.

Il est à noter que l'écart type de la provision est plus important pour les années de souscription récentes : plus nous disposons d'information sur l'évolution des règlements plus notre estimation serait précise.

L'estimation de la méthode de Mack garde les mêmes avantages et défauts de la méthode de Chain Ladder. Elle apporte une information supplémentaire sur la variabilité de la provision, qui s'élève à 15 043.47 millions MAD pour la branche étudiée.

Tableau 33: Résultats de l'estimation de la provision par la méthode Bootstrap-Mack

	Réglements actuels	Réglements ultimes moyens	Provisions moyennes
2000	2 041.31	2 041.31	0.00
2001	1 612.24	1 614.49	2.25
2002	1 001.40	1 003.26	1.86
2003	1 914.44	1 930.57	16.13
2004	1 882.64	1 898.68	16.04
2005	3 935.26	3 971.24	35.99
2006	10 663.86	10 811.08	147.22
2007	17 068.97	17 236.30	167.32
2008	14 216.04	14 436.09	220.05
2009	20 358.39	21 222.32	863.93
2010	18 676.08	20 099.41	1 423.33
2011	21 402.58	24 332.51	2 929.93
2012	22 669.50	29 343.97	6 674.47
2013	14 429.72	26 739.39	12 309.67
2014	10 577.29	22 182.07	11 604.78
2015	8 924.77	26 771.30	17 846.52
2016	3 021.43	33 309.80	30 288.37
Total	174 395.91	258 943.78	84 547.87

En milliers de MAD

En termes d'erreur d'estimation, la provision estimée par le Bootstrap sur 10.000 itérations varie, au seuil de 10%, entre -25.89% au-dessous de la moyenne et 26.85% au-dessus.

Tableau 34: Quantiles de l'estimation de la provision par la méthode Bootstrap-Mack

Quantile	10%	25%	50%	75%	90%
Provision	69 146.53	75 889.87	83 779.67	92 196.98	100 766.93

En millions de MAD

3.4. Récapitulatif des modèles stochastiques

La méthode de Mack a l'avantage de s'épargner les simulations et de fournir un résultat analytique immédiat. Cependant cette dernière ne fournit que les moments d'ordre un et deux si l'on ne suppose pas une loi de distribution des provisions. La méthode du Bootstrap a l'avantage de fournir une distribution empirique du montant des provisions à l'ultime.

Le fait de ré-échantillonner tout le triangle supérieur dans la méthode de Bootstrap n'est pourtant pas forcément très réaliste du fait que les résidus $r_{0,n}$ et $r_{n,0}$ sont par construction nuls. Il faut les exclure pour pouvoir supposer l'indépendance des résidus. Il faut alors également diminuer le nombre de données N dans le facteur d'ajustement des résidus.

Tableau 35: Comparaison des provisions stochastiques

Méthode	Provisions
Mack	82 721.41
Bootstrap	84 547.87

L'estimation de la provision moyenne par la méthode Bootstrap ne diffère de la provision Mack que de 2.2%. Les valeurs des règlements moyens calculées par la méthode Bootstrap sont supérieures à celles de Mack pour toutes les années de souscription (sauf pour 2000). Ceci montre que l'estimation basée sur les règlements historiques sous-estime la valeur moyenne (la plus vraisemblable) de la provision. La différence de la volatilité est de 34.5% par rapport à la méthode de Mack. Mais ces résultats sont très variables selon les branches.

4. Récapitulatif des méthodes de provisionnement

Il n'existe pas de méthode a priori applicable à tous types de branches de risque. Le choix de la méthode est probablement l'étape la plus difficile dans la procédure de l'estimation des provisions et nécessite une longue expérience pour qu'un actuaire décide de la méthode la plus délicate pour un triangle donnée.

Nous avons montré que la méthode de Benktander reste applicable à toutes sortes de branche, il ne faut pourtant pas la considérer comme méthode de référence et vaut mieux

tester les hypothèses puis appliquer les autres modèles afin d'en tirer l'estimation la plus délicate.

En quête de plus d'information sur la variabilité de l'estimation de la provision, nous avons introduit deux modèles prenant en compte l'aspect aléatoire de l'évolution des encours.

La méthode de Mack fait partie des méthodes stochastiques les plus connues. Elle repose sur la méthode déterministe de Chain Ladder, et permet d'estimer l'incertitude qui réside dans l'évaluation des provisions.

Cette méthode permet seulement de connaître les moments d'ordre 1 et 2, mais ne permet pas de connaître la distribution suivie par les provisions, ni de déterminer des quantiles. Néanmoins on peut supposer une distribution suivie par les provisions (loi normale ou log-normale) et utiliser les paramètres fournis par Mack (moyenne et variance) pour estimer ces grandeurs.

La méthode des Bootstrap permet d'avoir une meilleure évaluation de l'incertitude de l'estimation des provisions. L'évaluation des provisions par cette méthode permet de calculer plusieurs moments de l'estimation des provisions en se basant sur l'échantillon qui en résulte.

Conclusion

À travers ce présent mémoire nous avons essayé dans un premier temps de mettre en œuvre une méthodologie de la projection du portefeuille des placements composés d'actions, d'obligations, et d'OPCVM. La projection des actions est basée sur le modèle MEDAF et un ajustement paramétrique des rendements de l'indice de marché MASI par la loi Normal Inverse Gaussian. La projection des obligations est basée sur l'interpolation de la courbe des taux via le modèle de Nelson Siegel alors que la projection des OPCVM est simplifiée en exploitant les performances historiques des années précédentes.

Dans une deuxième partie, nous avons essayé de mettre le point sur les différentes méthodes, déterministes et stochastiques, servant de base d'estimation des provisions pour sinistres dans la réassurance non-vie. Une modélisation aléatoire est établit pour le facteur d'exposition au risque : Loss Ratio, qui est par la suite exploité dans l'estimation des provisions par différentes méthodes présentées. Les points de force et de faiblesse de chaque méthode sont discutés pour pouvoir décider du choix de la méthode pour chaque branche de réassurance non-vie.

Bibliographie

- Bølvikenet, E. et Benth, F.E. (2000). *Quantification of risk in Norwegian stocks via the normal inverse Gaussian distribution*, Proceedings AFIR 2000
- Dempster, A., Laird, N. et Rubin, D. B. (1977). *Maximum Likelihood from Incomplete Data via the EM Algorithm*, Journal of the Royal Statistical Society series B, 39(1):1-38 1977
- Herman S. C. et al. (2013). *The estimation of loss development tail factors: a summary report*, Casualty Actuarial Society E-Forum, Fall 2013
- Huijuan, L. et Verrall, R. (2010). *Bootstrap Estimation of the Predictive Distributions of Reserves Using Paid and Incurred Claim*, Casualty Actuarial Society_Variance 4:2, 2010, pp. 121-135
- Kjersti, A. et Ingrid Hobæk, H. (2005). *Modelling a portfolio of financial assets of several different types*, Statistical Analysis, Machine Learning and Image Analysis (SAMBA), The Norwegian Computing Center, SAMBA/24/05
- Mack, T. (1993). *Credible claims reserves: the Benktander method*, ASTIN Bull. Vol. 30, No.2. 2000
- Mack, T. (1993). *Distribution-free Calculation of the Standard Error of Chain Ladder Reserve Estimates*, ASTIN Bulletin: The Journal of the International Actuarial Association, 1993, vol. 23, issue 02, 213-225
- Mack, T. (1993). *Measuring the variability of Chain Ladder reserve estimates*, CAS Prize paper competition, 1993.
- Nelson, C.R., Siegel, A.F. (1987). *Parsimonious modelling of yield curves*, Journal of Business, 1987, vol. 60, issue 4, pp. 473-89
- Ole E. Barndorff-Nielsen, (1997). *Normal Inverse Gaussian Distributions and Stochastic Volatility Modelling*, Scandinavian Journal of statistics, 1997
- Radtke, M. et Schmidt, K. D., Schnaus, A. (2016). *Handbook on Loss Reserving*, 2nd edition, EAA Series, Springer 2016
- Schmidt, K. D. et Zocher, M. (2008). *The Bornhuetter-Ferguson Principle*, Casualty Actuarial Society, Spring 2008
- Töyli, J. (2002). *Essays on Asset Return Distributions*, Helsinki University of Technology laboratory of Computational Engineering Publications 2002, Volume 33
- Wacek, M.G., (2007). *The Path of the Ultimate Loss Ratio Estimate*. Casualty Actuarial Society Forum, Winter 2007, 339-370
- Wüthrich M. V. et Merz, M. (2015). *Stochastic Claims Reserving Methods in Insurance*, 1st edition, 17 October 2015

Annexes

Annexe1 : Méthodes de provisionnement en réassurance non-vie, illustrations et exemples

Figure 22: Test de linéarité-Méthode de Chain Ladder

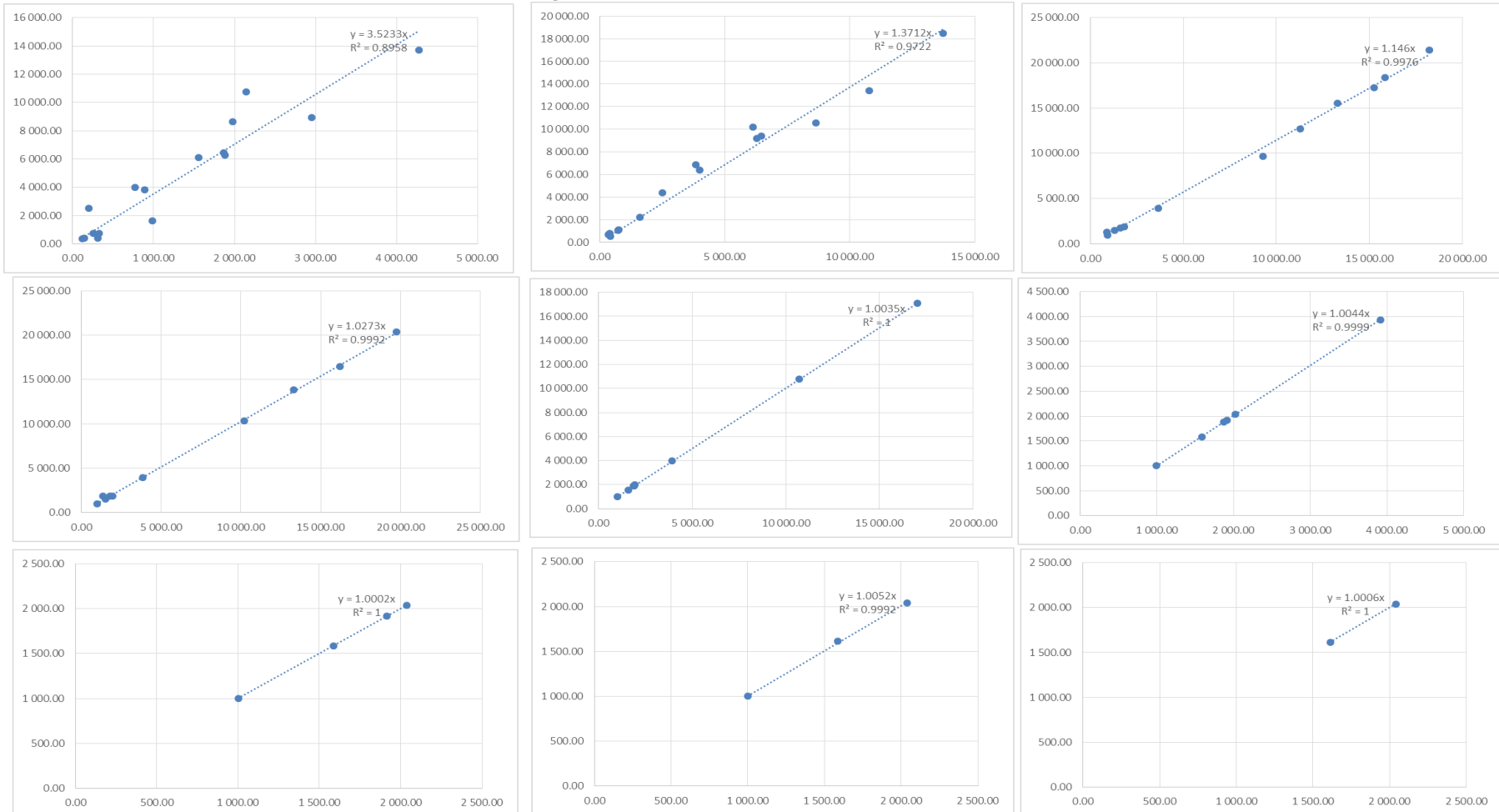


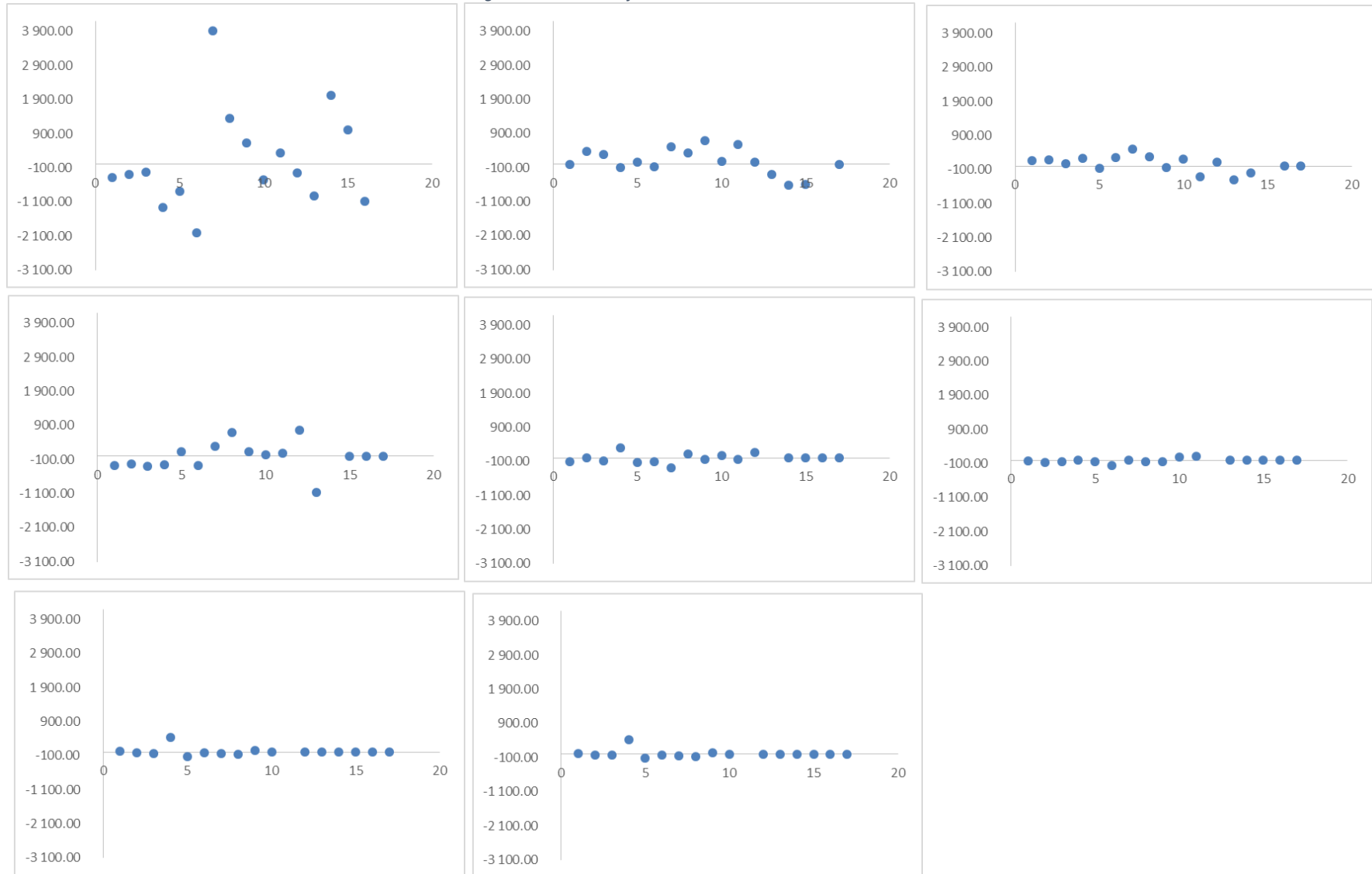
Tableau 36: Facteurs partiels de la méthode de Chain Ladder

Facteurs partiels: d-triangle	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
2000	2.906	1.424	1.298	1.200	1.065	1.038	1.045	1.041	1.030	1.009	1.010	0.998	1.000	1.000	1.001	1.000	
2001	2.890	2.003	1.333	1.211	1.139	1.009	1.019	1.015	1.000	1.009	1.002	1.000	1.001	1.016	1.000		
2002	2.966	1.915	1.220	1.111	1.048	1.021	1.002	1.000	1.002	1.005	1.005	1.002	1.000	1.000			
2003	1.356	1.288	1.436	1.142	1.450	1.050	1.407	1.002	1.008	1.005	1.000	1.000	1.000				
2004	2.274	1.489	1.064	1.537	1.048	1.030	0.944	1.004	1.004	1.000	1.000	1.004					
2005	1.630	1.378	1.300	1.271	1.078	0.976	1.020	1.001	1.008	0.988	1.005						
2006	12.344	1.749	1.367	1.550	1.044	1.055	1.016	1.034	1.003	0.991							
2007	5.183	1.597	1.241	1.674	1.169	1.043	1.015	1.035	1.003								
2008	4.317	1.782	1.117	1.477	1.126	1.046	1.043	1.025									
2009	3.330	1.466	1.196	1.439	1.159	1.077	1.031										
2010	3.934	1.661	1.033	1.453	1.128	1.085											
2011	3.467	1.454	1.171	1.656	1.175												
2012	3.208	1.346	1.037	1.184													
2013	5.038	1.245	1.076														
2014	4.371	1.225															
2015	3.026																
2016																	
Moyenne	3.890	1.535	1.206	1.377	1.136	1.039	1.054	1.017	1.007	1.001	1.004	1.001	1.000	1.005	1.000	1.000	1.000
Facteurs de developpement	3.658	1.430	1.131	1.427	1.137	1.056	1.031	1.026	1.005	0.996	1.004	1.001	1.000	1.005	1.001	1.000	1.000

Figure 23: Test de l'hypothèse d'égalité des facteurs partiels – Chain Ladder



Figure 24: Test de la forme de la variance-modèle de Mack



Annexe2 : L'algorithme EM pour l'estimation du maximum de vraisemblance (EMV)

Nous avons utilisé l'algorithme EM pour l'estimation du maximum de vraisemblance (MV) des paramètres de la distribution normale inverse gaussienne (NIG). Cet algorithme est utile pour des problèmes où certaines valeurs sont inobservables.

L'algorithme EM estime les paramètres inconnus en utilisant des itérations, et s'arrête lorsque la différence entre les estimations de deux étapes successives commence à être suffisamment petite. Il est très important de rappeler que le maximum que nous obtenons en utilisant cette méthode ne peut être qu'un maximum local. Pour cette raison, il est important de choisir des valeurs initiales appropriées ou d'éliminer ce problème en exécutant plusieurs fois le programme avec des valeurs initiales différentes.

Valeurs initiales pour l'algorithme EM

La méthode la plus intuitive pour trouver les valeurs initiales de l'algorithme EM est l'estimation des moments. Cette méthode n'a pas toujours une solution unique mais dans le cas qui nous intéresse, c'est-à-dire la distribution NIG, on peut en trouver une analytique :

$$\hat{\gamma} = \frac{3}{s\sqrt{3\bar{\gamma}_2 - 5\bar{\gamma}_1^2}}$$

En utilisant la méthode des moments, nous obtenons les estimateurs suivants des paramètres NIG :

$$\hat{\beta} = \frac{\bar{\gamma}_1 \cdot s \cdot \hat{\gamma}^2}{3}$$

$$\hat{\delta} = \frac{s^2 \cdot \hat{\gamma}^3}{\hat{\beta}^2 + \hat{\gamma}^2}$$

$$\hat{\mu} = \bar{x} - \hat{\beta} \frac{\hat{\delta}}{\hat{\gamma}}$$

$$\alpha = \sqrt{\hat{\gamma}^2 + \hat{\beta}^2}$$

Où \bar{x} note la moyenne, s^2 la variance, l'asymétrie est égale à $\bar{\gamma}_1 = \frac{\mu_3}{\mu_2^{3/2}}$ et l'aplatissement est égale à $\bar{\gamma}_2 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} - 2$ où $\mu_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^k$. On rappelle que : $3 \cdot \bar{\gamma}_2 - 5 \cdot \bar{\gamma}_1^2 \geq 0$ est une condition nécessaire à l'existence des estimateurs des moments

La fonction de log-vraisemblance pour la distribution NIG

Rappelons que la fonction de densité pour l'échantillon NIG ($\alpha, \beta, \mu, \delta$) est donnée par la formule :

$$g(x, \alpha, \beta, \mu, \delta) = \frac{\alpha}{\pi} \cdot \exp\left(\delta\sqrt{\alpha^2 - \beta^2} - \beta \cdot \mu\right) \cdot \varphi(x)^{-\frac{1}{2}} K_1\left(\delta\alpha\varphi(x)^{\frac{1}{2}}\right) \exp(\beta x)$$

Où K_1 est la fonction de Bessel modifiée du troisième type de l'ordre 1 évalué en x et la fonction φ est définie par :

$$\varphi(x) = 1 + \left(\frac{x - \mu}{\delta}\right)^2$$

Nous calculons la fonction de log-vraisemblance

$$\begin{aligned} \ln L(\theta, x) &= \ln\left(\prod_{i=1}^n g(x_i, \alpha, \beta, \mu, \delta)\right) \\ &= \ln\left(\prod_{i=1}^n \frac{\alpha}{\pi} \cdot \exp\left(\delta\sqrt{\alpha^2 - \beta^2} - \beta \cdot \mu\right) \cdot \varphi(x_i)^{-\frac{1}{2}} K_1\left(\delta\alpha\varphi(x_i)^{\frac{1}{2}}\right) \exp(\beta x_i)\right) \\ &= n \ln \alpha - n \ln \pi + n\left(\delta\sqrt{\alpha^2 - \beta^2} - \beta \cdot \mu\right) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \ln(\varphi(x_i)) + \beta \sum_{i=1}^n x_i \\ &\quad + \sum_{i=1}^n \ln K_1\left(\delta\alpha\varphi(x_i)^{\frac{1}{2}}\right) \end{aligned}$$

Nous utilisons la fonction log-vraisemblance au lieu de la fonction de vraisemblance.

En raison des propriétés de la fonction logarithmique qui est convexe, les procédures de maximisation de $\ln g(x; \alpha, \beta, \mu, \delta)$ et $g(x; \alpha, \beta, \mu, \delta)$ sont équivalentes. Or, dans notre fonction log-vraisemblance, la fonction de Bessel est incluse, il n'est donc pas évident de trouver son maximum. Pour maximiser la fonction log-vraisemblance, nous pouvons appliquer l'algorithme EM qui, par rapport à l'autre méthode, est assez facile à mettre en œuvre.

Si nous disons que nos données Y_i contiennent des variables observables X_i et des variables inobservables Z_i . Le vecteur des paramètres est appelé $\theta = (\alpha, \beta, \mu, \delta)$.

Supposons que la fonction de densité de Y_i peut être exprimée par la formule :

$$f(Y_i, \theta) = f(X_i, Z_i, \theta) = f(X_i, \theta) f(Z_i | X_i, \theta)$$

Définition : Famille exponentielle

Nous disons que la variable aléatoire X appartient à une famille exponentielle si sa densité peut être écrite sous la forme :

$$f_X(x|\theta) = a(\theta)b(x)\exp\left(\sum c_i(\theta)d_i(x)\right)$$

Où $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k)$ est un vecteur de paramètres, $n > 0$, $a, b > 0$ et $\{c_i\}_i, \{d_i\}_i$ sont des fonctions.

Nous savons que la distribution de probabilité NIG est un mélange variance-moyenne d'une distribution gaussienne avec une distribution IG. Soit $X \sim \text{NIG}(\alpha, \beta, \mu, \delta)$ et la variable $Z | X$ est GIG $(z, -1, \delta\sqrt{\varphi(x)}, \alpha)$ donc la densité est donnée par :

$$f(z, -1, \delta\sqrt{\varphi(x)}, \alpha) = \frac{1}{2} \frac{\delta\sqrt{\varphi(x)}}{\alpha} K_{-1}^{-1}(\delta\sqrt{\varphi(x)}\alpha) z^{-2} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{\delta^2\varphi(x)}{z} + z\alpha^2\right)\right)$$

La densité de Y est donnée par :

$$f(Y_i, \theta) = \frac{1}{2\pi z^2} e^{-\frac{x^2}{2z}} \exp\left(\beta x + \mu \frac{x}{z} - \alpha^2 \frac{z}{2} - (\delta^2 + \mu^2) \frac{1}{2z} - (\mu\beta - \delta\sqrt{\alpha^2 - \beta^2} - \ln\delta)\right)$$

Nous obtenons la densité, qui appartient à la famille exponentielle de distributions introduite ci-dessus avec les paramètres suivants:

$$a(\alpha, \beta, \mu, \delta) = e^{-(\beta\mu - \delta\sqrt{\alpha^2 - \beta^2} - \ln\delta)}$$

$$b(z, x) = \frac{1}{2\pi z^2} e^{-\frac{x^2}{2z}}$$

$$c_1(\alpha, \beta, \mu, \delta) = \beta$$

$$d_1(z) = x$$

$$c_2(\alpha, \beta, \mu, \delta) = \mu$$

$$d_2(z) = \frac{x}{z}$$

$$c_3(\alpha, \beta, \mu, \delta) = \frac{\alpha^2}{2}$$

$$d_3(z) = z$$

$$c_4(\alpha, \beta, \mu, \delta) = -\frac{\delta^2 + \mu^2}{2}$$

$$d_4(z) = \frac{1}{z}$$

Alors la fonction log-vraisemblance est une fonction linéaire. Ainsi, l'étape E est simplifiée pour calculer l'espérance des statistiques exhaustive de la variable distribuée IG $Z_i | X_i$, La famille des distributions IG est la famille exponentielle des distributions avec le vecteur des paramètres $\theta = (\alpha, \beta, \mu, \delta)$

$$f(z, \alpha, \beta, \mu, \delta) = \frac{\delta}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(\delta\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}\right) z^{-3/2} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{\delta^2}{z} + (\alpha^2 - \beta^2)z\right)\right)$$

$$= a(\alpha, \beta, \mu, \delta) \cdot b(z) \exp\left(\sum_{i=1}^2 c_i(\alpha, \beta, \mu, \delta) \cdot d_i(z)\right)$$

Où

$$a(\alpha, \beta, \mu, \delta) = e^{-(\delta\sqrt{\alpha^2 - \beta^2})}$$

$$d_1(z) = 1/z$$

$$b(z) = z^{-\frac{3}{2}}$$

$$c_2(\alpha, \beta, \mu, \delta) = -\frac{\alpha^2 - \beta^2}{2}$$

$$c_1(\alpha, \beta, \mu, \delta) = \frac{\delta^2}{2}$$

$$d_2(z) = z$$

Les étapes de l'algorithme EM

Un algorithme EM contient deux étapes principales:

L'étape E (espérance) :

Les données non observées (cachées, manquantes) sont estimées en utilisant les données observées et l'estimation des paramètres actuels. Pour le NIG qui est une famille exponentielle de distributions, il peut être obtenu par le calcul de l'espérance conditionnelle des statistiques suffisantes pour la distribution gaussienne inverse (PZ-1 i et PZi), cela signifie que nous calculons :

$$s_i = E(z_i | x_i, \theta^{(k)}) = \frac{\delta^{(k)} \sqrt{\varphi^{(k)}(x_i)}}{\alpha^{(k)}} \frac{K_0(\delta^{(k)} \cdot \alpha^{(k)} \cdot \sqrt{\varphi^{(k)}(x_i)})}{K_1(\delta^{(k)} \cdot \alpha^{(k)} \cdot \sqrt{\varphi^{(k)}(x_i)})}$$

Et

$$w_i = E(z_i^{-1} | x_i, \theta^{(k)}) = \frac{\alpha^{(k)}}{\delta^{(k)} \sqrt{\varphi^{(k)}(x_i)}} \frac{K_{-2}(\delta^{(k)} \cdot \alpha^{(k)} \cdot \sqrt{\varphi^{(k)}(x_i)})}{K_{-1}(\delta^{(k)} \cdot \alpha^{(k)} \cdot \sqrt{\varphi^{(k)}(x_i)})}$$

Pour chaque étape k, où $\theta^{(k)}$ est la valeur courante du paramètre θ .

L'étape M (maximisation)

Dans cette étape, nous supposons que des données non observables sont connues (nous utilisons les espérances de l'étape précédente) et nous maximisons la fonction de vraisemblance. Laissez-nous introduire de nouvelles variables :

$$\hat{M} = \sum_{i=1}^n \frac{s_i}{n}$$

$$\hat{\Lambda} = n \left(\sum_{i=1}^n (w_i - \hat{M}^{-1}) \right)^{-1}$$

Puis l'estimation de $\delta(k+1)$ et $\gamma(k+1)$ est donnée par les expressions

$$\begin{aligned} \delta^{(k+1)} &= \sqrt{\hat{\Lambda}} \\ \gamma^{(k+1)} &= \frac{\delta^{(k+1)}}{\hat{M}} \end{aligned}$$

En utilisant la méthode du maximum de vraisemblance pour $X_i | Z_i$ qui est normale distribuée avec la moyenne $\mu(k+1) + \beta(k+1) Z_i$ et la variance $V z_i$ on trouve les estimateurs des paramètres $\mu(k+1)$ et $\beta(k+1)$. La fonction de log-vraisemblance pour $X_i | Z_i$ est donnée par :

$$L_{X_i|Z_i}(\theta, x) = \ln \left(\prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi z_i}} \cdot e^{-\frac{(x_i - (\mu + \beta z_i))^2}{2z_i}} \right)$$

Maintenant, nous devons résoudre le système d'équations suivant pour les μ et β :

$$\begin{cases} -\sum_{i=1}^n \frac{\mu}{z_i} - n\beta + \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{z_i} = 0 \\ -n\mu + \sum_{i=1}^n x_i - \beta \sum_{i=1}^n z_i = 0 \end{cases}$$

À partir de la deuxième équation, nous obtenons l'estimation de μ

$$\mu^{(k+1)} = \bar{x} - \beta^{(k+1)}$$

Et nous obtenons que le paramètre $\beta(k+1)$ soit donné par l'expression :

$$\beta^{(k+1)} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i \cdot w_i - \bar{x} \cdot \sum_{i=1}^n w_i}{n - \bar{s} \cdot \sum_{i=1}^n w_i}$$

Finalement, nous trouvons l'estimateur de $\alpha(k+1)$ sous forme

$$\alpha^{(k+1)} = \sqrt{(\gamma^{(k+1)})^2 + (\beta^{(k+1)})^2}$$

$$\text{Et } s = \sum_{i=1}^n \frac{s_i}{n}$$

Les itérations de notre algorithme EM sont arrêtées lorsque la différence entre les étapes successives de l'algorithme est suffisamment petite. Cela signifie que pour certains a fixé nous trouvons un j tel que :

$$\max \left(\frac{\delta^{(j+1)} - \delta^{(j)}}{\delta^{(j+1)}}, \frac{\mu^{(j+1)} - \mu^{(j)}}{\mu^{(j+1)}}, \frac{\beta^{(j+1)} - \beta^{(j)}}{\beta^{(j+1)}}, \frac{\alpha^{(j+1)} - \alpha^{(j)}}{\alpha^{(j+1)}} \right) < \varepsilon$$