ROYAUME DU MAROC
-*-*-*-*-*-*-
HAUT COMMISSARIAT AU PLAN
-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-

INSTITUT NATIONAL
DE STATISTIQUE ET D'ECONOMIE APPLIQUEE

Projet de Fin d'Etudes

****

Modélisation de l'évolution de la courbe des taux et réalisation d'un simulateur de performance

Préparé par : **Mlle Sahar BIAD**
Mlle Sara HATIM

Sous la direction de : **M. Kamal Benchekroun** (Professeur à l'INSEA)
M. Monsif El Ghaffouli (Wafa Gestion)

Soutenu publiquement comme exigence partielle en vue de l'obtention du

Diplôme d'Ingénieur d'Etat

Option : Actuariat-Finance

Devant le jury composé de :

- **M. Kamal Benchekroun** (INSEA)
- **M. Said Ramadan NSIRI (INSEA)**
- **M. Moncef El Ghaffouli (WAFA GESTION)**

Juin 2009

Résumé

Toute société de gestion doit être capable d'évaluer d'une manière concise et avec un niveau de précision élevé la performance de ses fonds à différents horizons de temps. Un seul obstacle pourrait contraindre ceci: la mauvaise estimation ou l'incapacité à la réalisation de prévisions de la courbe des taux; facteur clé de la gestion obligataires.

C'est de là, que vient l'intérêt de ce sujet, qui, depuis très longtemps, a fait l'objet de thèses et d'études de taille. Toutefois, Il reste encore beaucoup d'améliorations et de précisions à apporter dans ce sens.

Il existe plusieurs classes de méthodes de modélisation de la courbe des taux. On adoptera dans ce mémoire, deux grandes classes; les modèles empiriques et les modèles financiers. Les premiers aborderont des modèles de régression et des méthodes d'interpolation. Les seconds traiteront respectivement les modèles de Nelson Siegel, de Vasicek et de Cox, Ingersoll et Ross.

Etant donné l'aspect pratique des objectifs visés, il sera question dans un dernier chapitre d'appliquer les estimations retrouvées de la courbe, pour réaliser un exemple de simulateur simplifié de performance des portefeuilles obligataires.

Dédicace

Je dédie ce modeste travail en premier lieu à mes très chers parents :

Pour l'amour et l'affection sans mesure qu'ils m'ont procurés tout au long de ma vie.

Pour leur sacrifice, leur confiance ainsi que leur patience. Qu'ils trouvent ici le témoignage de mon entière gratitude et que dieu les protège.

A mes chères sœurs Samia et Lyna et mon adorable frère Abdeljalil

A ma grand-mère, mes oncles, mes tantes, mes cousins et cousines.

A toute ma grande famille.

A mes amies avec qui j'ai partagé des moments inoubliables.

Une dédicace particulière à tous mes frères et sœurs de l'INSEA,

Et à Tous mes camarades que je n'ai pas cités.

Je vous remercie pour chaque bel instant passé, chaque moment de

Sahar

Dédicace

Je dédie cet humble travail

A Mes très chers parents pour les sacrifices, l'affection et le soutien que vous m'avez apportés. Vous êtes ma fierté et ma raison d'être,

A Mes sœurs chéries Maroua et Malak.,

A Ma très chère grand-mère, que Dieu la protège,

A L'ensemble de ma grande famille,

A tous mes Amies et Amis,

A tous ceux qui m'aiment.

Sara

REMERCIEMENTS

Au terme de ce travail, nous avons l'honneur d'exprimer nos vifs remerciements à notre grand et respectueux professeur, monsieur ***Kamal BENCHEKROUN****, d'avoir accepté de nous encadrer et de n'avoir ménagé aucun effort pour nous venir en aide et nous orienter.*

Aussi remercions-nous notre encadrant externe, ***M. Monsif GHAFFOULI*** *gérant obligataire à WAFA GESTION, pour avoir fait de son mieux pour nous mettre à l'aise avec l'équipe de gestion, et pour ses directives pertinentes tout au long de notre stage.*

Nos remerciements vont également à monsieur Anas RAISSI directeur de gestion, qui a accepté de nous accorder un stage de 3 mois et demi au sein de son service.

Nous tenons également à exprimer notre gratitude à Monsieur le professeur Said RAMADAN NSIRI d'avoir accepté de faire partie des membres du jury.

Nous remercions tous les employés de Wafa Gestion pour leur convivialité et leur disponibilité.

Nos vifs remerciements vont finalement à tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à l'élaboration de ce modeste travail.

Table des matières

Résumé....3
Dédicaces....4
Remerciement....6
Liste des tableaux et figures....9

INTRODUCTION GENERALE....11

CHAPITRE PRELIMINAIRE : GENERALITES....14

INTRODUCTION DU CHAPITRE PRELIMINAIRE....14

I. PRESENTATION DU MARCHE FINANCIER MAROCAIN....15

I.1. Marché des valeurs mobilières....15

I.1.1 Le marché primaire....15
I.1.2 Le marché secondaire....15
I.2. Acteurs du marché financier....15
1.2.1. Ministère des Finances....16
1.2.2. Les intervenants du marché boursier....16
I.3. Société de gestion....17
I.3.1. Les OPCVM....17
I.3.2. Gestion collective des OPCVM....17
I.3.3. Classification des OPCVM....18
I.3.4. Gestion administrative d'une société de gestion....19
I.4. Présentation de WAFA GESTION....20

II. NOTIONS SUR LA STRUCTURE PAR TERME....22

II.1. Notions et définitions sur le taux d'intérêt....22

II.1.1. Les différents taux....22
II.1.2. Le marché de taux....23
II.1.3. Courbe des Taux....25

III. LES THEORIES TRADITIONNELLES DE LA STRUCTURE PAR TERME....26

III.1. La théorie pure par les anticipations....26

III.2. La prime de terme dans la structure par échéance des taux d'intérêt....27

III.2.1. La théorie de la segmentation des marchés....28
III.2.2. La théorie de l'habitat préféré....28
III.2.3. La théorie de la préférence pour la liquidité....29

CONCLUSION DU CHAPITRE PRELIMINAIRE....30

CHAPITRE I : ETUDE EMPIRIQUE DE LA STRUCTURE PAR TERME....31

INTRODUCTION DU CHAPITRE I....31

I. ANALYSE EMPIRIQUE DES TAUX D'INTERET....32
I.1. Transformation des taux en zéro coupon....32
I.1.1. Calcul d'un taux zéro-coupon pour les instruments zéro-coupon....32
I.1.2. Calcul d'un taux zéro-coupon pour les instruments couponés....32
I.2. Analyse statistique des données....35
I.2.1. Présentation des variables....35
I.2.2. Graphes et Statistiques descriptives....36

II. REGRESSION LINEAIRE MULTIPLE SUR LE TAUX ZERO COUPON 38
II.1. Le modèle de régression linéaire 38
II.2. Etude de la corrélation entre les variables explicatives 39
II.3. Application du modèle de régression linéaire sur les taux zéro coupon 39
II.3.1. Régression sur le taux court terme 39
II.3.2. Régression sur le taux moyen terme 42
II.3.3. Régression sur le taux long terme 42
III. METHODES D'INTERPOLATION 43
III.1. Les méthodes directes d'interpolation 43
III.1.1. Interpolation linéaire 43
III.1.2. Interpolation cubique 43
III.2. Les méthodes indirectes d'interpolation 44
III.2.1. Les modèles à splines 44
III.2.2. Principe des modèles à splines 45
III.2.3. Les splines polynomiaux 45
III.2.4. Expression dans la base des B-splines 47
III.2.5. Le choix du nombre de splines 48
CONCLUSION DU CHAPITRE I 50
CHAPITRE II : MODELES FINANCIERS DE LA COURBE DES TAUX 51
INTRODUCTION DU CHAPITRE II 51
I. LE MODELE DE NELSON ET SIEGEL 52
I.1. La fonctionnelle de Nelson Siegel 52
1.2. Application du modèle de Nelson et Siegel 53
I.3. Limites du modèle de Nelson et Siegel 54
II. MODELE D'ARBITRAGE GENERAL 54
II.1. Présentation théorique du modèle 55
II.1.1. Hypothèses du modèle 55
II.1.2. Lien entre le prix des bons sans coupons et les variables d'état 56
II.1.3. Une condition d'arbitrage 57
II.1.4. La prime de terme 58
II.1.5. L'équation de structure par terme 58
II.2. Modèles d'arbitrage à une seule variable d'état 59
II.2.1. Le lien entre le taux court et le prix des obligations 59
II.2.2. La condition d'arbitrage 60
II.2.3. L'équation de structure par terme 61
III. MODELE DE VASICEK 61
III.1. Présentation du modèle de Vasicek 61
III.2. Application du modèle de Vasicek 63
III.2.1 Estimation des paramètres du processus d'Ornstein-Uhlenbeck 64
III.2.2. Résultats de l'estimation 67
III.2.3. Structure de taux et Problème du prix de risque du marché 67
III.2.4. Construction de la courbe des taux du 01/02/2008 et comparaison avec la courbe des taux de marché de cette même date 68
III.3.Limites du modèle de Vasicek 71
IV. MODELE DE COX INGERSOLL ET ROSS 71
IV.1. Présentation du modèle de CIR 71
IV.2. Application du modèle de CIR 73
IV.2.1. L'étude dynamique de l'évolution de la variable d'état 73
IV.2.2. Estimation des paramètres du processus « racine carré » 76

IV.2.3. Comparaison entre la courbe empirique et celle théorique du modèle CIR 78
IV.3. Limites du modèle CIR 80

CONCLUSION DU CHAPITRE II 81

CHAPITRE III : REALISATION D'UN SIMULATEUR DE PERFORMANCE DE PORTEFEUILLES OBLIGATAIRES 82

INTRODUCTION DU CHAPITRE III 82

I. PREVISION DE LA COURBE FUTURE DES TAUX 83

I.1. Prévision de la courbe des taux par le modèle de Nelson Siegel 83
I.1.1. Modèle de la série composée par les β0.....83
I.1.2. Modèle de la série composée par les β_1 85
I.1.3. Modèle de la série composée par les β_2 85
I.1.4. Prévision de la courbe des taux 88
I.2. Prévision de la courbe des taux par le modèle de Vasicek 88

I.2.1. Prévision du TMP 89
I.2.2. Prévision de λ 90
I.2.3. Prévision de la courbe des taux au 31/12/2009 90
I.3. Prévision de la courbe par le Modèle de CIR 92

I.3.1. Prévision du TMP 92
I.3.2. Prévision du facteur prix du risque de marché 92
I.3.3. Prévision de la courbe des taux au 31/12/2009 94
II. SIMULATEUR DE PERFORMANCE 95

II.1. Notions et définitions.....95

II.1.1. Taux de rendement actuariel.....95
II.1.2. Duration 95
II.1.3. Sensibilité 96
II.2. Choix de sensibilité par zone de courbe 96

II.3. Réalisation du simulateur 98

II.3.1. Modèle de Vasicek 99
II.3.2. Modèle de Nelson Siegel.....100
II.3.3. Modèle de CIR.....100

CONCLUSION DU CHAPITRE III 102

CONCLUSION GENERALE 103

BIBLIOGRAPHIE 105

ANNEXE 106

Listes des Tableaux et Figures

Tableau 1: méthode itérative de la transformation du taux actuariel en zéro coupon 34
Tableau 2: corrélation entre variables explicatives..... 39
Tableau 3: paramètres du modèle de régression du taux 13 semaines 40
Tableau 4: coefficient de corrélation du taux 13 semaines 41
Tableau 5: tableau ANOVA pour le taux 26 semaines..... 41
Tableau 6: histogramme des résidus du modèle de régression du taux 13 semaines 42
Tableau 7 : taux zéro-coupon pour les maturités de 13 semaines à 20 ans 69
Tableau 8:taux zéro-coupon pour les maturités de 13 semaines à 20 ans..... 70
Tableau 9: Test de racine unitaire de la série mensuelle et journalière du TMP..... 74
Tableau 10: statistique descriptive de la série mensuel du TMP 75
Tableau 11: test de racine unitaire pour le paramètre β_0..... 83
Tableau 12: test de stationnarité du paramètre β1 85
Tableau 13: test de stationnarité KPSS de β_1 85
Tableau 14: test de racine unitaire avec constante et tendance DFA du paramètre β2 86
Tableau 15: test de racine unitaire avec constante pour le paramètre β2 87
Tableau 16: estimation des coefficients d'un AR(1) du paramètre β2..... 88
Tableau 17: courbe des taux au 30/12/2009 90
Tableau 19: estimation des coefficients du modèle AR(1) de landa 92
Tableau 21: courbe des taux en décembre 2009 CIR 93

Figure 1 *: schéma représentatif des acteurs du marché financier* 16
Figure 2: parts d'Attijariwafa Bank et CCAM dans le capital de Wafa Gestion 20
Figure 3: Part du marché de Wafa Gestion par classe d'actifs..... 21
Figure 4: organigramme de Wafa Gestion 21
Figure 5: Evolution des taux zéro coupon pour différentes maturités durant la période du 02/01/2004 au 27/02/2009..... 36
Figure 6:Evolution des taux ZC en trois dimensions..... 37
Figure 7 : graphes du TMP et du taux d'inflation 37
Figure 8: graphes du levée du trésor et de la liquidité..... 38
Figure 9: Exemple d'Interpolation cubique de la courbe des taux..... 44
Figure 10:courbe des taux par les splines polynomiaux et courbe de taux empirique 47
Figure 11: La feuille de calcul des paramètres de la fonctionnelle de Nelson Siegel..... 54
Figure 12: graphe et histogramme de la série quotidienne du TMP 65
Figure 13: test de stationnarité par la méthode de Dickey-Fuller Augmenté..... 65
Figure 14: corrélogramme de la série quotidienne du TMP 66
Figure 15: Estimation des paramètres 67
Figure 16: feuille de calcul des paramètres de Vasicek..... 68
Figure 17: prime de risque pour le modèle de Vasicek..... 70

Figure 18: comparaison entre courbe réelle des taux ZC et celle de Vasicek 71
Figure 19: Test de la racine unitaire avec constante et tendance du TMP mensuel 75
Figure 20: graphe du TMP mensuel 75
Figure 21:Estimation des paramètres du processus « racine carré » 76
Figure 22: Graphique et histogramme des résidus du processus « racine carré » 77
Figure 23: Corrélogramme des résidus du processus "racine carré" 77
Figure 24: feuille de calcul des paramètres et d'estimation de la courbe (modèle CIR)..... 78
Figure 25:représentation en trois dimensions de l'évolution de la structure par terme des taux selon le modèle de CIR..... 79
Figure 26: évolution du paramètre b_0 de NS dans le temps 83
Figure 27: corrélogramme du paramètre β0..... 84
Figure 28: graphe du paramètre β1 85
Figure 29: corrélogramme de la série du paramètre β_1..... 86
Figure 30: graphe du paramètre β_2 86
Figure 31: corrélogramme de la série du paramètre β2 87
Figure 32: Evolution de la courbe des taux dans le temps par le modèle de NS 88
Figure 33: courbe des taux future au 31/12/2009 et courbe réelle du 30/01/2009 89
Figure 34: courbe des taux future prévue par le modèle de Vasicek..... 90
Figure 35: évolution du prix de risque du marché 92
Figure 36: corrélogramme du prix de risque du marché CIR 92
Figure 37: comparaison entre courbe réelle du début de l'an 2009 et courbe prévue à la fin de l'année 93
Figure 38: simulateur de performance modèle de Vasicek 98
Figure 39:simulateur de performance modèle de NS 99
Figure 40: simulateur de performance modèle de CIR 99

INTRODUCTION GENERALE

La littérature de la finance a consacré une large partie de ses études à la structure par terme des taux d'intérêt. Etant un passage obligé pour toute analyse ou gestion du risque de taux aboutissant à de nombreuses applications dans la gestion obligataire, l'étude de la courbe des taux d'intérêt est devenue incontournable pour chaque gestionnaire de produits financiers à revenus fixes ou variables opérant sur les marchés de la dette publique ou privée au comptant ou à terme.

Au Maroc, les gérants de portefeuilles n'arrivent toujours pas à obtenir une anticipation plus ou moins fiable de l'évolution de la structure par terme des taux d'intérêt. Cela est dû essentiellement à l'inefficience des marchés qui s'explique par une structure propre du marché des taux d'intérêts local: marché monétaire mal organisé, fonctionnement imparfait du marché Primaire des Valeurs du Trésor, liquidité insuffisante et tenue imparfaite du marché secondaire…

En effet, la simple intuition sur laquelle se base le gérant marocain dans ses prévisions de la performance future des fonds pourrait biaiser ses résultats, ce qui pourrait engendrer des écarts significatifs de performance. De plus, L'utilisation de l'interpolation linéaire pour lisser la courbe des taux, pratique très courante chez les gérants de portefeuilles obligataires, s'avère imprécise du moment qu'il existe des méthodes rigoureuses qui pourraient donner des résultats plus pertinents.

Ainsi, une étude judicieuse des rendements des bon de trésor, accompagnée du choix raisonnable d'un modèle financier de la structure par terme, pourrait garantir au gérant de fonds une vision plus claire sur l'évolution des taux d'intérêt et une gestion mieux fondée et plus saine des actifs financiers obligataires.

L'objet de ce projet est essentiellement la construction de la courbe des taux et sa prévision avec une bonne précision, tout en restant conforme au contexte macroéconomique et aux attentes du gérant obligataire, afin de permettre à ce dernier, entre autres, une évaluation optimale de la performance de ses portefeuilles à un horizon donné.

Le présent mémoire s'organisera en quatre chapitres ; un chapitre préliminaire va servir à présenter le contexte du travail et certaines notions nécessaires à une bonne initiation au sujet. On étalera à la fin de ce chapitre, les théories traditionnelles les plus célèbres, élaborées dans le cadre de l'analyse de la structure par terme.

Un premier chapitre sera consacré à l'étude empirique de l'historique des taux d'intérêt zéro-coupon et de quelques variables susceptibles d'expliquer l'évolution des taux. Ainsi, on commencera par une étude statistique des variables, on enchainera ensuite avec des

régressions linéaires multiples et on bouclera le chapitre avec les méthodes d'interpolation directes et indirectes de la courbe des taux.

Le deuxième chapitre constitue le cœur de notre projet, il traitera trois modèles financiers de taille, il s'agit des modèles les plus utilisés dans la modélisation de la courbe des taux, à savoir les modèles de Nelson Siegel, de Vasicek et de Cox, Ingersoll et Ross.

Le troisième chapitre de ce mémoire est une application de ce qui a précédé: une première partie portera sur la prévision de la courbe des taux par les modèles élaborés au chapitre précédent, la deuxième partie s'intéressera à l'application de ces prévisions dans le but d'évaluer la performance d'un portefeuille obligataire type, avec prise en considération de quelques contraintes.

Chapitre Préliminaire
Généralités

De nos jours, les marchés financiers sont omniprésents et occupent une partie importante de l'économie mondiale. Au niveau du Maroc, le système financier est un système ouvert, concurrentiel où la coexistence et la complémentarité entre la finance directe et celle intermédiaire, sont en train de se dessiner. Depuis 1993, Plusieurs réformes ont été élaborées dans le but de moderniser le marché financier, ce qui a permis de réaliser des avancées importantes au niveau de la libéralisation et la modernisation du marché.

Dans le but de comprendre de plus près le marché financier et son fonctionnement et de connaître les différentes notions dont on aurait besoin dans la suite du travail, nous allons dans un premier lieu définir les concepts les plus importants s'attachant au marché financier et la structure par terme. Vu que le cadre de notre stage était dans une société de gestion, nous allons, dans un second lieu, présenter le fonctionnement des sociétés de gestion, suivi par une présentation de Wafa Gestion. Ensuite, nous allons définir les notions se rapportant à la structure par terme. Enfin, nous allons mentionner les théories traditionnelles les plus célèbres de la structure par terme des taux.

I. PRESENTATION DU MARCHE FINANCIER MAROCAIN

I.1. Marché des valeurs mobilières

Etant l'ensemble des lieux où se négocient et s'échangent des capitaux à long terme entre divers intervenants, ensemble des espaces où se confrontent des offres et des demandes de produits financiers, le marché financier appelé également marché des valeurs mobilières a connu ses dernières années un essor important dans le monde entier et en particulier au Maroc. La tendance libérale des marchés financiers s'est particulièrement affirmé au cours des vingt dernières années avec l'adoption du programme d'ajustement structurel et la mise en vigueur de réformes profondes visant à moderniser l'économie marocaine tout en concédant une large place au libre jeu des mécanismes du marché.

Ainsi, dans le cadre de cette refonte, la diversification des modes de financement de l'économie marocaine était au cœur de la réforme institutionnelle engagée. C'est ainsi que les instruments financiers alternatifs se sont développés au Maroc, rivalisant ainsi avec les instruments financiers classiques, l'objectifs étant d'offrir aux différents opérateurs économiques des moyens de placements diversifiés et liquides tant sur le court terme que sur les moyen et long Terme, de renforcer la mobilité de l'épargne et d'améliorer son allocation par le développement de la concurrence et sa canalisation vers la satisfaction des besoins d'investissement.

Le marché financier est scindé en deux sous-marchés, bien distincts mais interdépendants; le marché primaire où sont créées et émises les valeurs mobilières et le marché secondaire où sont négociées les valeurs mobilières;

I.1.1. Le marché primaire

C'est le marché des émissions de titres nouveaux (marché du neuf), sur lequel, l'Etat, les collectivités publiques et les entreprises émettent des valeurs mobilières à un prix qu'ils fixent, pour se procurer des capitaux à long terme.

I.1.2. Le marché secondaire

Le marché secondaire est le lieu où s'échangent à tout moment les titres antérieurement émis sur le marché primaire. Ce marché assure la liquidité et la mobilité de l'épargne des titres, ainsi que l'évaluation permanente des titres cotés.

I.2. Acteurs du marché financier

L'organisation et le fonctionnement du marché financier doivent répondre à un certain nombre d'impératifs relatifs principalement à la sécurité, à la transparence et à la liquidité de l'épargne. Sur le plan pratique, cela se traduit par la mise en place de différents acteurs aux rôles différents mais complémentaires, de mécanismes d'échanges et de règlement -livraison efficients.

L'architecture s'appuie sur 5 principales entités; il s'agit d'acteurs qui vont organiser la rencontre de l'offre et de la demande dans des conditions optimales.

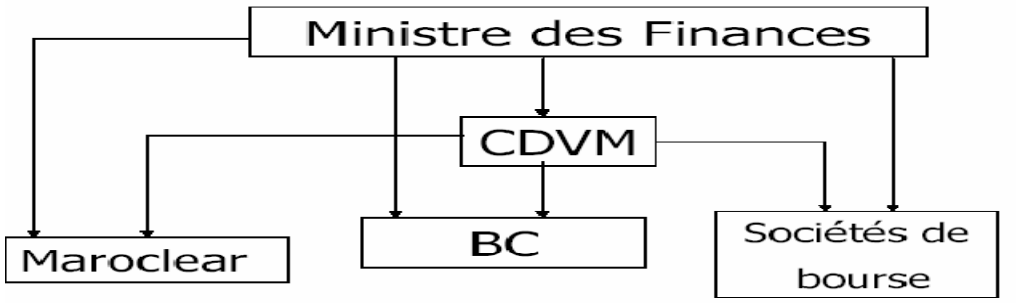


Figure 1 ***: schéma représentatif des acteurs du marché financier***

I.2.1. Ministère des Finances

Autorité de tutelle supérieure disposant de pouvoirs importants sur les principaux acteurs du marché, notamment le CDVM, la Bourse de Casablanca, les sociétés de bourse, et le dépositaire central.

1.2.2. Les intervenants du marché boursier

1) Le CDVM

Le Conseil Déontologique des Valeurs Mobilières est un établissement public doté de la personnalité morale et de l'autonomie financière. C'est une autorité administrative indépendante chargée de veiller à la protection de l'épargne, à la qualité et la régularité de l'information et au bon fonctionnement du marché.

2) La BOURSE DE CASABLANCA

Elle est chargée de L'organisation et du bon fonctionnement du marché boursier (cotation, compensation, règlement -livraison, diffusion des données de marché), elle assure la sécurité du marché et informe les investisseurs et les émetteurs.

3) MAROCLEAR

C'est le dépositaire central, une société anonyme qui a pour mission d'assurer la conservation des valeurs mobilières admises à ces opérations, de faciliter la circulation des titres dématérialisés et de simplifier l'administration pour le compte de ses affiliés. Il travaille étroitement avec les dépositaires (banques) qui assurent sur instructions de leurs clients les livraisons de titres résultant des transactions.

4) Les SOCIETES DE BOURSES

Seules habilitées à exécuter les transactions sur les valeurs mobilières inscrites à la Bourse des valeurs. Les sociétés de bourse ont pour attributions les placements des titres nouvellement émis, la garde des titres, la gestion de portefeuilles, le conseil et l'intermédiation. Elles sont les seules actionnaires de la Société de la Bourse des Valeurs de Casablanca dont elles détiennent à parts égales l'intégralité du capital.

5) Les INVESTISSEURS

Ce sont les entreprises, les personnes physiques et les institutionnels (Compagnies d'assurance et Caisses de Retraite).

I.3. Société de gestion

Les sociétés de gestion de portefeuilles sont des entreprises d'investissement qui fournissent, à titre principal, le service d'investissement, ou qui gèrent un ou plusieurs organismes de placements collectifs (expliqué ci-dessous).

I.3.1. Les OPCVM

Les organismes de placement collectif en valeurs mobilières (OPCVM) sont des fonds d'investissement qui permettent à tout épargnant de confier la gestion de ses capitaux à un professionnel qui se charge de les investir sur un ou plusieurs marchés financiers déterminés. Ils ouvrent l'accès, au travers d'un seul placement, à une large diversification. Il en existe plusieurs, investis sur l'ensemble des marchés financiers, ayant la forme de Sicav (sociétés d'investissement à capital variable) ou de FCP (fonds communs de placement). Certains sont quasiment sans risque, d'autres au contraire ne s'adressent qu'à des investisseurs très avertis.

I.3.2. Gestion collective des OPCVM

La gestion collective représente la gestion de l'épargne de plusieurs souscripteurs du même OPCVM, par un professionnel de la gestion. Cette opération permet notamment de bénéficier de l'expérience d'une gestion professionnelle, de réduire les coûts ainsi que le risque et ceci par une plus grande diversification, et de le mutualiser.

Les Organismes de Placement Collectif en Valeurs Mobilières (OPCVM) ont pour vocation de collecter de l'épargne et d'investir dans des valeurs mobilières (actions, obligations, titres de créance, etc.). Ils permettent ainsi de canaliser l'épargne des agents économiques vers le financement des entreprises, participant ainsi au développement de l'économie nationale.

Chaque OPCVM utilise l'épargne collectée pour constituer un portefeuille de valeurs mobilières, c'est-à-dire de titres de capital et de titres de créances. Il veille à assurer une gestion optimale des fonds investis, selon une stratégie clairement définie au moment de son agrément. L'OPCVM fixe ainsi sa politique d'investissement et détermine l'orientation de ses placements préalablement au démarrage de la commercialisation de ses titres.

On distingue deux types d'OPCVM : les fonds communs de placement (FCP) et les Sociétés d'Investissement à capital Variable (SICAV).

1) Les fonds communs de placement (FCP) :

Les FCP n'ont pas de personnalité morale. Ce sont des copropriétés de valeurs mobilières et de liquidités dont les parts sont émises et rachetées à tout moment à la demande de tout souscripteur ou porteur de parts, à un prix déterminé.

2) les Sociétés d'Investissement à capital Variable (SICAV)

Une SICAV dispose d'une personnalité morale distincte ayant pour seul objet de gérer un portefeuille de titres pour le compte de ses actionnaires. Ceux-ci peuvent souscrire ou vendre des actions de Sicav chaque jour en fonction de la valeur liquidative du fonds.

En fait, seuls la nature juridique et le capital minimum différencient les FCP et le SICAV. Pour un épargnant, la différence entre ces deux OPCVM n'existe pratiquement pas puisqu'il peut entrer dans un FCP ou une SICAV en devenant propriétaire d'une portion de leurs actifs (sous forme de parts ou d'actions) ou en sortir en cédant à l'entité concernée cette portion, les FCP comme les SICAV étant habilités à racheter à tout moment leurs parts ou actions.

I.3.3. Classification des OPCVM

1) Classification en fonction de la politique d'investissement

Les OPCVM sont classés en 3 catégories et par échelle de risque décroissante:

✓ Les OPCVM actions:

Dans ce cadre, les SICAV et les FCP ont l'obligation d'être investis, en permanence, à hauteur de 60% au moins sur le marché des actions.

Le calcul de leur exposition est effectué selon la formule suivante:

Degré d'exposition = actif physiques en actions / actif net * 100

✓ Les OPCVM diversifiés:

Les SICAV et les FCP diversifiés n'ont pas les mêmes contingentements que ceux développés plus haut et sont libres d'acquérir des actions, des obligations et des titres du marché monétaire pour peu qu'ils respectent les plafonds de placements sur une même valeur ou un même émetteur tels que prévus par les règles prudentielles qui leur sont applicables.

✓ Les OPCVM obligations:

Ces OPCVM doivent avoir un actif net dont au moins 90% est constitué d'obligations et de Titres de Créances Négociables. Leur exposition au risque actions ne doit pas dépasser 10% de leur actif net.

Les OPCVM investis en permanence en titres du marché monétaire font partie de cette catégorie en attendant que le CDVM officialise dans les plus brefs délais le statut de ces OPCVM en tant que catégorie à part et leur donner l'appellation OPCVM monétaire.

2) Classification en fonction de l'horizon de placement

Par ailleurs, on peut classer les OPCVM en trois genres en fonction de l'horizon de placement:

✓ OPCVM court terme:

Cet horizon de placement concerne exclusivement les OPCVM monétaires. Ils s'adressent aux investisseurs recherchant une rémunération à court terme de leurs liquidités et ayant pour objectifs la disponibilité, la souplesse, le rendement et la sécurité.

✓ OPCVM moyen terme:

Ce sont les OPCVM obligataires ou diversifiés. Ce type d'investissement répond aux besoins de valoriser régulièrement le capital, de bénéficier des performances du marché actions tout en limitant le risque.

✓ OPCVM long terme:

Il s'agit essentiellement des OPCVM actions. Ce placement représente un risque plus élevé qu'un investissement obligataire, mais avec une espérance de rendement supérieure quand l'investissement est à long terme.

I.3.4. Gestion administrative d'une société de gestion

La gestion des OPCVM dans une société de gestion se fait essentiellement par l'intermédiaire des services suivants: le back office, le middle office, le service commercial et le front office.

1) Le back office

Ce service est chargé de calculer les valeurs liquidatives des différents OPCVM gérés par la société, ces dernières peuvent être calculées soit quotidiennement ou être hebdomadaires.

2) Le middle office

Ce service se décompose en deux pôles:

✓ Le service communication:

Il se charge de la communication avec les différentes agences du groupe promoteur des OPCVM.

✓ Le contrôleur interne:

Ce dernier est imposé par le CDVM, c'est-à-dire toute société de gestion doit avoir son propre contrôleur interne, ce dernier se charge du contrôle des dépassements que peuvent présenter les portefeuilles, concernant les ratios de titres, de liquidité ou de dette, la réglementation gérant ces ratios peut être résumée dans ce qui suit :

-L'endettement ne doit pas dépasser 10% de l'actif net du portefeuille.

-Les liquidités ne doivent pas dépasser 15% de l'actif net du portefeuille.

-La valeur totale d'un titre particulier (Quantité * prix unitaire), composant le portefeuille ne doit pas dépasser 10% de l'actif net de ce dernier.

3) Le service commercial

Le service commercial est chargé des clients qui souscrivent ou rachètent dans les différents OPCVM. Les commerciaux rendent compte aux clients de l'état de leurs investissements en leur présentant périodiquement, les performances réalisées par les portefeuilles. Ils ont aussi pour mission de communiquer le maximum d'informations pour les

clients potentiels, ils se chargent aussi du marketing de l'ensemble des produits proposés par la société de gestion.

En plus de cela, le service commercial reçoit les souscriptions et les rachats des clients, les sauvegarde et les transmet au front office.

4) Le Front office:

Le front office se décompose en trois lignes de métiers:

-*Gérant actions:* il est chargé de la gestion des OPCVM diversifiés et des OPCVM actions. Le gérant vend et achète les actions composant les portefeuilles dans le but d'assurer une meilleure performance des OPCVM.

-*Gérant obligataire*: il s'occupe de la gestion des portefeuilles obligataires, en se basant sur la vente, l'achat et la valorisation des différents titres obligataires existant sur le marché (BDT, TCN,...).

-*Gérant monétaire:* la gestion des liquidités et plus précisément des OPCVM monétaires relève de la responsabilité du gérant monétaire, en étudiant les flux de liquidité des OPCVM et effectuant les opérations de vente et de rachat temporaires appelées REPO, ceci dans le but d'atteindre le niveau optimal de la trésorerie qui est le zéro dirham, tout en essayant de le sauvegarder face aux contraintes de souscription ou de rachat de parts communiqués par le middle office.

I.4. Présentation de WAFA GESTION

WAFA GESTION est une société anonyme filiale du groupe Attijariwafa Bank et du Crédit Agricole Asset Management, spécialisée dans la gestion d'actifs pour compte de tiers. Son capital social est de 4.900.000,00 DH et son effectif compte 40 personnes.

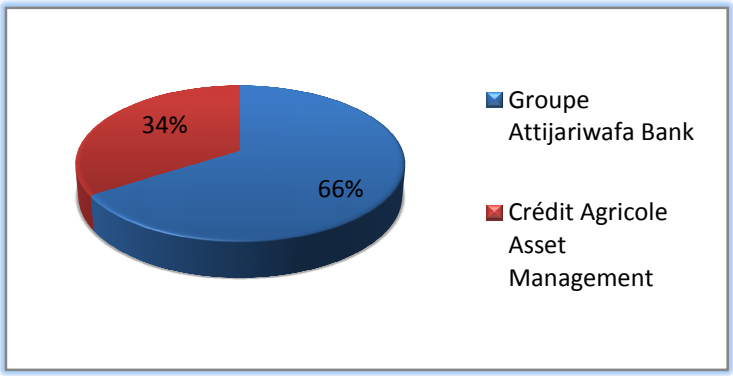


Figure 2: parts d'Attijariwafa Bank et CCAM dans le capital de Wafa Gestion

WAFA GESTION est la première société à avoir commercialisé des OPCVM au Maroc, et ce en décembre 1995. Son objet social est la gestion exclusive des organismes de placement collectif en valeurs mobilières (OPCVM).

Depuis sa création, WAFA GESTION a connu une grande expansion marquée par l'innovation, le développement de son activité et de ses ressources humaines et matérielles. Actuellement Wafa Gestion est le leader en gestion collective, avec 41 milliards de dirhams d'encours et 68 OPCVM sous gestion, 35 collaborateurs dont 10 professionnels de l'investissement et 2 réseaux de distribution.

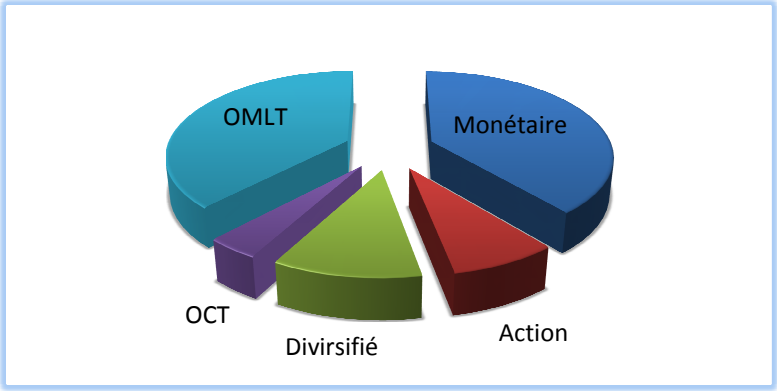


Figure 3: Part du marché de Wafa Gestion par classe d'actifs

Structure de la société :

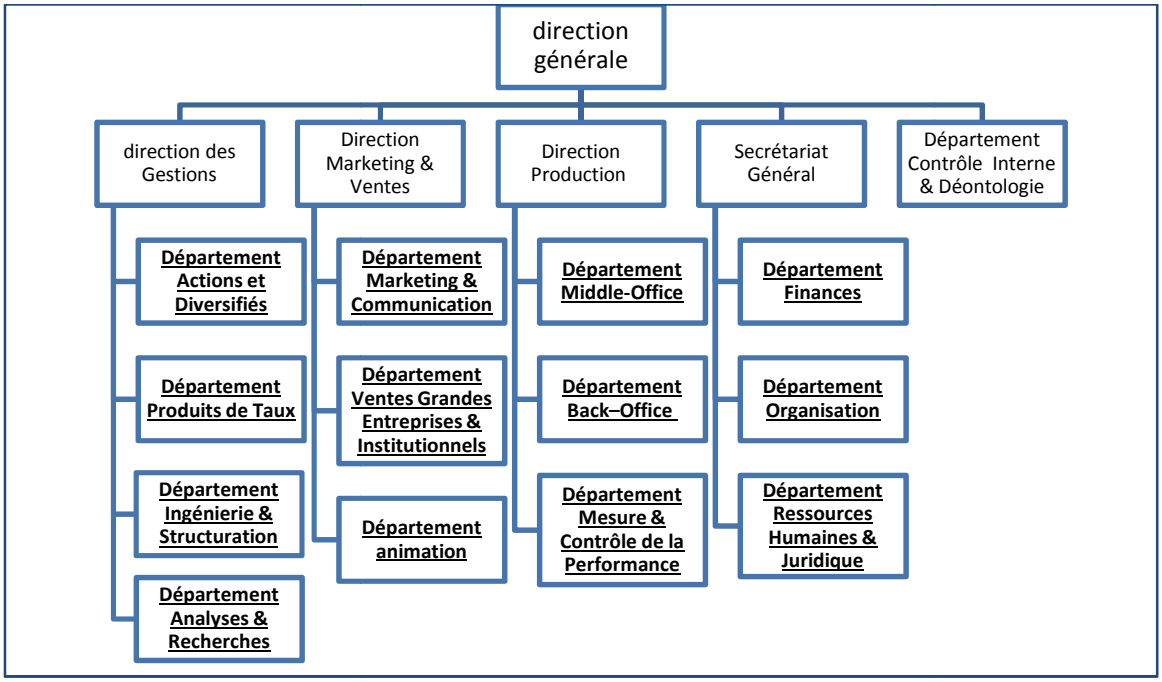


Figure 4: organigramme de Wafa Gestion

II. NOTION SUR LA STRUCTURE PAR TERME

II.1. Notions et définitions sur le taux d'intérêt

L'intérêt représente le rendement du prêt ou du placement d'un actif monétaire ou financier ; il est le surplus qu'un emprunteur d'un capital (somme d'argent) versera à un prêteur pour l'utilisation de cette somme pendant un certain temps. C'est aussi le prix que le prêteur demande à l'emprunteur à titre de compensation pour ne pas pouvoir utiliser le montant prêté pendant la durée du prêt.

Cette définition recouvre sous le générique « intérêt » une multiplicité de taux opérationnellement appréhensibles.

II.1.1. Les différents taux

1) Taux nominal et taux réel

Le taux d'intérêt nominal est le taux convenu entre l'émetteur et le souscripteur d'un emprunt obligataire qui détermine le montant des intérêts annuels. Il se calcule en Dirhams courants, sans tenir compte du fait que l'inflation déprécie mécaniquement la somme prêtée. Tandis que le taux d'intérêt réel d'un emprunt correspond au taux facial corrigé de l'inflation constatée sur la période de calcul des intérêts. Ainsi si π correspond au taux d'inflation, R au taux d'intérêt nominal et r au taux d'intérêt réel, on a : $1 + r = \frac{1+R}{1+\pi}$.

Sous l'hypothèse que π et n ne sont pas trop élevés, on peut écrire: $r = R - \pi$ (relation de Fisher).

2) Taux de rendement actuariel

Le taux de rendement actuariel représente le taux d'actualisation qui égalise la valeur actuelle d'une suite de cash flow générés par un titre à revenu fixe à son prix de marché.

3) Taux zéro-coupon

Le taux zéro coupon est le taux de rendement actuariel d'un instrument financier ne comportant aucun détachement de coupon jusqu'à la maturité. Il ne donne, alors, lieu qu'à deux flux : un flux initial (son prix d'achat) et un flux final de remboursement du nominal plus les intérêts.

4) Taux Forward ou taux à terme

Cette notion de taux Forward repose sur l'idée qu'il est possible de construire, à un instant donné, un portefeuille de titres (notamment des obligations) permettant de déterminer à l'avance le taux de rendement actuariel d'un prêt sur une période future.

Pour illustrer cette notion, prenons l'exemple d'un investisseur qui peut librement acheter et vendre des titres de maturités différentes. Pour fixer, dès aujourd'hui, le taux de

rendement sur un investissement qu'il réalisera dans le futur ($\boldsymbol{T}$); il lui suffit d'acheter un zéro-coupon venant à la date de maturité ($\boldsymbol{T}2$) souhaitée ($T2 > T1$), et, simultanément, de vendre des zéro-coupon venant à échéance à une date ($\boldsymbol{T}$) où il désire débuter son investissement. Le choix de montants appropriés pour les positions prêteuses et emprunteuses permet de faire en sorte que l'investissement net actuel (t***)*** soit nul. Lorsque la position emprunteuse vient à échéance, l'investisseur rembourse la valeur faciale du zéro-coupon et reçoit inversement la valeur faciale du titre acheté lorsque ce dernier vient à maturité. Le taux de rendement actuariel de cette stratégie est appelé taux de rendement à terme ou taux Forward.

5) Taux Moyen Pondéré :

Le TMP est un taux au jour le jour du marché monétaire. C'est un **taux moyen pondéré** par les montants des transactions déclarées, pour un échantillon représentatif d'établissements admis au marché interbancaire. Il est publié par la Banque centrale et constitue un des principaux taux de référence du marché monétaire.

6) Taux directeur :

Ce sont les taux d'intérêt déterminés par les Banques Centrales pour prêter de l'argent aux banques commerciales, d'où leur forte influence sur l'économie des pays.

II.1.2. Le marché de taux

Le marché de taux, comme son nom l'indique, est le marché sur lequel se négocient les produits de taux d'intérêts. Ce marché se compose d'un marché monétaire, influencé principalement par Bank Al Maghrib et le Trésor, et d'un autre obligataire. Nous verrons dans ce qui suit les détails concernant chacun de ses marchés.

1) Le marché monétaire :

Le marché monétaire est le marché sur lequel se négocie la monnaie, c'est-à-dire que c'est vers ce marché que se dirigent les acteurs du marché monétaire pour négocier leurs besoins en monnaie. On va donc y retrouver Bank Al Maghrib (BAM), les banques, les entreprises et les sociétés de financement.

Le marché monétaire est composé du marché interbancaire, du marché des adjudications des Bons du Trésor et du marché des titres négociables.

2) Le marché interbancaire :

Le marché interbancaire permet aux banques d'échanger leurs excédents et leurs déficits dans la monnaie nationale. Les acteurs du marché interbancaire sont d'une part, la Banque Centrale du pays (BAM), chargée de gérer la masse d'argent en circulation et d'autre part, les banques qui viennent y chercher l'argent nécessaire à leurs opérations de crédit.

3) Marché des adjudications des bons du Trésor :

Ce marché a vu le jour avec l'accès du Trésor aux circuits de financement du marché monétaire en émettant, de manière permanente, des bons de Trésor à un mois. Les opérations d'adjudications, à la hollandaise, portent sur les valeurs suivantes :

- Les Bons du Trésor à court terme de 13, 26 et 52 semaines;
- Les bons à moyen terme de 2 à 5 ans de durée, remboursables in fine;
- Les bons à long terme de 10 et 15 ans de durée, remboursables in fine.

L'adoption des adjudications des bons du Trésor sur le marché monétaire a pour objectifs de dynamiser ce marché, de stimuler la concurrence entre établissements prêteurs, de permettre au Trésor d'avoir accès à une source de financement importante tout en bénéficiant de conditions avantageuses de taux et de durées et, plus récemment, d'encourager les établissements prêteurs à soumissionner, en rendant négociables entre eux les valeurs du trésor émises dans le cadre de ces adjudications.

4) Marché des titres de créances négociables (TCN) :

Les titres de créances négociables (ou TCN) peuvent être définis comme des titres émis sous forme de billets ou de bons à échéance, matérialisés par des titres ou simplement inscrits en compte et qui, sans être cotés en bourse, confèrent à leurs détenteurs un droit de créance, librement négociable et portant intérêt.

Ces titres sont émis, sur le marché primaire, par les banques, par les sociétés de financement, par les entreprises et par le Trésor. Ils ont pour but de permettre crédit, emprunts et gestion de la masse monétaire. On peut classer les TCN en trois catégories principales : les certificats de dépôt négociables, les billets de trésorerie et les bons de sociétés de financement.

5) Le marché obligataire

Les obligations sont des valeurs mobilières représentatives de titres de créances négociables, à moyen ou long terme, remboursables à échéance et rapportant à leur détenteur un intérêt fixe ou variable.

Le marché obligataire est le marché sur lequel sont échangées les obligations. Il permet donc le placement des émissions nouvelles d'obligations (marché primaire) et la vente sur le marché secondaire, avant leur échéance prévue de remboursement, des obligations déjà émises.

Au Maroc, les émissions d'emprunts obligataires sont réservées à l'Etat, aux entreprises publiques ou semi-publiques autorisées ou garanties par l'Etat et, au niveau des entreprises privées, aux seules sociétés anonymes ayant deux années d'existence et un capital entièrement libéré.

Il existe plusieurs types d'obligations, cependant elles ont une caractéristique commune qui est le versement d'un coupon (intérêt) en contrepartie d'un prêt accordé de la part de l'investisseur. Les différentes obligations sont énumérées comme suit:

- ✓ ***L'obligation à revenu fixe*** qui est un titre de créance à revenu fixe (taux d'intérêt fixe) et dont le capital obligatoirement remboursable à échéance.
- ✓ ***L'obligation à taux variable*** qui, comme son nom l'indique, procure un intérêt variable modifié périodiquement selon un indicateur de taux d'intérêt.
- ✓ ***Une obligation dite à coupon zéro*** est une obligation dont les intérêts et le capital sont versés en totalité à l'échéance de l'emprunt après avoir été capitalisés sur toute la période.
- ✓ ***L'obligation convertible*** est une obligation classique qui donne au souscripteur, à son détenteur, pendant la période de conversion, la possibilité de l'échanger contre une ou plusieurs actions de la société émettrice. C'est un produit d'une grande souplesse d'utilisation puisque le taux d'intérêt peut être fixe, variable, indexé, flottant, révisable, etc., toute condition d'amortissement pouvant par ailleurs être envisagée, en particulier le coupon zéro. L'obligation convertible s'assimile alors à une obligation classique avec une option d'achat sur des actions nouvelles de l'émetteur.
- ✓ ***Une obligation échangeable*** est une obligation émise par une société et remboursable en actions d'une autre entreprise qu'elle détient en portefeuille. A l'échéance de l'emprunt, soit le cours de l'action sous-jacente a suffisamment monté pour que les investisseurs demandent le remboursement de l'obligation échangeable en actions sous-jacentes. La dette disparaît alors du bilan de la société ainsi que les actions sous-jacentes. Soit le cours n'a pas suffisamment monté, l'emprunt est alors remboursé en liquidités, et la société garde les actions sous-jacentes. L'obligation échangeable s'assimile à un prêt sur gages avec une option d'achat consentie à l'investisseur sur les titres détenus en portefeuille.
- ✓ ***Une obligation remboursable en actions,*** Contrairement aux obligations convertibles, pour lesquelles subsiste toujours un risque de non-conversion, les obligations remboursables en actions se transforment obligatoirement en capitaux propres. Elles sont remboursées par remise d'actions de la société émettrice. Il n'y a donc pas de flux financiers de remboursement.

II.1.3. La Courbe des Taux

La structure par terme des taux d'intérêt (ou courbe des taux ou encore gamme des taux) est la fonction qui, à une date donnée et pour chaque maturité en abscisse, indique le niveau du taux d'intérêt associé en ordonnée.
Il existe une multitude de courbes de taux. On distingue les courbes de marché et les courbes implicites. Les courbes de marché sont construites directement à partir des cotations de marché. Par contre, les courbes implicites sont dérivées indirectement de ces cotations.

III. LES THEORIES TRADITIONNELLES DE LA STRUCTURE PAR TERME

L'analyse de la structure par terme des taux d'intérêt est obtenue en confrontant les taux de rendement de divers instruments financiers que seule distingue la maturité résiduelle, leurs autres caractéristiques, qualité de l'émetteur, modalité de versement des coupons, régime fiscal, liquidité, etc, étant identiques. C'est probablement la question financière qui a le plus retenu l'attention des théoriciens. Il est remarquable qu'en dépit de la permanence de la recherche, non seulement aucune théorie ne s'impose de manière décisive, mais, en outre périodiquement, on semble assister à un total renouvellement des perspectives. En dépit de la diversité des théories, il est légitime d'admettre que l'hypothèse dite des anticipations constitue le noyau central de la perspective traditionnelle.

III.1. La théorie pure par les anticipations

Il s'agit d'une théorie qui consiste principalement à situer les investisseurs neutres à l'égard du risque, dont les anticipations sont rationnelles, dans un environnement financier totalement déréglementé, sans coûts de transactions, dans lequel les opportunités d'arbitrage sur l'ensemble des échéances sont infinies, ces arbitrages portant sur des zéro-coupons.

Un investisseur achetant un zéro-coupon sait, avec certitude, que sont prix à l'échéance sera égal à sa valeur faciale ; cela signifie que toute variation non anticipée du prix dans un futur proche doit être compensée par une variation opposée dans un futur plus éloigné de façon à respecter la contrainte de convergence du prix de marché vers le pair, à l'échéance. Il en résulte que les variations des rendements nominaux d'un titre donné sont négativement corrélés et dès lors prévisibles. Cet argument n'est cependant pas compatible avec le fait que les excès de rendement des titres longs sur les titres courts puissent être eux, imprévisibles. On étalera dans ce qui suit, une formulation de la théorie pure par les anticipations.

C'est une formulation qui affirme que le taux en t d'un instrument dont l'échéance intervient en t+m est une moyenne pondérée des taux courts, observés en t pour l'échéance t+1, et anticipé en t pour les échéances t+2, t+3,…, t+m. L'argumentation est simple, elle consiste à supposer un investisseur dont l'horizon de placement est à t+m et à affirmer que les arbitrages assurent l'équivalence parfaite des deux stratégies suivantes :

- Acheter en t un instrument venant à échéance en t+m et à porter jusqu'à cette échéance, égalisant cette dernière à l'horizon du placement ;
- Adopter une stratégie de roulement de titres courts consistant à acheter en t, au taux connu à un an, un instrument à un an, réinvestir en t+1 dans un instrument à un an, au taux à un an anticipé dans un an, etc., jusqu'à l'échéance.

Le spread des taux est donc ici intégralement expliqué par les taux courts présents et anticipés. Une courbe des taux plate est expliquée par la stabilité des anticipations sur l'évolution future des taux courts ; une courbe ascendante est associée à des anticipations de hausse des taux courts. Inversement, une inversion de la structure temporelle des taux ne peut s'expliquer que par des anticipations de baisse des taux courts futurs.

Plusieurs conséquences peuvent être déduites de cette hypothèse pure par les anticipations, conséquences qui peuvent servir de support aux tests empiriques de l'hypothèse :

- Première conséquence :

Sous réserve de la rationalité des anticipations, le spread actuel entre les taux longs et les taux courts est un prédicteur optimal des variations à long terme des taux courts futurs. Si, en outre, les anticipations sur ces taux courts futurs sont rationnelles, l'observation du spread aujourd'hui permet de connaitre, à un pur aléa prêt, l'évolution de ces taux courts. Lorsque le rendement long excède le rendement court, les rendements courts doivent croître, de sorte que le taux court moyen sur les (m-1) années restantes soit égal à m/(m-1) fois le spread courant.

- Deuxième conséquence:

Sous réserve de la rationalité des anticipations, le spread actuel entre les taux longs et les taux courts est un prédicteur optimal des variations à court terme des taux longs futurs.

- Troisième conséquence :

Sous l'hypothèse de rationalité des anticipations, les taux à terme courants sont des prédicteurs non biaisés des taux courts au comptant futurs ; c'est ce que l'on appelle l'hypothèse des anticipations locales.

La théorie de la structure par terme fondée sur les seules anticipations affirme :

- D'une part, que le rendement excédentaire des titres longs sur les titres courts est, en moyenne, nul ;

- D'autre part, que les écarts de ce rendement excédentaire par rapport à cette moyenne nulle sont totalement imprévisibles.

III.2. La prime de terme dans la structure par échéance des taux d'intérêt

La nouvelle formulation consiste à affirmer :

- Que le taux de rendement d'un titre long est égal à une moyenne pondérée des taux courts présents et anticipés majorés d'une prime de terme ;
- Que le rendement du portage d'un instrument long, pendant une période unitaire, est égal au rendement du portage d'un instrument court pendant cette période majorée d'une prime de terme.
- Que les taux à terme implicites extraits de la structure des taux sont égaux aux taux anticipés futurs, majorés d'une prime de terme.

De toute façon, il nous est clair à présent qu'une variation du spread n'a plus les capacités prédictives que lui attribuait la théorie pure ; par exemple une augmentation du spread peut maintenant être due à des anticipations accrues sur l'évolution des taux courts

et/ou à une élévation de la prime de terme. L'ambiguïté ne peut être levée sans une compréhension des déterminants de cette prime de terme.

Il nous semble légitime de classer, dans cette catégorie de modèles, les explications les plus traditionnelles de la structure par échéance des taux : la théorie de la segmentation des marchés, la théorie des habitats préférés, la théorie de la prime de liquidité.

II.1.1. La théorie de la segmentation des marchés

Cette approche peut être opposée à l'hypothèse pure par les anticipations de deux façons totalement distinctes :

- soit comme une hypothèse parfaitement symétrique valable dans un environnement de marchés segmentés, quand la théorie pure s'inscrit dans une économie de marchés parfaitement intégrés.
- Soit comme une extension de la théorie pure par la prise en compte d'une prime de risque, celle-ci étant simplement supposée infinie. Chaque opérateur cherche par conséquent à se protéger totalement sur un segment du marché des capitaux.

On admet qu'un type d'opérateur puisse intervenir sur plusieurs marchés simultanément ; mais aucune prime de risque, fut elle infinie, n'est suffisante pour l'inciter à profiter d'éventuelles opportunités d'arbitrage entre ces différents marchés. Il en résulte que, pour chaque échéance, les taux de rendement reflètent simplement l'état de l'offre et de la demande des titres de cette échéance. Une courbe de rendement inversée est le reflet d'une offre excédentaire de titres courts et d'une demande excédentaire de titres longs.

Les limites de cette approche extrême sont évidentes :

- L'hypothèse d'une segmentation réglementaire des marchés n'est plus acceptable dans l'environnement financier actuel;
- L'hypothèse d'une aversion infinie pour le risque est bien sûr extrême et dénuée de tout fondement empirique;
- La théorie n'explique pas certaines régularités empiriques comme par exemple, le fait que la courbe des taux tend à s'aplatir au fur et à mesure que les échéances augmentent.

II.1.2. La théorie de l'habitat préféré

On peut légitimement la considérer comme un amendement de la précédente, consistant à reconnaitre le caractère averse au risque des investisseurs mais à admettre l'existence de primes de risque infinies. Cette théorie consiste à affirmer que les préférences inter temporelles des agents économiques et/ou la structure de leurs ressources les conduisent à adopter un habitat préféré, c'est-à-dire un segment particulier de la courbe de rendement, segment qu'il n'accepte de quitter pour un autre qu'à la condition d'être rémunéré par une prime de risque, d'autant plus élevée que la distance est grande entre le segment visé et l'habitat préféré.

Le cas le plus simple consiste à supposer des investisseurs souhaitant se protéger totalement contre le risque de taux et adoptant comme seule règle d'investissement, l'égalisation de la duration des instruments portés à leur horizon de placement; c'est donc ce dernier qui détermine l'habitat préféré de chaque opérateur. La prime de risque exigée par ce dernier est dès lors fonction de l'écart entre l'horizon d'investissement et la duration des instruments disponibles sur le marché. Supposons qu'on a les deux cas extrêmes suivants:

- Une nouvelle politique d'émission des emprunteurs réduit la duration des instruments disponibles et une modification des préférences inter temporelles accroît l'horizon des investisseurs; ces derniers n'acceptent de quitter leur habitat préféré long qu'au prix d'une prime de risque importante sur les instruments courts: la courbe de rendement s'inverse.
- Si au contraire, l'horizon des investisseurs se rétrécit quand une politique de consolidation de la dette accroît la duration des instruments, la courbe des taux se redresse. Ce cas n'est pas loin d'être celui envisagé par les tenants de la théorie de la préférence pour la liquidité qui apparait ainsi comme un cas particulier de l'hypothèse de l'habitat préféré.

II.1.3. La théorie de la préférence pour la liquidité

On peut, en effet, considérer cette hypothèse comme un cas particulier de la précédente et la caractériser comme keynésienne, en ce sens qu'elle attribue aux investisseurs un habitat préféré situé dans les échéances les plus courtes de la courbe de rendement. Il en résulte que :

- Les investisseurs à horizon court optent pour des instruments courts portés à l'échéance plutôt que des titres longs revendus avant le terme ;
- Les investisseurs à horizon long préfèrent des stratégies de placements successifs dans des instruments courts périodiquement revendus à des stratégies d'achat d'instruments longs.

Il en résulte qu'à la valeur du taux de rendement long que justifieraient les seules anticipations sur les taux courts futurs, il convient d'ajouter une prime de liquidité, d'autant plus importante que la maturité des instruments est forte.

Cette théorie de la prime de liquidité à suscité plusieurs critiques. Retenons celle qui parait la plus évidente : l'affirmation selon laquelle les instruments courts sont systématiquement moins risqués, quel que soit l'horizon de placement de l'investisseur; il est clair que cela revient à négliger les risques de réinvestissement pour ne tenir compte que des risques des prix des instruments, hypothèse acceptable uniquement si les taux à court terme sont très peu volatils; dans le cas inverse, les risques, pour un investisseur à horizon long, d'une stratégie de roulements successifs d'instruments courts (le risque portant alors sur le prix et le coupon) sont supérieurs à ceux associés à un placement dans un instrument long (le risque ne concerne que les coupons réinvestis). On comprend mal, dans ce cas, que le rendement des titres longs doit bénéficier d'une prime de liquidité.

Conclusion du Chapitre préliminaire

Le passage en revue des principales notions de taux, du marché financier Marocain et des théories traditionnelles de taux d'intérêt est susceptible de nous fournir une vue d'ensemble du contexte du projet et nous donnera les moyens de mieux appréhender les chapitres qui constituent le vif du sujet.

Nous présenterons dans le chapitre qui suit, la modélisation empirique de la courbe des taux.

Chapitre 1 :
Etude empirique
De la structure par terme

La modélisation empirique de la courbe des taux est l'un des moyens les plus utilisés dans la prévision des taux. On consacrera la première partie de ce chapitre à l'analyse des données historiques et sur l'étude économétrique des taux d'intérêt.

Il s'agira, dans une deuxième partie, d'étudier les méthodes d'interpolation directes et indirectes de la courbe des taux. Ces modèles sont sans fondement théorique il ne serait donc raisonnable de se concentrer sur cette voie que si l'on ne souhaite disposer que de l'allure générale de la courbe avec le moins de paramètres possibles, à des fins d'analyse économique.

Il serait utile de rappeler que la base de données, initialement constituée des taux actuariels des bons de trésor, sera transformée en une base de taux zéro coupon, avant d'entamer toute modélisation. Ainsi, les données utilisées se rapporteront aux observations journalières et mensuelles des taux de bons d'obligation à zéro coupon.

I. ANALYSE EMPIRIQUE DES TAUX D'INTERET

Etant le seul titre représentatif de sa maturité, l'obligation zéro coupon présente les meilleures caractéristiques pour construire une structure par terme. Ainsi, dans ce qui suit, nous n'allons prendre en considération que les taux à coupon zéro. Mais on doit d'abord savoir comment passer des obligations à coupons aux obligations zéro-coupon.

I.1. Transformation des taux en zéro-coupon

I.1.1. Calcul d'un taux zéro-coupon pour les instruments zéro-coupon

Sur le court terme, les instruments négociés sont en général des instruments zéro coupon. Un prêt monétaire est en effet remboursé en même temps que les intérêts à la date d'échéance. Le calcul du taux zéro-coupon est alors un simple problème de conversion de base. Dans le cas d'un taux monétaire, la formule habituelle de conversion en base actuarielle nous fournit le taux zéro-coupon:

$$Y_a = \left(1 + \frac{r_m * n}{360}\right)^{\frac{1}{f}} - 1$$

Avec : r_m = taux monétaire (sur la base de 360 jours)
n = nombre de jours exact du placement,
Y_a = taux zéro-coupon actuariel,
f = fraction d'année du placement.

On peut aussi calculer le taux-zéro coupon actuariel à travers la formule suivante:

$$Y_a = \left(\frac{1}{N}\right)^{\frac{1}{f}} - 1$$

Avec I : le prix du zéro-coupon actuel,
N : le Nominal remboursé à échéance,
f : le nombre d'année du placement.

I.1.2. Calcul d'un taux zéro-coupon pour les instruments couponnés

La stratégie de calcul du taux zéro-coupon, pour des instruments comportant des coupons intermédiaires, consiste à déterminer la valeur actuelle nette de ces coupons intermédiaires, et à la soustraire du prix actuel du placement. L'actualisation de ces coupons se fait cependant grâce aux taux zéro-coupon des années précédentes. Pour déterminer le taux zéro-coupon d'une maturité n, il faudra donc connaître auparavant les taux zéro-coupon des maturités n-1, n-2 …

Pour résoudre ce problème récursif, on peut utiliser deux techniques: la méthode analytique itérative et la méthode matricielle. Nous étudierons, dans ce qui suit, la méthode

analytique et matricielle en supposant que nous disposons d'une série de N instruments actuariels i, détachant des coupons annuels C_i pendant un nombre d'années i. L'objectif est de calculer les n taux zéro-coupon y_n (pour n allant de 1 à N).

- **Méthode Analytique itérative**

Le taux zéro-coupon d'un instrument de maturité un an et distribuant un coupon C_1 au bout d'un an est égal au taux de ce placement puisque celui ci est déjà un zéro-coupon.

On a donc : $y_1 = C_1$.

Le taux zéro-coupon d'un instrument de maturité 2 ans et distribuant un coupon C_2 annuellement se calcule en replaçant le coupon intermédiaire C_2 distribué au bout d'un an au taux zéro-coupon 1 an y_1.

Si l'on procède aux deux opérations suivantes : prêt d'un montant unitaire sur deux ans et emprunt d'un montant $\frac{C_3}{(1+y_2)^2}$ au taux y_1 sur un an. On a le bilan des flux de ces deux opérations est donnée dans le tableau suivant :

Date	Emprunt	Prêt	Total
0	$\frac{C_2}{(1+y_1)}$	-1	$\frac{C_2}{(1+y_1)}-1$
1 an	-C3	C2	0
2 ans	0	1+C2	1+C2

On a par cette opération créé un instrument synthétique ne détachant pas de coupon intermédiaire. Le taux de rendement interne de cette opération est donc le même que celui d'un prêt zéro-coupon. On en déduit donc le taux zéro-coupon y2 du 2 ans :

$$1-\frac{C_1}{(1+y_1)}=\frac{1+C_2}{(1+y_2)^2} \quad \text{D'où} \quad y_2=\left[\frac{1+C_2}{1-\frac{C_2}{1+y_1}}\right]^{\frac{1}{2}}-1$$

En utilisant les taux zéro-coupon 1 an et 2 ans, on peut calculer le taux zéro-coupon 3 ans à partir du taux couponné 3 ans par une stratégie similaire à la précédente :

- Prêt d'un montant unitaire distribuant des coupons C_3 annuellement et remboursant 1 unité monétaire au bout de 3 ans,

- Emprunt en zéro-coupon de $\frac{C_3}{(1+y_2)^2}$ sur deux ans (cet emprunt zéro-coupon permet de compenser le flux ***C3*** reçu l'année 2,
- Emprunt de zéro-coupon de $\frac{C_3}{(1+y_1)^2}$ sur 1 an (cet emprunt zéro-coupon permet de compenser le flux ***C3*** reçu à l'année 1).

On a le bilan des flux de ces trois opérations dans le tableau suivant :

Date	Emprunt		Prêt	Total
0	$\frac{C_3}{(1+y_1)}$	$\frac{C_3}{(1+y_2)^2}$	-1	$1+\frac{C_3}{(1+y_1)}+\frac{C_3}{(1+y_2)^2}$
1 an	-C3	0	C2	0
2 ans	0	-C3	C3	0
3 ans	0	0	1+C3	1+C3

Tableau 1: méthode itérative de la transformation du taux actuariel en zéro coupon

On vérifie que la stratégie ainsi réalisée est bien une stratégie de prêt zéro-coupon sur 3 ans. On en déduit le taux zéro-coupon 3 ans ***y3***:

$$y_3 = \left[\frac{1+C_3}{1-\frac{C_3}{1+y_1}-\frac{C_3}{(1+y_2)^2}} \right]^{\frac{1}{3}} - 1$$

On procède ainsi par itérations successives pour les années suivantes en utilisant chaque fois les taux zéro-coupon déterminés précédemment. Ce mécanisme peut être résumé par la formule récursive du taux zéro-coupon n en fonction des n-1 taux zéro-coupon précédents :

$$y_n = \left[\frac{1+C_n}{1-C_n\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{(1+y_i)^i}} \right]^{\frac{1}{n}} - 1$$

En pratique, on utilise les facteurs d'actualisations pour évaluer les instruments financiers. Sachant que le facteur d'actualisation $\rho_i = \frac{1}{(1+y_i)^i}$ pour un flux perçu l'année i,

la formule précédente permet de calculer directement les facteurs d'actualisations sur l'ensemble de la courbe. On trouve alors :

$$\rho_n = \frac{1 - C_n \sum_{i=1}^{n-1} \rho_i}{1 + C_n}$$

Si on applique la formule précédente au facteur d'actualisation d'ordre n-1, il vient que :

$$\rho_{n-1} = \frac{1 - C_{n-1} \sum_{i=1}^{n-2} \rho_i}{1 + C_{n-1}} \qquad \text{D'où :} \qquad \sum_{i=1}^{n-1} \rho_i = \frac{1 - \rho_{n-1}(1 + C_{n-1})}{C_{n-1}} + \rho_{n-1}$$

En remplaçant somme dans le calcul du facteur d'actualisation du rang n, on obtient :

$$\rho_n = \frac{1 - C_n \left[\frac{1 - \rho_{n-1}(1 + C_{n-1})}{C_{n-1}} + \rho_{n-1} \right]}{1 + C_n} \qquad \text{D'où : } \rho_n = \frac{1 - \frac{C_n}{C_{n-1}}(1 - \rho_{n-1})}{1 + C_n}$$

On peut donc calculer très simplement par itérations successives les facteurs d'actualisations ρ_n sachant que : $\rho_1 = \frac{1}{1 + y_1} = \frac{1}{1 + C_1}$

I.2. Analyse statistique des données :

I.2.1. Présentation des variables

Notre base de données se compose de séries chronologiques des taux zéro coupon pour les maturités ; 13, 26 et 52 semaines, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15 et 20 ans pour la période allant du 02/01/2004 au 27/02/2009. Ainsi, que les séries chronologiques d'autres variables ; à savoir :

- le taux moyen pondéré (TMP)
- taux directeur (DIRC)
- Le taux d'inflation (INFL)

L'**inflation** est la hausse du niveau général des prix, entraînant une baisse durable du pouvoir d'achat de la monnaie.

- la liquidité (LIQ) :

Pour qu'un ordre d'achat ou de vente soit exécuté il faut trouver une contrepartie c'est à dire un ordre inverse sur le même titre et pour la même quantité. Plus il est facile de trouver une contrepartie plus on dit que le marché est liquide.

- la levée du trésor (LT) :

Pour couvrir les besoins en financement du trésor, ce dernier fait des offres d'appel (levée du trésor) pour vendre des bons de trésor d'une certaine maturité. Par le biais des adjudications, le trésor pourra trancher entre les banques qui répondent à son offre.

- Souscriptions des BDT émis par adjudications de maturité m (SBT_m)

On prendra les observations quotidiennes, hebdomadaires ou mensuelles selon nos besoins et selon la fréquence qui donne des résultats significatifs.

I.2.2. Graphes et Statistiques descriptives

L'évolution des taux zéro coupon durant la période allant du 02/01/2004 au 27/02/2009 a été marquée par une tendance baissière des taux longs et d'une progression graduelle du taux court. Le taux long a enregistré une diminution de 2 à 3%. Tandis que le taux court a augmenté de plus de 1%.

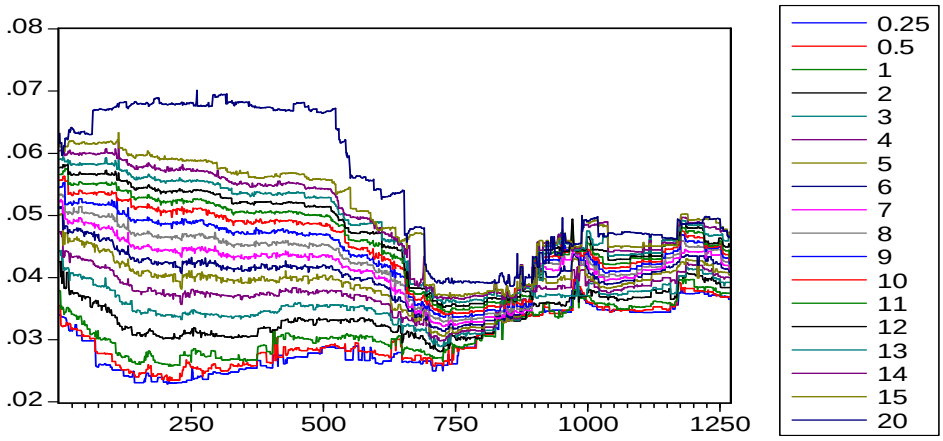


Figure 5: Evolution des taux zéro coupon pour différentes maturités durant la période du 02/01/2004 au 27/02/2009

La représentation de cette évolution sous les trois dimensions : temps, maturités et rendements est la suivante :

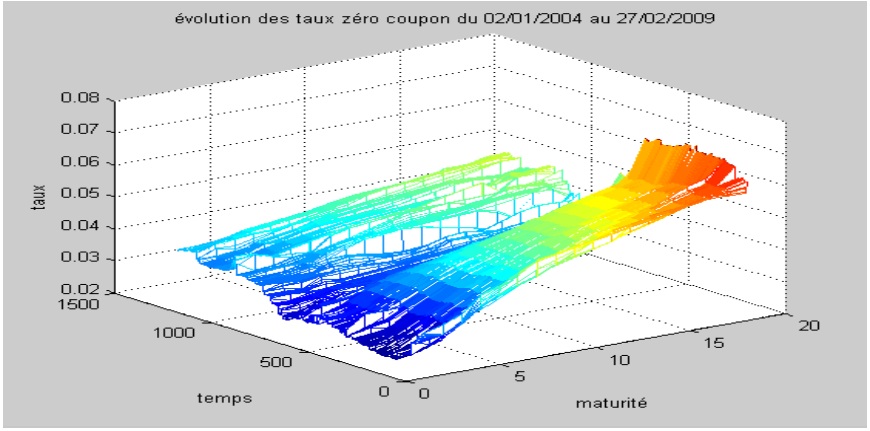


Figure 6:Evolution des taux ZC en trois dimensions

Cette forme de structure par terme est ascendante, puisque l'écart entre taux long et taux court reste positive pour les données marocaines durant cette période. Ainsi, cette structure par terme ne représente pas d'inversion de courbe.

Notre base de données comporte des données mensuelles et d'autres qui n'ont aucune périodicité. Par un souci d'homogénéité, nous allons dans la suite de ce chapitre se retreindre aux données mensuelles. Par conséquent, nous allons ramener toutes les variables à la périodicité d'un mois par une moyenne des données non mensuelles sur le mois.

Des graphiques des variables TMP, taux d'inflation, levée du trésor et liquidité seront utiles pour visualiser l'évolution de ces derniers dans le temps.

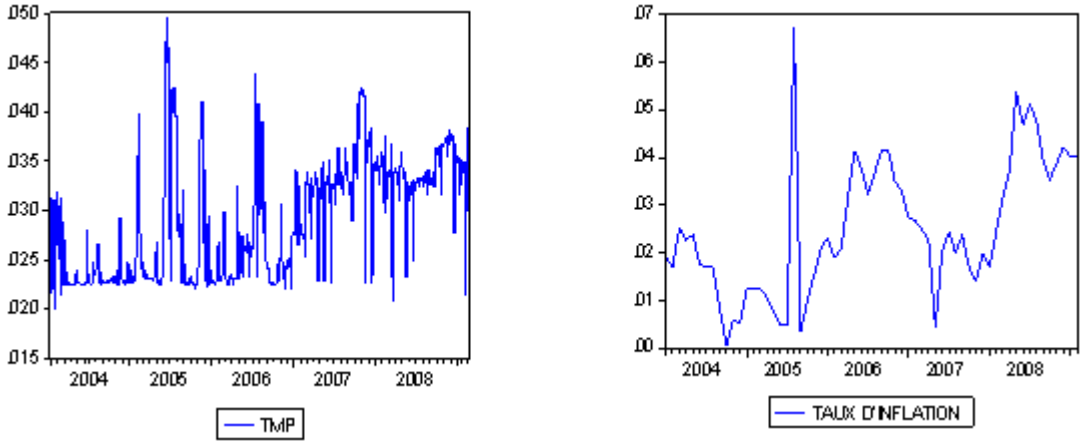


Figure 7 : graphes du TMP et du taux d'inflation

Le taux moyen pondéré est très volatil, il fluctue entre une valeur minimale de 2,3785% et une valeur maximale 3,5053% avec un écart type de 0,298%. Sa courbe présente une légère tendance haussière à partir de fin 2006.

De même, la courbe du taux d'inflation atteste la présence d'une faible tendance haussière qui ne dépasse pas de loin les 4%, mais qui a pu atteindre une valeur minimale de 0,05% en 2004. Cette courbe est moins volatile que la précédente avec un écart type de 1,425% (en éliminant quelques points aberrants).

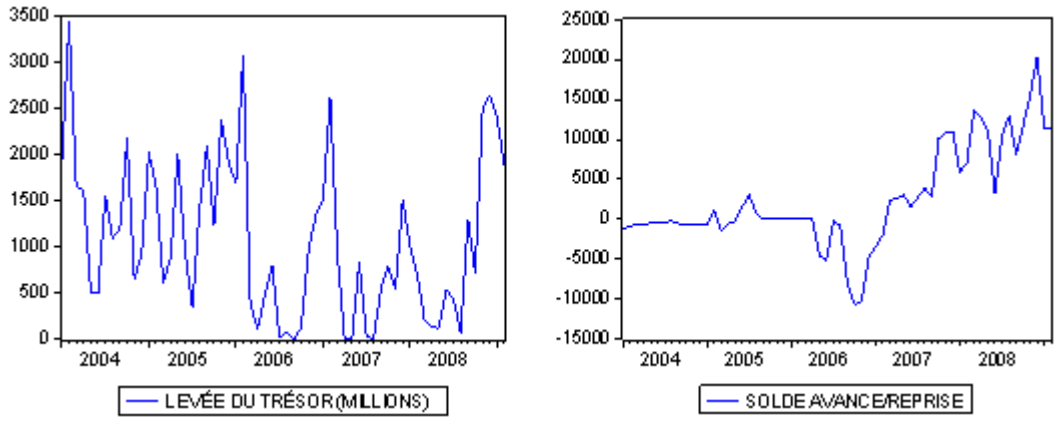


Figure 8: graphes du levée du trésor et de la liquidité

Le trésor offre de moins en moins de bons de trésor, ce qui explique la baisse du volume global des souscriptions de bons de trésor. Sa demande en matière de financement est assez variable et fluctue entre 0 et 2,5 milliards de DH.

De sa part, la liquidité (reprises et avances) a connu durant la période d'étude une légère baisse suivie d'une hausse importante. Elle a varié de -10651.61 à 20337.10 millions Dh.notons que la liquidité est peu volatile.

II. REGRESSION LINEAIRE MULTIPLE SUR LE TAUX ZERO COUPON

Nous allons essayer d'appliquer, dans ce qui suit, la régression linéaire simple et multiple pour explique l'évolution des taux d'intérêt zéro coupon pour différentes maturités. Pour ce, nous allons utiliser certaines des variables présentées plus haut.

Pour la période d'observation : les données disponibles pour le taux d'intérêt sont celles allant du 02/01/2004 au 27/02/2009 soit 1269 observations quotidiennes, ce qui revient à 63 observations mensuelles.

Comme on l'a mentionné précédemment, nous allons nous restreindre à l'étude des données mensuelles. A cause du manque d'observations quotidiennes pour toutes les variables et également dans le but de pallier la présence de point aberrants et afin de minimiser les erreurs dues aux observations.

II.1. Le modèle de régression linéaire

Soit le modèle de régression suivant :

$$Y = \beta_0 + \sum_{i=1}^{n} \beta_i X_i + \varepsilon$$

Avec $\varepsilon \xrightarrow{iid} N(0,1)$ résidu ; la différence entre la valeur empirique du taux d'intérêt et la valeur théorique retrouvé par le modèle.

n : le nombre de variables explicatives

Y : La variable dépendante (taux d'intérêt)

X_i : La variable explicative i ; $i = 1 \dots n$

β_0 : Constante du modèle ;

β_i : exprime la variation du taux d'intérêt lorsque la variable explicative varie d'une unité en (%) $i = 1 \dots n$.

II.2. Etude de la corrélation entre les variables explicatives

Le tableau ci- dessous nous donne la corrélation entre les variables indépendantes :

	LT	LIQ	INFL	DIRC	TMP
LT	100,00%	2,96%	-11,35%	37,31%	-10,69%
LIQ	2,96%	100,00%	25,17%	55,46%	68,48%
INF	-11,35%	25,17%	100,00%	30,20%	19,84%
DIRC	37,31%	55,46%	30,20%	100,00%	35,50%
TMP	-10,69%	68,48%	19,84%	35,50%	100,00%

Tableau 2: corrélation entre variables explicatives

On remarque que le TMP et la Liquidité sont très corrélés, donc la présence de ces deux variables dans le même modèle va biaiser nos résultats. De même que pour le taux directeur et la liquidité.

II.3. Application du modèle de régression linéaire sur les taux zéro coupon

Pour l'analyse de ce modèle, on va utiliser SPSS et Eviews comme outils statistiques.

Les résultats donnés par ces logiciels sont appliqués pour chaque maturité selon l'historique disponible.

II.3.1. Régression sur le taux court terme

On étudiera les taux d'intérêt zéro coupon de 13, 26 et 52 semaines.

1) Spécification du modèle :

Notre base de données comporte 62 observations concernant les données mensuelles des variables utilisées

Soit Y : le taux d'intérêt de 13 semaines

Les variables qu'on tentera d'introduire dans le modèle ne doivent pas être très corrélés pour ne pas biaiser les résultats. Le test de la corrélation nous montre que le TMP est corrélé à un niveau de 68,48% avec la liquidité (solde avance/reprise) ce qui suppose la suppression de cette variable du modèle, puisque le TMP explique mieux les taux courts. Le taux directeur ne sera pas compris dans le modèle du fait qu'il ne prend que les deux valeurs 2,25% et 2,5% durant note période d'étude.

Le modèle générale est comme suit :

$$Y = \beta_0 + \beta_1 TMP + \beta_2 INF + \beta_3 SBT + \varepsilon$$

2) Hypothèses :

1) $E[\varepsilon_i] = 0$; $cov(\varepsilon_i, x_{ij}) = 0$ pour j=1 ..5
2) $V(\varepsilon_i) = \sigma_\varepsilon^2$; $cov(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0$ pour i=1..62 , j=1 ..62
3) Absence de collinéarité des variables explicatives.
4) $\varepsilon_i \xrightarrow{iid} N(0, \sigma^2 I)$; I : matrice identité

3) Estimation des paramètres :

La méthode des moindres carrés est la méthode la plus adéquate qui donne les meilleurs résultats pour estimer les paramètres du modèle (Théorème de Gauss Markov). La méthode de régression ascendante nous suggère une seule variable explicative significative ; le TMP.

Coefficients [a]

Modèle		Coefficients non standardisés		Coefficients standardisés	t	Signification	Statistiques de colinéarité	
		B	Erreur standard	Bêta			Tolérance	VIF
1	(constante)	-,842	,204		-4,128	,000		
	TMP	1,404	,075	,923	18,608	,000	1,000	1,000

a. Variable dépendante : 13 semaines

Tableau 3: paramètres du modèle de régression du taux 13 semaines

Le Modèle de régression pour le taux 13 semaines devient :

Y= -0.008423709725+ 1.403819033*TPM+ ε

De même, en appliquant la méthode ascendante pour estimer les paramètres de régressions pour le taux 26 et 52 semaines, on trouve les modèles suivants :

Pour le taux 26 semaines: **Y =-0.006035370618+1.349933954*TPM + ε**

Pour le taux 52 semaines : **Y =-6,035E-03+1,350*TPM+ ε**

On remarque que pour les taux court, seul le TMP explique significativement le modèle de régression.

4) Validation du modèle :

✓ Coefficient de corrélation et tableau ANOVA :

Le coefficient de corrélation détermine le niveau de relation linéaire qui existe entre la variable dépendante et les variables indépendantes. Plus ce coefficient est proche de 1, plus notre modèle linéaire modélise mieux l'évolution des taux zéro coupon.

En utilisant SPSS, on obtient le tableau suivant pour le taux 13 semaines.

Récapitulatif du modèle[b]

Modèle	R	R-deux	R-deux ajusté	Erreur standard de l'estimation	Durbin-Watson
1	,923[a]	,852	,850	,17560334431162%	,295

a. Valeurs prédites : (constantes), TMP

b. Variable dépendante : 13 semaines

Tableau 4: coefficient de corrélation du taux 13 semaines

Presque les mêmes résultats sont obtenus pour les taux zéro coupon de 26 et 52 semaines.

- Le coefficient de corrélation R= 92% indique une forte relation linéaire pouvant exister entre le taux d'intérêt et le TMP
- la valeur R^2 = 85,2% signifie que le TMP à lui seul explique plus que 85% de la variation totale du taux zéro coupon court.

Tableau ANOVA donné par SPSS pour le taux 26 semaines :

ANOVA [b]

Modèle		Somme des carrés	ddl	Carré moyen	F	Signification
1	Régression	9,874	1	9,874	351,824	,000[a]
	Résidu	1,684	60	2,806E-02		
	Total	11,558	61			

a. Valeurs prédites : (constantes), TMP

b. Variable dépendante : 26 semaines

Tableau 5: tableau ANOVA pour le taux 26 semaines

La régression explique la totalité de la variation totale du taux d'intérêt zéro coupon de 26 semaines. La valeur de la statistique de Fisher F=354 est significative. Les mêmes conclusions sont obtenues pour les taux 13 et 52 semaines.

✓ Analyse de la normalité des résidus

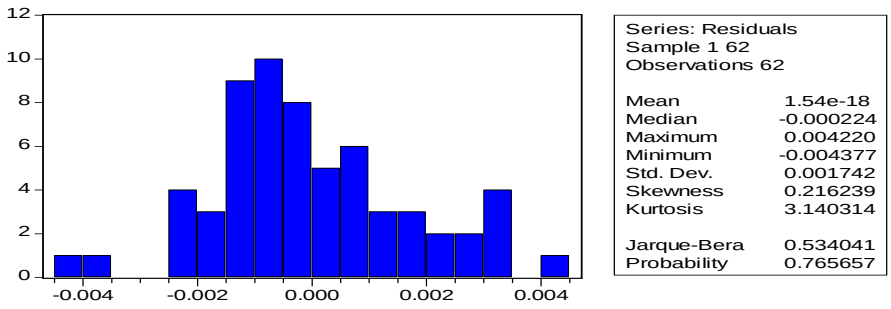


Tableau 6: histogramme des résidus du modèle de régression du taux 13 semaines

La forme de l'histogramme des résidus standardisés est presque celle d'une loi normale. Le test de Jarque-Bera affirme la normalité des résidus (0,534<5,99). Donc, on ne rejette pas l'hypothèse de normalité des résidus.

- Le modèle de régression pour le taux court expliqué par le TMP satisfait plusieurs critères et donne de bons résultats. Ainsi, ce modèle de régression linéaire peut être adapté pour l'explication des taux court par le TMP.

II.3.2. Régression sur le taux moyen terme

Les mêmes spécifications et hypothèses élaborées dans le taux court terme seront adoptées pour la régression linéaire sur les taux moyen terme.

1) Régression sur le taux 2 ans :

Le Modèle de régression pour le taux 2 ans est le suivant :

$$Y = -0{,}0018 + 1{,}259 * TPM - 0{,}0229 * INF + \varepsilon$$

Le coefficient de corrélation R= 93,3% indique une forte relation linéaire pouvant exister entre le taux d'intérêt et le TMP.

La valeur de la statistique de Fisher F=405,222 dans l'explication de la variance totale est significative. Et donc le modèle de régression linéaire peut être adapté pour l'explication du taux 2 ans par le TMP.

2) Régression sur le taux 5 ans :

La méthode de régression itérative « pas à pas » nous donne le modèle suivant :

$$Y = 2{,}128E\text{-}02 + 0{,}675 * TPM - 8{,}233E\text{-}02 * INF + \varepsilon$$

On remarque que la significativité du TMP dans la régression linéaire sur les taux zéro coupon diminue avec la maturité et que d'autres variables explicatives commencent à devenir plus significatives tel le taux d'inflation.

Le coefficient de corrélation R= 54,2% est devenu assez faible et la valeur de Fisher F=12,256 du tableau ANOVA n'est plus significative. Ainsi, la relation entre le taux est les variables explicatives est devenu peu solide, ceci peut être expliqué ; soit par le fait que les variables indépendantes n'expliquent pas vraiment les taux moyen terme, soit par le fait que le modèle de régression linéaire n'est pas approprié.

II.3.3. Régression sur le taux long terme

La régression linéaire multiple n'est plus significative pour les taux de long terme. Pour modéliser le taux long terme on devrait chercher soit d'autres variables explicatives ce qui n'est pas le cas dans notre étude, soit de chercher d'autres modèles qui puissent donner des niveaux de signification assez élevée.

III. METHODES D'INTERPOLATION

Le principe de l'estimation des bons zéro-coupon consiste à donner une spécification analytique au prix du zéro coupon $B(t, m)$ en fonction de m (maturité) et de paramètres puis à estimer ces paramètres à une date donnée.

Il existe plusieurs méthodes pour estimer des courbes de taux zéro-coupon. Leur point de départ est le même : les données du marché ne permettent pas de reconstituer l'ensemble de la gamme des taux pour toutes les échéances ; il est donc nécessaire de contraindre la courbe des taux zéro-coupon à appartenir à une famille particulière de courbes (dite *famille d'interpolation*) avec un nombre raisonnable de paramètres à estimer. Cette famille d'interpolation doit être suffisamment grande pour contenir les principales formes caractéristiques de la gamme des taux (courbes des taux ascendantes, inversées, concaves, convexes…) mais être en même temps suffisamment restreinte pour pouvoir trouver rapidement celle qui s'ajuste le mieux à nos données à un instant précis.

III.1. Les méthodes directes d'interpolation

Dans le marché financier, on ne dispose pas des taux pour toutes les maturités et donc l'opérateur financier se trouve dans l'obligation de déterminer lui même les taux manquants de la courbe des taux d'intérêt.

Quand on utilise la méthode directe, il est nécessaire de choisir une méthode d'interpolation entre deux points. Deux méthodes sont particulièrement utilisées: les interpolations linéaire et cubique.

III.1.1. Interpolation linéaire

On connaît les taux zéro-coupon de maturités t_1 et t_2. On souhaite interpoler le taux de maturité t avec $t_1 < t < t_2$

$$R(0,t) = \frac{(t_2 - t)R(0,t_1) + (t - t_1)R(0,t_2)}{(t_2 - t_1)}$$

Exemple :

Si le taux à 3ans et 6 mois est égal à 4,3% et le taux à 4 ans et 9 mois est de 5,1%. On interpole pour construire celui de 4 ans par la formule :

$$R(0,t) = \frac{0{,}5R_{3,5} + 0{,}75R_{4,75}}{1{,}25} = 4{,}78\%$$

III.1.2. Interpolation cubique

On procède à une interpolation cubique par segment de courbes. On définit un premier segment entre t_1 et t_4 où l'on dispose de 4 taux ; $R(0,t_1)$, $R(0,t_2)$, $R(0,t_3)$, $R(0,t_4)$.

Le taux $R(0,t)$ de maturité t est défini par $R(0,t) = at^3 + bt^2 + ct + d$ sous la contrainte que la courbe passe par les quatre points de marché R(0, t_1), R(0, t_2), R(0, t_3), R(0, t_4).

D'où le système à résoudre:

$$\begin{cases} R(0,t_1) = at_1^3 + bt_1^2 + ct_1 + d \\ R(0,t_1) = at_2^3 + bt_2^2 + ct_2 + d \\ R(0,t_1) = at_3^3 + bt_3^2 + ct_3 + d \\ R(0,t_1) = at_4^3 + bt_4^2 + ct_4 + d \end{cases}$$

Ces méthodes nous permettent de lisser la courbe des taux pour chaque date donnée.

Par exemple, pour la date du 01/02/2008, on trouve les paramètres suivants :

a=-5,1999E-07, b=--4,0035E-06, c=0,00097835 et d=0,03542304

La courbe lissée du 01/02/2008 peut être schématisée comme suit :

maturité	0,25	0,5	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	20
01/02/2008	0,0356674	0,0359168	0,036805	0,0379638	0,0390943	0,0396513	0,0401497	0,0406581	0,0414588	0,0425343	0,0434013	0,0442862	0,0452121	0,0461745	0,0471635	0,048182	0,0487879	0,0492287

maturité	39479	r(0,m)
0,25	0,0356674	0,0356674
0,5	0,0359168	0,0359112
1	0,036805	0,0363969
2	0,0379638	0,0373596
3	0,0390943	0,038308
4	0,0396513	0,0392391
5	0,0401497	0,0401497
6	0,0406581	0,0410367
7	0,0414588	0,041897
8	0,0425343	0,0427274
9	0,0434013	0,0435248
10	0,0442862	0,0442862
11	0,0452121	0,0450084
12	0,0461745	0,0456882
13	0,0471635	0,0463226
14	0,048182	0,0469084
15	0,0487879	0,0474425
20	0,0492287	0,0492287

Interpolation cubique

a	-5,2E-07
b	-4E-06
c	0,0009783
d	0,035423

matrice A			
0,015625	0,0625	0,25	1
125	25	5	1
1000	100	10	1
8000	400	20	1

inverse matrice A			
-0,001093	0,002807	-0,002051	0,0003376
0,0382651	-0,084912	0,0517949	-0,005148
-0,382651	0,5824561	-0,217949	0,0181435
1,0932882	-0,140351	0,0512821	-0,004219

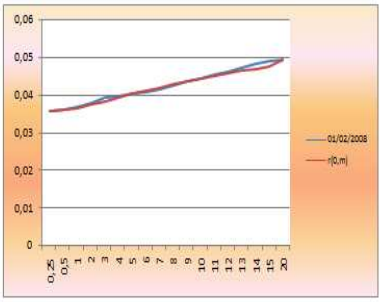


Figure 9: Exemple d'Interpolation cubique de la courbe des taux

- Les méthodes directes d'interpolation sont très simple à élaborer mais ne donnent pas des précisions assez élevées et ne permettent pas de modéliser toutes les formes de courbe.

III.2. Les méthodes indirectes d'interpolation

III.2.1. Les modèles à splines

Ils sont fondés sur une modélisation de la fonction d'actualisation. Les plus célèbres sont les splines polynomiaux et les splines exponentielles. Leur avantage tient à leur grande flexibilité qui leur permet de reconstruire toutes les formes de courbe rencontrées sur le marché.

III.2.2. Principe des modèles à splines

Il faut d'abord faire le choix d'une forme spécifique pour la fonction d'actualisation $f(s-t,\beta)$. La méthode consiste à estimer les paramètres en minimisant l'écart au carré entre prix de marché et prix reconstitués.

Rappelons que le prix théorique de la j-ème obligation s'écrit:

$\hat{P}_t^j = \sum_s F_s^j\, B(t,s) = \sum_s F_s^j\, f(s-t,\beta)$ où $B(t,t)=1$ constitue la contrainte de la minimisation

A une date t, on écrit: $P^j = \hat{P}_t^j + \varepsilon_j$ où ε_j est la partie résiduelle non expliquée par le modèle.

Les résidus vérifient les conditions suivantes:
- en moyenne, ils sont nuls: $E\left[\varepsilon_j\right] = 0$

- ils sont non corrélés entre eux: $cov(\varepsilon_j, \varepsilon_k) = 0$

- il y a deux hypothèses possibles pour la variance :

- soit on la suppose constante auquel cas les résidus sont homoscédastiques $V(\varepsilon_j) = \sigma^2$
- soit elle varie pour chaque titre auquel cas les résidus sont hétéroscédastique $V(\varepsilon_j) = \sigma^2 w_j$

Quand on admet la première hypothèse, on constate que la partie courte de la courbe est mal estimée. Dans ce cas, le vecteur des paramètres est obtenu par la méthode des MCO sous contrainte.

L'idée est donc de retenir la deuxième hypothèse en donnant plus de poids dans la minimisation aux obligations de maturité courte. Une façon de procéder est de choisir un poids égal à la duration de l'obligation: $w_j = Dur_j$

Ce choix revient à résoudre le problème suivant: $\mathrm{Min}_\beta \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{P_t^j - \hat{P}_t^j}{w_t^j}\right)^2$

Dans ce cas, le vecteur des paramètres β est obtenu par la méthode des MCG sous contrainte ou MCO pondérés sous contrainte.

Ce choix est rationnel: il revient à dire que plus une obligation a une maturité longue, plus difficile est son prix à estimer.

III.2.3. Les splines polynomiaux

1) Modélisation standard

Il est commun de considérer l'écriture standard comme dans l'exemple qui suit:

$$B(0,s) = \begin{cases} B_0(s) = d_0 + c_0 s + b_0 s^2 + a_0 s^2, & s\epsilon[0,5] \\ B_1(s) = d_1 + c_1 s + b_1 s^2 + a_1 s^2, & s\epsilon[5,10] \\ B_2(s) = d_2 + c_2 s + b_2 s^2 + a_2 s^2, & s\epsilon[10,20] \end{cases}$$

La fonction d'actualisation compte ici 12 paramètres.

On rajoute des contraintes de régularité sur cette fonction qui garantissent la continuité, la continuité de la dérivée première et de la dérivée seconde de cette fonction aux points de raccord 5 et 10.

Pour i =0, 1 et 2: $\begin{cases} B_0^i(5) = B_5^i(5) \\ B_{10}^i(10) = B_5^i(10) \end{cases}$

Et la contrainte qui porte sur le facteur d'actualisation:
En utilisant l'ensemble de ces 7 contraintes, le nombre de paramètres à estimer tombe à 5:

$$B(0,s) = \begin{cases} B_0(s) = d_0 + c_0 s + b_0 s^2 + a_0 s^2, & s\epsilon[0,5] \\ B_5(s) = 1 + c_0 s + b_0 s^2 + a_0[s^3 - (s-5)^3 + a_1(s-5)^3, & s\epsilon[5,10] \\ B_{10}(s) = 1 + c_0 s + b_0 s^2 + a_0[s^3 - (s-5)^3 + a_1[(s-5)^3 - (s-10)^3] + a_2(s-10)^3, & s\epsilon[10,20] \end{cases}$$

Le système précédent peut être écrit sous la forme suivante:

$$B(0,s) = 1 + c_0 s + b_0 s^2 + (a_1 - a_0)(s-5)_+^3 + (a_2 - a_1)(s-10)_+^3, s\epsilon[10,20]$$

Où $(s-\theta)_+^3 = [Max((s-\theta),0]^3$ est la fonction dite bornée de puissance.

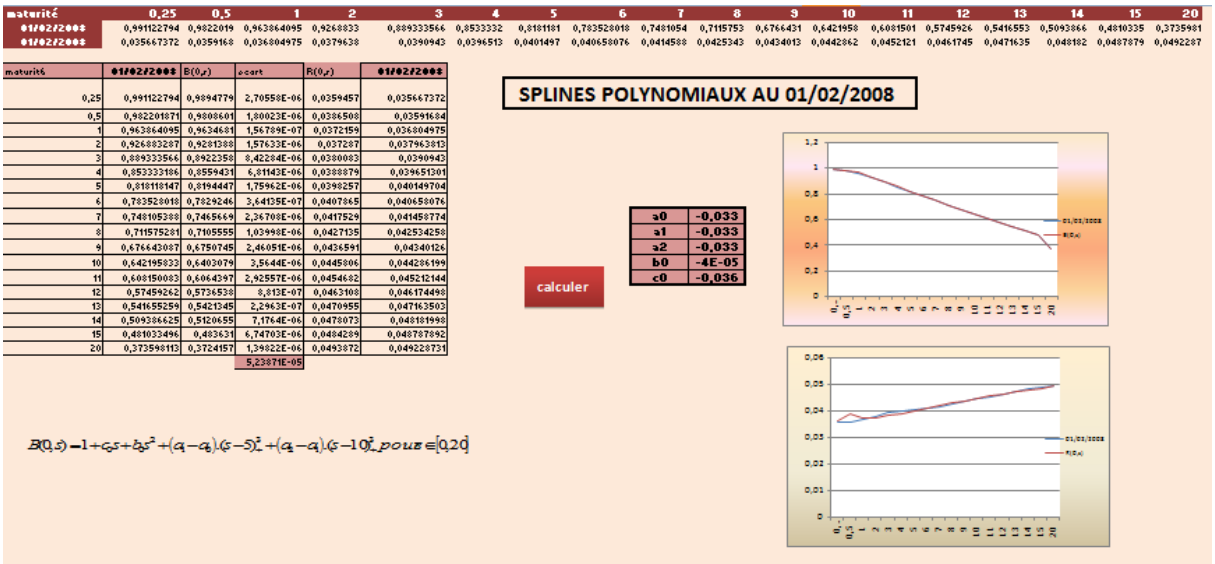
Il y a une autre écriture de cette équation dans la base des B-splines. Cette écriture est devenue extrêmement classique.

2) Application sur les données quotidiennes :

Les paramètres trouvés en minimisant les écarts au carré de la fonction prix observée et de la fonction déduite de la forme polynomiale sont :

$a_0 = -0{,}0336712$, $a_1 = -0{,}03358001$, $a_2 = -0{,}03359245$, $b_0 = -0{,}00019965$ et $c_0 = -0{,}04234012$

La feuille de calcul Excel de la courbe des taux par les splines polynomiaux est la suivante :



maturité	0,25	0,5	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	20
01/02/2008	0,991122794	0,9822019	0,963864095	0,9268833	0,889333566	0,8533332	0,8181181	0,783528018	0,7481054	0,7115753	0,6766431	0,6421958	0,6081501	0,5745926	0,5416553	0,5093866	0,4810335	0,3735981
01/02/2008	0,035667372	0,0359168	0,036804975	0,0379638	0,0390943	0,0396513	0,0401497	0,040658076	0,0414588	0,0425343	0,0434013	0,0442862	0,0452121	0,0461745	0,0471635	0,048182	0,0487879	0,0492287

maturité	01/02/2008	B(0,s)	ecart	R(0,s)	01/02/2008
0,25	0,991122794	0,9894779	2,70558E-06	0,0359457	0,035667372
0,5	0,982201871	0,9808601	1,80023E-06	0,0386508	0,03591684
1	0,963864095	0,9634681	1,56789E-07	0,0372159	0,036804975
2	0,926883287	0,9281388	1,57633E-06	0,037287	0,037963813
3	0,889333566	0,8922358	8,42284E-06	0,0380083	0,0390943
4	0,853333186	0,8559431	6,81143E-06	0,0388879	0,039651301
5	0,818118147	0,8194447	1,75962E-06	0,0398257	0,040149704
6	0,783528018	0,7829246	3,64135E-07	0,0407865	0,040658076
7	0,748105388	0,7465669	2,36708E-06	0,0417529	0,041458774
8	0,711575281	0,7105555	1,03998E-06	0,0427135	0,042534258
9	0,676642087	0,6750745	2,46051E-06	0,0436591	0,04340126
10	0,642195833	0,6403079	3,5644E-06	0,0445806	0,044286199
11	0,608150083	0,6064397	2,92557E-06	0,0454682	0,045212144
12	0,57459262	0,5736538	8,813E-07	0,0463108	0,046174498
13	0,541655259	0,5421345	2,2963E-07	0,0470955	0,047163503
14	0,509386625	0,5120655	7,1764E-06	0,0478073	0,048181998
15	0,481033496	0,483631	6,74703E-06	0,0484289	0,048787892
20	0,373598113	0,3724157	1,39822E-06	0,0493872	0,049228731
			5,23871E-05		

$$B(0,s)=1+c_0s+b_0s^2+(a_1-a_0)(s-5)_+^3+(a_2-a_1)(s-10)_+^3 \; pour \in [0,20]$$

Figure 10:courbe des taux par les splines polynomiaux et courbe de taux empirique

On remarque dans ce cas, que la courbe polynomiale s'ajuste bien à la courbe des taux pour la majorité des maturités. Cependant, pour le court terme, on observe un léger écartement entre les deux courbes.

III.2.4. Expression dans la base des B-splines

Les B-splines sont des fonctions linéaires de fonctions bornées de puissance. On écrit alors:

$$B(0,s)=\sum_{l=-3}^{2} c_l B_l^3(s)=\sum_{l=-3}^{2} c_l\left(\sum_{j=l}^{l+4}\left[\prod_{\substack{i=l\\ i\neq j}}^{l+4}\frac{1}{\lambda_i-\lambda_j}\right](s-\lambda_j)_+^3\right)$$

où les coefficients lambda sont définis comme suit:

$$\lambda_{-3}<\lambda_{-2}<\lambda_{-1}<\lambda_0=0<\lambda_1=5<\lambda_2=10<\lambda_3=20<\lambda_4<\lambda_5<\lambda_6$$

et $B(0,0)=\sum_{l=-3}^{2} c_l B_l^3(0)=\sum_{l=-3}^{-1} c_l B_l^3(0)=1$

1) Les splines exponentielles

Les splines exponentielles ont été introduites par Vasicek et Fong (1982):

$$B(0,s)=\begin{cases} B_0(s)=d_0+c_0e^{-\alpha s}+b_0e^{-2\alpha s}+a_0e^{-3\alpha s}, s\in[0,5] \\ B_5(s)=d_1+c_1e^{-\alpha s}+b_1e^{-2\alpha s}+a_1e^{-3\alpha s}, s\in[5,10] \\ B_{10}(s)=d_2+c_2e^{-\alpha s}+b_2e^{-2\alpha s}+a_2e^{-3\alpha s}, s\in[10,20] \end{cases}$$

En utilisant les mêmes contraintes de régularité, on ramène le problème à 7 paramètres à estimer sous la contrainte lié au facteur d'actualisation.

Le paramètre alpha est un paramètre d'ajustement supplémentaire qui rend le problème non linéaire. L'idée consiste à résoudre le problème comme s'il était fixé, puis à chercher sa valeur optimale.

III.2.5. Le choix du nombre de splines

Le nombre de splines influe sur la qualité des résidus et le lissage de la courbe. Plus il y a de splines et meilleurs sont les résidus. La courbe devient toutefois moins lisse, et peut passer par des points aberrants. Moins il y a de splines, plus on lisse la courbe, mais les écarts de prix peuvent devenir importants ce qui laisse penser que la courbe est mal rendue.

Pour choisir au mieux ce nombre de splines, on peut utiliser la règle suivante.

On constitue deux paniers. Le premier panier dit de minimisation contient les titres qui ont permis d'obtenir les paramètres d'estimation. Le deuxième panier dit de vérification contient des titres qui n'ont servi lors de la minimisation. Dans la mesure du possible, il faut que ces deux paniers soient homogènes, i.e contiennent à peu près le même nombre de titres, et les mêmes types de maturité (court, moyen et long). Pour chacun de ces deux paniers, l'idée consiste à calculer l'écart de prix moyen:

$$\overline{E} = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^{j=n} (P_t^j - \hat{P}_t^j)^2}{n}}$$

Ce sont les méthodes les plus utilisées en pratique.

<u>Principe</u>: Pour un panier d'obligations à coupons, il s'agit de la minimisation de l'écart au carré entre les prix de marché et les prix reconstitués à l'aide d'une forme a priori spécifiée des taux zéro-coupon ou de la fonction d'actualisation.

Soit un panier constitué de n titres. On note à la date t:

P_t^j : prix de marché du j-ème titre.

$\hat{P}_t^j$: prix théorique du j-ème titre

F_s^j : flux futur du j-ème titre tombant à la date s (s > t)

L'idée consiste à trouver le vecteur des paramètres β tel qu'on distingue deux grandes classes de modèles: $\underset{\beta}{Min} \sum_{j=1}^{n} \left(P_t^j - \hat{P}_t^j \right)^2$

- les modèles type Nelson et Siegel fondés sur une modélisation des taux zéro-coupon. Le prix théorique s'écrit: $\hat{P}_t^j = \sum_s F_s^j B(t,s) = \sum_s F_s^j . e^{-(s-t).g(s-t;\beta)}$

g est la fonctionnelle des taux zéro-coupon. Le prix de l'obligation est une fonction non linéaire des paramètres d'estimation. La résolution d'un tel problème s'effectue à l'aide d'un algorithme de Newton modifié.

- les modèles à splines fondés sur une modélisation de la fonction d'actualisation.

$$\hat{P}_t^j = \sum_s F_s^j B(t,s) = \sum_s F_s^j f(s-t;\beta)$$

f est une fonction linéaire des paramètres d'estimation. Par conséquent, le prix de l'obligation est également une fonction linéaire des paramètres d'estimation La résolution d'un tel problème est donc matricielle.

Conclusion du Chapitre I

Il fut très intéressant, dans un premier point de ce chapitre, d'observer l'évolution de la dynamique des taux zéro coupon en fonction de quelques variables explicatives et d'en tirer quelques conclusions qui suscitent de l'intérêt. On note dans ce sens, que la régression multiple a aboutit à de bons résultats pour le court et le moyen terme. En effet, le taux moyen pondéré explique à lui seul plus de 90% de la variation des taux à court terme, les taux à moyen terme, quant à eux, sont expliqués à plus de 90% par les variables taux moyen pondéré et taux d'inflation.

Dans un second point de ce chapitre ont été traitées les méthodes directes et indirectes d'interpolation de la courbe des taux. Deux de ces méthodes ont abouti à des résultats concluants, ce sont la méthode d'interpolation cubique et la méthode des splines polynomiaux. En effet, cette dernière lisse parfaitement la courbe des taux, tandis que l'interpolation cubique, un peu moins précise que la précédente, lisse assez bien la courbe.

Dans le chapitre qui vient, seront traités les modèles financiers de la courbe des taux.

Chapitre II :
Modèles financiers
De la courbe des taux

On se propose à présent d'adopter une vision purement financière pour modéliser la courbe des taux. Lorsque la courbe doit être utilisée par des financiers, pour détecter sur un marché les titres obligataires sur- ou sous-évalués ou pour évaluer des produits dérivés (options, contrats à terme…), l'utilisation des modèles étalés au fil de ce chapitre s'avère préférable car elle repose sur des modèles qui proposent une méthodologie cohérente d'évaluation.

Ce chapitre traitera trois modèles financiers de taille, il s'agit des modèles les plus utilisés dans la modélisation de la courbe des taux.

Les trois parties de ce chapitre seront consacrées respectivement aux modèles de Nelson Siegel, de Vasicek et de Cox, Ingersoll et Ross. Ainsi, dans chacune de ces parties, nous détaillerons les différentes étapes par lesquelles on passe pour obtenir la structure des taux. Ensuite, nous procéderons à l'estimation des paramètres de ces modèles.

I. LE MODELE DE NELSON ET SIEGEL

I.1 La fonctionnelle de Nelson Siegel

Le modèle de Nelson Siegel (NS) est le plus utilisé dans le domaine de la finance pour lisser la courbe des taux d'un côté, et pour faire des prévisions sur l'évolution de la courbe dans le temps, grâce aux prévisions effectuées sur les paramètres du modèle, d'un autre côté.

En effet, la fonction de Nelson Siegel se caractérise par un nombre raisonnable de paramètres à estimer et par une forme suffisamment souple pour pouvoir s'adapter à des configurations de marché très différentes, d'autant plus que la courbe obtenue est relativement lisse ce qui facilite la lecture des taux.

Le point de départ consiste à supposer que le taux à terme est la solution d'une équation différentielle du deuxième ordre qui prend la forme suivante :

$f(t,\theta,\alpha) = \mu_0 + \mu_1 e^{-\theta/\tau} + \mu_2 (-\theta/\tau) e^{-\theta/\tau}$ avec α vecteur des paramètres μ_0, μ_1 et μ_2

Le taux d'intérêt zéro-coupon se déduit par intégration du taux à terme sur l'intervalle [0, m] divisée par *m*. Cela conduit à la relation ci-dessous. Cette expression, tout comme la précédente, admet deux limites suivant les valeurs extrêmes de *m*. Pour une durée de vie égale à zéro, R(t,θ) est égal à $\mu_1+\mu_2$ qui s'analyse comme un taux court au comptant. Il est alors facile, pour l'estimation, de contraindre la fonction à passer par le taux court observé. Lorsque la durée de vie résiduelle tend vers l'infini, le taux zéro-coupon tend vers le paramètre μ_1 qui correspond au taux long. Ainsi, par construction, le taux zéro coupon, comme le taux à terme instantané, tend vers une asymptote horizontale quand le terme de l'échéance tend vers l'infini. Connaissant la forme du taux zéro-coupon, on déduit le prix associé, en temps continu.

Ainsi, la fonctionnelle imaginée par Nelson et Siegel s'écrit :

$$R^C(0,\theta) = \beta_0 + \beta_1\left[\frac{1-\exp(-\theta/\tau)}{\theta/\tau}\right] + \beta_2\left[\frac{1-\exp(-\theta/\tau)}{\theta/\tau} - \exp(-\theta/\tau)\right]$$

$R^C(0,\theta)$: taux zéro-coupon de maturité θ

β_0: Facteur de niveau; il s'agit du taux long,

β_1: Facteur de rotation; il s'agit de l'écart entre le taux court et le taux long,

β_2: Facteur de courbure,

τ : Paramètre d'échelle destiné à rester fixe au cours du temps.

I.2 Application du modèle de Nelson et Siegel

Les méthodes de minimisation par les algorithmes de résolution numérique, telle la méthode de Newton Raphson, exigent l'introduction de valeurs initiales pour les quatre paramètres de la fonctionnelle de Nelson Siegel et des contraintes sur ces paramètres.

La solution donnée par le solveur d'Excel est très sensible aux paramètres initiaux. Ainsi le choix de c'est paramètres sera déterminant dans la précision et la justesse de nos résultats.

Pour le premier paramètre qui est le facteur de niveau, il prendra comme valeur initial la valeur du taux long, soit le taux 20 ans de la courbe empirique qu'on veut lisser et cela pour chaque date.

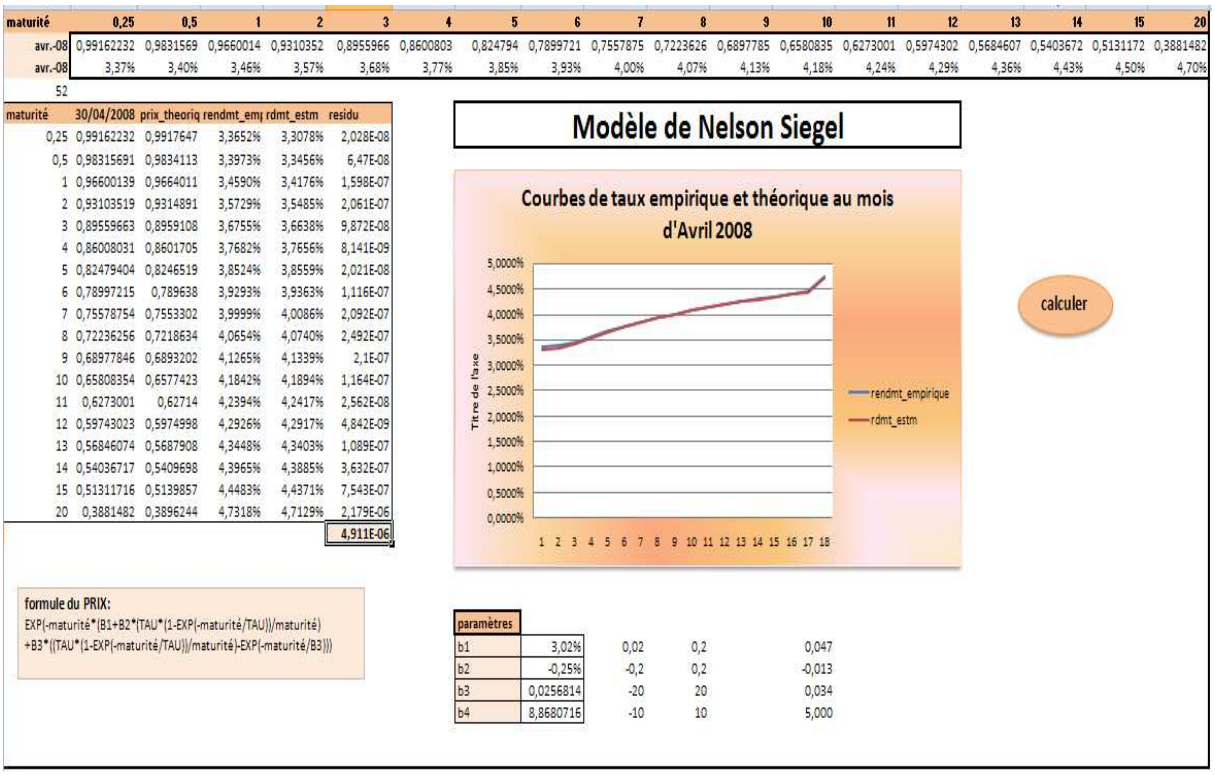
Le deuxième paramètre est le facteur de rotation, sa valeur initiale sera prise comme la différence entre le taux court (on prend le taux 13 semaine) et le taux long (taux 20 ans) de la date fixée auparavant.

Le paramètre b2 qui est le facteur de courbure, prendra comme valeur initiale 0, on suppose donc que la courbe est initialement plate et n'admet pas de courbure.

Le paramètre d'échelle qui devrait être fixe indique la position de la courbure de la courbe des taux, on prendra comme valeur initiale 5ans. Généralement, si la courbe des taux présente une courbure, elle se positionne à la limite du moyen et du long terme.

La base de données choisie se compose d'une série temporelle mensuelle des taux zéro coupon des différentes maturités de janvier 2004 à février 2009 soit 63 observations.

Pour chaque date on va tirer les paramètres du modèle NS pour pouvoir construire un historique sur la base duquel on pourra faire des prévisions pour estimer la courbe future des taux.



maturité	0,25	0,5	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	20
avr.-08	0,99162232	0,9831569	0,9660014	0,9310352	0,8955966	0,8600803	0,824794	0,7899721	0,7557875	0,7223626	0,6897785	0,6580835	0,6273001	0,5974302	0,5684607	0,5403672	0,5131172	0,3881482
avr.-08	3,37%	3,40%	3,46%	3,57%	3,68%	3,77%	3,85%	3,93%	4,00%	4,07%	4,13%	4,18%	4,24%	4,29%	4,36%	4,43%	4,50%	4,70%
52																		

maturité	30/04/2008	prix_theoriq	rendmt_emp	rdmt_estm	residu
0,25	0,99162232	0,9917647	3,3652%	3,3078%	2,028E-08
0,5	0,98315691	0,9834113	3,3973%	3,3456%	6,47E-08
1	0,96600139	0,9664011	3,4590%	3,4176%	1,598E-07
2	0,93103519	0,9314891	3,5729%	3,5485%	2,061E-07
3	0,89559663	0,8959108	3,6755%	3,6638%	9,872E-08
4	0,86008031	0,8601705	3,7682%	3,7656%	8,141E-09
5	0,82479404	0,8246519	3,8524%	3,8559%	2,021E-08
6	0,78997215	0,789638	3,9293%	3,9363%	1,116E-07
7	0,75578754	0,7553302	3,9999%	4,0086%	2,092E-07
8	0,72236256	0,7218634	4,0654%	4,0740%	2,492E-07
9	0,68977846	0,6893202	4,1265%	4,1339%	2,1E-07
10	0,65808354	0,6577423	4,1842%	4,1894%	1,164E-07
11	0,6273001	0,62714	4,2394%	4,2417%	2,562E-08
12	0,59743023	0,5974998	4,2926%	4,2917%	4,842E-09
13	0,56846074	0,5687908	4,3448%	4,3403%	1,089E-07
14	0,54036717	0,5409698	4,3965%	4,3885%	3,632E-07
15	0,51311716	0,5139857	4,4483%	4,4371%	7,543E-07
20	0,3881482	0,3896244	4,7318%	4,7129%	2,179E-06
					4,911E-06

paramètres				
b1	3,02%	0,02	0,2	0,047
b2	-0,25%	-0,2	0,2	-0,013
b3	0,0256814	-20	20	0,034
b4	8,8680716	-10	10	5,000

Figure 11: La feuille de calcul des paramètres de la fonctionnelle de Nelson Siegel

La minimisation de la somme au carré des erreurs entre le prix empirique de la date t et son prix théorique calculé par la fonctionnelle de NS nous donne pour presque toutes les observations un paramètre d'échelle τ =10, ce qui signifie que la position de la courbure se situe près des maturités de 10 ans.

I.3 Limites du modèle de Nelson et Siegel

Le modèle de Nelson et Siegel ne permet pas de reconstituer toutes les formes de courbes de taux que l'on peut rencontrer sur le marché, en particulier les formes à une bosse et un creux.

En outre, il manque de souplesse d'ajustement pour les maturités supérieures à 7 ans si bien que les obligations de telles maturités sont parfois mal évaluées par le modèle.

Le reproche souvent formulé à l'encontre de ce modèle est sont insuffisante flexibilité. En revanche les paramètres de ce modèle sont interprétables financièrement.

II. MODELE D'ARBITRAGE GENERAL

Parmi les modèles les plus utilisés pour la construction de la structure par terme des taux est le modèle d'arbitrage. Ce modèle se base essentiellement sur une hypothèse fondamentale d'absence d'opportunité d'arbitrage (AOA), c'est-à-dire qu'il est impossible sur

un marché financier de mettre en œuvre une stratégie de vente et d'achat, sans apport initial, conduisant de façon certaine à un gain strictement positif.

Ce modèle suppose que la fonction des actifs obligataires respecte une équation aux dérivées partielles (EDP) appelée équation de structure par terme. Pour obtenir cette équation de structure par terme, nous allons adopter la méthode de duplication.

En supposant l'AOA, un même produit financier (même caractéristiques) vaudra le même prix (loi du prix unique). Ainsi, nous pouvons construire un portefeuille dont les caractéristiques en terme de risques sont parfaitement équivalentes à celles d'un autre portefeuille dont les caractéristiques de rendement sont connues et déterminer son prix.

Le portefeuille que nous allons tenter de constituer est un portefeuille comportant un certain nombre d'obligations sans coupon dont la détention est sans risque. Les prix de ces bons sans coupons suivent un processus d'Itô, ces paramètres peuvent s'exprimer en fonction des caractéristiques dynamiques des variables d'état sous-jacentes, et des dérivées partielles de la fonction prix par rapport au temps et aux variables d'état. Nous retrouverons une équation différentielle partielle en égalisant les rendements des deux portefeuilles précédents.

Dans ce qui suit, nous allons supposer que la structure de l'économie est soumise à K sources d'incertitude, et est décrite par N variables d'état (avec $N \geq K$) non spécifiées.

II.1 Présentation théorique du modèle

L'élaboration du modèle théorique nécessite la présence de certaines hypothèses qui sont, en réalité, généralement non vérifiées mais qui restent le départ du fondement théorique.

II.1.1 Hypothèses du modèle

- Il n'existe aucun coût de transaction, taxe, ou problème d'indivisibilité des actifs.
- Les marchés sont ouverts continûment.
- Il existe un marché pour l'emprunt et le prêt instantané au taux r, et pour les prêts et emprunts de durée supérieure. Les titres de créance sont des bons sans coupon, de valeur faciale unitaire, exempts de tout risque de défaut. Le taux r ainsi que les prix des divers bons sont déterminés de façon endogène.
- Les investisseurs sont insatiables, et suffisamment tolérants vis-à-vis du risque pour pouvoir accepter de détenir un actif risqué ayant une espérance de rendement finie.
- L'information pertinente pour les investisseurs est représentée par la valeur courante d'un vecteur Y de N variables d'état.
- Tous les investisseurs sont persuadés que l'économie est telle qu'elle est présentée dans l'hypothèse 5, et ont des croyances homogènes quant à la valeur des paramètres du modèle.

II.1.2 Lien entre le prix des bons sans coupons et les variables d'état

En supposant que les hypothèses précédentes sont vérifiées dans notre marché financier, nous allons voir le lien qui existe entre le prix des bons sans coupons et les variables d'état (les variables capitales qui expliqueront l'évolution de la courbe des taux).

Soit P(t, s) le prix à l'instant t d'un bon sans coupon de maturité s – t, r(t,s) le rendement correspondant et Y le vecteur des variables d'états. A travers les comportements individuels des agents, P(t, s) sera considéré comme fonction de Y.

Les variables d'état sont supposées être des processus d'Itô et par conséquent $P(t, s)$ qui ne dépend que de $Y(t)$ (Y processus Markovien) est également un processus d'Itô. De même que pour le rendement instantané d'un bon qui se calcule comme le pourcentage de variation instantané de son prix. Il peut donc s'écrire sous la forme :

$$\frac{dP(Y,t,s)}{P(Y,t,s)} = \alpha(Y,t,s)dt + \delta'(Y,t,s)dz(t) \quad (*)$$

où $\alpha(Y,t,s)$ est l'espérance mathématique du taux de rendement instantané, et $\delta'(Y,t,s)$ une matrice de dimension ($K \times 1$), dont l'élément général $\{\delta k(Y, t, s)\}$ est la volatilité non-anticipée de $\frac{dP}{P}$ engendrée par les fluctuations imprévues de Y, sous l'effet de la $k^{\text{ème}}$ source d'incertitude. La variance totale du taux de rendement est donc $\delta\square\delta$.

Toute obligation à une valeur facial fixe vers laquelle le prix de l'obligation va converger, et donc l'équation différentielle stochastique (*) doit respecter la condition terminale $P(Y, s, s) = 1$. A l'échéance T, le taux de rendement du titre n'est pas aléatoire. Ce qui peut être traduit comme suit : $\alpha(Y,T,T) = r(t)$ et δ(Y,T,T)=0

Une interprétation du paramètre $\alpha(Y,t,s)$ peut être donnée grâce à la condition terminale de l'équation différentielle. Cette condition conduit à l'équation :

$$P(Y,t,s) = E_{y,t}[\exp(-\int_t^s \alpha(Y,\tau,s)d\tau)]$$

Cette équation présente le prix courant d'un bon comme l'espérance de la valeur actualisée de l'unité monétaire remboursée à échéance. Cette actualisation est effectuée à un taux évoluant aléatoirement au cours du temps, égal, à chaque instant, à l'espérance du taux de rendement instantané du bon par unité de temps, évaluée à cet instant.
Ainsi, le paramètre α joue le rôle de taux d'actualisation pour ce bon.

Le lemme d'Itô nous permet maintenant de préciser la valeur des K+1 paramètres infinitésimaux du processus dP/P :

$$\alpha(Y,t,s) = \frac{1}{P}[\frac{1}{2}tr(\sigma_y^2 P_{yy}) + P_y\mu + P] \quad \text{et} \quad \delta'(Y,t,s) = \frac{1}{P}(P_y\sigma)$$

où P_y est le vecteur ($1 \times N$) des dérivées partielles de P par rapport aux variables d'état, P_{yy}est la matrice ($N \times N$) des dérivées partielles secondes de P par rapport à Y, et « tr » désigne l'opérateur de trace.

Pour obtenir l'équation de structure par terme, il est maintenant nécessaire de contraindre l'évolution des rendements à respecter une condition d'arbitrage.

II.1.3 Une condition d'arbitrage

L'hypothèse de l'AOA comme expliqué précédemment assure la validité de la loi du prix unique. Ainsi, Pour contraindre la structure des prix, il suffit d'exhiber deux portefeuilles, composés différemment, mais ayant des caractéristiques de risque identiques, puis d'égaliser leur taux de rendement.

Dans le cas de modèle continu, on s'intéressera au rendement *instantané* de ces portefeuilles. De ce point de vue, le portefeuille entièrement investi au taux *r*, à l'instant *t*, est fort simple : il permet d'obtenir, de façon certaine, un taux de rendement *r*(*t*). Choisissant ce portefeuille comme référence, il nous reste à construire un portefeuille sans risque instantané. Pour ce faire, on procède de la façon suivante. Considérons un portefeuille, composé à partir de *K* + 1 bons risqués de maturité différente, et d'échéance respective *s*1, · · · , *sK*+1. Appelons $w_1, \dots, w_{k+1}$ les proportions du portefeuille global investies dans ces *K*+1 actifs (on a$\sum_{i=1}^{k+1} w_i = 1$).

La richesse *W* du détenteur de ce portefeuille ainsi constitué va évoluer conformément à l'équation $\frac{dW}{W} = \sum_{i=1}^{k+1} w_i \frac{dP(Y,t,s_i)}{P(Y,t,s_i)}$

Utilisant (*), cette équation peut s'exprimer sous la forme de la différentielle stochastique

$$\frac{dW}{W} = \left\{\sum_{i=1}^{k+1} w_i \alpha(Y,t,s_i)\right\} dt + \left\{\sum_{i=1}^{k+1} w_i \delta'(Y,t,s_i)\right\} dz(t)$$

Le deuxième terme du membre droit pondère les incertitudes constatées sur les *K*+1 actifs.

Ainsi, pour que le rendement de ce portefeuille soit sans risque, il suffit de choisir les poids w_i tels que chacune des *K* sources d'incertitude disparaisse, c'est-à-dire tels que

$$\sum_{i=1}^{k+1} w_i \delta_k(Y,t,s_i) 0 \quad \forall \mathrm{k} = 1..\mathrm{K}$$

Dans ce cas, le taux de rendement du portefeuille ne peut être différent du taux sans risque *r*(*Y* , *t*) : $\sum_{i=1}^{k+1} w_i \alpha(Y,t,s_i) = r(Y,t)$.

Utilisant le fait que, $\sum_{i=1}^{k+1} w_i = 1)$ l'équation précédente peut se réécrire

$$\sum_{i=1}^{k+1} \{ w_i(\alpha(Y,t,s_i) - r(Y,t)\} = 0$$

Ainsi on aura le système suivant :

$$\begin{bmatrix} \alpha(Y,t,s_1) - r(Y,t) & \cdots & \alpha(Y,t,s_{K+1}) - r(Y,t) \\ \delta_1(Y,t,s_1) & \dots & \delta_1(Y,t,s_{K+1}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \delta_K(Y,t,s_1) & \cdots & \delta_K(Y,t,s_{K+1}) \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_{K+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ce système n'admettra de solution non-triviale que si le déterminant de la matrice carrée de dimension *K* + 1 est égal à zéro, son rang doit donc être strictement inférieur à *K* +1. Les lignes de cette matrice étant dépendantes, une combinaison linéaire non-nulle de celles-ci doit être égale à un vecteur ligne de *K* + 1 zéros.

Cette propriété étant totalement indépendante des titres sélectionnés, le vecteur des coefficients de cette combinaison linéaire ne dépend pas des échéances $S_1, \cdots, S_{K+1}$ choisies. Ainsi, pour une échéance s quelconque, on peut écrire

$$\alpha(Y,t,s) - r(Y,t) = \lambda'_z(Y,t)\delta(Y,t,s)$$

où $\alpha_z(Y,t,s)$ est un vecteur colonne de dimension K.

En considérant Y et t comme étant fixes, l'équation précédente établit une relation linéaire entre le rendement espéré et la volatilité d'une obligation.

II.1.4 La prime de terme

$\alpha(Y,t,s) - r(Y,t)$ s'interprète comme le taux de rendement espéré, exigé au-delà du taux sans risque pour accepter de détenir, pendant un instant, un bon de maturité $s - t$, soit, en d'autres termes, la *prime de terme instantanée* en t sur l'échéance s.

Notant $\phi(Y,t,s)$ la prime de terme, exigée en t sur le bon sans coupon de maturité $s - t$, on écrit :

$\phi(Y,t,s) = \lambda'_z(Y,t)\delta(Y,t,s)$, elle s'exprime comme la somme des rémunérations offertes à l'équilibre pour chacun des K risques supportés par ce bon.

Le k-ième élément de $\lambda z(Y\ ,\ t)$ représente le « **prix de marché** » du risque-k, ou encore la prime de risque unitaire offerte à l'équilibre pour le risque-k.

Dans cette économie, les K sources d'incertitude sont *représentées* par les N variables d'état, et on doit pouvoir exprimer les primes de terme en fonction des risques perçus sur chacune de ces variables.

Définissons le vecteur : $\lambda_Y = \sigma\lambda_z$, ce vecteur représente les rémunérations unitaires, offertes à l'équilibre pour le risque porté par chacun des états. On peut exprimer la prime de terme en fonction de ces primes de risque, et des dérivées partielles du prix de l'actif par rapport aux variables d'état : $\phi(Y,t,s) = \frac{1}{P}\{P_Y\lambda_Y\}$

La prime de terme apparaît ici comme une combinaison linéaire des primes de facteur, dont les coefficients mesurent la sensibilité du taux de rendement de l'actif aux variations des états.

II.1.5 L'équation de structure par terme

Le prix P(Y , t, s) satisfait à l'équation différentielle partielle

$$\boxed{\frac{1}{2}tr(\sigma_Y^2 P_{YY}) + P_Y(\mu - \lambda_Y) - rP + P_t}$$

Appelée *équation de structure par terme*. Sa résolution, sous la condition terminale $P(T,T)=1$, fournit la structure des prix, et par suite, la structure des taux.

Cette équation représente le principal résultat du modèle d'arbitrage. Elle doit être *nécessairement* respectée sur un marché efficient par les prix des bons sans coupon pour ne pas créer d'opportunités d'arbitrage. La solution en terme de prix est donnée par :

$$P(Y,t,T) = E\left[\exp\left(-\int_t^T r(s)ds - \frac{1}{2}\int_t^T \lambda'_z(s)\,\lambda_z(s)ds - \int_t^T \lambda'_z(s)dz(s)\right]\right.$$

Cette formule peut être décomposée en :

- une composante d'actualisation, due à l'écoulement déterministe du temps $\phi(t,T) = \exp\left(-\int_t^T r(s)ds\right)$ en l'absence d'incertitude, le prix du bon est exactement égal à ce terme ;
- un terme d'ajustement, dû aux incertitudes qui affectent l'économie: $\exp\left(-\frac{1}{2}\int_t^T \lambda'_z(s)\,\lambda_z(s) - \int_t^T \lambda'_z(s)dz(s)\right.$

Par conséquent, le facteur d'actualisation effectif se décompose en espérance du produit du facteur d'actualisation « temps » et en facteur d'ajustement « incertitude ».

Le modèle d'arbitrage général de la structure par terme s'applique dans une économie où en considère l'existence de k facteurs d'incertitude et pour N variables d'état. Dans sa formule générale, nous avons pu extraire l'expression de l'espérance du prix d'un bon et de sa volatilité instantanée ainsi que la prime de terme. Pour aboutir à une équation différentielle qui nous conduit à trouver la structure par terme des taux. L'élaboration de ce modèle avec un nombre élevé de variables d'état est assez délicate, vu la complexité de la résolution analytique matricielle. Par la suite, nous n'allons prendre en considération pour le modèle d'arbitrage qu'une seule variable d'état.

II.2 Modèles d'arbitrage à une seule variable d'état

Dans le cas où nous avons une seule variable d'état, nous allons reprendre le même raisonnement que précédemment en se ramenant au cas simple. L'avantage le plus important de ce modèle à une seule variable d'état est sa lisibilité et sa simplicité. Le choix de la variable d'état à retenir permet notamment d'obtenir un modèle explicite de structure des taux.

Le choix du taux court comme facteur explicatif de la hiérarchie des taux est pertinent ; du fait qu'il soit vu comme indicateur des conditions du crédit et comme le point focal de la politique monétaire, le taux court joue un rôle central dans l'économie.

On suppose que le taux court l'unique variable aléatoire (source d'incertitude) déterminant la courbe des taux.

Dans ce modèle, les changements du taux court sont décrits par la différentielle stochastique $dr(t) = \mu(r,t)dt + \sigma(r,t)dz(t)$ dans laquelle tous les éléments sont scalaires. Le taux court suivant un processus d'itô, μ(r,t) désigne l'espérance du changement instantané de r(t), et σ^2(r,t) est égal à la variance de ce même changement.

II.2.1 Le lien entre le taux court et le prix des obligations

Si le taux court est considéré comme l'aléa fondamental qui affecte l'économie, le prix $P(t, s)$ d'une obligation, d'échéance s en t, sera déterminé par l'évolution attendue du taux court entre t et s, $\{r(\tau), t \leq \tau \leq s\}$ Le processus $r(t)$ étant markovien, il suffit de poser :

$$P(t, s) = P(r, t, s)$$

Cette hypothèse, qui prépare l'application du lemme d'Itô au processus $P(r, t, s)$, signifie que le taux court $r(t)$ représente *l'information pertinente* pour les investisseurs, et que ceux-ci vont donc ajuster leur comportement à son évolution prévue. De ce fait, un lien est créé, *via* les comportements du marché, entre le taux court et la structure par terme.
L'équation $P(t, s) = P(r, t, s)$ peut avoir Trois lectures :

- toute l'information pertinente pour les investisseurs est concentrée, à chaque instant, dans la valeur courante du taux court ;
- la connaissance de $r(t)$ est suffisante pour former les meilleures anticipations possibles à l'instant t ;
- pour chaque niveau du taux court, une et une seule forme de structure des taux est possible.

Le lemme d'Itô nous permet d'écrire : $\frac{dP(r,t,s)}{P(r,t,s)} = \alpha(r,t,s)dt + \delta(r,t,s)dz(t)$ (**)

Où $\alpha(r,t,s) = \frac{1}{P}[\frac{1}{2}\sigma^2(r,t)P_{rr} + \mu(r,t)P_r + P_t]$ et $\delta(Y,t,s) = \frac{1}{P}(\sigma(r,t)P_r)$

Avec $\alpha(r,t,s)$: l'espérance mathématique du rendement instantané de l'obligation, $\delta(r, t, s)$ la volatilité non-anticipée, engendrée par les fluctuations imprévues du taux court.

Le lien entre taux court et prix étant ainsi établi, on peut maintenant invoquer la condition d'arbitrage.

II.2.2 La condition d'arbitrage

Pareil à la démarche suivit dans le modèle à N variable d'état, nous allons construire un portefeuille comportant deux types d'obligation sans risque sur le prochain instant ; les obligations d'échéance s_1 et d'échéance s_2, détenues dans des proportions respectives :

w_1 et $w_2 = 1 - w_1$.

La valeur $W(t)$ de ce portefeuille évolue au taux $\frac{dW}{W} = w_1 \frac{dP(Y,t,s_1)}{P(Y,t,s_1)} + w_2 \frac{dP(Y,t,s_2)}{P(Y,t,s_2)}$

Soit

$$\frac{dW}{W} = \{w_1\alpha(Y,t,s_1) + w_2\alpha(Y,t,s_2)\}dt + \{w_1\delta(Y,t,s_1) + w_2\delta(Y,t,s_2)\}dz(t)$$

Pour que son rendement soit certain, il suffit de choisir w_1 et w_2 tels que :

$$w_1\delta(Y,t,s_1) + w_2\delta(Y,t,s_2) = 0$$

Et puisque le rendement du portefeuille est égal au taux d'un actif sans risque, on aura :
$w_1\alpha(Y,t,s_1) + w_2\alpha(Y,t,s_2) = r(t)$, du fait que $w_1+w_2=1$ on aura :

$$w_1\{\alpha(Y,t,s_1) - r(t)\} + w_2\{\alpha(Y,t,s_2) - r(t)\}$$

On aura ainsi le système :

$$\begin{bmatrix} \alpha(r,t,s_1) - r(t) & \alpha(r,t,s_2) - r(t) \\ \delta(r,t,s_1) & \delta(r,t,s_2) \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ce système n'admet de solution non-triviale que si son déterminant est nul. Il vient :

$$\frac{\alpha(r,t,s_1) - r(t)}{\delta(r,t,s_1)} = \frac{\alpha(r,t,s_2) - r(t)}{\delta(r,t,s_2)}$$

Le rapport ci-dessus est indépendant des échéances $s1$ et $s2$ choisies. On peut donc écrire $\frac{\alpha(r,t,s)-r(t)}{\delta(r,t,s)} = \lambda_z(r,t)$ pour toute échéance s.
Cette égalité représente la contrainte qui fonde l'existence d'une structure des taux d'intérêt. $\lambda_z(r,t)$ s'interprète comme la prime unitaire offerte pour le risque engendré par les fluctuations imprévues du taux court, à l'instant t.

En multipliant $\lambda_z(r,t)$ par σ, on obtient une mesure du prix accordé au risque fondamental total porté par le taux court. On notera $\lambda_r = \sigma\lambda_z$ la *prime unitaire de risque de taux d'intérêt.*

On peut exprimer la prime de terme sous la forme $\phi(r,t,s) = \lambda_r \frac{P_r}{P}$
Cette expression fait apparaître λ_r comme la prime d'équilibre pour une sensibilité unitaire aux variations du taux d'intérêt.

II.2.3 L'équation de structure par terme

L'équation de structure par terme est donnée par :

$$\frac{1}{2}\sigma^2 P_{rr} + (\mu - \lambda_z)P_r - rP + P_t = 0 \qquad (***)$$

La résolution de cette équation différentielle, sous la condition terminale $P(r, s, s) = 1$, fournit la structure des prix $P(r, t, s)$.
La solution de l'équation différentielle s'exprime sous la forme générale suivante :

$$P(r,t,T) = E_{r,t}\left[\exp\left(-\int_t^T r(s)ds - \frac{1}{2}\int_t^T \lambda^2{}_z(r,s)\,ds - \int_t^T \lambda_z(r,s)dz(s)\right)\right]$$

La formule exacte du prix est soumise à une spécification précise des variables $\mu(r, t)$, $\sigma(r, t)$ et $\lambda r(r, t)$, qui restent totalement exogènes au modèle.

Ainsi, pour obtenir une forme explicite de la structure par terme des taux on va essayer de traiter deux des processus les plus utilisés dans la modélisation du taux court. Soit le processus d'Ornstein-Uhlenbeck utilisé par Vasicek et le processus « racine carrée »proposé par Cox Ingersoll et Ross.

III. MODELE DE VASICEK

III.1. Présentation du modèle de Vasicek

Vasicek a adopté le processus d'Ornstein-Uhlenbeck pour représenter la dynamique des taux courts comme suit :

$dr(t) = a(b - r(t))dt + \sigma dz$ Où a et b sont des scalaires strictement positifs.

La solution explicite de cette EDS est : $r(t) = b + (r_0 - b)e^{-at} + \sigma \int_0^t e^{-(t-u)a} dz(u)$

Le paramètre b représente la valeur d'équilibre du processus. Toutefois, il n'est pas possible d'affirmer que b est la valeur vers laquelle tend le processus d'Ornstein-Uhlenbeck, puisque:

$$V\langle r(s)|r(t)\rangle = b\frac{\sigma^2}{2a}\left(1 - e^{-2(s-t)a}\right) + \frac{\sigma^2}{a}(r(t) - b)\left(e^{-(s-t)a} - e^{-2(s-t)a}\right)$$

est une fonction monotone croissante en t et bornée par $\frac{\sigma^2}{2a}$. Pour interpréter correctement le paramètre b, nous devons remarquer que

$$E\langle r(s)|r(t)\rangle = b + (r(t) - b)e^{-(s-t)a}$$

Si le taux courant est inférieur à b, nous avons $E\langle r(s)|r(t)\rangle \leq b$ et $E\langle r(s)|r(t)\rangle > 0$. Nous avons donc un phénomène de « retour à la moyenne », b est en fait le point d'attraction de la trajectoire du processus. Le paramètre a est une mesure de la vitesse de convergence vers le point b.

L'évolution du taux court résulte maintenant de deux forces contradictoires : la force de rappel « équilibrante », et l'aléa « déséquilibrante ». On pallie ainsi un inconvénient majeur du mouvement brownien généralisé, à savoir une espérance et une variance de changement qui tendent vers l'infini.

Lorsque a tend vers l'infini (ajustement plus rapide), l'espérance de r(t) tend vers b, et sa variance vers zéro : à la limite, il n'y a donc plus d'incertitude sur le taux d'intérêt, qui reste « collé » au niveau b. A l'inverse, lorsque k tend vers zéro (l'attraction vers b est de plus en plus faible), l'espérance du taux futur tend vers son niveau courant (et ne dépend donc plus de b), et sa variance vers $(s-t)*\sigma^2$, ce qui témoigne l'absence de toute force de rappel.

Comparativement au mouvement brownien généralisé étudié plus haut, le processus d'Ornstein-Uhlenbeck semble capable de représenter beaucoup plus fidèlement la dynamique du taux court. On peut donc s'attendre à obtenir une structure des taux plus réaliste.

Introduisant l'expression des paramètres du processus dans l'équation de structure par terme, il vient

$$\frac{\sigma^2}{2}P_{rr} + \{a * (b - r) - \lambda\}P_r - rP + P_t = 0$$

Et sa solution est

$$P(t,T) = \exp\left(f(t,T) * r(t) + g(t,T)\right)$$

Avec

$$f(t,T) = \frac{1}{a}(e^{-a(T-t)} - 1)$$

$$g(t,T) = \frac{\sigma^2}{4a^3}(1 - e^{-2a(T-t)}) + \frac{1}{a}\left\{b - \frac{\lambda}{a} - \frac{\sigma^2}{a^2}\right\}\left(1 - e^{-a(T-t)}\right) - \left\{b - \frac{\lambda}{a} - \frac{\sigma^2}{2a^2}\right\}(T - t)$$

Comme précédemment, on peut calculer les paramètres du processus de prix en évaluant Pr à partir de cette solution. On obtient :

$$\alpha(t,T) = r(t) + \frac{\lambda}{a}\left(e^{-a(T-t)} - 1\right) \qquad \delta(t,T) = \frac{\sigma}{a}\left(e^{-a(T-t)} - 1\right)$$

Soit une prime de terme $\phi(t,T) = \frac{\lambda}{a}\left(e^{-a(T-t)} - 1\right)$ Positive pour toutes les échéances, si λ est négatif.

La structure des taux est donnée par :

$$R(t,T) = -\frac{1}{T-t}\left\{\begin{array}{l} \frac{1}{a}\left(\exp(-a(T-t)) - 1\right)r(t) + \frac{\sigma^2}{4a^3}\left(1 - \exp\left(-2a(T-t)\right)\right) + \\ + \frac{1}{a}\left\{b - \frac{\lambda}{a} - \frac{\sigma^2}{a^2}\right\}\left(1 - \exp(-a(T-t))\right) \\ - \left\{b - \frac{\lambda}{a} - \frac{\sigma^2}{2a^2}\right\}(T-t) \end{array}\right\}$$

Pour un instant donné, les valeurs limites en T de cette expression sont :

$$\lim_{t \to T} R(t,T) = r(t) \qquad \lim_{T \to \infty} R(t,T) = R_\infty = b - \frac{\lambda}{a} - \frac{\sigma^2}{2a^2}$$

Utilisant cette notation, on peut exprimer la structure des taux sous la forme :

$$R(t,T) = R_\infty + \frac{1}{(T-t)a}\left(1 - e^{-a(T-t)}\right)\left(r(t) - R_\infty\right) + \frac{\sigma^2}{4(T-t)a^3}\left(1 - e^{-a(T-t)}\right)^2$$

La forme de la courbe des taux dépend du niveau r(t) et de la valeur des paramètres k, Θ, σ et λ. L'étude du signe de la pente de la structure montre que, Si r(t) est supérieur à $R_\infty - \frac{\sigma^2}{2a^2}$, elle est monotone décroissante. Pour des valeurs intermédiaires de r(t), la structure est en cloche.

III.2. Application du modèle de Vasicek

La modélisation de la structure par terme des taux d'intérêt en temps continu se fonde sur une spécification de la dynamique suivie par les variables d'état retenues. Les prix des obligations zéro-coupon sont ensuite dérivés grâce à des arguments d'arbitrage ou d'équilibre.

On choisit pour modéliser la dynamique suivie par les variables d'état, une approche par les séries chronologiques.

On estimera dans cette approche les paramètres de la dynamique des facteurs retenue pour le modèle. Dans le cas d'une dynamique induite par une équation différentielle stochastique, on se trouve confronté au problème de l'estimation d'un processus de diffusion à partir de données en temps discret.

Pour le processus d'Ornstein-Uhlenbeck, la connaissance de la version discrète exacte permet l'utilisation du maximum de vraisemblance. Cette méthode mène en général à des biais de discrétisation qui peuvent être important. Il est dès lors souhaitable de corriger ce biais à partir de techniques d'estimations fondées sur des simulations.

III.2.1 Estimation des paramètres du processus d'Ornstein-Uhlenbeck

Dans notre travail nous utiliserons l'approche en série chronologique citée auparavant, et procéderons ainsi par l'estimation du processus et par la suite remonter à la structure des taux via la solution analytique trouvée dans le modèle de Vasicek.

1) Méthodologie d'estimation

La dynamique du processus d'Ornstein-Uhlenbeck pour le taux court est décrite par le processus suivant :

$$dr_t = a(b - r_t)dt + \sigma dz(t) \qquad \text{Avec z est un brownien standard.}$$

Pour estimer les paramètres du processus d'Ornstein-Uhlenbeck *k*, θ et σ nous allons utiliser la discrétisation exacte proposée par Gouriéroux, Monfort et Renault (1993) qui est donnée sous la forme suivante :

$$r_t - r_{t-1} = b(1 - \exp(-a)) + (\exp(-a) - 1)r_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$\text{Avec} \quad \varepsilon_t \to N\left(0, \frac{\sigma^2}{2a}(1 - \exp(-2a))\right)$$

Nous pourrons alors, en utilisant les données discrètes du taux court, estimer à l'aide de la Méthode des Moindres Carrées Ordinaires (MCO) les paramètres du processus d'Ornstein-Uhlenbeck via l'équation suivante :

$$r_t = \alpha + \beta r_{t-1} + \varepsilon_t \qquad \text{Avec} \qquad \alpha = b(1 - \exp(-a)) \qquad \text{et} \qquad \beta = \exp(-a)$$

Cette équation indique que les taux courts s'ajustent suivant un auto régressif d'ordre1, hypothèse qu'on vérifiera pour les données qu'on utilisera pour l'estimation.

Après estimation des paramètres α et β à l'aide du logiciel Econometric Views nous pourrons alors remonter aux paramètres du processus de diffusion d'Ornstein Uhlenbeck

$$a = -\ln(\beta) \qquad b = \frac{\alpha}{1 - \beta}$$

2) Présentation et Analyse des données utilisées

Pour estimer les paramètres désirés, nous avons choisi comme taux court terme, le taux moyen pondéré (TMP) qui est un taux au jour le jour du marché monétaire. C'est un taux moyen pondéré par les montants des transactions déclarées, pour un échantillon représentatif d'établissements admis au marché interbancaire.

Nous nous sommes référées dans notre étude à la base données journalières du TMP s'étalant du 1er Janvier 2004 au 19 mars 2009, soit 1857 observations. Ces données sont représentées sur le graphe suivant :

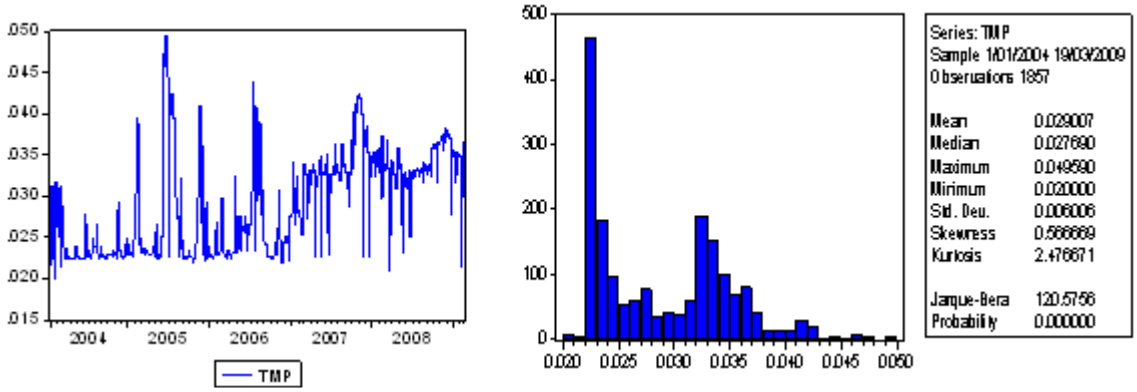


Figure 12: graphe et histogramme de la série quotidienne du TMP

Sur ce schéma sont résumées les différentes statistiques relatives à la série de données du taux moyen pondéré. La statistique du kurtosis est de 2.47, proche de 3 (la valeur du kurtosis pour une loi normale), on pourrait dès lors affirmer que le TMP suit une loi normale.

- ✓ **Analyse des données :**

Afin de tester la stationnarité de la série TMP, nous choisissons d'effectuer le test de la racine unitaire.

Augmented Dickey-Fuller Unit Root Test on TMP

Null Hypothesis: TMP has a unit root
Exogenous: Constant, Linear Trend
Lag Length: 1 (Automatic based on SIC, MAXLAG=24)

		t-Statistic	Prob.*
Augmented Dickey-Fuller test statistic		-8.439008	0.0000
Test critical values:	1% level	-3.962997	
	5% level	-3.412233	
	10% level	-3.128045	

*MacKinnon (1996) one-sided p-values.

Figure 13: test de stationnarité par la méthode de Dickey-Fuller Augmenté

Nous avons une statistique de Student de -8.439 qui est largement inférieure aux valeurs critiques -3.96, -3,41 et -3,12 qui correspondent aux seuils de confiance respectifs 1%, 5% et 10%. On rejette donc au seuil 1% l'hypothèse d'existence d'une racine unitaire dans la série, on conclut donc que la série est stationnaire.

Included observations: 1857

Autocorrelation	Partial Correlation		AC	PAC	Q-Stat	Prob
		1	0.960	0.960	1715.4	0.000
		2	0.915	-0.096	3272.9	0.000
		3	0.872	0.019	4689.2	0.000
		4	0.833	0.014	5981.4	0.000
		5	0.796	0.011	7163.5	0.000
		6	0.764	0.037	8253.4	0.000
		7	0.743	0.109	9282.6	0.000
		8	0.729	0.081	10275.	0.000
		9	0.721	0.060	11245.	0.000
		10	0.713	0.018	12195.	0.000
		11	0.705	0.013	13124.	0.000
		12	0.696	0.005	14030.	0.000
		13	0.685	0.007	14909.	0.000
		14	0.674	0.021	15761.	0.000
		15	0.659	-0.034	16575.	0.000
		16	0.644	0.010	17352.	0.000
		17	0.628	0.004	18092.	0.000
		18	0.614	0.005	18800.	0.000
		19	0.598	-0.032	19473.	0.000
		20	0.583	-0.000	20111.	0.000
		21	0.570	0.014	20721.	0.000
		22	0.559	0.022	21309.	0.000
		23	0.550	0.004	21879.	0.000
		24	0.543	0.027	22435.	0.000
		25	0.542	0.079	22990.	0.000
		26	0.549	0.090	23557.	0.000
		27	0.553	-0.010	24135.	0.000
		28	0.558	0.035	24721.	0.000
		29	0.558	-0.017	25310.	0.000
		30	0.556	-0.008	25894.	0.000
		31	0.549	-0.020	26464.	0.000
		32	0.536	-0.059	27007.	0.000
		33	0.523	0.033	27525.	0.000
		34	0.507	-0.049	28011.	0.000
		35	0.493	0.014	28473.	0.000
		36	0.482	0.000	28913.	0.000

Figure 14: corrélogramme de la série quotidienne du TMP

Notons que les coefficients (PAC) suivent une loi normale de moyenne nulle et de variance égale à 1/n = 1/1857 = 0,0005385.

Désignons par PAC_i, le coefficient d'auto corrélation partielle d'ordre i et testons l'hypothèse:

$$\boldsymbol{H_0 : PAC_i = O \ pour \ tout \ i = 1..36}$$

L'intervalle de confiance correspondant à ce test avec un niveau de confiance de 95% est le suivant :

$$\left[\mp \mathbf{1,96}\sqrt{\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{n}}}\right] = [\mathbf{-0,04548;\ 0,04548}]$$

Nous remarquons que pour un niveau de confiance de 95%, tous les PAC d'ordre 2 et plus ne rentrent dans l'intervalle de confiance. Donc nous ne rejetons pas l'hypothèse de la nullité des PAC, et par conséquent, notre processus se rapproche d'un processus auto régressif d'ordre 1. Ceci se confirme par le fait que les autocorrélations exponentiellement, ce qui confirme le choix d'un AR(1).

III.2.2 Résultats de l'estimation

L'estimation, par la méthode des moindres carrées ordinaires, de l'équation $r_t = \alpha + \beta r_{t-1} + \varepsilon_t$ à l'aide d'Econemetric Views est donnée dans le tableau suivant:

Dependent Variable: TMP
Method: Least Squares
Date: 06/02/09 Time: 13:48
Sample (adjusted): 1/02/2004 3/19/2009
Included observations: 1856 after adjustments

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	0.001118	0.000190	5.896763	0.0000
TMP(-1)	0.961541	0.006401	150.2150	0.0000

R-squared	0.924074	Mean dependent var	0.029006
Adjusted R-squared	0.924033	S.D. dependent var	0.006007
S.E. of regression	0.001656	Akaike info criterion	-9.968040
Sum squared resid	0.005083	Schwarz criterion	-9.962085
Log likelihood	9252.341	F-statistic	22564.56
Durbin-Watson stat	1.820688	Prob(F-statistic)	0.000000

Figure 15: Estimation des paramètres

Nous avons des statistiques de Student de respectivement 5.89 et 150.21 qui sont largement supérieures à la valeur critique de Student qui est de 1.96 (pour un niveau de confiance de 95% et un degré de liberté de 1856). Donc on rejette l'hypothèse de la nullité des coefficients *a* et *b*. De plus, la statistique de Fisher permet de rejeter la nullité de tous les coefficients estimés simultanément. La statistique de Durbin-Watson est de 1.82, proche de 2, informe que les résidus sont significativement indépendants.

A partir du tableau, on a: α= 0,001118 β=0,961541
Il s'ensuit que :

$$a = -\ln(\beta) = 0{,}03921807 \qquad b = \frac{\alpha}{1-\beta} = 0{,}02906992 \qquad \sigma = 0{,}00600585$$

Avec σ l'écart type historique de la variable TMP.

III.2.3 Structure de taux et Problème du prix de risque du marché

Le rendement, *R*(*t*, *T*), d'une obligation zéro-coupon, de maturité *T*, à la date *t* est donné pour le modèle de Vasicek sous la forme suivante :

$$R(t,T) = R_\infty + \frac{1}{(T-t)a}\left(1-\exp\left(-(T-t)a\right)\right)\left(r(t)-R_\infty\right) + \frac{\sigma^2}{4(T-t)a^3}\left(1-\exp\left(-(T-t)k\right)\right)^2$$

Avec $R_\infty = b - \frac{\lambda}{a} - \frac{\sigma^2}{2a}$

Maintenant que les paramètres du processus de diffusion sont estimés, il reste un seul paramètre à spécifier afin de pouvoir déterminer les prix des zéro-coupon. Ce paramètre est λ le prix du risque du marché à partir duquel on peut calculer la variable prime de risque du

marché pour chaque maturité. Cette variable mesure le point auquel les investisseurs exigent des rendements plus élevés pour les compenser du risque auquel ils seront exposés en détenant cette obligation. Malheureusement, ce prix du risque de marché n'est pas directement observé sur le marché. Ainsi, différentes méthodes sont employées pour spécifier sa valeur. Dans notre travail, le prix du risque du marché sera retrouvé comme la valeur qui réduit au minimum le carré des erreurs entre les prix des obligations réels et les prix théoriques qui dépendent du paramètre λ Mais, en procédant ainsi, un prix du marché spécifique de risque est déterminé pour chaque modèle.

III.2.4 Construction de la courbe des taux du 01/02/2008 et comparaison avec la courbe des taux de marché de cette même date

Pour obtenir la courbe des taux zéro-coupon par le modèle de Vasicek, on se doit de spécifier la valeur de la prime de risque du marché λ. Nous allons donc, dans un premier temps, estimer la prime du risque de marché pour les différentes maturités à l'aide de la méthode des moindres carrées ordinaires, puis dans un deuxième temps, comparer les taux zéro-coupon du marché avec les taux zéro-coupon théoriques obtenus.

On se basera pour nos estimations sur la courbe de taux zéro coupon du marché au 1 février 2008. Cette courbe de taux est obtenue en utilisant la méthode itérative, vu que, les bons du trésor existant sur le marché sont couponés (sauf pour les bons à 13 semaines, 26 semaines et 52 semaines).

Le résumé de L'estimation de la courbe des taux zéro coupon théoriques et sa comparaison avec celle du marché pour cette date est présenté sur la figure suivante :

maturité	0,25	0,5	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	20	
taux marché	0,035667372	0,03591684	0,036804975	0,037963813	0,0390943	0,039651301	0,040149704	0,04065808	0,041458774	0,042534258	0,04340126	0,044286199	0,045212144	0,0461745	0,0471635	0,048182	0,0487879	0,0492287	
taux théorique	0,035910686	0,036168937	0,036678251	0,037668895	0,038623653	0,039544152	0,040431936	0,041288847	0,042115126	0,042913232	0,043684029	0,044428699	0,045148364	0,0458441	0,0465169	0,0471677	0,0477975	0,0506595	
erreur carrée	5,92017E-08	6,35531E-08	1,60589E-08	8,69764E-08	2,21509E-07	1,14808E-08	7,96549E-08	3,9739E-07	4,30798E-07	1,43622E-07	7,99581E-08	2,03064E-08	4,0678E-09	1,092E-07	4,181E-07	1,029E-06	9,809E-07	2,047E-06	6,199E-06
erreur	0,000243314	0,000252097	-0,00012672	-0,00029492	-0,00047065	-0,00010715	0,000282232	0,00063039	0,000656352	0,000378974	0,000282769	0,0001425	-6,37793E-05	-0,00033	-0,000647	-0,001014	-0,00099	0,0014308	
prime de risque	0,000585465	0,001165219	0,002307811	0,004526866	0,006660578	0,00871223	0,010684979	0,01258186	0,014405781	0,01615956	0,01784589	0,019467366	0,021026482	0,0225256	0,0239671	0,0253532	0,0266859	0,0326192	

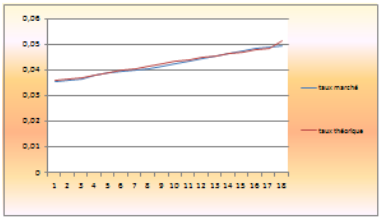
DATE	TMP
01/02/2008	0,03565

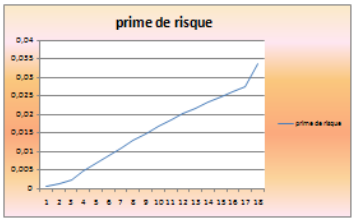
b	0,029069919
σ	0,006005846
a	0,039218073
erreur de R²	0,017344026
R²	0,077351075

λ	-0,00235326

calculer

Modèle de Vasicek pour le 01/02/2009





$$P(t,T) = \exp\left(f(t,T) + r(t) + g(t,T)\right)$$

$$f(t,T) = \frac{1}{a}\left(e^{-a(T-t)} - 1\right)$$

$$g(t,T) = \frac{\sigma^2}{4a^3}\left(1 - e^{-2a(T-t)}\right) + \frac{1}{a}\left\{b - \frac{\lambda}{a} - \frac{\sigma^2}{a^2}\right\}\left(1 - e^{-a(T-t)}\right) - \left\{b - \frac{\lambda}{a} - \frac{\sigma^2}{2a^2}\right\}(T - t)$$

Figure 16: feuille de calcul des paramètres de Vasicek

Nous allons à présent reprendre en détail l'estimation de la courbe des taux.

Le tableau suivant donne les taux zéro-coupon pour les maturités de 13 semaines à 20 ans.

maturité	taux zéro-coupon
0,25	0,035667372
0,5	0,03591684
1	0,036804975
2	0,037963813
3	0,0390943
4	0,039651301
5	0,040149704
6	0,040658076
7	0,041458774
8	0,042534258
9	0,04340126
10	0,044286199
11	0,045212144
12	0,046174498
13	0,047163503
14	0,048181998
15	0,048787892
20	0,049228731

Tableau 7 : taux zéro-coupon pour les maturités de 13 semaines à 20 ans

La structure de taux zéro-coupon est donnée par le modèle de Vasicek sous la forme suivante:

$$R(t,T) = -\frac{1}{T-t}\left\{\begin{array}{l} \frac{1}{a}\left(\exp(-a(T-t))-1\right)r(t) + \frac{\sigma^2}{4a^3}\left(1-\exp\left(-2a(T-t)\right)\right) \\ +\frac{1}{a}\left\{b-\frac{\lambda}{a}-\frac{\sigma^2}{a^2}\right\}\left(1-\exp(-a(T-t))\right) \\ -\left\{b-\frac{\lambda}{a}-\frac{\sigma^2}{2a^2}\right\}(T-t) \end{array}\right\}$$

- ✓ **Estimation de la prime de risque du marché au 01/02/2008**

Pour estimer la prime du marché ϕ pour les différentes maturités, il nous suffit d'estimer le paramètre λ et ce, par le biais de la formule $\phi(t,T) = \frac{\lambda}{a}\left(e^{-a(T-t)} - 1\right)$.

L'estimation par la méthode des moindres carrés ordinaires nous a donné une valeur de **λ = -0,00235336.**

En injectant la valeur du paramètre λ dans l'équation de la prime de risque, on retrouve les valeurs suivantes de la prime de risque pour les maturités de 13 semaines à 20 ans.

maturité	prime de risque
0,25	0,000585465
0,5	0,001165219
1	0,002307811
2	0,004526866
3	0,006660578
4	0,00871223
5	0,010684978
6	0,012581855
7	0,014405781
8	0,01615956
9	0,01784589
10	0,019467366
11	0,021026482
12	0,022525636
13	0,023967133
14	0,025353192
15	0,026685945
20	0,032619169

Tableau 8:taux zéro-coupon pour les maturités de 13 semaines à 20 ans

La prime de risque – est donnée pour chacune des maturités considérées dans la figure suivante :

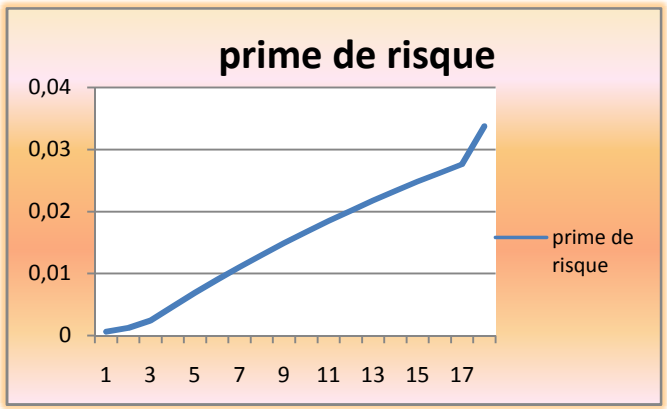


Figure 17: prime de risque pour le modèle de Vasicek

Sur cette figure, on remarque que la prime de risque estimée croit avec la maturité, ce qui est tout à fait raisonnable et nous laisse assez confiantes par rapport à toutes les estimations effectuées jusqu'ici.

Comparaison de la courbe des taux estimée par le modèle de Vasicek et celle du marché pour le 01/02/2008

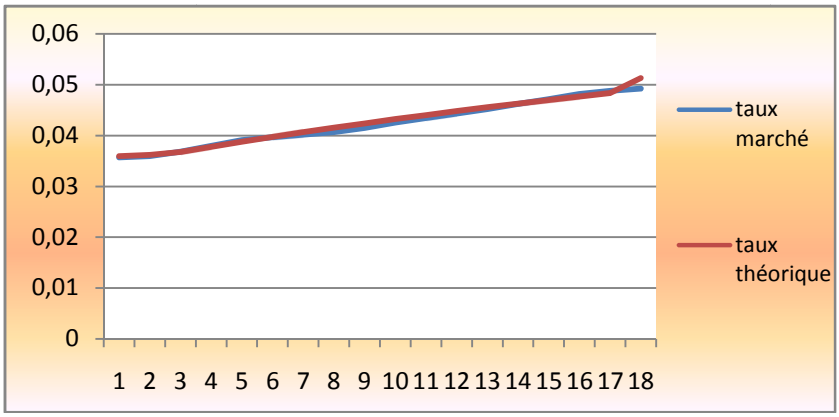


Figure 18: comparaison entre courbe réelle des taux ZC et celle de Vasicek

On voit que les deux courbes sont collées presque partout, on peut du coup affirmer que le modèle de Vasicek nous a permis d'obtenir une courbe très rapprochée de celle du marché et il est même possible que la courbe théorique puisse être celle qui reflète le mieux la réalité du marché national.

III.3. Limites du modèle de Vasicek :

Le modèle de Vasicek étant plus réaliste que les modèles qui l'ont précédé dans l'histoire, ce dernier comporte deux défauts majeurs. Le premier revient au fait que la constante de contraint la queue de la structure des taux à un niveau indépendant de sa forme. Le second, est lié à la spécification de la variance instantanée de l'évolution du taux court : celle-ci ne permet pas d'exclure des valeurs négatives de r(t). En effet, lorsque r(t) s'approche de 0, sa dynamique tend à ressembler à un mouvement brownien généralisé

peut prendre une valeur négative, ainsi, le taux pourrait devenir lui-même négatif.

Pour éviter cela, il est nécessaire que la variance du processus dépende de son niveau, afin de l'empêcher de franchir la limite zéro.

IV. MODELE DE COX INGERSOLL ET ROSS (CIR)

IV.1. Présentation du modèle de CIR

Le modèle de Cox, Ingersoll et Ross occupe depuis les années quatre-vingt, une position privilégiée au sein du champ théorique de l'évaluation des actifs financiers. La raison essentielle du succès des travaux de Cox, Ingersoll et Ross tient au fait qu'ils parviennent à nous fournir un modèle parfaitement compatible avec les hypothèses de la théorie standard.

Lesne [1995] souligne que l'économétrie de la courbe des taux comporte naturellement deux dimensions : une dimension temporelle ayant trait à la «dynamique » d'un ou plusieurs taux, et une dimension «statique » liée à la forme de la courbe des taux à un instant donné.

Plus précisément, l'étude de l'évolution des taux se base sur une étude statique à une date donnée, où on essaye de minimiser une distance entre les prix empiriques effectivement observés et les prix théoriques, l'étude dynamique, quant à elle, consiste à estimer les paramètres d'une équation différentielle stochastique qui décrit l'évolution temporelle d'un taux d'intérêt.

Les critiques apportées par les économistes sur l'étude séparée de la dimension «statique » des modèles de taux est qu'elle ignore les propriétés temporelles des modèles de taux court. La répétition de cette procédure permet de générer de nombreux paramètres qui devraient, en théorie, être identiques, mais qui, en pratique, varient dans le temps. Ainsi, elle autorise les paramètres du modèle à varier au cours du temps souvent de manière indépendante entre dates, et de traiter le facteur stochastique comme un simple paramètre négligeant ainsi le fait qu'il s'agisse d'observations d'un même processus.

De même, L'étude de la seule «dynamique» de la courbe des taux consiste à estimer les paramètres d'une équation différentielle stochastique qui décrit l'évolution temporelle d'un taux d'intérêt. Cette approche n'estime que la dynamique d'un taux particulier dont la maturité soit souvent prise suffisamment petite pour pouvoir le considérer comme un *proxy* du taux spot.

Ainsi, pour pouvoir éviter les difficultés rencontrées dans l'estimation de la courbe des taux à une seule dimension, on va essayer d'étudier simultanément la dimension statique et celle dynamique du modèle la structure par terme proposé par Cox, Ingersoll et Ross.

En effet, cela va nous de permettre de prendre en compte à la fois la spécification de la « dynamique » du taux d'intérêt instantané décrivant la courbe des taux toute entière, et la dimension « statique » qui est liée à la forme de la courbe des taux à un instant donné.

Pour garantir la positivité du taux court, Cox, Ingersoll et Ross utilisent un processus « racine carrée », dont la variance instantanée est proportionnelle à la racine carrée du niveau atteint. Sa différentielle stochastique s'écrit :

$$dr(t) = a\big(b - r(t)\big)dt + \sigma\sqrt{r(t)}dz(t) \text{ où } a > 0 \text{ et } b > 0$$

Nous supposons la condition 2ab> σ^2 qui assure la non négativité du taux court. Le taux d'intérêt ne peut toucher zéro.

Le processus « racine carrée » est un processus décrivant l'attirance élastique du taux court autour de la valeur centrale ***b***, avec une vitesse d'ajustement ***a***.

Cependant, lorsque $r(t)$ devient nul, la dynamique du taux court est ici décrite par l'équation déterministe $dr(t) = abdt > 0$. Ceci montre que, d'une part, le taux court ne peut jamais être négatif, et, d'autre part, qu'il redevient immédiatement positif juste après avoir atteint la valeur zéro. Zéro est une « barrière réfléchissante » pour le taux d'intérêt.

On remarque également que $\sigma^2 r(t)$, la variance instantanée du changement du taux court, croît avec son niveau. Ceci concorde avec les constatations empiriques, qui montrent que les taux sont d'autant plus volatiles que leur niveau est élevé.

Lorsque **a** tend vers l'infini (l'ajustement se fait de plus en plus rapidement), l'espérance de *r*(*t*) tend vers ***b***, et sa variance vers zéro. À l'inverse, lorsque **a** tend vers zéro (l'attraction vers ***b*** est de plus en plus faible), l'espérance du taux futur tend vers son niveau courant, et sa variance vers $\boldsymbol{\sigma^2 r(t)T}$, ce qui, dans ce cas, témoigne de l'absence de toute force de rappel. On voit également que la variance de *r*(*s*) tend vers la constante finie $\boldsymbol{b\sigma^2/2a}$, lorsque *s* tend vers l'infini.

Les remarques ci-dessus montre que le processus « racine-carrée » est apte à fournir une représentation vraisemblable de la dynamique du taux court.

Nous devons donc résoudre l'équation différentielle

$$V[r(t)] = r(0)\frac{\sigma^2}{a}(e^{-at} - e^{-2at}) + b\frac{\sigma^2}{2a}(1 - e^{-at})$$

$$\frac{1}{2}\sigma^2 P_{rr} + (a(b - r) - \lambda_z)P_r - rP + P_t = 0$$

Sous $P(r, s, s) = 1$, la solution est $P(r, t, s) = A(T)exp\{-B(T)r(t)\}, T = s - t$ avec

$A(T) = \frac{2\gamma e^{(a+\gamma)T/2}}{C(T)}$; $B(T) = \frac{2(e^{\gamma T} - 1)}{C(T)}$

$C(T) = (\gamma + a)(e^{\gamma T} - 1) + 2\gamma$; $\gamma = \sqrt{a^2 + 2\sigma^2}$; $Q = \frac{2ab}{\sigma^2}$

L'expression de γ montre que les taux de rendement sur les obligations sont moins variables lorsque le taux court est faible, et qu'ils sont certains lorsqu'il est nul (dans ce dernier cas, dr est, en effet, non-stochastique). De plus, la variabilité des rendements d'une obligation décroît avec sa maturité. Le processus « racine carrée » montre ici qu'il reproduit qualitativement certaines propriétés importantes de la structure des taux.

Une discrétisation d'Euler conduit à considérer l'équation suivante :

$$r_{i+1} = r_i + a(b - r_i)\Delta_i + \varepsilon_{i+1}$$

où Δ_i est l'intervalle de temps séparant t_i et t_{i+1} et

$E[\varepsilon_{i+1}] = 0$ $E[\varepsilon_{i+1}^2] = \sigma r \Delta_i$

Notre choix du taux court qui va être utilisé pour l'estimation des paramètres s'est porté sur le taux interbancaire ; TMP (taux moyen pondéré) qui nous a semblé le plus pertinent.

IV.2. Application du modèle de CIR

IV.2.1. L'étude dynamique de l'évolution de la variable d'état

Le TMP représente le facteur d'état, variable capitale dont l'évolution déterminera la structure par terme des taux.

Avant d'entamer l'estimation des paramètres, il convient de nous assurer que cette série chronologique présente bien les garanties techniques nécessaires en termes d'existence et de non-explosion des moments. Ces garanties concernent essentiellement la stationnarité de nos données.

1) Etude de la stationnarité du TMP

Nous testons la stationnarité des données par un test de Dickey et Fuller. La méthode consiste à régresser $y_t - y_{t-1}$ sur y_{t-1}en incluant ou non une constante et un terme de tendance. Il s'agit ensuite de vérifier si le coefficient de y_{t-1} est nul en utilisant des valeurs critiques appropriées pour ce test. Si l'hypothèse nulle est vérifiée, on dira que la série étudiée présente une racine unitaire, et par conséquent, qu'elle ne peut être considérée comme stationnaire.

Nos données sont des observations journalières sur le TMP dont nous allons extraire les moyennes sur le mois et sur la semaine en excluant les jours fériés. Ainsi nous obtenons des séries mensuelles et hebdomadaires du TMP.

Le tableau ci-dessous nous résume les résultats obtenus grâce à Eviews pour tester l'existence d'une racine unitaire.

test de racine unitaire sans tendance ni constante			**test de racine unitaire avec constante**			**test de racine unitaire avec tendance et constante**		
TMP	Statistique de student à5%	valeur	Statistique de student à5%	valeur	t-student de la constante	Statistique de student à5%	valeur	t-student de la tendance
mensuel	-1,94655	**0,45823**	-2,91002	-3,26637	3,249907	-3,485218	-5,00166	3,511372
journalier	-1,94201	**-0,4047**	-2,87208	-4,88741	4,807704	-3,426619	-5,27851	1,965989

Tableau 9: Test de racine unitaire de la série mensuelle et journalière du TMP

Pour la série mensuelle du TMP, le test de l'existence de racine unitaire avec constante donne la valeur -3,26637 qui est inférieure à la valeur de la statistique de student -2,91002, ce qui indique que la série modélisée avec constante est stationnaire. Il en est de même pour le test de racine avec constante et tendance. Ainsi, nous rejetons l'hypothèse de l'existence de racine unitaire pour la série mensuelle.

Ainsi, les séries de TMP mensuelle, hebdomadaire et journalière sont toutes les trois stationnaires. Donc nous n'avons pas de problème d'explosion des moments. Par conséquent, nous pouvons utiliser l'une ou plus des trois séries dans notre modèle.

Pour le modèle de Cox, Ingersoll Ross, l'utilisation des données quotidiennes n'a pas donnée de bons résultats pour l'estimation de la courbe. Ainsi on a choisi de traiter les séries mensuelles afin d'éviter les aberrations rencontrées dans les observations quotidiennes. Et cela en prenant la moyenne, pour chaque mois, des données quotidiennes.

Une illustration du test de la stationnarité donné par Eviews figure dans le tableau suivant :

Null Hypothesis: TMP has a unit root
Exogenous: Constant, Linear Trend
Lag Length: 0 (Automatic based on SIC, MAXLAG=10)

		t-Statistic	Prob.*
Augmented Dickey-Fuller test statistic		-5.001660	0.0007
Test critical values:	1% level	-4.115684	
	5% level	-3.485218	
	10% level	-3.170793	

Figure 19: Test de la racine unitaire avec constante et tendance du TMP mensuel

Nous remarquons donc que la valeur absolue de la statistique t tabulée du test (égale à -5.001660) est plus grande que la valeur absolue de **t (student)** au seuil de 5% (égale à 3.485218). Nous rejetons donc l'hypothèse H0 de la présence d'une racine unitaire et nous concluons que la série TMP est stationnaire.

2) Statistique descriptive :

Les statistiques descriptives de la série mensuelle du TMP sont résumées dans le tableau ci-dessous :

statistique descriptive	
Moyenne	0.028976
Mediane	0.028611
Maximum	0.043063
Minimum	0.022553
Ecart type	0.005364

Tableau 10: statistique descriptive de la série mensuel du TMP

Le TMP fluctue autour de la valeur 0,028976 avec une variation de 2,88E-05, sa valeur ne dépasse pas 4,3% en hausse et 2,25% en baisse.

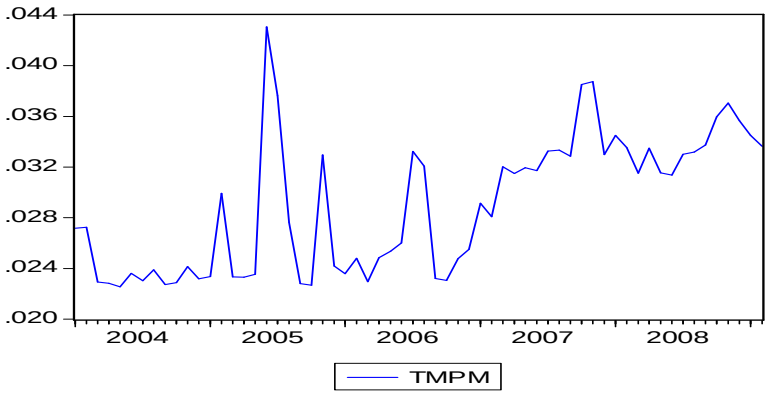


Figure 20: graphe du TMP mensuel

L'évolution du TMP mensuel est moins volatile que celle du TMP quotidien, ce qui est normal vue que la série mensuelle est une moyenne sur le mois de la série journalière. La série mensuelle parrait avoir une tendance haussière à partir de la fin de l'an 2006. Hors, le test de racine unitaire montre que la série est stationnaire.

IV.2.2.Estimation des paramètres du processus « racine carré »

A partir de la solution à l'équation différentielle mettant en évidence le prix d'un titre obligataire zéro- coupon, on peut déduire l'expression de la structure à terme des taux au comptant qui s'écrit :

$$r_t - r_{t-1} = \alpha(\beta - r_{t-1}) + \sigma\sqrt{r_{t-1}} \quad \text{Ou} \quad \frac{r_t}{\sqrt{r_{t-1}}} = \frac{\alpha\beta}{\sqrt{r_{t-1}}} + (1-\alpha)\sqrt{r_{t-1}} + \sigma$$

Pour calculer les différents indicateurs de mesure du risque obligataire, il est d'abord essentiel d'estimer les paramètres du processus « *racine carrée* ». L'estimation de ces paramètres a été réalisée à partir des observations mensuelles sur la période allant du 02 Janvier 2004 au 27 février 2009.

En absence de prime de risque, on pose :

$$Y = \frac{r_t}{\sqrt{r_{t-1}}} \quad ; \quad Z = \frac{1}{\sqrt{r_{t-1}}} \quad \text{et} \quad X = \sqrt{r_{t-1}}$$

On obtient une équation de régression : $Y = \alpha\beta Z + (1-\alpha)X + \sigma$

Cette forme de régression est mieux appropriée pour estimer les paramètres du processus « racine carrée » à partir de la méthode des moindres carrés ordinaires. Les résultats obtenus, en prenant l'écart type historique comme valeur de σ, sont les suivants :

Dependent Variable: Y
Method: Least Squares
Date: 13/04/09 Time: 20:23
Sample (adjusted): 2004M02 2009M02
Included observations: 61 after adjustments
Convergence achieved after 3 iterations
Y=C(1)*C(2)*Z+(1-C(1))*X+0.005364

	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C(1)	0.324700	0.101499	3.199039	0.0022
C(2)	0.026428	0.001671	15.81807	0.0000

R-squared	0.057088	Mean dependent var	0.170797
Adjusted R-squared	0.041107	S.D. dependent var	0.024788
S.E. of regression	0.024273	Akaike info criterion	-4.566649
Sum squared resid	0.034762	Schwarz criterion	-4.497440
Log likelihood	141.2828	Durbin-Watson stat	2.001741

Figure 21:Estimation des paramètres du processus « racine carré »

L'analyse de cette régression nous montre, au regard du t de student, que les coefficients estimés sont significativement différents de zéro. Il vient donc :

a=0.324700 b=0.026428 et **σ** = 0.05364

Le modèle est donc le suivant :

$$Y = 0.3247 * 0.026428Z + (1 - 0.324700)X + 0.05364$$

Il est très important de signaler que la discrétisation conduit à des estimations biaisées. Pour éviter ce problème, il existe des techniques d'estimations fondées sur des simulations, comme les procédures d'inférence indirecte.

La statistique de Durbin-Watson qui est de 2.001741 indique une absence d'autocorrélation entre les résidus.

Les résidus retirés de la discrétisation de CIR se caractérisent par :

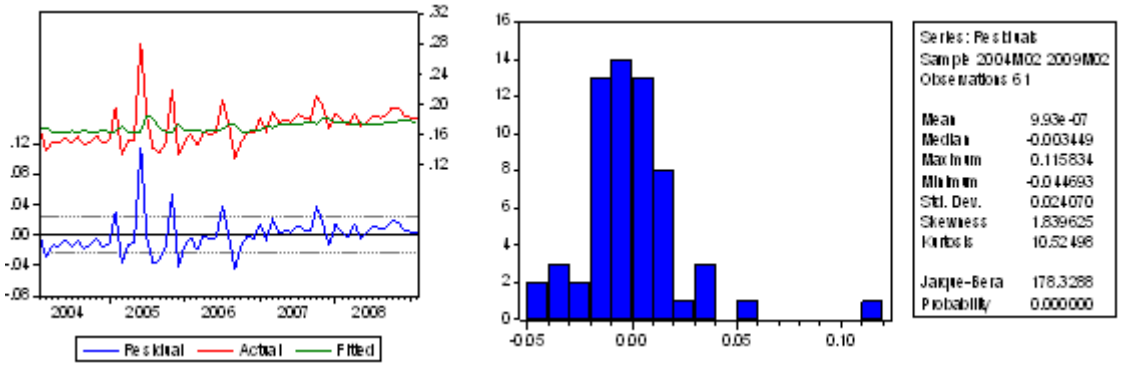
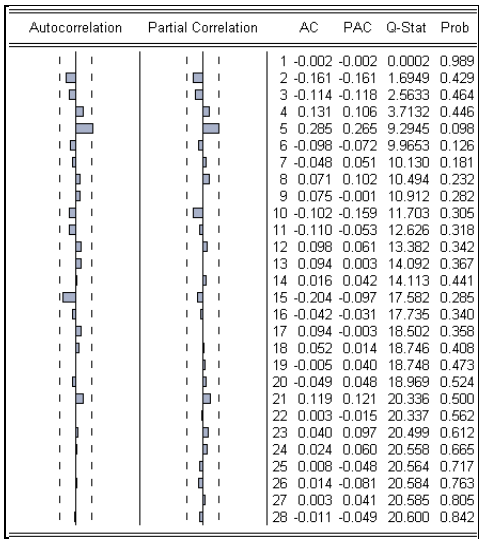


Figure 22: Graphique et histogramme des résidus du processus « racine carré »

L'histogramme montre que les résidus ne sont pas normaux, la statistique de jarque-bera est très élevée 178 >> 5,99 ; on rejette donc l'hypothèse de la normalité des résidus.



Autocorrelation	Partial Correlation		AC	PAC	Q-Stat	Prob
		1	-0.002	-0.002	0.0002	0.989
		2	-0.161	-0.161	1.6949	0.429
		3	-0.114	-0.118	2.5633	0.464
		4	0.131	0.106	3.7132	0.446
		5	0.285	0.265	9.2945	0.098
		6	-0.098	-0.072	9.9653	0.126
		7	-0.048	0.051	10.130	0.181
		8	0.071	0.102	10.494	0.232
		9	0.075	-0.001	10.912	0.282
		10	-0.102	-0.159	11.703	0.305
		11	-0.110	-0.053	12.626	0.318
		12	0.098	0.061	13.382	0.342
		13	0.094	0.003	14.092	0.367
		14	0.016	0.042	14.113	0.441
		15	-0.204	-0.097	17.582	0.285
		16	-0.042	-0.031	17.735	0.340
		17	0.094	-0.003	18.502	0.358
		18	0.052	0.014	18.746	0.408
		19	-0.005	0.040	18.748	0.473
		20	-0.049	0.048	18.969	0.524
		21	0.119	0.121	20.336	0.500
		22	0.003	-0.015	20.337	0.562
		23	0.040	0.097	20.499	0.612
		24	0.024	0.060	20.558	0.665
		25	0.008	-0.048	20.564	0.717
		26	0.014	-0.081	20.584	0.763
		27	0.003	0.041	20.585	0.805
		28	-0.011	-0.049	20.600	0.842

Figure 23: Corrélogramme des résidus du processus "racine carré"

Les tests de *Box – Pierce (1970)* et de *Ljung – Box (1978)* réalisés sur les résidus de la régression attestent la présence d'un « *bruit blanc* » au seuil de 1%.

La connaissance des paramètres du processus « *racine carrée* » permet donc d'exécuter aisément le modèle de *CIR* et de déterminer les différents indicateurs de mesure du risque obligataire en présence et en l'absence d'une prime de risque.

IV.2.3. Comparaison entre la courbe empirique et celle théorique du modèle CIR

L'estimation du modèle CIR se fait en deux étapes ; la première est l'estimation des paramètres a, b et σ du modèle du TMP (étude dynamique), et la deuxième est l'estimation du paramètre λ par la minimisation des erreurs des prix empirique et théorique d'une date donnée (étude statique). On utilisera le solveur d'Excel pour effectuer cette minimisation.

La feuille de calcul ci-dessous sur Excel effectue le calcul des coefficient A, B et C en fonction des paramètres α, β *et* σ donnée par la régression, ainsi que le paramètre λ donné par la minimisation de la somme des carrées des erreurs entre le prix théorique (calculé par la fonctionnelle de CIR) et le prix empirique des taux zéro coupon de différentes maturités à un instant donné.

52	0,25	0,5	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	20
avril-08	0,034263728	0,03473141	0,03528566	0,036639158	0,0373163	0,03793388	0,03855268	0,03914087	0,03976492	0,040416141	0,04099996	0,04159592	0,04220472	0,042885898	0,043589276	0,044305491	0,04498863	0,04701257
A	0,99986667	0,99946973	0,99790378	0,991821381	0,98207998	0,96902297	0,95300147	0,93436697	0,91346515	0,890630839	0,86618401	0,84042674	0,81364108	0,786087623	0,758004744	0,729608414	0,70109241	0,56204169
B	0,247928829	0,49176086	0,96740339	1,872423269	2,71907143	3,51110306	4,25203298	4,94515086	5,59353554	6,200068387	6,76744459	7,29819146	7,79466835	8,259080153	8,693500376	9,099861578	9,47997386	11,0424052
C	0,135971134	0,13825937	0,14295221	0,152821917	0,16337407	0,17465587	0,18671777	0,19961369	0,21340132	0,228142319	0,2439026	0,26075264	0,2787678	0,29802864	0,318621294	0,340637853	0,36417677	0,50865667
P	0,991599421	0,983145	0,96609303	0,931539596	0,89660515	0,8615278	0,82651903	0,79176482	0,75742691	0,723644365	0,69053515	0,65819782	0,62671316	0,5961459	0,5665463	0,537951697	0,51038798	0,38830235
R	0,03374425	0,03399733	0,03449514	0,035458291	0,0363799	0,03726199	0,03810647	0,03891515	0,03968975	0,040431902	0,04114316	0,04182498	0,04247876	0,04310582	0,043707421	0,04428475	0,04483834	0,04729855
ERREUR²	2,69858E-07	5,3887E-07	6,2492E-07	1,39445E-06	8,7685E-07	4,5144E-07	1,9911E-07	5,095E-08	5,651E-09	2,49414E-10	2,0504E-08	5,2468E-08	7,5095E-08	4,83657E-08	1,39582E-08	4,30162E-10	2,2408E-08	8,1785E-08	4,72735E-06

TMP
0,033488333

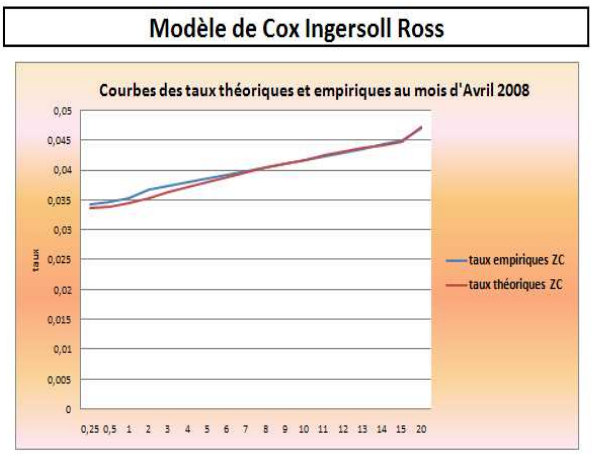
a	0,3247
b	0,026428
σ	0,005364
Q	596,4843
γ	0,06686
λ	-0,268843

$$P(r,t,s) = A(T) \times \exp\{-B(T) \times r(t)\}$$

$$B(T) = \frac{2(e^{\gamma T}-1)}{(\gamma+a)(e^{\gamma T}-1)+2\gamma}$$

$$A(T) = \left(\frac{2\gamma e^{(a+v)T/2}}{(\gamma+a)(e^{\gamma T}-1)+2\gamma}\right)^{Q}$$

$$v = \sqrt{a^2+2\sigma^2} \qquad Q = \frac{2ab}{\sigma^2}$$



calculer

Figure 24: feuille de calcul des paramètres et d'estimation de la courbe (modèle CIR)

L'exemple considéré est celui de la structure par terme du mois d'Avril 2008. On remarque que la courbe retrouvée par le modèle de CIR(en rouge) s'ajuste bien à la courbe empirique (en bleu) des taux zéro coupon pour le moyen et long terme de ce mois, cependant, un petit décalage se creuse au niveau du court terme.

Cet exemple ne permet pas de juger la pertinence du modèle choisi. En effet, l'évaluation de la qualité du modèle ne peut pas se restreindre à une date donnée du fait qu'on a une évolution de la structure par terme dans le temps. Par conséquent, nous avons appliqué à plusieurs dates le back-testing afin de trancher sur la robustesse du modèle. Ceci, nous a permis de mieux apprécier la justesse du modèle.

La structure des taux donnée par le modèle de CIR

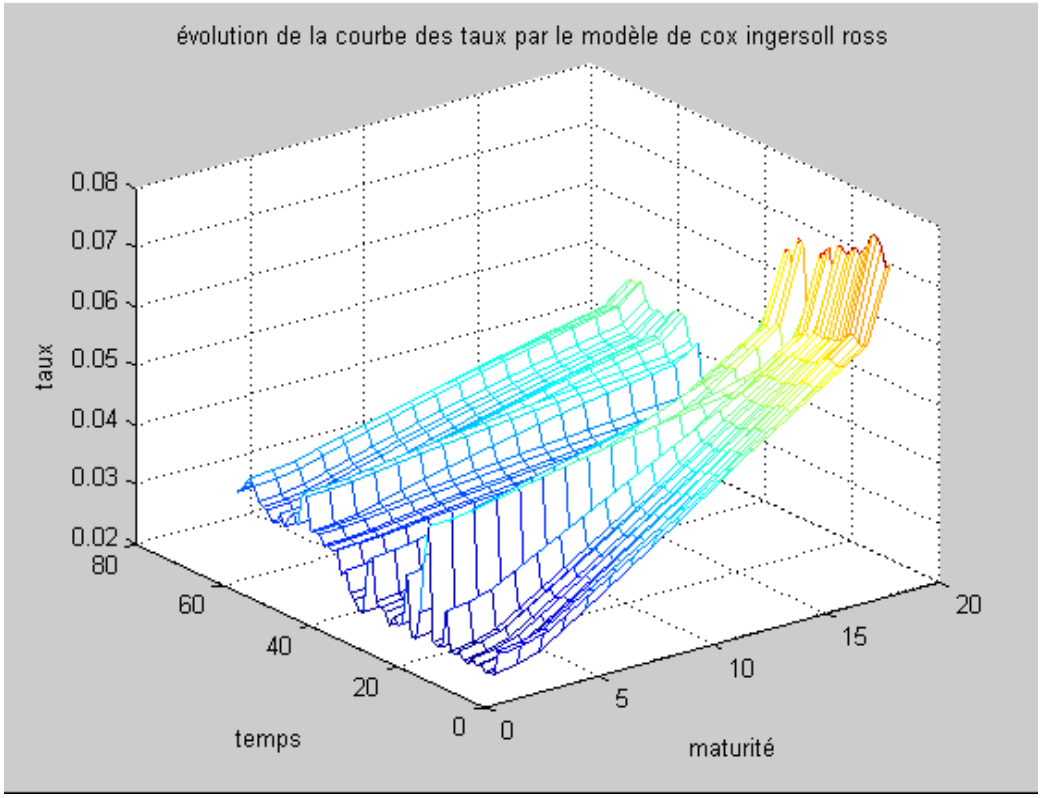


Figure 25:représentation en trois dimensions de l'évolution de la structure par terme des taux selon le modèle de CIR

La forme de la structure par terme des taux donné par CIR est très proche de celle retrouvée par les données empirique. Cette courbe est ascendante par rapport aux maturités et évolue dans le temps de telle façon que l'écart entre le taux long et court se rétricisse. En effet lex taux longs ont une tendance à la baisse sur la période allant de 2004 à 2009, mais restent suffisament supérieurs aux taux courts tandis que ces derniers ont une tendance à la hausse.

Le modèle de CIR nous permettra de faire des prévisions sur la courbe des taux future par le biais de simulations du mouvement brownien intégré dans l'équation qui modélise la variable d'état (TMP). Cette prévision nous sera utile pour le chapitre suivant.

IV.3. Limites du modèle CIR

Malgré le fait que ce modèle fournit des réponses rapides d'un point de vue informatique puisqu'il est simple à élaborer, il présente certaines limites au niveau de son utilisation.

Etant dans un contexte financier émergent où les variables macroéconomiques sont interactives, la restriction du modèle de CIR à un facteur d'état limite l'adaptation du modèle aux variations des autres variables macroéconomiques et ne lui permet pas parfois de suivre l'évolution de l'économie en général.

De plus, Cox, Ingersoll et Ross utilisent les séries chronologiques pour modéliser le taux court, et extraire les paramètres du processus de « racine carré ». Ceci suppose que l'évolution des taux s'effectue d'une façon parfaitement corrélée, ce qui n'est pas le cas, et limite les degrés de liberté du modèle, puisqu'on obtient la structure par terme par la minimisation d'un seul paramètre (le prix du risque).

Un autre inconvénient de ce modèle, est son incapacité à rendre compte de l'ensemble des formes de courbes de taux constatées sur le marché. Ce qui peut conduire à un mauvais ajustement de ce modèle aux données du marché (prix d'obligations).

Conclusion du Chapitre II

Il serait opportun de signaler en guise de synthèse générale des résultats obtenus dans ce chapitre, que pour presque toutes les dates qu'on a choisies pour faire un back testing, les trois modèles ont très bien approché la courbe des taux du marché.

Toutefois, on devrait signaler que les bases de données utilisées pour l'estimation sont différentes pour les trois modèles. En effet, on a adopté pour le modèle de Vasicek, la base de données journalière des taux zéro coupon, tandis que pour les modèles de Nelson Siegel et Cox, Ingersoll et Ross, la base de données mensuelle est celle qui a donné une meilleure modélisation.

En réalité, une comparaison entre les modèles dans ce cas n'a pas beaucoup de crédibilité pour au moins deux raisons, la première étant que la fréquence des données n'est pas la même pour tous les modèles, la seconde est qu'on ne pourrait aucunement faire une comparaison entre deux modèles en se référant à une date d'estimation. Ainsi, il serait plus crédible de se contenter des jugements portés à chaque modèle séparément.

Dans le chapitre suivant, on tâchera de prévoir des courbes de taux futures, en se basant sur les modèles développés dans le présent chapitre, afin de réaliser un simulateur de performance des portefeuilles obligataires.

Chapitre III :

Réalisation d'un simulateur de performance Des portefeuilles obligataires

Ce chapitre vient confirmer l'intérêt que suscite la modélisation de la courbe des taux dans l'univers de la gestion obligataire.

En effet, la réalisation d'un simulateur de performance obligataire, objet de ce chapitre, nécessite la connaissance des prévisions des courbes de taux à des horizons futurs.

Pour ce, on veillera en premier lieu, à estimer une courbe future de taux, on expliquera ensuite quelques notions liées à la performance des portefeuilles et on terminera par la réalisation d'un simulateur de performance des portefeuilles obligataires.

II. PREVISION DE LA COURBE FUTURE DES TAUX

II.1. Prévision de la courbe des taux par le modèle de Nelson Siegel

Pour pouvoir faire des prévisions sur la courbe des taux par la méthode de Nelson Siegel, on a besoin de connaitre le type de série chronologique de chaque paramètre et faire des prévisions pour ces paramètres dans le temps.

II.1.1. Modèle de la série composée par les β_0

La courbe de la série des paramètres est comme suit :

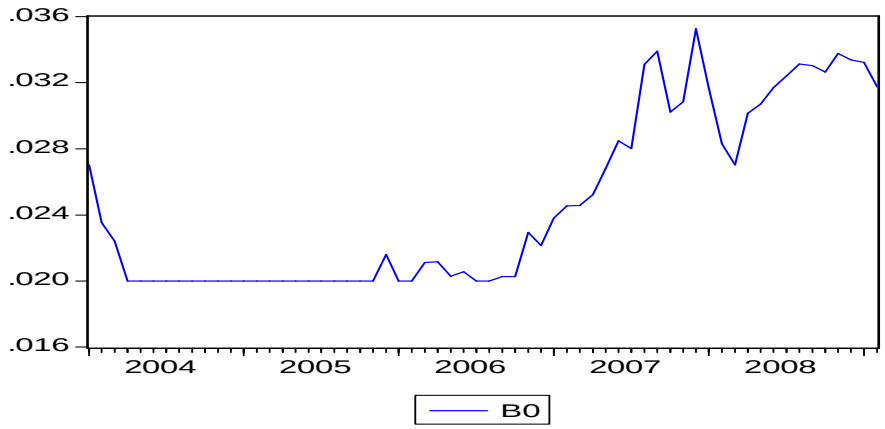


Figure 26: évolution du paramètre b_0 de NS dans le temps

Cette courbe laisse entrevoir une tendance haussière des paramètres à partir de fin 2006, ce qui suppose que la série n'est pas stationnaire.

On va d'abord tester si la série du paramètre β_0 est stationnaire à travers la statistique de Dickey-Fuller en utilisant eviews.

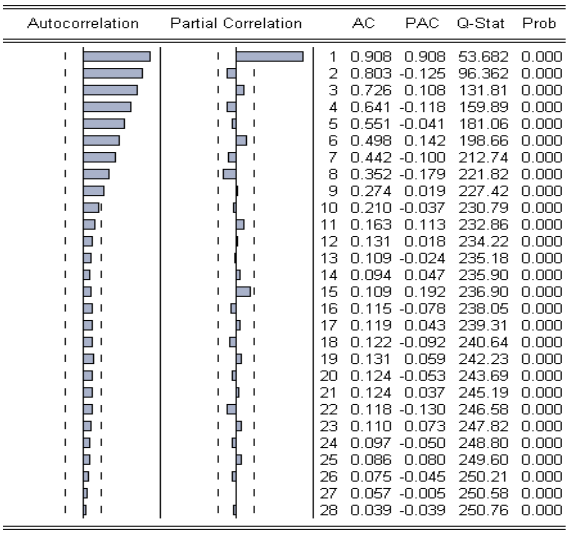
Null Hypothesis: B0 has a unit root
Exogenous: Constant, Linear Trend

		t-Statistic	Prob.*
Augmented Dickey-Fuller test statistic		-3.725779	0.0280
Test critical values:	1% level	-4.115684	
	5% level	-3.485218	
	10% level	-3.170793	

Tableau 11: test de racine unitaire pour le paramètre β_0

Le test de Dickey-Fuller montre que la série est stationnaire pour les seuils supérieurs à 5%,

- Le corrélogramme de la série indique que la série est un AR(1)



	AC	PAC	Q-Stat	Prob
1	0.908	0.908	53.682	0.000
2	0.803	-0.125	96.362	0.000
3	0.726	0.108	131.81	0.000
4	0.641	-0.118	159.89	0.000
5	0.551	-0.041	181.06	0.000
6	0.498	0.142	198.66	0.000
7	0.442	-0.100	212.74	0.000
8	0.352	-0.179	221.82	0.000
9	0.274	0.019	227.42	0.000
10	0.210	-0.037	230.79	0.000
11	0.163	0.113	232.86	0.000
12	0.131	0.018	234.22	0.000
13	0.109	-0.024	235.18	0.000
14	0.094	0.047	235.90	0.000
15	0.109	0.192	236.90	0.000
16	0.115	-0.078	238.05	0.000
17	0.119	0.043	239.31	0.000
18	0.122	-0.092	240.64	0.000
19	0.131	0.059	242.23	0.000
20	0.124	-0.053	243.69	0.000
21	0.124	0.037	245.19	0.000
22	0.118	-0.130	246.58	0.000
23	0.110	0.073	247.82	0.000
24	0.097	-0.050	248.80	0.000
25	0.086	0.080	249.60	0.000
26	0.075	-0.045	250.21	0.000
27	0.057	-0.005	250.58	0.000
28	0.039	-0.039	250.76	0.000

Figure 27: corrélogramme du paramètre β0

En effet, les ACF sont décroissantes exponentiellement et le PACF est significatif pour l'ordre 0 et non significatif pour les autres ordres ; ce qui nous montre un autorégressif d'ordre 1.

Le modèle de prévision de β0 est tiré du tableau suivant :

Dependent Variable: B0
Method: Least Squares
Included observations: 61 after adjustments

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	0.000798	0.000950	0.840263	0.4042
B0(-1)	0.970665	0.037795	25.68219	0.0000

R-squared	0.917893	Mean dependent var	0.024655
Adjusted R-squared	0.916501	S.D. dependent var	0.005396
S.E. of regression	0.001559	Akaike info criterion	-10.05704
Sum squared resid	0.000143	Schwarz criterion	-9.987832
Log likelihood	308.7397	F-statistic	659.5748
Durbin-Watson stat	1.825215	Prob(F-statistic)	0.000000

On retrouve : $\boxed{\beta_{0t}=0.000798+ 0.970665\ \beta_{0t-1}+ \varepsilon_t}$

I.1.2. Modèle de la série composée par les β_1 :

La courbe des β_1 a une tendance haussière à partir de 2006, ce qui nous laisse penser que la série n'est peut être pas stationnaire mais pour vérifier cela on doit passer par un test de racine unitaire.

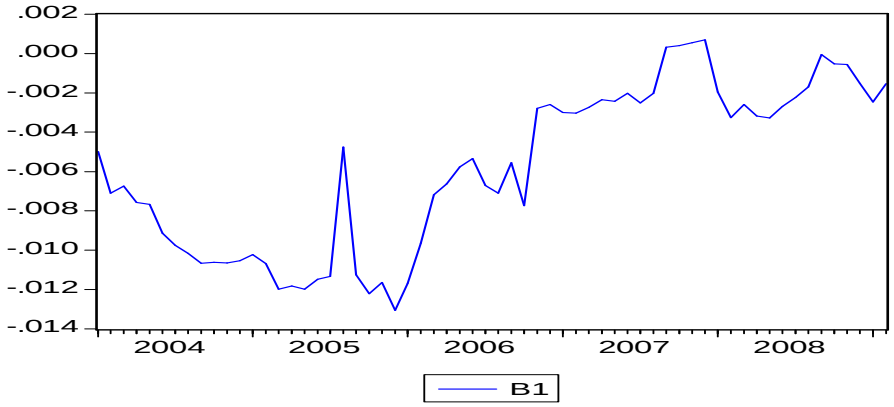


Figure 28: graphe du paramètre β1

- **Test de la stationnarité de la série :**

Null Hypothesis: B1 has a unit root

		t-Statistic	Prob.*
Augmented Dickey-Fuller test statistic		-3.434388	0.0562
Test critical values:	1% level	-4.115684	
	5% level	-3.485218	
	10% level	-3.170793	

Tableau 12: test de stationnarité du paramètre β1

La série n'est pas stationnaire pour les seuils 1% et 5% pour le cas du test de Dickey-fuller. Pour s'assurer du résultat, on va effectuer le test de Kwiatkowski Philips Schmidt Shin.

Kwiatkowski-Phillips-Schmidt-Shin test statistic		0.146525
Asymptotic critical values*:	1% level	0.216000
	5% level	0.146000
	10% level	0.119000

Tableau 13: test de stationnarité KPSS de β_1

Ce test rejette la non stationnarité de la série des β_1 pour le seuil 5%.

Le corrélogramme de la série chronologique des β_1 :

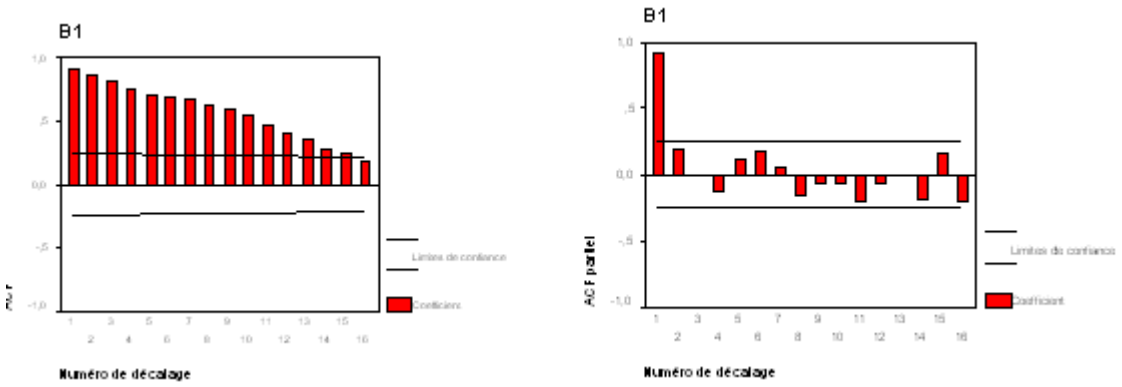


Figure 29: corrélogramme de la série du paramètre β_1

Ce corrélogramme indique que la série des β1 est un AR(1)

	B	SEB	T-RATIO	APPROX. PROB.
AR1	,9562925	,03549452	26,941976	,0000000
CONSTANT	2,6636805	,34443457	7,733488	,0000000

Le modèle devient : $\beta_{1t}=2,6636805+ 0,9562925\ \beta_{1t-1}+\varepsilon_t$

I.1.3. Modèle de la série composée par les β_2

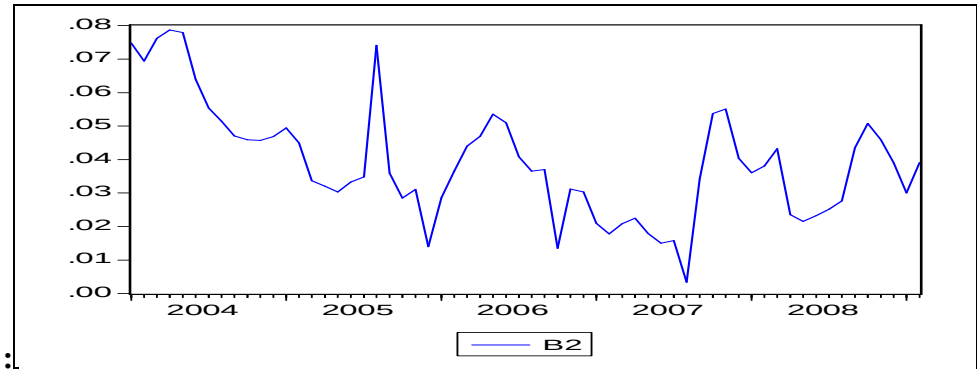


Figure 30: graphe du paramètre β_2

Test de stationnarité de la série :

- Test de dickey fuller augmenté avec tendance et constante

Null Hypothesis: B2 has a unit root

		t-Statistic	Prob.*
Augmented Dickey-Fuller test statistic		-3.387291	0.0626
Test critical values:	1% level	-4.115684	
	5% level	-3.485218	
	10% level	-3.170793	

Tableau 14: test de racine unitaire avec constante et tendance DFA du paramètre β2

Ce test ne permet pas de conclure quant à la stationnarité de la série. On va effectuer le test de ADF avec constante seulement

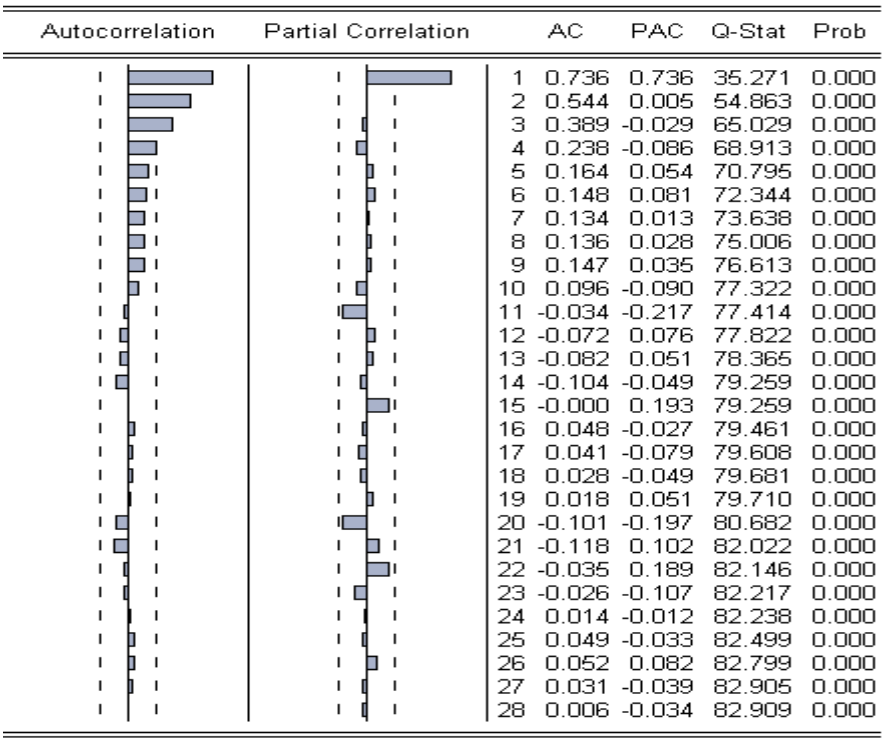
Null Hypothesis: B2 has a unit root
Exogenous: Constant

		t-Statistic	Prob.*
Augmented Dickey-Fuller test statistic		-3.260507	0.0212
Test critical values:	1% level	-3.542097	
	5% level	-2.910019	
	10% level	-2.592645	

Tableau 15: test de racine unitaire avec constante pour le paramètre β2

Au seuil 5% on rejette l'hypothèse de l'existence d'une racine unitaire. Ainsi la série β2 n'admet pas de racine unitaire.

Le corrélogramme de la série nous montre un AR(1)



Autocorrelation	Partial Correlation		AC	PAC	Q-Stat	Prob
		1	0.736	0.736	35.271	0.000
		2	0.544	0.005	54.863	0.000
		3	0.389	-0.029	65.029	0.000
		4	0.238	-0.086	68.913	0.000
		5	0.164	0.054	70.795	0.000
		6	0.148	0.081	72.344	0.000
		7	0.134	0.013	73.638	0.000
		8	0.136	0.028	75.006	0.000
		9	0.147	0.035	76.613	0.000
		10	0.096	-0.090	77.322	0.000
		11	-0.034	-0.217	77.414	0.000
		12	-0.072	0.076	77.822	0.000
		13	-0.082	0.051	78.365	0.000
		14	-0.104	-0.049	79.259	0.000
		15	-0.000	0.193	79.259	0.000
		16	0.048	-0.027	79.461	0.000
		17	0.041	-0.079	79.608	0.000
		18	0.028	-0.049	79.681	0.000
		19	0.018	0.051	79.710	0.000
		20	-0.101	-0.197	80.682	0.000
		21	-0.118	0.102	82.022	0.000
		22	-0.035	0.189	82.146	0.000
		23	-0.026	-0.107	82.217	0.000
		24	0.014	-0.012	82.238	0.000
		25	0.049	-0.033	82.499	0.000
		26	0.052	0.082	82.799	0.000
		27	0.031	-0.039	82.905	0.000
		28	0.006	-0.034	82.909	0.000

Figure 31: corrélogramme de la série du paramètre β2

En effet, le PACF est significatif seulement pour l'ordre 1 et les ACF sont décroissantes exponentiellement.

Dependent Variable: B2

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	0.009749	0.003457	2.820034	0.0065
B2(-1)	0.736399	0.080847	9.108576	0.0000

R-squared	0.584408	Mean dependent var	0.038616
Adjusted R-squared	0.577364	S.D. dependent var	0.016595
S.E. of regression	0.010789	Akaike info criterion	-6.188407
Sum squared resid	0.006867	Schwarz criterion	-6.119199
Log likelihood	190.7464	F-statistic	82.96616
Durbin-Watson stat	2.033835	Prob(F-statistic)	0.000000

Tableau 16: estimation des coefficients d'un AR(1) du paramètre β2

On peut considérer le modèle **:** $\boxed{\beta_{2t}= 0.009749+0.736399\ \beta_{2t-1}+\varepsilon_t}$

I.1.4. Prévision de la courbe des taux

On peut maintenant faire des prévisions grâce au modèle :

$$R_t(0,\theta)=\beta_{0t}+\beta_{1t}\left[\frac{1-\exp(-\theta/\tau)}{\theta/\tau}\right]+\beta_{2t}\left[\frac{1-\exp(-\theta/\tau)}{\theta/\tau}-\exp(-\theta/\tau)\right]$$

Avec β_{0t}=0.000798+ 0.970665 β_{0t-1}+ ε_t

β_{1t}=2,6636805+ 0,9562925 β_{1t-1}+εt

β_{2t}= 0.009749+0.736399 β_{2t-1}+ε_t

L'évolution de la courbe des taux estimée par la méthode de Nelson Siegel durant la période allant du 01/2004 au 02/2009, peut être schématisée comme suit :

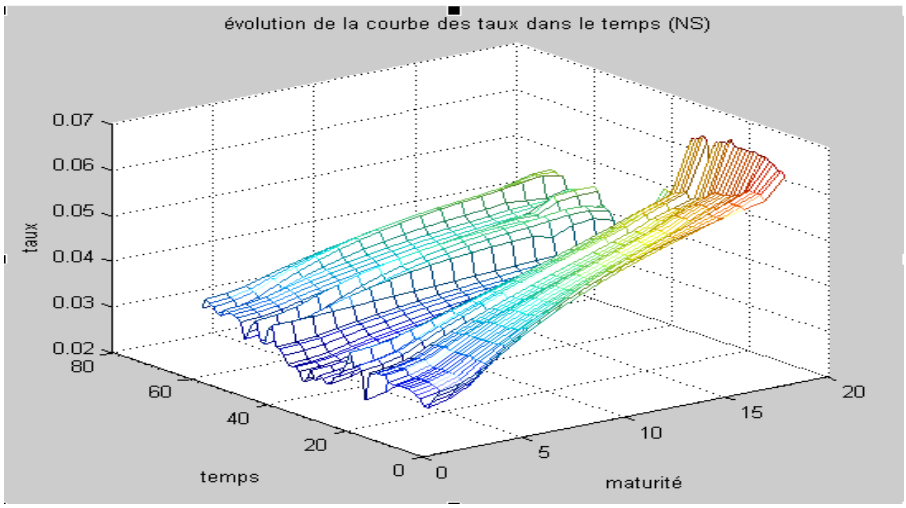


Figure 32: Evolution de la courbe des taux dans le temps par le modèle de NS

On peut effectuer la prévision de la courbe des taux en se basant seulement sur l'historique des paramètres du modèle de NS, mais ceci va engendrer une estimation biaisée vu l'accumulation des erreurs à cause des modèles de série chronologiques qui sont juste basés sur un historique et qui n'intègrent pas réellement les mouvements du marché financier.

Pour la fin de l'année 2009, on trouve la courbe :

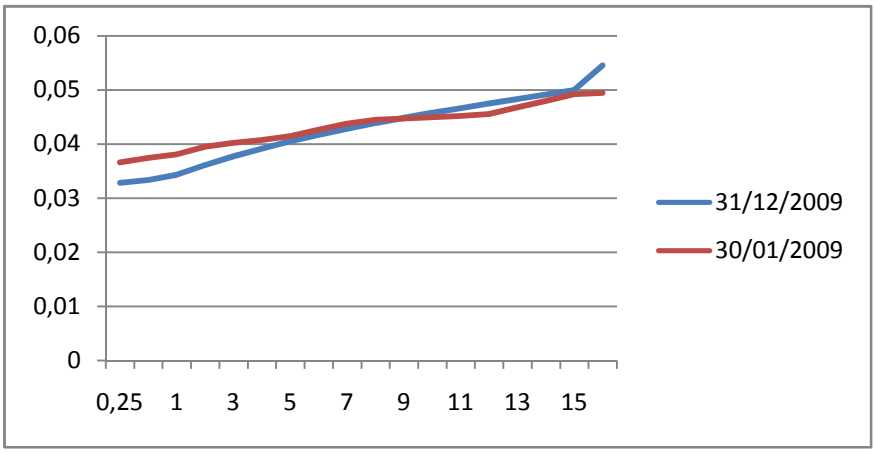


Figure 33: courbe des taux future au 31/12/2009 et courbe réelle du 30/01/2009

La courbe va évoluer de telle façon que les écarts entre le long terme et le court terme augmentent. Le taux court va connaitre une légère diminution. Tandis que le taux long va augmenter sensiblement. Ainsi, la prime de terme va s'élever pour refléter la méfiance des agents vis-à-vis du risque.

I.2. Prévision de la courbe par le Modèle de Vasicek

Afin d'effectuer des prévisions de la courbe des taux à l'aide du modèle de Vasicek, il va falloir faire des prévisions de la variable d'état, Taux Moyen Pondéré et faire une estimation du paramètre λ.

I.2.1. Prévision du TMP

On a vu précédemment que le taux moyen pondéré suivait le processus AR(1) :

$$r_t = 0{,}001118 + 0{,}961541 * r_{t-1} + \varepsilon_t$$

Avec $\varepsilon_t \rightarrow N\left(0, \frac{\sigma^2}{2k}(1-\exp(-2k))\right)$

Ceci étant une discrétisation du processus d'Ornstein-Uhlenbeck, on a trouvé plus exacte de faire des simulations de la variable ε_t afin d'obtenir des résultats plus fiables en terme de prévisions.

- Les simulations ont porté sur une année de prévisions, la procédure fut comme suit :

Ainsi, on a pu faire la prévision sur un horizon d'une année, de la variable d'état TMP.

On retiendra de ces prévisions, celle du 31/12/2009, pour laquelle on a prévu un TMP égal à 0,02907009

I.2.2. Prévision de λ

Etant donné que la prime de risque n'est pas facile à prévoir, et en se basant sur le fait que cette variable ne change pas beaucoup dans le temps, on se contentera de prendre comme variable λ la dernière qui est disponible c'est-à-dire celle du 19/03/2009 égale à -0,00244427.

I.2.3. Prévision de la courbe des taux au 31/12/2009

En appliquant les prévisions retenues pour le TMP et λ, on obtient la courbe suivante :

maturité	0,25	0,5	1	2	3	4
taux	0,02937425	0,0296757	0,03027056	0,031429	0,03254725	0,03362706

5	6	7	8	9	10
0,0346701	0,03567794	0,03665209	0,03759396	0,03850491	0,03938623

11	12	13	14	15	20
0,04023913	0,04106478	0,04186428	0,04263868	0,043389	0,04681103

Tableau 17: courbe des taux au 30/12/2009

La courbe des taux de fin d'année évoluera donc par rapport à celle de début d'année comme suit :

maturité	02/01/2009	31/12/2009
0,25	3,57%	2,94%
0,5	3,59%	2,97%
1	3,68%	3,03%
2	3,80%	3,14%
3	3,91%	3,25%
4	3,97%	3,36%
5	4,01%	3,47%
6	4,07%	3,57%
7	4,15%	3,67%
8	4,25%	3,76%
9	4,34%	3,85%
10	4,43%	3,94%
11	4,52%	4,02%
12	4,62%	4,11%
13	4,72%	4,19%
14	4,82%	4,26%
15	4,88%	4,34%
20	4,92%	4,68%

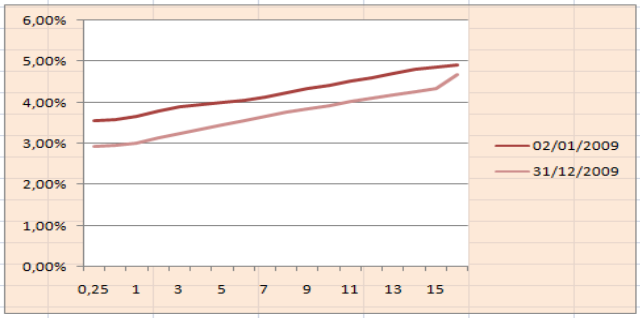


Figure 34: courbe des taux future prévue par le modèle de Vasicek

On constate que la courbe des taux baissera d'une manière presque parallèle pour toutes les maturités, elle se rapprochera pour la maturité 20 ans.

I.3. Prévision de la courbe par le Modèle de CIR

Pour effectuer cette prévision ON procédera en deux étapes. Dans un premier lieu, on va estimer le facteur d'état (TMP Mensuel), puis on va modéliser le paramètre du risque du marché pour enfin pouvoir estimer la courbe des taux à une date future.

I.3.1. Prévision du TMP

Le modèle de Cox, Ingersoll et Ross, suppose que le taux court suit un processus de racine carré de la forme :

$$dr_t = 0.3247(0.026428 - r_{t-1})dt + 0.05364\sqrt{r_{t-1}}dZ$$

avec dZ : la variation d'un mouvement brownien et dt : le pas de la périodicité

Afin de faire des prévisions plus précises sur le taux court, nous allons essayer de simuler le mouvement brownien en utilisant VBA.

On va tenter de prévoir pour une année le TMP de chaque jour, en utilisant pour chaque jour des simulations de 1000 scénarios :

La démarche de la simulation pour chaque estimation est la suivante :

1) Répéter en boucle (nombre de scénarios) les procédures suivantes :
2) Simuler d'une réalisation de la variable aléatoire ε_t suivant une loi normale de moyenne 0 et de variance 1.
3) Calculer le TMP du jour t par la relation :
$$r_t = r_{t-1} + 0.3247(0.026428 - r_{t-1})\Delta t + 0.05364\sqrt{r_{t-1}\Delta t}\varepsilon_t$$
4) Faire, pour le jour t la moyenne des TMP retrouvés pour les 1000 scénarios
5) Passer au jour suivant

Dans la suite du chapitre, on aura besoin de la prévision du TMP en fin d'année 2009 soit au 31/12/2009. Cette méthode nous donne un taux moyen pondéré de 0,0457535.

I.3.2. Prévision du facteur prix du risque de marché :

Le prix de risque du marché est négatif sur toute la période d'observation. Il évolue d'une façon décroissante en valeur absolue sur la période allant de 01/2004 au 02/2009 :

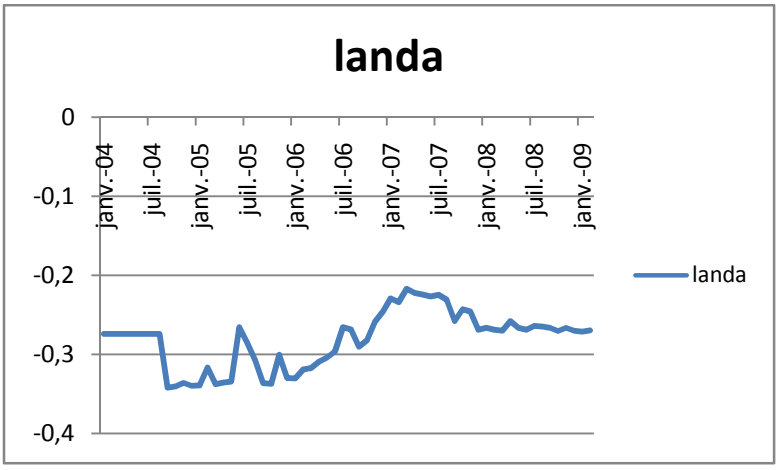


Figure 35: évolution du prix de risque du marché

La série observée de « landa » (prix de risque du marché) se caractérise par :

La série historique des landas estimées fluctue autour de la valeur -0.289906 avec une variance de 0.00166. La statistique de jarque berra ne permet pas de rejeter la normalité des landas.

Le corrélogramme de landa est :

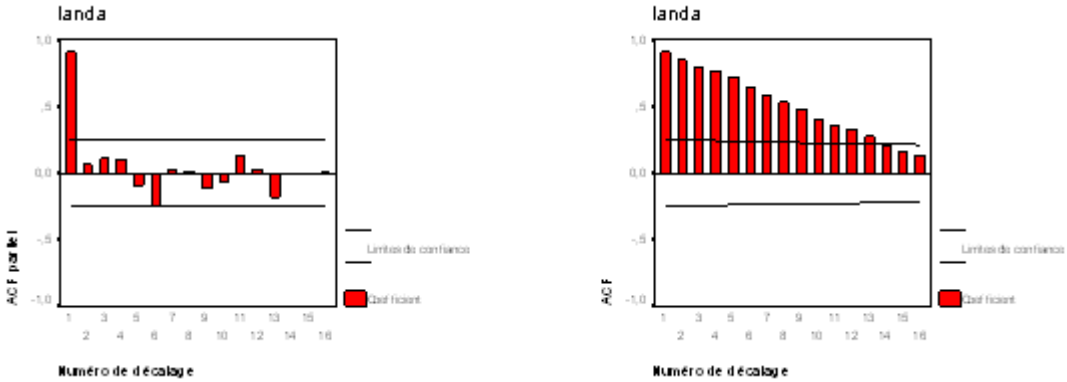


Figure 36: corrélogramme du prix de risque du marché CIR

Le modèle AR(1) correspondant est le suivant

Dependent Variable: LANDA

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	-0.022403	0.014268	-1.570132	0.1217
LANDA(-1)	0.919207	0.048686	18.88047	0.0000

R-squared	0.857993	Mean dependent var	-0.289190
Adjusted R-squared	0.855586	S.D. dependent var	0.040647
Durbin-Watson stat	2.150454	Prob(F-statistic)	0.000000

Tableau 18: estimation des coefficients du modèle AR(1) de landa

Soit le modèle AR(1) : $\lambda_t = -0,022403 + 0,919207\lambda_{t-1} + \varepsilon_t$ ε_t ***un bruit blanc***

Le R^2 indique que le modèle AR(1) représente assez bien l'évolution du TMP. La statistique de Durbin Watson étant proche de 2, conduit à rejeter l'hypothèse d'autocorrélation des résidus. La statistique de Fisher est très significative. Ainsi La modélisation du paramètre landa par un AR(1) s'avère pertinente. Ce qui va nous permettre prévoir les valeurs futures du prix du risque du marché.

I.3.3. Prévision de la courbe des taux au 31/12/2009

On va utiliser les valeurs prévues du TMP et de landa au 31/12/2009 :

Soit TMP=0,0337535 et λ =-0,274062696

En appliquant ces prévisions, on obtient la courbe suivante :

maturité	0,25	0,5	1	2	3	4
taux	0,03407481	0,03439342	0,03502261	0,03624961	0,03743606	0,03858348
	5	6	7	8	9	10
	0,03969331	0,04076694	0,04180569	0,04281086	0,04378367	0,0447253
	11	12	13	14	15	20
	0,04563689	0,04651954	0,04737429	0,04820215	0,0490041	0,05265642

Tableau 19: courbe des taux en décembre 2009 CIR

La courbe des taux de fin d'année évoluera donc par rapport à celle de début d'année comme suit :

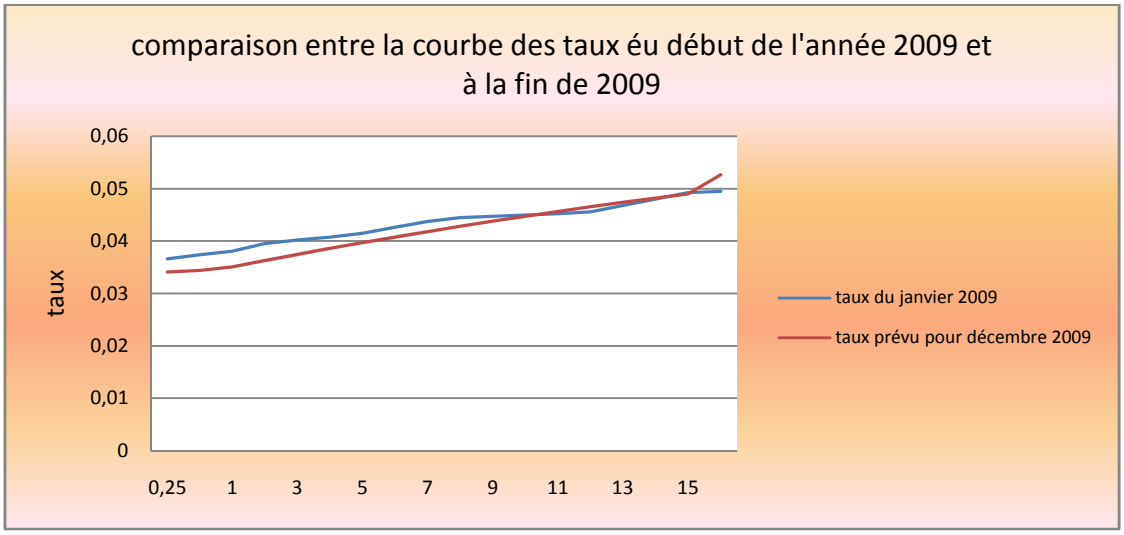


Figure 37: comparaison entre courbe réelle du début de l'an 2009 et courbe prévue à la fin de l'année

La courbe prévue pour la fin d'année 2009 par le modèle de CIR, ne s'écarte pas trop de celle évaluée au début de l'année. On remarque dans ce cas, qua la courbe a une tendance baissière pour la majorité des taux, sauf pour le 20 ans où on observe une progression du taux.

Cette prévision ne se contredit pas avec celle de Vasicek, mais elle est moins espacée de la courbe du marché.

II. SIMULATEUR DE PERFORMANCE

II.1. Notions et définitions

II.1.1. Taux de rendement actuariel

Le taux de rendement actuariel est le taux qui égalise le prix de l'obligation et la valeur actuelle des flux à venir actualisés à ce taux.

Trouver le taux actuariel, c'est résoudre l'équation où x est le taux recherché avec :

P : prix de l'obligation (cours coté+ coupon couru),

n : durée de vie de l'obligation en année,

$\{Fi\}_{1an}$: flux à la date i,

$$P = \frac{F_1}{1+x} + \frac{F_2}{(1+x)^2} + ... + \frac{F_n}{(1+x)^n}$$

Cette notation suppose que le premier flux survient exactement un an après la date de calcul et que tous les flux ultérieurs sont équidistants d'un an.

Le taux d'actualisation, c'est le taux de rentabilité interne tel que valeur Actuelle –P=0.

Lorsque le calcul de taux est réalisé à une date différente d'une date de détachement de coupon, l'actualisation doit refléter le temps écoulé T (en jours), depuis la date de paiement du coupon précédent.

On modifie alors l'équation précédente en multipliant par un facteur :

$$P = (1+x)^{T/365} \times \left[\frac{F_1}{1+x} + \frac{F_2}{(1+x)^2} + ... + \frac{F_n}{(1+x)^n} \right]$$

II.1.2. Duration

Chaque gestionnaire obligataire gère son portefeuille selon des horizons temps propres à sa politique de placement, à ses besoins potentiels futurs en argent liquide et à ses anticipations quant à l'évolution du marché. La duration permet d'estimer la durée de vie moyenne d'une obligation donnée. En d'autres termes, on peut définir la duration comme étant une durée sur laquelle on doit conserver un titre pour qu'il rapporte un rendement équivalent à son taux de coupon quelle que soit la variation «infinitésimale » des taux d'intérêt sur le marché.

Elle peut aussi être définie comme une mesure en année de la durée de vie d'une obligation, pondérant le coupon et le remboursement du principal en fonction de la date à

laquelle interviennent ces flux. Elle permet d'apprécier l'impact de la variation des taux d'intérêt sur le prix du titre : plus elle est longue, plus l'impact sera important sur le support.

Le taux actuariel de l'obligation est la valeur r qui assure que la valeur actualisée de l'obligation coïncide avec le prix observé, il est la solution de :

$P = \sum_{t=1}^{n} \frac{F_t}{(1+r)^t}$ Corrigé du facteur $(1+r)^{T/365}$, si le calcul est réalisé à une date différente d'une date de détachement de coupon.

La duration de l'obligation s'exprime alors de la manière suivante :

$D = \frac{\sum_{t=1}^{n} \frac{F_t}{(1+r)^t}}{P}$ Où r est le taux actuariel. La même remarque que précédemment sur la correction selon la date de calcul s'applique également.

La duration apparaît comme une échéance moyenne, puisqu'elle est égale à la moyenne des valeurs possibles de t pondérée par les flux actualisés.

Pour une obligation zéro coupon, la duration est égale à la maturité par construction.

La duration permet de comparer des emprunts émis à des conditions différentes.

En cas d'anticipation de baisse des taux, il vaut mieux choisir une obligation à duration plus longue : plus la duration est longue et plus l'obligation est sensible.

En cas d'anticipation de hausse des taux, il vaut mieux choisir une obligation à duration plus courte : plus la duration est courte, moins l'obligation est sensible.

La notion de duration a toutefois des limites importantes : il est possible d'utiliser la duration pour couvrir le portefeuille contre une variation parallèle de la courbe des taux mais elle ne permet pas de couverture contre la déformation de la courbe des taux.

On peut également dire qu'elle suppose une courbe des taux plate (calcul du prix par actualisation au taux de rendement actuariel, constant à toutes les échéances) ou des mouvements de taux parallèles car elle ignore la convexité.

II.1.3. Sensibilité

La sensibilité est utilisée comme un instrument de mesure du risque de taux qui entache un titre. En effet, la sensibilité est la variation en pourcentage de la valeur d'un titre induite par une variation de son taux de rendement de 1%. Cette caractéristique lui sert de base à son utilisation comme instrument de mesure du risque de taux d'intérêt. La sensibilité d'un portefeuille est égale à la moyenne pondérée des sensibilités des titres le composant.

Elle est une mesure de la variation relative de prix rapportée à une variation du taux d'intérêt :

$$\frac{dP}{P}/dr = \frac{1}{P}\times\frac{dP}{dr} = \frac{1}{P}\times\left(\sum_{t=1}^{n}\frac{F_t}{(1+r)^t}\right)'$$

L'indice (') signifie dérivée du prix (somme des flux actualisés par rapport au taux r).

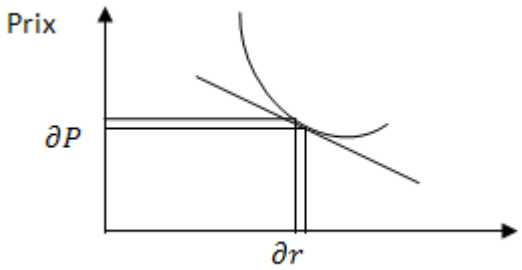
Comme la dérivée d'une somme est égale à la somme des dérivés, on obtient :

$$S = \frac{1}{P}\times\sum_{t=1}^{n}\frac{F_t\times(-t)}{(1+r)^{t+1}} = \frac{-1}{(1+r)}\times D$$

La perte exprimée en pourcentage de nominal subie par une obligation, suite à une hausse parallèle des taux sur l'ensemble de la courbe, est égale au produit de la sensibilité par le montant de hausse des taux (exprimé en pourcentage) et par le prix initial coupon couru inclus.

Le résultat est local puisque la dérivée est prise instantanément et à chaque nouvelle valeur des taux, on obtient une nouvelle sensibilité de l'obligation.

Si on fait une représentation graphique représentant sur l'axe des ordonnées les prix d'une obligation et les taux d'actualisation représentés sur l'axe des abscisses, on obtient une courbe décroissante et convexe :



La mesure de la variation du prix de l'actif face à une variation infinitésimale du taux d'actualisation, peut être approchée par la dérivée première de la fonction donnant la relation entre ces deux variables.

$S = -\frac{\partial P}{\partial r}\Big/P$ avec S : représentant la sensibilité de l'obligation.

II.2. Choix de sensibilité par zone de courbe

Le gérant ne joue pas sur la sensibilité globale, qui reste constante. En fonction des anticipations de déformations de déformation de la courbe des taux, le choix va se porter plutôt sur telle ou telle partie de la courbe. Ce choix dépend beaucoup de la pentification de la courbe.

Par exemple, il est possible si l'on anticipe un aplatissement de la courbe d'acheter des contrats futurs long terme et de vendre des contrats futures court terme.

A l'inverse, si l'on anticipe une pentification de la courbe, il est possible d'acheter des contrats futurs court-moyen terme et de vendre des contrats futurs long terme, en conservant la sensibilité globale initiale.

Cette stratégie sur les contrats futurs peut également s'appliquer sur les obligations physiques, mais avec un coût supérieur.

Remarque :

- Le choix de sensibilité par zone de courbe et le choix de pentification globale sont identiques : il s'agit de la répartition de la sensibilité globale sur différentes zones de la courbe,
- Le choix de convexité, au sens dérivé seconde du prix, n'est pas choisi explicitement par le gérant, c'est une résultante du choix de sensibilité.

II.3. Réalisation du simulateur

Parmi les utilisations de la modélisation de la courbe des taux pour les gérants de fonds, l'optimisation des performances de portefeuilles obligataires et cela en déterminant les poids qui assurent un maximum de performance sous certaines contraintes

Tout d'abord, nous allons considérer un portefeuille réel, qui comporte des titres des différentes maturités ; 52 semaines, 2 ans, 3,5 ans, 5ans, 8 ans, 10 ans, 13 ans, 15 ans, 20 ans. Nous allons ensuite nous situer au début de l'année et valoriser notre portefeuille à la fin de l'année.

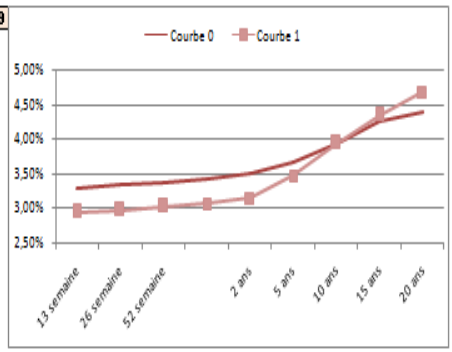
Nous avons utilisé les modèles traités dans la partie précédente pour prévoir la courbe future, exactement au 31/12/2009.

II.3.1. Modèle de Vasicek:

Courbe de taux		Courbe 0	Courbe 1
13 semaine	91	3,30%	0,02937425
26 semaine	182	3,35%	0,0296757
52 semaine	364	3,38%	0,03027056
	364	3,427%	3,069%
2 ans	730	3,503%	0,031429
5 ans	1825	3,655%	0,0346701
10 ans	3630	3,939%	0,03938623
15 ans	5475	4,256%	0,043389
20 ans	7300	4,393%	0,04681103

Date valo	31/12/2009
sensi max	9
sensi min	7

CommandButton1



			01/01/2009										25,0000%	
LIB_COURT	TITRE	0	prix	Sensi	mat rés 0	mat rés 1	rendt T0	rendt T1	Prix T1	DPC	Coupon détaché	produit	poids min	poids max
20 ans	200792	**0,00%**	112 918,08	10,99	6 364,00	6 000	4,32%	4,44%	111 111,41	05/06/2009	5 150	0,000%	25,00%	15,00%
15 ans	200709	**15,00%**	124 802,33	10,13	5 573,00	5 209	4,26%	4,28%	123 604,50	05/04/2009	6 100	0,589%	25,00%	15,00%
13 ans	200812	**15,00%**	98 447,35	9,82	4 783,00	4 419	4,14%	4,11%	98 968,19	05/02/2009	3 650	0,635%	25,00%	15,00%
10 ans	200708	**15,00%**	119 565,57	7,60	3 746,00	3 382	3,96%	3,87%	119 021,23	05/04/2009	5 800	0,659%	35,00%	15,00%
8 ans	200811	**27,68%**	100 343,66	6,53	2 936,00	2 572	3,83%	3,66%	101 656,13	15/01/2009	3 400	1,300%	35,00%	15,00%
5 ans	200707	**20,00%**	111 040,62	4,27	1 920,00	1 556	3,67%	3,39%	110 909,88	05/04/2009	5 200	0,913%	20,00%	15,00%
3,5 ans	200581	**7,32%**	111 762,88	2,82	1 326,00	962	3,59%	3,21%	110 254,38	19/08/2009	6 400	0,320%	25,00%	0,00%
2 ans	200410	**0,00%**	265 728,52	1,45	709,00	345	3,50%	3,02%	259 350,77	11/12/2009	16 750	0,000%	25,00%	0,00%
52 semaine	200757	**0,00%**	101 868,70	1,30	627,00	263	3,48%	2,99%	101 763,67	20/09/2009	3 950	0,000%	25,00%	0,00%
		100,00%		7,00							Performance	4,4174%		

Figure 38: simulateur de performance modèle de Vasicek

On a retenu pour la valorisation de ce portefeuille les contraintes qui correspondent à la stratégie adoptée par la société d'accueil dans la constitution de ses portefeuilles.

Pour ce portefeuille, on a pris une sensibilité cible du portefeuille comprise entre 7 et 9, et des poids cibles des titres compris entre 15% et 25% pour les maturité supérieures à 5ans et compris entre 0% et 25% pour les maturités 3,5ans, 2ans et 52semaines.

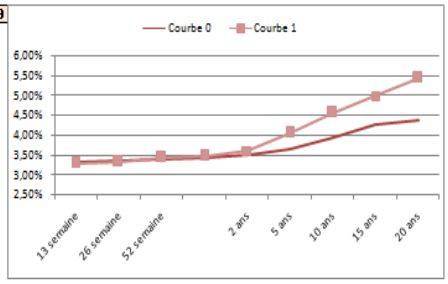
La résolution du problème d'optimisation de la performance sous les contraintes précitées a donné une performance de 4,4147% avec des poids cibles des titres de respectivement 0%, 15%, 15%, 15% 27,68%, 20%, 7,32%, 0%, 0% pour les maturités déjà énoncées.

II.3.2. Modèle de Nelson Siegel :

Courbe de taux		Courbe 0	Courbe 1
13 semaine	91	3,30%	0,03282503
26 semaine	182	3,35%	0,03333039
52 semaine	364	3,38%	0,03430114
	364	3,427%	3,478%
2 ans	730	3,503%	0,03609445
5 ans	1825	3,655%	0,04050197
10 ans	3630	3,939%	0,04575867
15 ans	5475	4,256%	0,04997698
20 ans	7300	4,393%	0,05453386

Date valo	31/12/2009
sensi max	9
sensi min	7

CommandButton1



25,0000%

LIB_COURT	TITRE	0	01/01/2009 priz	Sensi	mat rés 0	mat rés 1	rendt T0	rendt T1	Priz T1	DPC	Coupon détaché	produit	poids min	poids max
20 ans	200792	**0,00%**	112 918,08	10,99	6 364,00	6 000	4,32%	5,13%	103 149,09	05/06/2009	5 150	0,000%	25,00%	15,00%
15 ans	200709	**15,00%**	124 802,33	10,13	5 573,00	5 209	4,26%	4,94%	116 193,39	05/04/2009	6 100	-0,302%	25,00%	15,00%
13 ans	200812	**15,00%**	98 447,35	9,82	4 783,00	4 419	4,14%	4,76%	93 280,27	05/02/2009	3 650	-0,231%	25,00%	15,00%
10 ans	200708	**15,00%**	119 565,57	7,60	3 746,00	3 382	3,96%	4,50%	113 907,88	05/04/2009	5 800	0,018%	35,00%	15,00%
8 ans	200811	**27,68%**	100 343,66	6,53	2 936,00	2 572	3,83%	4,27%	98 074,30	15/01/2009	3 400	0,312%	35,00%	15,00%
5 ans	200707	**20,00%**	111 040,62	4,27	1 920,00	1 556	3,67%	3,94%	108 673,88	05/04/2009	5 200	0,510%	20,00%	15,00%
3,5 ans	200581	**7,32%**	111 762,88	2,82	1 326,00	962	3,59%	3,70%	108 972,24	19/08/2009	6 400	0,236%	25,00%	0,00%
2 ans	200410	**0,00%**	265 728,52	1,45	709,00	345	3,50%	3,42%	258 404,59	11/12/2009	16 750	0,000%	25,00%	0,00%
52 semaine	200757	**0,00%**	101 868,70	1,30	627,00	263	3,48%	3,38%	101 492,43	20/09/2009	3 950	0,000%	25,00%	0,00%
		100,00%		7,00							Performance	0,5438%		

Figure 39:simulateur de performance modèle de NS

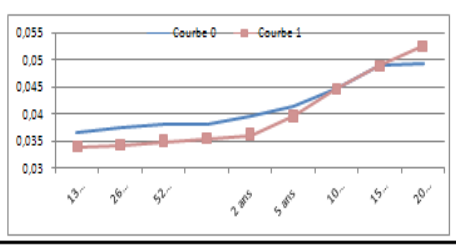
La résolution du problème d'optimisation de la performance sous les mêmes contraintes précitées a donné une performance de 0,5438% avec des poids cibles des titres de respectivement 0%, 15%, 15%, 15% 27,68%, 20%, 7,32%, 0%, 0% pour les maturités déjà énoncées.

II.3.3. Modèle de CIR

Courbe de taux		Courbe 0	Courbe 1
13 semaine	91	0,03662352	0,034074813
26 semaine	182	0,037436621	0,034393418
52 semaine	364	0,038111941	0,035022608
	364	3,830%	3,551%
2 ans	730	0,039535224	0,036249607
5 ans	1825	0,041489075	0,039693313
10 ans	3630	0,044963047	0,044725298
15 ans	5475	0,049242756	0,049004096
20 ans	7300	0,049466209	0,052656423

Date valo	31/12/2009
sensi max	9
sensi min	7

CommandButton1



3,45%
3,50%
3,59%
3,640%
3,760%
4,170%
4,170%
4,940%
5,250%
4,500%

25,0000%

LIB_COURT	TITRE	poids	01/01/2009 priz	Sensi	mat rés 0	mat rés 1	rendt T0	rendt T1	Priz T1	DPC	Coupon détaché	produit	poids min	poids max
20 ans	200792	**0,00%**	105 405,42	10,99	6 364,00	6 000	4,94%	5,01%	104 511,09	05/06/2009	5 150	0,000%	25,00%	15,00%
15 ans	200709	**15,00%**	116 896,36	10,13	5 573,00	5 209	4,93%	4,84%	117 263,60	05/04/2009	6 100	0,830%	25,00%	15,00%
13 ans	200812	**15,00%**	92 624,30	9,82	4 783,00	4 419	4,76%	4,66%	94 138,76	05/02/2009	3 650	0,836%	25,00%	15,00%
10 ans	200708	**15,00%**	114 578,48	7,60	3 746,00	3 382	4,52%	4,40%	114 702,26	05/04/2009	5 800	0,776%	35,00%	15,00%
8 ans	200811	**35,00%**	96 855,81	6,53	2 936,00	2 572	4,36%	4,18%	98 597,42	15/01/2009	3 400	1,858%	35,00%	15,00%
5 ans	200707	**20,00%**	108 628,18	4,27	1 920,00	1 556	4,17%	3,88%	108 901,66	05/04/2009	5 200	1,008%	20,00%	15,00%
3,5 ans	200581	**0,00%**	110 091,04	2,82	1 326,00	962	4,06%	3,70%	108 984,94	19/08/2009	6 400	0,000%	25,00%	0,00%
2 ans	200410	**0,00%**	263 579,99	1,45	709,00	345	3,95%	3,50%	258 225,91	11/12/2009	16 750	0,000%	25,00%	0,00%
52 semaine	200757	**0,00%**	101 150,26	1,30	627,00	263	3,92%	3,47%	101 428,03	20/09/2009	3 950	0,000%	25,00%	0,00%
		100,00%		7,27							Performance	5,3075%		

Figure 40: simulateur de performance modèle de CIR

La résolution du problème d'optimisation de la performance sous les contraintes énoncés auparavant a donné une performance de 5,3075% avec des poids cibles des titres de respectivement 0%, 15%, 15%, 15%, 35%, 20%, 0, 0%, 0% pour les maturités 20, 15, 13, 10, 8, 5, 3.5, 2 ans et 52 semaines

Le portefeuille le plus performant dans ce cas avec des contraintes internes à l'organisme d'accueil et de sensibilité proche de 7 est un portefeuille globalement de long terme ; qui maximise sa part en obligations de 8 ans et 5ans et prend des parts égales pour les maturités de 10, 13 et 15 ans.

Conclusion
Chapitre III

Comme on l'a déjà signalé au début, ce chapitre est une application de ce qui a précédé. Son objet était de reprendre l'une des techniques managériales les plus répondues chez les gérants obligataire, il s'agit de la réalisation d'un simulateur de performance de portefeuilles obligataires basé sur les prévisions de courbes des taux.

Les prévisions de la courbe par les trois modèles du chapitre 2, ont donné pour la date de valorisation considérée (le 31/12/2009) des courbes dont presque tous les taux sont inférieurs à ceux de la courbe du 01/01/2009. Ceci rejoint parfaitement l'intuition des gérants obligataires quant au mouvement de la courbe, d'ici la fin d'année.

Le modèle de CIR a donné la performance du fonds la plus élevée, suivi par le modèle de Vasicek et enfin par le modèle de Nelson Siegel. Le respect des normes et des contraintes de la société de gestion a fait qu'on a obtenu des horizons de placement qui s'inscrivent plutôt dans le moyen et long terme.

CONCLUSION GENERALE

Au terme de ce mémoire, il serait utile de rappeler que la structure par terme des taux d'intérêts figure parmi les questions financières les plus complexes et auxquelles il a été très difficile de trouver des réponses complètes. Il s'agit en fait, d'une problématique qui a fait coulé beaucoup d'encre depuis les années 30.

Le chapitre préliminaire de ce mémoire, a consisté à rappeler les différentes notions de taux, à passer en revue les composantes du marché financier Marocain et à étaler les principales théories traditionnelles de taux d'intérêt, ceci a été une sorte de bonne initiation au sujet.

Le premier chapitre a porté sur les modèles empiriques de la courbe de taux. Il a débouché sur des conclusions qui suscitent de l'intérêt. On note dans ce sens que la régression multiple a aboutit à de bons résultats pour le court et le moyen terme. En effet, le taux moyen pondéré explique à lui seul plus de 90% de la variation des taux à court terme, les taux à moyen terme, quant à eux, sont expliqués à plus de 90% par les variables taux moyen pondéré et taux d'inflation. De plus, le deuxième point traité dans ce chapitre nous laisse confiants quant à la bonne qualité du lissage qui résulte de la méthode des splines polynomiaux.

Le deuxième chapitre, a traité les modèles financiers de la courbe des taux. Il serait opportun de signaler en guise de synthèse générale des résultats obtenus dans ce chapitre, que pour presque toutes les dates qu'on a choisies pour faire le back testing, les trois modèles ont bien approché la courbe des taux du marché.

En réalité, une comparaison entre les modèles dans ce cas n'a pas beaucoup de crédibilité pour au moins deux raisons, la première étant que la fréquence des données n'est pas la même pour tous les modèles, la seconde est qu'on ne pourrait aucunement faire une comparaison entre deux modèles en ne se référant qu'au back testing réalisé pour quelques dates d'estimation. Il serait donc plus crédible de se contenter des jugements portés à chaque modèle séparément.

Comme on l'a déjà signalé au début, le chapitre 3 est une application de ce qui a précédé. Son objet était de reprendre l'une des techniques managériales les plus répondues chez les gérants obligataires, il s'agit de la réalisation d'un simulateur de performance de

portefeuilles obligataires basé sur les prévisions de courbes des taux. On a remarqué que la courbe de fin d'année prévue sera inférieure pour presque toutes les maturités à celle du début d'année. Ceci rejoint parfaitement l'intuition des gérants obligataires quant au mouvement de la courbe, d'ici la fin d'année. En choisissant d'optimiser la performance tout en respectant les normes et contraintes de la société de gestion, nous avons obtenu des horizons de placement qui s'inscrivent plutôt dans le moyen et long terme.

Au terme de ce travail, on aimerait dire que la problématique de structure par terme des taux d'intérêt pourrait être étendue en choisissant de la modéliser par des modèles à deux variables d'état. Il est également possible de développer davantage d'instruments de gestion et de valorisation des produits de taux d'intérêt tels que les options et les swaps…etc.

BIBLIOGRAPHIE

Ouvrages et mémoires :

- Bisière.C, “ La structure par terme des taux d’intérêt ”, Edition Finance, 1997.
- Taylor, M.P, « modeling the Yield Curve, the Economic Journal, 1992.
- Fréderic Planchet, Pierre Therond, «Simulation de Trajectoires de Processus Continus », mémoire ISFA, Université Claude Bernard-Lyon 1.
- Rochet et Demange, « Méthodes Mathématiques de la Finance », Economica, Paris, 1992.
- Gourlaouen J.P, « la structure par terme des taux d’intérêt », Economica, 1997.
- Bisière.C, « Théorie de la structure par terme des taux d’intérêt », thèse de doctorat en sciences économiques, université d’AIX-MARSEILLE II, 1994.
- Cours de Philippe Priaulet « Modèles de La Courbe des Taux D’intérêt ». ENSAE - DEA MASE Université Paris IX Dauphine
- Cours de Pierre DEVOLDER « modèles mathématiques de la Finance », 2009.
- Cours de Mohamed TAAMOUTI « fondement de la théorie financière », 2008.
- Cours de Mohamed TAAMOUTI « gestion des portefeuilles obligataires », 2008.
- Fayçal HITMI, « estimation de la structure par terme des taux d’intérêt », mémoire de fin d’études, 2002.
- AIT EL TRACH ET AMAZZAL, « estimation de la structure par terme des taux d’intérêt », mémoire de fin d’études, 2006.

Webographie :

- http://www.lesechos.fr/formations/finance/art_fin.htm
- http://www.boursorama.com/
- http://www.abcbourse.com/
- http://trading.web-bonds.net/
- http://www.dauphine.fr/cereg/listecahiers.htm
- http://www.afajof.org
- http://www.bkam.ma

ANNEXE -1-

CODE VBA

```
Function prix_titre(date_liquidation, date_jouissance, date_échéance, taux, nominal, _
premier_j_inclus, mode_valorisation, _
periodicite_cp, periodicite_cap, maturité, rendement, base, date_emmission)
Dim flux() As Double
Dim echeancier(), date_flux As Date
Dim p, cc, di As Double
Dim i, nbr_flux, jour_inclus As Integer
If CDate(date_échéance) > CDate(date_liquidation) Then
jour_inclus = 0
If premier_j_inclus = "O" Then
jour_inclus = 1
End If
' Détermination de l'echeancier des flux
'****************** Cas des maturités CT ***************
If maturité = 13 Or maturité = 26 Or maturité = 52 Then
  nbr_flux = 1
  ReDim flux(1 To nbr_flux)
  ReDim echeancier(1 To nbr_flux)
  If (CDate(date_échéance) - CDate(date_emmission)) <= 365 Then
  flux(1) = Round(nominal * (1 + taux * (CDate(date_échéance) - CDate(date_emmission)) /
360), 2)
  Else
  flux(1) = Round(nominal * (1 + taux * (CDate(date_échéance) - CDate(date_emmission)) /
365), 2)
  End If
  echeancier(1) = CDate(date_échéance)
Else
'****************** Cas des maturités MLT ***************
'calcul du nombre de flux
nbr_flux = 0
date_flux = CDate(date_échéance)
Do While date_flux > CDate(date_liquidation) And date_flux <> CDate(date_jouissance)
```

```
nbr_flux = nbr_flux + 1
date_flux = ajouter(date_flux, -1)
Loop
  ReDim flux(1 To nbr_flux)
  ReDim echeancier(1 To nbr_flux)
  For i = 1 To nbr_flux
 'cas de remboursemnet in fine
  echeancier(i) = ajouter(CDate(date_échéance), i - nbr_flux)
   If periodicite_cap = "F" Then
      If i = nbr_flux Then
      flux(i) = Round(nominal * (1 + taux), 2)
      Else
      If i = 1 Then
       If ajouter(echeancier(i), -1) = CDate(date_jouissance) Then
           If (ajouter(CDate(date_emmission), 1) - CDate(date_emmission)) = 366 Or
(echeancier(i) - ajouter(echeancier(i), -1)) = 366 Then
           flux(i) = Round(nominal * taux * (echeancier(i) - CDate(date_emmission)) / 366, 2)
           Else
           flux(i) = Round(nominal * taux * (echeancier(i) - CDate(date_emmission)) / 365, 2)
           End If
            Else
       flux(i) = Round(nominal * taux, 2)
       End If
      Else
      flux(i) = Round(nominal * taux, 2)
      End If
      End If
      Else
  'cas de remboursemnet avec ammortissement de capital
     flux(i) = Round((nominal / maturité) * (1 + (nbr_flux - i + 1) * taux), 2)
   End If
     Next i
End If
'calcul du coupon courru
```

```
cc = coupon_courru(date_liquidation, date_jouissance, date_échéance, taux, nominal,
premier_j_inclus, _
periodicite_cp, periodicite_cap, maturité, mode_valorisation, "V", date_emmission)
'calcul du prix
'******************valorisation monétaire******************
If mode_valorisation = "M" Then
p = flux(1) / (1 + rendement * (echeancier(1) - CDate(date_liquidation)) / 360)
End If
'******************valorisation linéaire******************

If mode_valorisation = "L" Then
If periodicite_cap = "F" Then
p = nominal + cc
Else
p = Round((nominal - Round((nominal / maturité), 2) * (maturité - nbr_flux)), 2) + cc
End If

End If
'******************valorisation actuarielle******************
If mode_valorisation = "A" Then
p = 0
For i = 1 To nbr_flux
'If base = 1 Then
di = i - 1 + (echeancier(1) - CDate(date_liquidation) - jour_inclus) / (echeancier(1) -
ajouter(echeancier(1), -1))
'End If
'If base = 2 Then
'di = (echeancier(i) - CDate(date_liquidation) - jour_inclus) / 365
'End If
p = p + (flux(i) / ((1 + rendement) ^ di))
Next
End If
Else
p = 0
```

```
End If
prix_titre = p
End Function
Function ajouter(ByVal d As Date, ByVal n As Integer) As Date
Dim y, m, j As Integer
j = Day(CDate(d))
m = Month(CDate(d))
y = Year(CDate(d))
ajouter = CDate(CStr(j) & "/" & CStr(m) & "/" & CStr(y + n))
End Function
Function base_calcul(ByVal d As Date, ByVal m As Integer) As Integer
base_calcul = CInt(d + m - ajouter(d + m, -1))
End Function
Function coupon_courru(date_liquidation, date_jouissance, date_échéance, taux, nominal, _
premier_j_inclus, periodicite_cp, periodicite_cap, maturité, mode_valorisation, base,
date_emmission)
Dim d_emission, d, date_flux As Date
Dim nbr_jours, nbr_flux, n_base As Long
Dim cc, coupon As Double
If maturité = 13 Or maturité = 26 Or maturité = 52 Then
  d_emission = CDate(date_emmission)
    If premier_j_inclus = "O" Then
    cc = (CDate(date_liquidation) - d_emission + 1) / 360 * taux * nominal
   Else
      If (CDate(date_échéance) - CDate(date_emmission)) <= 365 Then
      cc = (CDate(date_liquidation) - d_emission) / 360 * taux * nominal
      Else
      cc = (CDate(date_liquidation) - d_emission) / 365 * taux * nominal
      End If
   End If
Else
   '**********Calcul du nombre de jours***********
  d = CDate(date_échéance)
  Do While d > date_liquidation And d > CDate(date_jouissance)
```

```
 d = ajouter(d, -1)
 Loop
 If d = CDate(date_jouissance) Then
 d = CDate(date_emmission)
 End If
  nbr_jours = CDate(date_liquidation) - d
 If premier_j_inclus = "O" Then
 nbr_jours = nbr_jours + 1
 End If
 '********************Calcul du coupon****************
 nbr_flux = 0
 date_flux = CDate(date_échéance)
 Do While date_flux > CDate(date_liquidation)
 nbr_flux = nbr_flux + 1
 date_flux = ajouter(date_flux, -1)
 Loop
  If periodicite_cap = "F" Then
    coupon = nominal * taux
  Else
    coupon = Round(Round((nominal - Round((nominal / maturité), 2) * (maturité -
nbr_flux)), 2) * taux, 2)
  End If
 '******************calcul du nbre de jours de base*******
 n_base = 365
 If base = "V" Then
 n_base = ajouter(d, 1) - d
 End If
 '****************calcul du coupon courru*****************
 cc = coupon * nbr_jours / n_base
End If
coupon_courru = cc
End Function
Public Function interpoler(ByVal col_maturite As Range, ByVal col_taux As Range, m) As
Double
```

```
Dim mat() As Double,  Dim taux() As Double, Dim maturite As Double
Dim c1, c2 As String, Dim i As Integer
Dim trv As Boolean
maturite = CDbl(m)
ReDim mat(1 To col_maturite.Rows.Count)
ReDim taux(1 To col_taux.Rows.Count)
For i = 1 To col_maturite.Rows.Count
   mat(i) = CDbl(col_maturite.Cells(i, 1))
Next i
For i = 1 To col_taux.Rows.Count
   taux(i) = CDbl(col_taux.Cells(i, 1))
Next i
i = 1
trv = False
Do While trv = False
If m <= mat(i) Then
trv = True
Else
i = i + 1
End If
Loop
If i = 1 Then
interpoler = taux(1)
Else
interpoler = (taux(i) - taux(i - 1)) / (mat(i) - mat(i - 1)) * (m - mat(i - 1)) + taux(i - 1)
End If
If trv = False Then
interpoler = taux(1)
End If
End Function
Function RDT_titre(date_liquidation, date_jouissance, date_échéance, taux, nominal, _
premier_j_inclus, mode_valorisation, _
periodicite_cp, periodicite_cap, maturité, base, Prix, date_emmission)
Dim a, b, c, pa, pb, pc As Double
```

```
Dim r, erreur As Double
erreur = 0.000000001
a = 0
b = 0.2
pa = prix_titre(date_liquidation, date_jouissance, date_échéance, taux, nominal, _
premier_j_inclus, mode_valorisation, _
periodicite_cp, periodicite_cap, maturité, a, base, date_emmission) - Prix
pb = prix_titre(date_liquidation, date_jouissance, date_échéance, taux, nominal, _
premier_j_inclus, mode_valorisation, _
periodicite_cp, periodicite_cap, maturité, b, base, date_emmission) - Prix
Do While b - a > erreur
c = (a + b) / 2
pc = prix_titre(date_liquidation, date_jouissance, date_échéance, taux, nominal, _
premier_j_inclus, mode_valorisation, _
periodicite_cp, periodicite_cap, maturité, c, base, date_emmission) - Prix
If pc = 0 Then
a = c
 b = c
Else
   If pa * pc < 0 Then
   b = c
   pb = pc
   Else
   a = c
   pa = pc
   End If
End If
Loop
RDT_titre = (a + b) / 2
End Function
```

ANNEXE -2-

Définitions, théorèmes et démonstration

1) Processus stochastique

En univers incertain, le prix du titre et plus généralement toute variable dynamique digne d'intérêt, est modélisée par un processus stochastique. C'est à dire par une collection $X = \{X_t, t\epsilon T\}$de variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé (Ω, F, P). Pour désigner une de ces variables, on peut utiliser, outre X_t , les notations $X(t)$ et $X(., t) : \Omega \rightarrow R$ (chaque X_t est une fonction de Ωdans R).

Pour préciser ce que représente l'espace probabilisé (Ω, F, P), il faut assimiler à une expérience aléatoire le fait d'observer l'évolution du prix du titre sur la période de temps concernée, au même titre qu'une expérience consistant à lancer un dé et à constater le nombre inscrit sur la face supérieur.

L'ensembleΩ, univers associé à l'expérience, décrit l'ensemble des résultats possibles de cette expérience (les états de la nature). Chaque événement élémentaire $w \in \Omega$ correspond à un des résultats possibles. Dans le cas du lancé de dé, il est naturel de poser $\Omega = \{1,2,...,6\}$. Dans le cas du modèle de marché, chaque w correspond à une évolution possible du prix du titre au cours du temps. Chaque évolution est associée à une trajectoire du processus X , définie comme une fonction $t \rightarrow Xt(w)$, pour un $w \in \Omega$ fixé.

F représente une tribu sur Ω ($s - a$ lg *èbre*) , un sous ensemble de partitions de Ω, vérifiant les trois conditions suivantes :

- $\Omega \in F$,
- si $A \in F$, alors $A \subset \in F$,
- $A1, A2,... \in F$, si $A1, A2,... \in F$, alors $A1 \cup A2 \cup ... \in F$, où $A1, A2,...$désignent une famille dénombrable d'événements.

Ainsi avec (Ω, F) , nous avons un espace probabilisable. En définissant la fonction probabilité $P : F \rightarrow [0,1]$ sur cet espace probabilisable (Ω, F) telle que $P(\Omega) = 1$. Et par la suite, nous obtenons notre espace probabilisé (Ω, F, P).

Travaillant en temps continu, on suppose que T est un intervalle de R. le processus X est alors qualifié de *processus aléatoire continu.* Le plus souvent on pose $\boldsymbol{T} = \boldsymbol{R}+$, ce qui signifie, d'une part, que l'origine des temps se situe par convention en zéro(le marché financier est crée à cette date), et d'autre part, que l'horizon est infini (le marché ne ferme jamais).

Il est souvent nécessaire de supposer que l'espérance ou la variance d'un processus existent à chaque instant. Soit $X = \{X_t, t\epsilon T\}$un processus sur un espace (Ω, F, P). On dit que X est intégrable si Xt est

intégrable pour tout $\boldsymbol{t}$, c'est à dire si $E[X_t] < \infty$,$\forall \boldsymbol{t} \in \boldsymbol{T}$. De même, X est dit carré intégrable pour tout $\boldsymbol{t}$,

c'est à dire si $E\left[X_t{}^2\right] < \infty$,$\forall \boldsymbol{t} \in \boldsymbol{T}$. Dans ce cas, la variance $V[X_t]$ existe pour tout $\boldsymbol{t}$.

2) Mouvement brownien

Pour modéliser les l'évolution des variables du marché, on utilise une classe particulière de processus stochastiques. Cette classe comporte des processus à base de mouvement brownien.

Les prix ne sont généralement pas modélisés directement par des mouvements browniens, mais par des processus dérivés de mouvements browniens, les processus d'Itô (qu'on verra dans la section suivante).

C'est pourquoi, et Afin de mieux assimiler la nature des processus de prix, nous ferons une présentons dans cette section le mouvement brownien.

Le mouvement brownien peut être vu comme une extension au cas continu des aléas introduits habituellement dans les modèles dynamiques discrets pour modéliser les chocs imprévisibles et aléatoires.

La définition usuelle du mouvement brownien standard, ou encore du processus de Weiner standard est donnée comme suit :

Un mouvement brownien standard $\boldsymbol{B} = \{\boldsymbol{B}(\boldsymbol{t}),\ \boldsymbol{t} \in \boldsymbol{R}+\}$ est un processus stochastique sur un espace probabilisé (Ω, F, P) , caractérisé par les quatre propriétés suivantes :

1. le processus démarre en zéro $\boldsymbol{B}(0) = 0$;
2. pour toutes dates $\boldsymbol{t}$ et $\boldsymbol{s}$ telles que $\boldsymbol{t} < \boldsymbol{s}$, le changement du processus entre ces deux dates est distribué normalement, avec une espérance nulle et une variance égale à la longueur de l'intervalle de temps
considéré : $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{s}) - \boldsymbol{B}(\boldsymbol{t}) \sim \boldsymbol{N}(0, \boldsymbol{s} - \boldsymbol{t})$;
3. pour toutes dates $\boldsymbol{n}\ \boldsymbol{t}$,..., $\boldsymbol{t}$ 0 telle que $\boldsymbol{n}$ $0 \leq \boldsymbol{t} \leq \ldots \leq \boldsymbol{t}$ 0 , les changements du processus entre deux dates successives sont indépendants ;
4. les trajectoires $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{t})$ sont continues en $\boldsymbol{t}$ pour tout $w \in \Omega$.

3) **Processus d'Itô**

Cette section montre comment le processus B peut être utilisé comme aléa dynamique fondamental dans un modèle économique. Le principe consiste à considérer B comme un choc aléatoire affectant de manière additive un processus par ailleurs déterministe.

Considérons la perspective de modéliser les évolutions du prix d'un titre à partir d'une date donnée (origine des temps). $X(t)$ désigne le prix de ce titre à l'instant t , pour $t \geq 0$.

En univers certain, on peut utilises une représentation classique, sous forme d'un modèle dynamique déterministe, décrit par une équation intégrale de type :

$$X(t) = X_0 + \int_0^t \mu(X, s)ds$$

Sous forme d'équation différentielle, on écrit de manière équivalente $dX(t) = \mu(X, t)dt$,Sous la condition initiale $= X(0) = X_0$. Cette dernière équation est une équation différentielle ordinaire (EDO), pouvant

être résolue après spécification de la fonction μ , à l'aide des règles standard du calcul différentiel.

En univers incertain, X est un processus stochastique. Il est donc nécessaire d'introduire un aléa dans l'équation qui représente sa dynamique. X est donc défini comme un processus d'Itô. Ce processus d'Itô peut être vu comme la solution de l'équation différentielle stochastique (EDS) présenté ci dessous :

$$dX(t) = \mu(X,t)dt + \sigma(X,t)dB(t)$$

avec :

- $dB(t)$ la différentielle stochastique du brownien. Elle représente son évolution aléatoire à l'instant t,

sur une période de temps infiniment petite, de longueur égale à l'unité de temps dt . On a $E_t[dB(t)] = 0$ et

$V_t[dB(t)] = dt$ l'espérance et la variance du changement instantané de $dB(t)$.

- On a les règles de calcul stochastique suivantes :

✓ $dt \times dt = 0$

✓ $dB(t) \times dt = 0$

✓ $dB(t) \times dB(t) = dt$

- $\mu(X,t)dt$ la composante déterministe de la trajectoire de X. On a $E_t[dX(t)] = \mu(X,t)dt$ ainsi

$\mu(X,t)$ représente l'espérance du changement de X en t, par unité de temps. Il s'agit donc d'un paramètre de tendance.

- $\sigma(X,t)dB(t)$, composante aléatoire, représente le choc exogène venant perturber la trajectoire de

X. Où $\sigma(X,t)$ processus stochastique connu en t et contrôlant la force avec laquelle le choc $dB(t)$ perturbe la trajectoire de X. On a $V_t[dX(t)] = \sigma^2(X,t)dt$, d'où $\sigma^2(X,t)$est la variance par unité de temps du

changement de $X(t)$. Le terme $\sigma(X,t)$est appelé coefficient de diffusion, c'est paramètre de dispersion.

La solution, processus d'Itô, de l'équation différentielle stochastique donnée ci dessus sera donc de la forme suivante :

$$X(t) = X_0 + \int_0^t \mu(X,s)ds + \int_0^t \sigma(X,s)dB(s)$$

• On voit que l'utilisation du processus d'Itô permettrait de modéliser des dynamiques plus riches que celles du simple mouvement brownien, ce qui est indispensable quand on s'intéresse à une variable économique, comme par exemple le prix d'un titre. En spécifiant $0X$,$m(X,t)$ et $s(X,t)$ on arrive à contrôler la première valeur du titre (à l'ouverture du marché), sa tendance à chaque instant et sa volatilité à chaque instant.

4) Lemme d'Itô :

Le lemme d'Itô, ou *théorème fondamental du calcul stochastiqu*e, permet de déterminer les paramètres infinitésimaux d'une fonction suffisamment régulière d'un processus d'Itô. On

donne ici le lemme pour un processus de dimension 1. Pour une démonstration, voir par exemple Malliaris et Brock [chapitre 2, section 4].

Soit $X = \{X(t), t \in A\}, A = [0, T]$ un processus d'Itô unidimensionnel caractérisé par la différentielle stochastique :

$$dX(t) = \mu(X,t)dt + \sigma(X,t)dB(t)$$

et $f(X, t)$ une fonction non aléatoire, à valeurs réelles, définie sur $\mathbb{R} \times A$, et possédant des dérivées partielles

continues , f_t, f_X *et* f_{XX} (f est de classe $C^{1,2}$).

Alors le processus $Y = \{Y(t) = f(X, t), t \in A\}$est un processus d'Itô unidimensionnel défini par :

$$dY(t) = f_t dt + f_X dX(t) + \frac{1}{2} f_{XX} dX(t)^2$$

Appliquant les règles de calcul sur dB , on montre facilement que le processus Y s'écrit sous la forme

$\forall\, \boldsymbol{t} \in \boldsymbol{T}$ $\qquad \alpha(X,t) = f_t + \mu(X,t) f_X + \frac{1}{2}\sigma^2(X,t) f_{XX}$

avec : $\qquad \delta = \sigma(X,t) f_X$

Le terme $\alpha(X,t)$ représente l'espérance du changement de Y(t) par unité de temps. On appelle

$\alpha(X,t)$le *générateur différentielle sur X*, appliqué à la fonction f , et il est noté $L_X(f)$.

ANNEXE -3-

Application de la théorie d'anticipation (modèle VAR et Cointégration)

La théorie d'anticipation fondée sur l'hypothèse d'absence d'opportunités d'arbitrage et de rationalité des anticipations a eu une place importante dans les théories traditionnelles de la structure par terme des taux et a fait l'objet d'un grand nombre de tentatives de validation empirique. Elle a établit qu'un taux long est égal à la moyenne de taux courts futurs anticipés plus une primes de risque constante dans le temps. Dans ce cadre d'analyse, nous avons vu nécessaire d'introduire le concept du modèle VAR et la notion de cointégration que nous allons étaler dans ce qui suit. Et cela afin de vérifier la validité de cette théorie pour le cas des données Marocaines sur les taux d'intérêt.

Le contenu en information de la courbe des taux a été fréquemment étudié dans la littérature. De nombreuses études ont en effet montré que la pente des taux peut être utile pour anticiper l'évolution des taux d'intérêt (théorie des anticipations)

Avant de procéder à la méthode d'estimation des paramètres du modèle cible, nous allons définir les concepts basiques de la modélisation vectorielle, à savoir, la stationnarité, le modèle VAR et la cointégration.

Stationnarité

La stationnarité est un concept clé pour la validité externe d'une régression sur séries chronologiques, d'un point de vue statistique, le passé est comparable au présent et au futur. Une série chronologique est dite stationnaire si sa distribution de probabilité ne change pas au cours du temps. Ainsi, deux séries, X_t et Y_t sont stationnaires, si la distribution jointe de $(X_{s+1}, Y_{s+1}, X_{s+2}, Y_{s+2}, \dots, X_{s+T}, Y_{s+T})$ ne dépend pas de s.

Le fait qu'un processus soit stationnaire ou non conditionne le choix de la modélisation que l'on doit adopter. En règle générale, si l'on s'en tient notamment à la méthodologie de Box et Jenkins, si la série étudiée est issue d'un processus stationnaire, on cherche alors le meilleur modèle parmi la classe des processus stationnaire pour la représenter, puis on estime ce modèle. En revanche si la série est issue d'un processus non stationnaire, on doit avant toutes choses, chercher à la "stationnariser", c'est à dire trouver une transformation stationnaire de ce processus. Puis, on modélise et l'on estime les paramètres associés à la composante stationnaire.

Modèle VAR

La modélisation VAR consiste à modéliser un vecteur de variables stationnaires à partir de sa propre histoire et chaque variable est donc expliquée par le passé de l'ensemble des variables.

La forme standard de ce type de modèle est caractérisée par les points suivants :

- Les variables à modéliser sont toutes stationnaires
- Les variables à modéliser sont toutes potentiellement endogènes
- Le nombre de décalages associé à chaque variable dans chaque équation est identique

I. Présentation du modèle VAR standard

1. Ecriture du modèle VAR standard

Soit $X_t = (x_t^1, x_t^2, ..., x_t^n)'$ un vecteur stationnaire de dimension (n*1)

La modélisation de ce vecteur sous forme d'un processus VAR(p) s'écrit

$$X_t = C + \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + ... + \phi_p X_{t-p} + \varepsilon_t \qquad t=1,.., T$$

Avec $\varepsilon_t = (\varepsilon_t^1, ..., \varepsilon_t^n)'$ appelé vecteur des innovations $\varepsilon_t \approx iidN(0, \sum)$ où $\sum$ est une matrice diagonale, C : $(n \times 1)$,et $\Phi_i : (n \times n)$ pour i=1,…,p.

L'hypothèse que $\sum$ est une matrice diagonale est cruciale dans la modélisation VAR et dans l'utilisation du modèle VAR en simulation (calcul des fonctions de réponse et décomposition de la variance de l'erreur de prévision).

Estimation d'un modèle VAR standard

Dans le cas d'un vecteur X_t stationnaire et d'un modèle VAR(p) usuel où chaque variable intervient dans chaque équation avec le même nombre de décalages, l'inférence classique s'applique et le modèle peut être convenablement estimé à l'aide des moindres carrés ordinaires sur chaque équation séparément.

Réécrivons notre modèle VAR sous une forme plus proche de celle généralement retenue en économétrie classique :

Soit Yt le vecteur de dimension $(np \times 1)$ et soit Φ la matrice de dimension $(n \times np)$ définis par

$$Y_t = \begin{pmatrix} X_{t-1} \\ . \\ X_{t-p} \end{pmatrix} \text{ et } \Phi' = (\phi_1 ... \phi_p)$$

Le modèle VAR peut être réécrit selon $X_t = \Phi' Y_t + \varepsilon_t$ où la matrice Φ' contient l'ensemble des matrices φ_i i=1,…,p.

Sous l'hypothèse $\varepsilon_t \approx iidN(0,\sum)$, la distribution du vecteur X_t conditionnelle à l'histoire de ce vecteur (X_{t-k} pour k=1,2,…) est donnée par : $(X_t / X_{t-1}, X_{t-2},...) \approx N(\Phi' Y_t, \Sigma)$

La densité conditionnelle de l'observation de la période t (pour tquelconque) est alors :

$$f(X_t / X_{t-1},...) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \left|\Sigma^{-1}\right|^{\frac{1}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}.(X_t - \Phi' Y_t)'\Sigma^{-1}.(X_t - \Phi' Y_t)\right\}$$

On peut donc déduire la vraisemblance de l'échantillon :

$$f(X_1, X_2,..., X_T / X_0,...X_{-p+1}) = \prod_{t=1}^{T} f(X_t / X_{t-1},...)$$

Il vient ensuite pour la Log-vraisemblance de l'échantillon

$$L(\theta) = -\frac{nT}{2} Log(2\pi) + \frac{T}{2} Log(\left|\Sigma^{-1}\right|) - \frac{1}{2}.\sum_{t=1}^{T}\left[(X_t - \Phi' Y_t)'\Sigma^{-1}.(X_t - \Phi' Y_t)\right]$$

Où $\theta = (\Phi' \underset{\leftrightarrow}{\Sigma})$ représente l'ensemble des paramètres du modèle.

L'estimateur de maximum de vraisemblance de Φ' obtenu par application de la méthide des moindres carrés ordinaires aboutit alors à $\hat{\Phi}' = \left[\sum_{t=1}^{T} X_t Y_t'\right]\left[\sum_{t=1}^{T} Y_t Y_t'\right]^{-1}$

Notons que les estimateurs des éléments de la jème ligne de la matrice Φ' sont obtenus en régressant x_t^j sur Y_t : $\hat{\phi}_j = \left[\sum_{t=1}^{T} x_t^j Y_t'\right]\left[\sum_{t=1}^{T} Y_t Y_t'\right]^{-1}$

L'utilisation de l'estimateur $\hat{\Phi}'$ de la matrice Φ'permet ensuite d'obtenir l'estimateur de la matrice de variance-covaraince Σ. En effet la valeur estimé du vecteur des innovations est donnée par : $\hat{\varepsilon}_t = X_t - \hat{\Phi}' Y_t$ par définition de la matrice de variance-covariance des innovations, il vient ensuite :

$\hat{\Sigma} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} \hat{\varepsilon}_t \hat{\varepsilon}_t'$ l'élément (i,i) de la matrice $\hat{\Sigma}$ correspond à la variance estimée de l'innovation de la variable x_t^i : $\hat{\sigma}_i = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\left(\hat{\varepsilon}_t^i\right)^2$ alors que l'élément (i,j) de la matrice $\hat{\Sigma}$ correspond à la covariance estimée des innovations des variables x_t^i et x_t^j : $\hat{\Sigma} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} \hat{\varepsilon}_t^i \hat{\varepsilon}_t^{j\,\prime}$

Estimation du nombre de décalages p

Le nombre de décalage à retenir est celui qui permet de modéliser convenablement le vecteur X et d'aboutir à un vecteur d'innovations qui soit de type bruit blanc.

Trois méthodes sont plus particulièrement retenus pour estimer le nombre de décalages p dans la pratique des modèles VAR :

- Une méthode basée sur l'examen des propriétés statistiques des innovations du modèle VAR

- Une méthode basée sur l'utilisation de critères d'information
- Une méthode basée sur de tests de nullité emboîtés sur les paramètres associés au dernier décalage du modèle.

Estimation du nombre de décalage à partir de l'examen des résidus

Une première méthode de détermination du nombre p de décalages consiste à vérifier la blancheur des résidus de modèles VAR(p) successivement estimés pour p=1,2,3,…

En partant du modèle VAR d'ordre minimal (p=1), il suffit alors d'arrêter la procédure pour le nombre de décalages p pour lequel les résidus sont de types de bruit blanc.

Estimation du nombre de décalages à partir d'un critère d'information

Une seconde méthode consiste à déterminer le nombre de décalages en utilisant un critère d'information. Les critères d'information sont basés sur l'idée selon laquelle l'ajout d'une variable explicative (ou d'un ensemble de variables explicatives) à un modèle existant aboutit d'un côté à une amélioration plus ou moins importante de la part expliquée des variables modélisées (apport informatif) et d'un autre côté à une réduction des degrés de libertés pour l'estimation. Cette réduction des degrés de liberté est considérée comme une pénalité liée à l'incorporation d'une variable explicative additionnelle.

La valeur du critère d'information peut être calculée pour chaque modèle estimé. Dans le cas des modèles VAR, la procédure de détermination du nombre de décalages à partir du critère d'information consiste donc à estimer un modèle VAR d'ordre minimal (p=1) et de calculer la valeur prise par le critère d'information pour ce modèle. En estimant le modèle VAR d'ordre immédiatement supérieur (p=2) et en recalculant la valeur correspondante du critère d'information, on décide de conserver les décalages p=2 si l'apport informatif du second décalage est supérieur au coût qu'il occasionne en termes de réduction des degrés de liberté.

Dans le cas où le cas où le décalage p=2 est conservé, la procédure est prolongée en estimant le modèle VAR(3) et en comparant le critère d'information obtenu pour ce modèle avec celui obtenu pour le modèle précédent VAR(2). Le nombre de décalages est ainsi systématiquement augmenté tant que l'apport informatif du dernier décalage est supérieur au coût qu'il occasionne. Lorsqu'un décalage occasionne un coût supérieur au gain informatif, la procédure s'arrête et le décalage précédent apparaît être le décalage « optimal ».

En pratique, il suffit donc de déterminer « à priori » un nombre de décalages maximal p_{max} et d'estimer successivement les modèles VAR(p) pour p=1,… ,pmax.

Dans le cas de la modélisation VAR, quatres critères sont fréquemment utilisés : le critère du Final Predictor Error (FPE), le critère d'information d'Akaike (AIC), le critère d'information de schawtrz (SC) et le critère d'information de Hannan-Quinn (HQ). Tous ces critères sont basés sur le choix d'un nombre de décalage qui minimise une expression dans laquelle interviennent à la fois le nombre de décalage, la taille de l'échantillon, le nombre de variables et le déterminant de la matrice variance-covariance des innovations du modèle VAR(p).

Coïntégration

La notion de coïntégration est introduite par Granger et Engle. Idée que des paires de variables macroéconomiques peuvent être trouvées comme évoluant ensemble sur le long terme en ayant des divergences de court terme ou d'ordre saisonnier : mécanismes de marché ou interventions institutionnelles qui assurent cette évolution commune

Il s'agit d'une propriété possédé par certaines séries temporelles non stationnaires ; en première approximation, on dira que deux variables sont coïntégrées si elles sont toutes deux non stationnaires mais qu'il existe une combinaison linéaire des deux variables qui se révèle stationnaire.

Plus précisément, une série est stationnaire, ou intégrée d'ordre 0, on note I(0), si sa moyenne est constante et sa variance bornée; c'est par exemple le cas d'un bruit blanc. Une série est intégrée d'ordre d, on la note I(d) s'il est nécessaire de la différencier d fois pour la rendre stationnaire ; ainsi, une marche aléatoire $X_t = X_{t-1} + \varepsilon_t$, avec E(Xt) = 0 si $X_0 = 0$ mais $V(X_t) = t\sigma^2$ non bornée, constitue un exemple de variable I(1). De même, on convient, avec Engle-Granger [1987], de dire qu'un vecteur U, est intégre d'ordre d,b, ce que l'on note U, CI (d,b) si: (i) toutes les composantes de U, sont intégrées d'ordre d, c'est-a-dire stationnaire dans leur $d^{ème}$ différence et (ii) il existe au moins un vecteur a tel que aU, est intégré (stationnaire) d'ordre d - b, b > 0; dans le cas limite b = d, le processus aU_t est stationnaire

Parmi les nombreuses propriétés remarquables des vecteurs cointegrés, l'une semble constituer une contrainte particulièrement gênante pour le travail économétrique. Engle et Granger montrent en effet que la cointégration de U, implique qu'il n'existe aucune représentation en moyenne mobile inversible, et donc aucune représentation VAR finie, pour U_t. La raison en est simplement que si une telle représentation existait, aucune combinaison linéaire de U_t ne serait stationnaire. Le théorème de représentation de Granger permet heureusement de se tirer de ce mauvais pas. Ce théorème énonce que si deux variables X, et Y, sont coïntegrées, CI (1,1), il est toujours possible de les exprimer sous la forme d'un modèle a correction d'erreur : $(Y_t - Y_{t-1}) = k(Y_{t-1} - bX_{t-1}) + h(X_t - X_{t-1}) + \varepsilon_t$, ou ε_t, est un terme d'erreur stationnaire, éventuellement auto corrélé. Nous verrons dans un instant l'intérêt de cette formulation pour l'estimation économétrique des propriétés de coïntégration.

Méthode d'estimation du modèle VAR par Eviews :

L'estimation des paramètres du modèle de la représentation VAR a été faite à l'aide du logiciel EVIEWS. Cette estimation était faite à travers plusieurs tests et dans un ordre bien déterminé.

1) Test de racine unitaire : Test d'Augmented Dicky- fuller (ADF) pour l'investigation des propriétés stochastiques des séries considérées dans le modèle en analysant leur ordre d'intégration.

2) Test de cointegration de Johansen afin de détecter les relations de cointegrations existantes entre les variables du modèle.

En cas d'abscence de relation de cointegration, on passe à estimer le modèle VAR, sinon on se trouve dans l'obligation de déterminer un modèle autorégressif à correction d'erreur (VECM).

3) Estimation du modèle VAR : dans notre étude, on va essayer de présenter les taux d'intérêt long en fonction des autres variables

4) Test de causalité de Granger : afin de voir l'effet de causalité des différentes variables sur les taux d'intérêt long.

5) Estimation de la décomposition de la variance orthogonale : l'erreur anticipée de la décomposition de la variance renvoie à la proportion de la succession des mouvements due au propre choc ou contre choc d'une autre variable.

Afin de mener notre étude, nous allons utiliser la modélisation VAR. L'utilisation d'un modèle VAR est méthodiquement justifiée par le fait que les modèles VAR autorisent des simulations permettant de saisir les modifications des variables objectifs suite à un choc sur les variables instruments.

Les modèles VAR comportent trois avantages : en premier ils permettent d'expliquer une variable par rapport à ses retards et en fonction de l'information contenue dans d'autres variables pertinentes ce qui soulève des problèmes de cointégration, en second on dispose d'un espace d'information très large et enfin, cette méthode est assez simple à mettre en oeuvre et comprend des procédures d'estimation et des tests.

Dans un modèle VAR l'on ne se donne pas de modèle théorique à priori. Tout modèle peut en effet être arbitraire si les variables apparaissent à la fois à la droite et à gauche des équations et si nous n'avons pas de causalité.

Dans ce cas l'on peut chercher à régresser chaque variable endogène sur l'ensemble des autres variables, endogènes et exogènes. Le modèle sera déterminé en ne retenant que les coefficients significatifs.