



المندوبية السامية للتخطيط
HAUT-COMMISSARIAT AU PLAN

ROYAUME DU MAROC
..*.*.*
HAUT COMMISSARIAT AU PLAN
..*.*.*
INSTITUT NATIONAL
DE STATISTIQUE ET D'ECONOMIE APPLIQUEE

INSEA



Projet de Fin d'Etudes

Réassurance : tarification et analyse des critères d'optimisation pour le cas de l'assurance emprunteur

préparé par : *Mlle BENSEYED Zineb*
M. DIOURI Youssef

Sous la direction de : *M. MARRI Fouad (INSEA)*
Mme OUAHABI Zineb (LA MAROCAINE VIE)

Soutenu publiquement comme exigence partielle en vue de l'obtention du

Diplôme d'Ingénieur d'Etat

Option : ACTUARIAT-FINANCE

Devant le jury composé de :

- *M. MARRI Fouad (INSEA)*
- *M. MECHRAFI Abdellatif (INSEA)*
- *Mme OUAHABI Zineb (LA MAROCAINE VIE)*

Juin 2014

N° 12

Résumé :

Le caractère hétérogène du portefeuille d'assurance décès emprunteur (ADE) incite les assureurs à recourir à la réassurance afin de combler les pertes exceptionnelles qui peuvent survenir lors d'un exercice.

Pour sa part, la Marocaine Vie couvre son portefeuille d'ADE par le biais de deux traités non proportionnels de type excédent de sinistre (XS).

Le présent rapport s'est donc intéressé à apporter un diagnostic quant à la couverture actuelle de réassurance de la MV et à proposer des critères d'optimisation pouvant aider la compagnie à bien choisir sa structure de réassurance.

En effet, pour pouvoir transférer son risque, l'assureur devrait payer une prime d'assurance. C'est pour cette raison que nous nous sommes attaqués, dans une phase du travail, à l'application de différentes méthodes de cotations. En effet, cette étape est primordiale pour que l'assureur puisse d'une part évaluer les coûts engendrés par la couverture choisie et d'une autre négocier avec le réassureur les tarifs à appliquer pour l'année de renouvellement.

Ensuite, le travail expose un ensemble de critères d'optimisation. D'abord, le critère Esperance/ Variance du gain qui met l'assureur dans une situation d'arbitrage : perdre une marge du bénéficiaire et réduire la volatilité du gain ou vice versa.

Un deuxième critère a été traité au cours de ce projet : la Value At risk. Cette mesure de risque est assez pertinente puisqu'elle permet d'évaluer les engagements du réassureur dans les cas les plus extrêmes. Nous verrons donc comment les engagements de l'assureur baissent significativement après recours à la réassurance.

Enfin, pour répondre à des exigences purement réglementaires, nous allons envisager, comme dernier critère, la marge de solvabilité réglementaire. A ce stade, nous chercherons la combinaison de franchises issues des deux traités étudiés permettant d'atteindre un taux de couverture à hauteur de 120%.

Mots clés : Hétérogène-Assurance Décès Emprunteur-Réassurance-traités-Cotation-optimisation-VAR-Marge de solvabilité.

Dédicaces

A mes très chers parents qui ont toujours fait en sorte de m'offrir les meilleures conditions pour assurer mon bien-être et faire de moi ce que je suis aujourd'hui.

Je ne saurais trouver les mots pour vous exprimer ma profonde gratitude pour tout l'amour que vous m'avez porté et pour tous les sacrifices que vous avez faits pour moi.

A mon adorable frère Zakaria qui m'a toujours encouragé

A Mon oncle ALI et ma tante Touria qui m'ont toujours supporté tout au long de mon parcours scolaire

Une très grande pensée à mes très chers cousins Faiza et Idriss qui m'ont toujours soutenu et encouragé tant dans mes études que mes compétitions sportives

A mes très chers amis Fatima Ezzahra, Fadoua, Kaoutar, Ayoub et Mohammed. Merci d'avoir été toujours là pour moi dans les moments difficiles

A mes adorables copines et colocataires Alia, Meriem, Ghizlane et Mariam. Je n'oublierai jamais les moments que nous avons passés ensemble durant la période de stage

A notre chère amie et camarade Meriem qui nous a quittés cette année. Que Dieu t'accorde Paix et Miséricorde.

Zineb Benseyed

Je dédie ce travail à :

Mes parents, pour m'avoir soutenu pendant toute ma vie.

Mon frère pour avoir toujours cru en moi.

Tous mes amis pour avoir toujours été à l'écoute

Tout professeur m'ayant un jour enseigné

Toute personne m'ayant soutenu

Youssef Diouri

Remerciements

Au terme de ce travail, nous tenons à exprimer nos sincères remerciements à notre encadrant interne M. Fouad MARRI pour ses conseils précieux et son aide tout au long de notre stage.

Nos remerciements s'adressent également à notre encadrante externe Mme Zineb OUHABI, chef de service à la direction technique de la Marocaine Vie, pour sa constante disponibilité, ses efforts et son encouragement qui ont fait de notre stage une expérience enrichissante.

Nous exprimons notre gratitude et nos sentiments de reconnaissance à M. Faïçal ZAHLANE, directeur de la direction technique à la Marocaine Vie, de nous avoir acceptés en tant que stagiaires et d'avoir accordé tant d'attention et de considération à notre travail.

Nous tenons à remercier M. Abdellatif MECHRAFI, professeur de l'enseignement supérieur à l'INSEA, pour avoir accepté d'évaluer ce travail.

Nos remerciements vont aussi à l'ensemble du personnel de la direction technique pour leur coopération et l'accueil chaleureux qu'ils nous ont réservé durant notre projet de fin d'étude.

Enfin, n'oublions pas de rendre hommage au défunt M. Lahcen MOUTIK, ex professeur à l'INSEA, que Dieu ait son âme, et de remercier l'ensemble du corps professoral de l'INSEA, pour ses efforts continus afin de nous offrir la meilleure formation.

Table des matières

RESUME :	3
DEDICACES	4
REMERCIEMENTS	6
LISTE DES ABREVIATIONS	10
LISE DES TABLEAUX ET FIGURES :	11
INTRODUCTION	13
CHAPITRE 1 : LA REASSURANCE	15
I. Introduction :	16
II. Définitions et notions de base :	16
III. Utilité de la réassurance	18
IV. Le marché mondial de la réassurance :	19
IV.1. Volume des primes mondiales d'assurance et de réassurance :	19
IV.2. Répartition des primes par zone géographique :	20
IV.3. Classement mondial des réassureurs :	21
IV.4. Le marché de réassurance au Maroc :	21
V. Critères de classification de la Réassurance :	23
V.5. Critère juridique :	23
V.6. Critère technique	24
V.6.1. Traité proportionnel	24
1) La quote part	24
2) L'excédent de plein :	25
V.6.2. Traités non proportionnels	26
1) L'excédent de sinistre :	27
2) L'excédent de perte :	29
V.6.3. Quelques clauses des traités non proportionnels:	29
CHAPITRE 2 : DIAGNOSTIC DU PROGRAMME DE REASSURANCE POUR LES PRODUITS D'ADE	31
I. Présentation de l'assurance emprunteur :	32
I.1. Description :	32
I.2. Garanties : IAD/ IPT	32
I.3. Formalités Médicales :	33
I.4. Quelques produits d'assurance emprunteur de la MV :	33
II. Programme de réassurance de la MV :	34
II.5. Quelques données statistiques :	35

II.6.	Part de l'assureur et du réassureur dans l'indemnisation des sinistres :	36
II.7.	Evolution du taux de primes :	38
II.8.	Amélioration de quelques données comptables après réassurance	38
CHAPITRE 3 : TARIFICATION DES TRAITES EN XS		41
I.	Objectif de la tarification :	42
II.	Composantes de la prime :	42
III.	La mise en situation « As If » :	43
IV.	Méthode Burning Cost.....	43
IV.1.	Principe	43
IV.2.	Formalisme de la méthode :	44
IV.3.	Avantage et limite de la méthode :	45
IV.4.	Application :	45
IV.4.1.	Description et traitement de la base :	45
IV.4.2.	Actualisation des données :	47
IV.4.3.	Etape du calcul et résultats :	48
V.	Méthode probabiliste :	50
V.5.	Principe :	50
V.6.	Formalisme :	50
V.7.	Avantages et limites de la méthode :	51
VI.	Modélisation de la fréquence et sévérité:	51
VI.8.	Détermination de la loi de fréquence :	52
VI.8.1.	Loi de poisson :	52
VI.8.2.	Loi Binomiale négative :	52
VI.9.	Détermination de la loi de sévérité :	53
VI.9.1.	Rappel sur les lois tronquées :	53
1)	La loi Log-normal translatée :	53
2)	La loi de Weibull translatée :	54
3)	La loi exponentielle translatée :	54
4)	La loi de Pareto translatée:	54
5)	Loi Gamma translatée :	54
VI.10.	Estimation des paramètres	55
VI.10.1.	Méthode des moments :	55
VI.10.2.	Méthode de Maximum de vraisemblance :	55
VI.11.	Test d'ajustement :	56
VI.11.1.	<i>Cas de la loi de la fréquence</i> :	56
1)	Test de sur dispersion	56
2)	Test du rapport de vraisemblance	57
VI.11.2.	<i>Cas de la loi de sévérité</i> :	57
1)	Test de Kolmogorov – Smirnov :	57
2)	Test d'Anderson – Darling :	58
VI.12.	Application au portefeuille :	58
VI.12.1.	Modélisation de la sévérité :	59
1)	Choix du seuil de modélisation	59
2)	Estimation des paramètres :	60
3)	Validation de l'ajustement de la sévérité par la loi Log Normale tronquée	61
VI.12.2.	Modélisation de la fréquence	64
1)	Estimation des tardifs :	64
2)	Mise en situation As If :	67
3)	Estimation des paramètres :	68

4) Test d'adéquation :	69
5) Modèle retenue pour les deux traités :	70
VI.12.3. Détermination du taux de prime :	71
1) Méthode par calcul probabiliste	71
2) Tarification par simulation	73
3) Tarification de la clause Aggregate :	77

CHAPITRE 4 : ANALYSE DE QUELQUES CRITERES D'OPTIMISATION..... 80

I. Critère Espérance/ Variance du Gain :	81
I.1. Modélisation de la charge totale de l'assureur :	81
I.1.1. Loi de la sévérité :	82
I.1.2. Loi de la fréquence	83
I.2. Modélisation du gain de l'assureur :	84
I.2.1. Cas de l'excédent de sinistre :	85
1) Application :	87
I.2.2. Cas de la Quote part :	88
1) Résultat :	89
II. La Value At Risk comme mesure de risque.....	91
II.3. Définition	91
II.4. Application :	92
II.4.1. Algorithme de Panjer :	92
II.4.2. Approximation Normale :	93
II.4.3. Approximation Normal Power (NP)	94
II.4.4. Méthode de Simulation	94
II.4.5. Résultats :	96
III. La marge de solvabilité.....	98
III.5. Ses composantes :	99
III.5.1. La marge de solvabilité réglementaire :	99
III.5.2. La marge de solvabilité constituée :	101
III.6. Simulation des résultats :	102
III.6.1. Démarche suivie :	103
III.7. Application :	105
III.7.1. Description de la base production :	106
III.7.2. Manipulations et calculs opérés sur la base :	106
III.7.3. Résultats :	107
IV. Conclusion :	110
BIBLIOGRAPHIE.....	112
ANNEXES	114

Liste des abréviations

- AAD:** Aggregate annual dedductible
- ADE :** Assurance Décès Emprunteur
- BC:** taux de Burning Cost
- CRD:** Capital Restant Dû
- CSR:** Capital Sous Risque
- CV:** Coefficient de Variation
- DH :** Dirham
- FFSA :** Fédération Française des sociétés d'Assurances
- HC:** Hors Charge
- IAD :** Invalidité Absolue et Définitive
- IF:** Indice de Fisher
- IPT :** Invalidité Permanente et Totale
- MS:** Marge de Solvabilité Réglementaire
- MSC:** Marge de Solvabilité Constituée
- MV:** Marocaine Vie
- LN:** Log Normale
- PP:** Prime Pure
- RV:** Rapport de Vraisemblance
- S/P :** Ratio entre le coût du sinistre et les primes
- SCR :** Société Centrale de Réassurance
- XS:** Excédent de Sinistres

Lise des tableaux et figures :

Liste des figures

FIGURE 1: SCHEMA EXPLICATIF DU MECANISME DE REASSURANCE	18
FIGURE 2: VOLUME MONDIAL DES PRIMES D'ASSURANCE ET DE REASSURANCE REPARTIE PAR BRANCHE	19
FIGURE 3: REPARTITION DES PRIMES PAR ZONE GEOGRAPHIQUE	20
FIGURE 4: CLASSEMENT REASSUREUR VIE/NON VIE	21
FIGURE 5: STRUCTURE DU PORTEFEUILLE APRES QUOTE PART	24
FIGURE 6: PORTEFEUILLE DE L'ASSUREUR APRES ACHAT D'UNE COUVERTURE EN EXCEDENT DE PLEIN	26
FIGURE 7: ZONE PROTEGEE PAR L'XS	27
FIGURE 8: PART SUPPORTEE PAR CHACUN DE L'ASSUREUR ET REASSUREUR APRES COUVERTURE PAR L'XS	28
FIGURE 9: CHIFFRE D'AFFAIRE DES CONTRATS D'ADE DE LA MV DEPUIS 2011	34
FIGURE 10: PART DE L'ASSUREUR ET DU REASSUREUR DANS L'INDEMNISATION DES SINISTRES POUR LE TRAITE 1	37
FIGURE 11: PART DE L'ASSUREUR ET DU REASSUREUR DANS L'INDEMNISATION DES SINISTRES POUR LE TRAITE 2	37
FIGURE 12: EVOLUTION DU TAUX DE PRIME DE REASSURANCE DEPUIS L'ANNEE 2009	38
FIGURE 13: GRAPHE DU TAUX D'INFLATION	47
FIGURE 14: CAPTURE EXCEL EXPLICATIF DE LA DEMARCHE	48
FIGURE 15: DIAGRAMME Q-Q PLOT DU TRAITE 1	62
FIGURE 16: DIAGRAMME Q-Q PLOT DU TRAITE 2	62
FIGURE 17: TRIANGLE DE RUN-OFF	65
FIGURE 18: TRIANGLE RUN OFF A REMPLIR	66
FIGURE 19: CALCUL DES COEFFICIENTS DE PASSAGE	66
FIGURE 20: TARDIFS ESTIMES PAR LA METHODE CHAI LADER	67
FIGURE 21: SCHEMA EXPLICATIF DE LA DEMARCHE DE SIMULATION	75
FIGURE 22: SCHEMA RECAPITULATIF DU CALCUL DE LA VAR PAR LA METHODE DE SIMULATION	96
FIGURE 23: NORMES REGLEMENTAIRES POUR LE CALCUL DE LA MARGE DE SOLVABILITE A CONSTITUER POUR LA BRANCHE VIE	100
FIGURE 24: ELEMENTS CONSTITUTIFS DE LA MARGE DE SOLVABILITE	102
FIGURE 25: CAPTURE FICHIER EXCEL DES FRANCHISES OPTIMALES	108
:	

Liste des tableaux

TABLEAU 1: QUELQUES CARACTERISTIQUES DES PRODUIS D'ADE DE LA MV	33
TABLEAU 2: TRAITES ACTUELS DE LA MV COUVRANT LE PORTEFEUILLE ADE	35
TABLEAU 3: STATISTIQUES DU COUT INDIVIDUEL DES SINISTRES PAR TRAITE	36
TABLEAU 4: RATIO S/P ET RESULTAT TECHNIQUE AVANT REASSURANCE	39
TABLEAU 5: RATIO S/P ET RESULTAT TECHNIQUE APRES REASSURANCE	39
TABLEAU 6: TAUX DE PRIME PAR LA METHODE BC POUR DIFFERENTES COMBINAISONS DE FRANCHISES ET PORTEES POUR LE TRAITE 1	49
TABLEAU 7: TARIFS OBTENUS PAR LA METHODE BC POUR LE CAS DES TRAITES ACTUELS DE LA MV	50
TABLEAU 8 :DISTANCE DE KOLMOGOROV POUR DIFFERENTES COMBINAISONS DE SEUILS ET LOI DE SEVERITE RELATIVES AU TRAITE 1	59
TABLEAU 9: DISTANCE DE KOLMOGOROV POUR DIFFERENTES COMBINAISONS DE SEUILS ET LOI DE SEVERITE RELATIVES AU TRAITE 1	60
TABLEAU 10: ESTIMATION DES PARAMETRES DE LOI DE SEVERITE PAR LA METHODE MV POUR CHAQUE TRAITE	61
TABLEAU 11: TEST DE KOLMOGOROV POUR LES 2 TRAITES	63
TABLEAU 12: TEST D'ANDERSON DARLING POUR LES 2 TRAITES	63
TABLEAU 13 : NOMBRE DE SINISTRES AS IF POUR LES DEUX TRAITES	68
TABLEAU 14: ESTIMATION DES PARAMETRES DE LA FREQUENCE PAR LA METHODE DU MV	69
TABLEAU 15: TEST DU RAPPORT DE DISPERSION	69
TABLEAU 16: TEST DU RAPPORT DE VRAISEMBLANCE	69
TABLEAU 17: TAUX DE PRIME DU TRAITE 1 OBTENUS PAR LA METHODE PROBABILISTE	72
TABLEAU 18: TAUX DE PRIME DU TRAITE 2 OBTENUS PAR LA METHODE PROBABILISTE	72
TABLEAU 19: TAUX DE PRIME DU TRAITE 1 OBTENUS PAR LA METHODE DE SIMULATION	76
TABLEAU 20: TAUX DE PRIME DU TRAITE 2 OBTENUS PAR LA METHODE DE SIMULATION	76

TABLEAU 21: IMPACT DE LA CLAUSE AGGREGATE SUR LE TAUX DE PRIME.....	78
TABLEAU 22: VARIATION DU TAUX DE PRIME EN FONCTION DE L'AGGREGATE	79
TABLEAU 23: STATISTIQUES DU COUT DU SINISTRE INDIVIDUEL REVALORISE	81
TABLEAU 24: DISTANCE DE KOLMOGOROV POUR CHAQUE LOI DE SEVERITE TESTEE	82
TABLEAU 25: ESTIMATION DES PARAMETRES DE LA LOI L-N POUR CHAQUE TRAITE.....	82
TABLEAU 26: TEST D'AJUSTEMENT DE KOLMOGOROV	82
TABLEAU 27: NOMBRE DE SINISTRE AS IF PAR ANNEE DE SURVENANCE POUR CHAQUE TRAITE	83
TABLEAU 28: ESTIMATION DES PARAMETRE DE LA LOI DE FREQUENCE APR LA METHODE DE MV	83
TABLEAU 29: TEST DE DISPERSION DE LA LOI DE LA FREQUENCE POUR LES 2 TRAITES	84
TABLEAU 30: RESUME DES LOIS RETENUS POUR CHAQUE TRAITE.....	84
TABLEAU 31: ESPERANCE/VARIANCE DU GAIN DU TRAITE 1 POUR DIFFERENTE FRANCHISE.....	87
TABLEAU 32: TABLEAU 30: ESPERANCE/VARIANCE DU GAIN DU TRAITE 2 POUR DIFFERENTE FRANCHISE	87
TABLEAU 33: ESPERANCE/ VARIANCE DUGAIN POUR LA QUOTE PART	89
TABLEAU 34: CALCUL DE LA VAR PAR LES TROIS METHODES POUR LE TRAITE 1.....	97
TABLEAU 35: CALCUL DE LA VAR PAR LES TROIS METHODES POUR LE TRAITE 2.....	97

Introduction

Le défi majeur de toute compagnie d'assurance est de garantir sa solvabilité et éviter toute ruine éventuelle. Ainsi, de la même manière qu'un assuré s'adresse à un assureur pour se prémunir contre un risque auquel il ne peut faire face tout seul, l'assureur, à son tour, se protège contre divers aléas en recourant au mécanisme de la réassurance.

Pour le cas de l'assurance emprunteur, les raisons qui poussent un assureur à recourir à un cessionnaire sont assez nombreuses. En effet, l'agrégat principal à gérer étant un portefeuille hétérogène, du fait des emprunts de natures différentes que contractent les assurés auprès de la banque. En tant que garant du risque, l'assureur est confronté à tout moment à un dédommagement exceptionnel surtout face aux gros montants assurés.

D'un autre côté, les compagnies d'assurance doivent s'adapter en permanence à la réglementation en vigueur afin de préserver leur statut d'assureur. En particulier, elles doivent être en mesure d'atteindre un niveau minimal de solvabilité appelé marge de solvabilité réglementaire.

Pour cette raison, le recours à la réassurance s'avère indispensable puisqu'il permet à l'assureur de plafonner ses engagements, de stabiliser son résultat mais également de s'accommoder aux exigences des autorités de tutelles.

L'objet de ce travail est donc d'analyser un ensemble de critères pouvant orienter l'assureur à choisir sa structure de réassurance pour couvrir les portefeuilles d'ADE.

Pour ce faire, notre travail sera articulé autour de quatre chapitres:

Le premier fera l'objet d'un rappel général de la Réassurance, c'est-à-dire sa définition formelle, son utilité, ainsi que ses différentes formes.

Le deuxième chapitre aura pour objectif de diagnostiquer le programme de réassurance pour lequel la compagnie a opté pendant ces dernières années.

Le troisième chapitre, intitulé tarification des traités en XS, vise à appliquer les méthodes classiques de cotation à savoir la méthode déterministe et probabiliste.

Introduction

Enfin, le dernier chapitre propose d'analyser un ensemble de critères d'optimisation. Il s'agit notamment du critère Esperance/Variance, la Value At Risk et la marge de solvabilité réglementaire.

La présentation du marché de l'assurance et de l'organisme d'accueil sera exposée en annexe.

Chapitre 1 : La Réassurance

Dans le présent chapitre, nous tâcherons de présenter la Réassurance, son utilité, ses principaux acteurs tant au niveau international que national. Nous expliquerons ensuite en détails ses différentes formes :

Juridique et technique.

Ce rappel de Réassurance nous permettra de saisir les enjeux de la réassurance et constituera un point de départ pour le reste du travail.

I. Introduction :

Avant de parler de la réassurance, il serait judicieux de revoir quelques principes relatifs à l'activité de l'assurance.

Par définition, l'assurance est un contrat aléatoire par lequel l'assureur s'engage envers l'assuré, pour une période, à le couvrir financièrement lors de la survenance d'un événement déterminé par le contrat, appelé « sinistre », en contrepartie de recevoir un montant appelé « prime d'assurance ».

Cette prime est calculée sur la base de l'espérance de survenance du sinistre. Comme les sinistres qui surviennent oscillent en réalité autour d'une moyenne statistique, l'assureur cherchera donc à ne pas s'éloigner de cette moyenne, et ce en souscrivant le plus grand nombre de contrats possibles de façon à ce qu'il parvienne à indemniser les risques sinistrés : c'est le principe de mutualisation.

Pour pallier à ce problème d'écart de sinistralité pouvant peser lourd sur sa solvabilité, l'assureur pourrait par exemple inclure plus de chargement au niveau de sa prime pure, augmenter ses fonds propres, ou encore limiter ses souscriptions.

Aucune de ces trois solutions ne semble avantageuse, puisque la première risque de nuire à la compétitivité de l'assureur, tandis que la deuxième ne serait guère acceptée par les actionnaires, alors que la troisième l'empêcherait de se développer.

L'assureur a par conséquent la possibilité de se réassurer, une solution lui offrant la possibilité de se développer tout en maintenant un niveau de solvabilité acceptable.

Dans ce qui suit, nous allons nous intéresser à définir la réassurance, son rôle, ses différents intervenants dans le marché international et national ainsi que ses différentes formes techniques et juridiques.

II. Définitions et notions de base :

La réassurance peut se définir comme étant un arrangement à travers lequel un réassureur s'engage à rembourser à un assureur dit « cédant », moyennant une rétribution appelé « prime de réassurance », tout ou partie des montants dus ou versés par l'assureur à ses assurés à titre de sinistres, et ce dans des conditions déterminées.

Bien que ce transfert de risque permette à l'assureur de se décharger d'une partie des risques souscrits, celui-ci continue d'être juridiquement le seul responsable envers l'assuré.

De manière générale, l'assurance et la réassurance sont fondées sur le même principe à savoir la mutualisation. Toutefois, la réassurance se distingue par son caractère international qui fait que celle-ci gagne en termes d'expertise et parvienne à disposer de techniques d'analyse avancées pour participer à de grandes variétés de risques.

Pour ce qui est des intervenants dans le marché de la réassurance, il en existe principalement trois. Les deux premiers sont composés naturellement des compagnies d'Assurance qui cèdent le risque et les compagnies de Réassurance qui supportent en partie le risque.

Comme dans le cas de la relation Assuré-Assureur, il existe un troisième intervenant qui joue le rôle de l'intermédiaire, il s'agit du courtier de Réassurance.

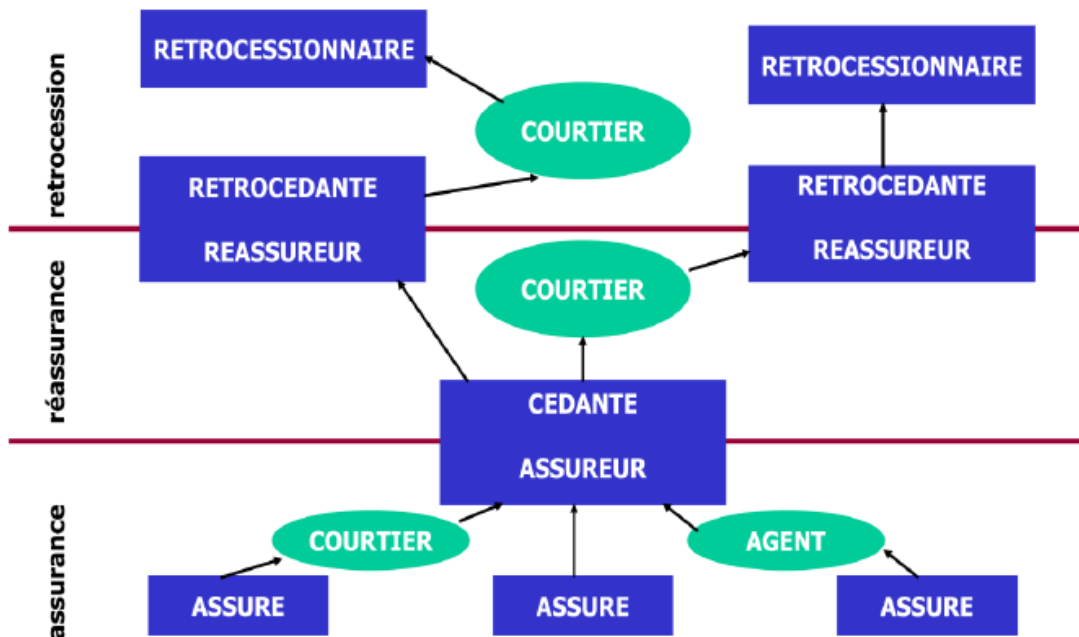
Le courtier de réassurance est considéré comme étant le mandataire de l'Assureur. En effet, le courtier apporte son assistance à l'Assureur en le conseillant sur son plan de Réassurance. D'un autre côté, son rôle d'intermédiation intervient dans le sens où il regroupe et propose un ensemble de réassureurs pour participer à la couverture du risque, où chaque réassureur en assume une partie. Enfin le courtier est chargé de négocier les conditions de souscription des contrats de Réassurance.

Il existe par ailleurs une autre notion propre à l'activité de Réassurance : la rétrocession.

La notion de rétrocession signifie tout simplement la réassurance d'une affaire réassurée. En effet, le réassureur peut jouer le rôle de rétrocédant en ayant recours à la rétrocession qui lui permettra de protéger son exposition et réduire ses engagements.

Maintenant que nous avons fait le tour des différents acteurs intervenant dans le marché de la réassurance, nous proposons le schéma suivant :

Figure 1: Schéma explicatif du mécanisme de réassurance



III. Utilité de la réassurance

Compte tenu du transfert de risque que permet l'opération de réassurance, celle-ci constitue pour le réassureur un support financier puisqu'elle lui offre la possibilité de :

- ❖ Lisser les résultats : La réassurance couvre l'assureur au-delà d'un certain plafond ce qui lui permet de conserver des risques plus homogènes et le protège contre un dérapage éventuel de la sinistralité que ce soit en montant ou en nombre.
- ❖ Augmenter sa capacité de souscription : En se réassurant, l'assureur est protégé. Par conséquent, il peut envisager la possibilité de souscrire des polices portant sur des risques plus nombreux voire plus importants sans pour autant augmenter leur besoin en fond propre.
- ❖ Maintenir sa liquidité à un niveau suffisant surtout en cas de sinistralité exceptionnelle.

De par le support financier, la réassurance apporte au réassureur un support technique en :

- ❖ Lui apportant son expertise dans certains domaines comme la tarification des risques complexes ;
- ❖ L'aidant à définir son besoin en réassurance et à construire le plan de réassurance le plus efficace ;

- ❖ L'aidant à accéder à de nouvelles branches ou à des risques mal connus ;
- ❖ Lui offrant une gamme variée d'assistance, en matière de formation technique, de gestion ou encore d'organisation.

IV. Le marché mondial de la réassurance :

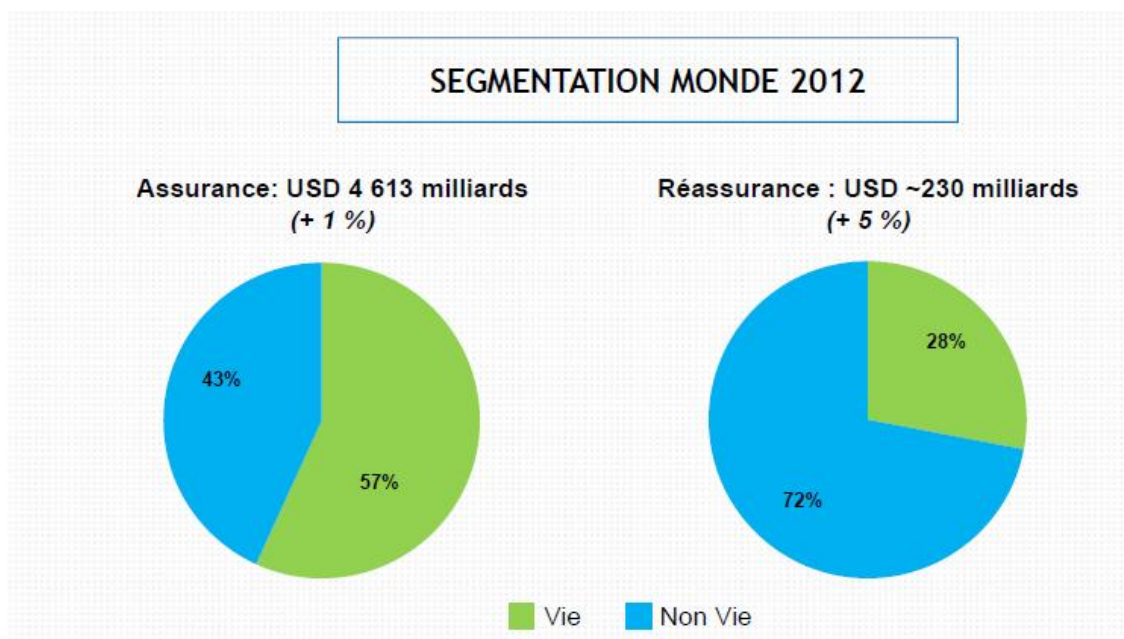
Le marché mondial de la réassurance est caractérisé par sa concentration du fait qu'il compte une centaine d'acteurs professionnels opérant au niveau mondial mais seule une minorité d'entre eux domine la profession. C'est un marché monopolisé par les acteurs européens et américains qui assurent pratiquement la totalité de l'offre en matière de réassurance.

IV.1. Volume des primes mondiales d'assurance et de réassurance :

Selon le rapport de la Fédération Française des Sociétés d'Assurances (FFSA) de 2013, le volume mondial des primes de réassurance en 2012 est estimé à 230 milliards de US\$, en croissance de 5%, à comparer à un volume de primes d'assurance de 4 613 md\$. Portant principalement sur des risques extrêmes, il est toutefois à noter que l'importance du rôle économique de la réassurance se mesure moins en termes de primes que d'engagements.

Ci-dessous le graphe du volume mondial des primes d'assurance et de réassurance réparti selon la branche vie et non vie.

Figure 2: Volume mondial des primes d'assurance et de réassurance réparti par branche



Source : Fédération Française des Sociétés d'Assurances (FFSA)

Le volume mondial des primes d'assurance qui s'élève à 4 613 milliards de dollars provient majoritairement de la branche vie avec une contribution de 57%.

Par ailleurs, en réassurance, la branche vie génère beaucoup moins de primes que la branche non vie. Cette répartition inverse est expliquée par le fait qu'en réassurance, un risque de personne n'a pas une taille comparable à celle d'un risque industriel. Par conséquent, en Vie, on a moins tendance à recourir à la réassurance comparée à l'assurance dommage.

IV.2. Répartition des primes par zone géographique :

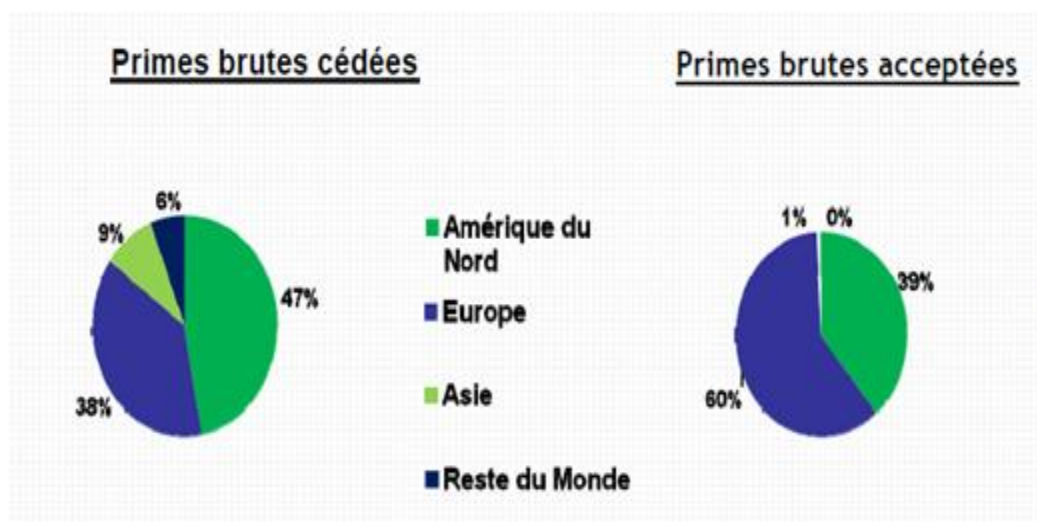
Le graphe ci-dessous issu toujours du rapport communiqué par le FFSA, décrit la répartition des primes cédées et acceptées par zone géographique.

Un premier constat est que le marché de la réassurance est principalement concentré dans deux zones géographiques : L'Europe et l'Amérique du Nord.

En termes de cession, le taux le plus élevé provient de l'Amérique du Nord (47%), suivi par l'Europe (38%) et enfin l'Asie (9%) sans oublier le reste du monde (6%).

Une remarque importante à signaler est que l'Europe est exportatrice en termes de capacité de réassurance car elle offre 60% de la capacité mondiale et ne cède que 38%.

Figure 3: Répartition des primes par zone géographique

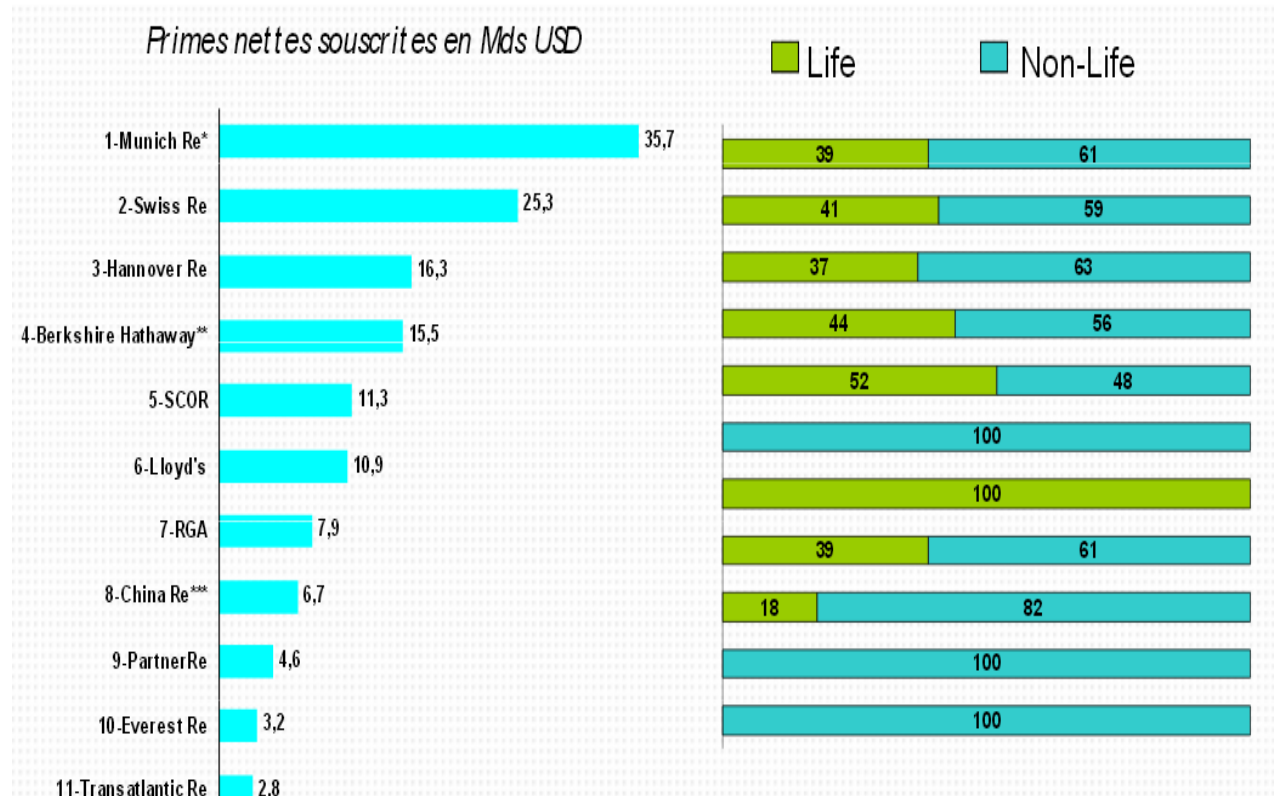


Source : Fédération Française des Sociétés d'Assurances (FFSA)

IV.3. Classement mondial des réassureurs :

Le métier de la réassurance est fortement concentré comme en témoigne le graphe ci-dessous.

Figure 4: Classement Réassureur Vie/Non Vie



Source : Fédération Française des Sociétés d'Assurances (FFSA)

D'après les données communiquées par le FFSA, au titre de l'année 2012, les quatre premiers groupes de réassurance recueillent plus de la moitié des primes nettes souscrites dans le monde avec un volume de prime franchissant les 91.8 milliards de dollars.

En outre, nous remarquons encore une fois que la branche non vie présente le plus grand pourcentage des recettes en termes de prime et ce pour la majorité des groupes de réassurance.

IV.4. Le marché de réassurance au Maroc :

Le marché marocain de réassurance est partagé entre la Société Centrale de Réassurance (SCR) et les autres réassureurs étrangers.

En effet, la SCR intervient sur deux niveaux : d'une part à travers la cession légale et d'une autre par le biais de la cession conventionnelle.

La cession légale à la SCR en vertu du Dahir N1-60-085 du 23 Chaoual 1379 (20 avril 1960), porte la législation de cession à cette société d'une part des primes perçues par les organismes d'assurance. La part de cette cession légale est établie à 10% de la prime réalisée pour tout risque souscrit au Maroc.

Les cessions conventionnelles quant à elles, constituent l'activité commerciale de la SCR, et se font à travers les traités et les affaires facultatives.

Les cessions facultatives font généralement l'objet d'affaires importantes surtout lorsqu'il s'agit de grands risques dépassant le plein de souscriptions des traités.

D'après le rapport annuel du secteur d'assurance et de réassurance au Maroc, publié par la Direction des Assurances et de la Prévoyance Sociale, au titre de l'année 2012, nous retenons les informations suivantes :

Les primes acceptées par la SCR au cours de l'exercice 2012 ont atteint 2 284,99 Millions de dirhams contre 2 463,94 Millions de dirhams en 2011.

Par nature d'acceptations, ce chiffre d'affaires se répartit de la manière suivante :

- La cession légale : 36.35% ;
- Les traités marocains : 11.58% ;
- Les affaires facultatives marocaines : 32.12% ;
- Les affaires étrangères : 19.95%

Les prestations payées par la SCR ont enregistré une baisse de 2,75% en passant de 1 585,08 millions de dirhams en 2011 à 1 541,44 millions de dirhams en 2012. Les prestations se rapportant aux affaires vie ont baissé de 11.78% et celles des acceptations non vie de 0.01%.

Les cessions de primes se rapportant aux affaires conventionnelles sont effectuées par les entreprises d'assurances marocaines auprès de la SCR pour une partie, l'autre partie étant cédée directement aux réassureurs étrangers. A son tour, la SCR rétrocède à l'étranger une partie de ses acceptations marocaines.

La somme des cessions à l'étranger effectuées par les entreprises marocaines d'assurance et de réassurance, y compris les rétrocessions de la SCR, constitue le coût de couverture des

risques marocains vis-à-vis de l'étranger. Ce coût rapporté aux primes émises par les entreprises d'assurance du marché correspond à 5,46% en 2012 contre 6,16% en 2011.

V. Critères de classification de la Réassurance :

La réassurance peut être classée selon deux critères :

Un premier critère juridique décrivant la forme du contrat et un deuxième plutôt technique, définissant les paramètres liés à la rétention.

V.5. Critère juridique :

D'un point de vue juridique, la réassurance prend principalement deux formes : une facultative et une autre obligatoire.

La réassurance facultative est considérée comme la plus ancienne forme de réassurance. Se faisant par police, l'assureur est libre de céder une partie ou la totalité d'un risque au réassureur, tandis que ce dernier se réserve le droit de l'accepter ou de le refuser.

Cette forme de réassurance couvre généralement :

- Des risques exclus du traité ;
- Des risques exceptionnellement acceptés par la compagnie à titre commercial ;
- Un portefeuille petit ne pouvant pas faire l'objet d'un véritable traité ;
- De grands risques dépassant même la capacité de souscription de la compagnie.

S'appliquant risque par risque, la réassurance facultative présente toutefois l'inconvénient d'engendrer des coûts élevés en matière de gestion.

La cession obligatoire quant à elle, engendre des obligations des deux côtés. D'une part l'assureur s'engage, durant une période donnée, à céder des risques dans une branche clairement définie, d'une autre part le réassureur s'oblige à les accepter et ce dans des conditions déterminées. Le contrat régissant la réassurance obligatoire est appelé traité, celui-ci peut prendre la forme de proportionnel ou non proportionnel.

Enfin, en guise de remarque, il existe une autre forme de réassurance : facultative/obligatoire (FACOB) dans laquelle l'assureur est libre de céder une partie des risques alors que le réassureur est obligé de les accepter, selon des conditions bien définies.

V.6. Critère technique

Lorsqu' on est en réassurance obligatoire, le traité conclu peut prendre deux formes : proportionnelle ou non proportionnelle.

V.6.1. Traité proportionnel

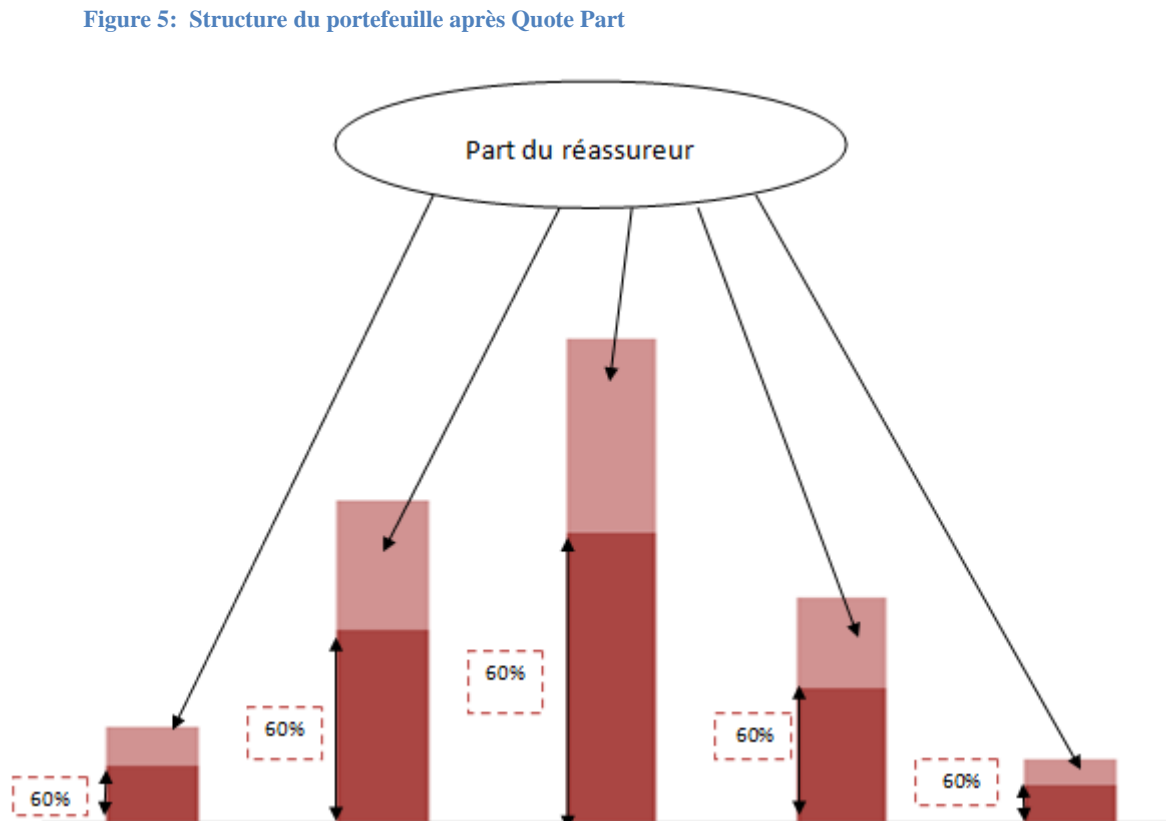
Comme son nom l'indique, le traité proportionnel s'inscrit dans une logique où tous les éléments du risque (capital, prime, sinistre) sont partagés proportionnellement entre assureur et réassureur. En effet, l'assureur cède une fraction des primes au réassureur, en contrepartie, ce dernier prendra en charge la même fraction du montant des sinistres.

Il existe deux formes de réassurance proportionnelle : la quote-part et l'excédent de plein.

1) La quote part

Dans ce type de traité, l'assureur cède un pourcentage constant des risques souscrits (appelé taux de cession), le réassureur indemnise le même pourcentage des sinistres survenus et reçoit en échange la même portion de prime.

Pour un taux de cession de 40%, le portefeuille de l'assureur conservé est comme suit :



Comme la cession est fixe quelque soit le risque, l'assureur cède de la même façon sur les risques importants que sur les risques faibles, alors qu'il pouvait lui-même s'en décharger. Le profil du portefeuille de l'assureur après cession quant à lui ne change pas, mais c'est plutôt le niveau des engagements qui se modifie.

Dans ce cas, le portefeuille après réassurance en quote-part n'est pas plus homogène qu'avant car le recours à cette forme ne permet aucun nivellement de risque, d'autant plus qu'il n'améliore pas le résultat.

2) *L'excédent de plein :*

La réassurance en excédent de plein consiste à calculer un taux de cession sinistre par sinistre. Pour chaque risque, l'assureur conserve un montant fixe appelé plein de rétention, au-delà de ce capital, le réassureur intervient pour indemniser le reste dans la limite d'un montant généralement déterminé en fonction de nombre de pleins. Voici la formule du taux de cession :

$$\theta = \min \left\{ \max \left(0, 1 - \frac{P}{K} \right); \frac{NP}{K} \right\}$$

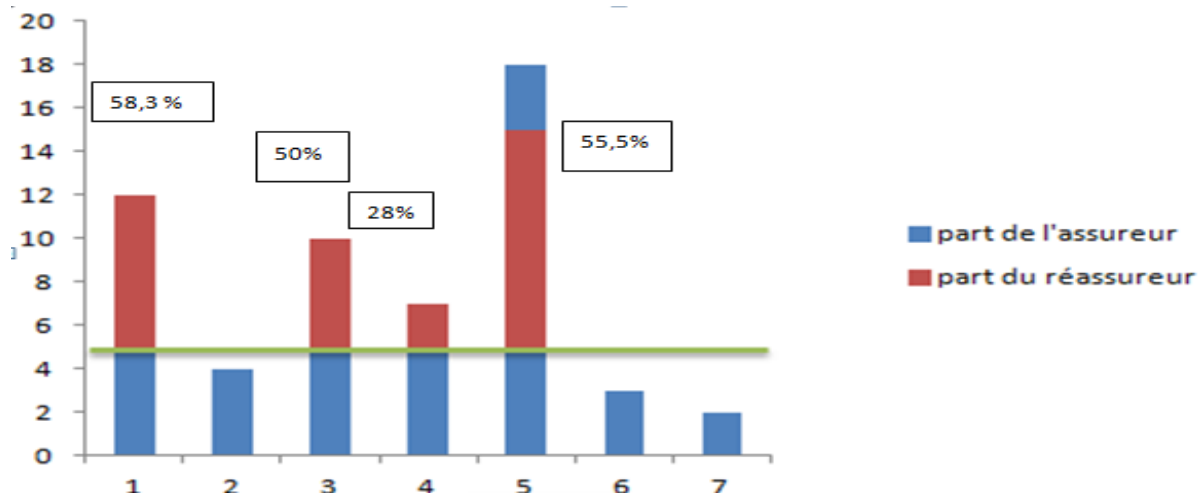
Avec :

- P : Plein de rétentions
- K : Capitaux assurés
- N : Nombre de pleins

Prenons comme exemple un traité avec un plein de rétention de 5 et une capacité de deux pleins.

Le portefeuille de l'assureur devient :

Figure 6: Portefeuille de l'assureur après achat d'une couverture en Excédent de Plein



A la différence de la quote-part, l'excédent de plein permet d'écrêter les grands sinistres ce qui mène l'assureur à garder un portefeuille plus homogène. De même pour les primes, ce type de traité entraîne une moindre cession comparé à la quote-part.

Cependant, il est à noter que le taux de cession est calculé sur la base du capital assuré initial, rarement atteint en cas de sinistralité, chose qui mène le réassureur à intervenir sur des petits sinistres que l'assureur aurait pu conserver pour son propre compte.

C'est pourquoi, dans une vision générale, nous pouvons conclure que dans les deux cas de figures de la réassurance proportionnelle, l'assureur se trouve en situation de céder une part de ces primes dépassant le seuil en mesure de lui garantir l'équilibre technique espéré.

V.6.2. Traités non proportionnels

Dans cette forme de réassurance, le traité est défini par une franchise (appelé aussi priorité) et une portée délimitant l'engagement du réassureur. A vrai dire, celui-ci intervient lorsque le montant du sinistre dépasse la franchise dans la limite de la valeur de la portée. En revanche, le réassureur encaisse une prime pour faire face au risque qu'il prend en charge.

En effet, contrairement à la réassurance proportionnelle où la prime de réassurance est facilement déterminée vu le lien de proportionnalité entre cession et indemnisation, en réassurance non proportionnelle, le réassureur est amené à anticiper la sinistralité et mettre en œuvre des techniques avancées aptes à apprécier ses engagements futurs, et par conséquent parvenir à fixer la juste valeur de la prime.

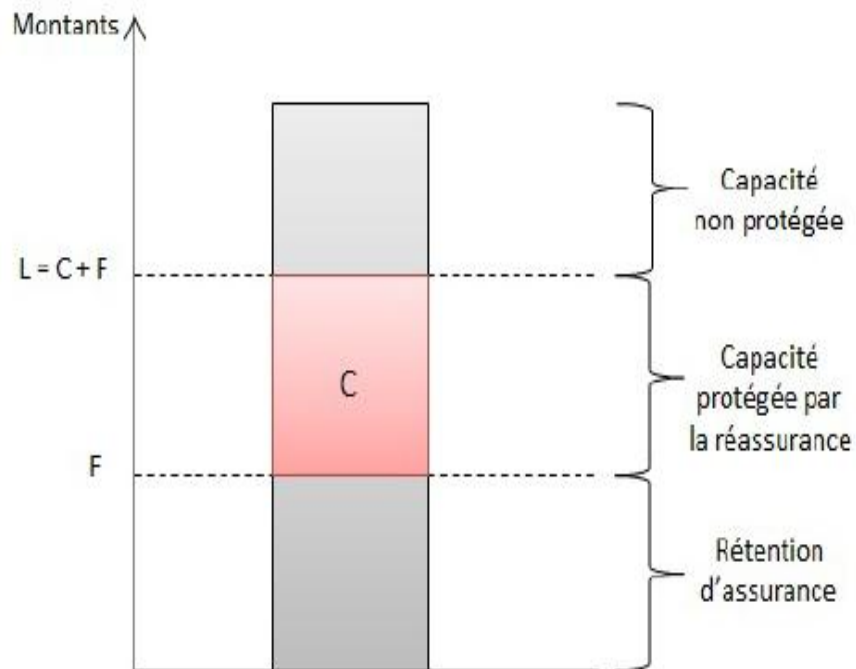
Par ailleurs, en réassurance non proportionnelle, on distingue entre deux types de couverture : Les traités en excédents de sinistres (en anglais Excess of Loss) que l'on note XS et les traités en excédent de perte (Aggregate Excess of Loss)

1) *L'excédent de sinistre :*

Appelé aussi « XS par sinistre », il s'agit du type de protection le plus répandu en réassurance non proportionnelle. Dans ce type de traité, le réassureur s'engage à rembourser la cédante pour les montants dépassant la franchise à hauteur d'une certaine portée.

Le schéma ci-dessous illustre la zone protégée et non protégée pour un XS de priorité F et de portée C.

Figure 7: Zone protégée par l'XS



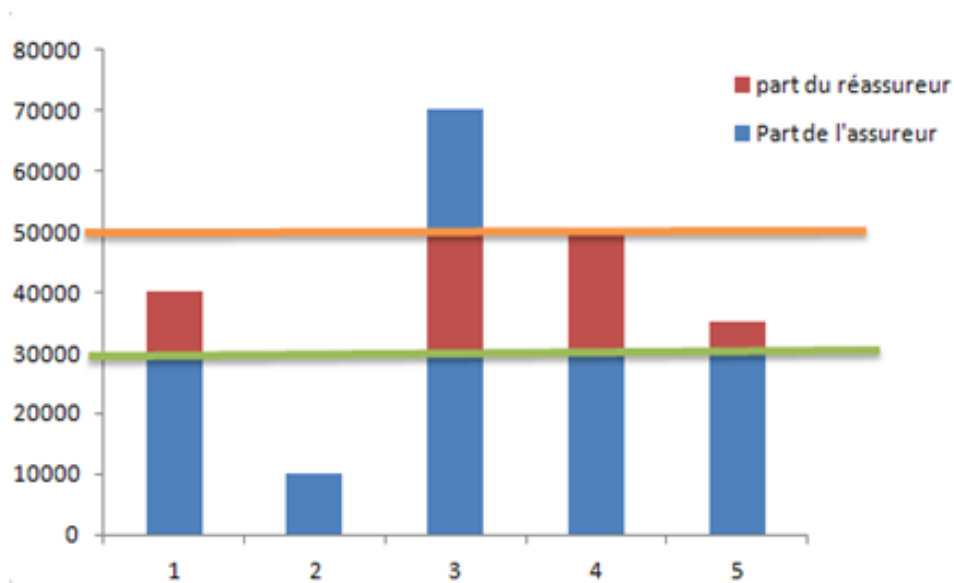
Par convention, on note le l'XS par *Portée XS Priorité*

Si on considère un XS de franchise F et de portée P , l'intervention du réassureur dans le sinistre ayant comme montant X_i est à hauteur de :

$$X_i^{Reass} = \min (\max(X_i - F, 0), P)$$

A titre illustratif, le schéma suivant illustre la part supportée par chacun d'entre l'assureur et le réassureur pour un 20000 XS 30000:

Figure 8: Part supporté par chacun de l'assureur et réassureur après couverture par l'XS



Nous remarquons que ce type de traité est particulièrement efficace pour l'écèlement des sinistres de pointes. En effet, une fois les paramètres du traité définis, l'assureur est sûr de ne pas indemniser des sinistres dépassant la franchise. Ainsi, l'assureur pourrait-il homogénéiser son portefeuille et parvenir à des résultats équilibrés et moins volatils. D'un autre côté, le réassureur ne serait pas concerné par l'indemnisation des petits sinistres, ce qui n'est pas le cas pour les traités proportionnels.

Cependant, selon la nature de la couverture définie dans le traité, on distingue entre deux types d'XS : L'XS par risque et l'XS par événement.

◆ L'XS par risque :

Dans le cas de l'XS par risque, il est impératif de définir clairement ce qui constitue un risque, car la couverture s'applique à chaque fois qu'une police est sinistrée, c'est-à-dire l'intervention du réassureur se fait séparément pour chaque sinistre issu de chacun des risques d'assurance.

◆ L'XS par événement :

Pour ce type d'XS, l'événement qui constitue le sinistre peut toucher non seulement une unique police mais un ensemble de polices sinistrées du fait d'une même cause, limitée dans l'espace et dans le temps. De manière générale, c'est un traité de nature catastrophe qui est utilisé en complément d'un traité en XS, afin que l'assureur ne soit pas confronté, en cas

de cumul, à payer plus d'une fois la franchise pour des polices sinistrées et issues d'un même événement.

2) L'excédent de perte :

Appelé aussi STOP LOSS, l'assureur a recours à ce type de traité lorsqu'il cherche à se prémunir contre les mauvais résultats en optant pour une couverture qui concerne l'ensemble des sinistres survenus au cours de l'exercice. Autrement, la priorité d'un STOP LOSS est définie comme la sinistralité annuelle que l'assureur conserve à sa charge, le réassureur au-delà. Les bornes du traités sont généralement exprimées sous forme de pourcentage du ratio Sinistre/ Primes.

Si on considère un traité en STOP LOSS de franchise f et de portée p exprimé en pourcentage, S le cumul du sinistre enregistré au cours de l'exercice et en notant C le montant des primes encaissées, l'intervention du réassureur s'exprime comme suit :

$$\text{Min}(\text{Max}\left(\frac{S}{C} - f, 0\right), p)$$

V.6.3. Quelques clauses des traités non proportionnels:

Les traités en XS sont généralement assortis de clauses supplémentaires visant la limitation des engagements ou la réduction du coût du traité, les plus courantes sont les suivantes :

- La clause de limite annuelle notée AAL (Annual Aggregate Limit) : cette clause signifie que dans l'année, le réassureur ne paiera jamais plus que ce montant.
- Des clauses de reconstitutions de capacité, gratuites ou payantes : lorsque la portée C est consommée, le réassureur mettra à disposition une autre portée C (gratuite ou payante selon des conditions prédéfinies au traité) et ainsi de suite selon le nombre de reconstitutions définies au traités. Il peut arriver que le nombre de reconstitutions soit illimité.
- La clause de franchise annuelle notée AAD (Annual Aggregate Deductible) : le réassureur ne commencera à prendre en charge les sinistres que lorsque la charge annuelle à la tranche dépassera ce montant.

- La clause de participation aux bénéfices : Cette clause prévoit de ristourner à la cédante une partie du bénéfice du réassureur au cas où ce dernier enregistre au cours de la période un solde positif.
- La clause «claim Bonus », grâce à cette clause, l'assureur peut bénéficier d'une baisse de sa prime si enfin d'année aucun sinistre ne touche la tranche de l'XS.
- La clause de stabilisation : Cette clause est particulièrement utile pour le cas des branches à développement long, c'est-à-dire les branches où le règlement des sinistres peut être échelonné dans le temps et par conséquent engendrer des coûts élevés à cause de l'érosion monétaire. Dans ce sens, cette clause a pour objectif de garantir un partage égalitaire entre la cédante et le réassureur des coûts supplémentaires engendrés par l'inflation.

Chapitre 2 : Diagnostic du programme de réassurance pour les produits d'ADE

Dans cette partie, nous nous intéressons à diagnostiquer la stratégie de Réassurance, des produits d'ADE, pour laquelle la MV a optée ces dernières années.

L'analyse consistera à faire un diagnostic quant aux choix des traités en fonction de la nature des produits réassurés. Elle vise également à mettre en lumière le rôle de la réassurance dans l'amélioration du ratio S/P et du résultat technique

I. Présentation de l'assurance emprunteur :

Les produits concernés par notre étude sont des produits d'Assurance Décès Emprunteur. Il s'agit de produits très courants dans les compagnies d'assurance, surtout chez les bancassureurs qui gèrent à la fois la souscription de la police d'assurance et la souscription de l'emprunt. Dans ce qui suit, nous tâcherons de décrire l'assurance emprunteur, ses garanties ainsi que ses caractéristiques.

I.1. Description :

L'assurance emprunteur est un contrat, généralement nécessaire lors de la souscription d'un prêt. Il est temporaire, c'est à dire limité à la durée du crédit et permet de protéger le créancier contre différents risques de défaillance de l'emprunteur pouvant l'empêcher à rembourser ses échéances.

Ce type d'assurance prend généralement la forme de contrat collectif, dans la mesure où sa souscription se fait au niveau des établissements de crédit auprès d'une compagnie d'assurance en faveur des emprunteurs ayant la qualité d'adhérents.

I.2. Garanties : IAD/ IPT

Au Maroc, les garanties offertes en assurance décès emprunteur, concernent principalement le risque de décès d'une part et le risque d'invalidité d'une autre part.

En effet, en cas de décès de l'assuré, l'assureur prendra à sa charge le versement du capital restant dû à la contractante.

Cette même couverture concerne le risque d'invalidité dont on distingue :

- L'invalidité absolue et définitive (IAD) qui intervient lorsque l'adhérent est reconnu définitivement incapable de se livrer à la moindre occupation lui procurant gain et se trouve obligé de recourir à l'aide constante d'une tierce personne.
- L'invalidité permanente totale (IPT) prenant effet lorsque l'adhérent est reconnu définitivement invalide avec un taux d'incapacité partielle et permanente dépassant un certain seuil.

Les dites garanties sont toutefois soumises à des restrictions liées aux événements engendrant le sinistre. C'est le cas par exemple du suicide, l'usage de stupéfiants ou encore les accidents dont la première constatation est antérieure à la date d'adhésion au contrat. Par ailleurs, la sphère de protection est conditionnée par des limites d'âge, selon le type de

garantie, la couverture cesse lorsque l'adhérent atteint un certain âge figurant dans les conditions générales du contrat.

I.3. Formalités Médicales :

Afin d'éviter un risque d'anti sélection et d'assurer une meilleure mutualisation, l'assurance exige à l'assuré le remplissage d'un questionnaire médical décrivant son état de santé et permettant ainsi à l'assureur de mieux apprécier le risque qui prendra à sa charge.

Au vu des réponses communiquées, l'assureur se réserve le droit de demander un examen médical complémentaire, d'accepter, ou de refuser l'adhésion. Cette dernière situation correspond généralement aux risques jugés supérieurs à la normale, c'est-à-dire aux personnes dont l'état de santé est jugé insatisfaisant.

I.4. Quelques produits d'assurance emprunteur de la MV :

Ci-dessous quelques produits d'assurance emprunteur, classés selon leurs prestations garanties et leur catégorie :

Tableau 1: Quelques caractéristiques des produits d'ADE de la MV

Produit	Catégorie	Prestation	Caractéristiques
1	Crédit de consommation	Décès/IPT	Petits montants
2			
3	Crédit immobilier et autres emprunts	Décès/IAD	Grands montants
4			

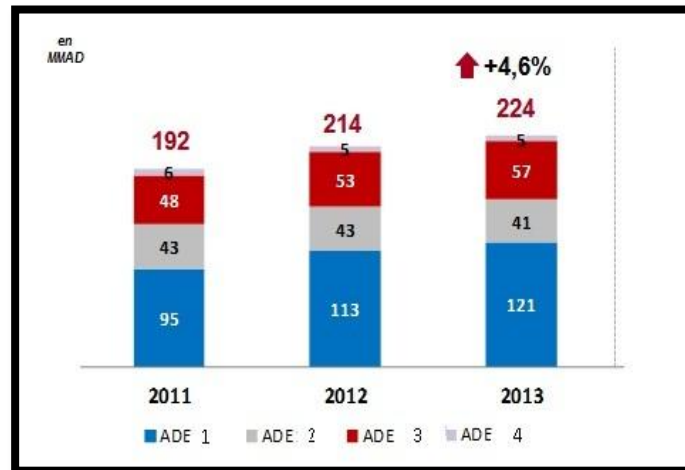
Les produits 1 et 2 sont des contrats décès emprunteur liés aux crédits de consommation. Ce type de crédit est généralement caractérisé par la faiblesse des montants empruntés, chose qui implique une faible prime réclamée par l'assureur. Cependant, vu le nombre considérable des contrats qui se souscrivent, cette garantie génèrent un chiffre d'affaire non négligeable pour les compagnies. D'un autre côté, un grand nombre de contrats souscrits signifie un engagement plus grand de l'assureur et surtout un risque d'un dérapage de sinistralité marqué par une très forte fréquence.

En revanche, les produits 3 et 4 se rapportent à des crédits immobiliers et à d'autres emprunts mettant en jeux des montants importants. Le nombre de contrat souscrit est certes moins important comparé aux deux premiers produits, mais l'exposition au risque de

l'assureur peut s'avérer très dangereuse surtout en cas de dérapage de sinistralité touchant la sévérité.

Ci-dessous, le chiffre d'affaire des contrats d'assurance décès emprunteur de la MV depuis l'année 2011.

Figure 9: Chiffre d'affaire des contrats d'ADE de la MV depuis 2011



Source : La Marocaine Vie

D'après le graphe ci-dessus, les contrats d'ADE ont enregistré une évolution de l'ordre de 4.6 points entre l'année 2012 et l'année 2013 en termes de chiffre d'affaire.

Par ailleurs, nous remarquons que les contrats d'ADE liés aux crédits à la consommation constituent la part majoritaire quant à la formation du chiffre d'affaire avec une contribution à hauteur de 162 millions de dirhams.

II. Programme de réassurance de la MV :

Les traités de réassurance sur lesquels s'est penchée notre étude sont au nombre de deux. Ils couvrent principalement les deux catégories des produits expliquées dans le paragraphe précédent. Le tableau ci-dessous présente les caractéristiques de ces traités dans leur état actuel :

Tableau 2: Traités actuels de la MV couvrant le portefeuille ADE

N° Traité	Type traité	Branche	Catégorie	Priorité	Portée
1	XS	Décès	Crédit de consommation	100 000,00	1 800 000,00
2	XS	Décès	Crédit immobilier et autres	300 000,00	11 700 000,00

Source : la Marocaine Vie Assurance

Commentaires :

Les traités 1 et 2 couvrent des produits se rapportant aux contrats d'assurance emprunteur que ce soit des crédits immobiliers ou à la consommation.

Comme premier constat, le portefeuille emprunteur est par nature caractérisé par son hétérogénéité du fait de la dispersion des montants empruntés par les différents assurés. Un traité en XS s'avère donc très adapté à ce type de contrat en vue d'écarter les grands sinistres et de plafonner les engagements de l'assureur .

Bien que les produits concernés par les deux traités offrent à la base une garantie presque similaire, le fait de ne pas les grouper en un seul traité peut être justifié par l'ordre de grandeur des montants empruntés, généralement faible pour les crédits de consommation comparé à ceux du prêt immobilier ou autres. Cela est d'ailleurs confirmé par l'ordre de la priorité et portée qui est relativement plus grande dans le traité 2 (3 00000 pour le traité N°2 contre 100000 pour le traité N°1)

II.5. Quelques données statistiques :

En se basant sur un historique des sinistres liés aux différents contrats se rapportant aux deux traités des six dernières années, nous obtenons les statistiques suivantes :

Tableau 3: Statistiques du coût individuel des sinistres par traité

Statistiques	Traité 1	Traité 2
Min	350,21	336,85
Max	777 677,74	16 698 529,50
Moyenne	52 488,39	114 098,88
Ecart type	68 448,26	552 451,26

Les statistiques obtenues montrent clairement la forte volatilité de la charge sinistre des portefeuilles couverts par les traités N°1 et N°2. Ceci est expliqué par l'hétérogénéité du portefeuille des produits assurance emprunteur.

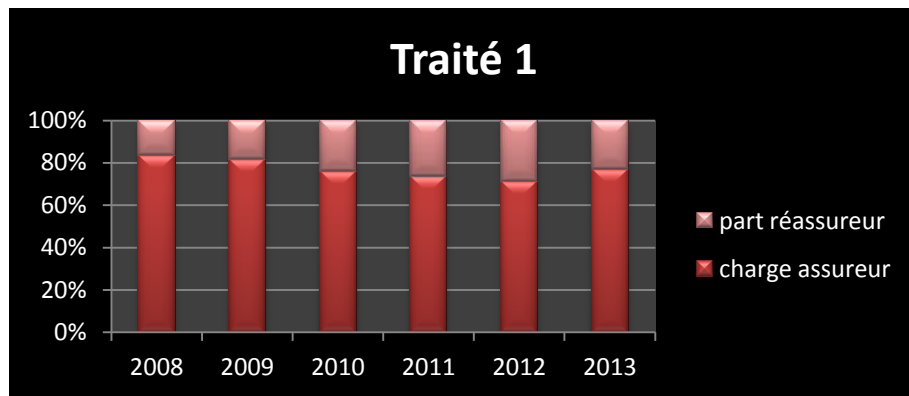
Par ailleurs, les coûts moyens du sinistre individuel représentent 52% et 32% de la franchise respectivement du traité 1 et du traité 2. En tenant compte des écarts types qui sont assez grands, nous pouvons prévoir que les tranches de l'XS sont travaillantes, d'où l'implication du réassureur dans le remboursement d'une partie des charges.

Pour le traité 2, le montant de la charge maximale atteint une valeur de 16 698 529.5 ; c'est un sinistre exceptionnel dépassant même le plafond fixé par le traité concerné. Sans l'intervention du réassureur, qui indemnise un montant à hauteur de 117 00 000, l'assureur serait amené à régler seul ce sinistre, chose qui nuira sans aucun doute à son résultat technique.

II.6. Part de l'assureur et du réassureur dans l'indemnisation des sinistres :

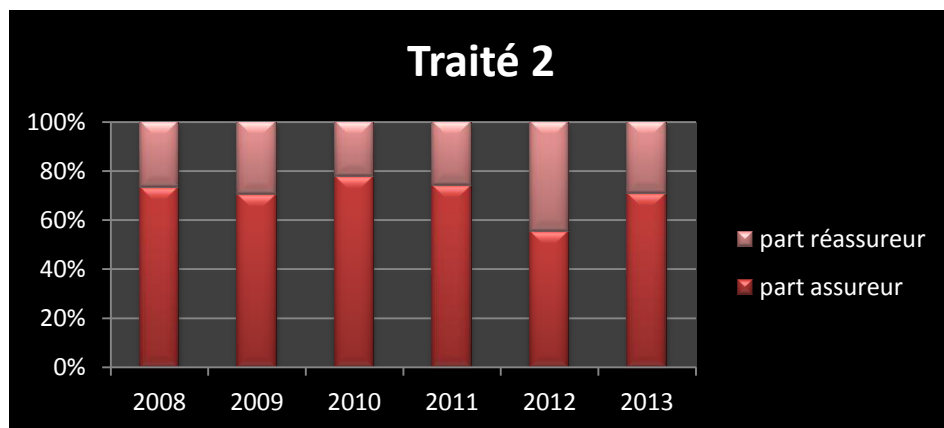
Afin de mieux apprécier le rôle du réassureur, nous proposons de voir la part de ce dernier dans l'indemnisation des sinistres depuis l'année 2008 :

Figure 10: Part de l'assureur et du réassureur dans l'indemnisation des sinistres pour le traité 1



Nous remarquons que la part du réassureur dans l'indemnisation des sinistres pour le traité 1 a connu une évolution au fil des années. Etant à peine de l'ordre de 18% en 2008, celle-ci s'est constamment élargie pour osciller autour des 25% durant les dernières années.

Figure 11: Part de l'assureur et du réassureur dans l'indemnisation des sinistres pour le traité 2



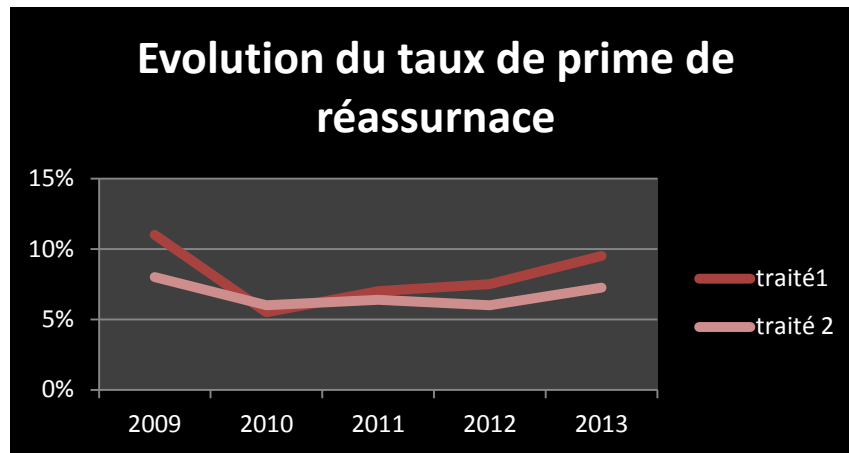
Le graphe ci-dessus montre clairement la part importante supportée par le réassureur dans l'indemnisation des sinistres se rapportant au traité 2. En effet, cette part oscille en moyenne autour des 30%. Comme l'année 2012 a été marquée par le sinistre exceptionnel dépassant la limite du traité, la part du réassureur a pu franchir les 50% durant cette même année.

Suite à l'analyse de ces deux graphiques, nous pouvons conclure, que pour le cas des deux traités, le réassureur a joué un rôle considérable en déchargeant l'assureur d'une part non négligeable dans l'indemnisation de ses sinistres.

II.7. Evolution du taux de primes :

Le graphe ci-dessous donne l'évolution du taux de prime perçu par le réassureur depuis l'année 2009.

Figure 12: Evolution du taux de prime de réassurance depuis l'année 2009



Nous remarquons que le taux de prime varie constamment d'année en année, en baisse ou en hausse. En effet, lorsqu'une année connaît une sinistralité importante, le taux de prime exigé par le réassureur augmente pour l'année qui suit. Par exemple, pour le cas du traité 2, l'intervention du réassureur a été remarquable pour l'année 2012, du coup le réassureur a réclamé un taux de prime à hauteur de 7,25% au titre de l'année 2013. Soit une augmentation de 1,25 point par rapport à l'année précédente.

II.8. Amélioration de quelques données comptables après réassurance

L'objet de ce paragraphe est de voir l'impact de la réassurance dans l'amélioration du ratio S/P et du résultat technique des produits concernés par notre étude.

Tableau 4: Ratio S/P et résultat technique avant réassurance

Situation		Sans réassurance		
Produit		1 et 2		3 et 4
Année	S/P	Résultat	S/P	Résultat
2011	46%	58 116 978,19	20%	80 058 847,71
2012	50%	59 277 951,69	37%	64 003 349,64
2013	48%	64 905 796,46	30%	72 825 780,96

Dans une situation sans réassurance, nous remarquons que la compagnie affiche des résultats en évolution pour les produits se rapportant au traité N°1. En revanche, pour les produits 2 et 3, le résultat est fort volatil puisqu'il passe de 80 058 848 DH en 2011 à 64 003 350 DH en 2012. Soit une baisse de 16 055 498 DH. Par ailleurs, les ratios S/P prennent en moyenne une valeur de 48% et 29% respectivement pour les contrats de consommation et les contrats d'assurance crédits immobiliers.

Dans ce qui suit, nous reprendrons le même tableau que nous venons d'analyser mais cette fois en calculant le S/P et le résultat après cession.

Tableau 5: Ratio S/P et résultat technique après réassurance

Situation		Avec réassurance		
Produit		Crédit consommation (1+2)		Crédit immobilier et autres (3+4)
Année	S/P	Résultat	S/P	Résultat
2011	41%	51 947 517,56	17%	74 012 580,17
2012	43%	59 180 187,69	12%	77 074 275,00
2013	42%	63 339 274,32	23%	74 891 407,95

Le ratio S/P des différents produits étudiés s'est amélioré en enregistrant une baisse à hauteur de 6% et 12% respectivement pour les contrats se rapportant au traité 1 et au traité 2.

D'un autre côté le résultat a légèrement baissé, en moyenne, pour le cas des produits 1 et 2 en passant de 60 766 908 DH à 58 155 659 DH, soit une baisse de 2 611 248 DH. Parallèlement à cela, les produits 3 et 4 couverts par le traité 2 ont connu une amélioration à la fois au niveau du résultat mais surtout au niveau de la volatilité. En effet l'écart type du

résultat de cette catégorie est passé de 8 040 849,54 DH à 1 576 452,87 DH, soit une baisse de 6 464 396,66 DH.

Suite à ses conclusions, nous pouvons dire que le recours à la réassurance permet de stabiliser le résultat mais également d'améliorer le S/P.

Chapitre 3 : Tarification des traités en XS

*Dans ce chapitre, nous présenterons quelques méthodes de tarification des traités en XS. Il s'agit de la méthode déterministe appelée *Burning Cost* et une autre probabiliste basée sur la détermination des lois de la fréquence et Sévérité.*

Pour cela, nous commencerons tout d'abord par expliquer l'objectif de la tarification, ses principes de base, la particularité de chaque traité pour enfin passer à l'appliquer à notre portefeuille.

Dans cette partie, nous nous intéressons à présenter quelques méthodes de tarification en réassurance non proportionnelle, en particulier le traité XS.

Pour cela, nous commencerons tout d'abord par expliquer l'objectif de la tarification, ses principes de bases, la particularité de chaque méthode avant de passer à l'appliquer à notre portefeuille.

I. Objectif de la tarification :

Avant toute souscription, l'assureur est amené à faire sa propre tarification afin d'apporter son propre jugement vis-à-vis de l'acceptation ou non d'un éventuel traité.

En effet, cette opération lui permettra d'apprécier les coûts engendrés par le contrat et d'évaluer dans quelle mesure ce dernier lui apportera des résultats équilibrés compte tenu du tarif qu'elle devrait céder. Enfin, la tarification donnera la possibilité à l'assureur de négocier les tarifs en cas de divergences significatives des résultats de cotation apportée par chacune des parties.

II. Composantes de la prime :

Comme pour le cas de l'assurance, la prime pure de réassurance est calculée sur la base d'une espérance des engagements futurs du réassureur, conditionnés par les niveaux de franchise et portées définis dans le traité.

Toutefois le réassureur majore la prime pure par des chargements afin de faire face aux éventuels écarts de sinistralités pouvant nuire à son résultat.

Ainsi la prime de risque est ventilée de la manière suivante :

$$\textit{Prime de risque} = \textit{Prime pure} + \textit{chargement de sécurité}$$

S'ajoute à cette prime de risque d'autres chargements destinés à couvrir divers frais (par exemple les frais de gestion et de courtage) pour former la prime commerciale.

Ainsi, nous avons :

$$\textit{Prime commerciale} = \textit{Prime de risque} + \textit{chargements divers (gestion, courtage..)}$$

III. La mise en situation « As If » :

Afin de pouvoir fixer la juste valeur du tarif, il serait d'abord nécessaire d'approcher au mieux le comportement du portefeuille. Cela ne serait évident sans l'observation de la sinistralité passée, c'est-à-dire sans disposer d'un historique sinistre.

A vrai dire, la détermination de la prime se basera sur cet historique sinistre, dans une logique qui présume que la sinistralité future est expliquée par celle du passé.

Cependant, la donnée historique ne peut être utilisée dans son état 'brut' sans pour autant lui apporter des corrections qui visent à l'accommoder aux conditions économiques de l'année de cotation.

Cette opération s'appelle mise en situation « As If » et consiste à :

- Actualiser les données historiques en vue de gommer l'effet inflationniste causé par l'érosion monétaire ;
- Redresser l'échantillon statistique pour parvenir à former un portefeuille homogène en mesure de capter l'évolution du profil de risque. Il s'agit notamment des capitaux sous risques, de la politique de souscription, de la sélection des risques...
- Revaloriser l'historique pour tenir compte du nouvel environnement économique ou encore juridique (par exemple le cas de mise en place d'une nouvelle jurisprudence ou d'existence d'une sur inflation).

Dans ce qui suit, nous tâcherons de présenter deux méthodes de tarification. Une basée sur l'expérience appelée Méthode Burning Cost et une autre probabiliste s'appuyant sur un modèle aléatoire.

IV. Méthode Burning Cost

Appelée aussi méthode statique, la méthode Burning Cost repose sur l'exploitation des données d'expérience, plus exactement la sinistralité observée dans le passé.

IV.1. Principe

Concrètement, la méthode consiste à calculer les montants individuels à charge du réassureur en appliquant les bornes du traité aux sinistres de base revalorisés. Ensuite, ces montants sont sommés selon chaque année d'expérience pour déduire des taux annuels et ce

en divisant la charge annuelle de l'XS sur l'assiette de prime revalorisée de chaque année d'expérience. Enfin, en appliquant la moyenne sur les taux obtenus, on déduit le taux Burning Cost que l'on multipliera par l'assiette de prime de l'année de cotation afin de dégager la prime pure.

IV.2. Formalisme de la méthode :

Notations :

Soit l'excédent de sinistre p (portée) XS f (franchise)

On désigne par :

- $X_i^{jAs\ if}$: Le montant « as if » du i -ème sinistre se rapportant à l'année j
- n^j : Le nombre de sinistres observés durant l'année j
- C^{jReass} : Montant global « as if » supporté par le réassureur au cours de l'année j au terme de l'XS

On a :

$$C^{jReass} = \sum_{i=1}^{n^j} \min(\max(0, X_i^{jAs\ if} - f), p)$$

Si on note :

- a_j : L'assiette de prime « as if » relative à l'année j
- s : Le nombre d'années d'expériences utilisées

Le taux Burning Cost pur est donné par la formule suivante :

$$BC = \frac{1}{s} \sum_{j=1}^s \frac{C^{jReass}}{a_j}$$

D'après cette formule, nous pouvons remarquer que le taux BC est formé sur la base d'une moyenne de ratios S/P dont les composantes proviennent de sources croisées : d'une part le S qui représente les sinistres à charge du réassureur, d'une autre part le dénominateur qui contient les primes perçues par la cédante.

En notant $a^{\text{estimée}}$ l'assiette de prime estimée pour l'année à coter, l'expression de la prime pure notée PP est calculée comme suit :

$$PP = BC * a^{\text{estimée}}$$
$$PP = \frac{1}{s} \sum_{j=1}^s \frac{a^{\text{estimée}}}{a_j} * C_j^{\text{Reass}}$$

La prime pure correspond donc à la moyenne des charges « as if » supportée par le réassureur, pondérée par un indice de variations d'assiettes de primes reflétant le changement du comportement du portefeuille.

IV.3. Avantage et limite de la méthode :

La méthode Burning Cost présente l'avantage d'être simple et facile à appliquer. Comme elle se base sur les données d'expérience, elle fournit un taux fiable reflétant le comportement de la sinistralité passé surtout lorsque la tranche est travaillante, c'est-à-dire lorsqu'un grand nombre de sinistres traverse la tranche.

Cependant les inconvénients de la méthode sont liés aux hypothèses sous-jacentes sur lesquelles celle-ci est fondée, entre autres :

- Elle suppose la régularité de l'historique sinistre, chose qui n'est acceptable que lorsque la politique de souscription est stable ;
- Elle ne permet pas de coter les tranches non travaillantes, c'est-à-dire qui n'ont jamais été historiquement traversées par des sinistres ;
- Elle est peu adaptée aux expositions à faible fréquence mais à forte sévérité.

IV.4. Application :

Comme la méthode Burning Cost se base sur les données du passé, nous aurons naturellement besoin d'un historique sinistre se rapportant aux produits couverts par chaque traité ainsi que des assiettes de primes de chaque année d'expérience.

Comme cas pratique, nous avons choisi de coter le traité N°1. La même méthodologie serait toutefois valable pour le traitement de l'autre traité.

IV.4.1. Description et traitement de la base :

La base de données sinistre dont nous avons disposé date de l'année 2008, elle est dotée des informations suivantes :

- Des informations relatives à l'assuré : Nom et prénom, date de naissance, cause du sinistre (décès ou invalidité)
- Des informations relatives au sinistre : Date de survenance, date de déclaration, date de règlement, montant du sinistre, situation (régulé, rejeté ou instance) ainsi que la catégorie du produit sinistré.

La première opération à faire consiste à éliminer les rejets qui représentent des sinistres non pris en charge par l'assureur. Comme la couverture de la tranche s'applique sur le cumul des polices sinistrées pour chaque adhérent, il serait donc nécessaire comme deuxième étape d'additionner les montants de l'ensemble des contrats sinistrés liés à chaque assuré.

Cependant la principale difficulté rencontrée lors de cette opération est due à l'absence d'un identifiant fiable pouvant représenter une clé sur laquelle se basera ledit regroupement.

En effet, les seules données disponibles pouvant différenciées entre les assurés sont le nom et prénom. Il est à noter que ces deux informations sont saisies sur un même champ et présentent par conséquent, comme clé de regroupement, une source d'imprécision et d'erreur du fait des raisons suivantes :

- Erreur de saisies : Absence d'espace entre nom et prénom ;
- Apparition de la civilité devant le nom de certaines personnes ;
- Possibilité d'existence de personne ayant le même nom et prénom.

Afin de minimiser les imprécisions liées au regroupement, nous avons procédé à un nettoyage consistant à unifier la manière dont est saisi le nom et prénom. Pour parvenir à cela, nous avons éliminé tous les espaces ainsi que les différentes expressions de civilité conventionnelles (MR, MME, FEU...).

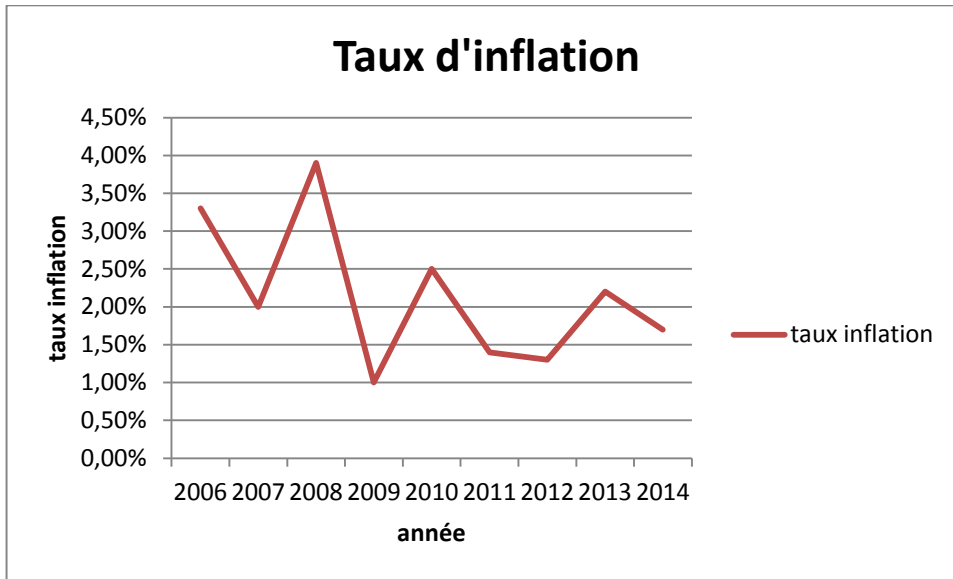
A titre d'illustration, nous allons considérer un assuré de nom N et de prénom P. Dans notre base de données, le nom de cette personne peut éventuellement s'écrire sous différentes formes : *NP* ou *NP OU MR NP* ou *FEU MR NP*. En ayant recours au nettoyage précédemment expliqué, nous ne garderons que la première forme d'écriture *NP* et par conséquent le regroupement sera plus accessible.

IV.4.2. Actualisation des données :

Pour que les données soient comparables entre elles quel que soit leur année de survenance, nous procéderons à une actualisation de la charge sinistre ainsi que de l'assiette des primes et ce en se basant sur l'indice d'inflation.

Ci- dessous, le graphe du taux d'inflation depuis l'année 2006

Figure 13: Graphe du taux d'inflation



Source : Données de la MV

En se basant sur les taux d'inflations représentés dans le graphe ci-dessus, nous revalorisons chaque cumul de sinistre par tête X_i^j de la manière suivante :

$$X_i^{j^{As\ if}} = X_i^j * \prod_{K=j}^n (1 + r_k)$$

Avec :

- n : L'année de cotation (2014 pour notre cas)
- r_k L'indice d'inflation de l'année k

Remarque : L'actualisation de l'assiette de prime se fait de la même manière que les montants des sinistres.

IV.4.3. Etape du calcul et résultats :

Pour chaque montant As if, nous calculons la part prise en charge par le réassureur en appliquant les bornes du traité1 : (1800000 XS 100000)

Figure 14: Capture Excel explicatif de la démarche

Annee de survenan	Montant As if	charge assu	charge reass
2009	541180,776	100000	441180,776
2011	210577,1724	100000	110577,1724
2012	330800,9809	100000	230800,9809
2008	238538,5589	100000	138538,5589
2009	217061,0989	100000	117061,0989
2009	266610,4559	100000	166610,4559
2011	296285,5877	100000	196285,5877

Ensuite, pour chaque année de survenance, nous calculons la somme globale prise en charge par le réassureur :

$$C^{jReass} = \sum_{i=1}^{n^j} \min(\max(0, X_i^{jAs i} - f), p)$$

Une fois, cette opération effectuée, il ne reste qu'à diviser ces montants annuels à charge du réassureur par l'assiette des primes pour chaque année de survenance, faire une moyenne de ces rapports pour dégager le taux Burning Cost.

En appliquant cette méthode pour différentes combinaisons de portée et priorité du traité 1, nous obtenons les résultats suivants :

Tableau 6: Taux de prime par la méthode BC pour différentes combinaisons de franchises et portées pour le traité 1

	200 000	700 000	1 200 000	1 800 000
65 000,00	18,05%	19,99%	20,00%	20,00%
70 000,00	16,92%	18,77%	18,78%	18,78%
80 000,00	14,88%	16,55%	16,57%	16,57%
90 000,00	13,16%	14,68%	14,69%	14,69%
100 000,00	11,63%	13,02%	13,03%	13,03%
110 000,00	10,30%	11,57%	11,57%	11,57%
120 000,00	9,10%	10,25%	10,25%	10,25%
130 000,00	8,04%	9,08%	9,08%	9,08%
140 000,00	7,15%	8,08%	8,08%	8,08%
150 000,00	6,38%	7,20%	7,20%	7,20%

Nous remarquons que le taux Burning Cost diminue avec l'augmentation de la priorité, ce qui est naturel car plus celle-ci est grande, l'assureur cède moins, c'est-à-dire garde plus de risque à sa charge. Le réassureur quant à lui n'aura à indemniser que peu de sinistres et par conséquent le tarif diminuera.

D'un autre côté, pour un niveau de franchise donnée, nous remarquons que le tarif augmente légèrement avec la priorité surtout pour les petites franchises. Cela est expliqué par le fait qu'une portée large implique plus d'intervention du réassureur et donc plus d'indemnisation de sinistres par ce dernier qui se traduira par un tarif plus grand.

Cependant, le tableau montre qu'à partir d'un certain niveau de portée et priorité, le tarif stagne. En effet, la méthode Burning Cost est basée sur l'exploitation des données d'expérience, du coup, au-delà d'un certain seuil, la charge du réassureur ne sera plus influencée par le niveau de la portée du moment que la sinistralité passée est majorée et ne traversera pratiquement jamais la portée si celle-ci est trop grande.

Pour le cas des bornes actuelles des deux traités, nous obtenons le tableau suivant :

Tableau 7: Tarifs obtenus par la méthode BC pour le cas des traités actuels de la MV

	Traité 1	Traité 2
Taux BC	13,03%	8,81%
Assiette de prime estimée pour l'année 2014	115 000 000	99 800 000
PP	14 980 609,74	8 792 380,00
Taux de chargement	15%	15%
Prime de risque	17 227 701,21	10 111 237,00

V. Méthode probabiliste :

V.5. Principe :

Le principe de la tarification par la méthode probabiliste consiste à modéliser le nombre de sinistres annuel et le coût de chaque sinistre en ne tenant compte que du comportement de la sinistralité à partir d'un certain seuil S_0 .

En effet, dans un traité en XS le réassureur ne dispose pas de toutes la base sinistre mais uniquement des montants légèrement en dessous ou supérieurs à la franchise.

De ce fait, la modélisation ne se fera pas de manière complète mais de manière tronquée.

Une fois la loi de la fréquence et sévérité connues, la prime pure est déterminée par le biais de l'espérance mathématique de l'engagement du réassureur selon les conditions du traité.

V.6. Formalisme :

Considérons un traité p XS f

Si on note :

- $N_{/S_0}$: Le nombre de sinistres annuel As if au-dessus du seuil S_0 ;
- X_{i/S_0} : Le coût As if de l'i-ème sinistre a- dessus du seuil ;
- X_i^{reass} : Le cout As if à charge du réassureur relatif à l'i-ème sinistre ;
- S^{reass} : Charge totale annuelle du réassureur.

Nous avons :

$$X_i^{reass} = \min(\max(0, X_{i/s_0} - f), p)$$

$$S^{reass} = \sum_{i=1}^{N/s_0} X_i^{reass}$$

Comme la prime pure, telle qu'elle a été définie précédemment, est l'espérance de l'engagement futur du réassureur, son expression est donnée comme suit :

$$PP = E(S^{reass})$$

En supposant l'indépendance entre N et X_i et que les montants des sinistres sont indépendants et identiquement distribués, on peut démontrer que la prime pure s'exprime comme suit :

$$PP = E(N/s_0) * E(X_i^{reass})$$

V.7. Avantages et limites de la méthode :

Parmi les avantages de la méthode probabiliste est qu'elle permet de tenir compte de l'historique tout en ayant une approche paramétrique des risques, chose qui permet d'effectuer des tests de sensibilités sur les paramètres des distributions.

Parmi les limites de la méthode :

- Elle suppose l'indépendance entre le nombre de sinistres et leur montant sachant que cette hypothèse n'est pas toujours vérifiée dans la réalité ;
- Dans certains cas, les actuaires sont confrontés au problème de manque de données historiques, chose qui peut nuire à la crédibilité des résultats de la modélisation.

VI. Modélisation de la fréquence et sévérité:

Dans ce paragraphe, l'accent est mis sur les différentes techniques qui aident à choisir la loi ajustant la fréquence et la sévérité, ceci avec un rappel théorique des caractéristiques de chaque distribution, des méthodes d'estimations des paramètres sans oublier les tests statistiques, utiles pour trancher quant au choix du modèle.

VI.8. Détermination de la loi de fréquence :

En réassurance, l'horizon d'observation des données est généralement réduit à quelques années. Par conséquent, la taille de l'échantillon observé du nombre annuel des sinistres est petite. Dans ce cas, les lois les plus utilisées pour modéliser les événements rares sont la loi de poisson et la loi binomiale négative que nous allons présenter dans ce qui suit :

VI.8.1. Loi de poisson :

En actuariat, la loi de poisson, appelée aussi loi des événements rares, est souvent utilisée pour ajuster la loi du nombre de sinistres. En réassurance, elle apparaît appropriée pour modéliser la survenance d'événements peu probables dans un portefeuille contenant plusieurs polices.

Parmi ses particularités, l'égalité entre son espérance et sa variance donnant lieu à la propriété d'équi-dispersion.

En résumé, une loi de poisson de paramètre λ possède les caractéristiques suivantes :

$$\text{Loi : } P(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

$$\text{Espérance : } E(X) = \lambda$$

$$\text{Variance : } \text{VAR}(X) = \sigma^2 = \lambda$$

VI.8.2. Loi Binomiale négative :

La loi binomiale négative appartient à la classe des lois de poisson mélange. Il s'agit de lois captant l'hétérogénéité du portefeuille, d'où une remise en question de la propriété de l'équi-dispersion qui suppose que chaque individu est soumis à une fréquence Poisson de même moyenne.

Une loi binomiale négative de paramètre (r, p) (avec $r \in \mathbb{R}$ et $p \in [0,1]$) possède les caractéristiques suivantes :

$$\text{Loi : } P(X = k) = \frac{\Gamma(k+r)}{\Gamma(r)k!} p^r (1-p)^k \text{ avec } \Gamma: z \rightarrow \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt$$

$$\text{Ou de manière équivalente : } P(X = k) = \frac{\Gamma(k+\lambda \frac{p}{1-p})}{\Gamma(\lambda \frac{p}{1-p})k!} p^{\lambda \frac{p}{1-p}} (1-p)^k \text{ avec : } r = \lambda \frac{p}{1-p}$$

$$\text{Espérance : } E(X) = r * \frac{(1-p)}{p} = \lambda$$

$$\text{Variance : } \text{VAR}(X) = \sigma^2 = r * \frac{(1-p)^2}{p}$$

VI.9. Détermination de la loi de sévérité :

Le choix de la distribution du montant d'un sinistre est crucial dans la modélisation du risque supporté par l'assureur.

En actuariat, pour modéliser le comportement aléatoire de la sévérité, on a généralement recours à une loi continue avec un support appartenant à \mathbb{R}^+ .

En réassurance, les lois usuelles pour la modélisation de la sévérité sont les lois de valeurs extrêmes. Il s'agit notamment de la loi de Pareto, Weibull ou encore Log-normale. Le recours à ces lois est justifié par le fait que ces derniers disposent d'une queue de distribution lourde, en mesure de capter l'existence d'événements rares et coûteux. Comme nous l'avons précédemment signalé, la cédante communique au réassureur uniquement les montants dépassant un certain seuil. L'enjeu est donc de modéliser la charge du réassureur à partir d'un historique partiel revalorisé, d'où l'usage des lois tronquées.

VI.9.1. Rappel sur les lois tronquées :

Exemple : loi exponentielle

Soit X une variable aléatoire continue prenant des valeurs dans $[x_0; +\infty[$

X suit une loi exponentielle tronquée ou translatée en X_0 , $\xi(x_0, \beta)$, si $Y = X - x_0$ suit une exponentielle $\xi(\beta)$.

Dans la suite, nous présenterons quelques lois susceptibles de modéliser le coût du sinistre de telle manière que ceux-ci prendront des valeurs dans $[x_0; +\infty[$

1) La loi Log-normal translatée :

X suit une Log-normal translatée $\text{LogN}(x_0, m, \sigma)$, si $Y = \frac{\log(X-x_0)-\mu}{\sigma}$ suit une loi normale centrée réduite.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\exp\left(-1/2\left(\frac{\ln(x-x_0)-m}{\sigma}\right)^2\right)}{(x-x_0)\sigma\sqrt{2\pi}} & \text{si } x \geq x_0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

2) *La loi de Weibull tradlatée :*

Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Weibull tradlatée

Soit f_X la densité de X :

$$f_X(x) = \begin{cases} \alpha\lambda(x-x_0)^{\alpha-1}\exp(-\lambda(x-x_0)^\alpha) & \text{si } x > x_0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

3) *La loi exponentielle tradlatée :*

X suit une loi exponentielle $\xi(x_0, \beta)$ si $Y = X - x_0$ suit une loi exponentielle $\xi(\beta)$

Soit f_X la densité de X :

$$f_X(x) = \begin{cases} \beta \exp(-\beta(x-x_0)) & \text{si } x > x_0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

4) *La loi de Pareto tradlatée:*

Soit X une variable aléatoire suivant une loi Pareto $PA(x_0, \alpha)$

Soit f_X la densité de X :

$$f_X(x) = \begin{cases} \alpha x_0 x^{-\alpha-1} & \text{si } x > x_0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

5) *Loi Gamma tradlatée :*

X suit une loi Gamma $\Gamma(x_0, \alpha, \beta)$ si $Y = X - x_0$ suit une loi Gamma $\Gamma(\alpha, \beta)$

Soit f_X la densité de X :

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} (x-x_0)^{\alpha-1} \exp\left(-\frac{1}{\beta}(x-x_0)\right) & \text{si } x > x_0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

VI.10. Estimation des paramètres

Pour l'estimation paramétrique, nous allons nous intéresser à deux méthodes considérées comme les plus utilisées en statistique classique, il s'agit de la méthode des moments et la méthode du maximum de vraisemblance.

VI.10.1. Méthode des moments :

Soit un échantillon X_1, \dots, X_n . L'estimateur de θ obtenu par la méthode des moments est la solution $\hat{\theta}$ du système :

$$E(X^k) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^k, k = 1 \dots p \text{ où } p = \dim(\theta)$$

Les paramètres obtenus par cette méthode sont donc choisis en égalisant les moments théoriques et observés.

VI.10.2. Méthode de Maximum de vraisemblance :

Soient X_1, \dots, X_n n variable aléatoire indépendantes et identiquement distribuées de fonction de densité $f(x, \theta)$. On définit la fonction de vraisemblance comme suit :

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i, \theta)$$

L'estimateur du maximum de vraisemblance est défini comme la statistique $\hat{\theta} = T(X_1 \dots X_n)$ telle que :

$$L(\theta^{MV}) = \text{Max}_{\theta} L(\theta)$$

Il s'agit donc de chercher la valeur de θ fonction des observations $(x_1 \dots x_n)$ qui assure la plus grande probabilité d'avoir ces observations.

Dans le cas où la fonction de vraisemblance est continue et deux fois dérivable par rapport au paramètre θ , l'estimateur θ^{MV} n'est autre que la solution du système :

- $\left(\frac{\partial L}{\partial \theta}\right)_{\theta^{MV}} = 0$
- $\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \theta^2}\right)_{\theta^{MV}} < 0$

VI.11. Test d'ajustement :

Afin de choisir la loi qui ajuste au mieux les données, nous utilisons les tests d'hypothèse permettant de prendre une décision au détriment d'une autre.

Concrètement, il s'agit de tester une hypothèse H_0 sur la base d'un échantillon observé en utilisant une statistique T qui mesure l'écart entre les données et l'hypothèse nulle. De ce fait, plus la valeur de T , notée t , est petite, plus on aura tendance à accepter H_0 et vis versa plus la valeur de T est grande, plus l'hypothèse alternative sera favorisée. Une autre façon de voir est de considérer la p-value qui correspond à la probabilité que la statistique T soit supérieur à t sachant H_0 : $p = P(T > t_{/H_0})$.

La règle de décision dépend de la valeur de p et le niveau de signification du test fixé à une valeur α . L'hypothèse nulle H_0 est acceptée si $p \geq \alpha$.

VI.11.1. Cas de la loi de la fréquence :

Pour trancher entre le choix d'une loi Poisson ou Binomiale négative, il est naturel de penser à comparer entre la fréquence et variance empirique des données puisque en cas d'égalité entre ces deux moments, nous pensons directement à l'équi-dispersion qui constitue la caractéristique principale d'une loi Poisson.

Dans ce sens, deux tests d'hypothèses seront analysés : le test de sur-dispersion basé sur la statistique liée à l'indice de dispersion de Fisher et le test du rapport de vraisemblance.

1) Test de sur dispersion

L'hypothèse testée $H_0 : E(N) = V(N)$ Contre $V(N) > E(N)$.

En d'autres termes, l'existence de sur-dispersion ou son absence.

La statistique T pour estimer l'indice de dispersion qui est égale à $\frac{V(N)}{E(N)}$ est :

$$T = \frac{(n-1)\bar{S}^2}{\bar{X}}$$

Avec \bar{X} et \bar{S}^2 respectivement la moyenne et la variance empirique de la loi de fréquence N .

Sous l'hypothèse H_0 , Hoel (1943) a montré que la statistique nT , connue sous le nom d'indice de dispersion de Fisher, est asymptotiquement distribuée comme une loi de khi 2 à $n - 1$ degrés de liberté avec n le nombre d'observations de N .

2) Test du rapport de vraisemblance

Le test de rapport de vraisemblance permet de tester si l'échantillon de N suit une distribution donnée contre une distribution alternative. Dans cette étude, on s'intéressera à tester l'hypothèse suivante :

$$H_0 : N \text{ suit une loi poisson } \text{ vs } H_1 : N \text{ suit une loi binomiale négative}$$

La statistique du rapport de vraisemblance est donnée par : $T = 2(\ln(L_1) - \ln(L_0))$

Avec :

- L_0 : La vraisemblance de la loi de poisson
- L_1 : La vraisemblance de la binomiale négative

La statistique T tend asymptotiquement en loi vers une loi du Khi-deux à un degré de liberté.

VI.11.2. Cas de la loi de sévérité :

Puisqu'il s'agit des lois continues, nous testons l'ajustement par le biais des tests suivants : Kolmogorov – Smirnov et Anderson – Darling.

Ces deux tests d'adéquation, basés sur une comparaison entre la loi empirique et la loi théorique, ne permettent pas de trouver la loi d'une variable aléatoire, mais seulement d'accepter ou de rejeter une hypothèse simple émise a priori.

1) Test de Kolmogorov – Smirnov :

Le test d'ajustement de Kolmogorov – Smirnov est un test non paramétrique basé sur la distance maximale entre une fonction de répartition théorique (entièrement déterminée par les valeurs de ses paramètres) et la fonction de répartition empirique de l'échantillon.

Il permet de tester l'hypothèse H_0 selon laquelle les données observées sont engendrées par une loi de probabilité théorique considérée comme étant un modèle convenable.

Remarque : La loi théorique doit être entièrement spécifiée, c'est-à-dire il ne doit pas y'avoir de paramètres inconnus. Dans notre cas nous estimons les paramètres de la loi à l'aide des estimateurs du maximum de vraisemblance.

Nous considérons ainsi une variable aléatoire X de fonction de répartition F_x , que nous voulons comparer à une fonction de répartition théorique F_0 continue.

Nous testons alors :

$$H_0: F_x(x) = F_0(x) \forall x \text{ Contre } \exists x F_x(x) \neq F_0(x)$$

Soit $\{X_1, X_2 \dots X_n\}$ un n – échantillon de X , la fonction de répartition empirique F_n associée à cet échantillon est :

$$F_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 1_{]-\infty, x]}(X_i)$$

$F_n(x)$: la proportion des observations dont la valeur est inférieure ou égale à x .

L'écart entre les valeurs observées et les valeurs théoriques du modèle déduites de la fonction de répartition F_0 peut donc être mesuré par la variable aléatoire (statistique du test):

$$D_n = \sup_{x \in x} |F_n(x) - F_0(x)|$$

2) Test d'Anderson – Darling :

Le test d'Anderson-Darling est basé sur le calcul d'une distance entre la fonction de distribution empirique et la fonction ajustée définie comme suit :

$$A_n^2 = n * \int_{-\infty}^{+\infty} [F_x(x) - F_0(x)]^2 * \frac{1}{F_0(x) * [1 - F_0(x)]} * dF(x)$$

Bien que le test d'Anderson Darling et le test de Kolmogorov ont la même application, la différence entre eux réside dans le fait que pour le deuxième test seul l'écart maximum entre la distribution empirique et la distribution d'ajustement compte, alors que l'indicateur d'écart du premier test capte mieux l'ensemble des données dans la mesure où toute la somme des écarts intervient. On peut donc déduire que le test de Kolmogorov est beaucoup plus sensible à l'existence de points aberrants dans un échantillon que le test d'Anderson Darling.

VI.12. Application au portefeuille :

En se basant sur les notions théoriques précédemment expliquées, nous allons tenter de modéliser le montant annuel à charge du réassureur nécessaire pour déterminer un tarif par la méthode probabiliste.

Comme cas pratique, nous avons choisi de coter le traité N°1. La même méthodologie serait toutefois applicable pour le traitement des autres traités.

VI.12.1. Modélisation de la sévérité :

Dans ce paragraphe, l'accent est mis sur la modélisation de la sévérité. Pour cela, nous commencerons par choisir le seuil optimal de modélisation en testant différentes lois, nous passerons ensuite aux différentes estimations et tests statistiques nécessaires pour choisir la loi adéquate.

1) Choix du seuil de modélisation

Dans le cadre de l'étude de la Sévérité, nous testons l'adéquation de nos données à un ensemble de lois couramment utilisées en réassurance, à savoir : Log Normale, Pareto, Gamma, Exponentielle et Weibull tout en variant les seuils de modélisation S_0 . En effet S_0 correspond au seuil optimal à partir duquel la courbe estimée sera la mieux adaptée aux données de sinistres, de telle sorte que la troncature ne conserve que les données amenant à la meilleure adéquation. Pour cela, nous prenons comme critère du choix du seuil, la combinaison (*loi, seuil*) qui minimise le plus la distance de Kolmogorov.

Pour chaque traité, nous dressons un tableau composé de diverses combinaisons seuils/lois où nous déterminons la distance de Kolmogorov correspondante.

Voici les résultats obtenus :

Traité 1 :

Tableau 8 :Distance de Kolmogorov pour différentes combinaisons de seuils et lois de sévérité relatives au traité 1

seuil (en milliers)	45	50	55	60	65	70	75
Log Normale	0,052	0,051	0,044	0,036	0,029	0,035	0,04
Pareto	0,946	0,833	0,735	0,669	0,584	0,502	0,54
Exponentielle	0,254	0,236	0,214	0,19	0,165	0,136	0,102
Gamma	pas de convergence						
Weibull	0,111	0,106	0,097	0,086	0,077	0,067	0,055

Traité 2 :

Tableau 9: Distance de Kolmogorov pour différentes combinaisons de seuils et lois de sévérité relatives au traité 2

seuil (en milliers)	150	175	200	225	250
Log Normale	0,049	0,053	0,059	0,073	0,088
Pareto	0,875	0,763	0,645	0,698	0,778
Exponentielle	0,228	0,181	0,132	0,146	0,159
Gamma	pas de convergence				
Weibull	0,243	0,212	0,168	0,077	0,069

D'après les résultats des deux tableaux, on remarque que la loi Log Normale est la plus adaptée pour modéliser la charge du sinistre puisqu'elle minimise la distance de Kolmogorov que ce soit pour le traité 1 ou encore pour le traité 2. En effet pour le traité 1, le seuil optimal est de l'ordre de 65000 tandis que pour le traité 2, le seuil est de 150000.

Dans la suite, nous allons vérifier si l'ajustement par la loi log normal tronquée est effectivement approuvé par les tests statistiques. Mais avant, nous commencerons par estimer les paramètres de la loi Log Normale tronquée.

2) Estimation des paramètres :

Pour estimer les paramètres, nous utilisons la méthode de maximum de vraisemblance.

Rappel: Soit un échantillon X_1, \dots, X_n un échantillon de variable aléatoire suivant une $LogN(x_0, m, \sigma)$, l'estimation de ces paramètres par la méthode de vraisemblance conduit à :

$$\hat{m} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \text{Log}(x_i - x_0)$$

$$\hat{\sigma} = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\text{Log}(x_i - x_0))^2 - \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \text{Log}(x_i - x_0) \right)^2 \right)^{1/2}$$

Tableau 10: Estimation des paramètres de loi de sévérité par la méthode MV pour chaque traité

Traité	Mu	sigma
Traité 1	11,28	0,78
Traité 2	12,39	0,9

3) Validation de l'ajustement de la sévérité par la loi Log Normale tronquée

Avant d'appliquer les tests d'ajustement de ces deux lois à nos données, nous visualisons la qualité de l'ajustement par une méthode graphique basée sur le QQ – plot.

- ◆ L'adéquation graphique QQ-Plot :

Principe :

La méthode QQ – plot, ou graphique quantile – quantile, permet de tester l'adéquation de la loi d'une variable aléatoire à une loi théorique à l'aide d'un graphique comparant les quantiles observés aux quantiles théoriques. La plausibilité de l'ajustement est ainsi fonction de la linéarité de la représentation obtenue. Il est possible de superposer au QQ - plot la 1ère bissectrice qui permettra d'apprécier plus facilement cette linéarité.

Formalisme :

Soit X_1, X_2, \dots, X_n un n échantillon de fonction de répartition F et $X_1 < X_2 < \dots < X_n$ l'échantillon ordonné correspondant.

L'équation du graphique QQ – Plot s'exprime comme suit : $\left\{ X_i, F^{-1} \left(\frac{i}{n+1} \right), i = 1, \dots, n \right\}$

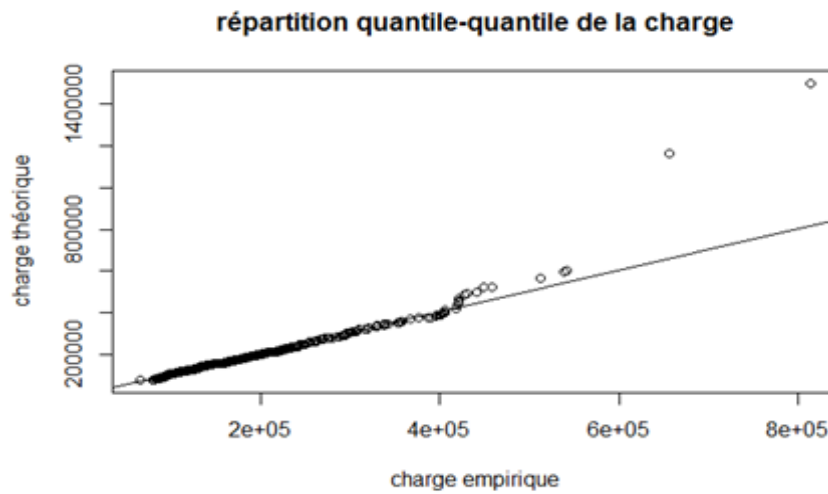
Remarque: Si l'adéquation des X_i à la loi est bonne alors le graphique précédent est une droite.

Application :

Ci-dessous la courbe quantile-quantile appliquée aux deux traités :

QQ-Plot du Traité 1 :

Figure 15: Diagramme Q-Q plot du traité 1

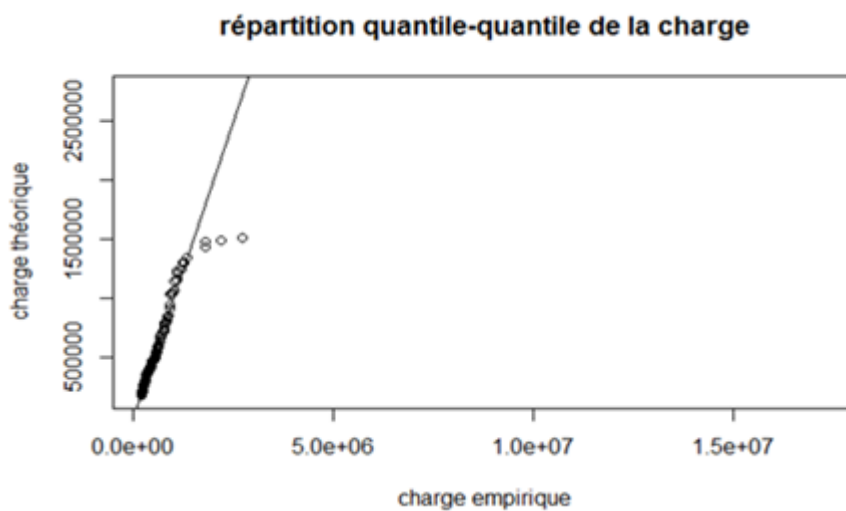


Source : Elaboré par les auteurs, sortie R

En représentant les X_i empiriques en fonction des X_i théoriques on remarque que la plupart des points sont alignés sur la 1ère bissectrice. Par conséquent l'ajustement s'avère visuellement bien. Ce constat doit être validé par les tests d'ajustement qu'on verra juste après.

QQ-Plot du Traité 2 :

Figure 16: Diagramme Q-Q plot du traité 2



De même pour le traité 2, l'ajustement des données empiriques à la loi log normale tronquée de paramètres (150000; 12.39; 0.9) semble visuellement bon.

◆ Tests d'ajustement : Test de Kolmogorov et Test d'Anderson Darling

Pour valider la qualité de l'ajustement, on aura recours aux tests de Kolmogorov ainsi que celui d'Anderson Darling.

En ce qui concerne le test de Kolmogorov, nous rappelons qu'asymptotiquement, pour $\alpha = 5\%$, $C = \frac{1.22}{\sqrt{n}}$ avec C la valeur tabulée et n la taille de l'échantillon. Par ailleurs, on note D_n la statistique de Kolmogorov et on obtient les résultats suivants :

Test de Kolmogorov :

Tableau 11: Test de Kolmogorov pour les 2 traités

Traité	D_n	C	P-value
Traité 1	0,029	0,086	0,063
Traité 2	0,049	0,052	0,075

Au seuil 5%, nous acceptons l'hypothèse nulle sous laquelle :

- La sévérité relative au traité 1 suit une LN(65000; 11.28; 0.78)
- La sévérité relative au traité 1 suit une LN (150000 ; 12.39 ;0.9)

En effet, la p-value obtenue pour chaque cas est inférieure à 0,05 ou encore d'une manière équivalente, D_n est inférieure à la valeur tabulée C.

1.1.1.1.1. Test d'Anderson Darling :

Tableau 12: Test d'Anderson Darling pour les 2 traités

	A	P-Value
Traité 1	0,13	0,075
Traité 2	0,27	0,056

Le test d'Anderson Darling confirme aussi la qualité d'ajustement puisque la p-value associée à chaque test est supérieure à 0,05

VI.12.2. Modélisation de la fréquence

Dans ce paragraphe, nous nous intéressons à chercher le nombre de sinistres annuels par année de survenance dépassant le seuil. Pour ce faire nous nous baserons sur un historique sinistre lié aux différents contrats se rapportant à chaque traité.

Pour avoir un échantillon de nombre de sinistres par année de survenant fiable, celui-ci doit tenir compte des tardifs, c'est-à-dire les sinistres survenus mais non encore déclarés.

1) Estimation des tardifs :

Afin de tenir compte des tardifs, nous aurons recours aux techniques de provisionnement, imposées par la réglementation et destinées à mesurer les engagements restant à honorer par l'assureur.

Pour notre cas, nous allons nous limiter à la méthode Chain Ladder.

◆ Le triangle de Run-off :

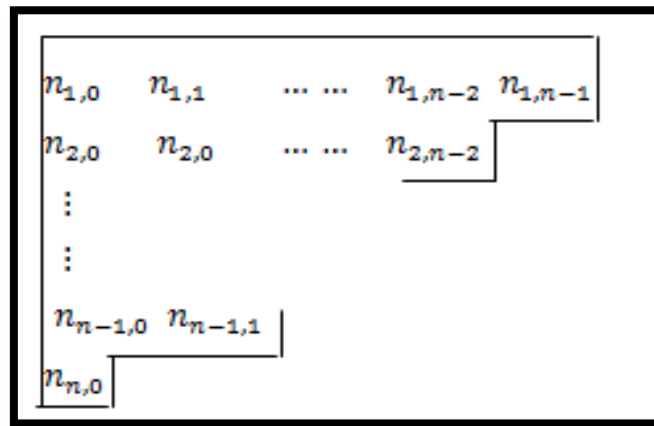
Les méthodes de provisionnement sont toutes basées sur les triangles, reflétant la dynamique des sinistres soit en montant ou en nombre et permettant ainsi d'avoir une vision agrégée de ceux-ci.

On note :

- i : L'indice des années de survenance, $i = 1, \dots, n$
- j : L'indice des années de développement, $j = 0, \dots, n - 1$ avec $j = 0$ signifie que nous commençons nos observations dès la première année de survenance de sinistre.
- $n_{i,j}$: Le nombre de sinistres survenus l'année i et déclarés après j année

En utilisant ces notations, nous pouvons visualiser le développement de la sinistralité par année de survenance à travers le triangle ci-dessous :

Figure 17: Triangle de Run-off



◆ Chain Ladder :

Cette méthode, qui est très facile à appliquer, repose sur l'hypothèse de stabilité dans l'évolution des montants quelle que soit l'année de rattachement (année de survenance dans le cas d'une base sinistres). Selon cette hypothèse le coefficient de passage de l'année de développement j à l'année de développement $j+1$ ne dépend pas de l'année de rattachement.

L'hypothèse de stabilité est traduite formellement par :

$$n_{i,j+1} = \lambda_j * n_{i,j}$$

Par conséquent, nous obtenons un vecteur $(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{n-1})$ des facteurs de développement de taille n .

L'hypothèse implique pour $j = 0, \dots, n - 1$:

$$\frac{n_{1,j+1}}{n_{1,j}} = \dots = \frac{n_{n-j-1,j+1}}{n_{n-j-1,j}} = \lambda_j$$

Ces facteurs appelés coefficient de passage sont estimés comme suit :

$$\hat{\lambda}_j = \frac{\sum_{i=1}^{n-j+1} n_{i,j+1}}{\sum_{i=1}^{n-j+1} n_{i,j}}$$

Le nombre $n_{i,j}$ est alors estimé par l'estimateur de Chain – Ladder suivant :

$$\hat{n}_{i,j} = n_{i,j-1} * \prod_{k=n-i}^{j-1} \hat{\lambda}_k \quad \text{pour } j + i > n$$

◆ Application :

Sur Excel, en se basant sur la base sinistre, nous traçons le triangle de Run-off où les lignes représentent les années de survenance et les colonnes les années de déclaration. A titre d'illustration, nous prenons le cas du traité 1 et nous obtenons le triangle suivant :

Figure 18: Triangle Run Off à remplir

	0	1	2	3	4
2009	54	34	11	1	0
2010	63	54	14	4	
2011	83	89	4		
2012	109	65			
2013	114				

Pour mieux comprendre le mécanisme du triangle, nous proposons de situer le nombre 65 qui figure dans la 4^{ème} ligne. En effet celui-ci désigne que 65 sinistres sont survenus pendant l'année 2012 mais n'ont été déclaré qu'après un an, c'est-à-dire durant l'année 2013.

Nous remarquons aussi qu'à partir de la quatrième année, il n'ya plus de tardifs.

En se basant sur la méthode Chain Ladder, nous calculons les coefficients de passage pour pouvoir compléter la partie jaune du triangle.

Figure 19: Calcul des coefficients de passage

	0	1	2	3	4
2009	54	34	11	1	0
2010	63	54	14	4	
2011	83	89	4		
2012	109	65			
2013	114				
Coeff-passage	0,7831715	0,1638418	0,2	0	

Une fois les coefficients de passage calculés, il ne reste qu'à remplir la partie jaune du triangle qui représente les estimations des tardifs :

Figure 20: Tardifs estimés par la méthode Chai Lader

	0	1	2	3	4
2009	54	34	11	1	0
2010	63	54	14	4	0
2011	83	89	4	0,6553672	0
2012	109	65	10,649718	1,744869	0
2013	114	89,281553	14,628051	2,3966863	0
Coeff	0,7831715	0,1638418	0,2	0	

En sommant, les valeurs obtenues dans chaque ligne, nous obtenons une estimation du nombre de sinistres survenus par année.

2) Mise en situation As If :

Afin de tenir compte des changements d'exposition et pour qu'ils soient représentatifs à l'année de cotation, ces fréquences doivent être revalorisées et mises en situation As IF.

Dans notre cas, la revalorisation se basera sur l'existence d'une relation de proportionnalité entre le nombre de sinistres survenu annuellement et le nombre d'adhérents par exercice, d'où l'expression suivante:

$$n_k^{As\ if} = n_{adh\ annee-cotation} * \frac{n_k}{n_{adhe\ k}}$$

Avec :

- n_k : Nombre de sinistres relatif à l'année k
- $n_k^{As\ if}$: Nombre de sinistres As if
- $n_{adhe\ k}$: Nombre d'adhérents de l'année k

Une fois la formule appliquée, nous obtenons le tableau des fréquences revalorisées, nous présenterons le cas du traité 1 :

Tableau 13 : Nombre de sinistres As If pour les deux traités

Année de survenance	Nombre As if	
	Traité 1	Traité 2
2008	152,96	31
2009	168,16	32
2010	221,94	36
2011	272,46	41
2012	187,63	44
2013	219,44	52

Maintenant que nous avons construit notre vecteur de fréquence As If, l'étape suivante consiste à chercher un modèle qui ajuste bien la distribution de fréquence des sinistres au dessus du seuil.

Comme précédemment expliqué, les lois les plus utilisées pour modéliser la distribution de la variable aléatoire de la fréquence N sont la loi de Poisson et la loi Binomiale Négative.

Nous tâcherons donc dans ce qui suit d'estimer les paramètres relatifs à ces deux lois avant de passer aux tests d'ajustements.

3) Estimation des paramètres :

Pour estimer les paramètres, nous utilisons la méthode de maximum de vraisemblance.

Rappel :

Soit (N_1, N_2, \dots, N_n) un échantillon de variable aléatoire qui suit une loi de poisson alors l'estimateur de maximum de vraisemblance d'une telle loi est donné par :

$$\hat{\lambda} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n N_i$$

Pour le cas de la Binomiale Négative, l'annulation des dérivés partielles du logarithme de la fonction de vraisemblance ne fournit pas des formules closes pour l'estimation des paramètres r et p ce qui nécessite le recours à un algorithme itératif. Pour notre, nous avons utilisé le Logiciel R où il existe des packages dont lesquels ce type d'algorithme est déjà programmé.

Résultat :

Tableau 14: Estimation des paramètres de la fréquence par la méthode du MV

Traité/Loi	Poisson	B-N
Traité 1	$\lambda = 203,66$	$p = 0,13$
Traité 2	$\lambda = 39,33$	$p = 0,73$

4) Test d'adéquation :

Pour le cas de la fréquence, nous allons nous baser sur le test de dispersion de Fisher ainsi que le test de rapport vraisemblance :

Tableau 15: Test du rapport de dispersion

Traité	\bar{X}	\bar{S}^2	IF
Traité1	203,66	1865	45,78
Traité2	39,33	63,86	8,11

L'indice de Fisher est à comparer avec le quantile 95% d'une loi Khi2 à 5 degrés de liberté qui est égal à **11,05**.

Pour le traité1, l'IF est supérieur au seuil 11.05, l'hypothèse de l'existence d'une sur dispersion des données est donc acceptée et par suite la loi binomiale négative s'avère la plus adaptée. En revanche, pour le traité2 le test est accepté puisque la statistique nT est inférieure à 11.05, d'où le choix d'une loi Poisson pour la modélisation.

Confirmons ce choix par le test du rapport de vraisemblance étudié ci-dessous :

Tableau 16: Test du rapport de vraisemblance

	$\ln(L_0)$	$\ln(L_1)$	RV
Traité 1	-43,97	-30,42	27,1
Traité 2	-23,73	-23,65	0,16

Avec le test du rapport de vraisemblance, la loi Binomiale Négative est retenue pour le traité 1 puisque RV est supérieur au quantile 95% d'une loi Khi2 à 1ddl qui est égal à

3,84. Pour le traité 2, la loi de poisson est acceptée ce qui approuve les résultats obtenus par l'autre test.

5) Modèle retenue pour les deux traités :

A l'issu des résultats obtenus par les tests statistiques, les tableaux ci-dessous résument les lois ajustant la fréquence et sévérité des deux traités :

Traité 1 :

$$S = \sum_{i=1}^{N/65000} X_{i/65000}$$

Avec $N_{/65000} \sim \text{BinNeg}(203; 0,13)$ et $X_{i/65000} \sim \text{LN}(65000 ; 11,28 ; 0,78)$

$$\text{Et } f(x) = \begin{cases} \frac{\exp\left(-1/2\left(\frac{\ln(x-65000)-11,28}{\sigma}\right)^2\right)}{0,78\sqrt{2\pi}(x-65000)} & \text{si } x \geq 65000 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Traité 2 :

$$S = \sum_{i=1}^{N/150000} X_{i/150000}$$

Avec $N_{/150000} \sim \text{Pois}(39,33)$ et $X_{i/150000} \sim \text{LN}(150000 ; 12,39 ; 0,9)$

$$\text{Et } f(x) = \begin{cases} \frac{\exp\left(-1/2\left(\frac{\ln(x-150000)-12,39}{\sigma}\right)^2\right)}{0,9\sqrt{2\pi}(x-150000)} & \text{si } x \geq 150000 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

VI.12.3. Détermination du taux de prime :

Une fois les lois de la fréquence et sévérité connues, la détermination de la prime pure revient à calculer l'espérance de la charge annuelle du réassureur.

Nous rappelons que :

$$PP = E(S^{reass}) = E(N_{/S_0}) * E(X_i^{reass})$$

L'espérance de la fréquence est facilement calculable à l'encontre de $E(X_i^{reass})$ qui nécessite un calcul d'intégrale lourd. En effet, X_i^{reass} est fonction de X_{i/S_0} et des bornes du traités ce qui rend l'usage du calcul intégral indispensable. Pour cette raison, nous proposons deux méthodes pour calculer la prime pure : une basée sur les calculs de probabilité et une autre basée sur la simulation par la méthode de Monte Carlo.

1) Méthode par calcul probabiliste

Rappel :

Si $X_{i/S_0} \sim \text{Ln}(t, m, \sigma)$ et $E(N_{/S_0}) = \lambda$ alors on peut montrer que : (Voir Annexe)

$$E(S^{reass}) = \lambda \left[l \left(1 - \Phi \left(\frac{\ln(l-t) - m}{\sigma} \right) \right) - f \left(1 - \Phi \left(\frac{\ln(l-t) - m}{\sigma} \right) \right) + e^{m+\sigma^2/2} \left(\Phi \left(\frac{\ln(l-t) - (m + \sigma^2)}{\sigma} \right) - \Phi \left(\frac{\ln(f-t) - (m + \sigma^2)}{\sigma} \right) \right) + t \left(\Phi \left(\frac{\ln(l-t) - m}{\sigma} \right) - \Phi \left(\frac{\ln(f-t) - m}{\sigma} \right) \right) \right]$$

Avec Φ est la fonction de répartition d'une loi $N(0,1)$

◆ Application :

En se basant sur la formule exprimée ci-dessus, nous présentons pour les deux traités un tableau contenant les valeurs des primes de réassurance et les taux de prime et ce pour différentes franchises. A noter que le taux de prime est obtenu en divisant la prime pure de réassurance par la prévision de l'assiette de prime de l'année de cotation du traité en question.

Traité 1 :

Pour une limite fixée à 1900000 et en faisant varier les franchises, nous obtenons les résultats suivants :

Tableau 17: Taux de prime du traité 1 obtenus par la méthode probabiliste

Franchise	Prix	Taux
65 000,00	22 016 029,00	0,19
70 000,00	21 001 296,00	0,18
80 000,00	18 982 055,00	0,17
90 000,00	17 031 560,00	0,15
100 000,00	15 214 571,00	0,13
110 000,00	13 564 543,00	0,12
120 000,00	12 089 085,00	0,11
130 000,00	10 781 283,00	0,09
140 000,00	9 627 469,00	0,08
150 000,00	8 611 620,00	0,07

Traité 2 :

Pour le traité 2, en fixant la limite à 12000000, nous obtenons les résultats suivants :

Tableau 18: Taux de prime du traité 2 obtenus par la méthode probabiliste

Franchise	Prix	Taux
150 000,00	14 316 550,00	14,35%
180 000,00	13 139 521,00	13,17%
200 000,00	12 371 261,00	12,40%
220 000,00	11 632 360,00	11,66%
250 000,00	10 596 551,00	10,62%
300 000,00	9 082 281,00	9,10%
320 000,00	8 548 507,00	8,57%
350 000,00	7 818 134,00	7,83%
400 000,00	6 766 986,00	6,78%

Comme dans le cas des résultats obtenus par la méthode statique, plus la franchise est grande moins le tarif est important ce qui est normal car l'assureur garde plus de risque et cède par conséquent moins de prime.

Toutefois, les taux de primes obtenus par la méthode probabiliste sont légèrement supérieurs à ceux obtenus par la méthode Burning Cost.

2) Tarification par simulation

Avant d'appliquer la méthode de simulation, nous tâcherons de faire un rappel sur les techniques de simulation ainsi que sur la méthode de Monte Carlo.

◆ Techniques de la simulation/Simulation de Monte Carlo

Les techniques de simulation sont fort utiles lorsque la complexité du modèle envisagé rend extrêmement difficile toute approche analytique. C'est pourquoi, nous proposons dans ce qui suit de tarifier les traités XS par la méthode de simulation. Mais avant, nous expliquerons le principe de la technique et le fondement de la méthode Monte Carlo.

Principe :

Dans le but de mettre en œuvre la méthode de simulation, nous rappelons que si F est une fonction de répartition d'une loi continue sur R , et si X est une variable aléatoire réelle de fonction de répartition F alors : $F(X)$ Suit une loi uniforme continue sur $[0,1]$

Donc pour simuler une valeur de X , il suffit de simuler un nombre entre 0 et 1, puis d'inverser la fonction de répartition à fin d'obtenir la réalisation associée.

On utilise donc un générateur de nombres aléatoires pour simuler des nombres dans $[0, 1]$.

Une fois avoir générer les variables aléatoires par une loi donnée, la méthode de Monte Carlo consiste à approcher $E(X)$ par la moyenne empirique des simulations de la variable aléatoire X :

$$\bar{X} = \frac{1}{\text{Nombre} - \text{simulations}} \sum_{i=1}^{\text{Nombre} - \text{simulations}} x_i \xrightarrow{\text{Nombre} - \text{simulations} \rightarrow \infty} E(X)$$

◆ Application :

Pour pouvoir appliquer cette méthode, nous avons construit un algorithme de simulation que nous avons implémenté sous le logiciel R. Le paragraphe suivant présentera les étapes de l'algorithme.

Algorithme de simulation :

L'objectif de la simulation est de déminer $E(S^{\text{reass}})$ avec :

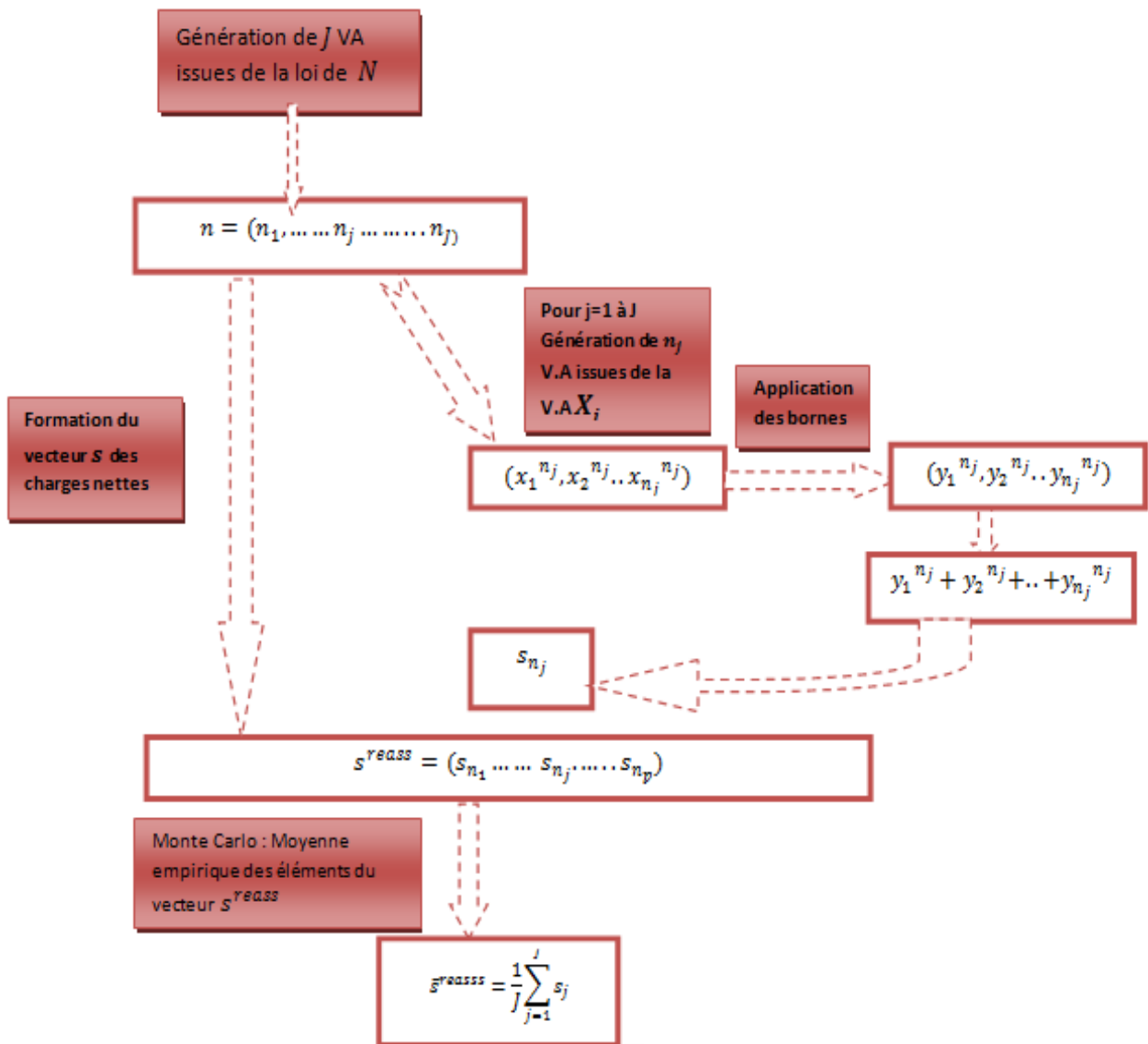
$$S^{\text{reass}} = \sum_{i=1}^{N_{/s0}} X_i^{\text{reass}} \quad \text{Et } Y_i = X_i^{\text{reass}} = \min(\max(0, X_{i/s0} - f), p)$$

Connaissons la loi de $N_{/s0}$ et X_i^{reass} , les étapes de la simulation sont les suivantes :

- Fixer le nombre de simulations J , pour notre cas $J = 100000$
- Fixer une portée et priorité
- Créer un vecteur N contenant J simulations de même loi que $N_{/s0}$: $N = (n_1 \dots n_j \dots n_j)$ avec n_j la $j^{\text{ème}}$ réalisation de la simulation par la loi $N_{/s0}$
- Pour $j = 1$ à J
 - Simuler n_j variables $x_1^{n_j}, x_2^{n_j} \dots \dots x_{n_j}^{n_j}$ issues de la variable aléatoire $\text{LN}(m; \text{sigma}) + t$.
 - Pour $i = 1$ à n_j
 - $y_i^{n_j} = \min(\max(0, x_i^{n_j} - f), p)$
 - $s_j = \sum_{i=1}^{n_j} y_i^{n_j}$
- Appliquer une moyenne empirique au vecteur $\{s_j\}_{1 \leq j \leq J}$ pour estimer l'espérance de la charge nette du réassureur : $\bar{s}^{\text{reass}} = \frac{1}{J} \sum_{j=1}^J s_j$

Pour faciliter la compréhension de l'algorithme, nous le schématisons comme suit :

Figure 21: Schéma explicatif de la démarche de simulation



Résultats de la méthode :

Sous le logiciel R, en utilisant l'algorithme précédent pour différentes franchises et pour des limites fixées à 19 00 000 DH et 12 000 000 DH respectivement pour le traité 1 et le traité 2, on obtient :

Traité 1 :

Tableau 19: Taux de prime du traité 1 obtenus par la méthode de simulation

Franchise	Taux
65000	19,15%
70000	18,28%
80000	16,52%
90000	14,84%
100000	13,24%
110000	11,82%
120000	10,53%
130000	9,41%
140000	8,40%
150000	7,51%

Traité 2 :

Tableau 20: Taux de prime du traité 2 obtenus par la méthode de simulation

Franchise	Taux
150000	14,36%
180000	13,19%
2,00E+05	12,43%
220000	11,68%
250000	10,67%
3,00E+05	9,14%
320000	8,58%
350000	7,89%
4,00E+05	6,81%

On remarque que les taux de prime obtenus par la méthode de simulation de Monte Carlo sont très proches de la méthode probabiliste. Ce résultat nous confirme donc la robustesse de la méthode Monte Carlo qui est à la fois pratique, simple et nous évite des calculs complexes, par contre elle nécessite un nombre important d'itérations afin d'assurer la convergence de l'algorithme, ce qui demande un temps de calcul assez lourd. Outre son rôle important dans la tarification d'un traité XS, la méthode de Monte Carlo trouve tout son intérêt dans la tarification des clauses particulières qu'on trouve généralement dans les traités en XS. C'est le cas de la clause Aggregate qui fera l'objet du paragraphe suivant

3) Tarification de la clause Aggregate :

Nous rappelons que la clause Aggregate est une clause qui a comme objectif de limiter les engagements du réassureur. En d'autre terme, il s'agit d'une limite annuelle appliquée au montant cumulé des sinistres à charge du réassureur appelé l'Aggregate que l'on notera a .

En se couvrant par cette clause, l'expression du coût du réassureur devient:

$$C = S^{Reass} * 1_{S^{Reass} \leq a} + a * 1_{(S^{Reass} > a)}$$

La prime pure recherchée s'exprime donc de la manière suivante :

$$P_p = E(C)$$

◆ Application :

Nous allons encore une fois recourir à la simulation par la méthode Monte Carlo pour tarifier la prime pure de réassureur avec la clause Aggregate. Pour cela, nous expliquerons d'abord les étapes de la simulation avant de présenter les résultats obtenus.

Algorithme de simulation :

Les étapes de l'algorithme sont pratiquement les même que pour la tarification sans Aggregate à l'exception d'une étape qui intervient vers la fin pour appliquer la clause.

Les étapes sont donc les suivantes :

- Fixer le nombre de simulations J , pour notre cas $J = 100000$
- Fixer une portée et priorité
- Créer un vecteur N contenant J simulations de même loi que $N_{/S0}$: $N = (n_1 \dots n_j \dots n_j)$ avec n_j la j - ème réalisation de la simulation par la loi $N_{/S0}$
- Pour $j = 1$ à J
 - Simuler n_j variables $x_1^{n_j}, x_2^{n_j} \dots \dots x_{n_j}^{n_j}$ issues de la variable aléatoire $LN(m ; \sigma) + t$.
 - Pour $i = 1$ à n_j
 - $y_i^{n_j} = \min(\max(0, x_i^{n_j} - f), p)$
 - $s_j = \sum_{i=1}^{n_j} y_i^{n_j}$
 - Si $s_j \leq a$ alors $s_j \leftarrow s_j$ sinon $s_j \leftarrow a$

- Appliquer une moyenne empirique au vecteur $\{s_j\}_{1 \leq j \leq J}$ pour estimer l'espérance de la charge nette du réassureur : $\bar{s}^{reasss} = \frac{1}{J} \sum_{j=1}^J s_j$

Résultats :

En fixant le montant de l'Aggregate 15000000, pour une limite $L = 1900000$ et en faisant varier la franchise on obtient les résultats suivants :

Tableau 21: Impact de la clause Aggregate sur le taux de prime

Franchise	Taux avec AAD	TAUX
65000	0,1304	0,1914
90000	0,1295	0,1481
100000	0,1253	0,1323
110000	0,1163	0,118

Les résultats obtenus montrent que l'introduction de la clause Aggregate fait baisser les tarifs ce qui est normal du moment que l'engagement du réassureur se plafonne.

Par ailleurs, nous remarquons que l'effet de diminution est plus considérable pour des petites franchises. En effet, pour le cas d'une franchise à hauteur de 65000 ; la prime pure qui traduit l'engagement probable du réassureur est estimée à 22016029, ce montant dépasse largement l'Aggregate ce qui justifie la baisse importante du tarif.

En revanche, pour des franchises assez grandes, la clause n'aura pratiquement plus d'effet puisque l'engagement du réassureur sera de moins en moins important et par suite ne franchira jamais le montant de l'Aggregate.

Cette fois, nous fixons les portées et priorités et nous varions le montant de l'Aggregate pour analyser son impact sur le tarif.

Voici les résultats obtenus :

Tableau 22: Variation du taux de prime en fonction de l'Aggregate

Franchise	imite	Aggregate	taux
100 000,00	1 900 000,00	aucun	13,23%
100 000,00	1 900 000,00	15 000 000,00	12,53%
100 000,00	1 900 000,00	12 500 000,00	10,84%
100 000,00	1 900 000,00	10 000 000,00	8,70%

Le tableau montre que pour une franchise et portée fixées, l'augmentation de l'Aggregate diminue les tarifs, ce qui est prévisible puisque le réassureur limite ses engagements et n'aura plus à rembourser l'excès d'une charge annuelle dépassant le montant de l'Aggregate .

Chapitre 4 : Analyse de quelques critères d'optimisation

Ce chapitre vise à proposer un ensemble de critères pouvant guider l'assureur à choisir sa structure de Réassurance.

Le premier critère traité est l'Espérance/Variance du gain. Puisque l'assureur cherche à augmenter son bénéfice et réduire le risque qui s'y rapporte.

Le deuxième critère est la Value At risk. Cette mesure incontournable du risque permet d'évaluer les engagements de l'assureur dans les cas extrêmes.

Enfin, la marge de solvabilité qui constitue un troisième critère indispensable permettant à l'assureur de prouver sa solvabilité surtout aux yeux des autorités de tutelle.

I. Critère Espérance/ Variance du Gain :

Nous avons vu dans ce qui précède que parmi les avantages de la réassurance est qu'elle permet d'homogénéiser le portefeuille en éliminant les sinistres de pointes ce qui aide à réduire la volatilité du résultat. Dans cette partie, nous nous intéressons à modéliser le gain de l'assureur et ce pour différents schémas de réassurance. Naturellement l'assureur cherchera la combinaison de portée et priorité lui procurant le meilleur profit tout en supportant un risque minimal. Il s'agit d'une logique espérance/variance avec comme mesure de risque l'écart type du profit.

Pour ce faire, nous allons encore une fois nous baser sur l'historique des sinistres réglés mais cette fois sans tenir compte d'aucun seuil, autrement nous travaillerons sur une base de sinistres complète.

Remarque : La démarche suivie pour ajuster les lois modélisant la fréquence et sévérité est la même que celle vue dans le chapitre précédent.

I.1. Modélisation de la charge totale de l'assureur :

Cette fois, nous avons à notre disposition un historique complet de sinistres allant de l'année 2008 jusqu'à l'année 2013 et ce pour chacun des deux traités.

Après avoir cumulé les polices sinistrées pour chaque adhérent et mises en situation As if, nous obtenons les statistiques suivantes :

Tableau 23: Statistiques du coût du sinistre individuel revalorisé

Traité	Min	Max	Moyenne	Ecart type
1	368	813 535	54 985	70 642
2	359	17 356 017	118 985	522 708

Comme déjà mentionné, dans la partie diagnostic, les portefeuilles du traité 1 et 2 sont caractérisés par leur hétérogénéité car les capitaux restant dû remboursés dépendent du montant emprunté qui varie d'un assuré à l'autre.

Dans la partie qui suit, nous présenterons les résultats obtenus pour la modélisation de la fréquence et sévérité de toute la base sinistre.

I.1.1. Loi de la sévérité :

Après avoir testé plusieurs lois susceptibles d'ajuster la loi de sévérité, nous gardons celle qui minimise la distance de Kolmogorov-Smirnov. Voici les résultats obtenus :

Tableau 24: Distance de Kolmogorov pour chaque loi de sévérité testée

D_n	Traité1	Traité2
Log Normale	0,0158	0,0463
Pareto	0,0189	0,0524
Exponentielle	0,156	0,246
Gamma	0,147	0,189
Weibull	0,083	0,0986

Pour le cas des deux traités, la Log-Normale s'avère la loi favorite pour modéliser la sévérité puisqu'elle donne la plus petite distance de Kolmogorov.

Estimation des paramètres :

Encore une fois, en recourant à la méthode de Maximum de vraisemblance, les paramètres de la Log-normal sont :

Tableau 25: Estimation des paramètres de la loi L-N pour chaque traité

N° Traité	mu	sigma
Traité 1	10,26	1,19
Traité 2	10,59	1,44

Tests d'ajustement:

Tableau 26: Test d'ajustement de Kolmogorov

Traité	Dn	C	p-value
Traité 1	0,015	0,044	0,357
Traité 2	0,024	0,031	0,169

Le test d'ajustement de Kolmogorov donne un p-value supérieur à 5%, donc on retient l'hypothèse sous laquelle nos données peuvent être ajustées par une Log-Normale.

I.1.2. Loi de la fréquence

Pour modéliser la fréquence, nous aurons besoin d'un vecteur représentant le nombre annuel des sinistres revalorisés qui tient compte des tardifs. En appliquant la même méthodologie du chapitre précédent, nous obtenons le tableau suivant :

Tableau 27: Nombre de sinistre As If par année de survenance pour chaque traité

Année de survenance	Nombre de sinistres	
	Traité 1	Traité 2
2008	754	208
2009	727	193
2010	702	204
2011	711	211
2012	715	226
2013	771	214

Comme ce qu'on a vu dans le chapitre précédent, les lois généralement utilisées pour modéliser la fréquence sont la loi de poisson et la loi binomiale négative.

Ci-dessous les résultats des estimations des paramètres par la méthode de maximum de vraisemblance et le test de sur-dispersion de Fisher :

Estimation des paramètres :

Tableau 28: Estimation des paramètre de la loi de fréquence apr la méthode de MV

Traité /loi	Poisson	B-N
Traité 1	$\lambda = 729.45$	$p = 0,71$
Traité 2	$\lambda = 209$	$p = 0,88$

Test du rapport de dispersion :

Tableau 29: Test de dispersion de la loi de la fréquence pour les 2 traités

Traité	\bar{X}	\bar{S}^2	IF
Traité1	729	727	4,98
Traité2	209	119	2,86

Pour le cas des deux traités, l'indice de Fisher est inférieur au quantile 95% d'une loi Khi2 à 5 degrés de liberté qui est égal à **11,05**. L'hypothèse nulle est acceptée, par suite la loi retenue est une Poisson de paramètre 729,54 pour le traité 1 et 209 pour le traité2.

Modèle retenue pour les deux traités :

Le tableau ci-dessous résume le modèle retenu pour chaque traité :

Tableau 30: Résumé des lois retenus pour chaque traité

Traité	Sévérité	Fréquence
1	$LN(10.26; 1.19)$	$Pois(729.45)$
2	$LN(10.26; 1.19)$	$Pois(209)$

I.2. Modélisation du gain de l'assureur :

Pour modéliser le gain de l'assureur, nous allons considérer les données suivantes :

- ❖ La sinistralité totale survenue dans la période est égale à : $S = \sum_{i=1}^N X_i$, où S est une loi de poisson composée et les sinistres individuels suivent une loi log normal.
- ❖ Les montants (X_i) sont indépendants et identiquement distribués
- ❖ Le nombre de sinistre N et les X_i sont indépendants
- ❖ Le total des primes émises de l'exercice sera noté par $P^{émise}$. Cette prime émise inclut des chargements (gestion, acquisition..) qui sont exprimés en fonction d'un chargement noté τ^{ch} . Ainsi, la prime hors chargement s'exprime comme suit :

$$P^{HC} = P^{émise} * (1 - \tau^{ch})$$

Dans une situation sans réassurance, le gain de l'assureur s'exprime comme suit :

$$G = P^{HC} - S$$

L'assureur pourrait donc générer en moyenne un gain à hauteur de :

$$E(G) = P^{HC} - E(S)$$

$$E(G) = P^{HC} - E(N) * E(S)$$

Pour ce qui est de la variance du Gain, celle-ci s'exprime comme suit :

$$V(G) = V(S)$$

I.2.1. Cas de l'excédent de sinistre :

Considérons le cas d'une réassurance en excédent de sinistre. Notons F la franchise et P la portée du traité. La part du réassureur dans l'indemnisation du sinistre X_i est donnée comme suit :

$$X_i^{reass} = \text{Min}(\text{Max}(0, X_i - F); P)$$

Sur un exercice, le réassureur supporte la charge suivante :

$$S^{Reass} = \sum_{i=1}^N X_i^{reass}$$

Comme nous l'avons vu précédemment la prime pure de réassurance correspond à la moyenne de l'engagement futur du réassureur :

$$PP^{Reass} = E(S^{Reass})$$

Nous rappelons aussi que pour couvrir les écarts de sinistralités et d'autre frais, le réassureur applique un chargement à la prime pure pour former une prime de risque : $P^{Reass} = E(S^{Reass}) * (1 + \zeta^{Reass})$

En notant le total des primes émises sur l'exercice par $P^{émise}$, le chargement sur les primes émises par τ^{prime} , la prime hors chargement s'exprime comme suit :

$$P^{HC} = P^{émise} * (1 - \tau^{ch})$$

Le gain net de l'assureur pour cette configuration de réassurance est :

$$G = (P^{HC} - S) - (P^{Reass} - S^{Reass})$$

$$G = (P^{HC} - S) - (E(S^{Reass}) * (1 + \zeta^{Reass}) - S^{Reass})$$

D'où :

$$E(G) = P^{HC} - E(S) - E(S^{Reass}) * \zeta^{Reass}$$

$$E(G) = P^{HC} - E(S) - PP^{Reass} * \zeta^{Reass}$$

$$V(G) = V(S - S^{Reass})$$

D'après les formules ci-dessus, nous pouvons voir qu'en se réassurant l'assureur perd une part de ses bénéfices en contrepartie il peut espérer diminuer le risque exprimé en terme de variance.

Pour le calcul de l'espérance du gain, nous aurons besoin de la prime pure octroyée au réassureur que nous avons déjà calculée dans le paragraphe précédent. L'espérance de la sinistralité quant à elle est déterminée par la formule de l'espérance d'une loi composée :

$$E(S) = E(N) * E(X)$$

Il est à noter que l'espérance du gain net de réassurance dépend uniquement de la prime pure du réassureur qui est directement liée aux bornes des traités.

Pour pouvoir calculer la variance du gain exprimée sous forme de différence de deux variables aléatoires, il va falloir d'abord simplifier l'expression de celle-ci :

On a :

$$V(G) = V(S - S^{Reass})$$

$$V(G) = V\left(\sum_{i=1}^N X_i - X_i^{Reass}\right)$$

En notant $Z_i = X_i - X_i^{Reass}$, l'expression de la variance du gain devient :

$$V(G) = \sum_{i=1}^N Z_i$$

$$V(G) = E(N)V(Z) + V(N)E(Z)^2$$

Comme il est difficile de terminer la variance de Z qui est fonction de la variable aléatoire X dont la loi est connue, nous procédons par simulation et ce en recourant à la méthode de Monte Carlo.

1) Application :

Les tableaux ci-dessous résument les espérances et variances du gain pour différentes franchises et pour des portées fixées à 1900000 DHs et 12000000 DHs respectivement pour le traité 1 et 2. Nous considérons en outre que le taux de chargement du réassureur est fixée à 10%, les primes hors chargements quant à eux sont fixées à 53 000 000 DHs et 64 000 000 DHs respectivement pour le traité 1 et 2.

Traité 1 :

Tableau 31: Esperance/Variance du gain du traité 1 pour différente franchise

Franchise	aucune	65 000,00	80 000,00	100 000	120 000	140 000
E(Gain)	6 140 543	3 938 940	4 242 337	4 619 086	4 931 634	5 177 796
écart-type(Gain)	2 120 000	970 000	1 050 000	1 210 000	1 332 000	1 440 000
CV(Gain)	34,52%	24,63%	24,75%	26,20%	27,01%	27,81%

Traité 2 :

Tableau 32: Tableau 30: Esperance/Variance du gain du traité 2 pour différente franchise

Franchise	aucune	200000	250000	300000	350000	400000
E(Gain)	33 465 251	32 228 125	32 405 596	32 557 023	32 683 438	32 788 552
écart-type(Gain)	2 420 000	1 200 000	1 314 000	1 424 000	1 521 000	1 611 000
CV(Gain)	7,23%	3,72%	4,05%	4,37%	4,65%	4,91%

Commentaires :

Les résultats du tableau nous montrent que pour une portée fixée, l'espérance du gain augmente avec la priorité ce qui est logique.

En effet, une franchise élevée implique que l'assureur gardera plus de risques à sa charge, le tarif exigé par le réassureur sera par conséquent petit, chose qui maintiendra le gain à un niveau plus ou moins élevé. En revanche, en cédant moins, l'assureur augmente son exposition au risque, ce qui se traduira par une augmentation de la variance du résultat reflétant ainsi sa volatilité.

A titre illustratif, comparant une situation sans réassurance et une couverture en XS de franchise à hauteur de 100000 DHs .Pour le cas du traité 1, l'espérance du gain sans recours à la réassurance est de l'ordre de 9 319 086. En se couvrant par l'XS, l'assureur perd une part du bénéfice puisqu'il enregistre une espérance du gain de l'ordre de 4 619 086 DHs. D'un autre côté, nous remarquons qu'après cession, l'écart type du résultat diminue significativement en passant de 2 120 000 DHs à 1 210 000 DHs.

Pour voir plus claire, nous pouvons nous appuyer sur le coefficient de variation qui est une mesure de dispersion calculé sur la base du rapport de l'écart type et la moyenne. En ce qui concerne ce même exemple, une couverture en XS fait diminuer la dispersion du gain de l'assureur de plus de 7% ce qui est assez significatif.

En bref, l'assureur se trouve confronté à l'arbitrage suivant : augmenter son bénéfice et supporter un risque plus grand ou vis versa.

I.2.2. Cas de la Quote part :

Rappelons qu'un traité en Quote Part s'inscrit dans le cadre d'une réassurance proportionnelle où tous les éléments du risque sont partagés également entre les deux partis. Nous allons donc essayer d'évaluer l'impact de l'achat d'une Quote part de taux de cession τ sur le profit de l'assureur,

Comme le réassureur supportera une charge égale à la proportion cédée par l'assureur et recevra en contrepartie la même portion des primes alors :

$$p^{Reass} = \tau p^{émise}$$

$$S^{Reass} = \tau S$$

Le gain net de réassurance du point de vu de l'assureur est donné par :

$$G = (P^{HC} - S) - (P^{Reass} - S^{Reass})$$

$$G = P^{émise} - P^{émise} * \tau^{ch} - S - (P^{Reass} - S^{Reass})$$

$$G = (1 - \tau)(P^{émise} - S) - P^{émise} * \tau^{prime}$$

Ainsi, en optant pour une couverture en Quote part, l'espérance et variance du gain de l'assureur sont donnés comme suit :

$$E(G) = (1 - \tau)(P^{émise} - E(S)) - P^{émise} * \tau^{prime}$$

$$V(G) = (1 - \tau)^2 V(S)$$

Pour évaluer l'effet de la Quote part, nous avons choisi de tester des taux de cession qui coïncident avec les taux de primes trouvés par la méthode probabiliste et qui correspondent aux franchises allant de 200000 DHs à 400000 DHs avec un pas de 50000 du traité 2. Le tableau ci-dessous résume les résultats obtenus :

1) *Résultat :*

Tableau 33: Esperance/ Variance dugain pour la Quote Part

Taux de cession	E(Gain)	Ecart-type(gain)
14,3%	22 573 569,81	3 917 312,54
12,2%	24 137 053,08	4 010 836,44
10,5%	25 472 162,38	4 090 699,54
9,0%	26 587 681,34	4 157 427,26
7,8%	27 509 960,80	4 212 595,85

Les résultats nous montrent que l'achat d'une Quote n'est pas rentable pour l'assureur, puisqu'en comparant avec le tableau 32, nous pouvons voir que pour un même niveau de primes cédées, la valeur du gain espérée en se couvrant par l'XS est supérieure à celle obtenue en optant pour une Quote Part. De la même manière, l'écart type du gain pour un même niveau de tarif est inférieur pour l'XS comparé à la Quote Part. Ces résultats peuvent être

expliqués par l'effet de proportionnalité qui caractérise la Quote part et qui n'est pas appropriée aux portefeuilles étudiés.

Une autre manière d'appréhender la situation de l'assureur avant et après l'achat d'une Quote part est de s'intéresser à l'amélioration du coefficient de variation de la sinistralité. Nous allons donc comparer CV et CV^{Reass} qui sont respectivement les coefficients de variation avant et après réassurance.

On a :

$$CV = \frac{\sqrt{V(S)}}{E(S)}$$

$$CV^{Reass} = \frac{\sqrt{V(S^{Reass})}}{E(S^{Reass})} = \frac{\sqrt{V(\tau S)}}{E(\tau S)} = \frac{\tau \sqrt{V(S)}}{\tau E(S)} = \frac{\sqrt{V(S)}}{E(S)}$$

Nous voyons clairement qu'une couverture en Quote part n'améliore pas la rétention de l'assureur dans le sens où aucune perte de volatilité n'est opérée. Il n'y a donc pas de lissage de résultat puisque le transfert de risque se fait de manière homothétique.

Par ailleurs, nous pouvons voir d'une manière simplifiée qu'une couverture en Quote part peut contribuer à l'amélioration de la marge de solvabilité.

En effet, un assureur est en ruine lorsque ses fonds propres et les primes encaissées sont insuffisants pour couvrir la sinistralité auquel il fait face.

Si on note P la prime de l'assureur, k le capital alloué à la branche du portefeuille, et S la charge de l'assureur alors sur un horizon d'un an, la probabilité de ruine s'exprime de la manière suivante :

$$\pi = P(S > K + P) = 1 - F_S(K + P)$$

Avec F_S la fonction de répartition de la loi.

En ayant recours à la Quote part, le niveau des engagements de l'assureur change, du coup sa probabilité de ruine se modifie.

Ainsi, pour une Quote part de taux de cession τ , la probabilité de ruine devient :

$$\pi^{Reass} = P(S * (1 - \tau) > K + P * (1 - \tau))$$

$$\pi^{Reass} = P\left(S > \frac{K}{1-\tau} + P\right) = 1 - F_S\left(\frac{K}{1-\tau} + P\right)$$

Comme $\tau \in]0,1[$, alors $\frac{K}{1-\tau} > K$

D'autre part, nous savons que les fonctions de répartition sont croissantes ce qui donne :

$$\pi^{Reass} < \pi$$

La Quote part permet donc, sur un horizon d'un an, de réduire la probabilité de ruine d'un facteur à hauteur de $1 - \tau$

II. La Value At Risk comme mesure de risque

Bien que l'écart type soit une mesure incontournable du risque qui permet de calculer la dispersion autour de la moyenne, celui-ci présente le désavantage de ne pas capter l'asymétrie des distributions et ne tient pas compte de la disposition des masses de probabilité sachant qu'en réassurance, les queues des distributions des sinistres sont assez lourdes. De ce fait, l'usage d'une mesure de risque plus robuste s'avère nécessaire, il s'agit de la Value At Risk.

II.3. Définition

Fréquemment utilisée dans le domaine financier, la notion de la Value At risk (VAR) a pris de l'ampleur dans le domaine des assurances particulièrement avec la nouvelle norme réglementaire Solvabilité2.

Dans notre contexte, la VAR au niveau α de S représente le montant que doit détenir l'assureur pour faire face à ses engagements dans $1 - \alpha$ des cas.

Il s'agit tout simplement du quantile de la distribution de S au seuil α . D'où l'expression mathématique de la VAR :

$$Var_{\alpha}(S) = F^{-1}(\alpha)$$

Parmi ses avantages est qu'elle soit facilement calculable une fois la loi de la distribution en question connue. Toutefois celle-ci présente le défaut de ne pas être sous additive, c'est-à-dire : $VAR(X_1 + X_2) \geq VAR(X_1) + VAR(X_2)$.

En effet, cette propriété de non additivité relève de l'incohérence car généralement lorsqu'on fusionne deux portefeuilles, on s'attend à ce que le niveau de solvabilité requis après fusion soit inférieur au cas où les portefeuilles sont calculés séparément.

II.4. Application :

Pour pouvoir calculer la VAR, nous devrions avoir une expression explicite de la fonction de répartition de la charge. Pour notre cas, celle-ci est exprimée sous forme d'une loi composée ce qui rend sa détermination difficile.

Une méthode connue pour le calcul de la fonction de masse d'une loi composée est l'algorithme de Panjer. Il est à noter que l'algorithme s'applique uniquement lorsque la loi de la fréquence N appartient à la famille $(a, b, 0)$

Rappel :

On dit qu'une distribution de fréquence d'une variable aléatoire N appartient à la famille de distributions de comptage $(a, b, 0)$ si sa fonction de masse de probabilité satisfait la relation récursive suivante :

$$f_N(k) = \left(a + \frac{b}{k}\right) f_N(k-1) \text{ pour } k = 1, 2 \dots$$

En littérature, il a été démontré que seules les lois de Poisson, Binomial et Binomial négative sont membres de cette famille.

II.4.1. Algorithme de Panjer :

L'algorithme de Panjer est une relation récursive qui permet de calculer la fonction de masse d'une loi composée à condition que sa loi de fréquence appartienne à la famille $(a, b, 0)$.

Soit :

$$S = \begin{cases} \sum_{i=1}^N X_i & \text{si } N > 0 \\ 0 & \text{si } N = 0 \end{cases}$$

La relation récursive de Panjer est donnée comme suit :

$$\begin{cases} f_S(0) = P_r(S = 0) = M_N\{\log(f_Y(0))\} \\ f_S(y) = P_r(S = y) = \frac{\sum_{x=1}^y \left(a + b \frac{x}{y}\right) f_X(x) f_S(y-x)}{1 - a f_X(0)} \quad y = 1, 2, \dots \end{cases}$$

Pour notre cas, nous avons trouvé que la charge annuelle suit une loi composée dont la fréquence est une Poisson et la loi de sévérité une Log-normal.

L'application de l'algorithme de Panjer n'est donc pas possible dans notre cas sans la discrétisation de la loi de sévérité qui est une étape lourde et exigeante.

Nous allons donc envisager d'autres méthodes plus simples pour approcher la fonction de répartition.

II.4.2. Approximation Normale :

L'approximation normale s'appuie sur le théorème central limite qui établit la convergence en loi de la somme d'une suite de variables aléatoires vers la loi normale. Intuitivement, ce résultat affirme que toute somme de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées tend vers une variable aléatoire.

Formulation :

Soit : X_1, \dots, X_n une suite de variable aléatoires réelles indépendantes et identiquement distribuées suivant la même loi X . Supposons que l'espérance et la variance de X existent et soient finis.

On considère la somme : $S_n = X_1 + \dots + X_n$

On note $E(S_n) = \mu$ et $V(S_n) = \sigma^2$

Quand n est assez grand, la loi normale $N(\mu, \sigma^2)$ est une bonne approximation de la loi de S_n .

Dans ce cas : $P(S \leq x) = \varphi\left(\frac{x - E(S)}{\sqrt{VAR(S)}}\right)$

II.4.3. Approximation Normal Power (NP)

Particulièrement utilisée en réassurance, l'approximation Normal Power¹, permet d'améliorer l'approximation gaussienne en tenant compte du coefficient d'asymétrie.

Elle permet entre autre d'approcher le quantile de S . Si z_α désigne le $(1-\alpha)$ ème quantile de la loi normale centrée-réduite, le quantile $q_{1-\alpha}$ de S est donné par la formule suivante :

$$q_{1-\alpha} \approx E(S) + \sqrt{V(S)} \left(z_\alpha + \frac{\gamma(S)}{6} (z_\alpha^2 - 1) \right)$$

II.4.4. Méthode de Simulation

Nous rappelons que le calcul de la VAR consiste à trouver le quantile de la charge annuelle net au seuil α . Comme nous connaissons les lois de fréquence et sévérité, nous pouvons toujours envisager l'application de la méthode par simulation qui reste une méthode simple et pratique.

Nous rappelons également que pour un $PXS F$ la charge nette de l'assureur s'exprime comme suit :

$$S^{Nette} = \sum_{i=1}^N X_i - \min(\max(X_i - F, 0), P)$$

$$S^{Nette} = \sum_{i=1}^N Z_i$$

Pour appliquer Monte Carlo, il va falloir simuler un grand nombre de valeurs de la variable aléatoire S^{Nette} . Comme celle-ci est issue d'une loi composée, nous suivrons les étapes suivantes :

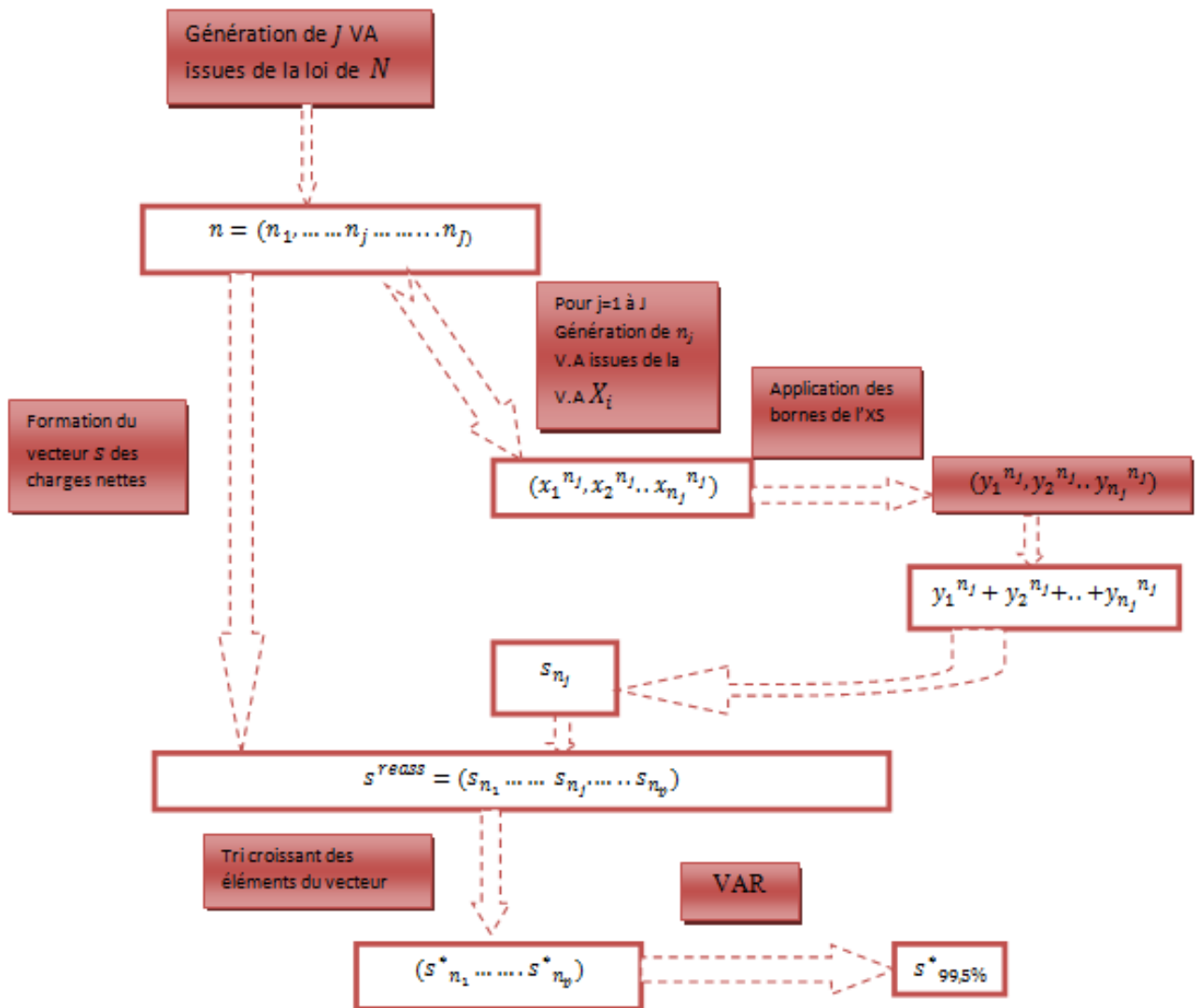
- Fixer le nombre de simulations J , pour notre cas $J = 100000$
- Fixer une portée et priorité
- Créer un vecteur N contenant J simulations de même loi que $N_{/S_0}$:
 $N = (n_1 \dots n_j \dots n_J)$ avec n_j la j - ème réalisation de la simulation par la loi $N_{/S_0}$
- Pour $j = 1$ à J

¹ DENUIT M., CHARPENTIER A. : Mathématique de L'assurance Non Vie(2004), Tome 1 : Principes fondamentaux de théorie du risque, pages de 210 à 220.

- Simuler n_j variables $x_1^{n_j}, x_2^{n_j} \dots \dots x_{n_j}^{n_j}$ issues de la variable aléatoire LN(m ; sigma)
- Pour $i = 1$ à n_j
 - $y_i^{n_j} = \min(\max(0, x_i^{n_j} - f), p)$
 - $s_j = \sum_{i=1}^{n_j} y_i^{n_j}$
- Trier le vecteur obtenu $\{s_j\}_{1 \leq j \leq j}$ par ordre croissant, et retenir la valeur qui représente 99,5% de la taille de l'échantillon.

Ci-dessous un schéma récapitulatif de la méthode par simulation :

Figure 22: Schéma récapitulatif du calcul de la VAR par la méthode de simulation



II.4.5. Résultats :

En maintenant toujours les portées fixées à 1900000 DHs et 12000000 DHs respectivement pour le traité 1 et 2, nous appliquons les différentes méthodes que nous venons d'expliquer et ce pour différentes valeurs de franchises. Les tableaux ci-dessous résument les résultats obtenus :

Traité 1 :

Tableau 34: Calcul de la VAR par les trois méthodes pour le traité 1

franchise	simulation	Normal-power	Normale
65 000,00	28 629 515	27 965 632	27 676 196
80 000,00	31 513 498	30 968 612	30 714 264
100 000,00	33 430 782	32 874 962	32 503 967
120 000,00	36 498 017	36 184 562	35 954 116
140 000,00	38 748 691	38 256 874	37 720 732
aucune	49 886 563	49 320 450	48 433 836

Traité 2 :

Tableau 35: Calcul de la VAR par les trois méthodes pour le traité 2

franchise	simulation	Normal-power	Normale
200 000	18 978 669	18 402 145	18 001 169
250 000	20 129 136	19 758 742	19 654 351
300 000	22 135 740	21 584 750	20 989 899
350 000	22 997 776	22 520 963	22 094 865
400 000	24 059 059	23 714 589	23 027 967
aucune	40 571 927	39 960 820	39 655 727

D'après le tableau, nous remarquons que les approximations Normale et Normal-Power ainsi que la méthode de simulation donnent des résultats plus ou moins proches.

En effet bien que l'approximation Normal-Power améliore l'estimation de la VAR par rapport à l'approximation normale basée sur une hypothèse forte, à savoir la normalité de S , nous retiendrons pour l'analyse, la méthode de simulation du fait qu'elle se base sur les distributions réelles qui modélisent la fréquence et sévérité.

D'un autre côté, nous remarquons également que la Value At Risk augmente avec la franchise quelque soit la méthode utilisée. Ce résultat est tout à fait attendu puisqu'en augmentant la franchise, l'assureur diminue sa cession et donc supportera plus de charge. Ainsi, pour pouvoir honorer ses engagements à 95% des cas, l'assureur aura à payer plus en cédant faiblement.

A titre d'exemple, pour le traité 1, dans une situation sans réassurance, l'assureur devrait disposer d'un montant à hauteur de 49 886 563,00DH pour pouvoir indemniser tout

ces sinistres probables, alors qu'en optant pour un 1 800 000 XS 100 000 , le montant nécessaire pour couvrir la sinistralité attendue est seulement de l'ordre de 33 430 782 DH. En d'autre terme cette couverture lui permettra d'éviter une charge supplémentaire à hauteur de 16 455 781 DH.

III. La marge de solvabilité

La solvabilité se situe au cœur de la régulation du secteur de l'assurance. En effet, elle vise à garantir la santé financière des compagnies d'assurance mais également leur capacité à honorer leurs engagements futurs dans le cadre des contrats qui les lient à leurs clients.

A ce titre, la définition de la solvabilité s'inscrit dans un cadre réglementaire pour couvrir divers dispositifs purement prudeniels, il s'agit notamment de la réglementation des provisions, la réglementation des placements et enfin la marge de solvabilité réglementaire.

En effet, vu la particularité de l'activité de l'assurance, c'est-à-dire son cycle inversé, les sociétés d'assurance sont tenues à mettre de côté des réserves pour pouvoir régler les sinistres susceptibles de survenir à tout moment. La réglementation prévoit ainsi que les entreprises d'assurance *"doivent constituer, dès la souscription, les provisions mathématiques ou techniques correspondant à la couverture de tous les risques ou obligations du contrat"*.

D'un autre côté, les placements effectués par une assurance sont soumis à des contraintes réglementaires. A vrai dire, compte tenu du décalage existant entre le moment où l'assureur perçoit les primes et celui où il paie les sinistres ou prestations, l'assureur dispose de sommes qu'il peut placer sur les marchés financiers. Pour des raisons de sécurité et de protection des assurés, des règles viennent encadrer ces placements qui doivent répondre à des exigences de sécurité, de liquidité (il faut pouvoir vendre rapidement et sans pertes en cas de besoins) et de rentabilité.

Dans ce sens la réglementation impose des règles de répartition et de dispersion des placements visant à éviter la concentration des risques. Ainsi, le Code des assurances fixe les différentes catégories d'actifs (obligations, actions, immobilier...) dans lesquels les assureurs sont autorisés à placer.

Enfin, les sociétés d'assurances sont tenues à disposer, au-delà de leurs provisions techniques, d'un montant de fonds propres appelé « marge de solvabilité » qui doit être

supérieur à un niveau minimal appelé « marge de solvabilité réglementaire » déterminé, soit par rapport au montant annuel des primes ou cotisations, soit par rapport à la charge moyenne annuelle des sinistres ou à l'exposition au risque.

Nous avons vu dans ce qui précède que la réassurance est fondée sur un transfert de risque permettant à l'assureur de se décharger d'une partie de ses engagements.

Cette couverture lui permettra non seulement de se protéger contre les dérapages de la sinistralité mais également de réduire ses besoins en fond propre et par suite de s'accommoder aux normes réglementaires imposés par les autorités de tutelle.

Dans ce sens, cette partie vise à mettre en lumière l'impact de la réassurance dans l'amélioration de la marge de solvabilité. En effet, l'enjeu est de trouver la meilleure combinaison de rétention des deux traités étudiés qui permettront de contribuer à l'amélioration de la marge de solvabilité.

III.5. Ses composantes :

Comme nous venons d'expliquer, l'assureur doit disposer d'un montant de fond propre devant dépasser le montant requis par la réglementation.

Dans ce sens, nous allons évaluer l'impact de la réassurance en agissant sur deux volets : D'une part la marge de solvabilité à constituer, c'est-à-dire en s'accommodant aux normes, d'une autre part la marge effectivement constituée qui reflète le patrimoine de l'entreprise.

III.5.1. La marge de solvabilité réglementaire :

Pour le cas des compagnies d'assurance, l'exigence minimale de la marge de solvabilité est déterminée, en fonction des branches exercées (Vie, Non vie ou GSR)

Dans le cadre de notre étude, nous allons nous concentrer uniquement sur la branche Décès et particulièrement la partie calcul des capitaux sous risques se rapportant uniquement aux traités concernés par l'étude et garder toutes choses égales par ailleurs.

Nous rappelons que la marge de solvabilité telle qu'elle figure dans le projet du code des assurances est calculée sur la base de la marge européenne pour répondre à l'objectif d'alignement sur les normes internationales.

De ce fait, selon l'Article **R334-13** du code des assurances français :

« Pour les branches 20 et 21, à l'exception des assurances complémentaires, l'exigence minimale de marge est calculée par rapport aux provisions mentionnées aux 1° et 4° de l'article R. 331-3 et aux capitaux sous risque. Ce montant est égal à la somme des deux résultats suivants :

Le premier résultat est obtenu en multipliant un nombre représentant 4 % de la somme des provisions mentionnées aux 1° et 4° de l'article R. 331-3, relatives aux opérations d'assurances directes sans déduction des cessions en réassurance et aux acceptations en réassurance, par le rapport existant, pour le dernier exercice, entre le montant des provisions mathématiques après cessions en réassurance et le montant des provisions mathématiques brut de réassurance, sans que ce rapport puisse être inférieur à 85 %.

Le second résultat est obtenu en multipliant un nombre représentant 0,3 % des capitaux sous risque par le rapport existant, pour le dernier exercice, entre le montant des capitaux sous risque après cession et rétrocession en réassurance et le montant des capitaux sous risque brut de réassurance sans que ce rapport puisse être inférieur à 50 %.

Pour les assurances temporaires en cas de décès d'une durée maximale de trois années, le facteur multiplicateur des capitaux sous risque est égal à 0,1 %. Il est fixé à 0,15 % desdits capitaux pour les assurances temporaires en cas de décès dont la durée est supérieure à trois années mais n'excède pas cinq années. »

Voici une capture Excel qui traduit les normes réglementaire expliqués ci-dessus

Figure 23: normes réglementaires pour le calcul de la marge de solvabilité à constituer pour la branche Vie

Calcul par rapport aux provisions techniques vie	
a - Provisions mathématiques et provision de gestion, brutes de cessions en réassurance.	
b - Provisions mathématiques et provision de gestion, nettes de cessions en réassurance.	
c - Taux de rétention b/a (minimum 85%)	
A - Premier résultat : (a) * (c) * 5%	
Calcul par rapport aux capitaux sous risques	
d - Toutes assurances à l'exclusion des temporaires décès de durée inférieure ou égale à 5 ans	
e - Temporaires décès de durée supérieure à 3 ans et inférieure ou égale à 5 ans	
f - Temporaires décès de durée inférieure ou égale à 3 ans	
g - Total des capitaux sous risques non négatifs bruts de cessions en réassurance	
h - Capitaux sous risques après cessions en réassurance	
i - Taux de rétention h/g (minimum 50%)	
B - Deuxième résultat: (d) * (i) * 0,003 + (e) * (i) * 0,0015 + (f) * (i) * 0,001	
Montant de la marge vie à constituer : (A + B)	

Remarque : Pour le cas de notre étude, notre champ d'intervention touchera uniquement la zone verte, c'est à dire la partie concernée par le deuxième résultat puisque les produits étudiés ne font pas intervenir de provisions mathématiques.

D'après la formule du deuxième résultat, nous pouvons dégager un certains nombres de commentaires :

- Les durées résiduelles du contrat d'emprunt interviennent dans la formule, d'où l'existence de coefficients de pondérations des capitaux sous risques.

En effet, plus la durée résiduelle du contrat est petite, plus le coefficient de pondération est petit. Ceci impliquera une réduction du capital réglementaire, chose qui est justifiable du moment qu'avec l'approche de l'échéance du contrat, les capitaux sous risques s'amortissent et donc l'exposition est moins grave.

- Plus le taux de rétention diminue, c'est-à-dire plus la cession de l'assureur est grande, moins le capital règlementaire requis est important.
- La majoration du taux de rétention par 50% nous conduit à dire que l'assureur ne gagnera rien en termes de solvabilité si jamais sa cession dépasse les 50%.

III.5.2. La marge de solvabilité constituée :

La marge de solvabilité constituée reflète la richesse de l'entreprise, c'est-à-dire le patrimoine dont dispose l'assurance, il s'agit notamment du :

- Capital social
- Diverses réserves
- Bénéfices reportés
- Plus-values latente de la branche vie et non vie

Ci-dessous une capture Excel regroupant l'ensemble des éléments constitutifs de la marge.

Figure 24: Eléments constitutifs de la marge de solvabilité

1- Capital social versé ou fonds d'établissement constitué
2- Réserves de toute dénomination, réglementaires ou libres, ne correspondant pas aux engagements
3- Provision de capitalisation
4- Emprunt pour augmentation du fonds d'établissement
5- Bénéfices reportés
A déduire :
6- Pertes cumulées (y compris, éventuellement, celle de l'exercice)
7- Immobilisations en non valeurs restant à amortir
8- Immobilisations incorporelles
9- Charges d'acquisition reportées
10- Actions propres détenues
11- Placements dans les filiales autres que les sociétés immobilières non cotées
12- Engagements hors bilan
Sous total (1) à (5) - (6) à (12)
13- Plus values latentes vie * 20%
14- Plus values latentes non-vie et autres affectations * 60%
Total = (1) à (5) - (6) à (12) + (13) + (14)

Remarque : En ce qui concerne le traitement du volet dédié à la marge de solvabilité constituée, nous évaluerons uniquement l'impact de la réassurance sur le résultat qui est une partie intégrante du Bénéfices Reportés et considérer toutes choses égales par ailleurs.

Une fois avoir expliqué les normes dictées par la réglementation quant au calcul de la marge de solvabilité, nous tacherons dans ce qui suit de chercher la combinaison optimale des rétentions provenant des deux traités qui permet d'atteindre un taux de couverture de 120%.

Remarque : On entend par taux de couverture, le rapport entre la marge de solvabilité constituée et la marge de solvabilité réglementaire.

Dans le paragraphe suivant, nous expliquerons la démarche suivie pour simuler les différents résultats de marge de solvabilité réglementaires, et à constituer, en faisant varier à chaque fois les franchises.

III.6. Simulation des résultats :

La recherche de la combinaison optimale des franchises des traités 1 et 2, permettant d'atteindre un taux de couverture à hauteur de 120%, a été effectuée par le biais d'une automatisation sur Excel de tous les paramètres intervenant dans le calcul.

Ci-dessous, l'explication de la démarche suivie :

III.6.1. Démarche suivie :

Notre point de départ est basé sur les valeurs des éléments constitutifs de la marge de solvabilité qui correspondent à l'état de l'entreprise au 31/12/2013.

Toute chose est maintenue fixe à l'exception des produits couverts par les deux traités concernés par notre étude, et qui sont inclus dans la branche Décès.

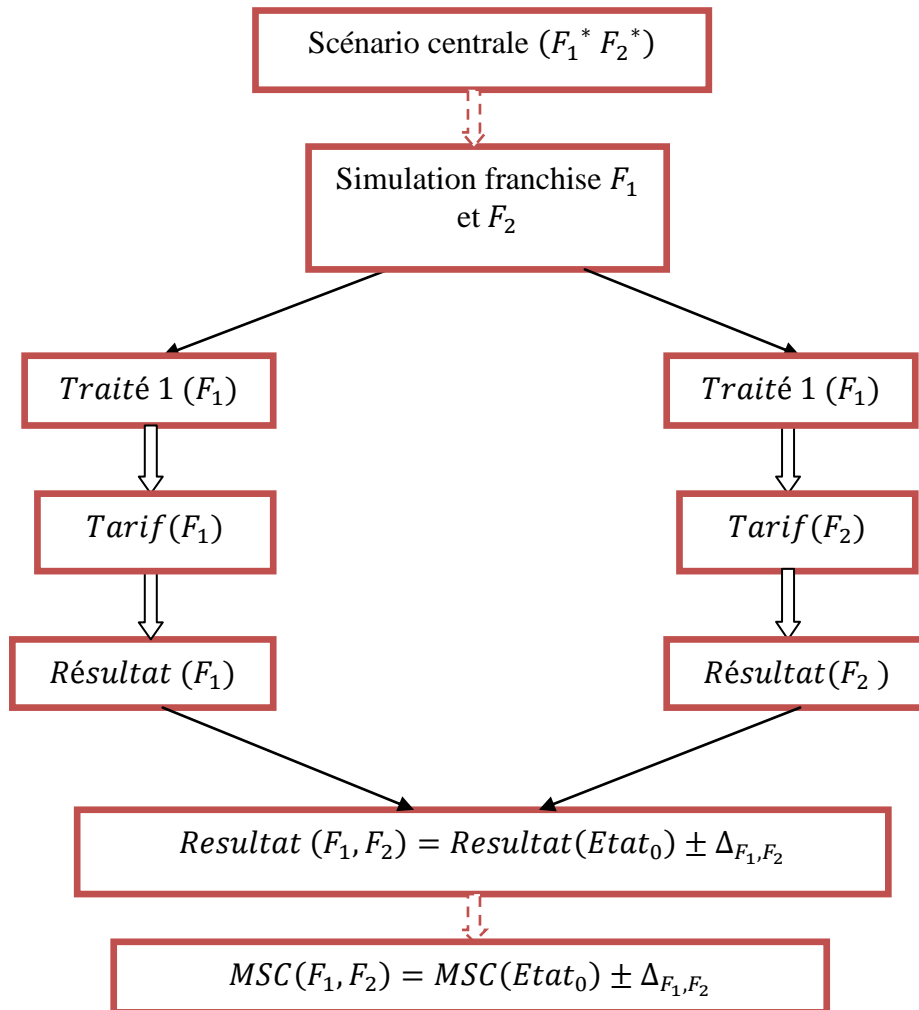
En maintenant toutes choses égales par ailleurs, nous allons faire varier la valeur des franchises relatives aux deux traités afin d'évaluer leur impact sur le taux de couverture.

Pour mieux comprendre la démarche suivie, nous proposons les schémas explicatifs suivants. Le premier se rapporte à la partie réglementaire, le deuxième s'intéresse à la richesse de l'entreprise, c'est-à-dire la marge effectivement constituée.

Pour cela, nous adoptons les notations suivantes :

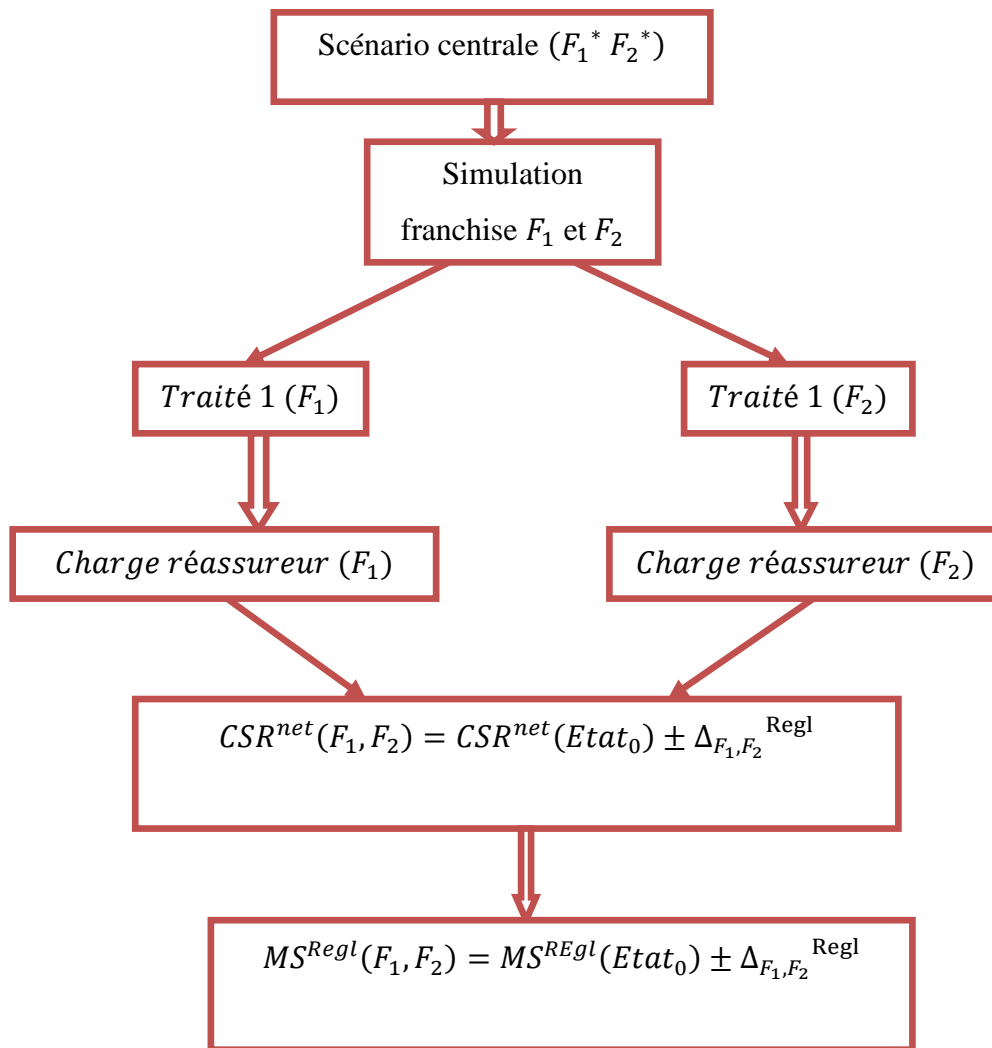
- $Etat_0$: Etat de l'entreprise vu le 31/12/2013
- MSC : Marge de solvabilité constituée
- CSR^{net} : Capitaux sous risques après cession de réassurance
- MS^{Regl} : Marge de solvabilité réglementaire
- F_1^* : Valeur de la franchise du traité 1 à l'état actuel (100 000)
- F_2^* : Valeur de la franchise du traité 2 à l'état actuel (300 000)
- F_1 : Valeur simulée de la franchise relative au traité 1
- F_2 : Valeur simulée de la franchise relative au traité 2
- Δ_{F_1, F_2} : Variation de la marge constituée par rapport au scénario centrale
- Δ_{F_1, F_2}^{Regl} : Variation de la marge réglementaire (à constituer) par rapport au scénario centrale

Schéma explicatif de la Marge de solvabilité constituée :



En optant pour une nouvelle combinaison de franchise F_1 et F_2 (autre que celle actuellement adoptée), l'assureur sera amené à payer une prime de réassurance qui dépend de ces nouveaux niveaux de rétention. Il en résulte que son résultat changera, par suite la marge de solvabilité constituée variera en baisse ou en hausse d'une valeur de Δ_{F_1, F_2} par rapport à l'état actuel de l'entreprise

Schéma explicatif de la Marge de solvabilité à constituer :



Pour une nouvelle combinaison de franchise F_1 et F_2 provenant respectivement des traités 1 et 2, l'assureur transfère une partie de ses risques au réassureur qui s'engage à indemniser les montants appartenant à la zone protégée par les traités.

Ainsi, le choix d'une combinaison de franchises déterminera la rétention de l'assureur qui impactera automatiquement la marge solvabilité réglementaire en variant à la hausse ou à la baisse de $\Delta_{F_1, F_2}^{\text{Regl}}$ par rapport à l'état actuel de l'entreprise.

III.7. Application :

Comme nous nous intéressons à la branche Décès, la marge de solvabilité réglementaire est calculée sur la base de l'exposition, c'est-à-dire sur la base des capitaux sous risques. Pour cette raison, nous aurons à extraire des informations depuis la base production.

III.7.1. Description de la base production :

Les bases productions qui nous ont été livrées couvrent l'ensemble des adhérents concernés par les deux traités, c'est-à-dire l'ensemble des assurés ayant souscrits des polices d'assurance décès emprunteur.

Les informations disponibles sont les suivantes :

- Des informations relatives à l'assuré : Nom et prénom, date de naissance, numéro de police
- Des informations relatives à l'emprunt : Montant de l'emprunt, date de première échéance, date de fin de fin échéance, mode de remboursement (mensuel, annuel), taux d'intérêt de l'emprunt.

III.7.2. Manipulations et calculs opérés sur la base :

Compte tenu des informations qui nous ont été livrées, nous pouvons compléter notre base par des informations supplémentaires et nécessaires pour l'application, il s'agit notamment de :

- Durée du prêt
- Durée résiduelle du contrat : c'est la durée restant à courir sur l'emprunt calculé par rapport à une date de fin d'exercice.
- Capital restant dû (CRD) : Il s'agit du reste à rembourser de la dette initiale de l'assuré

Afin de calculer ces informations, nous utilisons les formules suivantes :

$$\text{Durée de prêt} = \text{Date fin échéance} - \text{date début échéance}$$

$$\text{Durée résiduelle} = \text{Date de fin de l'échéance} - \text{date fin d'exercice}$$

$$CRD_i = CRD_0 \frac{a_{n-i}}{a_n}$$

$$a_n = \frac{1}{j} * \left(1 - \frac{1}{(1+j)^n}\right)$$

Avec :

- CRD_0 : Montant de l'emprunt
- n : La durée du prêt

- j : Taux d'intérêt du prêt

Une fois cette opération achevée, nous aurons à regrouper les capitaux sous risques selon les durées résiduelles du contrat, afin de pouvoir appliquer les coefficients de pondération imposés par la réglementation.

D'une autre part, pour calculer la charge nette de cession, nous aurons à cumuler les capitaux restant dus par tête pour appliquer les bornes des traités. A ce stade, nous pourrions dégager un taux de rétention qui résulte du rapport entre les capitaux sous risques après cessions et les capitaux sous risques brut de cessions de réassurance.

Remarque : De la même manière pour la base sinistre, le regroupement se fait sur la base du nom et prénom des adhérents qui constituent une clé de regroupement sujette aux erreurs. Dans ce sens, nous procéderons à une purification similaire à celle effectuée sur la base sinistre pour passer ensuite au regroupement.

III.7.3. Résultats :

Le taux de couverture actuel de la compagnie est de l'ordre 118%. Pour notre application, nous cherchons les franchises relatives au traité 1 et 2 permettant de l'améliorer de façon à ce qu'il atteigne 120%.

Nous rappelons que le taux de couverture est le rapport entre la marge de solvabilité constituée et la marge de solvabilité réglementaire.

Ainsi, pour que le rapport excède les 100%, il faut faire en sorte que la marge de solvabilité constituée augmente et que la marge réglementaire diminue.

Pour que la richesse de l'entreprise augmente, il faut que le résultat augmente. Or d'après les conclusions retenues dans la partie Esperance/Variance, le résultat augmente en cédant moins.

Par ailleurs pour diminuer la marge de solvabilité réglementaire, il faut faire en sorte que les capitaux sous risque après cessions soient petits, c'est-à-dire diminuer le taux de rétention et par conséquent céder plus.

D'après cette analyse, nous voyons que le choix d'augmenter ou de diminuer les franchises fait varier la marge réglementaire et la richesse constituée dans des sens différents.

Sous Excel, en simulant plusieurs franchises, nous remarquons que la variation de la marge de solvabilité constituée par rapport au scénario centrale Δ_{F_1, F_2} varie faiblement. En revanche, la variation de la marge réglementaire $\Delta_{F_1, F_2}^{\text{Regl}}$ varie considérablement.

A cet effet, nous pouvons prévoir que la combinaison de franchise F_1 et F_2 permettant d'atteindre un taux de couverture de 120% serait inférieur aux franchises actuelle adoptée par l'entreprise (F_1^* et F_2^*). Autrement dit il faut envisager à diminuer la rétention en cédant plus.

Sous Excel, la combinaison de F_1 et F_2 permettant d'atteindre un taux de couverture de 120% est la suivante : $F_1=70\ 000$ et $F_2=210\ 000$.

Figure 25: Capture fichier Excel des franchises optimales

Traité1	
Franchise	70 000
Gain_espéré	4 040 413
Variation du gain	578 673
Traité2	
Franchise	210 000
Gain_espéré	32 268 345
Variation du gain	288 678
Variation de la marge réglementaire	5 119 000
Variation du résultat	867 351
Marge réglementaire	322 172 000
Marge à constituer	386 756 000
Taux de couverture	120,00%

D'après les résultats du tableau, pour atteindre un taux de couverture de 120%, il faut que les franchises des deux traités baissent pour prendre des valeurs à hauteur de 70 000 DH et 210 000 DH pour respectivement le traité 1 et 2.

Cette nouvelle combinaison de franchises a été accompagnée par une variation négative- par rapport au scénario central- à la fois du résultat et de la marge de solvabilité réglementaire. En effet, le passage du scénario central à cette nouvelle combinaison de franchises a fait baisser le résultat de 867 351 Dh, qui reste peu significative par rapport à la variation de la marge de solvabilité réglementaire qui a baissé de 5 121 000 Dh.

En résumé, en optant pour ces nouvelles franchises l'assureur perdra une petite partie de ses bénéfices mais parviendra à faire augmenter de 2 points son taux de couverture.

IV. Conclusion :

A travers ce présent mémoire, nous avons tenté d'analyser un ensemble de critères pouvant guider l'assureur à bien choisir sa structure de réassurance pour le cas des traités se rapportant à l'activité de l'assurance Décès emprunteur.

Pour ce faire, nous avons d'abord commencé par diagnostiquer le schéma actuel de la Réassurance de la MV dédié à la branche ADE. Comme premier constat, la nature hétérogène du portefeuille de l'assureur emprunteur justifie le choix d'une couverture en XS puisqu'il permet un écrêtement des grands sinistres. Le diagnostic a également prouvé qu'en se réassurant, l'assureur s'est déchargé, ces dernières années, d'une partie non négligeable de ses engagements, en moyenne, à hauteur de 25% et 30% respectivement pour le traité N°1 et N°2. En outre, le recours à la Réassurance permet, d'une part d'améliorer le ratio S/P et d'une autre, de stabiliser le résultat technique en diminuant son écart type.

La deuxième partie du travail a porté sur la tarification des traités en XS. Différentes méthodes ont été alors envisagées : Une déterministe et une autre probabiliste. A l'encontre de la première méthode qui est assez simple à mettre en œuvre, la deuxième nécessite, d'une part de modéliser la fréquence et la sévérité, et d'une autre de calculer l'espérance du coût moyen du réassureur. A l'issue des résultats obtenus, les deux méthodes donnent des tarifs assez proches mais la méthode probabiliste reste privilégiée puisqu'elle permet de représenter la réalité des risques analysés.

Une fois avoir mis en place les méthodes de tarification, la partie suivante du travail a mis le point sur un ensemble de critères d'optimisation.

Le premier critère nous plonge directement au cœur du dilemme de l'investisseur : risquer plus pour gagner plus. En effet, moins l'assureur cède, plus l'espérance de son gain augmente et dans le même sens sa volatilité devient plus grande. Par ailleurs, nous avons prouvé que l'achat d'une Quote part n'est pas rentable pour l'assureur puisqu'elle ne lui permet pas d'améliorer son coefficient de variation du fait du transfert homothétique du risque.

Le deuxième critère traité au cours de ce mémoire est la Value At Risk. Il s'agit d'une mesure de risque incontournable dans la mesure où elle permet de quantifier les engagements de l'assureur dans les cas extrêmes. Toutefois, son calcul nécessite la connaissance de la

Conclusion

fonction de répartition de la charge nette de l'assureur. Comme cette dernière est difficile à déterminer, nous avons envisagé d'un côté deux approximations à savoir l'approximation normale et Normal Power et d'un autre la technique de simulation.

En retenant les résultats de la simulation, considérés comme fiables comparés aux approximations qui se basent sur des hypothèses fortes, nous avons trouvé que le montant nécessaire pour couvrir les sinistres dans 95% des cas diminue considérablement en se couvrant par l'XS comparé à une situation sans réassurance. A ce titre, l'assureur parviendra à se prémunir contre la sinistralité extrême et à rester solvable.

En parlant de solvabilité, il est important de noter que dans le domaine de l'assurance, cette notion prend tout son sens dans un cadre purement réglementaire. A cet effet, l'objet du troisième critère vise à analyser l'impact de la réassurance sur la marge de solvabilité réglementaire.

La réglementation actuelle prévoit une formule clause pour le calcul de la marge de solvabilité. En effet, pour le cas de la branche décès, celle-ci est basée essentiellement sur les durées résiduelles des capitaux sous risques et ne tient pas compte des taux de rétention inférieurs à 50%. Dans notre application, pour parvenir à un taux de couverture à hauteur de 120%, nous avons trouvé que les combinaisons de franchises des deux traités devraient baisser pour atteindre une valeur de 70 000 DH et 210 000 DH pour respectivement les traités 1 et 2.

En guise de conclusion, l'entrée en vigueur de la nouvelle directive Solvabilité II constituera un nouveau chantier permettant aux assureurs de mieux piloter leurs risques. En effet, la directive prévoit une meilleure analyse et compréhension des risques tout en accordant la possibilité aux assureurs de recourir à leur propre modèle d'évaluation.

A cet effet, il serait très intéressant de compléter ce travail en étudiant l'impact du nouveau cadre prudentiel sur la prise de décision quant aux choix du programme de réassurance et d'élaborer un modèle interne permettant de définir la stratégie optimale de réassurance.

Bibliographie

I. Bibliographie :

❖ Ouvrages

A. CHARPENTIER, M. DENUIT (2004) : « Mathématique de l'assurance non-vie - *Tome 1* : Principes fondamentaux de théorie du risque ».

C. HESS (2004), « Méthodes Actuarielles de l'Assurance Vie », *Edition Economica*.

C. PARTRAT, J. BESSON (2005), « Assurance non-vie : Modélisation, Simulation, Assurance Audit Actuariat ».

C. PARTRAT, J. BLONDEAU (2003), « La réassurance, approche technique », *Edition Economica*.

G. DEELSTRA, G. PLANTIN (2006), «Théorie du risque et réassurance », *Economica*.

P. PETEAUTON (2001), « Théories de l'assurance dommage », *Edition Dunod*.

❖ Notes de cours

A. DBICH (2013), Cours « Provisionnement », INSEA, Rabat.

A. OULIDI (2013), Cours «Réassurance », INSEA, Rabat.

F. MARRI (2013), Cours « Mathématiques de l'Assurance Non Vie », INSEA, Rabat

J. REINHARD (2004), Cours « Réassurance», INSEA, Rabat.

❖ Mémoires

A. MANUEL (2004), « Optimisation de la stratégie de réassurance en assurance emprunteur », *Mémoire Euria*.

A. STAT (2005), « Réassurance en assurance emprunteur », *Mémoire UPD*, Université Paris Dauphine.

Bibliographie

M. AUDREZET (2009), « Optimisation de la stratégie de réassurance en assurance emprunteur », *Mémoire EURIA*.

M. FAZAZI et A. DAHABI (2007), « Tarification et optimisation des traités en excédent des sinistres des branches auto », *Projet de fin d'étude*, INSEA, Rabat.

M. MAROUF et N. BOUQUES (2003), « Optimisation et tarification du traité de réassurance excédent de sinistre », *Projet de fin d'étude*, INSEA, Rabat.

M. POULIN (2012), « Analyse des solutions actuarielles en tarification des traités de réassurance non proportionnels Non Vie », *Mémoire CEA, 2012*

II. Webographie :

LA MAROCAINE VIE. *Nous connaître*. [en ligne]. Disponible à l'adresse <<http://www.lamarocainevie.ma/nous-connaître.html>>

LEGIFRANCE. *Code des assurances*. [en ligne] . Disponible à l'adresse <<http://www.legifrance.gouv.fr/>>

MINISTERE DE L'ECONOMIE ET DES FINANCES. Rapport d'activité des entreprises d'assurance et de réassurance au Maroc. [en ligne]. 2012 Disponible à l'adresse : <http://www.finances.gov.ma/Docs/2013/daps/3421_rapport_activite_secteurass_2012_fr_vf.pdf>

Annexes

Annexe 1 : Présentation du secteur de l'assurance au Maroc et de l'organisme d'accueil

I. Acteur, réglementation et chiffre clés du secteur marocain des assurances.

I.1. Acteurs

Les acteurs qui interviennent dans le secteur de l'assurance au Maroc sont les suivants :

- 15 entreprises d'assurance, la Société centrale de réassurance (réassureur national) et 3 mutuelles.
- Le réseau de distribution est composé d'environ 1472 agents et 366 courtiers.
- A côté de ce réseau de distribution classique, on trouve les banques et les bureaux de poste dont la contribution est en augmentation.
- La plupart des compagnies d'assurances ont des participations croisées avec des banques.

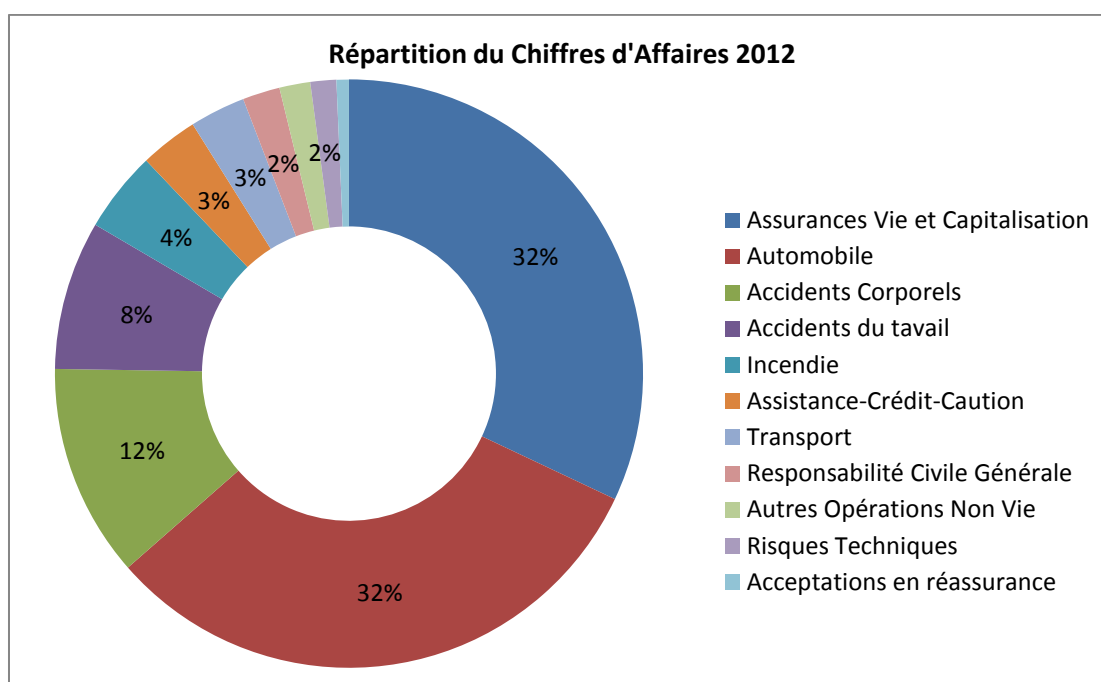
I.2. Réglementation

- Le secteur est régi par un code des assurances, et l'essentiel des textes d'application est en cours d'élaboration.
- Le contrôle du secteur est assuré par la Direction des assurances et de la prévoyance sociale (DAPS)

I.3. Les chiffres clés

- Le secteur a réalisé en 2012 un chiffre d'affaires d'environ 26,03 milliards de dirhams : 8,84 milliards de dirhams en assurance vie et 17,19 milliards de dirhams en assurance non vie.
- Le secteur marocain des assurances occupe la deuxième place sur le continent africain après l'Afrique du Sud, et la première place dans le monde arabe.

- Sur les dix dernières années, le secteur a réalisé un taux de croissance moyen de 6 %, porté essentiellement par la branche Vie qui représente à fin 2012 le tiers du chiffre d'affaires.
- 19,05 milliards de dirhams de prestations ont été distribués en 2012
- 105,74 milliards de dirhams couvrant l'intégralité des engagements pris par les entreprises d'assurances à l'égard des assurés.



II. Présentation de la Marocaine Vie (MV)

II.4. Aperçu et faits marquants:

Depuis sa création en 1977, La Marocaine-Vie, seule compagnie d'assurances et réassurances spécialisées au Maroc, n'a cessé d'évoluer et ce à travers le développement du créneau de l'assurance de personnes, la création d'une force de vente performante, l'adoption permanente d'une politique d'innovation. Fermement guidée par l'esprit innovateur, La Marocaine-Vie n'a cessé, depuis son existence sur le marché, de lancer des produits nouveaux.

Le fait marquant de l'année 2001, consiste dans la prise de contrôle de La Marocaine-Vie par le groupe Société Générale France Vie, sa filiale Sogécap, 5ème compagnie d'assurances vie en France, ainsi que la Société Générale Marocaine de Banques (SGMB).

Ceci étant, les actionnaires de la compagnie ont voulu ancrer l'entreprise à un grand groupe financier international lui permettant de pérenniser son développement.

L'offre bancassurance, conçue pour le réseau de Société Générale Marocaine des Banques, comprend une gamme de produits d'épargne, de prévoyance et d'hospitalisation, sans oublier l'assurance des emprunteurs.

II.5. Statut juridique

Raison Sociale :	La Marocaine-Vie filiale du Groupe Société Générale
Secteur d'activités :	Assurance et Réassurance
Forme juridique :	Entreprise régie par la loi n° 17-99 portant code des assurances
Date de création :	1977
Activité principale:	Assurance de personnes
Capital social :	231 750 000 DH
Effectif :	147 personnes

II.6. Métier de la Marocaine Vie

La Marocaine Vie est la seule compagnie au Maroc spécialisée dans les assurances de personnes. Elle a mis en place une organisation adéquate pour connaître les besoins de ses clients en matière d'assurance individuelle et collective. Elle y répond par une gamme de produits adaptés.

La Marocaine Vie commercialise :

Des produits aux particuliers :

- L'assurance emprunteur.
- L'épargne retraite individuelle, en dirhams ou en unités de compte, qui permet de compléter une pension retraite de base tout en bénéficiant d'incitations fiscales.
- L'épargne assurance vie individuelle, en dirhams ou en unités de compte, pour la constitution d'une épargne projet ou de prévoyance dans un cadre fiscal avantageux.
- L'épargne éducation pour préparer l'avenir des enfants des assurés.
- L'assurance maladie et hospitalisation.

- La prévoyance individuelle et l'assurance des emprunteurs.

Des produits aux entreprises :

- L'épargne retraite collective, en dirhams ou en unités de compte, qui permet de faire bénéficier certains salariés d'une rémunération complémentaire différée en dirhams ou en unités de compte (accès au marché financier).
- Indemnités de fin de carrière.
- Extinction du passif social (aux normes IFRS).
- Refinancement du compte courant d'associés.
- Retraite chapeau.

II.7. Actionariat de la Marocaine Vie

La répartition du capital de LA MAROCAINE VIE au 30 avril 2009 est come suit :

Actionnaires	%
Sogécap	74%
Société Générale Maroc	26%

Sogécap : Compagnie d'assurance vie et de capitalisation du Groupe Société Générale, qui est l'un des leaders de la bancassurance en France. Actuellement, Sogécap gère plus de 11 millions de contrats pour un encours supérieur à 90 milliards d'euros.

II.8. Chiffre d'affaire :

- En 2013, le chiffre d'affaire global a été de 1011 MDHs, Soit une part du marché de 11%
- La MAROCAINE VIE est le 4^{ième} assureur vie et capitalisation au MAROC.

Annexe 2 : Quelques démonstrations :

Cette annexe contient d'une part le calcul des estimateurs de maximum de vraisemblance des lois utilisées au cours de notre étude et d'une autre le calcul de la prime pure pour une loi de fréquence suivant Poisson et une loi de sévérité suivant la loi Binomiale négative.

III. Calcul des estimateurs de Maximum de Vraisemblance des lois tronquées :

III.9. Loi Log Normale.

La densité d'une loi Log Normale translatée est :

$$\left\{ \begin{array}{ll} f(x) = \frac{\exp\left(-1/2\left(\frac{\ln(x-x_0)-m}{\sigma}\right)^2\right)}{(x-x_0)\sigma\sqrt{2\pi}} & \text{si } x > x_0 \\ f(x) = 0 & \text{si } x < x_0 \end{array} \right.$$

Les moments de la loi Log Normale translatée sont donnés par :

$E(X) = x_0 + \exp\left(m + \frac{\sigma^2}{2}\right)$ $V(X) = \exp(2m + \sigma^2)(\exp(\sigma^2) - 1)$

Soit (X_1, \dots, X_n) notre échantillon censé suivre une loi de Log Normale. Le calcul de la vraisemblance, conduit à :

$$L(X, m, \sigma) = \prod_{i=1}^n f(x_i) = \frac{\exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\ln(x_i - x_0) - m}{\sigma}\right)^2\right)}{(\sigma\sqrt{2\pi})^n \prod_{i=1}^n (x_i - x_0)}$$

$$\text{Log}(L(X, m, \sigma)) = -n\text{Log}(\sigma\sqrt{2\pi}) - \sum_{i=1}^n \text{Log}(x_i - x_0) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\text{Log}(x_i - x_0) - m}{\sigma}\right)^2$$

$$\frac{\partial \text{Log}L}{\partial m} = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n \text{Log}(x_i - x_0) - m$$

$$\frac{\partial^2 \text{Log}L}{\partial m^2} = -1 \Rightarrow \text{La condition } \left(\frac{\partial^2 L}{\partial m^2}\right)_{\theta=\hat{\theta}} < 0 \text{ est toujours valide.}$$

$$\frac{\partial \text{Log}L}{\partial m} = 0 \Rightarrow \hat{m} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \text{Log}(x_i - x_0)$$

$$\frac{\partial \text{Log}L}{\partial \sigma} = -\frac{n}{\sigma} + \sum_{i=1}^n \frac{(\text{Log}(x_i - x_0) - m)^2}{\sigma^3}$$

$$\frac{\partial^2 \text{Log}L}{\partial \sigma^2} = \frac{n}{\sigma^2} - 3 \sum_{i=1}^n \frac{(\text{Log}(x_i - x_0) - m)^2}{\sigma^4}$$

$$\frac{\partial \text{Log}L}{\partial \sigma} = 0 \Rightarrow \hat{\sigma} = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\text{Log}(x_i - x_0))^2 - \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \text{Log}(x_i - x_0) \right)^2 \right)^{1/2}$$

III.10. Loi Exponentielle.

La densité d'une loi exponentielle est :

$$\begin{cases} f(x) = \lambda \exp(-\lambda(x - x_0)) & \text{si } x > x_0 \\ f(x) = 0 & \text{si } x \leq x_0 \end{cases}$$

Les moments de la loi exponentielle translatée sont donnés par :

$$\begin{aligned} E(X) &= x_0 + \frac{1}{\lambda} \\ V(X) &= \frac{1}{\lambda^2} \end{aligned}$$

Soit (X_1, \dots, X_n) notre échantillon censé suivre une loi Exponentielle. Le calcul de la vraisemblance, conduit à :

$$L(X, \lambda) = \prod_{i=1}^n f(x_i) = \lambda^n \exp\left(-\lambda \sum_{i=1}^n (x_i - x_0)\right)$$

$$\text{Log}(L(X, \lambda)) = n \text{Log}(\lambda) - \lambda \sum_{i=1}^n x_i - x_0$$

$$\frac{\partial \text{Log}L}{\partial \lambda} = \frac{n}{\lambda} - \sum_{i=1}^n x_i - x_0$$

$$\frac{\partial^2 \text{Log}L}{\partial \lambda^2} = -\frac{n}{\lambda^2} \Rightarrow \text{La condition } \left(\frac{\partial^2 L}{\partial \lambda^2}\right)_{\theta=\hat{\theta}} < 0 \text{ est toujours vérifiée.}$$

$$\frac{\partial \text{Log}L}{\partial \lambda} = 0 \Rightarrow \hat{\lambda} = \frac{n}{\sum_{i=1}^n \text{Log}(x_i - x_0)}$$

III.11. Loi de Pareto.

La densité d'une loi de Pareto est :

$$\begin{cases} f(x) = \alpha t^\alpha x^{-\alpha-1} & \text{si } x > x_0 \\ f(x) = 0 & \text{si } x \leq x_0 \end{cases}$$

Les moments de la loi de Pareto sont donnés par :

$$\begin{aligned} E(X) &= t \frac{\alpha}{\alpha - 1} \\ V(X) &= \frac{\alpha t^2}{(\alpha - 2)(\alpha - 1)^2} \end{aligned}$$

Soit (X_1, \dots, X_n) notre échantillon censé suivre une loi de Pareto. Le calcul de la vraisemblance, conduit à :

$$L(X, \alpha, x_0) = \prod_{i=1}^n f(x_i) = \alpha^n x_0^{n\alpha} \prod_{i=1}^n x_i^{-\alpha-1}$$

$$\text{Log}(L(X, \alpha, x_0)) = n \text{Log}(\alpha) + n\alpha \text{Log}(x_0) + (-\alpha - 1) \sum_{i=1}^n \text{Log}(x_i)$$

$$\frac{\partial \text{Log}L}{\partial \alpha} = \frac{n}{\alpha} + n \text{Log}(x_0) - \sum_{i=1}^n \text{Log}(x_i)$$

$$\frac{\partial^2 \text{Log}L}{\partial \alpha^2} = -\frac{n}{\alpha^2} \Rightarrow \text{La condition } \left(\frac{\partial^2 L}{\partial \alpha^2} \right)_{\theta=\hat{\theta}} < 0 \text{ est toujours vérifiée.}$$

$$\frac{\partial \text{Log}L}{\partial \alpha} = 0 \Rightarrow \hat{\alpha} = \frac{n}{\sum_{i=1}^n \text{Log} \left(\frac{X_i}{X_0} \right)}$$

III.12. Loi de Weibull.

La densité d'une loi de Weibull tradlatée est :

$$\begin{cases} f(x) = \lambda \alpha (x - x_0)^{-\alpha-1} \exp(-\lambda(x - x_0)^\alpha) & \text{si } x > x_0 \\ f(x) = 0 & \text{si } x \leq x_0 \end{cases}$$

Les moments de la loi de Weibull tradlatée sont donnés par :

$$\begin{aligned} E(X) &= x_0 + \frac{\Gamma\left(1 + \frac{1}{\lambda}\right)}{\theta^{\frac{1}{\lambda}}} \\ V(X) &= \frac{\Gamma\left(1 + \frac{2}{\alpha}\right) - \Gamma^2\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)}{\theta^{\frac{1}{\lambda}}} \end{aligned}$$

Soit (X_1, \dots, X_n) notre échantillon censé suivre une loi de Weibull. Le calcul de la vraisemblance, conduit à :

$$L(X, \lambda, \alpha, x_0) = \prod_{i=1}^n f(x_i) = (\lambda \alpha)^n \prod_{i=1}^n (x_i - x_0)^{\alpha-1} \exp\left(-\lambda \sum_{i=1}^n (x_i - x_0)^\alpha\right)$$

$$\text{Log}(L(X, \lambda, \alpha, x_0)) = n \text{Log}(\lambda \alpha) + \sum_{i=1}^n (x_i - x_0)^{\alpha-1} - \lambda \sum_{i=1}^n (x_i - x_0)^\alpha$$

$$\frac{\partial \text{Log} L}{\partial \lambda} = \frac{n}{\lambda} - \sum_{i=1}^n (x_i - x_0)^\alpha$$

$$\frac{\partial^2 \text{Log} L}{\partial \lambda^2} = -\frac{n}{\lambda^2} \Rightarrow \text{La condition } \left(\frac{\partial^2 L}{\partial \lambda^2}\right)_{\theta=\hat{\theta}} < 0 \text{ est toujours vérifiée.}$$

$$\frac{\partial \text{Log} L}{\partial \alpha} = \frac{n}{\alpha} + \sum_{i=1}^n \text{Log}(x_i - x_0)(x_i - x_0)^{\alpha-1} - \lambda \sum_{i=1}^n \text{Log}(x_i - x_0)(x_i - x_0)^\alpha$$

Ces équations ne sont pas résolubles analytiquement, toutefois il existe sous le logiciel R , des Packages qui permettent de les résoudre via des méthodes numériques.

III.13. La loi de Poisson.

Nous rappelons l'expression de la loi de probabilité d'une loi de Poisson $P(\lambda)$

$$P(N = n) = \frac{\lambda^n \exp(-\lambda)}{n!} \quad \text{pour } \lambda > 0$$

Les moments de la loi de Poisson translatée sont donnés par :

$$E(N) = V(N) = \lambda$$

Soit (N_1, \dots, N_n) notre échantillon censé suivre une loi de Poisson. Le calcul de la vraisemblance, conduit à :

$$L(X, \lambda) = \prod_{i=1}^n f(x_i) = \exp(-\lambda n) \prod_{i=1}^n \lambda^{N_i} \frac{1}{\prod_{i=1}^n N_i!}$$

$$\text{Log}(L(N, \lambda)) = -n\lambda + \sum_{i=1}^n N_i \text{Log}(\lambda) - \sum_{i=1}^n N_i!$$

$$\frac{\partial \text{Log}L}{\partial \lambda} = -n + \frac{\sum_{i=1}^n N_i}{\lambda}$$

$$\frac{\partial^2 \text{Log}L}{\partial \lambda^2} = -\frac{\sum_{i=1}^n N_i}{\lambda^2} \Rightarrow \text{La condition } \left(\frac{\partial^2 L}{\partial \lambda^2} \right)_{\theta=\hat{\theta}} < 0 \text{ est toujours vérifiée.}$$

$$\frac{\partial \text{Log}L}{\partial \lambda} = 0 \Rightarrow \hat{\lambda} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n N_i$$

Calcul de la prime pure : (page 48-49, La réassurance, Approche technique)

La prime pure de l'excédent de sinistre correspond à l'espérance mathématique de S_N .

On considère un $pXSf$ tel que : $l = p + f$

Sous l'hypothèse d'indépendance entre X et N , on a :

$$E(S_N) = E\left(\sum_{i=1}^N X_i\right) = E(X)E(N)$$

On a :

$$E(X) = lP(X > l) - fP(X \geq f) + EX(1_{(f \leq X \leq l)})$$

Si X suit une loi $LN(t; m; \sigma)$ alors $X - t$ suit une loi $Ln(m; \sigma)$

$$P(X > f) = P(X - t > f - t) = 1 - \Phi\left(\frac{\ln(f - t) - m}{\sigma}\right)$$

$$\begin{aligned} E(X1_{(X > f)}) &= E\left((x - t)1_{(X-t) > (f-t)}\right) + tP(X > f) \\ &= e^{m+\sigma^2/2} \left[1 - \Phi\left(\frac{\ln(f - t) - (m + \sigma^2)}{\sigma}\right)\right] + t \left[1 - \Phi\left(\frac{\ln(f - t) - m}{\sigma}\right)\right] \end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned} E(S^{\text{reass}}) &= \lambda \left[l \left(1 - \Phi\left(\frac{\ln(l - t) - m}{\sigma}\right)\right) - f \left(1 - \Phi\left(\frac{\ln(-t) - m}{\sigma}\right)\right) \right. \\ &\quad \left. + e^{m+\sigma^2/2} \left(\Phi\left(\frac{\ln(l - t) - (m + \sigma^2)}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\ln(f - t) - (m + \sigma^2)}{\sigma}\right)\right) \right. \\ &\quad \left. + t \left(\Phi\left(\frac{\ln(l - t) - m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\ln(f - t) - m}{\sigma}\right)\right) \right] \end{aligned}$$

Avec Φ la fonction de répartition d'une loi $N(0,1)$

Annexe 3 : Code sous le logiciel R

calcul de la prime de réassurance

#lamda=nombre moyen de sinistres

t=coefficient de troncature

#m=le paramètre mu d'une loi log-normale

#sigma=le paramètre écart-type d'une loi log-normale

l=la limite du traité

f=franchise du traité

```
cout=function(lamda,t,m,sigma,l,f)
{
  lamda*(l*(1-pnorm((log(l-t)-m)/sigma))-f*(1-pnorm((log(f-t)-m)/sigma))
    +exp(m+(sigma^2)/2)*(pnorm((log(l-t)-(m+sigma^2))/sigma)-(pnorm((log(f-t)-
(m+sigma^2))/sigma))))
    +t*(pnorm((log(l-t)-m)/sigma)-pnorm((log(f-t)-m)/sigma)))
}
```

calcul de la VAR par la simulation

nu=nombre de simulations

n= simulation d'un vecteur de loi poisson de paramètre lamda

x=simulation d'un vecteur de loi log-normale de paramètres mu et sigma

```
nu=100000

val_simulation=function(f)

{

n=rpois(nu,lamda)

x=rlnorm(nu,mu,sigma)

z=x-pmin(pmax(x-f,0), l-f)

y=numeric(nu)

for (j in 1:nu) {

y[j]=sum(z[1:n[j] ] )

}

quantile(y,0.995)

}
```