



المندوبية السامية للتخطيط  
HAUT-COMMISSARIAT AU PLAN

ROYAUME DU MAROC  
\*\_\*\_\*\_\*\_\*  
HAUT COMMISSARIAT AU PLAN  
\*\_\*\_\*\_\*\_\*\_\*\_\*\_\*\_\*\_\*\_\*



INSTITUT NATIONAL  
DE STATISTIQUE ET D'ECONOMIE APPLIQUEE

INSEA

## Projet de Fin d'Etudes

\*\*\*\*\*

### Application des normes de la solvabilité basée sur les risques sur des produits d'assurance non vie

Préparé par : Mme BELLAJI Salma

Mme BOUJDAA Khadija

Sous la direction de : M. MARRI Fouad (INSEA)

M. FADILI Soufiane (SANAD)

*Soutenu publiquement comme exigence partielle en vue de l'obtention du*

## Diplôme d'Ingénieur d'Etat

Filière : Actuariat-Finance

*Devant le jury composé de :*

- M. MARRI Fouad (INSEA)
- M. SAID Khalil (INSEA)
- M. FADILI Soufiane (SANAD)

**Juin 2019 / PFE N°11**



## ***Résumé :***

La préoccupation du risque et de la solvabilité des entreprises d'assurance occupe actuellement une place prépondérante, ceci s'illustre par l'avènement de plusieurs projets de lois structurants notamment celui de « la solvabilité basée sur les risques » communément connu sous SBR, lancé par l'Autorité de contrôle des assurances et de la prévoyance sociale (ACAPS).

Ainsi, L'ACAPS s'inscrit dans une perspective d'évolution de la réglementation en matière de solvabilité en apportant de nombreux changements significatifs à la réglementation actuelle. En effet, la réforme SBR privilégie le rôle des fonds propres au sein de la compagnie d'assurance, et donc a apporté des modifications au niveau des techniques d'évaluation de la compagnie, à savoir la valorisation à la valeur de marché de l'actif liquide ,qui est disponible, et du passif illiquide manifestée par des niveaux de provisions techniques incorporant le Best Estimate ainsi que des marges de risques adéquates ou Risk Margin, puis le calcul d'un capital de solvabilité pour remédier aux évolutions défavorables de sinistralité et maîtriser le risque.

Le présent rapport s'intéresse alors au calcul des provisions techniques prudentielles et l'évaluation du niveau des fonds propres notamment le CSR relatif au risque de provisionnement.

Cette étude sera menée sur trois garanties à savoir la RC Auto Corporel, la RC Auto Matériel et la branche hors RC.

## **Mots clés :**

Solvabilité basée sur les risques, Best Estimate non vie, Provisions techniques, Marge de Risque, Capital de solvabilité requis, Chain Ladder, Chain London, DeVyllder, Mack, Bootstrap, GLM, Merz & Wüthrich, Formule Standard.

## ***Dédicace :***

***Je dédie ce travail***

*A mes très chers parents,*

*Pour votre amour démesuré et soutien inconditionnel, pour votre patience et vos sacrifices. J'espère être à la hauteur de l'image que vous faites de moi.*

*A mes chères sœurs,*

*En témoignage de l'attachement, de l'amour et de l'affection que je porte pour elles.*

*A ma famille ainsi que mes amis.*

*A tous ceux qui, de près ou de loin, ont contribué à la réalisation de ce travail.*

***BOUJDAA Khadija***

## ***Dédicace :***

***Je dédie ce travail,***

*A mes chers parents, avec tous mes sentiments de respect et d'amour, pour tous les sacrifices déployés pour m'élever et assurer mon éducation dans les meilleures conditions. Aucun mot n'exprimera ma profonde gratitude et reconnaissance pour tout le soutien et la confiance qu'ils m'accordent.*

*A mon petit frère qui a toujours été de mes côtés.*

*A toute ma famille qui n'a jamais cessé de me soutenir et de m'encourager.*

*A tous mes amis.*

*A toutes les personnes qui ont contribué à la réalisation de ce travail.*

***BELLAJI Salma***

# *Remerciements*

Nous tenons à exprimer notre grande reconnaissance à M. FADILI Soufiane, encadrant et responsable actuariat au sein de la compagnie SANAD Assurance, pour sa disponibilité, son encadrement, ainsi que pour ses conseils et remarques instructives qui nous seront certes, d'une très grande utilité dans le futur.

De même, nous tenons à remercier Mme MOUSSAOUI Salima pour ses directives et conseils.

Nos remerciements s'adressent également à notre encadrant interne M. MARRI Fouad d'avoir accepté de nous encadrer et aux membres du jury pour l'honneur qu'ils nous font de juger ce travail.

Nos gratitude et estime vont finalement au corps professoral de l'Institut National de Statistique et d'Économie Appliquée qui veille à nous assurer une formation de valeur et à nous inculquer les grandes valeurs du professionnalisme.

# ***Table des matières :***

Résumé :.....	3
Dédicace :.....	4
Dédicace :.....	5
Remerciements .....	6
Table des matières : .....	7
Liste des abréviations :.....	10
Liste des figures :.....	11
Liste des tableaux :.....	12
Introduction :.....	14
Partie I : Contexte et Cadre réglementaire de la réforme SBR .....	16
Chapitre 1 : Marché de l'assurance au Maroc.....	17
I. Catégories d'assurance :.....	17
1. L'assurance de personnes .....	17
2. L'assurance des dommages.....	17
II. Chiffres clés du secteur .....	18
1. Parts de marché des entreprises d'assurances .....	19
2. Primes émises au titre des affaires directes.....	19
Chapitre 2 : Réglementation prudentielle actuelle .....	21
I. Les provisions techniques.....	22
II. Des actifs suffisants et de qualité :.....	24
III. La marge de solvabilité.....	25
IV. Limites de la première réglementation prudentielle au Maroc.....	25
Chapitre 3 : Aperçu sur la SBR.....	27
I. Objectifs de la réforme :.....	27
III. Organisation en trois piliers .....	28
1. Pilier I : Exigences quantitatives .....	28
3. Pilier II : Aspects qualitatifs et contrôle.....	30
4. Pilier III : Reporting et informations du public .....	32
IV. Focus sur le pilier 1 de la réforme SBR .....	33
1. Bilan prudentiel : .....	33
2. Les provisions techniques.....	34
3. Les fonds propres : .....	36
4. Evaluation du capital de solvabilité requis CSR : .....	37

Chapitre 4 : Evaluation du Best Estimate en non vie .....	39
I.    Le Best Estimate des engagements .....	39
1.    Best Estimate pour sinistres .....	39
2.    Best Estimate pour primes .....	40
II.   Best Estimate pour frais de gestion.....	40
Partie II : Evaluation des provisions prudentielles .....	41
Chapitre 1 : Construction de la courbe de taux zéro-coupon .....	43
I.    Courbe empirique :.....	44
1.    La transformation des taux :.....	44
2.    Interpolation linéaire :.....	44
3.    La méthode Bootstrap :.....	45
II.   Courbe théorique : .....	46
1.    Le modèle Vasicek : .....	46
2.    Le modèle CIR (Cox, Ingersoll et Ross) : .....	49
III.  Automatisation de la construction de la courbe des taux .....	50
Chapitre 2 : Calcul de la meilleure estimation des engagements pour sinistres .....	54
I.    Les méthodes de provisionnement :.....	54
1.    Les méthodes déterministes : .....	56
2.    Les méthodes stochastiques : .....	61
II.   Applications et résultats.....	70
1.    Résultats des méthodes déterministes .....	70
3.    Gestion de la liquidation incomplète des triangles : Estimation du « Tail Factor » .....	80
4.    Résultats des méthodes stochastiques .....	83
III.  Automatisation de l'évaluation de la PSAP et de la meilleure estimation des engagements pour sinistres. ....	103
Chapitre 3 : Calcul de la meilleure estimation des primes, frais de gestion et de la marge de risque :.....	105
I.    Meilleure estimation des engagements pour primes : .....	105
1.    Méthode de calcul :.....	105
2.    Application :.....	106
II.   Meilleure estimation des frais de gestion : .....	110
1.    Méthode de calcul :.....	110
2.    Application :.....	111
III.  Calcul de la marge de risque .....	113
Partie III : Détermination du risque de provisionnement dans le cadre du CSR.....	115
Chapitre 1 : Le risque de provisionnement : 2 approches d'estimation .....	116

1. Définition du risque de provisionnement .....	116
2. L'approche Formule Standard .....	117
3. Approche Modèle interne .....	118
Chapitre 2 : Présentation des Claims Development Result (CDR).....	119
Chapitre 3 : Le modèle de Merz-Wüthrich :.....	122
I. Présentation du modèle .....	122
1. Les hypothèses sous-jacentes du modèle : .....	122
2. Vue prospective versus vue rétrospective : .....	123
3. Estimations : .....	124
4. Comparaison avec la formule de Mack .....	126
5. Critiques du modèle de Merz et Wüthrich .....	127
II. Application.....	128
Chapitre 4 : La méthode du re-reserving : le Bootstrap.....	131
I. Principe .....	131
II. Simulation par une méthode de Bootstrap modifiée à un an.....	133
III. Critique de la méthode.....	134
IV. Application.....	134
Chapitre 5 : Calcul du CSR lié au risque de provisionnement .....	136
1. Calcul du CSR selon la formule standard .....	136
2. Calcul du CSR selon l'optique modèle interne .....	136
Conclusion : .....	139
Bibliographie :.....	141
Annexe :.....	142

## ***Liste des abréviations :***

ACAPS : Autorité de Contrôle des Assurances et de la Prévoyance Sociale.

SBR : Solvabilité Basée sur les Risques

PSAP : Provision pour sinistres à payer

PPNA : Provision pour primes non acquises

IFRS : International Financial Reporting Standards

CSR : Capital de solvabilité requis

MCR : Minimum de Capital Requis

VaR : Value at risk

IBNR: Incured but not reported

BE: best estimate

CF: Cash flows

CIR : Cox, Ingersoll et Ross

RC : responsabilité civile

MSEP: Mean Squared Errors Predicted

GLM: generalized linear model

CDR : Claims development result

## Liste des figures :

Figure 1: Répartition des primes émises par catégorie d'assurances non vie en 2016 et 2017 .....	20	
Figure 2: Représentation du bilan dans le cadre de l'ancienne réglementation. ....	22	
Figure 3: Les 3 piliers de la réforme SBR .....	28	
Figure 4 : Représentation du MCR et du CSR. ....	29	
Figure 5: Récapitulatif sur les objectifs du pilier 2. ....	31	
Figure 6 : Récapitulatif sur les objectifs du pilier 3. ....	32	
Figure 7: Evolution du bilan entre l'ancienne réglementation et SBR. ....	33	
Figure 8: Les provisions techniques dans le cadre de SBR. ....	35	
Figure 9: Cartographie modulaire des risques dans SBR.....	38	
Figure 10: Estimation de la courbe des taux à la date d'inventaire 29-12-2017 avec la méthode Bootstrap.....	52	
Figure 11: Prévision des taux futurs à la date 31-12-2018 avec la méthode Vaçisek .....	53	
Figure 12: Prévision des taux futurs à la date 31-12-2018 avec la méthode CIR.....	53	
Figure 13: Cadence de liquidation des règlements des sinistres par année de survenance.....	54	
Figure 14: Triangle de liquidation des sinistres.....	55	
Figure 15: Vérification de la première hypothèse de la méthode Chain Ladder sur les garanties étudiées pour les 3 premières années de développement.....	71	
Figure 16: Vérification de la deuxième hypothèse de la méthode Chain Ladder sur les garanties étudiées pour les 3 premières années de développement.....	73	
Figure 17: Vérification de la troisième hypothèse de la méthode Mack pour les garanties étudiées pour les 3 premières années de développement. ....	86	
Figure 18:QQ-plot des 3 garanties selon les lois Gamma et Log-Normale. ....	94	
Figure 19: La distribution du best estimate pour les 3 garanties obtenue par Bootstrap. ....	100	
Figure 20: La distribution de la PSAP pour les 3 garanties obtenue par Bootstrap. ....	101	
Figure 21: Aperçu sur l'application fournissant la PSAP et le BE sinistre .....	103	
Figure 22: Schéma représentant l'information disponible deux années calendaires successives. ....	119	
Figure 23: Principe du CDR. ....	120	
Figure 24: Illustration de la simulation des paiements de la diagonale de l'année calendaire suivante .....	132	
Figure 25: Illustration de la méthode du Bootstrap modifiée pour l'obtention du risque à un an ....	133	
Figure 26: Distribution de CDR de la garantie RC matériel	Figure 27 : Distribution de CDR de la garantie RC corporel .....	134
Figure 28 : Distribution de CDR de la garantie HRC .....	135	
Figure 29: Organigramme de la SANAD. ....	142	
Figure 30: Evolution des primes émises entre 2013 et 2016. ....	143	

## *Liste des tableaux :*

Tableau 1: Evolution des parts de marché des entreprises d'assurances au titre des affaires directes en 2017.....	19
Tableau 2: Evolution des émissions d'assurances par sous catégories entre 2016-2017.....	19
Tableau 3: Exemples de familles de lois exponentielles. ....	65
Tableau 4 : Les coefficients de variation par année de développement. ....	71
Tableau 5:Coefficients de Passage selon le modèle de Chain Ladder.....	73
Tableau 6 : Les cadences de paiements par année de développement .....	74
Tableau 7 : Réserves annuelles sous le modèle de Chain Ladder pour les 3 garanties. ....	74
Tableau 8: Les cash-flows futurs estimés par Chain Ladder pour les 3 garanties.....	75
Tableau 9: Les réserves totales et les best estimate des différentes garanties estimés par Chain Ladder.....	75
Tableau 10: Estimation des paramètres de régression de la méthode London Chain. ....	75
Tableau 11: Les réserves annuelles sous le modèle de London Chain.....	76
Tableau 12: Les cash-flows futurs estimés par la méthode London Chain. ....	76
Tableau 13: Les réserves totales et les best estimate des différentes garanties estimés par London Chain.....	76
Tableau 14: Résultats de l'estimation des paramètres de la méthode DeVyllder. ....	77
Tableau 15: Les réserves annuelles sous le modèle de DeVyllder. ....	77
Tableau 16: Les cash-flows futurs estimés par la méthode DeVyllder. ....	77
Tableau 17:Les réserves totales et les best estimate des différentes garanties estimés par DeVyllder. ....	78
Tableau 18: Récapitulatif des best estimate obtenues par les méthodes déterministes. ....	78
Tableau 19: Récapitulatif des écarts relatifs des best estimate par rapport à celui de Chain Ladder..	78
Tableau 20: Les trois autres lois principalement utilisées pour l'ajustement des facteurs de développement. ....	81
Tableau 21: Résultat de la régression des 3 méthodes du tail factor. ....	81
Tableau 22: Les tails factor obtenus pour les 3 garanties. ....	82
Tableau 23: La PSAP et le best estimate obtenu pour les 3 garanties. ....	83
Tableau 24: Vérification de la première hypothèse de Mack par le test de la médiane. ....	85
Tableau 25: Intervalle de confiance du test de la médiane. ....	85
Tableau 26: Estimation des volatilités du triangle des règlements.....	87
Tableau 27: Les erreurs de prédiction de l'estimation des réserves annuelles sous le modèle de Mack pour les 3 garanties. ....	88
Tableau 28: Les intervalles de confiance au seuil de 5% des réserves annuelles pour le modèle de Mack selon la loi Normale. ....	90
Tableau 29: Les intervalles de confiance au seuil de 5% des réserves annuelles pour le modèle de Mack selon la loi Log-Normale. ....	91
Tableau 30: Les erreurs de prédiction de l'estimation de la réserve globale sous le modèle de Mack pour les 3 garanties. ....	92
Tableau 31:Les intervalles de confiance au seuil de 5% de la réserve globale pour le modèle de Mack selon la loi.....	92
Tableau 32: Calcul du quantile 75% de la variable R.....	93
Tableau 33: Les réserves annuelles sous le modèle de GLM-Gamma. ....	95

Tableau 34: Les cash-flows futurs estimés par la méthode de GLM-Gamma.....	95
Tableau 35: La réserve totale et les best estimate des différentes garanties estimées par GLM-Gamma.....	95
Tableau 36: Les statistiques relatives à la qualité d'ajustement du modèle GLM-Gamma.....	97
Tableau 37: Les réserves annuelles sous le modèle de GLM Log-Normal..	98
Tableau 38: Les cash-flows futurs estimés par la méthode de GLM Log-Normal.....	98
Tableau 39: La réserve totale et les best estimate de différentes garanties estimées par GLM Log-Normal.....	98
Tableau 40: Les statistiques relatives à la qualité d'ajustement du modèle GLM Log-Normal.....	99
Tableau 41: Statistiques de la distribution de la PSAP et le best estimate de la méthode Bootstrap des 3 garanties.....	100
Tableau 42: Intervalles de confiance de la PSAP et du best estimate de la méthode Bootstrap au seuil de 5% selon la loi Log-Normal.....	101
Tableau 43: Calcul du quantile 75%.....	102
Tableau 44: Comparaison entre les deux méthodes Bootstrap et Mack.....	102
Tableau 45: Primes émises et acquises des 2 garanties RC et hors RC.....	106
Tableau 46: Calcul de la PPNA à la date d'inventaire 2017.....	107
Tableau 47: Les charges ultimes pour les 3 derniers exercices de survenance.....	107
Tableau 48: Calcul du Ratio combiné.....	107
Tableau 49: Estimation des taux de renouvellement.....	108
Tableau 50: Primes futures estimées de 2018 et 2019.....	108
Tableau 51 : Primes futures nettes d'acquisitions estimées de 2018 et 2019.....	109
Tableau 52: Flux de règlements futurs pour RC et hors RC.....	109
Tableau 53: Calcul de la meilleure estimation des engagements pour primes.....	110
Tableau 54: Best estimate pour sinistres projetés.....	111
Tableau 55: Calcul du taux de frais de gestion moyen.....	112
Tableau 56: Montants des frais de gestion futurs pour RC et hors RC.....	112
Tableau 57: Calcul de la meilleure estimation des frais de gestion.....	112
Tableau 58: Calcul de la marge de risque.....	114
Tableau 59: Montant des provisions prudentielles des garanties RC et HRC.....	114
Tableau 60: Vérification de la condition d'usage de Merz & Wüthrich.....	128
Tableau 61: Erreur quadratique moyenne par année de survenance et totale.....	128
Tableau 62: Comparaison de la volatilité à l'ultime selon Mack à celle à un an introduit par Merz & Wüthrich.....	129
Tableau 63 : Statistiques de la variable CDR.....	135
Tableau 64: Montant du CSR des garanties RC, HRC et CSR total selon la formule standard.....	136
Tableau 65: Montant du CSR pour les 3 garanties selon le modèle interne.....	137

## ***Introduction :***

L'assurance est un vecteur de transfert des risques : l'assuré va transférer ses risques à un assureur qui y fera face moyennant le paiement d'une prime. Le cycle de production de l'assurance est inversé. L'activité est alors directement visée par ces mesures du fait de sa spécificité. En effet, l'assureur ayant encaissé les primes de ses assurés doit pouvoir faire face aux engagements qu'il a pris envers eux. Pour cela, l'assureur doit évaluer correctement le coût de la sinistralité future, afin d'encaisser suffisamment de primes pour couvrir ses engagements vis-à-vis de ses assurés et en définitive d'être solvable.

Le projet de circulaire Solvabilité Basée sur les Risques (SBR) lancé par l'ACAPS en avril 2017, vise à une refonte en profondeur des règles existantes. Cette circulaire s'inspire de la réglementation européenne Solvabilité 2 sans être transposée en l'état.

Par le biais de cette directive, les autorités souhaitent s'affirmer comme défenseurs des intérêts des assurés en y voyant un double objectif : l'uniformisation du secteur des assurances et une meilleure estimation des risques auxquels sont exposés les organismes d'assurances.

Notre projet consiste ainsi à évaluer les provisions techniques prudentielles des 3 garanties RC Auto Corporel, RC Auto Matériel et hors RC, et ce par des méthodes déterministes et stochastiques, ainsi que la quantification du capital de solvabilité à immobiliser par l'évaluation du risque de provisionnement.

Dans la première partie nous présenterons le marché de l'assurance Marocain, et nous attacherons à mettre en place le contexte dans lequel s'inscrit la nouvelle réforme en revenant sur la réglementation actuelle et en décrivant la réforme SBR.

Dans la seconde partie, nous procéderons à la construction de la courbe des taux utilisée dans l'actualisation des flux de trésorerie futurs, ensuite nous présenterons les différentes méthodes de provisionnement déterministes et stochastiques pour l'évaluation de la meilleure estimation des engagements pour sinistres. Enfin, nous procéderons au calcul de la meilleure estimation des engagements pour primes, celle des frais de gestion, et la marge de risque.

Dans la dernière partie, nous étudierons le risque de sous-évaluation du montant des provisions techniques sur un horizon de temps d'un an. Pour ce faire, nous nous intéresserons au modèle de Merz & Wüthrich qui fournit une formule fermée de l'erreur de prédiction à un an. Puis, nous étudierons une méthode de simulation (« Bootstrap à un an ») qui permet d'obtenir une distribution complète des provisions. Nous verrons ainsi que différentes alternatives à la Formule Standard existent et peuvent permettre à la compagnie de mieux modéliser les spécificités liées à son profil de risque et d'économiser en fonds propres exigés.

# **Partie I : Contexte et Cadre réglementaire de la réforme SBR**

Dans tout pays, le système financier est incontournable dans la stimulation de la croissance, à travers la collecte et l'injection de fonds dans les rouages de l'économie. Dans ce contexte, le secteur des assurances, entre autres, joue un rôle important. Il ne cesse de se développer, que ce soit par les sommes importantes qu'il draine ou au niveau des tendances lourdes qui le caractérisent ces dernières années.

L'insolvabilité est le principal risque financier auquel sont confrontées les compagnies d'assurance et de réassurance. Dans ce cadre, la réforme SBR vise à renforcer la solidité financière de ces compagnies et améliorer la protection des assurés.

Dans cette partie nous allons aborder les caractéristiques du marché de l'assurance Marocain, pour ensuite expliquer les dispositions du projet de circulaire SBR.

# Chapitre 1 : Marché de l'assurance au Maroc

## I. Catégories d'assurance :

On distingue deux grandes catégories d'assurances : celles qui couvrent une personne physique et celles qui couvrent les biens. Mais, il est également possible de souscrire plusieurs assurances dans un même contrat. On parle alors de « multirisques ».

### 1. L'assurance de personnes

Une assurance de personnes a pour objet de couvrir les risques relatifs aux individus comme les accidents corporels, la maladie, le décès ou encore l'invalidité.

On trouve dans cette catégorie :

- **Les assurances maladie**, qui comprennent aussi bien la couverture de base obligatoire que les éventuelles complémentaires.
- **Les assurances accident**, qui protègent en cas d'accident en couvrant les frais médicaux, mais aussi procurent d'éventuelles rentes en cas d'invalidité ou décès.
- **Les assurances vie**, qui permettent aussi bien d'épargner un capital disponible à la retraite que d'assurer à des proches le versement d'un certain montant en cas de décès. Dans le cas d'une assurance vie, plusieurs individus peuvent ainsi être assurés.
- **La prévoyance professionnelle**, qui permet aussi bien de se constituer un capital pour sa retraite que d'assurer des rentes en cas d'invalidité.

### 2. L'assurance des dommages

L'assurance des dommages permet d'obtenir une indemnisation en cas de sinistre.

Il existe deux types d'assurances de dommages :

- **Responsabilité** : Lorsqu'un individu commet une faute et qu'un tiers subit de ce fait un dommage, il voit sa responsabilité engagée et doit alors réparer le préjudice encouru par le tiers lésé.

Le régime de la responsabilité requiert trois conditions : une faute, un préjudice et un lien de causalité entre la faute et le préjudice. Dans les assurances de responsabilité, l'assureur s'engage à indemniser à la place de l'assuré le tiers lésé par sa faute.

- **Biens matériels** : un individu peut également couvrir ses biens contre des périls le menaçant. Il peut ainsi assurer son véhicule contre le vol, son domicile contre l'incendie, ses bagages contre leur perte, etc. On parle dans ce cas d'assurances dommages, car elle sert à indemniser le préjudice résultant d'une atteinte aux biens de l'assuré, et donc de réparer le dommage qui en résulte.

## II. Chiffres clés du secteur

Le marché marocain d'assurance compte actuellement vingt-trois entreprises d'assurances et de réassurance (EAR), dont dix-neuf entreprises commerciales et quatre mutuelles :

- Huit entreprises pratiquent aussi bien les opérations d'assurances non vie que les opérations d'assurances vie et capitalisation (SANAD, Wafa assurance, RMA, Saham, Axa, Alliance, Atlanta, Mutuelle Centrale Marocaine d'Assurance)
- Trois se limitent aux opérations d'assurances non vie (Mutuelle Centrale Marocaine D'Assurance MAMDA, Mutuelle d'Assurance des Transporteurs Unis MATU, Compagnie d'Assurance Transport)
- Deux se spécialisent dans les opérations d'assurances vie et capitalisation (La marocaine vie, Mutuelle Attamine Chaabi)
- Cinq pratiquent les opérations d'assistance (Saham assistance, Axa assistance, Chaabi assistance, Wafa Ima Assistance WIA, Maroc Assurance Internationale)
- Trois pratiquent exclusivement l'assurance-crédit-caution (ACMAR, COFACE Maroc...) et deux entreprises sont spécialisées dans la réassurance (Société Centrale de Réassurance SCR, MAMDARE).

## 1. Parts de marché des entreprises d'assurances

Notons que seuls les 10 premiers assureurs marocains participent à hauteur de 91,5% du chiffre d'affaires global et que les cinq premiers collectent, à eux seuls, près de 69,6%.

Rang	Entreprises d'assurances et de réassurance	Part de marché		
		Vie	Non Vie	Total
1	Wafa Assurance	26,4%	16,6%	20,9%
2	RMA Assurance	18,7%	14,2%	16,2%
3	SAHAM Assurance	6,1%	17,2%	12,4%
4	AXA Assurance	8,5%	12,3%	10,6%
5	Mutuelle Attamine Chaabi	21,9%		9,5%
6	ATLANTA	2,5%	8,5%	5,9%
7	SANAD	2,2%	7,1%	5,0%
8	La Marocaine Vie	9,7%	0,5%	4,5%
9	Mutuelle Centrale Marocaine d'Assurance	3,8%	2,9%	3,3%
10	ALLIANZ MAROC	0,1%	5,6%	3,2%
11	Mutuelle Agricole Marocaine d'Assurance		4,2%	2,4%
12	Compagnie d'Assurance Transport		3,1%	1,7%
13	SAHAM Assistance		2,1%	1,2%
14	Maroc Assurance International		2,0%	1,1%
15	Mutuelle d'Assurance des Transporteurs Unis		1,3%	0,7%
16	WIA		1,0%	0,6%
17	ACMAR		0,6%	0,3%
18	AXA Assistance		0,5%	0,3%
19	COFACE MAROC		0,2%	0,1%
20	CHAABI Assistance		0,0%	0,0%

Tableau 1: Evolution des parts de marché des entreprises d'assurances au titre des affaires directes en 2017

## 2. Primes émises au titre des affaires directes

En millions de dirhams	2016	2017	Part dans le total	Variation 2017/2016
	<b>Opérations non-vie</b>	<b>20 622,1</b>	<b>21 751,0</b>	<b>56,1%</b>
Véhicules terrestres à moteur	9 953,8	10 481,7	27,1%	5,3%
Dont Responsabilité civile	8 543,8	8 908,8	23,0%	4,3%
Accidents corporels - Maladie - maternité	3 652,8	3 922,2	10,1%	7,4%
Dont Maladie – maternité	3 022,0	3 257,8	8,4%	7,8%
Accidents du travail et maladies et professionnelles (AT & MP)	2 174,1	2 222,5	5,7%	2,2%
Incendie et éléments naturels	1 318,4	1 331,7	3,4%	1,0%
Assistance - crédit – caution	1 331,1	1 415,1	3,7%	6,3%
Transport	578,0	604,9	1,6%	4,7%
Responsabilité civile générale	550,2	548,9	1,4%	-0,2%
Assurances des risques techniques	329,3	242,3	0,6%	-26,4%
Autres opérations	734,5	979,4	2,5%	33,3%
<b>Opérations vie et capitalisation</b>	<b>14 292,8</b>	<b>16 984,7</b>	<b>43,9%</b>	<b>18,8%</b>
Epargne	11 087,0	13 617,4	35,2%	22,8%
Décès	2 685,0	2 751,6	7,1%	2,5%
Contrats à capital variable (UC)	493,6	584,9	1,5%	18,5%
Autres opérations vie	27,2	30,8	0,1%	14,2%
<b>TOTAL</b>	<b>34 914,8</b>	<b>38 735,7</b>	<b>100,0%</b>	<b>10,9%</b>

Tableau 2: Evolution des émissions d'assurances par sous catégories entre 2016-2017.

D'après le tableau ci-dessus, les émissions directes du secteur des assurances ont progressé de 10,9% et s'élèvent à 38,7 milliards de dirhams en 2017 contre 34,9 milliards l'exercice 2016. Les opérations non vie sont en progression de 5,5% et représentent 56,1% du total de ces affaires. Quant aux opérations vie et capitalisation, elles affichent également un taux d'évolution important de +18,8%. Par ailleurs, la répartition des émissions d'assurances montre que la branche vie et capitalisation préserve une place prépondérante, soit 43,9% du total des primes émises sur les affaires directes. Il est également à noter que la contribution de l'assurance automobile dans le chiffre d'affaires global vient au deuxième rang avec une part de 27,1%, suivi de l'assurance maladie maternité (10,1%) et de l'assurance accidents du travail (5,7%).

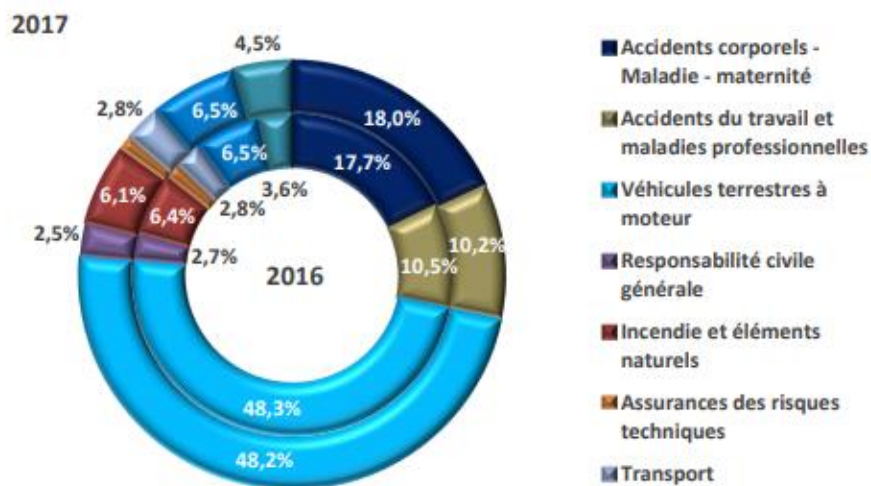


Figure 1: Répartition des primes émises par catégorie d'assurances non vie en 2016 et 2017

On remarque qu'en 2017, plus de 76,4% des émissions de primes non vie proviennent des catégories d'assurances véhicules terrestres à moteur, accidents corporels et accidents du travail, dont les parts dans les l'ensemble des émissions non vie atteignent respectivement 48,2%, 18,0% et 10,2%.

## **Chapitre 2 : Réglementation prudentielle actuelle**

La nécessité d'une protection particulière des preneurs d'assurances est, aujourd'hui, universellement reconnue. Cette protection se résume, principalement, en un ensemble de règles auxquelles sont assujetties les compagnies d'assurances, qui ont pour objet d'encadrer l'activité d'assurance, de garantir la sécurité des contrats et, surtout, de protéger les assurés contre le risque d'insolvabilité de leurs assureurs.

À cette fin, ces derniers se plient à diverses exigences qui portent notamment sur le niveau de fonds propres dont ils doivent disposer, la constitution de provisions techniques suffisantes et la représentation de ces provisions par des actifs de qualité.

Au Maroc, c'est l'Autorité de Contrôle des Assurances et de la Prévoyance sociale (ACAPS) qui est chargée du contrôle et de la surveillance des entreprises et des intermédiaires d'assurances conformément aux dispositions du code des assurances et de ses textes d'application. A ce titre, elle est chargée du contrôle de la solvabilité des entreprises d'assurances et de réassurance et veille au respect par ces entités de la réglementation régissant le secteur des assurances. L'autorité dispose, à cet effet du pouvoir réglementaire lui permettant de fixer les règles prudentielles et les règles de contrôle à travers l'élaboration des circulaires homologuées par le ministère chargé des finances.

Ainsi, pour s'assurer que les sociétés restent en mesure d'honorer les engagements pris à l'égard des assurés et des bénéficiaires du contrat, l'ACAPS a mis en vigueur une réglementation qui repose sur les trois grands principes suivants :

- Les provisions techniques mises en place par l'assureur doivent être calculées de manière prudente.
- Les assureurs doivent détenir, en représentation de leurs engagements, des actifs sûrs, liquides et rentables,
- La marge de solvabilité de l'assureur doit être à tout moment supérieure à l'exigence de marge de solvabilité (ou au fonds minimum de garantie si celui-ci est plus élevé), sous peine de se faire imposer un plan de redressement.

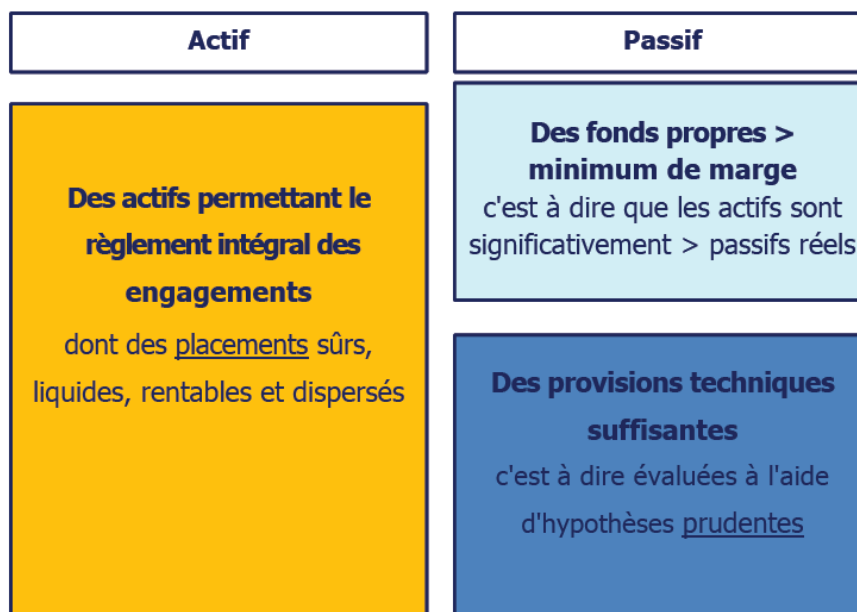


Figure 2: Représentation du bilan dans le cadre de l'ancienne réglementation.

## I. Les provisions techniques

Les provisions techniques désignent le montant que l'assureur doit mettre de côté en vue de faire face aux charges éventuelles de la sinistralité. Elles servent également à anticiper les prestations que l'assureur doit verser aux bénéficiaires suivant les termes du contrat. Il s'agit donc de la somme affectée par l'entreprise d'assurance à la couverture d'une charge ou d'une perte virtuelle, future ou éventuelle relative à son engagement envers les assurés.

Dans ce rapport, nous allons uniquement nous focaliser sur les opérations relatives à l'assurance non-vie.

Dans ce cas, les provisions sont tributaires du décalage possible entre la survenance du fait dommageable, générateur du paiement de l'indemnité, et le règlement effectif de cette indemnité. Nous avons donc deux types principaux de provisions :

- Provisions pour sinistres connus : reportés mais pas encore payés.
- Provisions pour sinistres inconnus : survenus mais pas encore déclarés qu'on nomme tardifs.

Ainsi, l'évaluation des provisions doit être suffisante et prudente, en tenant compte de l'ensemble des frais qui peuvent découler des garanties données. En pratique, cette évaluation doit être en moyenne supérieure au coût final des sinistres et l'appréciation définitive ne peut bien entendu être vérifiée qu'a posteriori, une fois tous les sinistres réglés et les contrats arrivés à l'échéance.

De ce fait, le code des assurances a prescrit, aux sociétés d'assurances non vie, la tenue de plusieurs types de provisions techniques, les plus essentielles sont :

- **Provision pour sinistres à payer (PSAP) :** Elle correspond à une évaluation du montant qui sera versé postérieurement à la clôture de l'exercice au titre d'événements qui se sont réalisés antérieurement à la clôture de l'exercice. Les provisions comportent trois types de sinistres restant à payer :
  - Les sinistres dont l'évaluation est définitive, connue et pour lesquels il ne demeure que le mouvement de trésorerie à générer,
  - Les sinistres pour lesquels l'évaluation n'est pas définitive et ayant fait ou non l'objet de règlements partiels,
  - Les sinistres survenus antérieurement à la clôture mais dont la survenance n'a pas été portée, à cette date, à la connaissance de l'entreprise. Il s'agit des sinistres tardifs.
  
- **Provisions pour primes non acquises (PPNA) :** Il s'agit de la provision destinée à constater, pour l'ensemble des contrats en cours, la part des primes émises et des primes restant à émettre se rapportant à la période comprise entre la date d'inventaire et la date de la prochaine échéance de prime ou, à défaut, du terme du contrat.
  
- **Provision pour risques en cours (PREC) :** La provision pour risques en cours est définie comme étant le montant à provisionner en supplément des primes non acquises pour couvrir les risques à assumer et destinée à faire face à toutes les demandes d'indemnisation et à tous les frais (y compris les frais d'administration) liés aux contrats d'assurance en cours excédant le montant des primes non acquises et des primes exigibles relatives aux dits contrats.

- **Provision pour fluctuations de sinistralité (PFS) :** Provision destinée à compenser la perte technique apparaissant à la fin de l'exercice. Elle est alimentée pour chacun des exercices successifs, par un prélèvement sur l'excédent technique net de cessions de la catégorie concernée.  
Ce prélèvement est de 50% pour les assurances responsabilité civile des véhicules terrestres à moteur et de 75% pour les assurances crédit et des risques dus à des éléments du travail.
- **Provision pour risque de capitalisation (PRC) :** En cas de réalisation de plus-values latentes des valeurs d'Etat, valeurs jouissant de la garantie de l'Etat, obligations émises par les banques, certificats de dépôt, bons de sociétés de financement, obligations cotées, obligations non cotées et des titres émis par les fonds de placements collectifs en titrisation, celles-ci sont portées à la provision de capitalisation. En cas de réalisation de moins-values latentes, celles-ci sont imputées sur la provision de capitalisation dans la limite de celle-ci.
- **Provisions pour risque d'exigibilité (PRE) :** Elle est constituée par nature de placements, lorsque la valeur comptable des placements est supérieure à la valeur de réalisation de ces mêmes placements (moins-value latente). La provision à constituer est égale à la différence constatée entre les deux évaluations.
- **La provision pour risques croissants (PRC) :** est une provision pour les risques de maladie et d'invalidité, dont l'indemnisation est susceptible d'augmenter avec le temps.

## II. Des actifs suffisants et de qualité :

La société d'assurance doit disposer de suffisamment d'actifs pour rembourser ses dettes envers ses assurés, son personnel et l'Etat (ce qu'on appelle les engagements réglementés). Du fait du décalage temporel entre le moment où l'assureur reçoit les primes et celui où il paie les sinistres ou prestations, l'assureur dispose d'un montant

important d'argent qu'il peut placer sur les marchés financiers. Il faut alors respecter les règles suivantes :

- Les engagements pris dans la monnaie sont représentés par des actifs libellés dans la même monnaie.
- Les provisions techniques sont représentées par des actifs localisés au Maroc. Toutefois, une entreprise d'assurance et de réassurance peut après accord de l'autorité effectuer des dépôts et des investissements hors du Maroc ainsi que des placements en valeurs étrangères dans la limite de 5% du total de son actif et après accord préalable de l'Autorité.
- Les provisions techniques sont représentées à l'actif des entreprises d'assurance et de réassurance par des valeurs énumérés dans l'Arrêté du livre III du code des assurances.
- Les actifs en représentation des provisions techniques sont soumis à des règles de diversification.
- Il y'a une limitation sur les titres non cotés.

### **III. La marge de solvabilité**

La marge de solvabilité est définie comme étant le montant de fonds propres nécessaires à l'activité courante de l'entreprise, elle présente une garantie qui s'ajoute aux actifs détenus en contrepartie des provisions techniques. Cette marge de solvabilité est déterminée par l'ACAPS comme un coussin de sécurité des sociétés d'assurances pour les deux catégories vie et non vie.

### **IV. Limites de la première réglementation prudentielle au Maroc**

Le principal avantage du système actuel est sa relative simplicité. En effet, son calcul simple fondé sur des données comptables en fait un instrument objectif facilement calculable et aisément compréhensible. Cependant, cette norme présente de nombreuses faiblesses :

- Peu de différenciation par branche d'activité,
- Absence d'inclusion des risques associés aux placements et à l'adéquation actif/passif ;
- Prise en compte non satisfaisante de la réassurance ;
- Appréciation purement quantitative et insuffisamment prospective ;
- Pas de définition cohérente d'un point de vue économique du besoin en capital ;
- La prise en compte de l'effet de volatilité des marchés financiers et de la valorisation en valeur de marché est totalement absente, ce qui paraît inadapté en particulier pour l'appréciation de la situation effective des actifs ;
- Un système non cohérent avec les normes comptables internationales telles que les normes IFRS ;
- Une négligence de la qualité des données, de la surveillance et du contrôle interne ;
- Une exigence pouvant pénaliser des bonnes décisions de gestion : à travers les calculs d'exigence de marge de solvabilité, il est clair que la réglementation actuelle pénalise les entreprises qui sur-provisionnent, contrairement aux entreprises qui ne provisionnent pas suffisamment.

Cette réglementation a donc montré ses limites et le régulateur préfère opter pour une approche « risk based ». Dès lors, SBR doit permettre une meilleure absorption des risques auxquels sont confrontés les différents acteurs de la société.

## **Chapitre 3 : Aperçu sur la SBR**

L'Autorité de Contrôle des Assurances et de la Prévoyance Sociale (ACAPS) a élaboré en avril 2017 le projet de circulaire « Solvabilité Basée sur les Risques (SBR) » qui décrit un nouveau référentiel réglementaire pour l'évaluation de la solvabilité avec l'objectif de s'aligner avec les principes de base de l'assurance émis par l'association internationale des contrôleurs d'assurance « IAIS » et de prendre en compte l'ensemble des risques auxquels les organismes peuvent être soumis. Le thème essentiel de SBR porte ainsi sur la mesure et le contrôle des risques, tout en gardant le même objectif principal que l'ancienne réglementation : la protection des assurés.

### **I. Objectifs de la réforme :**

Les grands objectifs de ce nouveau cadre prudentiel sont les suivants :

- Renforcer la transparence de l'activité d'assurance, la protection des assurés, ainsi que la compétitivité des assureurs et réassureurs au niveau international.
- Une nouvelle culture de gestion des risques avec l'adoption d'une vision économique du bilan, ainsi que l'appréciation globale de la solvabilité de l'assureur.
- Adopter une approche basée sur des principes et non sur des règles strictes,
- Une finalité de transformer la contrainte réglementaire en opportunité stratégique.
- Se conformer aux normes internationales.

Le développement de ce projet révisé en profondeur la réglementation prudentielle des sociétés d'assurance pour adapter le niveau des capitaux propres aux risques réellement encourus par l'assureur.

### III. Organisation en trois piliers

L'organisation de la réforme SBR est axée sur trois piliers, similaire à l'organisation retenue pour la réforme prudentielle bancaire Bâle II, pour une évaluation des risques quantitative mais aussi qualitative :

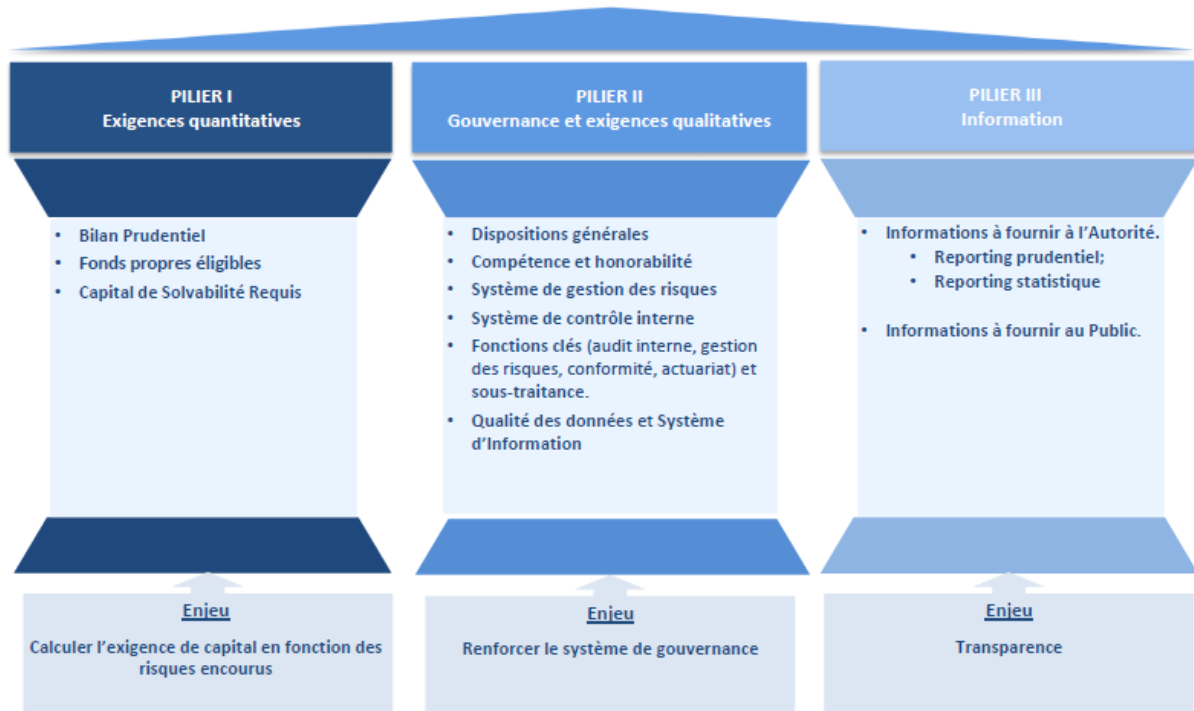


Figure 3: Les 3 piliers de la réforme SBR

#### 1. Pilier I : Exigences quantitatives

Le pilier I vise à définir les règles quantitatives dans trois domaines :

- Harmonisation des montants de provisions techniques en lien avec la refonte et le perfectionnement des techniques statistiques et des modèles probabilistes utilisés pour évaluer le montant des engagements portés par les assureurs envers les assurés ;
- Exigences en fonds propres avec le calcul des montants minimum de fonds propres (CSR et MCR) à détenir pour exercer une activité d'assurance ou de réassurance, en tenant compte des risques et de leur agrégation ;
  - **Capital de Solvabilité requis (CSR)** est défini comme étant le niveau de capital permettant d'absorber la réalisation des risques encourus. Cette

exigence correspond aux fonds propres requis pour remplir toutes les obligations à horizon 1 an avec une probabilité de 99.5%.

- **Minimum de Capital Requis (MCR)** est défini comme étant le niveau des fonds propres au-dessous duquel l'activité présente un risque inacceptable pour les assurés. Il est calculé à partir de formules factorielles en distinguant les activités vie ou non vie.

Le MCR doit être établi trimestriellement et son calcul nécessite l'utilisation de formules simples et objectives basées sur les données du portefeuille. Quant au calcul du CSR, il est plus complexe et s'établit à travers une formule standard énoncée par les spécifications techniques.

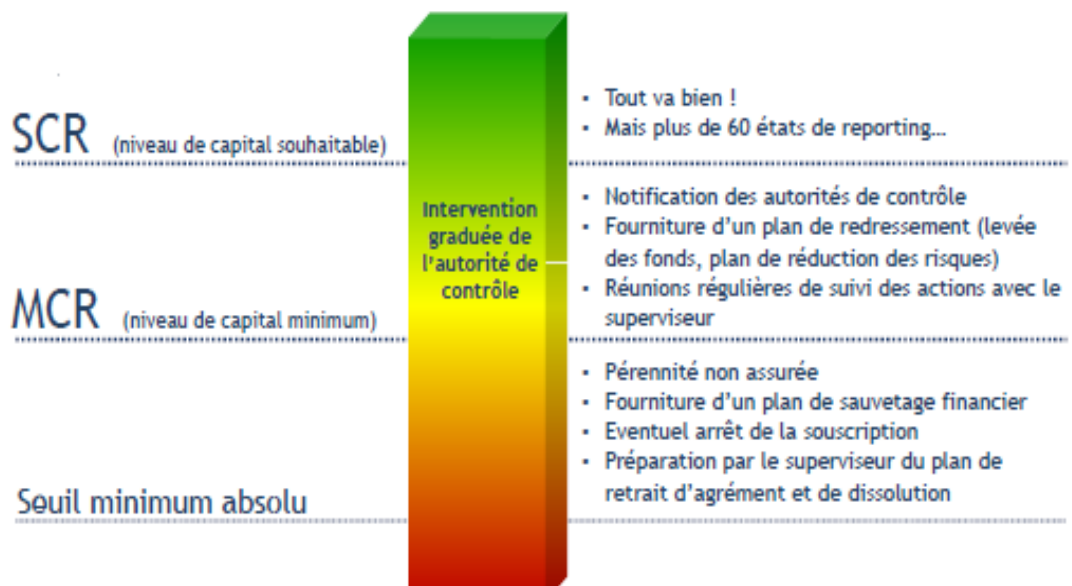


Figure 4 : Représentation du MCR et du CSR.

- Règles de sélection des actifs en couverture des fonds propres conduisant les assureurs à détenir en toute circonstance des ressources liquides et rapidement mobilisables pour faire face aux crises futures.

### 3. Pilier II : Aspects qualitatifs et contrôle

Le pilier 1 permet d'offrir une image fidèle de la situation de solvabilité de l'entreprise à l'horizon d'un an.

Toutefois, une telle image n'a d'intérêts que si elle s'accompagne :

- D'une gouvernance garantissant une gestion saine, prudente et efficace de l'organisme (exigence de compétence, prévenance des conflits d'intérêts...)
- De dispositifs de contrôle interne garantissant la fiabilité de l'information permettant d'alimenter le Pilier 1.
- D'une gestion fine des risques pris par l'entreprise et adaptée à son profil de risque.
- D'une vision ne se limitant pas à un horizon d'un an : prise en compte de la dimension prospective sur l'horizon du plan stratégique.

Le pilier 2 a donc pour objectif de fixer des normes qualitatives à l'ensemble du marché de l'assurance.

Dans ce cadre, la directive impose d'établir les quatre fonctions clés qui contribuent à la mise en œuvre du système de gouvernance au sein de chaque organisme d'assurance :

- **La fonction de gestion des risques** : assiste et conseille la direction générale à la mise en œuvre du système de gestion des risques, identifie les risques émergents, coordonne le calcul du capital de solvabilité requis (CSR) ainsi que l'exercice d'évaluation interne des risques et de la solvabilité.
- **La fonction actuarielle** : Coordonne le calcul des provisions techniques, garantit le caractère approprié des méthodes et émet un avis sur la politique globale de souscription. Elle établit un rapport actuariel qu'elle soumet au conseil d'administration.
- **La fonction de vérification de la conformité** : garantit la conformité à la réglementation et aux politiques fixées par le conseil ou la direction générale. Elle conseille cette dernière et informe le conseil d'administration de tout manquement important.

- **La fonction d’audit interne** : Complètement indépendante et non influençable par la direction générale, elle met en œuvre le plan d’audit interne approuvé par le conseil d’administration et contenant les actions de contrôle effectuées et les insuffisances relevées ainsi que les mesures correctrices y afférentes.

Le deuxième aspect essentiel de ce pilier est l’évaluation interne des risques. En effet, Les entreprises sont incitées à identifier leur exposition face aux différents types de risque et à les gérer. Elles doivent pouvoir contrôler en interne le suivi de leurs risques via un processus d’évaluation des risques, l’ORSA (Own Risk and Solvency Assessment). L’ORSA est un processus complet qui permet de suivre en continu le besoin en capital d’une entreprise en fonction de sa stratégie commerciale notamment. C’est un outil de gestion des risques et une source d’information pour les autorités de contrôle. Son rôle est de faire en sorte que les entreprises ne se limitent pas aux calculs réglementaires mais aillent plus loin dans le processus de gestion de leurs risques.

Le pilier 2 contribue ainsi de manière importante à la responsabilisation des acteurs et à la diffusion d’une culture du risque au sein des entreprises d’assurance et de réassurance. Il répond ainsi à l’un des objectifs principaux de SBR : compléter les exigences quantitatives par des exigences qualitatives visant à garantir la solvabilité actuelle et future de l’assureur.

En guise de conclusion : le pilier 2 est une opportunité pour :

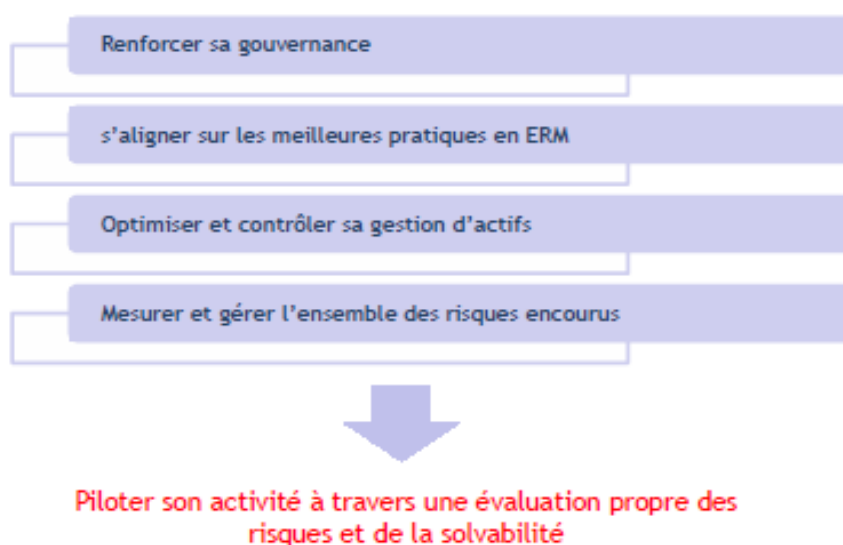


Figure 5: Récapitulatif sur les objectifs du pilier 2.

#### 4. Pilier III : Reporting et informations du public

Le troisième pilier concerne les informations qui doivent être publiées par les sociétés d'assurance pour informer le public (assurés, actionnaires et analystes), ainsi que les autorités de contrôle sur le résultat du pilier 1 et le dispositif mis en place pour répondre aux exigences du pilier 2.

Il se base sur les trois grands principes suivants :

- **La transparence** : Les informations devront permettre d'apprécier la situation financière et l'état de solvabilité de l'organisme d'assurance.
- **La cohérence** : Les informations devront être compréhensibles et cohérentes avec les éléments présentés aux différents utilisateurs.
- **La traçabilité** : Les organismes d'assurance devront prouver la fiabilité de toutes les informations utilisées.

Les entreprises d'assurance (et réassurance) sont tenues de publier annuellement un rapport sur leur solvabilité et leur situation financière. Le pilier III repose donc sur la remontée de tableaux de bord faisant ressortir des indicateurs de risques pertinents et fiables permettant l'action et la prise de décision.

En guise de conclusion, le pilier 3 est une opportunité pour :

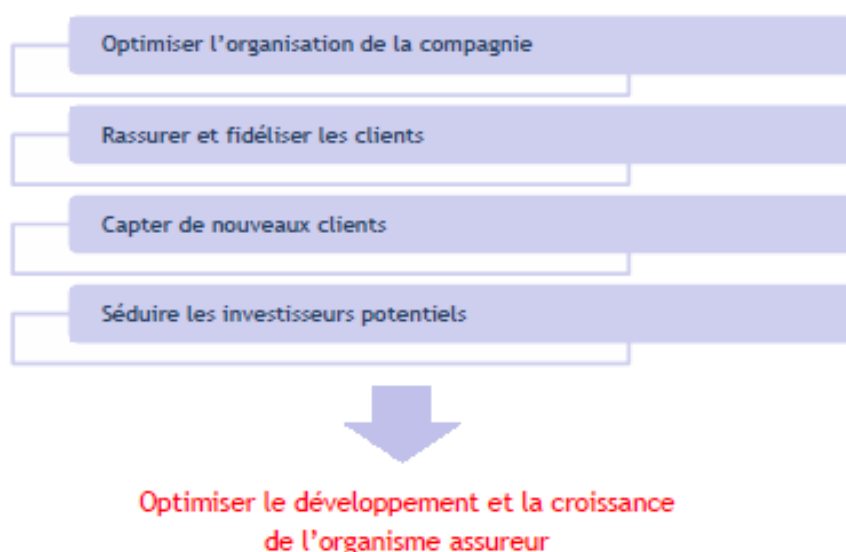


Figure 6 : Récapitulatif sur les objectifs du pilier 3.

## IV. Focus sur le pilier 1 de la réforme SBR

### 1. Bilan prudentiel :

Dans le cadre de la SBR, le bilan prudentiel s'avère être l'état financier le plus important pour un actuaire. Il a alors pour but de refléter le niveau de richesse de la société à l'issue de chaque exercice et pour ce faire, il est nécessaire d'avoir recours à une vision économique et cohérente avec les données de marché pour la valorisation des actifs et des passifs. C'est donc dans cette optique de « fair-value » ou « juste valeur » que l'organisme se doit en premier lieu de convertir son bilan comptable en bilan dit « prudentiel ». Cependant, il est nécessaire de faire une différenciation importante entre les actifs et les passifs pour calculer leurs valeurs de marché.

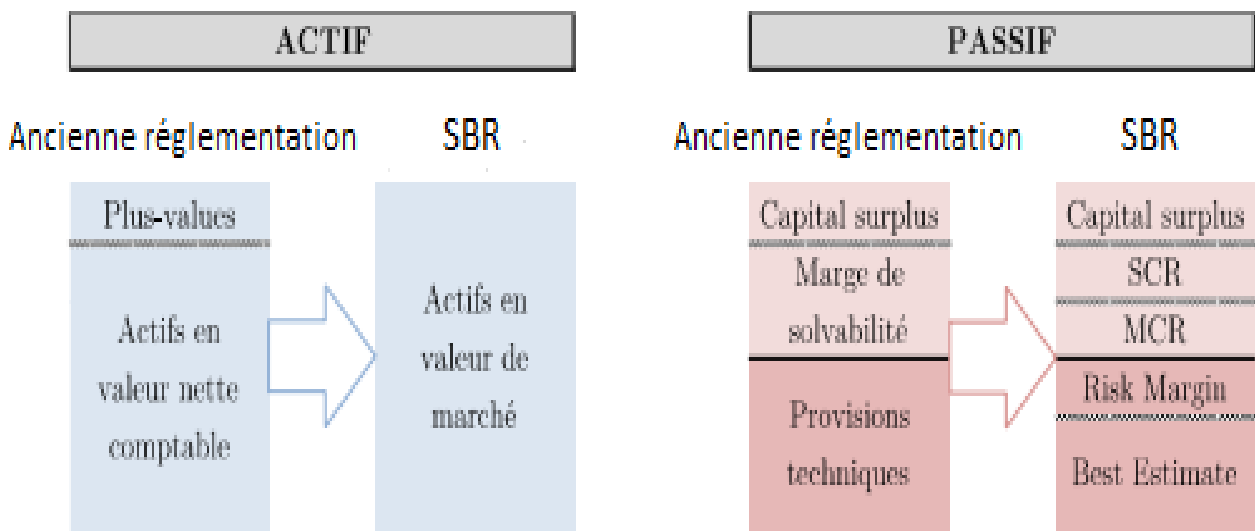


Figure 7: Evolution du bilan entre l'ancienne réglementation et SBR.

La figure ci-dessus illustre bien la transformation du bilan comptable et pratiquement tous les postes se retrouvent impactés par la directive aussi bien à l'actif qu'au passif.

En effet, la valeur de marché d'un actif est le montant auquel cet actif pourrait être vendu ou acheté dans une transaction actuelle sur un marché suffisamment actif, liquide et transparent. Pour la plupart des actifs d'une compagnie, composés généralement d'actions, d'obligations et d'immobiliers, il existe un tel marché pour effectuer ces

transactions. Il n'est donc pas difficile, à priori, de calculer cette valeur de marché pour la grande majorité des actifs d'une compagnie d'assurance.

A contrario pour le passif, constitué essentiellement par les provisions techniques, une évaluation à leur valeur de marché est plus problématique étant donné qu'il n'existe pas de marché comme pour les actifs. Il est donc nécessaire d'utiliser des méthodes alternatives qui soient cohérentes avec l'ensemble des informations disponibles sur le marché. Pour ce faire, il faut distinguer deux situations dans la valorisation des provisions techniques selon que le risque soit hedgeable (réplicable) ou non.

## **2. Les provisions techniques**

Les provisions techniques doivent permettre à l'entreprise d'honorer ses obligations envers les assurés et les bénéficiaires. En effet, elles ne sont plus évaluées selon le principe de prudence comme dans l'ancienne réglementation mais elles sont dorénavant évaluées au montant auxquelles elles pourraient être transférées ou réglées entre des parties informées et consentantes dans des conditions de concurrence normales. Elles doivent être calculées au plus juste, même en cas de fortes incertitudes sur la réalisation du risque.

Le calcul des provisions techniques doit distinguer les risques répliquables et non répliquables.

- Le risque est considéré « répliquable » si les flux de trésorerie futurs peuvent être répliqués à l'aide d'instruments financiers pour lesquels une valeur de marché est observable. La valeur économique des provisions se déduit de la valeur de marché des instruments financiers.
- Le risque est considéré « non répliquable » si les flux de trésorerie futurs ne peuvent pas être répliqués à l'aide d'instrument financier.

Dans ce cas, les provisions techniques prudentielles sont évaluées en additionnant le Best Estimate des engagements, le Best Estimate des frais de gestion et la marge de risque.



Figure 8: Les provisions techniques dans le cadre de SBR.

## 2.1. Le best estimate

Le Best Estimate constitue une estimation au plus juste des engagements des assurés et de l'assureur. Il est défini comme la moyenne pondérée en fonction de leur probabilité des flux de trésorerie futurs, en tenant compte de la valeur temporelle de l'argent, laquelle est estimée sur la base de la courbe des taux sans risque pertinente.

Son calcul est fondé sur une approche économique prospective, des informations actuelles crédibles et des hypothèses réalistes. Une telle modélisation fait appel à des méthodes actuarielles et des techniques statistiques adéquates. Elle doit tenir compte de toutes les entrées et sorties de capital relatives aux engagements de l'assureur et des assurés, jusqu'à l'échéance de tous les contrats ouverts.

Le Best Estimate se duplique en deux composantes : le Best Estimate des engagements et le Best Estimate des frais de gestion.

- **Best Estimate des engagements** : valeur probabilisée des engagements en cours, selon la nature des opérations d'assurance.
- **Best Estimate des frais de gestion** : valeur probabilisée et actualisée des frais de gestion des contrats en cours, selon la nature des opérations d'assurance.
- **Hypothèses de calcul** :
  - ✓ **L'horizon** : les projections doivent couvrir la durée de vie complète de tous les flux émanant des engagements de l'assureur ;
  - ✓ **L'actualisation** : les flux sont actualisés au taux d'actualisation sans risque fourni par la courbe des taux calculée et communiquée par l'autorité;
  - ✓ **Les frais** : il est nécessaire de prendre en compte les frais futurs de gestion ;
  - ✓ **La réassurance** : les provisions Best Estimate sont calculées brutes de réassurance ;

- ✓ **L'hypothèse de « run-off »** : le calcul ne doit pas prendre en compte de nouvelles souscriptions.

## **2.2. La marge de risque**

Le calcul du Best Estimate revient à déterminer une provision « économique » pour les exercices futurs, ce qui incorpore les différents risques et garanties auxquels est exposée l'entreprise. En revanche, cela ne représente pas vraiment le vrai coût de l'activité. Il faut aussi incorporer au calcul le coût de portage de la provision au travers du capital nécessaire à l'activité. C'est cet objectif que poursuit la prise en compte de la marge de risque.

La méthode de calcul associée est celle dite du « Cost of Capital » (CoC), qui part du principe que le cessionnaire se devra d'immobiliser des fonds propres éligibles (et cela à hauteur du capital de solvabilité nécessaire pour faire face aux engagements et pendant toute la durée de ceux-ci) et qui devront naturellement être rémunérés. Le taux de rémunération, c'est-à-dire le taux du coût du capital, est le même pour toute compagnie d'assurance (réassurance) et est révisée périodiquement.

## **3. Les fonds propres :**

Comme le montre la figure 7, l'apparence du bilan est significativement modifiée et les éléments pouvant être admis en représentation du besoin en capital doivent correspondre à des ressources financières susceptibles de parer aux éventuelles pertes.

Les fonds propres sous SBR sont par ailleurs scindés en deux catégories :

- ✓ Les Fonds Propres de base : le surplus des actifs par rapport aux passifs ;
- ✓ Les Fonds Propres auxiliaires : les profits espérés inclus dans les primes futures ou encore le capital non versé et appelable sur demande.

Le projet SBR a mis en place deux critères à respecter :

- Les fonds propres ne doivent en aucun cas être inférieurs au CSR.
- Les fonds propres de base doivent représenter au minimum 70% du CSR.

#### 4. Evaluation du capital de solvabilité requis CSR :

Les paramètres et hypothèses entrant dans le calcul du CSR sont calibrés de manière à représenter la VaR à horizon temporel d'un an avec un niveau de confiance de 99,5%. Le CSR est donc le capital nécessaire pour que la compagnie d'assurance puisse faire face à ses engagements dans 99,5% des cas, autrement dit pour limiter la probabilité de ruine à un an à 0,5%.

Le CSR prend en compte toutes les pertes potentielles sur 12 mois et son calcul doit être effectué au moins une fois par an et dès que le profil de risque varie sensiblement.

La formule standard est une méthode de calcul identique à tous les assureurs, basée sur une décomposition de l'activité en modules de risque :

- **Le risque de souscription (en Vie, Non-Vie et Santé)** : correspond aux risques propres aux contrats, notamment liés à une erreur de tarification ou de provisionnement.
- **Le risque de marché** : désigne le risque de perte ou de changement désavantageux de la situation financière résultant, de manière directe ou indirecte, de fluctuations affectant le niveau et la volatilité de la valeur de marché des actifs, des passifs et des instruments financiers. Ainsi, le risque de marché est évalué en prenant en compte le risque monétaire, le risque existant sur les actifs immobiliers, sur les actions, les taux d'intérêt, le risque de spread, ainsi que le risque de variation de la prime d'illiquidité.
- **Le risque de contrepartie** : reflète les pertes possibles que pourrait entraîner le défaut inattendu, ou la détérioration de la qualité de crédit, des contreparties et débiteurs de l'entreprise d'assurance ou de réassurance sur les douze mois à venir.
- **Le risque opérationnel** : résulte de l'inadaptabilité ou de la défaillance des processus internes, du personnel, des systèmes d'information ou d'événements extérieurs, qui n'ont pas été explicitement pris en compte dans les autres modules de risque. Il n'inclut pas les risques émanant des stratégies de décision ou de la réputation de l'entreprise. Cette définition est directement

dérivée de celle retenue pour le dispositif Bâle II. L'atténuation du risque opérationnel est une des vocations premières d'un dispositif de contrôle interne.

- **Le risque de concentration** : mesure le risque lié à la perte des fonds propres résultant de la baisse des actifs associés à un ensemble d'émetteurs appartenant au même groupe.

Chaque module de risque est ensuite décomposé en facteurs de risques unitaires, appelés sous modules, sur lesquels des chocs doivent être réalisés pour déterminer le capital requis.

Le CSR « global » est obtenu par agrégation des charges en capital calculées pour chaque facteur de risque, en tenant compte des corrélations entre les risques et donc des effets de diversification. Les modules et les sous-modules de risques sont organisés de la manière suivante :

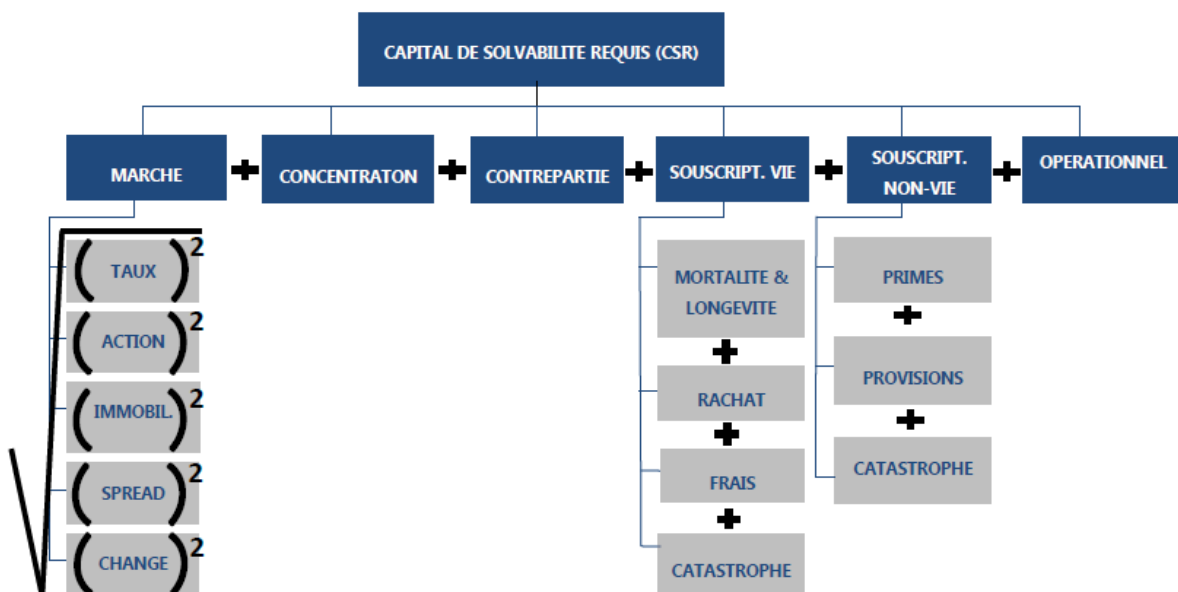


Figure 9: Cartographie modulaire des risques dans SBR.

Dans ce mémoire, nous allons uniquement nous focaliser sur le risque de provisionnement qui sera détaillé dans la partie III.

## **Chapitre 4 : Evaluation du Best Estimate en non vie**

Rappelons que le Best Estimate correspond à la meilleure estimation au regard de l'information la plus récente et la plus crédible disponible de la valeur actuelle des flux futurs pondérés par leur probabilité d'occurrence, engendrés par les contrats qui sont en portefeuille. Comme énoncé auparavant, il se définit comme étant la somme du best estimate des engagements et celui des frais de gestion.

A présent, nous considérons le cas particulier des provisions techniques en non vie hors rentes.

### **I. Le Best Estimate des engagements**

Le Best Estimate des engagements figurant au passif du bilan prudentiel est divisé en deux composantes : le Best Estimate dit de « sinistres » et le Best Estimate dit de « primes ».

#### **1. Best Estimate pour sinistres**

Le Best Estimate des provisions pour sinistres s'obtient sur la base des sinistres déjà survenus net de recours (connus ou non). Il convient donc d'estimer le plus justement possible, la charge ultime des sinistres pour un exercice de survenance donné afin d'en déduire un montant de PSAP (y compris IBNR).

Les calculs effectués pour la déterminer reposent sur des méthodes aussi bien déterministes (sans probabilités) que stochastiques (modèles basés sur des scénarios et trajectoires aléatoires). Les méthodes utilisées doivent faire l'objet d'une validation au préalable et pouvoir être facilement auditées. Les modes opératoires de quelques-unes d'entre elles seront détaillés dans la deuxième partie de ce mémoire.

Par ailleurs, il est requis de segmenter les calculs au minimum par ligne d'activité et la profondeur d'historique des triangles de liquidation utilisés est primordiale. En effet, sur des branches à développement court, cinq à dix années d'historique peuvent suffire mais

sur les branches à déroulement long (du type responsabilité civile ou construction par exemple), un nombre d'années supérieur à quinze ou vingt ans peut être requis.

## **2. Best Estimate pour primes**

Le Best Estimate pour primes concerne les provisions à effectuer en rapport avec les sinistres qui surviendront après la date d'évaluation et relatifs à des contrats existants à cette date.

Afin d'obtenir le montant de provision relatif à ces deux termes, il convient de calculer un ratio de sinistre ultime (grâce aux données historiques du portefeuille notamment) ainsi que la cadence du règlement des sinistres à venir. En effet, les données techniques de l'organisme d'assurance fournissent des informations pertinentes sur les dates auxquelles les sinistres sont réglés selon une année de survenance donnée. L'actuaire doit donc estimer cette cadence de règlement tout en prêtant une attention particulière à l'horizon de temps prévu pour le règlement complet d'un sinistre donné. Celui-ci doit bien évidemment correspondre à la durée de vie attendue de l'ensemble des flux de trésorerie liés au règlement des sinistres.

Il convient tout de même de noter que le Best Estimate de primes peut être négatif, dans le cas où les encaissements sont supérieurs aux décaissements et qu'il n'est pas nécessaire dans cette deuxième composante du Best Estimate d'avoir recours à des méthodes stochastiques.

## **II. Best Estimate pour frais de gestion**

Le Best Estimate des frais de gestion correspond à la valeur projetée et actualisée des montants futurs relatifs à la gestion des contrats.

Les frais de gestion futurs sont estimés sur la base d'une projection effectuée en considérant un horizon de projection suffisant pour la couverture de la durée de vie des engagements à la date d'inventaire. Ils sont déterminés pour chaque année de projection en multipliant la meilleure estimation des engagements pour sinistres par le taux de frais de gestion moyen revalorisé.

## *Partie II : Evaluation des provisions prudentielles*

Comme nous l'avons énoncé dans la première partie, les provisions techniques prudentielles sont évaluées en additionnant le Best Estimate des engagements, le Best Estimate des frais de gestion et la marge de risque.

- Le Best Estimate

Le Best estimate est défini comme la moyenne pondérée par leur probabilité de survenance des flux de trésorerie futurs, en tenant compte de toutes les entrées et sorties de trésorerie nécessaires pour régler les engagements jusqu'au terme de tous les contrats en portefeuille.

Il peut s'écrire de la manière suivante :

$$BE = \sum_t \frac{CF_t}{(1+r_t)^t}$$

Avec

- $CF_i$  les cash flows de l'année comptable  $i$
- $r_i$  le taux sans risque de maturité  $i$  obtenu grâce à la courbe des taux sans risque à la date d'évaluation.
- $CF$  : Les cash flows à considérer ici doivent être associés aux contrats actuels.

En assurance non-vie, Le Best Estimate se duplique en deux composantes : le Best Estimate des engagements et le Best Estimate des frais de gestion.

En outre, le Best Estimate des engagements est lui-même composée de deux éléments : une provision pour primes nécessaire pour couvrir les sinistres à venir sur des contrats déjà existants, et une provision pour sinistres afin de régler les sinistres déjà survenus.

- La marge de risque

La marge de risque correspond au coût que représente la mobilisation d'un montant de fonds propres éligible égal au CSR nécessaire pour faire face aux engagements d'assurance et de réassurance sur toute la durée de vie de ceux-ci

Cependant, avant de procéder au calcul du best estimate et de la marge de risque, on est tenue de construire la courbe des taux sans risque en recourant à deux modèles de taux à un facteur de risque à savoir le modèle de Vasicek et celui de Cox Ingersoll Ross.

## **Chapitre 1 : Construction de la courbe de taux zéro-coupon**

La courbe Zéro-Coupon, est assimilée à la probabilité sans risque et donc permet d'actualiser les cash-flows futurs. En effet, si on veut rencontrer très probablement un montant futur en investissant un capital initial, alors, l'estimation la plus prudente de ce dernier est obtenue en actualisant le montant futur à l'aide de la courbe zéro-coupon. Cette courbe, reflète le niveau des taux d'emprunt de l'Etat, qui est considéré généralement comme un acteur sans risque. Les taux de référence du marché secondaire des bons de trésor de l'Etat sont calculés quotidiennement par Bank Al-Maghrib à partir d'une moyenne pondérée de taux de prêts échangés entre les banques d'un panel préalablement choisi.

En assurance non vie, la modélisation de la courbe des taux est essentielle car elle permet d'atteindre les objectifs suivants :

- Au passif, elle sert de facteur d'actualisation pour les engagements de l'assureur. Plus précisément, elle permet de donner une valeur de marché au passif de la compagnie en actualisant chacun de ses flux, selon leurs maturités, au taux zéro-coupon de la courbe.
- A l'actif, elle permet de valoriser les portefeuilles obligataires au prix du marché, et par conséquent, elle permet de protéger l'assureur contre les risques liés aux variations défavorables des taux d'intérêts.

Chaque courbe des taux présente les taux d'intérêt dans deux classes d'échéance, à court terme, pour des périodes inférieures ou égales à 1 an, et à long terme, pour des périodes supérieures à 1 an.

- Les taux d'intérêt à court terme résultent du marché monétaire, à savoir les titres d'Etat et les dépôts, ainsi que les transactions sur des contrats à terme sur des taux d'intérêt. Ces instruments financiers n'admettent pas de paiements intermédiaires et forment directement les taux d'actualisation.
- Les taux d'intérêt à long terme résultent du marché des obligations. Ces types d'instruments requièrent des paiements intermédiaires, des coupons, c'est la

raison pour laquelle la procédure de calcul, au vu de la fixation des taux d'actualisation, s'avère nécessaire.

Dans ce cadre, nous allons tout d'abord reconstituer la courbe des taux empirique, puis étudier les deux modèles classiques Vasicek et Cox, Ingersoll et Ross (CIR).

## **I. Courbe empirique :**

Au Maroc, Bank Al Maghrib publie régulièrement une courbe de taux de rendement qui prend en compte les opérations des marchés primaire et secondaire les plus récentes. Les taux publiés sont, pour chaque échéance, des taux moyens pondérés par les prix. Les rendements sont exprimés par des taux monétaires pour les maturités inférieures à un an et par des taux actuariels pour les maturités supérieures à un an. Cependant, ces taux ne sont pas en lecture directe, il est impératif de passer par des étapes qu'on explicitera dans ce qui suit.

### **1. La transformation des taux :**

Tous les points de la courbe de taux doivent avoir la même base d'intérêt pour pouvoir interpoler entre eux, d'où la nécessité de convertir les taux monétaires en taux actuariels pour trouver les taux supérieurs à 1 an.

La conversion du taux monétaire en taux actuariel se fait selon la formule suivante :

$$t_a = \left(1 + \frac{t_m \times n}{360}\right)^{\frac{365}{n}} - 1$$

- $t_m$  : le taux monétaire.
- $t_a$  : le taux actuariel.
- $n$  : le nombre de jours de placement.

### **2. Interpolation linéaire :**

Afin de valoriser une obligation, on a besoin de déterminer son taux de rendement, soit le taux d'actualisation correspondant à sa maturité pleine, et ce par interpolation linéaire

à partir de la courbe des taux qui prévaut au moment de la valorisation de l'obligation. Les taux d'actualisation peuvent être obtenus à partir de la courbe des taux comme une fonction des durées des périodes d'intérêt. Pour ce faire, on veut interpoler le taux  $R(0, t_p)$  de maturité  $t_p$  qui correspond à une date pleine, tout en connaissant le taux  $R(0, t_i)$  de maturité  $t_i$  et  $R(0, t_j)$  de maturité  $t_j$  avec  $t_p \in [t_i ; t_j]$ .

On trouve donc  $R(0, t_p)$  à partir de la relation :

$$R(0, t_p) = \frac{(t_j - t_p) \times R(0, t_i) + (t_p - t_i) \times R(0, t_j)}{t_j - t_i} \quad t_j \in \{t_i, t_j\}$$

### 3. La méthode Bootstrap :

- **Obligations de maturité  $n < 1$  an :**

Sur le court terme, les paiements sont généralement de type zéro-coupon. En effet, pour le moins d'un an, il n'y a pas de flux intermédiaires, le nominal et les intérêts sont versés à l'échéance. Le taux zéro-coupon et le taux actuariel sont donc égaux pour les maturités inférieures à un an.

- **Obligations de maturité  $n > 1$  an :**

Lorsque l'on raisonne sur le plus d'un an, il intervient des versements d'intérêts intermédiaires, des coupons, généralement annuels. Il faudra alors reconstituer la courbe zéro-coupon pas à pas, soit segment pas segment de maturité. C'est le principe du Bootstrap.

Pour expliciter cette méthode, supposons que nous disposons des taux actuariels qui permettent de retrouver les prix des obligations et que nous voulons calculer le taux zéro-coupon de maturité 2 ans.

Le facteur d'actualisation du second flux, fonction du taux zéro coupon 2 ans, sera solution de l'équation suivante :

$$\frac{1}{(1 + r_{t_2})} + \frac{1}{(1 + r_{t_2})^2} = \frac{1}{(1 + ZC_{t_1})} + \frac{1}{(1 + ZC_{t_2})^2}$$

On se retrouve avec une seule variable à calculer vu que le taux  $ZC_{t_1}$  correspond exactement au taux actuariel à 1 an.

- Où :
- $ZC_{t_1}$  : Le taux zéro-coupon 1 an.
  - $ZC_{t_2}$ : Le taux zéro-coupon 2 ans.
  - $r_{t_2}$  : Le taux de rendement 2 ans.

Le taux zéro coupon 2 ans s'exprime donc comme suit :

$$ZC_{t_2} = \left( \frac{1}{\frac{1}{(1+r_{t_2})} + \frac{1}{(1+r_{t_2})^2} - \frac{1}{(1+ZC_{t_1})}} \right)^{\frac{1}{2}} - 1$$

De proche en proche, on calcule le taux zéro coupon pour une maturité N comme suit :

$$ZC_N = \left( \frac{1}{\sum_{i=1}^{N-1} \left( \frac{1}{(1+r_N)^i} - \frac{1}{(1+ZC_i)^i} \right) + \frac{1}{(1+r_N)^N}} \right)^{\frac{1}{N}} - 1$$

## II. Courbe théorique :

Depuis longtemps, tant les chercheurs que les professionnels ont essayé de déterminer les mécanismes affectant la forme et l'évolution de la structure par terme. Cependant, malgré l'attention qui a été portée à cette problématique, il n'existe pas de réponse claire concernant la préférence entre tel ou tel modèle.

Divers modèles ont été proposés afin de décrire le comportement de la structure par terme des taux d'intérêts. Cependant, nous allons nous focaliser dans cette partie uniquement sur deux modèles à savoir celui de Vasicek, et CIR (Cox, Ingersoll et Ross).

### 1. Le modèle Vasicek :

#### 1.1. Présentation du modèle :

Elaboré en 1977, Vasicek a été l'un des premiers modèles stochastiques des taux. Dans ce modèle, le taux court suit un processus Orstein-Uhlenbeck avec des coefficients

constants. Sa dynamique est représentée par l'équation différentielle stochastique suivante :

$$dr(t) = k(\theta - r(t))dt + \sigma dB(t)$$

Où :  $k$  et  $\theta$  sont des scalaires strictement positifs et  $B$  un mouvement brownien.

Le terme  $dt$  du processus d'Ornstein-Uhlenbeck s'interprète classiquement comme un retour à la moyenne long-terme  $\theta$  avec une vitesse de retour à la moyenne  $k$ , et  $\sigma$  est la volatilité du taux court. La solution explicite de cette EDS (Equation Différentielle Stochastique) est :

$$r(t) = \theta + (r_0 - \theta)e^{-tk} + \sigma \int_0^t e^{-(t-u)k} dB(u)$$

Ce processus d'Itô décrit une dynamique régressive, autour d'une valeur « moyenne »  $\theta$  représentant le taux d'intérêt moyen à long terme. Ceci veut dire que si le taux d'intérêt est supérieur à  $\theta$ , alors le premier terme de l'équation différentielle  $k(\theta - r(t))$  est négatif et  $r(t)$  aura tendance à baisser pour se rapprocher de  $\theta$ . Inversement, si le taux d'intérêt est inférieur à  $\theta$ , dans ce cas-là le premier terme de l'équation différentielle est positif et  $r(t)$  aura tendance à augmenter pour se rapprocher de la valeur moyenne  $\theta$ . Ainsi  $k$  représente la vitesse d'ajustement de  $r(t)$  vers la valeur moyenne à long terme.

Ce phénomène de retour à la moyenne, que Vasicek met en évidence, peut être justifié. En effet, lorsque les taux sont élevés, les emprunts sont moins nombreux et l'économie a tendance à ralentir, faisant ainsi baisser les taux. Au contraire, lorsque les taux sont faibles, les emprunts ont tendance à augmenter, faisant ainsi monter les taux.

Le prix en  $t$  du zéro-coupon de maturité  $T$  sous le modèle CIR est déterminé par la formule suivante :

$$P(t, T) = A(t, T) * e^{-B(t, T)r(t)}$$

Avec :

$$B(t, T) = \frac{1 - e^{-k(T-t)}}{k}$$

$$A(t, T) = e^{(B(t, T) - (T-t)) * R - \frac{\sigma^2 B(t, T)^2}{4k}}$$

$$R = \theta + \frac{\sigma * \lambda}{k} - \frac{\sigma^2}{2k^2}$$

## 1.2. Estimation des paramètres

L'estimation de ces paramètres se fait en appliquant la discrétisation exacte proposée par GOURIEROUX, MONFORT et RENAULT qui est donnée par la forme suivante :

$$r_t - r_{t-1} = \theta(1 - e^{-k}) + (e^{-k} - 1)r_{t-1} + \varepsilon_t$$

Tel que :

$$\varepsilon_t \approx N(0, \frac{\sigma^2}{2k} (1 - e^{-2k}))$$

Nous pourrions alors, en utilisant les données discrètes du taux court, estimer à l'aide de la Méthode des Moindres Carrées Ordinaires (MCO) les paramètres du processus d'Ornstein-Uhlenbeck via l'équation suivante :

$$r_t = a + br_{t-1} + \varepsilon_t$$

Avec :  $a = \theta(1 - e^{-k})$  et  $b = e^{-k}$

Cette équation indique que les taux court s'ajustent suivant un autorégressif d'ordre 1, ce qui devrait être vérifiée pour les données qu'on utilisera pour l'estimation.

Après estimation des paramètres a et b, nous pouvons alors remonter aux paramètres du processus de diffusion d'Ornstein Uhlenbeck comme suit :

$$k = -\ln(\hat{b})$$

$$\theta = \frac{\hat{a}}{1 - \hat{b}}$$

$$\sigma = \hat{\sigma}_s \sqrt{\frac{-\ln(\hat{b}^2)}{1 - \hat{b}^2}}$$

## 2. Le modèle CIR (Cox, Ingersoll et Ross) :

### 2.1. Présentation du modèle :

Le modèle de Cox Ingersoll & Ross (CIR), établi en 1985, introduit un processus en racine carrée qui interdit à un taux initialement positif de prendre des valeurs négatives, tout en conservant la simplicité du processus d'Ornstein-Uhlenbeck. Sa différentielle stochastique s'exprime ainsi :

$$dr(t) = k(\theta - r(t))dt + \sigma\sqrt{r(t)}dB(t)$$

Avec : B est un brownien standard.

k correspond à la vitesse de retour à la moyenne,

$\theta$  correspond à la valeur de la moyenne

A l'instar du processus d'Ornstein Uhlenbeck, le taux  $r$  est attiré vers la valeur  $q$  à la vitesse  $k$ . Mais la différence fondamentale entre ces deux types de processus est que le taux  $r$  ne peut prendre de valeur négative. Si  $r$  est nul, la valeur qui le suivra sera fixée par l'équation  $dr = k \theta dt$ , et sera donc toujours positive. Cox, Ingersoll et Ross précisent que le taux  $r$  ne revient jamais à zéro si la condition  $2k \theta > \sigma^2$  est vérifiée.

La solution à l'équation différentielle régissant le prix d'une obligation zéro-coupon à laquelle aboutissent ces auteurs est la suivante :

$$P(t, T) = A(t, T) * e^{-B(t, T)r(t)}$$

Tel que :

$$A(t, T) = \left( \frac{2\gamma \exp \left[ \frac{(k+\lambda+\gamma)(T-t)}{2} \right]}{(k+\lambda+\gamma) \exp [\gamma(T-t)-1] + 2\gamma} \right)^Q ; Q = 2k * \frac{\theta}{\sigma^2}$$

$$B(t, T) = \left( \frac{2 * \exp (\gamma * (T - t) - 1)}{(k + \lambda + \gamma) * \exp(\gamma * (T - t) - 1) + 2\gamma} \right)$$

$$\gamma = \sqrt{(k + \lambda)^2 + 2\sigma^2}$$

La structure par terme des taux est obtenue par :

$$R(t, T, r) = \frac{B(t, T) * r(t) - \ln(A(t, T))}{T - t}$$

## 2.2. Estimation des paramètres

Pour estimer les paramètres du processus « racine carrée », on effectue la régression suivante :

$$\frac{r_t}{\sqrt{r_{t-1}}} = \frac{k\theta}{\sqrt{r_{t-1}}} + (1 - k)\sqrt{r_{t-1}} + \sigma$$

Si nous posons :

$$Y = \frac{r_t}{\sqrt{r_{t-1}}} ; Z = \frac{1}{\sqrt{r_{t-1}}} \text{ et } X = \sqrt{r_{t-1}}.$$

L'équation de la régression devient :

$$Y = k\theta Z + (1 - k)X$$

Cette forme de régression est mieux appropriée pour estimer les paramètres du processus « racine carrée » à partir de la méthode des moindres carrés ordinaires et on en déduit les valeurs de  $k$ ,  $\theta$  et  $\sigma$ .

## III. Automatisation de la construction de la courbe des taux

Nous avons conçu une application en recourant au logiciel R-shiny qui reprend toutes les méthodes et les formules explicitées ci-dessus, et qui permet la constitution théorique et empirique des taux ZC pour une date donnée ainsi que faire des prévisions sur les taux futurs.

Pour la construction de la courbe empirique, on a utilisé les taux de référence du marché secondaire des bons de trésor publiés par la Bam et on a suivi les étapes suivantes :

- Téléchargement des données du site du BAM
- Interpolation linéaire pour les maturités pleines
- Bootstrap pour calculer les Taux ZC.

Les taux ont été calculé jusqu'à la maturité 20 ans.

Pour la construction de la courbe théorique, on a choisi comme taux court terme, le taux moyen pondéré TMP qui est un taux au jour le jour du marché monétaire. C'est un taux moyen pondéré par les montants des transactions déclarées, pour un échantillon représentatif d'établissements admis au marché interbancaire.

On a estimé ensuite les paramètres des processus de diffusion, et on a calculé la prime de risque  $\lambda$  en minimisant le carré des erreurs entre les taux ZC réels du marché et ceux obtenue par les deux modèles Vasicek et CIR. On a obtenu ainsi notre courbe des taux.

Comme on a vu dans la partie théorique, le modèle Vasicek et CIR reposent sur une régression simple des taux court terme, nous pouvons dès lors aisément effectuer des prévisions sur les taux ZC futurs.

L'outil que nous venons de présenter permet donc la construction de la courbe ZC pour une date donnée avec les trois méthodes Bootstrap, Vasicek et CIR. Cependant, seule la courbe obtenue avec la méthode Bootstrap et relative à la date 29-12-2017 nous intéresse puisque qu'elle nous fournira les taux sans risque d'actualisation intervenant dans le calcul des provisions techniques prudentielles.

## Chapitre 1 : Construction de la courbe des taux zéro-coupon

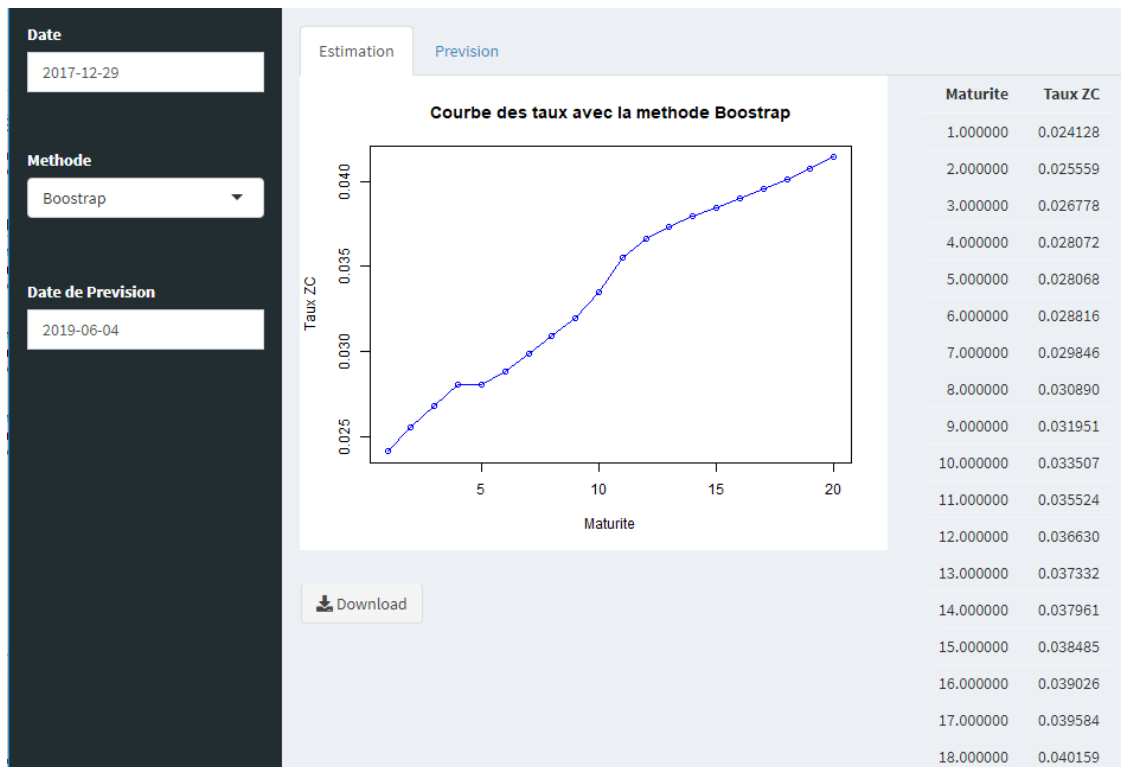


Figure 10: Estimation de la courbe des taux à la date d'inventaire 29-12-2017 avec la méthode Bootstrap.

Quant aux prévisions des taux futurs obtenues en recourant à Vasicek et CIR, elles serviront pour projeter les meilleures estimations futures.

# Chapitre 1 : Construction de la courbe des taux zéro-coupon

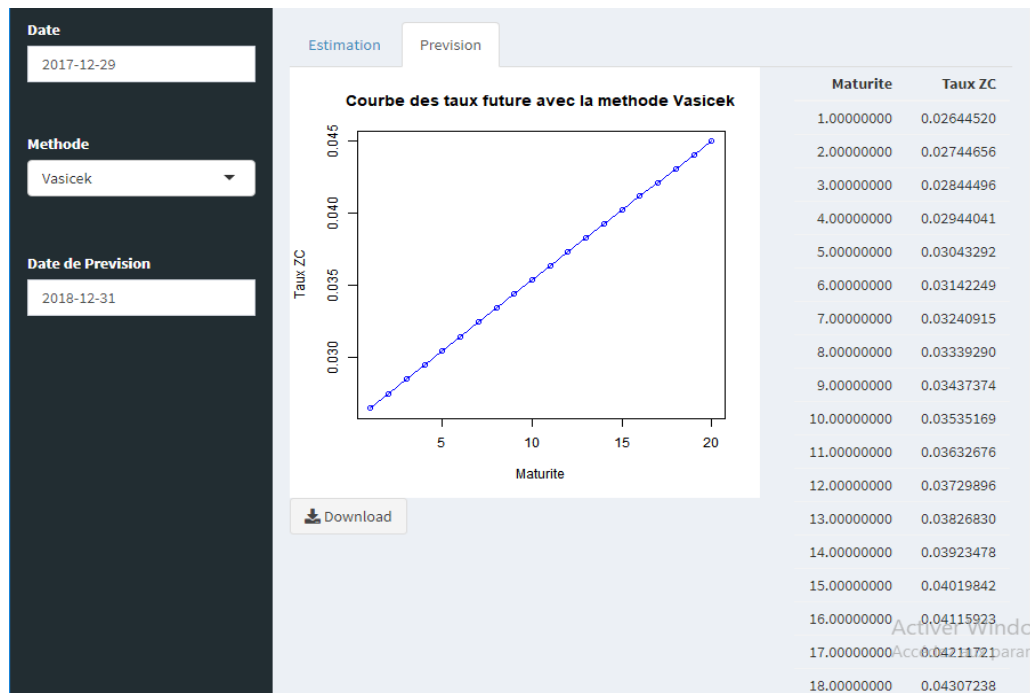


Figure 11: Prévision des taux futurs à la date 31-12-2018 avec la méthode Vasicek

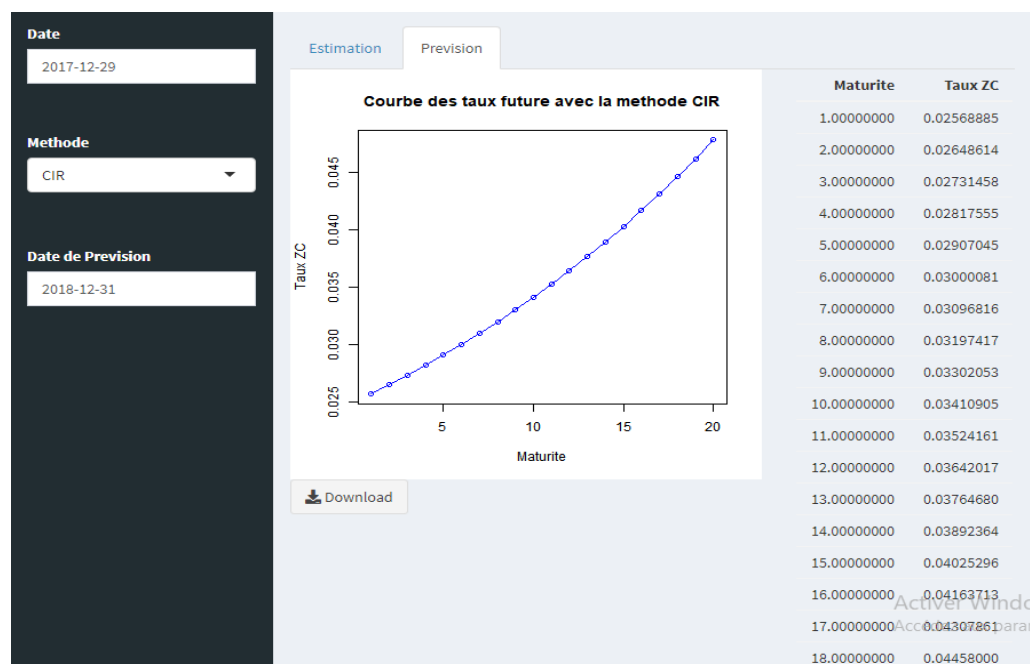


Figure 12: Prévision des taux futurs à la date 31-12-2018 avec la méthode CIR

## Chapitre 2 : Calcul de la meilleure estimation des engagements pour sinistres

La meilleure estimation des engagements pour sinistres nets de recours est déterminée en actualisant, les flux de règlements futurs probabilisés nets de recours relatifs aux sinistres survenus.

Les flux de règlements futurs probabilisés nets de recours sont estimés sur la base d'un triangle de développement et permet d'aboutir aux décaissements futurs et ceci année par année. Les montants de flux de trésorerie ainsi obtenus sont alors actualisés au taux d'intérêt sans risque. La figure ci-dessous schématise la cadence de liquidation sur un règlement de sinistres qui s'écoule sur cinq années d'exercice :

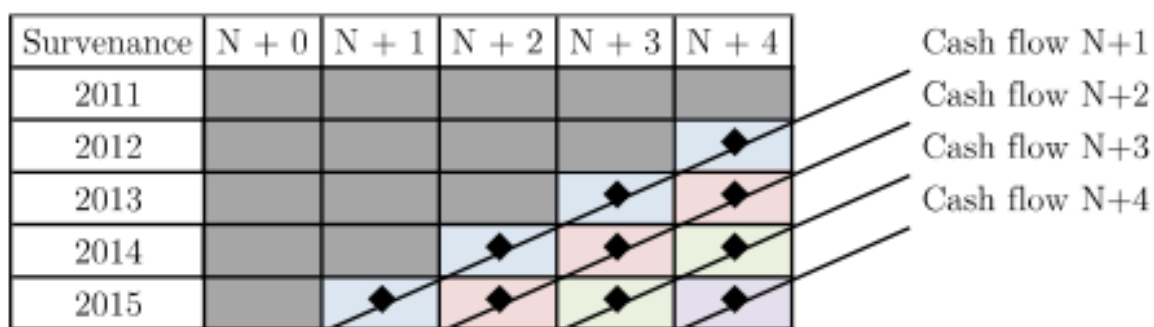


Figure 13: Cadence de liquidation des règlements des sinistres par année de survenance.

### I. Les méthodes de provisionnement :

Nous allons passer en revue les principales méthodes de provisionnement, que l'on partitionne ici en deux catégories : les méthodes déterministes, et les méthodes stochastiques.

#### Définitions et notations :

- $i$  : année de survenance du sinistre ;
- $j$  : année de règlement du sinistre ;
- $Y_{i,j}$  : montant des sinistres survenus l'année  $i$  et réglés durant l'année  $j$  ;
- $C_{i,j}$  : montant cumulé des sinistres survenus l'année  $i$  et réglés après  $j$  années ;

- $\hat{Y}_{i,j}$ : règlements futurs estimés, survenus l'année  $i$  et réglés après  $j$  années ;
- $\hat{C}_{i,j}$  : règlements cumulés futurs estimés survenus l'année  $i$  et réglés après  $j$  années ;
- $R_i$ : montant de réserves nécessaires pour financer les encours futurs des sinistres d'année d'origine  $i$ . Il se définit comme suit :  $R_i = \hat{C}_{i,n} - C_{i,n-i}$
- $R$  : réserve globale, définie par  $R = \sum_{i=0}^n R_i$ .
- $CF_i$  : Flux de règlements futurs probabilisés d'une année donnée. Ils sont calculés à partir du triangle de règlements après projection en sommant la diagonale correspondante à l'année de projection considérée.
- $Be$  : C'est meilleure estimation des engagements pour sinistres qui s'obtient en sommant les  $CF_i$  actualisés avec la courbe des taux sans risque.

**Triangle de liquidation :**

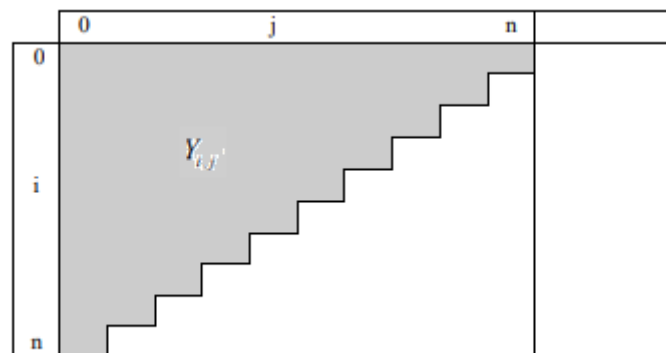


Figure 14: Triangle de liquidation des sinistres.

La partie grisée représente les données historiques. Nous cherchons à estimer les paiements futurs concernant les sinistres survenus avant l'année  $n$ , c'est-à-dire la partie du tableau non grisée. Bien qu'il existe de nombreuses méthodes, ce sont les méthodes classiques qui ont été retenues pour réaliser notre étude, à savoir : Chain Ladder, London Chain, De Vylder, Mack, GLM et Bootstrap. Cette partie énonce donc les modes opératoires de chacune de ces méthodes.

## 1. Les méthodes déterministes :

### 1.1.Méthode de Chain ladder :

Étant la plus simple à implémenter, la méthode déterministe de Chain Ladder est sans doute la plus utilisée en pratique. Cette méthode est applicable à toute sorte de triangles (de dépenses, de charges, de nombre de sinistres). Cependant, au cours de notre étude, nous nous contenterons de l'appliquer uniquement au triangle des paiements cumulés.

La méthode de Chain Ladder repose sur une première hypothèse d'indépendance des années de survenance des sinistres. En pratique, cette hypothèse est généralement admise et ne nécessite pas une vérification précise. Par ailleurs, les facteurs de développement étant grandement impliqués dans la procédure utilisée par Chain Ladder Standard, ils font l'objet d'une forte hypothèse indispensable à la logique de cette méthode. En effet, implicitement, la méthode Chain Ladder Standard suppose que les facteurs de développement individuels (ou les ratios)  $\frac{C_{i,j+1}}{C_{i,j}}$  sont indépendants de l'année d'origine  $i$ . Autrement, cela signifie que le pourcentage des sinistres liquidés entre deux années comptables successives ne dépend pas de l'année de survenance de ces sinistres. Ainsi,

Ainsi,  $\forall j \in (0, 1, \dots, n-1)$  :

$$\frac{C_{0,j+1}}{C_{0,j}} = \frac{C_{1,j+1}}{C_{1,j}} = \dots = \frac{C_{i,j+1}}{C_{i,j}} = \frac{C_{n-j-1,j+1}}{C_{n-j-1,j}}$$

Plus simplement, nous supposons que les années de survenance sont indépendantes.

En plus de cette hypothèse, la méthode Chain-Ladder repose sur le calcul des différents facteurs de développement ( $\lambda_j$ ), également appelés link ratios. Cette méthode de provisionnement suggère d'approcher ces link ratios par un estimateur naturel  $\hat{\lambda}_j$  calculé à partir de la formule suivante :

$$\hat{\lambda}_j = \frac{\sum_{i=0}^{n-j-1} C_{i,j+1}}{\sum_{i=0}^{n-j-1} C_{i,j}}, \quad j = 0, \dots, n-1$$

Ainsi, à partir de ces conditions et de l'estimation des facteurs de développement, nous pouvons alors compléter le triangle inférieur des paiements cumulés :

$$\forall i \in (1, \dots, n), j \in (n-i+1, \dots, n),$$

$$\hat{C}_{i,j} = C_{i,n-i} (\hat{\lambda}_{n-i} \times \dots \times \hat{\lambda}_{j-1}) = C_{i,n-i} \prod_{k=n-i}^{j-1} \hat{\lambda}_k$$

En particulier, nous calculons alors les charges ultimes ( $S_i$ ) pour chaque année de survenance  $i$  :

$$\forall i \in (1, \dots, n),$$

$$S_i = \hat{C}_{i,n} = C_{i,n-i} \prod_{k=n-i}^{n-1} \hat{\lambda}_k$$

- **Critique de la méthode :**

Nous avons vu que cette méthode a l'avantage d'être aisée à appliquer. Cependant, elle repose sur des hypothèses qui peuvent ne pas s'avérer réalistes dans la pratique.

En effet, le schéma de développement, selon lequel le cumul d'une année de développement est proportionnel à celui de l'année précédente, doit être similaire pour toutes les années d'origine. Ainsi, ce schéma ne tient pas compte d'une évolution probable dans le déroulement des règlements des sinistres au cours du temps. Par exemple, en cas de changement de jurisprudence, il peut y avoir une variation notable au niveau des montants de paiement, ou encore en cas de changement de management au niveau de la gestion des sinistres visant à accélérer ou ralentir les rythmes de remboursements. Pour résumer, cette méthode repose sur l'hypothèse d'une très grande stabilité au niveau des facteurs de développement de la sinistralité.

D'autre part, l'instabilité de la prévision des charges finales pour les années récentes est très importante. De fait, la charge finale correspondant à la dernière année de survenance du triangle est le résultat du produit de  $n$  estimations de facteurs de développement  $\hat{\lambda}_j$ ,  $j \in \{0, \dots, n\}$ . Ce qui induit une forte sensibilité à la première valeur.

## 1.2.Méthode de London-Chain :

Cette méthode a été introduite par Benjamin et en 1986.

- **Hypothèses de calcul :**

Ce modèle reprend les hypothèses précédentes, mais repose sur une relation moins contraignante entre les états  $C_{i,j}$  et  $C_{i,j+1}$ , selon laquelle l'un est fonction affine de l'autre :

$$\forall i \in (0, \dots, n-j-1), C_{i,j+1} = \lambda_j C_{i,j} + \beta_j$$

Avec :  $\lambda_j$  et  $\beta_j$ , des paramètres à estimer.

- **Estimation des paramètres :**

Ce modèle se présente sous la forme de régression linéaire. Ainsi, la manière qui semble la plus naturelle pour estimer ces paramètres consiste en la méthode des moindres carrés en minimisant la fonction suivante :

$$\delta_j = \sum_{i=0}^{n-j-1} (C_{i,j+1} - \beta_j - \lambda_j C_{i,j})^2$$

Ainsi, en annulant simultanément les dérivées partielles  $\frac{\partial \delta_j}{\partial \lambda_j}$  et  $\frac{\partial \delta_j}{\partial \beta_j}$ , nous obtenons

les estimateurs de  $\lambda_j$  et  $\beta_j$  dont les expressions respectives sont les suivantes :

$$\begin{cases} \lambda_j^{LC} = \frac{\frac{1}{n-j} (\sum_{i=0}^{n-j-1} C_{i,j} C_{i,j+1}) - \bar{C}_j \bar{C}_{j+1}}{\frac{1}{n-j} (\sum_{i=0}^{n-j-1} C_{i,j}^2) - \bar{C}_j^2} \\ \beta_j^{LC} = \bar{C}_{j+1} - \lambda_j^{LC} \bar{C}_j \end{cases}$$

Où

$\bar{C}_j$  et  $\bar{C}_{j+1}$  sont respectivement les moyennes des colonnes  $j$  et  $(j+1)$  :

$$\begin{cases} \bar{C}_j = \frac{1}{n-j} \sum_{i=0}^{n-j-1} C_{i,j} \\ \bar{C}_{j+1} = \frac{1}{n-j} \sum_{i=0}^{n-j-1} C_{i,j+1} \end{cases}$$

- **Apports de cette méthode :**

La méthode de London-Chain est plus élaborée et souple que la méthode de Chain-Ladder dans la mesure où elle tient compte d'une tendance multiplicative, mais aussi d'une tendance additive (ou incrémentale). En posant cette dernière à zéro, on retrouve le modèle de Chain-Ladder.

Ainsi, contrairement à la méthode de Chain-Ladder qui ne pouvait être appliquée que lorsque les points  $(C_{i,j}, C_{i,j+1})$  étaient sensiblement alignés (à  $j$  fixé) sur une droite passant par l'origine, la méthode de London-Chain suppose elle aussi un alignement des points sur une même droite, mais relâche l'hypothèse d'alignement avec l'origine.

### 1.3.Méthode de De Vylder :

Contrairement aux méthodes de Chain Ladder et de London Chain, la méthode des moindres carrés de De Vylder ne se base pas sur le triangle des règlements cumulés, mais sur le triangle des règlements non-cumulés  $(Y_{i,j})$ . Elle suppose que les montants de ce triangle sont liés par le modèle suivant :

$$Y_{i,j} = r_j \times p_i \quad \text{Où :}$$

- $p_i$  : est le montant total des règlements correspondant aux sinistres survenus au cours de l'année  $i$ .
- $r_j$  : est la proportion de ce montant  $p_i$  qui est réglée au cours de l'année  $j$  du déroulement ( $\sum_{j=0}^n r_j = 1$ )

Le principe de cette méthode est de déterminer les vecteurs  $(p_i) i \in \{0, \dots, n\}$  et  $(r_j) j \in \{0, \dots, n\}$  de telle sorte que la somme des carrés des écarts entre les montants réels  $(Y_{i,j})$  et ceux prédits par le modèle  $(r_j \times p_i)$  soit minimisée :

$$(\hat{r}_j, \hat{p}_i) = \arg \min \left\{ \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^{n-i} (Y_{i,j} - r_j \times p_i)^2 \right\}$$

La solution est la suivante :

$$\hat{p}_i = \frac{\sum_{j=0}^{n-i} (\hat{r}_j \times Y_{i,j})}{\sum_{j=0}^{n-i} (\hat{r}_j)^2} \quad \hat{r}_j = \frac{\sum_{i=0}^{n-j} (\hat{p}_i \times Y_{i,j})}{\sum_{i=0}^{n-j} (\hat{p}_i)^2}$$

Étant donné que les vecteurs  $\hat{p}_i$  et  $\hat{r}_j$  dépendent l'un de l'autre, il faut commencer par définir un vecteur  $(\hat{r}_{j0})$  tel que  $\sum \hat{r}_{j0} = 1$ .

Ceci nous permet de calculer une première fois le vecteur  $(\hat{p}_i)$  puis le vecteur  $(\hat{r}_j)$  et enfin la double somme. Au fur et à mesure des itérations, cette double somme va tendre vers son minimum, on réitère donc cette opération jusqu'à ce que l'écart entre deux doubles sommes calculées consécutivement soit suffisamment faible. En général, une dizaine d'itérations suffisent pour obtenir un résultat satisfaisant. Les vecteurs  $(\hat{p}_i)$  et  $(\hat{r}_j)$  retenus sont ceux calculés lors de la dernière itération et ils permettent d'évaluer la partie inférieure du triangle des règlements non-cumulés :

$$\hat{Y}_{i,j} = \hat{r}_j \times \hat{p}_i \quad \text{Pour } i \in \{1, \dots, n\} \text{ et } j \in \{n-i+1, \dots, n\}$$

**Remarque :** Le choix des valeurs du vecteur initial  $(\hat{r}_{j0})$  influe sur les valeurs des vecteurs  $(\hat{p}_i)$  et  $(\hat{r}_j)$  finaux mais pas sur les montants estimés des règlements et donc pas sur le montant estimé de la provision. Ce choix peut donc se faire de manière arbitraire, tout en respectant la contrainte  $\sum \hat{r}_j^0 = 1$  le plus simple étant de prendre  $\hat{r}_j^0 = \frac{1}{n}$ .

#### 1.4. Conclusion sur les méthodes déterministes :

Pour conclure, toutes ces méthodes déterministes permettant d'estimer les réserves de sinistres sont relativement simples d'utilisation, mais présentent l'inconvénient d'être très sensibles à des variations dans les données observées. Pour mesurer cette incertitude de provisionnement, nous allons avoir recours aux méthodes stochastiques de provisionnement.

## 2. Les méthodes stochastiques :

L'idée dans cette partie est de pouvoir quantifier la variabilité des réserves estimées, notamment par la construction d'intervalles de confiance, et ainsi d'obtenir une marge d'erreur sur le montant des provisions. Pour cela, les méthodes stochastiques sont adaptées, puisqu'elles considèrent les réserves sous un angle probabiliste en considérant leur distribution. Ceci est d'autant plus important à ce jour du fait de la mise en place de la réglementation SBR. En effet, cette directive a créé des besoins de calculs notamment en matière d'incertitude sur les réserves.

### 2.1.Méthode de MACK :

Thomas Mack a proposé une méthode paramétrique qui correspond à la version stochastique de la méthode de Chain Ladder. Elle fournit une estimation de la moyenne et de l'écart-type pour l'estimateur  $\hat{R}$  de la variable aléatoire  $R$  qui représente la provision technique à constituer.

Le modèle déterministe de Chain Ladder :  $C_{i,j+1} = \lambda_j \times C_{i,j}$  pour  $i \in \{0, \dots, n\}, j \in \{0, \dots, n-1\}$

Devient en stochastique :  $E[C_{i,j+1}] = \lambda_j \times E[C_{i,j}]$  pour  $i \in \{1, \dots, n\}, j \in \{1, \dots, n-1\}$

Le modèle de Mack se base sur les mêmes hypothèses que celles de la méthode de Chain Ladder, à savoir l'indépendance des années de survenance et la régularité de la cadence des paiements. En stochastique, elles peuvent être exprimées ainsi :

**H1 :** pour  $i \neq i'$ , les vecteurs aléatoires  $(C_{i,j})_{j \in \{1, \dots, n\}}$  et  $(C_{i',j})_{j \in \{1, \dots, n\}}$  sont indépendants.

**H2 :**  $E[C_{i,j+1} | C_{i,1}, \dots, C_{i,j}] = \lambda_j \times C_{i,j}$  pour  $i \in \{1, \dots, n\}, j \in \{1, \dots, n-1\}$

Sous ces 2 hypothèses, les coefficients  $\hat{\lambda}_j$ , pour  $j \in \{1, \dots, n-1\}$ , calculés dans la méthode de Chain Ladder, sont des estimateurs sans biais des coefficients de développement  $\lambda_j$ .

Ceci nous permet d'affirmer que  $\hat{R}_i$  est un estimateur sans biais de  $R_i$ , le « vrai » montant de la provision au titre de l'année de survenance  $i$ , pour tout  $i \in \{2, \dots, n\}$ .

**Rappel :**

$$\hat{\lambda}_j = \frac{\sum_{i=0}^{n-j-1} C_{i,j+1}}{\sum_{i=0}^{n-j-1} C_{i,j}}, j = 0, \dots, n-1$$

$$\forall i \in (1, \dots, n), j \in (n-i+1, \dots, n),$$

$$\hat{C}_{i,j} = C_{i,n-i} \cdot (\hat{\lambda}_{n-i} \times \dots \times \hat{\lambda}_{j-1}) = \prod_{k=n-i}^{j-1} \lambda_k$$

$$\forall i \in (1, \dots, n), \quad \hat{R}_i = \hat{C}_{i,n} - C_{i,n-i}$$

La modèle de Mack fournit donc la même estimation du montant de la provision que la méthode de Chain Ladder :  $\hat{R} = \sum_{i=1}^n (\hat{C}_{i,n} - C_{i,n-i})$ .

Il s'agit maintenant de déterminer l'écart-type, c'est-à-dire l'erreur de prévision. Pour cela on s'intéresse à l'écart moyen entre le montant de la provision au titre de l'année i Ri et son estimateur  $\hat{R}_i$  :

$$mse(\hat{R}_i) = E[(\hat{R}_i - R_i)^2 / D]$$

Avec  $D = \{C_{i,j} / i \in (0, \dots, n), j \in (0, \dots, n-i)\}$ , (mse = mean squared error : erreur quadratique moyenne)

Pour estimer cet écart, il convient d'ajouter une troisième hypothèse :

H3 :  $\text{Var}[C_{i,j+1} | C_{i,1}, \dots, C_{i,j}] = \sigma_j^2 \times C_{i,j}$  pour  $i \in \{0, \dots, n\}, j \in \{0, \dots, n-1\}$

$$\widehat{mse}(\hat{R}_i) = \hat{C}_{i,n}^2 \times \sum_{j=n-i}^{n-1} \left[ \frac{\hat{\sigma}_j^2}{\hat{\lambda}_j^2} \times \left( \frac{1}{\hat{C}_{i,j}} + \frac{1}{\sum_{k=1}^{n-j} C_{k,j}} \right) \right]$$

Où :

- $\hat{C}_{i,j} = C_{i,n-i} \cdot (\hat{\lambda}_{n-i} \times \dots \times \hat{\lambda}_{j-1})$  pour  $i \in (1, \dots, n), j \in (n-i+1, \dots, n)$ ,
- $\hat{\sigma}_j^2 = \frac{1}{n-j-1} \sum_{i=0}^{n-j-1} C_{i,j} \left( \frac{C_{i,j+1}}{C_{i,j}} - \hat{\lambda}_j \right)^2, j \in (0, \dots, n-2)$ ,
- $\hat{\sigma}_j^2 = \min\left(\frac{\hat{\sigma}_{n-2}^4}{\hat{\sigma}_{n-3}^2}, \min(\hat{\sigma}_{n-3}^2, \hat{\sigma}_{n-2}^2)\right)$

L'écart moyen entre le « vrai » montant total de la provision R et son estimateur sans biais  $\hat{R}$  peut alors être estimé ainsi :

$$\widehat{MSEP}(\hat{R}) = \sum_{i=1}^n \left\{ \widehat{MSEP}(\hat{R}_i) + \hat{C}_{i,n} \left( \sum_{k=i+1}^n \hat{C}_{k,n} \right) \sum_{j=n-i}^{n-1} \frac{2\hat{\sigma}_j^2}{\hat{\lambda}_j^2 \sum_{u=0}^{n-j} C_{u,j}} \right\}$$

L'estimation de l'écart type de la variable R (respectivement  $R_i$  pour  $i \in \{2, \dots, n\}$ ) est

$$\text{alors } \widehat{se}(\widehat{R}) = \sqrt{\widehat{mse}(\widehat{R})} \text{ (respectivement } \widehat{se}(\widehat{R}_i) = \sqrt{\widehat{mse}(\widehat{R}_i)}).$$

- **Critique :**

Le modèle de Mack a l'avantage de mesurer l'erreur d'estimation de la provision obtenue au moyen de Chain Ladder par application d'une formule fermée. Néanmoins, il est basé sur Chain Ladder, il rencontre de ce fait les mêmes inconvénients que ce dernier (hypothèse d'indépendance des années de survenance pas toujours vérifiée et sensibilité importante liée aux facteurs de développement).

De plus, le modèle de Mack ne permet pas d'obtenir une distribution complète de l'estimation de la provision sans avoir recours à des hypothèses de loi de probabilité (Normale, Log-Normale,).

Une solution pour pallier à ce manque est d'utiliser une méthode de ré-échantillonnage pour le provisionnement : la méthode du Bootstrap qui sera détaillée par la suite.

## **2.2.Méthode GLM :**

Les modèles linéaires généralisés ont été introduits en 1972 par J. Nelder et R. Wedderburn. Ils sont une généralisation du modèle linéaire normal et sont formés de trois composantes : la composante aléatoire, la composante systématique et la fonction de lien.

- **La composante aléatoire :**

On cherche à expliquer les variables aléatoires réelles  $(Y_{i,j})$  indépendantes et dont la loi de probabilité est de type exponentiel. On se situe donc dans le cadre suivant :

**H1 :** Les paiements annuels non cumulés  $Y_{i,j}$  sont indépendants.

**H2 :** Les paiements annuels non cumulés  $Y_{i,j}$  appartiennent à la famille exponentielle, de densité :

$$f(Y_{i,j}/\theta_{i,j}; \varphi) = \exp\left(\frac{Y_{i,j}\theta_{i,j} - b(\theta_{i,j})}{\frac{\varphi}{\omega_{i,j}}} + c(Y_{i,j}; \varphi)\right)$$

Où :

- $\theta_{i,j}$  est un paramètre réel, appelé paramètre naturel,
- $\varphi$  est un paramètre de dispersion strictement positif,
- $\omega_{i,j}$  est une pondération (=1 par la suite),
- $b$  et  $c$  sont des fonctions spécifiques de la distribution,
- $b$  étant deux fois dérivable à valeurs dans  $\mathbb{R}$  et  $c$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^2$

On peut alors montrer que :

$$\begin{cases} \mu_{i,j} = E[Y_{i,j}] = b'(\theta_{i,j}) \text{ soit } \theta_{i,j} = b'^{-1}(\mu_{i,j}), \text{ si } b' \text{ inversible} \\ \text{Var}(Y_{i,j}) = b''(\theta_{i,j})\varphi = b''[b'^{-1}(\mu_{i,j})]\varphi = V(\mu_{i,j})\varphi \end{cases}$$

La fonction  $V(\cdot) = b''[b'^{-1}(\cdot)]$  est appelée fonction variance de la distribution et joue un rôle essentiel dans la modélisation GLM.

### • La composante systématique

Soit  $M$  la matrice de régression et  $\xi$  le vecteur des paramètres. La composante systématique est notée  $\eta$  et est définie par  $\eta = M\xi$ .

Dans le cas du provisionnement à deux variables exogènes qualitatives par exemple, la composante systématique s'écrit :

$$\eta_{i,j} = \mu + \alpha_i + \beta_j, \text{ pour } i \in \{0, \dots, n\}, j \in \{0, \dots, n\}$$

Où

- $\mu$  : représente l'inflation, supposée constante. Dans certains modèles ce paramètre est nul.
- $\alpha_i$  : paramètre dépendant de l'année de survenance
- $\beta_j$  : paramètre relatif au délai de règlement

Pour raison d'identifiabilité du modèle, on prend  $\alpha_0 = \beta_0 = 0$ .

• **La fonction lien :**

C'est la fonction qui fait le lien entre la composante aléatoire et la composante systématique. Il s'agit d'une fonction réelle  $g$ , strictement monotone et dérivable telle que :

$$\eta_{i,j} = g(\mu_{i,j}) \text{ ou } \mu_{i,j} = g^{-1}(\eta_{i,j})$$

Pour résumer, un modèle GLM est la donnée de :

- 1) la distribution de probabilité des variables réponses  $Y_{i,j}$
- 2) La fonction variance  $V$  et, éventuellement, un paramètre de dispersion  $\phi$  avec :  
 $E[Y_{i,j}] = \mu_{i,j}$ ,  $Var[Y_{i,j}] = V(\mu_{i,j})\phi$ ,
- 3) La fonction lien  $\eta_{i,j} = g(\mu_{i,j})$ .

Notons que les paramètres  $\theta_{i,j}$  figurant dans l'expression de la densité ne présentent en fait qu'un intérêt transitoire.

Les lois les plus utilisées sont : Normale (qui donne des règlements estimés négatives et donc non appropriée à notre cas), Gamma et Log-Normale (qui ne fait pas partie de la famille exponentielle mais simulable tout en prenant le log (règlements) suivant la loi Normale).

Le tableau ci-dessous fournit les caractéristiques de chacune des lois citées :

Lois	$\phi$	$b(\theta)$	$c(y; \phi)$	$\mu$	$g(\cdot)$	$V(Y)$
$N(\mu; \sigma^2)$	$\sigma^2$	$\theta^2$	$-\left(\frac{y^2}{\phi} + \ln(2\pi\phi)\right)/2$	$\theta$	$\mu$	$\sigma^2$
$G(\nu; \lambda)$	$\frac{1}{\nu}$	$\ln\left(\frac{-1}{\theta}\right)$	$\nu \ln(\nu y) - \ln(y\Gamma(\nu))$	$\frac{-1}{\theta}$	$\frac{-1}{\mu}$	$\frac{\mu^2}{\nu}$

Tableau 3: Exemples de familles de lois exponentielles.

### 2.3.Méthode de ré-échantillonnage : Bootstrap

▪ **Principe général :**

La méthode du Bootstrap est une méthode relativement récente consistant à fabriquer de l'information et à fournir des réponses là où les autres méthodes ne sont pas applicables (manque d'information, calculs impossibles...) et se base sur le principe du ré-échantillonnage.

Soit  $X = (X_1, \dots, X_n)$  un échantillon initial de variables aléatoires réelles indépendantes et identiquement distribuées. On note  $\theta$  la variable aléatoire dont on veut déterminer un intervalle de confiance, et  $\hat{\theta} = f(X_1, \dots, X_n)$  l'estimation de  $\theta$  à partir de l'échantillon initial.

A partir de cet échantillon initial, on construit un échantillon Bootstrap. On effectue un tirage au sort avec remise de  $n$  éléments parmi les  $n$  variables de l'échantillon initial, où chaque réalisation a la même probabilité de tirage, qui est donc  $\frac{1}{n}$ . Cet échantillon Bootstrap généré est noté  $X^* = (X_1^*, \dots, X_n^*)$ . On peut alors estimer une nouvelle fois  $\theta$ , mais cette fois à partir de l'échantillon Bootstrap :  $\hat{\theta}^* = f(X_1^*, \dots, X_n^*)$ .

On renouvelle cette procédure  $B$  fois afin d'obtenir  $B$  échantillons Bootstrap,  $X^{*(k)} = (X_1^{*(k)}, \dots, X_n^{*(k)})$  pour  $k \in \{1, \dots, B\}$ , à partir desquels on estime  $B$  fois la variable  $\theta$  :  $\hat{\theta}^{*(k)} = f(X_1^{*(k)}, \dots, X_n^{*(k)})$  pour  $k \in \{1, \dots, B\}$ .

À partir de ces  $B$  observations, pour  $B$  suffisamment grand, on est en mesure d'estimer la distribution empirique suivie par la variable aléatoire  $\theta$ , ainsi que sa moyenne empirique et son écart-type empirique.

$$\text{Moyenne empirique : } \bar{\theta}^* = \frac{1}{B} \sum_{k=1}^B \hat{\theta}^{*(k)}$$

$$\text{Ecart-type empirique : } \hat{\sigma}_{\theta}^* = \sqrt{\frac{1}{B-1} \sum_{k=1}^B (\hat{\theta}^{*(k)} - \bar{\theta}^*)^2}$$

Si la distribution empirique peut être approximée grâce à une loi connue, on peut fournir un intervalle de confiance pour la variable  $\theta$  à un certain niveau de confiance  $1-\alpha$ .

▪ **Application au calcul des provisions :**

On souhaite obtenir un intervalle de confiance pour les deux variables aléatoires R et BE qui modélisent respectivement le montant de la PSAP et celui du Best Estimate sinistre. Pour cela, on se base sur les règlements des années précédentes. Cependant, on ne peut pas utiliser directement le triangle des règlements cumulés car ces variables ne sont pas indépendantes. En effet, excepté ceux de la première colonne, les montants cumulés dépendent des observations précédentes. Afin de contourner ce problème de non-indépendance, le ré-échantillonnage ne s'effectuera pas sur les règlements cumulés mais sur des résidus, qui seront définis plus tard, calculés à partir de ces observations.

Voici la procédure à suivre :

- 1) À partir du triangle des règlements cumulés, on calcule les coefficients de développement de la même manière que dans la méthode de Chain Ladder :

$$\hat{\lambda}_j = \frac{\sum_{i=0}^{n-j-1} C_{i,j+1}}{\sum_{i=0}^{n-j-1} C_{i,j}}, \quad j = 0, \dots, n-1$$

- 2) Grâce à ces coefficients et à la diagonale du triangle des règlements cumulés, c'est-à-dire les dernières valeurs observées, on calcule un nouveau triangle, que l'on appelle triangle prédit des règlements cumulés et que l'on note  $(D_{i,j})$ , en procédant par récursion arrière :

$$D_{i,n-i} = C_{i,n-i} \text{ pour } i \in \{0, \dots, n\} \text{ (sur la diagonale).}$$

$$D_{i,j} = \frac{1}{\hat{\lambda}_j} \times D_{i,j+1} = \frac{1}{\prod_{k=j}^{n-i-1} \lambda_k} \times C_{i,n-i}$$

- 3) On décumule le triangle des règlements cumulés  $(C_{i,j})$  et le triangle prédit des règlements cumulés  $(D_{i,j})$  afin d'obtenir le triangle des règlements non cumulés  $(Y_{i,j})$  et le triangle prédit des règlements non-cumulés, noté  $(Z_{i,j})$ :

$$Y_{i,0} = C_{i,0} \text{ et } Z_{i,0} = D_{i,0} \text{ pour } i \in \{0, \dots, n\}$$

$$Y_{i,j} = C_{i,j} - C_{i,j-1} \text{ et } Z_{i,j} = D_{i,j} - D_{i,j-1} \text{ pour } i \in \{0, \dots, n-1\}, \text{ pour } j \in \{1, \dots, n-i\}$$

- 4) À l'aide de ces deux nouveaux triangles, on calcule le triangle des résidus de Pearson, noté  $(r_{i,j})$  :

$$r_{i,j} = \frac{Y_{i,j} - Z_{i,j}}{\sqrt{Z_{i,j}}} \text{ pour } i \in \{0, \dots, n\}, \text{ pour } j \in \{0, \dots, n-i\}$$

Ces résidus sont indépendants et identiquement distribués, excepté les deux situés aux extrémités de la diagonale qui sont nuls par construction, et devront donc être exclus du ré-échantillonnage.

Pour pouvoir comparer les résultats avec d'autres méthodes analytiques, il est nécessaire d'appliquer un ajustement permettant de corriger le biais à chacun des

résidus de Pearson tels que :  $r_{i,j} = \sqrt{\frac{N}{N-P}} r_{i,j}$  avec  $N = n(n+1)/2$  le nombre de données et  $P = 2n-1$  le nombre de degrés de libertés.

- 5) Ces résidus sont ensuite ré-échantillonnés aléatoirement avec remise pour former un triangle des résidus « Bootstrap » que l'on note  $(r_{i,j}^*)$ . On effectue ensuite le chemin inverse : on calcule le triangle des règlements non-cumulés « bootstrap »  $(Y_{i,j}^*)$  :

$$Y_{i,j}^* = Z_{i,j} + r_{i,j}^* \times \sqrt{Z_{i,j}} \text{ pour } i \in \{0, \dots, n\}, \text{ pour } j \in \{0, \dots, n-i\}$$

grâce auquel on détermine le triangle des règlements cumulés « Bootstrap »  $(C_{i,j}^*)$  :

$$C_{i,j}^* = \sum_{k=0}^j Y_{i,k}^*, \text{ } i \in \{0, \dots, n\}, \text{ pour } j \in \{0, \dots, n-i\}$$

Ce triangle nous permet alors de calculer le montant de provision « Bootstrap »  $\hat{R}^*$  et celui de la meilleure estimation  $\widehat{BE}^*$  à l'aide de la méthode de Chain Ladder.

On réitère B fois cette dernière étape, afin d'obtenir un échantillon de B observations des deux variables R et BE. On peut alors calculer leurs moyennes et leurs écarts-type empiriques :

$$\text{Moyenne empirique : } \bar{R} = \frac{1}{B} \sum_{k=1}^B \hat{R}^{*(k)} \quad \overline{BE} = \frac{1}{B} \sum_{k=1}^B \widehat{BE}^{*(k)}$$

$$\text{Ecart-type empirique : } \hat{\sigma}_R = \sqrt{\frac{1}{B-1} \sum_{k=1}^B (\hat{R}^{*(k)} - \bar{R})^2} \quad \hat{\sigma}_{BE} = \sqrt{\frac{1}{B-1} \sum_{k=1}^B (\widehat{BE}^{*(k)} - \overline{BE})^2}$$

- **Critique de la méthode**

La méthode du Bootstrap est une méthode facile à implémenter qui donne une distribution simulée d'une variable. Elle s'avère donc très utile lorsque la distribution des données n'est pas connue ou que les propriétés statistiques sont difficiles à dériver analytiquement.

Néanmoins, le temps de calcul peut se révéler long. En effet, il faut un certain nombre de simulations pour obtenir des résultats robustes. Une optimisation de la programmation informatique est donc indispensable.

Enfin, le Bootstrap utilise les méthodes de Chain Ladder pour estimer à chaque simulation les facteurs de développement. Cette méthode hérite donc également les contraintes liées à ce modèle.

## II. Applications et résultats

Notre étude est basée sur des triangles de règlements d'historiques comptables, issus de trois garanties appartenant à la branche « Auto » à savoir « La RC auto dommage matériel », « La RC auto dommage corporel », et « Autres garanties Auto ».

Par souci de confidentialité, les données utilisées ont été intégralement modifiées de sorte que nul ne puisse retrouver les données initiales. Ces données peuvent donc être qualifiées de fictives.

### 1. Résultats des méthodes déterministes

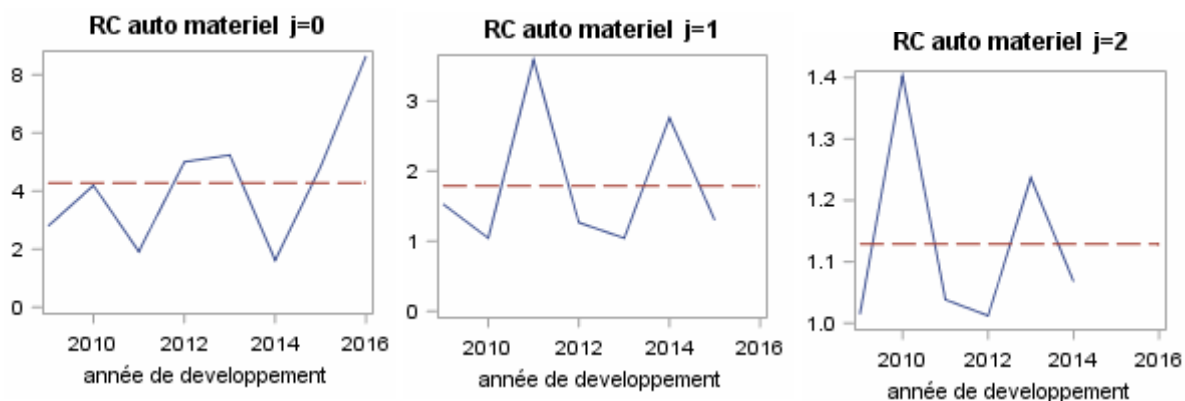
#### 1.1. La méthode Chain Ladder

Avant d'appliquer le modèle de Chain Ladder, il est indispensable de vérifier les hypothèses spécifiques à cette méthode.

##### 1.1.1. Tests hypothèses de la méthode

La première hypothèse stipule l'égalité des facteurs individuels sur les années de survenance, elle signifie que les sinistres survenus auparavant ne doivent influencer l'incidence des sinistres des années d'après. Elle est vérifiée si, pour  $j=0, \dots, n-1$ , les facteurs de développement individuels  $\lambda_{ij} = \frac{C_{i,j+1}}{C_{i,j}}$  sont sensiblement constants.

Afin de nous assurer de la véracité de cette hypothèse, il est nécessaire de comparer les coefficients de développement  $\lambda_{ij}$  avec  $\bar{\lambda}_{.j} = \frac{\sum \lambda_{ij}}{I}$  avec  $I$  le nombre des coefficients de développement  $\lambda_{ij}$  par année de développement.



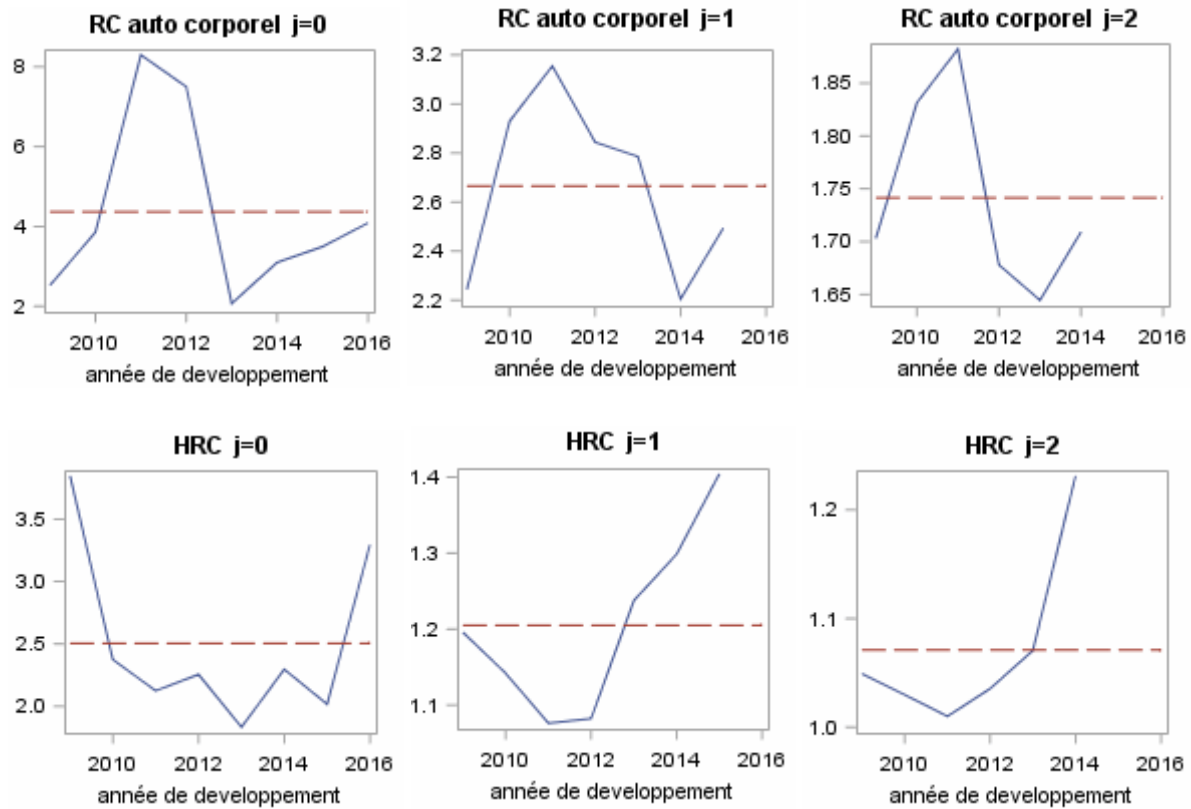


Figure 15: Vérification de la première hypothèse de la méthode Chain Ladder sur les garanties étudiées pour les 3 premières années de développement.

D'après les graphes suivants, on remarque que pour la première année, l'hypothèse d'égalité des coefficients sur les années de survenance ne semble pas réaliste puisque les facteurs de développement sont bien éloignés de la moyenne. Cependant on constate un recul de cet écart par rapport à la moyenne en avançant dans les années de développement.

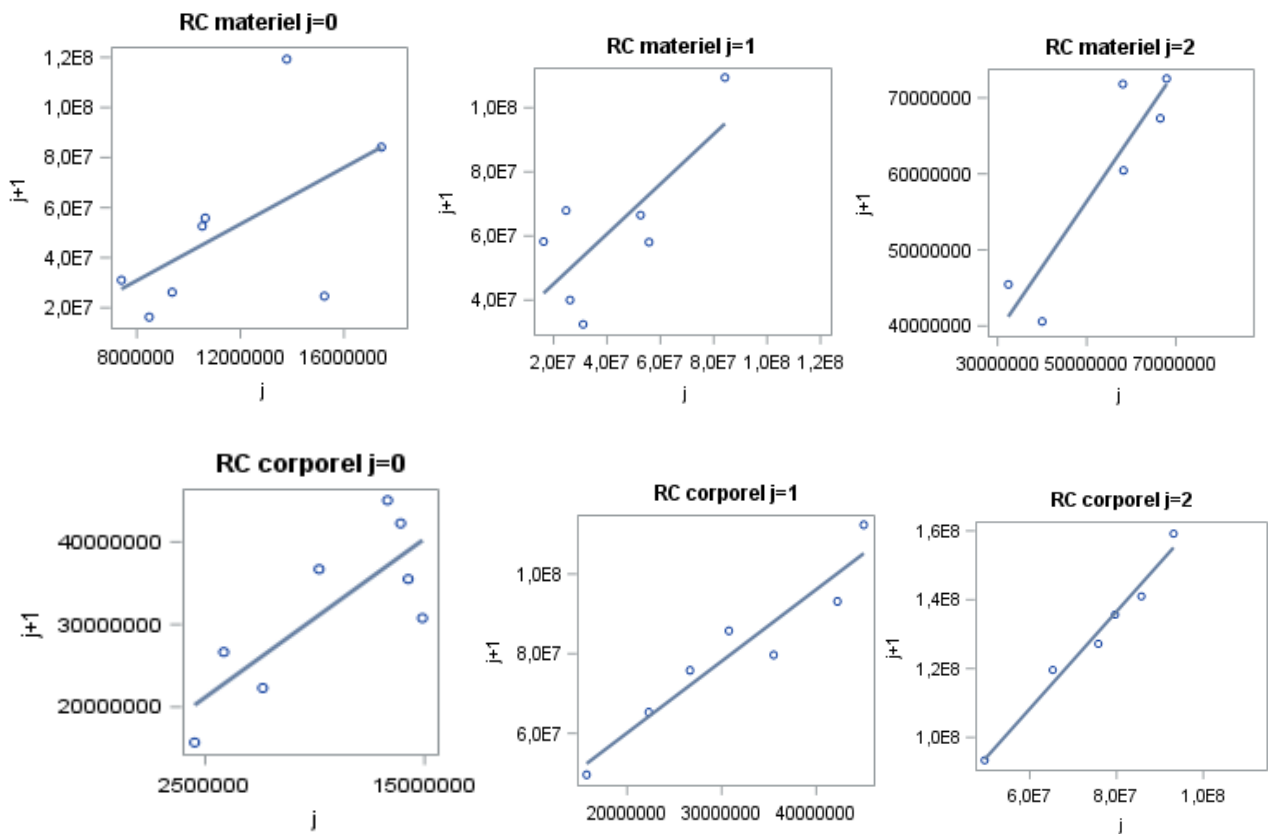
Pour quantifier cette dispersion, on procède au calcul du coefficient de variation par année de développement :

coef_variation								
	0	1	2	3	4	5	6	7
<b>RCMATERIEL</b>	0.5281635	0.5525434	0.1402013	0.0170115	0.0019289	0.0013958	0.0067956	0
<b>RC_CORPOREL</b>	0.5242834	0.134817	0.0538154	0.0701014	0.0330941	0.0171998	0.0113779	0
<b>HRC</b>	0.2772463	0.0988899	0.0756606	0.0302125	0.0111095	0.012241	0.0103622	0

Tableau 4 : Les coefficients de variation par année de développement.

On constate que pour les deux branches « RC corporel » et « HRC », le coefficient de variation est élevé durant la 1<sup>ère</sup> année. Pour la branche « RC matériel », il est élevé durant les deux premières années. Ensuite, pour les trois branches, le coefficient tend à diminuer rapidement durant les années qui suivent jusqu'à atteindre 0. Ce qui nous laisse vraisemblablement accepter la première hypothèse de Chain ladder.

Vérifions maintenant graphiquement la seconde hypothèse de régularité de la cadence des paiements. Pour chaque année de déroulement  $j$ , les points de coordonnées  $(C_{i,j}, C_{i,j+1})$  doivent être sensiblement alignés sur une droite passant par l'origine. Nous le ferons ici uniquement pour les trois premières années de développement.



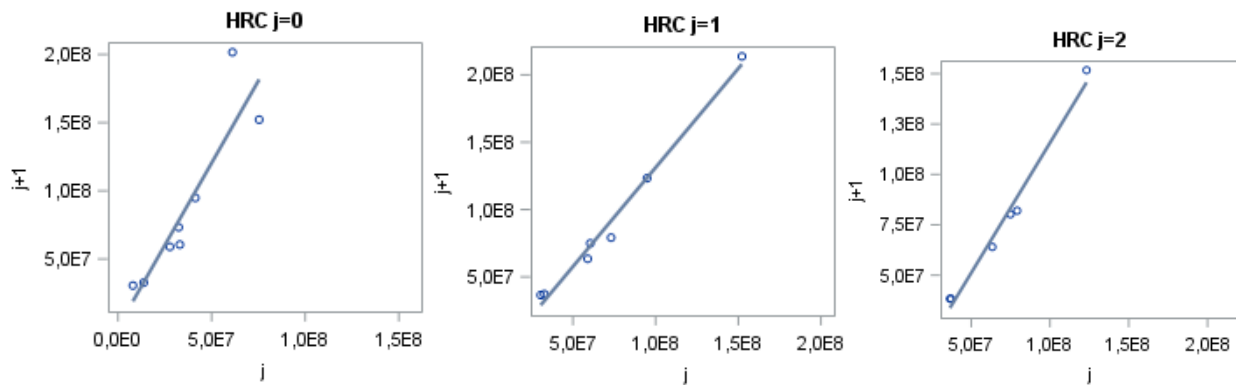


Figure 16: Vérification de la deuxième hypothèse de la méthode Chain Ladder sur les garanties étudiées pour les 3 premières années de développement.

Pour la branche « HRC » la seconde hypothèse de Chain ladder semble être vérifiée car il paraît que les points s’alignent sur une droite passant par l’origine. Pour la branche « RC corporel », il semblerait que pour l’année de développement 0, la condition ne soit pas vraiment vérifiée. Toutefois, à partir de l’année de développement 1, les couples sont sensiblement alignés sur une droite.

En revanche, la validation de cette hypothèse est plus contestable pour les triangles de « RC matériel ». En effet, pour ce triangle, les couples  $(C_{i,j}, C_{i,j+1})$  ne sont pas alignés sur une droite.

### 1.1.2. Application de la méthode Chain ladder

Après avoir vérifié les hypothèses, on commence par calculer coefficients de passage par année de déroulement.

	lambda							
<b>RCMATERIEL</b>	4.411933	1.4881926	1.1084171	1.0232852	1.0092626	1.0064246	1.0109173	1.0056637
<b>RC_CORPOREL</b>	3.3684393	2.5734717	1.7273876	1.3561868	1.1953153	1.1194664	1.0628566	1.0327342
<b>HRC</b>	2.4059268	1.2492721	1.0968459	1.0258077	1.0125528	1.0136136	1.012365	1.0073591

Tableau 5: Coefficients de Passage selon le modèle de Chain Ladder.

Notons qu’il existe une correspondance entre les coefficients de passage et les cadences

$$\text{cadence}_j = \frac{1}{\lambda_j \times \dots \times \lambda_{n-1}}$$

cadence									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8
RCMATERIEL	0.1300344	0.573703	0.8537805	0.946345	0.9683808	0.9773505	0.9836295	0.9943681	1
RC_CORPOREL	0.0335263	0.1129314	0.2906256	0.5020231	0.6808371	0.8138151	0.9110386	0.9683034	1
HRC	0.2825123	0.679704	0.8491352	0.9313705	0.955407	0.9674	0.9805699	0.9926946	1

Tableau 6 : Les cadences de paiements par année de développement

Ainsi, nous remarquons que pour le triangle de la branche « RC matériel » et « HRC », plus de 93% des sinistres sont réglés au bout de 3 années de développement.

En revanche, comme nous pouvions nous y attendre, la branche « RC corporel » a une liquidation beaucoup plus longue. En effet, il faut attendre la 6ème année pour atteindre 91% des paiements.

Il est par ailleurs constaté que pour les 3 branches, un retard de règlement s'impose pour la première année surtout pour la branche RC où les sinistres réglés ne dépassent pas 13%. Ce qui nous laisse penser à une lenteur dans la procédure d'indemnisation.

Suite à une application directe de formules mentionnées dans la partie théorique, on calcule les réserves annuelles et on aboutit à la valeur de la réserve globale et du Best estimate.

Le tableau suivant présente les réserves annuelles et les cashflows futurs estimés par la méthode Chain ladder.

Ri									
	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017
RCMATERIEL	0	267711.03	1029948.8	1616023	2409876.6	4111642.8	18733929	88606894	514086944
RC_CORPOREL	0	7423446.9	18039135	46247488	89945130	157924441	274194744	288317410	158816970
HRC	0	293512.94	1314306.9	2857805.4	4030766.1	11178806	37959934	94984892	397250196

Tableau 7 : Réserves annuelles sous le modèle de Chain Ladder pour les 3 garanties.

CF								
	2018	2019	2020	2021	2022	2023	2024	2025
RCMATERIEL	336014097	189855093	62129769	16942576	8412997.7	6664075.7	7516343	3328017.2
RC_CORPOREL	289882679	257248133	199100880	137277626	85638205	46840434	19712223	5208584.4
HRC	298116972	128944805	59558349	22813874	14786442	12725500	8879534.6	4044742.8

Tableau 8: Les cash-flows futurs estimés par Chain Ladder pour les 3 garanties.

Nous obtenons donc la réserve globale en sommant les réserves annuelles, et le BE en sommant les flux de règlements futurs actualisés à l'aide de la courbe des taux.

provision		
	RESERVE	BESTESTIMATE
RCMATERIEL	630862969	602840968
RC_CORPOREL	1.04091E9	968648881
HRC	549870219	523137526

Tableau 9: Les réserves totales et les best estimate des différentes garanties estimés par Chain Ladder.

## 1.2.La méthode London Chain

Selon le modèle London Chain, les chargements cumulés ( $C_{i,j}, C_{i,j+1}$ ) s'alignent selon une droite d'ajustement mais en présence d'une constante comme mentionné dans le cadre théorique de la méthode. Les deux tableaux suivants présentent les résultats d'estimation des paramètres de régression.

lambda								
RCMATERIEL	5.6396389	0.7785309	0.8612823	1.0107735	1.0122429	1.0135677	1.1455686	1.0056637
RC_CORPOREL	1.5362899	1.8005756	1.4123002	0.9165579	1.6261705	1.0673765	0.9271641	1.0327342
HRC	2.4109039	1.4706984	1.2908292	1.0643823	1.0410986	1.0558634	3.500814	1.0073591

alpha								
RCMATERIEL	-14256745	29463459	13308843	714731.6	-162776.9	-358973.3	-6048969	0
RC_CORPOREL	17331323	24092975	23590181	54228740	-69428602	9867746.2	30630498	0
HRC	-182139.4	-15904720	-13400299	-2336934	-1601198	-2005179	-97037502	0

Tableau 10: Estimation des paramètres de régression de la méthode London Chain.

On peut désormais calculer les réserves annuelles et les cashflows futurs estimés par la méthode London Chain.

Ri									
	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017
RCMATERIEL	0	267711.03	3326825.2	5196591.3	6744550.9	8278754.2	13229320	16657873	299274593
RC_CORPOREL	0	7423446.9	23784496	45534595	97140509	143566654	225526907	253499873	242433233
HRC	0	293512.94	69832199	126150606	137637650	354423599	749185282	1.11752E9	2.5363E9

Tableau 11: Les réserves annuelles sous le modèle de London Chain.

CF								
	2018	2019	2020	2021	2022	2023	2024	2025
RCMATERIEL	349497771	-59186493	-26894764	11997111	15765964	16669092	43009311	2118226.3
RC_CORPOREL	283415965	247457278	209449129	143711538	78466458	45175539	23374871	7858936.7
HRC	429460803	374999129	312917353	401951044	706239600	954692512	1.89142E9	19671275

Tableau 12: Les cash-flows futurs estimés par la méthode London Chain.

Le tableau suivant présente le montant de la réserve et du BE pour chacune des branches :

provision		
	RESERVE	BESTESTIMATE
RCMATERIEL	352976218	335337872
RC_CORPOREL	1.03891E9	965754882
HRC	5.09135E9	4.39973E9

Tableau 13: Les réserves totales et les best estimate des différentes garanties estimés par London Chain.

### 1.4.Méthode de De Vylder :

On applique la méthode des moindres carrés de De Vylder au triangle des règlements non-cumulé avec comme vecteur initial  $\hat{r}_j^0 = \frac{1}{n}$  pour tout  $j \in \{1, \dots, n\}$

On choisit d'arrêter l'algorithme lorsque l'écart relatif entre les deux doubles sommes calculées consécutivement (mentionnée dans la partie théorique) est inférieur à  $10^{-9}$ .

On obtient  $(\hat{p}_i)$  et  $(\hat{r}_j)$  suivants :

p									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8
RCMATERIEL	81252958	88930200	98510925	160767269	159977047	111818998	268009022	436389244	1.49203E9
RC_CORPOREL	284891358	267145390	234196233	278210218	311284012	341127069	423922845	370107316	179149125
HRC	112215071	109112040	184848124	235027777	208391702	369353361	591008829	805725981	1.54128E9

r									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8
RCMATERIEL	0.0515003	0.2373444	0.1223967	0.0484624	0.0111561	0.004638	0.0036771	0.0058766	0.0030363
RC_CORPOREL	0.0307523	0.0721384	0.160348	0.1902182	0.1583103	0.1196589	0.0861743	0.0512325	0.0290776
HRC	0.1014855	0.1578031	0.0827803	0.043331	0.0099608	0.0053633	0.0056857	0.0043195	0.0025623

Tableau 14: Résultats de l'estimation des paramètres de la méthode DeVlyder.

On peut désormais calculer les réserves annuelles et les cashflows futurs estimés par la méthode DeVlyder et aboutir au montant de la réserve et du Best estimate.

Ri									
	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017
RCMATERIEL	0	270022.58	878024.52	2024065.8	2756088.3	3173885.3	20595571	86947636	651403360
RC_CORPOREL	0	7767945.9	18808321	46317646	89071811	151615135	269051841	294242599	155350616
HRC	0	279573	1272073.1	2953703.1	3736619.1	10301851	42093172	124084093	480581115

Tableau 15: Les réserves annuelles sous le modèle de DeVlyder.

CF									
	2018	2019	2020	2021	2022	2023	2024	2025	
RCMATERIEL	349497771	-59186493	-26894764	11997111	15765964	16669092	43009311	2118226.3	
RC_CORPOREL	287900112	254945513	196829271	135707199	84968286	46726221	19940088	5209226	
HRC	342737474	173042268	81583150	25163489	16346707	13757959	8721991.7	3949160.9	

Tableau 16: Les cash-flows futurs estimés par la méthode DeVlyder.

provision		
	RESERVE	BESTESTIMATE
RCMATERIEL	768048653	733875340
RC_CORPOREL	1.03223E9	960525793
HRC	665302199	633109215

Tableau 17: Les réserves totales et les best estimate des différentes garanties estimés par Devylder.

### 1.5. Comparaisons des résultats issus de chacune des méthodes déterministes

Le tableau ci-dessus présente un récapitulatif de l'ensemble des best estimate estimés par les méthodes vues précédemment.

	CHAINLADDER	LONDONCHAIN	DEVYLDER
RCMATERIEL	602840968	335337872	733875340
RC_CORPOREL	968648881	965754882	960525793
HRC	523137526	4.39973E9	633109215

Tableau 18: Récapitulatif des best estimate obtenues par les méthodes déterministes.

On dresse ensuite un tableau présentant l'écart relatif entre le montant des best estimate par les différentes méthodes et la méthode Chain Ladder.

	CHAINLADDER	LONDONCHAIN	DEVYLDER
RCMATERIEL	0	-0.443737	0.2173614
RC_CORPOREL	0	-0.002988	-0.008386
HRC	0	7.4102741	0.2102156

Tableau 19: Récapitulatif des écarts relatifs des best estimate par rapport à celui de Chain Ladder.

On constate que sur la garantie « RC corporel », les 3 méthodes convergent et fournissent un peu près les mêmes résultats.

En ce qui concerne les deux autres garanties, la méthode Devylder semble légèrement surestimer la provision par rapport à Chain ladder. Quant à la méthode London Chain

elle s'écarte fortement des deux autres méthodes surtout sur la garantie « HRC » où elle estime un montant de provision égal à 7 fois celui de Chain ladder.

Par ailleurs, nous observons que triangles à développement longs (RC Corporel) se distinguent de ceux à développement court (RC matériel et HRC). Les provisions à constituer sont nettement plus faibles pour les branches courtes du fait que la quasi-totalité des paiements ont déjà été effectués.

Les différentes méthodes proposées reposent sur le passé. Elles sont donc d'autant plus performantes et stables que :

- Le passé est régulier,
- Le passé explique bien le présent et le futur,
- La branche considérée est peu volatile,
- Les données sont nombreuses,
- Les données sont fiables,
- Les données sont homogènes,
- Les données par branche sont stables et peu volatiles.

On peut citer un certain nombre de facteurs qui peuvent influencer les données, et donc amener à ce que le passé n'explique pas au mieux le futur :

- D'une part des facteurs internes au portefeuille et à la compagnie : l'évolution du portefeuille, l'évolution des politiques de gestion des sinistres qui influe ainsi sur la cadence de règlement des sinistres, etc...
- D'autre part des facteurs externes : cycles économiques, évolution du taux d'inflation des sinistres, modifications au niveau règlementaire, etc...

### **3. Gestion de la liquidation incomplète des triangles : Estimation du « Tail Factor »**

Les méthodes de provisionnement présentées jusqu'ici ne sont pas suffisantes pour l'estimation des charges finales et donc des provisions pour les branches à déroulement long. En effet, ces méthodes supposent que les développements sont clos avant la fin de l'historique ce qui n'est généralement pas le cas en pratique. Elles permettent uniquement d'estimer les paiements cumulés jusqu'au développement  $n$  du triangle. Pour ces branches, comme celle de la « Responsabilité Civile », il est nécessaire d'avoir recours à un "tail factor" pour estimer la charge ultime sans quoi celle-ci sera sous-estimée. Pour cela il faut estimer les facteurs de la queue de développement.

#### **3.1. Extrapolation des facteurs de développement : trois méthodes pour estimer un "tail factor"**

Dans cette méthode, les facteurs sont extrapolés par l'utilisation de lois à deux paramètres,  $a$  et  $b$ , permettant l'ajustement des facteurs de développement et ainsi l'estimation des facteurs pour les années de développement  $j > n$ . Pour cela, on cherche à ajuster une fonction  $f_j$ , régulière et supérieure à 1, afin de les extrapoler.

Par régression linéaire on obtient alors les 2 paramètres  $a$  et  $b$ , en minimisant les écarts des carrés entre la courbe  $f$  (où  $f_j$  est le facteur de développement de Chain Ladder) et la droite d'ajustement.

Le tail factor final est obtenu grâce à la formule suivante :

$$f_{ultime} = \sum_{k=n}^{\infty} \hat{f}_k$$

Trois lois sont habituellement utilisées : exponentielle, puissance et puissance inverse.

<i>Loi</i>	$f_j$	$f$
<i>Exponentielle</i>	$1+b.exp(-a.j)$	$f(j, \ln(f_j - 1))$
<i>Puissance</i>	$b^{a^j}$	$f(j, \ln(\ln(f_j)))$
<i>Puissance inverse</i>	$1+b.j^{-a}$	$f(\ln(\frac{1}{j}), \ln(f_j - 1))$

Tableau 20: Les trois autres lois principalement utilisées pour l'ajustement des facteurs de développement.

### 3.2. Comparaison des méthodes introduisant un "tail factor" :

On commence par une extrapolation linéaire des facteurs de développement issus de la méthode de Chain Ladder pour les 3 garanties. Théoriquement, la clôture d'un triangle de liquidation se traduit par le fait que le dernier coefficient de passage est égal à 1.

Les tableaux ci-dessous résument les résultats des régressions linéaires effectuées.

rc_materiel				rc_corporel			
	a	b	R carré		a	b	R carré
exponentielle	0.81036	-0.87152	0.8348	exponentielle	1.54325	-0.62014	0.916
puissance	0.29789	-0.78867	0.8547	puissance	0.90353	-0.52837	0.9942
puissance inverse	1.20665	3.25756	0.9617	puissance inverse	1.49622	2.06975	0.9972

hors_rc			
	a	b	R carré
exponentielle	0.0007592	-0.69515	0.8573
puissance	-0.2932	-0.64834	0.8742
puissance inverse	0.29387	2.58099	0.9745

Tableau 21: Résultat de la régression des 3 méthodes du tail factor.

Les trois méthodes possèdent un R<sup>2</sup> relativement élevé (supérieur à 0.8), donc on garde les trois méthodes pour l'estimation des facteurs de queue.

Appliquée sur nos données, l'extrapolation linéaire nous permet d'estimer le tail factor suivant :

tailfactor			
	exponentielle	puissance	puissance inverse
rc_corporel	1.0386671	1.0531162	1.1792559
rc_materiel	1.001517	1.0020434	1.0117824
hors_rc	1.0038366	1.0045806	1.0285846

Tableau 22: Les tails factor obtenus pour les 3 garanties.

On remarque que le modèle puissance inverse fournit un tail factor plus élevé, engendrant ainsi une provision plus grande que les autres modèles, ce qui montre son caractère prudent.

Désormais, on peut alors appliquer au triangle initial l'ensemble des coefficients obtenus, et ainsi calculer un montant de la PSAP et du best estimate dans un cadre où l'on considère que la durée de liquidation totale du triangle a été atteinte. On calcule aussi le pourcentage que représentent les montants obtenu par rapport aux deux provisions sans tail factor.

On obtient les résultats suivants :

rc_materiel				
	sans tail factor	exponentielle	puissance	puissance inverse
PSAP	630862969	632843193	633530332	646243183
% du tail factor	0	0.3138913	0.4228118	2.4379643
best estimate	602840968	604430166	604981619	615184123
% du tail factor	0	0.2636181	0.3550938	2.0474977

rc_corporel				
	sans tail factor	exponentielle	puissance	puissance inverse
PSAP	1.04091E9	1.13454E9	1.16953E9	1.47499E9
% du tail factor	0	8.995014	12.356496	41.701972
best estimate	968648881	1.04207E9	1.0695E9	1.309E9
% du tail factor	0	7.5797454	10.411525	35.136686

hors_rc				
	sans tail factor	exponentielle	puissance	puissance inverse
PSAP	549870219	555970241	557153168	595318450
% du tail factor	0	1.1093567	1.3244851	8.265265
best estimate	523137526	528105523	529068925	560151602
% du tail factor	0	0.9496541	1.1338126	7.0754007

Tableau 23: La PSAP et le best estimate obtenu pour les 3 garanties.

On remarque que pour les 3 garanties le modèle puissance inverse fournit la plus grande valeur de PSAP et du best estimate, ce qui montre son caractère prudent expliqué par la valeur élevée de ses facteurs de développement. En revanche le modèle exponentiel et puissance donnent des résultats très proches pour toutes les garanties puisque les facteurs de développement sont proches.

Nous constatons de plus que l'effet de l'actualisation pour le best estimate permet de minimiser l'écart relatif entre le best estimate sans et avec tail factor. Cet effet, est plus important lorsque le facteur queue est prudent, ce qui est le cas pour le modèle puissance inverse.

## 4. Résultats des méthodes stochastiques

### 4.1. La méthode de Mack :

Comme mentionné auparavant, le modèle de Mack est la version stochastique de la méthode de Chain Ladder. En effet, le montant des provisions estimé est identique. Il a cependant l'avantage d'estimer une erreur de prédiction des provisions à l'ultime.

#### 4.1.1. Vérification des hypothèses :

- **Hypothèse H1 :**

Cette hypothèse suppose l'indépendance entre les différentes années de survenance et peut être vérifiée par le test de non effet calendaire.

La première étape du test consiste à calculer les facteurs de développements du triangle

de règlements en calculant  $d_{i,j} = \frac{c_{ij}}{c_{i,j-1}}$   $j=1, \dots, n$ .

Notons par  $A_j$  le vecteur qui regroupe les éléments de la  $j^{\text{ème}}$  diagonale du triangle construit pour  $j=1 \dots n$ .

Pour chaque colonne  $k$ , les coefficients de développement sont marqués par un G s'ils sont supérieurs à la médiane de la colonne et par un P s'ils sont inférieurs à la médiane. Remarquons que quand le nombre d'éléments de la colonne est impair, il y a un élément qui est égal à la médiane et qui ne sera pas marqué.

Pour chaque diagonale  $A_j$  on compte alors le nombre d'éléments marqués d'un G, soit  $G_j$  et le nombre d'éléments marqués d'un P, soit  $P_j$ .

On note également  $Z_j = \min(P_j, G_j)$  et nous calculons l'espérance et la variance de  $Z_j$  par les formules suivantes :

$$E(Z_j) = \frac{n_j}{2} - \binom{n_j - 1}{m_j} * \frac{n_j}{2^{n_j}}$$

$$var(Z_j) = \frac{n_j(n_j - 1)}{4} - \binom{n_j - 1}{m_j} * \frac{n_j(n_j - 1)}{2^{n_j}} + E(Z_j) - E(Z_j)^2$$

$$\text{Avec : } n_j = P_j + G_j \text{ et } m_j = \frac{n_j - 1}{2}$$

Prenons  $Z$  la somme des  $Z_j$  pour  $j=1, \dots, n$ . Donc l'espérance de  $Z$  est la somme des espérances des  $Z_j$  et la variance de  $Z$  est, sous l'hypothèse d'indépendance, égale est la somme des variances des  $Z_j$ .

On suppose que  $Z$  suit une distribution Normale et on ne rejette pas l'hypothèse de non effet significatif d'une année calendrier (au seuil  $\alpha = 5\%$ ) si :

$$E(Z_j) - 1.96 * \sqrt{var(Z_j)} \leq Z \leq E(Z_j) + 1.96 * \sqrt{var(Z_j)}$$

En appliquant cette méthode aux facteurs de développement, nous obtenons ce qui suit pour les trois branches :

rc_materiel						rc_corporel					
diag_j	Pj	Gj	Zi	E(Zj)	var(Zj)	diag_j	Pj	Gj	Zi	E(Zj)	var(Zj)
2	1	1	1	0.5	0.25	2	1	1	1	0.5	0.25
3	3	0	0	0.75	0.1875	3	1	2	1	0.75	0.1875
4	0	4	0	1.25	0.4375	4	1	3	1	1.25	0.4375
5	3	2	2	1.5625	0.3710938	5	1	3	1	1.25	0.4375
6	6	0	0	2.0625	0.6210938	6	3	1	1	1.25	0.4375
7	2	3	2	1.5625	0.3710938	7	7	0	0	2.40625	0.5537109
8	0	6	0	2.0625	0.6210938	8	1	6	1	2.40625	0.5537109

hors_rc						
diag_j	Pj	Gj	Zi	E(Zj)	var(Zj)	
2	0	1	0	0	0	
3	2	1	1	0.75	0.1875	
4	3	1	1	1.25	0.4375	
5	5	0	0	1.5625	0.3710938	
6	4	2	2	2.0625	0.6210938	
7	2	3	2	1.5625	0.3710938	
8	0	7	0	2.40625	0.5537109	

Tableau 24: Vérification de la première hypothèse de Mack par le test de la médiane.

D'où les résultats suivants :

rc_materiel			rc_corporel			hors_rc		
Z	icinf	icsup	Z	icinf	icsup	Z	icinf	icsup
5	4.3680627	13.131937	6	4.4317179	13.193282	6	4.4050247	12.782475

Tableau 25: Intervalle de confiance du test de la médiane.

Ce qui conduit à ne pas rejeter l'hypothèse d'indépendance des années de survenance, et par conséquent à valider la première hypothèse de Mack.

- **Hypothèse H2 :**

La deuxième hypothèse de ce modèle est vérifiée de la même manière que pour la méthode de Chain Ladder Standard.

• **Hypothèse H3 :**

Pour la vérification de la troisième hypothèse, nous avons recours aux résidus normalisés  $r_{i,j} = \frac{C_{i,j+1} - \hat{\lambda}_j C_{i,j}}{\sqrt{C_{i,j}}}$  pour  $j=0, \dots, n-2$  ;  $i=1, \dots, n-j-1$  et nous traçons par la suite le nuage de points de coordonnées  $(C_{i,j}, r_{i,j})$ . Pour valider l'hypothèse, la courbe obtenue ne doit pas laisser entrevoir l'existence d'une tendance spécifique.

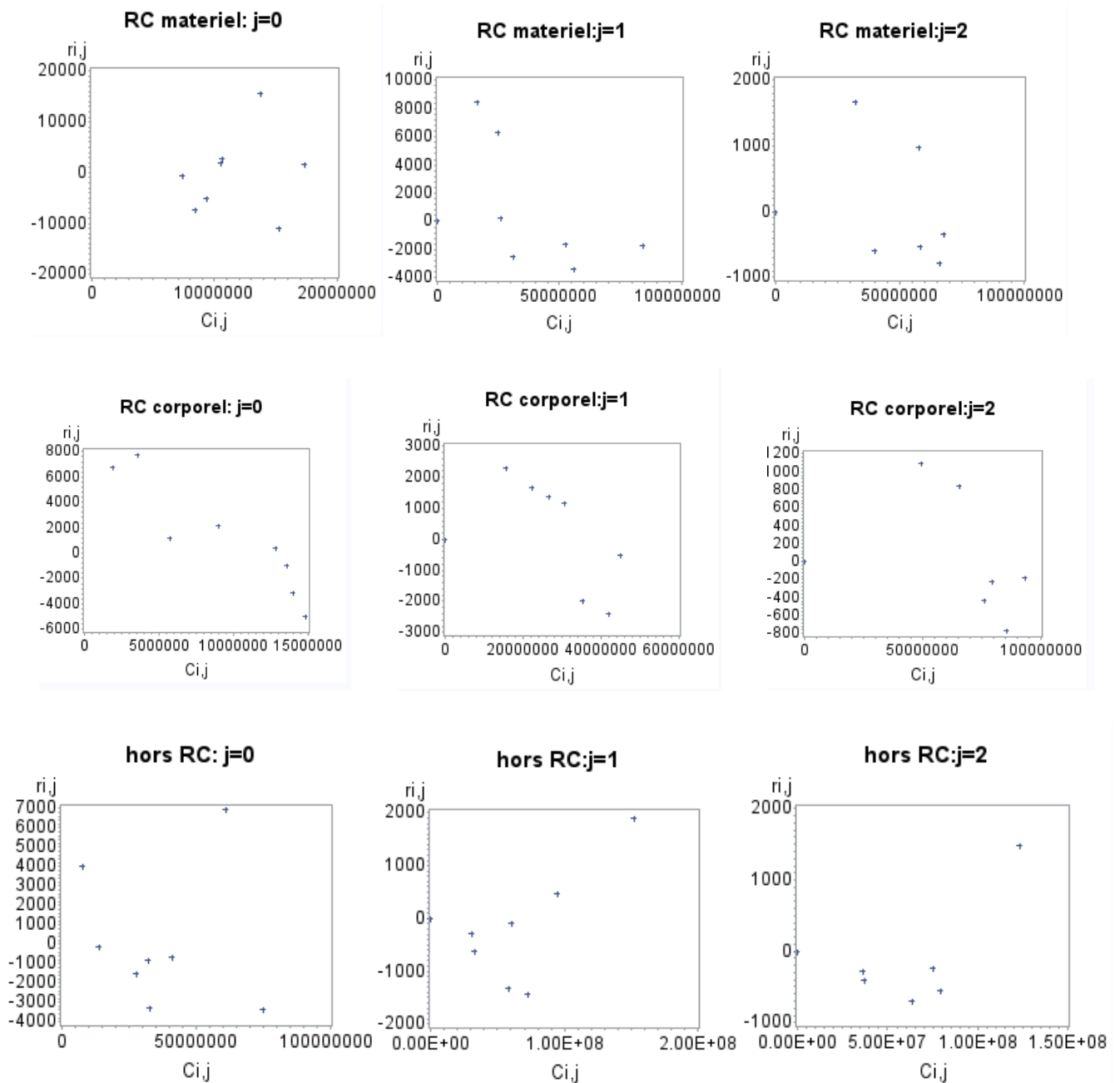


Figure 17: Vérification de la troisième hypothèse de la méthode Mack pour les garanties étudiées pour les 3 premières années de développement.

Ainsi, dans chacun des nuages de points représentés, on remarque qu'ils n'ont aucune structure, donc nous acceptons l'hypothèse H3.

#### 4.1.2. Application :

- **Pour les réserves annuelles :**

Après avoir testé les hypothèses du modèle, on calcule les volatilités du triangle de règlements par année de déroulement. On obtient les coefficients ci-dessous :

	sigma2							
	0	1	2	3	4	5	6	7
RCMATERIEL	65504596	22336917	1025638	14174.628	178.48208	101.10725	2116.6013	101.10725
RCCORPOREL	21300226	3558937.3	550073.49	946991.19	238021.87	66917.911	32915.032	16189.975
HORSRC	12915067	1360321.2	660961.54	70811.534	8280.2623	7957.8688	4291.0715	2313.8474

Tableau 26: Estimation des volatilités du triangle des règlements.

Ces coefficients nous permettent de déduire la moyenne quadratique des écarts de prédiction MSEP, l'erreur standard de prédiction SEP et l'erreur standard relative SER par année de survenance des montants de provisions tel que :

$$SEP(R_i) = \sqrt{MSEP(R_i)} ;$$

$$\widehat{SER}(R_i) = \frac{SEP(R_i)}{R_i}$$

Le tableau ci-après donne le récapitulatif des résultats de la méthode de Mack :

rc_materiel				rc_corporel			
	MSEP_Ri	SEP_Ri	SER_Ri		MSEP_Ri	SEP_Ri	SER_Ri
2009	0	0	0	2009	0	0	0
2010	9.96495E9	99824.576	0.3728818	2010	6.9617E12	2638508.5	0.355429
2011	2.3913E11	489009.51	0.4747901	2011	1.4784E13	3845008.2	0.2131481
2012	2.971E11	545066.54	0.3372888	2012	4.1617E13	6451100.1	0.1394908
2013	3.4546E11	587756.22	0.2438947	2013	1.3876E14	11779497	0.1309631
2014	1.7227E12	1312503	0.3192162	2014	5.707E14	23889362	0.1512708
2015	1.7106E14	13078830	0.698136	2015	1.0373E15	32206721	0.1174593
2016	5.4749E15	73992404	0.8350637	2016	2.6446E15	51425246	0.1783633
2017	5.1965E16	227958085	0.4434232	2017	1.1098E16	105345438	0.6633135

hors_rc			
	MSEP_Ri	SEP_Ri	SER_Ri
2009	0	0	0
2010	1.8649E11	431850.19	1.4713157
2011	9.5686E11	978193.33	0.7442655
2012	2.5566E12	1598948.9	0.5595024
2013	3.7354E12	1932715.4	0.4794908
2014	2.6785E13	5175414	0.4629666
2015	2.9757E14	17250229	0.4544325
2016	9.0678E14	30112760	0.3170268
2017	8.8977E15	94327874	0.2374521

Tableau 27: Les erreurs de prédiction de l'estimation des réserves annuelles sous le modèle de Mack pour les 3 garanties.

On remarque que pour les garanties RC matériel et RC corporel le niveau du risque d'estimation des réserves est largement acceptable.

En effet pour la garantie RC corporel, les valeurs prises par l'erreur standard relative des diverses réserves annuelles ne dépassent pas 21% sauf pour les années 2010 et 2017.

Pour la garantie RC matériel, les valeurs de cette erreur sont aux alentours de 30%-40% sauf pour les années 2015 et 2016.

On remarque que le niveau du risque d'estimation des réserves des premières années de survenance de la garantie hors RC est élevé, mais avec un degré moins tout en avançant dans les années de survenance.

Le modèle de Mack ne fait pas d'hypothèse sur la distribution des réserves ce qui ne permet pas de déterminer les valeurs des quantiles. Néanmoins, nous pouvons émettre une hypothèse sur la distribution des réserves pour construire des intervalles de confiance sur les réserves estimées. Dans ce cadre deux lois sont couramment utilisées en assurance non-vie pour l'approximation de l'évolution de la réserve : la loi Normale et la Log-Normale.

**a) Distribution normale de la réserve :**

Dans cette partie, on suppose que les réserves annuelles suivent une loi Normale, et nous avons pour un seuil de 5% :

$$IC_{5\%}(R_i) = [\hat{R}_i - 1.96 * SEP(\hat{R}_i) ; \hat{R}_i + 1.96 * SEP(\hat{R}_i) ]$$

Les tableaux suivants fournissent les différents intervalles de confiance au seuil de 5% pour toutes les réserves annuelles des différentes garanties :

rc_materiel				rc_corporel			
	Ri	icinf	icsup		Ri	icinf	icsup
2009	0	0	0	2009	0	0	0
2010	267711.03	72054.856	463367.2	2010	7423446.9	2251970.2	12594924
2011	1029948.8	71490.118	1988407.4	2011	18039135	10502919	25575351
2012	1616023	547692.59	2684353.4	2012	46247488	33603332	58891645
2013	2409876.6	1257874.4	3561878.8	2013	89945130	66857315	113032945
2014	4111642.8	1539136.9	6684148.7	2014	157924441	111101292	204747590
2015	18733929	-6900578	44368437	2015	274194744	211069570	337319918
2016	88606894	-56418217	233632005	2016	288317410	187523928	389110892
2017	514086944	67289098	960884790	2017	158816970	-47660088	365294028

hors_rc			
	Ri	icinf	icsup
2009	0	0	0
2010	293512.94	-552913.4	1139939.3
2011	1314306.9	-602952	3231565.8
2012	2857805.4	-276134.5	5991745.3
2013	4030766.1	242643.89	7818888.3
2014	11178806	1034994.6	21322618
2015	37959934	4149485	71770384
2016	94984892	35963881	154005902
2017	397250196	212367562	582132829

Tableau 28: Les intervalles de confiance au seuil de 5% des réserves annuelles pour le modèle de Mack selon la loi Normale.

On remarque que la distribution normale conduit à une borne inférieure négative. Ceci ne respecte pas le fait que les réserves sont toujours positives, d'où le recours à la loi Log-Normale.

**b) Distribution log-normale de la réserve :**

Si on suppose que la réserve  $R_i$  suit une loi Log-Normale de paramètres  $\hat{R}_i$  et  $\widehat{SER}(R_i)$  alors  $\ln(R_i)$  suit une Normale de paramètre  $\mu'_i$  et  $\sigma'^2_i$  tel que :

$$\mu'_i = \ln(\hat{R}_i) - \frac{\sigma'^2_i}{2}$$

$$\sigma'^2_i = \ln\left(1 + \left(\frac{\widehat{SER}(R_i)}{\hat{R}_i}\right)^2\right)$$

Donc l'intervalle de confiance de  $\ln(R_i)$  au seuil de 5% s'écrit comme suit :

$$IC_{5\%}(\ln(R_i)) = [\mu'_i - 1.96 * \sigma'^2_i ; \mu'_i + 1.96 * \sigma'^2_i]$$

D'où l'intervalle de confiance de  $R_i$  :

$$IC_{5\%}(R_i) = IC_{5\%}(\exp(\ln(R_i))) = [\exp(\mu'_i - 1.96 * \sigma'^2_i); \exp(\mu'_i + 1.96 * \sigma'^2_i)]$$

rc_materiel				rc_corporel			
	Ri	icinf	icsup		Ri	icinf	icsup
2009	0	0	0	2009	0	0	0
2010	267711.03	123670.4	508776.99	2010	7423446.9	3557768.5	13752066
2011	1029948.8	384485.16	2251462.3	2011	18039135	11671965	26668072
2012	1616023	804716.39	2913796	2012	46247488	34892986	60126920
2013	2409876.6	1461610.9	3750275.4	2013	89945130	69068559	115156734
2014	4111642.8	2127093.2	7212776.2	2014	157924441	116278574	209687768
2015	18733929	4467497.2	52816241	2015	274194744	216492387	342550619
2016	88606894	16347077	282962100	2016	288317410	200646466	401521705
2017	514086944	204839808	1.0782E9	2017	158816970	40523977	432238897

hors_rc			
	Ri	icinf	icsup
2009	0	0	0
2010	293512.94	20128.071	1352415.7
2011	1314306.9	286973.6	3873645.4
2012	2857805.4	896745.73	6936127.6
2013	4030766.1	1490130.6	8864964.9
2014	11178806	4276721.3	24062474
2015	37959934	14782413	80793240
2016	94984892	49366726	166066609
2017	397250196	244227920	611661759

Tableau 29: Les intervalles de confiance au seuil de 5% des réserves annuelles pour le modèle de Mack selon la loi Log-Normale.

Les intervalles de confiance communiqués par la loi Log-Normale sont plus fiables, raisonnables et précis surtout que la loi Normale nous donne quelques intervalles dans lesquelles les bornes inférieures sont négatives, on privilégie donc ici la loi Log-Normale.

- **Pour la réserve globale :**

A l'instar de l'étude faite pour les réserves annuelles, on analyse les erreurs pour l'estimation de la réserve globale R et on construit l'intervalle de confiance qui s'y rapporte :

	MSEP_R_	SEP_R_	SER_R_
RC_MATERIEL	6.7358E 16	259534198	0.4113955
RC_CORPOREL	1.8001E 16	134167805	0.1288949
HORS_RC	1.2296E 16	110887330	0.2016609

Tableau 30: Les erreurs de prédiction de l'estimation de la réserve globale sous le modèle de Mack pour les 3 garanties.

L'erreur standard relative est inférieure à 20 % pour les 2 garanties RC corporel et hors RC, c'est-à-dire que l'écart type de l'estimation  $E(R_i)$  ne représente que respectivement 12% et 20% du montant total des réserves estimées, ce qui n'est pas le cas pour la garantie RC matériel où l'écart atteint 41%.

Pour les intervalles de confiance on trouve les résultats suivants en utilisant la loi Log-Normale

matériel			
	R	ICINF	ICSUP
LOGNORMALE	630862969	268776446	1.26641E9

corporel			
	R	ICINF	ICSUP
LOGNORMALE	1.04091E9	802728656	1.3277E9

hors_rc			
	R	ICINF	ICSUP
LOGNORMALE	549870219	364464159	797175121

Tableau 31: Les intervalles de confiance au seuil de 5% de la réserve globale pour le modèle de Mack selon la loi

Log-Normale.

Etant donné qu'on ne tient pas compte du tail factor, il serait plus prudent de retenir le quantile 75% de la variable R.

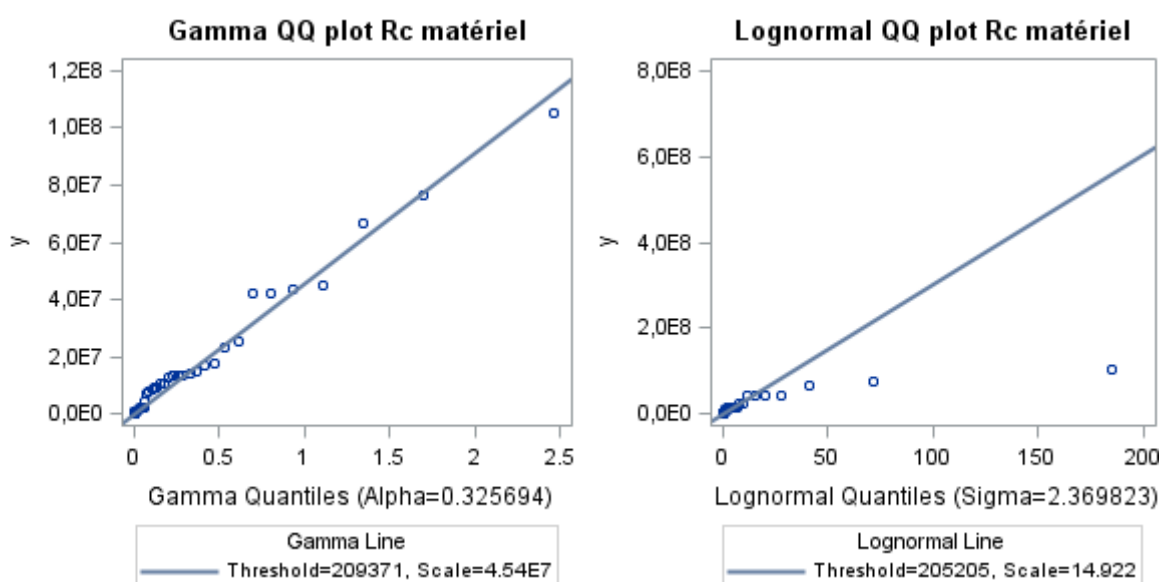
Toutefois, la méthode Mack permet uniquement de connaître les moments d'ordre 1 et 2, et ne permet pas de connaître la distribution suivie par les provisions, ni de déterminer des quantiles. Néanmoins on peut générer la loi Log-Normale et utiliser les paramètres fournis par Mack (moyenne et variance) pour estimer ces grandeurs.

Tableau 32: Calcul du quantile 75% de la variable R

## 4.2.Modèle GLM

Dans ce modèle, on se base sur le triangle des règlements décumulés  $(Y_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$ , devant vérifier les hypothèses du modèle GLM et qu'on estime tout en se basant sur nos variables explicatives composées des années de survenance et de développement.

Notre première étape consiste à choisir la distribution de la variable réponse. Plusieurs tests permettent de s'assurer de la pertinence de tel ou tel choix. Dans notre étude, nous aurons recours surtout aux diagrammes Quantile-Quantile. Les distributions sur lesquelles nous focaliserons notre analyse sont la loi Log-Normale et la loi Gamma.



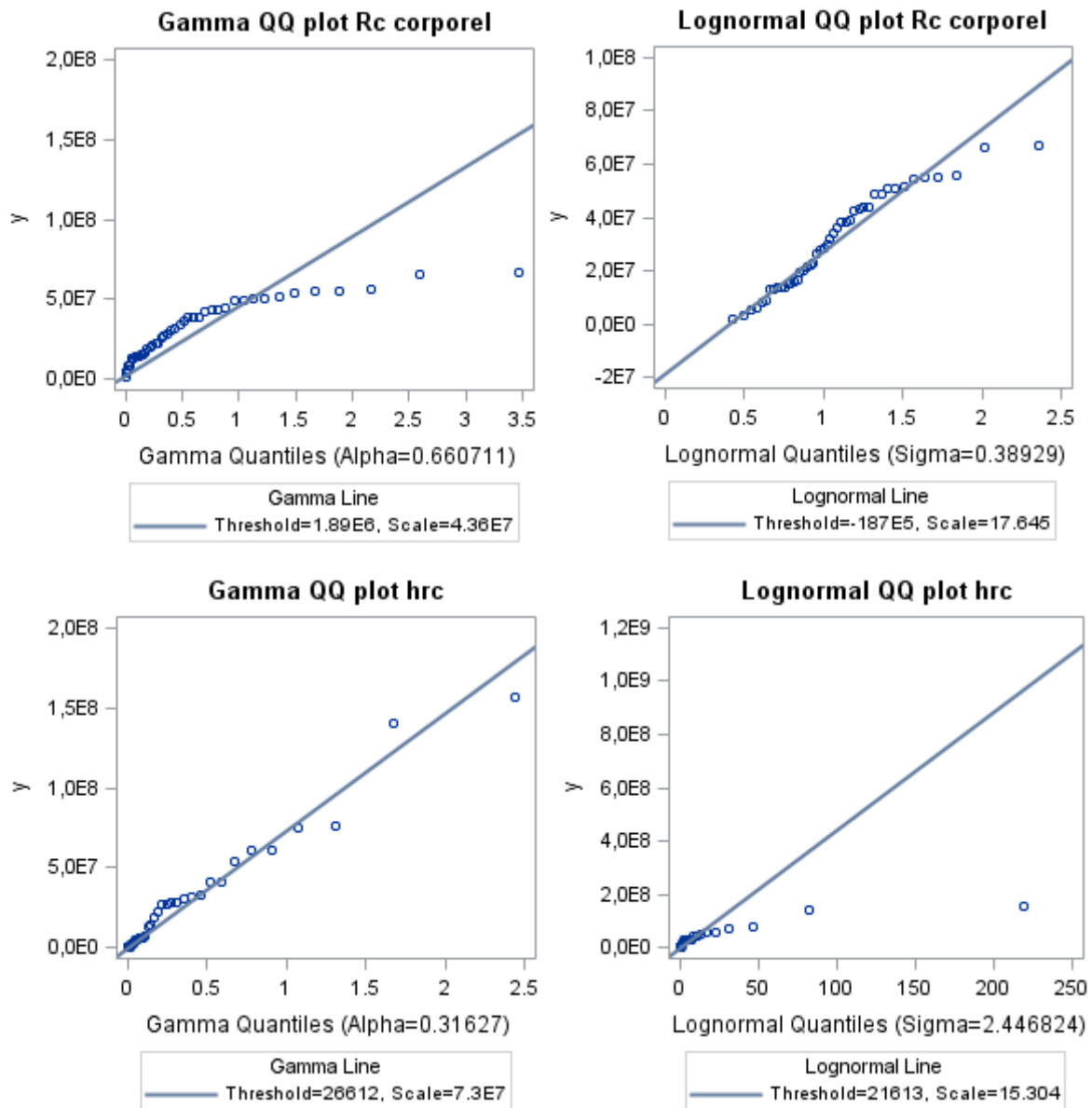


Figure 18: Q-Q-plot des 3 garanties selon les lois Gamma et Log-Normale.

Pour les deux branches RC matériel et HRC, les points s’alignent assez bien autour du tracé relatif à la loi Gamma, c’est donc la loi Gamma qui semble mieux ajuster les données du triangle supérieur. Pour la garantie « RC corporel », c’est plutôt la loi Log-Normale qui s’ajuste mieux aux données.

Notons que l’analyse à l’aide de l’outil graphique Q-Q plot n’est que descriptive. Elle permet d’avoir une première idée sur la meilleure distribution à choisir sans pour autant confirmer définitivement ce choix, d’autant plus que notre jeu de données est assez

réduit. Par la suite, et pour valider le modèle sélectionné, il faut impérativement avoir recours à des tests statistiques plus rigoureux.

#### 4.2.1. Le modèle Gamma

La méthode GLM stipule que les paiements non cumulés sont des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées selon une loi Gamma.

En effectuant une régression linéaire sur le vecteur des incréments, on aboutit à l'estimation de la partie inférieure du triangle en recourant à la procédure GENMOD implémenté sur SAS et on obtient les résultats suivants :

Ri									
	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017
RCMATERIEL	0	301759.5	857608.41	1323909.6	2604119	4260813.9	16585581	73193979	442218049
RC_CORPOREL	0	6705227.3	15785731	44112586	98651846	178582171	289795480	288799007	172533313
HRC	0	350210.85	1491371	3806366.4	7731998	17357125	33097022	62419884	359027543

Tableau 33: Les réserves annuelles sous le modèle de GLM-Gamma.

CF								
	2018	2019	2020	2021	2022	2023	2024	2025
RCMATERIEL	283843256	170333527	50901067	15010740	7295237.1	5356802.8	5782784.2	2822404.8
RC_CORPOREL	303116526	271210534	211464400	146103757	89854019	48254272	19705154	5256699.8
HRC	289112074	91317770	38217189	20243321	15798964	14022144	10920292	5649766

Tableau 34: Les cash-flows futurs estimés par la méthode de GLM-Gamma.

provision		
	RESERVE	BESTESTIMATE
RCMATERIEL	541350000	517353262
RC_CORPOREL	1.095E9	1.01906E9
HRC	485280000	461448579

Tableau 35: La réserve totale et les best estimate des différentes garanties estimées par GLM-Gamma.

- **Mesure de la qualité d'ajustement**

Nous allons nous baser sur les résultats théoriques issus des tests de rapport de vraisemblances. Pour ce faire, nous allons définir ce que l'on appelle la déviance d'un modèle.

Nous savons déjà que si le modèle était parfait, la prévision ( $\hat{\mu}_i$ ) par le modèle correspondrait à  $Y_i$ . On parle alors de modèle saturé (autant de paramètres que d'observations distinctes),

Nous définissons alors ce que l'on appelle la déviance, qui mesure l'écart entre la vraisemblance du modèle et celle du modèle saturé correspondant (ayant la même loi) :

$$D = 2\phi \sum_{i=1}^n (l_{\text{saturé}}(Y_i) - l(Y_i, \hat{\beta}, \phi)) \geq 0$$

Avec  $l$  le logarithme du carré du rapport de vraisemblance et  $\phi$  le facteur de dispersion.

Nous pouvons remarquer que la déviance est deux fois un écart de vraisemblance multiplié par le paramètre de dispersion.

Lorsque ce facteur multiplicatif n'est pas présent, soit  $D^* = D/\phi$ , on parle de déviance standardisée (qui tire son nom du fait que dans le cadre de la loi Normale,  $= \sigma^2$ ). Lorsqu'un modèle est adéquat, il paraît logique que ce dernier soit proche du modèle saturé, et donc que la déviance soit proche de 0. Inversement, plus la déviance d'un modèle sera importante, moins le modèle en question sera pertinent. Nous allons exploiter cette notion afin de tester la significativité d'un modèle. Nous posons ainsi comme hypothèse nulle de test  $H_0$  : « Le modèle à  $p$  variables explicatives est significatif ». Nous pouvons alors nous apercevoir que la déviance peut s'écrire sous la forme d'un rapport de vraisemblance (ou d'une différence de log-vraisemblance), ce qui nous permet d'obtenir, sous les hypothèses techniques classiques et en exploitant les résultats théoriques issus des tests de rapport de vraisemblance, que sous  $H_0$  la déviance standardisée  $D^*$  suit asymptotiquement une loi du  $\chi^2$  à  $n-p$  degrés de liberté (avec  $n$  le nombre d'observations distinctes et  $p$  le nombre de variables du modèle).

Dans ce cadre, on obtient la sortie suivante et ce sur le logiciel sas :

Critères d'évaluation de l'adéquation				Critères d'évaluation de l'adéquation			
Critère	DDL	Valeur	Valeur/DDL	Critère	DDL	Valeur	Valeur/DDL
Deviance	28	21.0058	0.7502	Deviance	28	2.7367	0.0977
Scaled Deviance	28	48.2105	1.7218	Scaled Deviance	28	45.4514	1.6233
Pearson Chi-Square	28	15.2546	0.5448	Pearson Chi-Square	28	2.3761	0.0849
Scaled Pearson X2	28	35.0110	1.2504	Scaled Pearson X2	28	39.4638	1.4094
Log Likelihood		-735.0394		Log Likelihood		-765.7451	
Full Log Likelihood		-735.0394		Full Log Likelihood		-765.7451	
AIC (smaller is better)		1506.0788		AIC (smaller is better)		1567.4901	
AICC (smaller is better)		1532.3865		AICC (smaller is better)		1593.7978	
BIC (smaller is better)		1538.5988		BIC (smaller is better)		1600.0100	

Critères d'évaluation de l'adéquation			
Critère	DDL	Valeur	Valeur/DDL
Deviance	28	18.7571	0.6699
Scaled Deviance	28	47.8950	1.7105
Pearson Chi-Square	28	16.1252	0.5759
Scaled Pearson X2	28	41.1745	1.4705
Log Likelihood		-737.8139	
Full Log Likelihood		-737.8139	
AIC (smaller is better)		1511.6277	
AICC (smaller is better)		1537.9354	
BIC (smaller is better)		1544.1477	

Tableau 36: Les statistiques relatives à la qualité d'ajustement du modèle GLM-Gamma

On remarque que pour les 3 garanties, la déviance standardisée est supérieure à  $\chi^2_{28,0.05}$ . On rejette donc au seuil 5% l'hypothèse  $H_0$  et on conclut que le modèle Gamma n'est pas adéquat pour ajuster nos données.

### 4.2.2. Le modèle Log-Normal

Le modèle Log-Normal nous fournit les résultats suivants :

Ri									
	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017
RCMATERIEL	0	301759.5	857608.41	1323909.6	2604119	4260813.9	16585581	73193979	442218049
RC_CORPOREL	0	6705227.3	15785731	44112586	98651846	178582171	289795480	288799007	172533313
HRC	0	350210.85	1491371	3806366.4	7731998	17357125	33097022	62419884	359027543

Tableau 37: Les réserves annuelles sous le modèle de GLM Log-Normal..

CF									
	2018	2019	2020	2021	2022	2023	2024	2025	
RCMATERIEL	365917788	161248110	52379565	21809653	12583201	9231363.6	9532416.9	4735206.7	
RC_CORPOREL	329730966	299241840	236007184	164368391	101999277	55139227	22718892	6311196.7	
HRC	386732021	121976493	44411597	21595279	17506662	16374188	15572933	10298418	

Tableau 38: Les cash-flows futurs estimés par la méthode de GLM Log-Normal.

provision		
	RESERVE	BESTESTIMATE
RCMATERIEL	637440000	608731362
RC_CORPOREL	1.2155E9	1.13039E9
HRC	634470000	603752629

Tableau 39: La réserve totale et les best estimate de différentes garanties estimées par GLM Log-Normal.

- **Mesure de la qualité d'ajustement**

Critères d'évaluation de l'adéquation			
Critère	DDL	Valeur	Valeur/DDL
Deviance	28	21.0058	0.7502
Scaled Deviance	28	48.2105	1.7218
Pearson Chi-Square	28	15.2546	0.5448
Scaled Pearson X2	28	35.0110	1.2504
Log Likelihood		-735.0394	
Full Log Likelihood		-735.0394	
AIC (smaller is better)		1506.0788	
AICC (smaller is better)		1532.3865	
BIC (smaller is better)		1538.5988	

Critères d'évaluation de l'adéquation			
Critère	DDL	Valeur	Valeur/DDL
Deviance	28	18.7571	0.6699
Scaled Deviance	28	47.8950	1.7105
Pearson Chi-Square	28	16.1252	0.5759
Scaled Pearson X2	28	41.1745	1.4705
Log Likelihood		-737.8139	
Full Log Likelihood		-737.8139	
AIC (smaller is better)		1511.6277	
AICC (smaller is better)		1537.9354	
BIC (smaller is better)		1544.1477	

Critères d'évaluation de l'adéquation			
Critère	DDL	Valeur	Valeur/DDL
Deviance	28	2.7367	0.0977
Scaled Deviance	28	45.4514	1.6233
Pearson Chi-Square	28	2.3761	0.0849
Scaled Pearson X2	28	39.4638	1.4094
Log Likelihood		-765.7451	
Full Log Likelihood		-765.7451	
AIC (smaller is better)		1567.4901	
AICC (smaller is better)		1593.7978	
BIC (smaller is better)		1600.0100	

Tableau 40: Les statistiques relatives à la qualité d'ajustement du modèle GLM Log-Normal.

La déviance standardisée est supérieure à  $\chi^2_{28,0.05}$  pour les 3 garanties. On rejette donc au seuil 5% l'hypothèse H0 qui stipule que le modèle Log-Normal est adéquat.

### 4.3.La méthode Bootstrap

Une dernière méthode stochastique de provisionnement inspirée des méthodes déterminées est mise en place : le Bootstrap (pour rappel : modèle consistant en un ré-échantillonnage des montants de sinistres). Afin de pouvoir exploiter des résultats satisfaisants, il est choisi de lancer le modèle à partir du modèle Chain ladder en prenant 5000 comme nombre d'itération.

Après application des étapes détaillées dans la partie théorique, la méthode permet d'obtenir les résultats suivants :

RC_materiel						
	Moyenne	Erreur Standard	25% Q1	50% Médiane	75% Q3	99%
PSAP	668992909	212622425	525779216	642499879	775054484	1.25384E9
BESTESTIMATE	638650000	201052029	501332770	611088324	733432787	1.11795E9

RC_corporel						
	Moyenne	Erreur Standard	25% Q1	50% Médiane	75% Q3	99%
PSAP	1.0501E9	122434445	964284702	1.04516E9	1.12681E9	1.36753E9
BESTESTIMATE	976990000	111557421	898804059	972621740	1.04693E9	1.26573E9

HRC						
	Moyenne	Erreur Standard	25% Q1	50% Médiane	75% Q3	99%
PSAP	544530000	119008429	463908616	531678729	613342638	875409053
BESTESTIMATE	518570000	108932521	445069580	507505370	582201250	815486827

Tableau 41: Statistiques de la distribution de la PSAP et le best estimate de la méthode Bootstrap des 3 garanties.

La moyenne des simulations est très proche de celle obtenue par la méthode de Chain ladder, ce qui paraît cohérent étant donné que le Bootstrap est ici basé sur les coefficients de développement de Chain Ladder.

Il faut à présent étudier la distribution de la PSAP et celle du best estimate pour pouvoir établir les intervalles de confiance.

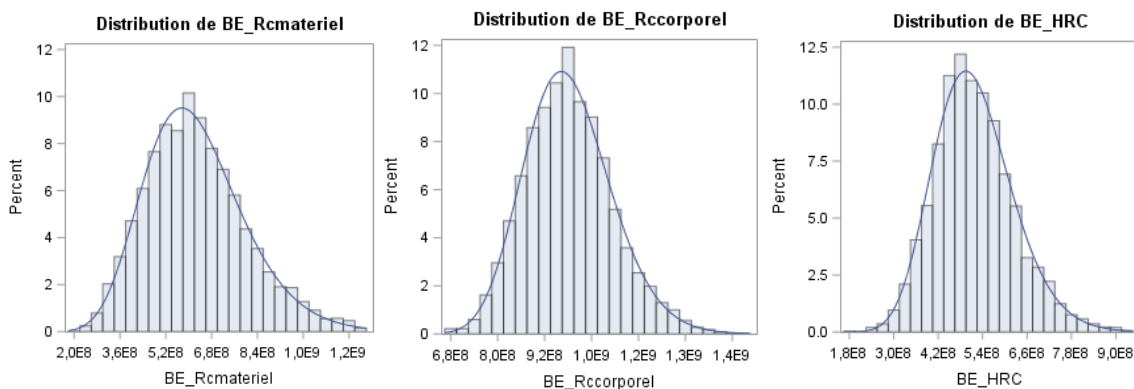


Figure 19: La distribution du best estimate pour les 3 garanties obtenue par Bootstrap.

Chapitre 2 : Calcul de la meilleure estimation des engagements pour sinistres

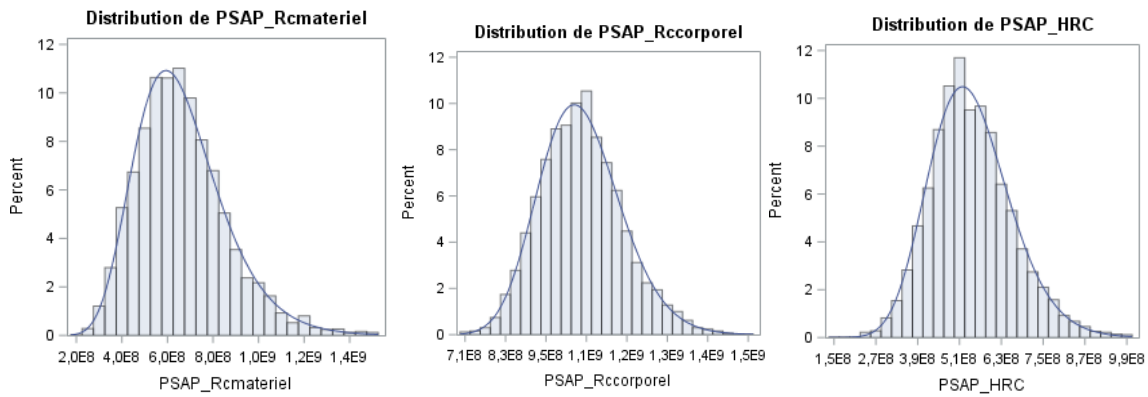


Figure 20: La distribution de la PSAP pour les 3 garanties obtenue par Bootstrap.

On peut observer que les distributions de la PSAP et du best estimate pour les 3 garanties s'apparentent à une loi Log-Normale. Le test d'adéquation Kolmogorov-Smirnov permet entre autres de vérifier cette hypothèse. On peut ainsi obtenir les intervalles de confiance correspondant à une loi Log-Normale avec un quantile d'ordre 95% :

Rc_materiel			
	MOYENNE	BORNIF	BORNISUP
PSAP	668992909	347111784	1.17107E9
BESTESTIMATE	638651509	333488106	1.11278E9

Rc_corporel			
	MOYENNE	BORNIF	BORNISUP
PSAP	1.05007E9	830562960	1.30979E9
BESTESTIMATE	976987763	776594852	1.21327E9

HRC			
	MOYENNE	BORNIF	BORNISUP
PSAP	544525891	348349472	812377026
BESTESTIMATE	518568627	337711960	762628068

Tableau 42: Intervalles de confiance de la PSAP et du best estimate de la méthode Bootstrap au seuil de 5% selon la loi Log-Normal.

Comme pour le modèle Mack, nous avons opté à l'ajout d'une marge de prudence à 75% qui substituera l'ajout du facteur queue. Nous retenons donc le quantile 75% des distributions de la PSAP et du best estimate estimés avec la loi Log-Normale.

RC_materiel		
	VaR75%	Marge de prudence
PSAP	778282133	109289224
BESTESTIMATE	733334714	94684714

RC_corporel		
	VaR75%	Marge de prudence
PSAP	1.12794E9	77840548
BESTESTIMATE	1.048E9	71013947

HRC		
	VaR75%	Marge de prudence
PSAP	617033596	72503596
BESTESTIMATE	584984633	66414633

Tableau 43: Calcul du quantile 75%

#### 4.4. Comparaison entre la méthode Bootstrap et la méthode Mack :

PSAP_Rc_materiel				PSAP_Rc_corporel			
	Borne inf	Borne sup	Erreur de Prediction		Borne inf	Borne sup	Erreur de Prediction
MACK	268776446	1.26641E9	0.4113955	MACK	802728656	1.3277E9	0.1288949
BOOTSTRAP	347111784	1.17107E9	0.3178246	BOOTSTRAP	830562960	1.30979E9	0.1165963

PSAP_HRC			
	Borne inf	Borne sup	Erreur de Prediction
MACK	364464159	797175121	0.2016609
BOOTSTRAP	348349472	812377026	0.2185542

Tableau 44: Comparaison entre les deux méthodes Bootstrap et Mack

On constate que pour le calcul de la PSAP des triangles « RC matériel » et « RC corporel », les intervalles de confiances de la méthode Bootstrap sont plus petits que ceux proposés par la méthode Mack. De plus, on observe une erreur relative bien plus faible que celle déterminée par Mack. Bootstrap est donc la mieux adaptée à ces deux triangles. En revanche, pour le triangle « HRC », la volatilité des réserves estimée par Bootstrap est légèrement supérieure à celle déterminée par Mack.

En définitive, La méthode du Bootstrap offre davantage de possibilités d'analyse, mais exige un minimum de temps de calcul. La méthode de Mack est plus pratique à utiliser puisqu'elle donne la volatilité de l'estimation des provisions par une formule fermée.

Les résultats du Bootstrap sont proches de ceux de Mack pour l'ensemble des risques étudiés. Le choix de la méthode sera dicté par l'utilisation des résultats et la profondeur d'analyse que l'on souhaite effectuer. Par exemple, si le nombre de branches étudiées est faible, le temps de calcul du Bootstrap ne sera pas pénalisant, alors que pour un

assureur qui possède plusieurs branches et qui souhaite obtenir l'erreur de prédiction de ses provisions fréquemment, la procédure Bootstrap peut devenir lourde.

### III. Automatisation de l'évaluation de la PSAP et de la meilleure estimation des engagements pour sinistres.

Afin de fluidifier l'exercice d'évaluation de la PSAP, et de la meilleure estimation des engagements pour sinistres, nous avons élaboré un outil informatique avec le logiciel R-shiny qui reprend toutes les méthodes de calcul explicitées précédemment.

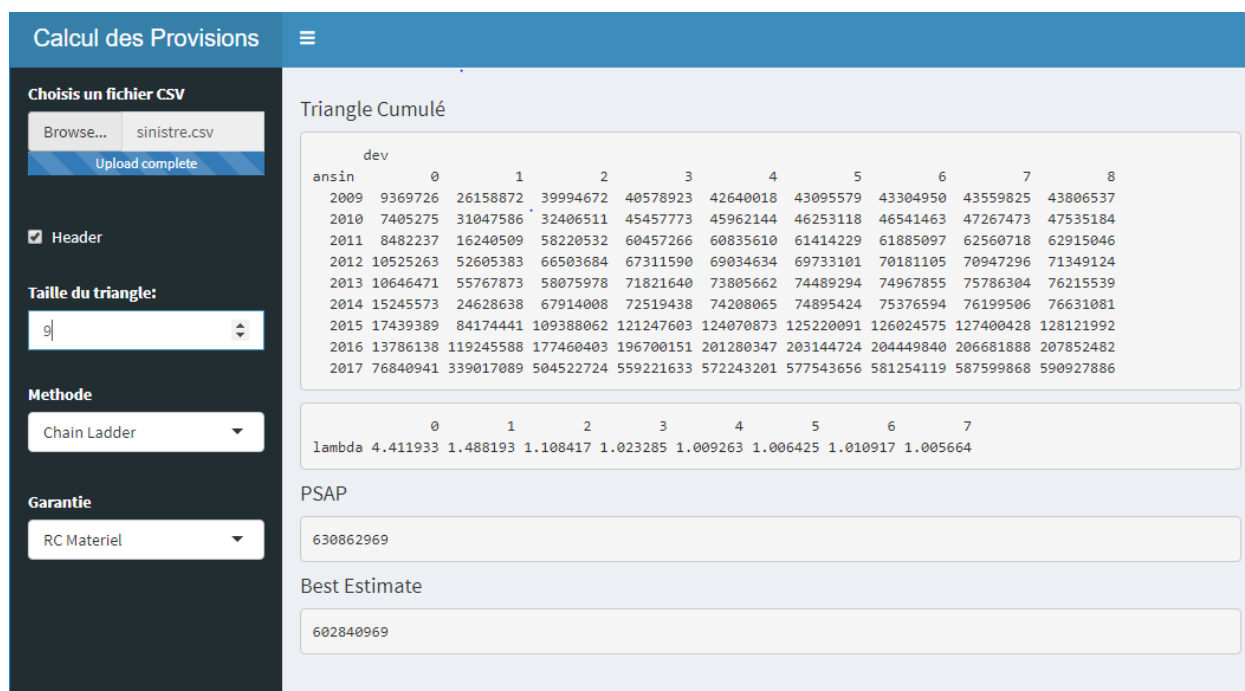


Figure 21: Aperçu sur l'application fournissant la PSAP et le BE sinistre

Tout d'abord le lancement de l'application fait ressortir une note informative expliquant à l'utilisateur les données nécessaires à fournir pour les calculs qui suivent. L'utilisateur est donc tenu d'importer sa base de données, il choisit ensuite la garantie sur laquelle il veut effectuer ses calculs, la taille du triangle, et la méthode avec laquelle il veut estimer ses réserves.

Pour les méthodes déterministes, l'application permet d'afficher la valeur de la PSAP, du Best estimate et des facteurs intervenant dans les calculs (les facteurs de développement lambda pour la méthode de Chain Ladder, Les paramètres de régression alpha et lambda pour la méthode London Chain, et les vecteurs r et p pour la méthode DeVyllder).

En ce qui concerne les méthodes stochastiques, l'application affiche en plus du montant de la PSAP et du Best estimate, les intervalles de confiances des réserves estimés avec la loi Log-Normale et leur volatilité à l'ultime.

## Chapitre 3 : Calcul de la meilleure estimation des primes, frais de gestion et de la marge de risque :

### I. Meilleure estimation des engagements pour primes :

#### 1. Méthode de calcul :

Selon l'article 27 du projet de circulaire SBR, la meilleure estimation des engagements pour primes correspond à la différence entre :

- La somme actualisée des flux de règlements futurs probabilisés nets de recours relatifs aux sinistres non encore survenus afférents aux contrats.
- Le montant des primes futures probabilisé et actualisé à la date d'inventaire, net des frais d'acquisition, afférentes aux contrats à tacite reconduction.

Pour une année de projection donnée, les flux de règlements futurs probabilisés correspondent au produit du taux de liquidation correspondant à cette année par le ratio de sinistralité combiné moyen multiplié par la somme de :

- La provision pour primes non acquises
- Le montant des primes futures probabilisé et actualisé, afférentes aux contrats à tacite reconduction.

Le taux de liquidation précité est estimé en fonction de la cadence de liquidation des engagements pour sinistres survenus.

Le ratio de sinistralité combiné moyen est obtenu en utilisant la formule suivante :

$$RSC = \frac{\sum_{3 \text{ Ex. Surv.}} \text{Charges ultimes}}{\sum_{3 \text{ Ex. Surv.}} \text{Primes acquises}} + \frac{\sum_{3 \text{ Ex. Clos}} \text{Frais de gestion}}{\sum_{3 \text{ Ex. Clos}} \text{Primes émises}}$$

## 2. Application :

### 2.1. Présentation des données

On dispose d'une base de données contenant toutes les informations sur les quittances émises par SANAD entre 2015 et 2017 et relatives aux garanties « Auto RC » et « Auto HRC ». On y trouve donc le numéro de quittance, le numéro de police, la garantie, le montant de la quittance, ainsi que sa date d'effet, sa date de comptabilisation et sa date d'échéance, nécessaires pour le calcul du best estimate pour primes.

Comme pour les sinistres, les données ont été modifiées par souci de confidentialité.

### 2.2. Calcul de la meilleure estimation des engagements pour primes

- **Calcul des primes émises, primes acquises et PPNA**

On commence tout d'abord par regrouper les primes émises par exercice de comptabilisation et par garantie, on calcule ensuite les primes acquises à partir des primes émises prorata temporis, et on obtient les résultats suivants :

Rc			HRc		
	PE	PA		PE	PA
2015	1.70466E9	926812334	2015	393127122	204987371
2016	2.77644E9	2.91551E9	2016	592982300	627016034
2017	3.07926E9	2.94496E9	2017	710300725	652984166
<b>Total</b>	<b>7.56036E9</b>	<b>6.78728E9</b>	<b>Total</b>	<b>1.69641E9</b>	<b>1.48499E9</b>

Tableau 45: Primes émises et acquises des 2 garanties RC et hors RC.

Comme on a mentionné dans la 1ère partie du rapport, la provision pour prime non acquise PPNA est destinée à constater, pour l'ensemble des contrats en cours, la part des primes émises et non afférentes à la période comprise jusqu'à la date d'inventaire.

Dans notre cas, la PPNA à la date d'inventaire qui est 2017 est égale à :

PPNA	
RC	776815137
HRC	212297613

Tableau 46: Calcul de la PPNA à la date d'inventaire 2017

- **Calcul des charges ultimes**

Pour l'estimation des charges ultimes sur les 3 derniers exercices de survenance, on choisit la méthode Chain Ladder puisque c'est le modèle préconisé par la réglementation. On prend donc les 3 dernières colonnes des triangles cumulés obtenus avec Chain Ladder.

Etant donné que dans le calcul de la PSAP, on avait subdivisé la garantie « RC » en « RC matériel » et « RC-corporel », on est désormais contraint de sommer les charges ultimes des deux pour une obtenir les charges ultimes totales relatives à la garantie « RC » :

Charge_ultime		
	RC	HRC
2015	514652378	251615642
2016	532875140	296553448
2017	755254108	553668320
Total	1.80278E9	1.10184E9

Tableau 47: Les charges ultimes pour les 3 derniers exercices de survenance.

- **Calcul du ratio de sinistralité combiné**

Le taux des frais de gestion par rapport aux primes émises est égal à 15%, on a donc tous les éléments pour calculer le ratio de sinistralité combiné :

Ratio_combine	
RC	HRC
0.4156118	0.8919843

Tableau 48: Calcul du Ratio combiné

- **Calcul des primes futures**

Etant donné qu'on ne tient pas compte des nouvelles souscriptions, le calcul des primes futures repose seulement sur l'estimation d'un taux de renouvellement en 2018 à partir des taux relatifs aux années passées. Ce taux se calcule en divisant le montant des primes émises des contrats renouvelés sur le montant des primes totales.

Mais puisqu'on a uniquement des données allant de 2015 à 2017, on ne peut qu'estimer le pourcentage des assurés qui ont renouvelé leurs contrats une seule fois et ceux qui l'ont renouvelé deux fois de suite. Dès lors, on ne peut projeter les primes que sur deux ans.

On obtient les résultats suivants :

<b>taux_renouvellement2018</b>	
<b>une année</b>	0.6125015
<b>deux années</b>	0.3922546

Tableau 49: Estimation des taux de renouvellement

- La prime future 2018 est calculée en multipliant le taux de renouvellement 2018 sur une année par la prime émise relative à 2017.
- La prime future 2019 est calculée en multipliant le taux de renouvellement 2018 sur deux ans par la prime émise relative à 2017.

<b>primes_futures</b>		
	<b>Rc</b>	<b>HRC</b>
<b>2018</b>	1.886E9	435060000
<b>2019</b>	1.2079E9	278620000
<b>Somme actualisée</b>	2.99001E9	689715808

Tableau 50: Primes futures estimées de 2018 et 2019

Les primes futures nets d'acquisitions sont calculés en déduisant des primes futures un pourcentage 12%.

prim_futur_net_acqu		
	Rc	HRC
2018	1.6597E9	382850000
2019	1.0629E9	245180000
<b>Somme actualisée</b>	<b>2.63118E9</b>	<b>606941853</b>

Tableau 51 : Primes futures nettes d'acquisitions estimées de 2018 et 2019

- **Calcul des flux de règlements futurs probabilisé**

On peut désormais calculer les flux de règlements futurs probabilisés relatifs aux sinistres non encore survenus en multipliant la somme de la PPNA et des primes futures probabilisés par la cadence des règlements des sinistres déjà survenus.

regl_futurs		
	Rc	HRC
2018	105405145	227304269
2019	244817007	319573160
2020	287894383	136321309
2021	284636153	66164969
2022	231904915	19339368
2023	168669495	9649371.9
2024	123499230	10596199
2025	75439563	9755377.4
2026	43271481	5877754.3
<b>somme actualisée</b>	<b>1.39287E9</b>	<b>756630704</b>

Tableau 52: Flux de règlements futurs pour RC et hors RC.

Nous obtenons donc la valeur de la meilleure estimation des engagements pour primes en faisant la différence entre la somme des règlements futurs actualisés et celle des primes futures actualisées nettes d'acquisitions :

beprime	
Rc	HRC
-1.2383E9	149688852

Tableau 53: Calcul de la meilleure estimation des engagements pour primes

On constate que la meilleure estimation des engagements pour prime relative à « RC » est négative, ce qui indique que les encaissements futurs sont supérieurs aux décaissements futurs.

## II. Meilleure estimation des frais de gestion :

### 1. Méthode de calcul :

Comme pour les sinistres ou les primes, on est amené à calculer une provision pour frais de gestion. Cette provision a pour objet d'assurer la liquidation des futures charges liées à la gestion des sinistres couverts par l'organisme assureur, jusqu'à leur extinction.

Selon l'article 28 du projet de circulaire SBR, Il se calcule par l'actualisation des frais de gestion futurs liés aux contrats en cours ; ces flux se déterminent par :

- ✓ Le calcul des BE pour sinistres projetés : Actualisation progressive des règlements des sinistres résiduels en utilisant les courbes du taux zéro-coupon futurs estimées à partir de 2017 et correspondante à la même année de développement. Vu qu'on dispose de deux courbes estimées, on choisit celle de Vasiček puisqu'on remarque qu'elle communique pour 2017 des taux proches de ceux de la courbe empirique Bootstrap, cette méthode sera utilisée dans les applications qui suivent pour réaliser des projections futures.
- ✓ Le calcul du taux de frais de gestion par sous catégories qui est égal au rapport entre le montant des frais de gestion de l'exercice clos considéré et la meilleure estimation des engagements pour sinistres du même exercice.

Pour obtenir le montant des frais de gestion on passe par 2 étapes :

- a) On calcule un taux de frais de gestion moyen sur les trois derniers exercices comme suit :

$$\frac{\sum_{3 \text{ derniers exercices}} \text{frais de gestion}}{\sum_{3 \text{ derniers exercices}} \text{primes émises}}$$

b) Ensuite, on multiplie le taux obtenu par le montant des primes émises de l'exercice considéré.

✓ Pour chaque année de projection, les frais de gestion futurs sont déterminés en multipliant le BE pour sinistres projetés par le taux de frais de gestion revalorisé de 2% annuellement.

## 2. Application :

- **Calcul des BE pour sinistres projetés :**

D'abord on commence par calculer le best estimate sinistre projeté pour chaque année de développement qui est la somme des règlements futurs actualisés.

Comme mentionné auparavant, vu qu'on ne dispose que de la prime émise de la garantie globale RC, on est désormais amené à regrouper les règlements des 2 garanties RC-matériel et RC-corporel.

On obtient les résultats suivants pour les 2 garanties considérées RC et hors RC.

beprojete		
	RC	hors_RC
2018	984064575	237745088
2019	564723104	115456355
2020	319803477	59250185
2021	174784107	38183094
2022	85698037	24505577
2023	34590468	12473436
2024	8312140.9	3938390.6

Tableau 54: Best estimate pour sinistres projetés

- **Calcul du taux de frais de gestion :**

Pour calculer ce taux relatif à chaque garantie, on divise le produit des primes émises de 2017 et le taux de frais de gestion moyen qui est égale à 15% par le best estimate de sinistre correspondant à chaque garantie, ainsi on obtient :

tauxfrais	
RC	0.2939179
hors_RC	0.2036656

Tableau 55: Calcul du taux de frais de gestion moyen

- **Calcul des flux de frais de gestion futurs :**

On peut désormais calculer les flux des frais de gestion futurs pour chaque année de projection en multipliant les taux obtenus revalorisés par le best estimate sinistre projetés,

fraisgestion		
	RC	hors_RC
2018	289234168	48420492
2019	169301859	23984775
2020	97793395	12554739
2021	54516561	8252571.2
2022	27264501	5402356.9
2023	11224921	2804817.5
2024	2751312.5	903311.34

Tableau 56: Montants des frais de gestion futurs pour RC et hors RC.

Ainsi on déduit la meilleure estimation des frais de gestion par sommation des flux obtenus actualisés à l'aide de la courbe empirique zéro-coupon de l'année 2017.

be_frais	
RC	617975620
hors_RC	96873819

Tableau 57: Calcul de la meilleure estimation des frais de gestion.

### III. Calcul de la marge de risque

Les provisions techniques en assurance Non-Vie sont des passifs non répliquables. Leur valorisation dans le bilan SBR consiste dans un premier temps à évaluer leur valeur Best Estimate des provisions. Différentes méthodes ont été présentées dans la partie 2 pour effectuer cette estimation. Or, comme nous l'avons vu précédemment, il subsiste des incertitudes quant à ces estimations (hypothèses, méthodes, ...). Il s'agira donc dans un second temps, de déterminer la marge de risque (ou Risk Margin) qui peut être considérée comme un spread du Best Estimate et qui ajoutée à cette dernière, constituera la valeur de marché des provisions techniques d'assurance Non Vie.

La marge de risque est donc définie comme une provision technique permettant de s'assurer que la valeur des provisions techniques est équivalente à la somme qu'une compagnie d'assurance ou de réassurance extérieure exigerait pour prendre en charge les obligations d'assurance du portefeuille.

La réglementation préconise de calculer la marge de risque à travers une approche

« Coût du capital », en déterminant le coût résultant de la levée de capitaux équivalents aux CSR nécessaires jusqu'à l'extinction du portefeuille concerné. Le taux utilisé pour déterminer la rémunération nécessaire en contrepartie de l'immobilisation du capital requis est appelé « taux de Coût de Capital ».

Plus précisément, la marge de risque (RM) peut être obtenue à travers la formule suivante :

$$MR = CoC \sum_t \frac{CSR_t}{(1 + r_t)^t}$$

Avec :

- **CoC** : le coût d'immobilisation du capital est présumé égal à 6 % selon les spécifications techniques ;
- **CSR (t)** : capital de solvabilité requis en l'année t ;

- $r_t$  : représente le taux d'intérêt sans risque pour une maturité  $t$ .

Le calcul de la marge de risque consiste donc en un pourcentage de la somme des CSR futurs actualisés. Ce pourcentage est le taux de Coût du Capital fixé à 6%. L'enjeu du calcul de la marge de risque va donc se situer dans la détermination des CSR futurs

Toutefois, pour simplifier les calculs, nous allons considérer que la marge de risque est évaluée comme un pourcentage du best estimate. La réglementation marocaine n'a toujours pas détaillé les simplifications pour le calcul de la marge de risque, on s'inspire donc de la solvabilité II, et on considère que ce pourcentage est de 8% pour tout le portefeuille Auto.

On Obtient :

<b>mr</b>	
<b>RC</b>	<b>HRC</b>
76093238	61576016

Tableau 58: Calcul de la marge de risque.

Avec le calcul de la marge de risque et celui du Best Estimate, nous avons constitué les provisions techniques du bilan SBR.

	<b>RC</b>	<b>HRC</b>
<b>Best Estimate</b>	951165469	769700197
<b>Marge de risque</b>	76093238	61576016
<b>Provisions prudentielles</b>	1.02726E9	831276213

Tableau 59: Montant des provisions prudentielles des garanties RC et HRC

L'estimation de la volatilité des provisions à horizon un an permet quant à elle de calculer le dernier poste du passif SBR, à savoir le CSR risque de provisionnement qui sera détaillé dans la partie qui suit.

## **Partie III : Détermination du risque de provisionnement dans le cadre du CSR**

Dans la littérature classique traitant du provisionnement en assurance non-vie, l'incertitude sur le développement des sinistres déjà survenus est évaluée jusqu'à l'ultime, c'est-à-dire jusqu'à la clôture des sinistres. Thomas Mack a été le premier à étudier l'incertitude dans les estimations issues de la méthode de Chain Ladder. Cependant la directive SBR a introduit une vision à court terme. En effet le régulateur demande à une entreprise d'assurance d'être solvable dans 99.5% des cas dans l'année à venir. La vision à court terme est importante pour plusieurs raisons :

- Si les provisions d'une entreprise s'avèrent être insuffisantes à court terme, l'entreprise risque d'être déclarée insolvable et par conséquent elle n'atteindra tout simplement pas l'horizon de temps se référant à l'ultime.
- Une vision à court terme est plus adaptée pour les décisions de gestion car des actions doivent être prises régulièrement. En effet les prises de décisions concernant la gestion de l'entreprise sont généralement effectuées sur une base annuelle.
- La performance à court terme d'une entreprise est d'un grand intérêt pour les régulateurs, les clients, les investisseurs, les agences de notation, les marchés boursiers, etc. Sa cohérence et sa stabilité aura en somme un impact sur la solidité financière et la réputation de l'entreprise.

# Chapitre 1 : Le risque de provisionnement : 2 approches d'estimation

## 1. Définition du risque de provisionnement

Dans le cadre de ce mémoire, nous nous focaliserons sur le risque de provisionnement. C'est un risque de sous-évaluation des provisions techniques à un horizon de temps d'un an. Il est lié à la nature aléatoire de l'évaluation des sinistres et à la mauvaise estimation du montant « Best Estimate » des provisions pour sinistres à payer. Pour faire face à ce risque, la compagnie d'assurance doit disposer de suffisamment de capital disponible pour pouvoir honorer ses engagements relatifs aux paiements futurs des sinistres survenus à la date d'évaluation. Il regroupe deux sources d'incertitude qui sont l'erreur d'estimation et l'erreur de processus.

- ✓ **L'erreur d'estimation** : elle correspond à l'écart entre les paiements espérés et la valeur de l'estimateur des paiements espérés. Elle traduit l'incertitude de l'estimation que l'on fait des paramètres du modèle comme par exemple les facteurs de développement de Chain Ladder.
- ✓ **L'erreur de processus** : elle correspond à l'écart entre les paiements espérés et les paiements réels. C'est une erreur qui provient des fluctuations temporelles du paramètre estimé autour de sa tendance. Autrement dit, elle correspond à la dispersion du montant de provisions autour de sa tendance.

Pour évaluer ce risque de provisionnement, nous nous intéresserons particulièrement à la volatilité des réserves de sinistres sur un an. Autrement dit, nous nous demanderons de combien peut varier l'estimation de la charge finale dans un an par rapport à celle qui est faite aujourd'hui.

Dans cette partie du mémoire, nous expliciterons deux différentes approches d'estimation du risque de provisionnement qui sont les suivantes :

- Approche Formule Standard
- Approche Modèle Interne

## 2. L'approche Formule Standard

Pour déterminer le risque de provisionnement, la provision Best Estimate et la volatilité de première année de déviation qui lui est associée sont nécessaires. Cependant, la directive SBR n'a toujours pas proposé une estimation  $\sigma_{LoB}$  de cette volatilité par branche d'activité, nous allons donc utiliser les estimations proposées par les spécifications techniques du QIS 5.

Le CSR pour une branche d'activité est ainsi donné par :

$$CSR_{LoB} = \rho(\sigma_{LoB}) \times V_{LoB}$$

Avec :

- $\rho(\sigma_{LoB})$  : une fonction de la volatilité,
- et  $V_{LoB}$  une mesure de volume correspondant au Best Estimate des engagements pour sinistres.

La fonction de volatilité  $\rho(\sigma_{LoB})$  est définie en supposant une distribution des risques selon une loi Log-Normale :

$$\rho(\sigma_{LoB}) = \frac{e^{VaR_{99,5\%}(\Phi(0,1))\sqrt{\log(\sigma_{LoB}^2+1)}}}{\sqrt{\sigma_{LoB}^2+1}} - 1,$$

Où  $\Phi(0,1)$  désigne la fonction de répartition de la loi Normale centrée réduite.

Pour l'ensemble des branches d'activité, le  $CSR_{provisions}$  est alors donné par :

$$CSR_{provisions} = \rho(\sigma) \times V,$$

Avec :

- $\sigma$  la volatilité agrégée des branches et définie par :

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{V^2} \sum_{i,j} CorrLoB_{i,j} \sigma_i \sigma_j V_i V_j}.$$

Où :

- $CorrLoB_{i,j}$  correspond aux coefficients de la matrice de corrélation des branches d'activité. Dans notre mémoire, nous allons supposer que toutes les branches sont indépendantes.
- $V$  une mesure de volume correspondant au Best Estimate agrégé, c'est-à-dire à la somme des Best Estimate de toutes les branches d'activité.

Le  $CSR_{provisions}$  peut être approximée par la formule suivante :

$$\mathbf{CSR_{provisions} \approx 3\sigma \times V}$$

### **3. Approche Modèle interne**

L'objectif du développement d'un modèle interne est de calculer l'exigence en fonds propres le plus fidèlement suivant les risques auxquels la compagnie est soumise afin d'éviter une immobilisation de capital trop importante par rapport à ses risques réels.

## Chapitre 2 : Présentation des Claims Development Result (CDR)

A la date  $t = n$ , nous sommes en possession de l'information suivante :

$$D_n = \{C_{i,j} \quad i + j \leq n \text{ et } i, j \leq n\}$$

Un an plus tard, à l'année calendaire suivante, c'est-à-dire à la date  $t = n+1$ , nous disposons d'un peu plus d'observations :

$$D_{n+1} = \{C_{i,j} \quad i + j \leq n + 1 \text{ et } i, j \leq n\} = D_n \cup \{C_{i,n-i+1} \quad i, j \leq n\}$$

Cela signifie que l'année suivante nous avons l'information de l'année  $t=n$  à laquelle s'ajoute l'information que nous accumulons au cours de l'année calendaire  $[n, n+1]$  c'est-à-dire les paiements situés sur la diagonale suivante du triangle, à savoir  $Y_{i,n-i+1} \forall i=1 \text{ à } n$ .

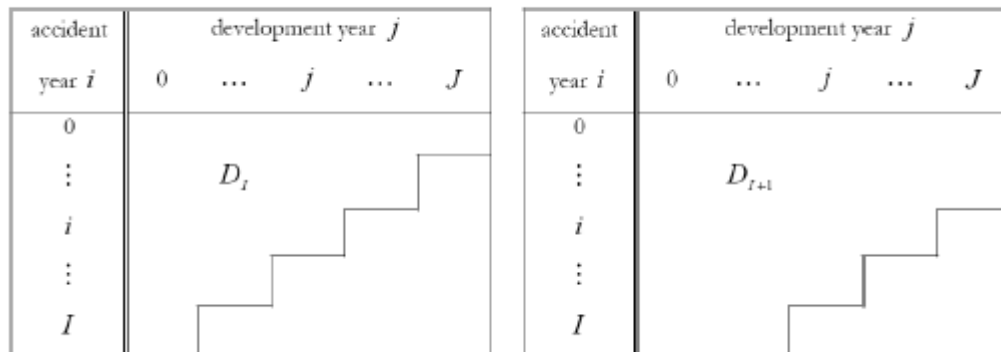


Figure 22: Schéma représentant l'information disponible deux années calendaires successives.

Dans ce rapport on considère uniquement  $I=J=n$ .

On note  $\hat{R}_i^n$  la prédiction faite de  $R_i$  avec l'information  $D_n$  accumulée à la date  $t=n$ .

Dans une vision à l'ultime, on cherche à quantifier la variabilité de  $\hat{R}_i^n$  par rapport à sa valeur réelle à l'ultime. Dans une vue à un an, on s'intéresse à la variabilité de ce

prédicteur par rapport à celui de l'année suivante, noté  $\hat{R}_i^{n+1}$ , auquel on ajoute les paiements effectués pendant l'année  $Y_{i,n-i+1}$ .

On définit la variable aléatoire de la variation entre les deux prédictions successives  $\hat{R}_i^n - (\hat{R}_i^{n+1} + Y_{i,n-i+1})$ . Cette variable aléatoire est couramment appelée "Claim Development Result observable" (CDR) pour l'année calendaire  $[n, n+1]$ . Le risque de provisionnement à un an est donc défini par la variance de cette variable aléatoire CDR.

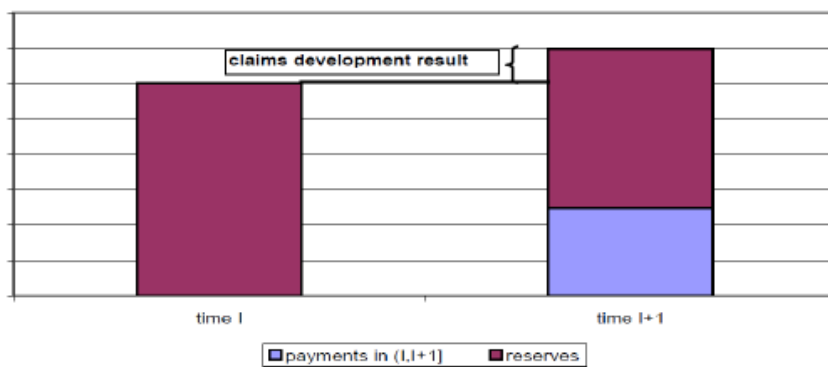


Figure 23: Principe du CDR.

Le "claims development result" (CDR) réel pour l'année de survenance  $i$  entre l'année calendaire  $n$  et  $n+1$  est défini comme suit :

$$CDR_i(n+1) = E(R_i^n | D_n) - (Y_{i,n-i+1} + E(R_i^{n+1} | D_{n+1}))$$

Tel que :

$$E(R_i^n | D_n) = E(C_{i,n} - C_{i,n-i} | D_n) = E(C_{i,n} | D_n) - C_{i,n-i}$$

$$E(R_i^{n+1} | D_{n+1}) = E(C_{i,n} - C_{i,n-i+1} | D_{n+1}) = E(C_{i,n} | D_{n+1}) - C_{i,n-i+1}$$

Puisque  $Y_{i,n-i+1} = C_{i,n-i+1} - C_{i,n-i}$ , on en déduit que :

$$CDR_i(n+1) = E(C_{i,n} | D_n) - E(C_{i,n} | D_{n+1})$$

Le CDR réel n'est en réalité jamais « observé » dans les comptes de l'assureur. Pour connaître sa valeur nous devrions connaître la charge à l'ultime. Nous savons seulement en donner une estimation.

On estime le CDR réel par le CDR observable calculé en  $n+1$  pour une année de survenance  $i$  :

$$\widehat{CDR}_i(n+1) = \hat{C}_{i,n}^n - \hat{C}_{i,n}^{n+1}$$

Avec :

$\hat{C}_{i,n}^n$  : estimation l'année  $n$  des paiements cumulés à l'ultime ;

$\hat{C}_{i,n}^{n+1}$  : estimation l'année  $n+1$  des paiements cumulés à l'ultime.

Le  $\widehat{CDR}_i(n+1)$  correspond aux boni-mali (selon le signe) figurant dans le compte de résultats de la compagnie. Il a donc un impact direct sur le résultat de l'année  $n+1$ . Il est alors essentiel de pouvoir estimer (à la date  $n$ ) la déviation possible autour de 0 du  $CDR(n+1)$  qui figurera au compte de résultat de la clôture en  $n+1$ .

On parle de :

- Boni si pour l'année de survenance  $i$  :  $E(\hat{C}_{i,n}^n) > E(\hat{C}_{i,n}^{n+1})$ , donc  $\widehat{CDR}_i(n+1) > 0$ .
- Mali si  $(\hat{C}_{i,n}^n) < E(\hat{C}_{i,n}^{n+1})$ , donc  $\widehat{CDR}_i(n+1) < 0$ .

Si l'estimation des charges finales est au plus juste, la compagnie a autant de chances de faire un boni qu'un mali. L'espérance de la différence entre les deux estimations successives de la charge finale est nulle. Mais de combien cette espérance peut-elle s'écarter de zéro ? On cherche donc à connaître la volatilité de l'estimation de la réalisation des  $CDR(n+1)$  autour de 0.

## Chapitre 3 : Le modèle de Merz-Wüthrich :

### I. Présentation du modèle

#### 1. Les hypothèses sous-jacentes du modèle :

L'approche de Merz et Wüthrich permet d'estimer la volatilité du risque de provisionnement. Il s'agit d'une adaptation de la méthode de Mack à horizon un an et reposant sur l'estimation de la volatilité du CDR (Claims Development Result).

Le modèle de Merz et Wüthrich repose sur les hypothèses suivantes :

- H1 : Les paiements cumulés des différentes années de survenance  $i$  sont indépendants.
- H2 : il existe  $\lambda_j > 0$  et  $\sigma_j > 0$  tel que :

$$E(C_{i,j+1}|C_{i,j}) = \lambda_j C_{i,j} \text{ et } Var(C_{i,j+1}|C_{i,j}) = \sigma_j^2 C_{i,j}$$

Comme expliqué plus haut, le risque de provisionnement à horizon un an s'appuie sur l'analyse du CDR qui est défini comme suit :

$$CDR_i(n+1) = E(C_{i,n}|D_n) - E(C_{i,n}|D_{n+1})$$

Sous ces hypothèses on est capable de prédire les paiements à l'ultime notés  $C_{i,n}$  connaissant l'information passée au temps  $n$  :

$$E(C_{i,n}|D_n) = C_{i,n-i} \prod_{j=n-i}^{n-1} \lambda_j$$

Et au temps  $n+1$  :

$$E(C_{i,n}|D_{n+1}) = C_{i,n-i+1} \prod_{j=n-i+1}^{n-1} \lambda_j$$

Les facteurs de développement ne sont pas connus. On les estime selon la méthode de Chain Ladder, avec l'information disponible à chaque date. A la date  $n$  on estime :

$$\widehat{\lambda}_j^n = \frac{\sum_{j=0}^{n-j-1} C_{i,j+1}}{s_j^n} \quad \text{avec : } s_j^n = \sum_{j=0}^{n-j-1} C_{i,j}$$

L'année calendaire suivante, on utilisera la nouvelle information disponible au courant de l'année  $[n, n+1]$  à savoir  $C_{n-j, j+1}$ , donc :

$$\widehat{\lambda}_j^{n+1} = \frac{\sum_{j=0}^{n-j} C_{i, j+1}}{s_j^{n+1}} \quad \text{avec : } s_j^{n+1} = \sum_{j=0}^{n-j} C_{i, j}$$

On en déduit une estimation sans biais des montants de sinistres à l'ultime calculés en  $n$  et  $n+1$  :

$$\hat{C}_{i, n}^n = C_{i, n-i} \prod_{j=n-i}^{n-1} \widehat{\lambda}_j^n \quad \text{et} \quad \hat{C}_{i, n}^{n+1} = C_{i, n-i+1} \prod_{j=n-i+1}^{n-1} \widehat{\lambda}_j^{n+1}$$

Ainsi, on estime alors comme suit le CDR observable à la date  $n+1$  pour l'année de survenance  $i$  :

$$\widehat{CDR}_i(n+1) = \hat{C}_{i, n}^n - \hat{C}_{i, n}^{n+1}$$

## 2. Vue prospective versus vue rétrospective :

M&W proposent deux visions :

– Vue rétrospective :

Cette vision cherche à quantifier l'incertitude autour de la distance entre le CDR réel et le CDR observable à l'année calendaire suivante  $\widehat{CDR}_i(n+1)$ , du fait qu'on prédit le CDR réel par le CDR observable.

$$MSEP_{CDR_i(n+1)}(\widehat{CDR}_i(n+1)) = E[(CDR_i(n+1) - \widehat{CDR}_i(n+1))^2 | D_n]$$

Vue prospective :

On prédit en général, à la date  $n$ , le CDR observable à la date  $n+1$ , pour l'année comptable  $[n, n+1]$ , noté  $\widehat{CDR}_i(n+1)$  par 0. En effet, les provisions sont estimées de façon best estimate à chaque date. Donc si l'on suppose les estimations du montant des provisions sans biais, on a :  $E(\widehat{CDR}_i(n+1) | D_n) = 0$ . On cherche ici à mesurer l'incertitude autour de 0 de notre prédiction des CDR observables à la fin de l'année calendaire  $n+1$ ,

$$MSEP_{\widehat{CDR}_i(n+1) | D_n}(0) = E[(\widehat{CDR}_i(n+1) - 0)^2 | D_n]$$

### 3. Estimations :

Merz et Wüthrich définissent les variables suivantes dans leur article afin de simplifier les expressions des estimateurs des deux MSEP énoncées auparavant :

$$\begin{aligned}\hat{\Phi}_{i,n}^n &= \sum_{j=n-i+1}^{n-1} \left( \frac{C_{n-j,j}}{S_j^{n+1}} \right)^2 \frac{\hat{\sigma}_j^2 / (\hat{\lambda}_j^n)^2}{C_{n-j,j}} \\ \hat{\Delta}_{i,n}^n &= \frac{\hat{\sigma}_{n-i}^2 / (\hat{\lambda}_{n-i}^n)^2}{S_{n-i}^n} + \sum_{j=n-i+1}^{n-1} \left( \frac{C_{n-j,j}}{S_j^{n+1}} \right)^2 \frac{\hat{\sigma}_j^2 / (\hat{\lambda}_j^n)^2}{S_j^n} \\ \hat{\Psi}_i^n &= \frac{\hat{\sigma}_{n-i}^2 / (\hat{\lambda}_{n-i}^n)^2}{C_{i,n-i}} \\ \hat{\Gamma}_{i,n}^n &= \hat{\Phi}_{i,n}^n + \hat{\Psi}_i^n\end{aligned}$$

Maintenant on est en mesure de donner les formules des estimateurs de tous les termes d'erreurs. Tout d'abord la variance du CDR réel est estimée par :

$$\widehat{var}(CDR_i(n+1)|D_n) = (\hat{C}_{i,n}^n)^2 \cdot \hat{\Psi}_i^n$$

Et ils donnent des estimateurs des deux MSEP définis précédemment :

$$\begin{aligned}\widehat{MSEP}_{\widehat{CDR}_i(n+1)|D_n}(0) &= (\hat{C}_{i,n}^n)^2 \cdot (\hat{\Gamma}_{i,n}^n + \hat{\Delta}_{i,n}^n) \\ \widehat{MSEP}_{CDR_i(n+1)|D_n}(\widehat{CDR}_i(n+1)|D_n) &= (\hat{C}_{i,n}^n)^2 \cdot (\hat{\Phi}_{i,n}^n + \hat{\Delta}_{i,n}^n)\end{aligned}$$

Cela implique que :

$$\widehat{MSEP}_{\widehat{CDR}_i(n+1)|D_n}(0) = \widehat{MSEP}_{CDR_i(n+1)|D_n}(\widehat{CDR}_i(n+1)|D_n) + \widehat{var}(CDR_i(n+1)|D_n)$$

Après simplifications, on peut écrire :

$$\widehat{MSEP}_{\widehat{CDR}_i(n+1)|D_n}(0) = (\hat{C}_{i,n}^n)^2 \left( \frac{\hat{\sigma}_{n-i}^2 / (\hat{\lambda}_{n-i}^n)^2}{C_{i,n-i}} + \frac{\hat{\sigma}_{n-i}^2 / (\hat{\lambda}_{n-i}^n)^2}{S_{n-i}^n} + \sum_{j=n-i+1}^{n-1} \left( \frac{C_{n-j,j}}{S_j^{n+1}} \right)^2 \frac{\hat{\sigma}_j^2 / (\hat{\lambda}_j^n)^2}{S_j^n} \right)$$

En ce qui concerne les estimateurs des MSEP pour les années de survenance agrégées :

$$\widehat{MSEP}_{\sum_i^n CDR_i(n+1) | D_n}(\sum_i^n CDR_i(n+1)) = \sum_{i=1}^n \widehat{MSEP}_{CDR_i(n+1) | D_n}(\widehat{CDR}_i(n+1)) + 2 \sum_{k>i>0} \hat{C}_{i,n}^n \hat{C}_{k,n}^n (\hat{\Phi}_{i,n}^n + \hat{V}_{i,n}^n)$$

Avec

$$\hat{V}_{i,n}^n = \frac{C_{i,n-i}}{s_{n-i}^{n+1}} \frac{\hat{\sigma}_{n-i}^2 / (\hat{\lambda}_{n-i}^n)^2}{s_{n-i}^n} + \sum_{j=n-i+1}^{n-1} \left( \frac{C_{n-j,j}}{s_j^{n+1}} \right)^2 \frac{\hat{\sigma}_j^2 / (\hat{\lambda}_j^n)^2}{s_j^n}$$

$$\widehat{MSEP}_{\sum_i^n \widehat{CDR}_i(n+1) | D_n}(0) = \sum_{i=1}^n \widehat{MSEP}_{CDR_i(n+1) | D_n}(0) + 2 \sum_{k>i>0} \hat{C}_{i,n}^n \hat{C}_{k,n}^n (\hat{Y}_{i,n}^n + \hat{V}_{i,n}^n)$$

$$\text{Avec } \hat{Y}_{i,n}^n = \hat{\Phi}_{i,n}^n + \frac{\hat{\sigma}_{n-i}^2 / (\hat{\lambda}_{n-i}^n)^2}{s_{n-i}^n}$$

Il en découle une formule de la même forme que celle que l'on avait donnée pour les années de survenance vues individuellement,

$$\widehat{MSEP}_{\sum_i^n \widehat{CDR}_i(n+1) | D_n}(0) = \widehat{MSEP}_{\sum_i^n CDR_i(n+1) | D_n}(\sum_i^n CDR_i(n+1)) + \widehat{var}(CDR_i(n+1) | D_n) + 2 \sum_{k>i>0} \hat{C}_{i,n}^n \hat{C}_{k,n}^n (\hat{Y}_{i,n}^n - \hat{\Phi}_{i,n}^n)$$

#### 4. Comparaison avec la formule de Mack

Comme détaillé précédemment, la MSEP du modèle de Merz et Wüthrich pour une année de survenance  $i$  est égale à :

$$\widehat{MSEP}_{\widehat{CDR}_i(n+1)|D_n}(0) = (\hat{C}_{i,n}^n)^2 \left( \underbrace{\frac{\hat{\sigma}_{n-i}^2 / (\widehat{\lambda}_{n-i}^n)^2}{C_{i,n-i}}}_{(1)} + \underbrace{\frac{\hat{\sigma}_{n-i}^2 / (\widehat{\lambda}_{n-i}^n)^2}{s_{n-i}^n} + \sum_{j=n-i+1}^{n-1} \left( \frac{C_{n-j,j}}{s_j^{n+1}} \right)^2 \frac{\hat{\sigma}_j^2 / (\widehat{\lambda}_j^n)^2}{s_j^n}}_{(2)} \right)$$

- Le terme (1) représente l'erreur de processus. A la différence du modèle de Mack, le modèle de Merz et Wüthrich ne prend en compte qu'une seule diagonale. C'est la différence entre la vision à horizon un an et la vision ultime.
- Les deux autres termes (2) représentent l'erreur d'estimation. Le premier terme fait référence à la première diagonale simulée alors que le second terme renvoie aux autres diagonales. Ce dernier terme est pondéré par le rapport entre la dernière diagonale connue et le reste de l'année de développement considérée.

Selon le modèle de Mack, l'erreur d'estimation des provisions est donnée par la formule suivante :

$$\widehat{MSEP}(\hat{R}_i) = \hat{C}_{i,n}^n \times \sum_{j=n-i}^{n-1} \left( \underbrace{\frac{\hat{\sigma}_j^2 / (\widehat{\lambda}_j^n)^2}{c_{i,j}}}_{(3)} + \underbrace{\frac{\hat{\sigma}_j^2 / (\widehat{\lambda}_j^n)^2}{s_j^n}}_{(4)} \right)$$

Nous notons que :

$$\widehat{MSEP}_{\widehat{CDR}_i(n+1)|D_n}(0) \leq \widehat{MSEP}(\hat{R}_i)$$

En effet :

- $(1) \leq (3)$  puisque (1) est le premier terme de (3) qui est une somme de termes positifs.
- $(2) \leq (4)$  puisque  $\frac{C_{n-j,j}}{s_j^{n+1}} < 1$

De façon analogue, on peut montrer que :

$$\widehat{MSEP}_{\sum_i^n \widehat{CDR}_i(n+1) | D_n}(0) \leq \widehat{MSEP}(\hat{R})$$

Ainsi la formule approchée de Merz et Wüthrich implique que la volatilité à horizon un an est inférieure à la volatilité à l'ultime.

## 5. Critiques du modèle de Merz et Wüthrich

Le modèle de Merz et Wüthrich présente l'avantage de mesurer le risque de provisionnement à horizon un an par l'application d'une formule fermée. Il est facile à implémenter et à utiliser, ce qui présente un réel avantage dans le cadre SBR où la publication de résultats est fréquente. De plus, la structure du modèle permet de retracer toutes les étapes de calculs aisément.

Néanmoins, sa simplicité induit inévitablement des limites. Notamment le modèle ne permet pas a priori d'appliquer un facteur de queue de développement, ce qui peut véritablement s'éloigner de la réalité de la sinistralité de certaines branches. De plus, il souffre des mêmes inconvénients que sa version à l'ultime, à savoir des hypothèses fortes pas toujours réalistes (indépendance des années de survenance et sensibilité importante liée aux facteurs de développement). La formule proposée par Merz et Wüthrich se base sur une approximation qui stipule que

$$\prod_{j=1}^n (1 + a_j) = 1 + \sum_{j=1}^n a_j \text{ si } a_j \ll 1$$

Cette condition contraint l'estimation de la volatilité à un an à être inférieure à l'estimation de la volatilité à l'ultime. Intuitivement cette remarque semble correcte, mais il peut exister des cas particuliers où elle ne serait pas vérifiée. Enfin, le modèle de Merz et Wüthrich ne permet pas d'obtenir une distribution de l'estimation du CDR.

Une autre méthode qui pourrait palier à certaines insuffisances du modèle de Merz et Wüthrich serait d'utiliser une méthode de ré-échantillonnage : la méthode du Bootstrap adaptée à un an, dite méthode de re-reserving qui sera détaillé dans le chapitre qui suit.

## II. Application

Avant d'appliquer la formule de M&W pour le calcul des erreurs quadratiques moyennes, il est important de vérifier la condition d'usage de la formule approchée de M&W qui stipule que :

$$a_j = \frac{\hat{\sigma}_j^2 / (\hat{\lambda}_j^n)^2}{C_{i,j}} \ll 1$$

a								
	0	1	2	3	4	5	6	7
RC_MATERIEL	0.0437947	0.084579	0.0076316	0.0001867	2.3741E-6	1.4315E-6	0.0000335	2.115E-6
RC_CORPOREL	0.3407486	0.0146404	0.0016411	0.003234	0.0008682	0.0002642	0.0001577	0.0000669
HRC	0.0142641	0.0043242	0.0025714	0.0004436	0.0000935	0.0000913	0.0000631	0.0000572

Tableau 60: Vérification de la condition d'usage de Merz & Wüthrich

De manière générale, la contrainte est bien respectée pour l'ensemble des triangles étudiés. Cela nous permet donc d'avoir suffisamment de confort quant aux résultats donnés par le modèle de Merz et Wüthrich.

Les tableaux ci-dessous présentent le calcul des erreurs quadratiques moyennes pour les CDR par année de survenance ainsi que le CDR totale :

	MSEP_RC_MATERIEL		MSEP_RC_CORPOREL		MSEP_HRC
2009	0	2009	0	2009	0
2010	9.96495E9	2010	6.9617E12	2010	1.8649E11
2011	2.2845E11	2011	1.0304E13	2011	6.6935E11
2012	6.46E10	2012	2.5001E13	2012	1.5361E12
2013	8.1218E10	2013	9.518E13	2013	1.6666E12
2014	1.4391E12	2014	4.2239E14	2014	1.9904E13
2015	1.6802E14	2015	3.5166E14	2015	2.5676E14
2016	5.1824E15	2016	1.8474E15	2016	5.8634E14
2017	3.1703E16	2017	9.8911E15	2017	7.0478E15
Total	4.6295E16	Total	1.4205E16	Total	9.5036E15

Tableau 61: Erreur quadratique moyenne par année de survenance et totale.

On exprime la volatilité à un an des provisions en pourcentage du montant des provisions comme suit

$$\frac{\sqrt{MSEP_{\overline{CDR}}|D_n}(0)}{\hat{R}^n}$$

Les tableaux ci-dessous comparent l'incertitude à long terme (vision à l'ultime) à celle à court terme.

Rc_materiel			
	Volatilité à un an MW	Volatilité à l'ultime Mack	Part de la volatilité à un an dans la volatilité à l'ultime
2009	0	0	0
2010	0.3728818	0.3728818	1
2011	0.4640643	0.4747901	0.9774094
2012	0.1572786	0.3372888	0.4663024
2013	0.118258	0.2438947	0.484873
2014	0.2917643	0.3192162	0.9140021
2015	0.6919221	0.698136	0.9910993
2016	0.8124561	0.8350637	0.972927
2017	0.3463502	0.4434232	0.7810827
Total	0.3410601	0.4113955	0.8290321

Rc_corporel			
	Volatilité à un an MW	Volatilité à l'ultime Mack	Part de la volatilité à un an dans la volatilité à l'ultime
2009	0	0	0
2010	0.355429	0.355429	1
2011	0.1779497	0.2131481	0.8348638
2012	0.1081157	0.1394908	0.7750736
2013	0.1084667	0.1309631	0.8282229
2014	0.1301394	0.1512708	0.8603074
2015	0.0683919	0.1174593	0.5822606
2016	0.1490758	0.1783633	0.8357985
2017	0.6262171	0.6633135	0.9440742
Total	0.1144992	0.1288947	0.8883155

HRC			
	Volatilité à un an MW	Volatilité à l'ultime Mack	Part de la volatilité à un an dans la volatilité à l'ultime
2009	0	0	0
2010	1.4713157	1.4713157	1
2011	0.6224873	0.7442655	0.8363779
2012	0.4336871	0.5595024	0.77513
2013	0.3202744	0.4794908	0.6679469
2014	0.3990945	0.4629666	0.8620372
2015	0.4221193	0.4544325	0.9288933
2016	0.2549293	0.3170268	0.8041252
2017	0.2113303	0.2374521	0.8899913
Total	0.1772902	0.2016609	0.8791503

Tableau 62: Comparaison de la volatilité à l'ultime selon Mack à celle à un an introduit par Merz & Wüthrich

Pour l'ensemble des triangles, la volatilité à horizon un an est bien inférieure à la volatilité ultime.

On remarque aussi que la part de la volatilité à un an de celle à l'ultime est importante, et ce pour toutes les années de survenance et même agrégées. Par exemple, une part de 82.90% traduit que si on arrive à maîtriser la volatilité de notre réserve ou bien le risque de provisionnement pour un horizon d'un an, on est sûr à 82.90% qu'on maîtrisera le risque de provisionnement à l'ultime, ce qui constitue une donnée importante permettant de clarifier la vision à l'ultime et ce à, partir de l'année calendaire actuelle.

## Chapitre 4 : La méthode du re-reserving : le Bootstrap

Le risque de provisionnement peut se définir comme nous l'avons déjà vu, par le risque que la variable aléatoire CDR prenne des valeurs négatives, c'est-à-dire de faire des malis.

La méthode que nous avons présentée dans la section précédente (méthode proposée par Merz & Wüthrich) nous fournit uniquement une estimation analytique du risque de provisionnement sous les hypothèses de Mack, sans en donner de distribution empirique. Les méthodes de simulation vont alors nous permettre de remédier à cette lacune et d'obtenir une distribution empirique suivie par les CDR, conditionnellement aux informations disponibles en date  $n$ .

On cherche ici à simuler une nouvelle diagonale de paiements pour l'année calendaire  $[n, n+1]$ . La somme des termes de la nouvelle diagonale permet d'obtenir le total des paiements de l'année calendaire  $[n, n+1]$ . Chaque simulation de la diagonale fournit une nouvelle information, afin d'estimer la provision de fin d'année calendaire  $n+1$  et ainsi en déduire une observation des CDR en  $n+1$ .

Il est important de remarquer que le modèle de Merz-Wüthrich évalue le risque à un an des provisions et non du Best Estimate. Nous allons donc chercher dans ce chapitre à quantifier le risque de provisionnement relatif au Best estimate. Dans ce cadre, le CDR sera égal à  $\frac{BE^{n+1}}{1+r} + \frac{P_1}{\sqrt{1+r}} - BE^n$  ou  $r$  est le taux d'actualisation à 1 an et  $P_1$  est la diagonale des paiements survenus entre  $n$  et  $n+1$  qu'on considère survenu en milieu d'année.

### I. Principe

L'évaluation de la distribution empirique des CDR se réalise en quatre étapes :

- **Provision d'ouverture** : Il nous faut tout d'abord déterminer la provision best estimate d'ouverture de l'année calendaire  $n$ , à partir de l'information disponible à la date  $n$  (triangle supérieur). A cet effet, nous appliquons une méthode  $M$  que l'on pourra exécuter de manière répétée lors des simulations.

- **Simulation de nouveaux paiements** : Cette deuxième étape consiste à générer des paiements pour la nouvelle diagonale  $Y_{i,n-i+1} \forall i = 1 \text{ à } n$ . Pour ce faire, nous simulons selon la méthode de Bootstrap modifiée, conditionnellement aux données observées dans le triangle supérieur.
- **Provision de clôture** : Une fois cette nouvelle diagonale simulée, nous sommes en possession d'une nouvelle information. Nous appliquons alors, pour chaque simulation, la méthode choisie M en tenant compte de cette nouvelle information disponible afin d'obtenir la provision de fin d'année n.

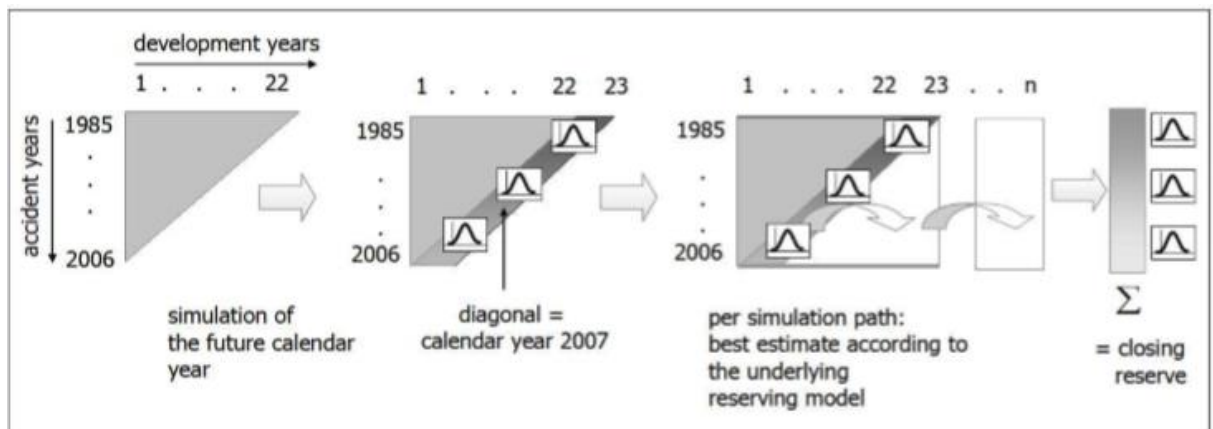


Figure 24: Illustration de la simulation des paiements de la diagonale de l'année calendaire suivante

- **Distribution** : Finalement, à partir de N simulations, on obtient N valeurs de CDR, ce qui permet d'en déterminer une distribution empirique, et d'en déduire des percentiles (VaR, et plus particulièrement à 99,5% celle qui nous intéresse dans le cadre de Solvabilité II).

Nous choisissons ici d'appliquer la méthode de Chain Ladder (sans "tail factor") pour M. Toutefois ces méthodes de simulation ont l'avantage de permettre d'utiliser d'autres méthodes de provisions ainsi que d'introduire une extrapolation pour tenir compte d'un "tail factor".

## II. Simulation par une méthode de Bootstrap modifiée à un an

Dans l'étape 2, le Bootstrapping modifié ou la simulation de la diagonale de paiement est comme suit :

Boucle sur N simulations :

1. Application des étapes de la méthode classique du Bootstrap ;
2. Conservation de la diagonale des incréments de l'année calendaire [n,n+1] obtenue par la méthode du Bootstrap ;
3. Concaténation des incréments du triangle observé à la date n et de la diagonale obtenue à l'étape précédente ;
4. Calcul du triangle des paiements cumulés ;
5. Calcul des  $\hat{\lambda}_j$  sur le triangle obtenu grâce à la nouvelle information disponible et calcul de  $\frac{BE^{n+1}}{1+r} + \frac{P1}{\sqrt{1+r}}$  ;
6. calcul des CDR.

Fin de boucle

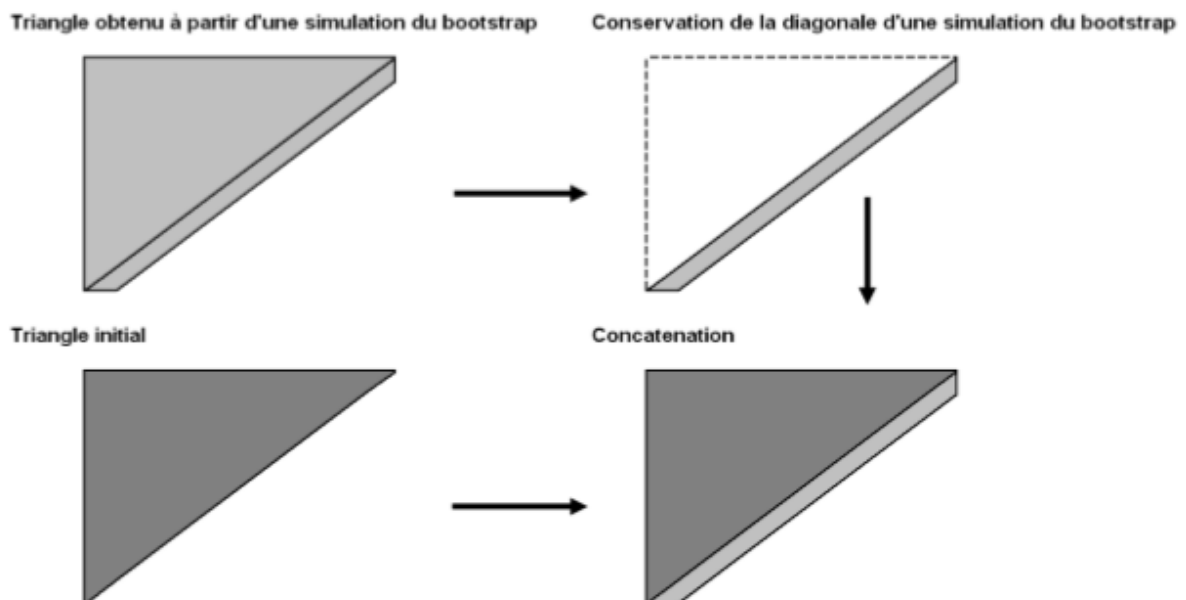


Figure 25: Illustration de la méthode du Bootstrap modifiée pour l'obtention du risque à un an

### III. Critique de la méthode

La méthode du Bootstrap adaptée à horizon un an présente des caractéristiques très similaires à la méthode du Bootstrap classique. Par conséquent, elle souffre des mêmes inconvénients énoncés précédemment (temps de calcul, modèle Chain Ladder...).

Cette approche possède néanmoins l'avantage d'être facile à implémenter. Elle donne la distribution empirique du Claims Development Result qui représente le risque de provisionnement. Ainsi, l'erreur de prédiction (MSEP) correspond tout simplement à l'écart-type de la distribution de CDR.

De plus, la méthode du Bootstrap est plus souple et présente également l'avantage d'être généralisable à un horizon  $t$  variable. Cet aspect peut se révéler utile pour le calcul des CSR futurs dans le cadre de la détermination de la marge de risque.

### IV. Application

On applique la méthode re-reserving en simulation les CDR 5000 fois.

Dans un premier temps, on trace la distribution empirique du CDR( $n+1$ ) agrégé :

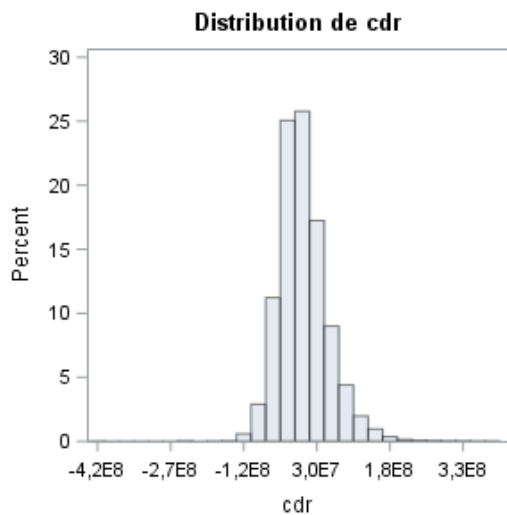


Figure 26: Distribution de CDR de la garantie RC matériel

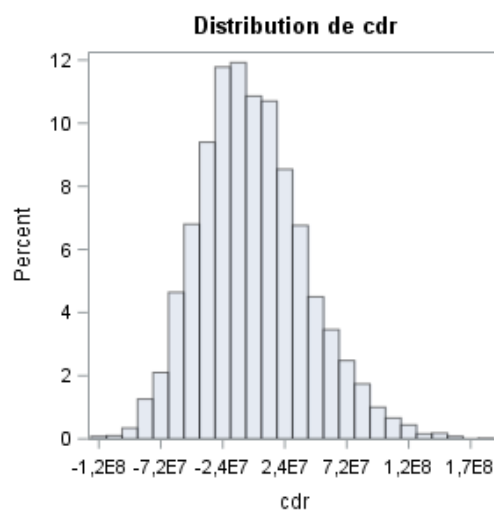


Figure 27 : Distribution de CDR de la garantie RC corporel

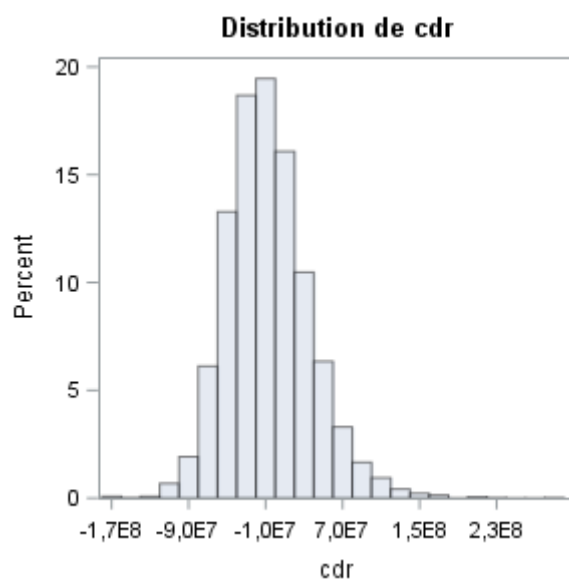


Figure 28 : Distribution de CDR de la garantie HRC

Ensuite, on dégage certaines informations sur cette dernière :

CDR				
	Moyenne(CDR)	Variance(CDR)	Ecart-type(CDR)	VaR99,5(-CDR)
RCMATERIEL	2107994	2.6756E15	51725712	108877218
RC_CORPOREL	-658944.7	1.7219E15	41495624	90627319
HRC	-7044614	1.9168E15	43781680	108183465

Tableau 63 : Statistiques de la variable CDR

On trouve un  $CDR(n+1)$  moyen positif pour la garantie « RC matériel », ce qui correspond à un boni, et un  $CDR(n+1)$  moyen négatif pour les deux garanties « RC corporel » et « HRC », ce qui correspond à un mali. Or, à ce stade d'information  $D_n$ , ce boni ou mali n'a pas lieu d'être. En effet, en théorie, nous avons :  $E[CDR(n+1)|D_n]=0$ . Cet écart est peut-être dû à un nombre insuffisant de simulations Bootstrap.

On note aussi que l'incertitude de prédiction du CDR observable par rapport à 0 mesurée par sa variance est bien inférieure à celle obtenue avec la méthode Merz et Wüthrich, la méthode Bootstrap à un an est donc plus robuste.

## Chapitre 5 : Calcul du CSR lié au risque de provisionnement

Regardons maintenant, quel est le montant de fonds propres à immobiliser dans le cadre du CSR du fait que la compagnie subit ce risque de provisionnement.

### 1. Calcul du CSR selon la formule standard

Les données que nous retiendrons pour le calcul du CSR sont les suivantes :

- $V_{RC} = BE_{sinistre_{RC\_matériel}} + BE_{sinistre_{RC\_corporel}} = 1571489849$
- $\sigma_{RC} = 9\%$
- $V_{horsRC} = 523137526$
- $\sigma_{horsRC} = 8\%$

En supposant l'indépendance entre les deux branches, on obtient les résultats suivants :

CSR RC	424302259
CSR Hors RC	125553006
CSR agrégé	442488378

Tableau 64: Montant du CSR des garanties RC, HRC et CSR total selon la formule standard

### 2. Calcul du CSR selon l'optique modèle interne

Nous rappelons que dans le cadre de la directive SBR, le capital requis correspond à une mesure de risque de type « Value-at-Risk », avec un niveau de confiance de 99.5% à un horizon de temps d'un an.

Comme nous avons choisi de nous focaliser sur le risque de provisionnement dans le cadre de ce mémoire, il est important de définir le CSR de provisionnement par rapport à cette mesure de risque. En effet, le besoin en capital au titre du risque de provisionnement pour une année de survenance  $i$  est donné par :

$$CSR_{\text{provisionnement}} = VaR_{99.5\%}(-CDR) = -VaR_{0.5\%}(CDR)$$

Ainsi, dans le cadre de l'approche modèle interne, il s'agit de déterminer le quantile à 0,5% de la distribution du CDR

C'est pourquoi nous nous sommes intéressés à l'approche Bootstrap à un an. En effet, par rapport au modèle de Merz & Wüthrich, elle présente l'avantage de fournir une distribution complète des provisions et du CDR. A partir de cette distribution, nous pouvons ainsi déterminer des quantiles et en particulier celui à 0.5% qui nous intéresse pour déterminer le CSR relatif au risque de provisionnement.

Par application de cette formule à nos distributions CDR obtenues selon la méthode de Bootstrap modifiée, on obtient les résultats suivants :

CSR	
RCMATERIEL	108877218
RC_CORPOREL	90627319
HRC	108183465

Tableau 65: Montant du CSR pour les 3 garanties selon le modèle interne

Par ailleurs, étant donné que la VaR n'est pas additive, nous allons supposer l'indépendance entre les garanties, et dégager le quantile 0.5% de la somme des trois vecteurs CDR dont on dispose afin d'en déduire le CSR agrégé.

On obtient un CSR agrégé égal à 208261132,3 DH.

On constate que la formule standard tend à surestimer le profil de risque de la compagnie, en effet le CSR relatif au risque de provisionnement est supérieur à celui estimé avec la méthode Bootstrap modifiée. Il semblerait donc que la compagnie étudiée présente un profil de risque de provisionnement moins élevé que le panel pris en compte dans la formule standard.

- **Difficultés pratiques et techniques**

Il est intéressant pour la compagnie de modéliser au plus fin ses risques afin de mieux les quantifier. Cependant, en pratique, la mise en œuvre d'un modèle interne peut s'avérer long, complexe et coûteux.

De plus, il est important pour la compagnie d'analyser tous les aspects de mise en œuvre de cette démarche. Elle doit notamment anticiper les évolutions du portefeuille car la

mise en place d'un modèle interne implique le maintien de ce processus dans le temps, sans pouvoir de manière systématique revenir à une approche standard. C'est pourquoi il est nécessaire pour la compagnie d'effectuer des « stress tests » afin d'analyser les impacts de l'évolution de son profil de risque dans le futur.

## ***Conclusion :***

De nos jours, les compagnies d'assurance doivent faire face à tout type de risque. Afin de répondre aux engagements pris envers leurs assurés et être en mesure de pouvoir rembourser les sinistres futurs éventuels, ces compagnies constituent des provisions qui dépendent directement du risque couvert : les provisions pour sinistres à payer.

En raison du caractère aléatoire de leurs activités et de la multiplicité des risques auxquels s'exposent ces entreprises, l'Etat a défini un cadre réglementaire stricte pour fournir une meilleure protection aux assurés et preneurs de contrats. Ce cadre réglementaire a été analysé au début de ce rapport et a permis de conclure que celui-ci présente des insuffisances quant à la maîtrise de l'ensemble des risques auxquels s'exposent les entreprises d'assurances, ce qui peut donc engendrer des erreurs de provisionnement.

Ainsi, l'arrivée des nouvelles normes de SBR impose à ces sociétés d'assurance plus de rigueur dans le calcul des provisions, on parle maintenant de meilleure estimation de la provision ou Best Estimate à laquelle s'ajoute une marge de risque.

Dans un premier temps, nous avons construit une courbe des taux empirique servant à actualiser les flux de trésorerie futurs.

Ensuite nous avons appliqué plusieurs méthodes de provisionnement afin de pouvoir calculer une meilleure estimation des engagements pour sinistres nets de recours. Dans ce cadre, on a pu étudier les méthodes déterministes basées principalement sur une exploitation des facteurs de développement mais qui affichent des provisions fixes et ne permettent donc pas la prédiction de l'incertitude présente dans les estimations. Puis, on a eu recours aux méthodes stochastiques qui proposent une alternative aux méthodes standards en intégrant une étude de la distribution de la provision estimée et de l'erreur de prédiction. Ainsi, la vision stochastique offre une plus grande flexibilité dans la détermination de la provision, proposée sous forme d'intervalle de confiance.

Enfin, nous avons tenu à appliquer fidèlement les formules énoncées dans la circulaire pour le calcul de la meilleure estimation des engagements pour primes et celle des frais de gestion. En ce qui concerne la marge de risque, on l'a calculé en utilisant une des simplifications proposées par la réglementation française du moment où la SBR n'a toujours pas détaillé cette partie.

Le nouveau contexte réglementaire pose aujourd'hui de nouvelles problématiques qui sont essentielles à la solvabilité de la compagnie. Il impose notamment de mesurer la déviation à un horizon de temps d'un an l'estimation des montants de provisions estimés. C'est pourquoi nous avons cherché dans la 3<sup>ème</sup> partie de ce mémoire à déterminer la volatilité des réserves de sinistres à un an. La méthode de Merz & Wüthrich qui présente l'avantage de fournir une formule fermée a permis d'estimer ce risque de provisionnement à un an. Cependant, ce modèle ne permet pas d'étudier la distribution complète des provisions. C'est pourquoi il s'est avéré intéressant de développer la méthode de Bootstrap à un an qui permet d'obtenir des précisions sur les estimations réalisées (intervalles de confiance, quantiles...) et dès lors en déduire le CSR relatif au risque de provisionnement. Le CSR obtenue avec la méthode Bootstrap s'est avéré être inférieur à celui calculé avec la formule standard, on a donc déduit que la compagnie présente un profil de risque moins élevé que le panel pris en compte dans la formule standard.

## ***Bibliographie :***

- BOISSEAU JP., Solvabilité 2 et mesure de volatilité dans les provisions pour sinistres à payer, Mémoire d'actuariat, Université Paris-Dauphine, 2006.
- BUI C., Evaluation de l'incertitude dans le provisionnement d'une société d'assurance non vie monobranche, Mémoire d'actuariat, Université Paris-Dauphine, 2016.
- CHARPENTIER A., DENUIT M., Mathématiques de l'assurance non vie : Tome 2, Tarification et provisionnement, 2005.
- HABIB I., RIBAN S., Quelle méthode de provisionnement non vie dans S2, Mémoire d'actuariat, ENSAE, 2012.
- JAZIRI S., Méthodes de provisionnement non-vie et risque de réserve à un an, Mémoire d'actuariat, ENSAE, 2011.
- LAYAR K., GOURIACH H., Méthodes de Provisionnement non-vie et Risque de Réserve à un an, Mémoire d'actuariat, INSEA, 2017.
- LEVY A., Solvabilité II : Exigences quantitatives et impacts comptables sur une société d'assurance mutuelle non-vie, Mémoire d'actuariat, Paris Dauphine, 2017.
- LOUIS M., Evaluation des provisions techniques non-vie dans le contexte de Solvabilité II, Mémoire d'actuariat, Strasbourg, 2010.
- MARRI F., Assurance Non Vie II : tarification et provisionnement, INSEA, 2018.
- SERRAG A., ZAIM N., Modélisation de la courbe des taux primaire et secondaire selon les deux approches économique et financière, INSEA, 2010.
- VACHER M., Estimation de la volatilité à un an des provisions en assurance non-vie en utilisant la technique du Bootstrap, Mémoire d'actuariat, ENSAE, 2012.

# Annexe :

## Présentation de l'assurance SANAD :

### 1. Description de l'entreprise :

La Compagnie Marocaine d'Assurance et de Réassurance (SANAD) est une société anonyme fondée en 1946, filiale de deux géants de la place économique marocaine ; HOLMARCOM Groupe Marocain multisectoriel d'envergure, et la Caisse de dépôt et de Gestion (CDG), premier Groupe financier du royaume.

Forte de son expérience de 73 ans et de la richesse de son capital humain, SANAD a su se démarquer et à s'imposer dans un secteur aussi compétitif que celui de l'assurance et de la réassurance.

Sur le plan technique, la compagnie d'assurance SANAD exerce plusieurs activités que ce soit en assurance non vie ou en assurance vie, ajoutant à cela les opérations de la réassurance.

### 2. Organisation :

Sous la supervision de la présidence direction générale, la compagnie SANAD est composée de plusieurs départements et services qui ont pour objectif la continuité et l'expansion de l'activité assurantielle de la compagnie. Ci-dessous, nous trouverons l'organigramme de la compagnie SANAD.



Figure 29: Organigramme de la SANAD.

### 3. SANAD ASSURANCE en chiffres :

Le montant des émissions connaît chaque année une progression au niveau des deux branches vie et non vie.

Le graphique suivant illustre l'évolution des primes émises par la compagnie SANAD entre 2013 et 2016.

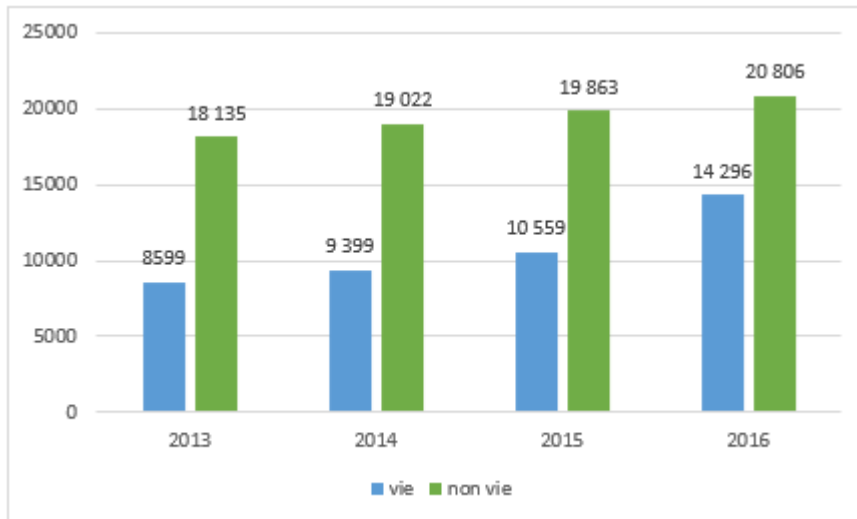


Figure 30: Evolution des primes émises entre 2013 et 2016.

Entre 2013 et 2016, le montant des émissions a connu une croissance importante de 31,30%, réalisant 35,10 milliards de dirhams contre 26,73 milliards de dirhams en 2013.

La branche assurance Non Vie a enregistré une évolution moyenne annuelle de 4,7%, alors que la branche Vie et Capitalisation a enregistré 7,22% sauf pour l'année 2016 qui a connu une progression de 35,35% due essentiellement à une opération consistant au transfert d'un portefeuille Vie d'une banque vers sa mutuelle.