



المندوبية السامية للتخطيط
HAUT-COMMISSARIAT AU PLAN

ROYAUME DU MAROC
..*.*.*
HAUT COMMISSARIAT AU PLAN
..*.*.*
INSTITUT NATIONAL
DE STATISTIQUE ET D'ECONOMIE APPLIQUEE



INSEA

Projet de Fin d'Etudes

Analyse et développement statistiques de stratégies de Trading sur les marchés des Commo/FX

Préparé par : *Mlle Sana BADRI*

Sous la direction de : *Mr Yassine EL QALLI* (INSEA)
Mme Ilham HAFNI (Attijariwafa Bank)

Soutenu publiquement comme exigence partielle en vue de l'obtention du

Diplôme d'Ingénieur d'Etat

Option : Actuariat-Finance

Devant le jury composé de :

- *Mr Fouad EL ABDI* (INSEA)
- *Mr Yassine EL QALLI* (INSEA)
- *Mme Ilham HAFNI* (Attijariwafa Bank)

Résumé

Le présent rapport met en évidence les relations d'interdépendance entre les marchés des matières premières et des taux de change, en implémentant une stratégie de Trading qui exploite les co-mouvements régissant les marchés. L'intérêt de ce travail est d'offrir aux Traders ou investisseurs des outils statistiques d'aide à la décision, leur permettant d'exploiter les opportunités d'arbitrage présentes sur les deux marchés.

Après une brève description des caractéristiques de ces deux marchés, nous avons étudié leurs spécificités statistiques.

Nous avons ensuite décrit les fondements théoriques des différents modèles de corrélations conditionnelles dynamiques, puis adopté le modèle « EGARCH-DCC » qui s'est imposé comme le modèle qui permet de reproduire au mieux et de prévoir les relations d'interdépendance sur le court terme entre les actifs.

Sur le long terme, l'analyse des dynamiques communes liant les deux marchés a été menée en faisant appel à la cointégration récursive de Johansen. Suite à cette étude, les paires composées d'actifs les mieux cointégrés ont été extraites.

Finalement, une stratégie de Pair Trading a été mise en place sur deux portefeuilles différents. Le premier portefeuille est élaboré par l'algorithme de la stratégie seulement. Le second portefeuille, quant à lui, intègre aussi les paires de l'étude de l'interdépendance à court terme et à long terme. La performance du portefeuille intégrant les résultats des études à court et long terme s'est avérée moins significative que celle du portefeuille mis en place par la stratégie seule.

Mots clés : Corrélations conditionnelles dynamiques, Cointégration récursive de Johansen, effet de retour à la moyenne, Pairs Trading, stratégies d'arbitrage.

Dédicaces

A mes parents, pour leur patience sans limites, leurs encouragements continus et leur présence inestimable.

Aucun mot ne saurait exprimer toute ma reconnaissance et l'amour que je vous porte.

A ma petite sœur Lamia pour sa tendresse et son immense soutien.

A toutes les personnes qui m'ont épaulé tout au long de ce cursus.

Je dédie ce modeste travail.

Remerciements

Je tiens à exprimer toute ma reconnaissance à **Mme HAFNI Ilham**, Corporate Trader FX & Commodities à la salle des marchés d'Attijariwafa Bank, pour son suivi méticuleux, son engagement dans ce projet et la qualité du savoir transmis.

La réalisation de ce projet n'aurait pas été possible sans l'aide précieuse et les instructions minutieuses de **Mr. Yassine EL QALLI**, professeur chercheur à l'Institut National de Statistiques et d'Économie Appliquée. Que ce travail soit le modeste témoignage de ma haute considération et mon profond respect.

Mes remerciements vont également à Monsieur **Mr. Chakib ERQUIZI**, Directeur de la banque des marchés et investissements d'Attijariwafa Bank, de m'avoir accueillis au sein de sa direction. Je remercie aussi **Mr Jawad OUMLIL**, responsable des ressources humaines ainsi que l'ensemble du personnel travaillant dans la salle des marchés pour leur aide et leur accueil chaleureux.

Je ne saurais oublier de remercier l'ensemble du corps enseignant de l'Institut National de Statistiques et d'Économie Appliquée pour leur patience, la richesse de leurs cours et leur encadrement de qualité.

Je remercie d'avance tous les membres du jury pour le temps qu'ils ont consacré à l'appréciation du présent rapport.

Pour finir, je remercie toute personne qui, de près ou de loin, a contribué à la réalisation de ce projet.

Table des matières

| | |
|---|-----------|
| Introduction générale..... | 14 |
| 1. Présentation de l'organisme d'accueil..... | 16 |
| 1.1. Présentation de l'organisme..... | 16 |
| 1.1.1. Aperçu sur le Groupe Attijariwafa Bank..... | 16 |
| 1.1.2. Présentation de la Salle des Marchés | 16 |
| 1.1.2.1. Le Front Office | 17 |
| 1.1.2.2. Middle Office..... | 17 |
| 1.1.2.3. Back Office | 18 |
| 2. Marché de change et marché des matières premières | 19 |
| 2.1. Marché de change | 19 |
| 2.1.1. Caractéristiques du marché de change | 19 |
| 2.1.2. Présentation des données utilisées..... | 20 |
| 2.1.2.1. Euro/ Dollars | 20 |
| 2.1.2.2. Livre Sterling / Dollars | 20 |
| 2.1.2.3. Yen Japonais / Dollars | 20 |
| 2.2. Marchés des matières premières..... | 21 |
| 2.2.1. Caractéristiques du marché des matières premières..... | 21 |
| 2.2.2. Présentation des données utilisées..... | 21 |
| 2.2.2.1. Brent Crude Oil..... | 22 |
| 2.2.2.2. West Texas Intermediate (WTI) | 22 |
| 2.2.2.3. Or (GOLD)..... | 22 |
| 2.2.2.4. Argent (SILVER)..... | 22 |
| 2.3. Autres actifs | 23 |
| 2.3.1. Futurs sur Euro-Bund | 23 |
| 2.3.2. Futurs sur 10 Years T-Note | 23 |
| 3. Analyse statistique des données temporelles..... | 24 |
| Introduction | 24 |
| 3.1. Notations..... | 25 |
| 3.2. Indicateurs statistiques de bases | 26 |
| 3.2.1. Analyse du marché des taux de change..... | 26 |
| 3.2.2. Analyse du marché des matières premières | 27 |
| 3.3. Faits stylisés des rendements d'actifs | 28 |
| 3.3.1. Distribution des rendements..... | 28 |
| 3.3.2. Analyse de la saisonnalité | 29 |
| 3.3.3. Analyse de la stationnarité | 30 |
| 3.3.3.1. Analyse des cours de clôture..... | 31 |
| 3.3.3.2. Analyse des rendements..... | 32 |

| | | |
|------------|---|-----------|
| 3.3.4. | Autocorrélation des rendements logarithmiques..... | 32 |
| 3.3.5. | Clusters de volatilité..... | 34 |
| 3.3.6. | Effet levier..... | 35 |
| | Conclusion..... | 36 |
| 4. | Analyse à court terme des interdépendances entre les marchés Commo/FX..... | 37 |
| | Introduction..... | 37 |
| 4.1. | Présentation générale des modèles de corrélations conditionnelles dynamiques..... | 38 |
| 4.1.1. | Définitions et notations..... | 38 |
| 4.1.2. | Modèle DCC d'Engel comme généralisation du modèle CCC de Bollerslev.... | 39 |
| 4.1.3. | Variantes du modèle GARCH-DCC..... | 40 |
| 4.1.4. | Etapes d'estimation du modèle GARCH-DCC..... | 41 |
| 4.1.5. | Estimation du modèle DCC par maximum de vraisemblance..... | 42 |
| 4.1.5.1. | Distribution normale multivariée des erreurs..... | 43 |
| 4.1.5.1.1. | Première étape d'estimation..... | 44 |
| 4.1.5.1.2. | Seconde étape d'estimation..... | 44 |
| 4.1.5.2. | Distribution de Student multivariée des erreurs..... | 44 |
| 4.1.5.2.1. | Première étape d'estimation..... | 45 |
| 4.1.5.2.2. | Seconde étape d'estimation..... | 45 |
| 4.2. | Modélisation de la variance conditionnelle des actifs..... | 46 |
| 4.2.1. | Calibration du modèle GARCH..... | 46 |
| 4.2.1.1. | Volatilité stochastique : Modèle GARCH..... | 46 |
| 4.2.1.2. | Estimation des paramètres du modèle GARCH(p,q)..... | 47 |
| 4.2.1.2.1. | Identification du modèle GARCH (p, q)..... | 47 |
| 4.2.1.2.2. | Résultats des estimations des paramètres du modèle GARCH (1,1)..... | 48 |
| 4.2.1.3. | Application VBA-Excel..... | 50 |
| 4.2.2. | Limite du modèle GARCH..... | 52 |
| 4.2.3. | Calibration du modèle EGARCH..... | 52 |
| 4.2.3.1. | Présentation du modèle EGARCH..... | 52 |
| 4.2.3.2. | Estimation du modèle EGARCH (1,1)..... | 53 |
| 4.2.4. | Conclusion..... | 55 |
| 4.3. | Modélisation des corrélations conditionnelles dynamiques..... | 55 |
| 4.3.1. | Modèle GARCH-DCC avec des rendements normaux..... | 55 |
| 4.3.1.1. | Rendements standardisés..... | 55 |
| 4.3.1.2. | Résultats des estimations..... | 57 |
| 4.3.2. | Modèle GARCH-DCC avec des rendements suivant la loi de Student..... | 58 |
| 4.3.2.1. | Ajustement à la loi de Student..... | 58 |
| 4.3.2.2. | Résultats des estimations..... | 59 |
| 4.3.3. | Modèle EGARCH-DCC avec des rendements normaux..... | 59 |
| 4.3.4. | Modèle EGARCH-DCC avec des rendements suivant la loi de Student..... | 60 |
| 4.3.5. | Conclusion..... | 60 |
| 4.4. | Exploitation des résultats..... | 61 |
| 4.5. | Prévisions..... | 62 |
| 4.6. | Conclusion..... | 64 |

| | |
|---|-----------|
| 5. Analyse à long terme des interdépendances entre les marchés Commo/FX..... | 65 |
| Introduction | 65 |
| 5.1. Notion de cointégration | 66 |
| 5.2. Test de cointégration de Johansen | 66 |
| 5.2.1. Trace Test | 66 |
| 5.2.2. Maximum eigenvalue test | 67 |
| 5.3. Test de cointégration récursive | 67 |
| 5.3.1. Méthodologie du test | 67 |
| 5.3.2. Conditions d'application du test de cointégration de Johansen | 68 |
| 5.4. Résultats du test de cointégration | 69 |
| 5.4.1. Première période d'étude : du 6/1/2008 au 22/4/2015 | 69 |
| 5.4.1.1. Choix du retard optimal | 69 |
| 5.4.1.2. Résultats du test de cointégration de Johansen | 70 |
| 5.4.1.3. Résultats du test de cointégration récursive de Johansen | 71 |
| 5.4.2. Deuxième période d'étude : du 5/1/2010 au 22/4/2015 | 71 |
| 5.4.2.1. Choix du retard optimal | 72 |
| 5.4.2.2. Résultats du test de cointégration de Johansen | 72 |
| 5.4.2.3. Résultats du test de cointégration récursive de Johansen | 73 |
| 5.4.3. Troisième période d'étude : 5/1/2013 au 22/4/2015 | 73 |
| 5.4.3.1. Choix du retard optimal | 73 |
| 5.4.3.2. Résultats du test de cointégration de Johansen | 74 |
| 5.4.3.3. Résultats du test de cointégration récursive de Johansen | 74 |
| 5.4.4. Conclusion..... | 75 |
| 5.5. Etude des paires d'actifs | 75 |
| 5.5.1. Sélection du retard optimal | 75 |
| 5.5.2. Résultats du test de cointégration récursive de Johansen..... | 76 |
| 5.6. Conclusion | 77 |
| | |
| 6. Application à la stratégie du « Pairs Trading »..... | 78 |
| Introduction | 78 |
| 6.1. Techniques et stratégies classiques de Trading | 79 |
| 6.1.1. Définition | 79 |
| 6.1.2. Classification des stratégies de Trading | 79 |
| 6.1.2.1. Les stratégies d'arbitrage | 80 |
| 6.1.2.2. Les stratégies « Market Neutral » | 81 |
| 6.2. Pairs Trading..... | 82 |
| 6.2.1. Définition | 82 |
| 6.2.2. Pairs Trading : une stratégie de Trading algorithmique | 82 |
| 6.2.3. Implémentation de la stratégie du « Pairs Trading »..... | 83 |
| 6.2.4. Analyse de performance | 83 |
| 6.2.4.1. Rendement d'un portefeuille..... | 83 |
| 6.2.4.2. Volatilité d'un portefeuille..... | 84 |
| 6.2.4.3. Ratio de Sharpe d'un portefeuille | 84 |
| 6.3. Application | 85 |

| | | |
|----------------------------------|---|------------|
| 6.3.1. | Formation des paires | 86 |
| 6.3.1.1. | Modélisation du problème | 86 |
| 6.3.1.2. | Exploitation de la propriété de cointégration au sens de Granger | 87 |
| 6.3.1.3. | Résultats | 88 |
| 6.3.2. | Construction de la stratégie de Trading..... | 90 |
| 6.3.2.1. | Signal de Trading | 90 |
| 6.3.2.2. | Algorithme des prises de positions | 91 |
| 6.3.3. | Backtesting de la stratégie de Trading | 93 |
| 6.3.3.1. | Méthodologie suivie..... | 93 |
| 6.3.3.2. | Analyse de la performance de la stratégie | 94 |
| 6.4. | Conclusion | 97 |
| Conclusion générale | | 98 |
| Bibliographie..... | | 100 |
| A- | Critère AIC pour l'identification du modèle GARCH(p,q) | 101 |
| B- | Sortie R : Estimation des paramètres du modèle GARCH(1,1) | 102 |
| C- | Sortie R : Estimation des paramètres du modèle EGARCH(1,1) | 103 |
| D- | Sortie R : Test de Kolmogorov-Smirnov d'adéquation à la loi de Student | 104 |
| E- | Sortie R : Estimation des modèles de corrélations conditionnelles dynamiques | 105 |
| F- | Sortie STATA : Test de stationnarité Augmented Dickey-Fuller | 106 |
| G- | Sortie R : Evolution de des corrélations conditionnelles dynamiques entre les paires d'actifs | 108 |
| H- | Sortie R : Graphes de la cointégration récursive de paires d'actifs | 109 |
| I- | Sortie VBA-Excel (en liaison avec RExcel) : Test de cointégration au sens de Granger .. | 110 |
| J- | Sortie VBA-Excel (en liaison avec RExcel) : Test de stationnarité du spread entre chaque paire d'actifs..... | 111 |
| K- | Rappel 1 : Test de racine unitaire (tests de Dickey-Fuller et Dickey-Fuller augmenté) .. | 112 |
| L- | Rappel 2 : Test de cointégration d'Engel et Granger | 113 |
| M- | Code élaboré sous R pour la cointégration récursive de Johansen | 114 |
| N- | Algorithme de Nelder-Mead..... | 115 |
| O- | Courbes tendanciennes des prévisions des corrélations conditionnelles dynamiques..... | 117 |

Liste des abréviations

ADF: Augmented Dickey-Fuller

AWB: Attijariwafa Bank

CCC: Constant Conditional Correlation

COA: Brent Crude Oil

COMMO: Commodity

DCC: Dynamic Conditional Correlation

EGARCH: Exponential Generalized Auto Regressive Conditional Heteroscedastic

EUR/USD: Euro/Dollars

FOREX (ou FX): Foreign Currency Exchange Rates

GARCH: Generalized Auto Regressive Conditional Heteroscedastic

GBP/USD: Livre Sterling/Dollars

JPY/USD: Yen japonais/Dollars

RX1 (ou RXA): Euro Bund

SDM: Salle des Marchés

SILV: Argent (métal précieux)

TY1 (ou TYA): 10 Years T-Note

WTI: West Texas Intermediate (note CLA)

Table des figures

| | |
|---|----|
| Figure 3. 1 - Evolution du prix de clôture de l'or entre le 02/01/2008 et le 22/01/2015 | 25 |
| Figure 3. 2 - Evolution des rendements quotidiens du prix de l'or entre le 02/01/2008 et le 22/01/2015 | 25 |
| Figure 3. 4 - Evolution des rendements de l'EURO/USD du 02/01/2008 au 22/04/2015..... | 25 |
| Figure 3. 3 - Evolution du taux de change EURO/USD du 02/01/2008 au 22/04/2015..... | 25 |
| Figure 3. 5 – Histogramme des rendements du taux de change EURO/USD entre le 02/01/2008 et le 22/04/2015..... | 27 |
| Figure 3. 6 - Histogramme des rendements des prix de l'or entre le 02/01/2008 et le 22/04/2015 | 27 |
| Figure 3. 7 - QQ plot des rendements journaliers de l'EURO/USD entre le 02/01/2008 et le 22/04/2015 | 28 |
| Figure 3. 8 - QQ plot des rendements journaliers du prix de l'or entre le 02/01/2008 et le 22/04/2015 | 28 |
| Figure 3. 10 - Autocorrélogramme des rendements du taux de change EURO/USD | 29 |
| Figure 3. 9 - Autocorrélogramme des rendements des prix de clôture de l'or..... | 29 |
| Figure 3. 11 - Evolution du prix de l'or depuis 2008..... | 30 |
| Figure 3. 12 - Evolution de l'EURO/USD depuis 2008..... | 30 |
| Figure 3. 13 - Illustration du phénomène "Clusters de volatilité" sur le marché de change | 34 |
| Figure 3. 14 - Illustration du phénomène "Clusters de volatilité" sur le marché du pétrole..... | 34 |
| Figure 3. 15 - Illustration de "l'effet levier" pour le taux de change EURO/USD | 35 |
| | |
| Figure 4. 2 - Variance conditionnelle des rendements de l'EURO/USD estimée par GARCH(1,1) | 49 |
| Figure 4. 1 – Evolution de la variance conditionnelle des rendements de l'or estimée par GARCH(1,1) | 49 |
| Figure 4. 3 - Interface VBA-Excel pour l'estimation des modèles GARCH(1,1) [Première partie] | 50 |
| Figure 4. 4 - Interface VBA-Excel pour l'estimation des modèles GARCH(1,1) [Deuxième partie] ... | 51 |
| Figure 4. 5 - Evolution de la corrélation conditionnelle dynamique entre le Brent Crude Oil et l'EURO/USD..... | 57 |
| Figure 4. 6 - Prévision de la corrélation entre le Brent Crude Oil et les autres actifs | 63 |
| | |
| Figure 5. 1 Evolution de la statistique récursive du test de cointégration de Johansen pour la période 6/1/2008 au 22/4/2015..... | 71 |
| Figure 5. 2 - Evolution de la statistique récursive du test de cointégration de Johansen pour la période 5/1/2010 au 22/4/2015..... | 73 |
| Figure 5. 3 - Evolution de la statistique récursive du test de cointégration de Johansen pour la période 5/1/2013 au 22/4/2015..... | 74 |
| Figure 5. 5 - Evolution de la statistique récursive du test de cointégration de Johansen entre le JPY/USD et l'or entre 2010 et 2015 | 76 |
| Figure 5. 4 - Evolution de la statistique récursive du test de cointégration de Johansen entre le JPY/USD et les futurs sur Euro Bund entre 2010 et 2015..... | 76 |

| | |
|---|----|
| Figure 6. 1 - Classification des stratégies de Trading..... | 79 |
| Figure 6. 2 - Entête de la plateforme de Trading réalisée sous VBA-Excel..... | 86 |
| Figure 6. 3 - Evolution du spread entre l'actif Brent Oil et l'actif JPY/USD entre le 01/01/2014 et le 31/12/2014 (Jours ouvrables) | 87 |
| Figure 6. 4 - Section de la plateforme de Trading réalisée sous VBA-Excel(en liaison avec R) | 89 |
| Figure 6. 5 – Premier cas d'évolution du Spread entre le Brent Oil et le JPY/USD | 92 |
| Figure 6. 6 - Deuxième cas d'évolution du Spread entre le Brent Oil et le JPY/USD | 92 |
| Figure 6. 7 - Evolution du spread entre l'actif Brent Oil et l'actif JPY/USD entre le 01/01/2014 et le 31/12/2014 (Jours ouvrables) | 94 |

Liste des tableaux

| | |
|---|----|
| Tableau 3. 1 – Statistiques descriptives des rendements quotidiens des prix des actifs..... | 26 |
| Tableau 3. 2 - P-value des tests de normalité des rendements au seuil critique de 5% | 29 |
| Tableau 3. 3 - P-value des tests de stationnarité des cours de clôture des actifs au seuil critique de 5% | 31 |
| Tableau 3. 4 - P-value des tests de stationnarité des rendements des actifs au seuil critique de 5%..... | 32 |
| Tableau 3. 5 - P-value du test de Ljung Box des autocorrélations des rendements au seuil critique de 5%..... | 33 |
| | |
| Tableau 4. 1 - Matrice AIC (p, q) de l'actif GOLD..... | 47 |
| Tableau 4. 2 - Matrice AIC (p, q) de l'actif EURO/USD..... | 47 |
| Tableau 4. 3 - Estimations des paramètres GARCH (1,1)..... | 49 |
| Tableau 4. 4 - Moyenne des carrés des erreurs MSE entre la variance conditionnelle estimée à travers R et celle obtenue à travers VBA | 51 |
| Tableau 4. 5 - Estimations des paramètres EGARCH (1,1) | 54 |
| Tableau 4. 6 - Estimations des coefficients de sensibilité à la volatilité aux chocs positifs ($\gamma+\alpha$) et négatifs ($\gamma-\alpha$) | 54 |
| Tableau 4. 7 - Statistiques descriptives des rendements standardisés des actifs | 56 |
| Tableau 4. 8 - Test d'adéquation à la loi normale pour les rendements standardisés des actifs..... | 56 |
| Tableau 4. 9 - Estimations des paramètres GARCH (1,1)-DCC pour chaque actif | 57 |
| Tableau 4. 10 - Test de Klomogorov-Smirnov pour l'ajustement des rendements des neuf actifs à la loi de Student..... | 58 |
| Tableau 4. 11 - Estimations des paramètres GARCH (1,1)-DCC (Student) pour chaque actif..... | 59 |
| Tableau 4. 12 - Estimation des paramètres du modèle EGARCH-DCC(Normale) | 59 |
| Tableau 4. 13 - Estimation des paramètres du modèle EGARCH-DCC(Student) | 60 |
| Tableau 4. 14 - Matrice des corrélations moyennes entre les actifs sur la période allant du 03/01/2008 au 22/04/2015..... | 61 |
| Tableau 4. 15 - Liste des paires d'actifs les mieux corrélés entre 03/01/2008 et 22/04/2015 | 61 |
| Tableau 4. 16 - Liste des paires d'actifs les mieux corrélés sur les 100 jours suivant la date du 22/04/2015 d'après les prévisions estimées | 63 |
| | |
| Tableau 5. 1 - Test de l'ADF des séries temporelles des prix des actifs | 68 |
| Tableau 5. 2 - Test de l'ADF des séries temporelles de la première différence des prix des actifs | 69 |
| Tableau 5. 3 - Sortie Stata pour le choix du retard optimal au test de Johansen pour la période allant 6/1/2008 au 22/4/2015..... | 70 |
| Tableau 5. 4 - Sortie Stata du test de Johansen pour la période allant du 6/1/2008 au 22/4/2015 | 70 |
| Tableau 5. 5 – Sortie Stata pour le choix du retard optimal au test de Johansen pour la période allant du 5/1/2010 au 22/4/2015..... | 72 |
| Tableau 5. 6 - Sortie Stata pour le test de Johansen pour la période allant du 3/1/2010 au 22/4/2015 . | 72 |

| | |
|---|----|
| Tableau 5. 7 - Sortie Stata pour le choix du retard optimal au test de Johansen pour la période allant 5/1/2013 au 22/4/2015..... | 73 |
| Tableau 5. 8 - Sortie Stata pour le test de Johansen pour la période allant du 3/1/2010 au 22/4/2015 . | 74 |
| Tableau 5. 9 - Tableau résumant les retards optimaux pour le test de Johansen..... | 75 |
| | |
| Tableau 6. 1 - P-value du test ADF pour chaque paire, testé suivant les trois modèles définis par le test ADF..... | 88 |
| Tableau 6. 2 - Signaux de Trading pour le Backtesting | 93 |
| Tableau 6. 3 - Indicateurs de performance de la stratégie de Trading pour chaque paire entre le 01/01/2014 et le 31/12/2014 (Jours ouvrables) en utilisant le 1er signal | 95 |
| Tableau 6. 4 - Indicateurs de performance de la stratégie de Trading pour chaque paire entre le 01/01/2014 et le 31/12/2014 (Jours ouvrables) en utilisant le 2ème signal..... | 95 |
| Tableau 6. 5 - Indicateurs de performance de la stratégie de Trading pour chaque paire entre le 01/01/2014 et le 31/12/2014 (Jours ouvrables) en utilisant le 3ème signal..... | 96 |
| Tableau 6. 6 - Indicateurs de performance de la stratégie de Trading pour les trois signaux | 96 |

Introduction générale

Dans des temps plus reculés, détenir une information était un atout indéniable pour investir dans les marchés financiers. Tout investisseur possédant les moyens lui permettant d'accéder en exclusivité aux informations jouissait d'un avantage considérable. Or aujourd'hui, l'activité des marchés financiers est rythmée par la publication quotidienne d'indicateurs économiques, de statistiques comptables relatives aux entreprises, de décisions ou encore de déclarations politiques impactant les cours des prix des actifs financiers.

Par conséquent, tous les intervenants sur les marchés financiers ont accès aux différentes informations à l'instant même de leurs publications. Ainsi, le défi que doivent relever les traders et les investisseurs quotidiennement n'est plus la détention de l'information, mais le bon usage de cette dernière afin de pouvoir en tirer une anticipation rigoureuse des tendances des cours.

Ce projet de fin d'études s'inscrit parfaitement dans ce cadre, dans la mesure où il propose une modélisation pertinente du degré d'interdépendance entre un ensemble d'actifs composant le portefeuille de Trading du Desk Cross-Asset de la Salle des Marchés d'Aattijatiwafa Bank. L'objectif ultime est de pourvoir proposer au Trader des outils statistiques puissants lui permettant de cerner avec précision les mouvements communs qui régissent les actifs composant son portefeuille sur des horizons différents, en vue de le guider pour prendre les meilleures décisions aux meilleurs moments.

La démarche retenue pour cette étude consiste à dresser un éventail des caractéristiques des marchés des matières premières et des taux de change tout en mettant l'accent sur un panier d'actifs qui composera notre portefeuille d'étude. Le troisième chapitre est consacré à l'étude des propriétés statistiques des différents actifs tout en abordant des phénomènes propres aux marchés des matières premières et des taux de change.

Le quatrième chapitre propose un modèle adéquat de la matrice de corrélations des actifs en vue de fournir des prévisions des coefficients de corrélations entre chaque paire d'actif. Pour ce faire, nous implémentons un modèle multivarié récemment mis en place par R. Engel qui décrit l'évolution des interdépendances, sur le court terme, entre un ensemble d'actifs en prenant en compte l'ensemble des informations disponibles à un moment donné. Tout au long de notre étude, quatre modèles de corrélation dynamique sont estimés. Chaque modèle est basé sur des hypothèses, concernant les rendements et leurs volatilités, que nous tentons de confirmer ou d'infirmer au fur et à mesure. Enfin, nous retenons un modèle précis

suivant un ensemble de critères et nous présentons des prévisions du degré de corrélation entre les différents actifs étudiés.

Une analyse des interdépendances entre les actifs sur le court terme peut induire le Trader en erreur si sa stratégie couvre un horizon plus large. Afin de pallier à cette faiblesse, nous analysons dans le cinquième chapitre, la dynamique des co-mouvements en utilisant la cointégration récursive de Johansen. L'objectif étant d'explorer la persistance et la robustesse des relations établies dans le quatrième chapitre. Les résultats obtenus permettent de dresser la liste des paires d'actifs caractérisés par une interdépendance sur le court terme et qui persiste aussi sur le long terme.

Enfin, dans le dernier chapitre, nous implémentons une stratégie de Trading nommé le « Pairs Trading » dans le but de tester la pertinence de notre analyse des interdépendances. Pour ce fait, nous analysons la performance de notre stratégie sur deux portefeuilles distincts. Le premier portefeuille est composé des paires obtenues suite à l'analyse par la corrélation conditionnelle dynamique et la cointégration de Johansen. Le second portefeuille est déterminé seulement par la stratégie du Pairs Trading.

Chapitre 1

Présentation de l'organisme d'accueil

1.1. Présentation de l'organisme

1.1.1. Aperçu sur le Groupe Attijariwafa Bank

Le Groupe Attijariwafa Bank, premier groupe bancaire et financier du Maghreb, avec 6,2 millions de clients et 15 289 collaborateurs, est une multinationale panafricaine. Présent dans 22 pays, le Groupe se donne pour priorité la proximité avec ses clients et les met au cœur de sa stratégie via son ambitieux programme de bancarisation et ses efforts d'innovation continus. En plus de l'activité bancaire, le Groupe opère, à travers des filiales spécialisées, dans tous les métiers financiers : assurance, crédit immobilier, crédit à la consommation, leasing, gestion d'actifs, intermédiation boursière, conseil, location longue durée, factoring... Doté d'une assise financière solide, d'un capital de savoir-faire diversifié et d'outils d'expertise modernes, le Groupe a réussi à se hisser en leader national incontesté des crédits à l'économie et des crédits à la consommation, des activités de corporate banking et de banque d'investissement, de la gestion d'actifs et des métiers de la bourse, du leasing et de la bancassurance. Attijariwafa Bank est basé au Maroc et opère dans 21 pays : en Afrique (Tunisie, Sénégal, Burkina-Faso, Guinée Bissau, Mali, Mauritanie, Côte-d'Ivoire, Congo, Gabon et Cameroun) et en Europe (Belgique, France, Allemagne, Pays-Bas, Italie et Espagne) à travers des filiales bancaires contrôlées majoritairement par la banque. À Dubaï, Riyadh, Londres, Shanghai et Tripoli à travers des bureaux de représentation.

1.1.2. Présentation de la salle des marchés

La salle des marchés d'Attijariwafa Bank, inaugurée officiellement au début de l'année 2007, est un lieu qui regroupe différents services spécialisés afin d'offrir une palette élargie et novatrice en termes de produits de couverture de change, de taux, de matières premières ainsi que des produits d'investissements. La Salle des Marchés est également active sur ces sous-jacents pour le compte propre de la banque. Son objectif est de trouver des ressources à coût réduit et des emplois rémunérateurs tout en minimisant les risques de marché.

La Salle des Marchés est composée de trois pôles distincts à savoir le front office chargé de la négociation avec les clients, le middle office chargé de contrôler les risques et d'analyser les résultats et le back office, chargé des saisies, des contrôles comptables et du contrôle interne.

1.1.2.1. Le Front Office

Le front office constitue l'interface de la banque avec le marché. Il centralise et traite tous les besoins de la salle des marchés et de ses clients en termes de couverture, financement, investissement, gestion de position, trading et arbitrage.

Le front office d'Attijariwafa Bank est organisé en centres opératoires appelés « Desks ». Chaque Desk résulte du croisement d'une stratégie donnée et d'une famille d'instruments. Ils sont au nombre de quatre :

- Desk Trading Compte propre Fx & Commodities : Ce desk a pour mission de veiller à la bonne gestion des prises de positions en matière de Change et de Commodities (soft, métaux précieux, métaux de base, énergies) et d'intervenir sur ces différents sous jacents financiers afin de profiter des opportunités d'arbitrage qu'offrent les marchés essentiellement anglo-saxon, londonien et américain.

-Desk Taux & Intermédiation : Chargé des activités de Trading et d'arbitrage sur les produits de taux, ce desk assure la gestion du portefeuille de négociation, de placement et d'investissement. Il s'occupe également des opérations de placement de titres sur le marché.

-Desk Trésorerie MAD : Ce desk opère sur les marchés monétaire et interbancaire nationaux pour la gestion et l'optimisation de la trésorerie dirham de la Banque. Il fixe également les cotations internes de taux pour les autres desks de la Salle des Marchés.

-Desk Actions : Il assure les activités de Trading et d'arbitrage pour compte propre sur les actions et dérivés actions aussi bien sur le marché national que sur les marchés étrangers.

Les opérations conclues en front office engagent la banque de manière irrévocable vis-à-vis de ses contreparties.

1.1.2.2. Middle Office

Le middle office est le service chargé de nommer les opérations initiées par les Traders dans la salle des marchés, plus exactement dans le Front Office, après avoir vérifié qu'elles sont conformes à la réglementation. Il est chargé de faire la jonction entre le front et le back office. Il saisit sur une base de données toutes les transactions effectuées par les Traders et les sales¹. Et enfin, il met en place avec le front et le back office des méthodes d'analyse des risques et définit les procédures homogènes par lignes de produits.

¹ Vendeurs

1.1.2.3. Back Office

Le Back Office est chargé d'assurer le suivi administratif et comptable des opérations conclues au Front Office. Il enregistre les transactions, informe les clients (entreprises ou institutions), effectue le règlement et la livraison des titres, gère le versement des dividendes des actions et des intérêts des obligations. Il participe aussi à la mise en place et à l'évaluation des procédures et des systèmes informatiques.

Le Back Office est équipé de systèmes de traitement transactionnel permettant de sécuriser la comptabilisation des opérations et l'initiation des moyens de paiement. Certains systèmes permettent de générer la comptabilisation à partir de la saisie en Front Office, le rôle du back office est alors limité à la validation des opérations et à la saisie des instructions de paiement (numéro de compte, correspondant bancaire)

Chapitre 2

Marché de change et marché des matières premières

2.1. Marché de change

2.1.1. Caractéristiques du marché de change

Le marché de change est le marché où sont échangées les paires de devises. Il est appelé communément « FOREX² » une contraction du terme anglais « FOREIGN EXCHANGE ». C'est le marché le plus liquide dans le monde (un volume quotidien de 590 milliards de dollars américains en 1989, de 3210 milliards de dollars en 2007, et de 5300 milliards de dollars en 2013)³. Il est le seul qui est ouvert 24 heures sur 24 et 5 jours par semaine⁴.

La devise la plus échangée est le dollar américain (84,90 % du total des transactions en 2010, et 85% en 2013). La plupart des investisseurs, entreprises, banques, et même les banques centrales détiennent du dollar, expliquant ainsi l'intérêt porté à ses fluctuations.

La prédominance du dollar américain dans le marché de change est due à plusieurs raisons:

- La force et le poids de l'économie américaine dans le monde.
- Les Etats-Unis disposent des marchés financiers les plus grands et les plus liquides du monde.
- Le dollar est utilisé comme une monnaie de réserve de la banque centrale dans plusieurs pays.

² Marché des taux de change

³ Source : <http://bourse.lesechos.fr/>

⁴ Du lundi au vendredi

2.1.2. Présentation des données utilisées

Pour éviter le risque de liquidité⁵, le desk Cross-Asset⁶ d'ATTIJARIWafa BANK traite les paires de devises qui intègrent la cotation du dollar américain face aux autres principales devises. Ces paires sont appelées les paires « majeures » (Major Pairs).

Les paires qui composent notre portefeuille sont :

| Devise | Notation | Pays |
|--------------------------|----------|---------------------------|
| Euro / Dollars | EURO/USD | Zone Euro / Etats Unis |
| Livre Sterling / Dollars | GBP/USD | Royaume Unis / Etats Unis |
| Yen Japonais / Dollars | JPY/USD | Japon / Etats Unis |

2.1.2.1. Euro/ Dollars

A partir de l'année 1999, l'euro est devenu sous l'impulsion des responsables européens la monnaie unique de plusieurs membres de l'Union Européenne. Adoptée par 19 des 28 pays de l'Union européenne (UE)⁷, la monnaie unique est utilisée chaque jour par 338,6 millions de personnes. Mis en circulation sur le marché en 2002, l'euro est rapidement devenu la deuxième devise mondiale en volume de transactions derrière le dollar américain.

La paire EUR/USD (euro/dollar américain) s'est ainsi imposée sur le marché des changes comme la paire de devise principale. Cette paire est la plus échangée au monde. Elle évolue dans un système de changes flottants, ce qui signifie concrètement que son cours suit l'évolution de l'offre et de la demande sur le marché FOREX.

2.1.2.2. Livre Sterling / Dollars

La paire GBP/USD, représentant le taux de change de la livre sterling en dollar américain, est une paire très importante sur le marché du FOREX. Il s'agit de la paire la plus échangée et la plus importante avant l'apparition de l'Euro.

De nos jours, la livre sterling est la quatrième devise la plus échangée sur le FOREX. La paire GBP/USD représente environ 14 % du volume total des transactions réalisées en continu 24 heures sur 24. C'est l'une des plus liquides du FOREX, plus de 400 milliards de dollars sont échangés chaque année. Elle est aussi très volatile, notamment durant les heures d'ouverture du marché anglais.

2.1.2.3. Yen Japonais / Dollars

Paire majeure du marché des changes, l'USD/JPY (dollar américain/yen japonais) est très échangée par les traders, ce qui implique qu'elle est très liquide.

⁵ Le risque de liquidité concerne le risque d'être incapable de négocier un actif sans affecter son prix.

⁶ Ce terme signifie : inter-marché

⁷ Source : « Europa.eu », site web officiel de l'Union européenne.

2.2. Marchés des matières premières

2.2.1. Caractéristiques du marché des matières premières

Le marché des matières premières est un marché de gré à gré, c'est-à-dire que les contrats se négocient entre vendeurs et investisseurs. On trouve deux grandes catégories d'intervenants sur ce marché : les professionnels et les spéculateurs.

Les professionnels sont les producteurs, les transformateurs, les négociants : ils cherchent à se protéger contre les variations défavorables des cours. Leurs interventions sur les marchés à terme leur permettent de sécuriser les approvisionnements contre les risques de décalage des prix.

Les spéculateurs prennent des positions sur les marchés à terme des matières premières sans répondre à une logique commerciale ou industrielle. Comme sur tout marché à terme, leur présence est indispensable et contribue à l'amélioration de l'efficacité et de la liquidité du marché.

Nous distinguons quatre grandes familles de produits dans le marché des matières premières :

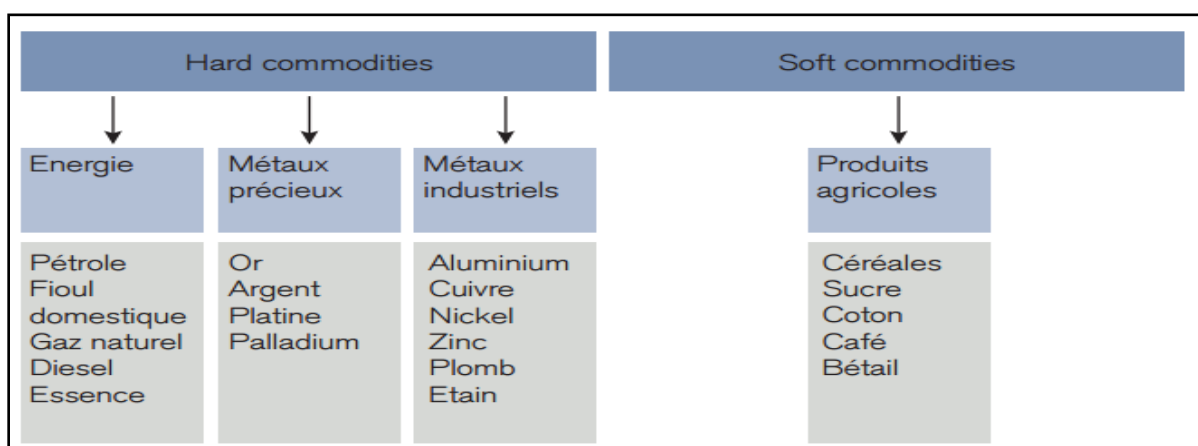


Figure 2. 1 - Classification des matières premières

2.2.2. Présentation des données utilisées

Le desk Cross-Asset d'ATTIJARIWAFI BANK traite principalement les matières premières suivantes :

| Matière première | Notation | Catégorie |
|-------------------------------|----------|-----------------|
| Brent Crude Oil | COA | Energie |
| West Texas Intermediate (WTI) | CLA | Energie |
| Or | GOLDS | Métaux précieux |
| Argent | SILV | Métaux précieux |

Le pétrole est négocié dans les bourses à terme par des acteurs du marché professionnel. Les investisseurs privés utilisent des certificats ou des CFDs⁸ pour le commerce du pétrole. Il existe une palette bien garnie de certificats pour les types de brut appelés Brent et WTI (West Texas Intermediate).

2.2.2.1. Brent Crude Oil

Le type de pétrole brut appelé Brent provient des champs pétrolifères Brent en mer du nord. Le Brent est la principale sorte de pétrole brut pour l'Europe et la qualité de référence pour le commerce du pétrole. Le pétrole de la mer du nord est négocié dans les bourses suivantes : Intercontinental Exchange (ICE, anciennement IPE), New York Mercantile Exchange (NYMEX) et sur les marchés au comptant⁹ comme New York et Rotterdam.

2.2.2.2. West Texas Intermediate (WTI)

Le type de pétrole brut appelé WTI (West Texas Intermediate) est aussi connu sous le nom de Texas Sweet Light. Il provient du Midwest des USA et de la région du Golfe. WTI est la qualité de référence aux USA. De plus, elle sert de base pour les contrats de pétrole à la New York Mercantile Exchange. La qualité du pétrole WTI est décrite comme une qualité plus "douce" que le Brent.

2.2.2.3. Or (GOLD)

Depuis la suppression de la parité fixe or/dollar en 1971, les cours de l'or ont connu de fortes appréciations qui ont alterné avec des périodes de stagnation. Valeur « refuge », l'or est utilisé dans l'orfèvrerie, l'industrie etc.

L'une des particularités majeures du marché de l'or est que les stocks de cette matière inaltérable sont 50 fois supérieurs à la production annuelle mondiale.

L'or s'échange de gré à gré dans le cadre de transactions donnant lieu à règlement et livraison physique sur les marchés de Londres, New-York, Zurich, Tokyo, etc., le London Bullion Market (LBM) étant de très loin le plus important de ces marchés de gré à gré

2.2.2.4. Argent (SILVER)

Métal précieux coté comme l'or sur le marché au comptant et de gré à gré du London Bullion Market. L'argent s'échange aussi au plan mondial dans le cadre de contrats à terme (futures) et d'options, principalement sur le marché américain du NYMEX (New York

⁸ CFD signifie « contrats financiers pour différences ». Les CFD appartiennent à la famille des produits dérivés. Ce sont des instruments financiers modernes qui permettent de trader les actions, les indices et les matières premières (comme l'or ou le pétrole) de manières simple et peu onéreuse.

⁹ Le marché au comptant désigne un marché financier sur lequel l'achat ou la vente de titres fait l'objet d'un règlement immédiat. Ce marché s'oppose au marché à terme qui se caractérise par une dissociation entre la date de la transaction et celle de son règlement.

Mercantile Exchange, et plus précisément sur le marché COMEX qui en fait partie) ainsi que sur le marché japonais du TCE (Tokyo Commodity Exchange).

2.3. Autres actifs

Outre les matières premières et les taux de changes, des futures sur des obligations émises par le Trésor allemand ainsi que des futures sur des obligations américaines sont traités quotidiennement. Afin de répondre aux besoins de l'entreprise, nous les incluons aussi dans la liste des actifs que nous allons étudier.

| Sous jacent | Notation | Catégorie |
|--|--------------|-----------|
| Note du Trésor US avec une maturité entre 6.5 ans et 10 ans | 10 YR T-Note | Futurs |
| Note du Trésor allemand d'une durée de vie de 8.5 à 10.5 ans | Euro Bund | Futurs |

2.3.1. Futurs sur Euro-Bund

Les futurs sur Euro Bund sont des dérivés dont le sous-jacent est une obligation émise par le Trésor allemand d'une durée de vie de 8.5 à 10.5 ans.

2.3.2. Futurs sur 10 Years T-Note

Les futurs sur 10 Years T-Note sont des dérivés dont le sous-jacent est un titre de créance émis par le gouvernement des États-Unis qui vient à échéance dans 10 ans.

Source des données : Les données sont toutes extraites de Bloomberg.

Traitements des données manquantes : L'année est constituée de 225 jours ouvrables¹⁰. Pour satisfaire les hypothèses de quelques manipulations statistiques auxquelles nous ferons appel tout au long de ce travail, nous supposons que les cotations du samedi et du dimanche sont celles du vendredi. Pour les jours fériés, nous supposons que leur cotation est celle du jour d'avant.

¹⁰ Jours ouvrables : Jours de la semaine excepté le Week-end et les jours fériés

Chapitre 3

Analyse statistique des données temporelles

Introduction

L'objectif de ce chapitre est de mettre en exergue les propriétés principales des actifs financiers étudiés appartenant à la classe des matières premières (*Commodities*) notamment l'or (*GOLD*), l'argent (*SILVER*), le Brent Crude Oil (*COA*) et le WTI (*CLA*) et à la classe des taux de change (*FOREX*) tels que la Livre sterling / Dollar américain (*GBP/USD*), le Yen japonais / Dollar américain (*JPY/USD*) et l'Euro / Dollar américain (*EURO/USD*).

L'identification des spécificités de chaque actif est une étape fondamentale dans le choix du modèle le plus adéquat. Nous commençons par une analyse de la distribution des rendements des actifs, suivie d'une analyse de la saisonnalité des cours, de la stationnarité et de l'autocorrélation des rendements. Pour finir, nous abordons à travers ces analyses quelques phénomènes propres aux marchés financiers.

3.1. Notations

Soit p_t le prix journalier d'un actif à la date t et r_t le rendement logarithmique du cours correspondant :

$$r_t = \ln(P_t) - \ln(P_{t-1}) = \ln\left(\frac{P_t}{P_{t-1}}\right) = \ln(1 + R_t)$$

où $R_t = \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}}$ désigne la variation relative des prix, tel que l'échelle de temps est égale à 1 ($\Delta t = 1$).

Pour le marché des matières premières, nous avons choisi l'or (GOLD) comme actif représentatif du marché des matières premières et le taux de change EURO/USD pour le marché des taux de change (FOREX).

Les graphes ci-dessous représentent l'évolution du prix du GOLD observé en clôture durant la période allant du 03/01/2008 au 22/04/2015, ainsi que les rendements journaliers associés à la même période.



Figure 3. 1 - Evolution du prix de clôture de l'or entre le 02/01/2008 et le 22/01/2015

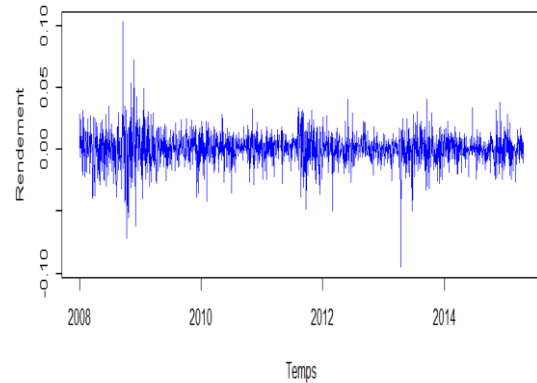


Figure 3. 2 - Evolution des rendements quotidiens du prix de l'or entre le 02/01/2008 et le 22/01/2015

Les cours de clôture des taux de change EURO/USD durant la même période ainsi que les rendements journaliers associés sont aussi représentés dans les deux graphes ci-dessous.

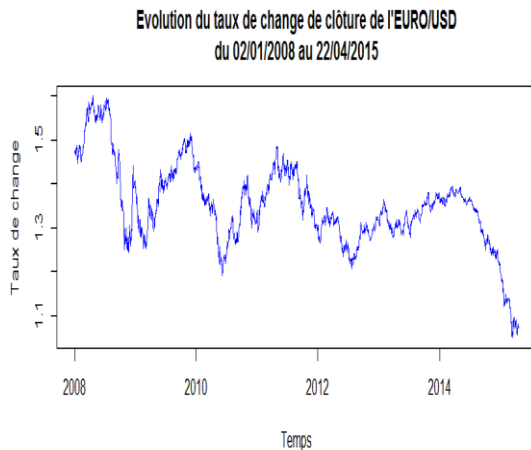


Figure 3. 4 - Evolution du taux de change EURO/USD du 02/01/2008 au 22/04/2015

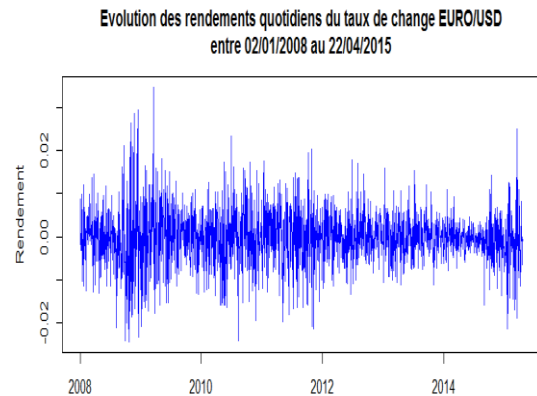


Figure 3. 3 - Evolution des rendements de l'EURO/USD du 02/01/2008 au 22/04/2015

3.2. Indicateurs statistiques de bases

Sur une période de 87 mois s'étalant du 02/01/2008 au 22/04/2015, nous calculons pour les rendements de chaque actif, les indicateurs statistiques de base afin de dégager les propriétés principales en termes de distribution (asymétrie, kurtosis) et de volatilité.

| | Min | Max | Moyenne | Médiane | Variance | Ecart-type | Skewness | Kurtosis |
|----------------------------------|----------|---------|----------|----------|----------|------------|----------|----------|
| Matières premières | | | | | | | | |
| COA | -0.10950 | 0.12710 | -0.00021 | -0.00010 | 0.00047 | 0.02171 | -0.08090 | 7.13905 |
| CLA | -0.13070 | 0.16410 | -0.00028 | 0.00000 | 0.00060 | 0.02452 | 0.09967 | 8.80576 |
| GOLDS | -0.09548 | 0.10240 | 0.00019 | 0.00045 | 0.00016 | 0.01274 | -0.26988 | 9.20335 |
| SILV | -0.18410 | 0.13160 | 0.00004 | 0.00097 | 0.00051 | 0.02253 | -1.01252 | 9.95752 |
| Taux de change | | | | | | | | |
| EURO/USD | -0.02434 | 0.03465 | -0.00016 | -0.00007 | 0.00004 | 0.00670 | 0.09521 | 4.69046 |
| GBP/USD | -0.03471 | 0.02925 | -0.00015 | -0.00006 | 0.00004 | 0.00616 | -0.38844 | 5.95933 |
| JPY/USD | -0.05474 | 0.03548 | -0.00004 | 0.00008 | 0.00005 | 0.00697 | -0.20107 | 7.65783 |
| Futurs sur Bons du Trésor | | | | | | | | |
| 10 YR T-Note | -0.02627 | 0.03537 | 0.00007 | 0.00012 | 0.00002 | 0.00430 | -0.13634 | 7.99872 |
| Euro Bund | -0.03261 | 0.04362 | 0.00002 | 0.00000 | 0.00005 | 0.00695 | 0.05397 | 5.69284 |

Tableau 3. 1 – Statistiques descriptives des rendements quotidiens des prix des actifs

3.2.1. Analyse du marché des taux de change

Nous constatons que les taux de change ne sont pas très volatiles vu que leur variance est de l'ordre de 10^{-5} . Leur moyenne quant à elle est négative et oscille autour de 0. Il est important de noter qu'une moyenne négative n'induit pas nécessairement une perte cumulative d'un actif sur la période échantillonnée, le signe négatif peut être dû à l'asymétrie des rendements.

Le troisième moment de la distribution des rendements (le coefficient d'asymétrie) est négatif pour le taux de change de la livre britannique par rapport au dollar et pour le yen par rapport au dollar mais positif pour le taux de change de l'euro par rapport au dollar.

Le quatrième moment de la distribution des rendements (la kurtosis) est relativement élevé surtout pour le taux de change du yen japonais par rapport au dollar américain. Une distribution normale centrée réduite a une kurtosis de 3 et nous observons des valeurs entre 4.6 et 7.6 dans le cas présent. Il n'est pas surprenant d'obtenir des résultats de la sorte, car cela démontre l'existence de valeurs extrêmes dans notre échantillon. Les queues de distribution des rendements sont alors plus épaisses que celle d'une loi normale.

3.2.2. Analyse du marché des matières premières

Les rendements des matières premières sont plus volatiles que les taux de change vu que leur écart-type est de l'ordre de 10^{-2} . Le quatrième moment de la distribution des rendements (la kurtosis) est plus élevé que celui des taux de change. En effet, ce dernier se situe entre 7.1 et 9.9. L'argent et l'or présentent un très fort excès de kurtosis. Le marché des matières premières est par conséquent plus volatile et présente plus de valeurs extrêmes négatives vu que le coefficient d'asymétrie est négatif (hormis le cas du Brent Oil- noté COA- qui présente un coefficient d'asymétrie positif).

Afin d'illustrer ces résultats sur les deux marchés, nous analysons l'histogramme de la distribution des rendements quotidiens du prix de clôture du GOLD ainsi que des rendements quotidiens du taux de change EURO/USD à la clôture des marchés.

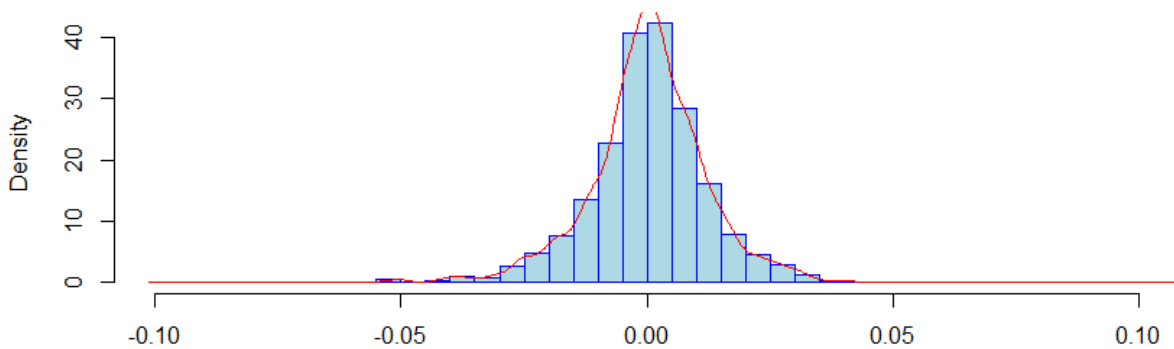


Figure 3. 5 – Histogramme des rendements du taux de change EURO/USD entre le 02/01/2008 et le 22/04/2015

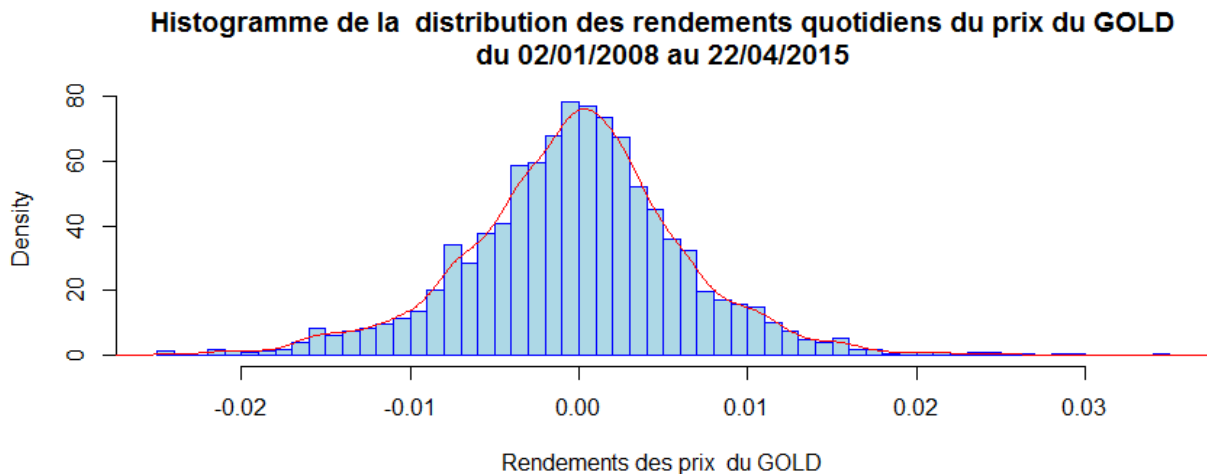


Figure 3. 6 - Histogramme des rendements des prix de l'or entre le 02/01/2008 et le 22/04/2015

La distribution des rendements des actifs étudiés ci-dessus est leptokurtique. Les queues de distributions sont plus épaisses que les queues de distribution de la loi gaussienne.

Aussi les variations extrêmes (fortes hausses et fortes baisses) sont-elles plus fréquentes par rapport à une distribution normale et sont d'ampleur plus importante.

La distribution des rendements du marché des matières premières et du marché de change est asymétrique avec, en général, un coefficient d'asymétrie négatif traduisant une queue plus longue sur la gauche. Economiquement, cette asymétrie traduit le fait qu'il existe plus de mouvements forts à la baisse qu'à la hausse. La probabilité d'avoir des rendements plus bas que la moyenne est plus élevée que la probabilité d'avoir des rendements plus élevés que la moyenne. On retrouve alors la **propriété d'asymétrie aux pertes et gains**.

3.3. Faits stylisés des rendements d'actifs

3.3.1. Distribution des rendements

Les résultats obtenus ci-dessus quantifient plus précisément les déviations par rapport à la loi normale. En effet, le coefficient d'aplatissement est supérieur à 3 et le coefficient d'asymétrie est différent de zéro. En plus, la moyenne des rendements est différente de la médiane. Ces résultats laissent supposer que les rendements des différents actifs étudiés ne suivent pas une loi normale.

Afin de tester visuellement l'adéquation des rendements avec une distribution normale, il serait pertinent d'effectuer une analyse des quantiles, en traçant les quantiles empiriques contre les quantiles théoriques de la loi normale.

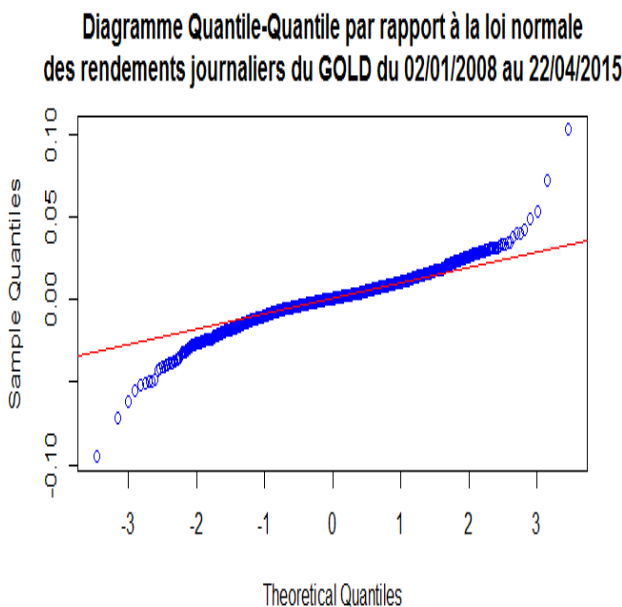


Figure 3. 8 - QQ plot des rendements journaliers du prix de l'or entre le 02/01/2008 et le 22/04/2015

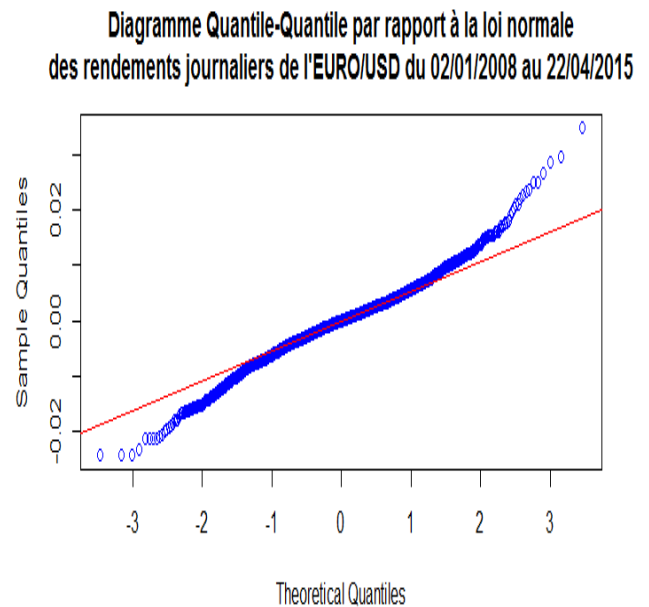


Figure 3. 7 - QQ plot des rendements journaliers de l'EURO/USD entre le 02/01/2008 et le 22/04/2015

Les figures ci-dessus (en bleu) ne se confondent pas avec la droite $y=x$ ce qui confirme la déviation de la normalité et l'existence de valeurs extrêmes.

Afin de tester, de manière précise, l'adéquation à la loi normale des séries temporelles r_t , nous faisons appel au tests de Kolmogorov-Smirnov, Jaques-Berra et Shapiro-Wilk. Les p-value à 5% des tests effectués sont résumés dans le tableau ci-dessous :

| | Kolmogorov-Smirnov | Shapiro-Wilk | Jarque-Berra |
|----------------------------------|---------------------------|---------------------|---------------------|
| Matières premières | | | |
| COA | 9.78E-12 | 2.20E-16 | 2.20E-16 |
| CLA | 2.86E-11 | 2.20E-16 | 2.20E-16 |
| GOLDS | 1.00E-10 | 2.20E-16 | 2.20E-16 |
| SILV | 2.00E-11 | 2.20E-16 | 2.20E-16 |
| Devises étrangères | | | |
| EURO/USD | 0.0003321 | 8.10E-15 | 2.20E-16 |
| GBP/USD | 1.35E-05 | 2.20E-16 | 2.20E-16 |
| JPY/USD | 1.57E-06 | 2.20E-16 | 2.20E-16 |
| Futurs sur Bons du Trésor | | | |
| 10 YR T-Note | 6.82E-06 | 2.20E-16 | 2.20E-16 |
| Euro Bund | 1.61E-05 | 2.20E-16 | 2.20E-16 |

Tableau 3. 2 - P-value des tests de normalité des rendements au seuil critique de 5%

Les p-values obtenues sont sans exception inférieures à 5%. Aussi les résultats obtenus rejettent-ils l'hypothèse de normalité des rendements.

3.3.2. Analyse de la saisonnalité

Les graphes 3.4 et 3.1 laissent entrevoir l'existence potentielle d'une saisonnalité des prix du GOLD et du taux de change EURO/USD. Afin de nous assurer de l'existence d'une saisonnalité dans les prix de clôture du GOLD ainsi que du taux de change de clôture EURO/USD, nous traçons l'autocorrélogramme des rendements :

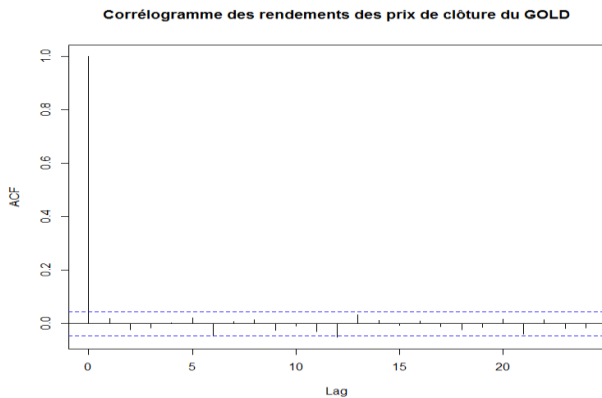


Figure 3. 9 - Autocorrélogramme des rendements des prix de clôture de l'or

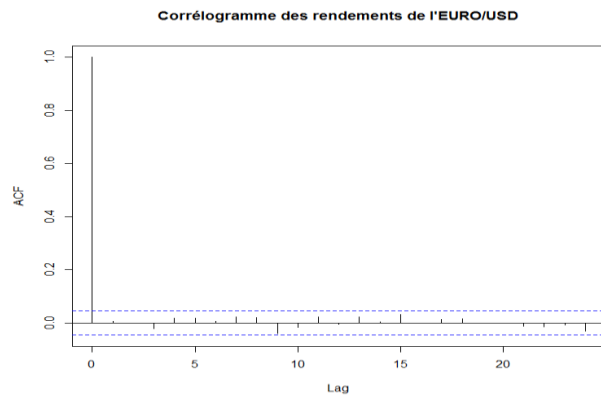


Figure 3. 10 - Autocorrélogramme des rendements du taux de change EURO/USD

D'après les autocorrélogrammes ci-dessus, aucune saisonnalité des rendements n'est apparente.

Pour plus de précision, nous traçons pour chacun des 12 mois l'évolution du prix du GOLD et du taux de change EURO/USD.

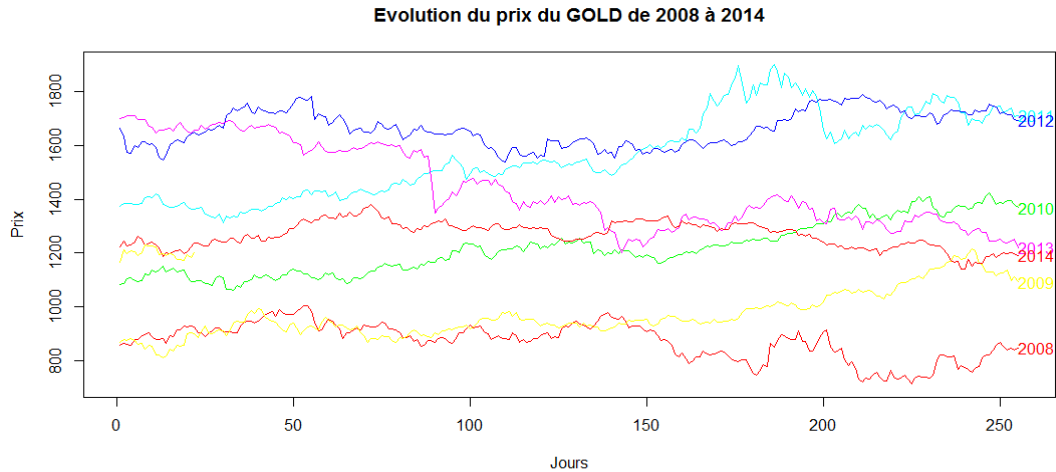


Figure 3.11 - Evolution du prix de l'or depuis 2008

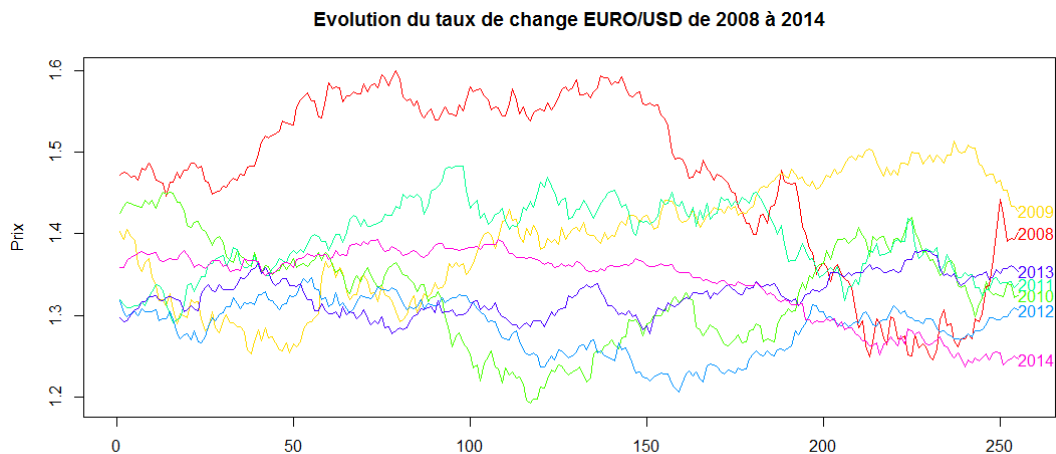


Figure 3.12 - Evolution de l'EURO/USD depuis 2008

Les graphes ci-dessus ne présentent aucune variation saisonnière se produisant à intervalle de temps régulier.

3.3.3. Analyse de la stationnarité

La stabilité temporelle des propriétés stochastiques des séries financières est une condition nécessaire pour assurer la validité des estimations qui en découlent. Par conséquent, l'étude de la stationnarité des séries journalières des prix et des rendements des actifs s'impose.

Les graphes représentant l'évolution des rendements du GOLD et de l'EURO/USD fluctuent autour de zéro et aucune tendance n'apparaît, ce qui laisse supposer, à vu d'œil, que la moyenne ainsi que la variance des rendements sont indépendantes du temps. En outre, les autocorrélogramme des rendements du GOLD et de l'EURO/USD affirment la stationnarité des processus : la fonction d'autocorrélation empirique $\hat{\rho}_k$ décroît rapidement à partir du premier lag puis devient quasi nulle pour tout $k > 1$.

Cependant, les graphes représentant l'évolution du prix du GOLD et du taux de change l'EUROUSD présentent des tendances.

Statistiquement, le test de Dickey-Fuller augmenté, de Phillips-Perron et KPSS permettent d'affirmer ou infirmer l'hypothèse de stationnarité.

Pour le test de Dickey-Fuller augmenté, nous commençons par le modèle général incluant une tendance linéaire sur lequel nous appliquons le test de la racine unitaire. Ensuite, nous allons tester la stationnarité avec une tendance constante puis sans tendance. Il est à noter que l'hypothèse alternative du test de KPSS est la stationnarité du processus contrairement au test de Dickey-Fuller et de Philips-Perron.

3.3.3.1. Analyse des cours de clôture

| | Augmented Dickey-Fuller | | | KPSS | Philips-Perron |
|----------------------------------|-------------------------|------------|-----------|------|----------------|
| | Trend | Drift | None | | |
| Matières premières | | | | | |
| COA | 0.9562893 | 0.6560758 | 0.4207381 | 0.01 | 0.9147722 |
| CLA | 0.8488573 | 0.4877243 | 0.3722301 | 0.01 | 0.7396719 |
| GOLDS | 0.9437198 | 0.4979818 | 0.7226057 | 0.01 | 0.943075 |
| SILV | 0.8919896 | 0.5149672 | 0.5029492 | 0.01 | 0.8720635 |
| Devises étrangères | | | | | |
| EURO/USD | 0.2903778 | 0.238411 | 0.3779545 | 0.01 | 0.2777356 |
| GBP/USD | 0.2850542 | 0.05711017 | 0.22748 | 0.01 | 0.6100483 |
| JPY/USD | 0.9724645 | 0.8335119 | 0.5396211 | 0.01 | 0.9753677 |
| Futurs sur Bons du Trésor | | | | | |
| 10 YR T-Note | 0.3446036 | 0.2326424 | 0.7848487 | 0.01 | 0.4562507 |
| Euro Bund | 0.03661407 | 0.2237911 | 0.7556933 | 0.01 | 0.02303346 |

Tableau 3. 3 - P-value des tests de stationnarité des cours de clôture des actifs au seuil critique de 5%

D'après les résultats résumés dans le tableau ci-dessus, nous constatons que les séries journalières des prix de clôture des matières premières (or, argent, Brent Crude Oil et WTI) ainsi que des taux de change de clôture (EURO/USD, GBP/USD, JPY/USD) sont non stationnaires.

3.3.3.2. Analyse des rendements

| | Augmented Dickey-Fuller | | | KPSS | Philips-Perron |
|---------------------------|-------------------------|------------|------------|------|----------------|
| | Trend | Drift | None | | |
| Matières premières | | | | | |
| COA | 6.0847E-31 | 1.0174E-27 | 6.2469E-27 | 0.1 | 0.01 |
| CLA | 6.3888E-58 | 1.5152E-44 | 5.2678E-40 | 0.1 | 0.01 |
| GOLDS | 6.3888E-58 | 4.2942E-07 | 0.0001 | 0.1 | 0.01 |
| SILV | 6.3888E-58 | 4.2942E-07 | 0.0001 | 0.1 | 0.01 |
| Devises étrangères | | | | | |
| EURO/USD | 6.3888E-58 | 5.0689E-06 | 0.0001 | 0.1 | 0.01 |
| GBP/USD | 6.3888E-58 | 2.533E-10 | 7.267E-07 | 0.1 | 0.01 |
| JPY/USD | 1.5647E-49 | 2.7254E-36 | 2.5336E-29 | 0.1 | 0.01 |
| | | | | | |
| 10 YR T-Note | 6.3888E-58 | 8.0533E-46 | 8.5309E-41 | 0.1 | 0.01 |
| Euro Bund | 6.3888E-58 | 0.0001 | 0.0001 | 0.1 | 0.01 |

Tableau 3. 4 - P-value des tests de stationnarité des rendements des actifs au seuil critique de 5%

Les rendements des actifs sont par contre stationnaires.

Finalement, nous constatons que les processus stochastiques P_t associés aux prix d'actifs sont non stationnaires au sens de la stationnarité du second ordre, tandis que les processus associés aux rendements r_t sont compatibles avec la propriété de stationnarité au second ordre.

3.3.4. Autocorrélation des rendements logarithmiques

La fonction d'autocorrélation des rendements se présente comme suit :

$$\rho_k = \frac{Cov(r_t, r_{t+k})}{\sigma(r_t)\sigma(r_{t+k})} = \frac{E[(r_t - \bar{r})(r_{t+k} - \bar{r})]}{E[(r_t - \bar{r})^2]}$$

et peut être estimée par l'écart-type des rendements :

$$\hat{\rho}_k = \frac{\sum_{t=1}^{n-k} (r_t - \bar{r})(r_{t+k} - \bar{r})}{\sum_{t=1}^n (r_t - \bar{r})^2}$$

Où r_t est le rendement à l'instant t , \bar{r} est la moyenne des rendements, n le nombre d'observations et k le retard.

D'après l'autocorrélogramme des rendements des prix de clôture du GOLD et du taux de change EURO/USD, nous constatons que l'autocorrélation est non significative vu que les barres représentant $\hat{\rho}_k$ pour chaque k (lag) appartiennent à la bande en pointillée correspondant à un intervalle de confiance de 95% du test défini comme suit :

$$H_0 : \widehat{\rho}_k = 0$$

$$H_1 : \widehat{\rho}_k \neq 0$$

Par conséquent, les autocorrélations peuvent être significativement considérées comme nulles.

Afin de valider l'absence d'autocorrélation des rendements, nous testons cette hypothèse à travers le test de Ljung-Box. Les résultats des tests sur les différents actifs sont résumés dans le tableau ci-dessus :

| | Box-Ljung test | |
|----------------------------------|----------------|-------------|
| | P-Value | Statistique |
| Matières premières | | |
| COA | 0.0034409 | 8.557579 |
| CLA | 0.0277104 | 4.845995 |
| GOLDS | 0.3829801 | 0.7611141 |
| SILV | 0.7184368 | 0.1299955 |
| Devises étrangères | | |
| EURO/USD | 0.7307768 | 0.1183996 |
| GBP/USD | 0.0306638 | 4.671687 |
| JPY/USD | 0.1903287 | 1.715072 |
| Futurs sur Bons du Trésor | | |
| 10 YR T-Note | 0.8997910 | 0.0158572 |
| Euro Bund | 0.5236470 | 0.4067044 |

Tableau 3. 5 - P-value du test de Ljung Box des autocorrélations des rendements au seuil critique de 5%

Ainsi nous constatons que les rendements des actifs de la classe des matières premières et des taux de change ne présentent aucune corrélation à l'exception du Brent Crude Oil, du WTI et du taux de change GBP/USD.

L'analyse de la fonction d'autocorrélation permet de tester efficacement l'hypothèse de l'efficiencia faible des marchés.

L'efficiencia faible des marchés (EMH) traduit le fait qu'une stratégie d'investissement ne peut permettre de dégager, pour un niveau de risque donné, un profit exceptionnel. L'information contenue dans les prix de marché antérieurs est totalement présente dans les prix actuels des actifs. Or, la présence de rendements autocorrélés permettra de créer des opportunités d'arbitrage. Les investisseurs pourraient alors prédire les évolutions des prix des actifs à partir des prix passés puisque ces derniers seraient corrélés.

D'après les résultats des tests d'autocorrélation des rendements de Ljung-Box, nous constatons que les marchés de l'or, de l'argent, du taux de change EURO/USD, JPY/USD

sont efficaces au sens faible. Les marchés du Brent et WTI Oil ainsi que du GBP/USD ne le sont pas.

3.3.5. Clusters de volatilité

On observe empiriquement que de fortes variations des rendements (positifs ou négatifs) sont généralement suivies de variations tout aussi fortes. De même, des rendements faibles ont tendance à se produire en grappe. Ce mécanisme provoque l'apparition d'une proportion plus élevée de rendements extrêmes et également de rendements faibles. On assiste ainsi à un regroupement des extrêmes paquets de volatilités.

On observe sans difficulté un tel phénomène sur les rendements du Brent Oil entre 2008 et début 2015.

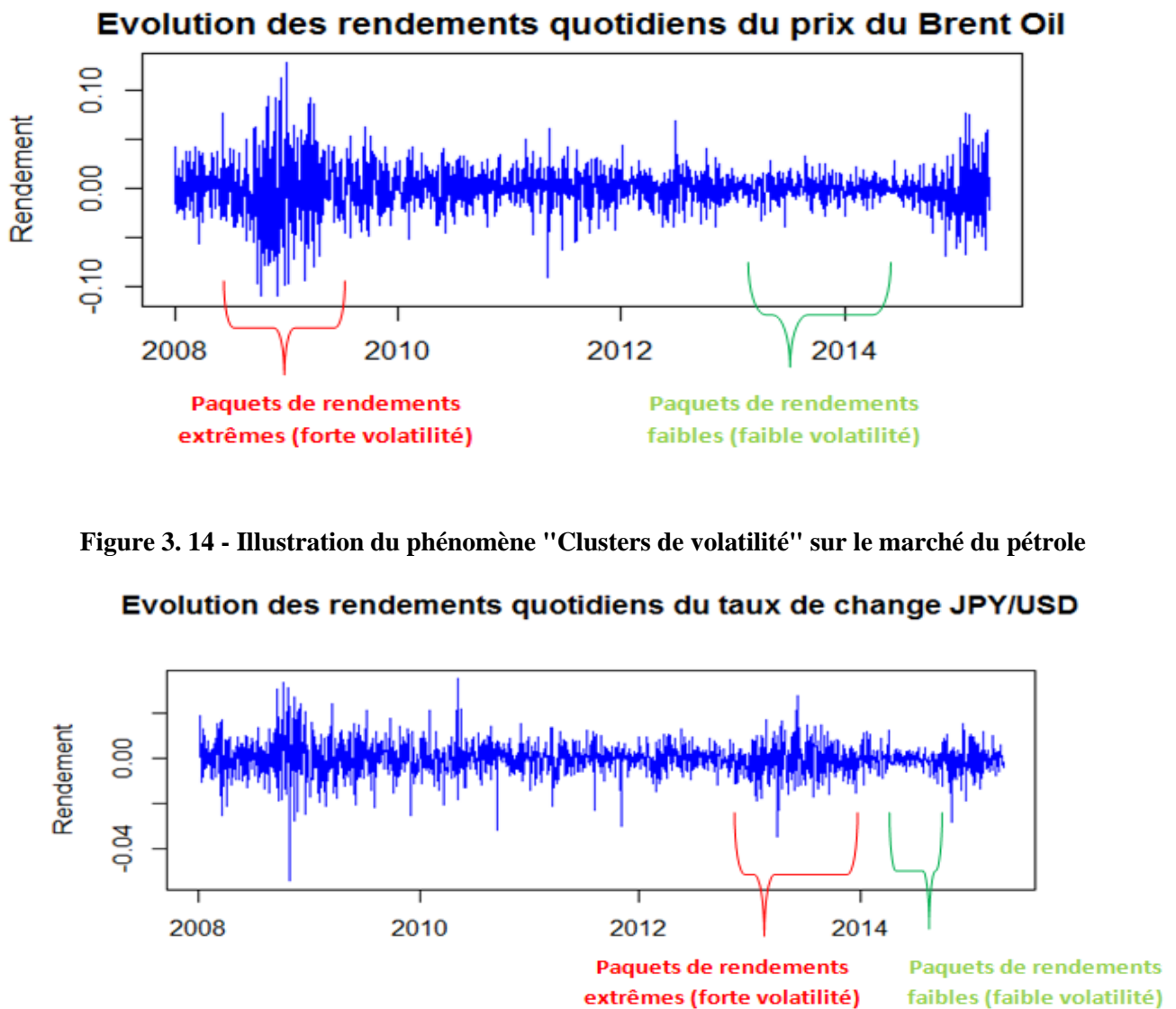


Figure 3. 14 - Illustration du phénomène "Clusters de volatilité" sur le marché du pétrole

Figure 3. 13 - Illustration du phénomène "Clusters de volatilité" sur le marché de change (pour le taux JPY/USD)

Naturellement, ce type de phénomène remet en cause l'hypothèse d'homoscédasticité généralement adoptée en économétrie linéaire.

3.3.6. Effet levier

Il existe une asymétrie entre l'effet des rendements passés négatifs et l'effet des rendements passés positifs sur la volatilité des cours ou des rendements. En effet, la baisse des cours engendre une augmentation de la volatilité qui est supérieure à celle induite par une hausse des cours de même ampleur.

En représentant les cours des actifs, on distingue une corrélation négative entre le sous-jacent et sa volatilité : c'est l'effet de levier. Une des raisons de ce phénomène est l'arrivée de « mauvaises nouvelles » peut entraîner un réajustement massif des portefeuilles et donc une augmentation de la volatilité. Dans des périodes de hausses, la nécessité de réajuster le portefeuille est moins pressante et donc l'effet d'urgence est amoindri ce qui crée l'asymétrie.

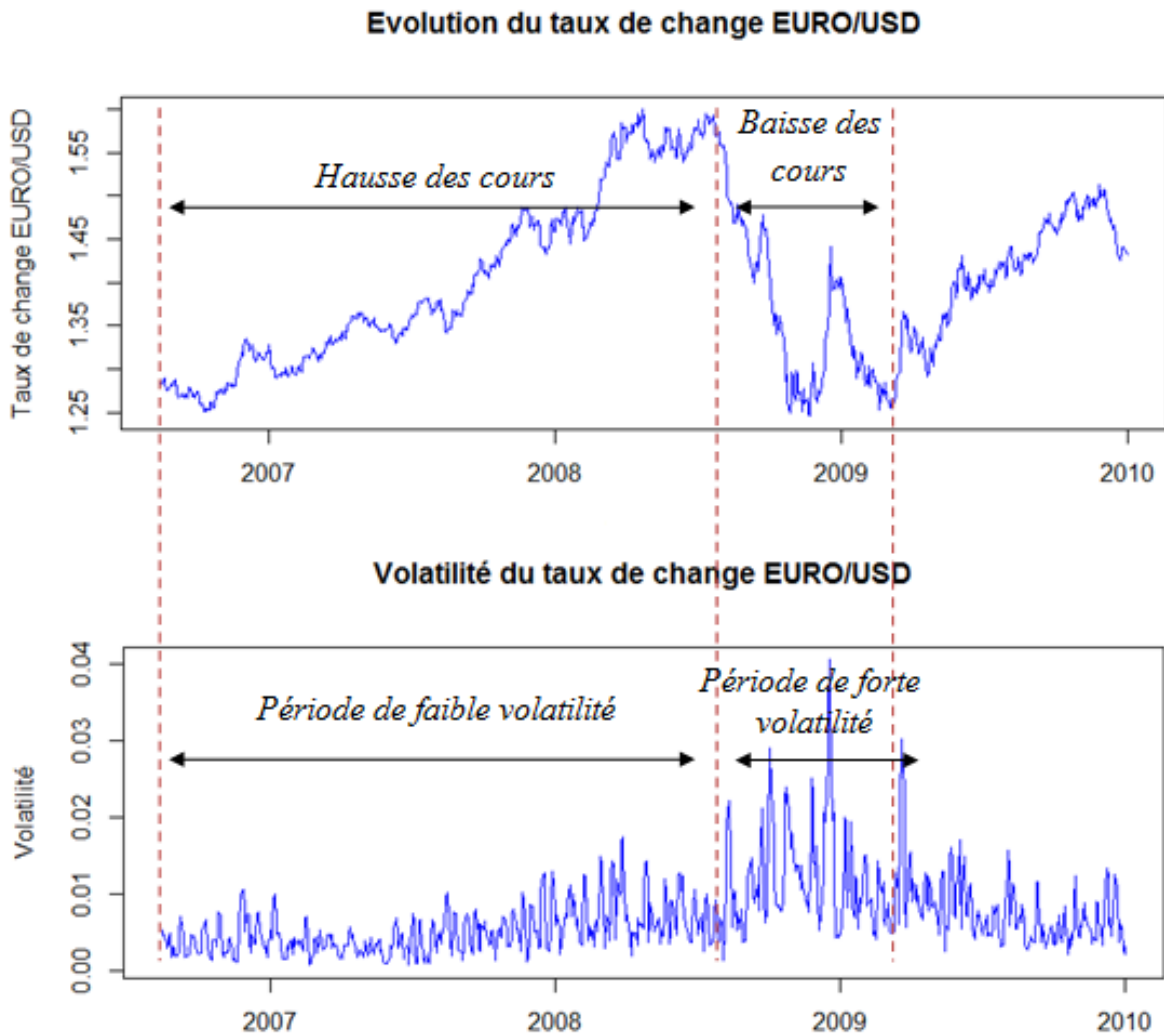


Figure 3. 15 - Illustration de "l'effet levier" pour le taux de change EURO/USD

Le premier graphe retrace l'évolution des cours de l'EURO/USD entre 2006 et 2009 tandis que le second graphe représente la volatilité de l'EURO/USD lors de la même période, estimée par l'écart-type empirique $\sigma_t(r)$ des rendements sur une fenêtre roulante de 5 jours :

$$\sigma_t(r) = \sqrt{\frac{1}{5} \sum_{i=0}^4 (r_{t-i} - \bar{r}_t)^2}$$

Où la moyenne des rendements sur les 5 derniers jours est : $\bar{r}_t = \frac{1}{5} \sum_{i=0}^4 r_{t-i}$

Les graphes ci-dessus illustrent clairement ce phénomène. Entre 2007 à mi 2008, l'EURO/USD a augmenté significativement. Parallèlement, la volatilité du taux de change est restée stable. A partir de la deuxième moitié de 2008, l'EURO/USD a commencé à baisser et la volatilité de cet actif a notablement augmenté.

Conclusion

La distribution des rendements des actifs financiers est leptokurtique avec, en générale, un coefficient d'asymétrie négatif. Ces caractéristiques prouvent que les événements extrêmes ont une probabilité de survenance supérieure à celle de la loi normale. Ainsi, les rendements ne peuvent être modélisés par une loi gaussienne.

Par ailleurs, la volatilité des actifs varie en fonction du temps. Le phénomène « Volatility Clustering » (succession de période de haute volatilité et de faible volatilité) démontre clairement l'hétéroscédasticité des rendements.

Ces résultats relèvent d'une grande importance dans la mesure où ils nous permettront, dans les chapitres suivants, de mieux appréhender l'analyse des interdépendances entre ces actifs sur le court terme et sur le long terme.

Chapitre 4

Analyse à court terme des interdépendances entre les marchés Commo/FX

Introduction

L'analyse de la relation liant divers actifs appartenant à des classes différentes est une étape déterminante dans la constitution d'un portefeuille d'actifs rentable.

Aussi, la quête d'estimateurs statistiques puissants et robustes décrivant le mieux cette relation fut l'objet d'innombrables travaux de recherches. Depuis Bollerslev (1988) à Engel (2002) en passant par Wooldridge, Kroner et Claessens (1991) et Mezrich (1996), la corrélation – en tant qu'indicateur statistique décrivant la liaison potentielle entre deux variables – a connu un développement notable.

Dans la littérature financière, les premiers coefficients de corrélations présentés ont l'avantage d'être simple à utiliser. Cependant, ils ne tiennent pas compte d'une caractéristique majeure des marchés financiers : la volatilité des actifs n'est pas constante.

Dans la majorité des travaux cités ci-dessus, la taille des matrices de corrélations estimées ne dépasse pas cinq actifs. En outre, les modèles présentés sont parcimonieux dans le sens où le nombre de paramètres à estimer est proportionnel au nombre de variables. Par conséquent, l'optimisation du processus d'estimation des paramètres est difficile¹¹.

Afin de remédier à ces contraintes, Engel présente un nouveau modèle de corrélation multivarié dit : Corrélation Dynamique Conditionnelle (DCC).

Le modèle GARCH-DCC¹² présente des avantages majeurs. Le nombre de paramètres à estimer est partiellement indépendant du nombre de variables. En outre, aucune contrainte

¹¹ Engle, R., (2002) "Dynamic Conditional Correlation – A simple Class of Multivariate GARCH Models", Journal of Business and Economic Statistics.

¹² Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedastic – Dynamic Conditional Correlation

sur la taille de la matrice de corrélation ne subsiste. Ainsi de larges matrices de corrélations peuvent être estimées. Le modèle permet aussi de capter la variance conditionnelle de chaque actif et de fournir des prévisions des corrélations entre chaque couple d'actifs.

4.1. Présentation générale des modèles de corrélations conditionnelles dynamiques

Le modèle GARCH-DCC est une généralisation du modèle de Corrélation Conditionnelle Constante, introduit par de Bollerslev en 1990 et s'établit en deux étapes fondamentales.

Dans un premier temps, la variance conditionnelle de chaque actif est estimée par le modèle GARCH (ou un modèle qui en dérive tel E-GARCH¹³ ...) afin d'obtenir la matrice diagonale de la variance conditionnelle. Dans un second temps, les résidus standardisés issus de la régression de la première étape sont utilisés dans la construction récursive de la matrice de corrélation conditionnelle. Finalement, nous obtenons une matrice de corrélation qui varie avec le temps et qui prend en compte toute l'information passée.

4.1.1. Définitions et notations

Le modèle GARCH-DCC est alors défini comme suit :

$$r_t = \mu_t + a_t$$

$$a_t = H_t^{1/2} z_t$$

$$H_t = D_t R_t D_t$$

Notations

m : Le nombre d'actifs étudiés.

r_t : Vecteur (m x 1) contenant les rendements des m actifs à la fermeture des marchés au jour t.

a_t : Vecteur (m x 1) des rendements corrigés de leurs moyennes, des m actifs à la fermeture des marchés au jour t, i.e $E[a_t] = 0$ et $Cov[a_t] = H_t$.

z_t : Vecteur (n x 1) des erreurs supposées iid telles que : $E[z_t z_t^T] = I$

μ_t : Vecteur (m x 1) de la moyenne des rendements à l'instant t.

H_t : Matrice (m x m) des variances conditionnelle de **a_t** à l'instant t.

D_t : Matrice diagonale (m x m) contenant les racines des variances conditionnelles de **a_t** à l'instant t.

R_t : Matrice des corrélations conditionnelles de **a_t** à l'instant t.

¹³ Exponential Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedastic

Le vecteur μ_t peut être modélisé en tant que série temporelle ou considéré comme un vecteur constant. Dans notre étude, nous opterons pour le second choix. Ainsi, l'équation des rendements des actifs s'écrit :

$$r_t = \mu + a_t$$

4.1.2. Modèle DCC d'Engel comme généralisation du modèle CCC de Bollerslev

Dans le modèle de Bollerslev, la matrice de covariance se décompose comme suit :

$$H_t = D_t R D_t$$

où D_t est la matrice diagonale de taille (m x m) de la volatilité conditionnelle des rendements des m actifs, calculée à l'instant t (jour t). La volatilité conditionnelle de chaque actif est estimée par le modèle GARCH. Ainsi, on note :

$$D_t = \text{diag}\{\sqrt{\sigma^2_{i,t}}\}$$

avec $\sigma^2_{i,t}$ est l'estimation de la variance conditionnelle de l'actif i, à l'instant t, par le modèle GARCH.

La matrice R est la matrice de corrélation symétrique définie positive de taille (m x m) contenant les corrélations conditionnelles constantes. Engel généralise le modèle de Bollerslev en transformant la matrice de corrélation conditionnelle constante en une matrice de corrélation conditionnelle dynamique. Par conséquent, en introduisant le modèle DCC en tant que nouvelle classe de modèles multivariés, Engel admet des corrélations entre les actifs qui ne sont pas nécessairement constantes, mais dynamiques. Aussi rend-t-il le modèle plus proche de la réalité des marchés financiers puisque l'hypothèse d'une corrélation conditionnelle constante est sans doute restrictive si l'on se situe sur de longues périodes.

En allouant des spécifications séparées pour la volatilité conditionnelle et la corrélation conditionnelle des rendements des m actifs, Engel procède à la décomposition de la matrice de variance-covariance H_t comme suit :

$$H_t = D_t R_t D_t$$

Avec :

$$D_t = \begin{pmatrix} \sqrt{\sigma^2_{1,t}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \sqrt{\sigma^2_{i,t}} & \vdots \\ 0 & \cdots & \sqrt{\sigma^2_{m,t}} \end{pmatrix}$$

$$R_t = \begin{pmatrix} 1 & \rho_{12,t} & \rho_{13,t} & \cdots & \rho_{1m,t} \\ \rho_{21,t} & 1 & \cdots & \cdots & \rho_{2m,t} \\ \rho_{31,t} & \rho_{22,t} & 1 & \cdots & \rho_{3m,t} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{m1,t} & \rho_{m2,t} & \rho_{m3,t} & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

De manière plus précise, la volatilité conditionnelle du $i^{\text{ème}}$ rendement suivant le processus GARCH (ou l'un de ses dérivés) est :

$$\sigma_{i,t}^2 = V(r_{i,t}/\Omega_{t-1})$$

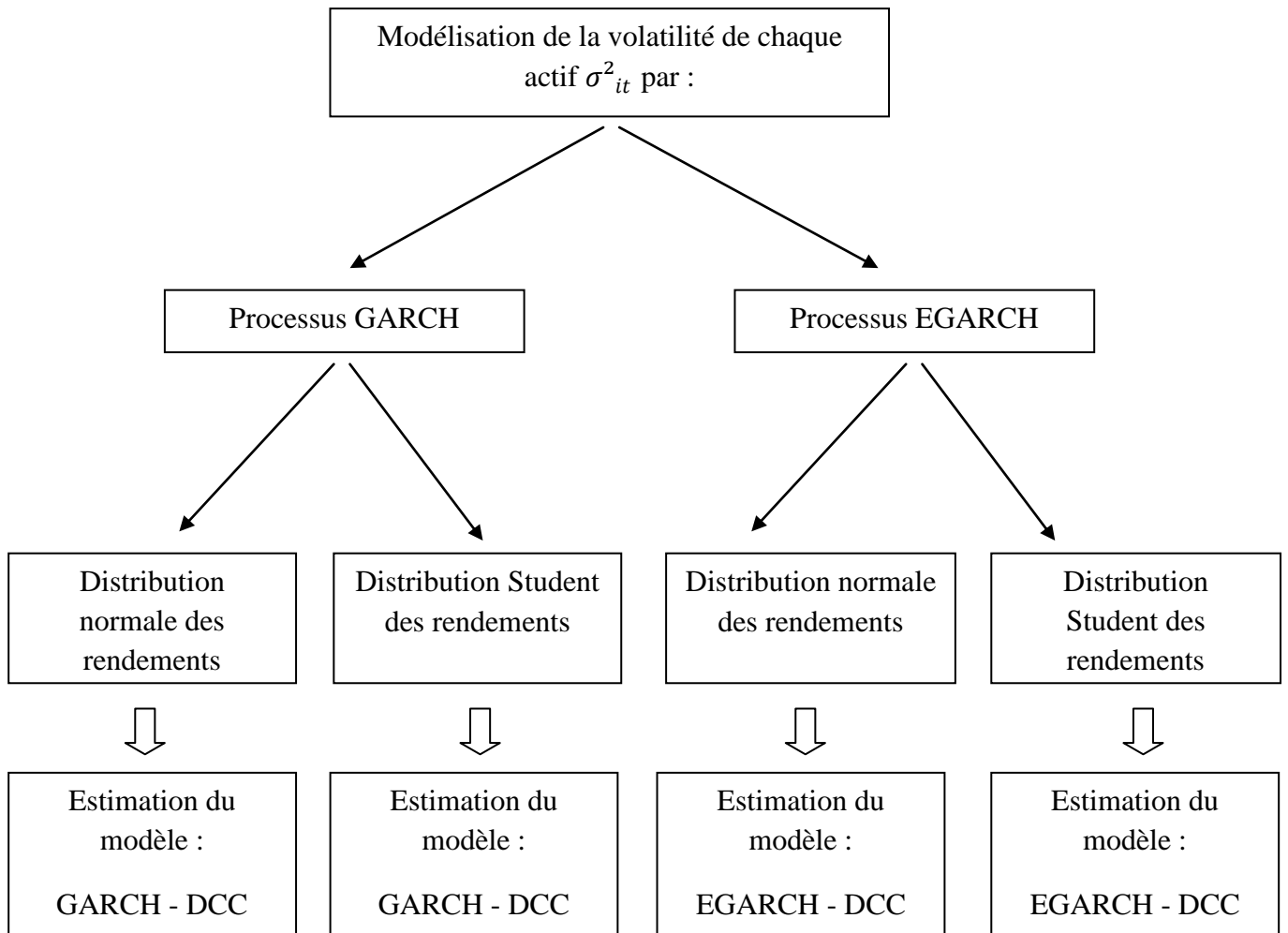
La corrélation conditionnelle est aussi définie comme suit :

$$\rho_{ij,t} = \frac{\text{Cov}(r_{it}r_{jt}/\Omega_{t-1})}{\sigma_{i,t}\sigma_{j,t}}$$

où Ω_{t-1} est l'information disponible en t-1.

4.1.3. Variantes du modèle GARCH-DCC

Dans cette étude, nous modélisons la corrélation suivant quatre modèles différents en variant la distribution des rendements et le type de modèle GARCH adopté. Ainsi, nous supposons dans un premier temps que les rendements suivent une loi gaussienne puis la loi de Student. Ensuite, nous modélisons pour chacun des deux cas la corrélation entre les actifs en adoptant le modèle GARCH pour la variance des actifs puis le modèle EGARCH. Le schéma ci-après résume notre démarche :



4.1.4. Etapes d'estimation du modèle GARCH-DCC

L'estimation du modèle GARCH-DCC s'effectue en deux étapes. Dans un premier temps, la variance conditionnelle de chaque actif est estimée par le modèle GARCH (ou un modèle qui en dérive tel EGARCH) afin d'obtenir la matrice de la variance conditionnelle.

La deuxième étape s'agence comme suit. Après avoir estimé la variance de chaque actif par le modèle GARCH univarié, la matrice diagonale notée précédemment par D est estimée par \widehat{D} telle que :

$$\widehat{D} = \text{diag}(\sqrt{\widehat{\sigma}_{it}})$$

En suite, pour chaque processus univarié, il est alors possible d'extraire un vecteur de taille $(m \times 1)$ des résidus standardisés issus des régressions de la première étape.

Le vecteur des résidus standardisés sera noté alors comme suit :

$$\widehat{\varepsilon}_t = \widehat{D}^{-1}(r_t - \widehat{\mu})$$

Où :

- $\widehat{D}^{-1} = \text{diag}(\frac{1}{\sqrt{\widehat{\sigma}_{it}}})$
- r_t est le vecteur des rendements utilisés
- $\widehat{\mu}$ est le vecteur des rendements moyens sur toute la fenêtre temporelle considérée

En outre, la matrice de variance-covariance inconditionnelle des résidus standardisés $\widehat{\varepsilon}_t$, que nous noterons \bar{Q} , définie par $\bar{Q} = \text{Cov}[\widehat{\varepsilon}_t * \widehat{\varepsilon}_t^T]$ est estimée comme suit :

$$\bar{Q} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \widehat{\varepsilon}_t * \widehat{\varepsilon}_t'$$

Les éléments de la matrice \bar{Q} sont notée : ρ_{ij}^{inc}

Il serait difficile d'estimer les paramètres du modèle pour tout t , c'est donc pour cette raison qu'Engel propose une réécriture récursive pour l'estimation du processus d'évaluation.

La matrice R_t est décomposée comme suit :

$$R_t = Q_t^{*-1} Q_t Q_t^{*-1}$$

$$Q_t = (1 - a - b)\bar{Q} + bQ_{t-1} + a(\widehat{\varepsilon}_{t-1}'\widehat{\varepsilon}_{t-1})$$

Les paramètres a et b sont des scalaires.

Les éléments de la matrice Q_t sont notés $q_{ij,t}$.

L'écriture scalaire de la matrice Q_t est :

$$q_{ij,t} = \rho_{ij}^{inc} (1 - a - b) + bq_{ij,t-1} + a \varepsilon_{it-1} \varepsilon_{jt-1}$$

Où ρ_{ij}^{inc} est la corrélation inconditionnelle entre l'actif i et l'actif j.

La matrice Q_t^* est diagonale contenant la racine carrée des variances conditionnelles des rendements (La racine carré des éléments de la matrice Q_t).

$$Q_t^* = \text{diag}(\sqrt{q_{ii,t}}); i = 1, \dots, m$$

Cette décomposition garantit la définition de la matrice R_t .

Afin que la matrice H_t soit garantie positive, les paramètres a et b doivent satisfaire les conditions suivantes :

$$a \geq 0, b \geq 0 \text{ et } a + b < 1$$

Cette récursivité nous garantit que Q_t sera une matrice symétrique définie positive, mais les termes individuels ne sont pas nécessairement compris entre -1 et 1.

Par conséquent, nous devons donc avoir recours à la standardisation des éléments Q_t pour parvenir à une estimation adéquate de la matrice des corrélations conditionnelles.

La matrice Q_t^* permet de standardiser les éléments de Q_t . Ainsi, les éléments de la matrice R , notés $\bar{\rho}_{ij,t}(\phi)$, calculés suivant l'équation suivante :

$$(\hat{R}_t)_{ij} = \rho_{ijt} = \frac{q_{t,ij}}{q_{t,ij}^{1/2} q_{t,ij}^{1/2}}$$

seront compris entre -1 et 1.

Finalement, la matrice de corrélation conditionnelle dynamique sera réécrite comme suit :

$$(\hat{R}_t)_{ij} = \frac{(Q_t)_{ij}}{(Q_t)_{ii}^{1/2} (Q_t)_{jj}^{1/2}}$$

Les rendements utilisés seront les rendements transformés par le processus de standardisation.

4.1.5. Estimation du modèle DCC par maximum de vraisemblance

L'estimation du modèle DCC dépend de la distribution des erreurs z_t . Dans un premier temps, nous allons détailler l'estimation du modèle quand z_t suit la loi normale multivariée. En suite, nous étudierons le cas où z_t suit la loi de Student multivariée.

4.1.5.1. Distribution normale multivariée des erreurs

Si les erreurs z_t sont distribuées suivant la loi normale multivariée, la densité jointe de z_1, \dots, z_T est :

$$f(z_t) = \prod_{t=1}^T \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2} z_t^T z_t\right\}$$

La fonction de vraisemblance pour $a_t = H_t^{1/2} z_t$ s'écrit comme suit :

$$L(\theta) = \prod_{t=1}^T \frac{1}{(2\pi)^{n/2} |H_t|^{1/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2} a_t^T H_t^{-1} a_t\right\}$$

où θ représente le vecteur des paramètres du modèle. Le vecteur θ peut être divisé en deux groupes tel que : $\theta = (\phi, \psi) = (\phi_1, \dots, \phi_m, \psi)$, où $\phi_i = (\omega_i, \alpha_i, \beta_i)$ sont les paramètres du modèle GARCH(1,1) du rendements du ième actif et $\psi = (a, b)$ sont les paramètres du modèle GARCH multivarié des corrélations.

Le logarithme de la fonction de vraisemblance s'écrit alors comme suit :

$$\begin{aligned} \ln(L(\theta)) &= -\frac{1}{2} \sum_{t=1}^T (n \ln(2\pi) + \ln|H_t| + a_t^T H_t^{-1} a_t) \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{t=1}^T (n \ln(2\pi) + \ln|D_t R_t D_t| + a_t^T D_t^{-1} R_t^{-1} D_t^{-1} a_t) \\ &\quad -\frac{1}{2} \sum_{t=1}^T (n \ln(2\pi) + 2 \ln|D_t| + \ln|R_t| + a_t^T D_t^{-1} R_t^{-1} D_t^{-1} a_t) \end{aligned}$$

L'estimation directe des paramètres du modèle GARCH(1,1)-DCC s'avère difficile. Par conséquent, l'estimation se fera en deux étapes. Dans un premier temps, le vecteur ϕ_i des paramètres du modèle GARCH(1,1) est estimé pour chaque actif. Dans un second temps, les paramètres $\psi = (a, b)$ caractérisant le processus multivarié GARCH-DCC des corrélations sont estimés en maximisant le logarithme de la fonction de vraisemblance où on remplace le vecteur ϕ par le vecteur $\hat{\phi}$ issu de la première étape d'estimation.

La fonction de maximum de vraisemblance peut être écrite sous la forme d'une somme de deux fonctions : $\theta = (\phi, \psi)$

$$L(\phi, \psi) = L_v(\phi) + L_c(\hat{\phi}, \psi)$$

Les deux étapes de maximisation sont alors :

$$\hat{\theta} = \operatorname{argmax}(L_v(\theta))$$

$$\hat{\phi} = \operatorname{argma}(L_c(\hat{\theta}, \phi))$$

4.1.5.1.1. Première étape d'estimation

Dans la première étape d'estimation, la matrice R_t est remplacée par la matrice identité I_m , la fonction de vraisemblance qui en résulte est :

$$\begin{aligned} \ln(L_v(\phi)) &= -\frac{1}{2} \sum_{t=1}^T (n \ln(2\pi) + 2 \ln|D_t| + a_t^T D_t^{-1} I_n D_t^{-1} a_t) \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{t=1}^T (n \ln(2\pi) + \sum_{i=1}^n [\ln(h_{it} + \frac{a_{it}^2}{h_{it}})]) \end{aligned}$$

La fonction de vraisemblance ci-dessus est la somme des logarithmes des fonctions de maximum de vraisemblance des équations GARCH univarié des m actifs étudiés.

Dans cette première étape, les paramètres $\phi = (\phi_1, \dots, \phi_m)$ sont estimés. Par conséquent, les variances conditionnelles h_{it} sont estimées pour chaque actif, ainsi que les résidus standardisés $\hat{\varepsilon}_t$ et la matrice de la variance-covariance inconditionnelle \bar{Q} .

Après cette première étape, les seuls paramètres inconnus sont : $\psi = (a, b)$.

4.1.5.1.2. Seconde étape d'estimation

Dans la seconde étape d'estimation, le vecteur des paramètres $\psi = (a, b)$ en maximisant la fonction de vraisemblance suivante :

$$L_c(\hat{\phi}, \psi) = -\frac{1}{2} \sum_{t=1}^T (n \ln(2\pi) + 2 \ln|D_t| + \ln|R_t| + a_t^T D_t^{-1} R_t^{-1} D_t^{-1} a_t)$$

4.1.5.2. Distribution de Student multivariée des erreurs

Si les erreurs z_t sont distribuées suivant la loi Student multivariée, la densité jointe de z_1, \dots, z_T est :

$$f(z_t | \nu) = \prod_{t=1}^T \frac{\Gamma(\frac{\nu+n}{2})}{\Gamma(\frac{\nu}{2}) [\pi(\nu-2)]^{n/2}} \left[1 + \frac{z_t^T z_t}{\nu-2}\right]^{-\frac{\nu+n}{2}}$$

où $\Gamma(\cdot)$ est la fonction Gamma.

La fonction de vraisemblance pour $a_t = H_t^{1/2} z_t$ s'écrit comme suit :

$$\begin{aligned} L(\theta) &= \sum_{t=1}^T \left(\ln \left[\Gamma \left(\frac{\nu+n}{2} \right) \right] - \ln \left[\Gamma \left(\frac{\nu}{2} \right) \right] - \frac{n}{2} \ln[\pi(\nu-2)] - \frac{1}{2} \ln[|D_t R_t D_t|] \right. \\ &\quad \left. - \frac{\nu+n}{2} \ln \left[1 + \frac{a_t^T D_t^{-1} R_t^{-1} D_t^{-1} a_t}{\nu-2} \right] \right) \end{aligned}$$

En notant $\theta = (\phi, \psi) = (\phi_1, \dots, \phi_m, \psi)$ le vecteur des paramètres du modèle GARCH(1,1)-DCC où $\phi_i = (\omega_i, \alpha_i, \beta_i)$ sont les paramètres du modèle GARCH(1,1) des rendements du i ème actif et $\psi = (a, b, \nu)$ sont les paramètres du modèle GARCH multivarié des corrélations, l'estimation du vecteur de paramètres du modèle GARCH(1,1)-DCC s'effectue aussi en deux étapes.

4.1.5.2.1. Première étape d'estimation

Plusieurs auteurs¹⁴ ont démontré que le changement de la loi des erreurs n'affecte pas significativement les estimations. Par conséquent, nous gardons une distribution normale des erreurs.

Lors de cette première étape, les paramètres $\phi = (\phi_1, \dots, \phi_m)$, les variances conditionnelles h_{it} , les résidus standardisés $\hat{\varepsilon}_t$ et la matrice de la variance-covariance inconditionnelle \bar{Q} sont estimés.

Après cette première étape, les seuls paramètres inconnus sont : $\psi = (a, b, \nu)$.

4.1.5.2.2. Seconde étape d'estimation

Les paramètres $\psi = (a, b, \nu)$ sont estimés dans cette seconde étape en maximisant la fonction de maximum de vraisemblance suivante :

$$\ln(L_c(\phi)) = \sum_{t=1}^T (\ln[\Gamma(\frac{\nu+n}{2})] - \ln[\Gamma(\frac{\nu}{2})] - \frac{n}{2} \ln[\pi(\nu-2)] - \frac{1}{2} \ln[|D_t R_t D_t|] - \frac{\nu+n}{2} \ln[1 + \frac{a_t^T D_t^{-1} R_t^{-1} D_t^{-1} a_t}{\nu-2}])$$

$$\ln(L_v(\phi)) =$$

$$\sum_{t=1}^T (\ln[\Gamma(\frac{\nu+n}{2})] - \ln[\Gamma(\frac{\nu}{2})] - \frac{n}{2} \ln[\pi(\nu-2)] - \frac{1}{2} \ln[|R_t|] - \ln[|D_t|] - \frac{\nu+n}{2} \ln[1 + \frac{\varepsilon_t^T R_t^{-1} \varepsilon_t}{\nu-2}])$$

¹⁴ M. BERG JENSEN and A. LUNDE (2001) "The nig-s and arch model: A fat-tailed stochastic, and autoregressive conditional heteroscedastic volatility model." Working paper series No. 83, University of Aarhus.

4.2. Modélisation de la variance conditionnelle des actifs

La première étape d'estimation du modèle DCC est l'estimation de la volatilité de chaque actif par un processus GARCH univarié.

4.2.1. Calibration du modèle GARCH

4.2.1.1. Volatilité stochastique : Modèle GARCH

Les modèles GARCH, prennent en compte des variances conditionnelles dépendant du temps, remettant ainsi en cause la propriété d'homoscédasticité retenue généralement dans le cadre des modèles linéaires.

La version généralisée GARCH (p,q) qui est la plus exploitée est décrite par deux équations :

$$\left\{ \begin{array}{l} r_t = \mu + \epsilon_t \\ \epsilon_t = \sigma_t \varepsilon_t \\ \varepsilon_t \sim iid(0,1) \\ \sigma_t^2 = \omega + \sum_{k=1}^q \alpha_k r_{t-k}^2 + \sum_{i=1}^p \beta_i \sigma_{t-i}^2 \end{array} \right.$$

Afin de garantir la positivité de la variance conditionnelle et la stationnarité asymptotique au sens faible du modèle, les conditions suivantes doivent être satisfaites :

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall k = 1, \dots, q ; \alpha_k > 0 \\ \forall i = 1, \dots, p ; \beta_i > 0 \\ \sum_{i=1}^q \alpha_i + \sum_{j=1}^p \beta_j < 1 \end{array} \right.$$

Ces conditions permettent de valider la définition des moments d'ordre deux. Ainsi la variance non conditionnelle est définie par :

$$V(r_t) = \frac{\alpha_0}{1 - (\sum_{i=1}^q \alpha_i + \sum_{j=1}^p \beta_j)}$$

La première équation fournit les rendements d'un actif où μ représente la valeur moyenne des rendements et ϵ_t est l'innovation représentant l'écart qui sépare le rendement journalier et sa valeur moyenne en incorporant les dernières informations.

Cette innovation est modélisée par une variable aléatoire gaussienne d'écart-type σ_t :

$$\epsilon_t = \sigma_t \varepsilon_t$$

où ε_t est un bruit blanc, σ_t^2 est la variance conditionnelle modélisée par le processus GARCH (p ,q).

La deuxième équation estime la volatilité à l'instant t d'un actif par ses rendements passés et leurs volatilités.

Les indices p et q donnent les plages temporelles passées qui seront prises en compte pour déterminer la volatilité présente. La variance inconditionnelle est notée α_0 , les α_k sont les paramètres qui déterminent l'impact des chocs passés : plus la valeur des α_k est importante, plus la volatilité augmente après un choc; la valeur des paramètres β_i s'interprète comme la vitesse de retour à la variance inconditionnelle α_0 . La persistance de la volatilité est quant à elle mesurée par la somme $\sum_{i=1}^q \alpha_i + \sum_{j=1}^p \beta_j$. En effet, plus la valeur de cette somme est proche de zéro, plus le retour à la moyenne sera rapide.

Les modèles GARCH proposent une estimation intuitive de la volatilité prenant en compte les valeurs passées de la variance de l'actif en question ainsi que celles de la somme de ses rendements pondérés. Ainsi, ces modèles incorporent l'information passée de manière pertinente et permettent d'effectuer de meilleures prévisions de la variance des actifs.

4.2.1.2. Estimation des paramètres du modèle GARCH(p,q)

Les modèles GARCH sont classiquement estimés par la méthode de quasi-maximum de vraisemblance.

4.2.1.2.1. Identification du modèle GARCH (p, q)

Pour l'identification du modèle GARCH (p, q), nous nous basons sur le critère AIC¹⁵. En faisant varier p et q entre 1 et 3, nous obtenons la valeur de l'AIC pour neuf modèles GARCH (p, q). Nous présentons les résultats du GOLD et l'EURO/USD, l'annexe A regroupe les résultats des autres actifs.

| Matrice AIC (p, q) | | |
|--------------------|-----------|-----------|
| -11444.59 | -11411.72 | -11356.74 |
| -11437.17 | -11417.87 | -11424.19 |
| -11428.94 | -11417.34 | -11399.4 |

Tableau 4. 1 - Matrice AIC (p, q) de l'actif GOLD

| Matrice AIC (p, q) | | |
|--------------------|-----------|-----------|
| -13882.14 | -13817.16 | -13826.18 |
| -13872.17 | -13870.36 | -13770.3 |
| -13861.1 | -13781.64 | -13826.97 |

Tableau 4. 2 - Matrice AIC (p, q) de l'actif EURO/USD

¹⁵ Critère d'information d'Akaike

D'après les résultats obtenus, nous retenons le modèle GARCH(1,1) pour tous les actifs à l'exception de deux actifs appartenant à la classe des matières premières : l'argent (SILV) et le Brent Oil (COA). Pour l'argent, le critère AIC pour le modèle GARCH (1,1) vaut -9322.184 et pour le modèle GARCH (2,1) -9322.256. La différence étant de 0.072. Pour le Brent Oil, l'AIC du modèle GARCH (1,1) vaut -9871,842 tandis que celui du modèle GARCH (2,1) vaut -10014,740. Cependant, afin de remplir les hypothèses de la corrélation conditionnelle dynamique, nous retenons le modèle GARCH (1,1).

Ainsi la variance de l'actif i , à l'instant t , s'écrit comme suit :

$$\sigma_{i,t}^2 = V(r_{i,t} / \Omega_{t-1}) = \bar{\sigma}_i(1 - \alpha_i - \beta_i) + \beta_i \sigma_{i,t-1}^2 + \alpha_i r_{i,t-1}^2$$

où :

- $\bar{\sigma}_i$ est la variance non conditionnelle du rendement de l'actif i
- $r_{i,t-1}^2$ est le rendement de l'actif i à l'instant $t-1$

La somme des coefficients α_i et β_i fournit une information importante quand à la propriété de retour à la moyenne. En effet, si $\alpha_i + \beta_i = 1$, le processus d'admet pas de retour à la moyenne, la variance inconditionnelle n'est plus présente et on se retrouve avec une forme du modèle GARCH appelée *Integrated GARCH*.

4.2.1.2.2. Résultats des estimations des paramètres du modèle GARCH (1,1)

L'estimation des paramètres α, β et ω du modèle GARCH (1,1) sont estimés par la méthode du quasi-maximum de vraisemblance. En supposant que la distribution conditionnelle des rendements r_t est la loi normale de moyenne nulle et de variance σ_t^2 , tel que :

$$E_{t-1}[r_t] = 0$$

$$E_{t-1}[r_t^2] = \sigma_t^2$$

La fonction de densité conditionnelle de r_t est :

$$f(r_t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_t^2}} \exp\left(-\frac{r_t^2}{2\sigma_t^2}\right)$$

La fonction de vraisemblance s'écrit :

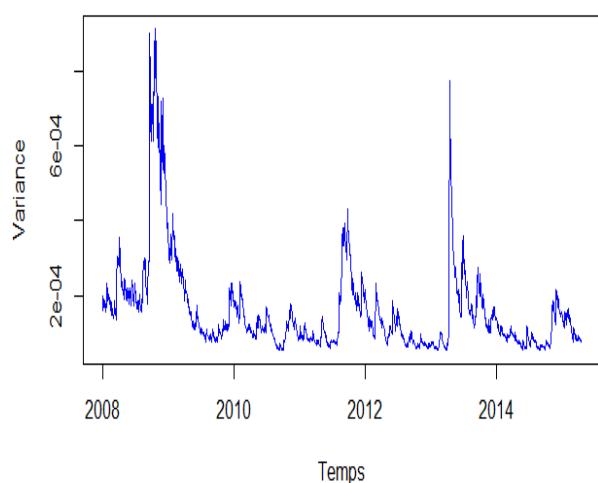
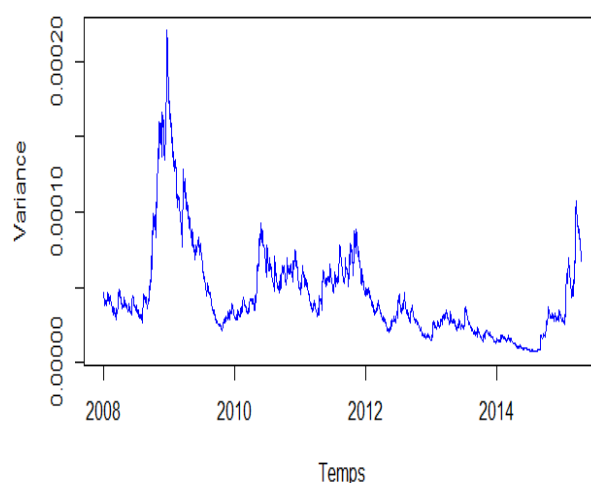
$$L(\alpha, \beta, \omega) = \prod_{t=1}^T \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_t^2}} \exp\left(-\frac{r_t^2}{2\sigma_t^2}\right)$$

Les résultats des estimations des paramètres du modèle GARCH(1,1) par la méthode de quasi-maximum de vraisemblance pour les séries des rendements des 9 actifs étudiés depuis 2008 à 2015 sont résumés dans le tableau ci-dessus, les sorties R figurent dans l'annexe B.

| | Omega ω | | Alpha α | | Bêta β | | $\alpha + \beta$ |
|----------------------------------|----------------|------------|----------------|------------|--------------|------------|------------------|
| | Paramètre | $Pr(> t)$ | Paramètre | $Pr(> t)$ | Paramètre | $Pr(> t)$ | |
| Matières premières | | | | | | | |
| CLA | 0.000002 | 0.455400 | 0.061907 | 0.000680 | 0.936098 | 0.000000 | 0.998005 |
| COA | 0.000002 | 0.666477 | 0.054317 | 0.025458 | 0.943287 | 0.000000 | 0.997604 |
| GOLDS | 0.000002 | 0.131760 | 0.059534 | 0.000000 | 0.926094 | 0.000000 | 0.985628 |
| SILV | 0.000010 | 0.000160 | 0.088609 | 0.000000 | 0.893652 | 0.000000 | 0.982261 |
| Devises étrangères | | | | | | | |
| EURO/USD | 0.000000 | 0.838888 | 0.042652 | 0.000001 | 0.955068 | 0.000000 | 0.997720 |
| GBP/USD | 0.000000 | 0.874545 | 0.045068 | 0.001232 | 0.951835 | 0.000000 | 0.996903 |
| JPY/USD | 0.000000 | 0.468849 | 0.051126 | 0.000003 | 0.941330 | 0.000000 | 0.992456 |
| Futurs sur Bons du Trésor | | | | | | | |
| 10 YR T-Note | 0.000000 | 0.884400 | 0.030257 | 0.000000 | 0.966577 | 0.000000 | 0.996834 |
| Euro Bund | 0.000000 | 0.858000 | 0.038703 | 0.216230 | 0.952891 | 0.000000 | 0.991594 |

Tableau 4. 3 - Résultats des estimations des paramètres GARCH (1,1)

Le coefficient β est très proche de 1 pour tous les actifs étudiés, on note alors une très forte inertie de la volatilité. La somme des paramètres $\alpha + \beta$ est par contre assez proche de 1, ce qui remet en cause la stabilité des modèles. Par conséquent, le retour à la moyenne des processus GARCH (1,1) estimés est assez lent. De plus, pour un seuil critique de 5%, nous pouvons affirmer que les estimations obtenues sont non significatives. Finalement, nous concluons que la modélisation de la variance par le processus GARCH(1,1) est inadéquate.


Figure 4. 2 – Evolution de la variance conditionnelle des rendements de l'or estimée par GARCH(1,1)

Figure 4. 1 - Variance conditionnelle des rendements de l'EURO/USD estimée par GARCH(1,1)

Les graphes ci-dessus démontrent clairement que la volatilité des rendements est loin d'être constante. Entre 2008 et 2014, le marché de l'or a connu des périodes de forte et faible volatilité et a atteint son pic en 2009.

4.2.1.3. Application VBA-Excel

La modélisation de la variance conditionnelle des rendements par le modèle GARCH (1,1) est la première étape d'estimation des corrélations conditionnelles dynamiques. Vu la complexité des équations définissant les modèles, l'objectif de cette partie est fournir au trader un outil d'aide à la décision facile d'utilisation qui lui permettra d'obtenir les résultats des modélisations en un simple click. Ainsi, nous présentons l'interface de la modélisation de la variance d'un actif sous VBA. Il est à noter que ce bloc fait partie d'une interface de Trading qui sera présentée en détail au 6^{ème} chapitre.

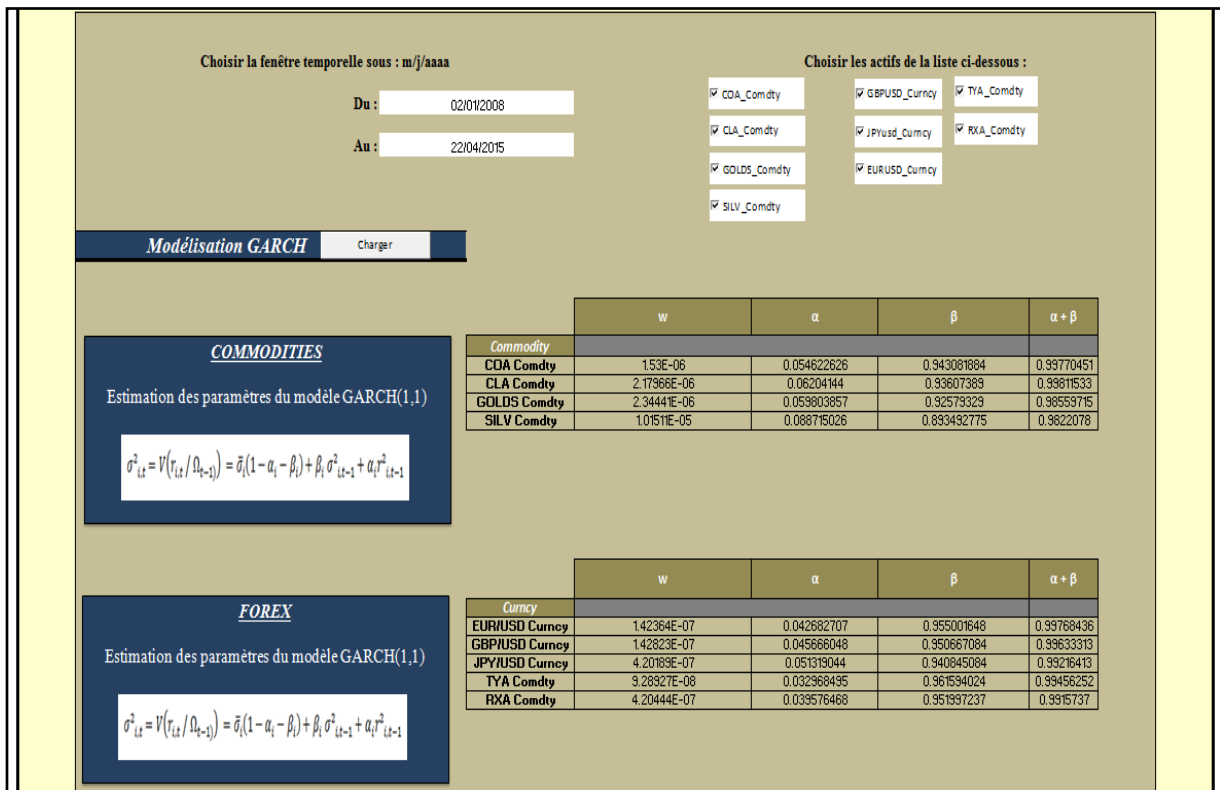


Figure 4. 3 - Interface VBA-Excel pour l'estimation des modèles GARCH(1,1) [Première partie]

Le Trader commence par délimiter la fenêtre temporelle (en haut à gauche). Ensuite, il choisit les actifs dont il veut modéliser la volatilité. En cliquant sur le bouton « Charger », les paramètres d'estimation du modèle GARCH(1,1) pour chaque actif sont fournis. Le premier tableau regroupe les matières premières tandis que le second tableau regroupe les taux de change et les futurs sur bons de Trésor et obligations.

Dans le code développé, la maximisation de la fonction de maximum de vraisemblance a été réalisée à travers l'algorithme de Nelder-Mead (voir annexe N).

Les valeurs d'initialisation de l'algorithme de maximisation ont été choisies arbitrairement comme suit :

$$\begin{cases} \omega = 0.000002 \\ \alpha = 0.5 \\ \beta = 0.3 \end{cases}$$

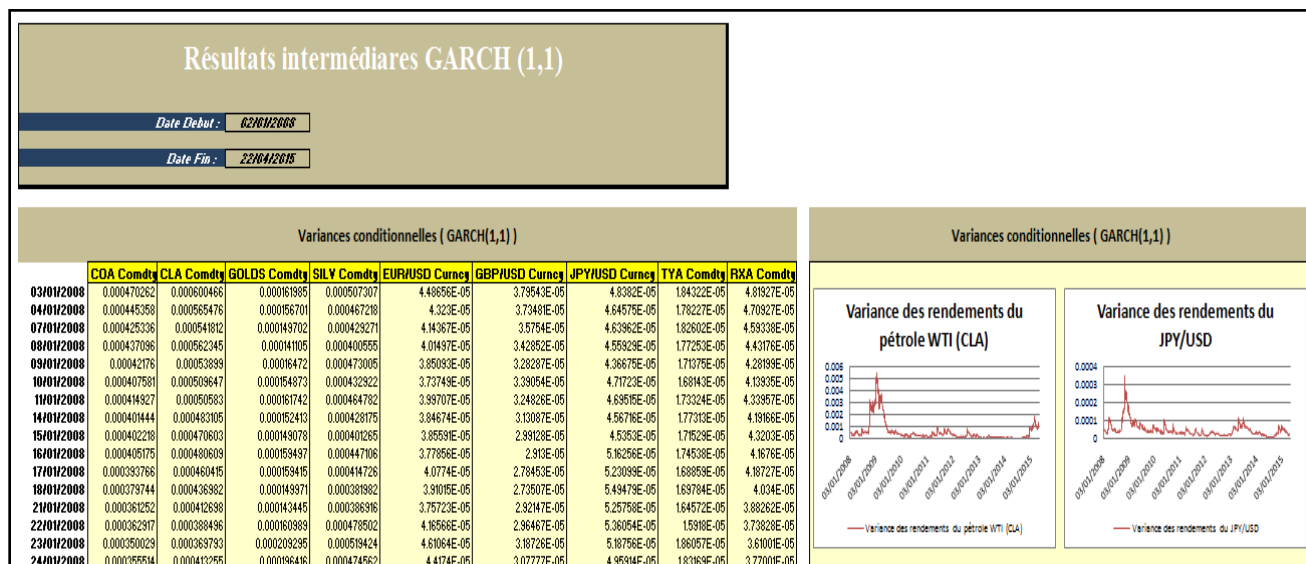


Figure 4. 4 - Interface VBA-Excel pour l'estimation des modèles GARCH(1,1) [Deuxième partie]

Dans une autre feuille du classeur, nous obtenons la valeur de la variance conditionnelle pour chaque jour t ainsi que les graphes correspondants.

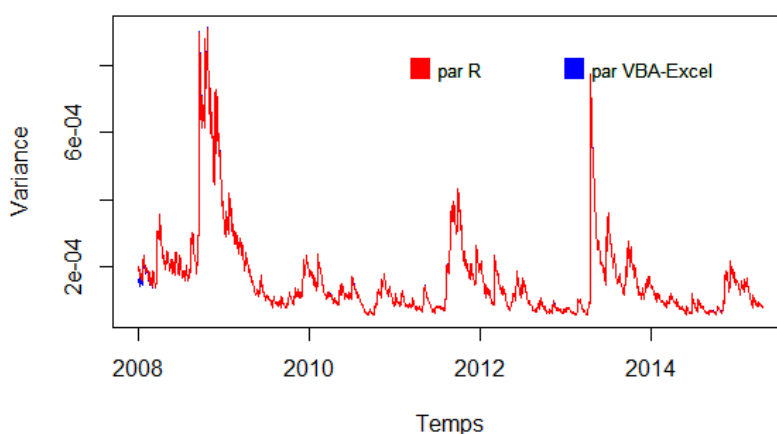
Comparaison des résultats

Afin de nous assurer de la justesse des résultats fournis par la plateforme VBA-Excel, nous calculons, pour la période allant du 03/01/2008 au 22/04/2015 la moyenne des carrés des erreurs entre la variance conditionnelle estimée à travers R et celle obtenue à travers VBA pour chacune des séries des rendements des neuf actifs :

| | MSE |
|----------------------------------|----------|
| Matières premières | |
| COA | 2.63E-11 |
| CLA | 1.41E-11 |
| GOLDS | 5.18E-12 |
| SILV | 3.80E-12 |
| Devises étrangères | |
| EURO/USD | 1.21E-14 |
| GBP/USD | 1.35E-14 |
| JPY/USD | 1.25E-12 |
| Futurs sur Bons du Trésor | |
| 10 YR T-Note | 2.80E-14 |
| Euro Bund | 7.25E-13 |

Tableau 4. 4 - Moyenne des carrés des erreurs MSE entre la variance conditionnelle estimée à travers R et celle obtenue à travers VBA

Variance conditionnelle estimée par GARCH(1,1)



Superposition des graphes représentant la variance conditionnelle du rendement de l'actif CLA estimée par GARCH(1,1) par le logiciel R et par VBA-Excel

Les deux graphes représentent la variance conditionnelle estimée par GARCH(1,1) par le logiciel R et par la plateforme VBA-Excel. La superposition de ces deux derniers confirme la précision des estimations fournies par le code VBA-Excel.

4.2.2. Limite du modèle GARCH

Bien que le modèle GARCH (p, q) soit un modèle performant en matière de prévision, il est le sujet de plusieurs critiques. Sa limite principale réside dans le fait qu'il ne prend pas en compte la réaction asymétrique des chocs passés sur la volatilité actuelle. En effet, comme nous l'avons démontré dans le troisième chapitre, l'ampleur de l'impact d'une mauvaise nouvelle sur les rendements des actifs est différente de celle d'une bonne nouvelle. La volatilité des marchés est par conséquent affectée différemment. Ainsi, plusieurs extensions du modèle générique ont été proposées pour capturer cette asymétrie.

Nelson (1990) s'est intéressé aux évolutions asymétriques de la variance à l'aide des modèles EGARCH (Exponential Generalized Auto Regressive Conditional Heteroscedastic). Le concept clé est de rendre la volatilité conditionnelle fonction de l'ampleur du choc passé et de son signe.

4.2.3. Calibration du modèle EGARCH

4.2.3.1. Présentation du modèle EGARCH

Le processus Exponential GARCH ou EGARCH (p, q) donne à la variance conditionnelle la définition suivante :

Définition

La version généralisée du processus EGARCH (p, q) est définie comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} r_t = c + \epsilon_t \\ \epsilon_t = z_t \sqrt{h_t} \text{ où } z_t \sim \Psi(0,1, \nu) \\ \log(h_t) = \omega + \sum_{i=1}^q \alpha_i g(z_{t-i}) + \sum_{i=1}^q \beta_i \log(h_{t-i}) \end{array} \right.$$

où le résidu normalisé z_t est un bruit faible et où la fonction $g(\cdot)$ vérifie :

$$g(z_{t-i}) = \gamma z_{t-i} + \theta (|z_{t-i}| - E[|z_{t-i}|])$$

Notons que l'écriture porte sur le logarithme de la variance conditionnelle h_t de ϵ_t , en conséquence aucune restriction n'a besoin d'être imposée sur les différents paramètres de l'équation pour assurer la positivité de h_t .

4.2.3.2. Estimation du modèle EGARCH (1,1)

$$\left\{ \begin{array}{l} r_t = c + \epsilon_t \\ \epsilon_t = z_t \sqrt{h_t} \text{ où } z_t \sim \Psi(0,1, \nu) \\ \log(h_t) = \omega + \alpha (|z_{t-1}| - E[|z_{t-1}|]) + \beta \log(h_{t-1}) + \gamma z_{t-1} \end{array} \right.$$

Dans ces expressions, $E[|z_{t-1}|]$ dépend de la loi supposée de z_t . Nous retenons 2 distributions :

$$E[|z_t|] = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \text{ Si } z_t \sim N(0,1) \text{ (Loi gaussienne)}$$

$$E[|z_t|] = 2 \frac{\Gamma(\frac{\nu}{2}) \sqrt{\nu-2}}{\sqrt{\pi}(\nu-1)\Gamma(\frac{\nu}{2})} \text{ Si } z_t \sim Student(\nu)$$

Le paramètre α mesure l'amplitude de l'asymétrie de la volatilité des rendements.

β est le paramètre qui mesure l'effet de persistance de la volatilité des rendements. Quand β est proche de 1, l'effet de retour à la moyenne de la volatilité devient lent et résistant. Dans le modèle EGARCH, le paramètre le plus important est γ car ce paramètre représente une mesure de l'asymétrie des rendements et de l'existence d'un effet levier. Ainsi si $\gamma = 0$, le modèle est alors symétrique. Quand $\gamma \neq 0$, le modèle est alors assymétrique. L'influence des chocs positifs (respectivement négatifs) est mesuré par $\gamma + \alpha$ (respectivement $\gamma - \alpha$).

Les résultats des estimations des paramètres du modèle E-GARCH(1,1) par la méthode de quasi-maximum de vraisemblance pour les séries des rendements des neuf actifs étudiés depuis 2008 à 2015 sont résumés dans le tableau ci-dessus, les sorties R figurent dans l'annexe C.

| | Omega ω | | Alpha α | | Bêta β | | Gamma γ | |
|----------------------------------|----------------|------------|----------------|------------|--------------|------------|----------------|------------|
| | Paramètre | $Pr(> t)$ | Paramètre | $Pr(> t)$ | Paramètre | $Pr(> t)$ | Paramètre | $Pr(> t)$ |
| Matières premières | | | | | | | | |
| COA | -0.047567 | 0.000000 | -0.070151 | 0.000000 | 0.993402 | 0.000000 | 0.099002 | 0.000000 |
| CLA | -0.043313 | 0.000000 | -0.052095 | 0.000000 | 0.994173 | 0.000000 | 0.097708 | 0.000000 |
| GOLDS | 0.185277 | 0.000000 | -0.026850 | 0.014773 | 0.978154 | 0.000000 | 0.147777 | 0.000040 |
| SILV | -0.242786 | 0.000000 | -0.027866 | 0.031881 | 0.967042 | 0.000000 | 0.208340 | 0.000000 |
| Devises étrangères | | | | | | | | |
| EURO/USD | -0.036210 | 0.000000 | -0.035566 | 0.000000 | 0.996280 | 0.000000 | 0.061957 | 0.000000 |
| GBP/USD | -0.032845 | 0.000000 | -0.054920 | 0.000000 | 0.996825 | 0.000000 | 0.028114 | 0.000000 |
| JPY/USD | -0.234415 | 0.000000 | 0.035865 | 0.004360 | 0.976085 | 0.000000 | 0.153116 | 0.000309 |
| Futurs sur Bons du Trésor | | | | | | | | |
| 10 YR T-Note | -0.093710 | 0.000000 | -0.007534 | 0.449680 | 0.991130 | 0.000000 | 0.106826 | 0.000000 |
| Euro Bund | -0.068746 | 0.000000 | -0.017715 | 0.023478 | 0.992811 | 0.000000 | 0.076458 | 0.000000 |

Tableau 4. 5 - Résultats des estimations des paramètres EGARCH (1,1)

Le phénomène de persistance apparaît clairement à travers la modélisation des variances conditionnelles par des processus EGARCH vu que les coefficients β sont tous très proches de 1. En outre, le choix d'une spécification du type EGARCH semble pertinent. La p-value associée au paramètre γ qui représente le « degré d'asymétrie » de chaque actif est inférieure à 5%, le paramètre γ de chaque actif est alors statistiquement non nul. Le modèle EGARCH capte très bien l'asymétrie de la volatilité caractérisant les marchés financiers.

| | $\gamma - \alpha$ | $\gamma + \alpha$ |
|----------------------------------|-------------------|-------------------|
| Matières premières | | |
| COA | 0.169153 | 0.028851 |
| CLA | 0.149803 | 0.045613 |
| GOLDS | 0.174627 | 0.120927 |
| SILV | 0.236206 | 0.180474 |
| Devises étrangères | | |
| EURO/USD | 0.097523 | 0.026391 |
| GBP/USD | 0.083034 | -0.026806 |
| JPY/USD | 0.117251 | 0.188981 |
| Futurs sur Bons du Trésor | | |
| 10 YR T-Note | 0.114360 | 0.099292 |
| Euro Bund | 0.094173 | 0.058743 |

Tableau 4. 6 - Valeurs des estimations des coefficients de sensibilité à la volatilité aux chocs positifs ($\gamma + \alpha$) et négatifs ($\gamma - \alpha$)

En effet, les impacts des chocs positifs et négatifs sur la volatilité sont dissymétriques : le coefficient $\gamma - \alpha$ de sensibilité de la volatilité aux chocs négatifs est nettement supérieur au

coefficient de sensibilité de la volatilité aux chocs positifs $\gamma + \alpha$. Par conséquent, le modèle EGARCH capte parfaitement l'asymétrie de la volatilité des marchés financiers.

4.2.4. Conclusion

Plusieurs modèles permettent d'évaluer la volatilité sur un marché donné. Ces modèles peuvent être structurels ou statistiques. Les processus GARCH font partie de cette dernière catégorie. L'importance de leur apport réside dans leur prise en compte de certains faits stylisés propres aux marchés financiers (distributions atypiques des rendements, présence d'effets d'asymétrie ...).

Le modèle EGARCH propose une relation explicative de la variance conditionnelle fondée sur quatre facteurs : le passé de cette variance qui introduit ainsi un phénomène d'inertie (ou de persistance) dans la relation, l'information passée contenue dans les rendements passés, l'asymétrie de la volatilité des rendements ainsi qu'un facteur constant. Ainsi, si l'hypothèse de constance de la variance conditionnelle est admise (i.e si l'équation est réduite à la constante seule) les deux premiers facteurs (noté $\alpha + \beta$) seront nuls.

D'après les résultats des estimations de la variance par le modèle E-GARCH(1,1), nous constatons que les paramètres α , β , γ sont significativement non nuls.

A l'instar des variances conditionnelles, l'hypothèse des corrélations constantes entre les actifs ne résiste pas à la réalité des faits. Engel proposent une spécification dynamique originale des corrélations conditionnelles dans le cadre de modèles GARCH multivariés, similaire dans leur conception à celle des variances conditionnelles décrites précédemment.

4.3. Modélisation des corrélations conditionnelles dynamiques

4.3.1. Modèle GARCH-DCC avec des rendements normaux

4.3.1.1. Rendements standardisés

Le modèle GARCH-DCC d'Engel est basé sur une hypothèse forte : la normalité conditionnelle des rendements. Or, d'après les résultats du chapitre précédent, nous constatons que les rendements ne suivent pas une loi normale. Afin de remédier à ce problème, Engel (2002) ainsi que Pesaran et Pesaran (2007) proposent l'utilisation des rendements standardisés définis comme suit :

$$z_{i,t} = \frac{r_{i,t}}{\sigma_{i,t}(\lambda_i)}$$

où $\sigma_{i,t}$ est la volatilité de l'actif i calculée à partir des 5 derniers jours précédents le jour t .

| | Min | Max | Moyenne | Médiane | Variance | Ecart-type | Skewness | Kurtosis |
|----------------------------------|---------|--------|---------|---------|----------|------------|----------|----------|
| Matières premières | | | | | | | | |
| COA | -6.4080 | 6.3570 | -0.0040 | -0.0108 | 1.4773 | 1.2154 | 0.0428 | 3.6003 |
| CLA | -3.5390 | 4.4860 | -0.0063 | 0.0000 | 1.4399 | 1.2000 | -0.0208 | 2.6740 |
| GOLDS | -3.4990 | 4.4980 | 0.0562 | 0.0529 | 1.3636 | 1.1677 | -0.0074 | 2.7730 |
| SILV | -3.2660 | 3.6400 | 0.0260 | 0.0744 | 1.3783 | 1.1740 | -0.0493 | 2.7144 |
| Devises étrangères | | | | | | | | |
| EURO/USD | -4.8310 | 3.6360 | -0.0338 | -0.0071 | 1.3773 | 1.1736 | -0.0790 | 2.7195 |
| GBP/USD | -4.4580 | 8.4290 | -0.0114 | -0.0164 | 1.4645 | 1.2101 | 0.1640 | 4.0294 |
| JPY/USD | -3.4940 | 3.0770 | -0.0027 | 0.0237 | 1.3818 | 1.1755 | -0.0198 | 2.6439 |
| Futurs sur Bons du Trésor | | | | | | | | |
| 10 YR T-Note | -4.7760 | 5.3720 | 0.0647 | 0.0564 | 1.3677 | 1.1695 | 0.0136 | 2.9485 |
| Euro Bund | -3.7100 | 7.5300 | 0.0155 | 0.0000 | 1.4356 | 1.1982 | 0.2221 | 4.0843 |

Tableau 4. 7 - Statistiques descriptives des rendements standardisés des actifs

Après transformation des rendements, nous constatons que la moyenne oscille autour de zéro pour les neuf actifs. La standardisation des rendements corrige aussi la kurtosis qui devient assez proche de 3. L'asymétrie des rendements qui devient proche de zéro.

Le test de Kolmogorov-Smirnov d'adéquation à la loi normale confirme la normalité des rendements standardisés.

| | Kolmogorov-Smirnov pour la loi normale | |
|----------------------------------|---|----------------|
| | D | P-value |
| Matières premières | | |
| COA | 0.0132 | 0.8980 |
| CLA | 0.0260 | 0.1547 |
| GOLDS | 0.0154 | 0.7641 |
| SILV | 0.0314 | 0.0480 |
| Devises étrangères | | |
| EURO/USD | 0.0177 | 0.5927 |
| GBP/USD | 0.0156 | 0.7456 |
| JPY/USD | 0.0143 | 0.8342 |
| Futurs sur Bons du Trésor | | |
| 10 YR T-Note | 0.0304 | 0.0610 |
| Euro Bund | 0.0195 | 0.4730 |

Tableau 4. 8 - Résultats du test d'adéquation à la loi normale pour les rendements standardisés des actifs

La p-value du test est supérieure à 5%. L'hypothèse de normalité des rendements n'est pas rejetée.

4.3.1.2. Résultats des estimations

L'estimation des paramètres du modèle GARCH(1,1) a déjà été effectuée dans la section passée. Les paramètres du modèle de corrélation dynamique (DCC-Alpha et DCC-Bêta) sont significativement non nuls.

| | Omega ω | | Alpha α | | Bêta β | |
|----------------------------------|--------------------|----------|-----------------|-------------------|--------------|-----------------|
| | Paramètre | Pr(> t) | Paramètre | Pr(> t) | Paramètre | Pr(> t) |
| Matières premières | | | | | | |
| COA | 0.000002 | 0.455400 | 0.061907 | 0.000680 | 0.936098 | 0.000000 |
| CLA | 0.000002 | 0.666477 | 0.054317 | 0.025458 | 0.943287 | 0.000000 |
| GOLDS | 0.000002 | 0.131760 | 0.059534 | 0.000000 | 0.926094 | 0.000000 |
| SILV | 0.000010 | 0.000160 | 0.088609 | 0.000000 | 0.893652 | 0.000000 |
| Devises étrangères | | | | | | |
| EURO/USD | 0.000000 | 0.838888 | 0.042652 | 0.000001 | 0.955068 | 0.000000 |
| GBP/USD | 0.000000 | 0.874545 | 0.045068 | 0.001232 | 0.951835 | 0.000000 |
| JPY/USD | 0.000000 | 0.468849 | 0.051126 | 0.000003 | 0.941330 | 0.000000 |
| Futurs sur Bons du Trésor | | | | | | |
| 10 YR T-Note | 0.000000 | 0.884400 | 0.030257 | 0.000000 | 0.966577 | 0.000000 |
| Euro Bund | 0.000000 | 0.858000 | 0.038703 | 0.216230 | 0.952891 | 0.000000 |
| | DCC – Alpha | | | DCC – Beta | | |
| | Paramètre | | Pr(> t) | Paramètre | | Pr(> t) |
| | 0.019495 | | 0.000000 | 0.957277 | | 0.000000 |

Tableau 4. 9 - Résultats des estimations des paramètres GARCH (1,1)-DCC pour chaque actif

Afin de mieux visualiser le degré d'interdépendance entre les différents actifs, nous traçons les corrélations conditionnelles dynamiques estimées pour chaque paire d'actifs (Voir annexe E).

Le graphe ci-dessous (en rouge) représente l'évolution de la corrélation conditionnelle dynamique entre le Brent Oil et le taux de change EUR/USD de 2008 à 2014. La ligne bleu représente la moyenne des corrélations sur la fenêtre temporelle choisie tandis que la ligne verte se trouvant au dessus représente la moyenne des corrélations + son écart-type et celle se trouvant au dessous représente moyenne des corrélations - l'écart-type.

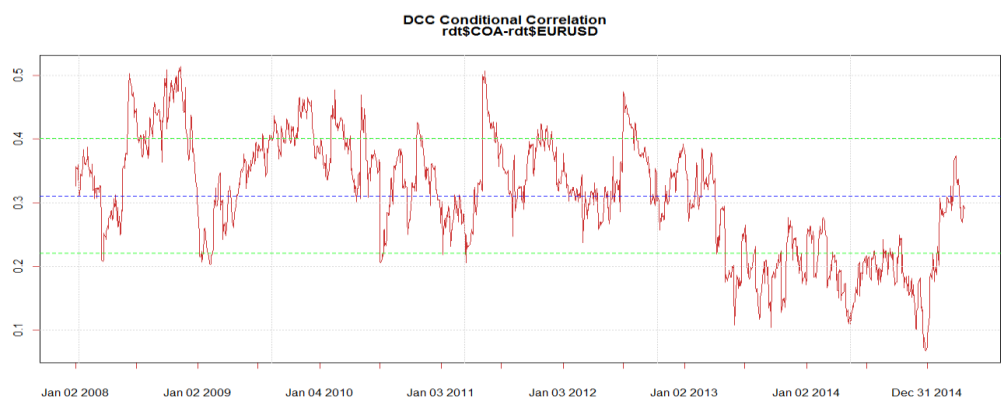


Figure 4. 5 - Evolution de la corrélation conditionnelle dynamique entre le Brent Oil et l'EURO/USD

Les graphes des évolutions des corrélations dynamiques (Figure 4.5 et annexe G) entre les différents couples d'actifs laissent entrevoir des « paquets » de fortes et de faibles corrélations, matérialisant ainsi le phénomène de persistance déjà mentionné.

Statistiquement, le coefficient DCC-Bêta mesurant le degré d'inertie vaut 0.957 (très proche de 1). La présence de phénomènes de persistance dans l'évolution de la matrice de corrélation entre les rendements est par conséquent confirmée. Ainsi, quand un coefficient de corrélation atteint un niveau donné sous l'effet d'un choc, il y reste un certain temps. Le coefficient DCC-Alpha, valant 0.019, est significativement différent de zéro (p-value < 5%). Par conséquent, les chocs récents impactent aussi l'évolution des corrélations.

4.3.2. Modèle GARCH-DCC avec des rendements suivant la loi de Student

4.3.2.1. Ajustement à la loi de Student

D'après l'analyse descriptive des données (cf. Chapitre 3), nous avons démontré que les rendements ne s'ajustent pas à la loi normale. Leurs kurtosis étant supérieurs à 3, l'occurrence d'évènements rares est alors fréquente. Ces éléments nous laissent supposer que la loi de Student pourrait mieux ajuster les rendements des actifs.

Afin de vérifier si les rendements des actifs s'ajustent correctement à la loi de Student, nous effectuons le test de Kolmogorov-Smirnov (Les sorties R se trouvent dans l'annexe D)

| | Kolmogorov-Smirnov pour la loi de Student | |
|----------------------------------|---|---------|
| | D | P-value |
| Matières premières | | |
| COA | 0.018225 | 0.5581 |
| CLA | 0.018158 | 0.5628 |
| GOLDS | 0.019752 | 0.4536 |
| SILV | 0.018653 | 0.5279 |
| Devises étrangères | | |
| EURO/USD | 0.023896 | 0.2317 |
| GBP/USD | 0.018329 | 0.5506 |
| JPY/USD | 0.023008 | 0.2709 |
| Futurs sur Bons du Trésor | | |
| 10 YR T-Note | 0.034224 | 0.02411 |
| Euro Bund | 0.020738 | 0.3919 |

Tableau 4. 10 - Résultats du test de Kolmogorov-Smirnov pour l'ajustement des rendements des neuf actifs à la loi de Student

Les p-value des tests sont tous supérieurs à 5%, par conséquent nous rejetons l'hypothèse de non adéquation à la loi de Student. Notre choix semble alors pertinent.

4.3.2.2. Résultats des estimations

| | Omega ω | | Alpha α | | Bêta β | |
|----------------------------------|--------------------|----------|-------------------|----------|-------------------------------|----------|
| | Paramètre | Pr(> t) | Paramètre | Pr(> t) | Paramètre | Pr(> t) |
| Matières premières | | | | | | |
| COA | 0.000002 | 0.455400 | 0.061907 | 0.000680 | 0.936098 | 0.000000 |
| CLA | 0.000002 | 0.666477 | 0.054317 | 0.025458 | 0.943287 | 0.000000 |
| GOLDS | 0.000002 | 0.131760 | 0.059534 | 0.000000 | 0.926094 | 0.000000 |
| SILV | 0.000010 | 0.000160 | 0.088609 | 0.000000 | 0.893652 | 0.000000 |
| Devises étrangères | | | | | | |
| EURO/USD | 0.000000 | 0.838888 | 0.042652 | 0.000001 | 0.955068 | 0.000000 |
| GBP/USD | 0.000000 | 0.874545 | 0.045068 | 0.001232 | 0.951835 | 0.000000 |
| JPY/USD | 0.000000 | 0.468849 | 0.051126 | 0.000003 | 0.941330 | 0.000000 |
| Futurs sur Bons du Trésor | | | | | | |
| 10 YR T-Note | 0.000000 | 0.884400 | 0.030257 | 0.000000 | 0.966577 | 0.000000 |
| Euro Bund | 0.000000 | 0.858000 | 0.038703 | 0.216230 | 0.952891 | 0.000000 |
| | DCC - Alpha | | DCC - Beta | | DCC - ν | |
| | Paramètre | Pr(> t) | Paramètre | Pr(> t) | Paramètre | Pr(> t) |
| | 0.017892 | 0 | 0.96449 | 0 | 7.534367 | 0 |

Tableau 4. 11 - Résultats des estimations des paramètres GARCH (1,1)-DCC (Student) pour chaque actif

4.3.3. Modèle EGARCH-DCC avec des rendements normaux

Dans ce paragraphe, nous présentons les résultats des estimations des paramètres du modèle EGARCH-DCC où la volatilité de chaque actif est modélisée par un processus EGARCH et les rendements sont supposés normaux. Les résultats ont déjà été présentés et analysés dans le paragraphe 4.2.3.2. Le tableau ci-dessous résume les estimations de la deuxième partie du processus qui concerne la matrice de corrélation.

| DCC - Alpha | | DCC - Beta | |
|-----------------|----------|-----------------|----------|
| Paramètre | Pr(> t) | Paramètre | Pr(> t) |
| 0.018966 | 0 | 0.959944 | 0 |

Tableau 4. 12 - Estimation des paramètres du modèle EGARCH-DCC(Normale)

Les p-value sont toutes supérieures au seuil critique de 5%. Les paramètres du modèle de corrélation dynamique sont donc significativement non nuls.

4.3.4. Modèle EGARCH-DCC avec des rendements suivant la loi de Student

Dans ce paragraphe, nous présentons les résultats des estimations des paramètres du modèle EGARCH-DCC où la volatilité de chaque actif est modélisée par un processus EGARCH et les rendements sont supposés suivre la loi de Student. Les résultats ont déjà été présentés et analysés dans le paragraphe 4.3.3.2 . Le tableau ci-dessous résume les estimations de la deuxième partie du processus qui concerne la matrice de corrélation.

| DCC – Alpha | | DCC – Beta | | DCC – ν | |
|-----------------|------------|----------------|------------|-----------------|------------|
| Paramètre | $Pr(> t)$ | Paramètre | $Pr(> t)$ | Paramètre | $Pr(> t)$ |
| 0.018148 | 0 | 0.96468 | 0 | 7.603437 | 0 |

Tableau 4. 13 - Estimation des paramètres du modèle EGARCH-DCC(Student)

Les p-value sont toutes supérieures au seuil critique de 5%. Les paramètres du modèle de corrélation dynamique sont donc significativement non nuls.

4.3.5. Conclusion

La première phase d'estimation du modèle DCC nous a permis de retenir le processus EGARCH pour modéliser la volatilité des actifs. Lors de la deuxième phase, nous constatons que les paramètres propres à la matrice de corrélation (DCC-Alpha , DCC-Bêta et DCC- ν pour la loi de Student) sont tous significativement non nuls. Par conséquent, le choix le plus adéquat serait le modèle EGARCH-DCC en adoptant une modélisation des rendements par la loi de Student.

4.4. Exploitation des résultats

Afin de détecter les paires d'actifs les plus corrélées, nous calculons la moyennes des corrélations dynamiques conditionnelles estimées par le modèle EGARCH-DCC sur la période allant du 03/01/2008 au 22/04/2015. Le tableau ci-dessous résume les résultats obtenus :

| | COA | CLA | GOLDS | SILV | EURO/USD | GBP/USD | JPY/USD | 10 YR T-Note | Euro Bund |
|--------------|---------|---------|--------|--------|----------|---------|---------|--------------|-----------|
| COA | 1 | 82.89% | 30.61% | 38.98% | 31.10% | 30.02% | -7.49% | 17.63% | -19.96% |
| CLA | 82.89% | 1 | 31.40% | 39.53% | 34.04% | 31.42% | -5.82% | 19.44% | -22.31% |
| GOLDS | 30.61% | 31.40% | 1 | 82.23% | 35.08% | 30.98% | 25.75% | 35.44% | 18.80% |
| SILV | 38.98% | 39.53% | 82.23% | 1 | 38.98% | 35.68% | 14.22% | 33.84% | 5.51% |
| EURO/USD | 31.10% | 34.04% | 35.08% | 38.98% | 1 | 61.25% | 20.43% | 79.78% | -1.58% |
| GBP/USD | 30.02% | 31.42% | 30.98% | 35.68% | 61.25% | 1 | 12.42% | 46.77% | -3.89% |
| JPY/USD | -7.49% | -5.82% | 25.75% | 14.22% | 20.43% | 12.42% | 1 | 35.89% | 47.57% |
| 10 YR T-Note | 17.63% | 19.44% | 35.44% | 33.84% | 79.78% | 46.77% | 35.89% | 1 | 28.40% |
| Euro Bund | -19.96% | -22.31% | 18.80% | 5.51% | -1.58% | -3.89% | 47.57% | 28.40% | 1 |

Tableau 4. 14 - Matrice des corrélations moyennes entre les actifs sur la période allant du 03/01/2008 au 22/04/2015

Ainsi, les paires d'actifs les mieux corrélés sur la période allant du 03/01/2008 au 22/04/2015 sont :

| Paire | Corrélation moyenne |
|---------------------|---------------------|
| COA/CLA | 82.89% |
| GOLDS/SILV | 82.23% |
| EUROUSD/Euro Bund | 79.78% |
| EUROUSD/GBPUSD | 61.25% |
| Euro Bund/JPYUSD | 47.57% |
| GBPUSD/10 YR T-Note | 46.77% |
| CLA/SILV | 39.53% |
| SILV/EURO/USD | 38.98% |
| COA/SILV | 38.98% |
| JPYUSD/10 YR T-Note | 35.89% |
| SILV/GBPUSD | 35.68% |
| GOLDS/10 YR T-Note | 35.44% |
| GOLDS/EUROUSD | 35.08% |
| CLA/EUROUSD | 34.04% |
| SILV/10 YR T-Note | 33.84% |
| CLA/GBPUSD | 31.42% |

Tableau 4. 15 - Liste des paires d'actifs les mieux corrélés entre 03/01/2008 et le 22/04/2015

4.5. Prévisions

Le but ultime de la modélisation de la matrice de corrélation entre les neuf actifs étudiés est de pouvoir fournir des estimations de la corrélation entre chaque paires d'actifs à chaque instant $T + k$; $[1, \dots, T]$ étant la fenêtre temporelle au cours de laquelle la matrice a été estimée.

La prévision de la matrice de corrélations $H_{t+k} = D_{t+k} R_{t+k} D_{t+k}$ à l'instant $t+k$ s'effectue en deux étapes.

Dans une première étape, les variances conditionnelles de chaque actif sont estimées suivant le processus GARCH qui les modélise. La matrice $D_{t+k} = \text{diag}(\sqrt{\sigma_{1,t+k}^2}, \dots, \sqrt{\sigma_{m,t+k}^2})$ est à ce stade estimée.

Dans la deuxième étape, les éléments de la matrice de corrélations sont estimés. Cependant, il faut noter qu'ils ne sont pas estimés directement : les éléments $q_{ij,t}$ de la matrice Q_t qui sont estimés, vu les corrélations, ne sont que le rapport de ces variances covariances.

Comme vu précédemment, la structure de la matrice corrélation conditionnelle dynamique suit un processus GARCH multivarié non-linéaire :

$$Q_t = (1 - \phi_1 - \phi_2) \bar{Q} + bQ_{t-1} + a(\hat{\varepsilon}_{t-1}' \hat{\varepsilon}_{t-1})$$

Sous l'hypothèse $\bar{R} = \bar{Q}$ et $E[R_{t+i} | t] = E[Q_{t+i} | t]$ pour $i=1$ à l'horizon k , une approche similaire à celle utilisé dans la prévision de la volatilité suivant le modèle GARCH(1,1) peut être utilisée pour fournir une prévision de la matrice de corrélation dynamique.

Puisque nous avons $E[\varepsilon_{t+k-1} \varepsilon'_{t+k-1} | t] = E[R_{t+k-1} | t]$, la prévision de la matrice de corrélation à un horizon de k (k prochain jour) est :

$$E_t[R_{t+k}] = \sum_{i=0}^{k-2} (1 - a - b) \bar{R} (a + b)^i + (a + b)^{k-1} R_{t+i}$$

La matrice de prévision de la corrélation conditionnelle dynamique va converger à long terme vers la matrice de corrélation inconditionnelle des résidus standardisés. En outre, l'influence du terme R_{t+1} va diminuer avec le ratio $(\phi_1 + \phi_2)$ pour chaque pas futur k .

Le graphe ci-dessous retrace l'estimation de la corrélation entre le Brent Oil et les huit autres actifs, sur les 100 jours suivant le 22/04/2015. (Voir Annexe O pour l'ensemble des paires)

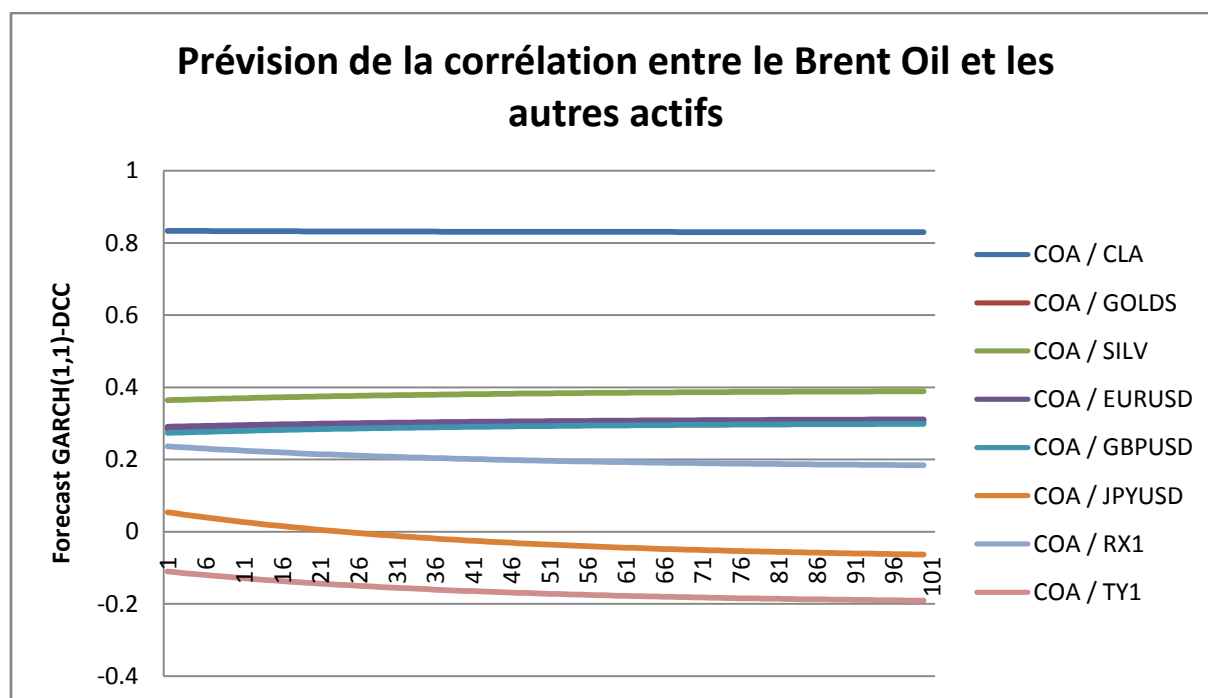


Figure 4. 6 - Prévision de la corrélation entre le Brent Oil et les autres actifs

Après l'estimation de la matrice de corrélation dynamique entre les neuf actifs, nous calculons la moyenne journalière de ces corrélations afin de fournir un classement des actifs les plus corrélés sur les 100 jours suivant la période d'estimation (à partir du 22/04/2015).

| Paire | Corrélation moyenne | Paire | Corrélation moyenne |
|-----------------|---------------------|-----------------|---------------------|
| COA / CLA | 83.07% | COA / EURUSD | 30.42% |
| EURUSD / RX1 | 82.52% | COA / GOLDS | 29.77% |
| GOLDS / SILV | 82.45% | COA / GBPUSD | 29.06% |
| EURUSD / GBPUSD | 64.03% | GOLDS / GBPUSD | 29.03% |
| GBPUSD / RX1 | 51.70% | GOLDS / JPYUSD | 28.87% |
| JPYUSD / TY1 | 48.60% | EURUSD / JPYUSD | 25.47% |
| JPYUSD / RX1 | 40.04% | GOLDS / TY1 | 22.81% |
| CLA / SILV | 39.14% | CLA / RX1 | 21.32% |
| COA / SILV | 38.11% | COA / RX1 | 20.11% |
| SILV / EURUSD | 37.84% | SILV / JPYUSD | 18.71% |
| GOLDS / RX1 | 35.76% | GBPUSD / JPYUSD | 18.44% |
| SILV / RX1 | 34.70% | SILV / TY1 | 10.91% |
| GOLDS / EURUSD | 34.14% | EURUSD / TY1 | 4.76% |
| SILV / GBPUSD | 33.65% | GBPUSD / TY1 | 3.34% |
| CLA / EURUSD | 33.40% | CLA / JPYUSD | -0.76% |
| RX1 / TY1 | 31.80% | COA / JPYUSD | -2.52% |
| CLA / GOLDS | 31.22% | COA / TY1 | -16.49% |
| CLA / GBPUSD | 30.43% | CLA / TY1 | -19.10% |

Tableau 4. 16 - Liste des paires d'actifs les mieux corrélés sur les 100 jours suivant la date du 22/04/2015 d'après les prévisions estimées

Les paires d'actifs les plus corrélées sont le Brent Crude Oil avec le WTI, l'EURO/USD avec les Euro Bund, l'or et l'argent, l'EURO/USD et le GBP/USD et finalement le GBP/USD avec les Euro Bund. Nous constatons aussi que toutes ces corrélations sont positives.

En outre, la corrélation entre le Brent Oil et le WTI, et celle entre l'or et l'argent semblent constantes. Les paires (EURO/USD /Euro Bund), (EURO/USD / GBP/USD) et (GBP/USD /Euro Bund) présentent une tendance baissière.

4.6. Conclusion

En combinant la spécification des corrélations conditionnelles proposée par Engle (2002) aux caractéristiques des rendements des neuf actifs étudiés, nous avons pu analyser la dynamique de la dépendance entre ces derniers sur le court terme. En effet, le modèle retenu – EGARCH-DCC aux rendements suivant la loi de Student – permet de modéliser de façon commode, au vu des difficultés de l'analyse statistique multivariée, la matrice de corrélation conditionnelle.

Dans un premier temps, nous avons démontré les limites du modèle GARCH. Ce dernier ne prend pas en compte un phénomène propre aux marchés financiers : l'asymétrie de la réaction des rendements aux chocs passés. En effet, le marché réagit de manière différente aux mauvaises nouvelles par rapport aux bonnes nouvelles. Aussi la volatilité du marché est-elle affectée différemment. Le modèle EGARCH capte parfaitement cette caractéristique.

Dans un second temps, nous avons opté pour la distribution de Student comme meilleur modèle d'ajustement des rendements. Ce choix est justifié par le fait que la loi de Student est une loi à queue épaisse. Par conséquent, elle prend en compte les événements rares et extrêmes qui caractérisent aussi les rendements (comme nous l'avons prouvé dans le troisième chapitre lors de l'analyse des données).

Finalement, nous avons fourni des prévisions sur les 100 prochains jours suivant la date du 22/04/2015 (vu que notre base de données se limite à cette date) et dressé la liste des paires qui présentent une interdépendance robuste sur le court terme.

Chapitre 5

Analyse à long terme des interdépendances entre les marchés Commo/FX

Introduction

Dans le chapitre précédent, nous avons étudié la robustesse de la relation de dépendance entre les actifs composant notre portefeuille. Ainsi, nous avons établi la liste des paires les plus corrélées. Cependant, l'existence d'une interdépendance entre les actifs sur le court terme ne garantit nullement la persistance de cette relation sur le long terme. A titre d'exemple, si deux actifs sont corrélés à 50%, nous ne pouvons trancher quant à l'évolution future de leurs mouvements communs. En des termes plus simples, nous ne pouvons savoir si l'évolution d'un actif impactera d'une manière ou d'une autre l'évolution du second actif. Il nous est aussi impossible de détecter l'existence d'un équilibre de long terme.

Afin d'analyser la dynamique des co-mouvements régissant les différents actifs financiers sur le long terme, nous faisons appel à la théorie de la cointégration.

Deux ou plusieurs séries sont cointégrées si elles adoptent un comportement semblable dans le temps et génèrent un équilibre statistique de long terme. A court terme, ces variables peuvent évoluer dans des directions différentes. Cependant, à long terme, elles ne peuvent diverger durablement. Une force de rappel les ramènera vers un équilibre commun.

Afin de déceler les paires d'actifs les plus cointégrées, nous adoptant la démarche suivante. Nous commençons par mener une étude de cointégration au sens de Johansen sur les neuf séries des prix des actifs. L'objectif étant d'infirmer ou de confirmer l'existence de vecteurs cointégrés. L'étude est alors menée sur trois périodes emboîtées. Ensuite, à la lumière des résultats obtenus, nous analysons la cointégration entre les actifs pris deux à deux. Cette étape est extrêmement importante dans le sens où elle nous permettra de sélectionner les paires les plus cointégrées et qui seront injectées dans une stratégie de Trading détaillée dans le dernier chapitre.

5.1. Notion de cointégration

« Imaginer un homme ivre avec son chien, se baladant dans un parc. Si le chien n'est pas tenu en laisse, il n'y a aucune raison pour que la distance entre l'homme et le chien reste bornée. En revanche, si le chien est tenu par une laisse élastique, la distance oscille en restant bornée.

Si nous notons le chemin parcouru par l'homme par h_t et celui parcouru par son chien par c_t , la variable $h_t - c_t$ est alors stationnaire. Le chemin de l'homme et du chien sont alors dits « cointégrés ».

En d'autres termes, il y a cointégration car les chemins possèdent une tendance stochastique commune et leur différence est stationnaire. On ne sait pas où ils vont mais ils y vont ensemble! »

D'après Murray, M. P. "A drunk and her dog : An illustration of cointegration and error correction".¹⁶

La cointégration est une propriété statistique attribuée aux séries temporelles.

On dit que deux ou plusieurs séries temporelles sont cointégrées, si elles ont le même type de mouvement stochastique : c'est à dire, ils ont une tendance commune et équilibrée à long terme, mais ne varient pas nécessairement de la même façon.

5.2. Test de cointégration de Johansen

Le test de cointégration présenté par Johansen (1988) et développé par Johansen et Juselius (1990) est largement utilisé dans des études empiriques des relations de long terme entre les actifs financiers issus de différents marchés. Les tests déterminent le rang de la cointégration (le nombre de vecteur cointégrés) dans un système multivarié composé de variables non stationnaires. Deux tests ont été suggérés par Johansen : le test de la trace « Trace test » et « The maximum eigenvalue tests ».

5.2.1. Trace Test

Le test de la Trace testant l'hypothèse nulle de l'existence de r relations de cointégration contre l'hypothèse d'existence de n relations de cointégration est donnée par :

$$\lambda_{trace} = -T \sum_{i=r+1}^n \log(1 - \hat{\lambda}_i)$$

où $r=0,1,2 \dots, n-1$ et $\hat{\lambda}_i$ représente la valeur estimée du i ème Eigenvalue issu du problème d'Eigenvalue.

¹⁶ Murray, M. P. "A drunk and her dog : An illustration of cointegration and error correction" . The American Statistician, Vol. 48, No. 1, February 1994.

5.2.2. Maximum eigenvalue test

Le test du « maximum eigenvalue » teste l'hypothèse nulle de l'existence de r vecteurs cointégrés contre l'existence de $r+1$ vecteurs cointégrés :

$$\begin{cases} H_0 : \text{Il existe } r \text{ relation de cointégration} \\ H_1 : \text{Il existe } r + 1 \text{ relation de cointégration} \end{cases}$$

La statistique du « maximum eigenvalue test » est définie par :

$$\lambda_{max} = -T \log(1 - \hat{\lambda}_{r+1}) \text{ où } T \text{ est la période totale d'estimation.}$$

Les valeurs critiques des deux tests sont tabulées par Osteward et Lenum (1992). En outre, Cheung et Lai (1995)¹⁷ ont prouvé à travers des tests de simulations par Monte Carlo que le test de la trace est plus robuste que le test du « maximum eigenvalue test » face à des données présentant un excès de kurtosis et une distribution asymétrique.

5.3. Test de cointégration récursive

5.3.1. Méthodologie du test

Hansen et Johansen (1993) ont suggéré une méthode d'analyse permettant de capter la dynamique de l'évolution des relations de cointégration à long terme, entre plusieurs séries, en se basant sur le test de la Trace.

Dans un premier lieu, la trace du test de Johansen est calculée pour une période initiale t_0 à t_n . Ensuite, l'échantillon est élargi d'une semaine et nous calculons de nouveau la trace du test de Johansen pour la période s'étalant du t_0 à t_{n+j} . La procédure est itérée jusqu'à ce que tout l'échantillon de départ soit couvert. La statistique du test de Johansen obtenue à la dernière itération est équivalente au test standard de de Johansen et Juselius (1990) estimé sur toute la période.

Les valeurs de la trace du test obtenues par cette procédure itérative sont tracées puis examinées visuellement. Pour faciliter l'interprétation du graphe, nous traçons la valeur de la trace du test divisée par la statistique critique à 10 %¹⁸. Les valeurs obtenues sont alors comparées à la valeur 1. Ainsi, si le graphe dépasse la droite $y=1$, les vecteurs étudiés présentent alors une relation de cointégration. En outre, la tendance du graphe indique la tendance d'évolution de la relation de cointégration entre les variables étudiés : si le graphe présente une pente ascendante, la relation de cointégration s'accroît avec le temps et vice-versa.

¹⁷ Hung, B. and Cheung, Y. (1995) "Interdependence of Asian Equity Markets", Journal of Business, Finance and Accounting.

¹⁸ Le choix du % d'erreur reste subjectif.

5.3.2. Conditions d'application du test de cointégration de Johansen

Les variables pouvant se prêter au test de cointégration de Johansen doivent vérifier certaines conditions de stationnarité du deuxième ordre :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Les séries temporelles doivent être non stationnaire} \\ \text{La première différence}^{19} \text{ des séries doit être stationnaire} \end{array} \right.$$

Le tableau suivant retrace les résultats du test de racine unitaire de l'ADF²⁰ pour les neuf séries temporelles des prix des actifs.

| | Intercept only | | Trend and intercept | | No trend and no Intercept | |
|----------------------------------|----------------|-------------------|---------------------|-------------------|---------------------------|-------------------|
| | Test Statistic | 5% Critical Value | Test Statistic | 5% Critical Value | Test Statistic | 5% Critical Value |
| Matières premières | | | | | | |
| COA | -0.169 | -2.86 | 0.201 | -3.41 | -1.008 | -1.95 |
| CLA | -0.546 | -2.86 | -0.458 | -3.41 | -1.115 | -1.95 |
| GOLDS | -0.562 | -2.86 | 0.77 | -3.41 | -0.728 | -1.95 |
| SILV | -0.77 | -2.86 | -0.27 | -3.41 | -0.765 | -1.95 |
| Devises étrangères | | | | | | |
| EURO/USD | 2.309 | -2.86 | 1.489 | -3.41 | -1.121 | -1.95 |
| GBP/USD | 0.203 | -2.86 | -0.333 | -3.41 | -1.256 | -1.95 |
| JPY/USD | 1.444 | -2.86 | 1.094 | -3.41 | -0.835 | -1.95 |
| Futurs sur Bons du Trésor | | | | | | |
| 10 YR T-Note | -1.207 | -2.86 | -0.017 | -3.41 | -0.926 | -1.95 |
| Euro Bund | -0.068 | -2.86 | 1.797 | -3.41 | -0.937 | -1.95 |

Tableau 5.1 - Résultats du test de l'ADF des séries temporelles des prix des actifs

Ainsi d'après le tableau ci-dessus, nous constatons que les séries des prix des actifs sont toutes non stationnaires. Nous testons ensuite la stationnarité de la première différence des prix.

¹⁹ Soit X_t une série temporelle, la première différence de X_t est $X_t - X_{t-1}$.

²⁰ Augmented Dickey-Fuller, voir Annexe K

| | Intercept only | | Trend and intercept | | No trend and no Intercept | |
|----------------------------------|----------------|-------------------------|---------------------|-------------------------|---------------------------|-------------------------|
| | Test Statistic | 5% Critical Value | Test Statistic | 5% Critical Value | Test Statistic | 5% Critical Value |
| Matières premières | | | | | | |
| COA | -40.877 | -2.86 | -40.907 | -3.41 | -40.87 | -1.95 |
| CLA | -44.796 | -2.86 | -44.812 | -3.41 | -44.787 | -1.95 |
| GOLDS | -26.132 | -2.86 | -26.195 | -3.41 | -26.142 | -1.95 |
| SILV | -41.533 | -2.86 | -41.578 | -3.41 | -41.539 | -1.95 |
| Devises étrangères | | | | | | |
| EURO/USD | -17.341 | -2.86 | -17.372 | -3.41 | -17.317 | -1.95 |
| GBP/USD | -13.862 | -2.86 | -13.836 | -3.41 | -13.836 | -1.95 |
| JPY/USD | -18.494 | -2.86 | -18.6 | -3.41 | -18.49 | -1.95 |
| Futurs sur Bons du Trésor | | | | | | |
| 10 YR T-Note | -8.588 | -2.86 | -8.605 | -3.41 | -8.6 | -1.95 |
| Euro Bund | -14.541 | -2.86 | -14.568 | -3.41 | -14.543 | -1.95 |

Tableau 5.2 - Résultats du test de l'ADF des séries temporelles de la première différence des prix des actifs

Le test de l'ADF prouve que la première différence des séries temporelles est stationnaire. Les variables peuvent par conséquent se prêter au test de Johansen.

Sur la base de nos estimations, on peut conclure que les séries des 9 actifs étudiés sont $I(1)$ ²¹ au seuil de 5%.

5.4. Résultats du test de cointégration

Afin de capter l'existence potentielle de vecteurs cointégrés parmi les neuf actifs étudiés, nous appliquons le test de cointégration de Johansen et Juselius sur le système des neuf actifs étudiés et ce pour trois périodes d'études.

5.4.1. Première période d'étude : du 6/1/2008 au 22/4/2015

5.4.1.1. Choix du retard optimal

Avant de procéder au test de Johansen, la valeur optimale du lag devrait être déterminée car une mauvaise spécification de ce dernier mènera vers des résultats fallacieux. Il existe plusieurs critères de choix du lag, nous choisissons alors le lag proposé par le plus grand nombre de critères.

²¹ Intégrées d'ordre 1

```
varsoc COA CLA GOLDS SILV EURUSD GBPUSD JPYUSD TY1 RX1
```

Selection-order criteria

Sample: 1/6/2008 - 4/22/2015 Number of obs = 2664

| lag | LL | LR | df | p | FPE | AIC | HQIC | SBIC |
|-----|----------|---------|----|-------|----------|-----------|-----------|-----------|
| 0 | -36986.3 | | | | 9.33113 | 27.7742 | 27.7814 | 27.7941 |
| 1 | 14092.2 | 1.0e+05 | 81 | 0.000 | 2.2e-16 | -10.5122 | -10.4402* | -10.3133* |
| 2 | 14245.8 | 307.07* | 81 | 0.000 | 2.1e-16* | -10.5666* | -10.4299 | -10.1887 |
| 3 | 14289 | 86.447 | 81 | 0.319 | 2.1e-16 | -10.5383 | -10.3367 | -9.98135 |
| 4 | 14334.5 | 90.984 | 81 | 0.210 | 2.2e-16 | -10.5116 | -10.2453 | -9.77568 |

Endogenous: COA CLA GOLDS SILV EURUSD GBPUSD JPYUSD TY1 RX1

Exogenous: _cons

Tableau 5.3 - Sortie Stata pour le choix du retard optimal au test de Johansen pour la période allant 6/1/2008 au 22/4/2015

Deux critères proposent un lag égal à 1 et trois critères proposent un lag égal à 2. Par conséquent, la valeur optimale du lag est la valeur 2.

5.4.1.2. Résultats du test de cointégration de Johansen

Les résultats du test de cointégration de Johansen laissent supposer qu'il n'existe aucune relation de cointégration entre les neuf actifs sur la période allant du 4/1/2008 au 22/4/2015.

```
. vecrank TY1 RX1 JPYUSD COA CLA GOLDS SILV EURUSD GBPUSD, trend(constant)
```

Johansen tests for cointegration

Trend: constant Number of obs = 2666
Sample: 1/4/2008 - 4/22/2015 Lags = 2

| maximum | | | | | 5% |
|---------|-------|-----------|------------|-----------------|----------------|
| rank | parms | LL | eigenvalue | trace statistic | critical value |
| 0 | 90 | 14173.82 | . | 179.7112* | 192.89 |
| 1 | 107 | 14199.078 | 0.01877 | 129.1949 | 156.00 |
| 2 | 122 | 14221.167 | 0.01643 | 85.0163 | 124.24 |
| 3 | 135 | 14235.254 | 0.01051 | 56.8424 | 94.15 |
| 4 | 146 | 14245.244 | 0.00747 | 36.8633 | 68.52 |
| 5 | 155 | 14253.222 | 0.00597 | 20.9063 | 47.21 |
| 6 | 162 | 14258.384 | 0.00387 | 10.5822 | 29.68 |
| 7 | 167 | 14261.488 | 0.00233 | 4.3745 | 15.41 |
| 8 | 170 | 14263.519 | 0.00152 | 0.3136 | 3.76 |
| 9 | 171 | 14263.675 | 0.00012 | | |

Tableau 5.4 - Sortie Stata du test de Johansen pour la période allant 6/1/2008 au 22/4/2015

Bien que le test de Johansen ci-dessus prouve l'absence de cointégration entre les 9 variables, il ne présente aucune indication sur la dynamique de l'évolution de la relation de cointégration.

5.4.1.3. Résultats du test de cointégration récursive de Johansen

Le test de statique de Johansen présente une limite importante puisqu'il ne permet pas de détecter la dynamique de l'évolution de la relation de cointégration entre les séries financières. Dans le cas de figure où les variables sont en train de devenir cointégrées, le test du nombre de relations de cointégration (i.e de l'existence de relations stables à long terme) conduit à un rejet systématique de l'hypothèse de cointégration.

Afin d'explorer la dynamique de la relation de cointégration entre les neuf actifs, nous traçons le graphe de la statistique récursive du test de la trace de Johansen rapporté à la statistique critique au seuil de 10% comme nous l'avons expliqué dans le paragraphe 5.3.1. Le code élaboré grâce au logiciel R se trouve dans l'annexe M.

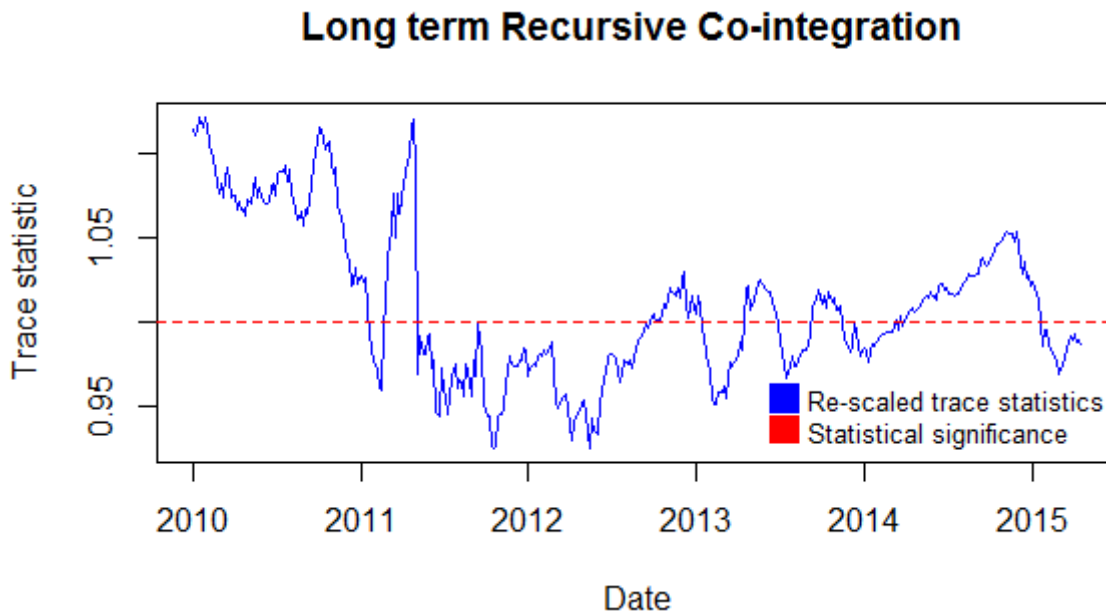


Figure 5. 1 Evolution de la statistique récursive du test de cointégration de Johansen pour la période 6/1/2008 au 22/4/2015

D'après le graphe ci-dessus, nous remarquons que la dynamique de cointégration est instable. Nous retrouvons des périodes d'alternances de forte cointégration (de 2010 à 2011 et entre mi 2014 et fin 2015) et de faible cointégration.

5.4.2. Deuxième période d'étude : du 5/1/2010 au 22/4/2015

Nous reprenons la même procédure pour la période d'étalant entre le 5/1/2010 et le 22/4/2015.

5.4.2.1. Choix du retard optimal

```
. varsoc COA CLA GOLDS SILV EURUSD GBPUSD JPYUSD TY1 RX1

Selection-order criteria
Sample: 1/5/2010 - 4/22/2015          Number of obs   =   1934
```

| lag | LL | LR | df | p | FPE | AIC | HQIC | SBIC |
|-----|----------|---------|----|-------|----------|-----------|-----------|-----------|
| 0 | -21748.9 | | | | .04781 | 22.5004 | 22.5099 | 22.5263 |
| 1 | 15823.8 | 75145 | 81 | 0.000 | 6.9e-19 | -16.2707 | -16.1754* | -16.0117* |
| 2 | 15921.7 | 195.82 | 81 | 0.000 | 6.8e-19* | -16.2882* | -16.1072 | -15.796 |
| 3 | 15973.3 | 103.14* | 81 | 0.049 | 7.0e-19 | -16.2578 | -15.991 | -15.5324 |
| 4 | 16013.8 | 81.038 | 81 | 0.478 | 7.3e-19 | -16.2159 | -15.8633 | -15.2573 |

```
Endogenous:  COA CLA GOLDS SILV EURUSD GBPUSD JPYUSD TY1 RX1
Exogenous:   _cons
```

Tableau 5. 5 – Sortie Stata pour le choix du retard optimal au test de Johansen pour la période allant 5/1/2010 au 22/4/2015

Deux critères choisissent un lag égal à 1 tandis que deux autres choisissent un lag égal à 2. Dans ce cas, nous choisissons le maximum des deux retards. Ainsi, le nombre de retard retenu est de 2.

5.4.2.2. Résultats du test de cointégration de Johansen

```
. vecrank TY1 RX1 JPYUSD COA CLA GOLDS SILV EURUSD GBPUSD, trend(constant)

Johansen tests for cointegration
Trend: constant          Number of obs =   1936
Sample: 1/3/2010 - 4/22/2015          Lags =   2
```

| maximum | rank | parms | LL | eigenvalue | trace statistic | 5% critical value |
|---------|------|-------|-----------|------------|-----------------|-------------------|
| | 0 | 90 | 15846.139 | . | 184.9194* | 192.89 |
| | 1 | 107 | 15873.047 | 0.02741 | 131.1033 | 156.00 |
| | 2 | 122 | 15888.403 | 0.01574 | 100.3914 | 124.24 |
| | 3 | 135 | 15903.182 | 0.01515 | 70.8340 | 94.15 |
| | 4 | 146 | 15915.144 | 0.01228 | 46.9090 | 68.52 |
| | 5 | 155 | 15926.366 | 0.01153 | 24.4645 | 47.21 |
| | 6 | 162 | 15932.517 | 0.00633 | 12.1637 | 29.68 |
| | 7 | 167 | 15936.14 | 0.00374 | 4.9181 | 15.41 |
| | 8 | 170 | 15938.184 | 0.00211 | 0.8303 | 3.76 |
| | 9 | 171 | 15938.599 | 0.00043 | | |

Tableau 5. 6 - Sortie Stata pour le test de Johansen pour la période allant 3/1/2010 au 22/4/2015

Les résultats du test de Johansen démentent l’existence d’une relation de cointégration entre les neuf actifs étudiés. Afin de capter la dynamique de l’évolution de la relation de cointégration, nous traçons le graphe de la cointégration dynamique.

Le retard optimal, sélectionné par quatre critères, est égal à 4.

5.4.3.2. Résultats du test de cointégration de Johansen

```

. vecrank TY1 RX1 JPYUSD COA CLA GOLDS SILV EURUSD GBPUSD, trend(constant) lags(1)

                Johansen tests for cointegration
Trend: constant                               Number of obs =    841
Sample: 1/2/2013 - 4/22/2015                    Lags =      1
    
```

| rank | parms | LL | eigenvalue | trace statistic | 5% critical value |
|------|-------|-----------|------------|-----------------|-------------------|
| 0 | 9 | 8201.653 | . | 186.6802* | 192.89 |
| 1 | 26 | 8224.9889 | 0.05398 | 140.0085 | 156.00 |
| 2 | 41 | 8246.714 | 0.05035 | 96.5583 | 124.24 |
| 3 | 54 | 8263.9474 | 0.04015 | 62.0915 | 94.15 |
| 4 | 65 | 8275.8374 | 0.02788 | 38.3115 | 68.52 |
| 5 | 74 | 8283.5463 | 0.01817 | 22.8936 | 47.21 |
| 6 | 81 | 8289.974 | 0.01517 | 10.0384 | 29.68 |
| 7 | 86 | 8293.3498 | 0.00800 | 3.2867 | 15.41 |
| 8 | 89 | 8294.918 | 0.00372 | 0.1503 | 3.76 |
| 9 | 90 | 8294.9931 | 0.00018 | | |

Tableau 5. 8 - Sortie Stata pour le test de Johansen pour la période allant 3/1/2010 au 22/4/2015

Les résultats du test de Johansen infirment toujours l'existence d'une relation de cointégration entre les neuf actifs étudiés. Afin de capter la dynamique de l'évolution de la relation de cointégration, nous traçons le graphe de la cointégration dynamique.

5.4.3.3. Résultats du test de cointégration récursive de Johansen

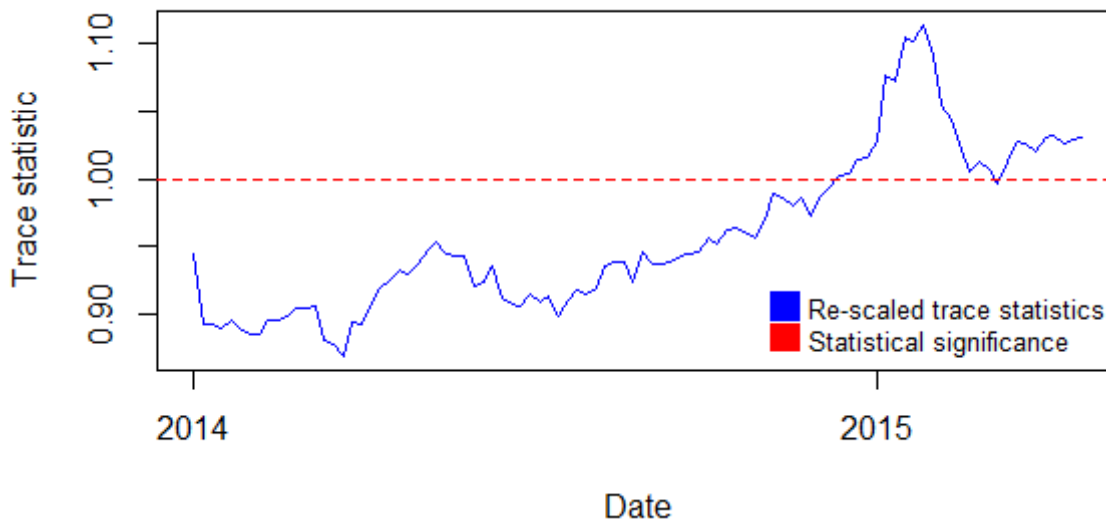


Figure 5. 3 - Evolution de la statistique récursive du test de cointégration de Johansen pour la période 5/1/2013 au 22/4/2015

Si nous limitons notre base de données à la période allant du 1/5/2013 au 22/4/2015, nous constatons que la relation de cointégration devient très robuste à partir de l'année 2015 (la courbe bleue se trouvant au dessus de la droite rouge).

5.4.4. Conclusion

Le test de Johansen de cointégration entre les neuf actifs rejette l'hypothèse de l'existence d'au moins une relation de cointégration entre les variables sur les trois périodes étudiées. Cependant, le test seul n'apporte aucune information quant à la dynamique de son évolution. Afin de pallier à la faiblesse du test statique de Johansen, nous avons tracé les graphes de la cointégration récursive. D'après l'allure de ces derniers, nous concluons que la relation de cointégration est en train de gagner en robustesse.

L'objet de cette dernière partie de ce chapitre est d'étudier la cointégration entre la série des prix des actifs *deux à deux*. Par conséquent, nous traçons les graphes pour chaque paire et dressons la liste des paires les plus cointégrées ou dont la relation de cointégration s'accroît avec le temps.

5.5. Etudes des paires d'actifs

L'objet de cette section est de pouvoir déterminer les paires d'actifs présentant une dynamique de cointégration croissante.

La cointégration étant un phénomène de long terme, il vaudrait mieux travailler sur des échantillons de taille importante et de durée d'observations longue. Par conséquent, notre période d'étude s'étale entre 2010 et 2015.

5.5.1. Sélection du retard optimal

Le tableau ci-dessous résume les retards optimaux sélectionnés pour chaque paire d'actifs.

| | COA | CLA | GOLDS | SILV | EURO/USD | GBP/USD | JPY/USD | 10 YR T-Note | Euro Bund |
|--------------|-----|-----|-------|------|----------|---------|---------|--------------|-----------|
| COA | | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| CLA | | | 1 | 3 | 2 | 2 | 2 | 2 | 1 |
| GOLDS | | | | 4 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| SILV | | | | | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| EURO/USD | | | | | | 2 | 1 | 1 | 1 |
| GBP/USD | | | | | | | 1 | 1 | 1 |
| JPY/USD | | | | | | | | 2 | 2 |
| 10 YR T-Note | | | | | | | | | 2 |
| Euro Bund | | | | | | | | | |

Tableau 5.9 - Tableau résumant les retards optimaux pour le test de Johansen (obtenus par Stata)

5.5.2. Résultats du test de cointégration récursive de Johansen

D'après les graphes représentant l'évolution de la relation de cointégrations entre les 21 paires étudiées, nous constatons que les paires les plus cointégrées sont (GOLDS, JPY/USD) et (Euro Bund, JPY/USD)

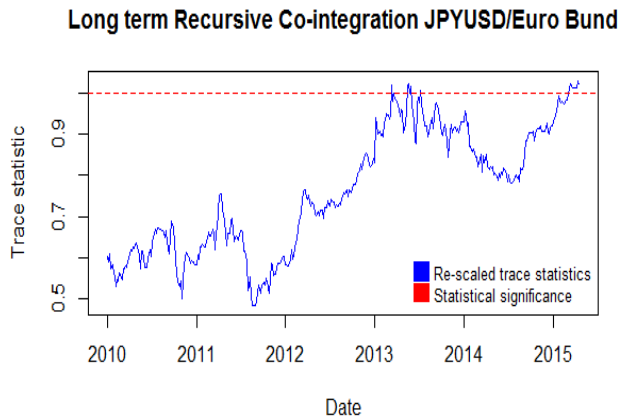


Figure 5. 5 - Evolution de la statistique récursive du test de cointégration de Johansen entre le JPY/USD et les futurs sur Euro Bund entre 2010 et 2015

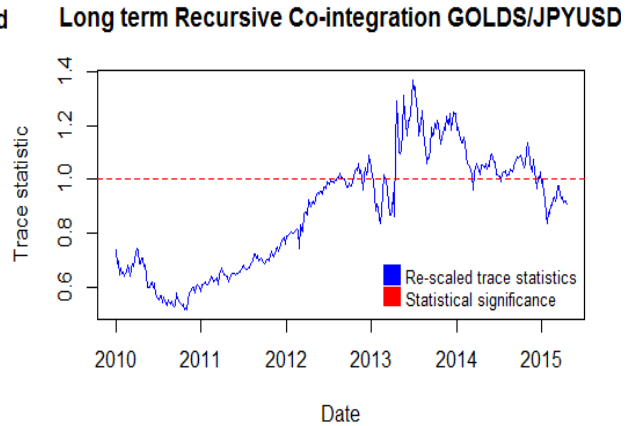


Figure 5. 4 - Evolution de la statistique récursive du test de cointégration de Johansen entre le JPY/USD et l'or entre 2010 et 2015

Finalement, la liste des paires les plus cointégrées ou dont la relation de cointégration semble croître depuis le début de l'année 2015 sont les suivantes :

- (Brent Crude Oil, GBP/USD)
- (GOLDS, JPY/USD)
- (Euro Bund, JPY/USD)
- (WTI, GBP/USD)
- (GOLDS, GBP/USD)
- (SILV, JPY/USD)
- (SILV, Euro Bund)

5.6. Conclusion

Le test de cointégration récursive de Johansen nous a permis de sélectionner six paires parmi les 36 paires dont nous disposons. Les paires choisies sont composées d'actifs cointégrés. Par conséquent, les prix de ces deux actifs évoluent de manière semblable. Or, quand le prix d'un actif diverge par rapport à l'autre, nous sommes sûrs qu'un retour à la moyenne se produira dans les jours qui suivent. C'est bien cette caractéristique précise de la cointégration que nous exploiterons dans le chapitre suivant.

En outre, en comparant les résultats obtenus dans ce chapitre à ceux obtenus dans le troisième chapitre, nous constatons que les paires les mieux cointégrées ont un degré de corrélations inférieur à 50%. A titre d'exemple, dans la paire (JPY/USD, Euro Bund), les actifs sont cointégrés mais leur corrélation s'élève à 47.5 % seulement (cf. Chapitre 4). Les actifs Brent Crude Oil et WTI sont par contre fortement corrélés (82.89 %) et non cointégrés. Finalement, nous constatons qu'une forte relation à court terme peut se dégrader sur le long terme et vice-versa.

Ce constat peut être expliqué par le fait que l'existence d'une relation d'interdépendance à court terme ne garantit pas sa persistance sur le long terme. L'utilisation de la cointégration récursive de Johansen s'avère alors justifiée.

Chapitre 6

Application à la stratégie du « Pairs Trading »

Introduction

Le Pairs Trading a été jusqu'à présent appliqué au marché des actions, où il s'agissait d'acheter et vendre simultanément deux actions appartenant au même secteur. Cependant l'utilisation de cette stratégie par un grand nombre d'intervenants dans le marché, et plus particulièrement par les hedges funds²², l'a rendu moins rentable. Aussi les marchés sont-ils devenus plus réactifs et les opportunités d'arbitrage de plus en plus rares.

Pour cette raison, il devient important d'investir dans des recherches orientées vers des classes d'actifs variées. Dans ce cas, le nombre de couples d'actifs pouvant être formés devient plus important.

Dans cette optique, nous avons repéré les relations entre le marché des matières premières et le marché de change. Pour ce faire, nous avons analysé les relations à court terme entre les neuf actifs financiers composant notre portefeuille en modélisant la matrice de corrélation entre ces actifs. Ainsi, nous avons procuré au trader un outil statistique lui permettant de prévoir la valeur des corrélations entre chaque paire d'actifs sur une fenêtre temporelle de 100 jours et de dégager les paires d'actifs les plus corrélées. Cependant, la corrélation des actifs sur le court terme ne garantit en rien la robustesse de leur interdépendance sur le long terme. Afin de pallier à cette faiblesse, Johansen propose d'analyser la cointégration entre chaque paire d'actif de manière dynamique. Ainsi, nous avons tracé l'évolution de la cointégration entre les paires et dressé la liste des paires les plus cointégrées ou dont la cointégration est en train de gagner en robustesse.

L'objectif de ce dernier chapitre est de tester l'utilité des deux filtres que nous avons proposés dans les deux derniers chapitres. Ainsi, nous allons analyser la performance de notre stratégie de « Paire Trading », après l'avoir présenté de manière détaillée, dans les deux cas de figures suivant : sans avoir recours au filtre et en ayant recours au filtre.

²² Les Hedges Funds sont des fonds spéculatifs dont les stratégies d'investissement reposent sur des prises de risque élevées et donc des espérances de gains élevées.

6.1. Techniques et stratégies classiques de Trading

6.1.1. Définition

Une stratégie de Trading peut être définie comme « *l'art de diriger et de coordonner les actions d'un investisseur sur les marchés financiers, dans le but de réaliser des gains et de fructifier l'argent investi* »²³. Se caractérisant par un nombre limité de critères qui seront développés par la suite, une stratégie de Trading est définie ainsi par un *plan de Trade* ²⁴ suivant lequel le trader prendra des décisions d'investissement dans le marché financier.

En théorie, il existe un large éventail de stratégies très différentes en termes de risque, de rentabilité, et de degré de corrélation au marché. Néanmoins chaque gérant a libre cours de mettre en place sa propre stratégie comme une combinaison des stratégies classiques, adaptant son processus d'investissement aux conditions et à la tendance du marché (bullish ou bearish)²⁵, à son objectif et à sa tolérance au risque, sans se cloisonner dans une stratégie unique.

Nous proposons dans le paragraphe suivant une segmentation des stratégies de Trading, mettant en exergue les catégories desquelles découlent la stratégie qui nous intéresse, à savoir la stratégie du « Pairs Trading ».

6.1.2. Classification des stratégies de Trading

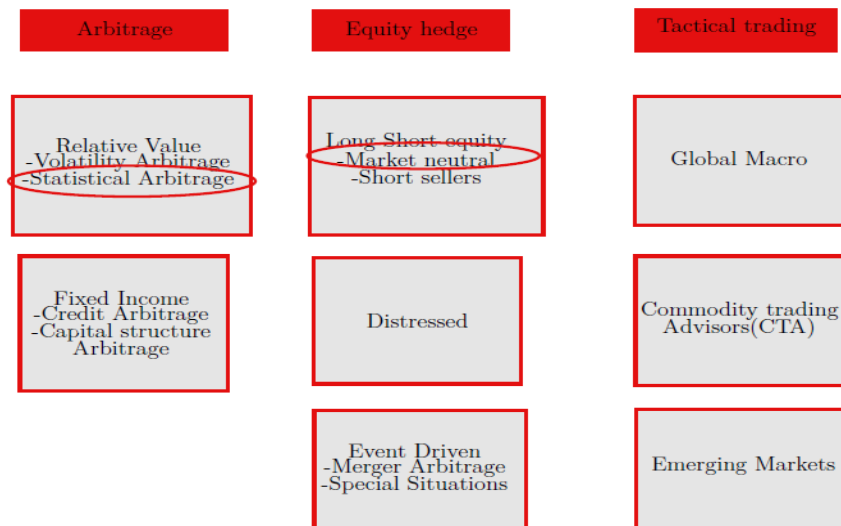


Figure 6. 1 - Classification des stratégies de Trading

Source : Olivier Seban (2007) « *Techniques et stratégies de Day Trading et de Swing Trading* », 2^{ème} édition, Maxima.

²³ Olivier Seban (2007) « *Techniques et stratégies de Day Trading et de Swing Trading* », 2^{ème} édition, Maxima.

²⁴ Plan résumant les principaux signaux de Trading (Entré/Sortie dans le marché, Stop-Loss ...)

²⁵ D'origine anglo-saxonne, le terme « bullish » signifie que la tendance du marché est haussière. Le terme « bearish » signifie que la tendance du marché est baissière.

Nous rappelons que cette classification n'est pas unique. Chaque stratégie mentionnée sur le diagramme ci-dessus a ses propres caractéristiques. Aussi est-il possible de concevoir une stratégie comme une combinaison de plusieurs autres stratégies. En réalité, il est parfois difficile de définir une stratégie sans la relier avec une autre. Comme le but de ce présent document est d'implémenter une stratégie d'arbitrage statistique neutre au marché²⁶, nous focalisons notre attention sur les catégories de stratégies desquelles découle la stratégie du « Paire Trading ».

6.1.2.1. Les stratégies d'arbitrage

Brève définition

Une stratégie d'arbitrage est définie comme étant une stratégie admissible de valeur initiale nulle et de valeur finale non nulle. Autrement dit, une stratégie de gestion de portefeuille $(\Phi_k)_{0 \leq k \leq n}$ vérifiant les trois conditions suivantes²⁷:

1. $\forall \omega \in \Omega, V_0(\Phi) = 0$
2. $\forall \omega \in \Omega, V_N(\Phi) \geq 0$
3. $\exists \omega \in \Omega, V_N(\Phi) > 0$

où Φ est une stratégie autofinancée²⁸.

En des termes plus simples, l'arbitrage peut alors être défini comme une opération financière qui dégage un bénéfice en tirant partie des seuls écarts temporaires de prix constatés entre différents marchés.

Illustration 1 : arbitrage triangulaire

Afin d'illustrer cette stratégie, prenons, à titre d'exemple, dans le marché du FOREX l'une des formes les plus connues d'arbitrage appelée « **arbitrage triangulaire**²⁹ ».

Considérons les cotations suivantes de trois taux de change à un instant t (minute) :

$$\begin{cases} USD/EUR = 0.8550 \text{ (à NewYork)} \\ EUR/JPY = 138.60 \text{ (à Francfort)} \\ USD/JPY = 120.00 \text{ (à Tokyo)} \end{cases}$$

²⁶ « Neutre au marché » traduction du terme anglo-saxon « Market neutral » qui désigne toute stratégie fortement décalée des fluctuations des marchés financiers.

²⁷ Mr QUALI Yassine, « Finance Stochastique : Valorisation et Couverture », Cours INSEA 2014

²⁸ Une stratégie autofinancée s'interprète de la façon suivante : à l'instant k , après avoir pris connaissance des cours, l'investisseur réajuste son portefeuille pour le faire passer de la composition Φ_k à la composition Φ_{k+1} . Le réajustement se fait au cours de la date k en réinvestissant la valeur total du portefeuille et rien de plus.

²⁹ Nyhoho Emmanuel (2002) « Finances Internationales: Théorie, Politique et Pratique. », Presses de l'Université du Québec, 2ème édition : 219.

La stratégie d'arbitrage est définie suivant le plan suivant :

1. Achat du dollar contre l'euro (USD/EUR) à New York
2. Vente du dollar contre le yen à Tokyo
3. Rachat par la suite de l'euro contre le yen à Francfort.

Un million d'euros permet donc d'acheter 1.17 million de dollars, qui seront vendus à Tokyo pour rapporter un total de 140.40 millions de yens. Enfin, la revente de ces derniers à Francfort procure 1.013 million d'euros. Le gain sans risque d'un arbitragiste³⁰ qui raisonne ainsi est donc de 13 000 euros.

Cependant, vu la rapidité de la diffusion de l'information sur le marché, ce type d'arbitrage, souvent appelé « pure arbitrage » est difficile à concevoir.

6.1.2.2. Les stratégies « Market Neutral »

Brève présentation

Un portefeuille est considéré "neutre au marché", s'il cherche à éviter le risque systémique présenté par ce dernier. Il est indispensable de préciser le risque que nous cherchons à couvrir avant d'évaluer la neutralité au marché. Par exemple, l'arbitrage de convertible³¹ tente de se couvrir entièrement contre les fluctuations des prix des actions sous-jacentes.

La neutralité au marché est un idéal qui est rarement atteignable dans la pratique, en effet, un portefeuille est vraiment neutre au marché s'il a une corrélation nulle avec la source du risque que nous cherchons à éviter. Un portefeuille qui semble neutre au marché peut présenter des corrélations inattendues lorsque les conditions du marché changent.

Illustration : les stratégies long/short

Une stratégie long/short est une stratégie d'investissement qui consiste à prendre des positions acheteuses dans des actifs que le trader juge sous-évalués (i.e. dont la valeur va augmenter), et des positions vendeuses dans des titres qu'il estime sous-évalués. Ainsi, l'objectif de toute stratégie long-short est de minimiser l'exposition au risque de marché en général, et de générer un bénéfice à partir de la variation du spread³² entre deux actifs.

Exemple

Imaginons qu'un gérant anticipe la chute du cours d'une action, celle-ci se traitant actuellement à 80 euros, en jugeant qu'elle est surévaluée. Emprunter celle-ci à sa banque lui permettra de la vendre à 80 euros pour la racheter plus tard à un prix plus bas. Si celui-ci

³⁰ Un arbitragiste est un trader dont la fonction est de réaliser des opérations afin de profiter des incohérences présentes sur les marchés.

³¹ L'arbitrage de titres convertibles est une stratégie qui vise à tirer des rendements des caractéristiques de ces titres analogues à celles d'obligations, d'actions ou d'options d'achat.

³² « Spread » entre deux actifs désigne l'écart entre les prix des deux actifs à chaque instant.

arrive à 72 euros, cette transaction aura généré 11% de bénéfice³³, moins les frais engendrés par l'emprunt des titres et le courtage. Si par contre, le prix monte, le gérant devra déboucler cette opération en rachetant le titre plus cher et en réalisant une perte.

6.2. Pairs Trading

6.2.1. Définition

Le Pairs Trading est une stratégie neutre au marché (« market neutral ») dans sa forme la plus primitive. Les portefeuilles issus de la stratégie « Pairs Trading » sont construits en utilisant des couples d'actifs et sont composés de positions acheteuses sur des actifs et des positions vendeuses sur d'autres. Le portefeuille est associé à une quantité appelée le spread.

L'idée générale est de vendre des titres surévalués et acheter celles sous-évaluées. Cependant, il n'est possible de déterminer si un titre est surévalué ou sous-évalué seulement si nous connaissons aussi sa vraie valeur en terme absolu (valeur intrinsèque). Le Pairs Trading tente de pallier à cette faiblesse en utilisant le concept de prix relatifs. En effet, si deux titres ont des caractéristiques similaires, alors les prix des deux titres doivent être plus ou moins les mêmes. Si les prix se trouvent être différents, cela veut dire que l'un des titres est surévalué, l'autre est sous-évalué, ou que ce « mispricing³⁴ » est une combinaison des deux. Ce « mispricing » entre les paires est capturée par la notion de spread. Plus le spread est élevé, plus l'ampleur du « mispricing » et le potentiel de profit le sont

6.2.2. Pairs Trading : une stratégie de Trading algorithmique

Une stratégie automatique de Trading désigne un algorithme qui propose des décisions de Trading. Le rôle du trader consiste alors à concevoir et améliorer constamment son algorithme.

Il va de soi qu'un tel système de Trading automatique doit être réalisé avec le plus grand soin car les erreurs de conception ou les bugs ont un impact immédiat en termes financiers. Cet automatisme extrême est impératif dans le cas de stratégie de type « High Frequency Trading », qui réagissent en temps réel à la moindre variation des cours. Pour des stratégies à plus long terme, les algorithmes ne sont pas toujours directement reliés aux marchés, ils génèrent des listes d'ordres qui sont effectuées manuellement par un trader ou servent d'outils d'aide à la décision comme c'est le cas dans le présent travail.

Toute stratégie de Trading automatique commence tout d'abord par la conception d'un modèle qui décrit en détails les règles qui régissent la stratégie. Ces règles portent souvent sur les quatre paramètres qui caractérisent toute stratégie de Trading, à savoir : le signal d'entrée, le stop-loss, le take-profit (signal de sortie) et l'horizon de Trading.

³³ % Bénéfice = (Prix de vente – Prix d'achat)/Prix d'achat

³⁴ Evaluation erronée des prix des actifs.

6.2.3. Implémentation de la stratégie du « Pairs Trading »

L'implémentation de notre stratégie passera par les trois étapes suivantes :

1. Choix des paires

Parmi les instruments proposés dans le marché, il faut détecter ceux qui présentent une interdépendance sur le court et le long terme. Notons qu'à travers les deux chapitres précédents, nous avons pu dresser la liste des paires formées d'actifs caractérisés par un mouvement commun.

2. Détermination des paramètres de Trading précédemment cités.
3. Backtesting de la stratégie.

Avant de présenter le modèle que nous avons mis en place pour l'implémentation de la stratégie, nous allons en premier lieu définir certains termes propres au vocabulaire du Trading.

- **Le concept de Position** : Prendre une position dans le marché désigne le fait d'acheter un actif ou de le vendre. Par convention, nous parlons d'une position Long, lorsque l'intervenant est acheteur et d'une position short lorsque l'intervenant est vendeur.
- **Le Signal d'entrée** : Ce terme désigne un événement qui déclenche une opération de vente ou d'achat.
- **Le Backtesting** : Le backtesting est un procédé visant à tester une stratégie de Trading sur des périodes révolues. Au lieu d'appliquer une stratégie pour la période à venir, ce qui pourrait prendre des années, un trader fait une simulation de sa stratégie en l'appliquant à d'anciennes données dans le but d'évaluer son efficacité.

6.2.4. Analyse de performance

L'analyse de la performance après le backtesting de la stratégie s'effectue à travers l'analyse d'un ensemble d'indicateurs que nous présentons :

6.2.4.1. Rendement d'un portefeuille

Le rendement moyen journalier d'un portefeuille représente l'espérance de gains que le trader réalise en moyen chaque jour. Le rendement moyen journalier d'un portefeuille formé de deux actifs A_i et A_j est :

$$R^{(i,j)}_{moy} = w_i * R_i^{moy} + w_j * R_j^{moy}$$

où w_i est le poids de l'actif A_i dans notre portefeuille.

Comme nous traitons des portefeuilles équipondérés, le poids des deux actifs A_i et A_j est le même. Par conséquent, nous avons $w_i = w_j = 0.5$.

Le rendement moyen journalier de l'actif A_i , noté R_i^{moy} est calculé comme suit :

$$R_i^{moy} = \frac{\sum_{trade} R_{trade}^{journalier}}{\sum_{nbr\ de\ trade}}$$

où $R_{trade}^{journalier}$ est le rendement journalier de chaque trade, calculé comme suit :

$$R_{trade}^{journalier} = \frac{Prix\ vente - Prix\ achat}{Prix\ achat} * \frac{1}{Nbr\ de\ jours\ entre\ l'achat\ et\ la\ vente}$$

Le rendement global du portefeuille annualisé est alors :

$$R^{(i,j)}_{ann} = R^{(i,j)}_{moy} * \frac{252}{Nombre\ de\ jours\ de\ la\ période\ de\ calcul}$$

6.2.4.2. Volatilité d'un portefeuille

La volatilité d'un portefeuille $\sigma^{(i,j)}_{moy}$ représente le risque encouru en investissant dans les actifs le constituant, nous la calculons comme suit :

$$\sigma^{(i,j)}_{moy} = \frac{w_i * \sigma_i^{moy} + w_j * \sigma_j^{moy}}{w_i + w_j}$$

avec $\sigma_i^{moy} = \frac{\sum_{trade} \sigma_i^{trade}}{\sum_{nbr\ de\ trade}}$ est la part volatilité de l'actif i dans la volatilité du portefeuille total.

La volatilité de l'actif i, traidé le jour k est noté : σ_i^{trade} , et est calculé à partir de la formule suivante :

$$\sigma_i^{jour\ k} = \sqrt{\frac{\sum_{t=k-5}^k (R_k^i - \bar{R}^i)}{5}}$$

La volatilité globale du portefeuille annualisé est alors :

$$\sigma^{(i,j)}_{ann} = \sigma^{(i,j)}_{moy} * \frac{252}{Nombre\ de\ jour\ de\ la\ période\ de\ calcul}$$

6.2.4.3. Ratio de Sharpe d'un portefeuille

Le ratio de Sharpe est défini comme suit :

$$Ratio - Sharpe^{(i,j)} = \frac{R^{(i,j)}_{ann} - Rdt\ sans\ risque}{\sigma^{(i,j)}_{ann}}$$

Le ratio de Sharpe permet de mesurer l'écart de rentabilité d'un portefeuille d'actifs par rapport au taux de rendement d'un placement sans risque (les bons de trésor) en rapportant l'écart entre ces rendements à l'écart-type du portefeuille (autrement dit : son risque ou sa

volatilité). En effet, il considère que la moyenne des rentabilités n'est pas suffisante pour avoir une mesure exacte de la performance d'un portefeuille.

Interprétation du Ratio de Sharpe

- Si le ratio est négatif, le portefeuille a performé moins que le Benchmark (le placement sans risque).
- Si le ratio est dans l'intervalle $[0 ; 1]$, alors le risque pris est trop élevé pour le rendement obtenu.
- Si le ratio est supérieur à 1, le rendement du portefeuille a performé bien mieux que le benchmark sans prendre un risque élevé.

6.3. Application

Implémenter une stratégie de Paire Trading consiste à trouver une (ou plusieurs) paire(s) d'actifs interdépendants et de mettre en place un modèle mathématique ou encore économétrique dans le but d'anticiper leur évolution.

Dès que le modèle est mis en place, nous restons à l'affût d'une irrégularité statistique. Suite à cette irrégularité statistique, nous entrons dans le marché en prenant une position dans l'espoir d'exploiter cette irrégularité et de réaliser un profit.

A ce stade, des questions pertinentes s'imposent avec acuité :

Sur quel critère pourrions-nous conclure que deux actifs sont « indépendants » ?

Comment cette irrégularité statistique tant convoitée est-elle quantifiée ?

Comment le trader est-il censé agir sur le marché face à un tel événement ?


6.3.1. Formation des paires

6.3.1.1. Modélisation du problème

Notons par $A = (A_1, A_2, \dots, A_9)$ l'ensemble des actifs dont nous disposons au départ. Le nombre de paires possibles est C_9^2 , soit un total de 36 paires.

Les principaux actifs que nous allons traiter sont les actifs les plus traidés dans le desk Cross-Asset de la salle des marchés d'AttijariWafaBank. Une description détaillée de chaque actif traité est présente dans le 2^{ème} chapitre.

Paire Trading


 التجاريف و فابانك
 Attijariwafa bank

Choix des paires

Choisir la fenêtre temporelle sous : m/j/aaaa

Du :

Au :

| Classe Commodities | Classe FX | Classe FI |
|---------------------------------------|--|--------------------------------------|
| <input type="checkbox"/> COA_Comdty | <input type="checkbox"/> GBPUUSD_Cumcy | <input type="checkbox"/> TVIA_Comdty |
| <input type="checkbox"/> CLA_Comdty | <input type="checkbox"/> JPIUSD_Cumcy | <input type="checkbox"/> RIXA_Comdty |
| <input type="checkbox"/> GOLDS_Comdty | <input type="checkbox"/> EURUSD_Cumcy | |
| <input type="checkbox"/> SILV_Comdty | | |

Figure 6. 2 - Entête de la plateforme de Trading réalisée sous VBA-Excel.

Le Trader délimite la fenêtre temporelle (à gauche) de l'étude de cointégration (que nous détaillons plus loin) en choisissant la date de début et de fin. Ensuite, le Trader coche les cases correspondant aux actifs qu'il désire traiter (à droite).

L'objectif est de pouvoir former des paires $(A_i, A_j)_{1 \leq i, j \leq n, i \neq j}$ constituées de deux actifs A_1 et A_2 interdépendants, dont l'évolution de l'un permettrait d'anticiper le mouvement de l'autre. C'est à cette étape que l'utilité de l'approche « **cointégration** » s'avère évidente.

6.3.1.2. Exploitation de la propriété de cointégration au sens de Granger

Deux actifs financiers sont cointégrés si les séries temporelles de leurs prix ont le même type de mouvement stochastique. Par conséquent, elles ont une tendance commune et équilibrée à long terme, mais ne varient pas nécessairement de la même façon.

Autrement dit, deux actifs financiers sont cointégrés si l'écart entre les deux prix subit un retour à une moyenne connue. Par conséquent, un déséquilibre constaté ne durera que sur un court terme, et sera corrigé sur le long terme³⁵.

Si l'équilibre est déterminé par la fluctuation de l'écart autour de sa moyenne, alors le déséquilibre a lieu quand les deux processus divergent. Dans ce cas, le prix d'un actif effectue *un rebond* (Nous l'appelons un actif surévalué) tandis que le prix de l'autre actif a connu *une chute* (Nous l'appelons un actif sous-évalué). Un rétablissement de l'équilibre veut dire que l'actif surévalué connaîtra une baisse du prix et en revanche le prix de l'actif sous-évalué augmentera pour corriger le déséquilibre. L'opportunité d'arbitrage statistique surgit lors de l'occurrence de la divergence des processus. Il est important de noter que la notion de surévaluation ou de sous-évaluation d'un actif faisant parti d'une paire est relative au prix du second actif.

Afin d'illustrer l'utilité de la cointégration statistique, nous prenons l'exemple du Brent Crude Oil et du JPY/USD qui son deux actifs sont cointégrés (Voir annexe I).

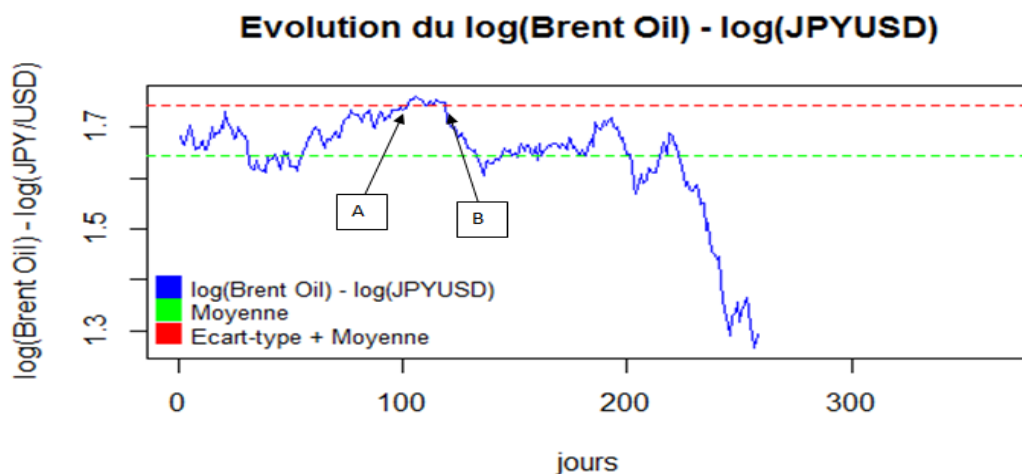


Figure 6. 3 - Evolution du spread entre l'actif Brent Oil et l'actif JPY/USD entre le 01/01/2014 et le 31/12/2014 (Jours ouvrables)

En vert, nous représentons la droite : $y = \text{moyenne (spread) sur l'année 2014}$

En rouge, nous représentons la droite : $y = \text{moyenne (spread) + l'écart-type (spread) sur l'année 2014}$

³⁵ Murray, M. P. (1994) "A drunk and her dog : An illustration of cointegration and error correction" . The American Statistician.

Le graphe ci-dessus représente l'évolution du spread du logarithme de deux actifs cointégrés : le Brent Oil et le JPY/USD. Nous constatons qu'à partir du point A, le spread atteint sa moyenne + son écart-type. Comme les actifs sont cointégrés, un retour à la moyenne est assuré. Par conséquent, au point A, l'actif Brent Oil est surévalué par rapport à l'actif JPY/USD (qui est sous-évalué). Une dizaine de jour après le point A, nous constatons que la courbe du spread chute pour atteindre de nouveau la droite rouge et arriver au point B.

Ainsi nous pouvons conclure, qu'en se basant sur l'approche de cointégration, nous filtrons les paires formées d'actifs présentant *des opportunités d'arbitrage*.

6.3.1.3. Résultats

Pour chaque couple $(A_i, A_j)_{1 \leq i, j \leq 9, i \neq j}$, nous testons la cointégration telle qu'elle est définie par Granger³⁶ sur une période allant du 02/01/2011 au 29/12/2013.

Dans une première étape, nous vérifions si les séries des prix des actifs sont I(1) (i.e. intégrées d'ordre 1).

| Variables | Ordre d'intégration | | | | | |
|----------------|---------------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|
| | 0 | | | 1 | | |
| | Trend | Drift | None | Trend | Drift | None |
| COA Comdty | 0.010223522 | 0.003348686 | 0.701320542 | 6.38875E-58 | 2.59364E-28 | 2.77334E-26 |
| CLA Comdty | 0.129399804 | 0.034459365 | 0.655799764 | 6.38875E-58 | 5.6045E-28 | 5.57479E-26 |
| GOLD Comdty | 0.680152716 | 0.752787781 | 0.516490984 | 6.38875E-58 | 1.18777E-27 | 1.07423E-25 |
| SILV Comdty | 0.085375584 | 0.687331216 | 0.399069732 | 6.38875E-58 | 8.69535E-32 | 2.11962E-29 |
| EUR/USD Curncy | 0.581937713 | 0.347109399 | 0.744671889 | 6.38875E-58 | 3.89254E-28 | 4.02527E-26 |
| GBP/USD Curncy | 0.401135306 | 0.143720917 | 0.781412473 | 6.38875E-58 | 8.30996E-30 | 1.27029E-27 |
| JPY/USD Curncy | 0.704729323 | 0.980751684 | 0.177812052 | 6.38875E-58 | 2.3821E-31 | 4.02605E-29 |
| TYA Comdty | 0.936792305 | 0.443921338 | 0.728978823 | 6.38875E-58 | 4.23961E-30 | 7.07762E-28 |
| RXA Comdty | 0.032989122 | 0.020008367 | 0.89221126 | 6.38875E-58 | 4.98867E-28 | 4.41722E-26 |

Tableau 6. 1 - P-value du test ADF pour chaque paire, testé suivant les 3 modèles définis par le test ADF

D'après les résultats du test de Dickey-Fuller augmenté, nous constatons que les séries des prix des actifs sont tous I(1). En effet, la p-value du test de l'ADF³⁷ est supérieure au seuil critique de 5% pour toutes les séries des prix. En outre, la première différence de ces dernières est stationnaire vu que les p-values du test sont toutes inférieures au seuil critique de 5%.

Afin d'automatiser la sortie des résultats du test de l'ADF, nous lions notre plateforme VBA-Excel au logiciel R à travers l'add-in RExcel. Le Trader délimite la fenêtre temporelle pour le test de Granger, choisit les actifs à analyser puis lance le programme. Un aperçu de cette composante de la plateforme est donné ci-dessous :

³⁶ Voir annexe L pour la présentation détaillée du test de cointégration de Granger

³⁷ ADF est l'abréviation de Augmented Dickey-Fuller

| Etude de cointégration des prix | | | | | | |
|--|---------------------|---------------------|-------------|-------------|-------------|-------------|
| Step 1 : Ordre d'intégration des variables | | P-Value du test ADF | | | | |
| Variables | Ordre d'intégration | | | | | |
| | 0 | | | 1 | | |
| | Trend | Drift | None | Trend | Drift | None |
| COA Comdy | 0.010223522 | 0.003346686 | 0.701320542 | 6.38875E-58 | 2.59364E-28 | 2.77334E-26 |
| CLA Comdy | 0.129399804 | 0.034459365 | 0.685799764 | 6.38875E-58 | 5.6045E-28 | 5.57479E-26 |
| GOLD Comdy | 0.680152716 | 0.752787781 | 0.516490984 | 6.38875E-58 | 1.18777E-27 | 1.07423E-25 |
| SILV Comdy | 0.085375584 | 0.687331216 | 0.389069732 | 6.38875E-58 | 8.69535E-32 | 2.11962E-29 |
| EURUSD Curncy | 0.581937713 | 0.347109399 | 0.744671689 | 6.38875E-58 | 3.89254E-28 | 4.02527E-26 |
| GBPUSD Curncy | 0.401135306 | 0.143720917 | 0.781412473 | 6.38875E-58 | 8.30998E-30 | 1.27029E-27 |
| JPYUSD Curncy | 0.704729323 | 0.980751684 | 0.177812052 | 6.38875E-58 | 2.3821E-31 | 4.02605E-29 |
| TYA Comdy | 0.936792305 | 0.443921338 | 0.728978823 | 6.38875E-58 | 4.23961E-30 | 7.07762E-28 |
| RXA Comdy | 0.032989122 | 0.020008367 | 0.89221126 | 6.38875E-58 | 4.98967E-28 | 4.41722E-26 |

Figure 6. 4 - Section de la plateforme de Trading réalisée sous VBA-Excel(en liaison avec R)

Objectif : Tester si les actifs sont intégrés d'ordre 1 en retournant la p-value du test de l'ADF pour chaque modèle.

Dans la seconde étape, nous estimons les paramètres de la régression linéaire de chaque couple, définie comme suit :

$$A_{i,t} = \beta A_{j,t} + \alpha + e_t \text{ pour } 1 \leq i, j \leq 9, i \neq j$$

Ensuite nous testons la stationnarité des résidus e_t par le test de l'ADF en utilisant la table de MacKinnin³⁸. Les actifs cointégrés sont ceux dont le résidu e_t est stationnaire. (Voir Annexe I)

Cependant, dans la conception de la stratégie du Pairs Trading, la notion de surévaluation ou de sous-évaluation d'un actif faisant partie d'une paire est relative au prix du second actif, notre signal de Trading (qui sera détaillé dans la section suivante) est basé sur le spread du logarithme des prix des actifs composant une paire, ce dernier doit aussi vérifier la propriété de retour à la moyenne. Finalement, nous testons la stationnarité du spread de chaque paire actifs, défini comme suit :

$$Spread(A_{i,t}, A_{j,t}) = \log(A_{i,t}) - \log(A_{j,t}) \text{ pour } 1 \leq i, j \leq 9, i \neq j$$

Les résultats des tests de stationnarités sont aussi automatisés en liant le logiciel R à VBA Excel. Les résultats obtenus sont dans l'annexe J.

³⁸ Bourbonnais R. (2005) *Econométrie*, 6^{ème} édition, DUNOD, page 281.

La première liste des paires retenues est la suivante :

| Paires retenues |
|-----------------|
| COA / CLA |
| COA / GOLDS |
| COA / SILV |
| COA / EURUSD |
| COA / GBPUSD |
| COA / JPYUSD |
| COA / RXI |
| COA / TY1 |
| RX1 / SILV |
| RX1 / JPYUSD |

6.3.2. Construction de la stratégie de Trading

6.3.2.1. Signal de Trading

Nous avons avancé qu'une fois la paire d'actifs choisie, notre signal d'ouverture sera déclenché dès que les deux actifs divergent de leur moyenne. Cependant la notion de divergence reste relative. Cette section est consacrée à la détermination d'une valeur ou de plusieurs valeurs de ce seuil de Trading propre à chaque paire $(A_i, A_j)_{1 \leq i, j \leq 9, i \neq j}$.

Les paires sélectionnées dans la section passée sont formées de paires cointégrées dont le logarithme du rapport est stationnaire. Or tout processus stationnaire est caractérisé par un écart-type et une moyenne tout deux indépendants du temps.

En outre, l'écart-type est une mesure de l'amplitude de la déviation du processus par rapport à sa moyenne. On conclut ainsi que la divergence relative des deux processus peut être quantifiée par la distance du spread (défini précédemment) par rapport à son écart-type. Ainsi le signal de Trading sera fonction de l'écart-type du spread du logarithme de chaque paire formée d'actifs cointégrés et de sa moyenne :

$$Signal_{\text{paire } (A_i, A_j)} = \text{Ecart} - \text{type}(\text{Spread}(A_i, A_j)) + \text{Moyenne}(\text{Spread}(A_i, A_j))$$

Nous notons pour simplifier :

$$Signal_{\text{paire } (A_i, A_j)} = \sigma(\text{Spread}(A_i, A_j)) + \mu(\text{Spread}(A_i, A_j))$$

Cependant, un signal de Trading se doit d'être dynamique et varier en fonction des informations disponibles sur le marché. Comme la prise de position des traders du Desk Cross-Asset se prennent sur le court-terme (i.e le temps maximum entre l'ouverture et la fermeture d'une position est de 3 mois), le signal de Trading pour une paire donnée valable

les 3 prochains mois est la somme de l'écart-type et la moyenne du ratio du logarithme des actifs de la paire du trimestre passée :

$$Signal_{paire (A_i, A_j)}^{3 \text{ mois}} = Ecart - type(Spread(A_i, A_j))^{3 \text{ mois précédent}} + Moyenne (Spread(A_i, A_j))^{3 \text{ mois précédent}}$$

6.3.2.2. Algorithme des prises de positions

Maintenant que les paramètres de Trading sont déterminés, le trader doit avoir une idée de la manière avec laquelle il va procéder au trade : Quel actif doit-il acheter? Lequel vendre?

L'algorithme des prises de position est défini comme suit :

1. **Premier cas** :

$$\begin{cases} Spread(A_{i,t-1}, A_{j,t-1})^{t-1} < signal \\ Spread(A_{i,t}, A_{j,t})^t > signal \end{cases}$$

Par conséquent, nous obtenons :

$$\begin{aligned} Spread(A_{i,t}, A_{j,t})^t > signal & \Rightarrow \log(A_{i,t}) - \log(A_{j,t}) > signal \\ & \Rightarrow \log(A_{i,t}) > \log(A_{j,t}) + signal \end{aligned}$$

A l'instant t , l'actif A_i est surévalué par rapport à l'actif A_j . La relation de cointégration laisse supposer qu'après avoir franchi la barre de l'écart-type + la moyenne, le spread subit un retour à la moyenne. La valeur de l'actif A_i diminuera tandis que celle de l'actif A_j augmentera.

Décision : Nous vendons l'actif « i » et achetons l'actif « j ».

Le point A de la figure précédente représente clairement ce cas de figure. Sur la figure suivante, nous effectuons un zoom sur ce point là.

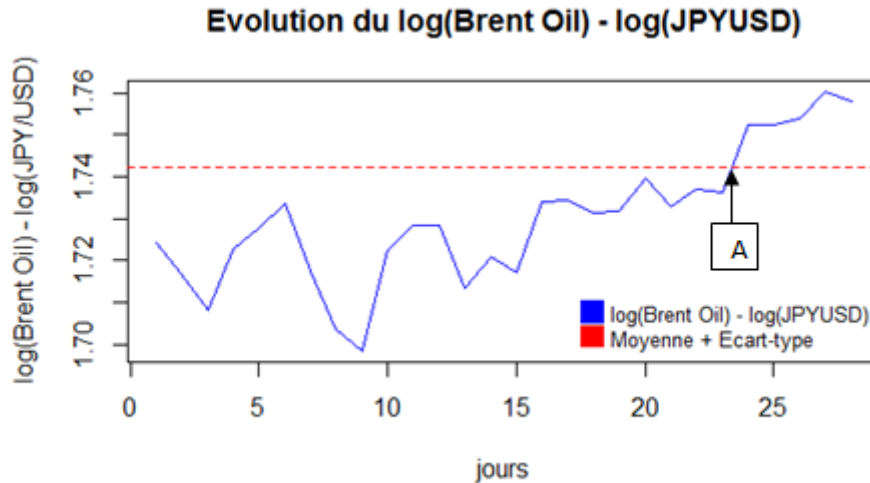


Figure 6.5 – Premier cas d'évolution du Spread entre le Brent Oil et le JPY/USD

Une fois que la courbe aura atteint le point A, le Trader vend le Brent Oil puis achète le JPY/USD.

2. Deuxième cas :

$$\begin{cases} Spread(A_{i,t-1}, A_{j,t-1})^{t-1} > signal \\ Spread(A_{i,t-1}, A_{j,t-1})^t < signal \end{cases}$$

Décision : Nous vendons l'actif « j » et achetons l'actif « i ».

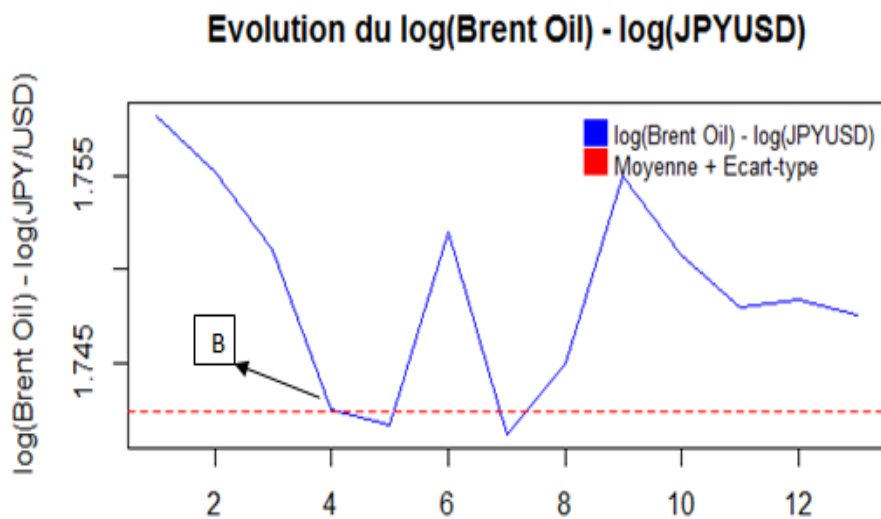


Figure 6.6 - Deuxième cas d'évolution du Spread entre le Brent Oil et le JPY/USD

Une fois que la courbe aura atteint le point B, le Trader achète le Brent Oil puis vend le JPY/USD.

6.3.3. Backtesting de la stratégie de Trading

Après avoir déterminé tous les éléments nécessaires pour lancer la stratégie, nous allons procéder à un backtest sur une période de 255 jours, du 01/01/2014 au 31/12/2014 (Jours ouvrables³⁹ de l'année 2014).

6.3.3.1. Méthodologie suivie

Nous allons supposer que nous récupérerons les cotations de fermeture de chaque jour, et nous calculons le signal de Trading. Nous rappelons que le signal de Trading du trimestre où l'on se situe est établi comme étant la somme de la moyenne et l'écart-type du spread du trimestre passé de la paire en question. Le tableau ci-dessous résume notre raisonnement :

| Trimestre | Du | Au | Signal de Trading pour chaque semestre |
|------------------|------------|------------|---|
| 1 ^{er} | 02/01/2014 | 31/03/2014 | $\alpha * \sigma(\text{Spread}(\text{dernier trimestre de 2013})) + \mu(\text{Spread}(\text{dernier trimestre de 2013}))$ |
| 2 ^{ème} | 01/04/2014 | 30/06/2014 | $\alpha * \sigma(\text{Spread}(1\text{er trimestre de 2014})) + \mu(\text{Spread}(1\text{er trimestre de 2014}))$ |
| 3 ^{ème} | 01/07/2014 | 30/09/2014 | $\alpha * \sigma(\text{Spread}(2\text{ème trimestre de 2014})) + \mu(\text{Spread}(2\text{ème trimestre de 2014}))$ |
| 4 ^{ème} | 01/10/2014 | 31/12/2014 | $\alpha * \sigma(\text{Spread}(3\text{ème trimestre 2014})) + \mu(\text{Spread}(3\text{ème trimestre 2014}))$ |

Dans notre backtesting, nous testons trois signaux différents pour chaque portefeuille (i.e. pour chaque paire) : α mentionné dans le tableau ci-dessus prend les valeurs suivantes :

$$\alpha \in \{1, 2, 3\}$$

Le tableau suivant regroupe 3 signaux de Trading pour chaque trimestre de l'année 2014 pour la paire (Brent Oil, JPYSUD). Les signaux des autres paires ont été obtenus de la même manière.

| Trimestre | Du | Au | Signaux de Trading | | |
|------------------|------------|------------|----------------------|----------------------|----------------------|
| | | | 3 * σ + μ | 2 * σ + μ | 1 * σ + μ |
| 1 ^{er} | 02/01/2014 | 31/03/2014 | 9.4187014 | 9.380266942 | 9.34183248 |
| 2 ^{ème} | 01/04/2014 | 30/06/2014 | 9.34595194 | 9.335135141 | 9.32431834 |
| 3 ^{ème} | 01/07/2014 | 30/09/2014 | 9.38251286 | 9.363109473 | 9.34370609 |
| 4 ^{ème} | 01/10/2014 | 31/12/2014 | 9.347861 | 9.326085225 | 9.30430945 |

Tableau 6. 2 - Signaux de Trading pour le Backtesting

Ensuite, nous assimilons chaque paire à un portefeuille autofinçant et nous lançons notre stratégie en appliquant les règles de prise de position définies ci-dessus (6.3.2.2).

³⁹ Jours d'une année moins les week-ends et les jours fériés.

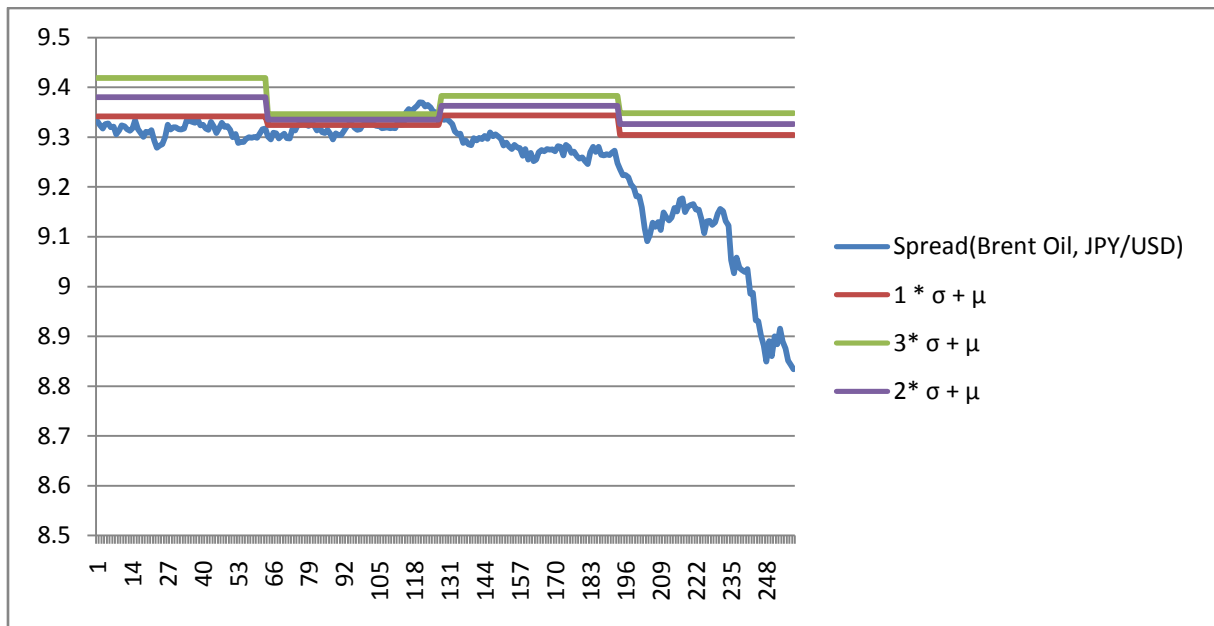


Figure 6. 7 - Evolution du spread entre l'actif Brent Oil et l'actif JPY/USD entre le 01/01/2014 et le 31/12/2014 (Jours ouvrables)

Le graphe ci-dessus représente le spread entre le logarithme du Brent Oil et le JPY/USD ainsi que 3 signaux de Trading différents pour chaque trimestre de l'année. D'après ce graphe, nous remarquons que le signal $3 * \sigma + \mu$ (en vert) est rarement atteint. En effet, si le spread s'éloigne de sa moyenne de 3 fois son écart-type (i.e. si le signal $3 * \sigma + \mu$ est déclenché), le spread aura atteint ses valeurs extrêmes.

Nous remarquons aussi que les prises de positions sont assez fréquente lors du deuxième trimestre de 2014 et ce pour les trois signaux, contrairement aux deux derniers trimestres où aucun signal n'a été déclenché.

6.3.3.2. Analyse de la performance de la stratégie

L'objectif de cette section est de déterminer les signaux les plus performants et les paires réalisant la meilleure rentabilité.

Après avoir lancé la stratégie pour l'année 2014, nous calculons pour chaque portefeuille (i.e. pour chaque paire) son rendement moyen annualisé, sa volatilité annualisée et son ratio de Sharpe afin d'évaluer la performance de notre stratégie.

Dans notre cas, le calcul du ratio de Sharpe a principalement le but de comparer les différents scénarios pour choisir le seuil de Trading optimal pour chaque paire, pour cela nous calculons le ratio pour une performance de benchmark nulle ($Rdt \text{ sans risque} = 0$).

Notre ratio de Sharpe est donc calculé pour chaque paire comme suit :

$$\text{Ratio – Sharpe}^{(i,j)} = \frac{R^{(i,j)}_{ann}}{\sigma^{(i,j)}_{ann}}$$

Nous calculons aussi le nombre d'entrées dans le marché pour chaque signal de Trading. En d'autres termes, nous calculons le nombre de fois où le signal d'achat ou de vente est déclenché.

Le tableau ci-dessous résume les résultats obtenus :

| Signaux | 1 * $\sigma + \mu$ | | | | |
|--------------|--------------------|-----------|------------|-----------------|------------------------------|
| Indicateurs | P & L | Rendement | Volatilité | Ratio de Sharpe | Nbr d'entrées dans le marché |
| Paires | | | | | |
| COA / CLA | 7.89 | 0.29% | 101.09% | 0.002884335 | 20 |
| COA / GOLDS | 52.94 | 42.59% | 71.84% | 0.59286354 | 2 |
| COA / SILV | 162.0565 | 3.71% | 79.73% | 0.046529301 | 10 |
| COA / EURUSD | 198.303 | 0.13% | 78.02% | 0.001703665 | 10 |
| COA / GBPUSD | 113.1471 | 1.43% | 78.45% | 0.018204172 | 9 |
| COA / JPYUSD | 112.140273 | 1.33% | 78.75% | 0.016899783 | 9 |
| COA / RXI | 0 | 0.00% | 0.00% | 0 | 0 |
| COA / TY1 | 57.445625 | 3.52% | 90.84% | 0.038692894 | 1 |
| RX1 / SILV | 172.158842 | 0.97% | 99.53% | 0.009791041 | 6 |
| RX1 / JPYUSD | 206.485661 | 2.56% | 89.95% | 0.028463679 | 19 |

Tableau 6. 3 - Indicateurs de performance de la stratégie de Trading pour chaque paire entre le 01/01/2014 et le 31/12/2014 (Jours ouvrables) en utilisant le 1er signal

| Signaux | 2 * $\sigma + \mu$ | | | | |
|--------------|--------------------|-----------|------------|-----------------|------------------------------|
| Indicateurs | P & L | Rendement | Volatilité | Ratio de Sharpe | Nbr d'entrées dans le marché |
| Paires | | | | | |
| COA / CLA | 0.76 | 1% | 106.57% | 0.010316 | 10 |
| COA / GOLDS | 60.08 | 49% | 93.76% | 0.521800 | 4 |
| COA / SILV | 78.7783 | 4% | 87.50% | 0.042027 | 9 |
| COA / EURUSD | 96.2728 | 3% | 87.50% | 0.037577 | 9 |
| COA / GBPUSD | 0.6777 | 1% | 107.67% | 0.007101 | 2 |
| COA / JPYUSD | 113.010167 | 1% | 107.67% | 0.006486 | 1 |
| COA / RXI | 0 | 0% | 0.00% | 0.000000 | 0 |
| COA / TY1 | 54.779375 | 6% | 100.00% | 0.058954 | 1 |
| RX1 / SILV | 176.023636 | 3% | 81.01% | 0.034273 | 6 |
| RX1 / JPYUSD | 591.410159 | 11% | 8.59% | 1.255756 | 21 |

Tableau 6. 4 - Indicateurs de performance de la stratégie de Trading pour chaque paire entre le 01/01/2014 et le 31/12/2014 (Jours ouvrables) en utilisant le 2ème signal

| Signaux | 3 * σ + μ | | | | |
|---------------|----------------------|-----------|------------|-----------------|------------------------------|
| Indicateurs | P & L | Rendement | Volatilité | Ratio de Sharpe | Nbr d'entrées dans le marché |
| Paires | | | | | |
| COA / CLA | 0 | 0.000% | 0.00% | 0 | 0.00% |
| COA / GOLDS | 0 | 0.000% | 0.00% | 0 | 0 |
| COA / SILV | 1.5374 | 0.844% | 78.02% | 0.010814238 | 6 |
| COA / EURUSD | 3.2263 | 3.322% | 86.53% | 0.038387008 | 6 |
| COA / GBPUSD | 0.3317 | 0.082% | 107.31% | 0.00075994 | 4 |
| COA / JPYUSD | 0.660036 | 0.026% | 107.67% | 0.000246003 | 2 |
| COA / RXI | 0 | 0.000% | 0.00% | 0 | 0 |
| COA / TY1 | 54.779375 | 2.639% | 90.84% | 0.029046608 | 1 |
| RX1 / SILV | 354.342828 | 8.475% | 85.41% | 0.099222057 | 12 |
| RX1 / JPYUSD | 385.216958 | 2.661% | 86.91% | 0.030611301 | 6 |

Tableau 6. 5 - Indicateurs de performance de la stratégie de Trading pour chaque paire entre le 01/01/2014 et le 31/12/2014 (Jours ouvrables) en utilisant le 3ème signal

| | Signaux de Trading | | |
|-------------------|----------------------|----------------------|----------------------|
| | 3 * σ + μ | 2 * σ + μ | 1 * σ + μ |
| P & L | 800.094597 | 1171.79214 | 1082.567001 |
| Rendement | 2.26% | 7.79% | 5.65% |
| Volatilité | 80.34% | 78.03% | 76.82% |

Tableau 6. 6 - Indicateurs de performance de la stratégie de Trading pour les 3 signaux

La rentabilité calculée est la rentabilité moyenne des neuf paires d'actifs. Le P&L est la somme des P&L. La volatilité est la somme des volatilités.

Dans le tableau ci-dessous, nous considérons un portefeuille formé de toutes les paires étudiées. Nous constatons que le meilleur signal en termes de rentabilité est le deuxième signal 2 * σ + μ vu qu'il dégage un P&L (1171.729 Dhs) et une rentabilité moyenne (7.79%) des plus élevés. La volatilité de ce portefeuille demeure par contre très élevée pour les trois signaux.

Les meilleures paires d'actifs en termes de rentabilité et de P&L sont :

| Paires retenues |
|--------------------------|
| RX1 / SILV |
| RX1 / JPYUSD |
| Brent Crude Oil / SILV |
| Brent Crude Oil / TY1 |
| Brent Crude Oil / JPYUSD |

Cependant, nous constatons que toutes les paires (assimilées à un portefeuille autofinçant) ont une volatilité assez élevée. Le risque pris par le Trader en appliquant cette stratégie est important. De plus, la majorité des ratios de Sharpe sont inférieurs à 10% ce qui indique que le risque encouru est bien plus important que la rentabilité espérée du portefeuille.

Nous constatons aussi que les paires retenues n'incluent aucune paire sélectionnée suite à l'étude des corrélations conditionnelles dynamiques. En outre, la seule paire retenue du processus de cointégration de Johansen est la paire (RX1 / SILV).

6.4. Conclusion

Le « Pairs Trading » allie les avantages des stratégies long/short et des stratégies « market neutral ». C'est une stratégie quantitative qui emploie des modèles économétriques afin de détecter les opportunités d'arbitrage statistique.

L'objectif ultime de ce chapitre était de tester l'efficacité de filtrer les paires d'actifs dont on dispose en utilisant dans un premier temps la corrélation conditionnelle dynamique et dans un second temps la cointégration récursive de Johansen. Cependant, les résultats du backtesting de notre stratégie démontrent que les paires sélectionnées à travers le filtre précédemment cité ne réalisent pas la meilleure performance. En effet, la rentabilité de ces paires n'est pas la plus élevée. En termes de P&L, les paires sélectionnées dans les chapitres précédents viennent en bas de la liste.

L'échec du filtre peut être dû à plusieurs raisons. Le critère de la corrélation dynamique dans le choix des paires n'est peut être pas adéquat à la stratégie. En effet, une forte corrélation entre les actifs insinue que leur évolution se fera dans un même sens ou encore dans le sens opposé. Cependant, elle ne garantit en rien un retour à une moyenne. Or le principe du Pairs Trading repose sur cette propriété de retour à la moyenne.

En dépit des résultats obtenus, nous avons pu dégager un signal de Trading, certes simpliste, mais qui permet de réaliser une rentabilité annuelle de l'ordre de 8% approximativement.

Il est important de noter que notre stratégie est loin d'être optimale. En effet, plusieurs critères importants n'ont pas été pris en compte, notamment la limite du Stop-Loss et les coûts de transactions de chaque actif. L'échec du filtre peut aussi être dû à ce fait là.

Conclusion générale

Tout au long de ce projet, oscillant entre théorie et pratique, il était question de constituer la liste des paires d'actifs qui, une fois exploitées à travers la stratégie de « Pairs Trading », présentent un potentiel de rentabilité significatif. Le choix des paires s'est effectué à travers deux filtres statistiques puissants : la corrélation conditionnelle dynamique de R. Engel et la cointégration récursive de Johansen. A travers ces deux outils, nous avons pu mettre en exergue les relations d'interdépendances régissant les actifs les plus exploités dans le Desk Cross-Asset d'AWB et dresser la liste des paires qui, à priori, pourraient dégager une bonne rentabilité.

Après avoir analysé les principales caractéristiques de chaque actif, nous avons procédé à la modélisation dynamique de la matrice de corrélation. Le modèle multivarié retenu est celui de « EGarch-DCC » avec des rendements suivant la loi de Student. Ce dernier met en avant l'aspect dynamique de la corrélation et conduit de facto à l'abandon de deux hypothèses traditionnellement émises dans les études empiriques en finance : les corrélations entre les actifs sont supposées constantes, les phénomènes d'asymétrie ou de présence d'évènements rares ne sont pas pris en compte dans la distribution des prix des actifs. L'aspect statique des corrélations, longtemps retenu, est finalement réfuté. La dynamique des corrélations est alors reflétée sous forme de courbes tendanciennes. Par conséquent, une première liste des paires les plus dynamiquement corrélées a été établie.

Ce filtre préliminaire, sélectionnant les actifs caractérisés par un degré élevé d'interdépendance sur le court terme, ne permet pas à lui seul de guider le choix des traders sur les marchés, le recours à la théorie de cointégration récursive de Johansen s'avère indétournable. La robustesse de la méthode implémentée réside dans sa conception dynamique : toute l'information précédente est incorporée dans la statistique récursive du test de Johansen. En effet, si l'on se contente des résultats obtenus suite au test statique de cointégration de Johansen, aucune relation de cointégration entre les actifs retenus ne paraît significative. Cependant, en implémentant la méthode par une procédure récursive, nous avons pu extraire des paires d'actifs dont la relation de cointégration gagne en robustesse jour après jour. Finalement, nous avons dressé une seconde liste des paires d'actifs les mieux cointégrés.

Afin de valider l'utilité de l'analyse à court terme et à long terme des co-mouvements entre les actifs, une stratégie de « Pairs Trading » a été implémentée sur deux portefeuilles différents. Nous constatons que le portefeuille, constitué des paires retenues suite à l'analyse

des interdépendances, réalise une rentabilité annuelle inférieure à celle du deuxième portefeuille constitué par le principe du Pairs Trading. Les raisons, qui pourraient éventuellement expliquer ce résultat, sont diverses. Elles peuvent concerner les paramètres de la stratégie (signal d'entrée, algorithme des prises de positions, Stop-Loss ...) ou l'horizon de Trading.

Il reste cependant, que la stratégie de Trading mise en place, peut être optimisée pour être mieux adaptée aux paires choisies à travers le filtre de la corrélation dynamique et de la cointégration de Johansen. Une des alternatives d'optimisation (*cf. A.D.Schmidt « Pairs Trading : A cointegration Approach » (2008)*) consisterait à construire le signal de Trading en se basant sur les résidus issus de l'équation de cointégration entre chaque paire d'actifs en utilisant un modèle VECM⁴⁰. L'originalité de cette approche réside dans le fait que cette modélisation permettrait de capter la vitesse de retour à la moyenne tant recherchée dans le Pairs Trading et de déterminer quels actifs en sont responsables.

La démarche retenue, lors de l'étude des interdépendances entre les actifs des marchés des matières premières et des taux de changes, peut être élargie pour couvrir une palette d'actifs beaucoup plus grande et balayer divers marchés financiers. L'aspect dynamique des méthodes implémentées permet d'automatiser la composition du panier des paires d'actifs.

⁴⁰ Vector Error Correction Model

Bibliographie

- [1] D.Herlemont (2004), “Pairs Trading, Convergence Trading, Cointegration.” *Yats Finances & Technologies* (2004)
- [2] E. Howard (2012) “La volatilité selon les modèles Garch : Focus sur l’asymétrie et la corrélation dynamique.”, *La revue d’Opus Finance*, N°1 Décembre 2012.
- [3] F.D. Rouah and G. VAINBERG (2007) *Option Pricing Models ans Volatility Using Excel-VBA. WILEYFINANCE*, page163-202
- [4] Hung, B. and Cheung, Y. (1995), “Interdependence of Asian Equity Markets”, *Journal of Business, Finance and Accounting*.
- [5] J.Z Huang and Z.Zong (2010) “Time Variation in Diversification Benefits of Commodity, REITS and TIPS” Working Paper, Department of Finance, Pennsylvania State University.
- [6] M. BERG JENSEN and A. LUNDE (2001) “The nig-s and arch model: A fat-tailed stochastic, and autoregressive conditional heteroscedastic volatility model.” Working Paper Series No. 83, University of Aarhus.
- [7] Murray, M. P. (1994) “A drunk and her dog : An illustration of cointegration and error correction” . *The American Statistician*, Février, Vol.48, N°1.
- [8] Nyhoho Emmanuel (2002) “Finances Internationales: Théorie, Politique et Pratique.”, *Presses de l’Université du Québec*, 2^{ème} édition, page 219.
- [9] Olivier Seban (2007) *Techniques et stratégies de Day Trading et de Swing Trading. Maxima*, 2^{ème} édition
- [10] Ra. Bourbonnais (2007) *Econométrie. DUNOD 6ième edition*, page 280-282
- [11] S. Engle (2002) “Dynamic Conditional Correlation – A Simple Class of Multivariate GARCH Models” *Journal of Business and Economic Statistics*, (20),3,339-50.
- [12] T. Avouyi-Dovi, D. Neto (2004) “Interdépendance des marchés d’actions : analyse de la relation entre les indices boursiers américains et européens.” *Revue de la stabilité financière* N°4, Juin 2004, Banque de France.

Annexe A

Sortie R : Critère AIC pour l'identification du modèle Garch(p,q)

```
> aics
```

| | [,1] | [,2] | [,3] | | [,1] | [,2] | [,3] |
|------|-----------|-----------|-----------|------|------------|-----------|-----------|
| [1,] | -9484.995 | -9472.163 | -9403.750 | [1,] | -9871.842 | -9830.707 | -9778.746 |
| [2,] | -9481.473 | -9477.946 | -9481.283 | [2,] | -9865.088 | -9838.942 | -9806.375 |
| [3,] | -9477.251 | -9457.775 | -9452.928 | [3,] | -10014.740 | -9863.984 | -9831.220 |

Rendements du CLA (WTI)

| | [,1] | [,2] | [,3] |
|------|-----------|-----------|-----------|
| [1,] | -11444.59 | -11411.72 | -11356.74 |
| [2,] | -11437.17 | -11417.87 | -11424.19 |
| [3,] | -11428.94 | -11417.34 | -11399.40 |

Rendements du COA (Brent Oil)

| | [,1] | [,2] | [,3] |
|------|-----------|-----------|-----------|
| [1,] | -9322.184 | -9285.647 | -9252.492 |
| [2,] | -9322.256 | -9306.584 | -9296.152 |
| [3,] | -9319.236 | -9304.646 | -9298.145 |

Rendements du GOLD

| | [,1] | [,2] | [,3] |
|------|-----------|-----------|-----------|
| [1,] | -13882.14 | -13817.16 | -13826.18 |
| [2,] | -13872.17 | -13870.36 | -13770.30 |
| [3,] | -13861.10 | -13781.64 | -13826.97 |

Rendements du SILVER

| | [,1] | [,2] | [,3] |
|------|-----------|-----------|-----------|
| [1,] | -14324.67 | -14318.39 | -14278.03 |
| [2,] | -14314.61 | -14316.64 | -14217.40 |
| [3,] | -14264.75 | -14260.61 | -14227.38 |

Rendements de l'EURO/USD

| | [,1] | [,2] | [,3] |
|------|-----------|-----------|-----------|
| [1,] | -13706.88 | -13697.86 | -13532.54 |
| [2,] | -13699.01 | -13604.52 | -13649.36 |
| [3,] | -13691.15 | -13653.67 | -13646.16 |

Rendements du GBP/USD

| | [,1] | [,2] | [,3] |
|------|-----------|-----------|-----------|
| [1,] | -13621.74 | -13609.56 | -13576.94 |
| [2,] | -13616.37 | -13614.46 | -13577.61 |
| [3,] | -13606.37 | -13570.11 | -13564.43 |

Rendements du JPY/USD

| | [,1] | [,2] | [,3] |
|------|-----------|-----------|-----------|
| [1,] | -15539.96 | -15504.19 | -15398.82 |
| [2,] | -15528.90 | -15435.91 | -15410.78 |
| [3,] | -15529.11 | -15468.53 | -15484.79 |

Rendements du RXA

Rendements du TYA

Annexe B

Sortie R : Estimation des paramètres du modèle GARCH(1,1)

```
> fit = ugarchfit(spec_, COA, solver = 'hybrid')
> fit
```

```
*-----*
*          GARCH Model Fit          *
*-----*

Conditional Variance Dynamics
-----
GARCH Model : sGARCH(1,1)
Mean Model : ARFIMA(0,0,0)
Distribution : norm

Optimal Parameters
-----
      Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
mu    0.000066  0.000349  0.18948  0.849721
omega 0.000002  0.000004  0.43099  0.666477
alpha1 0.054317  0.024310  2.23438  0.025458
beta1  0.943287  0.025098  37.58488  0.000000

Robust Standard Errors:
      Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
mu    0.000066  0.000655  0.101021 0.919533
omega 0.000002  0.000035  0.043721  0.965127
alpha1 0.054317  0.227195  0.239077  0.811046
beta1  0.943287  0.236557  3.987572  0.000067

LogLikelihood : 4940.01
```

Rendements du COA (Brent Oil)

```
> fit = ugarchfit(spec_, SILV, solver = 'hybrid')
> fit
```

```
*-----*
*          GARCH Model Fit          *
*-----*

Conditional Variance Dynamics
-----
GARCH Model : sGARCH(1,1)
Mean Model : ARFIMA(0,0,0)
Distribution : norm

Optimal Parameters
-----
      Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
mu   -0.000045  0.000428 -0.10613 0.91548
omega 0.000010  0.000003  3.77539 0.00016
alpha1 0.088609  0.006383  13.88144 0.00000
beta1  0.893652  0.009932  89.98099 0.00000

Robust Standard Errors:
      Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
mu   -0.000045  0.000480 -0.094715 0.924541
omega 0.000010  0.000007  1.427855 0.153333
alpha1 0.088609  0.018592  4.765912 0.000002
beta1  0.893652  0.018567  48.130476 0.000000

LogLikelihood : 4666.087
```

Rendements du SILVER

```
> fit = ugarchfit(spec_, JPYUSD, solver = 'hybrid')
> fit
```

```
*-----*
*          GARCH Model Fit          *
*-----*

Conditional Variance Dynamics
-----
GARCH Model : sGARCH(1,1)
Mean Model : ARFIMA(0,0,0)
Distribution : norm

Optimal Parameters
-----
      Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
mu   -0.000187  0.000132 -1.42188 0.155062
omega 0.000000  0.000001  0.72435 0.468849
alpha1 0.051126  0.010861  4.70738 0.000003
beta1  0.941330  0.010710  87.89137 0.000000

Robust Standard Errors:
      Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
mu   -0.000187  0.000263 -0.712906 0.47590
omega 0.000000  0.000009  0.045036 0.96408
alpha1 0.051126  0.224208  0.228029 0.81962
beta1  0.941330  0.213117  4.416962 0.00001

LogLikelihood : 6857.736
```

Rendements du JPY/USD

```
> fit = ugarchfit(spec_, CLA, solver = 'hybrid')
> fit
```

```
*-----*
*          GARCH Model Fit          *
*-----*

Conditional Variance Dynamics
-----
GARCH Model : sGARCH(1,1)
Mean Model : ARFIMA(0,0,0)
Distribution : norm

Optimal Parameters
-----
      Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
mu    0.000157  0.000377  0.41550  0.67778
omega 0.000002  0.000003  0.74644  0.45540
alpha1 0.061907  0.018220  3.39769  0.00068
beta1  0.936098  0.018702  50.05275  0.00000

Robust Standard Errors:
      Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
mu    0.000157  0.000406  0.38575  0.69968
omega 0.000002  0.000017  0.12656  0.89929
alpha1 0.061907  0.098179  0.63056  0.52833
beta1  0.936098  0.102352  9.14590  0.00000

LogLikelihood : 4747.224
```

Rendements du CLA (WTI)

```
> fit = ugarchfit(spec_, GBPUSD, solver = 'hybrid')
> fit
```

```
*-----*
*          GARCH Model Fit          *
*-----*

Conditional Variance Dynamics
-----
GARCH Model : sGARCH(1,1)
Mean Model : ARFIMA(0,0,0)
Distribution : norm

Optimal Parameters
-----
      Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
mu   -0.000030  0.000111 -0.27080 0.786542
omega 0.000000  0.000001  0.15789 0.874545
alpha1 0.045068  0.013947  3.23131 0.001232
beta1  0.951835  0.013504  70.48560 0.000000

Robust Standard Errors:
      Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
mu   -0.000030  0.000318 -0.094396 0.924795
omega 0.000000  0.000024  0.005260 0.995803
alpha1 0.045068  0.452395  0.099622 0.920645
beta1  0.951835  0.434159  2.192366 0.028353

LogLikelihood : 7169.452
```

Rendements de GBP/USD

```
> fit = ugarchfit(spec_, TY1, solver = 'hybrid')
> fit
```

```
*-----*
*          GARCH Model Fit          *
*-----*

Conditional Variance Dynamics
-----
GARCH Model : sGARCH(1,1)
Mean Model : ARFIMA(0,0,0)
Distribution : norm

Optimal Parameters
-----
      Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
mu    0.000041  0.000083  0.49859  0.61807
omega 0.000000  0.000000  0.14539  0.88440
alpha1 0.030257  0.005698  5.31058  0.00000
beta1  0.966577  0.005214  185.37913 0.00000

Robust Standard Errors:
      Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
mu    0.000041  0.000079  0.523747 0.600454
omega 0.000000  0.000026  0.002343 0.998131
alpha1 0.030257  0.280946  0.107698 0.914235
beta1  0.966577  0.264421  3.655449 0.000257

LogLikelihood : 7775.088
```

Rendements du TYA

```
> fit = ugarchfit(spec_, GOLDS, solver = 'hybrid')
> fit
```

```
*-----*
*          GARCH Model Fit          *
*-----*

Conditional Variance Dynamics
-----
GARCH Model : sGARCH(1,1)
Mean Model : ARFIMA(0,0,0)
Distribution : norm

Optimal Parameters
-----
      Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
mu    0.000262  0.000246  1.0643  0.28721
omega 0.000002  0.000002  1.5072  0.13176
alpha1 0.059534  0.011590  5.1365  0.00000
beta1  0.926094  0.013591  68.1413 0.00000

Robust Standard Errors:
      Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
mu    0.000262  0.000269  0.97346  0.33033
omega 0.000002  0.000012  0.20072  0.84092
alpha1 0.059534  0.071282  0.83519  0.40361
beta1  0.926094  0.092687  9.97334 0.00000

LogLikelihood : 5726.897
```

Rendements du GOLD

```
> fit = ugarchfit(spec_, EURUSD, solver = 'hybrid')
> fit
```

```
*-----*
*          GARCH Model Fit          *
*-----*

Conditional Variance Dynamics
-----
GARCH Model : sGARCH(1,1)
Mean Model : ARFIMA(0,0,0)
Distribution : norm

Optimal Parameters
-----
      Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
mu   -0.000106  0.000124 -0.85635 0.391807
omega 0.000000  0.000001  0.20332 0.838888
alpha1 0.042652  0.008716  4.89366 0.000001
beta1  0.955068  0.008278  115.37945 0.000000

Robust Standard Errors:
      Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
mu   -0.000106  0.000128 -0.826736 0.40839
omega 0.000000  0.000023  0.006092 0.99514
alpha1 0.042652  0.248766  0.171455 0.86387
beta1  0.955068  0.242049  3.945758 0.00008

LogLikelihood : 6947.709
```

Rendements de EURO/USD

```
> fit = ugarchfit(spec_, RX1, solver = 'hybrid')
> fit
```

```
*-----*
*          GARCH Model Fit          *
*-----*

Conditional Variance Dynamics
-----
GARCH Model : sGARCH(1,1)
Mean Model : ARFIMA(0,0,0)
Distribution : norm

Optimal Parameters
-----
      Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
mu    0.000047  0.000141  0.33579  0.73703
omega 0.000000  0.000002  0.17892  0.85800
alpha1 0.038703  0.031297  1.23662  0.21623
beta1  0.952891  0.032255  29.54230 0.000000

Robust Standard Errors:
      Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
mu    0.000047  0.000143  0.329423 0.74184
omega 0.000000  0.000123  0.003371 0.99731
alpha1 0.038703  1.685188  0.022966 0.98168
beta1  0.952891  1.732360  0.550054 0.58228

LogLikelihood : 6814.782
```

Rendements du RXA

Annexe C

Sortie R : Estimation des paramètres du modèle EGARCH(1,1)

```
> fit = ugarchfit(spec_, CLA, solver = 'hybrid')
> fit
*-----*
*          GARCH Model Fit          *
*-----*

Conditional Variance Dynamics
-----
GARCH Model : sGARCH(1,1)
Mean Model : ARFIMA(0,0,0)
Distribution : norm

Optimal Parameters
-----
      Estimate Std. Error  t value Pr(>|t|)
mu      0.000157  0.000377  0.41550  0.67778
omega   0.000002  0.000003  0.74644  0.45540
alpha1  0.061907  0.018220  3.39769  0.00068
beta1   0.936098  0.018702  50.05275  0.00000

Robust Standard Errors:
      Estimate Std. Error  t value Pr(>|t|)
mu      0.000157  0.000406  0.38575  0.69968
omega   0.000002  0.000017  0.12656  0.89929
alpha1  0.061907  0.098179  0.63056  0.52833
beta1   0.936098  0.102352  9.14590  0.00000

LogLikelihood : 4747.224
```

Rendements du CLA(WTI)

```
> fit = ugarchfit(spec_, GOLDS, solver = 'hybrid')
> fit
*-----*
*          GARCH Model Fit          *
*-----*

Conditional Variance Dynamics
-----
GARCH Model : sGARCH(1,1)
Mean Model : ARFIMA(0,0,0)
Distribution : norm

Optimal Parameters
-----
      Estimate Std. Error  t value Pr(>|t|)
mu      0.000262  0.000246  1.0643  0.28721
omega   0.000002  0.000002  1.5072  0.13176
alpha1  0.059534  0.011590  5.1365  0.00000
beta1   0.926094  0.013591  68.1413  0.00000

Robust Standard Errors:
      Estimate Std. Error  t value Pr(>|t|)
mu      0.000262  0.000269  0.97346  0.33033
omega   0.000002  0.000012  0.20072  0.84092
alpha1  0.059534  0.071282  0.83519  0.40361
beta1   0.926094  0.092857  9.97334  0.00000

LogLikelihood : 5726.897
```

Rendements du GOLD

```
> fit = ugarchfit(spec_, SILV, solver = 'hybrid')
> fit
*-----*
*          GARCH Model Fit          *
*-----*

Conditional Variance Dynamics
-----
GARCH Model : eGARCH(1,1)
Mean Model : ARFIMA(0,0,0)
Distribution : norm

Optimal Parameters
-----
      Estimate Std. Error  t value Pr(>|t|)
mu      -0.000259  0.000431  -0.60173  0.547356
omega   -0.242786  0.042338  -5.73447  0.000000
alpha1  -0.027866  0.012986  -2.14590  0.031881
beta1   0.967042  0.005396  179.19921  0.000000
gamma1  0.208340  0.022450  9.28013  0.000000

Robust Standard Errors:
      Estimate Std. Error  t value Pr(>|t|)
mu      -0.000259  0.000520  -0.49907  0.617733
omega   -0.242786  0.063992  -3.79403  0.000148
alpha1  -0.027866  0.022563  -1.23507  0.216806
beta1   0.967042  0.008203  117.88868  0.000000
gamma1  0.208340  0.039767  5.23897  0.000000

LogLikelihood : 4667.681
```

Rendements du SILVER

```
> fit = ugarchfit(spec_, COA, solver = 'hybrid')
> fit
*-----*
*          GARCH Model Fit          *
*-----*

Conditional Variance Dynamics
-----
GARCH Model : eGARCH(1,1)
Mean Model : ARFIMA(0,0,0)
Distribution : norm

Optimal Parameters
-----
      Estimate Std. Error  t value Pr(>|t|)
mu      -0.000273  0.000288  -0.94927  0.34248
omega   -0.043313  0.003700  -11.70583  0.00000
alpha1  -0.052095  0.006377  -8.16963  0.00000
beta1   0.994173  0.000533  1865.01560  0.00000
gamma1  0.097708  0.012487  7.82470  0.00000

Robust Standard Errors:
      Estimate Std. Error  t value Pr(>|t|)
mu      -0.000273  0.000513  -0.53268  0.594258
omega   -0.043313  0.009183  -4.71689  0.000002
alpha1  -0.052095  0.011278  -4.61916  0.000004
beta1   0.994173  0.001084  916.96650  0.000000
gamma1  0.097708  0.024365  4.01021  0.000061

LogLikelihood : 4954.355
```

Rendements du COA (Brent Oil)

```
> fit = ugarchfit(spec_, EURUSD, solver = 'hybrid')
> fit
*-----*
*          GARCH Model Fit          *
*-----*

Conditional Variance Dynamics
-----
GARCH Model : eGARCH(1,1)
Mean Model : ARFIMA(0,0,0)
Distribution : norm

Optimal Parameters
-----
      Estimate Std. Error  t value Pr(>|t|)
mu      -0.000201  0.000119  -1.6940  0.090273
omega   -0.036210  0.001144  -31.6442  0.000000
alpha1  -0.035566  0.006206  -5.7311  0.000000
beta1   0.996280  0.000016  63799.2981  0.000000
gamma1  0.061957  0.000841  73.7115  0.000000

Robust Standard Errors:
      Estimate Std. Error  t value Pr(>|t|)
mu      -0.000201  0.000127  -1.5854  0.112875
omega   -0.036210  0.001392  -26.0219  0.000000
alpha1  -0.035566  0.008167  -4.3549  0.000013
beta1   0.996280  0.000021  46741.9209  0.000000
gamma1  0.061957  0.001413  43.8602  0.000000

LogLikelihood : 6953.871
```

Rendements de l'EURO/USD

```
> fit = ugarchfit(spec_, JPYUSD, solver = 'hybrid')
> fit
*-----*
*          GARCH Model Fit          *
*-----*

Conditional Variance Dynamics
-----
GARCH Model : sGARCH(1,1)
Mean Model : ARFIMA(0,0,0)
Distribution : norm

Optimal Parameters
-----
      Estimate Std. Error  t value Pr(>|t|)
mu      -0.000187  0.000132  -1.42188  0.155062
omega   0.000000  0.000001  0.72435  0.468849
alpha1  0.051126  0.010861  4.70738  0.000003
beta1   0.941330  0.010710  87.89137  0.000000

Robust Standard Errors:
      Estimate Std. Error  t value Pr(>|t|)
mu      -0.000187  0.000263  -0.712906  0.47590
omega   0.000000  0.000009  0.045036  0.96480
alpha1  0.051126  0.224208  0.228029  0.81962
beta1   0.941330  0.213117  4.416962  0.00001

LogLikelihood : 6857.736
```

Rendements du JPY/USD

```
> fit = ugarchfit(spec_, GBPUSD, solver = 'hybrid')
> fit
*-----*
*          GARCH Model Fit          *
*-----*

Conditional Variance Dynamics
-----
GARCH Model : eGARCH(1,1)
Mean Model : ARFIMA(0,0,0)
Distribution : norm

Optimal Parameters
-----
      Estimate Std. Error  t value Pr(>|t|)
mu      -0.000142  0.000086  -1.6448  0.10001
omega   -0.032845  0.001053  -31.1843  0.00000
alpha1  -0.054920  0.005152  -10.6590  0.00000
beta1   0.996825  0.000002  482103.8020  0.00000
gamma1  0.028114  0.001448  19.4139  0.00000

Robust Standard Errors:
      Estimate Std. Error  t value Pr(>|t|)
mu      -0.000142  0.000090  -1.5777  0.11463
omega   -0.032845  0.001149  -28.5938  0.00000
alpha1  -0.054920  0.006868  -7.9965  0.00000
beta1   0.996825  0.000003  388094.6670  0.00000
gamma1  0.028114  0.002007  14.0081  0.00000

LogLikelihood : 7187.946

Information criteria
```

Rendements du GBP/USD

```
> fit = ugarchfit(spec_, RX1, solver = 'hybrid')
> fit
*-----*
*          GARCH Model Fit          *
*-----*

Conditional Variance Dynamics
-----
GARCH Model : sGARCH(1,1)
Mean Model : ARFIMA(0,0,0)
Distribution : norm

Optimal Parameters
-----
      Estimate Std. Error  t value Pr(>|t|)
mu      0.000047  0.000141  0.33579  0.73703
omega   0.000000  0.000002  0.17892  0.85800
alpha1  0.038703  0.031297  1.23662  0.21623
beta1   0.952891  0.032255  29.54230  0.00000

Robust Standard Errors:
      Estimate Std. Error  t value Pr(>|t|)
mu      0.000047  0.000143  0.329423  0.74184
omega   0.000000  0.000123  0.003371  0.99731
alpha1  0.038703  1.685188  0.022966  0.98168
beta1   0.952891  1.732360  0.550054  0.58228

LogLikelihood : 6814.782
```

Rendements du RXA

```
> fit = ugarchfit(spec_, TY1, solver = 'hybrid')
> fit
*-----*
*          GARCH Model Fit          *
*-----*

Conditional Variance Dynamics
-----
GARCH Model : sGARCH(1,1)
Mean Model : ARFIMA(0,0,0)
Distribution : norm

Optimal Parameters
-----
      Estimate Std. Error  t value Pr(>|t|)
mu      0.000041  0.000083  0.49859  0.61807
omega   0.000000  0.000000  0.14539  0.88440
alpha1  0.030257  0.005698  5.31058  0.00000
beta1   0.966577  0.005214  185.37913  0.00000

Robust Standard Errors:
      Estimate Std. Error  t value Pr(>|t|)
mu      0.000041  0.000079  0.523747  0.600454
omega   0.000000  0.000026  0.002343  0.998131
alpha1  0.030257  0.280946  0.107698  0.914235
beta1   0.966577  0.264421  3.655449  0.000257

LogLikelihood : 7775.088
```

Rendements du TYA

Annexe D

Sortie R : Test de Kolmogorov-Smirnov d'adéquation à la loi de Student

```
> ks.test.t(GBPUSD)
```

```
One-sample Kolmogorov-Smirnov test student-t with df=5.16, location=0, scale=0
```

```
data: GBPUSD
D = 0.018329, p-value = 0.5506
alternative hypothesis: two-sided
```

```
> ks.test.t(TY1)
```

```
One-sample Kolmogorov-Smirnov test student-t with df=4.82, location=0, scale=0
```

```
data: TY1
D = 0.034224, p-value = 0.02411
alternative hypothesis: two-sided
```

```
> ks.test.t(RX1)
```

```
One-sample Kolmogorov-Smirnov test student-t with df=4.83, location=0, scale=0.01
```

```
data: RX1
D = 0.020738, p-value = 0.3919
alternative hypothesis: two-sided
```

```
> ks.test.t(GOLDS)
```

```
One-sample Kolmogorov-Smirnov test student-t with df=3.47, location=0, scale=0.01
```

```
data: GOLDS
D = 0.019752, p-value = 0.4536
alternative hypothesis: two-sided
```

```
> ks.test.t(SILV)
```

```
One-sample Kolmogorov-Smirnov test student-t with df=3.31, location=0, scale=0.01
```

```
data: SILV
D = 0.018653, p-value = 0.5279
alternative hypothesis: two-sided
```

```
> ks.test.t(EURUSD)
```

```
One-sample Kolmogorov-Smirnov test student-t with df=6.13, location=0, scale=0.01
```

```
data: EURUSD
D = 0.023896, p-value = 0.2317
alternative hypothesis: two-sided
```

```
> ks.test.t(JPYUSD)
```

```
One-sample Kolmogorov-Smirnov test student-t with df=4.23, location=0, scale=0.01
```

```
data: JPYUSD
D = 0.023008, p-value = 0.2709
alternative hypothesis: two-sided
```

```
> ks.test.t(CLA)
```

```
One-sample Kolmogorov-Smirnov test student-t with df=2.74, location=0, scale=0.01
```

```
data: CLA
D = 0.018225, p-value = 0.5581
alternative hypothesis: two-sided
```

```
> ks.test.t(COA)
```

```
One-sample Kolmogorov-Smirnov test student-t with df=2.79, location=0, scale=0.01
```

```
data: COA
D = 0.018158, p-value = 0.5628
alternative hypothesis: two-sided
```

Annexe E

Sortie R : Estimation des modèles de corrélations conditionnelles dynamiques

```

*-----*
*          DCC GARCH Fit          *
*-----*

Distribution      : mvnorm
Model            : DCC(1,1)
No. Parameters   : 74
[VAR GARCH DCC uncq] : [0+36+2+36]
No. Series       : 9
No. Obs.         : 1886
Log-Likelihood   : 60638.69
Av.Log-Likelihood : 32.15

Optimal Parameters
-----
                Estimate Std. Error  t value Pr(>|t|)
[Joint]dccal    0.019495   0.003073   6.34396 0.000000
[Joint]dccbl    0.957277   0.008788  108.92956 0.000000

Information Criteria
-----
Akaike         -64.226
Bayes          -64.008
Shibata        -64.228
Hannan-Quinn  -64.145

Elapsed time : 1.416231

```

Estimation du modèle GARCH-DCC avec des rendements normaux

```

*-----*
*          DCC GARCH Fit          *
*-----*

Distribution      : mvt
Model            : DCC(1,1)
No. Parameters   : 75
[VAR GARCH DCC uncq] : [0+36+3+36]
No. Series       : 9
No. Obs.         : 1886
Log-Likelihood   : 61316.46
Av.Log-Likelihood : 32.51

Optimal Parameters
-----
                Estimate Std. Error  t value Pr(>|t|)
[Joint]dccal    0.017892   0.002042   8.760388 0.000000
[Joint]dccbl    0.964490   0.005809  166.019489 0.000000
[Joint]mshape    7.534367   0.335342  22.467735 0.000000

Information Criteria
-----
Akaike         -64.943
Bayes          -64.723
Shibata        -64.946
Hannan-Quinn  -64.862

Elapsed time : 41.9764

```

Estimation du modèle GARCH-DCC avec des rendements suivant la loi de Student

```

*-----*
*          DCC GARCH Fit          *
*-----*

Distribution      : mvnorm
Model            : DCC(1,1)
No. Parameters   : 83
[VAR GARCH DCC uncq] : [0+45+2+36]
No. Series       : 9
No. Obs.         : 1886
Log-Likelihood   : 60688.3
Av.Log-Likelihood : 32.18

Optimal Parameters
-----
                Estimate Std. Error  t value Pr(>|t|)
[Joint]dccal    0.018996   0.002472   7.6854e+00 0.000000
[Joint]dccbl    0.959944   0.006357   1.5101e+02 0.000000

Information Criteria
-----
Akaike         -64.269
Bayes          -64.025
Shibata        -64.272
Hannan-Quinn  -64.179

```

Estimation du modèle EGARCH-DCC avec des rendements normaux

```

*-----*
*          DCC GARCH Fit          *
*-----*

Distribution      : mvt
Model            : DCC(1,1)
No. Parameters   : 84
[VAR GARCH DCC uncq] : [0+45+3+36]
No. Series       : 9
No. Obs.         : 1886
Log-Likelihood   : 61346.84
Av.Log-Likelihood : 32.53

Optimal Parameters
-----
                Estimate Std. Error  t value Pr(>|t|)
[Joint]dccal    0.018148   0.001951   9.3004e+00 0.000000
[Joint]dccbl    0.964680   0.005159   1.8700e+02 0.000000
[Joint]mshape    7.603437   0.325132   2.3386e+01 0.000000

Information Criteria
-----
Akaike         -64.966
Bayes          -64.719
Shibata        -64.970
Hannan-Quinn  -64.875

Elapsed time : 1.319192

```

Estimation du modèle EGARCH-DCC avec des rendements suivant la loi de Student

Remarque : La librairie R utilisée est « rmgarch »

Annexe F

Sortie STATA : Test de stationnarité Augmented Dickey-Fuller

- Série des prix (Exemple : COA (Brent Crude Oil))

| | | | | | | |
|---|-----------|----------------------------|-------------------|--------------------|----------------------|----------------------|
| <pre>. tset A, daily time variable: A, 1/2/2008 to 4/22/2015 delta: 1 day . dfuller COA, regress lags(0)</pre> | | | | | | |
| Dickey-Fuller test for unit root | | | | | | |
| | | | | | | Number of obs = 2667 |
| | Test | Interpolated Dickey-Fuller | | | | |
| | Statistic | 1% Critical Value | 5% Critical Value | 10% Critical Value | | |
| Z(t) | -0.169 | -3.430 | -2.860 | -2.570 | | |
| MacKinnon approximate p-value for Z(t) = 0.9421 | | | | | | |
| <pre>. dfuller COA, trend regress lags(0)</pre> | | | | | | |
| Dickey-Fuller test for unit root | | | | | | |
| | | | | | | Number of obs = 2667 |
| | Test | Interpolated Dickey-Fuller | | | | |
| | Statistic | 1% Critical Value | 5% Critical Value | 10% Critical Value | | |
| Z(t) | 0.201 | -3.960 | -3.410 | -3.120 | | |
| MacKinnon approximate p-value for Z(t) = 0.9958 | | | | | | |
| <pre>. dfuller COA, noconstant regress lags(0)</pre> | | | | | | |
| Dickey-Fuller test for unit root | | | | | | |
| | | | | | | Number of obs = 2667 |
| | Test | Interpolated Dickey-Fuller | | | | |
| | Statistic | 1% Critical Value | 5% Critical Value | 10% Critical Value | | |
| Z(t) | -1.008 | -2.580 | -1.950 | -1.620 | | |
| D.COA | Coef. | Std. Err. | t | P> t | [95% Conf. Interval] | |
| COA L1. | -.0003823 | .0003794 | -1.01 | 0.314 | -.0011263 | .0003616 |

Remarque : La même procédure est répétée pour l'ensemble des actifs étudiées

- Série des rendements prix (Exemple : COA (Brent Crude Oil))

```
. dfuller d.COA, regress lags(0)
```

| Dickey-Fuller test for unit root | | | | | | |
|---|----------------------------|----------------------|-----------------------|---------------|---|------|
| | | | | Number of obs | = | 2666 |
| Test Statistic | Interpolated Dickey-Fuller | | | | | |
| | 1% Critical Value | 5% Critical Value | 10% Critical Value | | | |
| Z(t) | -40.877 | -3.430 | -2.860 | | | |
| MacKinnon approximate p-value for Z(t) = 0.0000 | | | | | | |

```
. dfuller d.COA, trend regress lags(0)
```

| Dickey-Fuller test for unit root | | | | | | |
|---|----------------------------|----------------------|-----------------------|---------------|---|------|
| | | | | Number of obs | = | 2666 |
| Test Statistic | Interpolated Dickey-Fuller | | | | | |
| | 1% Critical Value | 5% Critical Value | 10% Critical Value | | | |
| Z(t) | -40.907 | -3.960 | -3.410 | | | |
| MacKinnon approximate p-value for Z(t) = 0.0000 | | | | | | |

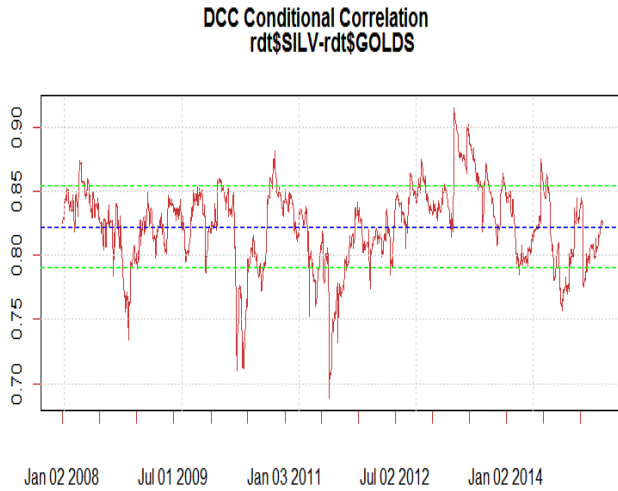
```
. dfuller d.COA, noconstant regress lags(0)
```

| Dickey-Fuller test for unit root | | | | | | |
|----------------------------------|----------------------------|----------------------|-----------------------|---------------|---|------|
| | | | | Number of obs | = | 2666 |
| Test Statistic | Interpolated Dickey-Fuller | | | | | |
| | 1% Critical Value | 5% Critical Value | 10% Critical Value | | | |
| Z(t) | -40.870 | -2.580 | -1.950 | | | |

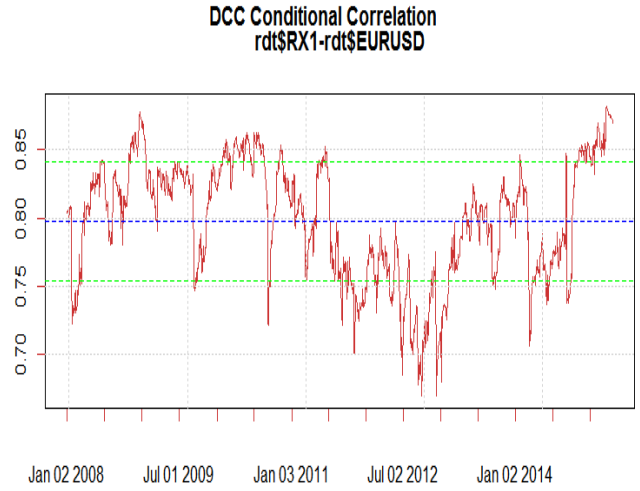
Remarque : La même procédure est répétée pour l'ensemble des actifs étudiées

Annexe G

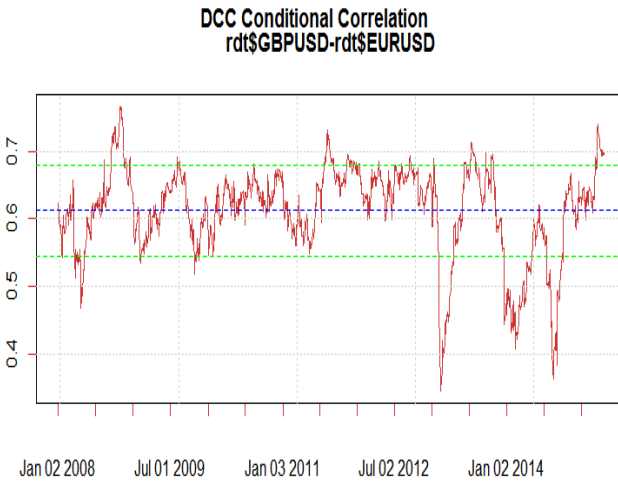
Sortie R : Evolution de des corrélations conditionnelles dynamiques entre les paires d'actifs



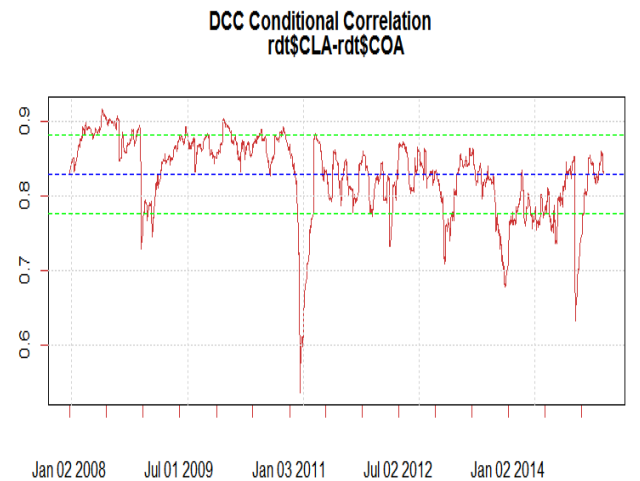
Evolution de la corrélation conditionnelle dynamique entre l'argent et l'or



Evolution de la corrélation conditionnelle dynamique entre l'EUR/USD et les euro bund



Evolution de la corrélation conditionnelle dynamique entre GBP/USD et EUR/USD

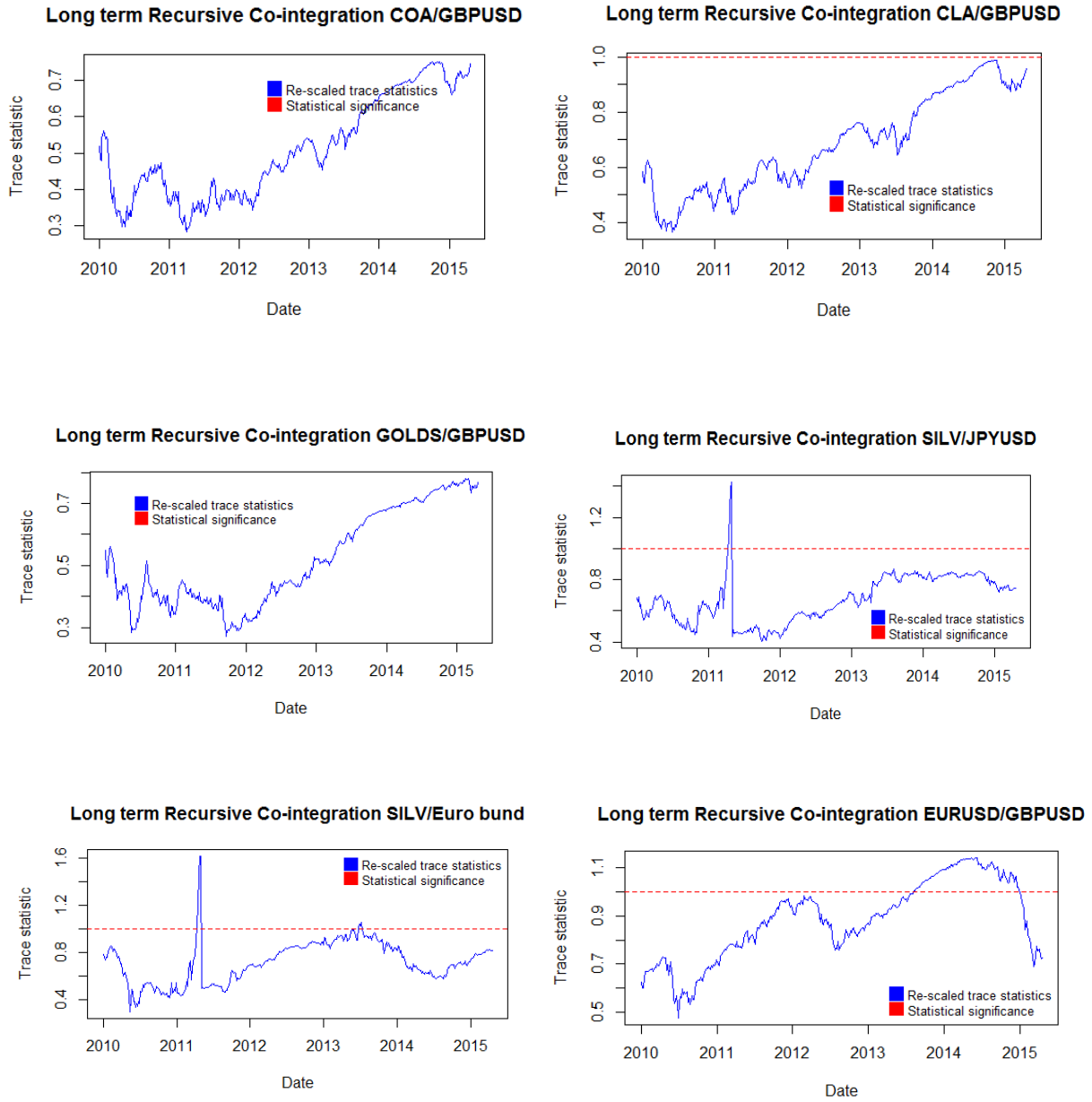


Evolution de la corrélation conditionnelle dynamique entre le Brent Crude Oil et WTI Oil

Remarque : La même procédure est répétée pour l'ensemble des paires d'actifs étudiées

Annexe H

Sortie R : Graphes de la cointégration récursive de paires d'actifs



Remarque : La même procédure est répétée pour l'ensemble des paires d'actifs étudiées

Annexe I

Sortie VBA-Excel (en liaison avec RExcel) : Test de cointégration au sens de Granger

Après avoir démontré dans le cinquième chapitre que les séries temporelles des prix $A_{i,t}$ des neuf actifs sont I(1), nous testons la stationnarité des résidus e_t de la régression suivante :

$$A_{i,t} = \beta A_{j,t} + \alpha + e_t \text{ pour } 1 \leq i, j \leq 9, i \neq j$$

par le test de l'ADF en utilisant la table de MacKinnin⁴¹. Les actifs cointégrés sont ceux dont le résidu e_t est stationnaire. Les sorties ci-dessous font partie d'une plateforme VBA-Excel liée au complément RExcel (grâce auquel nous appelons R via Excel)

Step 2 : Estimation de la relation de long terme

| | | Y | | | | | | | | |
|---|---------------|-------------|-------------|-------------|-------------|---------------|---------------|---------------|-------------|-------------|
| | | COA Comdty | CLA Comdty | GOLD Comdty | SILV Comdty | EURUSD Curney | GBPUSD Curney | JPYUSD Curney | TYA Comdty | RXA Comdty |
| X | COA Comdty | 9.16663E-41 | 0.014334773 | 0.237839482 | 0.113799891 | 0.017100537 | 0.001367068 | 0.488681625 | 0.08647124 | 0.006520212 |
| | CLA Comdty | 0.001581024 | 3.62163E-30 | 0.152412223 | 0.229024123 | 0.051032197 | 0.022895377 | 0.709458896 | 0.082291215 | 0.003089606 |
| | GOLD Comdty | 0.000308572 | 0.001138286 | 7.41082E-41 | 0.102597798 | 0.070756828 | 0.073043197 | 0.022357522 | 0.026403867 | 0.008017936 |
| | SILV Comdty | 9.01205E-05 | 0.002771637 | 0.127732808 | 2.09617E-37 | 0.08860285 | 0.055658755 | 0.029842652 | 0.085901915 | 0.000731033 |
| | EURUSD Curney | 0.00017382 | 0.003346238 | 0.305340346 | 0.259878877 | 3.07232E-34 | 0.027662532 | 0.804972305 | 0.073913213 | 0.007982546 |
| | GBPUSD Curney | 0.0001 | 0.003798261 | 0.429005623 | 0.341394059 | 0.055071142 | 6.65186E-41 | 0.847071661 | 0.153478761 | 0.004748881 |
| | JPYUSD Curney | 0.000152572 | 0.001820502 | 0.007868463 | 0.009569143 | 0.084290355 | 0.082837349 | 1.81512E-34 | 0.049327187 | 0.000447853 |
| | TYA Comdty | 0.000354271 | 0.002242026 | 0.115221336 | 0.213531747 | 0.049808529 | 0.055731532 | 0.659776567 | 1.10529E-40 | 0.025226091 |
| | RXA Comdty | 0.000629102 | 0.003720639 | 0.434124193 | 0.164320864 | 0.135831162 | 0.033315996 | 0.665878972 | 0.294911681 | 8.43311E-41 |

P-Value du test de l'ADF suivant le modèle « None » (sans Trend et sans Drift)

| | | Y | | | | | | | | |
|---|---------------|-------------|------------|-------------|-------------|---------------|---------------|---------------|------------|------------|
| | | COA Comdty | CLA Comdty | GOLD Comdty | SILV Comdty | EURUSD Curney | GBPUSD Curney | JPYUSD Curney | TYA Comdty | RXA Comdty |
| X | COA Comdty | 6.38875E-58 | 0.23759331 | 0.777602534 | 0.061012534 | 0.412321671 | 0.106601979 | 0.69861473 | 0.88942014 | 0.05187824 |
| | CLA Comdty | 0.026147379 | 1.9177E-35 | 0.493420873 | 0.091804301 | 0.5248524 | 0.476657219 | 0.536155391 | 0.93651826 | 0.08555065 |
| | GOLD Comdty | 0.027415548 | 0.074869 | 6.38875E-58 | 0.541903086 | 0.668371365 | 0.77881631 | 0.15789224 | 0.09379324 | 0.04141757 |
| | SILV Comdty | 0.007965327 | 0.13329328 | 0.916567382 | 1.4884E-51 | 0.756052227 | 0.527510846 | 0.442134246 | 0.93782487 | 0.03467524 |
| | EURUSD Curney | 0.018997657 | 0.1320107 | 0.739699173 | 0.31032292 | 6.81306E-44 | 0.445872078 | 0.904168339 | 0.91611135 | 0.11451563 |
| | GBPUSD Curney | 0.01018053 | 0.16381357 | 0.858657079 | 0.159617867 | 0.528532925 | 6.38875E-58 | 0.91084861 | 0.97339779 | 0.16092199 |
| | JPYUSD Curney | 0.016753778 | 0.10086336 | 0.340590211 | 0.185611317 | 0.757833241 | 0.667060851 | 3.87144E-45 | 0.91911369 | 0.02458992 |
| | TYA Comdty | 0.016861527 | 0.11680984 | 0.141610269 | 0.080728355 | 0.509776696 | 0.762378821 | 0.491095545 | 6.3888E-58 | 0.31608222 |
| | RXA Comdty | 0.013771097 | 0.16475193 | 0.761689651 | 0.080095469 | 0.859824625 | 0.660120157 | 0.518714816 | 0.93476085 | 6.3888E-58 |

P-Value du test de l'ADF suivant le modèle avec Trend

| | | Y | | | | | | | | |
|---|---------------|-------------|------------|-------------|-------------|---------------|---------------|---------------|------------|------------|
| | | COA Comdty | CLA Comdty | GOLD Comdty | SILV Comdty | EURUSD Curney | GBPUSD Curney | JPYUSD Curney | TYA Comdty | RXA Comdty |
| X | COA Comdty | 4.10276E-44 | 0.13142639 | 0.709958091 | 0.503658127 | 0.149890929 | 0.020242515 | 0.883223841 | 0.43636625 | 0.06796124 |
| | CLA Comdty | 0.022265831 | 5.148E-31 | 0.59036053 | 0.699907434 | 0.316564331 | 0.181224917 | 0.965541624 | 0.41836949 | 0.03553589 |
| | GOLD Comdty | 0.005468262 | 0.01724355 | 3.08953E-44 | 0.478773605 | 0.385162302 | 0.387349998 | 0.179961475 | 0.19842023 | 0.07517425 |
| | SILV Comdty | 0.00177593 | 0.03611972 | 0.538424301 | 6.31776E-40 | 0.436267261 | 0.321984634 | 0.223135899 | 0.42942154 | 0.01011612 |
| | EURUSD Curney | 0.003360228 | 0.04236448 | 0.77468331 | 0.730877138 | 2.98838E-36 | 0.209102919 | 0.984181608 | 0.39244409 | 0.07625647 |
| | GBPUSD Curney | 0.002105406 | 0.04694299 | 0.854599401 | 0.79858619 | 0.333634584 | 3.24971E-44 | 0.989797479 | 0.58916547 | 0.05227787 |
| | JPYUSD Curney | 0.002903044 | 0.02560938 | 0.082799891 | 0.097152969 | 0.425704908 | 0.412994002 | 7.12326E-37 | 0.29943787 | 0.00655881 |
| | TYA Comdty | 0.006247421 | 0.03030752 | 0.510761606 | 0.680988585 | 0.308856467 | 0.332546472 | 0.950407646 | 4.8285E-44 | 0.1903059 |
| | RXA Comdty | 0.01046018 | 0.04623252 | 0.85750313 | 0.610185282 | 0.556255437 | 0.240346593 | 0.954039289 | 0.76685816 | 3.4476E-44 |

P-Value du test de l'ADF suivant le modèle avec Drift

⁴¹ Bourbonnais R. (2005) *Econométrie*, 6^{ème} édition, DUNOD, page 281.

Annexe J

Sortie VBA-Excel (en liaison avec RExcel) : Test de stationnarité du spread entre chaque paire d'actifs

Nous testons la stationnarité, par le test de l'ADF, du spread de chaque paire d'actifs, défini comme suit :

$$\text{Spread}(A_{i,t}, A_{j,t}) = \log(A_{i,t}) - \log(A_{j,t}) \text{ pour } 1 \leq i, j \leq 9, i \neq j$$

$A_{i,t}$ est la série temporelle de prix de l'actif i .
 Les sorties ci-dessous font partie d'une plateforme VBA-Excel liée au complément RExcel (grâce auquel nous appelons R via Excel)

Etude de stationnarité du $\log(Y_t) - \log(X_t)$

| | | Y | | | | | | | | |
|---|---------------|-------------|-------------|-------------|-------------|---------------|---------------|---------------|------------|------------|
| | | COA Comdty | CLA Comdty | GOLD Comdty | SILV Comdty | EURUSD Curncy | GBPUSD Curncy | JPYUSD Curncy | TYA Comdty | RXA Comdty |
| X | COA Comdty | | 0.371234942 | 0.4435248 | 0.882604491 | 0.728576936 | 0.723758488 | 0.880147916 | 0.12203148 | 0.5674725 |
| | CLA Comdty | 0.371234942 | | 0.505110396 | 0.863216009 | 0.683038932 | 0.678885247 | 0.843077643 | 0.33623744 | 0.61924983 |
| | GOLD Comdty | 0.4435248 | 0.505110396 | | 0.854130616 | 0.468392073 | 0.45595009 | 0.762199118 | 0.48672737 | 0.31204403 |
| | SILV Comdty | 0.882604491 | 0.86321601 | 0.854130616 | | 0.35677729 | 0.356220816 | 0.568119405 | 0.83557242 | 0.8982646 |
| | EURUSD Curncy | 0.728576936 | 0.68303893 | 0.468392073 | 0.35677729 | | 0.565878233 | 0.953668147 | 0.63361218 | 0.9017872 |
| | GBPUSD Curncy | 0.723758488 | 0.67888525 | 0.45595009 | 0.356220816 | 0.565878233 | | 0.970069194 | 0.61837107 | 0.86356891 |
| | JPYUSD Curncy | 0.880147916 | 0.84307764 | 0.762199118 | 0.568119405 | 0.953668147 | 0.970069194 | | 0.97312177 | 0.99057929 |
| | TYA Comdty | 0.122031483 | 0.33623744 | 0.486727374 | 0.835572415 | 0.633612182 | 0.618371074 | 0.973121773 | | 0.85142214 |
| | RXA Comdty | 0.567472497 | 0.61924983 | 0.312044026 | 0.898264604 | 0.901787196 | 0.863568906 | 0.990579291 | 0.85142214 | |

P-Value du test de l'ADF suivant le modèle « None » (sans Trend et sans Drift)

| | | Y | | | | | | | | |
|---|---------------|-------------|------------|-------------|-------------|---------------|---------------|---------------|------------|------------|
| | | COA Comdty | CLA Comdty | GOLD Comdty | SILV Comdty | EURUSD Curncy | GBPUSD Curncy | JPYUSD Curncy | TYA Comdty | RXA Comdty |
| X | COA Comdty | | 0.16486471 | 0.679530468 | 0.20073658 | 0.037004564 | 0.009114178 | 0.272244958 | 0.07833522 | 0.01842864 |
| | CLA Comdty | 0.164864705 | | 0.772411088 | 0.439528804 | 0.136043691 | 0.16185529 | 0.493281629 | 0.31526112 | 0.17852284 |
| | GOLD Comdty | 0.679530468 | 0.77241109 | | 0.245389677 | 0.950675438 | 0.917515758 | 0.281053147 | 0.3613048 | 0.84178646 |
| | SILV Comdty | 0.20073658 | 0.4395288 | 0.245389677 | | 0.341157854 | 0.220360728 | 0.129479117 | 0.09896751 | 0.19013159 |
| | EURUSD Curncy | 0.037004564 | 0.13604369 | 0.950675438 | 0.341157854 | | 0.55957173 | 0.959441823 | 0.95200915 | 0.86259068 |
| | GBPUSD Curncy | 0.009114178 | 0.16185529 | 0.917515758 | 0.220360728 | 0.55957173 | | 0.92479607 | 0.96222402 | 0.37655045 |
| | JPYUSD Curncy | 0.272244958 | 0.49328163 | 0.281053147 | 0.129479117 | 0.959441823 | 0.92479607 | | 0.41402129 | 0.87851571 |
| | TYA Comdty | 0.078335217 | 0.31526112 | 0.361304804 | 0.098967505 | 0.952009149 | 0.962224025 | 0.414021291 | | 0.64836546 |
| | RXA Comdty | 0.018428644 | 0.17852284 | 0.841786459 | 0.190131595 | 0.862590682 | 0.376550446 | 0.878515709 | 0.64836546 | |

P-Value du test de l'ADF suivant le modèle avec Trend

| | | Y | | | | | | | | |
|---|---------------|-------------|------------|-------------|-------------|---------------|---------------|---------------|------------|------------|
| | | COA Comdty | CLA Comdty | GOLD Comdty | SILV Comdty | EURUSD Curncy | GBPUSD Curncy | JPYUSD Curncy | TYA Comdty | RXA Comdty |
| X | COA Comdty | | 0.10381882 | 0.543027464 | 0.80525088 | 0.006508925 | 0.001779313 | 0.356765738 | 0.03030824 | 0.02445793 |
| | CLA Comdty | 0.103818825 | | 0.702376166 | 0.868285792 | 0.051571061 | 0.047302136 | 0.591797045 | 0.10552193 | 0.0521169 |
| | GOLD Comdty | 0.543027464 | 0.70237617 | | 0.65447054 | 0.889799143 | 0.910766976 | 0.075906197 | 0.70396313 | 0.92445411 |
| | SILV Comdty | 0.80525088 | 0.86828579 | 0.65447054 | | 0.855329992 | 0.868628899 | 0.301220935 | 0.76296434 | 0.86325688 |
| | EURUSD Curncy | 0.006508925 | 0.05157106 | 0.889799143 | 0.855329992 | | 0.349621516 | 0.972570431 | 0.6342304 | 0.34902068 |
| | GBPUSD Curncy | 0.001779313 | 0.04730214 | 0.910766976 | 0.868628899 | 0.349621516 | | 0.993594637 | 0.58122737 | 0.08868699 |
| | JPYUSD Curncy | 0.356765738 | 0.59179704 | 0.075906197 | 0.301220935 | 0.972570431 | 0.993594637 | | 0.92934681 | 0.96649429 |
| | TYA Comdty | 0.030308242 | 0.10552193 | 0.703963126 | 0.762964336 | 0.634230403 | 0.581227368 | 0.929346809 | | 0.41894535 |
| | RXA Comdty | 0.024457925 | 0.0521169 | 0.924454112 | 0.863256876 | 0.349020681 | 0.088686989 | 0.96649429 | 0.41894535 | |

P-Value du test de l'ADF suivant le modèle avec Drift

Annexe K

Rappel 1 : Test de racines unitaires (tests de Dickey-Fuller et Dickey-Fuller augmenté)

La pratique des tests de racine unitaire repose sur la modélisation d'une série par un processus AR(p) :

$$y_t = \sum_{i=1}^p \alpha_i y_{t-i} + \epsilon_t$$

Le cas le plus simple est celui d'une marche aléatoire :

$$y_t = \rho y_{t-1} + \epsilon_t$$

Quand $\rho < 1$, le processus est stationnaire, explosif si $\rho > 1$ et intégré dans le cas $\rho = 1$.

Il est essentiel de déterminer a priori si les séries temporelles présentent une racine unitaire.

Pour ce faire, divers tests existent. Le test de Dickey-Fuller a pour hypothèses $H_0 = 1$ et $H_1 < 1$. Sous l'hypothèse H_0 , on peut réécrire $\Delta y_t = y_t - y_{t-1} = \epsilon_t$, et donc en régressant Δy_t sur y_{t-1} dans $\Delta y_t = d_t - \alpha y_{t-1} + \epsilon_t$, on doit trouver un estimateur α proche de zéro. d_t contient les termes déterministes :

- soit zéro
- soit une constante
- soit une tendance linéaire

Soit :

$$\begin{cases} 0 \\ a \\ a + b_t \end{cases}$$

Cependant, le test de Student associé ne suit pas une distribution habituelle. Il faut donc se reporter aux tables de Fuller, mais les valeurs dépendent des composantes de d_t . Le test de Dickey-Fuller : c'est le cas le plus simple de marche aléatoire avec ou sans tendance déterministe.

Le test de Dickey-Fuller augmenté (souvent noté ADF) permet de prendre en compte l'autocorrélation possible de la série différenciée via une correction utilisant les valeurs retardées, sur la base du test :

$$y_t = d_t + \alpha y_{t-1} + \sum_{i=1}^p \Delta y_{t-i} + \epsilon_t$$

Annexe L

Rappel 2 : Test de cointégration d'Engel et Granger

- **Etape 1** : Tester l'ordre d'intégration des variables

Une condition nécessaire de cointégration est que les séries doivent être intégrées de même ordre. Si les séries ne sont pas intégrées de même ordre, elles ne peuvent pas être cointégrées.

Il convient donc de déterminer très soigneusement le type de tendance déterministe ou stochastique de chacune des variables, puis l'ordre d'intégration d des chroniques étudiées. Si les séries statistiques étudiées ne sont pas intégrées de même ordre, la procédure est arrêtée, il n'y a pas de risque de cointégration.

Soit :

$$x_t \rightarrow I(d) \text{ et } y_t \rightarrow I(d)$$

- **Etape 2** : estimation de la relation de long terme

Si la condition est vérifiée, on estime par les MCO la relation de long terme entre les variables : $y_t = a_1 x_t + a_0 + \epsilon_t$.

Pour que la relation de cointégration soit acceptée, le résidu e_t issu de cette régression doit être stationnaire : $e_t = y_t - \hat{a}_1 x_t + \hat{a}_0$.

Dans ce cas, nous ne pouvons plus utiliser les tables de Dickey-Fuller. En effet, le test porte sur les résidus estimés à partir de la relation statistique et non pas sur les « vrais » résidus de la relation de cointégration. MacKinnon (1991) a donc simulé des tables qui dépendant du nombre d'observations et du nombre de variables explicatives figurant dans la relation statistique.

Annexe M : Code élaboré sous R pour la cointégration récursive de Johansen

```

library(urca)
## Donnees de juin 2008 à Avril 2015
donnee_tot=read.csv2("donnee_sas_2008_corrigees
.csv",dec=".",sep=";",header=TRUE)
donnee_tot$Date=as.Date(donnee_tot$Date,
format="%d/%m/%Y")
date_fin_tot=donnee_tot$Date[dim(donnee_tot[1])[
1]]
## Donnees de juin 2008 à Decembre 2009
donnee=donnee_tot[1:730, ]
##
## ##### Préparation du stockage de données
##
fin_ligne_tot=dim(donnee_tot)[1]
fin_ligne_partielle=dim(donnee)[1]
signal=fin_ligne_tot-fin_ligne_partielle
taille=floor(signal/5) # Floor : Partie entière
trace=vector("numeric",taille)
date=vector("numeric",taille)
## ### FIN
## Visualiser les données
head(donnee)
## Extraire les prix de la base
CLA=donnee$CLA
GOLDS=donnee$GOLDS
SILV=donnee$SILV
EURUSD=donnee$EURUSD
GBPUSD=donnee$GBPUSD
JPYUSD=donnee$JPYUSD
TY1=donnee$TY1
RX1=donnee$RX1
COA=donnee$COA
## Combiner les deux
ll=cbind(TY1,RX1)
## ##### Johansen Trace test #####
H1=ca.jo(ll,type="trace",ecdet="none",K=2)
summary(H1)
## >>>>> On stocke les valeurs critiques dans une
variable
criticalValues=H1@cval
## >>>>> On stocke les stats dans une variable
teststatistics=H1@teststat
## >>>> On choisit de rapporter la stat à sa valeur
critique de 10% ( rescaled stat to 10%)
criticalValues[dim(criticalValues)[1],1] ## Stocke
la val critique de la stat à 10%
teststatistics[length(teststatistics)] ## Stock la stat
de r=0
rescaled_trace=teststatistics[length(teststatistics)]/cr
iticalValues[dim(criticalValues)[1],1]
## ##### FIN #####
##Capter la dernière date

```

```

date_fin=donnee$Date[dim(donnee[1])[1]] ##
Attention problème de Level ?!
date[1]=date_fin
trace[1]=rescaled_trace
## ##### Boucle #####
pas=5
i=2
while(signal>=5){
donnee=rbind(donnee,donnee_tot[(fin_ligne_partiel
le+1):(fin_ligne_partielle+5),])
## Extraire les prix de la base
CLA=donnee$CLA
COA=donnee$COA
GOLDS=donnee$GOLDS
SILV=donnee$SILV
EURUSD=donnee$EURUSD
GBPUSD=donnee$GBPUSD
JPYUSD=donnee$JPYUSD
TY1=donnee$TY1
RX1=donnee$RX1
## Combiner les deux
ll=cbind(RX1,TY1)
## ##### Johansen Trace test #####
H1=ca.jo(ll,type="trace",ecdet="none",K=2)
summary(H1)
## >>>>> On stocke les valeurs critiques dans une
variable
criticalValues=H1@cval
## >>>>> On stocke les stats dans une variable
teststatistics=H1@teststat
## >>>> On choisit de rapporter la stat à sa valeur
critique de 10% ( rescaled stat to 10%)
criticalValues[dim(criticalValues)[1],1] ## Stocke
la val critique de la stat à 10%
teststatistics[length(teststatistics)] ## Stock la stat
de r=0
rescaled_trace=teststatistics[length(teststatistics)]/cr
iticalValues[dim(criticalValues)[1],1]
## ##### FIN #####
##Capter la dernière date
date_fin=donnee$Date[dim(donnee[1])[1]]
date[i]=date_fin
trace[i]=rescaled_trace
i=i+1
## Capter le signal
fin_ligne_partielle=dim(donnee)[1]
signal=fin_ligne_tot-fin_ligne_partielle
}
date=as.Date(date,origin="1970-01-01")

plot(date,trace, main = "Long term Recursive Co-
integration Euro Bund/T-Note", xlab = "Date", ylab
= "Trace statistic", type = "l", col = "blue" )
abline(h=1, lty=2, lwd=1, col="red")
legend("bottomright", legend = c("Re-scaled trace
statistics", "Statistical significance"), col = c("blue",
"red"), pch = 15, bty = "n", pt.cex = 2, cex = 0.8,
text.col = "black", horiz = FALSE, inset = c(0.001,
0.001))

```

Annexe N

Algorithme de Nelder-Mead

L'algorithme de Nelder-Mead est la méthode la plus populaire et la plus robuste qui permet de trouver les racines de fonctions multivariées. Aussi cette méthode converge rapidement selon les valeurs initiales tenues en compte.

Pour une fonction $f(x)$ à n variables, l'algorithme requiert $n+1$ valeurs initiales x_1, x_2, \dots, x_{n+1} qui confirment l'inégalité suivante: $f_1 \leq f_2 \leq \dots \leq f_n \leq f_{n+1}$ (1)

Avec $f_k = f(x_k)$ et $x_i \in R_n (i = 1, 2, \dots, n + 1)$.

Le meilleur de ces vecteurs est x_1 puisqu'il permet de donner la plus petite valeur de $f(x)$, tandis que x_{n+1} est considéré comme la mauvaise valeur vu qu'elle donne une plus grande valeur de $f(x)$. Les vecteurs restants se situent dans le milieu.

Ainsi, à chaque pas d'itération nous gardons les meilleures valeurs x_1, x_2, \dots, x_n et la mauvaise valeur x_{n+1} est remplacée selon les règles suivantes :

- **Règle de réflexion : « Reflection Rule »**

On note $x_r = 2\bar{x} - x_{n+1}$ tel que : $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$ est la moyenne des meilleurs n points et on évalue $f_r = f(x_r)$.

Si $f_1 \leq f_r < f_n$ alors le point x_{n+1} est remplacé par x_r et les $n + 1$ points $x_1, x_2, \dots, x_n, x_r$ sont réordonnés selon la valeur de leur fonction décrite en (1) qui permet d'avoir un nouveau ordre des points.

L'itération suivante est initiée au départ de la plus mauvaise valeur x_{n+1} .

Dans le cas contraire, on procède à la règle suivante.

- **Règle d'expansion : « Expansion Rule »**

Si $f_r < f_1$, on note $x_e = 2x_r - \bar{x}$ et on calcule la valeur de sa fonction $f_e = f(x_e)$.

Si $f_e < f_r$ alors on remplace x_{n+1} par x_e et on réordonne les points puis on initie l'itération suivante.

Dans le cas contraire, on procède à la règle suivante.

- **Règle de contraction extérieure : « Outside Contraction Rule »**

Si $f_n \leq f_r \leq f_{n+1}$, on note le point $x_{oc} = \frac{1}{2}x_r + \frac{1}{2}\bar{x}$ et on calcule la valeur de sa fonction $f_{oc} = f(x_{oc})$

Si $f_{oc} \leq f_r$ alors on remplace x_{n+1} par x_{oc} et on réordonne les points puis on initie l'itération suivante.

Dans le cas contraire, on procède à la cinquième règle et on applique l'étape de la réduction.

- **Règle de contraction intérieure : « *Inside Contraction Rule* »**

Si $f_r \geq f_{n+1}$, on note $x_{ic} = \frac{1}{2}\bar{x} + \frac{1}{2}x_{n+1}$ Et la valeur $f_{ic} = f(x_{ic})$

Si $f_{ic} < f_{n+1}$ alors on remplace x_{n+1} par x_{ic} et on réordonne les points puis on initie l'itération suivante.

Dans le cas contraire, on procède à la cinquième règle.

- **Etape de Réduction**

On évalue $f(x)$ aux points $v_i = x_1 + \frac{1}{2}(x_i - x_1)$ pour $i = 2, \dots, n + 1$.

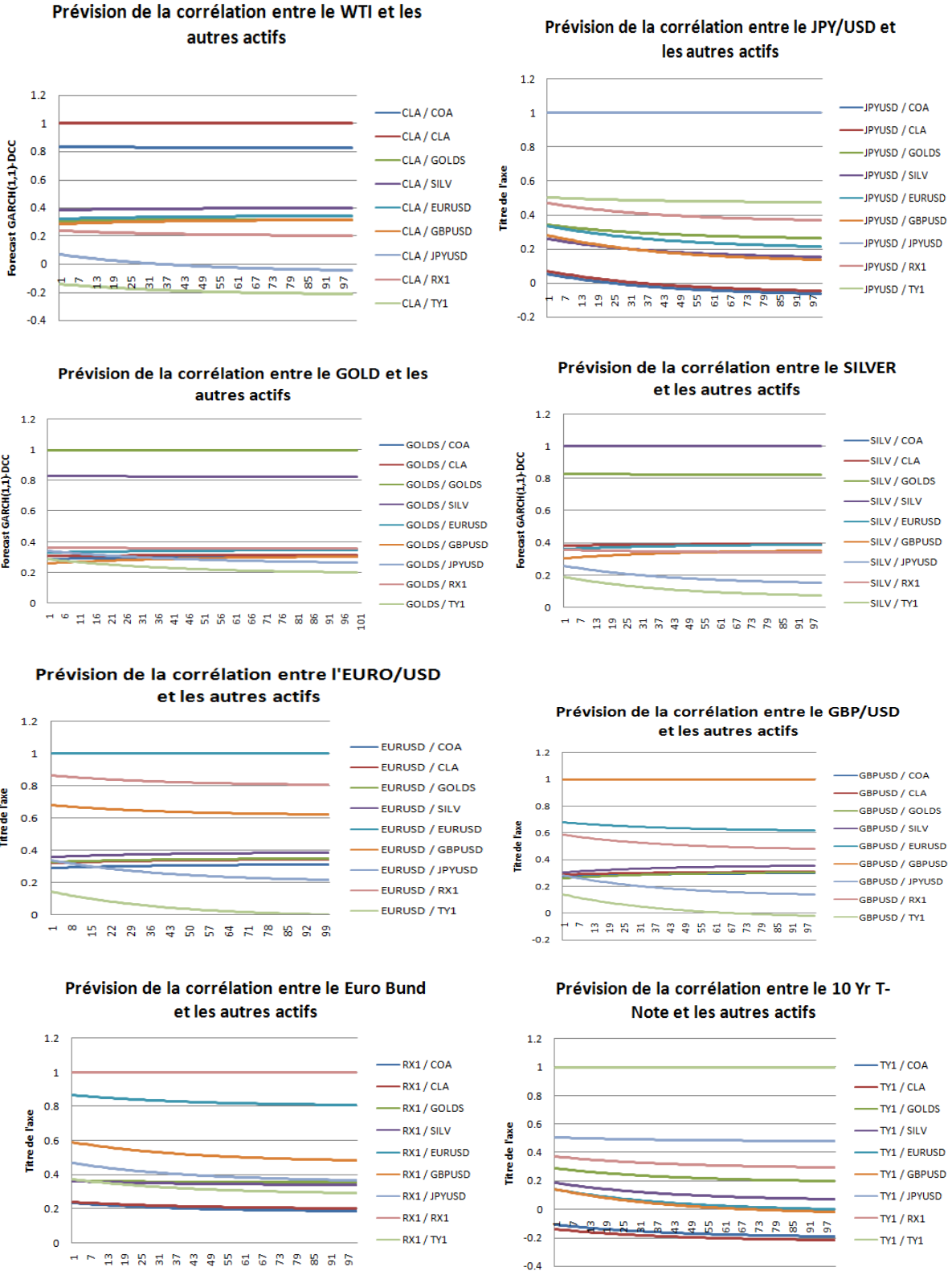
On obtient $n+1$ nouveaux points $x_1, v_2, v_3, \dots, v_{n+1}$ qu'on réordonne puis on initie l'itération suivante.

L'inconvénient de cette méthode réside dans le fait qu'elle tient compte de contraintes non linéaires qui ne sont pas forcément évidentes. Aussi on constate que cette méthode génère un nombre élevé d'évaluations de la fonction objectif pour chaque itération.

Toutefois cette méthode est efficace lorsque la dimension de l'espace des variables est peu élevée. Sans oublier que le choix des valeurs initiales reste une étape non évidente et qui impacte fortement le résultat de l'optimisation.

Annexe O

Sortie R : Courbes tendanciennes des prévisions des corrélations conditionnelles dynamiques entre les paires d'actifs



La prévision s'est effectuée sur les 100 jours suivant le 22/04/2015

