

ROYAUME DU MAROC
*_**_*_*_*
HAUT COMMISSARIAT AU PLAN
*_**_*_*_*_*_*_*

INSTITUT NATIONAL
DE STATISTIQUE ET D'ECONOMIE APPLIQUEE

INSEA



Projet de Fin d'Etudes

**Gestion Actif Passif :
Utilisation des modèles DFA (Dynamic financial analysis)
pour l'élaboration de la stratégie financière d'une
compagnie d'assurance non vie**

Préparé par : *Mr BADROUR Ahmed-Najm*
Mr TAOUDI EDRISSI Hicham

Sous la direction de: *Mr BENCHEKROUN Kamal (INSEA)*
Mr KHIRAOUI Abdelkrim (A.R.M consulting)
Mr BARKI Siame (A.R.M consulting)

Soutenu publiquement comme exigence partielle en vue de l'obtention du

Diplôme d'Ingénieur d'Etat

Option : **STATISTIQUE**
ACTUARIAT-FINANCE

Devant le jury composé de :

- *Mr BENCHEKROUN Kamal (INSEA)*
- *Mr NSIRI Saïd Ramadan (INSEA)*
- *Mr KHIRAOUI Abdelkrim (A.R.M consulting)*
- *Mr BARKI Siame (A.R.M consulting)*

Juillet 2007

Dédicaces

↪ *A ma mère symbole de sacrifice et d'amour*

↪ *A mon père qui m'a toujours soutenu*

↪ *A mon frère*

↪ *A mes fidèles amis*

↪ *A toute la famille BADROUR et AMENZOU*

Que ce travail soit le témoignage de ma gratitude et de ma profonde reconnaissance.

Ahmed Najm

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail à :

Ma très chère mère, l'incarnation de la tendresse et du sacrifice, qui éclaire mon chemin.

Mon très cher père, ma source d'inspiration, qui restera mon exemple à suivre pour toujours.

Mes frères.

Ma grande mère et Mes tantes dont l'encouragement et la générosité sont inestimables.

Toute la clique casaoui avec qui j'ai partagé les meilleures ainsi que les pires moments de ma vie au sein de l'INSEA, Yassine, Kamal, Driss, Mustapha, Hamada, HIBA et spécialement Hasna.

Mes fidèles amis.

Toute la famille.

Hicham

REMERCIEMENTS

Nous saisissons cette occasion pour exprimer nos vifs remerciements à ARM Consultant qui nous a offert l'opportunité de passer notre projet de fin d'étude au sein de son honorable et respectueux cabinet.

L'achèvement de ce travail n'a pu prendre naissance sans l'assistance de Mr KHIRAOUI et Mr BARKI auxquels nous tenons à exprimer notre profonde reconnaissance et nos vifs remerciements pour leurs précieux conseils ainsi que pour les explications qu'ils nous ont fourni tout au long de la période de stage.

Notre profonde reconnaissance, notre respect et notre gratitude sont adressés à notre professeur Mr BENCHAKROUN, qui nous a honoré d'avoir accepté de nous encadrer.

Ce projet nous a, en parti, grâce à eux permis d'appliquer nos acquis théoriques et mettre à l'épreuve la formation qu'on a eu à notre Institut.

Enfin nous tenons à exprimer notre reconnaissance envers l'ensemble du personnel du cabinet ARM consultant pour leur gentillesse et sympathie.

Résumé

Le présent travail aborde la mise en place d'une gestion actif passif de la branche non vie d'une compagnie d'assurance en exploitant les modèles DFA (DYNAMIC FINANCIAL ANALYSIS), une technique certes assez répandue dans les pays développés mais encore méconnue des actuaires marocains et qui fait récemment l'objet d'un séminaire organisé par la Société Centrale de Réassurance le 3 et le 4 avril 2007.

C'est dans cette perspective que ce travail a été développé afin d'illustrer une application méthodologique de ces modèles.

Son déroulement passe initialement par la modélisation des composantes de l'actif (obligations, actions, immobiliers et la trésorerie), ensuite par la modélisation des engagements de la compagnie à savoir les charges sinistres, les prestations, les provisions et les primes.

En dernier lieu, vient l'étape de la l'adéquation du passif et de l'actif en aboutissant finalement à des propositions d'allocation stratégique d'actifs.

Liste des tableaux

Tableau 1. : Tableau de prévision des taux d'intérêt.....	21
Tableau 2. : Tableau de la prime de risque pour les différentes maturités.....	22
Tableau 3. : Tableau des prix des obligations zéro coupon.....	23
Tableau 4. : Tableau des prévisions des taux d'inflation.....	25
Tableau 5. : Tableau des prévisions du rendement du marché des actions.....	27
Tableau 6. : Tableau des prévisions du rendement du marché de l'immobilier.....	29
Tableau 7. : Triangle des liquidations.....	33
Tableau 8. : Triangle des liquidations avec link-ratio.....	35
Tableau 9. : Tableau des S/P pour la branche accidents de travail.....	40
Tableau 10. : Tableau des S/P pour la branche incendie.....	40
Tableau 11. : Développement des primes de la branche accident de travail.....	41
Tableau 12. : Développement des primes de la branche auto.....	41
Tableau 13. : Développement des primes de la branche incendie.....	42
Tableau 14. : Tableau des prévisions des primes futures.....	42
Tableau 15. : Tableau des prévisions des charges sinistres futures.....	43
Tableau 16. : Tableau des cadences de Règlement pour les trois branches.....	43
Tableau 17. : Tableau de développement afférant aux montants de sinistres.....	44
Tableau 18. : Tableau de calcul des prestations à payées.....	45
Tableau 19. : Tableau des prestations payées.....	45
Tableau 20. : Valeur comptable du portefeuille des placements.....	47
Tableau 21. : Tableau des poids relatifs à chaque actif.....	51
Tableau 22. : Tableau du résultat technique	52
Tableau 23. : Tableau de la confrontation de l'actif au passif.....	52
Tableau 24. : Tableau des montants investis.....	54
Tableau 25. : Tableau des montants d'actions.....	55
Tableau 26. : Triangulaire des nombres d'obligations.....	55
Tableau 27. : Tableau des montants d'obligations.....	56
Tableau 28. : Tableau des montants de monétaire.....	57
Tableau 29. : Tableau des montants de l'immobilier.....	58
Tableau 30. : Tableau de rendement des différents actifs.....	58
Tableau 31. : Tableau théorique des allocations de l'actif.....	59
Tableau 32. : Tableau des allocations de l'actif.....	60
Tableau 33. : Tableau des rendements espérés du portefeuille non vie.....	60
Tableau 34. : Tableau des rendements du portefeuille non vie.....	61

Liste des figures :

Figure 1. : Structure générale de l'analyse financière dynamique.....	9
Figure 2. : Transformation d'une obligation à coupons en obligations à zéro coupon..	17
Figure 3. : Prévion des taux d'intérêt monétaire.....	21
Figure 4. : Figure des prévisions des taux d'inflation.....	25
Figure 5. : Figure des prévisions du rendement des actions	28
Figure 6. : Figure des prévisions du rendement du marché de l'immobilier.....	30
Figure 7. : Q-Q plot Exponentiel du nombre de sinistre.....	38
Figure 8. : Q-Q plot binomiale négative du nombre de sinistre.....	38
Figure 9. : Q-Q plot poisson du nombre de sinistre.....	39
Figure 10. : Répartition des actifs du portefeuille.....	46

Table de matières :

Introduction générale.....	1
Introduction à la DFA.....	3
Chapitre 1 : Présentation des modèles DFA.....	4
I. Définition	4
II. Historique de la DFA.....	4
Chapitre 2 : Les différentes approches de la DFA.....	5
I. Comparaison avec la gestion actif-passif en assurance vie.....	5
II. Objectifs de la DFA.....	5
III. Scenario testing contre simulations stochastiques.....	5
Chapitre 3 : Les étapes de construction des modèles DFA	7
I. Choix de l'horizon temporel.....	7
II. Définition de l'objectif fixé par la compagnie.....	7
III. Choix des éléments variables et des éléments déterministes	7
IV. Simulations.....	7
V. Analyse des « Outputs »	7
Chapitre 4 : Schéma récapitulatif	9
Spécificité de l'assurance non-vie.....	10
Chapitre 1 : Les principaux risques.....	11
Chapitre 2 : Les réserves.....	13
Modélisation de l'actif.....	15
Introduction.....	16
Chapitre 1 : Modélisation des taux t'intérêt.....	17
I. La conversion des obligations à coupon en obligation à zéro coupon	17
II. Détermination des taux d'intérêt	18
II.1. Modèle de Cox, Ingersoll et Ross.....	18
II.1.1. La discrétisation.....	19
II.1.2. Détermination des prix obligations zéro coupon	21
Chapitre 2 : Modélisation de l'inflation.....	24
I. Présentation du modèle	24
II. Résultats.....	25
Chapitre 3 : Modélisation des actions.....	26
I. Présentation du modèle	26
II. Application.....	27
Chapitre 4 : Modélisation de l'immobilier	29
Modélisation du passif.....	31
Introduction.....	32
I. Problématique.....	33
II. Chain Ladder standard.....	33
II.1. Présentation.....	33
II.2. Autres méthodes déterministes.....	36
III. Approche par simulation.....	36
III.1. Principe.....	36
III.2. Avantages.....	37
IV. Application.....	37
IV.1. Estimation des flux futurs de sinistres et de primes	37
IV.1.1. Sinistre branche auto	37

IV.1.1.1. Modélisation du nombre de sinistres.....	38
IV.1.1.2. Détermination de la loi des montants individuels de sinistres.....	39
IV.1.2. Branche incendie et accident de travail.....	40
IV.1.2.1. Détermination du S/P moyen.....	40
IV.1.2.2. Détermination des flux de primes futures.....	41
IV.2. Estimation des prestations payées au titre de différentes années de l’horizon temporel.....	43
IV.2.1. Création d’un tableau des cadences de règlement pour les trois branches.....	43
IV.2.2. Construction d’un tableau de liquidation	44
IV.2.3. Calcul des prestations à payées	44
IV.2.4. Estimation des prestations payées au titre de différentes années de l’horizon temporel...	45
Elaboration d’une stratégie financière pour la compagnie d’assurance.....	46
Introduction.....	47
I. Présentation de l’état actuel du portefeuille non vie.....	47
II. Détermination des allocations d’actifs	48
a. Détermination de l’allocation optimale pour les différentes dates de l’horizon temporel.....	49
b. Détermination du résultat technique pour les différentes dates de l’horizon temporel.....	52
c. Politique de réinvestissement et de désinvestissement.....	53
d. Détermination du rendement de chaque actif	58
e. Allocation d’actif.....	59
f. Détermination du rendement du portefeuille non vie.....	60
Conclusion générale.....	63

Introduction générale

L'assurance est devenue de nos jours une activité à part entière qui occupe une place très importante dans l'économie moderne. Dans ses débuts, elle prenait la forme de solidarité entre un groupe restreint de personnes, membres d'une même famille ou groupe d'amis. Parfois elle avait même un sens de charité ou d'aide sociale. Mais avec le Grand Incendie de Londres survenu en 1666 et la révolution industrielle en Europe au XVIII^{ème} siècle, le concept de l'assurance a complètement changé.

De nos jours, elle est défini comme un service proposé par un assureur, à un groupe de personnes qui adhèrent à ce service moyennant une cotisation périodique, et qui consiste à rembourser à tout adhérent la valeur du bien assuré s'il est endommagé par une circonstance hasardeuse. Sous ce concept, l'assurance devint très populaire parce qu'elle donnait l'illusion d'un service qui rend financièrement invincible devant les risques de tous les jours, et se développa en parallèle au développement industrielle et économique qu'a connu l'Europe et l'Amérique.

Toutefois, l'augmentation exponentielle de la demande de ce service et l'élargissement des portefeuilles de contrats, rendit la tâche des assureurs difficile, et la mauvaise gestion de ses contrats provoqua plusieurs faillites d'assurance et en aval la défaillance d'industriels clients de l'assurance. Mais la survenance de ces problèmes rendit les assureurs conscients de la nécessité d'intégrer l'analyse actuarielle et le calcul de probabilités à leur activité. L'actuariat est devenu ainsi le pilier de l'assurance moderne et a permis le développement de beaucoup de produits pour intégrer tous les domaines de la vie, tout en garantissant la solvabilité et l'intégrité financière de l'assureur.

Aujourd'hui, l'assurance occupe une place très importante dans l'économie de la majorité des pays, parce qu'elle joue un double rôle. D'une part, elle assure les biens des commerciaux et les installations des industrielles, donc elle leurs permet d'exercer leurs activités et de participer au développement économique et social de leur pays sans se soucier des risques qui peuvent les toucher. D'autre part, elle-même participe à la création de la valeur ajoutée et détient une partie de l'épargne publique qu'elle gère sur le marché financier et investie des fonds colossaux dans différents secteurs de l'économie comme le secteur bancaire, l'immobilier ou encore des industrie à forte valeur ajoutée.

Au Maroc aussi, le secteur des assurances joue un rôle important dans le développement de l'économie nationale. Après avoir passé par d'innombrables difficultés, les compagnies d'assurance ont pu se stabiliser ses dernières années, et se focaliser sur le développement de leurs activités, la diversification de leurs produits et la conquête de nouvelles clientèles. En effet, le secteur des assurances marocain est aujourd'hui un véritable chantier où se mélangent restructurations, améliorations et innovations.

Cependant, la quête de nouveaux contrats, et la volonté d'augmenter la taille des portefeuilles, posent les assureurs devant le problème de solvabilité, c'est-à-dire est ce que la compagnie pourrait payer tous les sinistres que vont lui déclarer ses assurés ?

Pour pouvoir répondre à cette question, l'assureur doit d'abord estimer le mieux possible la valeur de ces sinistres, et ceci sur plusieurs années à venir. En plus, il doit préparer les fonds nécessaires pour pouvoir les payer. Aussi, l'assureur doit vérifier à tout moment, si la situation actuelle de ses fonds suffira à couvrir tous ses engagements. En outre, il doit placer d'une façon optimale les fonds en sa possession en attendant qu'il paye les sinistres.

C'est dans cet esprit que s'inscrit le présent rapport avec comme objectifs, la présentation d'une méthode qui permet à la fois d'estimer les charges sinistres futures et de vérifier si les actifs disponibles sont en adéquation avec ces charges. On a aussi, fait l'application d'une méthode d'optimisation des placements financiers. En effet, la gestion actif-passif utilisant les Méthodes DFA, permet de modéliser l'ensemble des postes du compte du bilan et de simuler aléatoirement plusieurs évolutions de ces derniers. Cette méthode nous donnera une idée sur le degré d'adéquation des actifs avec les engagements futurs de la compagnie.

En se basant sur le degré d'adéquation des actifs, on se propose d'améliorer la structure du portefeuille actuel en l'optimisant à l'aide de la méthode moyenne-variance développée par Markowitz.

Ce rapport commencera d'abord par une première partie qui donne une présentation de la DFA sa définition, son objectif, les étapes à suivre. Ensuite, la seconde partie fournira un inventaire des risques susceptibles d'affecter les résultats. La troisième partie portera sur la modélisation de différentes composantes de l'actif on commencera par la modélisation des obligations pour cela on déterminera la structure par terme du taux d'intérêt puis on remonte au prix des obligations la modélisation des actions vient en second lieu, enfin on s'intéressera à la modélisation de l'immobilier. Une fois terminée nous passerons à l'évaluation des engagements de la compagnie d'assurance vis-à-vis de ses assurés, on évaluera les charges sinistres, primes, prestations et provisions techniques les résultats seront exposés dans la quatrième partie. La cinquième et dernière partie sera consacrée à l'instauration d'une stratégie financière et la détermination d'allocation d'actifs optimale.

Introduction à la DFA

Chapitre 1 : Présentation des modèles DFA

I. Définition

La Dynamic Financial Analysis a connu, en quelques années, un intérêt grandissant dans le secteur de l'assurance non vie. Elle combine des méthodes et concepts non seulement économiques mais aussi mathématiques. Car plutôt que de ne s'intéresser qu'à un nombre restreint d'aspects du bilan, cette méthodologie considère le spectre complet des éléments financiers de la compagnie et analyse sa santé bilancielle dans un univers incertain et changeant.

La DFA est le procédé d'analyse et d'examen de la structure financière complète d'une compagnie d'assurance, en considérant non seulement les relations entre les différents postes pris en compte, mais aussi la nature stochastique des facteurs qui peuvent affecter le résultat

Cette définition est issue des différents termes qui composent la mention Dynamic Financial Analysis :

- « Dynamic » signifie stochastique ou variable. Ce terme s'oppose à déterministe ou statique et est utilisé de façon à refléter l'incertitude inhérente aux revenus futurs.
- « Financial » reflète l'intégration, dans les modèles, des postes d'actifs et de passifs des sociétés d'assurance. Les approches de type DFA s'opposent aux modèles qui ne visent que la partie souscription.
- « Analysis » se définit comme l'examen des différents éléments du modèle et leurs interactions.

II. Historique de la DFA

Au cours des années 1980, la volatilité des taux d'intérêts s'est accrue et a mis à mal les revenus de nombreuses banques américaines. Ces dernières ont dû s'intéresser de près à la structure de leurs actifs et passifs et à leurs relations avec les séries des revenus futurs. Elles se sont donc trouvées dans l'obligation de mettre en place des outils qui permettent d'estimer ces séries et d'étudier leurs stabilités par rapport aux variations des taux. Le risque de taux et le risque de liquidité sont donc apparus comme les deux principaux types de risques sur lesquels les banquiers ont porté leur attention.

L'activité d'assurance étant également affectée par la fluctuation des taux et les mouvements des marchés financiers, les assureurs ont été contraints, dans les années 1990, de prévoir une analyse Actif \ Passif. Cependant le domaine de l'assurance présente des spécificités qui ont rendu délicate l'application de la gestion Actif \ Passif tel qu'il est connu dans le secteur bancaire. En premier lieu, l'inversion du cycle de production oblige les assureurs à prendre en compte le comportement des assurés. De plus, la réglementation en vigueur les oblige à constituer des provisions mathématiques, des réserves suffisantes, une marge de solvabilité... Ce sont toutes ces spécificités qui ont conduit à la mise en place d'une méthode de gestion Actif \ Passif propre à l'assurance. Enfin, ces modèles se sont spécialisés aux deux grandes branches d'assurance : la gestion actif\passif pure pour l'assurance vie et les modèles DFA pour l'assurance non vie.

Chapitre 2 : Les différentes approches de la DFA

I. Comparaison avec la gestion actif-passif en assurance vie

L'approche classique Gestion Actif/Passif en assurance vie considère les dettes comme plus ou moins déterministes en considération de leur faible variabilité. Mais cette hypothèse peut donner de mauvais résultats en assurance non vie dans la mesure où les cash flows du passif ont une nature plus volatile. D'autre part, les conditions macroéconomiques, l'inflation et les cycles de souscription de la réglementation affectent fortement les compagnies d'assurance dommages rendant ainsi la modélisation plus compliquée et les résultats moins certains qu'en assurance vie. Un modèle DFA devrait donc non seulement simuler les éléments d'actif et les éléments du passif stochastiquement mais aussi les interrelations entre les deux types de facteurs aléatoires

II. Objectifs de la DFA

Les modèles DFA prennent en considération les intérêts conflictuelles de tous les intervenants dans le domaine de l'assurance à savoir les actionnaires, les assurés, les commissaires contrôleurs, sans oublier les inspecteurs du FISC et essaie de mettre en évidence les éléments suivants :

- Allocation stratégique des actifs,
- Allocation du capital,
- Mesure de la performance,
- Stratégies de marché,
- Etc.

Ajoutant à cela que bien qu'elle soit une discipline purement professionnelle, pour arriver à ses fins la DFA se sert de nombreux concepts et méthodes tirés des mathématiques et statistiques.

III. Scenario testing contre simulations stochastiques

Le domaine de l'assurance dommage est actuellement sujet à des résultats plus volatils, des pertes de type « catastrophiques » plus importantes (sans oublier la morosité des marchés financiers).

Ces différents facteurs impactent directement la position de solvabilité de l'entreprise ainsi que le moral de l'actionnariat. Or, l'un des objectifs de ce type de compagnie est de satisfaire les détenteurs d'actions et d'augmenter la valeur des parts dans le temps. A cet égard, il est indispensable de s'intéresser aux paramètres (plus précisément à leur nature aléatoire) qui influent directement sur le coût du capital.

Il existe actuellement deux types de méthodes permettant d'analyser les différentes stratégies financières entreprises par la société sur un horizon temporel déterminé :

- **Scenario testing** : quelques situations potentielles spécifiques sont sélectionnées. Le scenario testing a longtemps été utilisé par les actuaires, même avant l'accroissement de la volatilité des taux d'intérêts. Les prises de décisions basées sur une telle approche ne sont pas forcément sans intérêt ; étant plus simples que les modélisations stochastiques, leur mise en oeuvre est plus rapide et moins coûteuse. Elles sont cependant plus dangereuses. En effet, ce procédé projette dans le futur les résultats obtenus à partir d'une sélection de

scénarii déterministes. Ainsi, les outputs obtenus pour un des scénarii ne sont valables que pour ce seul et unique scénario et ne sont exploitables que dans la mesure où le scénario choisi est correct.

- **La simulation stochastique** : cette approche repose sur des modèles qui reflètent l'incertitude de facteurs tels que le taux d'intérêt, la fréquence et le coût des sinistres...Basées sur les distributions associées à ces modèles, les valeurs sont sélectionnées au hasard et utilisées pour calculer un large éventail d'outputs. La distribution complète de ces outputs peut alors être utilisée pour l'analyse.

Chapitre 3 : Les étapes de construction des modèles DFA

I. Choix de l'horizon temporel

La première étape à mettre en place est de choisir un horizon temporel sur lequel les différentes stratégies doivent s'appliquer. Une période de projection de 5 à 10 ans avec des fractionnements annuel, semestriel, trimestriel et même mensuel semble être un choix raisonnable, car il est préférable d'effectuer une modélisation sur une période longue pour mieux observer les effets à long terme de la stratégie choisie, surtout pour les risques à déroulement long et dont les résultats n'apparaissent qu'après plusieurs années.

II. Définition de l'objectif fixé par la compagnie

En deuxième lieu, il convient de se demander comment utiliser le modèle. Sachant que tous les risques ne sont pas modélisables, un modèle de travail DFA doit être une version simplifiée de la réalité, ainsi il devra réaliser un grand nombre de tâches et fournira non seulement les distributions de variables clés mais aussi les éléments qui placent la compagnie dans des situations financières délicates.

III. Choix des éléments variables et des éléments déterministes

L'identification des variables de la modélisation et de la simulation de la valeur de la compagnie ainsi que les éléments qui auront une nature déterministe et ceux qui auront une nature variable nécessaires à la projection du bilan et des états financiers vient en troisième étape. Seuls les facteurs les plus significatifs sont généralement retenus quoique tous les risques qui affectent l'actif, le passif, la souscription et les investissements financiers doivent être considérés.

En ce qui concerne les actifs des sociétés d'assurances, ils sont essentiellement composés d'obligations, d'actions, d'actifs immobiliers et de trésorerie. Les facteurs les plus importants à prendre en compte sont les taux d'intérêts, le risque de défaut, les mouvements des marchés financiers. En revanche, les risques du passif dépendent des garanties proposées par la compagnie et sont donc propres à chaque assureur ou réassureur. Généralement, la modélisation consiste en la représentation des provisions et réserves.

IV. Simulations

Dans le domaine de l'assurance non vie où les modèles servent principalement à simuler la charge sinistre annuelle d'un portefeuille d'assurance, et même en assurance vie où l'aspect de la survenance est aléatoire, les simulations deviennent primordiales dans l'actuariat moderne. Ceci n'exclut bien sûr pas les modèles DFA, car même si la mise en place de telles procédés est fastidieuse, la modélisation stochastique des différents items du bilan gagne en précision dans le sens où elle permet d'aboutir à la loi de distribution d'une variable, l'intervalle de confiance d'une autre... etc.

La quatrième étape de la construction des modèles DFA est donc la simulation de ces derniers.

V. Analyse des « Outputs »

La compagnie d'assurance doit avoir un dispositif de décision qui lui permet d'analyser les aboutissements des divers scénarios testés pour mettre en évidence celle qui permet d'optimiser, parmi les stratégies simulées, le critère prédéterminé.

L'outil le plus utilisé est celui de la frontière efficiente, amplement utilisé dans la théorie du portefeuille de Markowitz. En premier lieu, la compagnie doit choisir un niveau de rendement d'investissement et un autre pour le risque. Pour chaque stratégie, ces mesures peuvent être représentées graphiquement.

Chaque stratégie correspond à un point dans le graphe rendement-risque. Une stratégie est qualifiée d'efficiente si on ne peut trouver une autre stratégie qui vérifie l'une des caractéristiques suivantes :

- Pour un rendement donné, le niveau de risque est inférieur.
- Pour un niveau de risque donné, le rendement est supérieur.

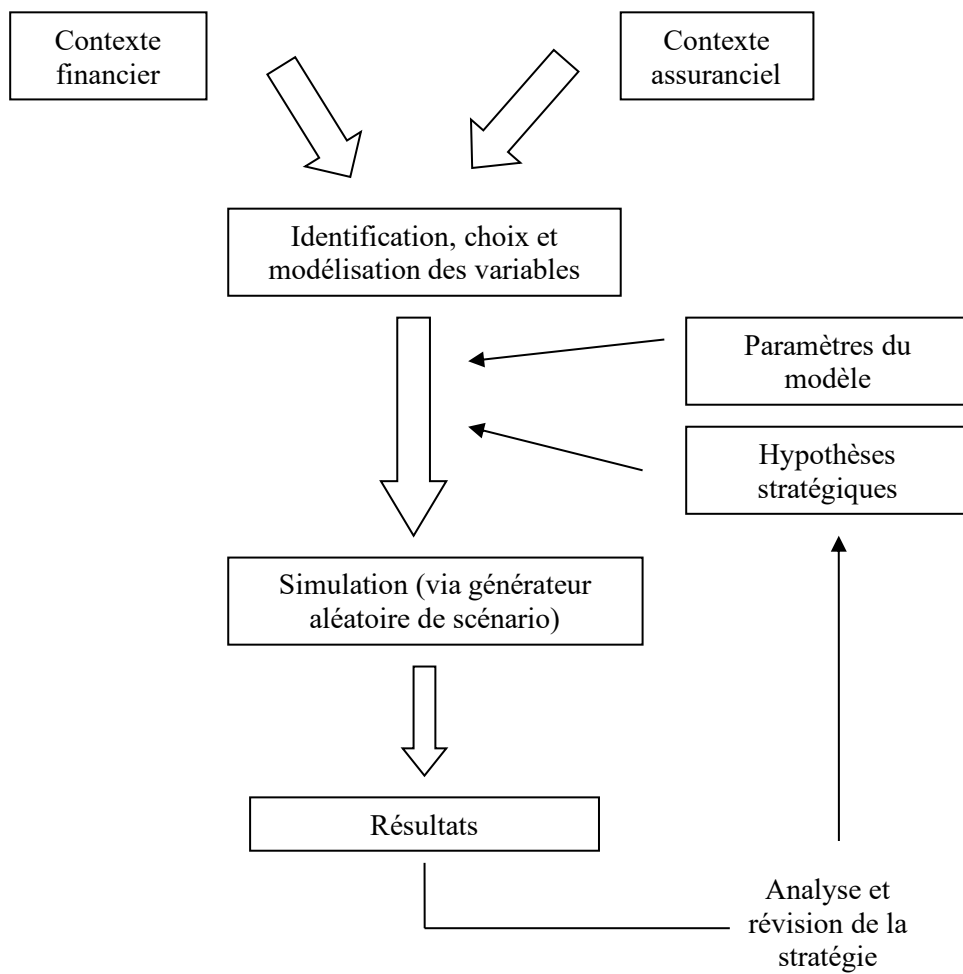
Pour chaque niveau de risque, il existe un rendement de risque maximal qui ne peut être excédé.

Mais la position exacte de la frontière efficiente est inconnue. Avec cette méthode, il n'y a donc pas de certitude absolue que la stratégie soit vraiment efficiente ou pas. Même si la méthode de la frontière efficiente est un bon moyen de comparer les résultats car connu de tous.

Chapitre 4 : Schéma récapitulatif

L'organigramme suivant récapitule l'ensemble des éléments et des choix qui permettent d'aboutir à un modèle DFA.

Figure 1. : Structure générale de l'analyse financière dynamique



Spécificité de l'assurance non vie

Chapitre 1 : Les principaux risques

Pour honorer ses engagements en toutes circonstances, la société d'assurance doit être en mesure de se prémunir contre les risques.

Ces risques sont fortement dépendants. Pour se couvrir contre leur réalisation, il est nécessaire d'avoir une vision d'ensemble et de ne pas traiter séparément le passif et l'actif.

➤ **Les risques associés à la tarification**

La tarification est principalement basée sur l'étude de données historiques. Or il arrive que celles-ci ne reflètent pas les conditions qui prévaudront dans l'avenir ou contiennent des erreurs, ce qui causera l'application de tarifs erronés ou sous évalués ;

➤ **Les risques associés au volume des primes**

L'une des incertitudes d'une société d'assurance concerne le volume des nouvelles ventes qu'elle sera en mesure de souscrire à l'avenir ;

➤ **Les risques associés aux dépenses**

➤ **Les risques associés au taux d'inflation**

Dans le domaine de l'assurance, le coût des sinistres et des frais de règlement a tendance à être très sensible au taux d'inflation général. Celui-ci peut être fonction de variation de coûts spécifiques à d'autres secteurs ;

➤ **Les risques de placement**

Les risques de placement concernent principalement les obligations (risque de taux) ainsi que les actions et les immeubles (risque de marché) ;

- **Le risque de taux**

En cas de baisse des taux, les flux sont investis ou réinvestis à un taux de plus en plus bas, ce qui peut conduire à un taux de rendement financier insuffisant pour respecter les engagements ;

- **Le risque de baisse du marché des actions**

Pour un assureur, la baisse du marché des actions entraîne à la fois une insuffisance de rendement financier et le risque, la valeur des actions peut baisser fortement alors que la valeur actuelle des engagements croît ;

➤ **Les risques associés à la réassurance**

Les risques associés à la réassurance peuvent être liés à l'incapacité d'un réassureur de respecter ses engagements ;

➤ **Les risques associés à la réglementation**

Lorsque le gouvernement modifie ses politiques ou ses règlements, leurs mises en œuvre prennent habituellement beaucoup de temps ;

Chapitre 2 : Les réserves

L'appellation « réserves » pour les sociétés d'assurances est totalement différente de celle des autres sociétés commerciales où les réserves signifient les montants prélevés du résultat de l'exercice afin d'être réaffecté ultérieurement. Les réserves pour les sociétés d'assurances correspondent aux charges à prévoir pour faire face à la sinistralité non encore déclarée mais prévisible des contrats en cours. Dans l'optique de proposer un modèle représentant ces dernières, nous devons nous astreindre à examiner la nature de ces postes du passif.

➤ **Provision pour capitaux et rentes à payer**

C'est la valeur des capitaux et rentes échus et restant à payer à la date de l'inventaire ;

➤ **Provision pour participation aux bénéfices**

C'est le montant des participations aux bénéfices techniques et financiers attribuées ou à attribuer aux bénéficiaires de contrats, en application de l'article 12 de l'arrêté du ministre des finances et de la privatisation n° 2240-04 du 14 di kiasada 1425 (27 décembre 2004) relatif au contrat d'assurance ;

➤ **Provision pour fluctuations de sinistralité**

Provision destinée à faire face aux fluctuations de sinistralité afférentes aux opérations d'assurances ;

➤ **Provision de capitalisation**

Provision destinée à parer à la dépréciation des valeurs comprises dans l'actif de l'entreprise et à la diminution de leur revenu ;

➤ **Provision pour aléas financiers**

Provision destinée à compenser la baisse du rendement de l'actif ;

➤ **Provision pour risques d'exigibilité**

Provision destinée à faire face aux engagements dans le cas de moins-value de l'ensemble des actifs ;

➤ **Provision pour risques en cours**

Provision destinée à couvrir, pour chacun des contrats à prime payable d'avance, la charge des sinistres et des frais afférents au contrat, pour la période s'écoulant entre la date de l'inventaire et la prochaine échéance de prime ou, à défaut, le terme du contrat ;

➤ **Provision pour sinistres à payer**

C'est la valeur estimative des dépenses pour sinistres non réglés et le montant des dépenses pour sinistres réglés restant à payer à la date de l'inventaire y compris les capitaux constitutifs de rentes non encore mises à la charge de l'entreprise

La constitution de ces différentes réserves, et l'intérêt que portent les assureurs à leur bonne estimation montrent que la préoccupation principale des compagnies d'assurances est de rester toujours solvable vis-à-vis de leurs assurés. Pour arriver à cette fin, elles devront commencer par l'évaluation de leurs engagements futurs. Ces engagements sont les montants des sinistres occasionnés par les assurés et qui devront être payés par l'assureur. Dans la comptabilité de la compagnie ils seront représentés par les provisions techniques. Une fois les engagements futurs déterminés, il va falloir s'assurer que le capital alloué à ces engagements pourra faire face aux dettes.

Modélisation de l'actif

Introduction

La partie suivante à pour objectif de valoriser les différents constituants de l'actif de la société d'assurance à savoir les 4 catégories principales de placements :

- Obligations ;
- Placements monétaires ;
- Actions ;
- Immobilier.

L'évaluation et la modélisation des placements obligataires et monétaires passent en premier par une étape de choix et de modélisation de la structure des taux d'intérêt ; c'est l'objet du Chapitre 1. Dans un second temps, nous nous intéresserons à la modélisation de la valeur des actions et des placements immobiliers.

Chapitre 1 : Modélisation des taux d'intérêt

Représentant la grande part des placements des compagnies d'assurances, les obligations sont considérées comme des actifs sans risque cette caractéristique leur permet d'occuper la première place dans les placements des compagnies d'assurance de ce fait la connaissance des prix future des obligations permet de savoir les anticipations du marché.

La modélisation des rendements des obligations d'un portefeuille passe par trois axes principaux :

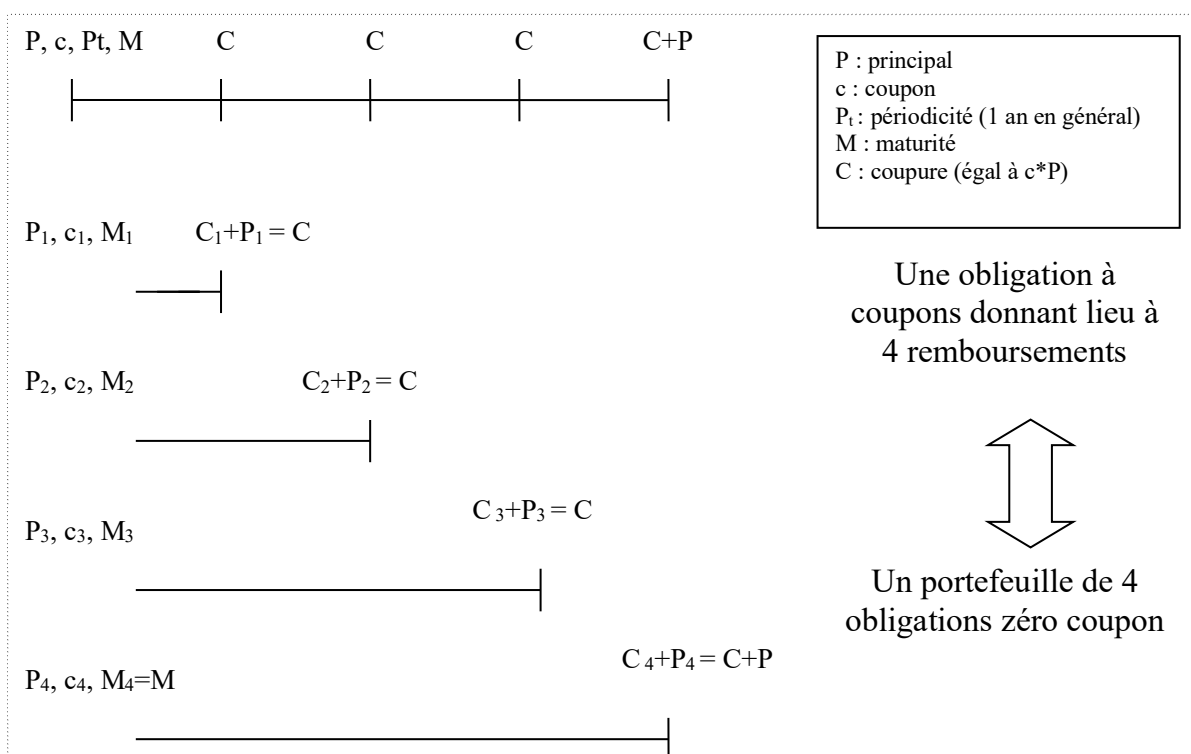
- La conversion des obligations du portefeuille avec coupon en obligation à zéro coupon ;
- La détermination des taux d'intérêt ;
- Déterminer le prix futurs des obligations à zéro coupon.

I. La conversion des obligations à coupon en obligation à zéro coupon

Une obligation zéro-coupon est une obligation qui donne lieu à deux flux financiers seulement : un flux initial, et un flux final de remboursement. En d'autres termes il ne donne lieu à aucun détachement de coupons intermédiaire.

Les obligations à coupons peuvent être décomposées en un ensemble d'obligations zéro coupon. Cette décomposition facilite la valorisation de ces instruments et se fait de la manière suivante :

Figure 2. : Transformation d'une obligation à coupons en obligations à zéro coupon



II. Détermination des taux d'intérêt

Les rendements des actifs à revenus fixes tels que les bons du trésor, varient constamment dans le temps, en fonction de leur échéance et la relation entre rendement et maturité varie elle-même au cours du temps. Une telle relation est en général appelée structure par terme des taux d'intérêt. De manière plus précise, structure par terme des taux d'intérêt se définit comme la relation entre les rendements d'obligations réputées sans risque de défaut et leurs maturités. Les utilisations de la structure par terme sont multiples, plus particulièrement pour les gérants d'actifs à revenus fixes. Ces gestionnaires modifient leurs portefeuilles dans plusieurs dimensions, incluant la qualité, le coupon et le type d'émetteur. Une des dimensions les plus importantes est la maturité ; cette variable influence la performance qu'un portefeuille peut atteindre dans un environnement volatil. La structure par terme nous permet de comparer les rendements de divers investissements de même maturité lorsque ceux-ci sont détenus jusqu'à leur échéance. Ainsi, elle peut être utilisée afin de prendre des décisions quant à la longueur des stratégies à adopter. L'analyse de la structure par terme donne en outre le consensus adopté par le marché en matière d'évolution future des taux d'intérêt. Le gestionnaire peut alors confronter son opinion à ce consensus et choisir d'acheter ou de vendre des obligations de maturités différentes afin de mieux ajuster son portefeuille.

Les modèles d'évaluation de la structure des taux d'intérêt peuvent être classés en trois catégories selon l'approche utilisée. Nous trouverons d'abord les modèles d'équilibre partiel qui dérivent des équations des prix en s'appuyant sur l'arbitrage. Comme exemple de modèles d'équilibre, on peut citer : le modèle de Vasicek qui comporte une variable d'état et le modèle de Brennan et Schwartz qui comporte deux variables d'états. Ensuite, les modèles d'équilibre général, tel que le modèle de Cox, Ingersoll et Ross, qui tentent de construire les équations des prix à partir d'une description globale de l'économie et qui fera l'objet de cette partie.

II.1. Modèle de Cox, Ingersoll et Ross

Ce modèle propose une modélisation du taux d'intérêt suivant un processus qui permet d'avoir que des valeurs positives de ce taux en incluant la racine carrée de ce dernier dans le processus de calcul.

Hypothèses du modèle

- Pas de coûts de transaction ;
- Titres parfaitement divisibles ;
- Les agents sont rationnels et disposent du même niveau d'information ;
- Les marchés sont efficients : ils ne permettent pas de possibilité d'arbitrage ;
- Les taux d'emprunts et de prêts sont identiques.

Cette modélisation du taux instantané à court terme utilise le processus autorégressif défini comme suit :

$$dr = a.(b - r).dt + \sigma.\sqrt{r}.dW_t$$

Où les paramètres **a**, **b** et **σ** (tous positifs) représentent respectivement la valeur moyenne à long terme, la vitesse de convergence et la volatilité. Et W_t un mouvement brownien.

La valeur du Zéro Coupon est déterminée par la formule suivante :

$$P(r,t,T) = A(t,T) \cdot \exp[-B(t,T) \cdot r(t)]$$

Avec

$$\left\{ \begin{array}{l} t < T \\ A(t,T) = \left[\frac{2 \cdot \gamma \cdot \exp\left(\left(\gamma + a + \lambda\right) \frac{T-t}{2}\right)}{(\gamma + a + \lambda) \cdot (\exp(\gamma \cdot (T-t)) - 1) + 2 \cdot \gamma} \right]^{\frac{2ab}{\sigma^2}} \\ B(t,T) = \frac{2 \cdot \exp(\gamma \cdot (T-t)) - 1}{(\gamma + a + \lambda) \cdot (\exp(\gamma \cdot (T-t)) - 1) + 2 \cdot \gamma} \\ \gamma = \sqrt{(a + \lambda)^2 + 2\sigma^2} \\ \lambda(r,t) = \frac{\lambda}{\sigma} \sqrt{r} \end{array} \right.$$

La relation $R(r,t,T) = -\frac{1}{T-t} \ln P(r,t,T)$ permet d'aboutir à la structure par terme des taux :

$$R(r,t,T) = \frac{B(t,T)r(t) - \ln A(t,T)}{T-t}$$

Application

Comme on la cité ci-dessus, on modélisera les taux d'intérêt par le modèle simple de Cox, Ingersoll et Ross (CIR) qui définit le taux sans risque instantané par le processus suivant :

$$dr = a \cdot (b - r) \cdot dt + \sigma \cdot \sqrt{r} \cdot dW_t$$

II.1.1. La discrétisation

Afin de simuler les taux d'intérêt pour les périodes futures il fallait en premier passer par la discrétisation du modèle ci-dessus :

$$\Delta r_i = r_{i+\Delta t} - r_i = a \cdot (b - r_i) \cdot \Delta t + \sigma \cdot \sqrt{r_i} \cdot (z_{i+\Delta t} - z_i)$$

On a $z_{t+\Delta t} - z_t$ suit une loi normale d'espérance nulle et de variance Δt .alors Si ε_t désigne un bruit blanc de variance 1, donc la variable $\sqrt{\Delta t}\varepsilon_t$ suit la même loi que $z_{t+\Delta t} - z_t$. On peut alors réécrire le modèle sous une forme qui permet prédire la valeur du taux d'intérêt de chaque nouvelle période :

$$r_{t+\Delta t} = ab.\Delta t + (1 - a.\Delta t).r_t + \sigma\sqrt{r_t}\sqrt{\Delta t}.\varepsilon_t$$

Dans ces conditions, simuler un tel taux revient à calculer récursivement r_t , pour tout t, en simulant à chaque stade une réalisation d'une $N(0,1)$. Les paramètres a, b, σ doivent être judicieusement choisis.

Afin de ne pas simuler un taux négatif à un rang k, il existe une variante du modèle où $\sqrt{r_k}$ est remplacé par $\sqrt{|r_k|}$. Une application du lemme d'**Itô**, montre que le modèle de CIR est bien posé si $a.b > \frac{\sigma^2}{2}$.

Le respect de cette condition est nécessaire (mais pas suffisant) lors du lancement utilisant un modèle CIR, afin de ne pas engendrer des taux négatifs.

On peut signaler qu'en divisant cette équation par $\sqrt{r_t}$, on peut faire apparaître un modèle de régression linéaire :

$$\frac{r_{t+\Delta t}}{\sqrt{r_t}} = a.b.\Delta t \frac{1}{\sqrt{r_t}} + (1 - a.\Delta t).\frac{r_t}{\sqrt{r_t}} + \sigma.\sqrt{\Delta t}.\varepsilon_t$$

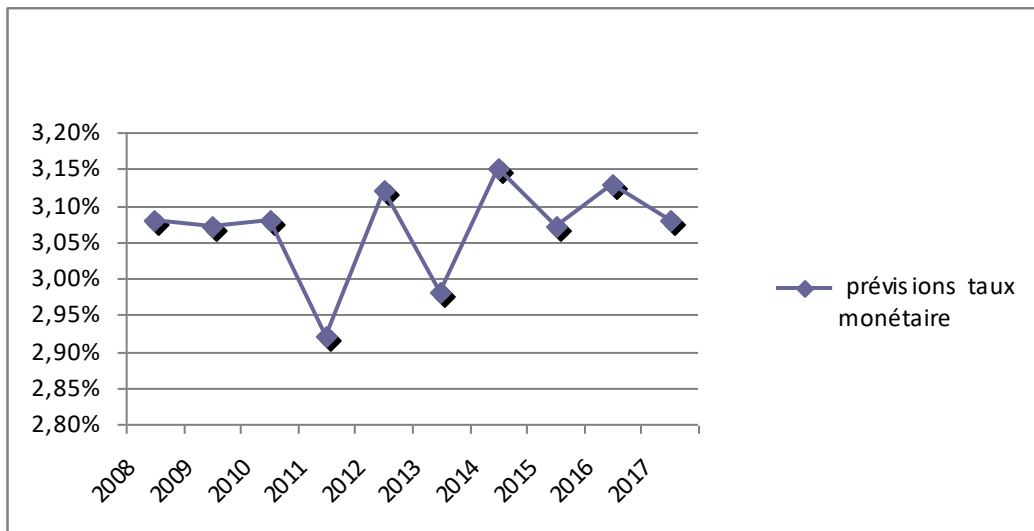
Cette formule rend possible l'estimation des différents paramètres de cette équation

$$a= 0,026, b= 0,013, \sigma=0,006$$

Après la détermination des différents paramètres du modèle il nous reste plus que de déterminer les taux d'intérêt futurs.

Tableau 1. : Tableau de prévision des taux d'intérêt

année	prévision taux monétaire
1	3,08%
2	3,07%
3	3,08%
4	2,92%
5	3,12%
6	2,98%
7	3,15%
8	3,07%
9	3,13%
10	3,08%

Figure 3. : Prévision des taux d'intérêt monétaire

On remarque que le taux d'intérêt monétaire reste en dessus d'un seuil de 2,92% pour atteindre sa valeur maximal en 2014 avec un taux de 3,15%

II.1.2. Détermination des prix obligations zéro coupon

La forme des prix des zéro coupons est :

$$P(r, t, T) = A(t, T) \exp(-B(t, T)r(t))$$

Avec les fonctions A et B suivantes :

$$\left. \begin{aligned}
 & t < T \\
 & A(t, T) = \left[\frac{2 \cdot \gamma \cdot \exp\left(\frac{(\gamma + a + \lambda)(T - t)}{2}\right)}{(\gamma + a + \lambda) \cdot (\exp(\gamma \cdot (T - t)) - 1) + 2 \cdot \gamma} \right]^{\frac{2ab}{\sigma^2}} \\
 & B(t, T) = \frac{2 \cdot \exp(\gamma \cdot (T - t)) - 1}{(\gamma + a + \lambda) \cdot (\exp(\gamma \cdot (T - t)) - 1) + 2 \cdot \gamma} \\
 & \gamma = \sqrt{(a + \lambda)^2 + 2\sigma^2} \\
 & \lambda(r, t) = \frac{\lambda}{\sigma} \sqrt{r}
 \end{aligned} \right\}$$

Afin de calculer les prix des zéro coupons pour les périodes avenir il nous reste plus que déterminer la prime de risque λ .

Pour estimer la prime de risque du marché λ pour les différentes maturités, il nous suffit d'estimer la constante λ et ainsi via la formule $\lambda(t, T) = \frac{\lambda}{a} (e^{-(T-t)a} - 1)$ on remonte à toutes les primes de risque pour les différentes maturités.

Le calcul de la prime de risque se fait de manière à minimiser les erreurs entre les taux zéro coupon réels du marché et ceux obtenus par le processus CIR.

La minimisation terminée nous avons calculés la valeur de la prime de risque pour les différentes maturités :

Tableau 2. : Tableau de la prime de risque pour les différentes maturités

Maturité	Prime de risque estimée
1A	0,005133894
2A	0,009913051
3A	0,014361985
4A	0,018503511
5A	0,022358871
6A	0,025947837
7A	0,029288818
8A	0,032398947
9A	0,035294177
10A	0,037989355

Tous les paramètres estimés il nous reste plus qu' à déterminer les prix des obligations zéro coupon :

Tableau 3. : Tableau des prix des obligations zéro coupon

$R(t,T)$	$T-t$	$p(t,T)$
2,55%	10	99,75%
2,82%	9	99,69%
3,07%	8	99,62%
3,31%	7	99,53%
3,54%	6	99,41%
3,76%	5	99,25%
3,97%	4	99,01%
4,17%	3	98,62%
4,37%	2	97,84%
4,55%	1	95,55%

Chapitre 2 : Modélisation de l'inflation

Pour un même sinistre survenant à des dates différentes, les montants versés en guise d'indemnisation sont sensiblement différents. De manière générale, les montants des règlements augmentent avec le temps. Ceux-ci peuvent dépendre de divers facteurs : des décisions politiques (réglementation), de l'évolution de la médecine... Mais un facteur déterminant dans l'évolution des coûts est indéniablement l'inflation.

Il intervient dans les deux parties du bilan :

- **A l'actif** : L'observation des données historiques fait apparaître un lien relativement fort entre l'évolution du taux d'inflation et celle du taux d'intérêt ;
- **Au passif** : Le règlement des sinistres peut s'étaler sur une période plus ou moins longue selon la branche considérée. Les montants indemnisés étant fonction de l'inflation, cette dernière va jouer sur le niveau de la provision pour sinistre à payer.

L'objet de ce chapitre est de donner un aperçu global sur l'approche de Kaufmann, Gadmer et Klett ; dynamique qui permet de modéliser l'inflation.

Cette modélisation propose d'exprimer, de manière linéaire, le taux d'inflation en fonction du taux d'intérêt court terme.

I. Présentation du modèle

Kaufmann, Gadmer et Klett choisissent de simuler la valeur du taux d'inflation (i_t) à partir de celle du taux court terme (r_t) :

$$i_t = \alpha + \beta \times r_t + \varepsilon_t$$

Où α , β et σ sont des paramètres qui peuvent être estimés à partir de données historiques ; et ε_t correspond à un bruit blanc de variance σ^2 .

Les paramètres présentés ci-dessus peuvent être estimés selon la méthode des moindres carrés ordinaires. Calculés à l'aide du logiciel SPSS, ces estimateurs sont :

$$\alpha = 0,003 \quad \beta = -0,031$$

Ces estimateurs ont pour caractéristiques d'être sans biais et de variance minimum.

$$\hat{\sigma} = 0,0064$$

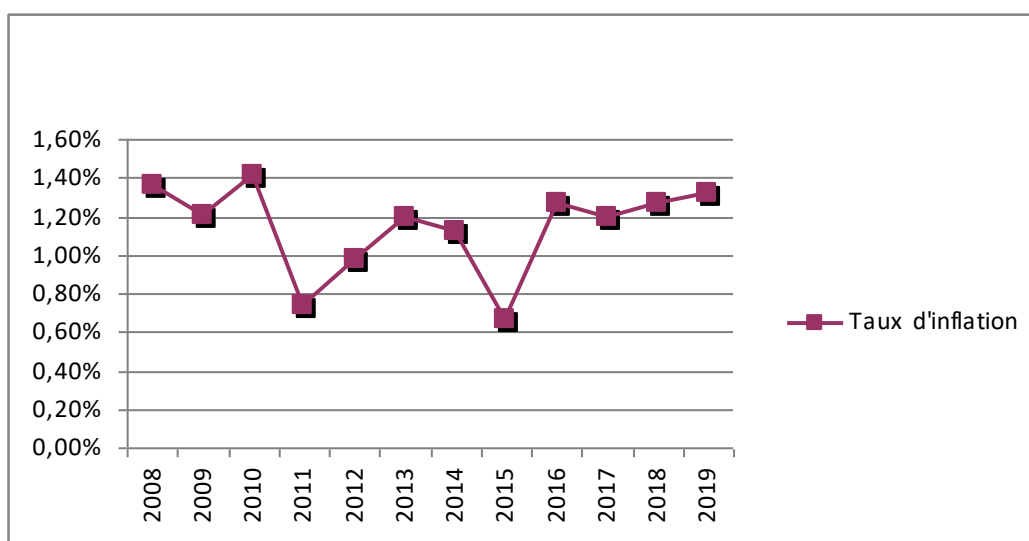
II. Résultats

Pour obtenir la valeur de l'inflation à la date t , il suffit donc de connaître la valeur du taux d'intérêt court terme à cette même date et de simuler une réalisation de la loi $N(0,1)$.

Tableau 4. : Tableau des prévisions des taux d'inflation

Année	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019
Taux d'inflation	1,36%	1,21%	1,41%	0,74%	0,98%	1,20%	1,12%	0,67%	1,27%	1,19%	1,27%	1,32%

Figure 4. : Figure des prévisions des taux d'inflation



Le taux d'inflation reste en dessous d'un seuil de 1,41% et atteint sa valeur minimale en 2015 avec un taux de 0,67%.

CHAPITRE 3 : Modélisation des actions

I. Présentation du modèle

En ce qui concerne les actions, la modélisation la plus couramment utilisée est celle de **Black** et **Scholes**. On considère que le cours des actions suit le mouvement brownien géométrique suivant (où μ et σ sont des constantes) :

$$\frac{dS}{S} = \mu \cdot dt + \sigma \cdot dz_t$$

La résolution de cette équation est assez classique. Il convient de poser $y = \ln(S)$, et on obtient ensuite par dérivation :

$$\begin{cases} y_t = 0 \\ y_s = \frac{1}{S} \\ y_{ss} = -\frac{1}{S^2} \end{cases}$$

L'application du lemme d'**Itô** fournit :

$$dy = \left(\mu \cdot S \times \frac{1}{S} - \frac{1}{2} [\sigma \cdot S]^2 \times \frac{1}{S^2} \right) dt + \frac{1}{S} \times \sigma \cdot S \cdot dz_t$$

Ce qui donne après simplification :

$$dy = \left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) dt + \sigma \cdot dz_t$$

L'intégration de cette équation prend la forme suivante :

$$\ln \left(\frac{S(t)}{S(0)} \right) = \left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t + \sigma \cdot \int_0^t dz(s)$$

Soit

$$S(t) = S(0) \cdot \exp \left\{ \left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t + \sigma \cdot z_t \right\}$$

La résolution de l'EDS présentée précédemment est devenue commune pour ceux qui s'intéressent de près à la modélisation et à l'évaluation des prix d'actions ou d'options. Il arrive néanmoins que la résolution d'EDS soit plus délicate ou fastidieuse.

II. Application

Pour la modélisation des actions et suites à des complications dues à la confidentialité de la composition du portefeuille actions, nous n'avons pas été en mesure d'obtenir les différentes actions qui constituent ce portefeuille. Néanmoins la direction financière nous a communiqué que la plupart des actions détenues par les compagnies sont des OPCVM qui sont fortement corrélées aux variations du marché, pour cela afin d'exploiter pleinement les possibilités offertes par la DFA nous avons opté pour une démarche qui reste critiquable dans son application :

Afin de contourner le problème cité ci-dessus nous avons essayé de modéliser l'indice du marché MASI, le modèle choisi et celui appliqué pour la modélisation des rendements des différents indices à savoir :

$$R_t = \mu + \varepsilon\sigma_t$$

Avec σ_t suit le modèle Garch(1,1) :

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha.R_{t-1}^2 + \beta\sigma_{t-1}^2$$

L'estimation des différents paramètres ci-dessus donne :

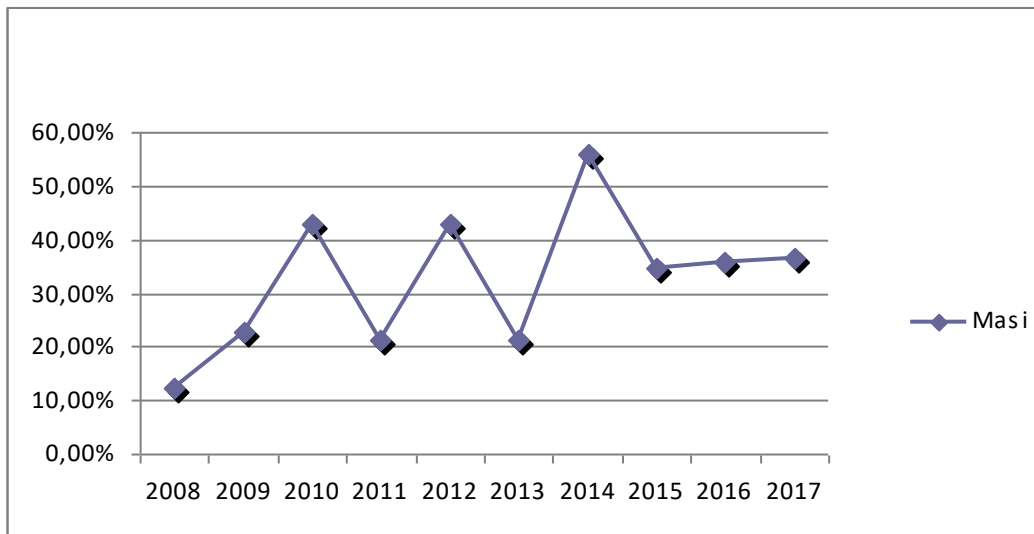
$$\begin{aligned} \omega &= 1,98 \text{ E-06} & \alpha &= 0,276848 \\ \beta &= 0,708740793 \end{aligned}$$

En exploitant le modèle ci-dessous ainsi que les paramètres estimés nous avons dressés le tableau des prévisions du rendement du marché marocain des actions par le biais de l'indice MASI.

Tableau 5. : Tableau des prévisions du rendement du marché des actions

année	rendements
	Masi
1	12,28%
2	22,89%
3	42,81%
4	21,30%
5	42,81%
6	21,30%
7	55,77%
8	34,48%
9	35,75%
10	36,39%

Figure 5. : Figure des prévisions du rendement des actions



On remarque que le rendement des actions est maximal en 2014 avec 55,77%.

Chapitre 4 : Modélisation de l'immobilier

Après les obligations et les actions, l'immobilier constitue une catégorie d'investissement privilégiée des compagnies d'assurances (d'autant plus que le marché immobilier marocain est actuellement en plein essor). Deux types de modélisations peuvent être retenus pour ce type de placement.

- Une modélisation identique à celle des actions : **Black et Scholes**
- Une modélisation qui retient la dynamique suivante :

$$P_I(t) = (1 + \lambda) \times P_I(t - 1) + \sigma \cdot \varepsilon_t$$

Avec les notations suivantes :

- $P_I(t)$: prix de l'actif immobilier considéré à la date t.
- λ : taux de croissance du marché immobilier.
- σ : volatilité du marché immobilier.
- ε_t : un bruit blanc gaussien.

Les paramètres qui viennent d'être présentés doivent être estimés au cas par cas : la structure du portefeuille immobilier peut varier sensiblement d'une compagnie à l'autre et d'une région à l'autre. Il n'est donc pas raisonnable d'effectuer des simulations en utilisant des paramètres estimés à partir des données de l'ensemble du marché. Idéalement, les paramètres doivent être calculés à partir de l'historique immobilier de la société concernée.

L'exploitation des données récupérées auprès de la direction financière nous a permis de dégager les différents composantes du modèles :

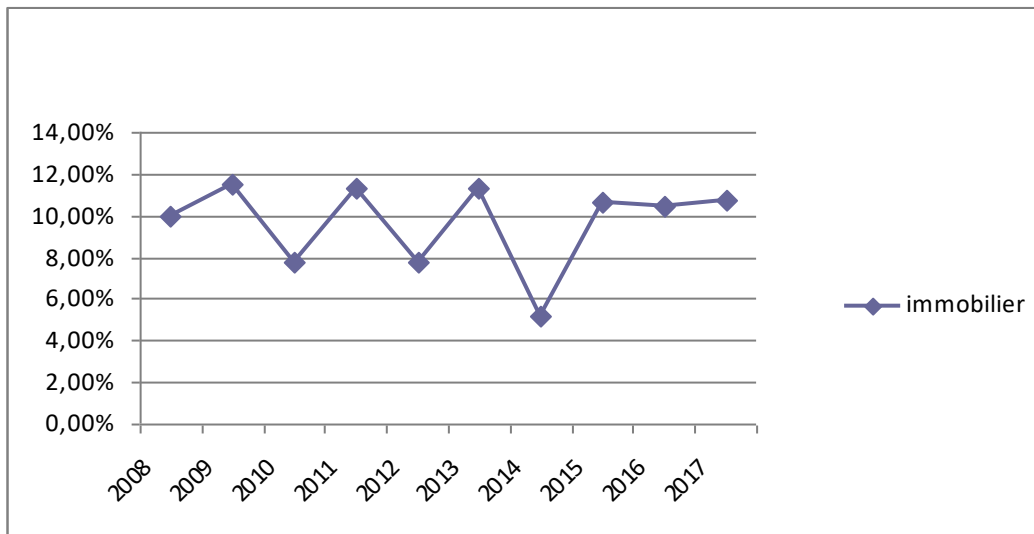
$$\lambda = 7\% \qquad \sigma = 0,01520702$$

Les résultats de la simulation des rendements futurs du secteur immobilier sont en moyenne comme suit :

Tableau 6. : Tableau des prévisions du rendement du marché de l'immobilier

année	rendements
	immobilier
1	9,97%
2	11,55%
3	7,75%
4	11,33%
5	7,75%
6	11,33%
7	5,16%
8	10,64%
9	10,45%
10	10,78%

Figure 6. : Figure des prévisions du rendement du marché de l'immobilier



Le marché de l'immobilier marocain reste très rentable avec des taux de rendement variants entre 5,16% et 11,55%.

Modélisation du passif

Introduction

D'une manière générale le domaine d'activité des assurances conduit à promettre, en contre partie du versement d'une prime périodique ou unique, une prestation en cas d'occurrence d'un événement particulier. La gestion prudente d'une compagnie implique une évaluation des risques de paiement de la prestation, et de son niveau. C'est le rôle des prestations techniques de garantir la bonne fin de l'opération d'assurance dans l'intérêt de l'assuré.

Dans ce contexte De nombreuses méthodes d'évaluation des provisions techniques ont été développées par les actuaires.les méthodes existantes sont presque infiniment nombreuses mais les méthodes réellement appliquées sont en pratique relativement limitées.

Dans la suite, nous nous restreignons aux principales méthodes :

- La première méthode proposée est déterministe, et assez répandue : **Chain Ladder**. C'est une méthode qui sert généralement de référence à la mise en place d'autres concepts ;
- Les méthodes d'évaluation stochastique (qui font appels aux simulations) semblent prendre le pas sur les méthodes déterministes. Ceci s'explique notamment par le fait qu'elles permettent d'effectuer des mesures d'incertitude et d'estimer la distribution de la provision. Soulignons également qu'elles autorisent la prise en compte de l'évolution de la réglementation.

I. Problématique

Il est nécessaire pour une compagnie d'assurance d'avoir suffisamment de réserves, à la fin de l'année n afin de pouvoir payer l'ensemble des sinistres survenus pendant cette même année. Le calcul des réserves consiste alors à prévoir le montant total des sinistres afin de provisionner les paiements non encore effectués. L'objectif est donc de compléter le rectangle ci-dessous à partir des informations qu'il contient à l'origine. Plus précisément, il s'agit d'obtenir les résultats suivants :

- les paiements ultérieurs à la date d'inventaire : $C_{i,j}$ avec $i + j > n$;
- le montant de réserve pour chaque année i : $R_i = C_{i,n} - C_{i,n-1}$;
- le montant total de la provision à constituer : $R = \sum_{i=1}^n R_i$;
- les cash-flows futurs de paiement au cours de l'année $n+k$ au titre des années 0 à n ,

soit $\sum_{i+j=n+k} X_{ij}$.

Tableau 7. : Triangle des liquidations

Année d'origine	0	J	$j+1$	n
0	$C_{0,j}$	$C_{0,j+1}$	
⋮			⋮	⋮			
I	C_{ij}	$C_{i,j+1}$			
⋮			⋮	⋮			
$n-j-1$	$C_{n-j-1,j}$	$C_{n-j-1,j+1}$			
$n-j$	$C_{n-j,j}$				
⋮							
N							

II. Chain Ladder standard

II.1. Présentation

C'est la méthode déterministe la plus répandue et la plus connue. Cette méthode présente l'avantage de s'appliquer à des triangles de toute nature, en particulier ceux de paiements cumulés ou de charges. Elle est basée sur l'utilisation de facteurs de développement (ou, ce qui est équivalent, de cadences de règlement), implicitement supposés constants pour toutes les années d'origine.

Hypothèse sous jacente du modèle

La méthode Chain Ladder s'appuie sur l'hypothèse (forte) suivante :

Pour $j = 0, \dots, n-1$, les ratios des facteurs adjacents $\frac{C_{i,j+1}}{C_{ij}}$ sont indépendants de l'année d'origine i . D'où, pour $j = 0, \dots, n-1$:

$$\frac{C_{0,j+1}}{C_{0j}} = \frac{C_{1,j+1}}{C_{1j}} = \dots = \frac{C_{i,j+1}}{C_{ij}} = \dots = \frac{C_{n-j-1,j+1}}{C_{n-j-1,j}} \quad (1)$$

La valeur commune de ces rapports est aussi :

$$\frac{\sum_{i=0}^{n-j-1} C_{i,j+1}}{\sum_{i=0}^{n-j-1} C_{ij}}$$

Dans la pratique, les égalités (1) n'étant, au mieux, qu'approximativement vérifiées, Il est naturel de choisir comme facteur commun :

$$f_j = \frac{\sum_{i=0}^{n-j-1} C_{i,j+1}}{\sum_{i=0}^{n-j-1} C_{ij}} \quad (0 \leq j \leq n-1) .$$

On en déduit les évaluations des charges ultimes

$$S_i = C_{in} = C_{i,n-i} f_{n-i} \dots f_{n-1} = C_{i,n-i} \prod_{h=n-i}^{n-1} f_h$$

Conduisant aux provisions $R_i = S_i - C_{i,n-i}$ ($i=1, \dots, n$) par exercice puis à la provision

$$\text{globale } R = \sum_{i=1}^n R_i .$$

Si nécessaire, les facteurs de développement fournissent un rectangle complet de liquidation par

$$C_{ij} = C_{i,n-i} f_{n-i} \dots f_{j-1} = C_{i,n-i} \prod_{h=n-i}^{j-1} f_h .$$

Limite et test de crédibilisation de la méthode

L'hypothèse sous-jacente à la méthode chain ladder doit naturellement être validée.

$C_{i,j+1} = f_j C_{ij}$ pour $i = 0, \dots, n-j-1$, les $(n-j)$ couples $(C_{ij}, C_{i,j+1})_{i=0, \dots, n-j-1}$ doivent être "sensiblement" alignés sur une droite passant par l'origine.

Cependant la validation essentielle repose sur le triangle de développement, dit d-triangle, formé des facteurs individuels $f_{ij} = \frac{C_{i,j+1}}{C_{ij}}$ pour $i+j \leq n-1$.

L'hypothèse sous-jacente à la méthode chain ladder n'est acceptable que si, pour $j = 0, \dots, n-2$, les éléments de la j ème colonne du d-triangle sont « sensiblement »

constants. Si tel n'est pas le cas, son examen permet d'effectuer des choix alternatifs de facteurs, Une telle possibilité est offerte par la méthode qui suit.

On peut également introduire des pondérations lors de l'estimation de f_j , pour accorder plus ou moins d'importance aux exercices passés. Parmi les types de pondérations utilisées, on pourra considérer :

- des pondérations accordant plus de poids aux années récentes et moins aux années éloignées ;
- des pondérations tenant compte de l'exposition réelle au risque de chacune des années, c'est à dire que les pondérations sont liées au nombre de contrats, ou à la prime acquise associée en vigueur à l'année i .

Dans les deux cas, on considère des Link-ratios de la forme

$$\hat{f}_j = \frac{1}{\sum_{i=0}^{n-j-1} W_{i,j}} \times \sum_{i=0}^{n-j-1} W_{i,j} \frac{C_{i,k-1}}{C_{i,j}}$$

Notons que si $W_{i,j} = C_{i,j}$ on retrouve l'expression de Chain Ladder standard.

Tableau 8. : Triangle des liquidations avec link-ratio

Année d'origine	Délai de règlement								
	0	1	...	j	n-1	n
0	$C_{0,0}$	$C_{0,1}$...	$C_{0,j}$	$C_{0,n-1}$	$C_{0,n}$
1	$C_{1,0}$	$C_{1,1}$...	$C_{1,j}$	$C_{1,n-1}$	
...		
...		
i	$C_{i,0}$	$C_{i,1}$...	$C_{i,j}$...				
...					
...						
n-1	$C_{n-1,0}$	$C_{n-1,1}$							
n	$C_{n,0}$								

II.2. Autres méthodes déterministes

Les méthodes citées ci-après sont également assez usitées. Elles ne sont citées qu'à titre indicatif et ne seront pas développées (Bornhuetter-Ferguson, London Chain, Méthode London Pivot).

Néanmoins, nous pouvons mentionner le fait qu'elles reposent toutes sur une même approche

- celle des facteurs de développements : $f_j = \frac{C_{i,j+1}}{C_{i,j}}, (j = 0, \dots, n-1)$;
- et des cadences de règlements : $p_j = \frac{C_{i,j}}{C_{i,n}}, (j = 0, \dots, n-1)$;

Notons également la relation qu'il existe entre ces deux items :

$$f_j = \frac{p_{j+1}}{p_j} \quad \text{avec } p_n = 1 \quad , \quad p_j = \frac{1}{f_j \times f_{j+1} \times \dots \times f_{n-1}}$$

De la même manière, les montants de réserve R_i s'expriment facilement en fonction de ces deux éléments :

$$R_j = \frac{1 - p_{n-i}}{p_{n-i}} \times C_{i,n-i} \quad R_j = (f_{n-1} \times \dots \times f_{n-1} - 1) \times C_{i,n-i}$$

III. Approche par simulations

III.1. Principe

Contrairement aux méthodes basées sur les tableaux de développement, cette approche permet d'estimer la loi de S du montant total des sinistres. Cette méthode nécessite de construire un n-échantillon de réalisations de la loi de S. Ces informations sont obtenues en effectuant en premier lieu des simulations :

- de la loi du nombre de sinistres (N) ;
- de la loi des montants de sinistres (X).

Dans le domaine de l'assurance non vie, c'est le modèle collectif qui est le plus répandu. Au sein d'une branche donnée, on considère une classe C de contrats. Aucune distinction n'est effectuée entre les différentes polices qui constituent ce collectif ; les sinistres générés par chaque contrat sont imputables à l'ensemble de la classe.

La charge de sinistre S s'exprime en fonction de deux variables aléatoires :

- N représente le nombre ou la fréquence de sinistres touchant la classe sur la période $[0, t]$;
- (X_i) correspondent aux montants individuels de sinistres avec la convention $X_0=0$.

Cette somme d'un nombre aléatoire de variables s'écrit alors $S = \sum_{i=0}^N X_i$.

Les lois retenues pour chacune de ces variables aléatoires sont généralement les suivantes :

- **Poisson** ou **Binomiale Négative** pour N ;
- **Log normal**, **Pareto** ou **Wei bull** pour les X_i .

Nous rappelons à titre indicatif, les deux caractéristiques principales de S :

- $E(S) = E(N) \times E(X)$;
- $V(S) = E(X)^2 \times V(N) + V(X) \times E(N)$.

III.2. Avantages

L'utilisation de cette méthode présente de nombreux avantages par rapport aux méthodes classiques :

- Résultats indépendants des cadences de règlements ;
- Obtention d'intervalles de confiance (elle est rendue possible par la détermination de la fonction de répartition) ;
- Intégration possible de toute forme de réassurance ;
- Distinction des provisions pour sinistres tardifs des provisions pour sinistres en cours ;
- Résultats plus fiables notamment lorsque les données d'origine présentent des irrégularités ou des changements de cadence (car la méthode n'est pas basée sur le développement des paiements).

IV. Application

Dans le cadre de notre application et suite à l'importance des tâches à effectuer, nous nous sommes limité aux trois grandes branches de la société à savoir l'AUTO, L'INCENDIE, L'ACCIDENT DE TRAVAIL.

Pour la modélisation du passif on dispose des données suivantes, pour la première branche et vu l'importance de cette dernière dans l'activité de la compagnie nous avons été en mesure d'obtenir l'historique des deux bases production et charges ce qui nous a permis de modéliser la charge sinistre, pour les deux autres branches nous ne disposons que des triangulaires des charges, des paiements et des primes. Donc afin de modéliser la charge sinistres et les primes futures nous avons exploités ces triangulaires moyennant la démarche suivante :

- Détermination de l'évolution moyenne du ratio S/P ;
- Détermination de l'évolution moyenne des primes.

Après le calcul du S/P moyen et la prime relative à chaque année de l'horizon spécifié nous avons dressés les tableaux de charges et de paiement relatifs à l'INCENDIE et L'ACCIDENT de TRAVAIL pour enfin déterminer les provisions techniques.

IV.1. Estimation des flux futurs de sinistres et de primes

IV.1.1. Sinistre branche auto

Pour cette branche vu la disponibilité des données historiques nous avons essayé de modéliser le nombre de sinistre (N) ainsi que la charge sinistre individuel les différents démarches et modèles sont développés ci-dessous :

IV.1.1.1. Modélisation du nombre de sinistres

La recherche d'un modèle adéquat pour la modélisation de (N) présente un intérêt primordial dans notre projet. En pratique, on doit sélectionner le meilleur modèle parmi un grand nombre de modèles afin de s'en servir pour calculer les quantités actuarielles et statistiques qui nous intéressent.

Après le teste de plusieurs modèle (en utilisant le test Q-Q plot sur SPSS) à savoir binomial négative, exponentiel,..., nous avons jugé que la loi poison s'ajuste au mieux pour nos données.

Figure 7. : Q-Q plot Exponentiel du nombre de sinistre

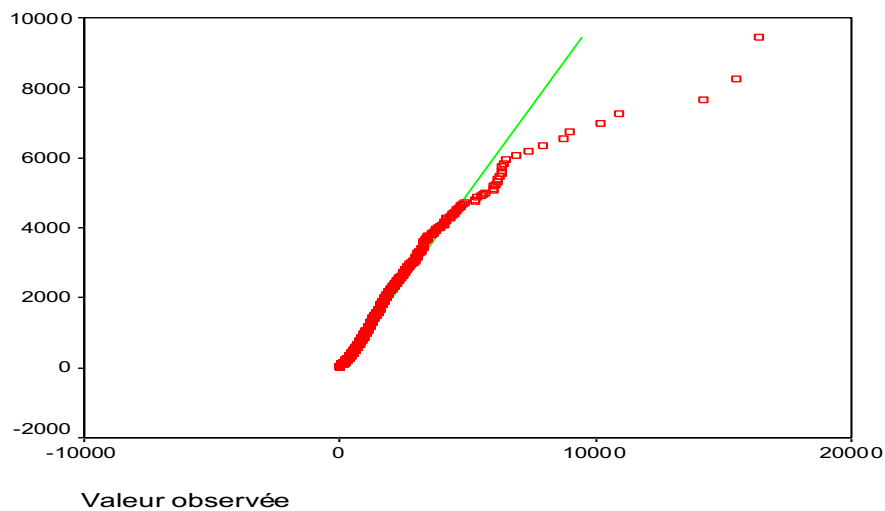


Figure 8. : Q-Q plot binomiale négative du nombre de sinistre

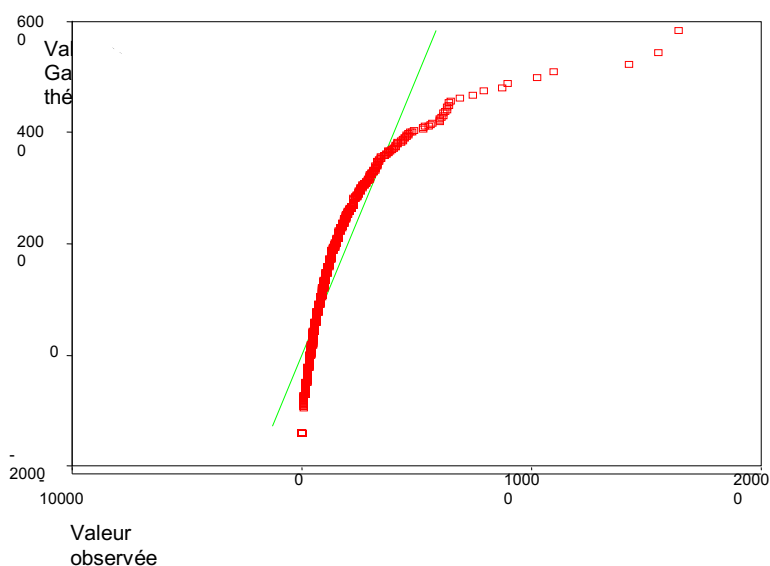
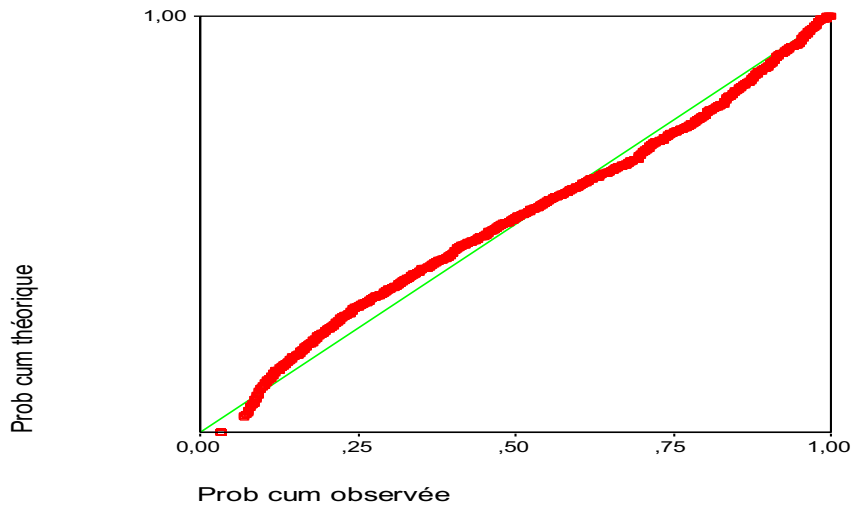


Figure 9. : Q-Q plot poisson du nombre de sinistre



Après la connaissance du modèle a appliqué viens la détermination des paramètres de la loi, pour notre cas nous avons a déterminé λ qui est la moyenne de la loi de poisson.

On a :

$$\lambda = N_C \times p$$

Avec :

N_C : Nombre de contrats ;

p : Fréquence moyenne.

L'exploitation des données nous a permis de déduire un $\lambda = 21\,355$

IV.1.1.2. Détermination de la loi des montants individuels de sinistres

La même démarche est appliquée pour la détermination de la loi des (X_i) : nous avons choisi de retenir la modélisation Log Normale, dont les paramètres sont notés μ et σ .

$$\mu = 7,33 \quad \sigma = 1,92$$

IV.1.2. Branche incendie et accident de travail

Concernant ces deux branches on a appliqué la démarche citée un peu plus haut et qui consiste à :

IV.1.2.1. Détermination du S/P moyen

Tableau 9. : Tableau des S/P pour la branche accidents de travail

ACCIDENTS TRAVAIL								
RAPPEL DES S/P								
Exercice de rattachement								
Vu fin	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	Moyenne
2000	124,46%	120,68%	114,74%	107,08%	97,20%	84,57%	120,15%	109,84%
2001	110,38%	113,39%	118,30%	108,94%	105,30%	84,47%	-	106,80%
2002	104,39%	107,38%	112,64%	112,57%	106,15%	-	-	108,63%
2003	101,54%	107,12%	114,32%	114,99%	-	-	-	109,50%
2004	99,91%	107,81%	115,57%	-	-	-	-	107,76%
2005	100,07%	107,57%	-	-	-	-	-	103,82%
2006	100,10%	-	-	-	-	-	-	100,10%

L'analyse des résultats du tableau ci-dessus fait ressortir une tendance baissière du ratio S/P, pour cela et pour des raisons internes à la compagnie qui veut limiter le développement de cette branche suite aux résultats négatifs qu'elle dégage on a retenu un S/P de 102%.

Tableau. 10. : Tableau des S/P pour la branche incendie

INCENDIE								
RAPPEL DES S/P CONSTATES								
Exercice de rattachement								
Vu fin	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004	Moyenne
1998	35,97%	48,23%	72,14%	43,52%	321,44%	78,55%	61,46%	94,47%
1999	36,77%	45,67%	67,15%	42,41%	284,75%	73,49%	-	91,71%
2000	34,27%	47,46%	66,07%	39,58%	294,46%	-	-	96,37%
2001	31,90%	45,11%	65,73%	44,22%	-	-	-	46,74%
2002	29,54%	46,01%	66,67%	-	-	-	-	47,41%
2003	29,74%	44,63%	-	-	-	-	-	37,19%
2004	29,43%	-	-	-	-	-	-	100,10%

Pour l'incendie, vu les grandes valeurs atteintes par le S/P en 2002 dû à la catastrophe de la SAMIR nous avons négligé cette observation, on a ainsi obtenu comme résultats un S/P moyen de 48%.

IV.1.2.2. Détermination des flux de primes futures

La détermination des primes annuelles passe par la détermination des évolutions moyennes de ces dernières pour les trois branches traitées.

Dans les tableaux ci-dessous nous présentons le développement des primes par branche, relative à dix années développement

Tableau 11. : Développement des primes de la branche accident de travail

BRANCHE	A. TRAVAIL										Total	évolution
	1° année	2° année	3° année	4° année	5° année	6° année	7° année	8° année	9° année	10° année		
1995	52 997 698	11 180 186	366 319	-59 844	-34 291	-52 799	1 718	5 027	-15 839	-11 414	64 376 762	
1996	63 272 776	11 766 602	1 301 559	177 034	9 102	-88 153	-23 329	-18 907	-17 928		76 378 756	18,64%
1997	67 719 158	13 427 428	761 108	-52 128	55 782	-80 839	-38 682	-12 172			81 779 656	7,07%
1998	70 964 882	11 832 978	654 466	-72 056	-27 228	-239 452	-17 848				83 095 741	1,61%
1999	71 896 101	12 392 491	784 668	215 864	-616 401	12 901					84 685 624	1,91%
2000	72 972 664	11 854 258	1 827 784	-97 371	-119 184						86 438 151	2,07%
2001	74 255 150	12 140 076	1 134 196	382 643							87 912 065	1,71%
2002	77 155 907	19 855 931	2 223 806								99 235 643	12,88%
2003	123 126 893	16 881 612									140 008 505	41,09%
2004	100 278 118										100 278 118	-28,38%

On remarque que le volume des primes de la branche accident de travail a connu une augmentation majeure en première année soutenu d'une légère amélioration qui croît au cours des dernières années avant de connaître une baisse de 28%.

Tableau 12. : Développement des primes de la branche auto

BRANCHE	TOUS VEHICULES										Total	évolution
	1° année	2° année	3° année	4° année	5° année	6° année	7° année	8° année	9° année	10° année		
1995	220 615 829	6 751 060	56 440	-17 834	-31 334	-391	-24 340	14 966	-10 422	-9 439	227 344 534	
1996	291 952 395	11 691 296	-83 298	7 736	28 248	-108 164	-12 853	-12 055	-6 276		303 457 029	33,48%
1997	303 730 168	15 028 925	-298 802	-46 591	-85 483	666	-24 170	-10 056			318 294 658	4,89%
1998	326 721 910	10 111 787	381 381	-130 943	-37 829	-84 152	-30 210				336 931 944	5,86%
1999	337 423 895	15 789 460	-176 637	456 260	-177 630	-30 738					353 284 610	4,85%
2000	354 457 306	12 014 360	721 844	-27 600	-286 674						366 879 236	3,85%
2001	373 048 750	14 400 619	198 944	-235 652							387 412 661	5,60%
2002	392 874 976	9 575 982	-291 303								402 159 655	3,81%
2003	402 999 709	10 091 827									413 091 535	2,72%
2004	433 063 285										433 063 285	4,83%

L'analyse de l'évolution des primes de la branche auto indique une certaine stabilité de cette dernière autour de la valeur 4%

Tableau 13. : Développement des primes de la branche incendie

BRANCHE	INCENDIE										Total	évolution
	1° année	2° année	3° année	4° année	5° année	6° année	7° année	8° année	9° année	10° année		
1995	37 560 853	-73 406	-369 274	-167 495	-108 763	-33 026	-29 979	19 872	-5 874	-33 579	36 759 328	
1996	43 046 578	-97 667	-92 687	-182 713	1 435	-46 961	-4 142	-26 418	-36 644		42 560 781	15,78%
1997	43 551 352	320 733	-410 091	-156 656	-45 738	-91 379	-37 549	-34 569			43 096 103	1,26%
1998	46 603 930	-444 000	-250 789	-177 704	-65 223	-101 166	-38 345				45 526 704	5,64%
1999	47 139 091	-1 073 277	-357 122	-120 293	-144 468	-57 842					45 386 088	-0,31%
2000	53 244 026	-395 534	-484 073	-486 616	-169 298						51 708 506	13,93%
2001	54 758 299	275 820	-679 464	-197 048							54 157 608	4,74%
2002	57 173 968	-461 838	-523 634								56 188 496	3,75%
2003	63 007 648	-492 862									62 514 786	11,26%
2004	68 344 432										68 344 432	9,33%

Contrairement à la branche auto on remarque que l'évolution des primes de l'incendie est caractérisée par des fluctuations qui font que le volume des primes bascule d'une année à une autre.

A partir de cette analyse nous optons pour les évolutions moyennes suivantes :

- Pour la branche accident de travail, et pour des raisons (cités un peu plus haut) propres aux stratégies de la compagnie, nous retiendrons une évolution nulle.
- Pour la branche auto une évolution moyenne de 4,55%.
- Pour la branche incendie une augmentation moyenne de 7,23%

Donc après la détermination des évolutions moyenne des primes pour les trois branches nous avons tracé le tableau des primes futures :

Tableau 14. : Tableau des prévisions des primes futures

année	INCENDIE	AUTO	ACCIDENT de TRAVAIL
1	90 357 633	517 425 127	100 278 118
2	96 890 294	540 967 970	100 278 118
3	103 895 252	565 582 012	100 278 118
4	111 406 653	591 315 994	100 278 118
5	119 461 113	618 220 872	100 278 118
6	128 097 892	646 349 921	100 278 118
7	137 359 092	675 758 843	100 278 118
8	147 289 856	706 505 870	100 278 118
9	157 938 593	738 651 887	100 278 118
10	169 357 211	772 260 548	100 278 118

Les travaux réalisés jusqu'à présent ont permis pour l'instant de dégager :

- Pour la branche auto : la détermination des primes futures et aussi la charge sinistres pour chaque année (obtenu en effectuant 500 simulations de la loi composé poisson log normal).

- 4pour les deux autres branches nous avons été en mesure de déterminer les primes futures ainsi que l'évolution moyenne des S/P ce qui va nous permettre de calculer les charges sinistres futures en appliquant la formule :

$$S_i = S / P * prime_i \quad i = 1, \dots, K$$

Nous présentons dans le tableau ci-dessous les charges sinistres des trois branches pour les 10 années futures :

Tableau 15. : Tableau des prévisions des charges sinistres futures

année	INCENDIE	AUTO	ACCIDENT de TRAVAIL
1	43 371 664	403 591 599	102 283 681
2	46 507 341	421 955 016	102 283 681
3	49 869 721	441 153 970	102 283 681
4	53 475 194	461 226 475	102 283 681
5	57 341 334	482 212 280	102 283 681
6	61 486 988	504 152 939	102 283 681
7	65 932 364	527 091 897	102 283 681
8	70 699 131	551 074 579	102 283 681
9	75 810 525	576 148 472	102 283 681
10	81 291 461	602 363 228	102 283 681

IV.2. Estimation des prestations payées au titre de différentes années de l'horizon temporel

Le calcul des prestations futures passe par les étapes suivantes :

IV.2.1. Création d'un tableau des cadences de règlement pour les trois branches

Ces cadences de développement sont déterminé dans un cadre réglementaire à partir des triangulaires des paiements cumulés nous présenterons dans le tableau suivant les principaux résultats de ces calculs :

Tableau 16. : Tableau des cadences de Règlement pour les trois branches

Année	Branche	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
cadence de règlement	accident de travail	6,5%	26,7%	46,8%	61,2%	69,8%	75,9%	80,3%	83,7%	86,2%	87,2%
	Auto	6,5%	16,1%	27,1%	39,0%	49,7%	58,2%	64,7%	68,0%	69,5%	73,6%
	Incendie	16,6%	53,6%	70,3%	82,5%	90,3%	92,6%	94,2%	94,7%	93,4%	94,1%

Le tableau ci-dessous montre que la compagnie pratique différentes politique de paiements selon les branches puisque celle-ci règle les sinistres d'incendie avec une cadence plus élevé que celle de l'auto avec 70% des paiements à la troisième année contre 47% pour l'accident de travail et 27% pour l'auto.

IV.2.2. Construction d'un tableau de liquidation

A partir des montants de sinistres simulés et des cadences de règlement paramétrées, nous pouvons construire le tableau de développement afférent aux montants de sinistres simulés.

Tableau 17. : Tableau de développement afférent aux montants de sinistres

		Développement								
		1	2	3	...	I	I+1	I+2	...	K
Survénance	1	S(1)*cad(1)	S(1)*cad(2)	S(1)*cad(3)	...	S(1)*cad(I)	0	0	...	0
	2	0	S(2)*cad(1)	S(2)*cad(2)	...	S(2)*cad(I-1)	S(2)*cad(I)	0	...	0
	3	0	0	S(3)*cad(1)	...	S(3)*cad(I-2)	S(3)*cad(I-1)	S(3)*cad(I)	...	0

	K	0	0	0

↓

↓

↓

↓

↓

↓

↓

Prestation 1	Prestation 2	Prestation 3	...	Prestation I	Prestation I+1	Prestation I+2	...	Prestation K
--------------	--------------	--------------	-----	--------------	----------------	----------------	-----	--------------

IV.2.3. Calcul des prestations à payées

Le montant des prestations payées au titre des différentes années de l'horizon temporel sont déterminés à partir du tableau de liquidation comme indiqué précédemment (à titre d'exemple : les prestations payées au titre de la première année correspondent à la somme des éléments de la première colonne).

Cependant il ne faut pas oublier les prestations relatives aux sinistres antérieurs à la période d'étude et qui restent non entièrement liquidés.

Ces différentes valeurs sont modifiées en tenant compte de l'inflation. Si $Inflation_t$ représente le taux d'inflation relatif à l'année t et simulé selon le modèle présenté en partie 3 ($i_t = \alpha + \beta \times r_t + \varepsilon_t$) nous obtenons :

$$Prestations'_i = Prestation_i \times \prod_{k=1}^i inflation_k \quad i = 1, \dots, k$$

Les principaux résultats sont synthétisés dans le tableau suivant :

Tableau 18. : Tableau de calcul des prestations à payées

année	auto	accident de travail	Incendie	toutes branches
0	377 299 338	38 573 713	38 573 713	362 647 482
1	733 011 340	39 520 144	39 520 144	306 477 568
2	1 060 442 533	42 175 338	42 175 338	321 120 729
3	1 354 771 985	45 077 340	45 077 340	336 543 545
4	1 619 249 400	48 241 923	48 241 923	352 815 601
5	1 861 431 876	51 701 294	51 701 294	380 664 742
6	2 088 453 070	55 420 294	55 420 294	411 045 110
7	2 312 727 010	59 420 526	59 420 526	417 076 959
8	2 541 061 872	63 733 254	63 733 254	435 036 786
9	2 763 347 515	68 331 673	68 331 673	453 209 829

IV.2.4. Estimation des prestations payées au titre de différentes années de l'horizon temporel

Enfin pour terminer la modélisation du passif il ne reste plus qu'à déterminer les provisions techniques PSAP suivant la formule de récurrence suivante :

Le montant des provisions de chaque année future est calculé de manière récursive :

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \text{PSAP}_1 = \text{Sinistre}_1 - \text{règlement}_1 \\
 \text{PSAP}_2 = \text{Sinistre}_1 + \text{Sinistre}_2 - \text{règements}_1 - \text{règements}_2 \\
 \dots \\
 \text{PSAP}_i = \text{PSAP}_{i-1} + \text{Sinistre}_i - \text{règements}_i \\
 \dots \\
 \text{PSAP}_K = \text{PSAP}_{K-1} + \text{Sinistre}_K - \text{règements}_K
 \end{array} \right.$$

Une fois ces provisions obtenues, il est nécessaire d'augmenter ces provisions des montants des PSAP des années antérieures qui restent non liquidé.

Une fois cette manœuvre réalisé les résultats sont comme suit :

Tableau 19. : Tableau des prestations payées

Année	auto	accident de travail	incendie	toutes branches
0	377 299 338	387 891 961	85 114 017	850 305 316
1	733 011 340	388 640 539	90 706 608	1 212 358 487
2	1 060 442 533	389 216 857	96 905 557	1 546 564 946
3	1 354 771 985	389 814 477	103 699 860	1 848 286 321
4	1 619 249 400	389 562 798	111 079 787	2 119 891 986
5	1 861 431 876	384 369 100	119 021 683	2 364 822 658
6	2 088 453 070	384 369 100	127 556 652	2 600 378 822
7	2 312 727 010	384 369 100	136 715 216	2 833 811 325
8	2 541 061 872	384 369 100	146 519 171	3 071 950 142
9	2 763 347 515	384 369 100	157 041 287	3 304 757 902

Elaboration d'une
stratégie financière
pour la compagnie
d'assurance

Introduction

Le placement financier est une activité à part entière dans une compagnie d'assurance. Effectivement, les compagnies d'assurance gèrent des fonds énormes et font circuler des flux considérables, de ce fait des petits taux de rendements génèrent des plus values considérables en terme de volume. Toutefois, l'argent que fait circuler l'assurance n'est pas le sien, sauf les fonds propres, donc elle ne peut pas se permettre de réaliser des moins values. Alors, la compagnie d'assurance est amenée à optimiser ses placements en élaborant une stratégie financière qui lui assure un rendement convenable sans l'exposer trop au risque.

Cette dernière partie représente la partie clé de ce rapport, car elle permet de mettre en pratique les différents résultats obtenu des deux parties précédentes afin d'élaborer une stratégie financière qui permettra à la compagnie d'honorer ses engagements envers ces assurées d'une part et envers ses actionnaires d'autres part.

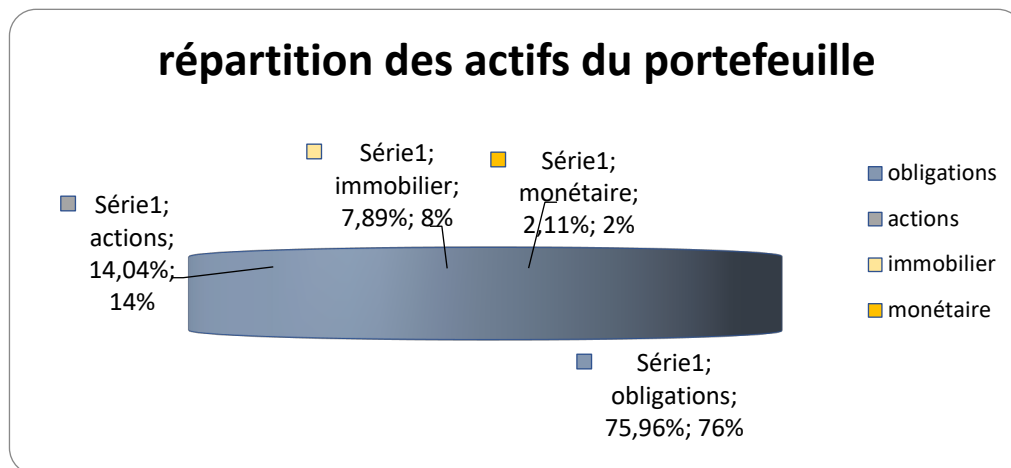
I. Présentation de l'état actuel du portefeuille non vie

La branche non vie se distingue de la branche vie par la nature et la duration des engagements. En effet, la branche vie se caractérise par des engagements à long terme et par une valorisation des prestations dépendante des rendements effectués sur le marché financier. En revanche les engagements de la branche non vie sont à court terme (sauf quelques cas de responsabilité civile et de dommages corporelles qui peuvent durer plus de 20 ans) et les montants des sinistres ne sont pas forcément en relation avec le marché financier.

Ces placements sont en représentation de l'engagement de la compagnie qui est estimé à **4 639** millions de Dirhams et représenté dans les provisions de l'année 2007.

Tableau 20. : Valeur comptable du portefeuille des placements

obligations	3 523 914 140	75,96%
actions	651 339 580	14,04%
immobilier	366 030 576	7,89%
monétaire	97 886 504	2,11%
TOTAL	4 639 170 800	100%

Figure 10. : Répartition des actifs du portefeuille

L'analyse de la composition du portefeuille non vie fait ressortir :

- Les titres obligataires détenus par la compagnie représentent les grandes parties des placements avec 76% ;
- La poche du portefeuille actions vient en second place avec une part de 14% des placements non vie ;
- Le poids du portefeuille actions est de 8% ;
- La trésorerie vient en dernier avec une part de 2% des placements.

II. Détermination des allocations d'actifs

La section suivante a pour objet de présenter la procédure mise en place pour l'obtention des différents poids des actifs constituant le portefeuille non vie pour les dix années avenir et par ceci déterminer une stratégie d'allocation d'actifs propre à la compagnie.

Etapas de la procédure

- Détermination de l'allocation optimale pour les différentes dates de l'horizon temporel
- Détermination du résultat technique pour les différentes dates de l'horizon temporel
- Politique de réinvestissement et de désinvestissement
- Détermination du rendement de chaque actif
- Allocation d'actifs
- Détermination du rendement du portefeuille non vie

a. Détermination de l'allocation optimale pour les différentes dates de l'horizon temporel

La détermination d'une allocation stratégique pour plusieurs actifs (N actifs par exemple) passe par le modèle de **Markowitz** à plusieurs actifs et plus précisément par l'algorithme de la ligne critique.

Présentation du problème

Soient p_i les proportions investies dans les actifs composant le portefeuille. En notant R_i le rendement de chaque actif, il est alors possible d'écrire le rendement global du portefeuille :

$$R_{port} = \sum_{i=1}^N p_i \times R_i$$

L'algorithme de la ligne critique permet d'établir une frontière efficiente lorsque les différentes proportions d'actifs sont encadrées par des inégalités (réglementaires par exemple) : $p_{Inf,i} \leq p_i \leq p_{Sup,i}$.

Rappelons également que l'équation de la tangente en un point de la frontière efficiente s'écrit $\sigma^2_{port} = \alpha + \lambda \cdot E_{port}$ où le paramètre λ correspond au coefficient d'affection pour le risque et E_{port} à l'espérance du portefeuille. Ainsi, un investisseur qui n'accorde aucune importance au risque se verra «attribuer» un λ infini. Un portefeuille efficient, pour un λ donné, est identifié par l'ensemble des valeurs p_i permettant de minimiser la valeur de $\sigma^2_{port} - \lambda \cdot E_{port}$. De ce fait, la frontière efficiente est construite en balayant le domaine de définition de λ (à savoir $[0 ; \infty [$).

Portefeuille efficient sans contraintes

En l'absence de contraintes inégalitaires, les proportions p_i sont calculées par minimisation de la valeur de $-\lambda \sum_{i=1}^N p_i \cdot E_i + \sum_{i=1}^N p_i \cdot p_j \cdot \sigma_{ij}$ (où E_i correspond à l'espérance de l'actif i) sous la contrainte $\sum_{i=1}^N p_i = 1$.

La résolution de ce problème fait appel au lagrangien

$$L = -\lambda \sum_{i=1}^N p_i \cdot E_i + \sum_{i=1}^N p_i \cdot p_j \cdot \sigma_{ij} + \gamma \cdot \left(\sum_{i=1}^N p_i - 1 \right)$$

En annulant les dérivées partielles par rapport aux p_i et à γ , on aboutit au système suivant : $C \cdot P = A + \lambda \cdot E$ avec les notations qui suivent :

$$C = \begin{vmatrix} 2 \cdot Cov & I \\ I' & 0 \end{vmatrix}$$

(Cov désigne la matrice de variance covariance de dimension $N \times N$ et I correspond à un vecteur colonne dont les éléments sont tous égaux à 1).

$$P = \begin{pmatrix} p_1 \\ \dots \\ p_N \\ \gamma \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} E_1 \\ \dots \\ E_N \\ 0 \end{pmatrix}$$

Prise en compte des contraintes

Supposons que les contraintes $p_{\text{Inf},i} \leq p_i \leq p_{\text{Sup},i}$ soient prises en considération et que les statuts des différents p_i pour une valeur de λ donnée soient connus, alors des modifications éventuelles doivent être apportées au système précédent :

- Si p_i est de statut «In» (sa valeur se situe strictement entre les deux bornes $p_{\text{Inf},i}$ et $p_{\text{Sup},i}$), alors la $i^{\text{ème}}$ ligne du système présenté dans la section précédent reste inchangée ;
- Si p_i est de statut «Down» (sa valeur est égale à la borne inférieure $p_{\text{Inf},i}$), alors la $i^{\text{ème}}$

ligne du système précédent (à savoir $\frac{\delta L}{\delta p_i} = 0$) est remplacée par $p_i = p_{\text{Inf},i}$;

- Si p_i est de statut «Up» (sa valeur est égale à la borne $p_{\text{Sup},i}$), alors la $i^{\text{ème}}$ ligne du système précédent (à savoir $\frac{\delta L}{\delta p_i} = 0$) est remplacée par $p_i = p_{\text{Sup},i}$.

En utilisant $C.P = A + \lambda.E$ et les remarques qui viennent d'être faites, nous pouvons établir un récapitulatif des valeurs des p_i :

- $p_i = a_i + b_i \times \lambda$, si le statut du titre est In ;
- $p_i = p_{\text{Inf},i}$, si le statut du titre est Down ;
- $p_i = p_{\text{Sup},i}$, si le statut du titre est Up ;
- $\gamma = a_\gamma + b_\gamma \times \lambda$.

Où a_i et b_i sont des constantes calculées à partir de C , A et E .

Lorsqu'on balaye l'intervalle de définition de λ , il est possible que les statuts des p_i évoluent. Auquel cas, il faudrait prendre en compte ces évolutions dans le calcul des p_i en utilisant la méthode détaillée quelques lignes plus haut. Mais nous pouvons également calculer les valeurs critiques de λ qui déclenchent un changement de statut.

Supposons à titre d'illustration que pour une valeur λ_1 , le titre i soit de statut « In » et que les valeurs de λ évoluent de manière décroissante. Deux possibilités peuvent être envisagées en fonction de la valeur de b_i :

- si b_i est positif, p_i aura tendance à se rapprocher de sa borne inférieure et la valeur critique

$$\text{de } \lambda \text{ s'écrit } \lambda_{c,i} = \frac{P_{\text{inf},i} - a_i}{b_i} ;$$

- En revanche, si b_i est négatif, p_i aura tendance à se rapprocher de sa borne supérieure et la

$$\text{valeur critique de } \lambda \text{ s'écrit } \lambda_{c,i} = \frac{P_{\text{sup},i} - a_i}{b_i} .$$

Application

Dans le cadre de notre application et conformément à la réglementation marocaine, Arrêté du ministre des finances et de la privatisation n° 1548-05 du 6 ramadan 1426 (10 octobre 2005) relatif aux entreprises d'assurances et de réassurance, premier chapitre section 3, qui limite les placements des provisions selon la grille suivante :

- L'immobilier $\leq 30\%$;
- Les actions $\leq 50\%$;
- La trésorerie $\leq 10\%$;
- Obligations $\geq 70\%$;
- Immobilier+les actions+monétaire $\leq 70\%$.

A ces contraintes s'ajoute une contrainte propre à la compagnie et qui entre dans la pratique de sa gestion financière, le poids la poche monétaire annuelle est fixée à 5%.

L'exploitation des résultats obtenus lors de la modélisation de l'actif :

- Simulation du taux d'intérêt futur ;
- Simulation des prix des obligations ;
- Simulation du rendement de l'immobilier ;
- Simulation des actions.

nous fournit une base de données des différents prix des actions pour toute la période de l'horizon temporel qu'on va utiliser via la fonction *quadprog* du logiciel MATLAB afin de déterminer les valeurs des poids relatifs à chaque actif durant les dix prochaines années.

Les résultats obtenus sont comme suit :

Tableau 21. : Tableau des poids relatifs à chaque actif

année	obligation	actions	immobilier	monétaire
1	75,57%	13,42%	6,01%	5%
2	71%	16,57%	6,66%	5%
3	73,32%	13,48%	8,20%	5%
4	72,40%	15,33%	7,27%	5%
5	72,62%	15,20%	7,18%	5%
6	73,33%	13,51%	8,16%	5%
7	70,11%	15,18%	9,71%	5%
8	75,26%	15,00%	4,68%	5%
9	71,06%	18,37%	5,57%	5%
10	77,67%	11,79%	5,53%	5%

En analysant les outputs ci-dessous nous remarquons que tout au long de l'horizon temporel les placements obligataires représentent la grande part des placements suivis des actions, l'immobilier et en dernier la trésorerie.

b. Détermination du résultat technique pour les différentes dates de l'horizon temporel

Le résultat (simplifié) de chaque année de l'horizon temporel est calculé de la façon suivante :

Tableau 22. : Tableau du résultat technique

Eléments pris en compte	Débit	Crédit
✓ Primes (i)		✓
✓ Règlements (i)	✓	
✓ PSAP à l'ouverture (i)		✓
✓ PSAP à la clôture (i)	✓	
✓ Frais d'acquisition (i)	✓	
✓ Frais de gestion des polices (i)	✓	
✓ Frais de gestion des sinistres (i)	✓	
✓ Produit financiers alloués (i)		✓
Résultat technique (i)	✓	
- Impôts (i) a	✓	
Résultat après impôts (i)	✓	
- Dividendes éventuels	✓	
Transfert vers les fonds propres (i)	✓	

Remarques diverses

- Les frais d'acquisition et les frais de gestion des polices sont exprimés en pourcentage des primes ;
- Les frais de gestion des sinistres sont exprimés en pourcentage des règlements effectués pendant l'année.

Application

Les principaux résultats de la confrontation de l'actif au passif sont synthétisés dans le tableau suivant :

Tableau 23. : Tableau de la confrontation de l'actif au passif

année	résultats
1	123 423 561
2	197 757 735
3	207 578 720
4	218 769 947
5	234 148 145
6	241 765 629
7	253 863 922
8	266 609 270
9	279 959 161
10	297 697 072

c. Politique de réinvestissement et de désinvestissement

Nous disposons, à la date 0, d'une allocation initiale d'actifs.

- $\theta_0^{Actions}$: la proportion initiale d'actions ;
- θ_0^{Oblig} : la proportion initiale d'obligations ;
- θ_0^{immob} : la répartition initiale de l'immobilier ;
- θ_0^{Monet} : la proportion initiale de monétaire.

Le résultat de l'année i (après impôt et distribution éventuelle de dividendes) est connu, il est noté Res_i . Les taux de réinvestissement dans les différents actifs sont définis comme suit :

- λ^{Action} : la part du résultat réinvestie dans les actions.
- λ^{Oblig} : la part du résultat réinvestie dans les Zéro Coupon.
- $\lambda^{Monét}$: la part du résultat réinvestie dans le monétaire
- λ^{Immob} : la part du résultat réinvestie dans l'immobilier.

Ces différents paramètres permettent de calculer les montants réinvestis dans chacun des actifs :

- $\lambda^{Action} \times Res_i$: la part du résultat réinvestie dans les actions.
- $\lambda^{Oblig} \times Res_i$: la part du résultat réinvestie dans les Zéro-Coupon.
- $\lambda^{Monét} \times Res_i$: la part du résultat réinvestie dans le monétaire.
- $\lambda^{Immob} \times Res_i$: la part du résultat réinvestie dans l'immobilier.

Lorsqu'il s'agit de désinvestissement (résultat négatif) la logique reste globalement la même. Cependant, les proportions à prendre en compte ne correspondent pas à celles de la politique de réinvestissement :

- $\gamma^{Action} \times Res_i$: la part du déficit puisée dans les actions.
- $\gamma^{Oblig} \times Res_i$: la part du déficit puisée dans les Zéro-Coupon.
- $\gamma^{Monét} \times Res_i$: la part du déficit puisée dans le monétaire.
- $\gamma^{immob} \times Res_i$: la part du déficit puisée dans l'immobilier.

- En utilisant les résultats obtenu suite à l'application du théorème moyenne variance de Markowitz réalisé à l'aide du logiciel MATLAB ainsi que les résultats techniques obtenu ci-dessous nous avons déterminés le montant investit dans chaque actif.
- On remarque d'après les résultats ci-dessus que pour les dix prochaines années la compagnie ne connaîtra que des résultats positifs donc notre politique portera principalement sur le réinvestissement. Nous présentons ci-dessous les principaux résultats des montants réinvestis dans les placements :

Tableau 24. : Tableau des montants investis

année	montants investis			
	obligations	actions	Immobilier	Monétaire
1	93 271 185	16 563 442	7 417 756	6 171 178
2	140 407 992	32 768 457	13 170 665	9 887 887
3	152 196 717	27 981 611	17 021 455	10 378 936
4	158 389 442	33 537 433	15 904 575	10 938 497
5	170 038 383	35 590 518	16 811 837	11 707 407
6	177 286 736	32 662 536	19 728 075	12 088 281
7	177 983 996	38 536 543	24 650 187	12 693 196
8	200 650 137	39 991 391	12 477 314	13 330 464
9	198 938 980	51 428 498	15 593 725	13 997 958
10	231 221 315	35 098 485	16 462 648	14 884 854

Etape 1 : Construction d'un tableau des montants d'actions

En appliquant cette politique de réinvestissement et de désinvestissement pour chacune des années de l'horizon temporel, il est possible de constituer un tableau de la poche d'actions disponibles à chaque date.

En désignant par $Action_m$, la part du résultat de l'année m réinvestie ou puisée (suivant que le résultat est positif ou négatif) dans les actions, il est possible d'établir une formule donnant le montant total des actions à chaque date.

Pour $i=1, \dots, K$, nous pouvons écrire :

$$\text{Montant}_i^{\text{Total actions}} = Action_0 \times \prod_{j=1}^i (1 + RM_j) + Action_1 \times \prod_{j=2}^i (1 + RM_j) + \dots + Action_{i-2} \times \prod_{j=i-1}^i (1 + RM_j) + Action_{i-1} \times (1 + RM_i)$$

$$\text{Montant}_i^{\text{Total Action}} = Action_0 \times \prod_{j=1}^i (1 + RM_j) + \sum_{m=1}^{i-1} \alpha_m \times Res_m \times \prod_{j=m+1}^i (1 + RM_j)$$

Avec

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_m = \lambda^{\text{Immo}} \text{ Si le résultat de l'année } m (Res_m) \text{ est positif.} \\ \alpha_m = \gamma^{\text{Immo}} \text{ Si le résultat de l'année } m (Res_m) \text{ est négatif.} \end{array} \right.$$

Tableau 25. : Tableau des montants d'actions

année	montant actions
0	667 903 022
1	700 671 479
2	728 653 090
3	762 190 523
4	797 781 041
5	830 443 578
6	868 980 121
7	908 971 512
8	960 400 009
9	995 498 494

Etape 2 : Construction d'un tableau des montants d'obligations

Considérons le tableau suivant :

Tableau 26. : Triangulaire des nombres d'obligations

Date	1	2	3	...	I	...	K-1	K
$N_1^{\text{TotalOblig}} =$	N_1^1							
$N_2^{\text{TotalOblig}} =$	$N_2^1 +$	N_2^2						
...				
$N_i^{\text{TotalOblig}} =$	$N_i^1 +$	$N_i^2 +$	$N_i^3 +$...	N_i^i			
...
$N_{K-1}^{\text{TotalOblig}} =$	$N_{K-1}^1 +$	$N_{K-1}^2 +$	$N_{K-1}^3 +$...	$N_{K-1}^i +$...	N_{K-1}^{K-1}	
$N_K^{\text{TotalOblig}} =$	$N_K^1 +$	$N_K^2 +$	$N_K^3 +$...	$N_K^i +$...	$N_K^{K-1} +$	N_K^K

Les différents chiffres listés dans ce tableau sont calculés selon le mode suivant :

- Pour la colonne 1, $N_i^1 = N_0^{\text{Oblig}}$ (soit le nombre initial de Zéro Coupon disponibles) ;
- Pour la colonne i, il convient d'effectuer une distinction selon qu'il s'agit d'un réinvestissement ou d'un désinvestissement
 - En cas de réinvestissement, le nombre d'obligations s'écrit (pour $i \leq j \leq K$)

$$N_i^1 = \frac{\lambda^{\text{Oblig}} \times \text{Re } s_{i-1}}{P(i, T)}$$

- En cas de désinvestissement, la détermination du nombre d'obligations s'appuie sur la mise en pratique de la méthode de liquidation des stocks FIFO (first in first out).

Pour $i \leq j \leq K$, on pose N_j^i (tout les éléments de la colonne i sont pris comme nuls) puis on modifie les chiffres de la ligne j en effectuant la procédure suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \text{On pose } N = \frac{\gamma^{Oblig} \times Res_{i-1}}{P(i-1, T)} \\
 \text{Si } N \leq N_i^1, \text{ alors } N_j^1 = N_j^1 - N^{Tampon} \text{ pour } (i \leq j \leq k) \\
 \text{Si } N \geq N_i^1, \text{ alors } N^{Tampon} = \frac{\gamma^{oblig} \times Res_{i-1} - N_i^1 \times P(i-1, T)}{P(i-2, T)} \\
 \text{Puis } N_i^1 = 0 \text{ pour } (i \leq j \leq k) \\
 \text{Si } N \leq N_j^2, \text{ alors } N_j^2 = N_j^2 - N^{Tampon} \text{ pour } (i \leq j \leq k) \\
 \text{Si } N \geq N_j^2, \text{ alors } N = \frac{\gamma^{Oblig} \times Res_{i-1} - N_i^1 \times P(i-1, T) - N_i^2 \times P(i-2, T)}{P(i-3, T)} \\
 \text{Puis } N_i^2 = 0 \text{ pour } (i \leq j \leq k) \\
 \text{Etc}
 \end{array} \right.$$

A partir du tableau précédent, il est possible d'obtenir le montant en obligations détenu à chaque période :

$$\text{Montant } t_i^{TotalOblig} = \sum_{k=1}^i N_i^k \times P(i-k+1)$$

Tableau 27. : Tableau des montants d'obligations

année	montant d'obligations
0	3 617 185 324
1	3 757 593 316
2	3 909 790 034
3	4 068 179 475
4	4 238 217 858
5	4 415 504 594
6	4 593 488 589
7	4 794 138 726
8	4 993 077 706
9	5 224 299 022

Etape 3 : Construction d'un tableau des montants de monétaire

En désignant par $Monét_m$, la part du résultat de l'année m réinvestie ou puisée (suivant que le résultat est positif ou négatif) dans la trésorerie, il est possible d'établir une formule donnant le montant total de monétaire à chaque date.

Pour $i=1, \dots, K$, nous pouvons écrire :

$$\text{Montant}_i^{TotalMonét} = Monét_0 \times \prod_{j=1}^i (1+r_j) + Monét_1 \times \prod_{j=2}^i (1+r_j) + \dots + Monét_{i-2} \times \prod_{j=i-1}^i (1+r_j) + Monét_{i-1} \times (1+r_i)$$

$$\text{Montant}_i^{\text{TotalMonét}} = \text{Monét}_0 \times \prod_{j=1}^i (1 + r_j) + \sum_{m=1}^{i-1} \alpha_m \times \text{Res}_m \times \prod_{j=m+1}^i (1 + r_j)$$

Avec

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_m = \lambda^{\text{Monét}} \text{ si le résultat de l'année } m \text{ (} \text{Res}_m \text{) est positif.} \\ \alpha_m = \gamma^{\text{Monét}} \text{ si le résultat de l'année } m \text{ (} \text{Res}_m \text{) est négatif.} \end{array} \right.$$

Cette formule peut se réécrire comme une relation de récurrence entre les montants de monétaire des différentes périodes :

$$\text{Montant } t_i^{\text{TotalMonét}} = \left[\text{Montant } t_{i-1}^{\text{TotalMonét}} + \alpha_{i-1} \times \text{Res}_{i-1} \right] \times (1 + r_i)$$

Tableau 28. : Tableau des montants de monétaire

année	montants de monétaire
0	104 057 682
1	113 945 569
2	124 324 505
3	135 263 002
4	146 970 409
5	159 058 691
6	171 751 887
7	185 082 350
8	199 080 308
9	213 965 162

Etape 4 : Construction d'un tableau des montants de l'immobilier

La constitution du tableau des montants de l'immobilier suit la même démarche que celle appliquée pour construire le tableau des montants monétaire, la seule différence est le taux d'évolution des montants qui est celui déterminé lors de la modélisation des actifs immobiliers.

$$\text{Montant}_i^{\text{TotalImm}} = \text{immob}_0 \times \prod_{j=1}^i (1 + \text{Im } m_j) + \sum_{m=1}^{i-1} \alpha_m \times \text{Res}_m \times \prod_{j=m+1}^i (1 + \text{Im } m_j)$$

Avec $\text{Im } m_j$ le taux de rendement annuel de l'actif immobilier.

On remarque que pour les dix prochaines années la compagnie ne connaîtra que des résultats positifs donc notre politique portera principalement sur le réinvestissement. Nous présentons ci-dessous les principaux résultats des montants réinvestis dans les placements :

Tableau 29. : Tableau des montants de l'immobilier

année	montants de l'immobilier
0	373 448 332
1	386 618 997
2	403 640 452
3	419 545 027
4	436 356 864
5	456 084 940
6	480 735 126
7	493 212 440
8	508 806 165
9	525 268 814

d. Détermination du rendement de chaque actif

La connaissance du rendement de chaque actif à chacune des dates de l'horizon temporel est indispensable à la détermination du rendement de l'ensemble du portefeuille d'actifs. Précisons également que nous avons choisi de calculer le rendement de chaque actif par comparaison des valeurs des actifs sur deux périodes successives

$$\left(\text{Renta}_i^x = \frac{X(i) - X(i-1)}{X(i-1)} \right)$$

Les rendements de chaque actif sont comme suit :

Tableau 30. : Tableau de rendement des différents actifs

	obligations	actions	immobilier	monétaire
1	2,65%	2,54%	2,03%	6,30%
2	3,88%	4,91%	3,53%	9,50%
3	4,05%	3,99%	4,40%	9,11%
4	4,05%	4,60%	3,94%	8,80%
5	4,18%	4,67%	4,01%	8,66%
6	4,18%	4,09%	4,52%	8,22%
7	4,03%	4,64%	5,40%	7,98%
8	4,37%	4,60%	2,60%	7,76%
9	4,15%	5,66%	3,16%	7,56%
10	4,63%	3,65%	3,24%	7,48%

e. Allocation d'actif

La présente section constitue l'aboutissement de tout le travail réalisé jusqu'à présent et donc la détermination d'une allocation stratégique pour la compagnie durant les dix années à venir.

Ayant à notre disposition, à la date i , les montants disponibles de chaque actif, nous pouvons remplir le tableau des allocations

$$\theta_i^x = \frac{\text{Montant } t_i^x}{\text{Montant } t_i^{\text{Actions}} + \text{Montant } t_i^{\text{Oblig}} + \text{Montant } t_i^{\text{immob}} + \text{Montant } t_i^{\text{Monét}}}$$

Tableau 31. : Tableau théorique des allocations de l'actif

Date	Actions	Obligations	Immobilier	Monétaire
1	Montant ₁ ^{Actions}	Montant ₁ ^{Obligations}	Montant ₁ ^{Immobilier}	Montant ₁ ^{Monétaire}
2	Montant ₂ ^{Actions}	Montant ₂ ^{Obligations}	Montant ₂ ^{Immobilier}	Montant ₂ ^{Monétaire}
...
i	Montant _{i} ^{Actions}	Montant _{i} ^{Obligations}	Montant _{i} ^{Immobilier}	Montant _{i} ^{Monétaire}
...
k	Montant _{k} ^{Actions}	Montant _{k} ^{Obligations}	Montant _{k} ^{Immobilier}	Montant _{k} ^{Monétaire}



Date	Actions	Obligations	Immobilier	Monétaire
1	$\theta_1^{\text{Actions}}$	$\theta_1^{\text{Obligations}}$	$\theta_1^{\text{Immobilier}}$	$\theta_1^{\text{Monétaire}}$
2	$\theta_2^{\text{Actions}}$	$\theta_2^{\text{Obligations}}$	$\theta_2^{\text{Immobilier}}$	$\theta_2^{\text{Monétaire}}$
...
i	$\theta_i^{\text{Actions}}$	$\theta_i^{\text{Obligations}}$	$\theta_i^{\text{Immobilier}}$	$\theta_i^{\text{Monétaire}}$
...
K	$\theta_k^{\text{Actions}}$	$\theta_k^{\text{Obligations}}$	$\theta_k^{\text{Immobilier}}$	$\theta_k^{\text{Monétaire}}$

Tableau 32. : Tableau des allocations de l'actif

	obligations	actions	immobilier	monétaire
1	75,95%	14,02%	7,84%	2,18%
2	75,78%	14,13%	7,80%	2,30%
3	75,68%	14,10%	7,81%	2,41%
4	75,54%	14,15%	7,79%	2,51%
5	75,42%	14,20%	7,77%	2,62%
6	75,34%	14,17%	7,78%	2,71%
7	75,12%	14,21%	7,86%	2,81%
8	75,13%	14,24%	7,73%	2,90%
9	74,96%	14,42%	7,64%	2,99%
10	75,07%	14,31%	7,55%	3,07%

On remarque que les poids des actifs obtenus ne s'éloignent pas beaucoup de l'allocation initiale, obligations 75,96%, actions 14,04%, immobilier 7,89%, monétaires 2,11% indiquant par ceci que la compagnie se trouve dans une situation favorable avec une adéquation entre ses engagements et ses placements.

f. Détermination du rendement du portefeuille non vie

Arrivés à la phase finale de notre application à savoir les rendements espérés du portefeuille non vie, l'obtention des rendements du portefeuille passe par la construction du tableau des allocations :

Tableau 33. : Tableau des rendements espérés du portefeuille non vie

	Actions	Obligations	Immobilier	Monétaire	
1	θ^{Action}_1	θ^{Oblig}_1	θ^{immob}_1	$\theta^{\text{Monét}}_1$	Portefeuille
					$\text{Renta}_1^{\text{Port}}$
2	θ^{Action}_2	θ^{Oblig}_2	θ^{immob}_2	$\theta^{\text{Monét}}_2$	$\text{Renta}_2^{\text{Port}}$
...
i	θ^{Action}_i	θ^{Oblig}_i	θ^{immob}_i	$\theta^{\text{Monét}}_i$	$\text{Renta}_i^{\text{Port}}$
...
k	θ^{Action}_k	θ^{Oblig}_k	θ^{immob}_k	$\theta^{\text{Monét}}_k$	$\text{Renta}_k^{\text{Port}}$

Où θ_i modélise la proportion de l'actif X dans le portefeuille d'actifs à la date i.

La rentabilité du portefeuille à la date i est alors donnée par la formule suivant :

$$\begin{aligned}
 \text{Renta}_i^{\text{Port}} &= \theta_i^{\text{Action}} \times \text{Renta}_i^{\text{Action}} + \theta_i^{\text{Oblig}} \times \text{Renta}_i^{\text{Oblig}} + \theta_i^{\text{Monét}} \times \text{Renta}_i^{\text{Monét}} \\
 &+ \theta_i^{\text{immob}} \times \text{Renta}_i^{\text{immob}}
 \end{aligned}$$

Les résultats qui suivent représentent les rendements espérés en adoptant la gestion actif passif obtenue en appliquant les méthodes DFA :

Tableau 34. : Tableau des rendements du portefeuille non vie

	rendements du portefeuille non vie
1	2,78%
2	4,28%
3	4,32%
4	4,36%
5	4,47%
6	4,40%
7	4,45%
8	4,49%
9	4,54%
10	4,58%

On remarque que le rendement du portefeuille de la compagnie réalise une évolution croissante depuis la première année où il passe d'une valeur de 2,78% à 4,28% la dixième année pour atteindre 4,58% à la dernière année de l'horizon

Conclusion

L'application des méthodes DFA pour la gestion actif passif pour la compagnie nous a permis de dégager en premier les futurs résultats espérés en se basant sur les output des deux parties précédentes ensuite en utilisant le logiciel MATLAB on a pu déterminer les proportions à investir d'une façon optimale, enfin nous avons déterminé la composition la plus adéquate pour le portefeuille non vie ainsi que son rendement et cela pour les dix prochaines années à venir.

Conclusion générale

Les compagnies d'assurance jouent un rôle très important dans l'économie nationale dans la mesure où elles attirent l'épargne et l'investissent dans le marché financier.

Aujourd'hui, les assurances sont dans une phase de mutation où les compagnies renforcent leur structure et leur gestion pour mieux affronter la concurrence accrue qu'ils vont avoir avec leurs homologues étrangers et spécialement les américains. Cette concurrence exerce une pression en faveur d'une spécialisation plus poussée en termes de santé financière, et d'un recentrage sur les activités dans lesquelles les sociétés bénéficient d'un avantage concurrentiel.

Dans cet esprit, nous avons élaboré ce travail qui consiste à mettre en place une stratégie financière en se basant sur les méthodes DFA pour la réalisation d'une gestion actif passif.

En effet les méthodes DFA appliquées à la gestion actif passif offrent aux décideurs une analyse détaillée de la santé bilancielle de la compagnie en prenant en compte toutes les interactions entre les différents postes intervenant ce qui représente une riche source d'informations ou il vont puisés pour une meilleure prise de décision.

Bien que nous avons essayé de donner une idée globale sur les méthodes DFA appliquées à la gestion actif passif et la stratégie financière. Il reste néanmoins des perspectives à développer. On pourrait, par exemple, faire une étude plus approfondie des différentes branches non vie en estimant les primes et sinistres ainsi que les provisions techniques d'une manière stochastique, aussi, l'optimisation du portefeuille pourra être améliorée en choisissant un portefeuille optimal d'obligation dont la durée est proche de celle du passif.

Bibliographie

- Sadeck HAMI, MEMOIRE ISFA, *"Les modèles DFA : Présentation ; utilité et application"*.
- PARTRAT C., BESSON J., [2005], *"Assurance non vie Modélisation, Simulation"*, Economica.
- LAFAILLE A., GOACHET O., THEROND P., TRANCHARD A., [2003], *"Dynamic Financial Analysis"*.
- KAUFMANN R., GADMER A., KLETT R., [2001], *"Introduction to Dynamic Financial Analysis"*.
- AUGROS J.C., [1989] *"Les options sur taux d'intérêt : dynamique des taux et évaluation"*. Economica.
- VASICEK O., [1977], *"An equilibrium characterisation of the term structure"*. Journal of financial economics.
- COX J.C., INGERSOLL J.E., ROSS S.A., [1985], *"A theory of the term structure of interest rate"*. Econometrica.
- Abderrazak AIT EL TRACH et Otman AMAZZAL, MEMOIRE INSEA [2006], *" Estimation de la Structure par Terme des Taux d'Intérêt au Maroc"*.
- Abdessamad CHARIFI et Siam BARKI, MEMOIRE INSEA [2005], *" gestion Actif-Passif : analyse d'adéquation et proposition de stratégies d'allocation"*.