



المندوبية السامية للتخطيط
HAUT-COMMISSARIAT AU PLAN

ROYAUME DU MAROC

*_*_*_*_*_*_*_*_*_*

HAUT COMMISSARIAT AU PLAN

*_*_*_*_*_*_*_*_*_*

INSTITUT NATIONAL

DE STATISTIQUE ET D'ECONOMIE APPLIQUEE

INSEA



Projet de Fin d'Etudes

Réalisation d'un modèle interne dans le cadre de solvabilité 2 et SBR appliqué au RCAR.

Préparé par : M. AMMOURI YOUSSEF

Sous la direction de : **Mme BADAoui Fadoua (INSEA)**

M. LABYED Mostapha (CDG)

Soutenu publiquement comme exigence partielle en vue de l'obtention du

Diplôme d'Ingénieur d'Etat

Filière : ACTUARIAT FINANCE

Devant le jury composé de :

- **M. BELKORA Samir (INSEA)**
- **Mme BADAoui Fadoua (INSEA)**
- **M. LABYED Mostapha (CDG)**

Résumé :

Evaluer le risque qu'encours les compagnies d'assurance-vie ou les caisses de retraite est devenue un grand enjeu au cours de ces dernières années. En effet les compagnies fournissent une sécurité financière à la quasi-totalité des marocains et il est donc vital que ce système soit fiable et le risque bien évalué.

Sur les traces des normes bancaires « Bâle II » et d'autres modèles de solvabilité, comme le modèle européen « Solvabilité II », l'ACAPS lance son projet de circulaire relatif au nouveau référentiel prudentiel. La « Solvabilité Basée sur les Risques » ou également appelé SBR.

Ce nouveau régime prudentiel qui s'imposera prochainement aux entreprises d'assurances et de réassurance marocaines propose une nouvelle stratégie de gestion des compagnies basée sur une gestion des risques et une valorisation de l'actif de l'entreprise qui favorise la valeur du marché, intégrant ainsi et à la fois des aspects quantitatifs et qualitatifs. L'objectif est alors de mieux adapter les fonds propres exigés d'une compagnie d'assurances avec les risques qu'elle encourt tout en respectant les spécificités du marché marocain.

Le référentiel prudentiel de la SBR, repose sur trois piliers, en l'occurrence des exigences quantitatives de solvabilité (Pilier I), de gouvernance (Pilier II) et d'information (Pilier III). Cependant, comme le pilier III n'a toujours pas été établi, ce mémoire se focalisera sur les deux premiers piliers, tout en donnant plus d'intérêt au deuxième pilier à travers une proposition d'un modèle interne de gouvernance, tout en respectant les recommandations issues de l'ACAPS

Le projet réalisé dans ce mémoire, a été élaboré, sous le logiciel Rstudio et Excel; en plusieurs étapes, nous avons procédé dans une première partie à la modélisation des différentes lois d'entrée et de sortie de notre régime à travers une étude de l'historique .

Nous avons ensuite proposé des modèles destinés à représenter l'évolution de l'actif d'une part : à savoir les taux d'intérêt, les obligations et les actions et d'une autre celle de notre passif avec ses stocks de cotisants et de retraités.

Dans la dernière partie nous avons essayé de tester ces modèles et leurs limites au sein de notre régime.

Mots Clés : RCAR , Solvabilité II , SBR , Modèle interne

Dédicace

Je ne peux commencer ce mémoire sans le dédier à :

Mes parents qui ont été toujours présent à mes côtés tout au long de mon parcours scolaire et universitaire, et qui sont leurs prières et leurs soutiens je n'aurai jamais pu réussir.

Mes sœurs qui m'ont soutenu jusqu'au bout

A tous mes amis avec qui j'ai pu passer des moments inoubliables.

Et a mes neveux, qui liront peut être ce travail d'ici quelques années.

Remerciements :

Je commencerai ce travail en remerciant toutes personnes qui m'a aidé et soutenu pendant cette période. Je les invite à trouver ici, l'expression de ma gratitude.

Je remercie également Madame BADAoui Fadoua pour ses conseils, son effort déployé, sa disponibilité, son aide prestigieuse et ses conseils, surtout lors des derniers jours du stage.

J'adresserais également ma sincère gratitude à Monsieur Mostapha LABYED, actuaire vie au sein de la RCAR, qui a dirigé mon travail, ses conseils, son temps et ses commentaires m'ont permis de surmonter les difficultés et de progresser dans mon travail. Je remercie également l'équipe Actuariat du pôle prévoyance, et tout particulièrement les stagiaires pour les moments et le savoir partagés ainsi que leur motivation contagieuse.

En dernier lieu, et non pas le moindre, je tiens à exprimer mes remerciements à Monsieur Samir BELKORA en tant que membre du jury pour son temps consacré à la lecture de notre rapport.

Pour clôturer, je tiens également à exprimer mes remerciements à l'ensemble du corps professoral et administratif de l'Institut National de Statistique et d'Économie Appliquée pour leur contribution à ma formation.

Table des matières

RESUME :	3
LISTES DES FIGURES :	8
LISTE DES TABLEAUX	10
ABREVIATIONS.....	11
PARTIE I : PRESENTATION DU RCAR ET DU PROJET SBR.....	13
Chapitre I: Présentation du Pôle Prévoyance de la CDG	14
I. Missions du Pôle Prévoyance	14
II. Présentation du Régime Collectif d'Allocation de Retraites (RCAR) :	15
II.1 Missions du RCAR	15
II.2 Personnes concernées :	15
II.3 Champ d'application.....	15
III. Régime général du RCAR	16
III.1 Organisation :	16
III.2 Fonctionnement du RCAR :	16
III.3 Prestations servies par le régime :	17
Chapitre II : Présentation du Projet « Solvabilité Basée sur les Risques » au Maroc.....	20
I. Naissance de la solvabilité II :	20
I.1 Historique : Solvabilité 1 :	20
I.2 Principes et piliers de la Solvabilité II	21
II. Le contexte de la « solvabilité Basée sur le risque ».....	23
II.1 La réglementation prudentielle actuelle au Maroc	24
II.2 Zoom sur le premier pilier	25
1) Valorisation des provisions techniques prudentielles :	28
2) Capital de Solvabilité Requis SCR	29
PARTIE II : PRESENTATION ET MODELISATION D'UN MODELE INTERNE	32
Chapitre 1 : Modélisation de l'Actif :	34
I. Modélisation des Taux d'intérêt :	34
I.1 Les Séries temporelles :	34
I.2 Modèle de Vasicek (1977).....	36
I.3 Le modèle de cox ingersoll ross (CIR)(1985) :	38
I.4 Interpolation de la courbe BAM	39
II. Modélisation des actions.....	41
II.1 Modèle de Black and Scholes	42
II.2 Modèle de Merton :	43
II.3 Test de Vraisemblance.....	46

Chapitre 2 : La modélisation actuarielle du passif régime général.....	47
I. Introduction :	47
II. Détermination de l'état de l'assuré	48
III. Le stock des cotisants :	48
III.1 Les cotisants déjà présents dans le système :	48
III.2 Les nouveaux cotisants	49
III.3 Les sorties de l'état cotisant :	50
IV. Le stock des retraités :	51
V. Stock des conjoints :	51
 PARTIE III : APPLICATION	52
 Chapitre 1 : présentation du portefeuille RCAR :	53
I. Présentation du portefeuille actif :	53
II. Présentation du portefeuille Passif.....	56
II.1 Les cotisants :	56
II.2 Prestations :	60
 Chapitre 2 : Projection du portefeuille du régime	65
I. Actif :	65
I.1 MODELISATION DE LA COURBE DES TAUX :	65
1) Présentation des données :	65
I.2 Actions :	72
II. PASSIF :	81
III. Résumé de la projection :	83
 CONCLUSION GENERALE :	84
 BIBLIOGRAPHIE.....	85
 ANNEXE I : TABLE DE MORTALITE TV88-90 ET PF60-64.....	86
 ANNEXE II : ESTIMATEURS DE MAXIMUM DE VRAISEMBLANCE DANS LE MODELE DE BLACK AD SHOLES :	87
 ANNEXE III: DYNAMIQUE DE L'ACTIF RISQUE DANS LE CAS DE PROCESSUS A SAUTS	88
 ANNEXE IV : CALCUL DU RENDEMENT SELON LE MODELE DE MERTON	89
 ANNEXE V : LOI DU RENDEMENT DU MODELE A SAUTS.....	90
 ANNEXE VI :CALCUL DU MOMENT DU PROCESSUS DE MERTON.....	91
 ANNEXE VII : TAUX ACTUARIELLE ET ZERO COUPON DE BAM	93
 ANNEXE IIX : TAUX ANNUEL ESTIME PAR LA METHODE DE VASIÇEK	94
 ANNEXE IX : MODELISATION DES AUTRES INDICES	95

Listes des figures :

Figure 1 Missions du Pôle prévoyance de la CDG ³	14
Figure 2: Les trois piliers de la solvabilité II.....	21
Figure 3: Différence de bilan entre solvabilité 1 et solvabilité 2.....	22
Figure 4 : timeline du projet SBR	24
Figure 5: piliers du projet SBR	25
Figure 6: Différence entre Bilan comptable et Bilan Economique	26
Figure 7: Cartographie des risques.....	27
Figure 8: impacte des risques au sein du bilan.....	28
Figure 9: Valorisation des Provisions techniques	28
Figure 10: Effet de retour à la moyenne.....	36
Figure 11: illustration de la méthode Bootstrap	40
Figure 12 : évolution du cours MASI.....	41
Figure 13: les différents états de l'assuré.....	48
Figure 14: Représentation des sorties possible du régime.....	50
Figure 15 : Montant de l'actif du portefeuille en 2017	53
Figure 16: réparation du portefeuille Actif.....	54
Figure 17: Répartition du stock obligation.....	55
Figure 18: Répartition des indices boursiers au sein de notre portefeuille actif.....	56
Figure 19: Répartition des âges des actifs pour 2019.....	57
Figure 20: Descriptif des salaires pour l'année 2019.....	57
Figure 21: Répartition des salaires selon l'âge	58
Figure 22 :revalorisation du plafond de salaire mensuel.....	58
Figure 23: descriptif de l'ancienneté moyenne	59
Figure 24: Ancienneté moyenne par âge pour l'année 2019.....	59
Figure 25: Evolution des cotisations au cours des dernières années	60
Figure 26: Pensions payés pour l'année 2017.....	60
Figure 27: Evolution de l'effectif des pensionnaires	61
Figure 28: concentration de l'effectif des retraités	62
Figure 29: Répartitions des pensions annuelles	62
Figure 30: répartition du poids des dépenses des retraités	63
Figure 31: Répartition de l'effectif des conjoints	64
Figure 32: Pensions moyennes des conjoints	64
Figure 33 test de Dickey-Fuller augmenté	66
Figure 34: test d'autocorrélation	67

Projet de fin d'étude

Figure 35: Résultat de Régression sur R	67
Figure 36: Test d'homoscédasticité	68
Figure 37: test de durbin-watson.....	68
Figure 38: scénarii à travers Monte Carlo.....	69
Figure 39: Taux moyen des scénarii sous Monte Carlo	70
Figure 40: Courbe de zéro coupon	71
Figure 41: histogramme de la variation des cours MASI.....	73
Figure 42: test de Jarque Bera sur R	73
Figure 43: Comparaison modèle réel et modèle estimé	75
Figure 44: Prévision du cours MASI.....	75
Figure 45: Cours semestriels de clôture de l'indice ASSURANCE	76
Figure 46: histogramme de l'indice ASSURANCE	77
Figure 47 Rendement logarithmique de l'indice Assurance	78
Figure 48: Représentation du modèle de Merton	80
Figure 49: Prévision par le modèle de Merton	80
Figure 50: évolution des cotisations au fil des années	81
Figure 51: Evolution de l'effectif des retraités	81
Figure 52: évolution des pensions moyennes.....	82
Figure 53: évolution du ratio démographique	83
Figure 54: coupons des obligations.....	71

Liste des Tableaux

Tableau 1: exemple de matrice de corrélation des risques.....	30
Tableau 2: matrice de corrélation des sous modules de souscription vie.....	30
Tableau 3: Revalorisation des salaires des cotisants.....	49
Tableau 4: Loi d'entrée des nouveaux cotisants.....	49
Tableau 5 ; résultat de la régression linéaire.....	68
Tableau 6: Paramètre du modèle de Black and Scholes.....	74
Tableau 7: Comparaison des estimations des deux méthodes.....	78
Tableau 8: Taux annuel estimé.....	94

Abréviations

ACAPS : Autorité de Contrôle des Assurances et de la Prévoyance Sociale

BAM : Bank Al-Maghrib

BE: Best estimate

CSR: Capital de solvabilité requis

CDG : Caisse de dépôt et de gestion

CMR : Caisse Marocaine de retraite

CNRA: Caisse Nationale de Retraites et d'Assurances

SBR : Solvabilité Basé sur le Risque

MASI : *Moroccan All Shares Index*

OPCVM : Organisme de Placement Collectif en Valeurs Mobilières

INTRODUCTION GENERAL :

Aujourd'hui, le secteur des assurances connaît un véritable changement en termes de réglementation. En effet, l'intensification de la concurrence et l'évolution du marché assurantiel au Maroc accentuent les tensions qui s'exercent d'une part sur les entreprises d'assurance et d'une autre sur les assurés justifiant ainsi le besoin en termes de renforcement du cadre prudentiel.

En effet, les règles de solvabilité applicables aujourd'hui au secteur assurantiel marocain ont été définies suite aux des directives du cadre comptable des assurances sous réserve des adaptations introduites par la réglementation des assurances et le Plan Comptable des assurances. Ces dernières ne sont plus adaptées à la réalité économique actuelle.

Le projet en cours « Solvabilité Basée sur les Risques » lancé par l'Autorité de Contrôle des Assurances et de la Prévoyance Sociale « ACAPS » vise à une refonte des règles existantes. Il s'agit d'un projet de nouvelle réglementation prudentielle des assurances en consultation qui s'inspire de Solvabilité 2, mais simplifie significativement ses modalités tout en les adaptant au contexte Marocain.

Cette réforme prend dans sa forme et son contenu presque l'ensemble des recommandations issues de la solvabilité 1. En effet le SBR est structuré aussi sous forme des trois piliers, impose le calcul du capital de solvabilité requis (SCR), et énonce les différents types de risque que l'assurance doit prendre en considération dans son calcul du SCR. Néanmoins la matrice de corrélation des risques par exemple, ou la liberté d'établir un modèle interne propre à chaque assurance sont deux des multiples différences entre la réglementation internationale « Solvabilité 2 » et la réglementation nationale « Solvabilité Basée sur le Risque ».

A cet effet, l'objet de ce mémoire réalisé sous la supervision du RCAR a été de proposer un modèle interne simple, qui modélise à la fois l'actif et le passif tout en répondant aux exigences du marché marocain. Notre travail est organisé comme suit :

La première partie est réservée à la présentation de du RCAR, de ses missions, de son organisation, de ses régimes et de ses différentes prestations. La deuxième partie est consacrée à la description de la réglementation internationale « solvabilité 2 » ainsi que de la nouvelle réforme réglementaire SBR. Dans la troisième partie, nous présentons les différents modèles adoptés que ce soit pour l'actif, à travers la modélisation du taux d'intérêt et des actions, ou du passif à travers une modélisation des lois d'entrées et de sorties. La dernière partie de sa part a été l'application de ces méthodes au sein du marché marocain.

Partie I : Présentation du RCAR
et du projet SBR

Chapitre I: Présentation du Pôle Prévoyance de la CDG

La Caisse de Dépôt et de Gestion (CDG) est un organisme qui a été créé en 1959 en vue de sécuriser et gérer rigoureusement l'épargne du royaume du Maroc. A ce titre, parlant plus précisément du domaine de la retraite ; le Pôle Prévoyance de la CDG vise à améliorer le niveau de vie des citoyens en menant une bonne gestion des fonds de prévoyance aussi bien que les retraites.

Le Pôle Prévoyance a comme but ultime atteindre l'excellence opérationnelle et le maintien de sa position en tant que leader au sein du secteur des régimes de retraites et des fonds de prévoyance au niveau national.

I. Missions du Pôle Prévoyance

Les principales missions du Pôle Prévoyance de la CDG concernent quatre domaines stratégiques :

- ❖ Retraite de base ;
- ❖ Retraite complémentaire ;
- ❖ Rentes Accidents du Travail / Accidents de la Circulation ;
- ❖ Gestion pour compte de l'Etat (Fonds à caractère social) Gestion pour compte de tiers.

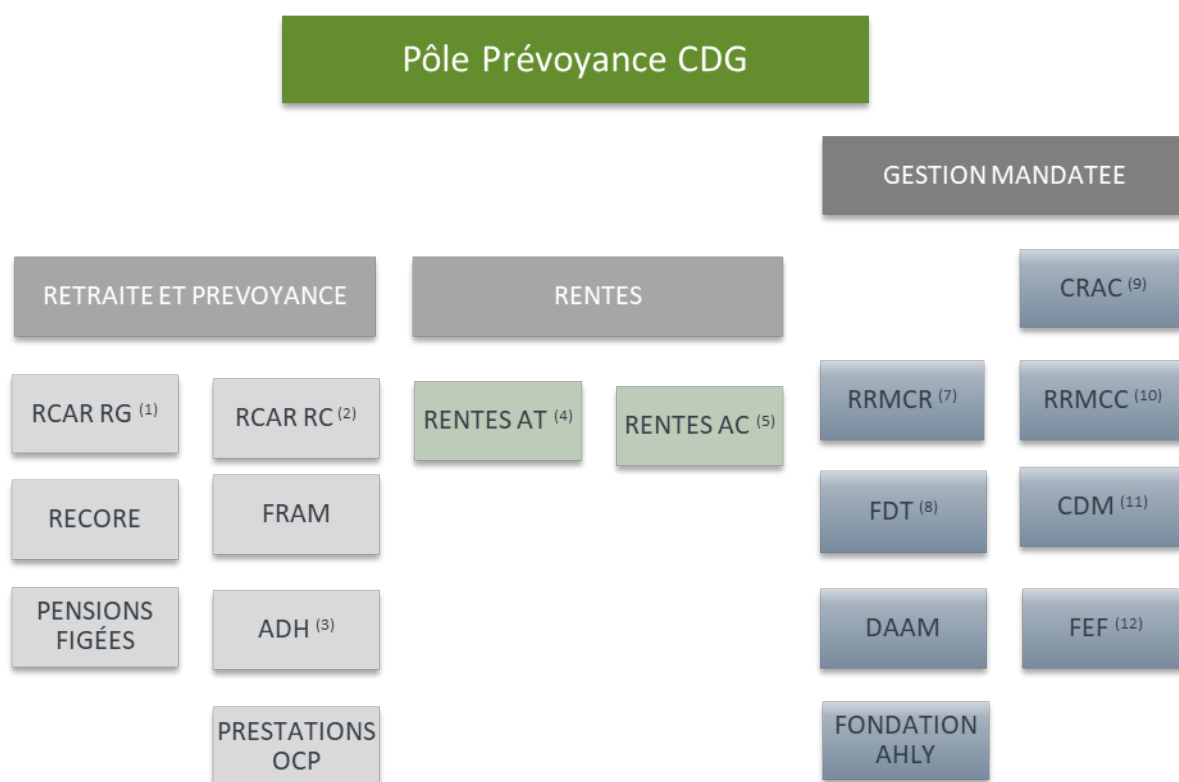


Figure 1 Missions du Pôle prévoyance de la CDG¹

Avec comme abréviation :

¹ source : réaliser en interne par des stagiaires en RCAR

- (1) RG : Régime Général
- (2) RC : Régime Complémentaire
- (3) ADH : Addamane Al Hirafi
- (4) AT : Accidents du travail
- (5) AC : Accidents de la circulation
- (7) RRMCR : Régime de Retraite des Membres de la chambre des Représentants
- (8) FDT : Fonds du Travail
- (9) CRAC Caisse de Retraite de l'Ordre des Avocats de Casablanca
- (10) RMCC : Régime de Retraite des Membres de la Chambre des Conseillers
- (11) CDM : Charbonnages du Maroc
- (12) FEF Fond d'Entraide Familial

Ainsi leurs priorités stratégiques s'articulent autour :

- ✓ Maintenir la position de référence en termes de développement de la prévoyance au Maroc ;
- ✓ Assurer une meilleure gestion multi-fonds et multi-régime de type world class ;
- ✓ Répondre aux besoins des parties prenantes du Pôle Prévoyance ;
- ✓ Garantir la bonne gestion actuarielle et financière des régimes et fonds ;
- ✓ Assurer l'efficacité, l'efficacités et la performance des moyens de gestion utilisés.

Dans ce qui suit, nous nous concentrons essentiellement sur le Régime Collectif d'Allocation de Retraites (RCAR) :

II. Présentation du Régime Collectif d'Allocation de Retraites (RCAR) :

Le Régime Collectif d'Allocation de Retraite (RCAR) est un organisme de prévoyance sociale, doté de la personnalité morale et de l'autonomie financière, créé par le Dahir du 4 octobre 1977 et confié, pour gestion à la caisse de Dépôt et de Gestion (CDG).

Le régime intervient afin de garantir les droits personnels au profit de l'affilié ou les retraités, celles qui ont une invalidité ou décédées. Elle est dotée d'un régime général et d'un régime complémentaire

II.1 Missions du RCAR

- ✓ La pension de retraite, d'invalidité ou de décès
- ✓ Le pécule
- ✓ Les allocations familiales
- ✓ Le transfert de droits

II.2 Personnes concernées :

- ✓ Le personnel non titulaire de l'Etat et des collectivités locales (temporaires, journaliers, occasionnels).
- ✓ Le personnel contractuel de droit commun
- ✓ Le personnel des organismes soumis au contrôle financier de l'Etat.

II.3 Champ d'application

Le RCAR fonctionne selon deux régimes :

- ✓ Un régime général : régime obligatoire pour tous les salariés relevant du champ d'application de la RCAR. Il s'applique au personnel contractuel de droit commun, temporaire, journalier et occasionnel de l'état et des collectivités locales et au personnel soumis au contrôle financier prévu par le dahir n°1-59-271 du 17 Chaoual 1379 (14 avril 1960) ;
- ✓ Un régime complémentaire : régime conventionnel qui concerne les affiliés ayant un salaire dépassant le plafond fixé annuellement par le RCAR.

III. Régime général du RCAR

III.1 *Organisation :*

Le régime général du RCAR est un système à prestations définies (Define Benefits DB) qui adopte un mode de financement mixte alliant la capitalisation (2/3) à la répartition (1/3).

Les contributions patronales variables sont gérés par répartition tandis que les autres cotisations et contributions fixes, elles sont gérées par capitalisation.

- ✓ La capitalisation est représentée par le **Fonds de vieillesse** qui finance la rente de capitalisation et qui est égal à la somme de l'ensemble des livrets individuels des affiliés.
- ✓ La répartition est représentée par :
 - **Le Fonds Invalidité Décès** qui couvre le capital constitutif des pensions d'invalidité et de décès relatif à la période allant de la date d'effet du sinistre jusqu'à l'âge de 60 ans.
 - **Le Fonds des Allocations Familiales**, destiné à couvrir le montant des allocations familiales.
 - **Le Fonds de Péréquation**, principal fonds de répartition, finance notamment le capital constitutif de la rente différentielle en complément des capitaux relatifs à la rente de capitalisation.

Pour le financement du régime complémentaire, il est géré suivant une politique mixte à savoir : 50% en capitalisation et 50% en répartition ; en ce sens les cotisations salariales sont gérées en capitalisation tandis que les contributions patronales sont gérées par répartition.

Les ressources sont affectées aux fonds de capitalisation (constitué par la somme des livrets individuels des affiliés), et aux réserves (alimentés par les contributions patronales, résultat bénéficiaire de l'exercice).

III.2 *Fonctionnement du RCAR :*

Le régime général s'applique obligatoirement au personnel contractuel de droit commun, temporaire, journalier et occasionnel de l'Etat et des collectivités locales ainsi qu'au personnel des organismes soumis au contrôle financier de l'Etat pour le régime complémentaire, il est adressé spécialement aux cotisants inclus au sein du régime général du RCAR mais dont le salaire dépasse le plafond du régime.

Ce mémoire se consacre au régime général du RCAR

III.3 Prestations servies par le régime :

Le RCAR garanti dans son régime général six droits à savoir :

1) La pension de retraite :

La pension de retraite normale est liquidée à l'âge de 60 ans. Elle peut être ajournée jusqu'à 65ans moyennant une bonification annuelle. Elle peut être anticipée à l'âge de 55 ans ou après 21 ans de services et sans condition d'âge.

Le montant de la pension de retraite dépend:

- ✓ Du nombre d'année de services valables et reconnues par le régime
- ✓ De l'assiette de liquidation de la pension
- ✓ Des taux d'annuités fixés par le régime.

a) Les années de services :

Les années de services valables sont constituées des durées suivantes :

- ✓ Les années d'affiliation cotisées (si l'affiliation effectués après l'entrée en vigueur du régime en janvier 1978).
- ✓ Les années validées auprès du régime (services effectués avant janvier 1978, validés auprès de régime).
- ✓ Les services transférés au rachetés (services transférés vers le RCAR ou rachetés par l'affilié si les sommes transférées ne couvrent pas la totalité des services transférés).

b) L'assiette de liquidation

L'assiette de liquidation est égale à la moyenne des salaires soumis à cotisations revalorisée. Le salaire moyen revalorisé de carrière d'un individu est égal à :

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\text{Assiette des cotisations RCAR}) * \frac{S_n}{S_i}$$

Avec :

S_n : Le salaire annuel moyen du régime de la date d'exigibilité des droits

S_i : Le salaire annuel moyen du régime de chaque année de service effectif

n : La durée d'affiliation au RCAR.

c) Le taux d'annuité

Le taux d'annuité accordé par le RCAR est arrêté à 2% par année. Ainsi, le montant de la pension de retraite est fixé à :

Pension de retraite = total des services valables * 2% * S.M.R.

Avec :

S.M.R : Salaire Moyen revalorisé de carrière

Revalorisée annuellement sur la base de la variation du salaire moyen du régime, cette pension est payable mensuellement à terme échu. En cas de décès du retraité, la pension est répartie entre le conjoint et les orphelins à raison de 50% pour chaque catégorie.

2) *Pension d'invalidité* :

Elle est servie à tout affilié atteint, au cours de son activité, d'une incapacité totale et définitive d'exercer ses fonctions. Une fois survenue, la pension d'invalidité est liquidée sans condition d'âge et de délai. Le montant de la pension d'invalidité est calculé de la même façon que la pension de retraite, la seule différence résulte dans l'ancienneté ou les années de services qui correspondent au maximum entre l'ancienneté effective et 30 ans .

3) *Pension de survivants* :

La pension de survivants par définition distingue deux cas :

✓ **Décès de l'affilié durant son activité** :

Ce type de prestation est calculé de la même manière que la pension d'invalidité. Le montant obtenu est réparti entre les ayants cause du défunt pouvant y prétendre.

✓ **Décès du titulaire de la pension de retraite ou d'invalidité** :

En cas de décès du titulaire d'une pension, le montant de la pension est reversé au profit de ses ayants droits à hauteur de 50 %

Remarque : Conditions et modalités de réversion au profit des ayants cause

En cas de décès d'un affilié, la pension dont il bénéficiait ou à laquelle il aurait pu prétendre est partagée entre le conjoint et les orphelins à raison de 50% pour chaque catégorie.

a) **Pour les conjoints** :

Pour prétendre à 50% de la pension du défunt, le conjoint doit justifier les conditions ci-dessous :

- ✓ Marié pendant 2 ans minimum avant la liquidation de la pension ou avoir un enfant durant l'affiliation
- ✓ Ne doit être ni répudié, ni remarié ni déchu de ses droits.

En cas de pluralité des conjoints, cette part est partagée entre eux par parts égales. La pension du conjoint est une pension viagère. En cas de décès du conjoint, sa pension est réversible au profit de ses enfants pouvant y prétendre.

b) **Les orphelins**

Les orphelins, justifiant les conditions ci-après, partagent par parts égales 50% de la pension de défunt :

- ✓ Être âgé de moins de 16 ans
- ✓ Être scolarisé si l'âge de l'orphelin est compris entre 16 et 21 ans
- ✓ Être enfant légitime
- ✓ Ne pas être marié

En cas de décès ou de limite d'âge d'un orphelin sa part est réversible au profit de ses frères et sœurs pouvant y prétendre. Pour les orphelins invalides, leurs pensions deviennent viagères sans limite d'âge contrairement aux orphelins normaux dont la pension est juste temporaire .

4) *Le pécule :*

Versé sous forme de capital (appelé également le livret individuel) au lieu de pension à tout affilié qui a atteint l'âge de la retraite sans en outre avoir dépasser une ancienneté totale de trois ans au sein du régime . Le montant du pécule représente l'ensemble des sommes inscrites dans son livret individuel à savoir :

- ✓ Les cotisations salariales (6%) ;
- ✓ Les contributions patronales fixes (6%) ;
- ✓ Le produit de la capitalisation au taux de 4.75%

5) *Le transfert des droits :*

Si l'affilé quitte le RCAR vers d'autres régimes, ses droits constitués auprès de son ancien régime lui sont transférés. Les transferts classiques de droits déjà réalisés ont été effectués vers la Caisse Marocaine des Retraites (CMR) au profit des affiliés titularisés auprès de l'Etat et qui ne relèvent plus du champ d'application du RCAR

6) *Les allocations familiales :*

Conformément à la réglementation en vigueur, les allocations familiales sont servies au titre des enfants des affiliés titulaire de pension de retraite ou d'invalidités, et aux orphelins bénéficiant aussi de pension de retraite ou d'invalidité .Les montants des allocations sont répartis comme suit :

- ✓ 200dh par mois au titre des trois premiers enfants
- ✓ 36dh par mois au titre des autres enfants.

Sans pour autant dépasser le nombre maximum d'enfants ou d'orphelin fixé à six.

Chapitre II : Présentation du Projet « Solvabilité Basée sur les Risques » au Maroc

Depuis la mise en place de la nouvelle réglementation solvabilité 2², le Maroc tente à son tour d'instaurer sa propre réglementation. Vu la fragilité de son système financier, le Maroc connaît toujours un retard en termes de cette réglementation dont la plupart des paramètres n'ont pas été établis.

L'élaboration du projet de circulaire relatif au nouveau référentiel prudentiel par l'Autorité de Contrôle des Assurances et de la Prévoyance Sociale (ACAPS), a forcé les compagnies d'assurances à implémenter les nouvelles exigences réglementaires axées sur le risque auxquelles elles devront se plier. Ainsi, la Fédération Marocaine des Sociétés d'Assurance et de Réassurance (FMSAR) accompagné des assurances et des caisses de prévoyances, tentent de mettre en place les bases et les démarches nécessaires à la mise en place du SBR suivant les normes de la solvabilité II.

I. Naissance de la solvabilité II :

Dans le but d'une harmonisation du régime prudentiel nécessaire, des directives européennes ont été adoptées dès la fin des années 1970. Ainsi au début des années 2000, une quinzaine de directives ont vu le jour sous le cadre « Solvabilité I »

I. 1 Historique : Solvabilité 1 :

1) Définition :

La solvabilité 1 est un ensemble de recommandations mis à disposition des assureurs afin de détenir des fonds propres équivalents à l'exigence de la marge de solvabilité ou au fonds minimum de garantie.

2) Principes de la Solvabilité I

Les trois plus grands principes de la solvabilités I sont constitués de :

- ✓ **L'évaluation des engagements envers les assurés** : les provisions techniques calculées par l'assureur doivent couvrir intégralement leurs engagements vis-à-vis des assurés.
- ✓ **La couverture des engagements réglementés** : Les assureurs doivent posséder des actifs sûrs, liquides et rentables (obligation, bons de trésor ..) , permettant de financer les engagements
- ✓ **La marge de solvabilité** : C'est un capital supplémentaire pour faire face aux engagements en cas d'insuffisance éventuelle des réserves techniques.

3) Inconvénients de la solvabilité 1 :

La réglementation de solvabilité 1 a été remplacée rapidement par une nouvelle réglementation : « solvabilité 2 », qui est venu répondre aux insuffisances du premier à savoir :

- ✓ La marge de solvabilité qui n'introduit que le risque de tarification.

I.1.1 ² Source : (Directive 2009/138/CE du Parlement européen et du Conseil du 25 novembre 2009)

- ✓ Pas de prise en compte des risques complexes et de leurs spécificités.
- ✓ Risques associés aux placements mal appréhendés.
- ✓ Une harmonisation insuffisante vu le calcul de provisions que diffère d'un pays à l'autre.
- ✓ La non prise en compte des corrélations entre l'Actif et le Passif.
- ✓ Absence de cohérence avec les normes comptables internationales telles que les normes IFRS.
- ✓ La non prise en compte des spécificités des organismes dans le calcul de la marge réglementaire.
- ✓ Absence de normes en matière de gouvernance.

1.2 Principes et piliers de la Solvabilité II

En répondant à ces insuffisances, la philosophie générale de Solvabilité II repose sur les principes suivants :

- ✓ Renforcer la solvabilité des compagnies d'assurance
- ✓ Renforcement de la gouvernance et de la gestion des risques ;
- ✓ Garantir une meilleure gestion des risques par une approche fondée sur les principes plutôt que sur les règles
- ✓ Opter pour une cohérence avec les normes internationales : IFRS
- ✓ Harmonisation européenne des normes et pratiques de contrôle ;
- ✓ Faciliter la mission des autorités de contrôle
- ✓ Meilleure adaptation des exigences de capital et des pratiques de contrôle au profil de risque

Ainsi, afin d'assurer une meilleure stabilité financière, la « Solvabilité II » s'est vu structurée en trois grands piliers :

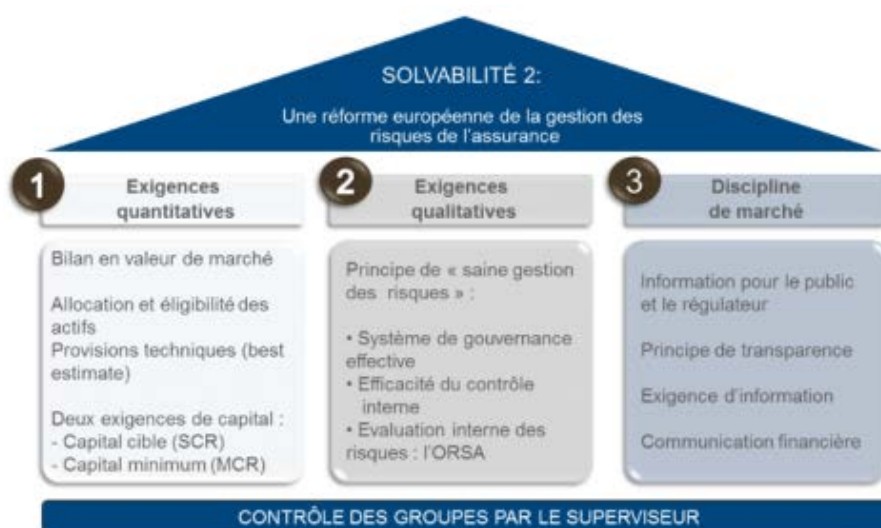


Figure 2 : Les trois piliers de la solvabilité II³

³ Source : www.insurancespeaker-wavestone.com

1) *Le Pilier 1 (Exigences quantitatives)*

Le premier pilier tente de revoir la manière avec laquelle les fonds propres minimums exigés d'une compagnie d'assurance sont déterminés. Ces exigences sont calculées selon trois étapes :

- ✓ Calcul du Bilan prudentiel.
- ✓ Calcul du Capital de Solvabilité Requis (SCR).
- ✓ Calcul du niveau de Fonds Propres Prudentiels (FPP).

Ces exigences sont fondées sur une approche économique du bilan. En effet, pour être en adéquation avec la réalité économique, les actifs et passifs doivent être évalués à la valeur de marché (« fair value » ou « juste valeur »).

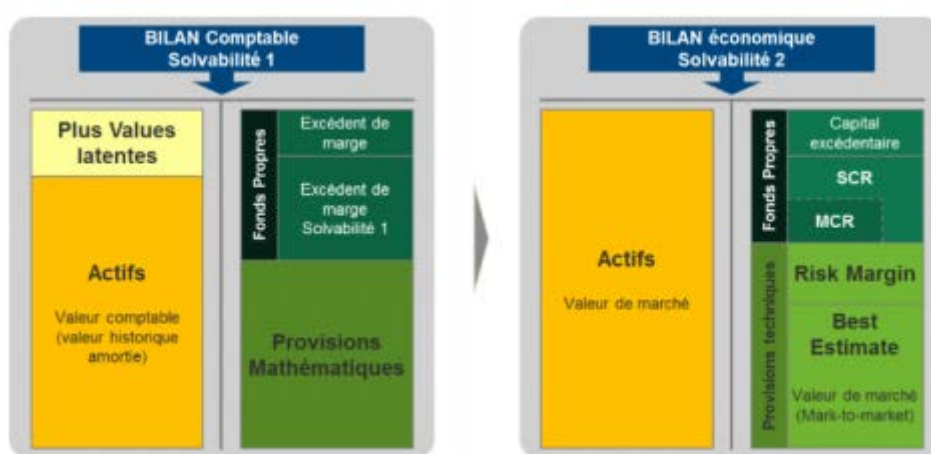


Figure 3 : Différence de bilan entre solvabilité 1 et solvabilité 2⁴

Ainsi, nous pouvons distinguer deux grands indicateurs clés au sein du 1^{er} pilier à savoir :

✓ **Le MCR (Minimum Capital Requirement) :**

Le capital minimum requis représente le niveau de fonds propres minimal en dessous duquel l'assurance risque sérieusement de ne pas honorer ses engagements et de garantir les intérêts des assurés. Ainsi, si les capitaux propres d'une entreprise deviennent inférieurs au MCR, le régulateur interviendra automatiquement pour mettre en place un plan de redressement.

✓ **Le SCR (Solvency Capital Requirement) :**

Le capital de solvabilité requis représente le niveau de capital qu'il faut posséder au minimum afin de limiter la probabilité de ruine de l'assureur fixé à moins de 0,5 % par an. Ce capital représente l'état de l'assurance et leurs capacités à honorer leurs engagements.

⁴ Source : www.insurancespeaker-wavestone.com

2) *Pilier 2 (Exigences qualitatives) :*

Le deuxième pilier de la réforme implique la mise en place d'un dispositif interne de maîtrise de tous les risques (financiers, techniques, opérationnels) auxquels peut être confronté un assureur. L'objectif de ces normes est alors de renforcer la gouvernance et la gestion des risques internes afin de garantir une gestion prudente et efficace de l'organisme.

Ainsi, ces exigences visent à :

- ✓ Vérifier l'adéquation entre le profil de risques propre à l'entreprise et les hypothèses retenues pour le calcul du capital réglementaire.
- ✓ Veiller au respect des exigences en capital.
- ✓ Évaluer un besoin « global » en solvabilité.

3) *Le Pilier 3 (La communication financière)*

Le pilier 3 introduit le principe de discipline de marché en énonçant l'ensemble des informations détaillées auquel le grand public aura accès d'une part, et un reporting détaillé auquel l'autorité de contrôle aura accès d'autre part.

L'objectif est d'améliorer la transparence financière des assurances en leur imposant de communiquer des informations nécessaires permettant d'évaluer l'adéquation de leurs fonds propres

Sans oublier que tous les acteurs doivent renseigner à travers un même type de modèles afin de garantir une meilleure transparence du marché et permettre une comparabilité très simplifiée entre un même type d'acteur. Ces informations doivent être fournies périodiquement par le biais de deux types de document, à transmettre par l'assureur : des rapports narratifs et des reportings quantitatifs.

Ainsi, suivant la même démarche que la directive européenne Solvabilité II, le référentiel prudentiel de la SBR,, repose à son tour sur les même trois piliers, en l'occurrence des exigences quantitatives de solvabilité (Pilier I), de gouvernance (Pilier II) et d'information (Pilier III).Le pilier III n'étant toujours pas mis en point , nous tenterons alors par le biais du prochain paragraphe d'expliquer le projet de la « Solvabilité Basée sur les Risques », sa philosophie , ses points communs et ses différences avec « la solvabilité 2 ».

II. Le contexte de la « solvabilité Basée sur le risque »

Vu les insuffisances du cadre prudentiel actuel au Maroc, et afin de combler les failles du système, une mise à niveau du cadre est nécessaire. Mais avant d'entamer la présentation du nouveau projet SBR et ses caractéristiques, il serait préférable de rappeler les règles sur lesquelles se base le régime actuel et ses points faibles avant de le présenter

II.1 La réglementation prudentielle actuelle au Maroc

En vue d'honorer les engagements pris à l'égard des assurés et des bénéficiaires de contrats, les sociétés d'assurance marocaine suivaient la réglementation prudentielle qui était fondée sur quatre principes :

- ✓ Avoir des actifs de bonne qualité en représentation des engagements ;
- ✓ Évaluer prudemment les provisions techniques et les placements ;
- ✓ Calculer une marge de solvabilité ;
- ✓ Déterminer des ressources permettant de couvrir cette marge de solvabilité.

En effet, la réglementation exigeait des provisions techniques suffisantes et prudentes pour évaluer le règlement intégral des engagements. Cependant, pour les mêmes raisons que la « solvabilité I » et malgré un degré de prudence élevé, les autres risques n'étaient pas pris en compte.

Ainsi on reprochait à ce système les mêmes défaillances à savoir

- ✓ Un modèle trop simpliste : pas de prise en compte de la diversité des risques et de leurs spécificités ;
- ✓ Réglementation basée sur des éléments comptables et non économiques ;
- ✓ Réglementation non cohérente avec la réglementation bancaire en vigueur ;
- ✓ Risques associés aux actifs mal appréhendés ;
- ✓ Quasi absence de normes en matière de gouvernance ;
- ✓ Absence de stratégie de gestion actif et Passif (ALM)
- ✓ Non prise en compte de la réalité des groupes d'assurance.

Afin de palier à ces insuffisances et dans le but de se conformer aux normes internationales, le projet de SBR s'articule autour de trois textes :

- ✓ Articles 239 et 239-2 de la loi n°17-99 portant code des assurances ;
- ✓ Circulaire d'application : dernier circulaire daté de 25 Mars 2018
- ✓ Instructions et décisions éventuelles.

Le projet a pu suivre le timeline suivant :

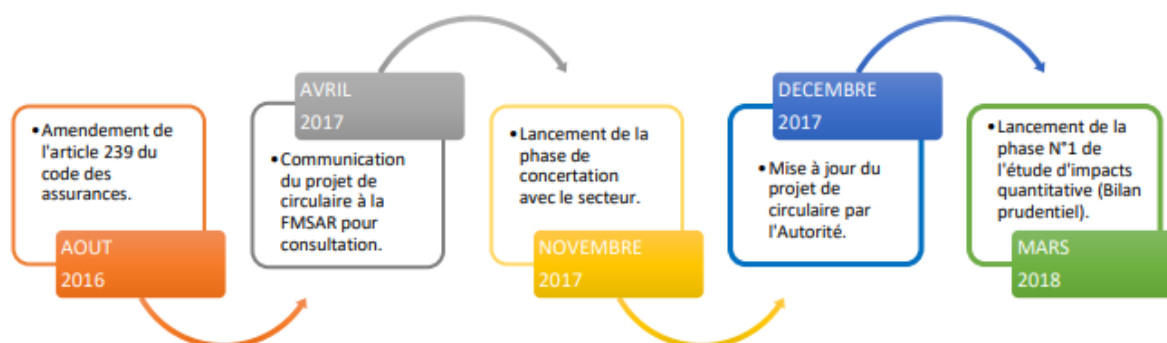


Figure 4 : timeline du projet SBR⁵

⁵ Source : travail interne réalisé au sein du RCAR

Ainsi la réforme réglementaire SBR, inspirée de la directive européenne Solvabilité II déjà entrée en vigueur, vient combler le vide et les lacunes du régime prudentiel actuel en le modifiant de part et d'autre. Pour une parfaite harmonisation aux exigences internationales, la réforme SBR s'articule autour des mêmes trois piliers que nous rappelons ci-dessous :

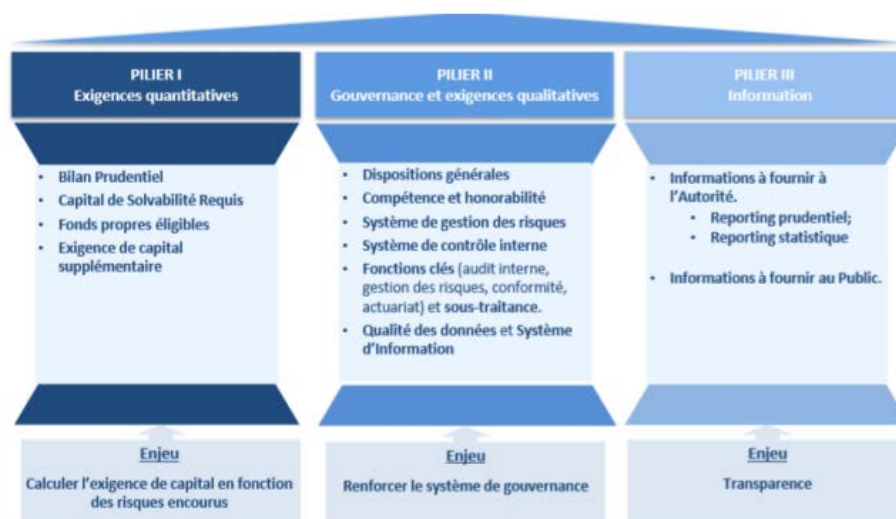


Figure 5: piliers du projet SBR⁶

Vu que le pilier III n'a toujours pas vu le jour au sein du rapport et des circulaires publiées par l'ACAPS nous essayerons de détailler dans ce qui suit les différences mineures qu'à la solvabilité basée sur le risque avec la solvabilité II

II.2 Zoom sur le premier pilier

Détailler au sein du premier pilier, ce dernier vient surtout définir les règles bilan prudentiel et du capital de solvabilité requis (CSR), de l'exigence de capital supplémentaire et du niveau des fonds propres prudentiels.

Ces calculs sont fondés sur :

- ✓ Une prise en compte de tous les risques présents dans notre système, en y intégrant également le risque de souscription
- ✓ L'intégration du best Estimate ou de la valorisation économique du bilan

Ainsi, afin de palier au problème du bilan comptable, les provisions techniques seront évaluées selon le principe de la « meilleure estimation » (Best Estimate : BE) en plus d'une « marge de risque » (MR) représentant un coût de capital et prend en compte les incertitudes du Best estimate .

⁶ Source : Réaliser par nos soins

Le schéma ci-dessous résume de façon très simplifiée les différences entre le bilan du cadre actuel et celui de la SBR :

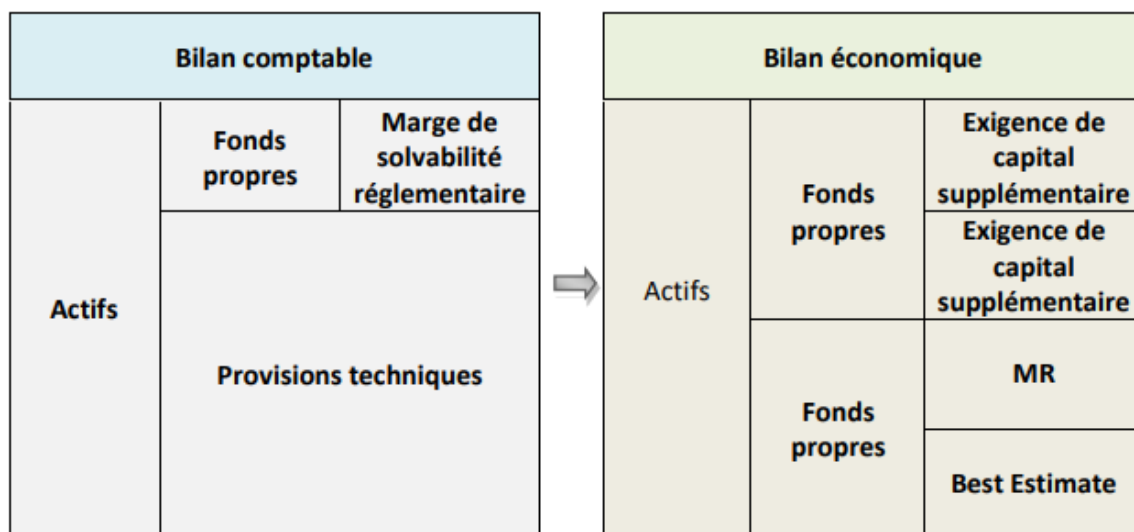


Figure 6: Différence entre Bilan comptable et Bilan Economique⁷

Également, de nouvelles normes de calcul ont été définies pour l'évaluation notamment des actifs et des passifs en valeur de marché. Quant au capital de solvabilité requis, il est défini comme l'agrégation des besoins en capital pour chaque risque.

Les risques qui participent dans le calcul du SCR se répartissent comme suit :

⁷ Source : www.institutdesactuaire.com

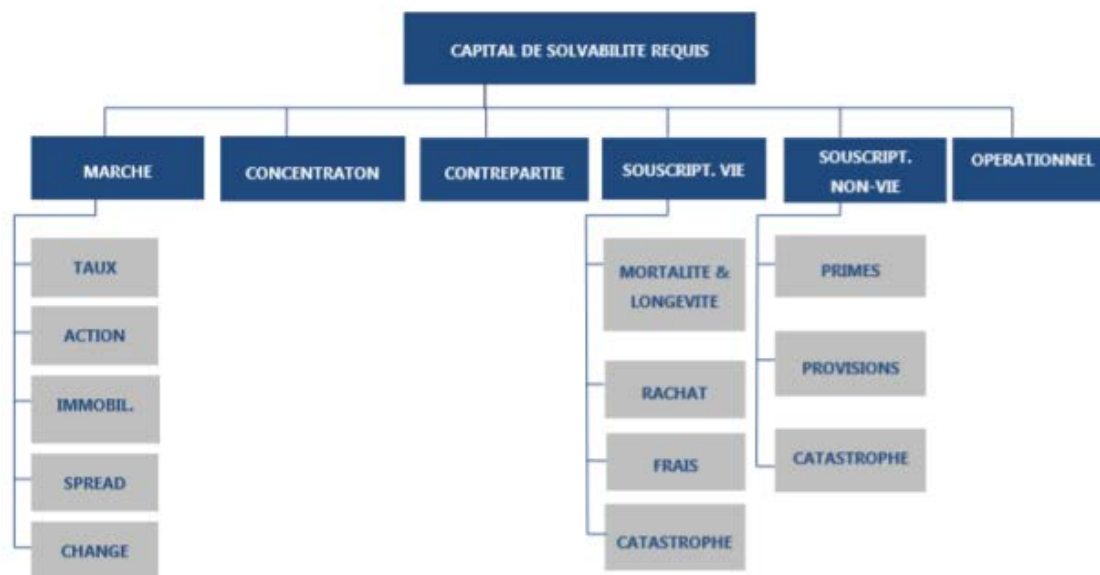


Figure 7: Cartographie des risques⁸

Avec :

- ✓ **L'exigence de capital relative au risque de marché** : le risque de perte ou de changement défavorable de la situation financière résultant, directement ou indirectement, de fluctuations affectant le niveau de la valeur des actifs, des passifs et des instruments financiers
- ✓ **L'exigence de capital relative au risque de contrepartie** : le risque de perte ou de changement défavorable de la situation financière résultant d'un défaut de paiement d'une contrepartie ou d'une dégradation de sa qualité de crédit.
- ✓ **L'exigence de capital relative au risque de concentration** : le risque de perte ou de changement défavorable de la situation financière résultant d'un manque de diversité des émetteurs auxquels l'entreprise d'assurances et de réassurance est exposée ;
- ✓ **L'exigence de capital relative aux risques de souscription en vie**
Correspond au risque de perte ou de changement défavorable de la situation financière en raison d'hypothèses inadéquates en matière de sinistralité, de tarifications et de provisionnement.
- ✓ **L'exigence de capital relative aux risques de souscription en non-vie**
Déterminée en fonction des exigences de capital relatives au risque de primes, au risque de provisions et au risque catastrophe.
- ✓ **L'exigence de capital relative au risque opérationnel** : le risque de perte ou de changement défavorable de la situation financière résultant de procédures internes, de membres du personnel, de systèmes inadéquats ou défaillants, ou d'événements extérieurs ;

Pour chacun des risques précités, le CSR afférent est égal à la variation de fonds propres correspondant à la réalisation du choc défavorable. La figure ci-dessous schématise cette variation.

⁸ Source : présentation de la « SBR » par l'ACAPS suite à sa réunion avec la FMSAR le 03 avril 2017

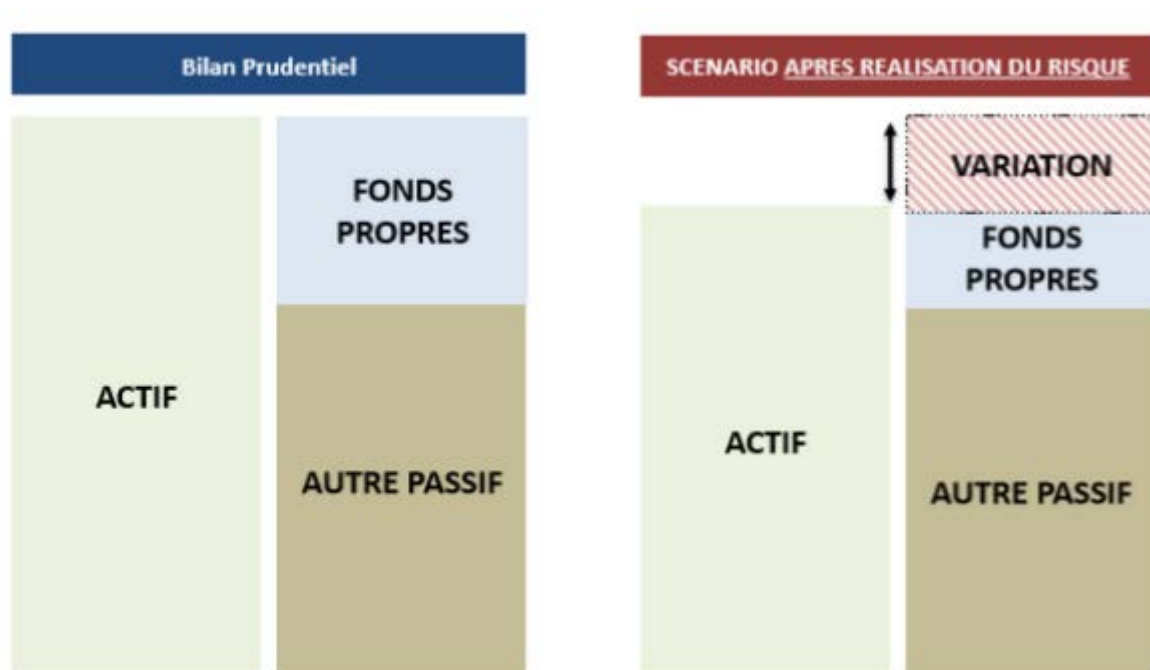


Figure 8: impacte des risques au sein du bilan⁹

1) Valorisation des provisions techniques prudentielles :

Par alignement aux règles prudentielles en vigueur, la valorisation des provisions techniques prudentielles (PT) est évaluée en additionnant « une meilleure estimation des engagements », « une meilleure estimation des frais de gestion » et « une marge de risque ».

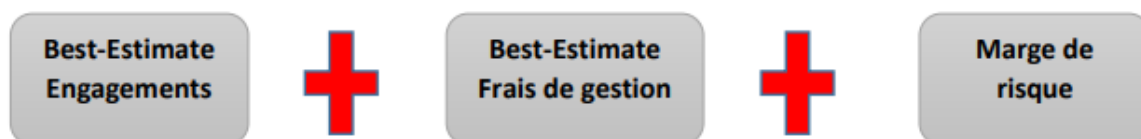


Figure 9: Valorisation des Provisions techniques¹⁰

Best Estimate des engagements : Pour les engagements futurs, la « meilleure estimation des engagements » est calculée par une actualisation probabiliste des flux de trésorerie futurs correspondants aux engagements de l'assurance pour les contrats souscrits et déterminés .

Best Estimate des frais de gestion : Elle correspond à la valeur actualisée et probabilisée du montant relatif à la gestion des contrats en cours selon la nature des opérations d'assurance. Pour les opérations d'assurance vie, décès ou de capitalisation, la meilleure estimation des frais de gestion est déterminée en actualisant la somme des frais de gestion futurs probabilisés liés aux contrats. Les frais de gestions futurs sont estimés sur la base d'une projection

⁹ Source : présentation de la « SBR » par l'ACAPS lors d'une réunion avec la FMSAR le 03 avril 2017

¹⁰ Source : réaliser par nos soin à travers le projet de circulation ACAPS 25/04/2018

effectuée sur une période suffisante compte tenu des engagements contractuels. Les frais de gestion impliquent aussi :

- ✓ Les Achats consommés de matières et fournitures ;
- ✓ Les charges externes ;
- ✓ Les Charges du personnel ;
- ✓ Autres charges d'exploitation ;
- ✓ Frais de gestion des placements.

La marge de risque : Est la valeur qu'il faut rajouter aux provisions Best Estimates de manière à garantir que la valeur des provisions techniques est équivalente au montant que les organismes d'assurance demanderaient pour reprendre et honorer leurs engagements.

2) **Capital de Solvabilité Requis SCR par la formule standard :**

Le Capital de Solvabilité Requis (CSR) représente le niveau minimum à couvrir. En effet, il capture la perte inattendue à supporter dans le cas d'un scénario catastrophique avec une probabilité d'occurrence très faible. Il doit fournir d'une part, le niveau du capital qui permet à l'assureur d'absorber des pertes imprévues importantes et d'autre part, limiter le risque (sur une période donnée). Bien entendu, le SCR doit être supérieur au niveau de fonds propres (les FP doivent représenter au minimum 70% du SCR).

Le SCR reflète le niveau de capital nécessaire pour que l'assureur puisse tenir de tous ses engagements, il doit ainsi tenir compte de tous les risques, et c'est dans ce cadre que vient la SBR pour remplacer le cadre actuel qui ne prend en considération que le risque de souscription.

Pour agréger les modules des risques individuels dans un SCR global, on utilise des Techniques de corrélation linéaire. Les coefficients de corrélation sont déterminés de manière à refléter les dépendances potentielles dans les queues des distributions ainsi que la stabilité des hypothèses sur la corrélation dans des conditions de stress.

Le SCR se compose du SCR de base (BSCR) et la charge de capital pour le risque opérationnel (SCR_{op}) :

$$\text{SCR} = \text{BSCR} + \text{SCR}_{\text{op}}$$

Le BSCR comprend 5 grandes catégories de risques comme citées ci-dessus (marché, non-vie, vie, défaut et santé).

Dans chacun de ces modules, les risques sont subdivisés en sous-catégories.

En solvabilité 2 :

La réglementation « solvabilité 2 » impose l'utilisation de matrice de corrélation. En effet afin de prendre en compte l'impact de tous les risques et leurs interactions, les charges sont calculées pour chaque sous-module, puis agrégées selon l'approche suivante :

- ✓ Tous les risques appartenant à la même catégorie sont combinés à l'aide de matrices de corrélation pour aboutir à la charge du risque.
- ✓ Ensuite, les principales catégories de risques sont combinées à l'aide d'une matrice de corrélation pour arriver au BSCR.

Ainsi la formule devient :

$$BSCR = \sqrt{\sum_{i < j} CorrSCR_{i,j} \cdot SCR_i \cdot SCR_j}$$

Comme exemple de la matrice de corrélation entre les catégories de risques :

	Marché	Défaut	Vie	Santé	Non vie
Marché	1	0,25	0,25	0,25	0,25
Défaut	0,25	1	0,25	0,25	0,5
Vie	0,25	0,25	1	0,25	0
Santé	0,25	0,25	0,25	1	0
Non vie	0,25	0,5	0	0	1

Tableau 1: exemple de matrice de corrélation des risques¹¹

Avec :

- SCR_i : capital de risque requis au titre du risque « i ».
- SCR_j : capital de risque requis au titre du risque « j ».
- Corr (SCR(i,j)) : coefficient de corrélation entre les modules de risque i et j.

Pour chaque module de risque, le SCR du risque i est aussi composé de sous risque, ainsi le SCR aussi sera calculé de la même forme en y introduisant des coefficients de corrélation entre les sous modules de risque :

Ci-joint, un exemple de matrice de corrélation des sous modules de risque de souscription vie :

	Mortalité	Longévité	Invalidité	Rachat	Frais	Catastrophe
Mortalité	1	-0,25	0,25	0	0,25	0,25
Longévité	-0,25	1	0	0,25	0,25	0
Invalidité	0,25	0	1	0	0,5	0,25
Rachat	0	0,25	0	1	0,5	0,25
Frais	0,25	0,25	0,5	0,5	1	0,25
Catastrophe	0,25	0	0,25	0,25	0,25	1

Tableau 2: matrice de corrélation des sous modules de souscription vie¹²

¹¹ Source : Tableau réalisé par nos soins

¹² Source : Tableau réalisé par nos soins

Pour le SBR :

Les facteurs de risques suivant la réglementation SBR à ce jour n'ont toujours pas été quantifiés. Que ce soit pour les risques des sous modules ou les risques des modules, la matrices de corrélation n'a toujours pas été créé.

Ainsi afin de répondre à ce manque, le SBR énonce le BSCR de la forme

$$BSCR = \sqrt{\sum SCR_i^2}$$

En résumé, la réglementation nationales énonce la cartographie des risques, les prend en considération sans prendre en compte leurs corrélations ce qui peut conclure à une sous-estimation du capital nécessaire.

Partie II : Présentation et
Modélisation d'un Modèle
Interne

Comme cité précédemment, un organisme assureur a deux possibilités pour déterminer son besoin en capital économique : utiliser la formule standard ou développer un modèle interne. Afin de mieux contrôler son profil de risque l'assureur peut opter pour le modèle interne car la formule standard comporte une part d'imprécision.

Le modèle interne, tient compte des spécificités de l'entreprise. La directive Solvabilité 2 introduit aussi le concept de modèle interne partiel, qui permet à l'organisme assureur de modéliser seulement certains risques et leur gestion plutôt que d'utiliser la formule standard.

Afin d'éviter tout abus de la part des assurances, une fois le modèle construit et validé par la direction interne de l'organisme, il sera soumis à l'approbation de l'autorité de contrôle.

Trois critères sont proposés par la directive afin de valider un modèle à savoir :

- ✓ Le 'use test' : le modèle interne doit être réellement utilisé par l'entreprise afin de gérer son risque
- ✓ La qualité statistique du modèle ('Statistical quality test') : les données collectées doivent être nombreuses et fiables afin de justifier les hypothèses retenues ;
- ✓ Le test de calibrage ('Calibration test') : la mesure de risque utilisée dans le modèle doit pouvoir correspondre à la Value at risk à l'horizon d'une année

Dans le cadre d'un modèle interne, le calcul du SCR s'effectue selon plusieurs formules dont principalement la suivante :

$$SCR = VAR_{99,5\%} * \left(\frac{BE_1 + F_1}{R_1} \right) - BE_0$$

Où :

- ✓ BE_0 : Le Best Estimate à l'instant $t=0$
- ✓ BE_1 : Le Best Estimate à l'instant $t=1$
- ✓ F_1 : le flux des prestations servies au cours de période 0
- ✓ R_1 : taux de rendement de l'actif sur la période 0
- ✓ $VAR_{99,5\%}$: La value at risk de probabilité 0.995¹³

Le principe est simple : après avoir calculé le Best Estimate à l'instant $t=0$, qui reflète la meilleure vision de l'engagement de la compagnie, alors l'année prochaine, c'est-à-dire à $t=1$, si nous recalculons le $BE_{1, i}$ devrait, en théorie, refléter exactement l'engagement vu en $t=0$ diminué des flux de l'année 1. Si l'équation n'est pas équilibrée, alors le reliquat doit être mis de côté pour éviter la ruine durant la première année : c'est le SCR.

Ainsi, dans la suite de notre rapport, nous exposerons les méthodes de modélisation interne de l'actif et du passif. Faute de données et de temps, seul l'actif sera modélisé stochastiquement, tandis que pour le passif, il sera traité selon une approche déterministe suivant des hypothèses issues de notre historique.

¹³ $VAR_{99,5\%}$ correspond au **montant de pertes** qui ne devrait être dépassé qu'avec une probabilité donnée sur un horizon temporel donné

Chapitre 1 : Modélisation de l'Actif :

Afin de respecter les règles de solvabilité 2 ou SBR, l'actif devrait être modélisé de manière stochastique en adoptant des processus de discrétisation continu. Nous nous intéressons dans cette partie à la modélisation des taux d'intérêt et des actions.

I. Modélisation des Taux d'intérêt :

La modélisation des taux d'intérêt joue un rôle primordial dans notre modèle. En effet, l'actualisation, la capitalisation, le calcul des provisions du passif ou même l'évolution des actifs financiers sont tous corrélés à l'évolution de notre courbe des taux.

Il existe une grande variété de modèles de taux d'intérêt. Au cours de ce mémoire, nous présentons les deux grandes familles de modèle stochastique à savoir :

- ✓ **Les modèles d'arbitrage à une seule variable d'état** : comme celui de Vasicek (1977)¹⁴ qui comporte une seule variable d'état.
- ✓ **Les modèles d'équilibre général** qui, prennent en compte la conjoncture économique tels que le modèle de Cox Ingersoll et Ross (1985)¹⁵ (CIR).

Le point commun de ces deux modèles est la modélisation du taux court instantané par l'équation différentielle suivante :

$$dr_t = \mu(r_t, t)dt + \sigma(r_t, t)dW_t$$

Avec :

- μ est le coefficient de dérive (drift).
- σ est le coefficient de diffusion.
- W_t est un processus Brownien.

Les taux d'intérêt sont généralement assimilés à des séries chronologiques vu que leurs évolutions dépendent principalement du temps. Ainsi, il ne serait de trop de rappeler quelques notions des séries temporelles à savoir la stationnarité au sens large et les tests de stationnarité que nous utiliserons par la suite dans nos modèles.

1.1 Les Séries temporelles :

1) Processus stationnaire au sens large

Définition (Processus stationnaire au sens large).¹⁶

Un processus X_t est dit stationnaire au sens large (SSL) si et seulement

¹⁴ Modèle apparut dans l'article « An equilibrium characterization of the term structure », 1977 Journal of Financial Economics

¹⁵ Modèle apparut dans l'article « A Theory of the Term Structure of Interest Rates », 1985 Econometrica

¹⁶ Source : Cours de série temporelle, INSEA, 2018

si :

1. $E(X_t)$ est constante
2. $E(X_2) < \infty$
3. La fonction d'autocovariance $\gamma_k = cov(X_t, X_{t+k}) = E\{(X_t - E(X_t))(X_{t+k} - E(X_{t+k}))\}$ est indépendante de t .

Si ces conditions ne sont pas satisfaites, chose qui est très commune pour les séries financières, alors il faudrait procéder à la stationnarité de la série en question. Le test le plus connus dans ce domaine est : **Test de racine unitaire (Dickey-Fuller)**¹⁷

2) Test de Dickey Fuller

Définition : Test de Dickey Fuller

Ce test estime tout d'abord par la méthode des moindres carrés le paramètre Φ de la régression : $X_t = \Phi X_{t-1} + a_t$ et le compare avec les hypothèses suivantes :

- ✓ L'hypothèse nulle $H_0 : \Phi = 1$ qui signifie présence de non stationnarité
- ✓ L'hypothèse alternative $H_1 : \Phi \neq 1$ qui représente la stationnarité de la notre série .

Si notre série n'est pas stationnaire, alors il faudrait identifier de quel type de non stationnarité il s'agit. En effet la série peut, entre autres, être stationnaire en tendance si la série obtenue en « enlevant » la tendance temporelle de notre série originale est stationnaire, ou une stationnarité par différence si la série obtenue en différenciant les valeurs de la série originale est stationnaire. Ainsi nous testerons la présence d'une racine unitaire selon les trois types de modèles suivants :

$$\text{Modèle 3 : } \Delta X_t = \rho X_{t-1} + \alpha + \beta t + \ddot{a}_t$$

$$\text{Modèle 2 : } \Delta X_t = \rho X_{t-1} + \alpha + a_t$$

$$\text{Modèle 1 : } \Delta X_t = \rho X_{t-1} + a_t$$

Avec a_t bruit blanc

Remarque :

Le test DF standard est un test stationnarité qui ne concerne que les processus autorégressifs d'ordre un ou processus AR(1).

Définition : Test de Dickey-Fuller augmenté¹⁸

Le test de Dickey-Fuller augmenté (ou test ADF) est un test statistique qui vise à savoir si une série temporelle de type AR(p) est stationnaire.

Le test ADF consiste alors à estimer les modèles qui précèdent en introduisant des variables retardées.

Et donc les modèles ci-dessous deviennent par exemple :

$$\text{Modèle 3 : } \Delta X_t = \rho X_{t-1} + \alpha + \beta t + \sum_{f=1}^p \Phi_f \Delta \ddot{X}_{t-f} + a_t$$

¹⁷ Publié dans l'article « Distribution of the Estimators for Autoregressive Time Series With a Unit Root », *Journal of the American Statistical Association* 1979

¹⁸ Test ADF Publié en 1981

$$\text{Modèle 2 : } \Delta X_t = \rho X_{t-1} + \alpha + \sum_{f=1}^n \Phi_f \Delta X_{t-f} + a_t$$

$$\text{Modèle 1 : } \Delta X_t = \rho X_{t-1} + \sum_{i=1}^n \Phi_i \Delta X_{t-i} + a_t$$

Ce test consiste à comparer la valeur estimée du test de student associé au paramètres Φ aux valeurs tabulées de cette statistique selon les hypothèses suivantes :

- ✓ **L'hypothèse nulle** de ce nouveau test ADF : $H_0 \Phi=0$ qui signifie une non stationnarité
- ✓ **L'hypothèse alternative** : $H_1 \Phi \neq 0$ qui représente la présence de stationnarité

1.2 Modèle de Vasicek (1977)

1) Présentation du modèle

Ce modèle permet de modéliser un taux instantané qui prend en compte l'effet de retour vers la moyenne des taux basé sur un historique donné. En effet les valeurs élevées des taux ont tendance à être suivies plus fréquemment par des baisses que par des hausses, l'effet inverse est également constaté pour les niveaux de taux bas.

Ce phénomène de retour à la moyenne, que Vasicek met en évidence, peut être justifié. En effet, lorsque les taux sont élevés, les emprunts sont moins nombreux et l'économie a tendance à ralentir, faisant ainsi baisser les taux. Au contraire, lorsque les taux sont peu élevés, les emprunts sont plus nombreux et l'économie a tendance à augmenter, faisant ainsi monter les taux.

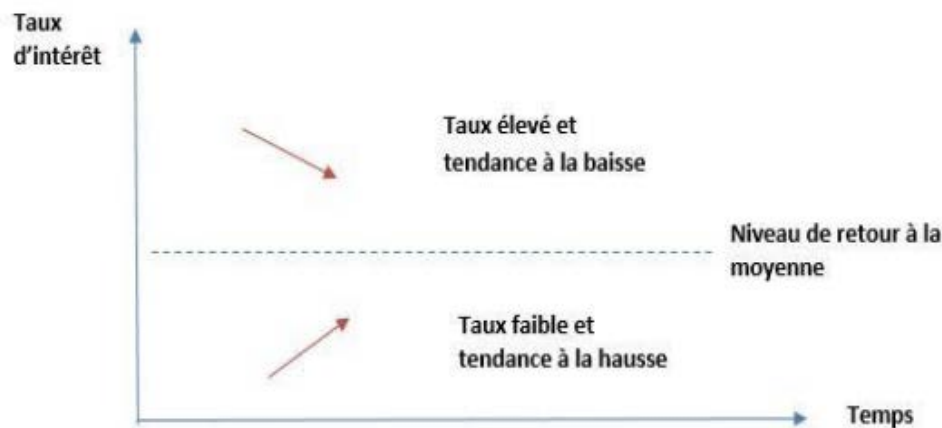


Figure 10: Effet de retour à la moyenne¹⁹

Une fois les taux modélisés, nous pourrions en déduire la courbe des taux qui nous sert comme support à la capitalisation et à l'actualisations des flux monétaires.

La dynamique du modèle de Vasicek (1977) est comme suit :

$$dr_t = a(b - r_t)dt + \sigma dB_t$$

Avec :

- ✓ r_t : le taux instantané ;
- ✓ a : la vitesse de retour à la moyenne ;
- ✓ b : le niveau des taux à long terme ;

¹⁹ Source : <http://www.ressources-actuarielles.net/>

- ✓ σ : la volatilité du processus ;
- ✓ B_t : le mouvement brownien associé aux taux d'intérêt.

En utilisant le lemme d'Itô²⁰, ce modèle à l'instant initial $t=0$ s'écrit sous la forme :

$$r_t = r_0 e^{-at} + b(1 - e^{-at}) + \sigma \sqrt{\frac{1 - e^{-2at}}{2a}} \varepsilon_t$$

avec $\varepsilon_t \rightarrow N(0,1)$

Pour un instant donné, $t=s$, le taux d'intérêt instantané s'écrit :

$$r_t = r_s e^{-a(t-s)} + b(1 - e^{-a(t-s)}) + \sigma \sqrt{\frac{1 - e^{-2a(t-s)}}{2a}} \varepsilon_t$$

Afin de pouvoir estimer les paramètres, il est indispensable de procéder à la discrétisation du processus. La méthode la plus facile consiste à calculer le taux instantané à l'instant $s=t+\delta$ à partir de l'instant $s=t$. Ainsi l'équation devient :

$$\check{r}_{t+\delta} = \check{r}_t e^{-a\delta t} + b(1 - e^{-a\delta t}) + \sigma \sqrt{\frac{1 - e^{-2a\delta t}}{2a}} \varepsilon_{t+\delta t}$$

Avec $\varepsilon_{t+\delta t} \rightarrow N(0,1)$

2) Estimation des paramètres du modèle :

Une fois le processus discrétisé, nous pouvons écrire l'équation précédente sous forme d'une série temporelle autorégressive d'ordre 1 (AR(1)) :

$$\check{r}_{t+1} = a_1 + a_2 * \check{r}_t + a_3 * \varepsilon_{t+1}$$

Avec :

- ✓ $\varepsilon_{t+1} \rightarrow N(0,1)$
- ✓ $a_1 = b(1 - e^{-a})$
- ✓ $a_2 = e^{-a}$
- ✓ $a_3 = \sigma \sqrt{\frac{1 - e^{-2a}}{2a}}$

Nous utilisons par la suite afin de vérifier les hypothèses de stationnarité, le test ADF cités plus haut afin de conduire une régression linéaire qui nous permet d'estimer nos paramètres.

3) Avantages et inconvénients du modèle :

Le modèle de Vasicek est connu pour être un modèle facile à comprendre et à maîtriser sur le plan théorique vu qu'il ne dépend que d'un seul facteur, son point fort consiste à la prise en compte de l'effet de retour à la moyenne réellement observé sur le marché. Son inconvénient majeur est la probabilité non nulle d'obtenir des taux négatifs. Nous

²⁰ Démonstration faite par « Kiyoshi Itô » dans les années 1940 et publiée par '[Académie des sciences](#)' en 2000

pourrions tous simplement ignorer voire écarter ces taux vus que cette probabilité est d'ordre minimale. Sinon, nous pouvons choisir un deuxième modèle qui va résoudre ce problème : le modèle de Cox Ingersoll Ross

I.3 **Le modèle de Cox Ingersoll Ross (CIR)(1985) :21**

1) **Présentation du modèle**

Ce modèle, présenté en 1985, se caractérise par la même simplicité que le modèle de Vasicek(1977). Mais il vient introduire un processus en racine carrée, ce qui ne permet pas aux taux initialement positifs de prendre des valeurs négatifs.

Le modèle s'écrit sous la forme :

$$dr_t = a(b - r_t)dt + \sigma \sqrt{r_t} dB_t$$

Où :

- ✓ r_t est le taux sans risque instantané,
- ✓ B_t est un mouvement Brownien
- ✓ a : la vitesse de retour à la moyenne ;
- ✓ b : le niveau des taux à long terme ;
- ✓ σ : la volatilité du processus ;

Ainsi, suivant les mêmes étapes réalisées au sein de la partie précédente, et à travers le lemme d'ITO et une discrétisation de pas 1, les taux d'intérêt s'écrivent de la forme :

$$\tilde{r}_{t+1} = \tilde{r}_t + a(b - \tilde{r}_t) + \sigma \sqrt{\tilde{r}_t} \varepsilon_{t+1} \quad \text{avec } \varepsilon \rightarrow N(0,1)$$

2) **Estimation des paramètres**

Rappelons la discrétisation approximative d'ordre 1 du processus du modèle de CIR :

$$\tilde{r}_{t+1} = \tilde{r}_t + a(b - \tilde{r}_t) + \sigma \sqrt{\tilde{r}_t} \varepsilon_{t+1}$$

Nous divisons l'équation par $\sqrt{\tilde{r}_t}$:

$$\frac{\tilde{r}_{t+1}}{\sqrt{\tilde{r}_t}} = ab \frac{1}{\sqrt{\tilde{r}_t}} + (1 - a) \frac{\tilde{r}_t}{\sqrt{\tilde{r}_t}} + \sigma \varepsilon_{t+1} \quad \text{avec } \varepsilon \rightarrow N(0,1)$$

Ainsi, par un changement de variable, en posant $Y_t = \frac{\tilde{r}_{t+1}}{\sqrt{\tilde{r}_t}}$, $X_t = \frac{1}{\sqrt{\tilde{r}_t}}$ et $Z_t = \frac{\tilde{r}_t}{\sqrt{\tilde{r}_t}}$

$$Y_t = abX_t + (1 - a)_t Z_t + \sigma \varepsilon_{t+1} \quad \text{avec } \varepsilon \rightarrow N(0,1)$$

$$Y = (X_t \quad Z_t) * \begin{pmatrix} ab \\ 1 - a \end{pmatrix} + \sigma \varepsilon_{t+1} \quad \text{avec } \varepsilon \rightarrow N(0,1) \quad (3)$$

Il s'agit d'un modèle de régression linéaire, alors, par la méthode de moindres carrés ordinaires (MCO), nous obtenons les valeurs ab et $-a$, et en résolvant le système de 2 équations à 2 variables, nous obtiendrons les estimateurs de a et de b .

La valeur de σ est obtenue directement par MCO : $\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{\sum_{t=1}^n e_{t+1}^2}{n-3}}$

²¹ Modèle publié dans l'article « A Theory of the Term Structure of Interest Rates », Econometrica 1985

3) *Avantages et inconvénients du modèle :*

Avantages du modèle :

- ✓ Le modèle permet de prendre en compte l'effet de retour à la moyenne constaté.
- ✓ Les taux ne peuvent jamais être négatifs.

Inconvénients modèle :

- ✓ La stabilité de la queue de la courbe des taux.
- ✓ Seul le taux sans risque instantané est utilisé pour expliquer l'évolutions des taux d'intérêt ce qui est d'un point de vue purement économique pas vraiment approprié.

1.4 Interpolation de la courbe BAM

1) *Calcul des taux*

Au Maroc, Bank Al Maghrib publie quotidiennement une courbe des taux de rendement qui prend en compte les opérations des marchés, primaire et secondaire, les plus récentes. Les taux publiés sont, pour chaque échéance, des taux moyens pondérés par les volumes. Les rendements sont exprimés par des taux monétaires pour les maturités inférieures à un an et par des taux actuariels pour les maturités supérieures à un an.

Par conséquent, les calculs des taux in fine pour les maturités pleines comprennent l'interpolation et la transformation des taux.

✓ **Interpolation :**

L'interpolation consiste à déterminer, pour chaque échéance T_i , le taux d'actualisation qui lui est associé. Si la période T_i ne coïncide pas avec les maturités figurant déjà sur la courbe, le taux r_i correspondant peut-être défini, à travers une interpolation linéaire de deux valeurs de taux avoisinantes par la formule suivante :

$$r_i = r_{i-1} + \frac{r_{i+1} - r_{i-1}}{T_{i+1} - T_{i-1}} x (T_i - T_{i-1})$$

✓ **Transformation :**

La transformation consiste à homogénéiser la base de calcul des taux, dans le cas où le taux que nous cherchons à calculer est compris entre un taux à court-terme et un taux à long-terme.

Si ce taux correspond à une durée courte (inférieur à 1 an), c'est le taux actuariel qui est transformée par la formule :

$$r_i = \frac{360}{i} x \left((1 + r_a)^{\frac{i}{365}} - 1 \right) \text{ avec } r_a \text{ le taux actuariel .}$$

Sinon, si ce taux correspond à une durée longue (supérieur à un an), c'est le taux monétaire qui est transformé :

$$r_i = \left(1 + \frac{r_n * n}{360} \right)^{\frac{365}{n}} - 1 \text{ avec } r_n \text{ le taux monétaire}$$

2) Construction de la courbe zéro-coupon

Étant donné qu'il n'existe généralement pas d'obligation coupon-zéro cotée pour chaque échéance ou, s'il en existe, qu'elles sont trop peu liquides pour que leur taux de rentabilité actuariel soit significatif, il faut reconstruire la courbe des taux coupon zéro à partir des obligations cotées et liquides. Pour ce faire, nous allons procéder par Bootstrapping.

La méthode de Bootstrap est une technique qui permet de construire une courbe de taux pas à pas, à partir d'éléments discontinus.

La méthode consiste à choisir une suite d'instruments financiers liquides à maturités croissantes, et à inverser les formules de valorisation de ces instruments pour obtenir les facteurs d'actualisation au fur et à mesure de notre avancement.

Ainsi, l'usage du Bootstrap consiste à l'usage des méthodes d'interpolation précitée, en se basant sur le principe suivant : « Le prix théorique d'une obligation égalise la somme de ses flux actualisés aux différents taux zéro-coupon respectifs aux maturités de chacun de ces mêmes flux. »

La méthode consiste ainsi à choisir une suite d'instruments financiers liquides à maturités croissantes, et à inverser les formules de valorisation de ces instruments pour obtenir les facteurs d'actualisation au fur et à mesure de notre avancement. Pour le segment de la courbe inférieur à 1 an, les taux zéro-coupon sont les taux actuariels. Lorsque l'on raisonne sur le segment supérieur à un an, il intervient des versements d'intérêts intermédiaires, des coupons, généralement annuels. Il faudra alors reconstituer la courbe zéro coupon pas à pas, soit segment pas segment de maturité.

Illustration :

Pour le segment de la courbe allant de 1 an à 2 ans, on choisit un titre de maturité 2 ans qui verse deux flux à la date $t=t_1$ et $t=t_2$.

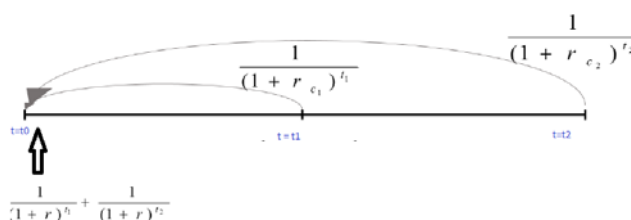


Figure 11: illustration de la méthode Bootstrap

Où :

- r : le taux actuariel 2 ans.
- r_{c1} : le taux zéro-coupon 1 an.
- r_{c2} : le taux zéro-coupon 2 ans.

Le taux zéro-coupon 1 an est connu puisqu'il est égal au taux de rendement actuariel 1 an. Pour obtenir le taux zéro-coupon 2 ans, en supposant que le taux actuariel 2 ans est connu, nous devons résoudre l'équation suivante :

$$\frac{1}{(1+r)} + \frac{1}{(1+r)^2} = \frac{1}{(1+r_{c1})} + \frac{1}{(1+r_{c2})^2}$$

Nous obtenons ainsi le taux zéro-coupon 2 ans qui s'exprime comme suit :

$$r_{c_2} = \left(\frac{1}{\frac{1}{1+r} + \frac{1}{(1+r)^2} - \frac{1}{(1+r_{c_1})}} \right)^{\frac{1}{2}} - 1$$

De manière générale, le taux zéro-coupon n ans est donné par l'expression suivante :

$$r_{c_n} = \left(\frac{1}{\sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{1}{(1+r)^i} - \frac{1}{(1+r_{c_i})^i} \right) + \frac{1}{(1+r)^n}} \right)^{\frac{1}{n}} - 1$$

Avec : r le taux actuariel correspondant à la maturité n ans.

II. Modélisation des actions

Les compagnies d'assurances par leurs besoins de financement à long terme se voient dans l'obligation de diversifié leurs portefeuilles. Ainsi, elles ont tendance à investir à bas risque dans des obligations, ou espérer un meilleur rendement en se tournant vers le marché des actions qui est connu et par sa volatilité et par son risque.

Le graphe ci-dessous représente le cours du MASI²² (*Moroccan All Shares Index*) qui représente une vue globale de la situation financière au sein des marchés de capitaux.

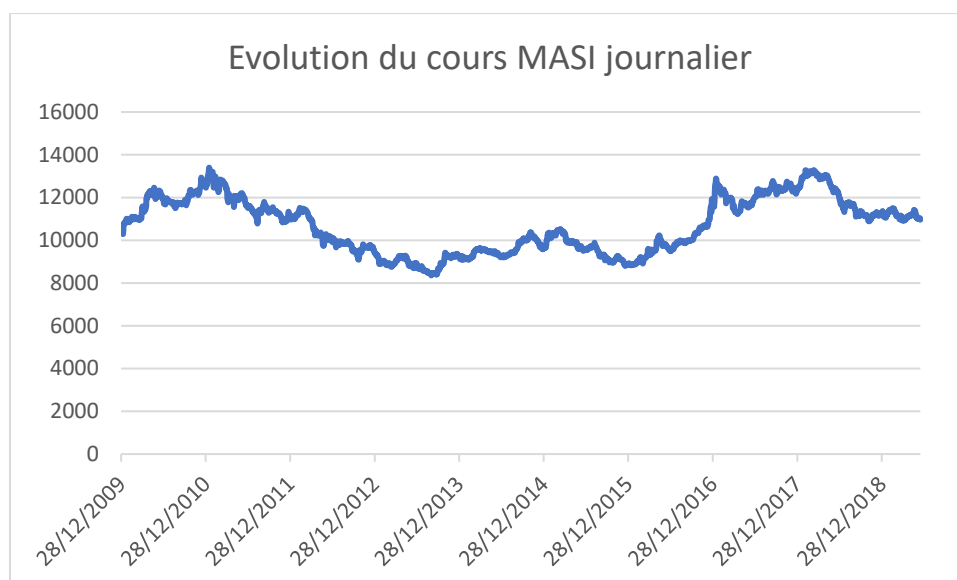


Figure 12 : évolution du cours MASI²³

²² MASI : Moroccan All Shares Index principal [indice boursier](#) de la [Bourse de Casablanca](#) créée en 2002

²³ : Graphe établi par nos soins sous Excel .

A travers l'indice MASI, nous remarquons que durant la dernière décennie, les cours du Masi ont varié de 8000dhs à 15 000 dhs, quelquefois de façons continues, sinon par des pics haussiers ou baissiers suprêmes qui reflètent une discontinuité des prix.

Ainsi, afin de modéliser ces différentes variations, nous traitons au cours de cette partie, les deux modèles les plus utilisés à savoir le modèle de Black and Scholes (1973)²⁴ qui est connu pour être une modélisation continue des cours, et le modèle de Merton (1976)²⁵ qui de sa part viendra expliquer la discontinuité des modèles.

II.1 Modèle de Black and Scholes

Pour modéliser l'évolution du prix d'un actif risqué, le modèle de Black & Scholes (1973) est actuellement la référence pour les praticiens de l'assurance. Ce modèle considère que les actions peuvent être modéliser par un mouvement brownien si les trois hypothèses fondamentales du modèle sont présentes :

- ✓ Les rendements suivent une lois log normal
- ✓ La volatilité est constante
- ✓ La trajectoire est continue.

Ainsi dans ce modèle, l'expression de la dynamique d'un actif S qui n'admet pas de dividende s'écrit comme suit :

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dB_t$$

La solution de cette équation différentielle est représentée ci-dessous :

$$S_t = S_0 * \exp\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)h + \sigma B_h\right)$$

Avec

- ✓ S_t désigne la valeur d'un titre à la date $t \in [0, \infty[$ qui prend la valeur S_0 en $t = 0$.
- ✓ μ est le paramètre de dérive.
- ✓ σ est la volatilité
- ✓ B_t est le brownien standard.

Ainsi le rendement de l'actif entre deux instants : t et $t+h$ s'écrit de la suite ;

$$\frac{S_{t+h}}{S_t} = \exp\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)h + \sigma B_h\right)$$

De plus, comme B_{t+h} et B_t sont tous deux des mouvements browniens, alors leur différence suit la même lois que B_h ²⁶

D'où pour tout h :

$$r(h) = \ln\left(\frac{S_{t+h}}{S_t}\right) = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)h + \sigma B_h$$

²⁴ Publié dans « The Pricing of Options and Corporate Liabilities » dans « Journal of Political Economy ».1973

²⁵ Travail publié dans « « Option pricing when underlying stock returns are discontinuous » Journal of Financial Economics 1976

²⁶ Propriété d'accroissement stationnaire des mouvements brownien

Pour un pas unitaire, le rendement logarithmique est représenté par ;

$$r(1) = \ln\left(\frac{S_{t+1}}{S_t}\right) = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) + \sigma B_1$$

Ainsi, en prenant un échantillon de rendements de notre bases de données, et en notant ces échantillons (x_1, \dots, x_n) qui sont indépendants et identiquement distribués , la vraisemblance de notre modèle prend la forme de ;

$$L(x_1, \dots, x_n, \mu, \sigma^2) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\left(x_i - \mu + \frac{\sigma^2}{2}\right)^2}{2\sigma^2}\right)$$

Par la méthode de maximum de vraisemblance, nous obtenons les estimateurs de nos paramètres (Voir ANNEXE) :

$$\sigma^2 = var(x)$$

$$\mu, = \bar{x} + \sigma^2/2$$

II.2 Modèle de Merton :

1) Introduction

Confronté à la réalité, le modèle de Black and Scholes ne tient pas compte de toutes les données observées sur le marché financiers et ne surtout pas de l'arrivée d'informations qui peuvent impacter le cours (à la hausse ou à la baisse) de l'actif d'une façon brutale. Ainsi, une modélisation continue pourrait engendrer des conséquences importantes sur l'appréciation du risque et le contrôle de la Value At risk suivant un seuil fixé d'avance.

Le modèle proposé par MERTON [1976] répond aux inconvénient de Black and Scholes en introduisant des sauts (U_1, \dots, U_j) au sein de l'évolution du prix de l'actif risqué S_t suivant des instants (t_1, \dots, t_j) . Entre chaque deux instants de sauts, l'actif S_t suit le modèle de Black and Scholes .

Ainsi, l'évolution de prix d'un actif financier est donnée par l'équation suivante : (Voir annexe)

$$S(t) = S(0) \exp\left\{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma B_t + \sum_{k=1}^{N_t} U_k\right\}$$

Où :

- ✓ $S(t)$: prix de l'actif à l'instant t.
- ✓ B_t : Mouvement brownien,

- ✓ N_t : Processus de Poisson homogène d'intensité λ .
- ✓ U_k : Suite de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées de loi Normale $N(0, \Omega)$.
- ✓ Les processus B, N, U sont mutuellement indépendants.

Les quatre paramètres à estimer sont donc $\mu, \sigma, \Omega, \lambda$.

On note :

$$S(t) = S(0)\exp(r(t))$$

Avec :

$$r(t) = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma B_t + \sum_{k=1}^{N_t} U_k$$

Nous nous intéressons par la suite au rendement de cet actif entre les deux périodes : t et $t+h$

$$\frac{S_{t+h}}{S_t} = \frac{\exp\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) \times (t+h) + \sigma B_{t+h} + \sum_{i=0}^{N_{t+h}} X_i\right)}{\exp\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma B_t + \sum_{i=0}^{N_t} X_i\right)}$$

Après calcul réalisé en annexe, le rendement logarithmique s'écrit finalement de la sorte :

$$r(t, t+h) = \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)h + \sigma B_h + \sum_{i=N_{t+1}}^{N_{t+h}} \ln(Y_i)$$

Comme le processus à saut étant stationnaire, seule la longueur de l'intervalle h influencera le nombre de saut présent dans ce dernier :

$$r(t, t+h) = \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)h + \sigma Z_h + \sum_{i=1}^{N_h} \ln(Y_i)$$

Ainsi seul le dernier terme de la dernière expression qui représente les sauts du rendement sur la période $[t, t+h]$ différencie les deux méthodes de modélisation des actifs. Afin de faciliter l'expression trop complexe de la loi du rendement, nous prenons un pas unitaire, soit $h=1$.

Pour la fonction de densité du modèle proposé, elle s'écrit de la forme (La démonstration est illustrée en annexe)

$$\rightarrow f_r(x) = \frac{\exp(-\lambda)}{\sqrt{2\pi}} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{\lambda^n}{n! \times \sqrt{(\sigma^2 + n\Omega^2)}} \times \exp\left[-\frac{\left(x - \mu + \frac{\sigma^2}{2}\right)^2}{2(\sigma^2 h + n\Omega^2)}\right] \right] \right]$$

A noter que pour oméga qui tend vers 0 (absence de sauts, nous nous retrouvons dans le cas du modèle classique de Black and Scholes.

2) Estimation des paramètres :

La démarche d'estimation des quatre paramètres suit celle proposée par RAMEZANI et ZENG [1998]²⁷. Cette démarche consiste à réaliser une première estimation par la méthode des moments. En effet afin de maximiser la vraisemblance, nous devons faire une première estimation des paramètres par la méthode des moments. Cette première estimation nous servira de valeurs initiales pour notre algorithme afin de maximiser la vraisemblance au sein d'un intervalle centré sur ces estimations. Cette méthode donnera des résultats plus précis que la méthode normale.

a) Méthode des moments :

Cette méthode repose sur l'égalisation des moments centrés empiriques avec les moments centrés théoriques. Vu que par construction les moments d'ordre impair sont nuls, nous nous concentrons sur les moments d'ordre pair. Ainsi, nous aurons un système de quatre équations à quatre inconnues qui nous aidera à déterminer une première estimation des paramètres.

L'idée est alors d'égaliser les moments théoriques et les moments empirique comme suit :

$$E(r) = m = \mu - \frac{\sigma^2}{2}$$

$$E(r-m)^2 = m_2$$

$$E(r-m)^4 = m_4$$

$$E(r-m)^6 = m_6$$

$$\text{Avec : } E(r-m)^{2k} = \frac{2k!}{2^k k!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n \exp(-\lambda)}{n!} (\sigma^2 + n\Omega^2)^{2k}$$

Vu que le système est non linéaire nous essayerons de minimiser numériquement la fonction définie comme suit :

$$H(x) = F_1(x)^2 + F_2(x)^2 + F_3(x)^2 + F_4(x)^2$$

Avec :

$$F_1(x) = E(r) - m$$

$$F_{2k}(x) = E(r-m)^{2k} - m_{2k} \text{ pour } k=1,2,3$$

Nous minimiserons la fonction h à l'aide d'un algorithme de minimisation. Pour cela nous utilisons le logiciel R en suivant l'algorithme de Newton Raphson.²⁸ Ainsi nous obtenons plusieurs solutions locales qui dépendront du vecteur d'initialisation. Dans notre cas et suivant les contraintes technologiques, nous avons simulé 200 vecteurs de loi uniforme [0,1] et nous avons retenu comme solution celle qui minimise le plus la fonction h .

b) Maximum de vraisemblance

L'expression de la vraisemblance s'écrit comme suit :

²⁷ Travail nommé : « Maximum likelihood estimation of asymmetric jump-diffusion processes: application to security prices » RAMEZANI C. A.; ZENG Y., [1998]

²⁸ Appartient dans l'article « The method of fluxions, and infinite series », 1736

$$L(x_1, \dots, x_n, \lambda, \mu, \sigma^2, \Omega^2) = \prod_{i=1}^n f_r(x_i) = \prod_{i=1}^n \frac{\exp(-\lambda)}{\sqrt{2\pi}} \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k! \times \sqrt{(\sigma^2 + k\Omega^2)}} \times \exp \left[-\frac{\left(x_i - \mu + \frac{\sigma^2}{2}\right)^2}{2(\sigma^2 + k\Omega^2)} \right] \right]$$

Pour trouver les paramètres qui maximisent la vraisemblance, nous essayons de minimiser numériquement $-\log(L)$ localement en faisant varier chaque paramètre dans un intervalle défini à partir des estimations des moments. L'intervalle a été construit de la forme :

$$\begin{cases} 0.9 * \lambda_i \leq \lambda \leq 1.1\lambda_i \\ 0.9\sigma^2_i \leq \sigma^2 \leq 1.1\sigma^2_i \\ 0.9\Omega_i \leq \Omega \leq 1.1\Omega_i \\ 0.9\mu_i \leq \mu \leq 1.1\mu_i \end{cases}$$

Avec : $\lambda_i \sigma^2_i \Omega_i \mu_i$ les paramètres estimés par la méthode des moments .

II.3 Test de Vraisemblance

Lors de cette partie, il s'agit de tester si notre échantillon suit un modèle de Black and Scholes ou celui de Merton. En d'autres termes il s'agit d'établir un test qui permet de conclure la présence ou non de discontinuités ou de sauts.

Pour ce faire, il nous faut calculer la vraisemblance du modèle de Black and Scholes ainsi que celle de Merton et de réaliser un test de vraisemblance.

Notre test se résume comme suit :

- ✓ **Hypothèse nulle H0**: $(\lambda, \Omega)=0$ qui représente le modèle de Black and Scholes .
- ✓ **L'hypothèse alternative H1**: $(\lambda, \Omega) \neq 0$ qui représente le modèle de Merton .

La statistique du test s'écrit :

$$L = \frac{\prod_{i=1}^n \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp \left(-\frac{\left(x_i - \mu + \frac{\sigma^2}{2}s\right)^2}{2\sigma^2s} \right)}{\sup_{\lambda, \Omega} \left(\prod_{i=1}^n \frac{\exp(-\lambda)}{\sqrt{2\pi}} \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k! \times \sqrt{(\sigma^2 + k\Omega^2)}} \times \exp \left[-\frac{\left(x_i - \mu + \frac{\sigma^2}{2}\right)^2}{2(\sigma^2 + k\Omega^2)} \right] \right] \right)}$$

La distribution de $-2\ln(L)$ suit asymptotiquement celle d'une *Khi 2* à p degrés de liberté dans l'hypothèse $H0$, où p est le nombre de paramètres.

Chapitre 2 : La modélisation actuarielle du passif régime général

I. Introduction :

Pour la modélisation de notre passif, nous nous basons essentiellement sur des simulations démographiques qui nous permettent par de projeter les engagements de notre régime. Ces simulations ont été établies sur la base d'un ensemble d'hypothèses actuarielles à travers une analyse de l'historique du RCAR, ce qui nous permet d'avoir une modélisation du passif plus simple et plus proche de la réalité du régime sans entrer dans de lourd calcul.

Les hypothèses primordiales pour la population déjà présente dans le système sont comme suit :

- ✓ **Méthode de Calcul** : Nous nous plaçons dans un univers ouvert que nous définirons les lois d'entrée et de sortie.
- ✓ **Table de mortalité** : Table TV 88-90 pour les cotisants et les retraités. Pour les invalides nous utilisons la table PF 60-64. Ces tables nous permettent de schématiser les différentes lois de sorties et d'entrées de la population du régime tout en calculant les prestations actuarielles probables en moyenne.
- ✓ **L'âge de retraite** : Pour faciliter la modélisation, nous supposons qu'aucune retraite anticipée n'existe dans le régime. Ainsi à l'âge de 60 ans, tous les cotisants toujours en vie rentreront en retraite.
- ✓ **Les prestations** sont servies annuellement et à terme échu. Annuellement les pensions se verront revalorisées d'une hausse de 3% vu l'augmentation du salaire que connaît les cotisants.
- ✓ **Salaire** : l'évolution du salaire se fera chaque année selon la tranche d'âge : de 4.5% pour les cotisants entre 20 et 35 ans, de 4% entre 35 et 50 ans et de 3.5% pour le reste.
- ✓ **Différence d'âge entre le cotisant et son conjoint** : Au sein du régime 83% sont des hommes plus âgés de 5 ans en moyenne de leurs conjoints. Ainsi pour des fins de projection des pensions réversibles, l'hypothèse de différence d'âge de 5 ans a été adoptée.
- ✓ **Probabilité d'invalidité** : Fixer à 0,02% quel que soient l'âge et le sexe, cette probabilité nous permet de calculer par la suite le nombre d'invalides dans notre régime et ainsi leur pension.
- ✓ **Taux de nuptialité** : un Taux de 95% sera adopté afin de projeter les charges des orphelins et des allocations familiales.
- ✓ **Le pécule** : Nous ignorerons le pécule dans notre modélisation .

- ✓ **Loi d'entrée** : Nous considérons que chaque année, notre régime connaît une évolution nette globale de 1%. Ainsi, les nouveaux retraités, les actifs décédés, les invalides seront remplacés et leurs pensions se verront financer par les nouveaux cotisants.

Ainsi notre modélisation se basera essentiellement sur : un calcul actuarielle des engagements envers les anciens et les nouveaux retraités, leurs conjoints ,les orphelins, et les invalides .

II. Détermination de l'état de l'assuré

Les différents états de l'assuré sont au nombre de quatre :

- ✓ Etat cotisant
- ✓ Etat d'invalidité
- ✓ Etat de décès et donc sa rente est renversée a son conjoint
- ✓ Etat de retraité



Figure 13: les différents états de l'assuré²⁹

L'état hors portefeuille désigne les anciens cotisants ou retraités décédés et dont leurs conjoints et descendants sont aussi décédés ou ne respectent pas les conditions d'octrois de la pension réversible.

III. Le stock des cotisants :

Dans cette section, nous présentons en deux parties disjointes, les cotisants déjà affiliés au régime, et les nouveaux cotisants qui viennent de l'intégrer :

III.1 Les cotisants déjà présents dans le système :

Les cotisants déjà affiliés au sein de notre système, connaissent une diminutions de leurs effectifs annuellement vu la mortalités ou les sorties en invalidités .Leur salaire se voit revalorisé chaque année suivant la formule

$$S(x,t)=S(x-1,t-1)*(1+i)$$

Avec

- $S(x,t)$: le salaire de la population à l'âge x dans l'année t

²⁹ Source : Figure réalisée par nos soins

- i : taux de revalorisation

Les taux de revalorisation suivent ceux indiqués dans nos hypothèses précédentes :

Tranche d'âge	Taux annuel moyen
20	4,50%
35	4,00%
50	3,00%

Tableau 3: Revalorisation des salaires des cotisants.³⁰

La cotisation est estimée à 18% annuellement
Ainsi les cotisations se calculeront comme suit :

- $Cotisation(t) = \sum S(x, t) * 0.18$

Une fois le cotisant subit le décès ou l'invalidité, sa rente réversible se calcule de la suite :

$$R(x-5, t) = tx * (2\% * \text{Max}(\text{anc}, 30) * S(x, t))$$

Avec :

- ✓ $R(x-5, t)$: représente la rente du conjoint âgé de $x-5$ (vu l'hypothèse de différence d'âge) à l'année t
- ✓ tx : définit le taux de réversion de la pension : fixé à 50% dans notre régime
- ✓ anc : qui définit l'ancienneté du cotisant dans le système avant son décès, en d'autres termes le nombre de cotisations qu'il a déjà payé .

III.2 Les nouveaux cotisants

Comme indiqué dans les hypothèses de départ, la projection du passif se fait selon une approche du groupe ouvert. Ainsi, nous prenons en compte les flux de cotisations et les prestations relatifs aux prochaines générations qui intégreront notre régime et dont ils ne sont toujours pas membres. Autrement dit, il y'a prise en considération des nouveaux cotisants entrants, ce qui correspond au fonctionnement normal du régime. Pour des soucis de simplicités, nous avons choisi de répartir les nouveaux entrants selon des âges quinquennaux afin de faciliter le codage.

Age	Proportion	Salaire
20	6,00%	70% * salaire moyen
25	50,00%	80% * salaire moyen
30	25,00%	90% *salaire moyen
35	10,00%	Salaire moyen
40	5,00%	110% *salaire moyen
45	2,00%	120% *salaire moyen
50	1,00%	130% *salaire moyen
55	1,00%	140% *salaire moyen

Tableau 4: Loi d'entrée des nouveaux cotisants

³⁰ Tableau réalisé par nos soins.

Le salaire des nouveaux cotisants est estimé par un pourcentage du salaire moyen de l'ensemble de notre population. Une fois dans le système, les nouveaux cotisants subissent les mêmes hypothèses aux détails près, que les cotisants déjà présents.

III.3 Les sorties de l'état cotisant :

La vie du cotisant peut être résumer suivant le schéma suivant :

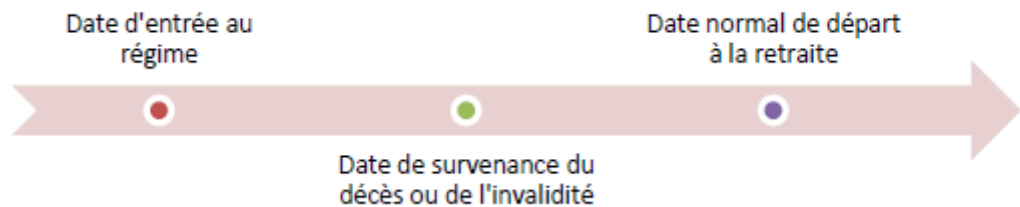


Figure 14: Représentation des sorties possible du régime

Ainsi, les seules sorties possibles de son état de cotisant seront :

- Le décès
- L'invalidité
- La retraite

✓ **Décès** : Le flux des cotisants d'un groupe g d'âge x décédés à l'année n est donné par :

$$D(x,t) = \text{Actif}(x-1,t-1) * (1 - l_x / l_{x-1}) \text{ avec :}$$

- $D(x,t)$: le nombre de décès a l'année t de la population d'âge x .
- $\text{Actif}(x-1,t-1)$: le stock des cotisants actifs d'âge $x-1$ à l'année $t-1$.
- l_x : la population fictive d'âge x de notre table de mortalité.
- l_x / l_{x-1} : la probabilité de survie des cotisants d'âge x .

✓ **Invalidité** : Le flux des cotisants qui tombent invalides à l'année n et d'âge x est donné par :

$$I(x,t) = \text{Actif}(x-1,t-1) * P_i(x,t) \text{ avec :}$$

- $I(x,t)$: le flux des invalides de l'année t d'âge x
- $P_i(x,t)$: la probabilité de tomber dans l'invalidité à l'année t de la population d'âge x . Dans notre cas elle sera fixée à 0.02%

Une fois invalide, le calcul de la pension se fait comme suit :

$$PI(x,t) = 2\% * \text{Max}(30, \text{anc}) * S(x-1,t-1) \text{ avec :}$$

- $PI(x,t)$: Pension d'invalidité à l'âge x à l'année t
- Anc : le nombre total de cotisations déjà payées avant la sortie en invalidité
- $S(x-1,t-1)$: le dernier salaire perçue avant l'invalidité.

- ✓ **Retraite** : Si nous nous intéressons aux cotisants atteignant l'âge normal de retraite, que nous noterons r , les sorties en retraite sont données alors par :

$$R(r,t) = \text{Actif}(r-1,t-1) * (l_r/l_{r-1}) \text{ avec}$$

- $r=60$ qui représente l'âge de la retraite dans notre situation.
- l_r/l_{r-1} : représente la probabilité pour que le cotisant d'âge 59 survive à l'âge 60

Ainsi la pension des nouveaux retraités se voit calculée comme suit :

$$P(x,t) = 2\% * \text{anc} * S(r-1) \text{ avec :}$$

- $P(x,t)$: Pension de retraite à l'âge x à l'année t .
- Anc : le nombre total de cotisations déjà payées par le retraité avant sa retraite.
- $S(r-1)$: le salaire final qu'a connu le retraité avant sa retraite.

IV. Le stock des retraités :

Les retraités connaissent de leurs côtés une augmentation de leurs effectifs chaque année dû aux nouveaux retraités qui atteignent l'âge de 60 ans. Nous considérons que le décès est le seul risque qui peut affecter cette population.

Au moment du décès, la pension sera reversée de moitié aux conjoints :

$$PR(x-5,t) = 50\% * R(x,t) \text{ Avec :}$$

- $PR(x-5,t)$: la rente reversée au conjoint d'âge $x-5$ à l'année t .
- $R(x,t)$: dernière rente perçue par le défunt d'âge x à l'année t .

Chaque année les pensions de retraitées et de leurs conjoints se voient revalorisées par une augmentation de 3%.

V. Stock des conjoints :

Les conjoints touchent une pension reversée de 50%, leur seule loi de sortie est donc le décès selon la même table de mortalité TV 88-90. La différence d'âge qui sépare le conjoint du cotisant ou du retraité est estimée à 5 ans. Une fois décédé, ou les conditions de réversion ne sont plus respectées, les conjoints quittent automatiquement le régime.

Le stock des conjoints est composé de :

- ✓ **Stock des conjoints des cotisants décédés en activité ;**
- ✓ **Stock des conjoints des retraités décédés ;**
- ✓ **Stock des conjoints des cotisants invalides décédés.**

La pension des conjoints se voit elle aussi revalorisée d'une hausse de 3% annuelle.

Partie III : APPLICATION

Chapitre I : présentation du portefeuille RCAR :

I. Présentation du portefeuille actif :

Au terme de l'exercice 2017, le total net des emplois a atteint 103.195,52 MDH contre 99.231,69 MDH en 2016, soit une hausse de 3,99%.

Actif (en MDH)	2017	2016	Var %
Immobilisations en non valeurs	17,25	27,2	-36,58
Immobilisations corporelles & incorp.	68,04	73,92	-7,95
Immobilisations financières	33,17	36,92	-10,16
Placements	99 901,60	95 093,75	5,06
Créances actif circulant	3 175,47	3 482,57	-8,82
Trésorerie – Actif	-	517,33	-100
Total	103 195,52	99 231,69	3,99

Figure 15 : Montant de l'actif du portefeuille en 2017³¹

Le montant des placements, après amortissements et provisions, se chiffre à 99.901,59 MDH, en hausse de 5,06% par rapport à l'exercice précédent. Représentant 96,81% du total des emplois, ce montant est composé des classes d'actifs récapitulées dans le tableau ci-après.

Classe d'actifs	2017	En %	2016	Variation (En %)
Obligations et bons	47 538,59	47,59	55 866,84	-14,91
Actions et parts sociales	51 089,44	51,14	37 921,08	34,73
Placements immobiliers	1 272,08	1,27	1 304,27	-2,47
Prêts et effets assimilés	1,48	-	1,57	-5,73
Total RG	99 901,59	100,00	95 093,76	5,06

Le portefeuille « Obligations et bons » a atteint un montant de 47.538,59 MDH, représentant 47,59% du total des placements, contre 55.866,83 MDH en 2016, soit une baisse de 14,91%.

Le portefeuille « Actions et parts sociales », qui représente 51,14% du total des placements, se chiffre à 51.089,44 MDH contre 37.921,08 MDH en 2016, en augmentation de 34,73%.

³¹ Source : rapport RCAR VF 2017

Les placements immobiliers, en baisse de 2,47%, ont atteint 1.272,08 MDH contre 1.304,27 en 2016.

Enfin, quant au montant des créances de l'actif circulant, il s'élève à 3.175,47 MDH contre 3.482,57 MDH en 2016, en baisse de 8,82%.

Comme l'ensemble des « actions » et « obligations et bons » représentent 98% dans notre portefeuille d'actif, alors dans la suite de ce rapport, nous nous intéressons qu'à ces deux catégories d'actifs .

Pour l'année 2019 le budget de notre portefeuille fictive est estimé à 90 MDH , réparti comme suit :

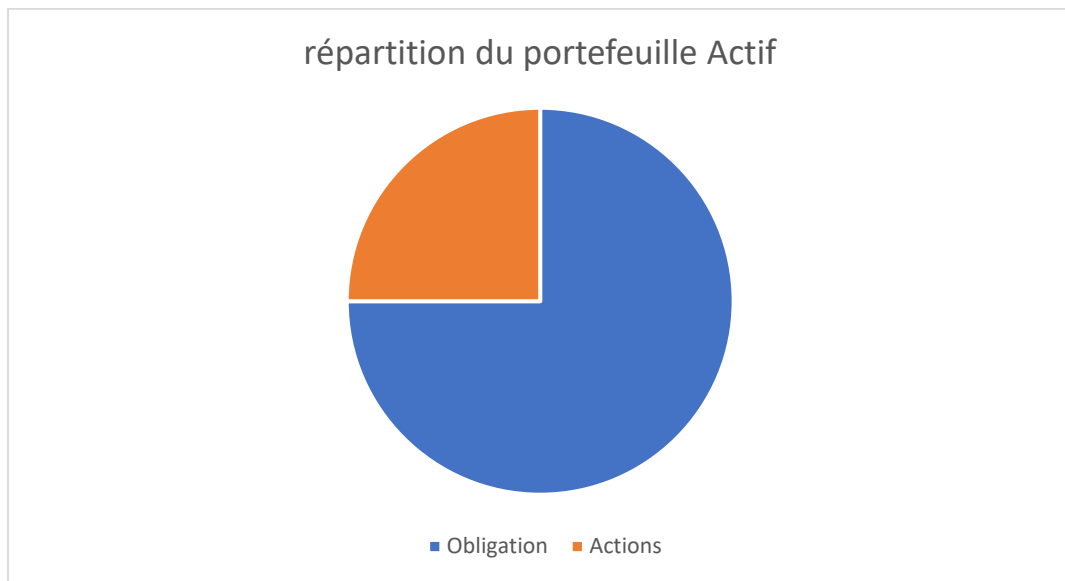


Figure 16: répartition du portefeuille Actif³²

75% est constitué d'obligation, soit environ 67.5MDH , contre 22.M DH en actions .

Obligation :

Notre portefeuille d'obligations est composé de Bons de Trésors (BT), d'obligations de sociétés cotés ou non à la bourse, et d'organismes de placements collectif en valeurs mobilières (OPCVM)³³

³² Figure réalisée par nos soins en utilisant le logiciel Excel et les données interne du RCAR

³³ Un organisme de placements collectif en valeurs mobilières (**OPCVM**) est un portefeuille dont les fonds investis sont placés en valeurs mobilières ou autres instruments financiers.

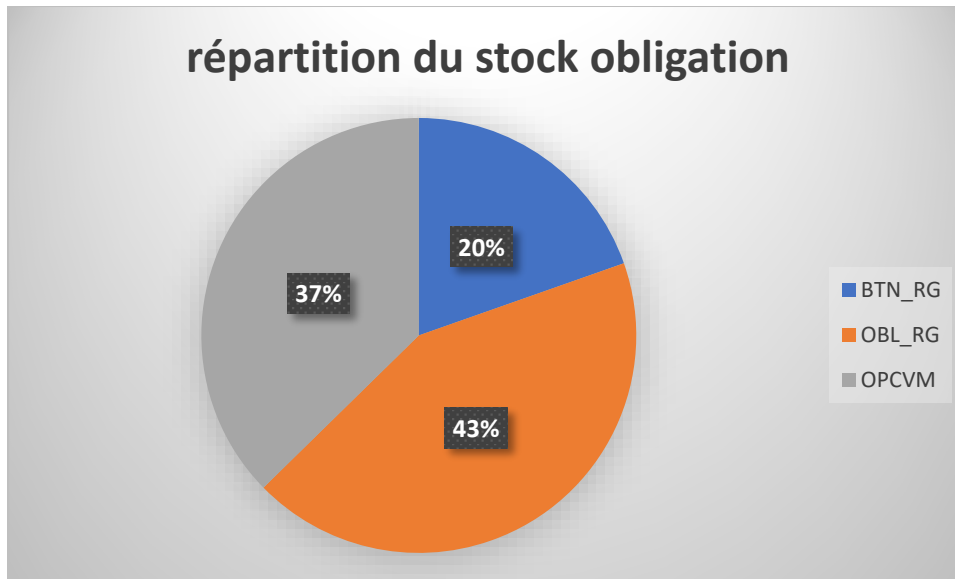


Figure 17: Répartition du stock obligation³⁴

Pour les Obligations et les bons de trésors qui constituent respectivement 43% et 20% dans notre portefeuille obligataire, leurs taux faciaux varient de 2.1% à 5.95% selon leurs maturités qui varient de 5 à 30 ans, soit d'une moyenne de 4.61% et une maturité moyenne de 17 ans.

Actions

Notre portefeuille Actions est composé de plus de 60 actions que nous avons choisi de répartir suivant les indices boursiers présent au sein de la bourse de Casablanca : Agroalimentaire et production , Assurance , Banque , Bâtiment et Matériaux de Construction , chimie , Distributeurs , Matériels, Logiciels et Services Informatiques , Mine, Participation et promotion immobilières , Pétrole et Gaz , Service de transport , Sociétés de financement et autre autres activités financières , Société de portefeuilles /Holdings , Télécommunication et autres . Le graphe ci-dessous traduit la pondération de chaque indice au sein de notre portefeuille.

³⁴ Figure réalisée par nos soins en utilisant le logiciel Excel et les données interne du RCAR

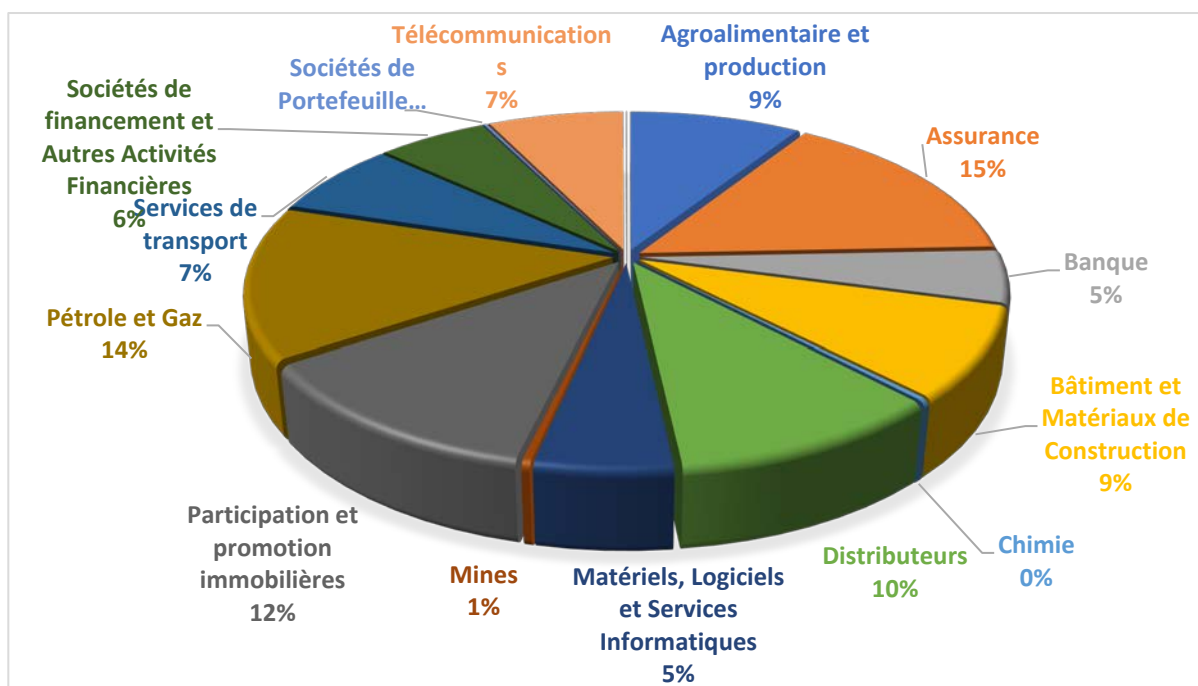


Figure 18: Répartition des indices boursiers au sein de notre portefeuille actif³⁵

Les indices les plus pondérant au sein de notre portefeuille sont : Assurance, Pétrole et Gaz, Participation et promotion immobilières. Ils constituent plus au moins 50% dans notre portefeuille. Durant la modélisation, nous nous concentrons sur ces derniers indices.

II. Présentation du portefeuille Passif

Afin de pouvoir réaliser une prévision des engagements futurs de notre régime, une analyse descriptive de notre base de données s'impose.

L'étude de l'historique se porte sur les données publiées par le RCAR dans ses rapports financiers de fin 2017 vu que le rapport 2018 n'est toujours pas ouvert au public. Mais notre portefeuille d'étude sera constitué de donnée fictive décrivant la vraie situation pour l'année actuel.

II.1 Les cotisants :

La base de données de l'année 2019 est constituée de cotisants âgés de 20 à 59 ans, avec un effectif total de 113240 cotisants.

³⁵ Figure réalisée par nos soins selon les données interne du RCAR et les indices boursiers de la bourse de Casablanca

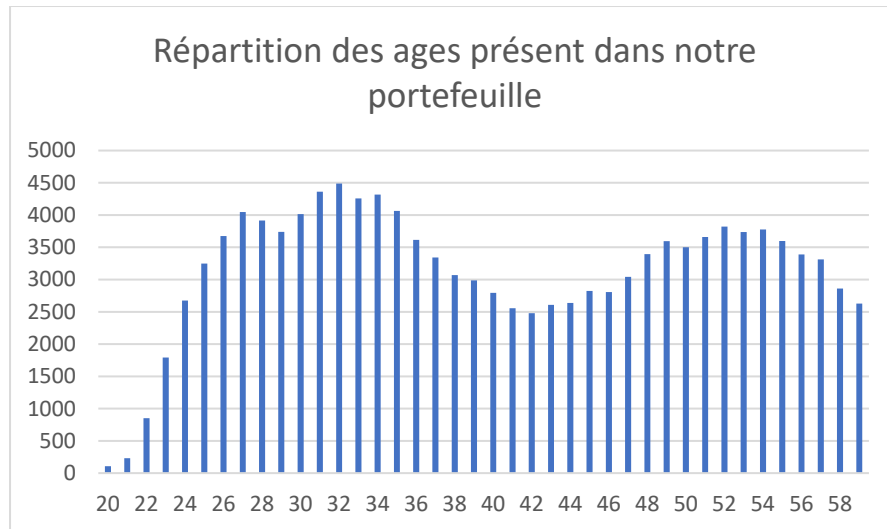


Figure 19: Répartition des âges des actifs pour 2019³⁶

A noter qu'entre 2016 et 2017, cet effectif a connu une augmentation de 17%, suite au recours de l'Etat aux recrutements sous forme de contrat à durée déterminée (CDD), en dehors de ces années, l'effectif avait augmenté d'une moyenne de 1% nette annuelle.

Le salaire moyen a historiquement augmenté d'environ 2.6% annuellement. Ainsi pour 2019, le salaire de notre population s'élève à 96435 dhs, pour un salaire maximal de 113400dh réparti comme suit :

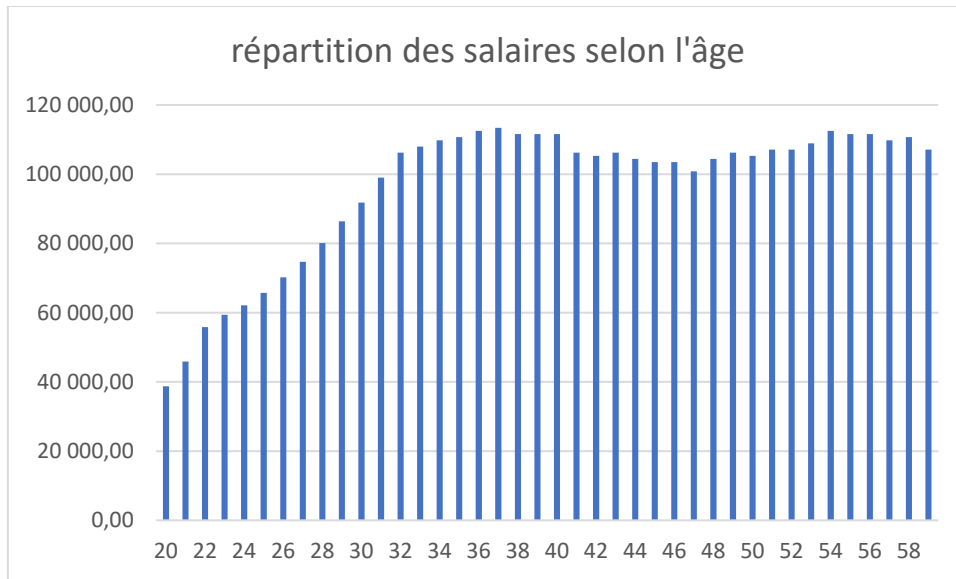
```

2019
Min.      : 38700
1st Qu.  : 90450
Median   :106200
Mean     : 96435
3rd Qu.  :110025
Max.     :113400
    
```

Figure 20: Descriptif des salaires pour l'année 2019³⁷

³⁶ Graphe réalisé par Excel.

³⁷ Réalisé via l'outil R.

Figure 21: Répartition des salaires selon l'âge³⁸

A noter que le salaire plafond de l'année 2018, a été fixé à 17 500dh mensuel pour chaque cotisant, qui a été de sa part augmenter de 400 dhs afin de couvrir l'augmentation du salaire moyen.

Pour rappel notre régime n'assure que les salaires ne dépassant pas le salaire plafond, pour la différence, c'est le régime complémentaire qui s'en occupe.

Année	Plafond mensuel (en DH)	Taux de revalorisation (en %)
2009	13 350	3,49
2010	13 800	3,37
2011	14 220	3,04
2012	14 670	3,16
2013	15 178	3,46
2015	15 651	3,12
2016	16 117	2,98
2016	16 600	3,00
2017	17.100	3,01
2018	17.500	2,34

Figure 22 : revalorisation2 du plafond de salaire mensuel³⁹

L'ancienneté moyenne par cotisant varie de sa part d'un peu près 0.65 année pour les nouveaux entrants de l'année 2019 à 24 ans pour les plus âgée du système avec une moyenne de 10.295 années de service.

³⁸ Réalisé avec l'outil Excel

³⁹ Source : Rapport VF RCAR 2017

Partie III : APPLICATION

2019
Min. : 0.650
1st Qu. : 4.253
Median : 9.065
Mean : 10.295
3rd Qu. : 17.142
Max. : 23.430

Figure 23: descriptif de l'ancienneté moyenne⁴⁰

Pour rappel, pour chaque année de service, le régime verse 2% du salaire final. Ainsi la répartition de l'ancienneté peut être décrite comme suit :

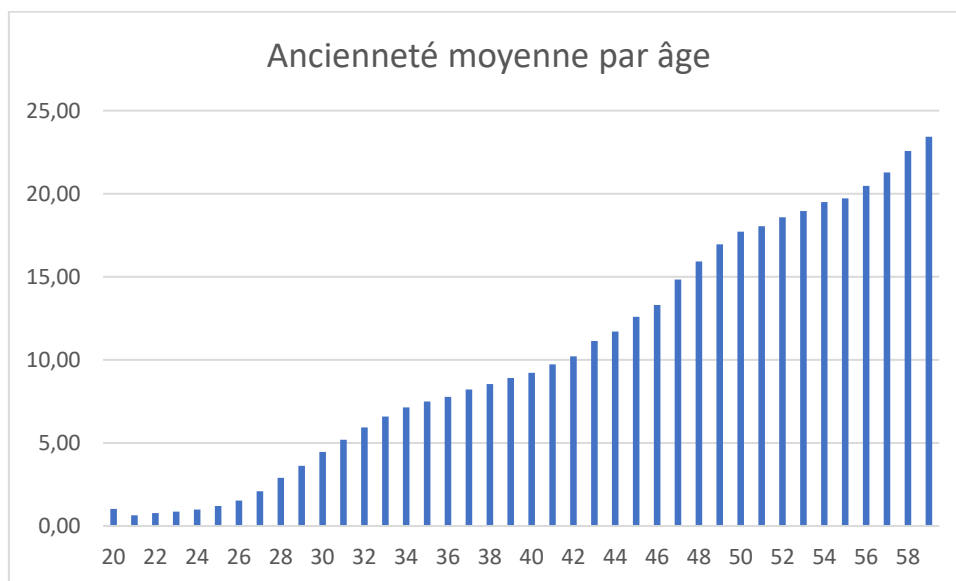


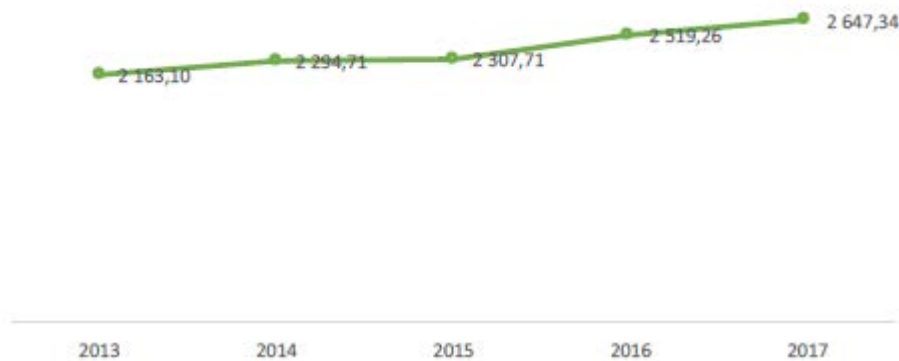
Figure 24: Ancienneté moyenne par âge pour l'année 2019⁴¹

Pour les cotisations et les contributions recouvrées, au titre des régimes général et complémentaire, elles se sont élevées pour l'année 2017 à 2.790,38 MDH contre 2.664,05 MDH, en hausse de 4,74% par rapport à 2016.

⁴⁰ Réalisé par nos soins à travers le logiciel R

⁴¹ Réalisé par nos soins à travers le logiciel Excel

Evolution des cotisations (en MDH)

Figure 25: Evolution des cotisations au cours des dernières années⁴²

Pour 2019, les cotisations estimées dans notre portefeuille fictive sont évaluées à 2726,69 MDHs

II.2 Prestations :

Le RCAR assure des prestations au profits de 130 000 d'allocataires de pensions. Ces pensions sont composées de pensions en faveur des retraités, des invalides, des orphelins et des conjoints. Les pensions des retraités et conjoints représentent plus au moins 90% des prestations totales.

Pour l'année 2017, les caractéristiques des pensionnées sont représentées dans le tableau suivant

Catégorie	Effectif	Pension annuelle allouée (MDH)	Provisions mathématiques (MDH)	Pension annuelle moyenne	Age moyen
Retraités	77 695	4 669,35	55 331,12	60.098,51	66
Invalides	986	48,28	606,04	48.963,98	62
Conjoints	40 319	739,04	6 130,77	18.329,93	71
Orphelins	5 656	88,4	362,62	15.629,03	15
Orph. invalides	1126	21,99	328,77	19.527,13	45
TOTAL	125 782	5 567,06	62 759,32		

Figure 26: Pensions payés pour l'année 2017⁴³

L'évolution du nombre des bénéficiaires des pensions au cours des dernières années est décrite comme suit

⁴² Source : Rapport RCAR VF 2017

⁴³ Source : Rapport RCAR VF 2017

Evolution du nombre des bénéficiaires de pensions

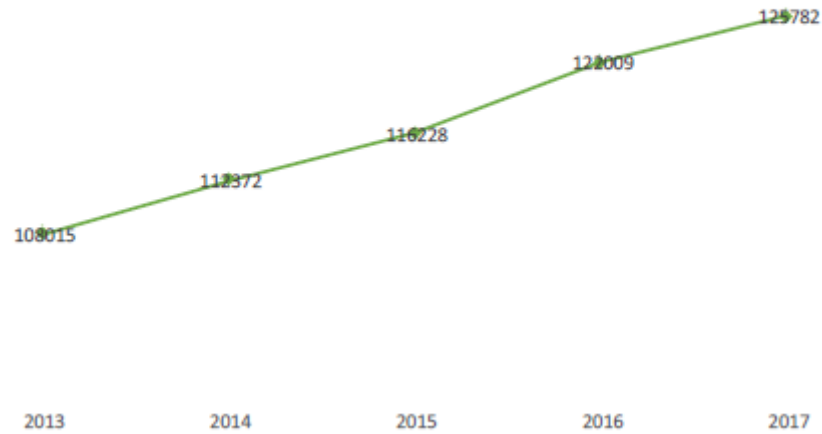


Figure 27: Evolution de l'effectif des pensionnaires⁴⁴

Ainsi, nous remarquons une hausse annuelle d'environ 3% de l'effectif. Cette hausse si elle n'est pas couverte aux fils des années risque de poser un problème dans la gestion d'actif passif surtout que l'Etat suit une politique de privatisation et baisse le taux de recrutements de nouveaux cotisant.

Dans la suite de ce mémoire, nous nous intéressons spécialement aux retraités et aux conjoints. Pour les invalides, les pécules et les orphelins, nous leurs attribuons un pourcentage de nos dépenses de l'ordre respectif de 0.05%,0.04% et 0.2%.

Retraité

Constituant 60% de nos dépenses, le nombre des retraités en 2019 est d'environ 78 000 allocataires. L'âge minimal des retraités déjà présent au sein de notre régime est de 41 ans, pour les personnes ayant déjà eu leurs retraites anticipées, et arrive jusqu'à 110 ans.

⁴⁴ Source : Rapport RCAR VF 2017

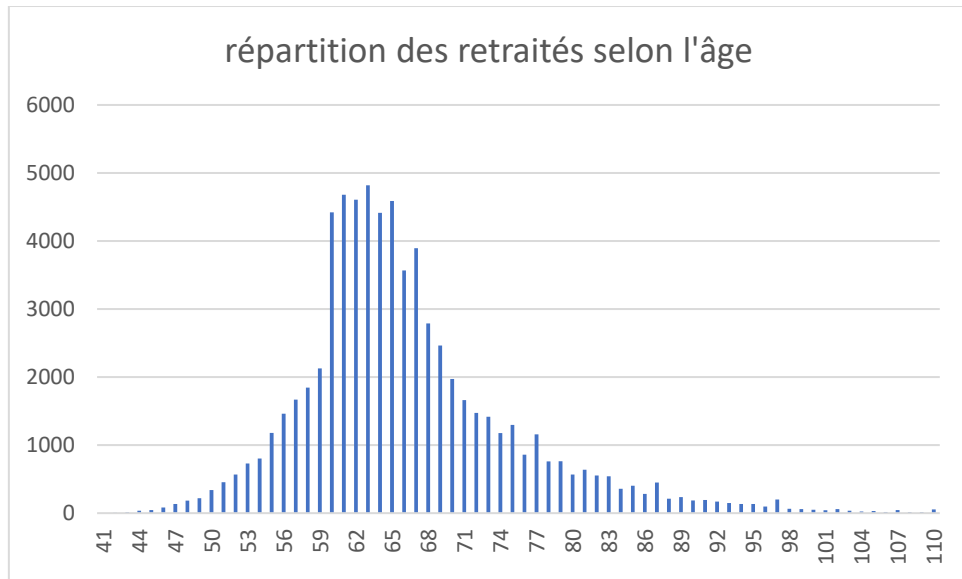


Figure 28: concentration de l'effectif des retraités

La grande concentration de notre effectif se situe au sein de l'intervalle [60,68] , pour les plus âgés , le baisse de l'effectif réside dans la hausse de la probabilité de décès ou d'invalidité et donc leurs rentes se voient généralement reversé à leurs conjoints ou descendants .Le risque de longévité est aussi présent dans notre portefeuille vu que pour 110 ans, les nombres de retraités est loin d'être quasi nulle, contrairement à la table de mortalité qui estime l'âge maximal de survit a 106 ans .

Pour les pensions moyennes des retraités, elles sont de l'ordre de 3140dh mensuels. Leurs répartitions annuelles suivent le graphe suivant :

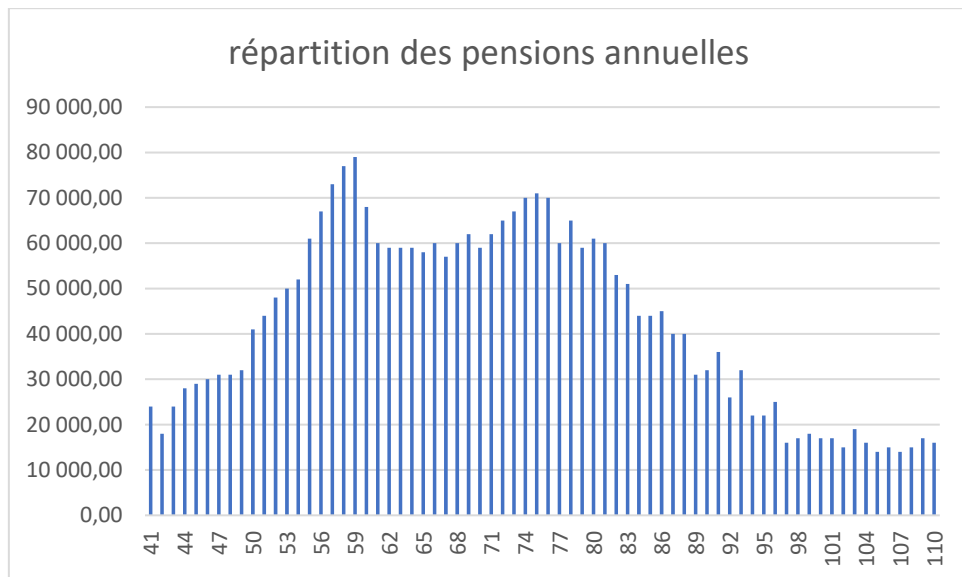


Figure 29: Répartitions des pensions annuelles⁴⁵

⁴⁵ Graphe réalisée par nos soin à travers les données fictive via Excel.

Pour les retraités d'âge 56 à 66 ans, le poids de leurs prestations dépasse 70% des dépenses totales vu leurs concentrations en termes d'effectifs et leurs rentes mensuelles qui dépassent la prestation moyenne. Le graphe ci-dessous décrit la répartition des poids des prestations selon l'âge pour l'année 2019.

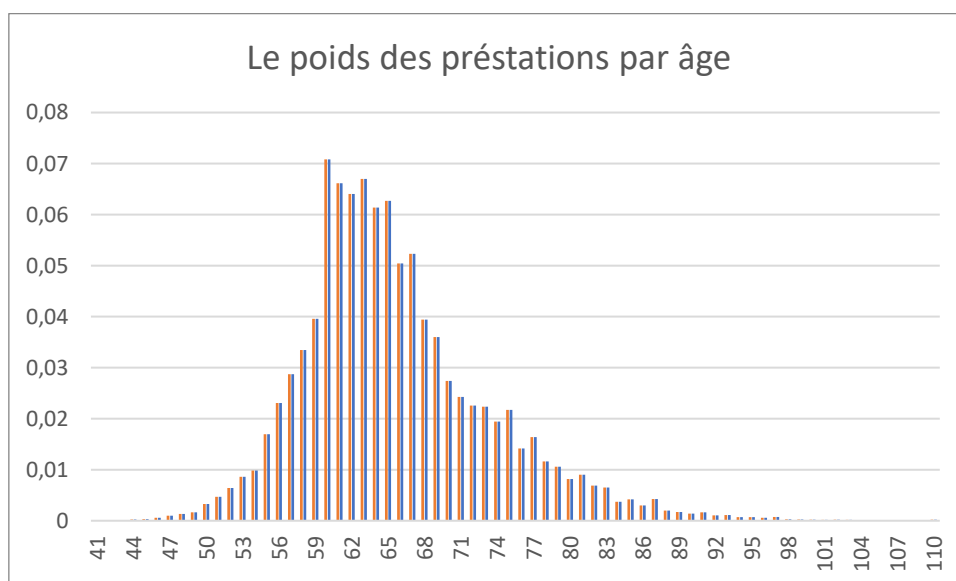


Figure 30: répartition du poids des dépenses des retraités⁴⁶

Pour l'année 2019, les prestations de retraites totales sont à elles seules estimées à 4.9MDH, tandis que leurs provisions sont estimées à 62MDH.

Conjoints :

Les conjoints de leurs parts représentent environ 30% dans notre portefeuille passif, soit un total dans les alentours de 37 000 pensionnés. Avec 73% de conjoints femmes, la répartition des effectifs des conjoints sont représentés dans le graphe suivant :

⁴⁶ Réalisé par l'outil Excel via les données interne.

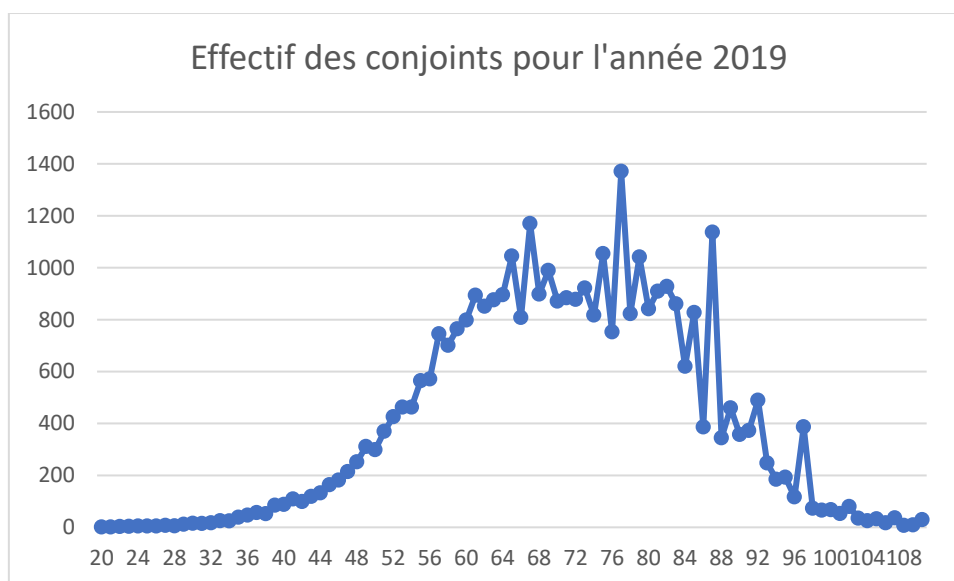


Figure 31: Répartition de l'effectif des conjoints⁴⁷

Pour la pension moyenne, vu que la rente des conjoints représente 50% du salaire du cotisant, la pension moyenne du régime pour les conjoints est alors estimée à 1500 dhs mensuel .

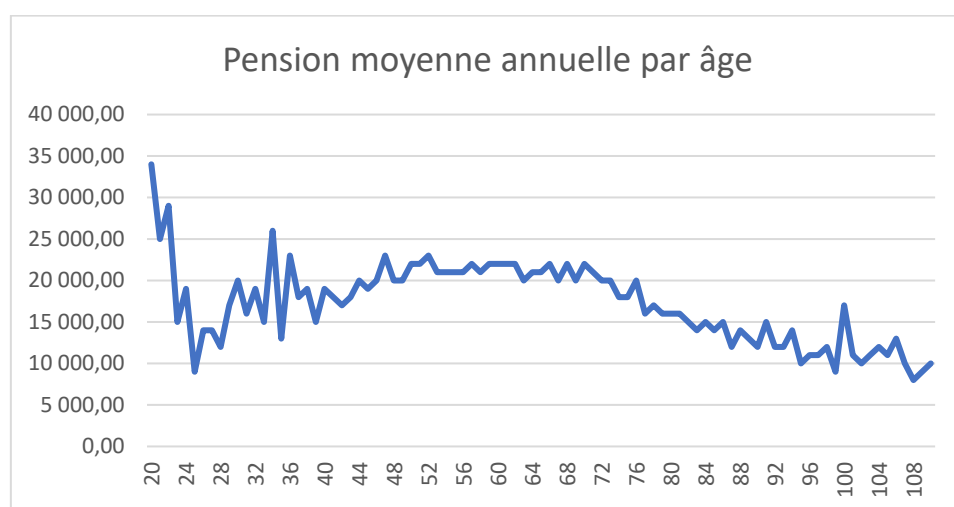


Figure 32: Pensions moyennes des conjoints

En résumé, pour les conjoints, leurs prestations totales approche la barre des 1MDHs.

En prenant en compte les frais de gestions, les prestations des orphelins, les allocations familiales, les invalides et les pécules, les prestations de l'année 2019 sont de 5.9 MDH , comparé à 5.3MDH pour l'année 2017 .

⁴⁷ Réalisé par nos soin avec Excel

Chapitre 2 : Projection du portefeuille du régime

I. Actif :

Au cours de cette partie, nous nous concentrons sur l'application des modèles cités précédemment au sein de notre portefeuille actif. La modélisation reposera dans cette partie sur les taux d'intérêt et les actions.

I.1 MODELISATION DE LA COURBE DES TAUX :

1) Présentation des données :

Afin d'estimer les paramètres de notre modèle, nous avons choisis d'utiliser comme taux de court terme, le taux moyens des bons de trésor de 1 an que nous obtenons à travers le site de Bank al Maghrib. Ainsi, les données utilisées seront des données journalières s'étalant du juin 2014 à juin 2019

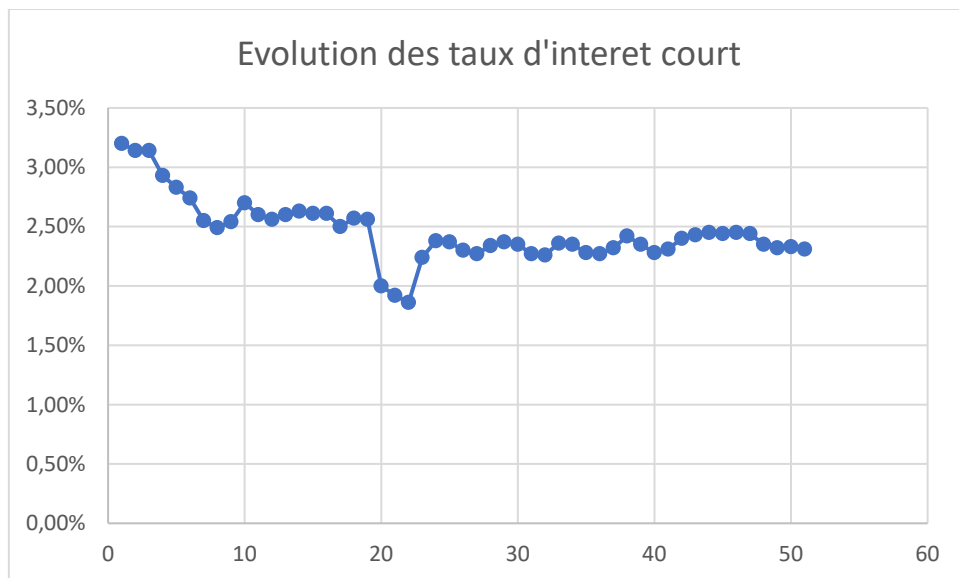


Figure 33:évolutions des taux d'intérêt court

Or la baisse des taux qu'a connu le Maroc en 2016 où les taux moyens ont atteint les 1.7% pour le court terme, les taux d'internet des dernières années varient de 2.2% à 2.5% environ .

Analyse de donnée :

Avant de commencer notre estimation, il faudrait tout d'abord vérifier la stationnarité de notre série. Nous utilisons à cet effet le package « aTSA » disponible sous R afin d'utiliser le test de racine unitaire (le test de Dickey-Fuller)

```

> adf.test(t)
Augmented Dickey-Fuller Test
alternative: stationary

Type 1: no drift no trend
      lag  ADF p.value
[1,]   0 -1.34  0.195
[2,]   1 -1.09  0.286
[3,]   2 -1.24  0.231
[4,]   3 -1.21  0.244
Type 2: with drift no trend
      lag  ADF p.value
[1,]   0 -3.02  0.0426
[2,]   1 -3.25  0.0241
[3,]   2 -3.59  0.0100
[4,]   3 -2.95  0.0484
Type 3: with drift and trend
      lag  ADF p.value
[1,]   0 -2.75  0.2685
[2,]   1 -3.24  0.0908
[3,]   2 -3.41  0.0634
[4,]   3 -2.62  0.3193
----

```

Figure 34 test de Dickey-Fuller augmenté

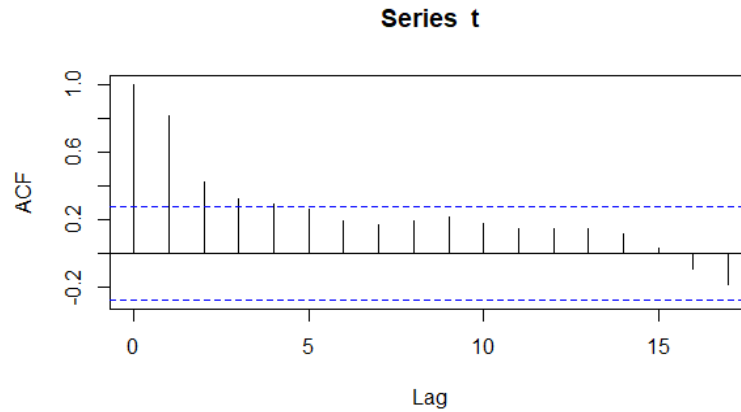
Nous comparons dans ce test la p.value des différents modèles avec celle de 0.05. Si la pvalue est supérieur a 5%, alors notre série n'est pas stationnaire.

Nous nous intéressons aux modèle avec lag=1 , vu que nous nous intéressons surtout aux série régressif d'ordre 1 .

Le premier modèle : sans dérive et sans drift se voit rejeter vu que la pvalue pour lag=1 est de 0.28 supérieur à 0.05 , et donc l'hypothèse de stationnarité n'est pas accepté .

Pour le deuxième modèle, avec dérive et sans drift, le modèle présente une pvalue de l'ordre de 0.02 inférieur a notre seuil de 0.05. Nous acceptons ainsi l'hypothèse de stationnarité et donc nous garderons ce modèle.

Nous pouvons vérifier l'hypothèse que la série est bien un autorégressif d'ordre 1 grâce à la fonction d'autocorrélation ACF:

Figure 35: test d'autocorrélation⁴⁸

Nous pouvons constater une forte autocorrélation d'ordre 1 (0.8), et donc l'hypothèse que notre série est autorégressive d'ordre 1 est confirmée.

2) *Résultat de l'estimation :*

L'estimation des paramètres de l'équation $rt = \bar{a} + \bar{b} \cdot rt-1 + \varepsilon t$ se fait par la méthode des moindres carrés ordinaires grâce à la fonction « lm » sur R. Les résultats de l'estimation sont représentés ci-dessous :

```
> sd=sqrt(sum(modele$residuals^2)/(n-2));
> summary(modele);

Call:
lm(formula = x ~ t)

Residuals:
    Min       1Q   Median       3Q      Max
-0.0052399 -0.0004051  0.0000318  0.0005133  0.0028908

Coefficients:
            Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)  0.004282   0.001486   2.882  0.0059 **
t            0.818672   0.060073  13.628 <2e-16 ***
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 0.001117 on 48 degrees of freedom
(1 observation deleted due to missingness)
Multiple R-squared:  0.7946,    Adjusted R-squared:  0.7904
F-statistic: 185.7 on 1 and 48 DF,  p-value: < 2.2e-16

> sd
[1] 0.001105922
```

Figure 36: Résultat de Régression sur R

Nous remarquons que R_2 ajusté = 0.79 est satisfaisante, ce qui signifie que modèle estimé décrit bien notre système.

⁴⁸ Réalisé par nos soins à travers le logiciel R

Pour les paramètres de la régression, nous les résumons au sein du tableau suivant :

a	0,00428
b	0,8186
$\sigma\varepsilon$	0,001106

Tableau 5 ; résultat de la régression linéaire

Ainsi , l'équation de régression s'écrit de la forme :

$$\check{r}_{t+1} = 0,004 + 0.8186 * \check{r}_t + 0.001106 * \varepsilon_{t+1}$$

Pour les erreurs, nous allons tester l'hypothèse d'homoscédasticité à l'aide du test de *Test de Goldfeld & Quandt*⁴⁹ :

```
> gqtest(modele)

Goldfeld-Quandt test

data: modele
GQ = 0.10654, df1 = 23, df2 = 23, p-value = 1
alternative hypothesis: variance increases from segment 1 to 2
```

Figure 37: Test d'homoscédasticité

Pvalue=1>>0.05 , ainsi nous pouvons rejeter notre hypothèse nulle et conclure que l'hypothèse d'homoscédasticité est bien vérifiée .

Finalement, nous vérifions s'il y a présence d'autocorrélation des erreurs en recourant au test de Durbin-Watson⁵⁰:

```
> dwtest(modele)

Durbin-watson test

data: modele
Dw = 1.6444, p-value = 0.04937
```

Figure 38: test de durbin-watson

Notre p value pour ce test est de 0.049 <5% et donc nous acceptons l'hypothèse nulle : il n'y a pas d'autocorrélation dans notre modèle.

⁴⁹ Test formulé en 1965 dans le cadre d'un modèle linéaire multiple estimé par la méthode des moindres carrés afin de savoir si les perturbations sont hétéroscédastiques ou homoscédastiques

⁵⁰ Test proposé en 1951 et destiné à tester l'autocorrélation des résidus dans un modèle de régression linéaire

Ainsi, nous obtenons après le calcul les estimations du processus de retour vers la moyenne comme suit :

- $a = -\ln(\bar{b}) = 0,20016$
- $b = \bar{a}(1-\bar{b}) = 0,023594$
- $\sigma = \varepsilon \sqrt{\frac{-\ln(\bar{b})^2}{1-\bar{b}^2}} = 0.007269$

Ces paramètres serviront ainsi à simuler plusieurs scénarii à l'aide de l'algorithme de Monte Carlo ⁵¹

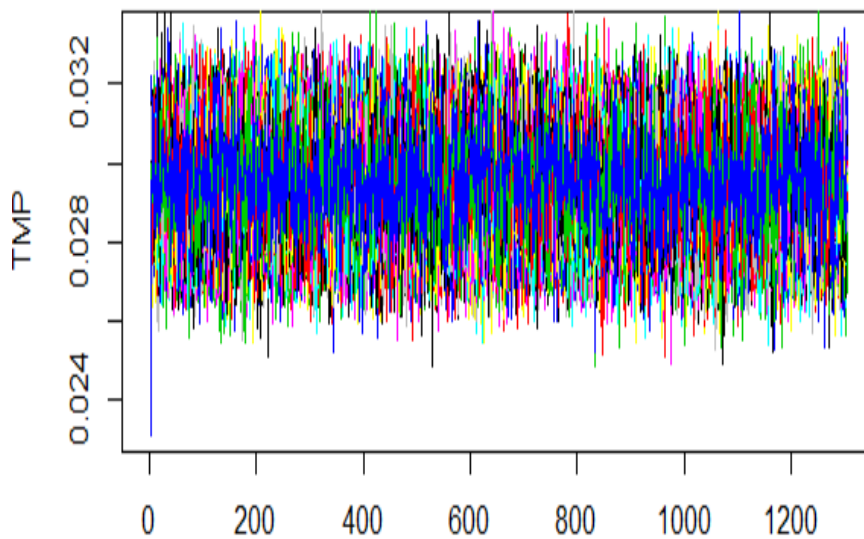


Figure 39: scénarii à travers Monte Carlo

La prochaine étape consiste à tracer le taux moyen de tous ces scénarii. Ainsi nous tracerons le taux moyen de tous ces scenarios :

⁵¹ Publiée en 1949, est un algorithme visant à calculer une valeur numérique approchée en utilisant des procédés aléatoires

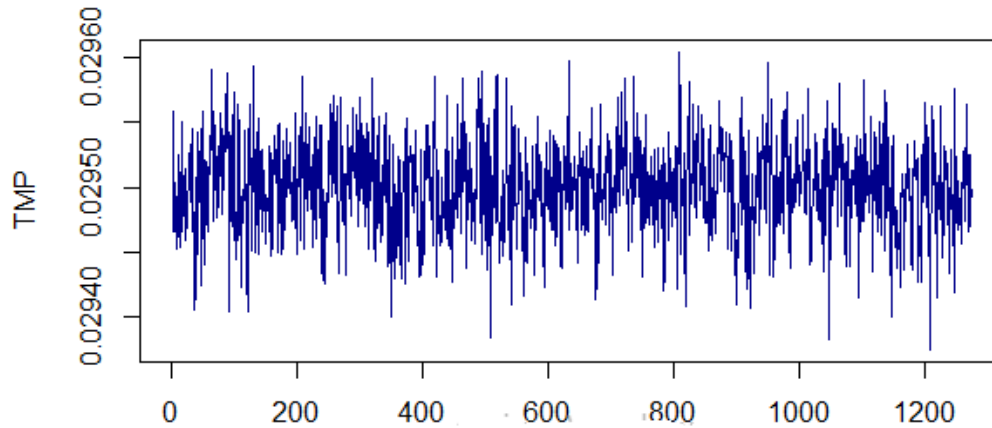


Figure 40: Taux moyen des scénarii sous Monte Carlo

Nous nous retrouvons alors avec les taux annuels décrit en annexe :

La courbe théorique de zéro coupon se déduit des coefficients obtenus par les modèles Vasicek et CIR. En effet, La solution à l'équation différentielle partielle à laquelle doit obéir le prix d'un titre est la suivante :

$$P(t,T)=A(t,T)*e^{-B(t,T)*r(t)}$$

- Pour le modèle de Vasicek :

$$A(t,T)=e^{(B(t,T)-(T-t))*(b+\frac{\sigma*\pi}{a}-\frac{\sigma^2}{2*a})-\frac{\sigma^2*B^2(t,T)}{4*a}}$$

$$B(t,T)=\frac{1-e^{-a*(t,T)}}{a}$$

Avec : a, b, σ les paramètres estimés et π est la prime de risque

- Pour le cas de CIR :

$$A(t,T)=\left(\frac{2*\gamma*e^{\frac{(a+\pi+\gamma)*(T-t)}{2}}}{(a+\pi+\gamma)*(e^{\gamma*(T-t)}-1)+2*\gamma}\right)^{\frac{2*a*b}{\gamma^2}}$$

$$B(t,T)=\left(\frac{2*(e^{\gamma*(T-t)}-1)}{(a+\pi+\gamma)*(e^{\gamma*(T-t)}-1)+2*\gamma}\right)$$

Avec : $\gamma = \sqrt{(a + \pi)^2 + \sigma^2}$ et a, b, σ les paramètres déjà estimés.

Il nous reste maintenant un seul paramètre à estimer : π afin de déterminer les prix des obligations zéro-coupon. La prime de risque π mesure le point auquel les investisseurs exigent des rendements plus élevés, mais elle n'est pas directement observée sur le marché. La méthode que nous avons utilisée consiste à déterminer la prime de risque en minimisant la somme des carrés des erreurs entre les prix réels des obligations et les prix théoriques

Ainsi pour les deux modèles nous trouverons les primes suivantes :

– Pour le modèle de Vasicek : $\pi = -0,056$

– Pour le modèle de CIR : $\pi = 15.36$

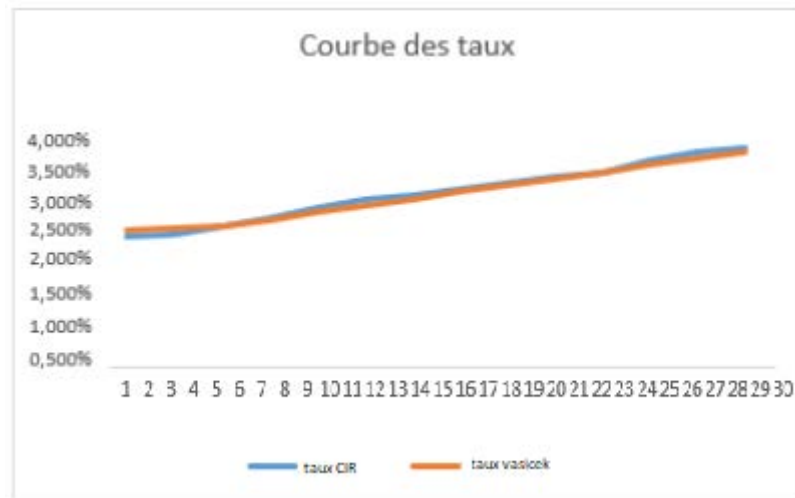


Figure 41: Courbe de zéro coupon

3) Obligations :

Comme les obligations versent des coupons chaque année d'une façon déterministe, nous pouvons facilement calculer les cash in des obligations :

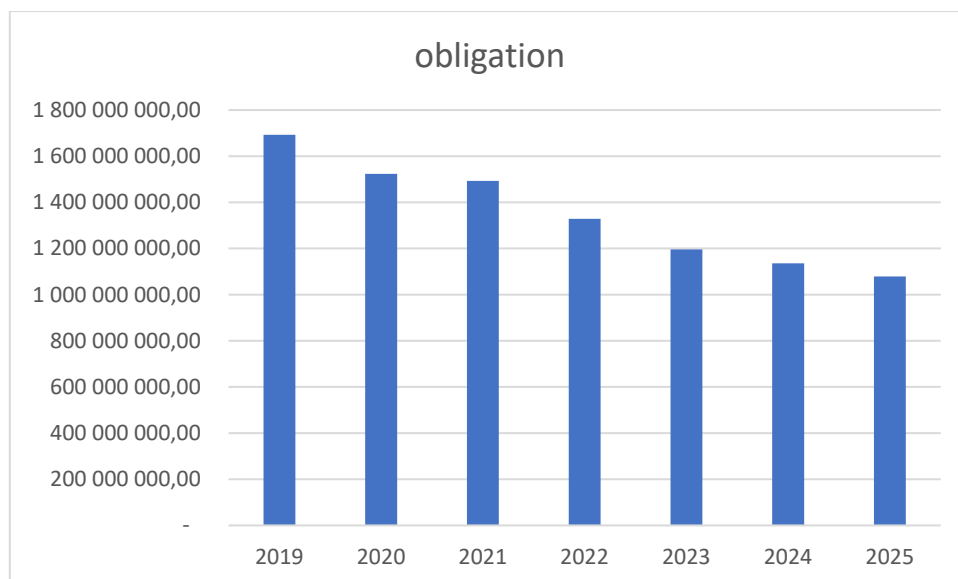


Figure 42: coupons des obligations

La baisse en termes de montant est liée aux obligations qui sont arrivés à leurs maturités et notre hypothèse qu'aucun nouveau investissement dans les obligations ne sera réalisé. En utilisant les taux zéro coupon estimés par notre modèle, nous pouvons calculer la valeur actuelle de ces flux.

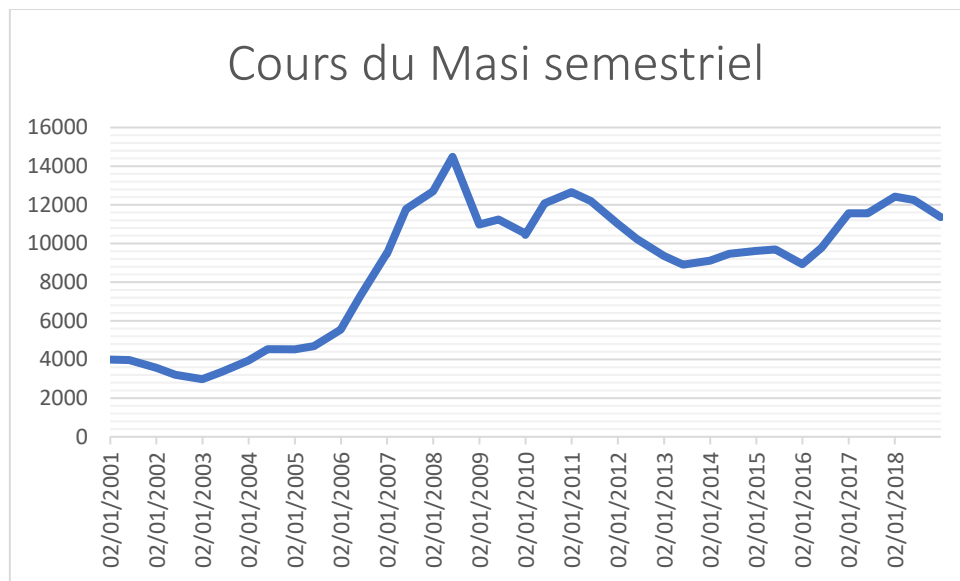
Ainsi le best estimate des obligations est estimés à $t=0$: $BE=8\,892\,097\,018,48$ dhs

I.2 Actions :

Pour les actions, nous modéliserons ci-dessous les indices qui sont les plus pondérant dans notre portefeuille à savoir : pétrole et Gaz, Assurance, distributeurs. Nous utiliserons aussi dans cette partie le cours du MASI comme référence aux autres actions selon leurs poids. Vu que nous avons besoin de modéliser le cours des actions pour du long terme, nous avons choisis d'adopter une approche semestrielle.

En effet, avec des cours journaliers, l'estimation sera très précise pour le court terme, mais perdra de sa valeur pour le moyen et long terme

1) *Modèle de Black and Scholes : Masi*



```
summary(t)
  Min. 1st Qu.  Median    Mean 3rd Qu.    Max.
 2980   7673   10007   9194   11564   14483
```

Le cours moyen de notre indice atteint les 9194 dhs, avec une très grande variation de l'ordre de 3200. Etant donné que le cours MASI représente le cours de l'ensemble des actions au sein de la bourse de Casablanca, alors en cas de crise ou de repli, le MASI capitalise l'ensemble des pertes et donc connaît de très grandes variations.

Avant d'entamer notre modélisation, il serait préférable de vérifier la normalité du rendement de l'actif.

Ainsi nous avons modéliser l'histogramme de la variation des cours pour y appliquer le test de normalité de Jarque Bera⁵² :

⁵² Jarque, Carlos M. & Anil K. Bera (1980). « Efficient tests for normality, homoscedasticity and serial independence of regression residuals ». Economics Letters

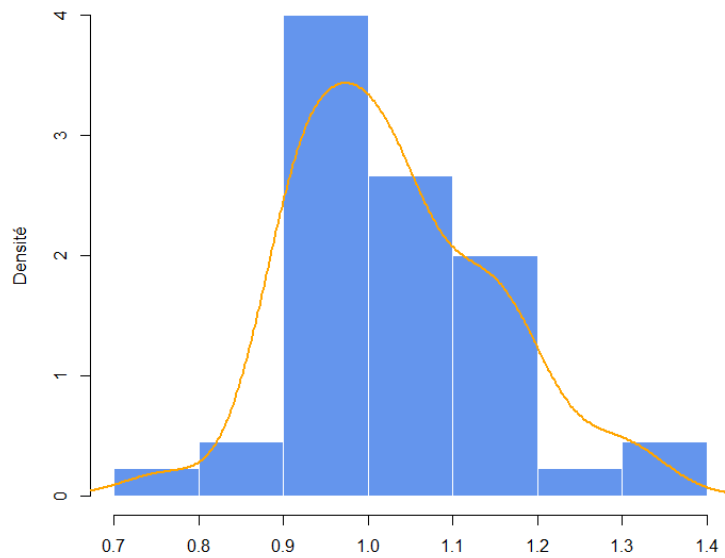


Figure 43: histogramme de la variation des cours MASI⁵³

A travers l’histogramme, nous pouvons clairement assimiler la fonction densité du rendement à une distribution gaussienne. Mais afin de nous nous assurer nous faisons appel au test de Jarque Bera :

Jarque Bera Test

```
data: r
x-squared = 1.6538, df = 2, p-value = 0.4374
```

Figure 44: test de Jarque Bera sur R

LA Pvalue=0.43 >5% et donc nous acceptons l’hypothèse nulle. Les rendements suivent bien une loi normale.

Ainsi, comme les rendements suivent une loi gaussienne, le modèle à sauts n’aurait pas lieu d’être, le modèle de Black & Scholes est suffisamment robuste pour modéliser le cours des actions.

Dans la suite nous exposerons alors les étapes à suivre pour la modélisation des titres suivant Black and Scholes que nous appliquerons par la suite aux autres indices exposés en annexe.

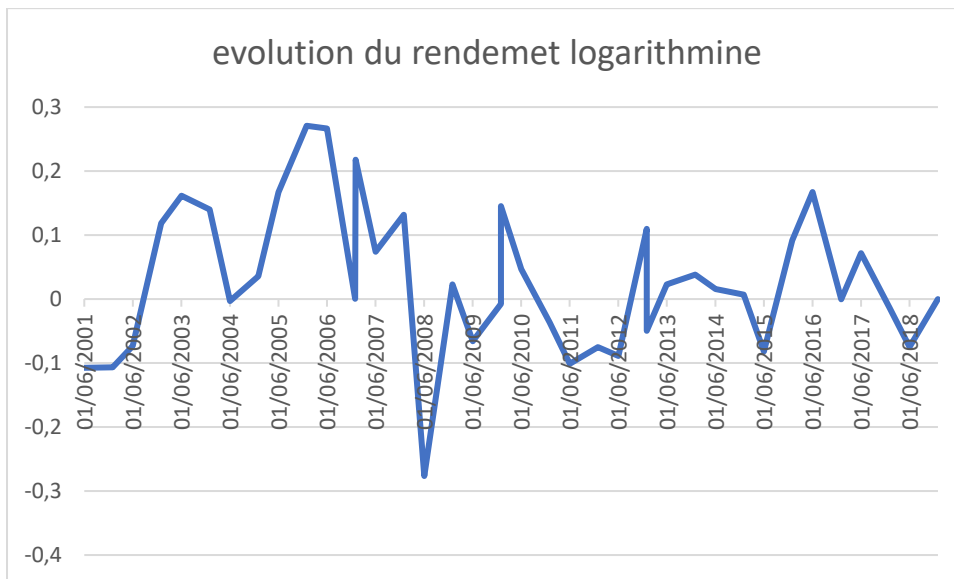
Ajustement du modèle

Afin d’estimer l’évolution de cet indice, il serait indispensable de calculer le rendement logarithmique via la formule :

$$R(t)=\log(S_t/S_{t-1})$$

⁵³ Réalisé par nos soins à travers le logiciel R

Ainsi, l'évolution du taux d'intérêt est telle que :



```
> summary(r)
   Min.   1st Qu.   Median
-0.276498 -0.073489  0.006994
   Mean   3rd Qu.   Max.
  0.023231  0.109651  0.270794
> sd(r)
[1] 0.112477
```

Le rendement logarithmique évolue d'une manière non linéaire avec plusieurs pics, il varie suivant un intervalle $[-27\%, 27\%]$ et centrée sur 2.3%. Son écart type est de l'ordre de 0.11 ce qui explique sa volatilité.

Par un Maximum de Vraisemblance de la fonction densité de Black and Scholes, les paramètres estimés sont de l'ordre de :

Paramètre	Valeurs
u	0.05145861
σ	0.23690277

Tableau 6: Paramètre du modèle de Black and Schole⁵⁴

Ainsi l'actif évolue suivant :

$$S_t = S_{t-1} * \exp\left(\left(0.05145 - \frac{0.2369^2}{2}\right) + 0.2369B_1\right) \text{ avec } B \text{ un mouvement brownien}$$

Nous pouvons ainsi tracer le graphe du modèle estimé et le comparer avec celui du modèle réel.

Nous modélisons en bleu le graphe des cours réels et en rouge, notre modèle estimé :

⁵⁴ Réalisée sous le logiciel R

Partie III : APPLICATION

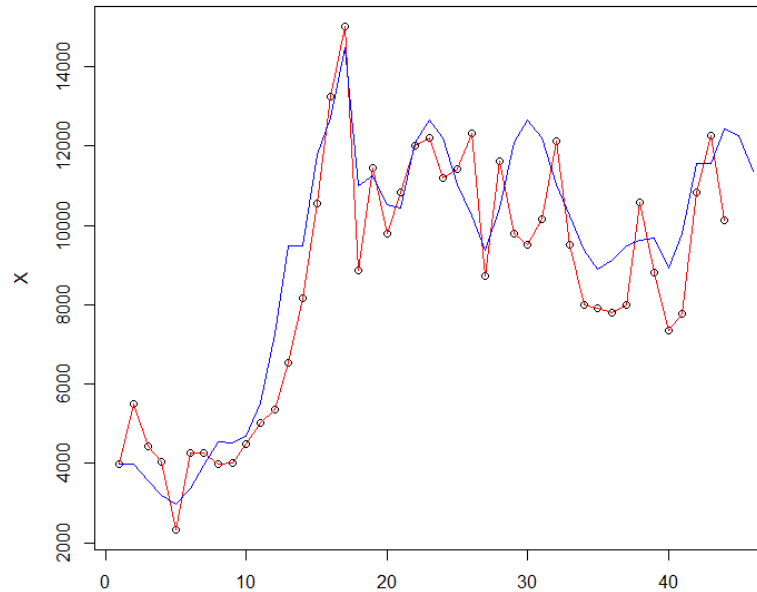


Figure 45: Comparaison modèle réel et modèle estimé

Il est évident qu'aucune modélisation n'est parfaite, vu la partie aléatoire présente, mais à des imprécisions près, notre modèle suit réellement la tendance du modèle réel.

Une fois le modèle validé, nous passons ensuite à la partie prévision. Avec les mêmes paramètres ci-dessus, nous traçons le prolongement des cours pour les instants futurs. Le graphe ci-dessous modélise notre prévision :

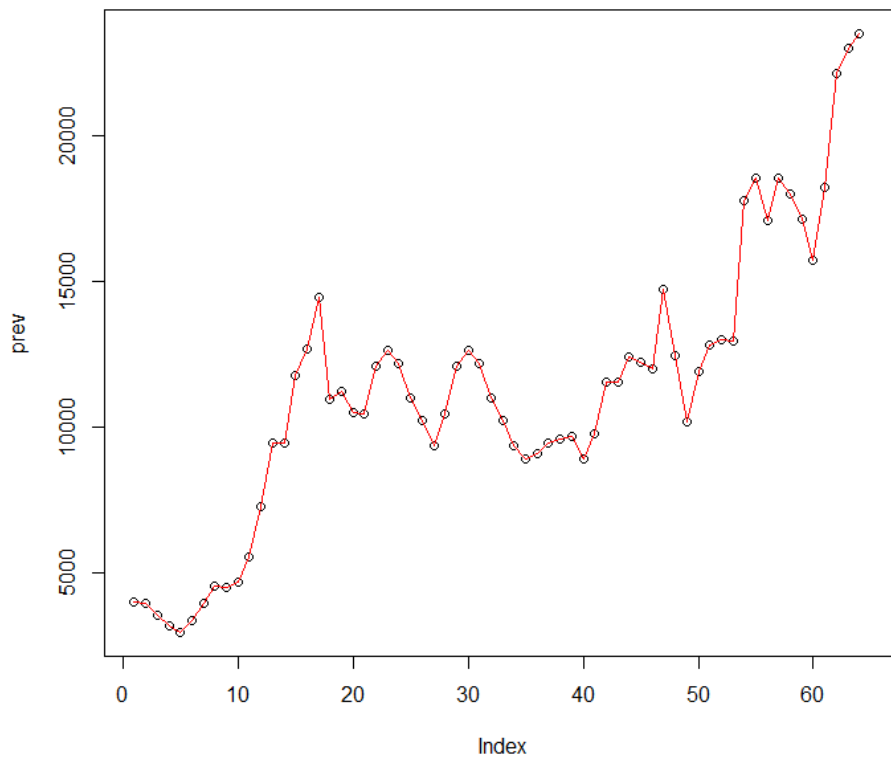


Figure 46: Prévision du cours MASI

Nous rappelons que notre base de données regroupe l'évolution du cours MASI depuis 2002, soit 17 ans de données annuels et 34 données semestriels, ainsi il est très difficile d'affirmer que pour du moyen court terme, notre modèle est adéquat. En effet, même si nous adoptons un modèle d'inférence dynamique, nous ne pouvons éviter la divergence qui apparaît après l'index 50 dans notre graphe par exemple.

2) *Modèle de Merton : indice ASSURANCE*

Nous travaillerons dans ce qui suit sur l'indice sectorielle ASSURANCE

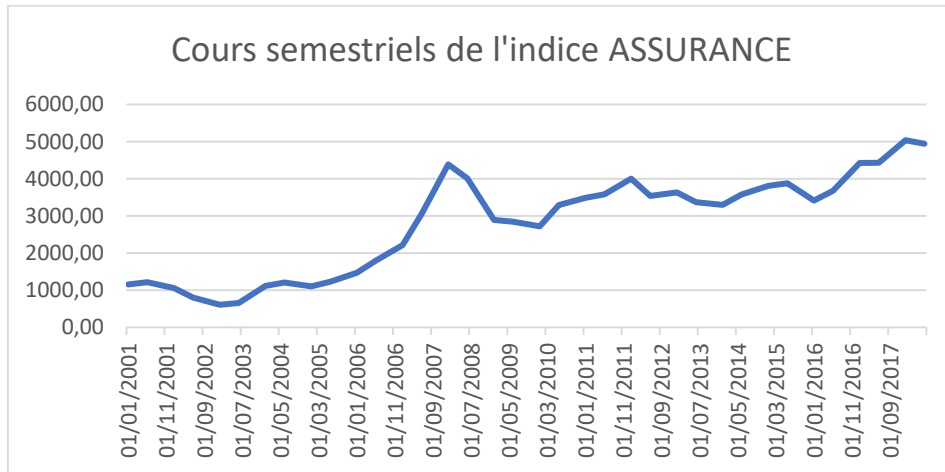
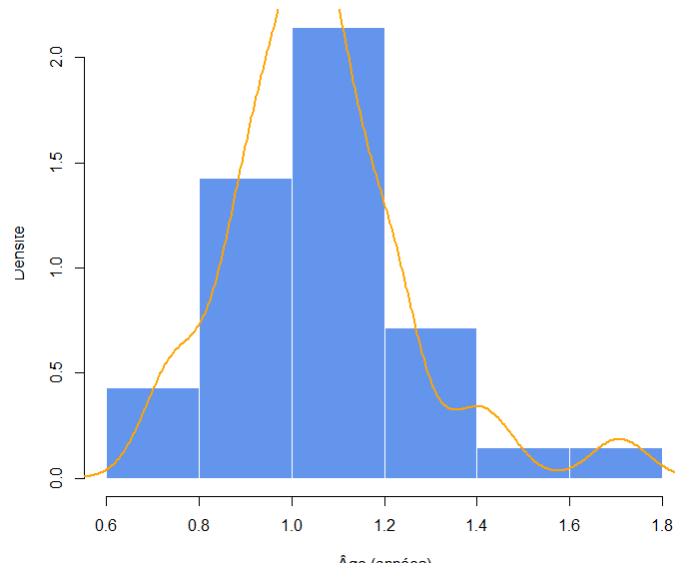


Figure 47: Cours semestriels de clôture de l'indice ASSURANCE

```
summary(t)
  Min. 1st Qu.  Median    Mean 3rd Qu.    Max.
 608.5 1224.8  3295.2  2804.1  3711.2  5039.5
```

Le cours moyen de notre indice est de 2804 dhs, il varie dans un intervalle [608,5039] avec un écart type de 1330. Généralement, au cours de la dernière décennie, l'indice assurance a connu une forte augmentation vue l'évolution du secteur assurantiel au Maroc. Son cours est passé de 3000dh, à sa valeur maximale qui est de 5039dhs. Ainsi le rendement moyen annuel du titre est estimé à 4%, avec un écart type de 0.17.

Comme précédemment, nous commençons par une analyse de l'histogramme du rendement :

Figure 48: histogramme de l'indice ASSURANCE⁵⁵

L'histogramme du secteur assurance est loin d'être normale, nous utilisons alors le test de Jarque Bera afin de le confirmer :

```
> jarque.bera.test(r)
Jarque Bera Test
data: r
X-squared = 13.068, df = 2, p-value = 0.001453
```

En effet avec une Pvalue << 5% , nous n'acceptons pas l'hypothèse de la normalité .

Ainsi nous pouvons faire l'hypothèse que notre modèle peut suivre celui de Merton. Nous confirmerons cette hypothèse par la suite au cours du test de la vraisemblance.

Ajustement du modèle

Afin d'estimer l'évolution de cet indice, il serait indispensable de calculer avant le rendement logarithmique via la formule : $R(t) = \log(S_t/S_{t-1})$

⁵⁵ Réalisé par le logiciel R

Partie III : APPLICATION

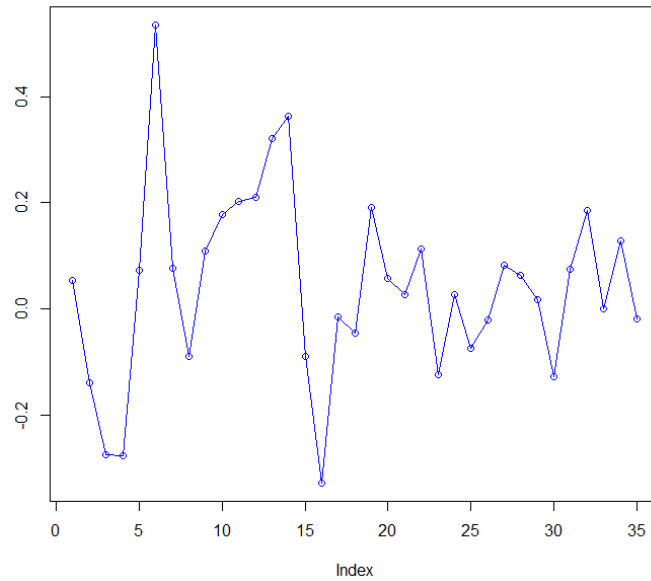


Figure 49 Rendement logarithmique de l'indice Assurance

Une fois le rendement modélisé, la prochaine étape de notre ajustement consistera à utiliser la méthode des moments et celle du maximum de vraisemblance afin d'approcher aux mieux les vraies estimations des paramètres.

Le tableau suivant comparera les valeurs des deux méthodes :

Paramètre	Méthode Moment	Maximum Vraisemblance
μ	0,04478	0,04477
σ	0,08773	0,08773
λ	0,2281	0,226
Ω	2,6589	2,5563

Tableau 7: Comparaison des estimations des deux méthodes

Les estimations des paramètres par la méthode de maximum de vraisemblance ne s'éloignent pas grandement de celle issues de la méthode des moments, ce qui est normal vu que l'algorithme de la maximum de vraisemblance ne permet pas de s'éloigner de plus de 10% des valeurs par la première méthode .

Nous rappelons la dynamique du modèle de Merton :

$$S(t) = S(0) \exp \left\{ \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma B_t + \sum_{k=1}^{N_t} U_k \right\}$$

Avec :

- ✓ B_t : Mouvement brownien,
- ✓ N_t : Processus de Poisson homogène d'intensité λ .
- ✓ U_k : Suite de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées de loi Normale $N(0, \Omega)$.
- ✓ Les processus B , N , U sont mutuellement indépendants.

Une fois les paramètres estimés nous devons finalement nous assurer qu'effectivement la dynamique suit un modèle de Merton et non un modèle de Black and Scholes. Le test que nous allons suivre est celui du maximum de vraisemblance.

Test de vraisemblance :

Dans cette partie nous procédons à un test de vraisemblance, afin de tester si nous sommes en présence de saut ou pas. Nous testerons alors les hypothèses suivantes :

$$H_0 \Omega = \lambda = 0 \quad \text{vs} \quad H_1 \Omega \neq 0 \quad \text{et} \quad \lambda \neq 0.$$

Nous rappelons la statistique du test :

$$L = \frac{\prod_{i=1}^n \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\left(x_i - \mu + \frac{\sigma^2}{2}s\right)^2}{2\sigma^2s}\right)}{\sup_{\lambda, \Omega} \left(\prod_{i=1}^n \frac{\exp(-\lambda)}{\sqrt{2\pi}} \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k! \times \sqrt{(\sigma^2 + k\Omega^2)}} \times \exp\left[-\frac{\left(x_i - \mu + \frac{\sigma^2}{2}\right)^2}{2(\sigma^2 + k\Omega^2)}\right] \right) \right)}$$

La règle de décision sera la comparaison de $-2\ln(L)$ avec la distribution d'une Khi 2 à 4 degrés de liberté.

```
> -2*log(xhi)
[1] 15.53069
```

15.53 > $\chi_{4}(99.5) = 14.86$ et donc nous rejetons l'hypothèse nulle. Notre modèle admet en effet des sauts et le modèle de Merton est le plus adéquat.

Bien sûr si l'hypothèse nulle a été vérifiée, nous aurions modélisé avec le modèle de Black and Scholes suivant les mêmes étapes que la première partie.

En suivant la modélisation de Merton, nous trouvons le graphe suivant : avec en bleu les valeurs réelles et en rouge le modèle estimé.

Partie III : APPLICATION

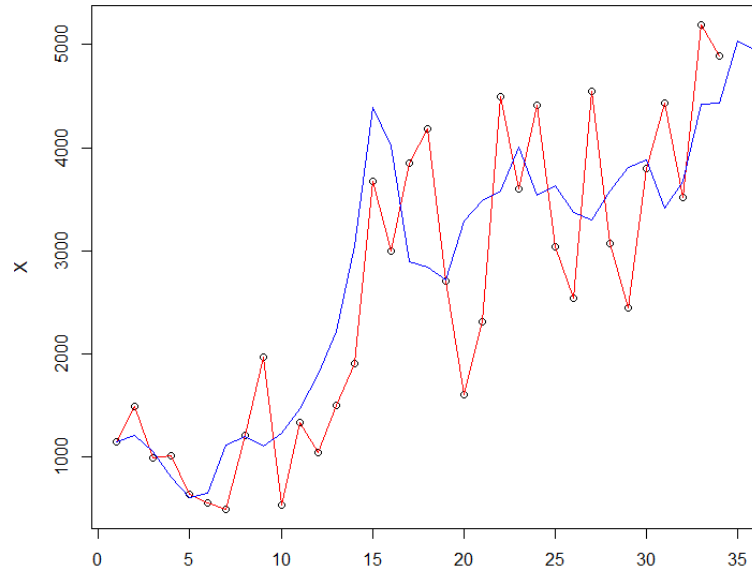


Figure 50: Représentation du modèle de Merton

Les pics de notre modèle varient plus rapidement que notre modèle réel, cette anomalie est due aux problèmes liés à la machine. En effet pour des soucis de rapidité, nous avons limités l'efficacité de la régression du modèle qui devait calculer des sommes à l'infinie de factoriels et de refaire les calculs plusieurs fois.

Pour la partie prévision, vu que le modèle de Merton a été adopté, nous obtenons le graphe suivant :

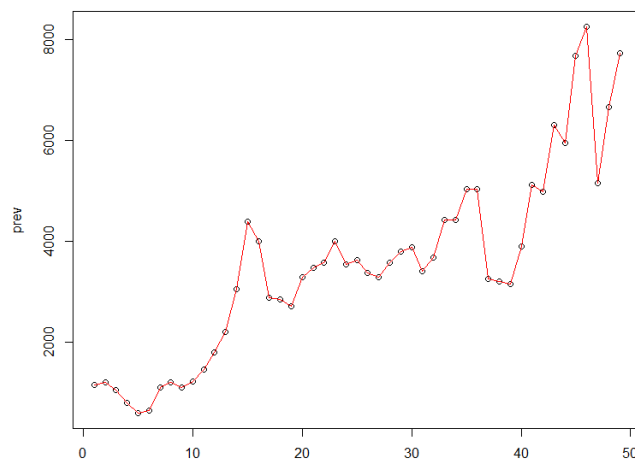


Figure 51:Prévision par le modèle de Merton

Pour les mêmes raisons que le premier modèle, la prévision connaît une grande divergence au cours des dernières années d'estimation.

3) Conclusion :

Pour les deux modèles, il est clair qu'au long terme, le cours diverge ce qui est très normale vu que nos observations ne sont pas très nombreuses. En effet l'indice MASI et les indices sectorielle ont tous été créé en 2002, ce qui nous fait peu de donnée afin de pouvoir estimer pour du long terme. C'est une des raisons qui nous a poussé à éviter le long terme

dans notre rapport même si l'objectif des caisses de retraites est la solvabilité pour le long terme .

II. PASSIF :

Contrairement à l'actif, le passif a été projeté d'une façon déterministe. Ainsi dans cette partie nous n'avons besoin ni de vérifier les hypothèses de projection ni de comparer les modèles. Nous nous contentons d'exposer les résultats définitifs de notre projection.

Avec une augmentation net d'1% de l'effectif des actifs qui viennent remplacer les décès, les retraités et les invalides. Et avec une augmentation de salaire annuels de 4% environ, il serait clair que les cotisations augmenteront au fil des années. Le graphe ci-dessous décrit l'évolution des cotisations qui est proportionnelle à l'évolution et du salaire et de l'effectif .

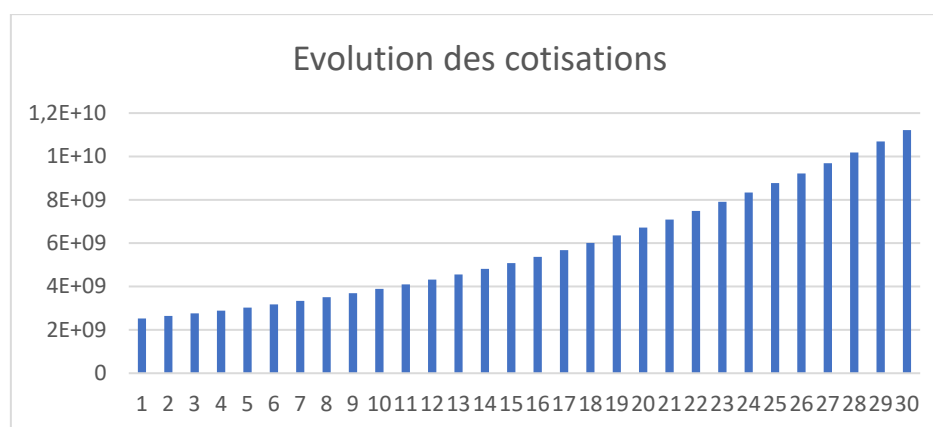


Figure 52: évolution des cotisations au fil des années

Pour les dépenses, la grande majorité est destinée à payer les rentes des retraités arrivés à 60 ans, ou issus de notre historique. Les retraités varient peu en termes d'effectif vu la hausse des taux de mortalités de la table TV88-90

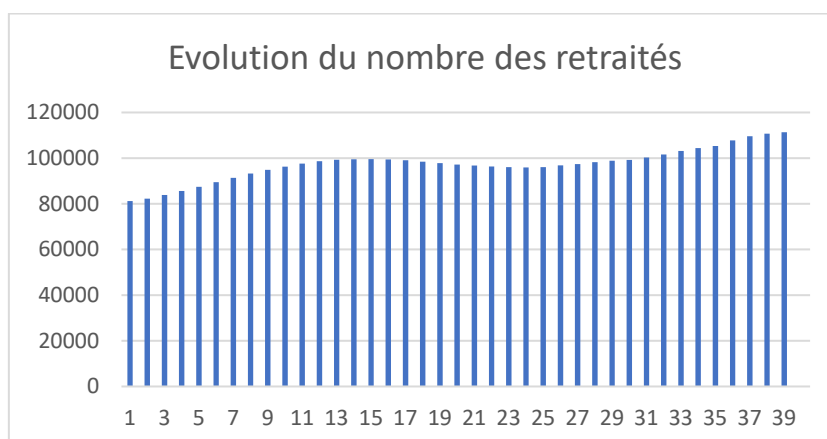


Figure 53: Evolution de l'effectif des retraités

Vu la hausse des salaires, les pensions se voient aussi revalorisées. Ainsi, les pensions moyennes des retraités augmentent de 25% durant la première décennie.

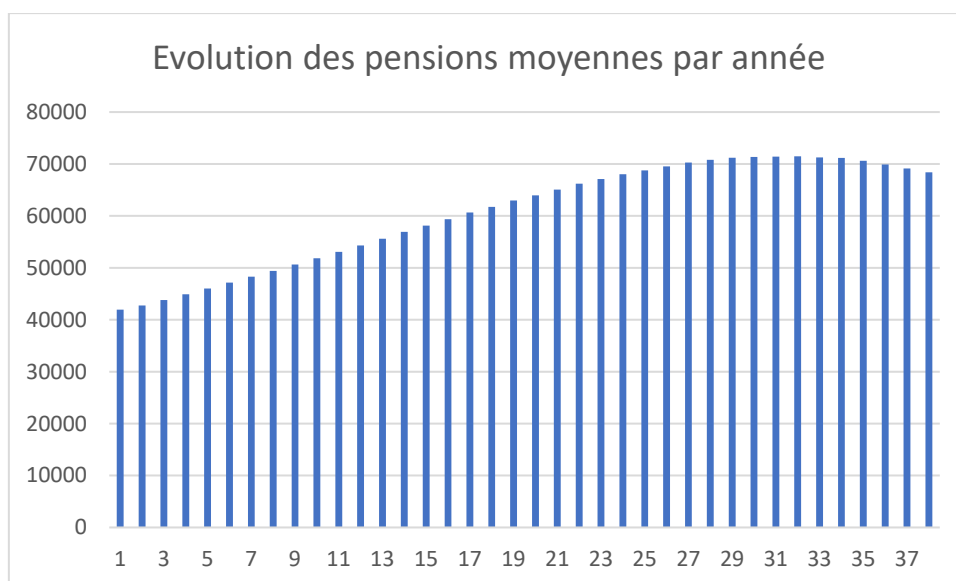
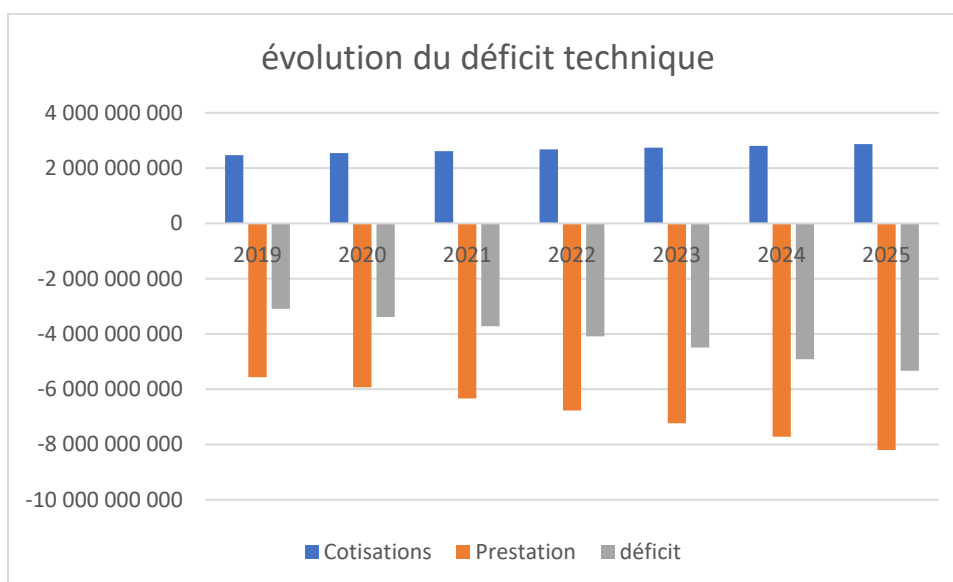


Figure 54: évolution des pensions moyennes

En comparant l'ensemble des cotisations, ainsi que l'ensemble des prestations (retraités, invalides, décès, frais de gestion, prestations familiales...), nous pouvons calculer le déficit technique annuel.



Ce déficit augmente considérablement chaque année, dû principalement à l'inflation et l'augmentation considérable des nombres des retraités qui ne suit pas la même tendance que l'augmentation des cotisants. Ce dernier point sera expliqué par le ratio de dépendance démographique ci-dessous

Le **ratio de dépendance démographique** est le rapport du nombre d'individus supposés « dépendre » des autres pour leur vie quotidienne (jeunes et personnes âgées) et le nombre d'individus capables d'assumer cette charge.

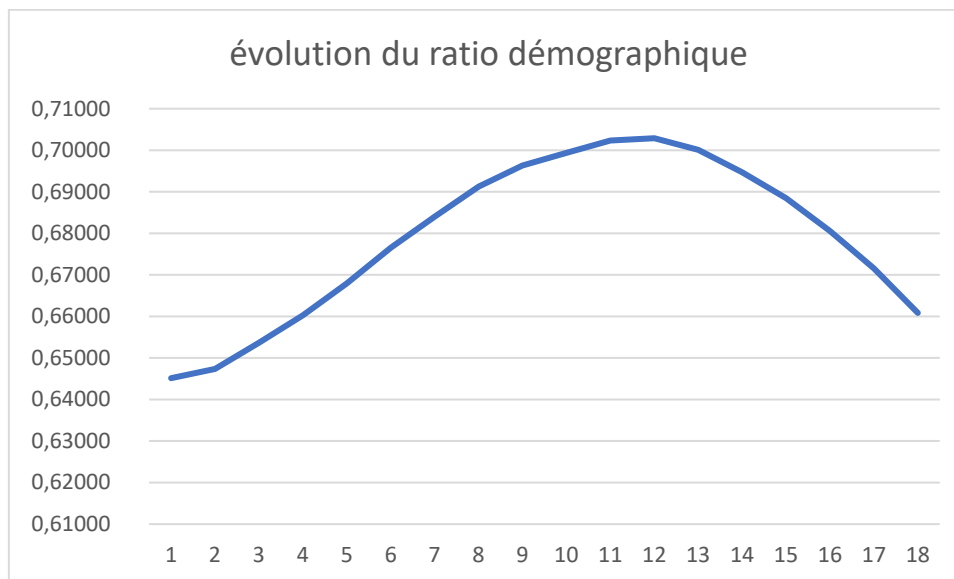


Figure 55: évolution du ratio démographique

Un ratio proche de 1 signifie la présence d'autant de cotisants que de retraités, en d'autres termes pour notre produit de répartition pure, un ratio proche de 1 signifie que seul la cotisation moyenne d'un seul actif devra payer la pension moyenne du retraité. Ainsi, la hausse de ce ratio au fil des 10 premières années entraînera automatiquement un déficit budgétaire.

Ainsi le best estimate de notre passif pour une durée de 5 ans : 44 351 018 863 dhs.

III. Résumé de la projection :

Après la modélisation et de l'actif et du passif, il s'est avéré que notre modèle interne présente quelques inconvénients. En effet, du côté de l'actif, le manque d'observation en matière d'indice boursier ne permet pas de modéliser pour du moyen long terme. Les indices ont été créés en 2002, nous offrant ainsi 17 observations annuelles, ainsi la partie prévision se voit très vite biaisée et diverge lors de sa modélisation. Pour les taux d'intérêt, Bank Al Maghrib assure la modélisation des taux zéros coupons, chose qui peut faciliter le travail de l'assurance en termes de modélisation des taux à long terme.

Pour la partie du passif, l'ACAPS impose l'utilisation de la table de mortalité TD-TV8890 qui a été établie en France à la suite des observations de mortalité réalisées entre 1988 et 1990. Cette dernière ne permet pas de prendre en considération les spécificités de l'entreprise et de ses affiliées. Nous pouvons clairement affirmer que dans notre base de données, les affiliées dépassent la limite d'âge indiquée dans la table de mortalité et connaissent aussi bien une espérance de vie plus élevée. Vu que la mortalité est sûrement estimée dans ce cas, il serait préférable d'utiliser des tables de mortalité d'expérience propre à chaque assurance.

Conclusion générale :

La nouvelle directive solvabilité basé sur le risque constitue un vrai tournant pour les compagnies d'assurances et de réassurance marocaine. Cette nouvelle réglementation oblige les entreprises à redéfinir leurs niveaux de fonds propres et à revoir leurs méthodes de quantifications des risques.

Ainsi une évaluation basée sur des données propres à chaque compagnie d'assurance assurera l'avantage de reproduire des résultats qui reflètent le mieux le profil de risque de l'entreprise.

A cet effet, et tout au long de notre stage, nous avons cherché à proposer un modèle interne spécifique à l'entreprise pour les risques vie capable d'estimer et de modéliser les différents engagements de notre régime.

Pour mener à bien cette tâche, nous avons fondé notre analyse du sujet sur plusieurs étapes clés. En premier lieu, nous avons établi le périmètre régissant la vision de la SBR en comparaison à la solvabilité 2. Puis nous avons tenté de proposer divers modèles capables de répondre aux spécificités du marché marocain

Néanmoins, la réglementation nationale connaît toujours un retard vis-à-vis de son homologue solvabilité 2, surtout en termes de quantification de la matrice de corrélation des risques et sa flexibilité par rapport aux différents modèles internes. En effet, la réglementation impose l'usage de la table de mortalité TD-TV8890 établit en France dans les années 1988 et non une table d'expérience propre comme le recommande la solvabilité 2. Le manque de donnée au niveau du marché boursier ne permet pas de son côté une modélisation pour du long terme des actions.

Nous aurions pu calculer le capital de solvabilité requis pour notre régime, mais n'étant pas l'objet primordial dans ce rapport, nous avons choisi de nous concentrer spécialement sur la partie du modèle interne présent au sein du deuxième pilier de la solvabilité 2 et du SBR en cohérence avec le marché marocain. Par ailleurs, le calcul du SCR est fonction de l'ensemble de l'activité de l'assureur, c'est-à-dire aux risques de souscription, de marchés, de la politique d'investissement, des risques opérationnels, du risque de concentration ou encore de contrepartie, reste primordial quant à l'appréciation de la solvabilité de l'organisme. Nous tenons aussi à préciser que les mesures d'ajustements du capital de solvabilité requis mises en place ne précisent pas les niveaux de chocs à appliquer sur le bilan économique ce qui accompagné de la non quantification de la matrice de corrélation, ne permet pas un calcul précis et adéquat du CSR.

En résumé, le projet de la « Solvabilité Basée sur le risque » est sans doute un des projets les plus ambitieux que l'ACAPS ait mis en avant. Cependant, il a encore besoin de plus de révisions avant qu'il ne soit parfaitement opérationnel. Une fois achevé, ce projet pourra améliorer le seul de performances des assurances tout en gardant les intérêts et de l'assuré et de l'assureur.

Bibliographie

- L'ACAPS, Présentation de la « SBR », Réunion avec la FMSAR ,03 avril 2017.
- L'ACAPS, Projet de circulaire concernant la SBR, document de consultation, version 11/12/2017.
- RCAR , Rapport d'activité, 2017.
- Berrada Sounni, S., « Solvabilité des entreprises d'assurance et de réassurance, Séminaire », INSEA, 2017/2018.
- BERROUYNE, M., « ANALYSE DE LA REGRESSION », Support de cours, INSEA, 2017/2018.
- BAGHAGHA, L., « Cours d'inférence I », Support de cours, INSEA, 2016/2017.
- BADAOU, F., « série temporelle », Support de cours, INSEA, 2017/2017.
- DEVOLDER, D., « Prévoyance et Assurance des groupes », Support de cours, INSEA, 2017/2018.
- MARRI, F., « Assurance vie », Support de cours, INSEA, 2016/2017.
- PLANCHET, F., « Méthodes de lissage et d'ajustement », Support de cours 2017-2018, l'ISFA.

Webographie

- <http://eiopa.europa.eu/>
- <http://Ressources-actuarielles.net>
- <https://cran.r-project.org/>
- <https://www.actuarialab.net>

ANNEXE I : Table de mortalité TV88-90 et PF60-64

Âge x	Nombres de vivants		Âge x	Nombres de vivants	
	TD 88-90	TV 88-90		TD 88-90	TV 88-90
...	51	90171	95488
18	98520	98955	52	89511	95202
19	98406	98913	53	88791	94892
20	98277	98869	54	88011	94560
21	98137	98823	55	87165	94215
22	97987	98778	55	87165	94215
23	97830	98734	56	96241	93848
24	97677	98689	57	85256	93447
25	97524	98640	58	84211	93014
26	97373	98590	59	83083	92545
27	97222	98537	60	81884	92050
28	97070	98482	61	80602	91523
29	96916	98428	62	79243	90954
30	96759	98371	63	77807	90343
31	96597	98310	64	76295	89687
32	96429	98247	65	74720	88978
33	96255	98182	66	73075	88226
34	96071	98111	67	71366	87409
35	95878	98031	68	69559	86513
36	95676	97942	69	67655	85522
37	95463	97851	70	65649	84440
38	95237	97753	71	63543	83251
39	94997	97648	72	61285	81936
40	94746	97534	73	58911	80484
41	94476	97413	74	56416	78880
42	94182	97282	75	53818	77104
43	93868	97138	76	51086	75136
44	93515	96981	77	48251	72981
45	93133	96810	78	45284	70597
46	92727	96622	79	42203	67962
47	92295	96424	80	39041	65043
48	91833	96218	81	35824	61852
49	91332	95995	82	32518	58379
50	90778	95752

ANNEXE II : Estimateurs de maximum de vraisemblance dans le modèle de Black ad Scholes :

$L(x_1, \dots, x_n, \mu, \sigma^2) = \prod_{i=1}^n f(x_i)$ avec f la densité de la loi du rendement d'un titre dans le cadre du modèle de Black and Scholes

Ainsi la vraisemblance s'écrit : $L(x_1, \dots, x_n, \mu, \sigma^2) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x_i - \mu + \frac{\sigma^2}{2})^2}{2\sigma^2}\right)$

Afin de linéariser la fonction de vraisemblance, nous introduisons la fonction \ln

D'où : $\ln(L(x_1, \dots, x_n, \mu, \sigma^2)) = n \ln\left[\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right] + \sum -\frac{(x_i - \mu + \frac{\sigma^2}{2})^2}{2\sigma^2}$

En dérivant, nous parvenons à calculer les équations de vraisemblance qui sont de la forme :

$$\frac{\partial \ln(L(x, \mu))}{\partial \mu} = 0 \text{ et } \frac{\partial \ln(L(x, \sigma^2))}{\partial \sigma^2} = 0$$

- Pour la première dérivée :

$$\sum_{i=1}^n -\frac{(-2 \times (x_i + \frac{\sigma^2}{2}) + 2\mu)}{2\sigma^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n x_i + \frac{\sigma^2}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^n x_i - n\mu + n\frac{\sigma^2}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \mu = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i + \frac{\sigma^2}{2}$$

$$\Leftrightarrow \mu = \bar{x} + \frac{\sigma^2}{2}$$

- Pour la deuxième équation :

$$-\frac{n}{2\sigma^2} - \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{\sigma^4} \sum (x_i - \mu + \frac{\sigma^2}{2})^2 + \frac{1}{\sigma^2} \sum (x_i - \mu + \frac{\sigma^2}{2}) \right] = 0$$

$$\Leftrightarrow -\frac{n}{2\sigma^2} - \frac{1}{2\sigma^4} \left[-\frac{1}{\sigma^2} \sum (x_i - \mu + \frac{\sigma^2}{2})^2 + \sum (x_i - \mu + \frac{\sigma^2}{2}) \right] = 0$$

Et donc :

$$\Leftrightarrow n + \left[-\frac{1}{\sigma^2} \sum (x_i - \mu + \frac{\sigma^2}{2})^2 + \sum (x_i - \mu + \frac{\sigma^2}{2}) \right] = 0$$

$$\frac{1}{\sigma^2} \sum (x_i - \mu + \frac{\sigma^2}{2})^2 = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 + \sum_{i=1}^n (x_i - \mu) + n\frac{\sigma^2}{4}$$

$$\sum_{i=1}^n \left(x_i - \mu + \frac{\sigma^2}{2} \right) = \sum_{i=1}^n (x_i - \mu) + n \frac{\sigma^2}{4}$$

$$n + \left[-\frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n \left(x_i - \mu + \frac{\sigma^2}{2} \right)^2 + \sum_{i=1}^n \left(x_i - \mu + \frac{\sigma^2}{2} \right) \right] = 0$$

$$\Leftrightarrow n + \left[-\frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 + n \frac{\sigma^2}{4} \right] = 0$$

Par ailleurs :

$$\frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 - \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) + \frac{n\sigma^2}{4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 + \frac{n\sigma^2}{4}$$

Donc on a :

$$n + \left[-\frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 + \frac{n\sigma^2}{4} \right] = 0$$

$$\Leftrightarrow n - \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \sigma^2 = \text{var}x$$

ANNEXE III: Dynamique de l'actif risqué dans le cas de processus a sauts

Si le prix de l'actif risqué, est un processus continu à droite et adapté vérifiant :

- Sur les intervalle de temps $[T_j, T_{j+1}[$:

$$\frac{ds_t}{s_t} = \mu dt + \sigma dz_t \Rightarrow s_t = s_0 \exp\left(\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma Z_t\right)$$
- A l'instant T_j le saut d'amplitude U_j vérifie :

$$\Delta s_{t_j} = s_{t_j} - s_{t_j^-} \Leftrightarrow s_{t_j} = (1 + U_j) \times s_{t_j^-}$$

La dynamique du rendement de S_t est alors donnée par :

$$\frac{ds_t}{s_t} = \mu dt + \sigma dz_t + \sum U_i dN(\lambda) = \mu dt + \sigma dZ_t + \sum_i (Y - 1) dN_t(\lambda)$$

Avec

- N_i : le nombre de sauts survenus avant t
- Y_i : le taux d'accroissement du S_{t_j} - dû au saut

Ainsi par récurrence :

$$\forall t \in \left[0, t_1 \right[, \quad s_t = s_0 \left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma Z_t \right)$$

$$\text{et pour } t = \tau_1, \quad s_{\tau_1} = S_0 \times (1 + U_1) \times \exp\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)\tau + \sigma Z_{\tau_1}\right)$$

De même , par continuité à droite :

$$\forall t \in [\tau_1, \tau_2[\quad \left[s_t = S_{t_1} \exp\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)(t - \tau_1) + \sigma(Z_t - Z_{t_1})\right) \right] = S_0 \times (1 + U_1) \times \exp\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)\tau + \sigma Z_{t_1}\right) \right]$$

$$\text{et pour } t = \tau, \quad S = S_n \times (1 + U_1) \times (1 + U_2) \exp\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)\tau + \sigma Z\right)$$

$$\text{Ensuite } \forall t \in [\tau_2, \tau_3[\quad \left[s_t = S_0 \times (1 + U_1) \times (1 + U_2) \times \exp\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma Z_t\right) \right]$$

Par récurrence : $S_t = S_0 \times \left(\prod_{i=1}^{N_t} (1 + U_i)\right) \exp\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma z_i\right)$ avec N le nombre de sauts

Par un changement de variable : l'équation devient $S_t = S_0 \times \left(\prod_{i=1}^{N_t} Y_i\right) \exp\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma z_i\right)$

$$\text{Avec } Y_i = \begin{cases} 1 & \text{si } N_t = 0 \\ 1 + U_t & \end{cases}$$

Finalement en posant $X_i = \ln(Y_i)$, on obtient : $S_t = S_0 \times \exp\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma z_t + \sum_{i=1}^{N_t} X_i\right)$

avec :

$$s_t = s_0 \times \exp(r_t)$$

ANNEXE IV : Calcul du rendement selon le modèle de Merton

L'équation de l'actif selon le modèle de Merton s'écrit de la forme

$$S(t) = S(0) \exp\left\{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma B_t + \sum_{k=1}^{N_t} U_k\right\}$$

Où :

- ✓ $S(t)$: prix de l'actif à l'instant t.
- ✓ B_t : Mouvement brownien,
- ✓ N_t : Processus de Poisson homogène d'intensité λ .
- ✓ U_k : Suite de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées de loi Normale $N(0, \Omega)$.
- ✓ Les processus B, N, U sont mutuellement indépendants.

On note :

$$S(t) = S(0) \exp(r(t))$$

$$\text{Avec :} \quad r(t) = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma B_t + \sum_{k=1}^{N_t} U_k$$

le rendement de cet actif entre les deux périodes : t et t+h

$$\begin{aligned} \leftrightarrow \frac{S_{t+h}}{S_t} &= \frac{\exp\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) \times (t+h) + \sigma B_{t+h} + \sum_{i=0}^{N_{t+h}} X_i\right)}{\exp\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) t + \sigma B_t + \sum_{i=0}^{N_t} X_i\right)} \\ \leftrightarrow \frac{S_{t+h}}{S_t} &= \frac{\exp\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) h + \sigma B_{t+h} + \sum_{i=0}^{N_{t+h}} X_i\right)}{\exp\left(\sigma B_t + \sum_{i=0}^{N_t} X_i\right)} \\ \leftrightarrow \frac{S_{t+h}}{S_t} &= \exp\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) h + \sigma B_{t+h} - \sigma B_t + \sum_{i=0}^{N_{t+h}} X_i - \sum_{i=0}^{N_t} X_i\right) \\ \leftrightarrow \frac{S_{t+h}}{S_t} &= \exp\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) h + \sigma(B_{t+h} - B_t) + \sum_{i=N_{t+1}}^{N_{t+h}} X_i\right) \\ \leftrightarrow \frac{S_{t+h}}{S_t} &= \exp\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) h + \sigma B_h + \sum_{i=N_{t+1}}^{N_{t+h}} X_i\right) \end{aligned}$$

Et donc le rendement logarithmique s'écrit finalement de la sorte :

$$r(t, t+h) = \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) h + \sigma B_h + \sum_{i=N_{t+1}}^{N_{t+h}} \ln(Y_i)$$

Comme le processus à saut étant stationnaires, seule la longueur de l'intervalle h influencera le nombre de saut présent dans le processus ainsi

$$r(t, t+h) = \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) h + \sigma Z_h + \sum_{i=1}^{N_h} \ln(Y_i)$$

ANNEXE V : Loi du rendement du modèle à sauts

D'après le théorème des probabilités totales : $P(r=x) = \sum_n P(r=x|N_t=n) \times P(N_t=n)$

Ainsi deux cas sont distingués : $P(r=x) = P(r=x|N_t=0) \times P(N_t=0) + P(r=x|N_t \geq 1) \times P(N_t \geq 1)$

Notons $A = P(r=x|N_t=0) \times P(N_t=0)$ pour le premier cas : non présence de sauts entre les deux instants t et t+s

$B = P(r=x|N_t \geq 1) \times P(N_t \geq 1)$ pour le deuxième cas : présence d'au moins un saut durant la même période

Donc ; $B = \sum_{n=1}^{\infty} P(r=x|N_t=n) \times P(N_t=n)$

Grâce aux densités conditionnelles , la loi de r(s) :

$$f_r(x) = f_{r|0}(x) \times P(N_s=0) + \sum f_{r|n}(x) \times P(N_s = n)$$

Pour la suite , nous devons déterminer les lois conditionnelles du rendement .

- Pour $n=0$; la loi entre t et $t+s$ est la même que celle de Black and Scholes

$$f_{r|0}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi s}} \times \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2 s} \times \left(x - \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2 s\right)\right)^2\right)$$

Pour $n>0$: $r_n(t, t + s) = \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) s + \sigma Z(s) \sum_{i=1}^n \ln(Y_i)$

avec $\ln(Y_i) \rightarrow N(0, \Omega^2) \Rightarrow \sum_{i=1}^n \ln(Y_i) \rightarrow N(0, n\Omega^2)$

et donc : $r_n(s) \rightarrow N\left(\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) s, \sigma^2 s + n\Omega^2\right)$

Finalement : $f_{r|n}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi x(\sigma^2 + n\Omega^2)}} \times \exp\left(\frac{1}{2x(\sigma^2 + n\Omega^2)} \times \left(\left(x - \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2 s\right)\right)\right)^2\right)$

En réunissant les deux cas la fonction densité s'écrit :

$$f_r(x) = \exp(-\lambda) \times f_{r|0}(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \exp(-\lambda) \times \frac{(\lambda)^n}{n!} f_{r|n}(x)$$

$$\Rightarrow f_r(x) = \frac{\exp(-\lambda)}{\sqrt{2\pi}} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{\lambda^n}{n! \sqrt{(\sigma^2 + n\Omega^2)}} \times \exp\left(\frac{\left(x - \mu + \frac{\sigma^2}{2}\right)^2}{2(\sigma^2 + n\Omega^2)}\right) \right] \right]$$

ANNEXE VI : Calcul du moment du processus de Merton

Par la formule classique de l'espérance , avec une fonction densité

$$f_r(x) = \frac{\exp(-\lambda)}{\sqrt{2\pi}} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{\lambda^n}{n! \sqrt{(\sigma^2 + n\Omega^2)}} \times \exp\left[-\frac{\left(x - \mu + \frac{\sigma^2}{2}\right)^2}{2(\sigma^2 + n\Omega^2)}\right] \right] \right]$$

$$E(r - m)^{2k} = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma^2 + n\Omega^2)}} (x - m)^{2k} \exp\left[-\frac{1}{2(\sigma^2 + n\Omega^2)} (x - m)^2\right] \frac{\lambda^n \exp(-\lambda)}{n!} dx$$

On pose : $u = \frac{1}{\sqrt{(\sigma^2 + n\Omega^2)}} (x - m) \Rightarrow x - m = u(\sigma^2 + n\Omega^2)$

$$\text{et donc } du = \frac{1}{\sqrt{(\sigma^2 + n\Omega^2)}} dx$$

La formule précédente devient :

$$\begin{aligned} E(r - m)^{2k} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n \exp(-\lambda)}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u^{2k}}{\sqrt{2\pi}} (\sigma^2 + n\Omega^2)^{2k} \exp\left[-\frac{u^2}{2}\right] du \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n \exp(-\lambda)}{n!} (\sigma^2 + n\Omega^2)^{2k} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u^{2k}}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{u^2}{2}\right] du \end{aligned}$$

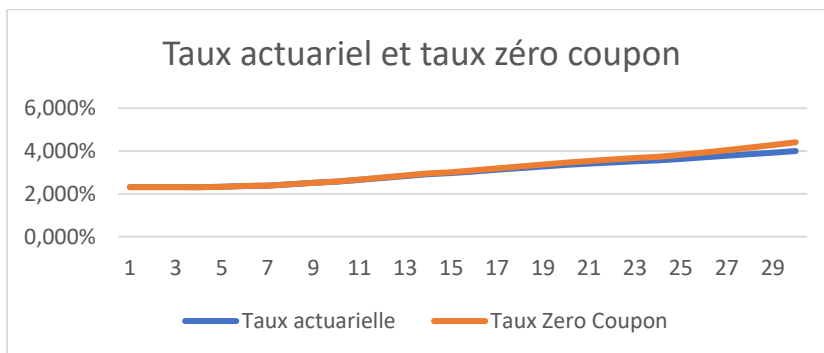
$$\text{Or : } \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u^{2k}}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{u^2}{2}\right] du = \frac{2k!}{2^k k!} \quad (\text{Par intégration par parties})$$

$$\text{Ainsi } E(r - m)^{2k} = \frac{2k!}{2^k k!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n \exp(-\lambda)}{n!} (\sigma^2 + n\Omega^2)^{2k}$$

ANNEXE VII : Taux actuarielle et zéro coupon de BAM

Maturité	Taux actuarielle	Taux Zero Coupon
1	2,3179000%	2,3179000%
2	2,3179000%	2,3179000%
3	2,3179000%	2,3179000%
4	2,3115000%	2,3115000%
5	2,3327000%	2,3327000%
6	2,3651000%	2,3651000%
7	2,3841000%	2,3843265%
8	2,4460000%	2,4476829%
9	2,5137000%	2,5175994%
10	2,5698000%	2,5759603%
11	2,6522000%	2,6631981%
12	2,7427000%	2,7603318%
13	2,8333000%	2,8589047%
14	2,9238000%	2,9588782%
15	2,9719000%	3,0111490%
16	3,0508000%	3,1010542%
17	3,1266000%	3,1888728%
18	3,2018000%	3,2777230%
19	3,2770000%	3,3685111%
20	3,3522000%	3,4614272%
21	3,4118000%	3,5353773%
22	3,4696000%	3,6087316%
23	3,5193000%	3,6723753%
24	3,5611000%	3,7260859%
25	3,6292000%	3,8218158%
26	3,7035000%	3,9306320%
27	3,7777000%	4,0432681%
28	3,8519000%	4,1603820%
29	3,9262000%	4,2827371%
30	4,0004000%	4,4106455%

Tableau 8 Taux actuarielle et taux zéro coupon



ANNEXE IIX : Taux annuel estimé par la méthode de Vasicek

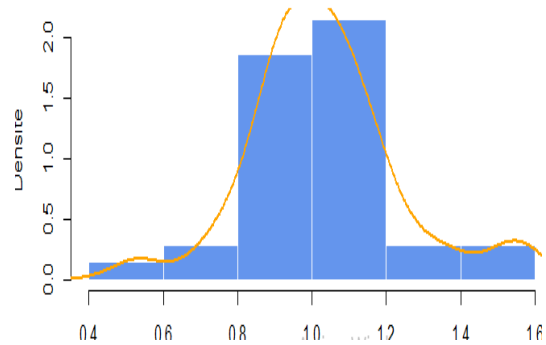
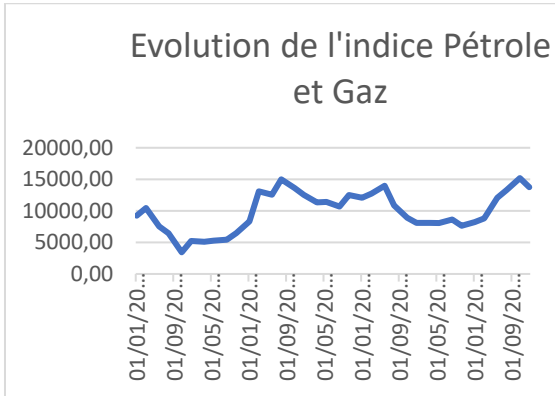
Maturité	Taux
1	0.02942736
2	0.02946558
3	0.02942898
4	0.02949872
5	0.02951196
6	0.02949897
7	0.02948381
8	0.02952653
9	0.02952907
10	0.02947566
11	0.02952930
12	0.02949196
13	0.02950020
14	0.02954113
15	0.02947995
16	0.02950238
17	0.02952375
18	0.02947617
19	0.02952678
20	0.02939351
21	0.02947052
22	0.02945855
23	0.02945833
24	0.02951921
25	0.02949248
26	0.02946491
27	0.02953180
28	0.02949605
29	0.02946896
30	0.02951262

Tableau 9: Taux annuel estimé⁵⁶

⁵⁶ Estimé à l'aide du logiciel R et exporté vers Excel pour plus de lisibilité

ANNEXE IX : Modélisation des autres indices

✓ Pétrole et Gaz



> jarque.bera.test(r)

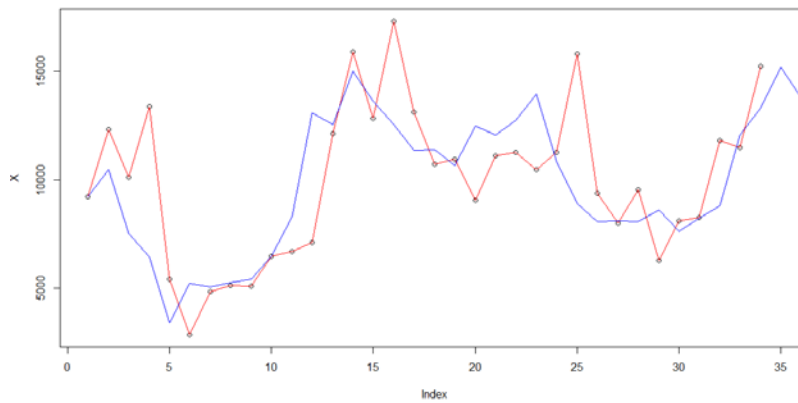
Jarque Bera Test

data: r
X-squared = 3.5858, df = 2, p-value = 0.1665

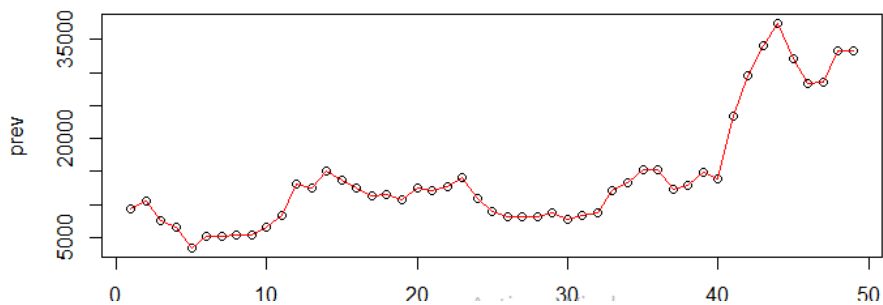
μ	0,031
σ	0,2

Le Pétrole suit une modélisation via la méthode de black and scholes :

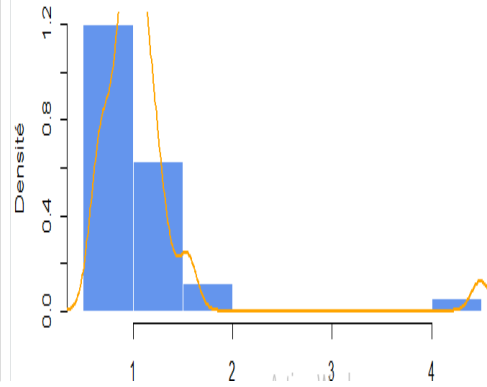
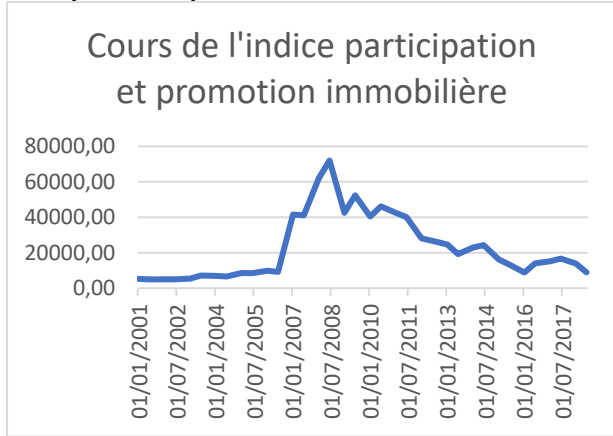
Modélisation :



Prévision :



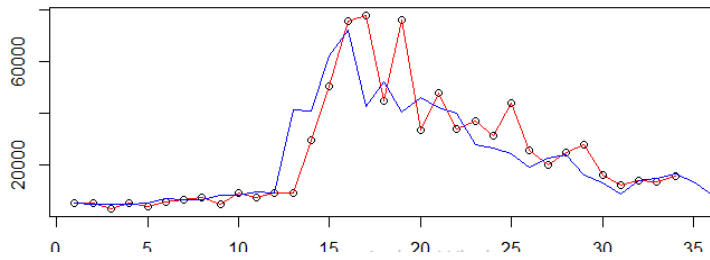
✓ Participation et promotion immobilières :



Jarque Bera Test
 data: r
 X-squared = 832.32, df = 2, p-value < 2.2e-16

μ	0,0361
σ	0,217
λ	0,344
Ω	2,417

L'indice suit une modélisation via la méthode de Merton :



Pour la partie prévision :

