ROYAUME DU MAROC

--*-*-*

PREMIER MINISTRE

--*-*-*-*-*-*

HAUT COMMISSARIAT AU PLAN

--*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*

INSTITUT NATIONAL

DE STATISTIQUE ET D'ECONOMIE APPLIQUEE

INSEA

Projet de Fin d'Etudes

Exigence en capital sous Solvabilité II
Application au portefeuille CIMR de la RMA Watanya

Préparé par : **Melle Fouzia AMGHAR**

Melle Sarra DADI

Sous la direction de : **Mr Pierre DEVOLDER (INSEA)**

Mr Ahmed SERHROUCHNI (RMA Watanya)

Soutenu publiquement comme exigence partielle en vue de l'obtention du

Diplôme d'Ingénieur d'Etat
Option : Actuariat – Finance

Devant le jury composé de :

- **Mr Kamal BENCHEKROUNE (INSEA)**
- **Mr Pierre DEVOLDER (INSEA)**
- **Mr Ahmed SERHROUCHNI (RMA Watanya)**

Juin 2008

REMERCIEMENT

Ce mémoire a été réalisé au sein du service Asset Liability management (ALM) de la Royale Marocaine des Assurances Watanya (RMA WATANYA) à Casablanca. Nous remercions en premier lieu, Monsieur A. SERHROUCHNI, Directeur du Département gestion des risques, pour nous avoir offert l'opportunité d'accomplir notre stage de fin d'études au sein de son service, et sous sa tutelle.

Nous tenons également à remercier Monsieur JABIR, directeur du Département Actuariat, pour sa disponibilité, ses conseils astucieux, ses remarques pertinentes et pour toute l'aide qu'il nous a apporté.

Nous remercions d'autre part, toute l'équipe du service ALM, qui a su nous accueillir dans une ambiance conviviale et sympathique.

Finalement, nous adressons tout particulièrement un grand remerciement à notre encadrant, Monsieur P. DEVOLDER, président de l'institut des sciences actuarielles, Professeur à l'Université catholique de Louvain (UCL) et à l'Institut National de statistique et d'économie appliquée (INSEA), pour ses directives précieuses et ses conseils avisés, qui nous ont été d'un appui considérable dans ce modeste travail.

RESUME

Toute compagnie d'assurance doit être capable d'honorer ses engagements envers ses assurés et autres créanciers. La préoccupation du risque et de la solvabilité des entreprises occupe actuellement une place prépondérante. Sur les traces des normes bancaires « Bâle 2 » et d'autres modèles de solvabilité, comme le modèle suisse de solvabilité (« Swiss Solvency Test »), la Commission Européenne en collaboration avec les Etats membres de l'Union Européenne, a lancé l'ambitieux projet nommé « Solvabilité II ». Ce projet harmonisera au niveau européen les normes de solvabilité, afin que les intérêts des assurés soient protégés de la même manière et que les conditions de concurrence soient égales pour toutes les entreprises d'assurance.

Les normes de Solvabilité II définissent deux niveaux d'exigence en capital et proposent deux modes pour leur évaluation : une approche standard ou une approche modèles internes. C'est d'ailleurs cette seconde alternative qui constitue la problématique centrale de ce stage, dont le sujet est la détermination de l'exigence en capital en assurance vie dans le cadre de Solvabilité II. Le produit de retraite complémentaire offert par la compagnie, a été modélisé de manière stochastique.

Les modèles internes dans le cadre de Solvabilité II, utilisent des techniques de simulations et de modélisations stochastiques, c'est-à-dire de tirages aléatoires respectant des lois de probabilité et permettant d'obtenir une distribution des résultats et ainsi de représenter le plus fidèlement possible la réalité des risques. L'approche standard utilisée dans un premier temps permet d'obtenir une première estimation du capital de solvabilité requis, selon une répartition dite 'par boîte de risques'. La seconde approche fournit des résultats plus en adéquation avec la réalité du produit.

Le modèle réalisé dans ce mémoire, a été élaboré en trois étapes, sous Microsoft Excel avec l'utilisation de macros Visual Basic, qui sont la modélisation des différents risques pris en compte, la détermination de la valeur de marché de l'actif et du passif et enfin, le calcul du capital de solvabilité selon une probabilité de ruine cible.

Mots clés : Solvabilité II, modèle de Lee et Carter, modèle interne, modèle stochastique, run off, valeur de marché, simulation, capital de solvabilité, probabilité de ruine, taux instantané de mortalité, variable aléatoire.

DEDICACE

A mes très chers parents pour leur amour, l'éducation qu'ils ont su me donner, leur soutien indéfectible durant toutes ces années

A ma petite sœur Maha qui a toujours été là pour moi

A mes tantes Hakima et Amal , leurs maris et leurs enfants pour leur patience et leur soutien permanent

A mes oncles pour leur soutien

Trouvez tous en ce travail, l'expression de ma profonde reconnaissance et gratitude.

A toute ma famille, mes amis et toutes les personnes qui ont cru en moi et m'ont toujours fait confiance

Sarra

DEDICACE

A mes chers parents qui m'ont donné leur amour et leurs prières

A ma grand-mère, dont la sagesse et l'amour pour moi m'a permis de grandir dans un environnement de bonheur et de confiance

A mon frère ***Mohamed*** *et ma sœur* ***Hasna*** *qui m'ont toujours soutenu depuis que nous sommes tout petits*

A mes oncles avec qui j'ai grandi et m'ont incitée à la persévérance au travail

A mes chers cousins et cousines pour leur amour et leur soutien

A mes amis qui m'ont apporté leur soutien quand j'en avais besoin

Fouzia

TABLE DES MATIERES

REMERCIEMENT 2
RESUME 3
DEDICACE 5
DEDICACE 6
TABLE DES MATIERES 7
INRODUCTION GENERALE 10
1ère PARTIE 12
GENERALITES 12
CHAPITRE 1 : 13
PRESENTATION DE L'ORGANISME D'ACCUEIL 13
1.1. La Royale Marocaine des Assurances Watanya 13
1.2. Les produits 13
1.2.1 Assurance Décès 13
1.2.2. Contrat Iltizam 14
1.2.3. Assurance global santé 14
1.2.4. Assurance incapacité invalidité maladie maternité 15
1.2.5. Assurance temporaire au décès 15
1.2.6. Epargne retraite Kenz 15
1.2.7. Contrat KENZ Entreprise 16
1.2.8. Contrat Tawfik 16
CHAPITRE 2 17
LE REGIME COMPLEMENTAIRE DE RETRAITE CIMR 17
2.1. Présentation du produit CIMR 17
2.2. Cotisations 17
2.3. Cartographie des risques du régime 18
2.4. Les risques techniques 18
2.5. Les risques financiers 19
2.6. Les risques liés aux options implicites du produit 19
2ème PARTIE 20
CONTEXTE ET ENJEUX DE LA 20
SOLVABILITE II 20
CHAPITRE 3 21
LA REFORME SOLVABILITE II 21
3.1. Concepts de la Solvabilité II 21

3.2. Les objectifs pour Solvabilité II 21
3.3. Les deux phases de travail de Solvabilité II 21
3.4. Les 3 piliers de Solvabilité II 22
3.4.1. Pilier 1 : Les exigences quantitatives en capital 23
3.4.2. Pilier 2 : le contrôle 23
3.4.3. Pilier 3 :L'information aux marchés 23
3.5. Pilier 1 : Provisions techniques et besoin en capital 24
3.5.1. Estimation des provisions techniques 24
3.5.2. Estimation du besoin en capital 24
3.6. Les études quantitatives d'impact (QIS) 25
3.7. Les risques encourus 26
3.8. Principe d'évaluation 27
Figure 2 : Evaluation économique des actifs et des passifs 28
3.9. Provisions techniques 28
Principes généraux 28
3.9.1. BEST ESTIMATE 28
3.9.2. MARGE DE RISQUE 29
3.10. Capital minimum de risque (MCR) 31
3.10.1. Définition 31
3.10.2. Calcul des MCR par type de risque 32
3.11. Capital de solvabilité requis : formule standard 34
3.11.1. Risque opérationnel 34
3.11.2. Risque de souscription 35
3.11.3. Module Risque de marché 39
- Risque de taux d'intérêt : SCR_{taux} 41

3ème PARTIE 46
EXIGENCE EN CAPITAL DE SOLVABILITE 46
APPROCHE MODELE INTERNE 46
3.1. Introduction : 46
3.2. Modélisation stochastique des taux de sortie 47
3.2.1. Le taux de décès 48
3.2.2. Le taux de rachat 50
3.2.3. Taux de sortie en capital 52
3.3. Modélisation stochastique des taux de mortalité 56
3.3.1. Le modèle de Lee-Carter 58
3.4. Modélisation du taux d'intérêt 65
3.4.1. La dynamique des taux court terme 65

3.4.2 Estimation des paramètres 67
3.4.3. Construction de la courbe de taux 67
3.4.4. Simulation des taux futurs et calculs dérivés 67
3.5. Modélisation de l'actif 68
3.5.1. Modélisation du fonds d'actions 69
3.5.2. Modélisation du fonds d'obligations 71
3.5.3. Modélisation du fonds OPCVM 72
3.6. Valeur de marché des actifs 75
3.6.1. Rendement de l'actif 76
3.6.2. Flux du passif 77
3.6.3. Résultats 78
3.7. Valeur de marché des provisions 78
3.7.1. Best Estimate 79
3.7.2. Marge de risque 79
3.7.3. Valeur de marché des provisions 80
3.8. Détermination du capital de solvabilité 81
3.8.1. Mesures de risques 81
3.8.2. Les différentes méthodes d'estimation de la VaR : 83
3.8.3. Deux définitions de la ruine : 85
4ème Partie 86
APPLICATION NUMERIQUE ET ANALYSE DES RESULTATS 86
4.1. Calcul du capital de solvabilité selon l'approche standard 87
4.2. Calcul de la valeur de marché des provisions techniques selon l'approche standard 88
4.3. Calcul du capital minimum requis 89
CONCLUSION 91
BIBLIOGRAPHIE 94
ANNEXES 95

INRODUCTION GENERALE

L'assurance est avant tout affaire de confiance. En effet, l'assuré paie un montant (la prime) et reçoit en échange la promesse que l'assureur paiera si un sinistre survient. Cette promesse, ou garantie, ne se matérialise que si un sinistre survient à une époque future. Ce mécanisme par lequel l'assuré paie d'abord et reçoit le "produit" après, dénommé inversion du cycle de production, a des conséquences à la fois sur la situation financière de la compagnie et sur le degré de connaissance qu'elle a de ses engagements.

La compagnie d'assurances doit pouvoir faire face à ses engagements à une période future ; elle doit être solvable et ne pas faire faillite dans l'intervalle. C'est pourquoi l'État réglemente traditionnellement le secteur des assurances, pour assurer cette solvabilité.

Le décalage dans le temps implique également que la compagnie ne connaît pas a priori le coût exact de la garantie qu'elle donne à l'assuré. Les provisions techniques sont le résultat d'un calcul probabiliste d'évaluation des engagements et non un montant exact.

Les règles de solvabilité applicables aujourd'hui ont été définies dans des directives adoptées dans les années 1970 qui ne sont plus adaptées à la réalité économique actuelle.

Le projet Solvabilité II lancé par la Commission européenne en 2001 vise à une refonte en profondeur des règles existantes. Si la structure du nouveau système est définie, la proposition de directive est en cours de rédaction et tous les détails ne sont pas connus aujourd'hui.

La Commission européenne prévoit de présenter la proposition de directive en juillet 2007 au Conseil et au Parlement européens. Toutefois, même en juillet 2007, tous les détails ne seront pas précisés car cette directive sera un "cadre", dit de niveau 1, qui, suivant le processus Lamfalussy (voir Annexes), devra être complétée par des mesures de niveau 2. Il faudra donc attendre de connaître les mesures de niveau 1 et de niveau 2 pour avoir une connaissance précise des nouvelles règles Solvabilité II.

Si l'objectif de toute réglementation en assurance vise la protection des assurés, la Commission européenne cherche aussi à compléter la création d'un marché unique de l'assurance et à renforcer la compétitivité de l'industrie d'assurance européenne. Pour atteindre ces objectifs généraux, elle ambitionne :

- ✓ D'inciter les entreprises à mieux gérer leurs risques en créant un cadre prudentiel reflétant plus exactement ces risques;
- ✓ D'accroître l'harmonisation des règles au niveau européen, qui devront également prendre en compte les développements internationaux (normes IFRS et recommandations de l'IAIS), et les évolutions réglementaires des autres secteurs financiers.

Dans le dispositif actuel (« Solvabilité I »), en vigueur depuis plus de trente ans, les fonds propres des assureurs correspondent à un pourcentage forfaitaire portant sur les primes.

Ce système présente un certain nombre d'insuffisances. En particulier, il manque de sensibilité au risque, puisqu'il ne tient pas compte de la probabilité qu'un risque survienne. Il comporte aussi d'autres limites : des restrictions au bon fonctionnement du marché unique ; des règles non optimales pour le contrôle prudentiel des groupes ; un manque de convergence internationale et trans-sectorielle.

1ère PARTIE

GENERALITES

CHAPITRE 1 :

PRESENTATION DE L'ORGANISME D'ACCUEIL

1.1. La Royale Marocaine des Assurances Watanya

RMA Watanya se positionne actuellement comme la première compagnie d'assurance, à majorité marocaine, au Maroc. Son ambition est non seulement de contribuer au développement de l'assurance mais de toute l'économie nationale.

Alors que certaines compagnies d'assurance ont choisi de s'adosser à des opérateurs étrangers pour acquérir une certaine taille critique, la nouvelle entité RMA Watanya, née de la fusion entre la Royale Marocaine d'assurance (RMA) et Al Wataniya, a opté pour un actionnariat constitué par une majorité marocaine avec la présence de quelques investisseurs étrangers dans son capital. Mais, Finance.com, le groupe de Othman Benjelloun, y joue un rôle capital. Acquises au prix fort (3,4 milliards de dirhams) en 1999 par Othman Benjelloun à l'assureur français Groupama, les deux compagnies d'assurance, Al Wataniya et l'Alliance Africaine, ont fondu dans une seule entité, RMA Watanya qui s'adjuge désormais une part de marché de 23%, devançant de loin Axa Assurance Maroc et bien d'autres compagnies à l'actionnariat prestigieux.

1.2. Les produits

1.2.1 Assurance Décès

Objet : Elle est destinée à garantir en cas de décès de l'adhérent :

-Soit le paiement d'un capital au profit des bénéficiaires déterminés.

-Soit le service d'une rente viagère au conjoint survivant.

-Soit le service d'une rente temporaire aux enfants orphelins jusqu'à l'âge de 25 ans.

-Soit la combinaison entre le service d'une rente « conjoint » et d'une rente « orphelins ».

Les prestations garanties sont déterminées :

-En fonction du traitement annuel de base de l'adhèrent, résultant des quatre déclarations trimestrielles de salaire immédiatement antérieures à la date de l'événement ouvrant droit à prestations sauf spécifications contraires prévues aux conditions particulières.

1.2.2. Contrat Iltizam

Contrat Ilizam a pour objet de garantir, en cas de décès de l'assuré, le maintien du train de vie familial par l'octroi aux bénéficiaires désignées :

-D'une rente certaine servie durant la période fixée aux conditions particulières et dont le montant sera déterminé sur la base du revenu annuel déclaré par l'assuré à la souscription du contrat, revalorisé automatiquement de 5% à chaque échéance annuelle sans toutefois que le cumul des taux de revalorisation ne puisse dépasser pour toute la durée du contrat 50% du revenu déclaré.

Toute modification de la durée de service des rentes ou tout changement de revenu assuré sera constaté par avenant après accord des parties.

1.2.3. Assurance global santé

Elle est destinée à assurer le remboursement :

-des frais médicaux et pharmaceutiques ;

-des frais d'hospitalisations ;

-des frais chirurgicaux ;

-Et d'un capital dont le montant est stipulé aux conditions particulières pour la couverture des frais funéraires consécutifs au décès de l'assuré.

1.2.4. Assurance incapacité invalidité maladie maternité

Si incapacité temporaire totale du travail -> indemnité journalière de 50% de la 365ième partie du traitement annuel de base, payée par mois échu. L'indemnité cesse si on attribue la rente d'invalidité

Si invalidité totale (>=66%) -> rente annuelle = 40% du traitement annuel de base

Si invalidité partielle (33%< <66%) -> rente = taux d'invalidité retenue / 66ième de la rente d'invalidité totale

Si invalidité <=33% -> aucune rente due

La rente d'invalidité est <=40% du traitement annuel de base, payable par trimestre échu, jusqu'à la retraite (normale ou anticipée), et au plus jusqu'à 60 ans.

1.2.5. Assurance temporaire au décès

Si invalidité totale, absolue et définitive -> versement du capital décès par anticipation après six mois

Primes payables d'avance à l'échéance contre quittance. Elles cessent dès la 1ère échéance de prime suivant le décès de l'assuré

1.2.6. Epargne retraite Kenz

Objet : Epargne retraite par capitalisation contre versement de primes périodiques

A la retraite, soit :

- Rente viagère payable trimestriellement à terme échu
- Rente viagère réversible sur le tête du conjoint payable trimestriellement à terme échu
- Rente certaine payable trimestriellement à terme échu pendant 5, 10, 15 ou 20 ans
- Capital = épargne constituée revalorisée nette d'impôts
- Combinaison entre option de capital et l'une des options de rente

1.2.7. Contrat KENZ Entreprise

Objet : Constitution d'une épargne retraite par capitalisation moyennant le versement de primes périodiques

A la retraite, soit :

- Rente viagère payable trimestriellement à terme échu
- Rente viagère réversible sur la tête du conjoint payable trimestriellement à terme échu
- Rente certaine payable trimestriellement à terme échu pendant 5, 10, 15, ou 20 ans
- Capital = épargne constituée revalorisée nettes d'impôts dus
- Combinaison entre option capital et option de rente

1.2.8. Contrat Tawfik

Les garanties de ce contrat portent sur les personnes âgées de plus de 18 ans et moins de 60 ans à la date de souscription.

Chaque contrat est établi au profit d'un enfant âgé de moins de 18 ans au moment de la souscription, nominativement désigné aux conditions particulières.

CHAPITRE 2

LE REGIME COMPLEMENTAIRE DE RETRAITE CIMR

2.1. Présentation du produit CIMR

La CIMR est une association privée formée entre les personnes physiques ou morales employant du personnel salarié qui ont adhéré ou adhéreront à ses statuts. Cette association est régie par le dahir du 15 novembre 1958.

L'adhésion d'une entreprise à la CIMR permet à l'ensemble de ses salariés de bénéficier d'un système de retraite fonctionnant sous le double régime de la répartition et de la capitalisation.

2.2. Cotisations

Les cotisations se calculent en pourcentage appliqué au salaire de l'assuré. Le régime prend en charge également les contributions patronales payées par l'employeur au profit de l'assuré. Avant la réforme 2003 Les parts salariales sont gérées par les compagnies d'assurance, tandis que les parts patronales sont gérées directement par la CIMR même.

Les cotisations sont réparties en part patronale et part salariale (Part patronale = Part salariale), et présentent les caractéristiques suivantes :

- Min 3 % majoré par pallier de 25%, Max 6 %
- Les droits sont exprimés en points

- A l'échéance 60 ans le montant de l'allocation est Nombre de points acquis X valeur du point

2.3. Cartographie des risques du régime

Par définition, le risque désigne *tout événement aléatoire pouvant réduire la capacité de l'assureur à faire face à ses engagements*. Les engagements du régime regroupent d'une part les engagements contractuels et d'autre part la protection des rentes contre le risque d'inflation.

Le risque peut avoir une source commerciale et une source financière. Le risque commercial est lié à la vente des contrats, aux différents problèmes techniques, juridiques, administratifs.

Le risque financier provient des l'incertitude sur la valeur des placements et leurs rendements.

Pour un régime de retraite comme celui de la CIMR, les principaux risques sont soit techniques, financiers, ou liés aux options implicites rattachées aux contrats. Tous ces risques sont liés les uns des autres et nécessitent une gestion coordonnée.

2.4. Les risques techniques

Pour le régime, le calcul des prestations (rentes, capitaux, pécule, pension d'invalidité…) est basé sur la table de mortalité PF 60-64 (en vigueur depuis 1984). Le risque proviendrait de l'allongement des durées de vie réelles. Cette baisse de mortalité à un coût car l'actualisation des engagements sera d'autant plus importante que l'engagement est de longue durée…

Au risque viager, on peut ajouter :

· le risque de concentration d'une catégorie quelconque d'affiliés dans le régime (hommes, femmes, fumeurs…). Ce risque est susceptible de conduire à une mauvaise estimation des engagements

· le risque d'un taux technique trop important par au rendement réel des placements…

· etc.

2.5. Les risques financiers

Les risques financiers sont dus à un décalage significatif entre la valeur des placements et celles des engagements.

Les placements relatifs au régime sont investis presque en totalité dans les obligations d'Etat ou dans celles garanties par ce dernier. Le *risque de signature* (risque de défaillance de l'émetteur de l'instrument financier) est donc minime.
Le risque le plus important est le *risque de taux***.** Il se manifeste en cas de baisse ou de hausse des taux:

· Une baisse des taux entraîne des *risques de réinvestissement* car elle réduirait la marge financière future et les rendements des nouveaux actifs pourraient être insuffisant pour couvrir les taux garantis par les contrats antérieurs.

· Une hausse des taux entraîne des *risques de liquidation* car elle réduirait la valeur de marché du portefeuille des actifs. Cela pourrait également provoquer le rachat des contrats garantis à un taux inférieur au taux des nouveaux contrats.

2.6. Les risques liés aux options implicites du produit

· Les conditions générales du régime laissent aux affiliés la possibilité de racheter leur contrat après un minimum de trois années. Le taux de rachat dépend en grande partie de la durée du contrat, des taux d'intérêt sur le marché. Son augmentation brutale ou continue représente un risque pour le régime. Mais le taux de rachat peut-être limité avec l'instauration d'une pénalité de rachat.

· L'affilié a également le choix entre l'option rente ou capital

· Le droit d'anticiper sa retraite ou de l'ajourner

· Etc.

Tous les risques liés aux options implicites du produit sont difficiles à estimer et à provisionner dans la réalité et ils nécessitent une attention particulière.

2ème PARTIE

CONTEXTE ET ENJEUX DE LA SOLVABILITE II

CHAPITRE 3

LA REFORME SOLVABILITE II

3.1. Concepts de la Solvabilité II

« Volonté de développer un nouveau système de solvabilité pour toutes les entreprises d'assurance vie/non vie et de réassurance que tous les états membres seront en mesure d'appliquer de façon harmonisée, robuste et pérenne, sans engendrer de perturbation des marchés » (cadre de la consultation - Commission européenne)

La surveillance prudentielle du secteur bancaire (« Bâle2 ») a été considérablement modifiée. Cette reforme a inspiré les instances européennes pour repenser également le système de solvabilité des organismes assureurs à travers l'élaboration d'une directive européenne appelée « Solvabilité II »

3.2. Les objectifs pour Solvabilité II

Le nouveau système de Solvabilité II est destiné aux entreprises d'assurance vie, non-vie et aux entreprises de réassurance européennes .Le système doit fournir aux autorités de contrôle les outils et la capacité d'évaluer la solvabilité générale des entreprises par le biais d'une approche prospective basée sur :

-Les risques quantitatifs d'une part, comme la couverture du programme de réassurance ou l'adéquation entre les actifs et les passifs (ALM)

-Les risques qualitatifs comme la fiabilité des systèmes de contrôle interne et de gestion des risques, la qualité du management ou la maîtrise du risque opérationnel (défaillance des systèmes d'information, fraudes, etc.…)

3.3. Les deux phases de travail de Solvabilité II

Les travaux pour l'élaboration des normes solvency II se sont déroulés en deux phases :

Phase 1 : Réflexions sur la forme générale que doit prendre le système de solvabilité européen. Cette phase est terminée depuis le 9 avril 2003.Elle a conduit au souhait d'un système cohérent avec l'approche Lamfalussy et à l'élaboration d'un système en 3piliers pour être également en cohérence avec les règles du secteur bancaire (Bâle 2) ;

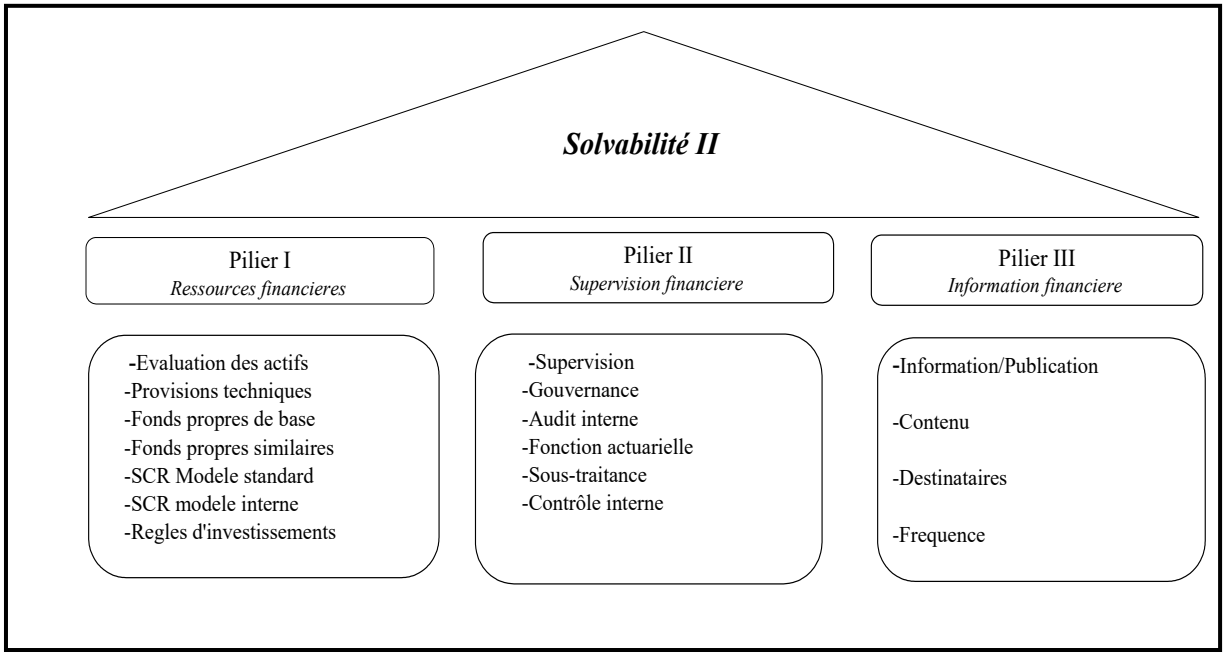
Phase 2 : Détermination des méthodes de prise en compte des différents risques.

La phase actuelle du projet est donc la phase 2 qui aboutit à l'établissement de méthodes d'évaluation des différents risques encourus par les organismes assureurs

Calendrier et organisation

3.4. Les 3 piliers de Solvabilité II

Pour être homogène avec la réforme Bale 2 intervenue dans le milieu bancaire, le système Solvabilité II introduit un concept de solvabilité basé sur 3piliers :



3.4.1. Pilier 1 : Les exigences quantitatives en capital

Les exigences quantitatives en capital se rapportent aux montants des provisions techniques, au capital cible et à la gestion interne du risque. Le pilier 1 s'attache donc à établir des outils de mesure de la « suffisance » des provisions techniques et à formuler une harmonisation des principes de calcul entre les différentes compagnies européennes. Ces exigences doivent par ailleurs être distinctes, le capital de l'organisme assureur ne devant pas permettre de compenser une insuffisance de provisions techniques.

3.4.2. Pilier 2 : le contrôle

Il s'agit à la fois du contrôle par les autorités et du contrôle interne des entreprises.

Les instances européennes souhaitent donner aux autorités de contrôle les moyens d'identifier les compagnies présentant des risques financiers ou organisationnels importants .dans de tels cas ,elles doivent avoir la possibilité d'augmenter l'exigence de capital ou d'appliquer des mesures ciblées pour réduire les risques.

Conséquence directe de ce pilier 2, les autorités de contrôle auront un droit de regard sur l'ensemble de la gestion et du fonctionnement d'un organisme assureur,examinant l'ensemble des risques dont le risque opérationnel.

3.4.3. Pilier 3 :L'information aux marchés

Les « reporting » des entreprises d'assurance aux autorités de contrôles européennes, ainsi que l'information au public devront être harmonisés en vue d'améliorer la « discipline » de marché .Ces reporting devront par ailleurs être en ligne avec les travaux de l'IASB sur la phase 2 de la norme IFRS 4 relative aux contrats d'assurance.

Ce mémoire est concentré uniquement sur les exigences quantitatives, et donc concerne exclusivement le pilier 1.

3.5. Pilier 1 : Provisions techniques et besoin en capital

3.5.1. Estimation des provisions techniques

Solvency II se référera à un montant de provisions techniques avec marge de risque. En accord avec les développements attendus de l'IASB, les provisions techniques devront être calculées en « Best Estimate » puis tenir compte d'une marge de sécurité supplémentaire (fixée de manière provisoire au niveau de confiance de 75% d'une mesure de risque donnée), de sorte que la probabilité d'une insuffisance de provisions par rapport aux prestations futures corresponde à un seuil prédéfini.

3.5.2. Estimation du besoin en capital

L'exigence de capital comprendra deux paliers : le MCR (Minimum Capital Requirement) et le SCR (Solvency Capital Requirement).

Lorsque le capital atteindra un niveau inférieur au capital minimum (MCR),des mesures diverses devront être exercées par les autorités de contrôle compétents (plan de redressement,retrait d'agrément…).la formule du MCR devra être simple,facile à calculer ,pour permettre des évaluations fréquentes,et idéalement additives,sur les filiales d'un groupe .

Le capital cible (SCR) devra correspondre au niveau des fonds propres nécessaires pour réduire la probabilité de ruine de l'entreprise d'assurance à un niveau fixé sur un horizon de temps donné. La situation de ruine correspond à une situation d'insuffisance d'actifs représentatifs des provisions techniques calculées suivant la méthode « Best Estimate ».Le SCR sera calculé à l'aide de modèles internes (préalablement validés par les autorités de contrôle) ou de modèles standards développés au niveau européen .La détermination des modèles standards européens

constitue l'un des grands défis de la commission européenne. Ils pourraient s'apparenter à des formules de type RBC Américain.

3.6. Les études quantitatives d'impact (QIS)

Le CEIOPS doit déterminer les impacts possibles de la future norme de solvabilité par une série d'études quantitatives d'impact (QIS).L'objectif de ces études est double : d'une part évaluer la faisabilité des calculs et l'impact de Solvency II, et d'autre part préparer la proposition de directive.

La première vague de tests, à laquelle ont été conviées toutes les parties prenantes en assurance vie et non vie ainsi que les réassureurs, a été lancée le 15 octobre avec une réponse souhaitée aux commissions de contrôle locales au 31 décembre 2005.Ce QIS1 s'est concentré sur l'étude du niveau de prudence des provisions techniques courantes. L'enjeu est de mieux calibrer le montant des provisions techniques qui devraient être estimées selon un calcul au « Best Estimate » majoré d'une marge de risque.

- ✓ QIS1 se compose d'un questionnaire quantitatif et d'un questionnaire qualitatif. Le questionnaire quantitatif reprend les données comptables enregistrées au 31 décembre 2004 et l'estimation des provisions en VAR 75% et 90% à cette même date. Le questionnaire qualitatif reprend la méthodologie employée pour l'étude, les hypothèses choisies, les difficultés rencontrées dans les calculs, etc. Les données obtenues à partir du QIS1 devraient donc aider le CEIOPS à développer ses positions sur les règles de Solvency II.

- ✓ QIS 2 a élargi le champ pour y intégrer une première structure de la formule standard,

- ✓ QIS 3, encore plus détaillée, visait à tester en grandeur nature le calibrage de la formule standard par organisme ainsi que les aspects relatifs à l'appréciation de la solvabilité des groupes.

- ✓ La nouvelle étude, QIS 4, permettra d'affiner et de détailler les mesures quantitatives, en particulier sur le calibrage de la future exigence de solvabilité, sur les éléments éligibles du capital et les aspects groupes. Cette quatrième étude, qui s'achèvera mi-juillet 2008, comporte un questionnaire détaillé sur l'utilisation des modèles internes. Le rapport final sur l'exercice QIS4 est prévu pour le 19 novembre 2008.

Contrairement aux précédentes études d'impact, celle-ci est directement pilotée par la Commission européenne.

En parallèle de ces travaux techniques, la proposition de directive "Solvabilité 2" sera soumise au Parlement européen dès le début de l'été prochain pour une adoption définitive prévue d'ici la fin de l'année.

3.7. Les risques encourus

Les modèles choisis devront prendre en compte différents risques déterminés par une étude de International Actuarial Association (IAA)

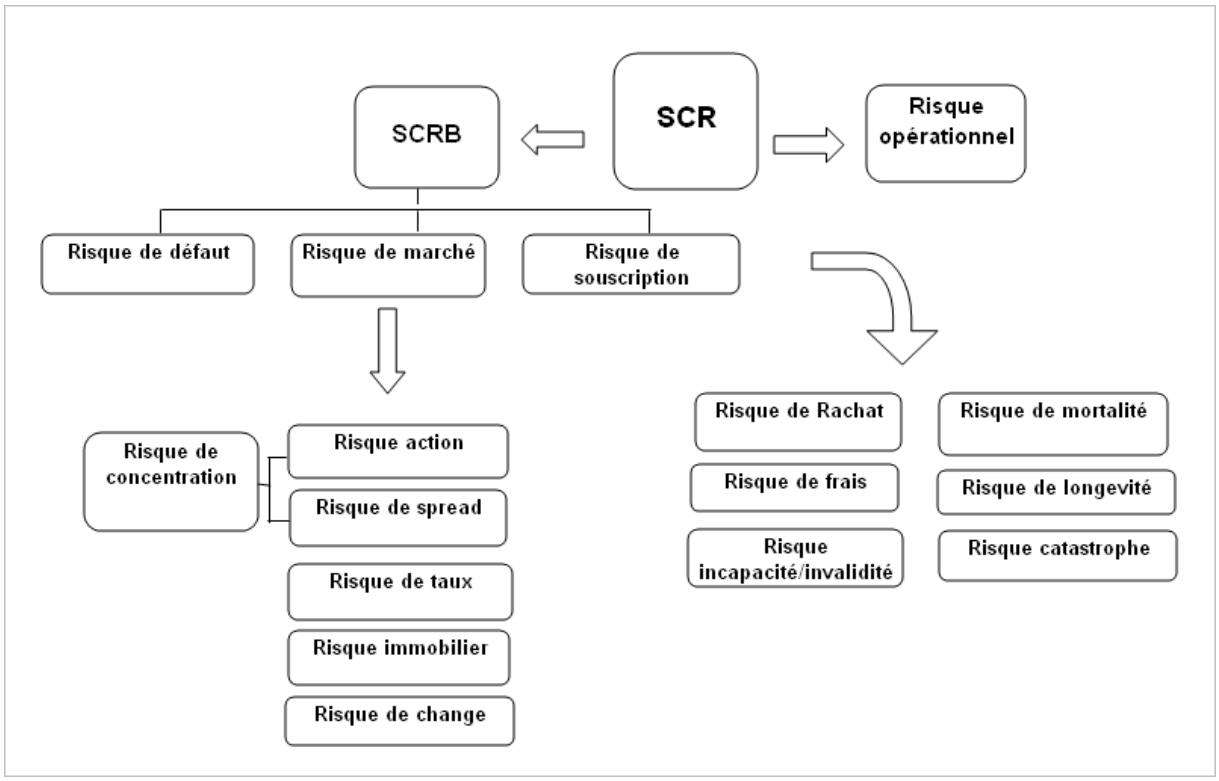


Figure 1: Cartographie des risques en assurance vie sous Solvabilité II

Si ces risques ne sont pas quantifiables --→ils rentrent dans le Pilier 2 qui intègre la possibilité de demander un capital supplémentaire pour certains risques.

3.8. Principe d'évaluation

Le principe, posé par Solvabilité II, de la détermination du capital de solvabilité requis en fonction du risque s'efforce de tenir compte de l'ensemble des risques auxquels des entreprises d'assurance peuvent être exposées. Ce principe suppose, notamment, d'évaluer le risque de perte de valeur des actifs et passifs (autres que les provisions techniques) détenus par les entreprises. Conformément à la proposition de directive cadre, il convient pour cela d'effectuer une évaluation économique, conforme à la valeur de marché, de l'ensemble des actifs et passifs.

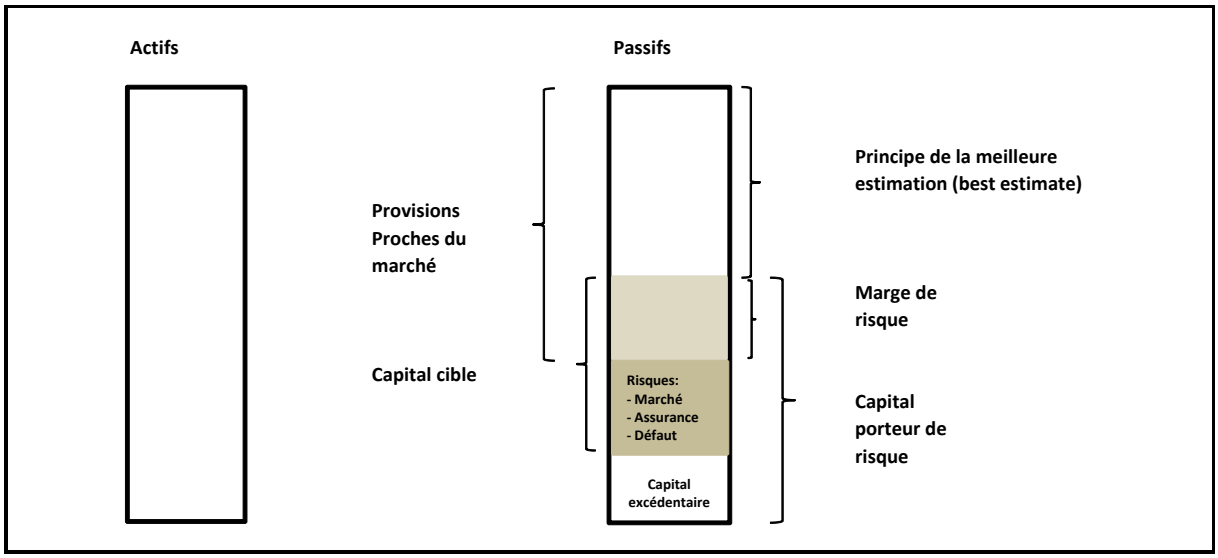


Figure 2 : Evaluation économique des actifs et des passifs

3.9. Provisions techniques

Principes généraux

Les provisions techniques doivent être évaluées au montant auquel elles pourraient être transférées ou réglées entre des parties informées et consentantes dans des conditions de concurrence normales.

Le calcul sera basé sur la valeur de sortie actuelle, il fait appel aux informations données par les marchés financiers et aux données généralement disponibles sur les risques techniques d'assurance et sera cohérent avec celles-ci.

Les provisions techniques sont établies en tenant compte de l'ensemble des engagements à l'égard des souscripteurs et des bénéficiaires des contrats d'assurance.

Le montant des provisions techniques est égal à la somme du *Best estimate* et de la marge de risque.

Le *Best estimate* et la marge de risque doivent être évalués séparément,

3.9.1. BEST ESTIMATE

Principes d'évaluation généraux

La détermination du *Best estimate* implique de déterminer et d'évaluer tous les futurs flux de trésorerie susceptibles d'être encourus pour honorer les engagements à l'égard des souscripteurs. Il est égal à la valeur actuelle attendue de tous les futurs flux de trésorerie potentiels, basée sur des informations actuelles et crédibles, compte tenu de toutes les informations disponibles et conformes aux caractéristiques du portefeuille d'assurance sous-jacent.

Les flux de trésorerie doivent être actualisés sur la base du taux sans risque applicable à l'échéance pertinente à la date d'évaluation, déterminé à partir de la structure par terme des taux sans risque à la date d'évaluation.

Le calcul approximatif du Best Estimate s'effectue comme suit :

$$BE \approx \sum_{t=0}^{n} \frac{CF_t}{(1+r_t)^t}$$

Avec :

-CF_t : Flux de trésorerie non actualisés des engagements d'assurance en vie.

-r_t : Taux d'intérêt sans risque pour l'échéance t

3.9.2. MARGE DE RISQUE

La marge de risque est calculée suivant la méthode dite du « coût du capital ».

Cette méthode consiste à calculer le coût de la mobilisation d'un montant de fonds propres éligibles égal au SCR nécessaire pour assumer les engagements d'assurance et de réassurance sur toute leur durée de vie. Pour ce faire, nous devons établir une projection des engagements d'assurance jusqu'à leur extinction puis, pour

chaque année, déterminer le montant de SCR que doit présenter une entreprise exposée à de tels engagements.

Lorsque la marge de risque est calculée suivant la formule standard, elle doit être calculée nette de réassurance. Lorsque les participants calculent la marge de risque à l'aide d'un modèle interne, ils peuvent soit effectuer un calcul net unique ou deux calculs séparés.

- Risques à prendre en compte

  Les modules de risques à prendre en compte dans le calcul du coût du capital sont le risque opérationnel,et le risque de souscription au regard du portefeuille en cours.

  Pour l'assurance vie, la valeur de la marge de risque doit être indiquée séparément pour chaque segment.

- Coût du capital

  Le coût du capital est égal à 6 % pour tous les assureurs.

- Calcul de la marge de risque

  Le calcul de la marge de risque suivant la méthode du coût du capital s'effectue comme suit (on suppose que la date d'évaluation est le début de l'année 0, soit t = 0) :

  - pour chaque segment d'assurance, trouver un SCR pour l'année t = 0 et pour chaque année future de la durée de vie des engagements pris sur ce segment. Le SCR pour l'année 0 correspond au capital que la société devrait détenir aujourd'hui, à ceci près qu'une partie seulement des risques est prise en compte.
  - multiplier chacun des futurs SCR par le coût du capital pour obtenir le coût de détention des futurs SCR ;

- actualiser chacun des montants calculés à l'étape précédente au moyen de la courbe des taux sans risque en t = 0. La somme des valeurs actualisées correspond à la marge de risque à associer à le *Best estimate* des engagements concernés en t = 0 ;
- le montant total de la marge de risque est la somme des marges de risque de tous les segments.

La marge de risque d'un segment basée sur le coût du capital est déterminée par la formule :

$$MR \approx CC \cdot (0.5 + Dur_{\text{mod}}) \cdot SCR(0)$$

Avec :

MR : La marge basée sur le coût du capital ;

CC : Le coût du capital ;

$SCR(0)$ *:* Le SCR actuel du segment hors risque de marché et risque de contrepartie pour les dérivés financiers ;

Dur_{mod} : La duration modifiée du *Best estimate* des provisions du segment.

$$Dur_{mod}=D/(1+r)$$

Où : r=Taux d'actualisation

Et D : La duration

$$D = \frac{\sum_{1}^{n} \frac{t \bullet CF_t}{(1+r)^t}}{\sum_{1}^{n} \frac{CF_t}{(1+r)^t}}$$

Avec :

- CF_t=Flux du passif en année t.

3.10. Capital minimum de risque (MCR)

3.10.1. Définition

Le projet de solvabilité II définit également un autre niveau de capital, comparable à l'ancienne exigence de marge de solvabilité. En effet, bien que la solution ne soit pas encore définitivement arrêtée, le niveau de capital minimum pourrait correspondre à l'actuelle exigence de marge de solvabilité, moyennant l'ajout préalable de certains éléments qui restent encore à définir.

Ce capital s'appelle capital minimum. Il remplit une fonction toute autre que le capital de solvabilité. Ce capital, bien inférieur aux exigences en termes de capital de solvabilité, représente la limite ultime en deçà de laquelle les autorités prudentielles sont en position de prendre des mesures extrêmes (jusqu'à révocation de l'agrément).

3.10.2. Calcul des MCR par type de risque

Dans cette partie, nous nous sommes intéressées au calcul du capital minimum (MCR) pour la compagnie d'assurance souscrivant uniquement le produit CIMR. La détermination de ce seuil minimum est aisée et rapide en comparaison avec celle relative au capital de solvabilité. L'approche développée par les autorités de contrôle de Solvabilité II propose, en effet, une version simplifiée de la méthodologie adoptée pour le calcul de ce dernier.

Il s'agit, en fait, de retenir les composantes les plus importantes des risques considérées pour le calcul du capital de solvabilité – à l'exclusion du risque opérationnel – et d'imposer des exigences moins contraignantes, correspondant à un niveau de confiance plus faible.

Le capital requis est à nouveau calculé dans un premier temps par type de risque, puis agrégé, en tenant compte des corrélations. Nous reprendrons pour ce faire les deux étapes explicitées à la section précédente. Notons que seules les composantes étudiée dans la détermination du capital de solvabilité seront abordées.

- <u>Le risque de souscription et d'actions</u>

Le capital minimum relatif au risque de longévité, de rachat, de mortalité et d'actions correspond à la moitié du capital de solvabilité (SCR) relatif à ces risques.

$$MCR_{risque(i)} = 0.5 \bullet SCR_{risque(i)}$$

Où :

i : indice du risques i.

- Le risque de taux d'intérêt

Pour ce risque de taux d'intérêt, la même approche que celle proposée pour le calcul du capital de solvabilité est utilisée.

Agrégation du risque de marché

L'exigence en capital pour le risque de marché est alors obtenue de la manière suivante :

Agrégation du risque de souscription

L'exigence en capital pour le risque de souscription est alors obtenue de la manière suivante :

$$MCR_{souscription} = \sqrt{MCR^2{}_{mortalité} + MCR^2{}_{longévité} + MCR^2{}_{rachat} + 2 \bullet \rho_{i,j} \bullet MCR_i \bullet MCR_j}$$

Avec :

- $SCR_{souscription}$: Chargement en capital au titre du risque de souscription vie
- $MCR_{mortalité}$: Capital minimum au titre du risque de mortalité
- $MCR_{longévité}$: Capital minimum au titre du risque de longévité
- MCR_{rachat} : Capital minimum au titre du risque de rachat

- $\rho_{i,j}$: Corrélation entre le risque i et le risque j

Détermination du capital minimum

Les exigences de capital pour les deux risques pris en compte sont combinées de la manière suivante :

$$MCR = \sqrt{MCR^2{}_{souscription} + MCR^2{}_{marché} + 2 \bullet \rho_{souscription,marché} \bullet MCR_{souscription} \bullet MCR_{marché}}$$

Avec :

- $MCR_{souscription}$: Capital minimum au titre du risque de souscription
- $MCR_{marché}$: Capital minimum au titre du risque de marché
- $\rho_{souscription,marché}$: Corrélation entre le risqué de souscription et le risqué de marché

La matrice de corrélation testée au niveau du QIS2 est identique à celle utilisée pour le calcul du SCR de base.

3.11. Capital de solvabilité requis : formule standard

3.11.1. Risque opérationnel

Le risque opérationnel est le risque de perte résultant de procédures internes inadaptées ou défaillantes, du personnel ou des systèmes, ou d'événements extérieurs. Il comprend également les risques juridiques, mais il exclut les risques de réputation et les risques résultant de décisions stratégiques. Le module Risque opérationnel tient compte des risques opérationnels non explicitement couverts dans d'autres modules de risque.

$$SCR_{op} = \min \{0.30 \bullet SCR; 0.003 \bullet PT\}$$

Avec :

-SCR : Le capital de solvabilité requis avant tout ajustement ; c'est l'agrégat des chargements en capital au titre de grandes catégories de risque.

- *PT* : Total des provisions techniques d'assurance vie

SCR de base

C'est le capital de solvabilité requis avant tout ajustement ; l'agrégat des chargements en capital au titre de grandes catégories de risque, dans notre mémoire nous nous sommes intéressées au risque de souscription et au risque de marché,ceux liés au produit CIMR .

Le calcul du SCR de base est effectué comme suit :

$$SCR = \sqrt{SCR^2{}_{souscription} + SCR^2{}_{marché} + 2 \bullet \rho_{souscription,marché} \bullet SCR_{souscription} \bullet SCR_{marché}}$$

Avec :

- $SCR_{souscription}$: Chargement en capital au titre du risque de souscription

- $SCR_{marché}$: Chargement en capital au titre du risque de marché

- $\rho_{souscription,marché}$: Corrélation entre le risqué de souscription et le risqué de marché

La matrice des $\rho_{i,j}$ testée au niveau du QIS4 est définie comme suit:

$\rho_{marché,souscription}$	$SCR_{marché}$	$SCR_{souscription}$
$SCR_{marché}$	1	
$SCR_{souscription}$	0.25	1

3.11.2. Risque de souscription

Egalement appelés risques de souscription ou risques actuariels, il s'agit des risques liés à une tarification insuffisamment prudente lors de la souscription ou du rachat de contrats.

Ce module concerne le risque résultant de la souscription de contrats d'assurance vie, qui est associé aux risques couverts et aux procédures suivies dans la gestion de l'activité.

Le risque de souscription vie est composé des risques biométriques (risque de mortalité, risque de longévité et risque d'invalidité/de morbidité), et du risque de rachat.

Le chargement en capital au titre du risque de souscription vie est une combinaison des chargements en capital au titre des sous-risques en vie suivant un tableau de corrélation :

$$SCR_{souscription} = \sqrt{SCR^2{}_{mortalité} + SCR^2{}_{longévité} + SCR^2{}_{rachat} + 2 \bullet \rho_{i,j} \bullet SCR_i \bullet SCR_j}$$

Avec:

- $SCR_{souscription}$: Chargement en capital au titre du risque de souscription vie
- $SCR_{mortalité}$: Chargement en capital au titre du risque de mortalité
- $SCR_{longévité}$: Chargement en capital au titre du risque de longévité
- SCR_{rachat} : Chargement en capital au titre du risque de rachat
- $\rho_{i,j}$: Corrélation entre le risque i et le risque j

A titre d'illustration, mentionnons que la matrice de corrélation testée au niveau du QIS4 est la suivante :

$\rho_{souscription}$	$SCR_{mortalité}$	$SCR_{longévité}$	SCR_{rachat}
$SCR_{mortalité}$	1		
$SCR_{longévité}$	-0.25	1	
SCR_{rachat}	0	0.25	1

- Risque de mortalité : $SCR_{mortalité}$

Le risque de mortalité représente l'incertitude relative aux tendances et paramètres, dans la mesure où ceux-ci ne sont pas déjà pris en compte dans l'évaluation des provisions techniques.

Il est applicable aux contrats d'assurance subordonnés au risque de mortalité (c'est-à-dire les contrats pour lesquels le montant actuellement à verser au décès est supérieur aux provisions techniques détenues et où par conséquent, une augmentation des taux de mortalité risque d'entraîner une augmentation des provisions techniques).

Le calcul est effectué comme suit :

$$SCR_{mortalité} = (\text{Total du capital en risque}) * q * D * 0{,}10 * 1{,}1^{((D-1)/2)}$$

Avec :

-D = duration modifiée des flux de passif

-q = (spécifique à l'entreprise) taux de décès moyen attendu sur l'année suivante pondéré de la somme assurée

-$1{,}1^{((D-1)/2)}$ = Augmentation projetée de la mortalité

- Le risque de longévité : $SCR_{longévité}$

Le risque de longévité résulte de l'incertitude relative aux tendances et paramètres dans la mesure où ceux-ci ne sont pas déjà pris en compte dans l'évaluation des provisions techniques.

Il est applicable aux contrats d'assurance subordonnés au risque de longévité (lorsqu'il n'y a pas de prestation en cas de décès ou lorsque le montant actuellement à payer en cas de décès est inférieur aux provisions techniques détenues et que par conséquent, une baisse des taux de mortalité risque d'entraîner une augmentation des provisions techniques).

Le calcul du chargement en capital de ce risque est effectué comme suit :

$$SCR_{longévité} = 25\% * q *(1,1)^{((D-1)/2)} * D * PT_l$$

Avec :

-PT_l : Provisions techniques pour les contrats exposés au risque de longévité

-D= duration modifiée des flux de trésorerie passifs

-q= taux de décès moyen attendu l'année suivante pondéré de la somme assurée.

- Risque de rachat : SCR_{rachat}

Le risque de rachat concerne la perte ou la modification défavorable de la valeur des passifs d'assurance résultant d'une variation du niveau ou de la volatilité des taux de déchéance, de résiliation, et de rachat des polices. La formule standard tient compte du risque de changement permanent des taux et du risque de rachat massif.

Les calculs simplifiés sont définis comme suit :

$$SCR_{rachat} = \max(Rachat_{baisse}; Rachat_{hausse}; Rachat_{massif})$$

Avec :

$$Rachat_{Baisse} = 0.5 \cdot l_{Baisse} \cdot n_{Baisse} \cdot S_{Baisse} \quad \text{et} \quad Rachat_{Hausse} = 1.5 \cdot l_{Hausse} \cdot n_{Hausse} \cdot S_{Hausse}$$

Où :

$l_{Baisse}; l_{Hausse}$ = estimation du taux de rachat moyen des polices avec un coût de rachat négatif/positif

$n_{Baisse}; n_{Hausse}$ = durée moyenne (en années) pondérée des *coût de rachat*, de la liquidation de la police avec un *coût de rachat* négatif/positif

$S_{down}; S_{up}$ = somme des coûts de rachat négatifs/positifs

Le coût du rachat d'une police se définit comme l'écart entre le montant actuellement dû au rachat et le *best estimate* de la provision détenu.

3.11.3. Module Risque de marché

Description

Le risque de marché résulte du niveau ou de la volatilité de la valeur de marché des instruments financiers. L'exposition au risque de marché est mesurée par l'impact des mouvements de variables financières telles que les cours des actions, les taux d'intérêt, les prix de l'immobilier et les taux de change.

Pour ce qui est des OPCVM, une des solutions consiste à considérer l'OPCVM comme un investissement en actions et à appliquer le chargement global au titre du risque sur actions (si les actifs de l'OPCVM sont majoritairement cotés) ou un chargement au titre d'un autre risque (si les actifs détenus par l'OPCVM sont majoritairement non cotés).

Données requises

Ce module requiert les données suivantes :

SCR_{taux} = Chargement en capital au titre du risqué de taux d'intérêt

$SCR_{actions}$ Chargement en capital au titre du risqué sur actions

Résultat

Les résultats obtenus sont les suivants :

$SCR_{marché}$ = Chargement en capital au titre du risqué de marché

Calcul

Les sous-risques de marché doivent être agrégés en un chargement global $SCR_{marché}$ au titre du risque de marché selon la formule suivante :

$$SCR_{marché} = \sqrt{SCR_{actions}^2 + SCR_{taux}^2 + \rho_{actions\ ,taux} * SCR_{actions} * SCR_{taux}}$$

Où : $\rho_{actions,taux}$ = coefficient de corrélation entre $SCR_{actions}$ et SCR_{taux}

Les coefficients $\rho_{actions,taux}$ sont définis selon le tableau de corrélation suivant :

$\rho_{actions,taux}$	SCR_{taux}	$SCR_{actions}$
SCR_{taux}	1	
$SCR_{actions}$	0	1

Afin d'évaluer l'impact d'une corrélation différente, comme on l'a observé lors des récentes perturbations des marchés et d'épisodes plus anciens, le CEIOPS effectuera une analyse de sensibilité en testant un nouveau facteur de corrélation entre risque sur actions et risque de taux d'intérêt produisant une autre valeur de SCR.

À cette fin, le facteur de corrélation de 0 entre $SCR_{actions}$ et SCR_{taux} sera remplacé par un facteur de corrélation positive de 0,25 en cas de baisse des taux d'intérêt et par un facteur de corrélation négative de – 0,25 en cas de hausse des taux. Les résultats de cette analyse de sensibilité seront publiés dans le rapport final de QIS4.

- Risque de taux d'intérêt : SCR_{taux}

Description

Un risque de taux d'intérêt existe pour tous les actifs et passifs dont la valeur d'actif nette est sensible aux variations de la structure par terme des taux d'intérêt ou à la volatilité des taux. Les actifs et passifs sensibles aux variations des taux d'intérêt sont les investissements en instruments à taux fixe, les passifs d'assurance ainsi que les instruments financiers (capitaux empruntés) et les dérivés de taux d'intérêt. Les flux de passifs futurs seront sensibles à une modification du taux d'actualisation de ces flux.

La valeur des actifs et passifs sensibles aux variations des taux d'intérêt peut être déterminée au moyen de la structure par terme des taux d'intérêt (« taux zéro »). Cette structure peut évidemment changer au cours d'une année.

Données requises

Ce module requiert les données suivantes :

VAN = Valeur de l'actif net

Résultat

Les résultats obtenus sont les suivants :

SCR_{taux}^{hausse} = Chargement en capital au titre du risque de taux d'intérêt après un choc haussier

SCR_{taux}^{baisse} = Chargement en capital au titre du risque de taux d'intérêt après un choc baissier

SCR_{taux} = Chargement en capital au titre du risque de taux d'intérêt

Calcul

Le chargement en capital au titre du risque de taux d'intérêt est le résultat d'un scénario prédéfini :

$$SCR_{taux}^{\ hausse} = \Delta VAN|_{choc\ haussier}$$

$$SCR_{taux}^{\ baisse} = \Delta VAN|_{choc\ baissier}$$

Où : $\Delta VAN|_{choc\ haussier}$ et $\Delta VAN|_{choc\ baissier}$ sont les variations de valeur de l'actif net résultant de la réévaluation de tous les instruments sensibles aux taux d'intérêt en fonction de structures par terme modifiées[1].

Les structures par terme modifiées sont dérivées en multipliant la courbe des taux d'intérêt actuelle par (1+ S^{hausse}) et (1+ S^{baisse}), où le choc haussier S^{hausse} (t) et le choc baissier S^{baisse} (t) pour les différentes échéances t sont les suivants :

Échéance t (années)	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*
$S^{hausse}(t)$	0,94	0,77	0,69	0,62	0,56	0,52	0,49
$S^{baisse}(t)$	-0,51	-0,47	-0,44	-0,42	-0,4	-0,38	-0,37

Échéance t (années)	*8*	*9*	*10*	*11*	*12*	*13*	*14*
$S^{hausse}(t)$	0,46	0,44	0,42	0,42	0,42	0,42	0,42
$S^{baisse}(t)$	-0,35	-0,34	-0,34	-0,34	-0,34	-0,34	-0,34

Échéance t (années)	*15*	*16*	*17*	*18*	*19*	*20+*
$S^{hausse}(t)$	0,42	0,41	0,4	0,39	0,38	0,37
$S^{baisse}(t)$	-0,34	-0,33	-0,33	-0,32	-0,31	-0,31

Tableau 1: Tableau des taux d'intérêt

Le chargement en capital au titre du risque de taux d'intérêt découle du type de choc qui requiert le chargement en capital le plus élevé.

$$SCR_{taux} = \begin{cases} \max\left(SCR_{taux}^{hausse}; 0\right) & si\ SCR_{taux}^{hausse} \geq SCR_{taux}^{baisse} \\ \max\left(SCR_{taux}^{baisse}; 0\right) & si\ SCR_{taux}^{baisse} \geq SCR_{taux}^{hausse} \end{cases}$$

- Risque sur actions $SCR_{actions}$

Description

Le risque sur actions résulte du niveau ou de la volatilité de la valeur de marché des actions. L'exposition au risque sur actions concerne tous les actifs et passifs dont la valeur est sensible aux variations des cours de bourse.

Le sous-module Risque sur actions fait appel à des indices comme indicateurs de risque. Par conséquent, les données relatives à la volatilité et aux corrélations sont dérivées de ces indices. On suppose que toutes les actions peuvent être affectées à un indice de l'ensemble fourni.

Les scénarios de choc envisagés pour les différents indices illustrent le risque systématique inhérent à ce portefeuille de marché. On suppose que l'exposition au risque systématique du portefeuille d'actions des compagnies d'assurance est identique à l'exposition de l'indice (indicateur du risque) lui-même, c'est-à-dire que le bêta est égal à 1.

Les participants ne doivent pas supposer qu'ils achètent d'autres instruments de couverture (par exemple, dans le cadre d'un programme de couverture glissant) outre ceux qui sont en vigueur à la date de clôture des comptes.

Données requises

Ce module requiert les données suivantes :

VAN = Valeur de l'actif net

Résultat

Les résultats sont les suivants :

$SCR_{actions}$ = Chargement en capital au titre du risque sur actions

Calcul

La détermination du chargement en capital au titre du risque sur actions fait appel à un indice « Global », qui regroupe les actions cotées dans les pays de l'EEE et de l'OCDE, et à un indice « Autres », qui comprend les actions exclusivement cotées sur les marchés émergents, les actions non cotées, les fonds spéculatifs et les autres investissements alternatifs.

Le chargement en capital est déterminé comme le résultat d'un scénario de choc prédéfini pour cet indice :

$$SCR_{actions} = \max\left(\Delta VAN|_{\text{choc sur actions}} ; 0\right)$$

Où le choc boursier s'analyse comme suit :

	Global	*Autres*
Choc sur actions	32 %	45 %

Le chargement en capital $SCR_{actions}$ est l'effet immédiat attendu du scénario de *choc sur actions* sur la valeur de l'actif net compte tenu de l'ensemble des expositions directes et indirectes du participant aux cours des actions. On suppose que le portefeuille actions du participant a la même exposition au risque systématique que l'indice (indicateur de risque) lui-même, c'est-à-dire que le bêta est égal à 1.

3ème PARTIE

EXIGENCE EN CAPITAL DE SOLVABILITE

APPROCHE MODELE INTERNE

3.1. Introduction :

Les modèles internes utiliseront dans le cas général, et sauf particularités à justifier, les techniques de simulations et de modélisations stochastiques. Entendons par le terme « stochastique » l'utilisation de tirages aléatoires respectant des lois de probabilité et permettant d'obtenir une distribution des résultats et ainsi de représenter

le plus fidèlement possible la réalité des risques souscrits, les passifs, et leurs interactions avec les investissements financiers liés, les actifs, directs ou sous-jacents.

Le modèle interne n'est rien d'autre qu'une traduction littérale et quantitative de la réalité d'un ensemble de risques assurés, susceptible de tenir compte de la volatilité des phénomènes étudiés. Processus de production inversé, l'assurance doit utiliser les processus aléatoires pour envisager une réalisation prospective des risques. Un seul tirage constitue la réalisation d'un chemin possible, une multitude de tirages aléatoires, processus de Monte-Carlo, livre un ensemble de chemins représentant le domaine des possibles, la probabilité des résultats est alors déterminée par sa fréquence d'apparition. La modélisation stochastique appliquée aux risques d'assurance est relativement récente dans l'histoire de l'actuariat et de la gestion du risque.

Traditionnellement appliquées aux risques financiers, les techniques stochastiques sont utilisées depuis quelques années seulement pour l'étude des passifs d'assurance. Les modèles habituels de gestion « Actif / Passif », dit ALM, utilisent les techniques stochastiques à l'actif et généralement une approche déterministe au passif.

Un modèle interne satisfaisant est un modèle utilisant les techniques stochastiques à l'actif et au passif : l'interdépendance des aspects financiers avec les risques d'assurance est telle que seule l'utilisation conjointe de plusieurs modèles stochastiques assurera une efficacité réelle aux modèles internes.

3.2. Modélisation stochastique des taux de sortie

Dans cette partie nous avons modélisé les taux de sortie de manière stochastique. Dans un premier temps, nous avons défini de nouvelles lois de sorties issues de modèles linéaires généralisés qui correspondent davantage à l'évolution des sorties en fonction de l'âge des assurés.

Pour estimer les taux de sorties en fonction de l'âge, nous utilisons les modèles linéaires généralisés sur Excel.

Nous avons effectué cette procédure pour différents paramètres, comme par exemple l'âge et ses puissances. Cette procédure sur Excel nous fournit des critères pour évaluer la qualité de l'ajustement.

Dans les trois modèles, on prend :

-x : l'age des assurés

- ω :L'age limite de la table

Diagramme P-P Plot :

Le diagramme *probabilité-probabilité* permet, une appréciation graphique de la concordance entre une distribution observée et un modèle théorique. Sur ce graphe, l'axe des ordonnées porte les fréquences cumulées *Fi* de la distribution observée, tandis que l'axe des abscisses porte les probabilités cumulées *F*i* correspondantes de la loi théorique. Le nuage des points *(F*i,Fi)* s'aligne sur la première bissectrice lorsque la distribution théorique proposée est une bonne représentation des observations.

L'ajustement à la loi normale à été testé pour les erreurs des trois taux de sortie,

3.2.1. Le taux de décès

Nous représentons les courbes des taux de décès observés et estimés :

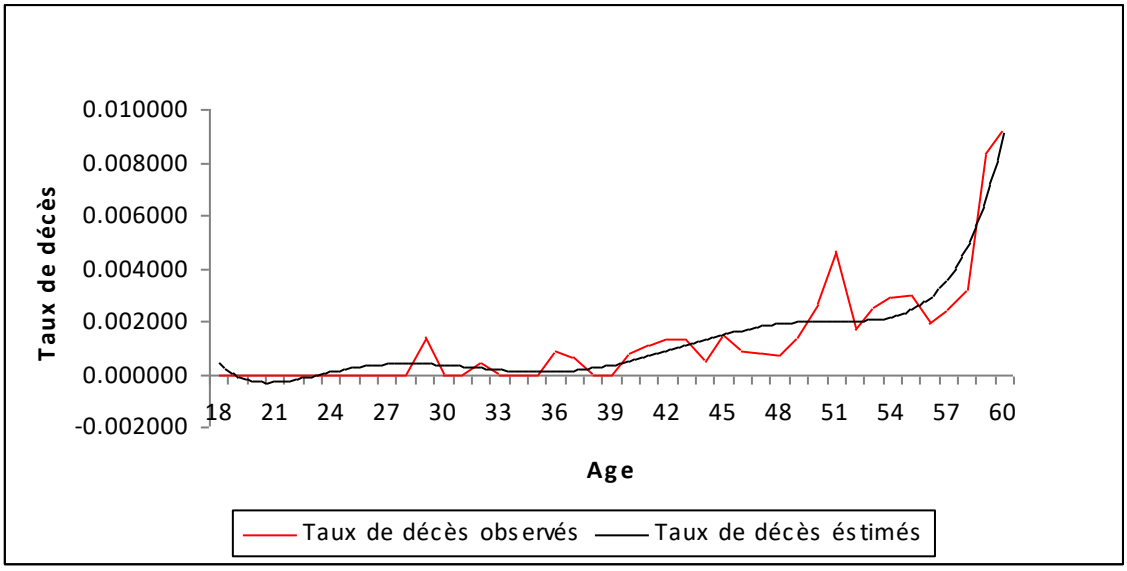


Figure 3 : Analyse du taux de décès en fonction des âges inférieurs à 60 ans

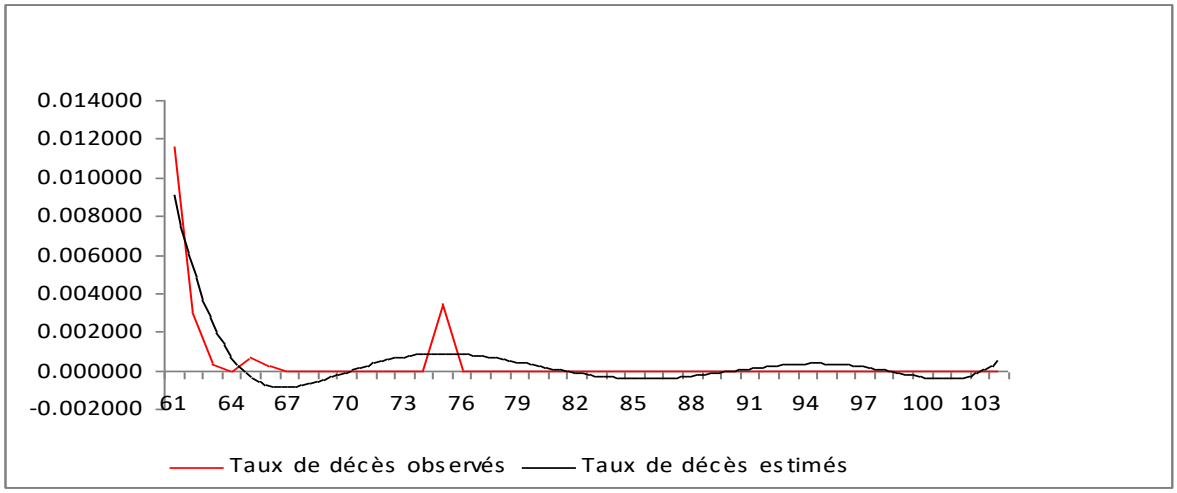


Figure 4: Analyse du taux de décès en fonction des âges supérieurs à 60 ans

Alors les taux de décès sont donnés par l'expression suivante :

$$T_d(x)=\begin{cases} 2*10^{-10}x^6-3*10^{-8}x^5+10^{-6}x^4-3*10^{-5}x^3+0.0003x^2-0.0011x+0.0012 six \leq 60 \\ 3*10^{-10}x^6-4*10^{-8}x^5+2*10^{-6}x^4-7*10^{-5}x^3+0.001x^2-0.0065x+0.0147 six \succ 60 \end{cases}$$

Les coefficients d'ajustement sont : $R^2=0.8612$ pour le premier modèle et $R^2=0.7879$ pour le deuxième.

Selon ces coefficients d'ajustement, on peut dire que Les deux modèles représentent à peu prêt 80% des observations réelles, alors on considère les différences entre les taux selon l'age observés et ceux estimés comme des variables aléatoires suivant une loi normale centrée et d'écart type égale à l'erreur fournit par la procédure. Dans notre cas, les taux de décès stochastiques s'expriment de la manière suivante :

$$T_d(x)=\begin{cases} 2*10^{-10}x^6-3*10^{-8}x^5+10^{-6}x^4-3*10^{-5}x^3+0.0003x^2-0.0011x+0.0012+\varepsilon_1(x) six \leq 60 \\ 3*10^{-10}x^6-4*10^{-8}x^5+2*10^{-6}x^4-7*10^{-5}x^3+0.001x^2-0.0065x+0.0147+\varepsilon_2(x) six \succ 60 \end{cases}$$

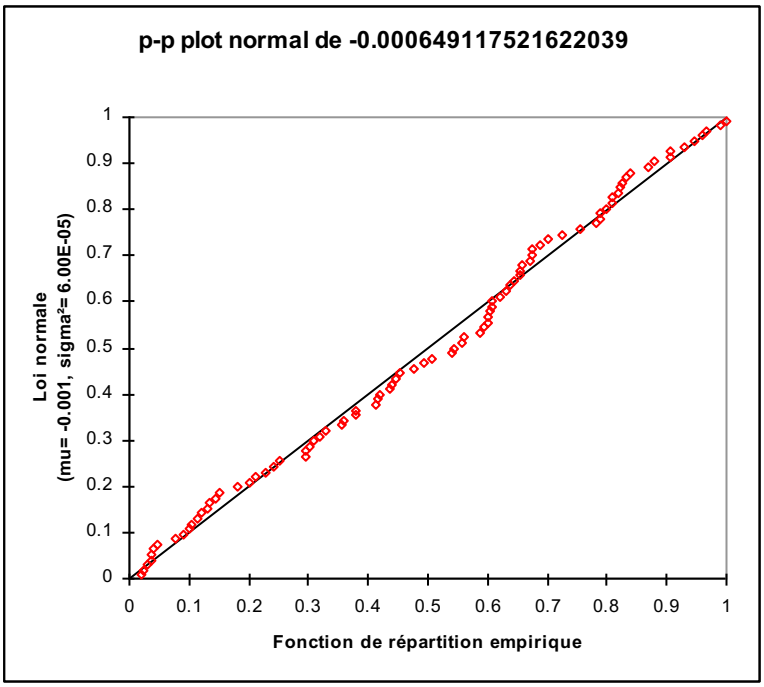


Figure 5: Diagramme P-P plot gaussien (Décès)

On déduit à partir du graphe P-P ci-dessus qua la normalité est significative,alors la distribution des erreurs du taux de décès s'ajuste bien par la loi normale.

3.2.2. Le taux de rachat

De la même manière nous avons modélisé le taux de rachat

Nous représentons les courbes des taux de rachat observés et estimés comme suit :

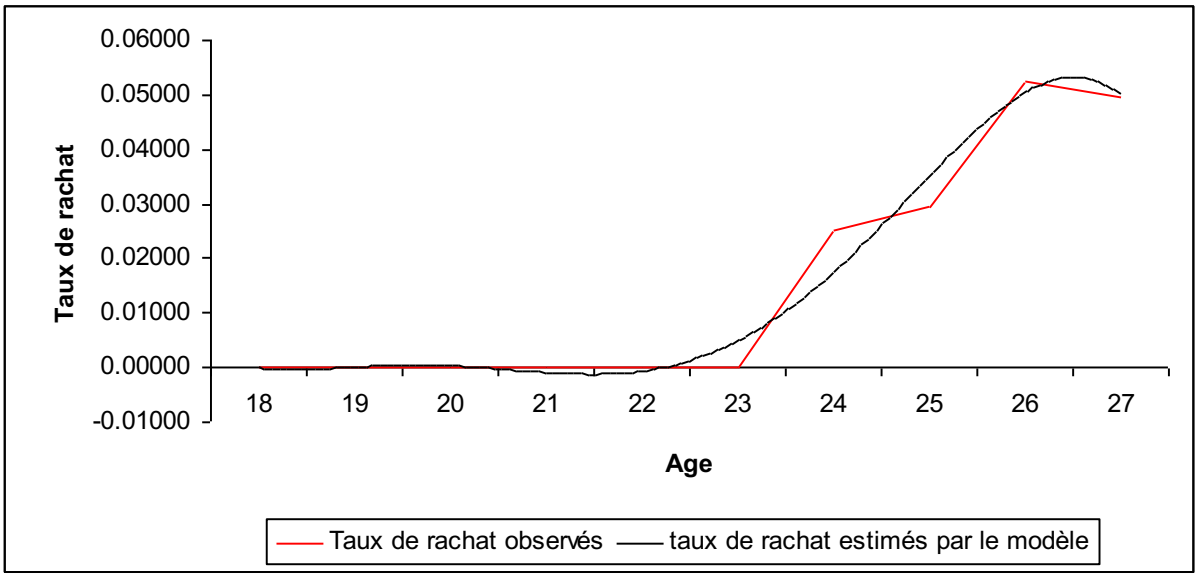


Figure 6: Analyse du taux de rachats en fonction des âges inférieurs à 27 ans

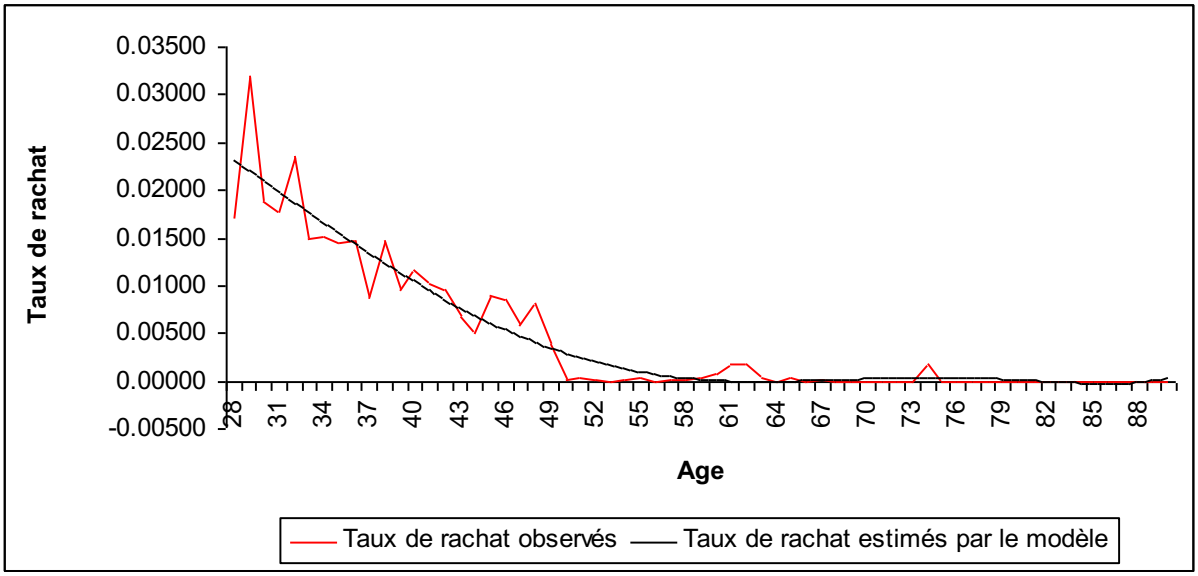


Figure 7: Analyse du taux de rachats en fonction des âges supérieurs à 27 ans

$$T_r(x) = \begin{cases} 10^{-6}x^6 - 5*10^{-5}x^5 + 0.0008x^4 - 3*0.0054x^3 + 0..0164x^2 - 0.0022x + 0.0012 si x \leq 27 \\ 5*10^{-10}x^6 - 7*10^{-8}x^5 + 4*10^{-6}x^4 - 0.0001x^3 + 0.0019x^2 - 0.0135x + 0.0531 si x \succ 27 \end{cases}$$

Les coefficients d'ajustement sont : $R^2 = 0.972$ pour le premier modèle et $R^2 = 0.8834$ pour le deuxième.

Selon ces coefficients d'ajustement, on constate que les deux modèles s'ajustent bien avec les taux historique, ils représentent 90% des observations réelles, aussi on considère les différences entre les taux observés et ceux estimés selon l'age comme des variables aléatoires suivant une loi normale centrée et d'écart type égale à l'erreur fournit par la procédure.

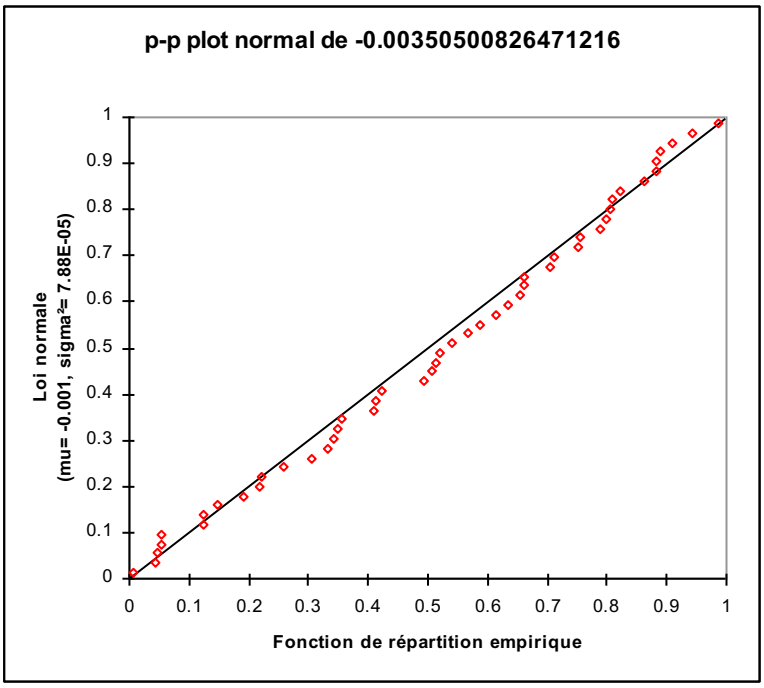


Figure 8: Diagramme P-P plot gaussien (Rachat)

On déduit à partir du graphe P-P ci-dessus qua la normalité est significative,alors la distribution des erreurs du taux de rachat s'ajuste bien par la loi normale.

Dans notre cas, les taux de rachat stochastiques s'expriment de la manière suivante :

$$T_r(x)=\begin{cases}10^{-6}x^6-5*10^{-5}x^5+0.0008x^4-3*0.0054x^3+0..0164x^2-0.0022x+0.0012+\varepsilon_1(x) six\leq 27\\ 5*10^{-10}x^6-7*10^{-8}x^5+4*10^{-6}x^4-0.0001x^3+0.0019x^2-0.0135x+0.0531+\varepsilon_2(x) six\succ 27\end{cases}$$

3.2.3. Taux de sortie en capital

Nous représentons les courbes des taux de sortie en capital observés et estimés comme suit :

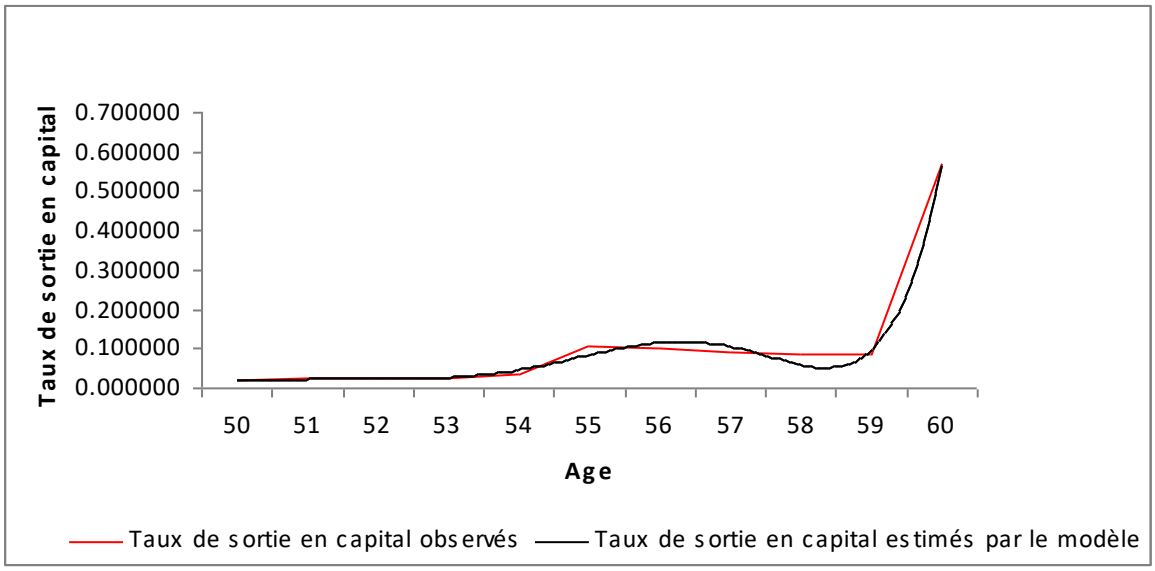


Figure 9: Analyse du taux de sortie en capital en fonction des âges inférieurs à 60 ans

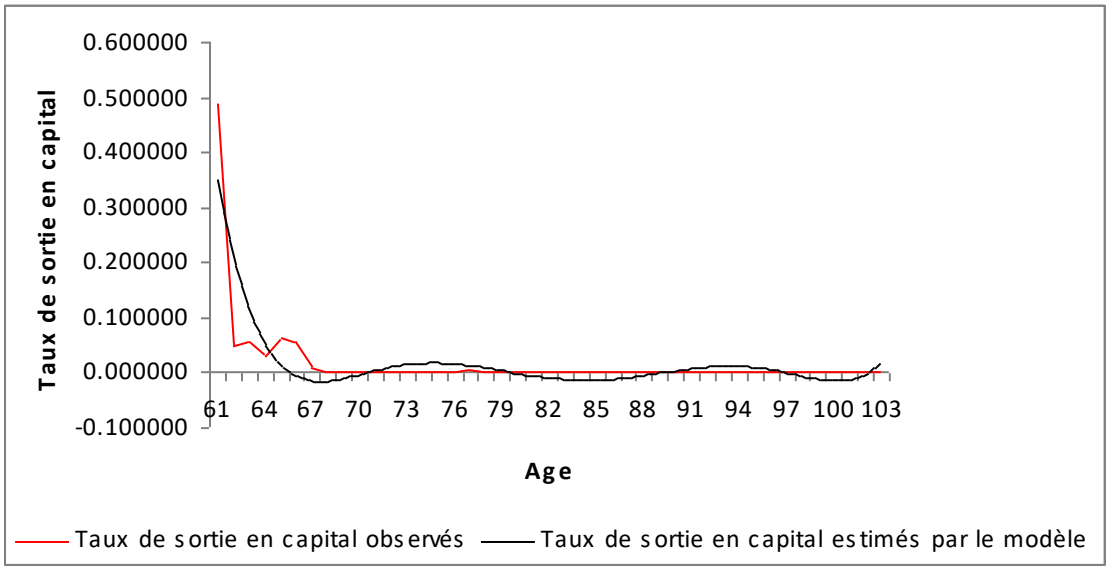


Figure 10: Analyse du taux de sortie en capital en fonction des âges supérieurs à 60 ans

$$T_{sc} = \begin{cases} 4*10^{-5}x^6 - 0.0012x^5 + 0.0132x^4 - 0.0689x^3 + 0.18x^2 - 0.2184x + 0.1159 six \leq 60 \\ 9*10^{-9}x^6 - 10^{-6}x^5 + 8*10^{-5}x^4 - 0.0022x^3 + 0.0313x^2 - 0.2147x + 0.5339 six \succ 60 \end{cases}$$

Les coefficients d'ajustement sont : $R^2 = 0.9917$ pour le premier modèle et $R^2 = 0.7425$ pour le deuxième.

Selon ces coefficients d'ajustement, le premier modèle s'ajuste très bien avec la courbe réelle, le deuxième modèle ne représente que 74% des données observées, alors on considère les différences entre les taux observés et ceux estimés comme des variables aléatoires suivant une loi normale centrée et d'écart type égale à l'erreur fournit par la procédure.

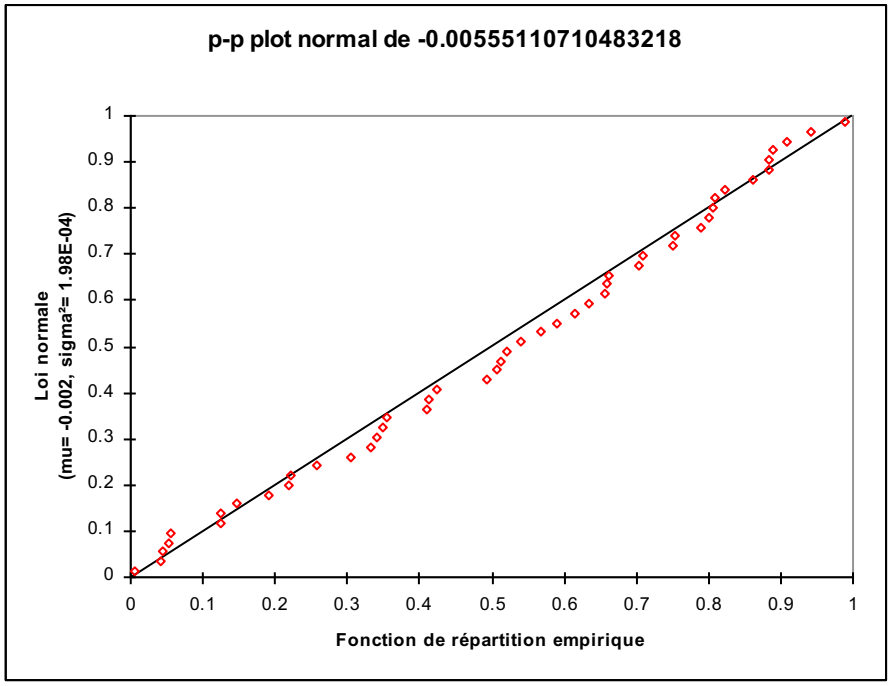


Figure 11: Diagramme P-P plot gaussien (Sortie en capital)

On déduit à partir du graphe P-P ci-dessus qua la normalité est significative,alors la distribution des erreurs du taux de sortie en capital s'ajuste bien par la loi normale.

Dans notre cas, les taux de sortie stochastiques s'expriment de la manière suivante :

$$T_{sc}(x)=\begin{cases}4*10^{-5}x^6-0.0012x^5+0.0132x^4-0.0689x^3+0.18x^2-0.2184x+0.1159+\varepsilon_1(x) six\leq 60\\ 9*10^{-9}x^6-10^{-6}x^5+8*10^{-5}x^4-0.0022x^3+0.0313x^2-0.2147x+0.5339+\varepsilon_2(x) six\succ 60\end{cases}$$

Nous avons choisi *Excel* pour simuler les taux de sortie, afin de projeter les flux du passif sur les 40 prochaines années ; en utilisant la formule suivante :

$$Flux_{passif}(t)=\sum_{k=0}^{\omega}(T_{dk}+T_{rk}+T_{sck})*R_k(t-1)*1.045$$

Avec :

- $Flux_{passif}(t)$: Flux du passif en année t.
- T_{dk} : Taux de décès à l'age k
- T_{rk} : Taux de rachat à l'age k
- T_{sck} : Taux de sortie en capital à l'age k
- $R_k(t-1)$: Total réserve en année t-1

En appliquant cette formule nous avons obtenu les résultats représentés par le graphique ci-dessous :

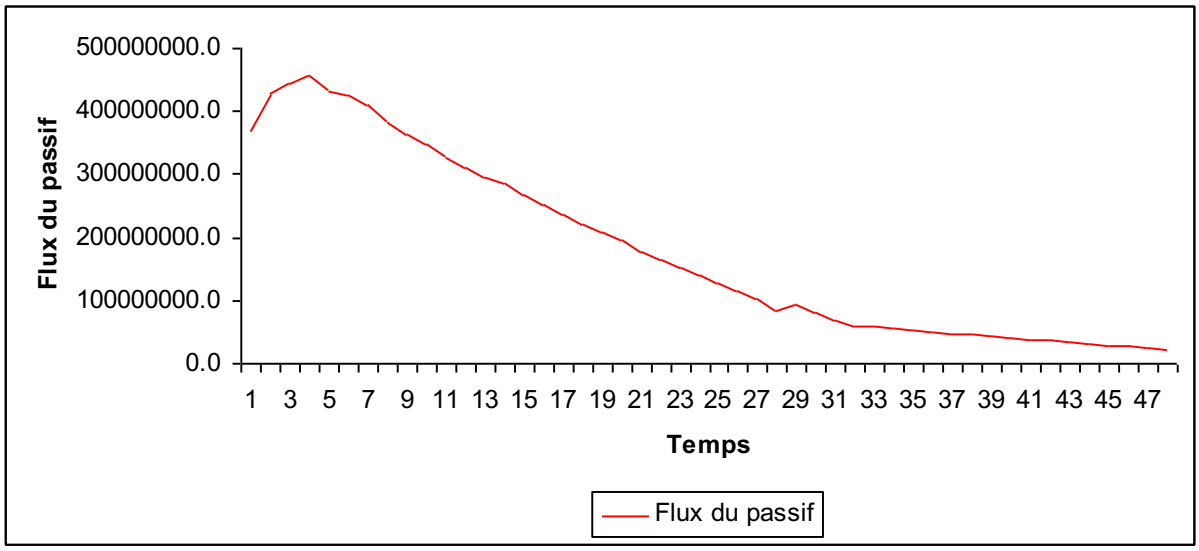


Figure 12: Projection des flux du passif

D'après ce graphique on voit clairement que les flux de sorties augmentent progressivement entre l'année 2008 et 2011 pour atteindre 460.000,00 Millions de Dhs comme maximum en cette année, puis les valeurs descendent linéairement dans les années qui suivent, cela est même justifié par la construction de la base de données sur laquelle on a travaillé,les effectifs des assurés des tranches d'ages entre 53 et 59 ans représentent une part majoritaire, alors on peut en tirer que la compagnie aura besoin de plus de liquidité dans les années qui viennent.

3.3. Modélisation stochastique des taux de mortalité

Les changements démographiques sont le fruit de trois tendances de fond, qui sont l'allongement continu de la durée de vie, fruit du progrès de la santé et de la qualité de vie, l'accroissement des effectifs des générations âgées de plus de 60 ans et la faible natalité. Ces tendances impactent les secteurs de la sécurité sociale, mais impactent également le monde de l'assurance. Les assurés pourraient vivre bien plus longtemps que prévu par les tables ayant servies à établir le tarif. C'est ce qu'on appelle le risque de longévité.

Dans cette partie nous nous sommes limitées aux tables prospectives à deux dimensions : l'âge de l'assuré et l'année calendaire. Ces tables donnent pour chaque âge la probabilité de décéder au cours d'une certaine année et sont dressées à partir de modèles statistiques estimant les tendances de la mortalité et en les extrapolant dans le futur. Le modèle de **Lee et Carter** permet de construire des tables de mortalité prospectives. Cette méthode a fait ses preuves sur plusieurs, et demeure une méthode solide amenant à des résultats satisfaisants. Cette méthode est devenue un standard dans l'élaboration des tables de mortalité prospectives. Néanmoins ce modèle présente quelques inconvénients qui seront cités ultérieurement.

Après avoir décrit les données utilisées, le modèle de Lee et Carter sera présenté.

Les données utilisées

Ne possédant qu'un faible historique des données concernant le produit CIMR, il est difficile d'en déduire une tendance temporelle. Par conséquent, nous utilisons les tables de mortalité nationales fournies par l'INED (Institut National d'Etude Démographique) et disponibles sur le site Internet (voir bibliographie page). L'INED propose des tables de mortalité du moment pour les 19ème, 20ème et 21ème siècles et propose également des tables de mortalité prospectives par extrapolation des données passées.

Nous supposons par conséquent que notre portefeuille suit la même évolution que la population française. Nous décidons de déterminer les paramètres du modèle de Lee-Carter sur 16 années d'historique, c'est-à-dire à partir des tables de mortalité de l'INED de 1992 à 2006 et de la table d'expérience réalisée. Par interpolation linéaire entre la table d'expérience et les tables de l'INED, nous déterminons les tables de mortalité utilisées dans le modèle. L'approche prospective proposée par le modèle de Lee et Carter est intéressante et utile, mais présente un inconvénient.

Cette modélisation privilégie une tendance temporelle, qui peut entraîner des aberrations pour les longues projections. En effet, la décroissante des taux instantanés de décès engendre une augmentation de l'espérance de vie à la naissance sans limite ! L'âge limite dans les tables de l'INED étant de 105 ans, nous supposons donc que $q_{105} = 1$. Il est possible de proposer des probabilités de décès à ces grands âges, mais celles-ci n'auraient qu'une très faible contribution dans le montant de l'engagement total pour le produit CIMR (en effet, 97% des assurés optent pour une sortie en capital).

Cette hypothèse pourra être corrigée dans le modèle en considérant le problème de la fermeture de la table. Par exemple Coale et Kisker (1990) proposent un modèle basé sur la formule de Gompertz.

3.3.1. Le modèle de Lee-Carter

La méthode développée par Lee et Carter en 1992 permet la construction de tables de mortalité prospectives. Ces tables ne tiennent pas seulement compte de l'âge des individus mais aussi du temps : la loi de mortalité du groupe étudié est caractérisée par un modèle bidimensionnel. C'est une méthode d'extrapolation des tendances passées, initialement utilisée sur des données américaines et qui est rapidement devenue un standard. En effet ce modèle a par la suite été utilisé sur de nombreuses populations et étudié par différents actuaires, professeurs et chercheurs.

La modélisation retenue pour le taux instantané de mortalité à l'âge x est un modèle log-bilinéaire qui s'écrit de la manière suivante :

$$Ln\mu_x(t) = \alpha_x + \beta_x \bullet k_t + \varepsilon_x(t)$$

Où : les variables aléatoires ε_x représentent les erreurs d'ajustement et sont indépendantes et identiquement distribuées suivant une loi $N(0,\sigma^2)$ ce qui implique l'hypothèse d'homoscédasticité. On a alors que le logarithme du taux instantané se décompose en une somme de deux termes à un terme d'erreur près : le premier, α_x est spécifique à l'âge et décrit le comportement moyen des taux instantanés de mortalité au cours du temps ; le second exprime une tendance temporelle de la mortalité, k_t multipliée par un terme spécifique à l'âge, β_x, qui module la tendance suivant l'âge.

L'hypothèse sous jacente est la constance des taux instantanés de décès entre deux âges entiers, à savoir :

$$\mu_{x+s} = \mu_x = -\ln(1-q_x) \qquad s \in [0,1[$$

Ce qui implique que le taux de décès dans l'année pour un assuré d'âge x s'exprime

$$q_{x+s} = q_x = 1-\exp(-\mu_x), s \in [0,1[$$

Le critère d'optimisation de la modélisation est la minimisation de la variance des erreurs. Et pour que le modèle ait une solution unique, deux contraintes sont imposées : $\sum_{x=0}^{\omega} \beta_x = 1$ et $\sum_{t=t_m}^{t=t_M} k_t = 0$

Nous obtenons alors les paramètres par un critère de moindres carrés :

$$\left(\hat{\alpha}_x, \hat{\beta}_x, \hat{k}_t\right) = \min \sum_{x,t} \left(\ln \mu_{xt}^* - \alpha_x - \beta_x \bullet k_t\right)^2$$

Le nombre de paramètres à estimer est élevé . Il correspond à :

$$2 \bullet (\omega + 1) + (t_M - t_m + 1) = 255 \text{paramètres.}$$

<u>*Estimation des paramètres*</u>

Estimons dans un premier temps les paramètres $\hat{\alpha}_x$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_x} \sum_{y,t} \left(\ln \mu_{yt}^* - \alpha_y - \beta_y k_t\right)^2 = 2(t_M - t_m + 1)\hat{\alpha}_x - 2\sum_{t=t_m}^{t_M} \left(\ln \mu_{yt}^* - \beta_y k_t\right)$$

En tenant compte de la contrainte $\sum_{t=t_m}^{t=t_M} k_t = 0$ nous obtenons :

$$\hat{\alpha}_x = \frac{1}{t_M - t_m + 1} \sum_{t=t_m}^{t_M} \ln \mu_{xt}^*$$

Par conséquent ce paramètre est interprété comme la moyenne temporelle des taux instantanés de décès à l'âge x sur l'échelle logarithmique.

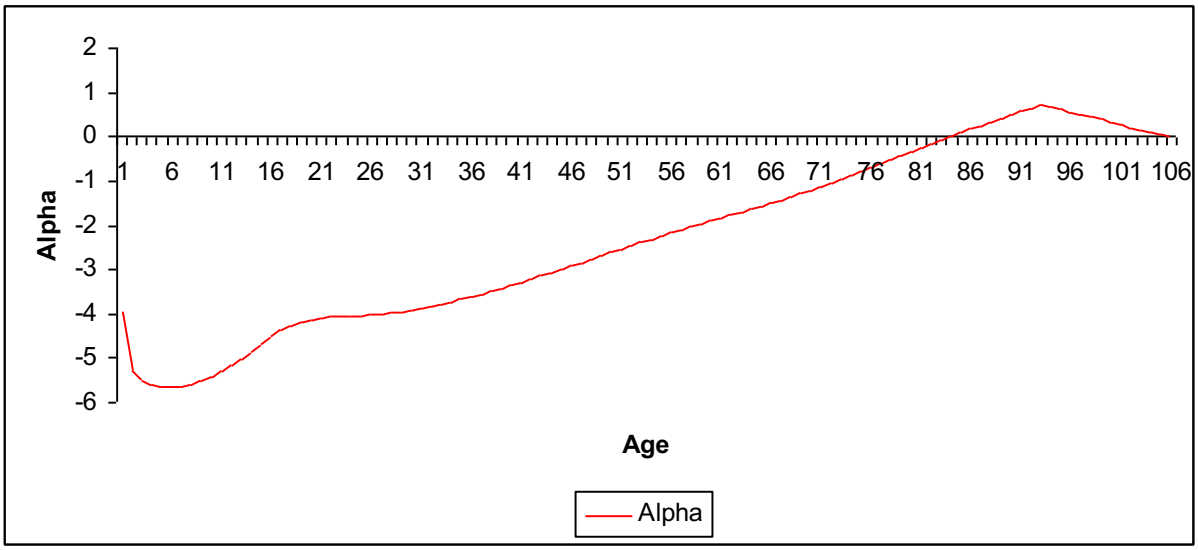


Figure 13 : Evolution des Alpha suivant l'âge

Pour l'estimation des paramètres $\hat{\beta}_x$ et de la composante temporelle $\hat{k}_t$, nous utilisons le processus itératif de Newton-Raphson, utilisé par le solveur d'Excel. Le principe est qu'à chaque itération, l'ensemble des paramètres sont mis à jour. Les valeurs sont initialisées et les deux contraintes sont introduites. Les valeurs nulles sont interdites pour le paramètre $\hat{\beta}_x$. Les résultats obtenus sont représentés sur les deux graphiques ci-dessous :

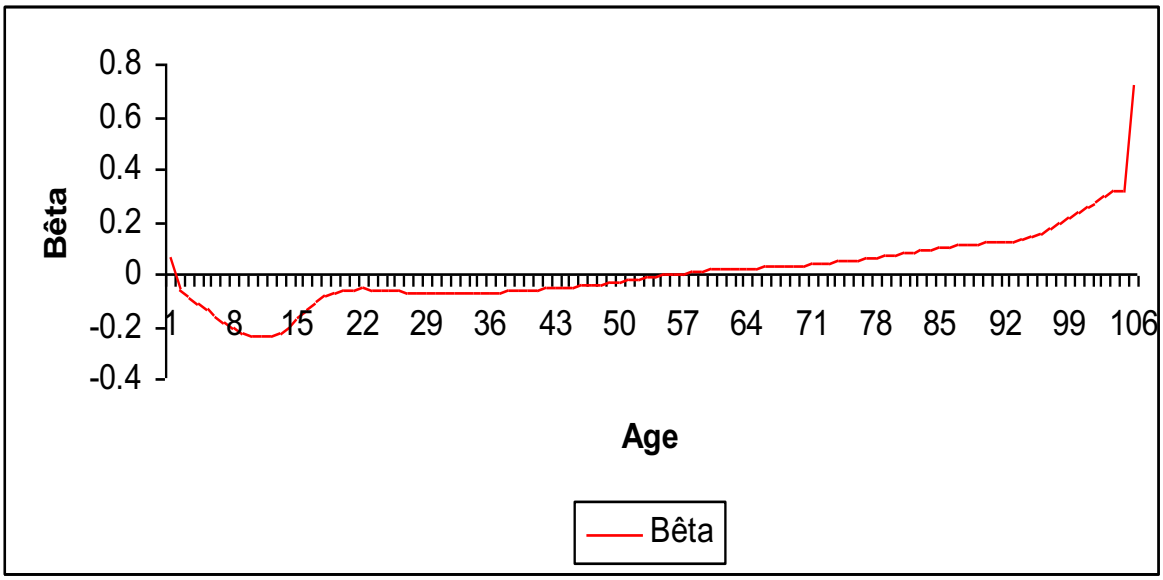


Figure 14: Evolution des Bêta suivant l'âge

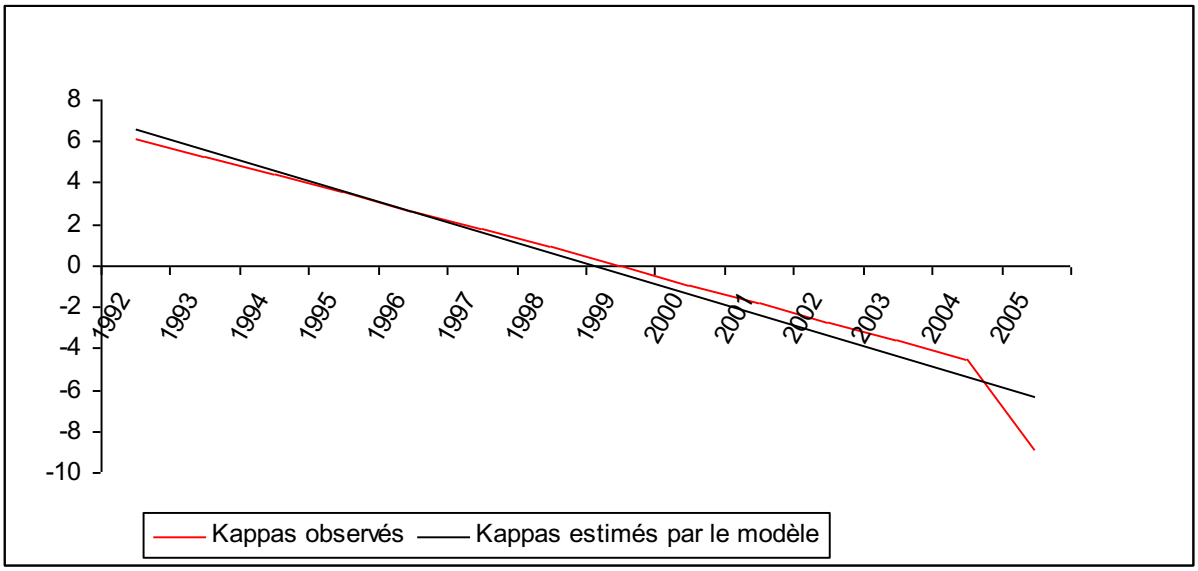


Figure 15: Extrapolation de la composante temporelle

$$y = -0.9455x + 7.5636 \quad \text{avec} \quad R^2 = 0.9906$$

Le coefficient d'ajustement est : $R^2 = 0.972$

Selon ce coefficient d'ajustement, on constate que le modèle s'ajuste bien avec les données observées, ils représente 90% des observations réelles, aussi on considère les différences entre les taux observés et ceux estimés selon l'âge comme des variables aléatoires suivant une loi normale centrée et d'écart type égale à l'erreur fournit par la procédure.

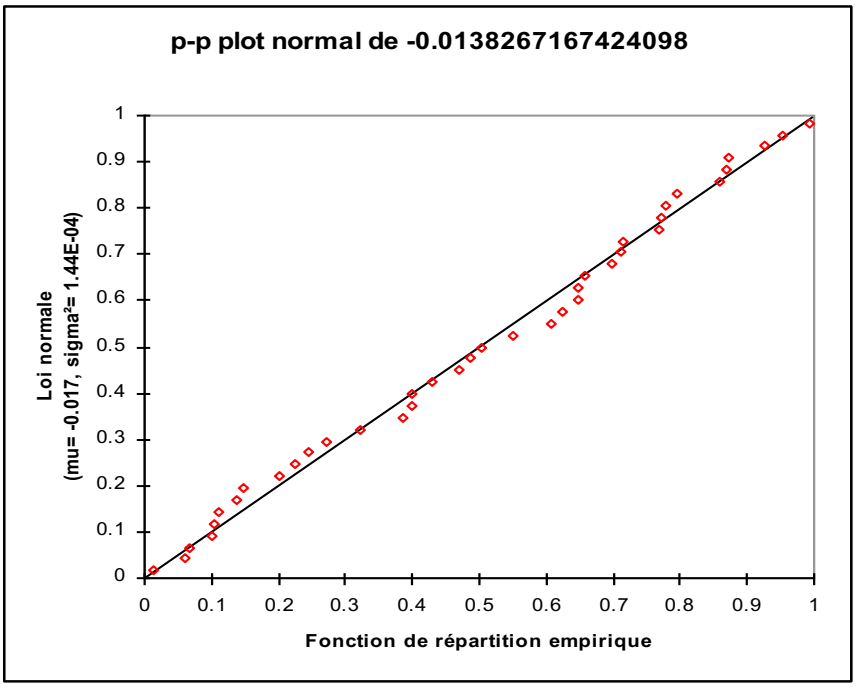


Figure 16: Diagramme P-P plot gaussien

On déduit à partir du graphe P-P ci-dessus qua la normalité est significative,alors la distribution des erreurs de la composante temporelle s'ajuste bien par la loi normale.

Projection des kappas

L'étape suivante consiste à projeter les kappas afin d'estimer la mortalité future. Ces kappas projetés nous permettront en effet de déterminer les nouveaux taux de mortalité à utiliser dans les tables prospectives. Nous utilisons pour ce faire des outils de la régression.

Nous avons vu dans la partie précédente que la composante temporelle $\hat{k}_t$ a été extrapolée par une régression linéaire simple. A partir de l'équation de cette régression, nous introduisons un aléa dans les tables de mortalité prospectives. En effet, il suffit de générer un aléa ε_t pour chaque $\hat{k}_t$ des t années futures, avec ε_t un bruit blanc gaussien de variance σ_k^2, tel que :

$$\hat{k}_t^{*} = \hat{a}_k \bullet t + \hat{b}_k + \varepsilon_t$$

La modélisation des tables prospectives utilise cette équation de régression de la composante temporelle, qui permet d'obtenir la tendance de mortalité future en effectuant des tirages dans la loi du résidu ε_t, qui est une loi normale $N\left(0,\sigma_k^{\ 2}\right)$. La variable $\hat{k}_t^{\ *}$ est sans biais, en effet :

$$E\left[\hat{k}_t^{*}\right] = E\left[\hat{a}_k \bullet t + \hat{b}_k + \varepsilon_t\right] = \hat{k}_t$$

Le taux instantané de mortalité s'écrit alors :

$$\hat{\mu}_x = \exp\left(\hat{\alpha}_x + \hat{\beta}_x \bullet \hat{k}_t^{*}\right) = \exp\left(\hat{\alpha}_x + \hat{\beta}_x\left(\hat{a}_k \bullet t + \hat{b}_k + \varepsilon_t\right)\right)$$

<u>Correction du biais engendré</u>

Bien que le paramètre soit sans biais, la modélisation engendre un biais sur les taux instantanés de mortalité à l'âge x car :

$$E\left[\hat{\mu}_x(t)\right] = E\left[\exp\left(\hat{\alpha}_x + \hat{\beta}_x\left(\hat{a}_k \times t + \hat{b}_k + \varepsilon_t\right)\right)\right]$$

$$= E\left[\exp\left(\hat{\alpha}_x + \hat{\beta}_x\left(\hat{a}_k \times t + \hat{b}_k\right)\right) \times \exp\left(\hat{\beta}_x \times \varepsilon_t\right)\right]$$

$$= \mu_x(t) \times E\left[\exp\left(\hat{\beta}_x^2 \times \varepsilon_t\right)\right]$$

$$= \mu_x(t) \times \exp\left(\frac{\hat{\beta}_x^2 \times \sigma_k^2}{2}\right)$$

Puisque ε_t suit une loi normale $N\left(0,\sigma_k^{\ 2}\right)$, nous avons que $\exp\left(\hat{\beta}_x,\varepsilon_t\right)$ suit une loi log-normale $LN\left(0,\hat{\beta}_X\,\sigma_k\right)$ et l'espérance d'une variable aléatoire log-normale $LN(m,\sigma)$ est. $\exp\left(m+\sigma^2/2\right)$

Nous montrons ici que notre modélisation stochastique de la mortalité entraîne une erreur positive sur les taux de mortalité : la mortalité est donc surévaluée. Nous observons l'erreur due à suivant l'âge sur la figure ci-dessous :

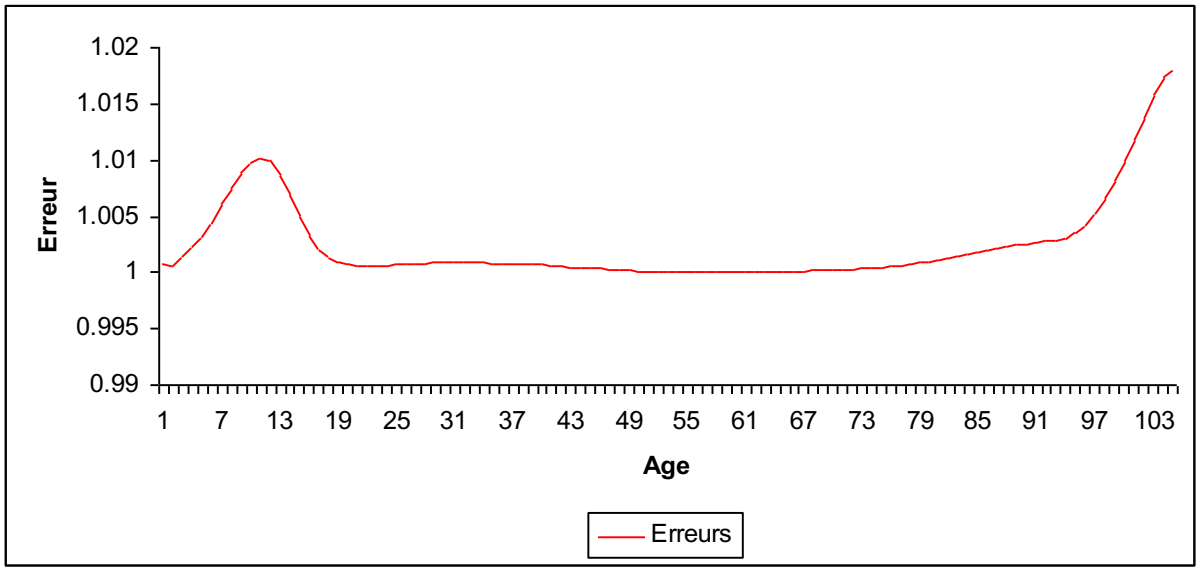


Figure 17: Analyse de l'erreur en fonction de l'âge

Nous pouvons constater que l'erreur est relativement faible et dépend de l'âge x. L'erreur est plus importante pour les âges entre 3 et 18ans et supérieurs à 98. L'impact sur le produit CIMR n'est donc pas important, aux vues de la répartition des âges des assurés pour ce produit. Mais pour d'autres produits, la volatilité pourrait être plus importante, et donc l'impact du biais serait plus conséquent.

La version corrigée du taux instantané de mortalité est :

$$\mu_x^*(t) = \exp\left(\hat{\alpha}_x + \hat{\beta}_x k_t^* - \frac{\hat{\beta}_x^2 \times \sigma_k^2}{2}\right)$$

Cette construction du modèle satisfait à la contrainte :

$$E\left[\mu_x^*(t)\right] = \mu_x(t)$$

3.4. Modélisation du taux d'intérêt

Elaborer un modèle interne nécessite de fixer une dynamique pour les taux d'intérêt.

Dans un premier temps, nous présenterons la dynamique retenue pour le taux court terme, à savoir le modèle de Vasicek.

Un deuxième point présentera la construction de la courbe des taux initiale au départ des données de marché. La construction de la courbe initiale se fera à partir des taux interbancaires.

Dans un troisième point, nous estimerons les paramètres de la dynamique du taux au départ des données de marché.

Enfin, nous expliquerons la manière dont sont générés les taux futurs et présenterons deux variables construites au départ de cette courbe des taux dont nous aurons besoin par la suite : le taux à 10 ans, qui interviendra dans la modélisation du fonds obligataire, ainsi que les facteurs d'actualisation.

3.4.1. La dynamique des taux court terme

Dans le cadre de cette illustration, nous avons choisi de modéliser le taux court à l'aide du modèle de Vasicek. Nous avons choisi ce modèle en raison de la relative facilité à le mettre en place en pratique.

Le taux d'intérêt instantané r(t) dans le modèle de Vasicek obéit à un processus d'Ornstein-Uhlenbeck :

$$dr(t) = a\big(b - r(t)\big)dt + \sigma dw(t)$$

Avec :

$$\text{Limvar(r(t))} = \frac{\sigma^2}{2a}$$

$$b = \lim\ E(r(t))$$

r(t) = taux d'intérêt continu instantané (taux court) ;

a = vitesse de retour à la moyenne ;

b = cible mouvante du taux

σ = volatilité instantanée, supposée constante ;

W(t) = mouvement brownien standard ;

La solution de ce modèle s'écrit sous la forme :

$$r(t) = r_0 e^{-at} + b(1 - e^{-at}) + \sigma e^{-at} \int_0^t e^{-as} dw(s)$$

Les propriétés de l'intégrale d'une fonction déterministe par rapport à un mouvement brownien conduisent à la discrétisation exacte :

$$r_{t+1} = r_t e^{-a} + b(1 - e^{-a}) + \sigma \sqrt{\frac{1 - e^{-2a}}{2a}} \varepsilon$$

On rappelle que l'équation du taux d'intérêt instantané retenue par Vasicek, exprimée dans l'univers historique, ne suffit pas à définir le prix des zéro-coupons, et doit être complétée par la forme de la prime de risque. Celle-ci est choisie constante dans le modèle de Vasicek, ce qui permet de conserver la même forme de la dynamique dans l'univers corrigé du risque.

3.4.2 Estimation des paramètres

L'estimation de ces deux paramètres est réalisée sur base de données historiques à l'aide d'une méthode décrite par PLANCHET et THEROND P. (2004). La discrétisation exacte conduit donc à un processus auto-régressif d'ordre 1, AR(1).

L'estimation des paramètres du modèle s'effectue classiquement en régressant la série des taux courts sur la série décalée d'une période, que l'on écrit sous la forme usuelle :

$$Y = \alpha + \beta X + \sigma_1 \varepsilon$$

Avec :

$$a \pm ln\beta, \qquad b = \frac{\alpha}{1-\beta}, \qquad \sigma^2 = \sigma_1^2 \frac{2ln\beta}{\beta^2 - 1}$$

L'estimateur du maximum de vraisemblance (EMV) coïncide avec l'estimateur des moindres carrés ; on obtient ainsi les estimateurs suivants des paramètres du modèle d'origine :

$$\hat{a}_{exact} \pm ln\hat{\beta}, \qquad \hat{b}_{exact} = \frac{\hat{\alpha}}{1-\hat{\beta}}, \qquad \hat{\sigma}2_{exact} = \hat{\sigma}_1^2 \frac{2ln\hat{\beta}}{\hat{\beta}^2 - 1}$$

3.4.3. Construction de la courbe de taux

Pour effectuer notre estimation, il nous faut un historique du taux court. Nous avons choisi les données suivantes :

- taux court terme : taux interbancaire journalier ; noté r(t) ;

L'historique pris en compte considère la période de janvier 2006 au 21 Avril 2008. Les données sont journalières.

Nous obtenons les résultats suivants :

Nous avons pris l'année 2008 comme instant initial t=0. Une fois obtenus les taux courts r(t), nous avons déterminé les prix zéro coupon sous Vasicek.

3.4.4. Simulation des taux futurs et calculs dérivés

<u>Simulation des taux courts</u>

Pour rappel, les taux futurs sont simulés par discrétisation de pas d'un an :

$$r_{t+1} = r_t e^{-a} + b(1 - e^{-a}) + \sigma \sqrt{\frac{1 - e^{-2a}}{2a}} \varepsilon$$

Où ε représente une normale centrée réduite.

Comme expliqué précédemment, le taux court terme nous permet tout d'abord d'estimer les prix des zéro coupon nécessaires pour l'actualisation des flux et ensuite de calculer les taux longs futurs qui interviendront dans l'indice obligataire.

Structure des taux Zéro Coupon dans Vasicek

Les taux simulés permettent de reconstituer le prix des obligations zéro coupon. Il peut être démontré que le prix d'un zéro coupon en t est lié au taux court en t par la relation explicite suivante :

$$P(t,s,r) = \exp\left(\frac{1}{a}\left(1 - e^{-a(s-t)}\right)(K - r) - (s - t)K - \frac{\sigma^2}{4a^3}\left(1 - e^{-a(s-t)}\right)^2\right)$$

Avec :

$$K = b + \frac{b\lambda}{a} - \frac{\sigma^2}{2a^2}$$

Les prix de ces zéro coupon nous serviront à l'actualisation des flux.

Taux de maturité T

Les taux longs de maturité T est obtenu au départ des prix de zéro coupon $B(t,T)$. En effet :

$$y(t,T) + \frac{-\ln\left(B(t,T)\right)}{T}$$

3.5. Modélisation de l'actif

L'actif considéré dans le cadre de cette modélisation est constitué d'un fonds d'actions, d'un fonds d'obligations et d'un fonds OPCVM.

3.5.1. Modélisation du fonds d'actions

Avant de pouvoir modéliser le fonds d'actions, nous avons besoin de modéliser l'indice actions. Nous avons donc construit un indice actions à partir de l'historique des cours de l'ensemble des actions du portefeuille de la RMA Watanya, entre Janvier 2000 et Avril 2008, sous l'hypothèse que la composition du portefeuille est restée la même entre ces deux dates. Cet indice a été construit selon la formule suivante :

$$C_{IA}(t) = \frac{\sum_i n_i VN_i C_i(t)}{\sum_i n_i VN_i}$$

Où :

$C_{IA}(t)$ =Cours de l'indice d'actions à la date t;

n_i = nombre d'actions i dans le portefeuille au 31/12/2007 ;

VN_i = Valeur nominale de l'action i ;

$C_i(t)$= Cours de l'action i à la date t;

Les détails de la démarche utilisée pour le calcul de l'indice actions, ainsi que les résultats obtenus sont disponibles en Annexe.

Nous avons obtenu le graphique d'évolution suivant :

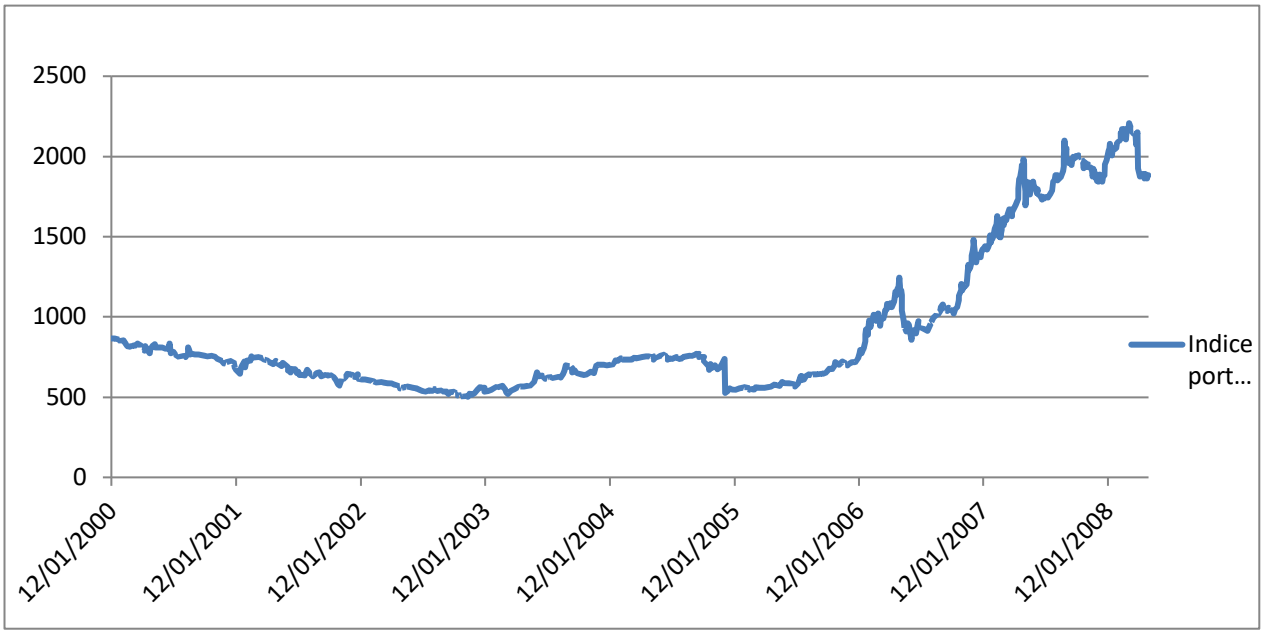


Figure 18 : Evolution des cours de l'indice sur actions

Equation d'évolution :

Ce fonds est modélisé par un mouvement brownien géométrique :

$$dS(t) = \mu_s.\mathrm{S(t)}.\mathrm{dt} + \sigma_s.\mathrm{S(t)}.\mathrm{dW_s(t)}$$

Où :

$S(t)$ = Valeur du fonds au temps t ;

μ_s = Rendement moyen du fonds d'actions ;

σ_s = Volatilité du rendement du fonds d'actions ;

$\mathrm{W_s(t)}$ = Mouvement brownien standard.

Estimation des paramètres μ et σ

L'estimation du rendement moyen du fonds d'actions et de sa volatilité est réalisée grâce aux données historiques dont nous disposons.

La solution de l'équation d'évolution du fonds est donnée par :

$$S(t) = S(0).\exp\left[\left(\mu_s - \frac{\sigma_s^2}{2}\right).t + \sigma_s.W_s(t)\right]$$

Le rendement du fonds entre t-1 et t est donné par :

$$rdt_s(\mathrm{t})=\ln\frac{S(t)}{S(t-1)} = \left(\mu_s - \frac{\sigma_s^2}{2}\right) + \sigma_s(W_s(t) - W_s(t-1))$$

A partir de l'historique du cours journalier, nous avons trouvé :

r_s^{hist} = la moyenne historique des rendements ;

σ_s^{hist} = l'écart-type historique des rendements.

Sachant que le nombre de jours ouvrables dans l'année est 260, la variance annuelle est alors déterminée par :

$$\sigma_s = \sigma_s^{hist}.\sqrt{260}$$

Le rendement moyen du fonds est déterminé selon la relation :

$$r_s^{hist}.260 = \mu_s - \frac{\sigma_s^2}{2}$$

Nous avons réalisé l'estimation des paramètres de rendement et de volatilité de l'indice concerné sur 2 périodes. Les résultats obtenus sont les suivants :

	Estimation à partir de	
	15 janvier 2000	15 décembre 2004
μ_s	0,15562	0,41185
σ_s	0,18716	0,22050

Tableau 5 : Estimation des paramètres μ_s et σ_s

Les valeurs des paramètres μ_s et σ_s sont fortement influencées par la période au cours de laquelle ceux-ci sont estimés. Nous choisissons de considérer les résultats des estimations relatives à la période 2000 – 2008.

3.5.2. Modélisation du fonds d'obligations

Les obligations détenues dans notre portefeuille sont séparées en 4 groupes, selon les maturités suivantes : 5 ans, 10 ans, 15 ans et 20 ans.

Equation d'évolution :

Cet indice est également modélisé par un mouvement brownien géométrique :

$$dB(t) = \mu_b . \mathrm{B(t)}. \mathrm{dt} + \sigma_\mathrm{b}. \mathrm{B(t)}. \mathrm{dW_b(t)}$$

Où :

$B(t)$ = valeur du fonds au temps t ;

μ_b = rendement moyen du fonds ;

σ_b = volatilité du rendement du fonds ;

$\mathrm{W_b(t)}$ = mouvement brownien standard.

La différence ici par rapport à la modélisation du fonds d'actions réside dans le fait que le rendement moyen des obligations de maturité T est lié au taux à cette même maturité. On a ainsi :

$$\mu_b = y(t,T) + \lambda_b$$

Y(t,T) = Taux à maturité T à l'instant t ;

λ_b = Prime de risque du fonds par rapport au taux de maturité T.

La prime de risque étant supposée constante dans le modèle de Vasicek, elle est prise égale à 1%.

Estimation des paramètres μ_b et σ_b

La majorité des actions dans notre portefeuille datent du début des années 1990, et viendront à échéance dans une ou deux années.Puisque nous avons besoin de connaître la valeur du fonds d'obligations dans les années futures, nous avons basé nos estimations sur l'historique des taux longs entre Août 2005 et Mai 2008 pour les différentes maturités considérées.

Les résultats obtenus pour l'estimation des paramètres, aux différentes maturités sont les suivants :

	5 ans	10 ans	15 ans	20 ans
μ_b	0,03667	0,04085	0,04448	0,04684
σ_b	0,0263	0,02464	0,02271	0,02968

Tableau 6 : Estimation des paramètres μ_b et σ_b

3.5.3. Modélisation du fonds OPCVM

Selon les directives du QIS 4, une solution pour la modélisation des OPCVM « consiste à considérer l'OPCVM comme un investissement en actions et à appliquer le chargement global au titre du risque sur actions (si les actifs de l'OPCVM sont majoritairement cotés) ou un chargement au titre d'un autre risque (si les actifs détenus par l'OPCVM sont majoritairement non cotés)».

Les OPCVM disponibles dans notre portefeuille sont des OPCVM majoritairement cotées (cotation hebdomadaire), nous allons donc les modéliser de la même manière que les actions.

Equation d'évolution :

Ce fonds est modélisé par un mouvement brownien géométrique :

$$S^*(t) = \mu_{s^*}.\mathrm{S}^*(\mathrm{t}).\mathrm{dt} + \sigma_{s^*}.\mathrm{S}^*(\mathrm{t}).\mathrm{dW}_{s^*}(\mathrm{t})$$

Où :

$S^*(t)$ = Valeur du fonds au temps t ;

μ_{s^*} = Rendement moyen du fonds d'actions ;

σ_{s^*} = Volatilité du rendement du fonds d'actions ;

$\mathrm{W}_{s^*}(\mathrm{t})$ = Mouvement brownien standard.

Sachant que le nombre de semaines ouvrables dans l'année est 52, la variance annuelle est alors déterminée par :

$$\sigma_{s^*} = \sigma_{s^*}^{hist}.\sqrt{52}$$

Le rendement moyen annuel est donné par :

$$r_{s^*}^{hist}.52 = \mu_{s^*} - \frac{\sigma_{s^*}^2}{2}$$

Nous obtenons les résultats suivants :

$$\mu_{s^*} = 0{,}0722 \quad \text{et} \quad \sigma_{s^*} = 0{,}0158$$

<u>Simulation des valeurs futures des actifs</u>

La simulation des deux fonds d'investissement est réalisée, comme pour le taux court terme, à l'aide d'une discrétisation d'Euler. Nous procédons par discrétisation de pas de un an :

Pour le fonds d'actions :

$$S(t) = S(t-1).\exp\left(\left(\mu_s - \frac{\sigma_s^2}{2}\right) + \sigma_s.N_s\right)$$

Pour le fonds d'obligations :

$$B(t) = B(t-1).\exp\left((\left(y(t-1, t+T-1) + \lambda_b - \frac{\sigma_b^2}{2}\right) + \sigma_b.N_b\right)$$

Pour le fonds d'OPCVM :

$$S^*(t) = S^*(t-1).\exp\left(\left(\mu_{s^*} - \frac{\sigma_{s^*}^2}{2}\right) + \sigma_{s^*}.N_s\right)$$

Les graphes ci-dessous représentent l'évolution des trois fonds d'investissement sur une période de 50 ans et pour dix scénarios.

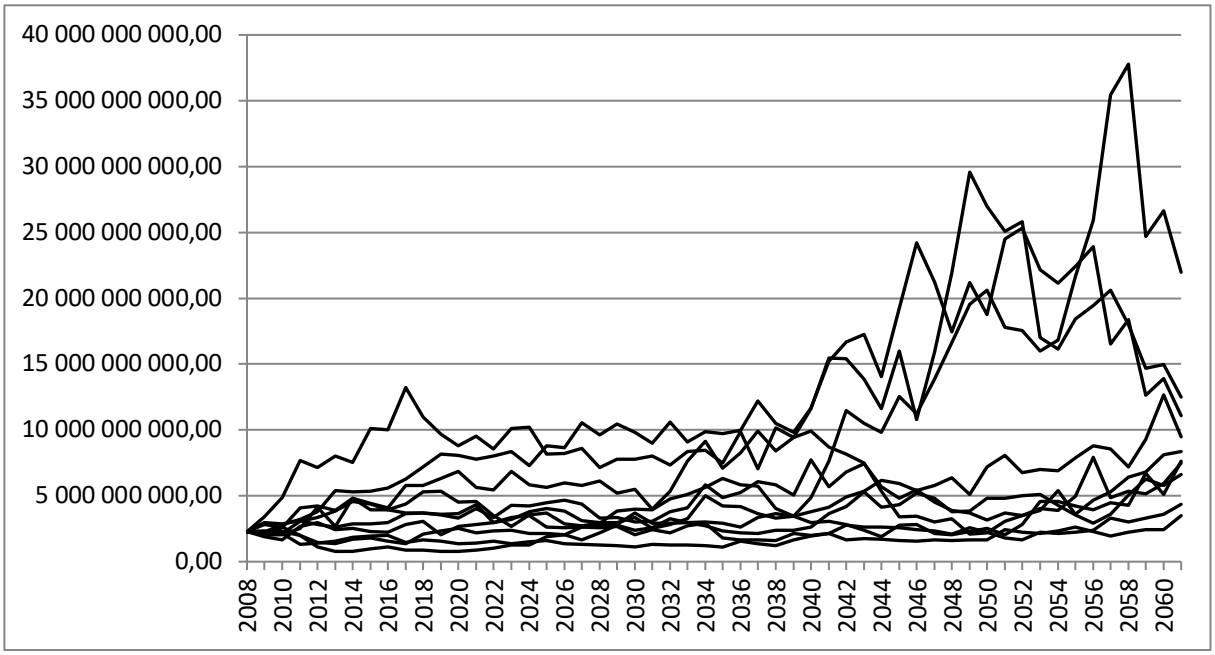


Figure 19 : Evolution stochastique du Fonds d'actions

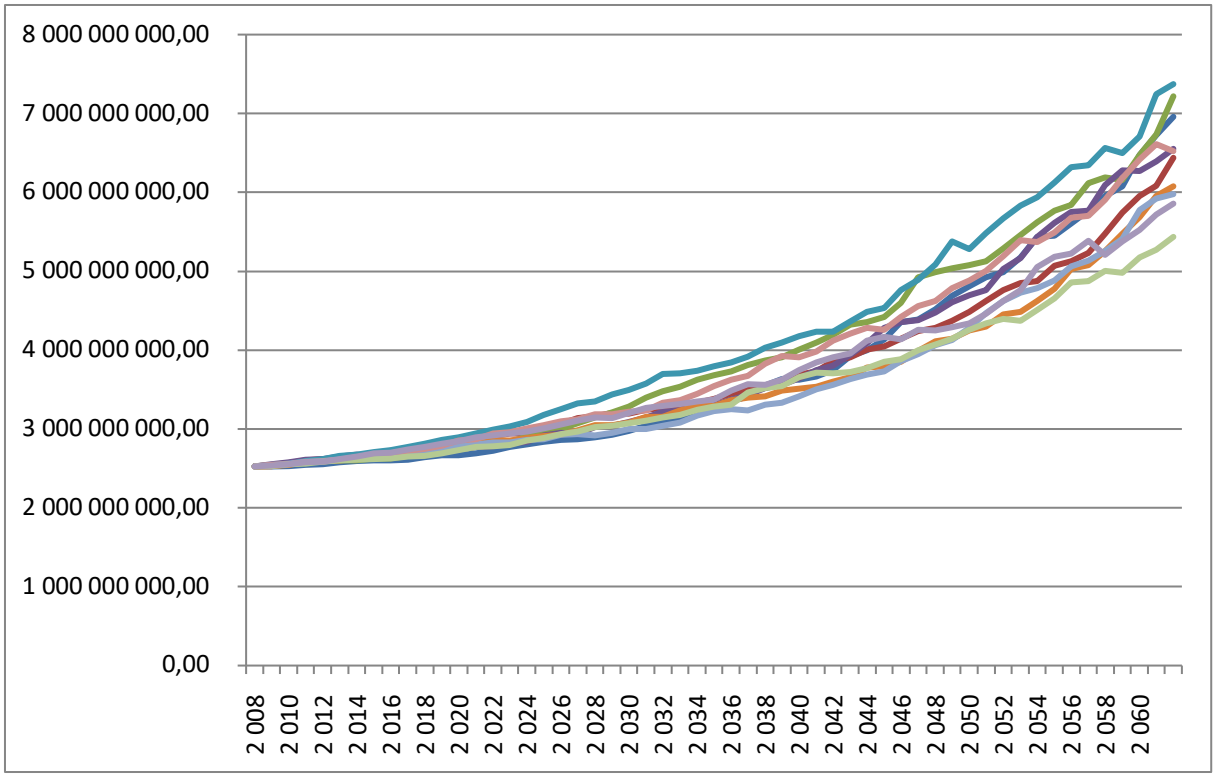


Figure 20 : Evolution stochastique du Fonds d'obligations

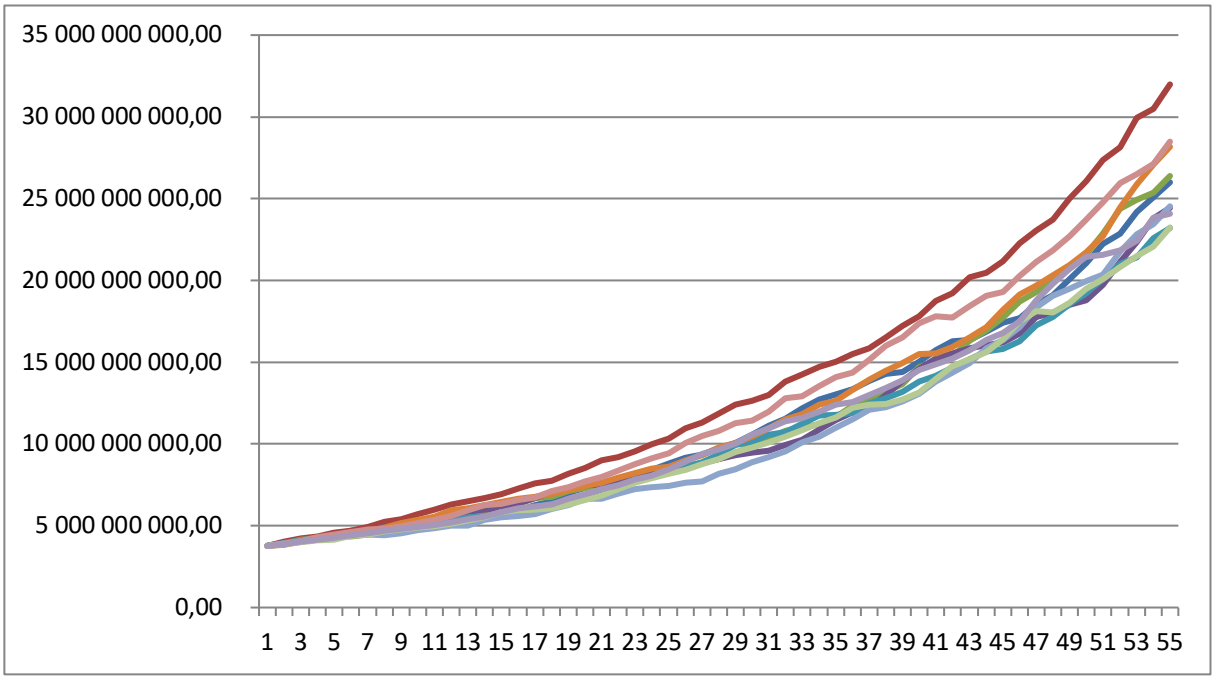


Figure 21 : Evolution stochastique du Fonds d'OPCVM

3.6. Valeur de marché des actifs

Dans les parties précédentes, nous avons explicité la modélisation des différents éléments stochastiques considérés dans notre simulation. Nous sommes à présent en mesure de calculer les différents agrégats nécessaires à la détermination du capital de solvabilité. Pour rappel, ceci implique dans un premier temps de valoriser les actifs ainsi que les passifs. Le projet Solvabilité II impose que ces agrégats soient calculés à une valeur cohérente avec le marché.

Commençons par expliquer la méthode de valorisation des actifs dans le cadre de notre illustration.

Cette valeur de marché sera déterminée selon deux approches. Les actifs actions et OPCVM étant cotés, une valeur de marché est constamment disponible pour chacun des deux actifs, ce qui privilégie une approche mark-to-market. Les actifs obligataires étant non côtés sur le marché, cela suggère plutôt une approche mark-to-model.

L'évolution de la valeur de marché des actifs dépend : du rendement des deux fonds qui le composent; des flux du passif, qui viennent le réduire.

Nous posons l'hypothèse, que les flux sont versés juste avant valorisation des agrégats bilantaires. Dans ce cas, la valeur de marché de l'actif évolue de la façon suivante :

$$VM_A(t) = VM_A(t-1).\exp\left(rdt_A(t)\right) - flux_p(t)$$

Où :

$VM_A(t)$ = valeur de marché de l'actif en t ;

$rdt_A(t)$ = rendement de l'actif entre t-1 et t ;

$flux_p(t)$ = flux du passif au début de l'année t.

La valeur de marché de l'actif change en fonction des scénarios considérés.

3.6.1. Rendement de l'actif

Le rendement du portefeuille pour un scénario et un temps t fixés peut être calculé au départ des rendements des différents fonds d'investissement, grâce à l'hypothèse de proportions constantes investies dans chacun des deux fonds (30% dans le fonds obligataire et 26% dans le fonds d'action et 44% dans le fonds d'OPCVM).

Etant donné que nous avons modélisé le fonds d'OPCVM de la même manière que le fonds actions, nous supposerons à partir de ce point que l'actif se compose uniquement d'obligations à hauteur de 30%, et d'actions à hauteur de 70%).

Notons :

$rdt_s(t)$ = le rendement du fonds d'actions;

$rdt_b(t)$ = le rendement du fonds d'obligations entre t-1 et t.

Les deux rendements s'expriment selon les formules suivantes :

$$rdt_s(t) = \ln\left(\frac{S(t)}{S(t-1)}\right) = \left(\mu_s - \frac{\sigma_s^2}{2}\right) + \sigma_s . N_s$$

$$rdt_b(t) = \ln\left(\frac{B(t)}{B(t-1)}\right) = \left(y(t-1, t+T-1) + \lambda_b - \frac{\sigma_b^2}{2}\right) + \sigma_b . N_b$$

Après rebalancement et paiement des flux, on obtient en t-1:

$$VM_A(t-1) = VM_s(t-1) + VM_b(t-1)$$

Avec :

$VM_s(t-1) = 0{,}7. VM_A(t-1)$ = valeur de marché du fonds d'actions ;

$VM_b(t-1) = 0{,}3. VM_A(t-1)$ = valeur de marché du fonds d'obligations.

L'année suivante, avant rebalancement et paiement des flux, à un instant noté t^-, on aura :

$VM_s(t^-) = VM_s(t-1). \exp\big(rdt_s(t)\big)$ et $VM_b(t^-) = VM_b(t-1). \exp\big(rdt_b(t)\big)$

La valeur totale de l'actif devient donc :

$$VM_A(t^-) = VM_s(t^-) + VM_b(t^-) = VM_A(t-1). (0{,}7. \exp\big(rdt_s(t)\big) + 0{,}3. \exp\big(rdt_b(t)\big)$$

Notons que ce montant total ne sera pas influencé par le rebalancement (qui ne fait que modifier les proportions dans lesquelles ce total est investi).

Le rendement de l'actif entre t-1 et t est dès lors défini par :

$$rdt_A(t) = \ln\left(\frac{VM_A(t^-)}{VM_A(t-1)}\right) = \ln\big[(0{,}7. \exp\big(rdt_s(t)\big) + 0{,}3. \exp\big(rdt_b(t)\big)\big]$$

3.6.2. Flux du passif

La valeur de marché de l'actif est également influencée par les flux du passif. Nous avons chaque année des affiliés qui quittent le portefeuille, soit suite à un décès, soit après un rachat de contrat, soit suite à une demande de départ en capital ou en rente, pour les affiliés atteignant l'âge légal de la retraite. Pour la compagnie, le

remboursement de ces personnes se fait en revendant une partie de l'actif (le montant nécessaire pour honorer ces engagements). Ils sont déterminés de la façon suivante :

$$Flux_{passif}(t) = (T_d + T_r + T_{sc}).R^{t-1}.1{,}045$$

Avec :

T_d = Taux de décès l'année t;

T_r = Taux de rachat l'année t ;

T_{sc} = Taux de sortie en capital l'année t ;

R^{t-1} = Total des réserves de l'année t-1 revalorisées à l'année t.

$$R_x^t = \left[\frac{D_{x+n}}{D_x} + 0{,}0015.\left(\frac{N_x - N_{x+n}}{D_x}\right)\right].1{,}03.\left[\frac{N_{x+n}}{D_{x+n}} + 0{,}375\right].R_x$$

Ces flux du passif sont fonction de la table de mortalité considérée. Ils sont par contre indépendants de paramètres financiers (aucun facteur d'actualisation n'intervenant ici).

3.6.3. Résultats

Nous pouvons maintenant déterminer la valeur de marché totale de l'actif.

Les deux graphes suivants reprennent l'évolution de la valeur de l'actif dans les dix premiers scénarios financiers, selon les deux tables de mortalité. Ces graphes ont été construits sachant que l'on disposait d'un actif initial (en valeur de marché) de 1,40 fois les provisions techniques d'inventaire en 0+, c'est-à dire un capital initial de 40% des provisions techniques.

Nous constatons que l'impact des aléas financiers est très important, comme le montrent les variations de la valeur de marché de l'actif après soixante ans.

Les cas où l'actif devient négatif sont des cas de ruine. Nous y reviendrons par la suite.

3.7. Valeur de marché des provisions

Le projet de directive actuel indique que la valeur des provisions techniques sera égale à la somme du best estimate et d'une marge de risque.

Ces deux éléments se calculent de la manière suivante :

3.7.1. Best Estimate

La notion de best estimate est définie par l'extrait suivant : « La meilleure estimation est égale à la moyenne pondérée par leur probabilité des flux de trésorerie futurs, compte tenu de la valeur temporelle de l'argent (valeur actuelle probable des flux de trésorerie futurs), déterminée à partir de la courbe des taux sans risque pertinente.

Le calcul de la meilleure estimation est fondé sur des informations actuelles crédibles et des hypothèses réalistes et il fait appel à des méthodes actuarielles et des techniques statistiques adéquates »

$$BE \approx \sum_{t=0}^{n} \frac{CF_t}{(1+r_t)^t}$$

Avec : $CF_t = Flux_{passif}(t) = (T_d + T_r + T_{sc}).R(t-1).1{,}045$

$r_t = y(t,10)$: taux obligataire à 10 ans, supposé égal au taux sans risque

3.7.2. Marge de risque

La marge de risque couvre les risques liés à l'écoulement des passifs sur la totalité de leur durée. Elle devrait être déterminée de manière à permettre le transfert ou la liquidation des engagements de (ré) assurance. Cette approche protège les droits des assurés et tient compte de l'incertitude liée à l'évaluation du "best estimate".

Deux modes de calcul de la marge de risque devraient être retenus comme hypothèses de travail. Tout d'abord, cette marge peut être calculée comme la différence

entre le "best estimate" et le 75e centile de la distribution de probabilité sous-jacente, jusqu'à la liquidation. Cette marge de risque devrait toutefois être au moins égale à la moitié de l'écart-type, afin de tenir compte de distributions éventuellement très asymétriques. Par ailleurs, on peut également calculer la marge de risque en fonction du coût que représenterait la mobilisation de capitaux propres à hauteur du Capital de Solvabilité Requis, jusqu'à la liquidation des engagements en cours.

Nous avons opté pour l'approximation de la marge de risque de la même manière que dans l'approche standard. Cette approche suppose que le capital de solvabilité est une proportion constante de la meilleure estimation des provisions. Cette proportion est calculée en t = 0 comme le rapport entre le capital de solvabilité en 0 et la meilleure estimation des provisions en 0.

Détermination de la proportion

Comme nous nous intéressons à l'écoulement du passif sur la totalité de la durée, il s'agit de déterminer les risques non réplicables à l'instant initial, autrement dit, il faut mesurer le capital lié au risque de souscription à l'instant t=0.

Détermination de la marge de risque

La marge de risque en t est alors déterminée de la manière suivante :

$$BE(t) = r_{capital}.x.\sum_{k=0} BE_p(t+k).B(t,t+k)$$

Avec : $r_{capital}$ = 6% .

3.7.3. Valeur de marché des provisions

Nous pouvons maintenant déterminer la valeur de marché des provisions, somme de la meilleure estimation de ces provisions et de la marge de risque. Le résultat obtenu dans le premier scénario est présenté ci-dessous :

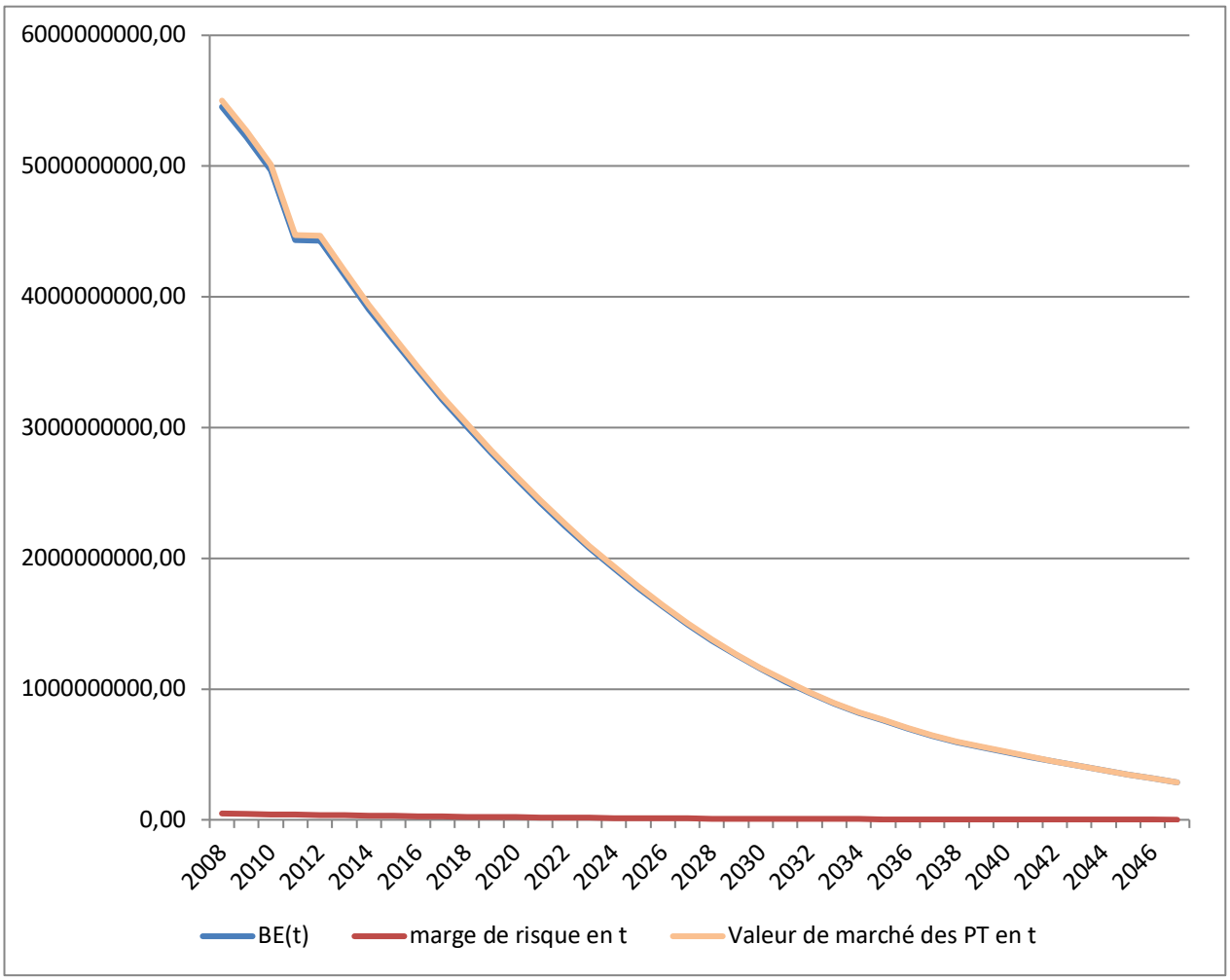


Figure 22 : Projection des éléments constiuant les provisions techniques

3.8. Détermination du capital de solvabilité

Nous sommes à présent en mesure d'estimer le capital de solvabilité. Il peut être défini, rappelons-le, comme l'actif dont il faut disposer au-delà des provisions évaluées sur une base cohérente avec le marché afin d'atteindre une probabilité de ruine cible. Ce capital de solvabilité va dépendre de la mesure de risque choisie ainsi que de la définition de la ruine retenue.

3.8.1. Mesures de risques

<u>Définition de la VaR (Value at Risk) :</u>

La Value at risk est une mesure probabiliste de la perte possible sur un horizon donné .elle représente un niveau de perte, pour une position ou un portefeuille, qui ne sera dépassé durant une période qu'avec un certain degré de confiance.

Par définition, la VaR à horizon *h* et au seuil de probabilité *p* est un nombre $VAR(h,p)$VaR (*h,p*) tel que :

(1) $P(L_h \succ VAR(h,p)) = p$,

ou de manière équivalente :

(2) $P(L_h \leq VAR(h,p)) = 1 - p$ Avec L_k la perte sur l'horizon h.

Les équations (1) et (2) définissent la VaR et conduisent directement à son interprétation.

L'équation (1) indique que le montant de la perte de la période de durée h à venir sera supérieur à la VaR avec une probabilité p.

L'équation (2) exprime que la perte sera inférieure à la VaR avec une probabilité 1-*p* ; ainsi, la VaR peut être vue comme étant la valeur de la fonction inverse de la fonction de répartition généralisée du quantile 1-p.

La VaR d'un portefeuille dépend de trois paramètres:

- Distribution des pertes et profits du portefeuille en fin de période.
- Niveau de confiance qui est égale à 1 moins la probabilité des évènements défavorables. Par exemple, un niveau de confiance de 99,5% si l'on désire ignorer les 0,5% relatifs aux évènements les plus défavorables.
- Période de temps sur laquelle on désire mesurer la VaR.

Il faut noter que la VaR n' pas la propriété de sous-additivité. En effet, si on considère deux actifs A et B pour lesquels on estime la VaR pour le même horizon et le même seuil de confiance, $VAR_h(A+B)(p) \leq VAR_h A(p) + VAR_h B(p)$ n'est pas toujours vérifié.

Définition de la TailVaR :

Appelée aussi Conditional Value at Risk (CVaR). La TailVaR au seuil de confiance q se définit comme l'espérance du montant de perte au delà du seuil de VaR :

$$TailVaR_h(p) = E[L_h / L_h \leq VaR_h(p)]$$

Contrairement à la VaR, la Tail-VaR présente l'avantage de satisfaire la propriété de sous-additivité.

Ainsi, pour la détermination de la VaR le problème réside dans la modélisation de la distribution de la perte.

3.8.2. Les différentes méthodes d'estimation de la VaR :

Méthode analytique

La méthode suppose que L_h suit une loi paramétrique de fonction de répartition F_h connue d'avance,l'estimation se restreint dès lors à celle des paramètres de la loi en question.

$$F_h = G((x-b)/a)$$

Avec :

G : la fonction de distribution d'une loi connue.

a: paramètre d'échelle.

b : paramètre de position.

Ainsi la VaR s'exprime comme suit :

$$VaR_h(p) = F_h^{-1}(p) = b + a * G^{-1}(p)$$

Méthode historique

Dans cette méthode la distribution future de la perte est estimée en se basant sur sa distribution passée et en supposant que les données sont i.i.d. C'est une méthode non paramétrique.

Méthode de Monte Carlo :

La simulation de Monte Carlo est une méthode paramétrique ; son concept réside dans la simulation des trajectoires des différents facteurs de risque en tenant compte des corrélations entre ces facteurs. Une fois que la distribution de chaque facteur de risque est déterminée on pourra estimer la VaR.

Pour générer des séries de rendements pour les actifs financiers, on effectue les étapes suivantes :

- Estimer les écarts types des séries ;
- Déterminer la matrice de variance covariance Σ des rendements des actifs ;
- Décomposer la matrice de variance covariance selon la décomposition de Cholesky tel que : $\sum = A^4 A$;
- Générer des séries de nombres aléatoires indépendants et qui suivent une loi normale standard, notons les Y ;
- Déterminer les m séries selon leur structure de corrélation : $\varepsilon = YA$;
- Déterminer des trajectoires des rendements simulés selon les modèles choisis ;
- Calculer la VaR suivant la méthode historique ;

La méthode Bootstrap :

C'est une méthode de simulation non-paramètrique. Cette technique permet de modéliser la perte en effectuant des tirages aléatoires avec remise dans l'échantillon des données historiques.

3.8.3. Deux définitions de la ruine :

La ruine comptable survient lorsque l'actif est insuffisant pour couvrir la valeur actuelle de tous les flux futurs, c'est-à-dire la valeur de marché des provisions.

Notons X_t la variable aléatoire représentant la perte de l'année t dans un scénario fixé. Selon cette définition, il y aura ruine au temps t quand X_t>0 où :

$$X_t = VM_p(t) + VM_A(t)$$

La ruine opérationnelle survient en t dans un scénario fixé lorsque l'actif en t– est insuffisant pour couvrir les flux de l'année t (en début d'année).

4ème Partie

APPLICATION NUMERIQUE ET ANALYSE DES RESULTATS

4.1. Calcul du capital de solvabilité selon l'approche standard

Nous avons obtenu le capital de solvabilité de base nécessaire en appliquant les formules citées dans la première partie théorique. Pour ce faire, nous avons calculé dans un premier temps les différents capitaux de solvabilité requis liés à chaque sous risque, ensuite nous les avons agrégés selon des matrices de corrélation de chaque boite de risque exigées par la réglementation, de même nous avons calculé le capital de solvabilité requis de base en agrégeant ces capitaux requis obtenus selon une autre matrice de corrélation.

4.1.1. Détermination du capital par type de risque

Comme nous l'avons expliqué dans le premier chapitre, les risques que nous avons pris en considération dans notre rapport sont :le risque de souscription (à savoir :le risque de mortalité,le risque de longévité,et le risque de rachat) ;le risque de marché (dans notre exemple, il est réduit aux risque d'actions et risque de taux).

Alors :

- Risque souscription

Risque de mortalité

$$SCR_{mortalité} = (\text{Total du capital en risque}) * q * D * 0{,}10 * 1{,}1^{((D-1)/2)}$$

Avec :

q= 0.0122

D= 10.72821948

$SCR_{mortalité}$ = 83035298.43

Risque de longévité :

$$SCR_{longévité} = 25\% * q *(1{,}1)^{((D-1)/2)} * D * PT_l$$

Avec :

q= 0.0122

D= 10.72821948

PT_l= 20710792.19

$SCR_{longévité} = 797368.70$

- Agrégation du risque de souscription :

$$SCR_{souscription} = \sqrt{SCR^2{}_{mortalité} + SCR^2{}_{longévité} + SCR^2{}_{rachat} + 2 \bullet \rho_{i,j} \bullet SCR_i \bullet SCR_j}$$

$$SCR_{souscription} = 82,839,554$$

- Risque de marché

Risque d'actions :

Risque de taux :

- Agrégation du risque de marché

- Agrégation des différents risques

Le capital de solvabilité requis de base se détermine comme suit :

$$SCR = \sqrt{SCR^2{}_{souscription} + SCR^2{}_{marché} + 2 \bullet \rho_{souscription,marché} \bullet SCR_{souscription} \bullet SCR_{marché}}$$

$$SCR = 2,809,642,610.91$$

- Risque opérationnel

$SCR_{op} = \min\{0.30 \bullet SCR; 0.003 \bullet PT\}$

$SCR_{op} = \min\{0.30 \bullet 2,831,488,789.17 \ ; 0.003 \bullet 5,504,061,441.77\}$

$SCR_{op} = 16,512,184.33$

4.2. Calcul de la valeur de marché des provisions techniques selon l'approche standard

4.2.1. Best Estimate :

Nous avons effectué le calcul du capital minimum selon la formule standard suivante :

$$BE \approx \sum_{t=0}^{n} \frac{CF_t}{(1+r_t)^t}$$

$BE \approx 5267885285.63$

Les CF_t sont présentés dans un tableau ci-dessous (voir Annexes)

4.2.2. Marge de risque :

$$MR \approx CC \cdot (0.5 + Dur_{\text{mod}}) \cdot SCR(0)$$

$$D = \frac{\sum_{1}^{n} \frac{t \bullet CF_t}{(1+r)^t}}{\sum_{1}^{n} \frac{CF_t}{(1+r)^t}}$$ Alors D= 9.32 ans

$Dur_{mod}=D/(1+r)$ = 8.99 ans

$SCR(0) = 82{,}839{,}554$

$CC = 6\%$

Alors, il suffit d'effectuer une simple application numérique pour trouver la marge de risque :

$MR \approx 48{,}799{,}429.28$

On peut en déduire la valeur de marché des provisions techniques en sommant les deux montants : 5,501,060,699 Dhs

4.3. Calcul du capital minimum requis

Le capital minimum relatif au risque de longévité, de rachat, de mortalité et d'actions correspond à la moitié du capital de solvabilité (SCR) relatif à ces risques.

$$MCR_{risque(i)} = 0.5 \bullet SCR_{risque(i)}$$

Alors : MCR du risque de mortalité égale : 41517649.22

MCR du risque de longévité égale : 398684.35

MCR du risque d'actions 1404667096.10

Pour déterminer le MCR du risque de taux, on applique la même hypothèse que celle du SCR.

Après avoir fixé ces différents éléments,nous les avons agrégés selon les risque par des matrices de corrélation définies dans la première partie.

CONCLUSION

La réglementation des compagnies d'assurance est en évolution : la préoccupation du risque et de la solvabilité occupe une place considérable. Dans cette optique, le projet Solvabilité II créé un cadre prudentiel qui permet d'apprécier la solvabilité globale d'une compagnie. Ce projet a pour objectif de mieux cerner les risques et d'évaluer les actifs et les passifs de manière cohérente avec le marché. Les compagnies d'assurance sont donc amenées à mieux connaître et gérer leurs risques.

C'est dans cette optique que notre stage a été réalisé en considérant un produit de retraite complémentaire et en modélisant les flux du passif de ce produit.

Les risques pour liés à ce produit de retraite sont des risques de souscription vie. Autrement dit, ce sont les risques de mortalité, de longévité, de rachat. Les risques liés à l'actif mis en face de ce produit sont des risques de marché, principalement le risque de taux d'intérêt et le risque actions.

La première étape du stage a été la détermination des niveaux de solvabilité réglementaire que sont le SCR et le MCR, selon une approche standard.

La seconde étape a été la construction des modèles stochastiques. Le terme « stochastique » fait appel à des simulations de variables aléatoires suivant des lois de probabilité. Ces simulations ont été élaborées à partir d'algorithmes choisis en fonction de leur efficience. Les différents risques ont été modélisés de manière stochastique. Le premier risque est la mortalité, qui a été modélisé suivant le modèle de Lee et Carter. Pour les autres risques, les modèles de régression linéaire ont permis de déterminer les

fonctions d'ajustement sur lesquelles des aléas ont été introduits. Et finalement dans une certaine mesure, ces risques ont également été modélisés de manière stochastique.

L'ensemble des modèles ont été implémentés sous Microsoft Excel avec l'utilisation des macros en Visual Basic. Ces modèles sont simples d'utilisation et suite à l'agrégation des données faite en amont, les capacités du logiciel sont largement suffisantes.

Avant de clore ce mémoire dont la finalité est la construction d'un modèle interne répondant aux exigences des normes Solvabilité II, intéressons nous aux marges de solvabilité déterminées à partir des 2 approches utilisées; à savoir :

4. Le MCR issu du QIS2
5. Le SCR issu du QIS4
6. Le modèle interne

Nous comparons ces différentes marges pour le produit CIMR. Rappelons que marge de solvabilité réglementaire pour les produits de la branche vie sont calculés en fonction des capitaux sous risques et des provisions mathématiques. Le SCR fourni par le QIS4 est fonction des risques cités auparavant et fait appel à différents chocs :

- Le risque de mortalité est caractérisé par une augmentation de 10% des taux de mortalité pour chaque âge

- Le risque de longévité est caractérisé par une diminution de 25% des taux de mortalité pour chaque âge

- Le risque de rachat est caractérisé par une augmentation de 50% des taux de rachat

Le QIS4 prenant en compte l'ensemble des risques du produit, la marge constituée est plus prudente.

Finalement, ce stage dont le sujet colle à l'actualité, et la devance un peu en matière de réglementation, constitue une bonne expérience professionnelle. Nous

avons pu acquérir et développer de nombreuses connaissances, en étant confrontées à de multiples difficultés aussi bien théoriques que pratiques. Ce sujet nous a permis d'appliquer de nombreuses connaissances acquises durant les trois années d'études en Actuariat-Finance, et nous a permis de nous familiariser d'avantage avec les logiciels statistiques, qui occupent une part importante du travail des actuaires. Ce travail a été très riche car faisant appel à de nombreux domaines comme l'analyse numérique, l'assurance vie, la statistique, la comptabilité des assurances ou encore l'informatique.

BIBLIOGRAPHIE

CHARPENTIER A. et DENUIT M. (2004), *Mathématiques de l'assurance non vie, Tome 1 : principes fondamentaux de théorie du risque*, Ed. Economica, Coll. « Economie et Statistiques Avancées »

DELWARDE A. et DENUIT M. (2006), *Construction de tables de mortalité périodiques et prospectives*, Ed. Economica, Coll. Assurance Audit Actuariat, Paris

DEVOLDER P. (1993), *Finance Stochastique*, Ed. Université de Bruxelles, Coll. Actuariat, Bruxelles

EMBRECHTS P., FREY R. and MCNEIL A.J. (2005), *Quantitative Risk Management: Concepts, Techniques and Tools*, Princeton Series in Finance

FITOUCHI D. (2005), *Solvency II : Du projet de réforme à l'approche par les modèles internes*, Ed. Demos, Coll. Comptabilité et Finances, Paris

JACQUEMIN J., PLANCHET F. et THEROND P. (2005), *Modèles financiers en assurance, analyses de risque dynamiques*, Ed. Economica, Coll. Assurance Audit Actuariat, Paris

LE VALLOIS F., PALSKY P., PARIS B. et TOSETTI A. (2003), *Gestion Actif Passif en assurance vie, réglementation, outils, méthodes*, Ed. Economica, Coll. Assurance Audit Actuariat, Paris

ANNEXES

Table de mortalité TPRV 93 que nous avons utilisée pour projeter les taux de mortalité

TPRV 93					
Age	Lx	Age	Lx	Age	Lx
0	100,000	39	93,774	78	77,462
1	97,047	40	93,670	79	75,840
2	95,995	41	93,560	80	74,030
3	95,793	42	93,442	81	72,016
4	95,653	43	93,318	82	69,780
5	95,556	44	93,185	83	67,306
6	95,515	45	93,043	84	64,621
7	95,477	46	92,892	85	61,719
8	95,442	47	92,732	86	58,596
9	95,410	48	92,560	87	55,255
10	95,379	49	92,378	88	51,700
11	95,359	50	92,183	89	47,999
12	95,336	51	91,976	90	44,172
13	95,311	52	91,756	91	40,248
14	95,284	53	91,520	92	36,261
15	95,254	54	91,273	93	32,253
16	95,221	55	91,013	94	28,330
17	95,185	56	90,741	95	24,535
18	95,144	57	90,455	96	20,914
19	95,101	58	90,155	97	17,513
20	95,056	59	89,844	98	14,373
21	95,008	60	89,523	99	11,530

22	94,957	61	89,191	100	9,014
23	94,904	62	88,849	101	6,843
24	94,850	63	88,498	102	5,023
25	94,794	64	88,126	103	3,547
26	94,736	65	87,733	104	2,395
27	94,677	66	87,319	105	1,535
28	94,617	67	86,882	106	926
29	94,555	68	86,422	107	519
30	94,491	69	85,911	108	267
31	94,424	70	85,343	109	123
32	94,356	71	84,711	110	50
33	94,285	72	84,007	111	17
34	94,211	73	83,224	112	5
35	94,133	74	82,337	113	1
36	94,050	75	81,333	114	0
37	93,963	76	80,198		
38	93,871	77	78,913		

Les tests de normalité des variables (erreurs_rachat)

Test de Shapiro-Wilk	
W (valeur observée)	0.983
p-value unilatérale	0.315
Alpha	0.05

Test de Jarque-Bera	
JB (valeur observée)	1.309
JB (valeur critique)	5.991
ddl	2
p-value unilatérale	0.520
Alpha	0.05

Les tests de normalité des variables (erreurs_deces)

Test de Shapiro-Wilk	
W (valeur observée)	0.987
p-value unilatérale	0.491
Alpha	0.05

Test de Jarque-Bera	
JB (valeur observée)	0.254
JB (valeur critique)	5.991
ddl	2
p-value unilatérale	0.881
Alpha	0.05

Les tests de normalité des variables (erreurs_sortie en capital)

Test de Shapiro-Wilk	
W (valeur observée)	0.983
p-value unilatérale	0.315
Alpha	0.05

Test de Jarque-Bera	
JB (valeur observée)	1.309
JB (valeur critique)	5.991
ddl	2
p-value unilatérale	0.520
Alpha	0.05

Les tests de normalité des variables (erreurs_Kappas)

Test de Shapiro-Wilk :	
W (valeur obs	0.990
p-value unilat	0.978
Alpha	0.05

Test de Jarque-Bera :	
JB (valeur obs	0.049
JB (valeur crit	5.991
ddl	2
p-value unilat	0.976
Alpha	0.05

<u>Conclusion :</u>

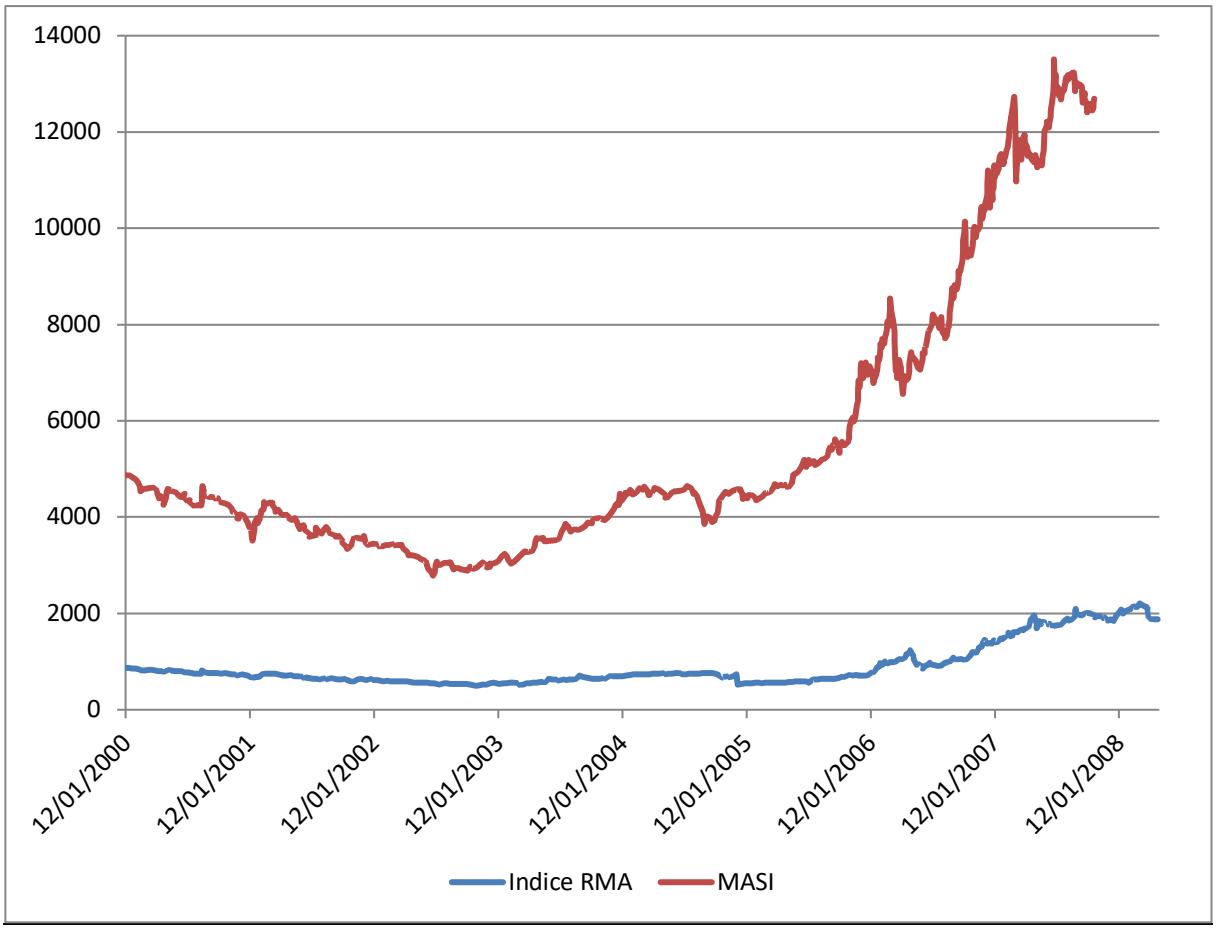
Au seuil de signification Alpha = 0.05 on ne peut pas rejeter l'hypothèse nulle selon la quelle l'échantillon suit la loi normale .Autrement dit, la non normalité n'est pas significative. Cela est vrai pour les quatre catégories d'erreurs considérées.

Nous avons appliqué la formule citée précédemment.

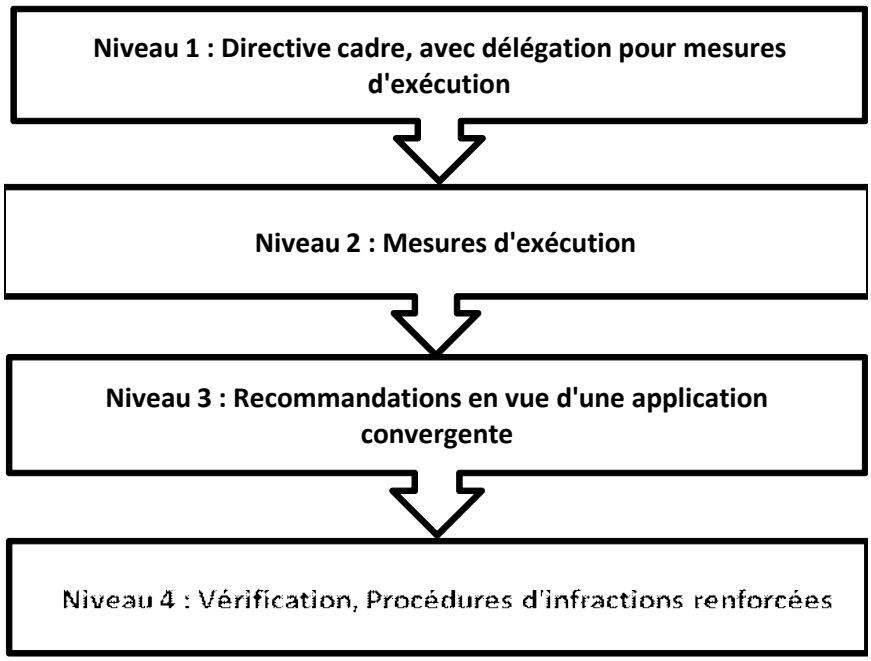
Année	Flux-passif	Année	Flux-passif
2008	370,167,522.77	2032	126,341,684.67
2009	429,176,272.50	2033	114,713,963.13
2010	442,997,656.71	2034	103,954,452.90
2011	456,333,747.14	2035	84,986,343.82
2012	431,624,198.96	2036	92,293,051.12
2013	424,908,041.35	2037	81,549,227.68
2014	410,790,099.65	2038	68,568,594.30
2015	382,891,735.78	2039	59,579,428.45
2016	361,892,545.22	2040	58,661,961.53
2017	348,334,972.12	2041	55,326,580.97
2018	327,082,896.52	2042	52,166,416.21
2019	311,598,791.40	2043	49,652,082.22
2020	293,664,609.21	2044	47,398,668.14
2021	287,038,032.36	2045	45,333,281.55
2022	268,018,473.29	2046	43,108,406.48
2023	250,999,550.36	2047	40,923,387.31
2024	235,254,562.60	2048	38,709,113.22
2025	220,744,009.25	2049	36,373,706.36
2026	207,627,120.14	2050	33,846,040.92
2027	195,667,919.20	2051	31,290,642.30
2028	177,957,945.58	2052	28,875,914.74
2029	163,117,496.06	2053	26,543,590.36
2030	151,164,477.34	2054	23,992,992.89
2031	139,932,172.02	2055	21,651,523.83

Projection des flux du passif

Comparaison entre l'indice sur les actions et l'indice du marché MASI



On voit bien que l'indice que nous avons construit, bien qu'il ne soit pas calculé de manière conforme au MASI, reste cohérent en moyenne avec la tendance et la volatilité du marché des actions.

Processus Lamfalussy

Processus Lamfalussy