

INSTITUT NATIONAL  
DE STATISTIQUE ET D'ECONOMIE APPLIQUEE

**INSEA**

Projet de Fin d'Etudes

\*\*\*\*\*

## Evaluation des exigences quantitatives sous la SBR en assurance vie et non vie

Préparé par : *Mme Hanane AHROUR*

*Mme Mohsana GALLAL*

Sous la direction de : *M. Mustapha LEBBAR (INSEA)*

*M. Abdelkrim KHIRAOUI (ARM Consultants)*

*Soutenu publiquement comme exigence partielle en vue de l'obtention du*

**Diplôme d'Ingénieur d'Etat**

**Filière : Actuariat Finance**

*Devant le jury composé de :*

- *M. Mustapha LEBBAR (INSEA)*
- *M. Driss Effina (INSEA)*
- *M. Abdelkrim KHIRAOUI (ARM Consultants)*



## *Résumé*

Le projet de circulaire «**Solvabilité Basée sur les Risques**» présente la réforme réglementaire que connaîtra le secteur des assurances afin de s'aligner avec les principes de base de l'assurance de l'IAIS (International Association of Insurance Supervisors). Toutefois, les hypothèses et les techniques de calculs sont en consultations avec les acteurs du marché de l'assurance et de réassurance.

Durant notre stage nous avons tenté d'évaluer les exigences quantitatives sous la SBR en assurance vie et non vie. Nous avons procédé à la construction de la courbe des taux fixée par l'Autorité de Contrôle des Assurances et de la Prévoyance Sociale. Dans une première partie, nous avons évalué les provisions techniques prudentielles pour un produit d'assurance décès emprunteur. L'approche consiste à construire la loi de remboursement anticipé pour le portefeuille étudié, pour passer au calcul de la meilleure estimation des garanties probabilisées et de la marge de risque. Enfin, nous avons détaillé le calcul des provisions techniques prudentielles pour la catégorie TPV de la branche RC automobile en se focalisant sur le calcul de la meilleure estimation des engagements qui constitue le cœur des provisions techniques prudentielles.

### **Mots -Clés :**

SBR, meilleure estimation des engagements, provisions techniques prudentielles, assurance décès emprunteur, RC automobile, marge de risque, courbe des taux réglementaire.

## *Dédicace1*

*A ma chère famille qui a toujours été présente à mes côtés tout au long de mon parcours scolaire et universitaire.*

*A tous mes amis avec qui j'ai passé des moments de joie et de bonheur.*

*Hanane*

## *Dédicace 2*

*A* mes parents qui illuminent ma vie et qui veillent à mon bonheur

*A* mes frères et sœurs qui m'aiment de façon inconditionnellement et me prennent pour leur héroïne

*Aux* fidèles amis qui me supportent et croient en moi

*Au* corps professoral et administratif de l'Institut National de Statistique et d'Economie appliquée qui se consument pour assurer une formation de qualité

*Puisse* ce travail exprimer le respect et la gratitude que nous vous témoignons

*Mohsana*

## *Remerciements*

Il est agréable de s'acquitter d'une dette de reconnaissance auprès de toute personne dont l'intervention, au cours de ce projet, a favorisé son aboutissement.

Ainsi, nous tenons à exprimer nos vifs remerciements et notre profond respect à :

- Monsieur Mustapha Lebbar, notre encadrant interne, Actuaire Consultants et Ingénieur Général Actuaire au sein de la société Mustapha Attaaminat, pour sa disponibilité et ses directives précieuses durant toute la période de notre stage de fin d'études.
- Monsieur EL Khiraoui Abdelkrim, associé gérant au sein d'ARM consultants qui nous a offert l'opportunité de réaliser notre stage de fin d'études au sein de son équipe.
- Hama Fatima et Bakou Yassine, Actuaire consultants au sein d'ARM consultants pour leur apport technique, leur assistance fructueuse et leur disponibilité

## Table des matières

Résumé .....	3
Dédicace1.....	4
Dédicace 2.....	5
Remerciements.....	6
Table des matières.....	7
Liste des abréviations.....	9
Liste des figures .....	10
Liste des tableaux.....	11
Introduction .....	13
Chapitre 1 : Contexte général du projet .....	15
<b>I.    Le marché des assurances au Maroc :.....</b>	<b>16</b>
I.1.    Chiffres clés du secteur :.....	16
I.2.    L’Autorité de Contrôle des Assurances et de la Prévoyance Sociale :.....	17
<b>II.    Présentation de l’organisme d’accueil : .....</b>	<b>18</b>
<b>III.   Présentation du projet de la réglementation prudentielle Solvabilité Basée Sur les Risques :.....</b>	<b>21</b>
III.1.  Contexte :.....	21
III.2.  Aperçu sur la SBR : .....	21
III.3.  Fondements des piliers :.....	22
Chapitre 2 : La construction de la courbe des taux zéro-coupon .....	29
<b>I.    Collecte des données : .....</b>	<b>30</b>
<b>II.   Méthodologie de construction :.....</b>	<b>30</b>
II.1.  Transformation des taux monétaires en taux actuariels :.....	31
II.2.  Interpolation linéaire des taux actuariels : .....	32
II.3.  Transformation des taux actuariels en taux zéro-coupon :.....	33
II.4.  Extrapolation de la courbe des taux zéro-coupon par la méthode de Smith-Wilson :....	34
Chapitre 3 : Les provisions techniques prudentielles en assurance vie.....	38
<b>I.    Présentation de bases de données utilisées lors de l’étude: .....</b>	<b>39</b>
I.1.  Description des bases de données utilisées dans l’étude :.....	40
I.2.  Traitements et contrôles effectués sur les données :.....	40
I.3.  Statistiques descriptives : .....	42
<b>II.   Construction de la loi de remboursement anticipé : .....</b>	<b>48</b>

II.1.	Calcul des taux bruts : .....	48
II.2.	Résultats et comparaison des méthodes : .....	52
II.3.	Lissage des taux bruts : .....	55
<b>III.</b>	<b>Tarification en assurance décès emprunteur: .....</b>	<b>57</b>
III.1.	Notations et hypothèses : .....	58
III.2.	Calcul de la prime unique : .....	59
III.3.	Calcul des primes mensuelles selon le capital restant dû : .....	59
<b>IV.</b>	<b>Calcul des provisions techniques prudentielles : .....</b>	<b>60</b>
IV.1.	La meilleure estimation des engagements : .....	61
IV.2.	La marge de risque (MR) : .....	64
IV.3.	Présentation des résultats : .....	64
Chapitre 4 : Les provisions techniques prudentielles en assurance non vie .....		68
<b>I.</b>	<b>La meilleure estimation des engagements : .....</b>	<b>69</b>
I.1.	Meilleure estimation des engagements pour sinistres : .....	69
I.2.	Meilleure estimation des engagements pour primes .....	99
<b>II.</b>	<b>La marge de risque (MR) : .....</b>	<b>106</b>
II.1.	Définition : .....	106
II.2.	Application : .....	106
Conclusion .....		107
Bibliographie / Webographie .....		109
Annexes .....		110

## *Liste des abréviations*

Abréviation	Désignation
<b>ACAPS</b>	Autorité de Contrôle des Assurances et de la Prévoyance Sociale
<b>GLM</b>	Generalized Linear Model
<b>IAIS</b>	International Association of Insurance Supervisors
<b>KM</b>	Kaplan Meier
<b>ME</b>	Meilleure estimation
<b>MEGP</b>	Meilleure estimation des garanties probabilisées
<b>MR</b>	Marge de risque
<b>PA</b>	Prime acquise
<b>PE</b>	Prime émise
<b>PPNA</b>	Provision pour primes non acquises
<b>PSAP</b>	Provision pour sinistres à payer
<b>RC</b>	Responsabilité automobile
<b>SBR</b>	Solvabilité Basée sur les Risques
<b>SM</b>	Smith Wilson
<b>TFU</b>	Taux Forward Ultime
<b>TPV</b>	Transport public des voyageurs

## Liste des figures

Figure 1: Evolution des émissions d'assurances par sous catégories entre 2016-2017 (Source: rapport d'activité de l' ACAPS au titre de l'exercice 2017) .....	16
Figure 2: Evolution des placements du secteur d'assurances (Source: rapport d'activité de l' ACAPS au titre de l'exercice 2017) .....	17
Figure 3: Les trois piliers de la SBR.....	22
Figure 4: La courbe des taux zéro-coupon au 26/03/2019.....	34
Figure 5 : La courbe des taux zéro-coupon après l'extrapolation de SW .....	37
Figure 6: Evolution de l'âge moyen par années de souscription pour chaque catégorie de crédit .....	43
Figure 7: Evolution du capital initial moyen pour chaque catégorie de crédit.....	44
Figure 8: Evolution du nombre de contrats souscrits pour les crédits aménagement.....	44
Figure 9: Evolution du nombre de contrats souscrits pour les crédits consommation, habitat et automobile.....	45
Figure 10: Evolution de la durée de prêt moyenne .....	46
Figure 11: Evolution du taux de prêt moyen .....	46
Figure 12: Evolution du nombre de sinistres entre 2011 et 2017 pour les crédits aménagement .....	47
Figure 13: Evolution du nombre de sinistres entre 2011 et 2017 pour les autres catégories de crédits .....	47
Figure 14: Calcul du taux de remboursement anticipé pour les crédits d'aménagement .....	54
Figure 15: Calcul des taux bruts de la loi de remboursement anticipé pour les crédits Habitat.....	55
Figure 16: Ajustement des taux bruts des remboursements anticipés des crédits d'aménagement ...	56
Figure 17: Lissage des taux bruts des remboursements anticipés des crédits d'habitat .....	57
Figure 18: Triangle des règlements.....	70
Figure 19: Exemples des fonctions de lien canoniques .....	78
Figure 20: Schéma illustratif du principe du Bootstrap .....	82
Figure 21: Méthodologie de calcul de la $ME_{sinistre}$ .....	83
Figure 22: Test d'indépendance des facteurs individuels pour $j=0$ à 3 ( dommages corporels) .....	84
Figure 23: CC-Plots RC dommages corporels de la catégorie TPV $j=0$ à 4. ....	85
Figure 24 : Représentation des nuages des points $(\epsilon_i, j, Ci, j)$ pour $j=0$ à 3 des dommages corporels. ....	90
Figure 25: Q-Q plot de la loi Log-normale (Dommages corporels).....	93
Figure 26: Q-Q plot de la loi Gamma (Dommages corporels).....	94
Figure 27: Test de Shapiro Wilk sur les résidus de la régression Log-normale.....	94
Figure 28: Test de Shapiro Wilk sur les résidus de la régression Gamma .....	94
Figure 29: Q-Q plot de la loi Log-Normale (Dommages matériels) .....	95
Figure 30: Q-Q plot de la loi Gamma (Dommages matériels).....	96
Figure 31: Aperçu de la base de données des primes .....	101
Figure 32: Primes émises par exercice en MAD .....	102
Figure 33 : Schéma illustratif des cas de calcul de la prime émise .....	103
Figure 34: Les primes acquises par exercice en MAD .....	104
Figure 35: Taux de renouvellement en montant .....	104

## Liste des tableaux

Tableau 1: Règles de valorisation de l'actif.....	24
Tableau 2: Règles de valorisation du passif .....	24
Tableau 3 : Les transactions sur les bons de trésor au 26/03/2019 .....	30
Tableau 4 : Taux actuariels.....	31
Tableau 5 : Taux actuariels interpolés .....	32
Tableau 6:Récapitulatif des traitements effectués sur les bases de données.....	42
Tableau 7: Les remboursements anticipés pour les crédits d'aménagement .....	52
Tableau 8:Evolution du nombre de contrats de crédits d'aménagement .....	53
Tableau 9: Les remboursements anticipés des crédits d'habitat .....	53
Tableau 10:Evolution du nombre de contrat d'habitat .....	54
Tableau 11: La MEGP des crédits d'habitat souscrits entre 2010 et 2013 .....	65
Tableau 12: La MEGP des crédits d'habitat souscrits entre 2014 et 2017 .....	65
Tableau 13: La MR des crédits d'habitat souscrits entre 2010 et 2013 .....	65
Tableau 14: La MR des crédits d'habitat souscrits entre 2014 et 2017 .....	65
Tableau 15: La MEGP des crédits d'aménagement souscrits entre 2010 et 2013 .....	66
Tableau 16: La MEGP des crédits d'aménagement souscrits entre 2014 et 2017 .....	66
Tableau 17: La MR des crédits d'aménagement souscrits entre 2010 et 2013 .....	67
Tableau 18: La MR des crédits d'aménagement souscrits entre 2014 et 2017 .....	67
Tableau 19: Les coefficients de développement de la méthode de Chain Ladder (Dommages corporels).....	85
Tableau 20 : Les coefficients de développement de Chain Ladder (Dommages matériels).....	85
Tableau 21: PSAP annuelles estimées par la méthode Chain Ladder (Dommages corporels) .....	86
Tableau 22: Cash-flow annuels estimés par la méthode Chain Ladder (Dommages corporels) .....	86
Tableau 23: PSAP annuelles estimées par la méthode Chain Ladder (Dommages matériels) .....	86
Tableau 24: Cash- flow annuels estimés par la méthode Chain Ladder (Dommages matériels) .....	87
Tableau 25: Valeurs de la PSAP et de la <i>MEsinistre</i> estimées par la méthode de Chain Ladder .....	87
Tableau 26: Estimation des paramètres de la méthode de London Chain (Dommages corporels) .....	87
Tableau 27: Estimation des paramètres de la méthode de London Chain (Dommages matériels) .....	87
Tableau 28: PSAP annuelles estimées par la méthode London Chain (Dommages corporels) .....	88
Tableau 29: Cash-flows annuels estimés par la méthode London Chain (Dommages corporels).....	88
Tableau 30 : PSAP annuelles estimées par la méthode London Chain (Dommages matériels) .....	88
Tableau 31: Cash-flows annuels estimés par la méthode London Chain (Dommages matériels).....	89
Tableau 32 : Valeurs de la PSAP et de la <i>MEsinistre</i> estimées par la méthode de London Chain .....	89
Tableau 33 : Les paramètres estimés de la méthode de DeVlyder (Dommages corporels).....	89
Tableau 34 : Les paramètres estimés de la méthode de DeVlyder (Dommages matériels).....	89
Tableau 35 : Valeurs de la PSAP et de la <i>MEsinistre</i> estimées par la méthode de DeVlyder .....	90
Tableau 36 : Estimation des coefficients $\sigma_j$ de la méthode de Mack (Dommages corporels).....	91
Tableau 37 : Estimation des coefficients $\sigma_j$ de la méthode de Mack (Dommages matériels) .....	91
Tableau 38 : Erreurs standards de prédiction et intervalles de confiance au niveau de 95% (Dommages corporels).....	91
Tableau 39: Erreurs standards de prédiction et intervalles de confiance au niveau de 95% (Dommages matériels).....	92
Tableau 40 : SEP et intervalle de confiance au niveau de 95% de la PSAP (Dommages corporels) .....	92
Tableau 41 : SEP et intervalle de confiance au niveau de 95% de la PSAP (Dommages matériels) .....	92

## Liste des tableaux

---

Tableau 42: Valeurs de la PSAP et de la <i>MEsinistre</i> estimées par GLM (Dommages corporels) .....	95
Tableau 43: Récapitulatif des valeurs de la PSAP et de la <i>MEsinistre</i> estimées par GLM .....	96
Tableau 44: Extrait des échantillons de la PSAP et de la <i>MEsinistre</i> (Dommages corporels) .....	97
Tableau 45: Extrait des échantillons de la PSAP et de la <i>MEsinistre</i> (Dommages matériels) .....	97
Tableau 46: Valeurs de la PSAP et de la <i>MEsinistre</i> et intervalles de confiance (Dommages corporels) .....	97
Tableau 47: Valeurs de la PSAP et de la <i>MEsinistre</i> et intervalles de confiance (Dommages matériels) .....	98
Tableau 48: Récapitulatif des résultats de la PSAP de la catégorie TPV de la branche RC automobile	98
Tableau 49: Récapitulatif des résultats de la <i>MEsinistre</i> de la catégorie TPV de la branche RC automobile .....	98
Tableau 50: Tableau avant duplication des lignes par exercice .....	103
Tableau 51: Tableau après duplication des lignes par exercice .....	103

## *Introduction*

Le Maroc soumet l'activité d'assurance à un contrôle spécifique afin de préserver l'impact social de l'assurance et son rôle dans le financement de l'économie. Pour assurer cette mission, l'Autorité de Contrôle des Assurances et de la Prévoyance sociale adopte un cadre prudentiel qui fixe les règles d'évaluation des provisions techniques, les règles de calcul de la marge de solvabilité et détermine ses éléments constitutifs. Certes, le cadre prudentiel actuel s'avère simple et intuitif pour la prise de décision, cependant il se base sur des éléments comptables et non économiques et ne tient pas compte des différents risques auxquelles sont soumises les activités d'assurance.

C'est ainsi que le Maroc s'oriente vers une nouvelle réglementation ;la SBR « Solvabilité Basée sur les Risques », en publiant un projet de circulaire en consultation avec les acteurs du marché des assurances. Cette nouvelle réglementation introduit l'évaluation du bilan prudentiel en vision économique, la revalorisation des engagements en meilleure estimation pour éviter toute marge de prudence incluse dans les provisions techniques.

Ainsi, ce mémoire s'inscrit dans la perspective d'évaluation des exigences quantitatives sous les normes de la SBR. En particulier, nous avons traité de la meilleure estimation des engagements pour un produit d'assurance vie; l'assurance décès emprunteur et puis pour une garantie d'assurance non vie ;la responsabilité civile automobile des transports public des voyageurs. Pour ce faire nous avons adopté le schéma suivant.

En amont, nous avons introduit le contexte général de cette étude. Ensuite, nous avons présenté un aperçu de la SBR, pour passer à la construction de la courbe de taux réglementaire. Enfin, nous avons procédé à la valorisation des exigences quantitative en assurance vie et en assurance non vie. Nous avons construit la loi de remboursement anticipé puis nous avons calculé la meilleure estimation des garanties probabilisées et la marge de risque des crédits immobiliers. En assurance non vie, nous étudions la garantie responsabilité civile pour la catégorie transport public des

voyageurs (TPV) ; nous avons évalué dans un premier temps la meilleure estimation des engagements pour sinistres ainsi que son équivalent comptable dans la réglementation actuelle à savoir la provision pour sinistres à payer (PSAP), ensuite, nous avons calculé la meilleure estimation des engagements pour primes. Finalement, nous avons déduit la marge de risque pour la garantie étudiée.

# *Chapitre 1 : Contexte général du projet*

Dans ce premier chapitre, nous exposerons le secteur des assurances au Maroc. Ensuite, nous présenterons l'entreprise qui nous a accueilli pendant notre stage, à savoir ARM consultants. Enfin, nous donnerons un aperçu de la nouvelle réglementation prudentielle communément appelée « Solvabilité Basée sur les Risques » qui sera prochainement imposée par l'ACAPS aux entreprises d'assurances et de réassurance au Maroc.

## I. Le marché des assurances au Maroc :

### I.1. Chiffres clés du secteur :

#### I.1.1. Primes Emises :

Les émissions directes du secteur des assurances ont progressé de 10,9% et s'élèvent à 38,7 milliards de dirhams en 2017 contre 34,9 milliards pour l'exercice de 2016. Les opérations non-vie sont en progression de 5,5% et représentent 56,1% du total de ces affaires. En ce qui concerne les opérations vie et capitalisation, elles affichent également un taux d'évolution important (+18,8%). De plus, la répartition des émissions d'assurances montre que la branche vie et capitalisation préserve une place prépondérante, soit 43,9% du total des primes émises sur les affaires directes. Par ailleurs, la contribution de l'assurance automobile dans le chiffre d'affaires global vient au deuxième rang avec une part de 27,1%, suivi de l'assurance maladie maternité (10,1%) et de l'assurance accidents du travail (5,7%).

En millions de dirhams	2016	2017	Part dans le total	Variation 2017/2016
<b>Opérations non-vie</b>	<b>20 622,1</b>	<b>21 751,0</b>	<b>56,1%</b>	<b>5,5%</b>
Véhicules terrestres à moteur	9 953,8	10 481,7	27,1%	5,3%
Dont Responsabilité civile	8 543,8	8 908,8	23,0%	4,3%
Accidents corporels - Maladie - maternité	3 652,8	3 922,2	10,1%	7,4%
Dont Maladie – maternité	3 022,0	3 257,8	8,4%	7,8%
Accidents du travail et maladies et professionnelles (AT & MP)	2 174,1	2 222,5	5,7%	2,2%
Incendie et éléments naturels	1 318,4	1 331,7	3,4%	1,0%
Assistance - crédit – caution	1 331,1	1 415,1	3,7%	6,3%
Transport	578,0	604,9	1,6%	4,7%
Responsabilité civile générale	550,2	548,9	1,4%	-0,2%
Assurances des risques techniques	329,3	242,3	0,6%	-26,4%
Autres opérations	734,5	979,4	2,5%	33,3%
<b>Opérations vie et capitalisation</b>	<b>14 292,8</b>	<b>16 984,7</b>	<b>43,9%</b>	<b>18,8%</b>
Epargne	11 087,0	13 617,4	35,2%	22,8%
Décès	2 685,0	2 751,6	7,1%	2,5%
Contrats à capital variable (UC)	493,6	584,9	1,5%	18,5%
Autres opérations vie	27,2	30,8	0,1%	14,2%
<b>TOTAL</b>	<b>34 914,8</b>	<b>38 735,7</b>	<b>100,0%</b>	<b>10,9%</b>

Figure 1: Evolution des émissions d'assurances par sous catégories entre 2016-2017 (Source: rapport d'activité de l'ACAPS au titre de l'exercice 2017)

### I.1.2. Placements :

Les placements nets des entreprises d'assurances et de réassurance ont atteint 161,5 milliards de dirhams en 2017 contre 151,9 milliards en 2016, en progression de 6,3%. Les placements affectés aux opérations d'assurances représentent 89,3% de ce montant, avec 144,1 milliards de dirhams contre 134,8 milliards en 2016. L'augmentation annuelle des placements affectés aux opérations d'assurances s'est élevée en 2017 à 9,4 milliards de dirhams contre 7,9 milliards en 2016.

Le tableau suivant retrace l'évolution des placements des entreprises d'assurances et de réassurance:

En millions de dirhams	Montant			Part du total			Variation 2017/2016	
	2015	2016	2017	2015	2016	2017		
Placements affectés aux opérations d'assurances	126 822,5	134 757,6	144 136,6	88,4%	88,7%	89,3%	9 379,0	7,0%
Placements non affectés aux opérations d'assurances	16 655,0	17 150,7	17 337,7	11,6%	11,3%	10,7%	187,0	1,1%
<b>TOTAL</b>	<b>143 477,5</b>	<b>151 908,4</b>	<b>161 474,3</b>	<b>100,0%</b>	<b>100,0%</b>	<b>100,0%</b>	<b>9 565,9</b>	<b>6,3%</b>

Figure 2: Evolution des placements du secteur d'assurances (Source: rapport d'activité de l'ACAPS au titre de l'exercice 2017)

### I.2. L'Autorité de Contrôle des Assurances et de la Prévoyance Sociale :

Dans le cadre de la modernisation de la supervision du secteur des assurances et de la prévoyance sociale, la Direction des Assurances et de la Prévoyance Sociale (DAPS) qui relevait du Ministère de l'Economie et des Finances est remplacée par l'Autorité de Contrôle des Assurances et de la Prévoyance Sociale (ACAPS) créée par la loi n°64-12 et entrée en vigueur le 14 avril 2016. Cette nouvelle entité est dotée de la personnalité morale de droit commun. Elle jouit de l'autonomie financière et de l'indépendance décisionnelle.

L'Autorité de Contrôle des Assurances et de la Prévoyance Sociale est chargée de la supervision des entreprises d'assurances et de réassurance et du réseau de

distribution ainsi que des organismes de la prévoyance sociale. Elle veille à la protection des assurés, affiliés, adhérents et bénéficiaires de droits à travers:

- Le contrôle de la solvabilité des Entreprises d'Assurances et de Réassurance et de la pérennité financière des régimes de prévoyance sociale.
- La vérification du respect des règles applicables à chaque secteur par les opérateurs soumis à son contrôle.
- Le suivi des pratiques commerciales et l'instruction de toutes les réclamations relatives aux opérations pratiquées par les entités soumises à son contrôle.

## II. Présentation de l'organisme d'accueil :

Durant notre période de stage de fin d'étude **ARM Consultants** nous a accueillis au sein de son équipe pour effectuer notre projet, nous présenterons ci-après un aperçu historique d'**ARM Consultants** et ses missions.

Actuariat & Risk Management c'est la définition du sigle ARM, dénomination du premier cabinet opérant dans le domaine du conseil en actuariat au Maroc, dans la région MENA et en Afrique francophone. **ARM Consultants** dont le capital est détenu à 100% par ses associés est un cabinet totalement indépendant qui a vu le jour en 1996. Il intervient dans plusieurs domaines tels le Risk-Management, l'assurance, la prévoyance sociale etc. Il offre ses services à divers organismes tels que :

- **Les institutions financières** qui souhaitent innover et maîtriser leurs risques, pour devenir leaders dans les domaines de l'assurance, de la bancassurance, de la réassurance, de la prévoyance sociale, de la retraite ou du crédit bancaire.
- **Les entreprises et les établissements publics** qui souhaitent optimiser leurs performances en matière de gestion de leurs risques, de leurs assurances et de leurs engagements sociaux.
- **Les administrations** qui cherchent à élaborer des études actuarielles pour améliorer les systèmes existants de couvertures sociales ou mettre en place de nouveaux régimes de prévoyance sociale.

Afin de couvrir l'ensemble de ses spécificités et offrir des services de qualités, **ARM Consultants** est organisé autour de deux pôles distincts à savoir le pôle Institutionnel qui est dédié aux services aux institutionnels et le pôle Corporate qui accompagne les entreprises dans leurs tâches quotidiennes relatives aux conseils dans les domaines relevant des compétences d'**ARM Consultants**. Ce faisant, il serait intéressant de présenter ses différents services.

– **SERVICES AUX INSTITUTIONNELS :**

A l'heure où la concurrence s'exacerbe à un rythme très vite, et du fait de la complexité et de la technicité des exigences de certains domaines comme celui de l'actuariat, certains organismes ont recours à des spécialistes. C'est à ce moment qu'**ARM Consultants** intervient à travers ses actuaires consultants de haut niveau dotés d'une formation supérieure pluridisciplinaires, en conseillant ses clients institutionnels, administrations, assureurs et banquiers, sur les domaines stratégiques et techniques nécessitant une expertise actuarielle pointue.

Le cabinet accompagne également les professionnels, Sociétés d'assurance, Réassurance, Mutuelles, Caisse de retraite, Organisme de Prévoyance, Administrations et Investisseurs, dans différentes tâches. En effet, il leur assure des services pour tout ce qui relève de :

- **La création de Produits** : Conception de produits, Etude de marché, Refonte technique et juridique de produits, Tarification (vie et non vie), Profit Testing, AMOA pour la mise en production.
- **Provisionnement** : Revues réglementaires et économiques des provisions techniques, anticipation d'impacts réglementaires.
- **Etudes actuarielles** : de tarification ou d'équilibre de régime.
- **Bilan actuariel** : Elaboration et mise à jour du bilan actuariel.
- **Missions de pilotage stratégique** : Fusions & Acquisitions, Embedded Value, Appraisal value, Contrôle interne, Rapport de solvabilité, Business Plan, ALM.
- **Assistance actuarielle** : en cas de besoin d'actuaire.
- **Réassurance** : Audit et optimisation des programmes de réassurance.

- **Actifs & ALM** : Analyse de portefeuille, Modélisations financières, Allocations d'actifs.
- **AMOA et conduite de changement** : Cahier des spécifications techniques, PMO, AMOA, recettage.
- **Développement de progiciels** spécifiques aux activités Assurance.
- **Modélisation des risques de crédits.**
- **Cartographie des risques de crédits.**
- **Scoring, Tarification des risques**

– **SERVICES AUX ENTREPRISES :**

Au niveau du pôle Corporate, **ARM Consultants** accompagne ses clients entreprises privées et établissements publics, aussi bien dans leurs missions de valorisation et de préservation de leur capital humain et patrimoine, que dans la maîtrise de leurs risques. Les services offerts sont entre autres les conseils en matière de :

- **IAS 19** : Identification, évaluation et comptabilisation des engagements sociaux.
- **Avantages sociaux** : Audit de conformité des avantages sociaux, Optimisation des coûts et des couvertures, enquêtes et études de Benchmark.
- **Rémunération et Epargne salariale** : Etudes d'optimisation et conseil.
- **Couvertures et Régimes de prévoyance complémentaire** : Conception et assistance dans la mise en place de plans de retraite complémentaire et de couverture médicale, indemnité de fin de carrière.
- **Risk Management** : Cartographie des risques, Réduction des risques, transfert des risques.
- **Assurance** : Audit et optimisation des programmes d'assurance du Capital Humain, du Patrimoine, et des Responsabilités Civiles de l'Entreprise.

### **III. Présentation du projet de la réglementation prudentielle Solvabilité Basée Sur les Risques :**

#### **III.1. Contexte :**

Tenant compte de la complexité de l'activité d'assurance et de son rôle dans l'économie une première réglementation a été mise en œuvre ; solvabilité I. Cette réglementation vise à garantir la solvabilité de l'ensemble des acteurs de l'assurance, en fixant une règle de calcul des fonds propres réglementaires.

L'application de cette réglementation a révélé certaines limites :

- Elle est basée sur des éléments comptables
- Trop simpliste : pas de prise en compte de la diversité des risques et de leurs spécificités
- La marge de solvabilité ne reflète pas les risques supportés par l'assureur
- Risques associés aux placements (risque de marché) mal appréhendés
- Quasi-absence de normes en matière de gouvernance

Pour remédier à ces critiques, les autorités européennes développent un nouveau cadre réglementaire dans un dispositif plus complet en tenant compte des risques sous-jacents à l'activité de l'assureur : Solvabilité II.

Suite à cela l'ACAPS a élaboré le projet de circulaire « Solvabilité Basée sur les Risques » (SBR) qui décrit un nouveau référentiel réglementaire pour évaluer la solvabilité des compagnies d'assurances et de réassurance. Cette réglementation s'inspire de la réglementation européenne Solvabilité II, mais n'a pas été transposé en l'état.

#### **III.2. Aperçu sur la SBR :**

Le passage vers cette nouvelle réglementation permettra de :

- Renforcer la résilience du secteur des assurances face aux risques encourus
- Renforcer les systèmes de gouvernance et la culture de gestion des risques
- Se conformer aux normes internationales

Pour aboutir à ces fins La SBR couvre trois piliers qui se présentent comme suit :

- **Pilier 1** : Exigences quantitatives
- **Pilier 2** : Exigences de gouvernance
- **Pilier 3** : Exigences en matière de communication et d'information

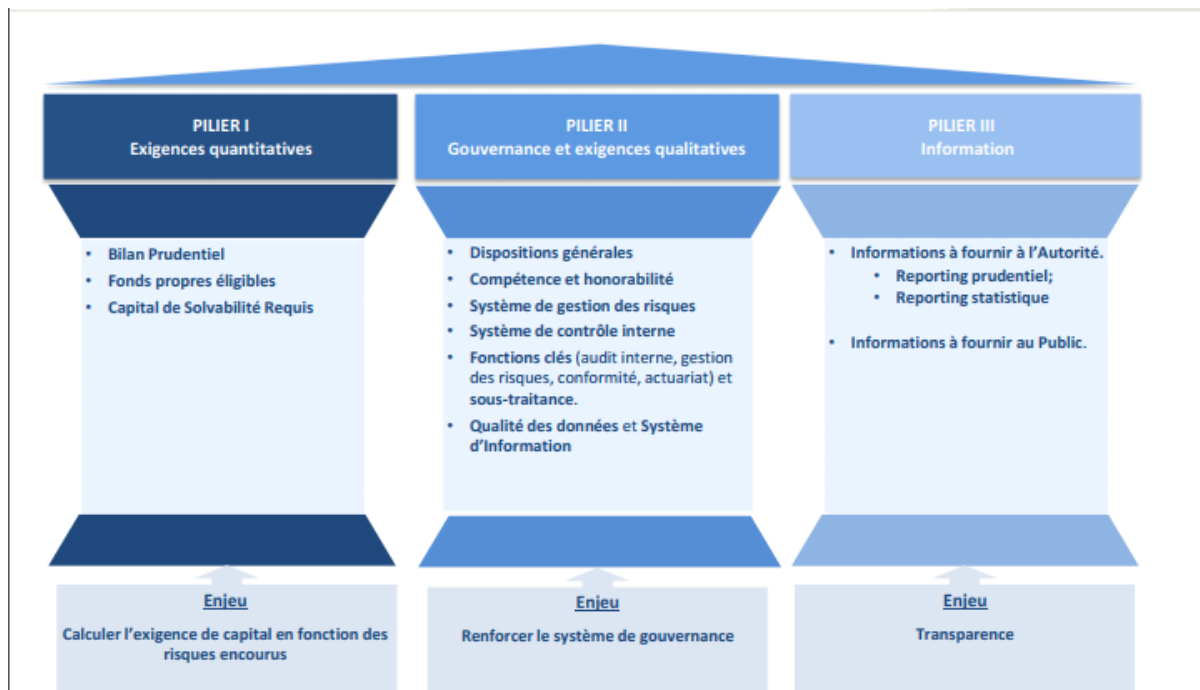


Figure 3: Les trois piliers de la SBR

### III.3. Fondements des piliers :

#### I.1.3. Pilier I : Exigences quantitatives :

##### I.1.3.1. Bilan Prudentiel :

La nouvelle réglementation SBR impose aux organismes soumis au contrôle de l'ACAPS d'établir le bilan en vision économique.

Le bilan en vision économique, appelé « Bilan Prudentiel » ne se substitue pas au bilan comptable, Les entreprises continueront de produire leur bilan comptable selon les normes du plan comptable des assurances.

Le bilan prudentiel comprend, outre les rubriques « impôt différé actif », « impôt différé passif » et « Réserve de réconciliation », les mêmes rubriques de l'actif et du passif constituant le bilan comptable. Toutefois, les rubriques « provisions techniques brutes » et « part des cessionnaires dans les provisions techniques » sont

substituées respectivement par « provisions techniques prudentielles » et « part des cessionnaires dans les provisions techniques prudentielles ».

Contrairement à la réglementation actuelle qui s'appuie sur la valorisation de l'actif et du passif en valeur historique, le projet SBR met en avant une vision économique du bilan des compagnies d'assurance et de réassurance. Ainsi la valorisation doit se faire selon la valeur de marché suivant les règles fixées par l'autorité.

❖ **Règles de valorisation de l'actif :**

<b>Type</b>	<b>Valorisation</b>
<b>Actions cotées</b>	Valeur de Marché au dernier cours avant la date d'inventaire
<b>OPCVM</b>	Valeur de Marché à la dernière VL avant la date d'inventaire
<b>Obligations et TCN</b>	Valeur de Marché : actualisation des flux futurs aux derniers taux actuariels constatés avant la date d'inventaire (Prix Plein Coupon)
<b>Actifs immobiliers</b>	Valeur de transaction évaluée par un expert au moins une fois tous les 5 ans
	Entre deux évaluations, mise à jour annuelle en fonction de l'évolution de l'indice des prix des actifs immobiliers (IPAI) publié par BAM.
	Si absence d'évaluation par un expert : Valeur Comptable
	Exigence de réévaluation si L'Autorité le juge nécessaire
<b>Prêts, Dépôts Créances financières</b>	Valeur Comptable
<b>Immobilisations en non valeurs et Incorporelles</b>	Valeur Nulle
<b>Ecarts de conversion – Actif</b>	Valeur Nulle
<b>Provisions Techniques cédées</b>	Meilleure estimation des engagements cédés ajustée du défaut des contreparties
<b>Charges d'acquisitions reportées</b>	Valeur Nulle
<b>Différence sur prix de remboursement à percevoir sur titres</b>	Valeur Nulle

<b>Autres Créances de l'actif circulant</b>	Valeur Comptable
<b>Trésorerie – Actif</b>	Valeur Comptable
<b>Autres actifs</b>	Valorisation à dire d'expert. A défaut Valeur Comptable
<b>Impôts différés actif</b>	Taux IS x (Différence de valorisation des actifs entre bilan prudentiel et bilan comptable + Report à nouveau des pertes cumulées sur 4 ans)

Tableau 1: Règles de valorisation de l'actif

❖ **Règles de valorisation du passif :**

<b>Type</b>	<b>Valorisation</b>
<b>Capitaux propres et assimilés</b>	Valeur Comptable
<b>Dettes de financement autres que les emprunts obligataires</b>	Valeur Comptable
<b>Emprunts obligataires</b>	Actualisation des flux futurs aux derniers taux actuariels constatés avant la date d'inventaire
<b>Provisions durables pour risques et charges</b>	Valeur Comptable
<b>Provisions Techniques prudentielles</b>	Evaluation par canton en additionnant : Meilleure estimation des engagements Meilleure estimation des frais de gestion Marge de risque
<b>Dettes pour espèces remises par les cessionnaires</b>	Valeur Comptable
<b>Dettes de passif circulant</b>	Valeur Comptable
<b>Autres passifs</b>	Valeur Comptable
<b>Impôts différés passif</b>	Taux 1S x (Différence de valorisation des passifs entre bilan prudentiel et bilan comptable)

Tableau 2: Règles de valorisation du passif

**1.1.3.2. Capital de Solvabilité Requis :**

Le Capital de solvabilité Requis (CSR) correspond au capital cible permettant à la compagnie d'assurance ou de réassurance de couvrir les pertes imprévues. Il peut être le résultat d'une formule standard ou d'un modèle interne (partiel ou complet).

Le calcul du CSR intègre les principaux risques auxquels l'entreprise d'assurance ou de réassurance est soumise, à savoir le risque de souscription, le risque de marché, le risque de contrepartie, le risque opérationnel et le risque de concentration.

- **Risque de souscription** : le risque de perte ou de changement défavorable de la situation financière, en raison d'hypothèses inadéquates en matière de sinistralité, de tarification et de provisionnement.
- **Risque de marché** : le risque de perte ou de changement défavorable de la situation financière résultant, directement ou indirectement, de fluctuations affectant le niveau de la valeur des actifs, des passifs et des instruments financiers.
- **Risque de contrepartie** : le risque de perte ou de changement défavorable de la situation financière résultant d'un défaut de paiement d'une contrepartie ou d'une dégradation de sa qualité de crédit.
- **Risque opérationnel** : le risque de perte ou de changement défavorable de la situation financière résultant de procédures internes, de membres du personnel, de systèmes inadéquats ou défaillants, ou d'événements extérieurs.
- **Risque de concentration** : le risque de perte ou de changement défavorable de la situation financière résultant d'un manque de diversité des émetteurs auxquels l'entreprise d'assurances et de réassurance est exposée.

#### 1.1.3.3. Exigences de Capital supplémentaire :

L'Autorité peut exiger un capital supplémentaire au capital de solvabilité lorsqu'elle constate que les hypothèses de détermination du capital de solvabilité s'écartent du profil de risque de l'entreprise d'assurances et de réassurance ou lorsque son système de gouvernance ne répond pas aux exigences.

L'Autorité peut demander une exigence de capital supplémentaire :

- Exigence de capital supplémentaire dite « de pilier 1 » : liée aux exigences quantitatives, pour corriger le montant de capital de solvabilité requis lorsque l'Autorité juge qu'il ne reflète pas la réalité des risques encourus.

- Exigence de capital supplémentaire dite « de pilier 2 » : pour ajuster le capital de solvabilité requis lorsque la qualité de la gouvernance s'écarte des standards requis.

#### I.1.3.4. Fonds propres :

Les Fonds Propres représentent l'équivalent des « éléments constitutifs de la Marge de solvabilité »

Ils se composent de Fonds Propres de Base (FPB) et de Fonds Propres Auxiliaires (FPA) qui vérifient :

$$FPB + FPA \geq SCR \text{ et } FPB \geq 70\% * SCR$$

Les Fonds Propres de Base englobent :

- Capital social appelé et versé
- Fonds d'établissement
- Emprunts pour augmentation des fonds d'établissement
- Primes d'émission, de fusion, d'apport
- Ecart de réévaluation
- Réserve légale
- Autres réserves non liées à des engagements
- Report à nouveau
- Fonds social complémentaire
- Résultats nets en instance d'affectation
- Résultat net de l'exercice
- Les dettes subordonnées lorsque celles-ci sont à durée indéterminée, ne sont pas financées directement ou indirectement par l'entreprise d'assurances et de réassurance ou rémunérées sur les bénéfices distribuables de ladite entreprise et ne font l'objet d'aucun dispositif de rehaussement du rang de subordination des créances.

Les Fonds Propres Auxiliaires sont constitués de :

- La réserve de réconciliation si positive

- Les capitaux appelés non versés
- Les dettes subordonnées lorsque celles-ci sont à durée déterminée supérieure ou égale à 5 ans, ne sont pas financés directement ou indirectement par l'entreprise d'assurances et de réassurance et ne font l'objet d'aucun rehaussement du rang de subordination des créances.

Les Fonds propres de Base définis précédemment sont diminués des éléments suivants :

- Le montant de la valeur de ses propres actions que détient l'entreprise d'assurances et de réassurance.
- Les dividendes, distributions et charges prévisibles
- Les engagements donnés hors bilan, au cas par cas
- La réserve de réconciliation lorsque celle-ci est négative
- Les participations de l'entreprise d'assurances et de réassurance

#### **I.1.4. Pilier 2 : Exigences de gouvernance :**

Le pilier I permet d'offrir une image fidèle de la situation de solvabilité de l'entreprise, tandis que le pilier II concerne les justifications et les analyses internes de cette solvabilité par l'entreprise en fixant les exigences qualitatives de contrôle interne, de gestion des risques et d'audit interne.

Les exigences du pilier II sont mis en place par l'entreprise d'assurances et de réassurance à travers l'instauration des systèmes d'audit, de contrôle interne et de gestion des risques performants ainsi que la mise en valeur de quatre fonctions clés, à savoir la fonction de gestion de risques, la fonction actuarielle, la fonction de vérification de la conformité et la fonction d'audit interne .

L'objectif de ces normes est de renforcer la gouvernance et la gestion des risques internes et aussi de renforcer le rôle du superviseur afin de garantir une gestion saine, prudente et efficace de l'organisme.

**I.1.5. Pilier 3 : Exigences en matière de communication et d'information :**

Le troisième pilier énonce l'ensemble des informations détaillées auquel le grand public aura accès et un reporting prudentiel et statistique auquel seule l'Autorité de contrôle aura accès. L'objectif est de permettre à l'autorité de contrôle de mener à bien sa mission à l'égard des assurés et assurer la discipline de marché par une exigence élevée en termes de transparence.

# *C*hapitre 2 : *L*a *C*onstruction de *l*a *C*ourbe de *t*aux *Z*éro-*C*oupon

Ce deuxième chapitre vise à construire une courbe des taux zéro-coupon en suivant minutieusement les étapes décrites dans le projet de circulaire SBR. À cet effet, il étudie la méthodologie de construction de la courbe des taux zéro-coupon basée sur l'interpolation linéaire et sur l'extrapolation de Smith et Wilson de données observées sur le marché.

## I. Collecte des données :

Les données utilisées dans ce tableau sont issues du site officiel de Bank Al Maghreb. Elles correspondent aux transactions sur les bons de trésor du marché secondaire observées le 26/03/2019. La base de données comporte quatre champs à savoir :

- Date d'échéance
- Transaction<sup>1</sup>
- Taux moyen pondéré<sup>2</sup>
- Date de valeur

Date d'échéance	Transaction	Taux moyen pondéré	Date de la valeur
14/04/2019	293,4	2,27%	20/03/2019
20/05/2019	25,7	2,33%	22/03/2019
16/09/2019	115,46	2,34%	22/03/2019
21/10/2019	49,29	2,34%	22/03/2019
07/11/2019	67,8	2,34%	22/03/2019
16/12/2019	304,34	2,34%	22/03/2019
03/03/2020	37,67	2,33%	22/03/2019
20/04/2020	175,62	2,39%	22/03/2019
19/04/2021	21,44	2,47%	22/03/2019
19/07/2021	20,72	2,49%	22/03/2019
16/10/2023	349,3	2,65%	22/03/2019
14/06/2027	65,56	2,98%	22/03/2019
16/04/2029	164,18	3,13%	22/03/2019
18/06/2029	115,73	3,14%	22/03/2019
18/07/2033	104,94	3,52%	21/03/2019
04/12/2036	26,17	3,71%	08/03/2019
19/02/2046	399,18	4,27%	13/02/2019

Tableau 3 : Les transactions sur les bons de trésor au 26/03/2019

## II. Méthodologie de construction :

Les calculs des taux zéro-coupon nécessite la transformation des taux monétaires en taux actuariels, l'interpolation linéaire pour des maturités<sup>3</sup> pleines, la transformation en taux zéro-coupon et finalement l'extrapolation au-delà du dernier

<sup>1</sup> La transaction correspond au prix du bon de trésor

<sup>2</sup> Les taux moyens pondérés sont exprimés par des taux monétaires pour les maturités inférieures à un an et par des taux actuariels pour les maturités supérieures à un an.

<sup>3</sup> La maturité est la durée qui sépare la date à laquelle une obligation est émise et la date à laquelle la valeur nominale de cette obligation est remboursée. Si cette durée est entière, la maturité est dite pleine.

point liquide<sup>4</sup> afin de fournir les taux zéro-coupon pour les maturités non observées. On explicitera les méthodes de calcul utilisées ci-dessous.

### II.1. Transformation des taux monétaires en taux actuariels :

Tous les points de la courbe des taux précédente doivent avoir la même base d'intérêt pour pouvoir interpoler entre eux, d'où la nécessité de convertir les taux monétaires en taux actuariels pour trouver les taux supérieurs à 1 an.

La conversion du taux monétaire en taux actuariel se fait selon la formule suivante :

$$t_a = \left(1 + \frac{n \times t_m}{360}\right)^{\frac{365}{n}} - 1$$

Où :  $t_a$  le taux actuariel.

$t_m$  le taux monétaire.

$n$  le nombre de jours de placement.

Maturité	Taux actuariel
0,068	2,326%
0,162	2,386%
0,487	2,387%
0,583	2,384%
0,630	2,383%
0,736	2,380%
0,950	2,364%
1,081	2,390%
2,078	2,470%
2,327	2,490%
4,569	2,650%
8,230	2,980%
10,070	3,130%
10,242	3,140%
14,327	3,520%
17,744	3,710%
27,017	4,270%

Tableau 4 : Taux actuariels

<sup>4</sup> Le dernier point liquide est la dernière maturité observée, il est fixé à 20

## II.2. Interpolation linéaire des taux actuariels :

Les taux actuariels pour les maturités pleines peuvent être obtenus à partir de la courbe des taux comme une fonction des taux actuariels des maturités non entières.

Soit  $t_k$  une maturité pleine, le taux  $R_k$  correspondant peut être défini moyennant la courbe des taux par une interpolation linéaire de deux valeurs de taux avoisinantes, par la formule suivante :

$$R_k = R(t_0, t_k) = R(t_0, t_i) + \frac{(R(t_0, t_{i+1}) - R(t_0, t_i))(t_k - t_i)}{(t_{i+1} - t_i)}$$

Où :  $R(t_0, t_j)$  est le taux sur la période de  $t_0$  à  $t_j$ .

Maturité	Taux actuariel
1	2,37%
2	2,46%
3	2,54%
4	2,60%
5	2,69%
6	2,78%
7	2,87%
8	2,96%
9	3,04%
10	3,12%
11	3,21%
12	3,30%
13	3,40%
14	3,49%
15	3,56%
16	3,61%
17	3,67%
18	3,73%
19	3,79%
20	3,85%

Tableau 5 : Taux actuariels interpolés

### II.3. Transformation des taux actuariels en taux zéro-coupon :

Les taux actuariels interpolés obtenus à l'étape précédente sont transformés en taux zéro-coupon en supposant que les prix des obligations des bons du trésor sont « au pair »<sup>5</sup> à travers la méthode de Bootstrap.

La méthode de Bootstrap est une procédure permettant de reconstituer une courbe zéro-coupon pas à pas, c'est-à-dire de proche en proche selon les maturités des obligations étant à disposition. Elle est basée sur l'hypothèse, que le prix théorique d'une obligation soit la somme de ses flux actualisés aux taux zéro-coupon de l'échéance de chaque flux.

Pour la maturité un an, le taux zéro coupon 1 an correspond au taux actuariel de rendement 1 an puisqu'aucun coupon n'est versé entre le moment de calcul du taux zéro coupon et l'échéance .

Pour les maturités supérieures à un an , le taux zéro-coupon est calculé avec la formule suivante :

$$ZC_j = \left( \frac{1+R_j}{1-R_j \sum_{i=1}^{j-1} \frac{1}{(1+ZC(i))^i}} \right)^{\frac{1}{j}} - 1 \quad \text{pour } 1 < j \leq n$$

Où -  $ZC_j$  : le taux zéro-coupon de maturité j.

-  $R_j$  : le taux actuariel de maturité j.

---

<sup>5</sup> La valeur nominale est égale à 100% de la valeur d'émission

Le graphique suivant présente la courbe des taux zéro-coupon obtenue par la méthode Bootstrap.

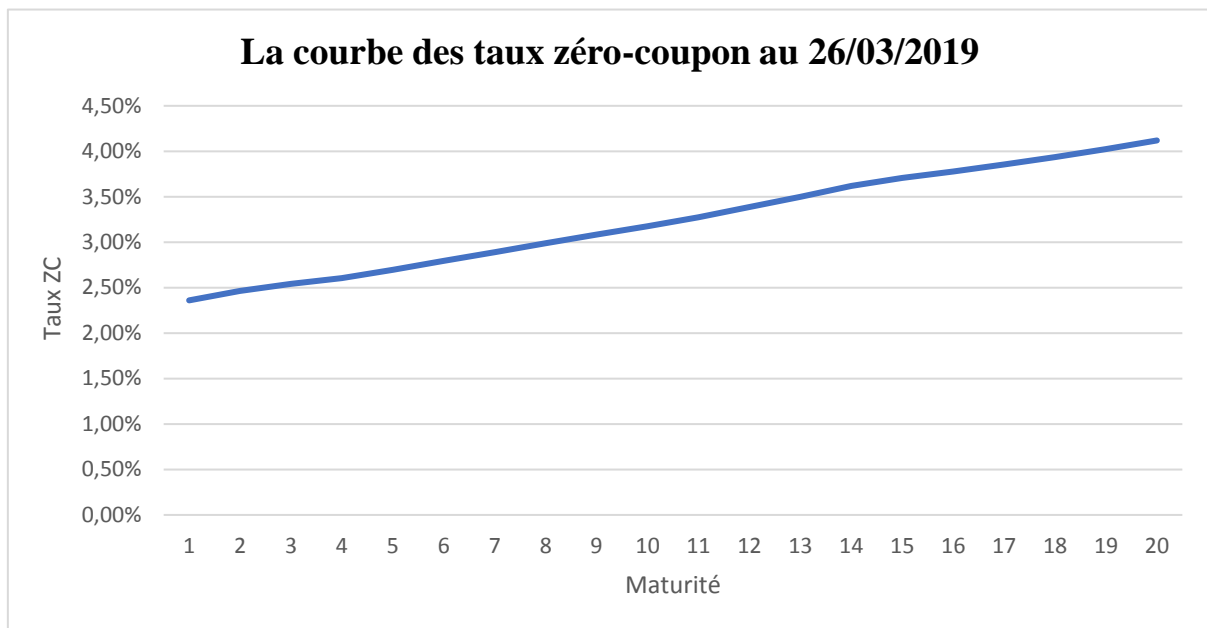


Figure 4: La courbe des taux zéro-coupon au 26/03/2019

#### II.4. Extrapolation de la courbe des taux zéro-coupon par la méthode de Smith-Wilson :

La méthode de Smith-Wilson permet d'estimer la fonction de prix ( $t$ ) des zéro-coupon pour toutes les maturités  $t > 0$ . Cette fonction est supposée satisfaire les caractéristiques suivantes :

- P est une fonction positive.
- P est une fonction strictement décroissante de la maturité.
- $P(t = 0) = 1$
- $\lim_{t \rightarrow \infty} P(t) = 0$

La fonction des prix proposée est définie pour tout  $t > 0$ . Elle est déterminée de la façon suivante :

$$P(t) = e^{-TFU \times t} + \sum_{j=1}^N \zeta_j \times K_j(t)$$

Où  $t$  représente la variable maturité et  $(\zeta_j)_{j=1, \dots, N}$  sont les inconnues à ajuster par rapport à la courbe des taux zéro-coupon disponible avant extrapolation.

- D'un terme  $e^{-TFU \times t}$  pour le comportement asymptotique à long terme du facteur d'actualisation. Le terme TFU correspond au « Taux Forward Ultime », il correspond à une estimation du taux zéro-coupon des obligations à long terme dans 20 ans.

- D'une combinaison linéaire  $\sum_{j=1}^N \zeta_j \times K_j(t)$  de  $N$  fonctions noyau (le nombre  $N$  correspondant au nombre de maturités de zéro-coupon disponibles avant extrapolation, ici 20). Chacune des fonctions noyau prend en compte des données de marché ainsi que deux autres arguments :

o Le TFU : Taux Forward Ultime.

o La vitesse de convergence vers le TFU :  $\alpha$

Les fonctions noyau ( $t$ ) sont définies de la manière suivante :  $\forall j \in 1, N$

$$K_j(t) = e^{-TFU \times (t+u_j)} \{ \alpha \cdot \min(t, u_j) - 0,5 \cdot e^{-\alpha \cdot \max(t, u_j)} (e^{\alpha \cdot \min(t, u_j)} - e^{-\alpha \cdot \max(t, u_j)}) \}$$

Les inconnues ( $\zeta_j$ ) ( $j = 1, \dots, N$ ) sont ajustées de la façon suivante :

- Si on note ( $m_i$ ) ( $i = 1, \dots, N$ ) les prix de marché respectifs des zéro-coupon disponibles, alors, les paramètres ( $\zeta_j$ ) ( $j = 1, \dots, N$ ) à ajuster sont les solutions du système d'équations linéaires suivant :

$$\begin{aligned} m_1 = P(u_1) &= e^{-TFU \times u_1} + \sum_{j=1}^N \zeta_j \times K_j(u_1) \\ m_2 = P(u_2) &= e^{-TFU \times u_2} + \sum_{j=1}^N \zeta_j \times K_j(u_2) \\ &: \\ &: \\ &: \\ m_N = P(u_N) &= e^{-TFU \times u_N} + \sum_{j=1}^N \zeta_j \times K_j(u_N) \end{aligned}$$

- Le système ci-dessous peut être retranscrit sous forme matricielle. Les paramètres  $(\zeta_j)$  ( $j = 1, \dots, N$ ) sont alors déduits par inversion matricielle. Il ne reste plus qu'à les injecter dans la fonction de prix de Smith Wilson pour obtenir la valeur du prix d'un zéro-coupon pour les maturités au-delà de la dernière maturité disponible. Les taux zéro-coupon  $(R_t)$   $t > N$  sont ensuite déduits en utilisant la relation suivante :

$$R_t = \frac{1}{P(t)^{\frac{1}{t}}} - 1$$

Les paramètres **TFU** et  $\alpha$  sont calibrés de la façon suivante :

- Le Taux Forward Ultime (TFU) correspond à la somme des éléments suivants :
  - La moyenne des taux réels 1 an (correspondant aux taux zéro coupon 1 an au 31/12 ajustés de l'inflation annuelle) sur l'historique disponible.
  - Le taux d'inflation cible fixé calibré sur l'historique d'inflation disponible et selon une moyenne géométrique pondérée de la façon suivante :

$$\text{Taux d'inflation cible} = \exp\left(\frac{\sum_{i=0}^n w_i \times \ln(1 + \text{Taux}_{inflation_i})}{\sum_{i=0}^n w_i}\right) - 1$$

Où :

- $n$  est le nombre d'années d'historique d'inflation disponible.
  - $w_i$  est le poids associé à l' $i^{\text{ème}}$  taux d'inflation avec  $w_i = \beta^{n-i}$  et  $\beta = 0.99$
- La vitesse de convergence  $\alpha$  est calibrée de façon à ce que la différence entre les taux forward 1an projetés et le TFU converge vers zéro à horizon 60 ans à un seuil de 0.00001. On obtient ainsi une vitesse de convergence  $\alpha_{optimale} = 0,11128$ .

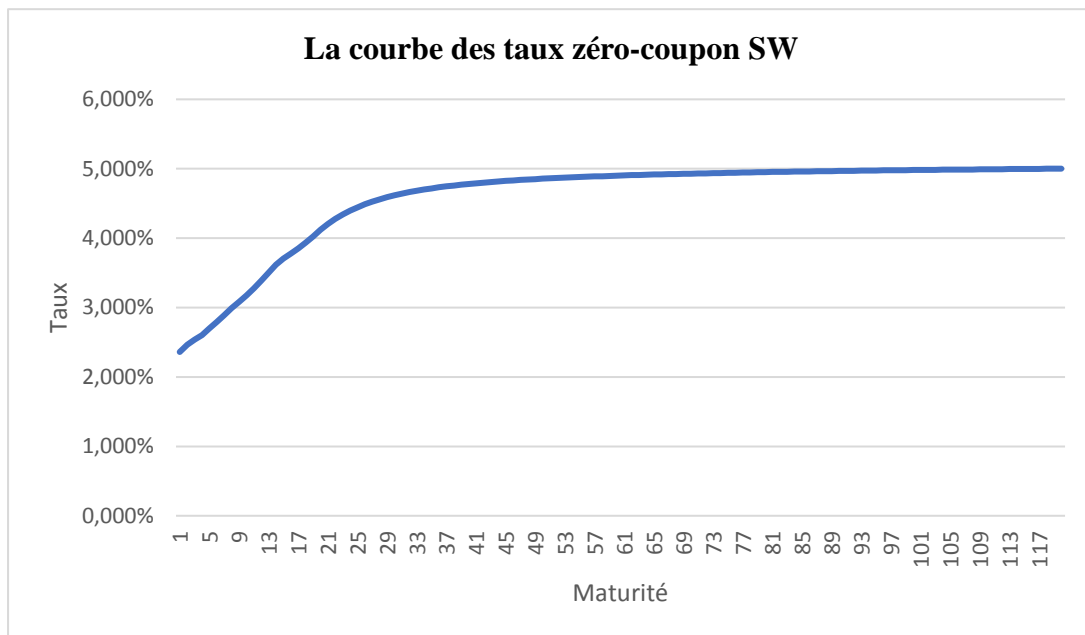


Figure 5 : La courbe des taux zéro-coupon après l'extrapolation de SW

# *C*hapitre 3 : *L*es *p*rovisions *t*echniques

## *p*rudentielles *e*n *a*ssurance *v*ie

Dans cette partie, nous procédons à la valorisation des provisions techniques prudentielles sous la SBR pour un produit d'assurance décès emprunteur, précisément pour les crédits immobiliers.

Nous allons présenter les bases de données utilisées dans cette étude. Ensuite, nous présenterons la procédure de construction de la loi des remboursements anticipés. Nous exposerons également la démarche de tarification. En définitive, nous calculerons la meilleure estimation des garanties probabilisées et la marge de risque.

## I. Présentation de bases de données utilisées lors de l'étude:

L'assurance emprunteur est une assurance de personnes temporaire, limitée à la durée du crédit, qui garantit le remboursement du capital restant dû en cas de décès. Elle est le plus souvent complétée par des garanties couvrant le risque d'incapacité, d'invalidité et éventuellement de perte d'emploi. Bien que l'adhésion soit le plus souvent présentée de façon obligatoire à l'emprunteur et au co-emprunteur, l'assurance emprunteur ne revêt pas d'un caractère obligatoire au sens du Code des Assurances.

L'objectif de cette assurance est double :

- Elle garantit à l'établissement de crédit le paiement (en totalité ou en partie) des remboursements du prêt en cas de sinistre.
- Elle assure l'emprunteur contre les aléas de la vie et lui garantit la conservation de son bien. En cas de mise en jeu de la garantie, le bénéficiaire des prestations versées n'est autre que l'établissement de crédit.

Rappelons qu'un prêt se caractérise par un montant de capital emprunté qui doit être remboursé selon un échéancier, le tableau d'amortissement, défini lors de la mise en place du prêt. Celui-ci est déterminé en fonction du taux d'intérêt et de la durée de l'emprunt. Le prêt étant sous-jacent au contrat d'assurance, les caractéristiques du prêt souscrit déterminent les primes payées et les éventuelles prestations versées.

Différents types d'emprunts existent selon le projet que l'emprunteur cherche à financer :

- **les prêts à la consommation:** ils permettent de financer de petits projets en général comme l'achat d'un bien (une voiture, un voyage, de l'électroménager, etc.), etc.
- **les prêts immobiliers :** ils ont pour objectif de financer l'acquisition d'un bien immobilier, et des travaux de rénovation de bâtiment

- **les prêts professionnels**, destinés à financer les divers investissements que les entreprises qui se développent sont amenées à réaliser (achat de matériel, campagne publicitaire, etc.).

Dans notre étude nous allons nous limiter aux deux premiers types de crédit tout en ajoutant un autre type dit crédit d'Aménagement que nous assimileront à un crédit immobilier.

### **I.1. Description des bases de données utilisées dans l'étude :**

Nous avons à notre disposition trois bases de données qui se présentent comme suit :

- **La base des contrats de crédits souscrits entre 2010 et 2017:** donne par contrat, identifié par son numéro de dossier, la date de naissance de l'assuré et les informations relatives au prêt ; le montant, la date de déblocage du crédit, la date de la première échéance du crédit, celle la dernière échéance, le taux de prêt ainsi que sa nature.
- **L'historique des remboursements anticipés enregistrés entre 2008 et 2017 :** qui comporte la date de remboursement anticipé, son montant, l'identifiant du contrat remboursé à cette date, la date de naissance de l'assuré et les informations relatives au contrat. A citer ; la date de la première échéance de crédit et celle de la dernière échéance, le montant emprunté, taux de prêt et sa nature.
- **La base de données des autres sinistres enregistrés entre 2011 et 2017 :** comporte la date du sinistre, la date de déclaration du sinistre, le capital restant dû à la survenance du sinistre ainsi que l'état du dossier. A ces variables s'ajoute d'autres relative à l'assuré, tel que la date de naissance, et celles relatives au prêt citées précédemment.

### **I.2. Traitements et contrôles effectués sur les données :**

A partir des bases de données décrites ci-dessus nous avons effectué certains calculs pour les rendre exploitables pour l'étude. Les traitements et les contrôles sont communs aux trois bases de données, sauf mention contraire.

### I.2.1. Traitements effectués sur la base de données :

#### I.2.1.1. Calcul de l'âge de l'assuré à la souscription du contrat :

Nous avons supposé que la date de souscription coïncide avec la date de déblocage du crédit pour pouvoir calculer l'âge de l'assuré.

$$\text{âge assuré} = \text{Date de déblocage du crédit} - \text{date de naissance}$$

#### I.2.1.2. Calcul de la durée du prêt :

La durée du prêt est calculée en années, en supposant qu'il n'y a pas de restructuration de la durée du prêt, ni de délais de paiement des mensualités

$$\text{durée prêt} = DDEC - DPEC$$

Avec :

- **DDEC** : date de la dernière échéance du crédit
- **DPEC** : date de déblocage du crédit

#### I.2.1.3. Calcul de l'ancienneté au remboursement anticipé :

Le calcul de l'ancienneté est propre à la base des remboursements anticipés. Elle est calculée à la date de remboursement anticipé, comme suit :

$$\text{ancienneté} = \text{date de remboursement} - \text{date début du prêt}$$

### I.2.2. Contrôles effectués sur les bases de données :

Après avoir adapté les variables initiales des bases de données aux variables de l'étude, nous nous sommes assurés de la qualité et de la cohérence des données. Nous avons éliminé les doublons et les observations où l'identifiant n'est pas renseigné. Nous avons procédé également à des contrôles sur quelques variables, en particulier le taux de prêt, l'âge de l'assuré et l'ancienneté au remboursement anticipé.

#### I.2.2.1. Contrôle de l'identifiant du client :

Parmi les contrôles intuitifs appliqués à toute base de données est de vérifier si elle ne comporte pas de doublons ou si l'identifiant n'est renseigné. C'est ce qui a été effectué lors de cette étape.

### I.2.2.2. Contrôle du taux d'intérêt :

Nous avons identifié de nombreux taux renseignés à 0%, non cohérents avec le fait que les prêts sont accordés à des particuliers. Nous avons remplacé ces taux par le taux de prêt moyen, par catégorie de crédit, calculé abstraction faite des taux nuls.

### I.2.2.3. Contrôle de l'âge de l'assuré :

En calculant l'âge de l'assuré à partir de sa date de naissance, nous avons identifié des âges inférieurs à 18 ans et d'autres supérieurs à 70 ans. Ces âges ont été remplacés par l'âge moyen des assurés, pour pouvoir ainsi garder ces données dans notre base d'étude.

### I.2.2.4. Contrôle de l'ancienneté à la date du remboursement anticipé:

En calculant l'ancienneté à la date de remboursement anticipé nous avons observé des anciennetés négatives. Vu que ces données seront utilisées pour construire la loi de remboursement anticipé le seul traitement possible était de supprimer ces observations de la base de données.

### I.2.3. Récapitulatif des traitements effectués :

	Doublons	Identifiant manquants	âge (<18;>70)	ancienneté	Total des observations
Contrats Souscrits	26	0	242	8	465 031
Remboursements anticipés	0	0	107	-	280 985
Autres sinistres	0	18	9	-	1 860
<b>Total anomalies</b>	<b>26</b>	<b>18</b>	<b>358</b>	<b>8</b>	<b>747876</b>

Tableau 6: Récapitulatif des traitements effectués sur les bases de données

### I.3. Statistiques descriptives :

- Evolution de l'âge moyen à la souscription :

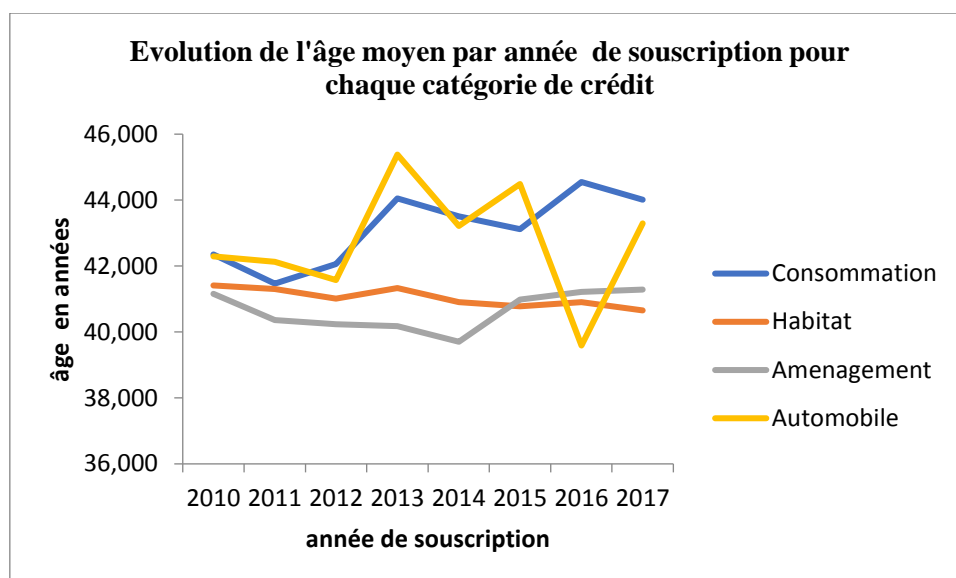


Figure 6: Evolution de l'âge moyen par années de souscription pour chaque catégorie de crédit

Les contrats de crédit habitat et aménagement sont inclus dans la catégorie des crédits Immobiliers.

Pour les crédits habitat et aménagement l'âge moyen des assurés qui souscrivent ce type de contrats fluctue autour de 41 ans. Ceci s'explique par le fait que le montant sur lequel porte le prêt est élevé ce qui nécessite une certaine stabilité financière pour pouvoir supporter un tel engagement.

L'âge moyen des assurés qui souscrivent des contrats de crédits consommation et automobile varie significativement entre 39 ans et 45 ans

- **Evolution du capital initial moyen**

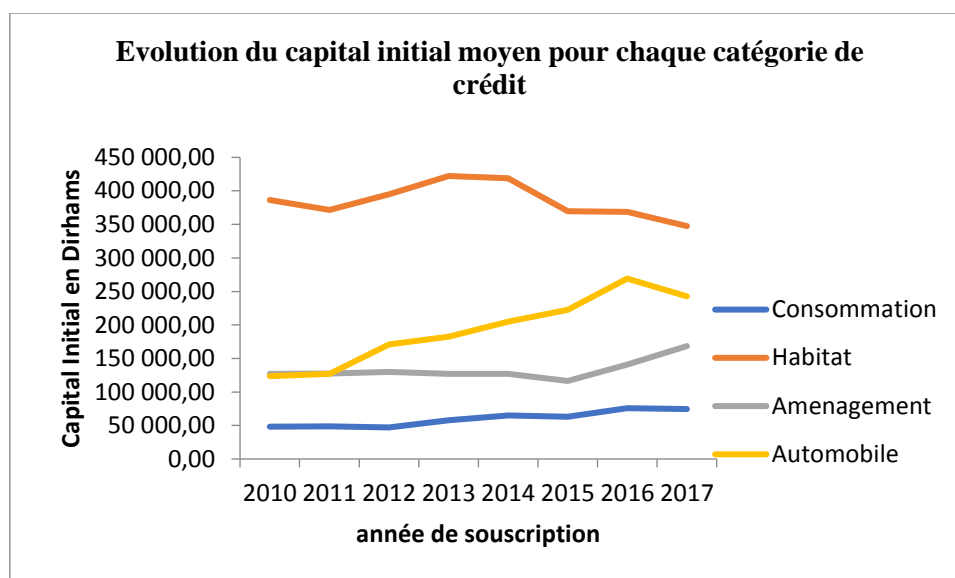


Figure 7: Evolution du capital initial moyen pour chaque catégorie de crédit

On remarque que le niveau du capital initial moyen de chaque catégorie de crédit dépend du bien à acquérir grâce à ce montant. En effet le niveau du capital initial pour les crédits d’habitat est le plus élevé, alors que celui des crédits à la consommation est le plus faible

On remarque que le capital initial moyen des contrats d’habitat est bien plus élevé par rapport aux autres types de crédits, ce montant fluctue entre 35 0000 et 45 0000 Dirhams. Ceci se justifie par la nature du bien à acquérir grâce à ce prêt.

- **Evolution du nombre de contrats souscrits pour toutes les catégories de crédit**

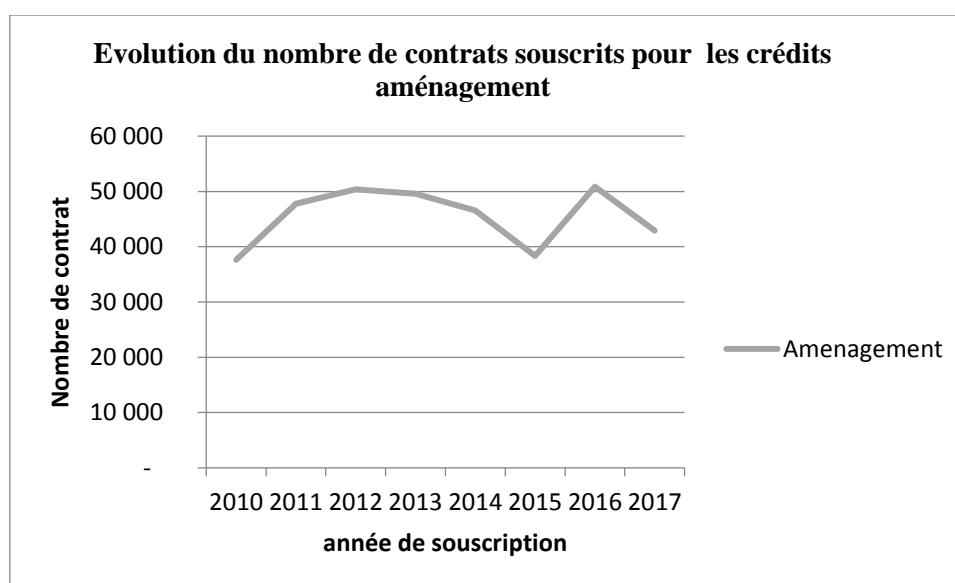


Figure 8: Evolution du nombre de contrats souscrits pour les crédits aménagement

Le nombre de crédits d'aménagement souscrits est très élevé par rapport aux autres catégories de crédit. En fait, la décision d'aménager un logement est assez fréquente comparé à la décision d'en acquérir.

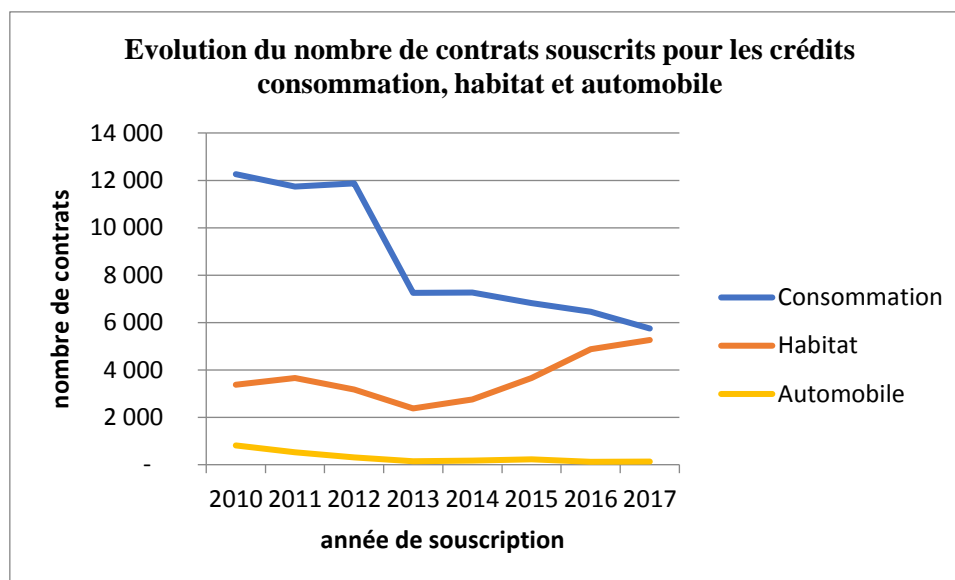


Figure 9: Evolution du nombre de contrats souscrits pour les crédits consommation, habitat et automobile

On remarque que le nombre de contrats des crédits habitat, consommation et automobile subissent une chute en 2013 qui est pertinente pour les crédits à la consommation qui n'a repris son cours normal après cette date. Cependant, les crédits habitat ont augmenté après cette date.

- Evolution de la durée de prêt moyenne pour les catégories de prêt

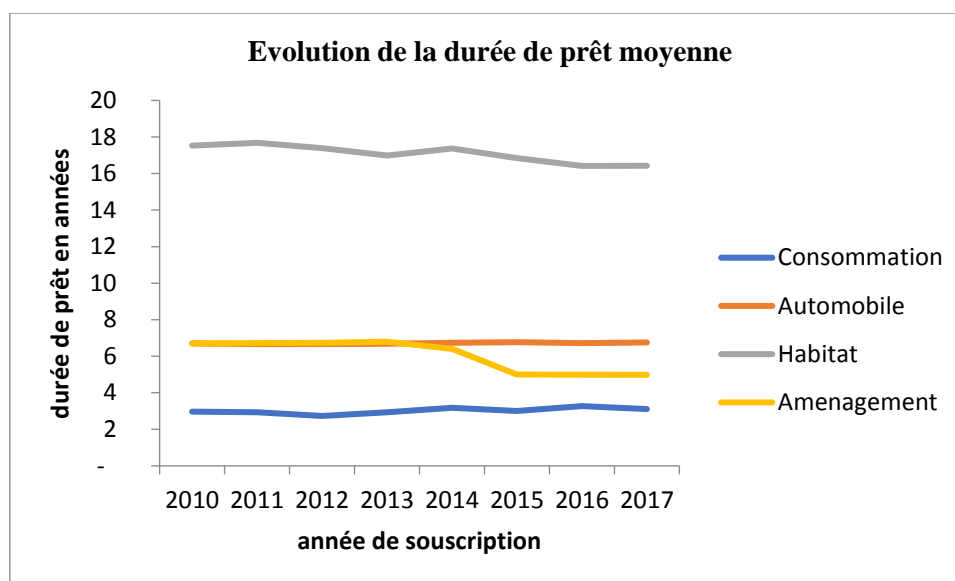


Figure 10: Evolution de la durée de prêt moyenne

L'évolution de la durée de prêt moyenne pour les catégories de crédit figurant dans la base de données est cohérente avec le niveau capital initial moyen de chaque catégorie. En d'autres termes, plus le capital initial moyen est élevé plus la durée de prêt moyenne est élevée et inversement.

- **Evolution du Taux de prêt moyen :**

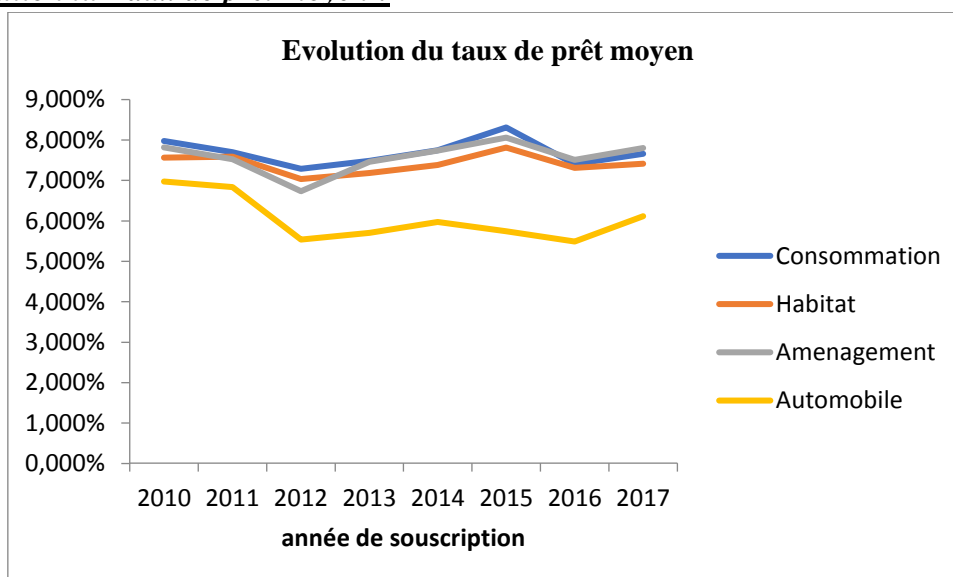


Figure 11: Evolution du taux de prêt moyen

L'évolution du taux de prêt moyen observée pour les catégories de crédits figurant dans la base de données des contrats souscrits est cohérente avec des prêts octroyés aux particuliers.

- Evolution nombre de sinistres

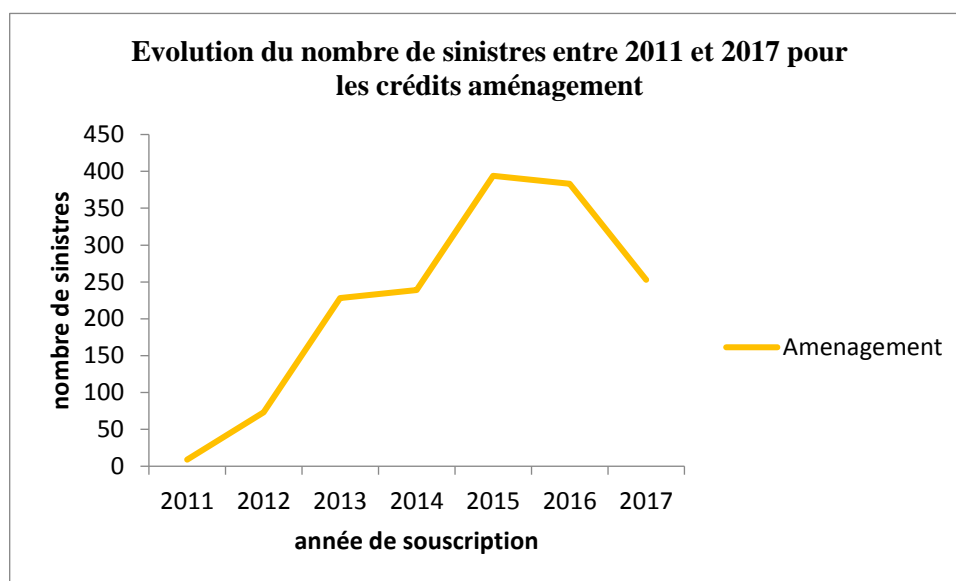


Figure 12: Evolution du nombre de sinistres entre 2011 et 2017 pour les crédits aménagement

La sous-catégorie des crédits d’aménagement attire le plus grand nombre de souscripteurs d’où la sinistralité élevée qu’elle enregistre

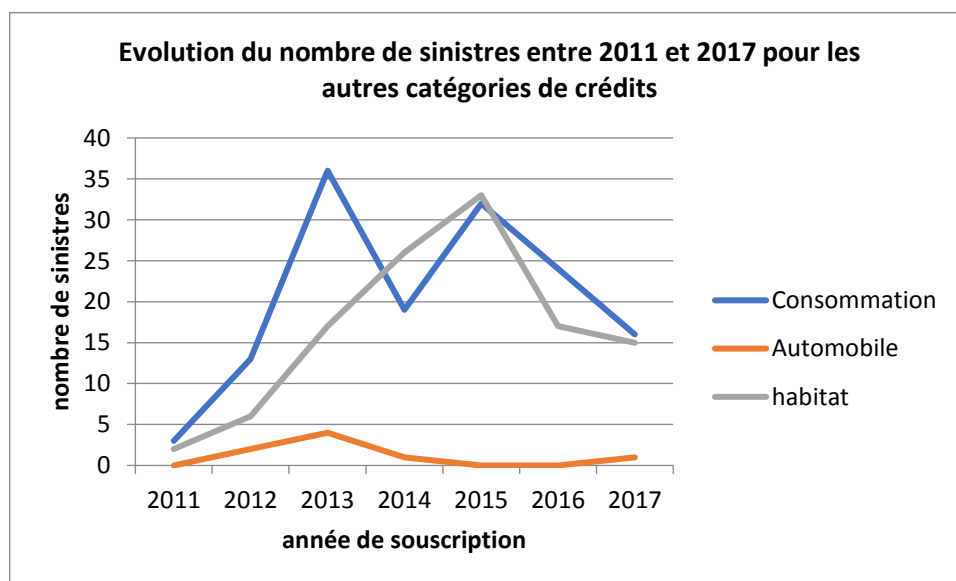


Figure 13: Evolution du nombre de sinistres entre 2011 et 2017 pour les autres catégories de crédits

Le nombre de sinistres enregistrés pour les crédits d’habitat et consommation est très élevé par rapport au crédit automobile qui enregistrent peu ou pas de sinistres.

## II. Construction de la loi de remboursement anticipé :

Les remboursements anticipés des contrats d'assurance emprunteur doivent faire l'objet d'une étude afin d'évaluer leur impact sur les résultats de la compagnie et les risques encourus. Cela est d'autant plus vrai avec la réforme de Solvabilité Basée sur les Risques.

De nombreux facteurs peuvent inciter les emprunteurs à rembourser leur prêt de manière anticipée. Selon la littérature, on distingue en général deux types de remboursements anticipés :

- Les remboursements anticipés **structurels** : désignent les remboursements anticipés qui ont lieu pour un motif propre, personnel à l'emprunteur. Cela peut être dû par exemple à une amélioration de la situation financière de l'emprunteur ;
- Les remboursements anticipés **conjoncturels** : il s'agit des remboursements anticipés qui sont réalisés à la suite d'une baisse des taux d'intérêt proposés sur le marché. Ceux-ci sont effectués dans le cadre d'une renégociation du crédit. En effet, lorsque l'emprunteur constate une baisse significative du taux d'intérêt, il devient alors intéressant pour lui de rembourser son prêt par anticipation et de souscrire un nouveau prêt à des conditions plus avantageuses ;

Dans cette partie, nous allons construire une loi de remboursement anticipé déterministe : celle-ci constituera une base incontournable à la construction d'une loi dynamique. Nous présenterons en premier lieu les méthodes non paramétriques pour calculer les taux bruts des remboursements anticipés. Nous allons procéder par la suite au lissage de ces taux.

### II.1. Calcul des taux bruts :

#### II.1.1. L'estimateur actuariel :

#### Notations :

Nous considérons les notations suivantes :

- $n_a$ : nombre de contrats d'ancienneté  $a$  présents dans le portefeuille

- $D_a$  : variable aléatoire représentant le nombre de remboursements anticipés observés sur  $]a, a + 1]$
- $ra_a$  : probabilité de remboursement anticipé de prêts d'ancienneté  $]a, a + 1]$
- $d_a$  : réalisation de  $D_a$

### Hypothèse :

Le nombre de remboursements à l'ancienneté  $a$  suit une loi binomiale de paramètres  $(n_a, ra_a)$

### Calculs :

Avant de présenter l'estimateur actuariel proprement dit, nous cherchons à montrer que  $D_x$  suit une loi binomiale, en définissant au préalable une variable aléatoire  $Y_j$  telle que :

$$P(Y_i = 1) = ra_a$$

$$P(Y_i = 0) = 1 - ra_a$$

La variable aléatoire  $Y_i$  vaut 1 lorsque le contrat de prêt  $i$  d'ancienneté comprise entre  $a$  et  $a + 1$  est remboursé avant l'échéance du contrat, et 0 sinon. Cette variable suit par définition une loi de Bernoulli de paramètre  $ra_a$

La variable aléatoire  $D_a$  désignant le nombre de remboursements anticipés, est alors définie par :

$$D_a = \sum_{i=0}^{n_a} Y_i$$

Les variables aléatoires  $Y_i$  étant supposées indépendantes, la variable aléatoire  $D_i$  suit une loi binomiale de paramètres  $(n_a, ra_a)$ . La probabilité d'obtenir une réalisation telle que  $(D_a = d_a)$  est donnée par :

$$P(D_a = d_a) = C_{n_a}^{d_a} ra_a^{d_a} (1 - ra_a)^{n_a - d_a}$$

La fonction de vraisemblance s'exprime alors ainsi :

$$L(ra_a) = K ra_a^{d_a} (1 - ra_a)^{n_a - d_a}$$

Où :

- $k$  désigne une constante qui ne dépend pas de  $ra_a$

La log-vraisemblance s'écrit donc :

$$\ln[L(ra_a)] = \ln[K] + d_a \ln(ra_a) + (n_a - d_a) \ln(1 - ra_a)$$

Il s'agit de résoudre la condition du premier ordre telle que :

$$\frac{\partial \ln[L(ra_a)]}{\partial ra_a} = 0$$

Cela conduit à l'estimateur suivant :

$$\widehat{ra}_a = \frac{d_a}{n_a}$$

### II.1.2. L'estimateur de Kaplan-Meier :

#### Notations :

- $n$  : Population initiale observée
- $t_i$  : date de sortie pour un contrat donné, avec  $i \leq n$
- $S(t)$  : probabilité pour un individu de maintenir son contrat d'assurance décès emprunteur jusqu'à une date  $t$
- $T$  : variable aléatoire qui désigne la durée de vie d'un contrat dans le portefeuille
- $nra_a$  : probabilité qu'un contrat est maintenu dans le portefeuille sur l'intervalle  $]t_{i-1}; t_i]$ , sachant qu'il existait dans le portefeuille à  $t_{i-1}$
- $ra_a$  : probabilité de remboursement anticipé sur l'intervalle  $]t_{i-1}; t_i]$
- $r_i$  : nombre de contrat existant dans le portefeuille à la date  $t_i$
- $d_i$  : réalisation de la variable aléatoire  $D_i$ , indiquant s'il y a remboursement anticipé à la date  $t_i$ . Dans le cas d'un remboursement anticipé, nous avons  $d_i = 1$ , et  $d_i = 0$  sinon

#### Calculs :

D'un point de vue mathématique, la probabilité de rester dans le portefeuille au-delà d'une date  $t > s$  peut être exprimée de la manière qui suit :

$$S(t) = P(T > t | T > s)P(T > s) = P(T > t | T > s)S(s)$$

En renouvelant l'opération pour différentes dates, nous obtenons des produits de termes en  $P(T > t | T > s)$ . Si nous prenons comme instants de conditionnement les

dates  $t_i$  auxquelles se produit le remboursement anticipé, nous sommes alors conduits à estimer des probabilités qui s'écrivent de la manière suivante :

$$nra_i = P(T > t_i | T > t_{i-1})$$

Un estimateur naturel de  $ra_i = 1 - nra_i$

$$\hat{ra}_i = \frac{d_i}{r_i} = \frac{d_i}{n-i+1}$$

L'estimateur de Kaplan-Meier de la fonction de survie est donc donné par l'expression :

$$\hat{S}(t) = \prod_{t_i \leq t} \left(1 - \frac{d_i}{r_i}\right)$$

### Version discrétisée :

Dans la pratique, nous pouvons être amenés à calculer des taux de sortie sur des intervalles de temps comme le mois ou l'année. Cette démarche peut être justifiée par le fait que, dans les études liées aux durées de survie, toutes les données requises pour appliquer correctement la méthode de Kaplan-Meier ne sont pas forcément disponibles. Il convient notamment de disposer des dates précises de survenance des événements. De plus, le calcul peut être lourd à mettre en place lorsque la population est importante. Dans le cas qui nous intéresse, nous calculerons les taux de remboursements anticipés pour chaque année.

Nous supposons donc que nous disposons d'un échantillon de taille  $n$  constitué, non plus d'individus ou contrats, mais de périodes d'observation. À chacune d'elles correspond une séquence  $(r_i, d_i)$ , où  $r_i$  désigne le nombre d'individus soumis au risque de remboursement anticipé, et  $d_i$  le nombre de remboursements anticipés pour des dates  $d_i$  telles que  $t_1 < t_2 < \dots < t_n$ . Les instants  $t_i$  représentent les anciennetés entières auxquelles le remboursement anticipé a eu lieu.

Si  $D_i$  désigne la variable aléatoire du nombre de remboursements anticipés sur l'intervalle  $[t_i, t_{i+1}[$ , elle suit donc, comme nous l'avons montré dans le cas de l'estimateur actuariel, une loi binomiale de paramètres  $(r_i, ra_i)$  où  $ra_i$  est le taux de remboursement anticipé à la date  $t_i$ .

Les sorties ayant lieu dans les intervalles  $[t_i, t_{i+1}]$  [étant indépendantes entre elles, la vraisemblance du modèle peut s'écrire :

$$L(ra_1, \dots, ra_n) = \prod_{i=1}^n C_{r_i}^{d_i} ra_i^{d_i} (1 - ra_i)^{r_i - d_i}$$

De façon analogue à l'estimateur actuariel, nous pouvons écrire la log-vraisemblance ainsi :

$$\ln[L(ra_1, \dots, ra_n)] = \sum_{i=1}^n [\ln(C_{r_i}^{d_i}) + d_i \ln(ra_i) + (r_i - d_i) \ln(1 - ra_i)]$$

La résolution des conditions du premier ordre  $\frac{\partial \ln[L(ra_a)]}{\partial ra_a} = 0$  conduit à l'estimation suivante :

$$\hat{ra}_i = \frac{d_i}{r_i}$$

## II.2. Résultats et comparaison des méthodes :

Une étape préalable au calcul des taux bruts et la construction des triangles de remboursements anticipés par ancienneté, et le stock de contrats par ancienneté à partir des bases de données présentées au début du chapitre. Nous présenterons ci-après les triangles pour chacune des sous-catégories du prêt immobilier étudiées.

- **Crédit d'aménagement :**

Remboursements anticipés						
	1	2	3	4	5	6
<b>2012</b>	1 189	6 670	7 760	6 075	7 674	1 774
<b>2013</b>	1 491	7 877	8 019	19 303	11 391	
<b>2014</b>	570	4 590	15 257	12 592		
<b>2015</b>	924	12 866	11 492			
<b>2016</b>	2 106	11 130				
<b>2017</b>	625					
<b>Totaux</b>	<b>6 905</b>	<b>43 133</b>	<b>42 528</b>	<b>37 970</b>	<b>19 065</b>	<b>1 774</b>

Tableau 7: Les remboursements anticipés pour les crédits d'aménagement

En observant les totaux des remboursements anticipés par ancienneté du contrat, on remarque que ce nombre est faible à la souscription puis il augmente à

l'évolution de l'ancienneté pour décroître rapidement à la sixième année d'ancienneté. La valeur du nombre des remboursements anticipés au sixième anniversaire du contrat d'assurance s'explique par l'approche de l'échéance du contrat d'assurance. En fait, la durée de prêt moyenne pour ce type de crédit est de 7 ans

Stock contrats						
	1	2	3	4	5	6
2012	50 391	49 202	42 532	34 772	28 697	21 023
2013	49 545	48 054	40 177	32 158	12 855	
2014	46 554	45 984	41 394	26 137		
2015	38 327	37 403	24 537			
2016	50 828	48 722				
2017	42 877					
<b>Totaux</b>	<b>278 522</b>	<b>229 365</b>	<b>148 640</b>	<b>93 067</b>	<b>41 552</b>	<b>21 023</b>

Tableau 8: Evolution du nombre de contrats de crédits d'aménagement

Le stock de contrats ainsi calculé tient compte des différents types de sorties, à citer, le décès de l'assuré, le remboursement anticipé du prêt qui correspond à la résiliation du contrat d'assurance décès emprunteur ou l'atteinte de l'échéance du contrat d'assurance qui correspond à la dernière échéance du crédit.

- **Crédit d'habitat :**

Remboursements anticipés						
	1	2	3	4	5	6
2012	19	30	76	63	83	30
2013	24	65	216	88	60	
2014	27	203	74	65		
2015	98	65	69			
2016	9	45				
2017	11					
<b>Totaux</b>	<b>188</b>	<b>408</b>	<b>435</b>	<b>216</b>	<b>143</b>	<b>30</b>

Tableau 9: Les remboursements anticipés des crédits d'habitat

Une analyse similaire à celle menée dans ce qui précède, s'impose dans ce paragraphe. Le comportement de remboursement anticipé est la même, vu que nous traitons une sous-catégorie qui s'inscrit dans la catégorie des crédits immobiliers, toutefois les effectifs des remboursements anticipés pour les crédits d'habitat sont faibles.

Stock contrats						
	1	2	3	4	5	6
2012	3 177	3 158	3 128	3 052	2 989	2 906
2013	2 374	2 350	2 285	2 069	1 981	
2014	2 748	2 721	2 518	2 444		
2015	3 645	3 547	3 482			
2016	4 863	4 854				
2017	5 259					
<b>Totaux</b>	<b>22 066</b>	<b>16 630</b>	<b>11 413</b>	<b>7 565</b>	<b>4 970</b>	<b>2 906</b>

Tableau 10: Evolution du nombre de contrat d'habitat

La construction du tableau ci-dessus tient compte des mêmes types de sorties ; le décès de l'assuré, la résiliation du contrat ou le terme du contrat d'assurance.

Maintenant qu'on dispose du triangle de remboursement anticipé et celui du stock de contrats, nous allons procéder au calcul des taux bruts en utilisant les deux méthodes précitées.

- **Crédit aménagement :**

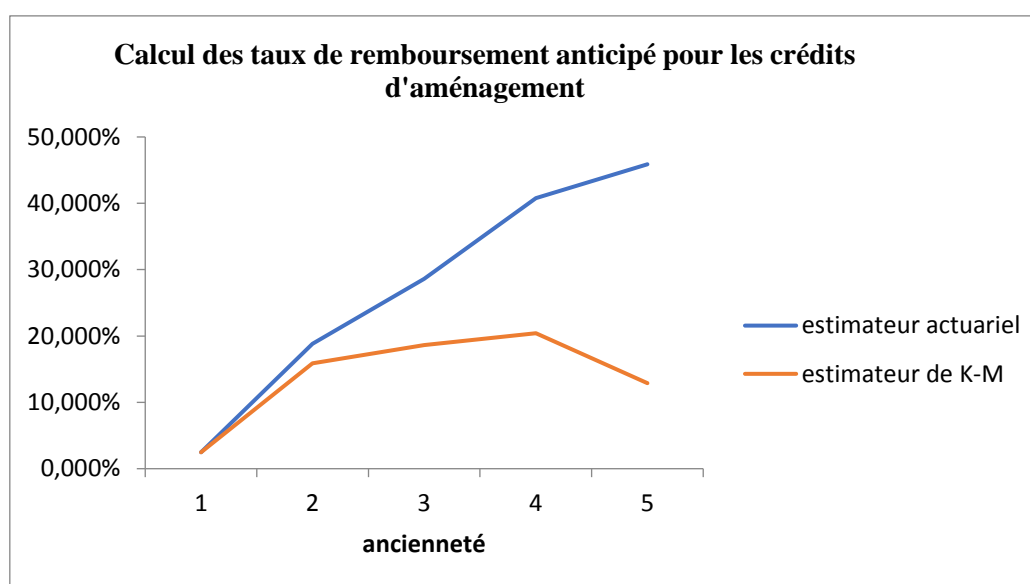


Figure 14: Calcul du taux de remboursement anticipé pour les crédits d'aménagement

La figure ci-dessus montre que le taux de remboursement anticipé augmente rapidement juste après la première année du prêt puis diminue progressivement à partir de la quatrième année, ceci en suivant l'évolution des taux bruts obtenus par l'estimateur de Kaplan Meier. Cependant, la méthode actuarielle donne des taux bruts croissants en fonction de l'ancienneté. Cette méthode revient à prendre en compte la

population exposée « moyenne » sur l'année ; comme celle-ci a tendance à diminuer en raison des sorties qui ont lieu sur le portefeuille, les taux estimés augmentent

- **Crédit habitat :**

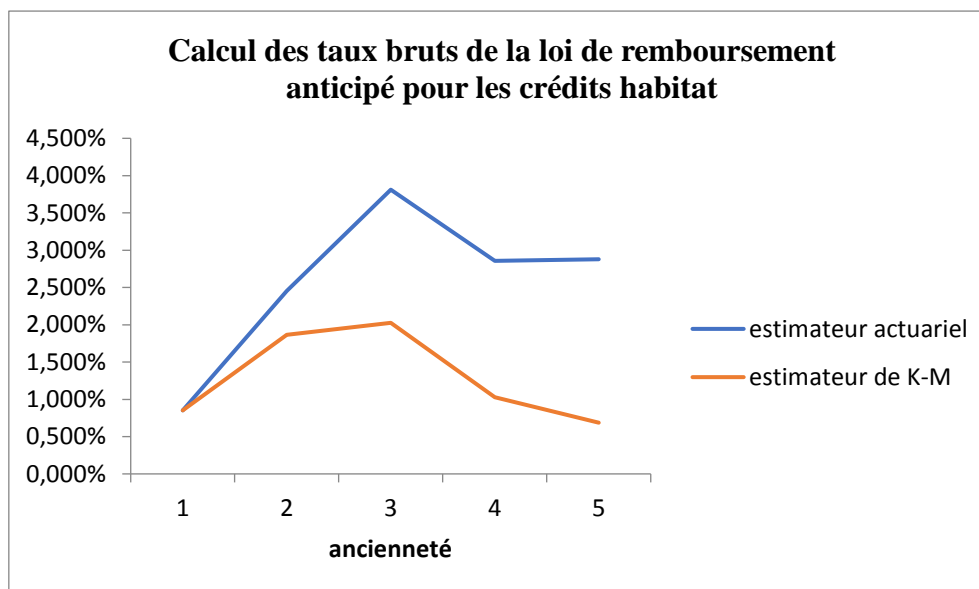


Figure 15: Calcul des taux bruts de la loi de remboursement anticipé pour les crédits Habitat

La représentation des taux bruts calculés par la méthode actuarielle et celle de KM nous montre que les taux croissent rapidement juste après la souscription. Les taux issus de la méthode de KM, atteignent un maximum au bout des 3 ans d'ancienneté pour commencer à décroître par la suite. Cependant, les taux obtenus par la méthode actuarielle continuent à croître après la souscription jusqu'à la quatrième année d'ancienneté où ils restent constant.

Les courbes obtenues en utilisant l'estimateur de Kaplan-Meier traduisent un comportement assez intuitif de l'emprunteur, en particulier dans le cas du crédit immobilier qui regroupe les sous-catégories étudiées, à savoir, le crédit habitat et le crédit aménagement. De plus l'estimateur de KM tient compte de la population réellement exposée au risque de remboursement anticipé. Par la suite, il nous semble plus judicieux de retenir la méthode de KM pour le calcul des taux bruts.

### II.3. Lissage des taux bruts :

Les valeurs des taux bruts obtenus présentent une certaine irrégularité, donc il est légitime de penser qu'elles ne reflètent pas le phénomène sous-jacent que l'on

cherche à mesurer, mais quel est le résultat de l'imperfection des conditions de l'expérience : les fluctuations d'échantillonnage induisent une variabilité « parasite » dans les valeurs estimées.

On souhaite alors « ajuster » ou « lisser » les valeurs brutes pour représenter de manière plus fidèle la loi (inconnue) que l'on veut estimer. Pour ce faire, nous avons utilisé la courbe de tendance existante sous Excel et nous avons choisi pour chaque sous-catégorie étudiée la courbe qui ajuste le mieux les taux bruts précédemment calculés.

- **Crédit aménagement:**

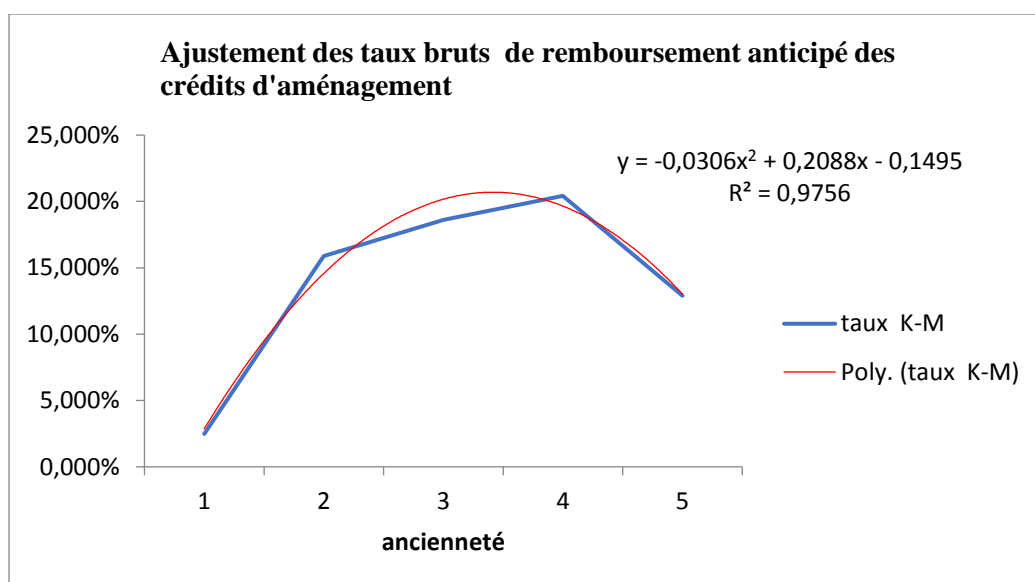


Figure 16: Ajustement des taux bruts des remboursements anticipés des crédits d'aménagement

Le graphe ci-dessus permet d'apprécier les résultats obtenus en ajustant les taux bruts de remboursement anticipé pour les crédits d'aménagement, par une courbe de tendance polynomiale d'ordre 2. Ladite courbe comporte 97% de l'information contenue dans les taux de départ. Les paramètres de la courbe d'ajustement, dont l'équation est la suivante  $y = -0.0306 * x^2 + 0.2088 * x - 0.1495$ , permettront de prévoir le taux de remboursement anticipé pour des anciennetés dont on ne dispose pas de suffisamment d'observation pour effectuer le calcul.

- **Crédit d'habitat :**

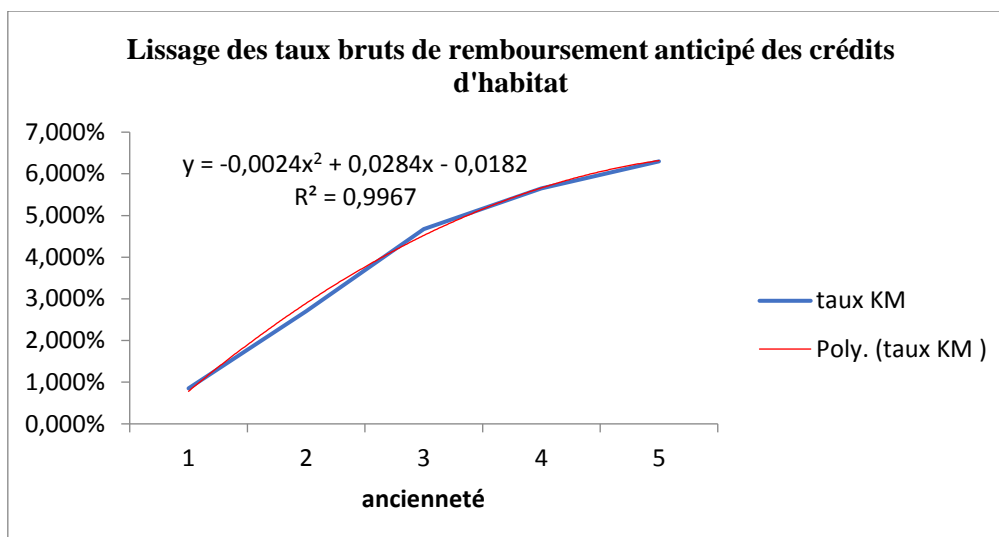


Figure 17: Lissage des taux bruts des remboursements anticipés des crédits d'habitat

Un ajustement polynomial décrit par  $y = -0.0024 * x^2 + 0.0284 * x - 0.0182$  nous a permis d'acquérir 99% de l'information contenue dans la courbe des taux bruts de remboursement anticipé des crédits d'habitat.

### III. Tarification en assurance décès emprunteur:

La SBR adopte un raisonnement en termes de flux. Etant donné que nous ne disposons pas des flux des primes nous allons dans cette partie présenter les notions théoriques préalables à la tarification.

Nous considérons dans ce mémoire uniquement des primes mensuelles. Le paiement d'une prime unique est possible dans la réalité, mais le cas est assez rare étant donné le coût important que représente l'assurance dans une opération de crédit immobilier.

En assurance emprunteur, la pratique du marché a conduit à la possibilité de calculer les tarifs selon deux principales méthodes : les primes périodiques peuvent être calculées en fonction du **capital initial** (montant du capital emprunté) ou du **capital restant dû**. Dans le premier cas, cela implique que la prime payée est constante pendant toute la durée de paiement des primes par l'assuré. Dans le second cas, la prime payée suit la décroissance du capital restant dû au cours du temps.

Comme dans tout contrat d'assurance, les primes payées servent à couvrir les risques supportés par l'assureur mais, lorsque les primes sont constantes, il existe un

risque supplémentaire pour l'assureur dans la mesure où, à chaque échéance de prime, le montant de la prime versée n'est pas toujours en phase avec le risque encouru.

Il est donc plus prudent pour un assureur de tarifier ces contrats à l'aide de primes qui ne sont pas constantes et qui suivent le risque encouru par l'assureur. Cela justifie l'apparition d'un mode de tarification particulier en assurance emprunteur, consistant à tarifier les contrats en fonction du capital restant dû. Dans la pratique, le mode de tarification choisi par l'assuré dépend de l'objet du prêt (prêt immobilier, prêt à la consommation...), de la durée du prêt, etc. Pour les prêts immobiliers, qui portent sur des durées généralement assez longues, la tarification se fait presque toujours sur le capital restant dû. Pour des prêts courts (tels que des prêts à la consommation), l'assuré pourra être amené en revanche à choisir une tarification en fonction du capital initial.

### III.1. Notations et hypothèses :

#### Notations :

- CI capital initial faisant l'objet du prêt
- $CRD_p$  : capital restant dû après  $p$  mois écoulés après la souscription du contrat
- $k$  : ancienneté du contrat à la date d'évaluation des engagements
- $n$  : durée du prêt en mois
- $P_{mns}'_k$  : prime mensuelle d'inventaire fonction du capital restant dû
- $P_{mns}''_k$  : prime mensuelle commerciale fonction du capital restant dû
- $v = \frac{1}{1+i}$  où  $i$  : taux technique fixé à 2.5%
- $t$  : mois de projection
- $tc$  : taux mensuel des chargements
- $f_a$  : taux des frais d'acquisition mensuels
- $PU'$  : prime unique d'inventaire
- $PU''$  : prime commerciale unique

$$CRD_p = CI * \frac{(1 + rm)^n - (1 + rm)^p}{(1 + rm)^n - 1} \text{ pour } p \leq 12 * n$$

**Hypothèses :**

Nous prenons les hypothèses suivantes pour le calcul des primes pures :

- Les primes sont mensuelles et sont versées en début de période par l'assuré
- La durée de paiement des primes est égale à la durée du prêt, autrement dit il n'y a pas de différé
- Les prêts sont amortissables par annuités constantes
- Les décès surviennent en milieu de période

**III.2. Calcul de la prime unique :****Principe :**

Dans la tarification en prime unique, une seule prime est payée par l'assuré à la souscription du contrat, servant ainsi à couvrir le risque sur toute la durée du contrat d'assurance.

**Formule de tarification :**

$$\begin{aligned} VAP(\text{Engagements Assureur})_{\text{à la souscription}} \\ = VAP(\text{Engagements Assuré})_{\text{à la souscription}} \end{aligned}$$

Ainsi la prime pure payée par l'assuré suivra la décroissance du capital restant dû sur la durée de l'emprunt et sera déterminée comme :

$$PU' = \sum_{k=0}^{12 \cdot n - 1} CRD_k * v^{\frac{k+0.5}{12}} * \frac{k}{12} p_x * \frac{1}{12} q_{x+\frac{k}{12}} + \sum_{k=0}^{12 \cdot n - 1} f_a * CRD_k * v^{\frac{k}{12}} * \frac{k}{12} p_x$$

A partir de la prime mensuelle obtenue nous calculons la prime commerciale unique comme suit :

$$PU'' = \frac{PU'}{1 - tc}$$

**III.3. Calcul des primes mensuelles selon le capital restant dû :****Principe :**

Dans la tarification sur capital restant dû (CRD), la prime payée par l'assuré décroît pendant toute la durée du prêt en suivant l'évolution du CRD au cours du temps. Nous cherchons donc à calculer un taux d'assurance qui sera appliqué au CRD

de début d'année, afin d'obtenir le montant de la prime payée par l'assuré. Ce taux est fonction de l'âge atteint au cours du temps

### Formules de tarification :

Le montant de la prime d'inventaire est défini par la multiplication du taux de prime et le capital restant dû selon les modalités de paiement fixées à la souscription du contrat. Le taux de prime se détermine à partir de l'égalisation des valeurs actuelles probables des engagements respectifs pris par l'assureur et par l'assuré à la conclusion du contrat :

$$\begin{aligned} VAP(\text{Engagements Assureur})_{\text{à la souscription}} \\ = VAP(\text{Engagements Assuré})_{\text{à la souscription}} \end{aligned}$$

Ainsi la prime mensuelle payée par l'assuré suivra la décroissance du capital restant dû sur la durée de l'emprunt et sera déterminée comme :

$$\begin{aligned} Pmens'_k \\ = \frac{\sum_{k=0}^{12*n-1} CRD_k * v^{\frac{k+0.5}{12}} * \frac{k}{12} p_x * \frac{1}{12} q_{x+\frac{k}{12}} + \sum_{k=0}^{12*n-1} f_a * CRD_k * v^{\frac{k}{12}} * \frac{k}{12} p_x}{\sum_{k=0}^{12*n-1} v^{\frac{k}{12}} * \frac{k}{12} p_x * CRD_k} \end{aligned}$$

Où  $tx\_prime$  représente le taux de prime tarifié sur le capital restant dû, incluant les différents chargements d'inventaire

A partir de la prime mensuelle obtenue nous calculons la prime mensuelle commerciale comme suit :

$$Pmens''_k = \frac{Pmens'_k}{1 - tc}$$

## IV. Calcul des provisions techniques prudentielles :

L'article 12 du projet de circulaire précise que les provisions techniques prudentielles sont évaluées comme suit:

$$PT_{prudentielles} = ME_{engagements} + ME_{frais} + MR$$

- **La meilleure estimation des engagements  $ME_{engagements}$**  : correspond à la valeur probabilisée et actualisée des flux de trésorerie futurs afférents aux engagements de l'entreprise d'assurance au titre des contrats souscrits
- **La meilleure estimation des frais de gestion  $ME_{frais}$**  : correspond à la valeur probabilisée et actualisée du montant relatif à la gestion des contrats
- **La marge de risque  $MR$**  : correspond au coût d'immobilisation du capital de solvabilité requis afférent aux engagements garantis. Elle est déterminée en appliquant un taux au produit de la meilleure estimation des engagements et de la durée des engagements

L'actualisation de la valeur probabilisée est effectuée sur la base d'une courbe des taux fixée par l'autorité. Les provisions techniques sont évaluées brutes de réassurance et concernant tous les contrats dont l'engagement est en cours à la date d'inventaire.

#### IV.1. La meilleure estimation des engagements :

Pour les opérations d'assurance vie, décès et capitalisation, la formule de calcul de la meilleure estimation des engagements tel que définie dans le projet de circulaire se présente comme suit :

$$ME_{engagements} = MEGP + BDF$$

- **Les bénéfices des discrétionnaires futurs  $BDF$**  sont l'équivalent de la provision pour participation aux bénéfices
- **La meilleure estimation des garanties probabilisées  $MEGP$** , est l'équivalent de la provision mathématique dans le cadre de la réglementation actuelle. Elle est calculée tête par tête, en actualisant les flux de trésorerie futurs probabilisés correspondant à la différence entre les décaissements (règlements de toutes les prestations garanties au titre des contrats : décès, rachat, résiliation ...) et les encaissements futurs (correspondant aux engagements des assurés, primes et cotisations, lorsqu'elles sont prises en compte dans le calcul de la provision mathématique comptable).

Dans le cadre du produit étudié, l'assurance décès emprunteur, la meilleure estimation des engagements est réduite au calcul de la meilleure estimation des garanties probabilisées.

### La meilleure estimation des garanties probabilisées MEGP :

Dans le calcul des flux utilisés pour déterminer la MEGP, on suppose que l'assuré paie des primes mensuelles en fonction du capital restant dû, et rembourse son prêt à échéance mensuelles. Les encaissements correspondent aux primes payées par l'assuré, alors que les décaissements renvoient aux flux des chargements et aux flux de décès.

Les notations sont celles utilisées dans la partie de tarification et celle de construction de la loi de remboursement anticipé du même chapitre

$$CRD_{12*k+t} = CI * \frac{(1 + rm)^n - (1 + rm)^{12*k+t}}{(1 + rm)^n - 1} \text{ pour } t \leq n - 12 * k$$

$$\text{Flux\_décès}_{12*k+t} = \begin{cases} CRD_{12*k+t} * \frac{t}{12} p_{x+k} * \frac{1}{12} q_{x+k+\frac{t}{12}} * \left(1 - \frac{t}{12} ra_k\right) & \text{si } t \leq n - 12 * k \\ 0 \text{ sinon} & \end{cases}$$

$$\text{Flux\_chargement}_{12*k+t} = \begin{cases} f_a * CRD_{12*k+t} * \frac{t}{12} p_{x+k} * \left(1 - \frac{t}{12} ra_k\right) & \text{si } t \leq n - 12 * k \\ 0 \text{ sinon} & \end{cases}$$

$$\text{Flux\_primes}_{12*k+t} = \begin{cases} P_{\text{mens}}''_{12*k+t} * \frac{t}{12} p_{x+k} * \left(1 - \frac{t}{12} ra_k\right) & \text{si } t \leq n - 12 * k \\ 0 \text{ sinon} & \end{cases}$$

L'actualisation des flux ci-dessous se fait comme suit :

$$\text{Flux\_décès\_actualisés}_{12*k+t} = \frac{\text{Flux\_décès}_{12*k+t}}{\left(1 + tx_{zc}_{\text{Ent}\left(\frac{t}{12}\right)}\right)^{\frac{t+0.5}{12}}}$$

$$\text{Flux\_chargement\_actualisés}_{12*k+t} = \frac{\text{Flux\_chargement}_{12*k+t}}{\left(1 + tx_{zc}_{\text{Ent}\left(\frac{t}{12}\right)}\right)^{\frac{t}{12}}}$$

$$\text{Flux\_primes\_actualisés}_{12*k+t} = \frac{\text{Flux\_primes}_{12*k+t}}{\left(1 + \text{tx\_zc}_{\text{Ent}\left(\frac{t}{12}\right)}\right)^{\frac{t}{12}}}$$

Où :

- Ent : partie entière
- tx\_zc : taux zéro coupon issu de la courbe construite au chapitre 2

La valeur de la MEGP pour un contrat d'ancienneté  $k$  à la date d'évaluation des engagements se présente comme suit :

$$\text{MEGP}_k = \sum_{t=0} (\text{Flux\_décès\_actualisés}_{12*k+t} + \text{Flux\_chargement\_actualisés}_{12*k+t} + \text{Flux\_primes\_actualisés}_{12*k+t})$$

Etant donné le nombre très élevé de contrats, la projection des flux relatifs aux engagements respectifs de l'assureur et de l'assuré pour chaque contrat jusqu'à la dernière échéance du crédit s'avère être une tâche très coûteuse en temps de calcul. La méthode « d'agrégation en Model Point » vient alors résoudre ce problème en regroupant judicieusement les contrats présentant les mêmes caractéristiques. En effet, chaque classe regroupe les assurés ayant un comportement particulier et commun à sa population. Chaque Model Point agrège, pour chaque catégorie et pour chaque année de souscription les assurés ayant le même âge. Ainsi pour chaque Model Point, le capital initial retenu est le capital initial de la population à laquelle il réfère, la même approche est appliquée à la durée et au taux du prêt. Par la suite nous avons procédé à la projection de l'effectif de la population constituant chaque Model Point en tenant compte des mêmes hypothèses démographique de la tarification et de la loi de remboursement anticipé construite auparavant.

$$\begin{aligned} NB\left(x + k + \frac{t}{12}, k + \frac{t}{12}\right) \\ = NB\left(x + k + \frac{t-1}{12}, k + \frac{t-1}{12}\right) * \left(1 - \frac{1}{12}ra_{k+\frac{t}{12}}\right) * \left(1 - \frac{1}{12}q_{x+k+\frac{t}{12}}\right) \end{aligned}$$

Où :

- $NB(x, a)$  : nombre de contrat d'âge  $x$  et d'ancienneté  $a$

- $t$  le mois de projection
- $k$  l'ancienneté à la date d'évaluation des engagements

#### IV.2. La marge de risque (MR) :

La marge de risque est déterminée en appliquant un taux au produit de la meilleure estimation des engagements et la duration des engagements.

duration

$$= \frac{\sum(\text{flux prime actualisés}_i + \text{flux chargement actualisés}_i + \text{flux décès actualisés}_i) * d_i^{\text{résid}}}{\sum \text{flux prime actualisés}_i + \text{flux chargement actualisés}_i + \text{flux décès actualisés}_i}$$

Ainsi la marge de risque se calcule :

$$\text{MR} = \text{coefficient} * \text{duration} * \text{MEGP}$$

Vu que le projet de circulaire n'a pas encore fixé la valeur du coefficient à appliquer pour effectuer le calcul, nous nous sommes inspirés de la Solvabilité II qui l'a fixé à 6%

#### IV.3. Présentation des résultats :

Dans le cadre de cette étude nous avons évalué les engagements à la date d'extraction des données du système d'information, à savoir **2017**.

##### IV.3.1. Résultats de calcul relatif aux contrats de crédit habitat :

- **MEGP habitat** :

La meilleure estimation des garanties probabilisés tenant compte du phénomène de remboursement anticipé pour les crédits Habitats s'élève à : **3 010 322 700.93 MAD**, alors que si nous ne tenons pas compte de du remboursement anticipé la MEGP atteint : **3 089 990 425.14 MAD**. On constate que l'évaluation de la MEGP en prenant en considération l'événement du remboursement anticipé influe considérablement sur l'évaluation des engagements ; elle permet de réaliser un gain en fonds propres qui s'élève à : **79 667 724.22 MAD**

Pour pouvoir analyser ces chiffres nous avons choisi de calculer en 2017 la MEGP issues de chaque année de souscription depuis 2010 jusqu'à 2017 :

	2010	2011	2012	2013
--	------	------	------	------

<b>MEGP (RA)</b>	255 623 912.88	307 610 421.69	293 707 256.87	248 294 940.30
<b>MEGP</b>	255 623 912.88	307 610 421.69	294 283 440.78	250 372 863.61

Tableau 11: La MEGP des crédits d'habitat souscrits entre 2010 et 2013

	2014	2015	2016	2017
<b>MEGP (RA)</b>	335 950 693.14	418 562 076.61	542 740 040.50	607 397 217.10
<b>MEGP</b>	342 247 541.58	432 132 330.42	569 117 613.35	638 153 965.33

Tableau 12: La MEGP des crédits d'habitat souscrits entre 2014 et 2017

Dans les deux tableaux ci-dessus la première ligne représente le calcul de la MEGP en tenant compte des remboursements anticipés, alors que la seconde expose le calcul de la MEGP sans en tenir compte. On remarque que pour les contrats souscrits en 2010 et 2011 le remboursement anticipé n'influence pas l'évaluation des engagements. Ceci s'explique par le fait qu'à la date d'évaluation des engagements on a s'approche du terme du contrat ; la durée moyenne d'un prêt habitat est de 6 ans. Ainsi l'assuré n'a pas intérêt à racheter son prêt. Pour les contrats souscrits en 2016 et 2017 le remboursement anticipé affecte considérablement la valeur de la MEGP. En fait, un contrat souscrit en 2016 (ou 2017) est d'ancienneté 1an (ou 2 ans), à une telle ancienneté l'assuré n'a pas tendance à racheter son prêt ce qui conduit à la résiliation du contrat d'assurance décès emprunteur.

- **MR habitat :**

	2010	2011	2012	2013
<b>MR (RA)</b>	116 717 728.61	152 325 217.71	150 829 719.74	134 686 470.62
<b>MR</b>	116 717 728.61	152 325 217.71	151 113 635.52	135 753 842.40

Tableau 13: La MR des crédits d'habitat souscrits entre 2010 et 2013

	2014	2015	2016	2017
<b>MR (RA)</b>	200 556 203.70	258 756 767.57	343 672 995.23	411 619 689.60
<b>MR</b>	204 064 023.56	266 443 217.30	358 694 154.20	429 675 871.87

Tableau 14: La MR des crédits d'habitat souscrits entre 2014 et 2017

Les deux tableaux ci-dessus présentent les résultats de calcul de la marge pour risque en tenant compte du remboursement anticipé en première ligne, et sans en tenir compte dans la seconde. Nous remarquons que la prise en considération du remboursement anticipé augmente significativement la valeur de la marge. Toutefois, nous pouvons constater que cette marge reste importante vu qu'elle tient compte de la durée des engagements qui est élevé pour le produit étudié dans ce cas.

### IV.3.2. Résultats de calcul relatif aux contrats de crédit

#### Aménagement :

- **MEGP aménagement :**

L'évaluation de la meilleure estimation des garanties probabilisées en 2017 pour les crédits aménagement est de : - **554 289 678.35 MAD** en tenant compte du remboursement anticipé, et de - **601 937 564.31 MAD** sans en tenir compte. Il est pertinent qu'une valeur négative des engagements soit à justifier. Le crédit aménagement est inclut dans la catégorie des crédits immobiliers qui nécessite, comme détaillé précédemment, une tarification en fonction du capital restant dû. Dans ce cas l'engagement de l'assuré est décroissant, de plus il est plus élevé que celui de l'assureur, d'où la valeur négative de la MEGP.

Dans la perspective d'approfondir cette analyse nous avons calculé la MEGP pour chaque année de souscription depuis 2010 jusqu'à la date d'évaluation des engagements, en tenant compte du remboursement anticipé et sans en tenir compte.

	2010	2011	2012	2013
<b>MEGP (RA)</b>	5 745.47	193 216.09	- 678 089.41	- 2 156 053.32
<b>MEGP</b>	5 745.47	193 216.09	- 672 609.39	- 2 154 604.32

Tableau 15: La MEGP des crédits d'aménagement souscrits entre 2010 et 2013

	2014	2015	2016	2017
<b>MEGP (RA)</b>	-37 759 439.39	- 69 047 157.90	- 179 374 073.42	- 265 473 826.46
<b>MEGP</b>	- 39 838 373.93	- 72 375 348.73	- 193 082 213.47	-294 013 376.02

Tableau 16: La MEGP des crédits d'aménagement souscrits entre 2014 et 2017

D'une part, il est évident à travers ces tableaux que le comportement de l'assuré en terme de remboursement anticipé impacte l'évaluation des engagements. D'autre part, la MEGP des contrats souscrits en 2010 et 2011 est positive, ceci est dû au fait que pour ses contrats à la date d'évaluation des engagements on s'approche de la dernière échéance de crédit où l'engagement de l'assuré est inférieur à celui de l'assuré

- **MR aménagement :**

Vu que la marge pour risque découle de la meilleure estimation des engagements, nous aboutirons aux mêmes conclusions de ce qui précède. Toutefois, la valeur de ladite marge, en tenant compte du remboursement anticipé est de : - **103 941 335.00** et sans en tenir compte : - **109 223 967.58**

Le détail du calcul, en 2017, de cette marge pour le portefeuille étudié qui regroupe les contrats souscrits depuis 2010 jusqu'à 2017 se présente comme suit :

	2010	2011	2012	2013
<b>MR (RA)</b>	0	8 103.14	- 56 355.20	- 272 877.08
<b>MR</b>	0	8 103.14	- 56 216.73	- 273 438.56

Tableau 17: La MR des crédits d'aménagement souscrits entre 2010 et 2013

	2014	2015	2016	2017
<b>MR (RA)</b>	- 4 997 748.03	- 8 965 096.46	- 31 634 403.99	- 58 022 957.39
<b>MR</b>	- 5 127 241.01	- 9 167 607.90	- 32 926 011.49	- 61 681 555.04

Tableau 18: La MR des crédits d'aménagement souscrits entre 2014 et 2017

# *C*hapitre 4 : *L*es *p*rovisions *t*echniques

## *p*rudentielles *e*n *a*ssurance *n*on *v*ie

Dans ce dernier chapitre, nous procédons à la valorisation des provisions techniques prudentielles sous la SBR pour la catégorie Transport Public des Voyageurs de la branche RC automobile.

Nous présenterons dans un premier temps les différentes méthodes d'estimation de la meilleure estimation pour sinistres et de la Provision Pour Sinistres à Payer. Ensuite, nous détaillerons la démarche de calcul de la meilleure estimation pour primes. Finalement, nous calculerons la meilleure estimation des engagements et la marge de risque pour la catégorie étudiée.

Comme pour les opérations d'assurance vie, décès et capitalisation, les provisions techniques prudentielles pour les opérations d'assurance non vie sont évaluées en additionnant la meilleure estimation des engagements, la meilleure estimation des frais ainsi que la marge de risque. Dans ce chapitre, nous intéresserons uniquement à la meilleure estimation des engagements et la marge de risque pour les opérations non vie hors rentes<sup>6</sup>.

## I. La meilleure estimation des engagements :

La meilleure estimation des engagements comprend la meilleure estimation des engagements pour sinistres ( $ME_{sinistre}$ ) et la meilleure estimation des engagements pour primes ( $ME_{primes}$ ).

### I.1. Meilleure estimation des engagements pour sinistres :

La meilleure estimation des engagements pour sinistres ( $ME_{sinistre}$ ) est déterminée en actualisant les flux de règlements futurs probabilisés nets de recours<sup>7</sup> relatifs aux sinistres survenus, comme suit :

$$ME_{sinistre} = \sum \frac{F_t}{(1 + r_t)^t}$$

Où  $r_t$  est le taux zéro-coupon pour la période  $t$  et  $F_t$  le flux de règlements futurs (Cash flows) probabilisé net de recours de ladite période.

Les flux des règlements futurs probabilisés nets de recours sont estimés sur la base d'un triangle des règlements par année de survenance conformément à la méthode Chain Ladder. Toutefois, l'entreprise d'assurances et de réassurance peut utiliser d'autres méthodes de provisionnement après accord de l'Autorité. Ainsi, nous présenterons différentes méthodes pour déterminer la  $ME_{sinistre}$ , à savoir des méthodes déterministes d'une part (Chain Ladder, London Chain et DeVlyder) et des

---

<sup>6</sup> les rentes découlant de contrats d'assurance non vie (garanties corporelles des contrats d'assurance non vie) sont des engagements d'assurance vie. Ainsi, l'évaluation des provisions pour rentes non vie doit reposer sur des modèles de provisionnement vie.

<sup>7</sup> Il s'agit des sommes encaissées sous forme de récupération partielle ou totale d'une indemnité de sinistres versée à l'assuré ou à la victime d'un accident.

méthodes stochastiques (Mack ,GLM et Bootstrap) d'autre part, qui nous permettent de quantifier l'incertitude liée à l'estimation.

### Notations :

- $n + 1$  : nombre maximal d'années nécessaires pour régler un sinistre en totalité.
- $i$  : indice des années de survenance des sinistres  $i \in \{0, \dots, n\}$ .
- $j$  : indice des années de développement ou de déroulement  $j \in \{0, \dots, n\}$ .
- $Y_{i,j}$ : règlements décumulés, relatifs à l'année de survenance  $i$  et à l'année de développement  $j$ , c'est-à-dire entre l'année  $i$  et l'année  $i + j$ .
- $C_{i,j}$ : règlements cumulés, relatifs à l'année de survenance  $i$  et à l'année de développement  $j$ , c'est-à-dire entre l'année  $i$  et l'année  $i + j$ .
- $\hat{Y}_{i,j}$ : règlements décumulés futurs estimés, relatifs à l'année de survenance  $i$  et à l'année de développement  $j$ .
- $\hat{C}_{i,j}$ : règlements cumulés futurs estimés, relatifs à l'année de survenance  $i$  et à l'année de développement  $j$ .
- $R_i$ : provision pour sinistre à payer annuelle, Il se définit comme suit
 
$$R_i = \hat{C}_{i,n} - C_{i,n-i}.$$
- $R$ : provision pour sinistres à payer total, définie par  $R = \sum_{i=0}^n R_i$ .

L'utilisation des méthodes mentionnées ci-dessus repose sur l'utilisation du triangle des règlements, comme ci-après :

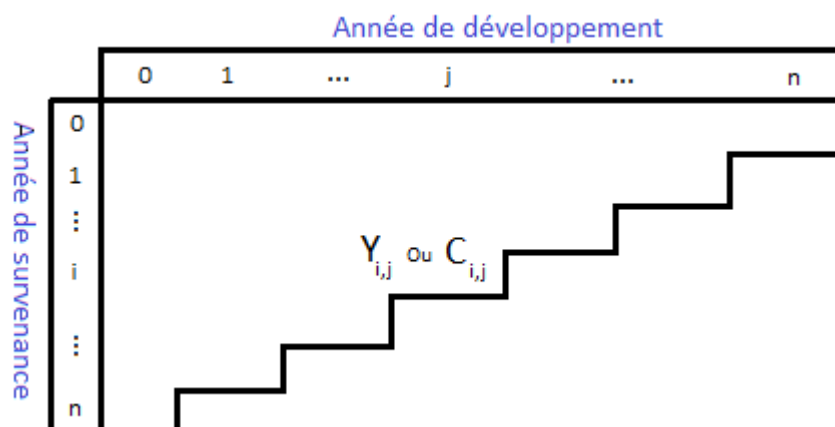


Figure 18: Triangle des règlements

### 1.1.1. Méthodes déterministes :

#### 1.1.1.1. Méthode de Chain Ladder :

La méthode de Chain Ladder est une méthode déterministe fréquemment utilisée car elle est facile à mettre en œuvre.

La méthode de Chain Ladder calcule des facteurs de développements à partir du triangle des règlements cumulés comme suit :

$$f_{i,j} = \frac{C_{i,j+1}}{C_{i,j}} \text{ Pour } i \in \{0, \dots, n\} \text{ et } j \in \{0, \dots, n-1\}.$$

- **Hypothèses de la méthode**

**(H1) Pour  $j \in \{0, \dots, n-1\}$  les facteurs de développement  $f_{i,j}$  sont indépendants de l'année de survenance  $i$ .**

Les facteurs de développement individuels relatif à une année de développement  $j$  doivent être significativement proche de la moyenne des facteurs de développement individuels sur ladite année.

**(H2) Il existe des facteurs de développement  $f_1, \dots, f_{n-1} > 0$  tels  $\forall 0 \leq i \leq n$  et  $\forall 0 \leq j \leq n-1$  on a :**

$$C_{i,j+1} = f_j C_{i,j}$$

Pour chaque année de développement  $j$ , le nuage de points représentant les règlements cumulés d'une année  $j+1$  par rapport aux règlements cumulés de l'année  $j$  doit être approché significativement par une droite.

- **Méthode :**

- Calcul des facteurs de développements communs :

Les facteurs de développement d'une année de développement à une autre sont considérés communs à toutes les années de survenance. Leur estimation est donnée par la formule suivante :

$$\hat{f}_j = \frac{\sum_{i=0}^{n-j-1} C_{i,j+1}}{\sum_{i=0}^{n-j-1} C_{i,j}} \quad \text{pour } j \in \{0, \dots, n-1\}.$$

- Calcul des règlements cumulés futurs :

Les estimations des règlements cumulés à venir sont déduites à partir de la formule réursive suivante:

$$\hat{C}_{i,j} = C_{i,n-i} \prod_{k=n-i}^{j-1} \hat{f}_k \quad \text{avec } i \in \{1, \dots, n\} \text{ et } j \in \{n-i+1, \dots, n\}.$$

### 1.1.1.2. Méthode de London Chain :

La méthode de London Chain est une généralisation de la technique de Chain-Ladder. Elle suppose une relation affine entre les règlements cumulés d'une année de développement et l'année suivante.

- **Hypothèses de la méthode :**

**(H1) Il existe des facteurs de développement  $f_0, \dots, f_{n-1} > 0$  et des constantes  $\alpha_j$  tels que :  $C_{i,j+1} = f_j C_{i,j} + \alpha_j$  Pour  $i \in \{0, \dots, n\}$  et  $j \in \{0, \dots, n-1\}$**

Pour chaque année de développement  $j$ , les points des coordonnées  $(C_{i,j+1}, C_{i,j})$  doivent toujours être sensiblement alignés sur une droite, mais celle-ci ne doit pas nécessairement passer par l'origine.

- **Méthode :**

- Calcul des coefficients  $f_j$  et  $\alpha_j$ :

Le principe de la méthode de London Chain est de déterminer les valeurs des coefficients  $f_j$  et  $\alpha_j$  tels que les écarts entre les montants cumulés réels ( $C_{i,j+1}$ ) et ceux prédits par le modèle ( $f_j \times C_{i,j} + \alpha_j$ ) soient minimisés. Le couple  $(f_j, \alpha_j)$  est estimé par la méthode des Moindres Carrés Ordinaires :

$$(\hat{f}_j, \hat{\alpha}_j) = \text{Argmin} \sum_{i=0}^{n-j-1} (C_{i,j+1} - f_j C_{i,j} - \alpha_j)^2 \text{ pour } j \in \{0, \dots, n-1\}$$

Les estimateurs obtenus sont :

$$\hat{f}_j = \frac{\frac{1}{n-j} \sum_{i=0}^{n-j-1} C_{i,j} C_{i,j+1} - \bar{C}_j \bar{C}_{j+1}}{\frac{1}{n-j} \sum_{i=0}^{n-j-1} C_{i,j}^2 - \bar{C}_j^2} \quad \text{et} \quad \hat{\alpha}_j = \bar{C}_{j+1} - \hat{f}_j \bar{C}_j$$

pour  $j \in \{0, \dots, n-2\}$

Où les moyennes  $\bar{C}_j$  et  $\bar{C}_{j+1}$  sont telles que :  $\bar{C}_j = \frac{1}{n-j} \sum_{i=0}^{n-j-1} C_{i,j}$

En particulier, pour  $j = n - 1$ , nous posons : 
$$\begin{cases} \hat{f}_{n-1} = \frac{C_{0,n}}{C_{0,n-1}} \\ \hat{\alpha}_{n-1} = 0 \end{cases}$$

- Calcul des règlements cumulés futurs :

Les estimations des règlements cumulés à venir sont déduites à partir de la formule réursive suivante:

$$\hat{C}_{i,j} = \hat{f}_{j-1} \hat{C}_{i,j-1} + \hat{\alpha}_{j-1} \quad \text{Pour } i \in \{1, \dots, n\} \text{ et } j \in \{n - i + 1, \dots, n\}.$$

### 1.1.1.3. Méthode de DeVylder:

La méthode des moindres carrés de DeVylder repose sur une modélisation des montants de paiement non cumulés. Elle fait partie de la modélisation factorielle qui permet d'écrire les montants incrémentaux comme le produit de deux facteurs. Cette méthode est donc basée sur les paiements non cumulés, contrairement aux méthodes présentées jusque-là.

D'après la méthode de DeVylder, les paiements effectués pour l'année de survenance  $i$  et de développement  $j$  représentent une part du paiement cumulé final de l'année de survenance  $i$ . En d'autres termes, pour  $i \in \{0, \dots, n\}$  et  $j \in \{0, \dots, n\}$  :  $Y_{i,j} = p_j \times C_{i,n}$ , où  $p_j$  représente la part de  $C_{i,n}$  payée dans l'année de développement  $j$  ( $\sum_{j=0}^n p_j = 1$ )

- **Méthode :**

- Calcul des vecteurs  $p_j$  et  $C_{i,n}$  :

Les vecteurs  $(p_j)_{j \in \{1, \dots, n\}}$  et  $(C_{i,n})_{i \in \{1, \dots, n\}}$  sont déterminés de telle sorte que la somme des carrés des écarts entre les montants réels  $(Y_{i,j})$  et ceux prédits par le modèle  $(p_j \times C_{i,n})$  soit minimisée:

$$(\hat{C}_{i,n}, \hat{p}_j) = \text{Argmin} \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^{n-i} (Y_{i,j} - p_j \times C_{i,n})^2 \quad \text{pour } i, j \in \{0, \dots, n\}$$

La solution est donnée par le système d'équation :

$$\begin{cases} \hat{C}_{i,n} = \frac{\sum_{j=0}^{n-i} \hat{p}_j \times Y_{i,j}}{\sum_{j=0}^{n-i} \hat{p}_j^2} \\ \hat{p}_j = \frac{\sum_{i=0}^{n-j} \hat{C}_{i,n} \times Y_{i,j}}{\sum_{i=0}^{n-j} \hat{C}_{i,n}^2} \end{cases}$$

Les équations de  $\hat{C}_{i,n}$  et  $\hat{p}_j$  dépendent l'une de l'autre. De ce fait, il faut commencer par définir un vecteur initial  $(\hat{p}_j^{(0)})_{j \in \{0, \dots, n\}}$  tel que  $\sum_{j=0}^n \hat{p}_j^{(0)} = 1$ . Ceci nous permet de calculer une première fois le vecteur  $(\hat{C}_{i,n})_{i \in \{0, \dots, n\}}$  puis le vecteur  $(\hat{p}_j)_{j \in \{0, \dots, n\}}$  et enfin la double somme. Au fur et à mesure des itérations, cette double somme va tendre vers son minimum.

Les vecteurs retenus des deux vecteurs sont ceux calculés lors de la dernière itération :

$$\hat{p}_j^{(0)} = \frac{1}{n} \quad ; \quad \hat{C}_{i,n}^{(n)} = \frac{\sum_{j=0}^{n-i} \hat{p}_j^{(n-1)} \times Y_{i,j}}{\sum_{j=0}^{n-i} \hat{p}_j^{(n-1)2}} \quad ; \quad \hat{p}_j^{(n)} = \frac{\sum_{i=0}^{n-j} \hat{C}_{i,n}^{(n-1)} \times Y_{i,j}}{\sum_{i=0}^{n-j} \hat{C}_{i,n}^{(n-1)2}}$$

– Calcul des règlements non-cumulés futurs :

Les estimations des règlements cumulés à venir sont déduites à partir de la formule récursive suivante:

$$\hat{Y}_{i,j} = \hat{p}_j \times \hat{C}_{i,n} \text{ Pour } i \in \{1, \dots, n\} \text{ et } j \in \{n - i + 1, \dots, n\}.$$

### I.1.2. Méthodes stochastiques :

#### I.1.2.1. Méthode de Mack :

Le modèle de Mack est la version stochastique de la méthode de Chain Ladder . En effet, ce modèle fournit la même estimation du montant de la PSAP et de la  $ME_{sinistre}$  que la méthode de Chain Ladder. Il a cependant l'avantage d'estimer l'erreur de prédiction de la PSAP.

- **Hypothèses de la méthode :**

**(H1) Pour  $j \in \{0, \dots, n - 1\}$  les facteurs de développement  $f_{i,j}$  sont indépendants de l'année de survenance  $i$  (identique à H1 de la méthode de Chain Ladder)**

(H2) Il existe des facteurs  $f_0, f_2, \dots, f_{n-1}$  strictement positifs tels que :

$$E(C_{i,j+1}/C_{i,1}, \dots, C_{i,j}) = f_j C_{i,j} \text{ pour } i \in \{0, \dots, n\} \text{ et } j \in \{0, \dots, n-1\}$$

(H3) Il existe des paramètres  $\sigma_0, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1}$  strictement positifs tels que :

$$V(C_{i,j+1}/C_{i,0}C_{i,1} \dots C_{i,j}) = \sigma_j^2 C_{i,j} \text{ pour } i \in \{0, \dots, n\} \text{ et } j \in \{0, \dots, n-1\}$$

Cette dernière hypothèse introduite permet également au modèle d'évaluer l'erreur de prédiction. Elle est validée si les points de coordonnées  $(C_{i,j}, D_{i,j})$  ne présentent aucune structure. Où  $\varepsilon_{i,j} = \frac{C_{i,j+1} - \hat{f}_j \times C_{i,j}}{\sqrt{C_{i,j}}}$ .

- **Méthode :**

- Calcul des facteurs de développements :

La première étape de la méthode de Mack consiste à calculer les coefficients de développement, qui sont les mêmes coefficients estimés par la méthode Chain-Ladder.

La modèle de Mack fournit la même estimation du montant de la PSAP et de la  $ME_{sinistre}$  que la méthode de Chain Ladder :

- Estimation des  $\sigma_j$  :

$$\begin{cases} \hat{\sigma}_j^2 = \frac{1}{n-j-1} \sum_{i=0}^{n-j-1} C_{i,j} \left( \frac{C_{i,j+1}}{C_{i,j}} - \hat{f}_j \right)^2 & 0 \leq j \leq n-2 \\ \hat{\sigma}_{n-1}^2 = \min \left( \frac{\hat{\sigma}_{n-2}^4}{\hat{\sigma}_{n-3}^2}, \min(\hat{\sigma}_{n-3}^2, \hat{\sigma}_{n-2}^2) \right) \end{cases}$$

- Calcul de l'erreur de prédiction sur la PSAP par année de survenance :

Nous calculons l'écart quadratique moyen de prédiction (Mean Squared Error of Prediction).

L'erreur quadratique moyenne de prédiction, ou MSEP, du montant de la PSAP pour l'année  $i$  est définie par :  $MSEP(\hat{R}_i) = E[(\hat{R}_i - R_i)^2 / C_{i,j} : i + j \leq n + 1]$  et est estimée par :

$$\widehat{MSEP}(\hat{R}_i) = \hat{C}_{i,j}^2 \sum_{j=n-i}^{n-1} \frac{\hat{\sigma}_j^2}{\hat{f}_j^2} \left( \frac{1}{\hat{C}_{i,j}} + \frac{1}{\sum_{k=0}^{n-j-1} C_{i,k}} \right)$$

- Calcul de l'erreur de prédiction sur la provision totale :

L'estimation du MSEP de la PSAP totale est alors donnée par :

$$\widehat{MSEP}(\hat{R}) = \sum_{i=1}^n \left\{ \widehat{MSEP}(\hat{R}_i) + \hat{C}_{i,n} \left( \sum_{k=i+1}^n \hat{C}_{k,n} \right) \sum_{j=n-i+1}^{n-1} \frac{2\hat{\sigma}_j^2}{\hat{f}_j^2 \sum_{u=1}^{n-j-1} C_{u,j}} \right\}$$

On peut également calculer d'autres types d'erreurs qui permettent de quantifier l'erreur de prédiction à savoir l'erreur standard de prédiction *SEP* et l'erreur standard relative *SER*.

Ces erreurs sont définies à travers les formules suivantes :

$$SEP = \sqrt{\widehat{MSEP}(\hat{R})} : \text{erreur standard de prédiction}$$

$$SER = \frac{\sqrt{\widehat{MSEP}(\hat{R})}}{\hat{R}} : \text{erreur standard relative}$$

- Calcul des intervalles de confiance :

La construction des intervalles de confiance se base sur l'hypothèse faite sur la distribution du montant des réserves  $R_i$ :

- ✓ Sous l'hypothèse de normalité du montant des réserves  $R_i$ , l'intervalle de confiance au niveau  $1-\alpha$  est de la forme :

$$[\hat{R}_i - q_{1-\frac{\alpha}{2}} \times \sqrt{\widehat{MSEP}(\hat{R}_i)} ; \hat{R}_i + q_{1-\frac{\alpha}{2}} \times \sqrt{\widehat{MSEP}(\hat{R}_i)}]$$

- ✓ Sous l'hypothèse que les montants des réserves  $R_i$  suivent une loi log-normale, l'intervalle de confiance au niveau  $1-\alpha$  est alors de la forme:

$$[\exp(\mu_i - q_{1-\frac{\alpha}{2}} \times \sigma_i) ; \exp(\mu_i + q_{1-\frac{\alpha}{2}} \times \sigma_i)]$$

$$\text{Avec } \begin{cases} \mu_i = \ln(\hat{R}_i) - \frac{\sigma_i^2}{2} \\ \sigma_i^2 = \ln\left(\frac{\widehat{MSEP}(\hat{R}_i)}{\hat{R}_i^2} + 1\right) \end{cases}$$

### 1.1.2.2. Méthode de GLM :

La méthode GLM est une méthode qui consiste à trouver un lien entre les incréments de paiement  $Y_{i,j}$  du triangle de liquidation (variables réponses) et des variables explicatives  $\mu_{i,j}$ .

Un modèle de GLM est défini par 3 composantes :

#### COMPOSANTE ALEATOIRE :

Elle s'agit des variables réponses. Celles-ci sont indépendantes et leur loi de probabilité appartient à la famille exponentielle. La densité de chaque  $Y_{i,j}$  peut alors s'écrire de la forme :

$$f(y_{i,j}, \theta_{i,j}, \phi) = \exp \left\{ \frac{y_{i,j} \theta_{i,j} - b(\theta_{i,j})}{a(\phi)} + c(y_{i,j}, \phi) \right\}$$

- ✓  $b$  et  $c$  sont des fonctions caractéristiques de la distribution choisie .
- ✓  $\theta_{i,j}$  est un paramètre canonique inconnu (appelé paramètre naturel). Il est fonction de l'espérance de la variable réponse  $E(Y_{i,j})$ .
- ✓  $\phi$  est un paramètre de dispersion (ou paramètre d'échelle) strictement positif. Il est indépendant de  $i$  et  $j$ .

On peut alors montrer que :

$$\begin{cases} \mu_{i,j} = E(Y_{i,j}) = b'(\theta_{i,j}) \text{ soit } \theta_{i,j} = b'^{-1}(\mu_{i,j}) \text{ si } b' \text{ est inversible} \\ \text{Var}(Y_{i,j}) = b''(\theta_{i,j})\phi = b''(b'^{-1}(\mu_{i,j}))\phi = V(\mu_{i,j})\phi \end{cases}$$

La fonction  $V(.) = b''(b'^{-1}(.))$  est appelée fonction variance de la distribution.

#### COMPOSANTE DETERMINISTE :

Les variables explicatives utilisées comme prédicteurs dans le modèle, définissent sous forme de combinaison linéaire la composante déterministe  $\eta_{i,j}$ .

Dans le cas de provisionnement, cette composante est représentée par les années de survenance et les années de développement. Elle peut s'écrire :

$$\eta_{i,j} = \mu + \alpha_i + \beta_j \text{ pour } 0 \leq i, j \leq n - 1$$

Avec :

$\alpha_i$  : Un paramètre lié à la  $i^{\text{ème}}$  année de survenance.

$\beta_j$  : Un paramètre lié à la *j*ème année de développement.

$\mu$  : représente la moyenne générale (ou intercept)

les paramètres  $(\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1})$  et  $(\beta_0, \dots, \beta_{n-1})$  correspondent respectivement aux effets « lignes » et aux effets « colonnes » du modèle qu'on cherche à estimer.

### FONCTION DE LIEN :

La troisième composante de ce modèle est la fonction de lien canonique qui relie l'espérance de la variable réponse avec la composante déterministe :

$$\eta_{i,j} = g(\mu_{i,j}) = g(E(Y_{i,j}))$$

$g$  est une fonction réelle, strictement monotone et dérivable.

Loi de probabilité	Fonction de lien canonique
Normale	$\eta = \mu$
Poisson	$\eta = \ln \mu$
Gamma	$\eta = 1/\mu$
Inverse gaussienne	$\eta = 1/\mu^2$
Binomiale	$\eta = \ln \mu - \ln(1 - \mu) = \text{logit}(\mu)$

Figure 19: Exemples des fonctions de lien canoniques

Le choix de la fonction de lien n'est pas arbitraire, il doit nous assurer que les valeurs obtenues par le modèle sont de même nature que les valeurs originales. Par exemple, pour une variable de comptage, les valeurs négatives seront aberrantes, en conséquence, il faut chercher une fonction de lien  $g$  avec laquelle les valeurs prédites seront soit nulles soit positives, dans ce cas par exemple une fonction de lien  $g$  de type "logarithme" est appropriée.

Si la variable est continue, on pourra utiliser les liens canoniques des loi normale (elle donne des règlements estimés négatifs), gamma et log normale.

- Validation du modèle par examen des résidus :

Les résidus de Pearson sont des résidus standardisés définis par :  $r_i = \frac{y_i - \hat{\mu}_i}{\sqrt{V(\hat{\mu}_i)}}$ ,

Si le modèle est adéquat, ces résidus suivent asymptotiquement une loi normale.

### 1.1.2.3. Méthode de Bootstrap

La méthode de rééchantillonnage ou Bootstrap consiste à faire de l'inférence statistique sur les échantillons tirés d'un échantillon initial. L'usage de cette technique dans la résolution des problèmes actuariels est récent mais s'étend rapidement, en particulier en tarification et dans l'évaluation des provisions pour sinistres.

- **Principe général : Théorie du Bootstrap**

Soit  $X = (X_1, \dots, X_n)$  un échantillon initial des variables aléatoires réelles indépendantes et identiquement distribuées. On note  $\theta$  la variable aléatoire dont on veut déterminer un intervalle de confiance, et  $\hat{\theta} = f(X_1, \dots, X_n)$  l'estimation de  $\theta$  à partir de l'échantillon initial.

A partir de cet échantillon initial, on construit un échantillon Bootstrap. On effectue un tirage au sort avec remise de  $n$  éléments parmi les  $n$  variables de l'échantillon initial, où chaque réalisation a la même probabilité de tirage. Cet échantillon Bootstrap généré est noté  $X^* = (X_1^*, \dots, X_n^*)$ . On peut alors estimer une nouvelle fois  $\theta$ , mais cette fois à partir de l'échantillon Bootstrap :  $\hat{\theta}^* = f(X_1^*, \dots, X_n^*)$ .

On renouvelle cette procédure  $N$  fois afin d'obtenir  $N$  échantillons Bootstrap,  $X^{*(k)} = (X_1^{*(k)}, \dots, X_n^{*(k)})$  pour  $k \in \{1, \dots, N\}$ , à partir desquels on estime  $N$  fois la variable  $\theta$  :  $\hat{\theta}^{*(k)} = f(X_1^{*(k)}, \dots, X_n^{*(k)})$  pour  $k \in \{1, \dots, N\}$ .

À partir de ces  $N$  observations, pour  $N$  suffisamment grand, on est en mesure d'estimer la distribution empirique suivie par la variable aléatoire  $\theta$ , ainsi que sa moyenne empirique et son écart-type empirique.

$$\text{Moyenne empirique : } \bar{\theta} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \hat{\theta}^{*(k)}$$

$$\text{Écart-type empirique : } \hat{\sigma}_\theta = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{k=1}^N (\hat{\theta}^{*(k)} - \bar{\theta})^2}$$

Si la distribution empirique peut être approximée grâce à une loi connue, on peut fournir un intervalle de confiance pour la variable  $\theta$  à un certain niveau de confiance  $1 - \alpha$ .

- **Hypothèse de la méthode :**

**(H) Les données rééchantillonnées doivent être indépendantes et identiquement distribuées (i.i.d).**

- **Application au calcul des provisions :**

On souhaite obtenir des intervalles de confiance pour les variables aléatoires PSAP et  $ME_{sinistre}$ . Pour cela, on se base sur les règlements des années précédentes. Cependant, on ne peut pas utiliser directement le triangle des règlements cumulés car ces variables ne sont pas indépendantes. En effet, excepté ceux de la première colonne, les montants cumulés dépendent des observations précédentes. Afin de contourner ce problème de non indépendance, le rééchantillonnage ne s'effectuera pas sur les règlements cumulés mais sur des résidus, en particulier les résidus de Pearson car plus simples à calculer.

Les résidus de Pearson correspondent à la différence entre les montants non cumulés du triangle initial et les montants non cumulés du triangle prédit divisée par la racine carrée du montant non cumulé prédit correspondant .

- Estimation des coefficients de développement :

À partir du triangle des règlements cumulés, on calcule les coefficients de développement de la même manière que dans la méthode de Chain Ladder. Ensuite, On complète le triangle inférieur à partir des coefficients calculés.

- Calcul des résidus de Pearson :

a. On décumule le triangle des règlements cumulés ( $C_{i,j}$ ) et le triangle prédit des règlements cumulés ( $D_{i,j}$ ) afin d'obtenir le triangle des règlements non cumulés ( $Y_{i,j}$ ) et le triangle prédit des règlements non-cumulés, noté ( $Z_{i,j}$ ) :

$$Y_{i,0} = C_{i,0} \text{ et } Z_{i,0} = D_{i,0} \text{ pour } i \in \{0, \dots, n\}$$

$$Y_{i,j} = C_{i,j} - C_{i,j-1} \text{ et } Z_{i,j} = D_{i,j} - D_{i,j-1} \text{ pour } i \in \{0, \dots, n\} \text{ et } j \in \{1, \dots, n - i\}$$

- b. À l'aide de ces deux nouveaux triangles, on calcule le triangle des résidus de Pearson, noté  $(r_{i,j})$  :
- $$r_{i,j} = \frac{Y_{i,j} - Z_{i,j}}{\sqrt{Z_{i,j}}} \quad \text{pour } i \in \{0, \dots, n\} \text{ et } j \in \{0, \dots, n - i\}$$

Ces résidus sont indépendants et identiquement distribués, excepté les deux situés aux extrémités de la diagonale qui sont nuls par construction, et devront donc être exclus du rééchantillonnage.

- Réajustement des résidus de Pearson :

Les résidus de poisson sont réajustés afin de corriger le biais des estimations du Bootstrap

$$r_{i,j}^a = \sqrt{\frac{K}{K-p}} r_{i,j} \quad \text{où } K = \frac{n(n+1)}{2} \text{ le nombre de données}$$

Et  $p = 2n - 1$  le nombre de paramètres.

- Rééchantillonnage des résidus de Pearson ajustés :

les résidus calculés dans l'étape précédente sont ensuite rééchantillonnés aléatoirement avec remise pour former un triangle des résidus « Bootstrap » que l'on note  $(r_{i,j}^{a*})$ .

- Calcul de la provision « Bootstrap » :

Après avoir calculé le triangle des résidus « Bootstrap », on calcule le triangle des règlements non-cumulés « Bootstrap »  $(Y_{i,j}^*)$  en effectuant le chemin inverse qui nous a permis précédemment le calcul des résidus:

$$Y_{i,j}^* = Z_{i,j} + r_{i,j}^{a*} \times \sqrt{Z_{i,j}} \quad \text{pour } i \in \{0, \dots, n\} \text{ et } j \in \{0, \dots, n - i\}$$

Par la suite, on détermine le triangle des règlements cumulés « Bootstrap »  $(C_{i,j}^*)$  :

$$C_{i,j}^* = \sum_{k=0}^j Y_{i,k}^* \quad \text{pour } i \in \{0, \dots, n\} \text{ et } j \in \{0, \dots, n - i\}$$

Ce triangle nous permet alors de calculer le montant de la PSAP « Bootstrap »  $\hat{R}^*$  et celui de la meilleure estimation pour sinistre  $\widehat{ME}_{sinistre}^*$  à l'aide de la méthode de Chain Ladder.

On réitère  $N$  fois ces étapes afin d'obtenir un échantillon de  $N$  observations des deux variables  $R$  et  $ME_{sinistre}$ . On peut alors calculer sa moyenne et son écart-type empirique :

- Moyenne empirique :  $\bar{R} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \hat{R}^{*(k)}$  ;  $\overline{ME}_{sinistre} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \widehat{ME}_{sinistre}^{*(k)}$
- Écart-type empirique :

$$\hat{\sigma}_R = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{k=1}^N (\hat{R}^{*(k)} - \bar{R})^2} \quad ; \quad \hat{\sigma}_{ME} = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{k=1}^N (\widehat{ME}_{sinistre}^{*(k)} - \overline{ME}_{sinistre})^2}$$

Pour un nombre d'itérations suffisamment grand ,l'échantillon suit une loi normale. On peut ainsi déterminer l'intervalle de confiance au niveau  $1-\alpha$  pour les deux variables aléatoires R et  $ME_{sinistre}$  :

$$[\bar{R} - q_{1-\frac{\alpha}{2}} \times \hat{\sigma}_R ; \bar{R} + q_{1-\frac{\alpha}{2}} \times \hat{\sigma}_R]$$

$$[\overline{ME}_{sinistre} - q_{1-\frac{\alpha}{2}} \times \hat{\sigma}_{ME} ; \overline{ME}_{sinistre} + q_{1-\frac{\alpha}{2}} \times \hat{\sigma}_{ME}]$$

où  $q_{1-\frac{\alpha}{2}}$  est le quantile d'ordre  $1 - \frac{\alpha}{2}$  de la loi normale standard.

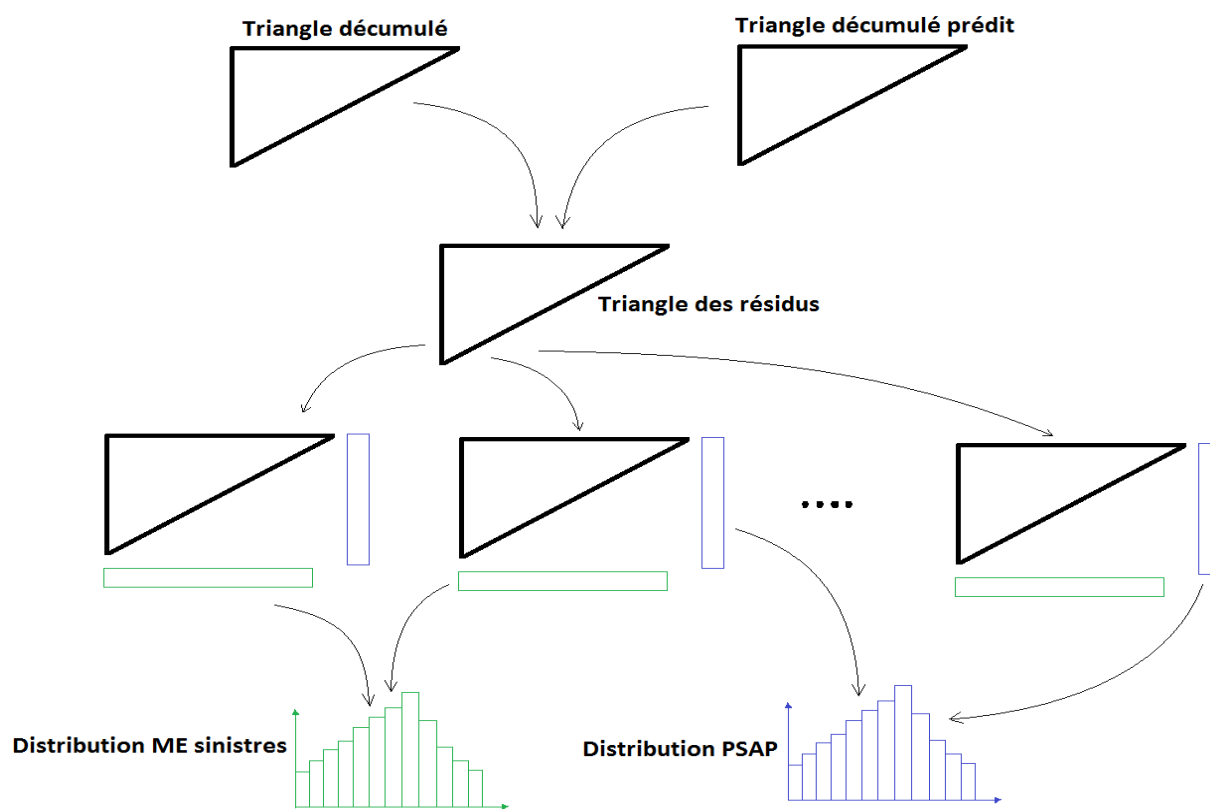


Figure 20: Schéma illustratif du principe du Bootstrap

### I.1.3. Application et résultats :

#### I.1.3.1. Présentation des données :

Le calcul de la  $ME_{sinistre}$  et le calcul de la PSAP sont réalisés à partir des triangles des règlements de la catégorie Transport Public des Voyageurs (TPV) de la branche d'assurance RC automobile d'une compagnie d'assurance X. La distinction des deux garanties RC matérielle et RC corporelle s'avère nécessaire du fait notamment de:

- La différence des montants d'indemnisation qui sont en général plus élevés dans le cas de la garantie RC corporelle .
- La phase de développement qui peut s'avérer longue pour la garantie RC corporelle.

Pour déterminer la  $ME_{sinistre}$ , il suffit de sommer les diagonales des paiements décumulés obtenus par la méthode qui aura été choisie pour définir les paiements futurs. Ensuite, il s'agit d'actualiser ces différents paiements aux taux zéro-coupon .

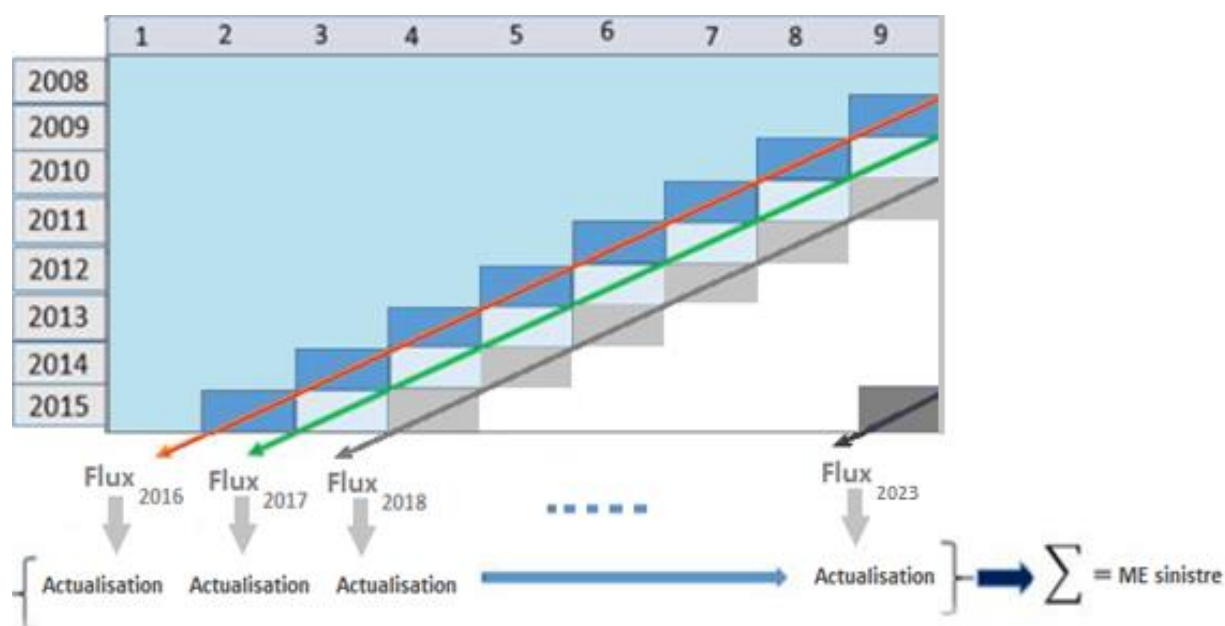


Figure 21: Méthodologie de calcul de la  $ME_{sinistre}$

#### I.1.3.2. Application des méthodes déterministes :

Lors de la vérification des hypothèses des méthodes de provisionnement, nous nous concentrons sur la garantie corporelle puisque les règlements de cette garantie sont très élevés par rapport à la garantie matérielle. De plus, La phase de liquidation

du triangle des règlements de la garantie matérielle est courte (4 années) par rapport à celle du triangle des règlements de la garantie corporelle (15 années). Par conséquent, elle est insuffisante pour vérifier les hypothèses, les provisions pour cette garantie sont calculées sans validation des hypothèses des modèles de provisionnement.

✓ **La méthode de Chain Ladder :**

• **Validation des hypothèses :**

Pour valider l'hypothèse (H1), nous avons recouru à une illustration graphique.

En effet, on compare les facteurs de développement individuels  $f_{i,j} = \frac{C_{i,j+1}}{C_{i,j}}$  à leur moyenne  $\bar{f}_j$

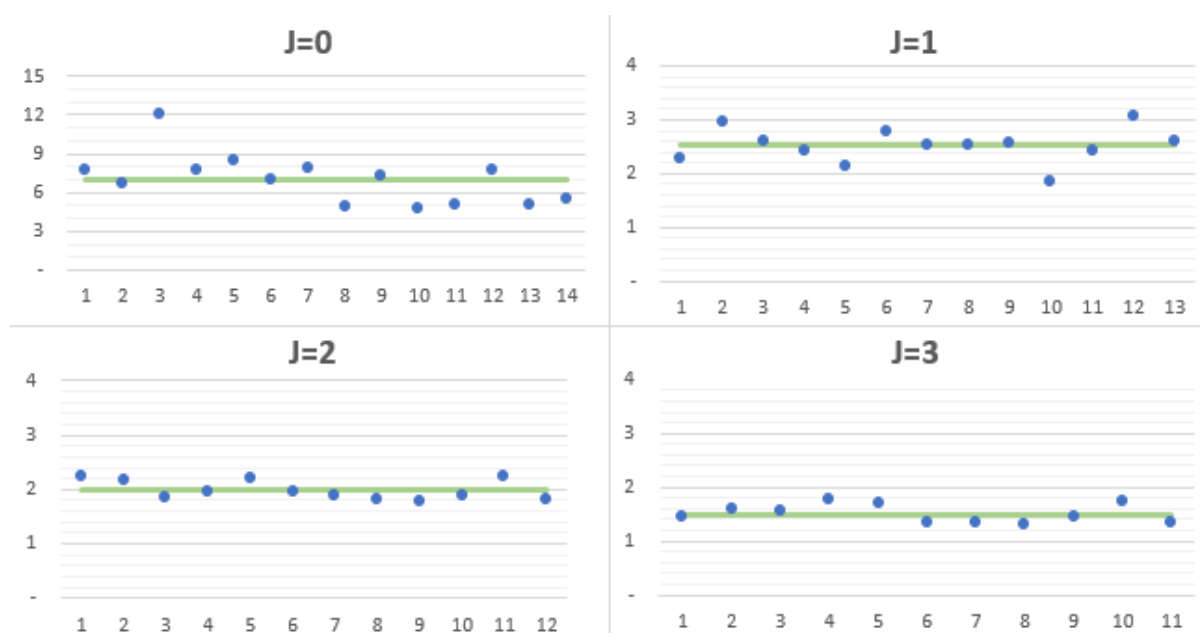


Figure 22: Test d'indépendance des facteurs individuels pour  $j=0$  à 3 (dommages corporels)

Pour la première année de développement, l'hypothèse d'égalité des coefficients sur les années de souscription n'est pas vérifiée, les coefficients par année sont plutôt volatiles autour de la moyenne.

A partir de la deuxième année, les facteurs de développement sont relativement proches de leur moyenne. Par conséquent, l'hypothèse de l'indépendance des facteurs des années de survenance est acceptée.

Afin de vérifier l'hypothèse (H2), les  $n - j$  couples  $(C_{i,j}, C_{i,j+1})_{j=0, \dots, n-j-1}$  doivent relativement former des droites passant par l'origine du repère. Nous appelons ces graphes les CC-plots.

Ci-dessous, les CC-plots appliqués au triangle des règlements de la garantie RC corporelle de la catégorie TPV.

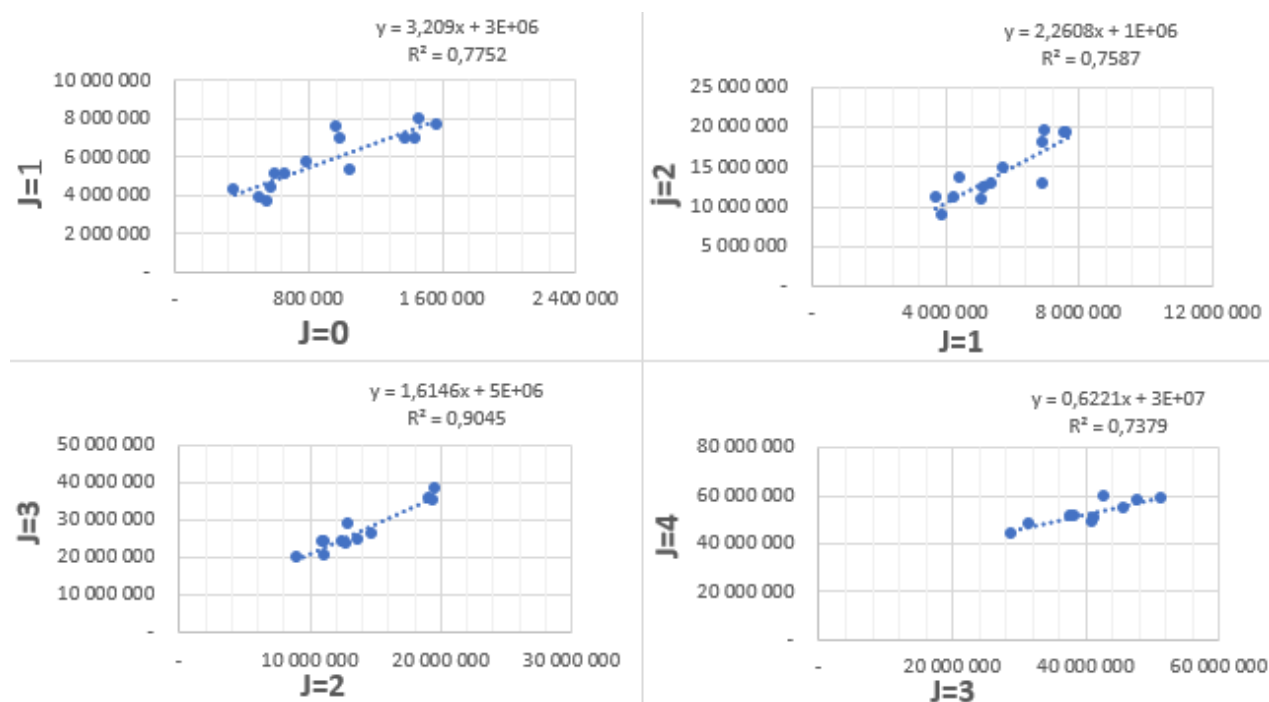


Figure 23: CC-Plots RC dommages corporels de la catégorie TPV j=0 à 4.

Au regard des graphiques ci-dessus, les coefficients de détermination R des droites de régression sont tous supérieurs à 70%. Ainsi, l’hypothèse (H2) de Chain Ladder est vérifiée, en considérant toutefois que les constantes provenant des régressions sont négligeables.

• **Résultats :**

- Les coefficients de développement qui nous ont permis de compléter la partie inférieure du triangle des règlements cumulés sont les suivants :

Coefficients de développement	6.34	2.51	1.96	1.48	1.29	1.18	1.12	1.10	1.05	1.04	1.03	1.02	1.03	1.04
-------------------------------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------

Tableau 19: Les coefficients de développement de la méthode de Chain Ladder (Dommages corporels)

Coefficients de développement	1.79	1.07	1.03
-------------------------------	------	------	------

Tableau 20 : Les coefficients de développement de Chain Ladder (Dommages matériels)

- les cash-flows se calculent en sommant les éléments constitutifs de chaque diagonale du triangle inférieur décumulé. Les cash-flows obtenus sont ensuite actualisés sur la base de la courbe des taux zéro-coupon puis sommés pour obtenir le montant de la  $ME_{sinistre}$ . (voir figure 21)

Les tableaux suivants représentent les PSAP et les cash-flows par année estimés par la méthode de Chain Ladder.

Année	PSAP
2001	-
2002	3 589 630,05
2003	5 675 059,45
2004	8 654 688,38
2005	7 661 108,25
2006	13 861 960,75
2007	22 778 024,10
2008	25 249 011,27
2009	31 370 472,68
2010	39 403 785,76
2011	50 355 460,88
2012	59 815 151,26
2013	102 588 391,83
2014	125 800 364,89
2015	54 010 959,78

Tableau 21: PSAP annuelles estimées par la méthode Chain Ladder (Dommages corporels)

Année	Cash flow
2016	96 764 844,67
2017	92 584 146,65
2018	81 696 544,33
2019	67 071 882,25
2020	54 149 136,43
2021	42 557 585,67
2022	32 118 795,64
2023	23 736 505,23
2024	17 695 015,99
2025	13 437 660,06
2026	10 786 101,29
2027	9 655 350,99
2028	6 579 265,11
2029	1 981 235,05

Tableau 22: Cash-flow annuels estimés par la méthode Chain Ladder (Dommages corporels)

Année	PSAP
2012	-
2013	238 852,27
2014	872 190,38
2015	6 675 838,28

Tableau 23: PSAP annuelles estimées par la méthode Chain Ladder (Dommages matériels)

Année	Cash flow
2016	6 183 098,05
2017	1 164 289,41
2018	439 493,47

Tableau 24: Cash-flow annuels estimés par la méthode Chain Ladder (Dommages matériels)

Le tableau suivant résume les montants obtenus de la PSAP et de la  $ME_{sinistre}$  de la catégorie TPV.

	Dommages corporels	Dommages matériels	Total
PSAP	550 814 069,35	7 786 880,94	558 600 950,29
$ME_{sinistre}$	488 510 681,73	7 548 288,50	496 058 970,23

Tableau 25: Valeurs de la PSAP et de la  $ME_{sinistre}$  estimées par la méthode de Chain Ladder

#### ✓ La méthode de London Chain :

- **Validation des hypothèses :**

D'après les CC-plots réalisés auparavant dans la méthode de Chain Ladder, les points  $(C_{i,j}, C_{i,j})_{j=0, \dots, n-j}$  pour chaque année  $j$  sont sensiblement alignés sur une droite. Donc on peut appliquer la méthode de London Chain.

- **Résultats :**

Les tableaux suivants résument les coefficients  $f_j$  et  $\alpha_j$  trouvés pour chacune des deux garanties :

$f_j$	3.21	2.26	1.61	0.91	0.62	0.85	1.19
$\alpha_j$	2 880 675.95	1 393 577.08	4 785 666.07	15 489 415.40	27 363 468.88	17 291 045.30	-4 912 327.80
	1.45	1.10	1.06	0.86	1.10	0.61	1.04
	-24 753 175	-3 475 926.94	-1 161 816.07	13 787 575.11	-6 884 862.12	37 884 403.50	0

Tableau 26: Estimation des paramètres de la méthode de London Chain (Dommages corporels)

$f_j$	0.91	0.90	1.03
$\alpha_j$	3 607 729.46	1 168 159.26	0

Tableau 27: Estimation des paramètres de la méthode de London Chain (Dommages matériels)

Ces coefficients nous permettent d'estimer la partie inférieure du triangle des règlements cumulés. En procédant par la même démarche que précédemment, nous obtenons les PSAP et les cash-flows suivants :

Année	PSAP
2001	-
2002	3 589 630,05
2003	10 631 249,46
2004	7 566 325,20
2005	20 179 234,32
2006	14 694 552,68
2007	12 086 761,93
2008	25 412 602,70
2009	32 450 622,45
2010	42 107 271,90
2011	54 937 359,41
2012	68 359 763,66
2013	80 493 899,53
2014	91 902 598,89
2015	91 957 906,23

Tableau 28: PSAP annuelles estimées par la méthode London Chain (Dommages corporels)

Année	Cash flow
2016	110 714 192,38
2017	88 471 710,64
2018	80 268 396,57
2019	64 087 335,48
2020	45 398 116,60
2021	44 157 540,62
2022	35 264 660,84
2023	26 936 500,17
2024	18 473 012,95
2025	14 790 667,67
2026	10 127 155,98
2027	5 661 822,70
2028	8 658 591,57
2029	3 360 074,26

Tableau 29: Cash-flows annuels estimés par la méthode London Chain (Dommages corporels)

Année	PSAP
2012	-
2013	238852,27
2014	872190,38
2015	6 675 838,28

Tableau 30 : PSAP annuelles estimées par la méthode London Chain (Dommages matériels)

Année	Cash flow
2016	3 651 098
2017	521 164,08
2018	338 629,37

Tableau 31: Cash-flows annuels estimés par la méthode London Chain (Dommages matériels)

	Dommages corporels	Dommages matériels	Total
PSAP	556 369 778,43	4 510 891,44	560 880 669,87
ME <sub>sinistre</sub>	493 610 601,17	4 372 230,97	497 982 832,14

Tableau 32 : Valeurs de la PSAP et de la ME<sub>sinistre</sub> estimées par la méthode de London Chain

## ✓ La méthode de DeVlyder :

L'estimation des paramètres de la méthode de DeVlyder :

I	C <sub>i</sub>	J	P <sub>j</sub>
2001	108 927 048,8	0	0,007711161
2002	125 078 286,9	1	0,040590825
2003	108 380 554,8	2	0,072990757
2004	127 205 369,1	3	0,115677848
2005	92 657 391,44	4	0,111626078
2006	117 030 219,7	5	0,102552356
2007	140 208 961,3	6	0,081996425
2008	117 458 054,1	7	0,063103374
2009	114 389 673,8	8	0,061117357
2010	111 229 889,2	9	0,032854234
2011	111 336 712,5	10	0,028829858
2012	104 449 409,4	11	0,018560944
2013	149 320 335,3	12	0,015758649
2014	162 134 982,2	13	0,024538478
2015	66 719 427,25	14	0,030912698

Tableau 33 : Les paramètres estimés de la méthode de DeVlyder (Dommages corporels)

I	C <sub>i</sub>	j	P <sub>j</sub>
2012	13 751 655,43	0	0,297224298
2013	12 401 185,71	1	0,23724857
2014	15 109 402,83	2	0,038115199
2015	22 858 140,82	3	0,019429162

Tableau 34 : Les paramètres estimés de la méthode de DeVlyder (Dommages matériels)

Ainsi, on complète la partie inférieure des triangles des règlements non cumulés. Ensuite, nous en déduisons le montant de la ME<sub>sinistre</sub> et de la PSAP.

	Domages corporels	Domages matériels	Total
PSAP	549 041 901,44	7 848 823,88	556 890 725,32
ME <sub>sinistre</sub>	486 917 168,23	7 608 494,13	494 525 662,36

Tableau 35 : Valeurs de la PSAP et de la ME<sub>sinistre</sub> estimées par la méthode de DeVlyder

### 1.1.3.3. Application des méthodes stochastiques :

✓ La méthode de Mack

• Validation des hypothèses :

Les hypothèses (H1) et (H2) de la méthode de Mack ont déjà été validées dans la partie portant sur la méthode de Chain Ladder.

Afin de vérifier l’hypothèse (H3) on peut étudier le fait que pour chaque année de développement la représentation graphique ( $\epsilon_{i,j}, C_{i,j}$ ) doit être non structurée et ne manifeste pas de tendance. Les  $\epsilon_{i,j}$  représentent les résidus de l’estimation par moindre carrés, soit :

$$\epsilon_{i,j} = \frac{C_{i,j+1} - f_j \hat{C}_{i,j}}{\sqrt{\hat{C}_{i,j}}}$$

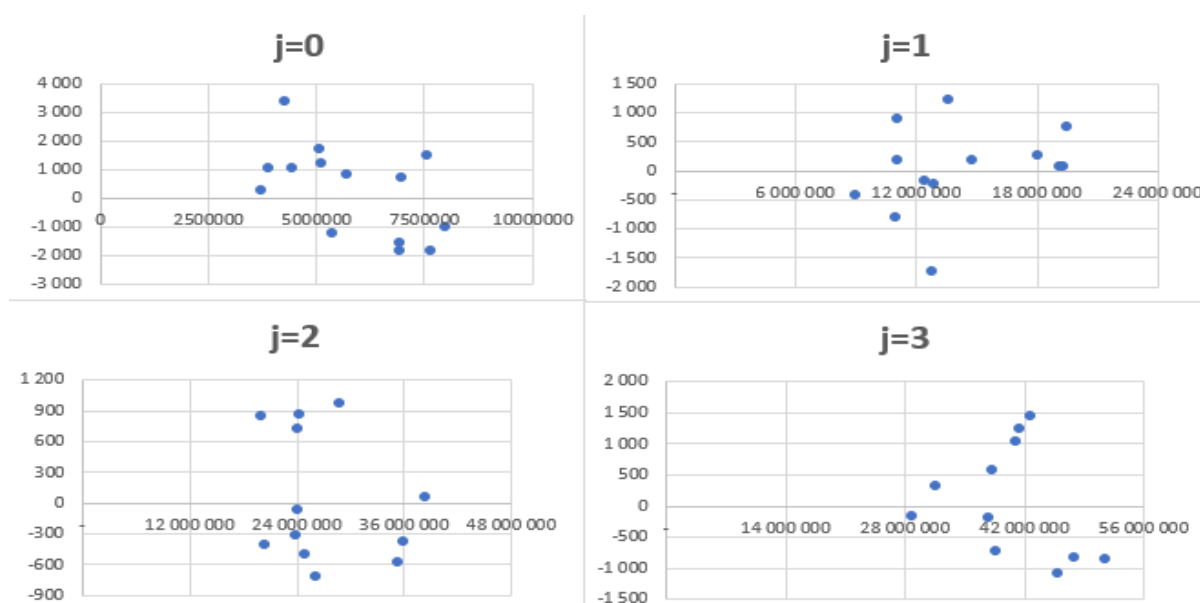


Figure 24 : Représentation des nuages des points ( $\epsilon_{i,j}, C_{i,j}$ ) pour  $j=0$  à  $3$  des dommages corporels.

Les résidus semblent aléatoires et ne présentent pas de tendance. Par conséquent, l’hypothèse (H3) est vérifiée.

• Résultats :

Comme la méthode de Mack repose sur la méthode déterministe de Chain Ladder, les coefficients de développement ainsi que les montants des provisions qui

résultent des deux méthodes sont pareils .Comme nous avons vu auparavant, l’apport de la méthode de Mack réside dans la possibilité d’estimer les erreurs de prédiction.

En partant des triangles des règlements cumulés et des formules d’estimation des coefficients  $\sigma_j$ , nous obtenons les résultats ci-dessous :

<b>coefficients sigma<sup>2</sup></b>	2533722	577790,75	406776,34	829027,57	753615,75	249334,95	143591,13
	409608,13	18644,26	16495,92	64883,48	8100,73	94932,56	8100,73

Tableau 36 : Estimation des coefficients  $\sigma_j$  de la méthode de Mack (Dommages corporels)

<b>coefficients sigma<sup>2</sup></b>	153704,29	1724,38	19,35
---	-----------	---------	-------

Tableau 37 : Estimation des coefficients  $\sigma_j$  de la méthode de Mack (Dommages matériels)

En supposant la loi suivie par la PSAP, il nous est possible de déterminer des quantiles et par conséquent de construire les intervalles de confiance des provisions. Deux lois sont les plus utilisées en assurance non vie :la loi Log-normale et la loi normale. L’utilisation de cette dernière est critiquée du fait qu’elle peut engendrer des valeurs négatives, ce qui n’est pas le cas des provisions.

Année	PSAP par année	SEP par année	Intervalle de confiance à 95% Loi Log-Normale	
			borne inf par année	borne sup par année
2 001	-	-	-	-
2 002	3 589 630,05	1 262 268,29	1 734 183,15	6 612 681,79
2 003	5 675 059,45	3 563 497,09	1 552 580,41	14 877 970,82
2 004	8 654 688,38	4 137 007,34	3 209 434,91	18 998 062,00
2 005	7 661 108,25	4 027 005,80	2 575 623,43	17 854 829,02
2 006	13 861 960,75	5 105 259,51	6 465 874,46	26 169 000,42
2 007	22 778 024,10	6 269 481,65	12 931 109,09	37 298 019,77
2 008	25 249 011,27	8 990 880,25	12 084 202,47	46 819 818,73
2 009	31 370 472,68	9 756 097,47	16 513 491,04	54 339 140,11
2 010	39 403 785,76	11 086 578,31	22 082 523,25	65 154 542,37
2 011	50 355 460,88	14 910 026,53	27 355 011,29	85 224 137,50
2 012	59 815 151,26	18 147 635,94	31 996 570,25	102 395 675,09
2 013	102 588 391,83	24 158 386,39	63 332 800,81	157 446 035,68
2 014	125 800 364,89	29 736 931,62	77 516723,78	193 356 578,24
2 015	54 010 959,78	26 676 117,07	19 381 813,29	120 997 826,28

Tableau 38 : Erreurs standards de prédiction et intervalles de confiance au niveau de 95% (Dommages corporels)

Année	PSAP par année	SEP par année	Intervalle de confiance à 95%	
			Loi Log-Normale	
			borne inf par année	borne sup par année
2 012	-	-	-	-
2 013	238 852,27	16 100,66	208 848,70	271 931,24
2 014	872 190,38	154 381,60	608 704,30	1 211 772,44
2 015	6 675 838,28	1 423 629,53	4 318 605,32	9 870 913,05

Tableau 39: Erreurs standards de prédiction et intervalles de confiance au niveau de 95% (Dommages matériels)

A l'instar du calcul fait pour les PSAP annuelles, nous estimons les erreurs standards de prédiction de la PSAP globale et nous construisons l'intervalle de confiance qui s'y rapporte pour la loi log-normale. Ensuite, nous calculons l'erreur de prédiction relative qui permet de juger des provisions estimées.

Comme vu précédemment, l'erreur de prédiction relative se calcule par la formule suivante :  $SEER = \frac{\sqrt{MSEP(\hat{R})}}{\hat{R}} = \frac{SEP}{\hat{R}}$

R	SEP	SER	Intervalle de confiance à 95%	
			Loi Log-Normale	
			borne inf	borne sup
550 814 069,35	72 065 945,87	13%	423 081 816,38	705 041 040,41

Tableau 40 : SEP et intervalle de confiance au niveau de 95% de la PSAP (Dommages corporels)

R	SEP	SER	Intervalle de confiance à 95%	
			Loi Log-Normale	
			borne inf	borne sup
7 786 880,94	1 441 516,84	19%	5 343 141,35	10 972 271,24

Tableau 41 : SEP et intervalle de confiance au niveau de 95% de la PSAP (Dommages matériels)

Pour la garantie corporelle, l'erreur standard relative est égale à 13%, c'est-à-dire la variance de l'estimation ne représente que 13% du montant total des réserves estimées. Donc, la méthode de Mack donne une bonne estimation provisions pour la garantie étudiée.

De même, l'estimation de la réserve pour la garantie matérielle est aussi satisfaisante. L'erreur standard relative étant de 19%, nous pouvons affirmer qu'on est en présence d'une bonne approximation de la valeur réelle de la PSAP.

#### ✓ La méthode de GLM

L'application du GLM est basée sur le triangle des règlements non cumulés, où on considère les années de développement  $j$  et de survenance  $i$  autant que des variables explicatives.

Pour appliquer la modélisation GLM sur le triangle des règlements non cumulés, il faut d'abord détecter une loi appartenant à la famille exponentielle et susceptible de modéliser les règlements. En prenant en compte le fait que le règlement est une variable continue positive, parmi les lois servant à régresser nos données on trouve la loi Gamma et la loi Log-normale. Ensuite, on construit une base de données adéquate pour appliquer la méthode. Pour s'assurer de la pertinence de telle ou telle loi nous recourrons dans un premier temps aux diagrammes Quantile-Quantile et par la suite aux tests de normalité sur les résidus de Pearson.

- **Dommages corporels :**

Les graphes suivants sont les Q-Q plot de la loi Log-normale et de la loi Gamma appliqués aux données du triangle des règlements de la garantie corporelle:

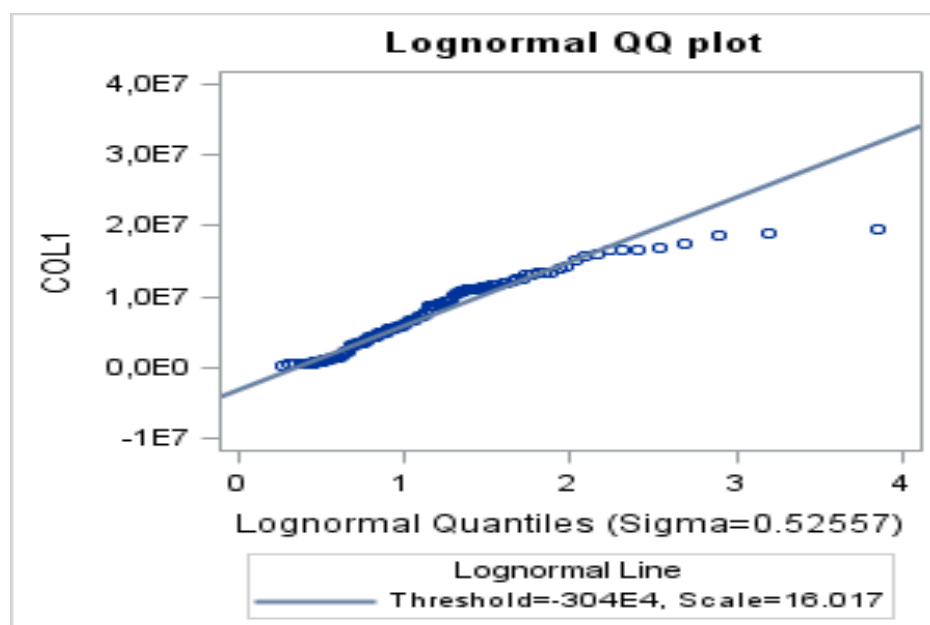


Figure 25: Q-Q plot de la loi Log-normale (Dommages corporels)

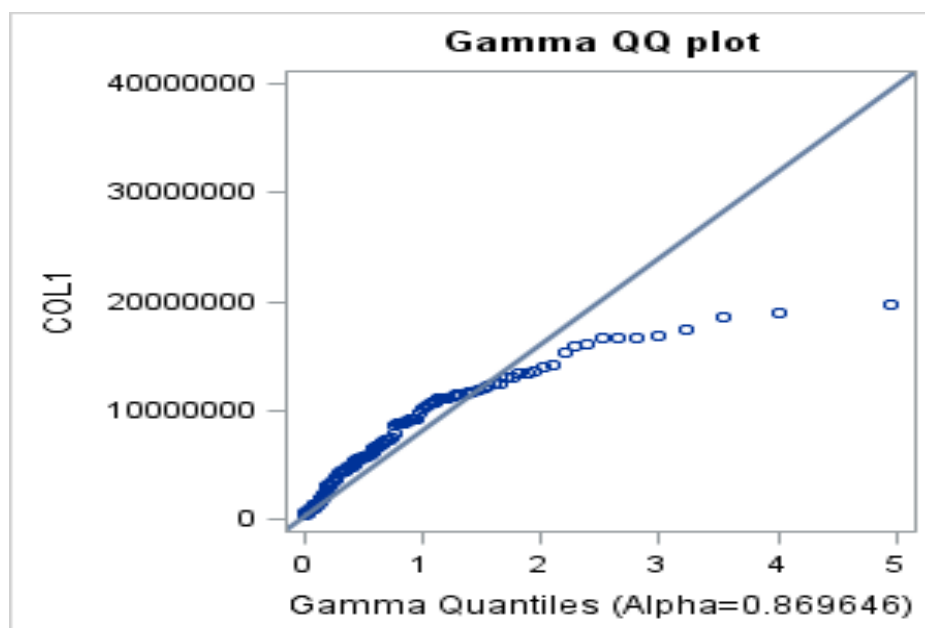


Figure 26: Q-Q plot de la loi Gamma (Dommages corporels)

Les points générés par les deux lois s'alignent assez bien autour de la droite. En conséquence, il semble que les deux distributions ajustent les données du triangle des dommages corporels.

Les estimations des paramètres du modèle Log-normale et du modèle Gamma sont présentées dans les annexes 1 et 2.

Pour mesurer la qualité de l'ajustement des modèles GLM, on fait recours au test de Shapiro Wilk pour tester la normalité des résidus de Pearson.

#### Shapiro-Wilk normality test

```
data: rstudent(reg1)
W = 0.9807, p-value = 0.08787
```

Figure 27: Test de Shapiro Wilk sur les résidus de la régression Log-normale

#### Shapiro-Wilk normality test

```
data: rstudent(reg2)
W = 0.92751, p-value = 0.4937
```

Figure 28: Test de Shapiro Wilk sur les résidus de la régression Gamma

D'après les résultats ci-dessus la p-value du modèle Log-normal est supérieur à 5%, donc la normalité des résidus est significativement vérifiée pour ce modèle. Ainsi, le modèle Log-normal est adéquat. Quant au modèle de Gamma, la p-value du test est

inférieure à 5%. Par conséquent, le modèle de Gamma n'est pas adéquat. Donc, le modèle retenu est celui du Log-normal.

Par la suite, en extrayant le tableau des valeurs prévues par la loi Log-normale des règlements décumulés et en suivant les démarches de calcul des cash-flows et des provisions annuelles, nous avons obtenu les montants de la PSAP et de la  $ME_{sinistre}$  résumés dans le tableau suivant.

	Dommages corporels
PSAP	553 509 685,20
$ME_{sinistre}$	491 261 599,00

Tableau 42: Valeurs de la PSAP et de la  $ME_{sinistre}$  estimées par GLM (Dommages corporels)

Les graphes suivants représentent les Q-Q plot de la loi Gamma et de la loi Log-normale sur le triangle des règlements des dommages matériels.

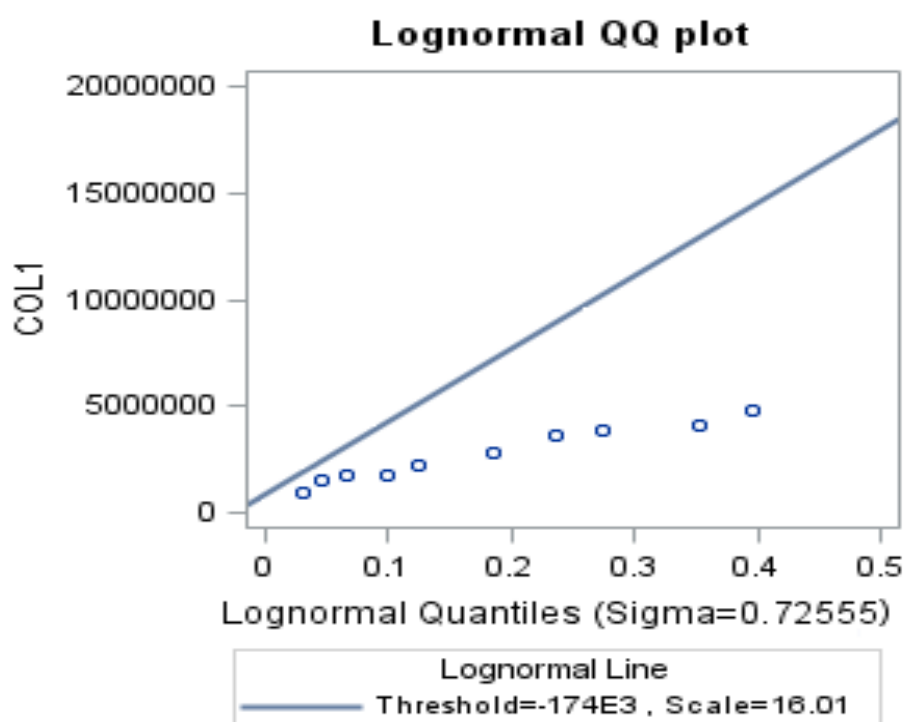


Figure 29: Q-Q plot de la loi Log-Normale (Dommages matériels)

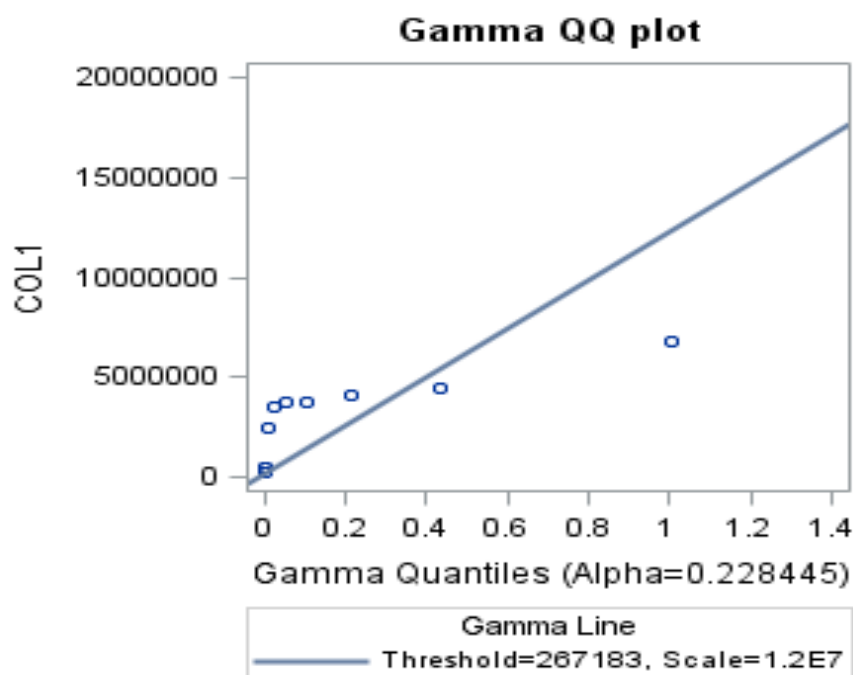


Figure 30: Q-Q plot de la loi Gamma (Dommages matériels)

D'après les graphes ci-hauts, il s'avère claire que les points ne s'alignent pas sur la droite pour les deux lois. Donc, la modélisation GLM n'est pas valable pour les données de la garantie matérielle. Cependant, nous avons choisi de calculer les provisions de cette garantie par le modèle Log-normal vu qu'il est retenu par la garantie corporelle et ce afin d'estimer un montant total par la modélisation GLM pour la branche étudiée.

	Dommages corporels	Dommages matériels	Total
PSAP	553 509 685,20	7 871 417,94	561 381 103,14
ME <sub>sinistre</sub>	491 261 599,00	7 604 356,94	498 865 955,94

Tableau 43: Récapitulatif des valeurs de la PSAP et de la ME<sub>sinistre</sub> estimées par GLM

#### ✓ Méthode de Bootstrap :

Concernant la méthode de Bootstrap, nous avons choisi d'effectuer 1000 simulations de la PSAP et de la meilleure estimation pour sinistres. Sur la base des deux échantillons simulés, nous calculons la ME<sub>sinistre</sub> (respectivement la PSAP) retenue comme étant la moyenne de toutes les valeurs de l'échantillon de la meilleure estimation pour sinistres (respectivement la PSAP).

L'application de la méthode de Bootstrap aux deux triangles des dommages corporels et matériels fournit les résultats présentés dans les tableaux suivants.

échantillon PSAP	échantillon $ME_{sinistre}$
511 235 858,26	456 041 693,34
558 844 181,09	494 195 600,31
471 782 330,10	421 912 729,01
675 145 568,19	594 147 599,27
450 810 667,36	405 412 773,23
471 192 301,49	418 820 179,23
460 855 098,46	410 718 988,53
438 004 336,00	392 789 970,35
683 879 873,89	603 244 313,71
543 407 152,27	485 193 197,18
749 963 232,45	656 769 648,96
534 060 621,48	475 430 940,23
634 558 258,71	560 855 427,65
506 548 125,36	450 381 709,23
516 530 578,95	460 463 741,13

Tableau 44: Extrait des échantillons de la PSAP et de la  $ME_{sinistre}$  (Dommages corporels)

échantillon PSAP	échantillon $ME_{sinistre}$
6 740 916,47	6 529 648,27
8 112 971,30	7 849 540,16
8 991 490,56	8 699 751,24
8 409 963,08	8 150 769,46
7 834 797,65	7 590 466,11
7 664 660,38	7 440 373,12
7 297 998,93	7 063 440,77
7 818 201,08	7 573 639,39
7 589 363,53	7 354 027,23
7 317 292,49	7 096 646,55
8 095 436,04	7 837 540,23

Tableau 45: Extrait des échantillons de la PSAP et de la  $ME_{sinistre}$  (Dommages matériels)

Etant donné que le nombre des observations de chaque échantillon est grand, la distribution des échantillons est approximativement la loi normale, Cela permet de fournir les intervalles de confiance suivants :

moyenne PSAP	écart-type PSAP	IC inf PSAP	IC sup PSAP
561 221 470,57	104 142 581,97	389 922 166,89	732 520 774,25
moyenne $ME_{sinistre}$	écart-type $ME_{sinistre}$	IC inf $ME_{sinistre}$	IC sup $ME_{sinistre}$
497 354 311,34	88 561 212,90	351 684 079,10	643 024 543,58

Tableau 46: Valeurs de la PSAP et de la  $ME_{sinistre}$  et intervalles de confiance (Dommages corporels)

moyenne PSAP	écart-type PSAP	IC inf PSAP	IC sup PSAP
7 841 950,16	757 086,67	6 358 087,56	9 325 812,77
moyenne $ME_{sinistre}$	écart-type $ME_{sinistre}$	IC inf $ME_{sinistre}$	IC sup $ME_{sinistre}$
7 601 356,99	730 302,65	6 169 990,10	9 032 723,87

Tableau 47: Valeurs de la PSAP et de la  $ME_{sinistre}$  et intervalles de confiance (Dommages matériels)

#### 1.1.3.4. Récapitulatifs des résultats :

Les tableaux ci-dessous synthétisent les provisions obtenues pour chacune des méthodes étudiées ainsi que leurs écarts par rapport à la méthode préconisée par la réglementation SBR:

	Chain Ladder	London Chain	DeVylder	Mack	GLM	Bootstrap
PSAP	558 600 950,29	560 880 669,87	556 890 725,32	558 600 950,29	561 381 103,14	569 063 420,73
Ecart CL	-	0,41%	-0,31%	0,00%	0,50%	1,84%

Tableau 48: Récapitulatif des résultats de la PSAP de la catégorie TPV de la branche RC automobile

	Chain Ladder	London Chain	DeVylder	Mack	GLM	Bootstrap
$ME_{sinistre}$	496 058 970,23	497 982 832,14	494 525 662,36	496 058 970,23	498 865 955,94	504 955 668,33
Ecart CL	-	0,39%	-0,31%	0,00%	0,56%	1,76%

Tableau 49: Récapitulatif des résultats de la  $ME_{sinistre}$  de la catégorie TPV de la branche RC automobile

En observant les tableaux ci-dessus, nous remarquons que la méthode de London Chain, la méthode de GLM ainsi que la méthode de Bootstrap donnent des provisions plus grandes et donc plus prudentes par rapport aux autres méthodes.

Toutes les méthodes aboutissent en valeur absolue à un écart relatif qui ne dépasse guère les 2%, Il en ressort que les méthodes déterministes et stochastiques étudiées ne divergent pas du montant des provisions de la méthode préconisée par la réglementation SBR.

Par ailleurs, il est judicieux de mentionner que le montant de la meilleure estimation pour sinistres est toujours inférieur au montant de la PSAP. Ceci est due à la décomposition de la meilleure estimation pour sinistres en flux futurs actualisés par les taux zéro-coupon ce qui n'est pas autorisé pour la PSAP où les flux sont sommés sans être actualisés.

Dans la suite, nous retenons le montant de la meilleure estimation calculé par la méthode de Chain Ladder puisque c'est la méthode préconisée par le projet de circulaire SBR. Ainsi, l'évaluation de la meilleure estimation sinistre en 2015 est de **496 058 970,23 MAD**

## I.2. Meilleure estimation des engagements pour primes :

### I.2.1. Présentation :

La meilleure estimation des engagements pour primes ( $ME_{primes}$ ) représente l'engagement de l'assureur lié aux sinistres non survenus à la date de l'évaluation. Elle représente l'équivalent prudentiel des PPNA et PREC<sup>8</sup>. Le calcul de la meilleure estimation des engagements pour primes est effectué selon la formule suivante :

$$ME_{primes} = RSC \times (PPNA + PF) \times \sum_i \frac{cad_i}{(1 + r_i)^i} - PF^-$$

Où :

- $RSC$  : Ratio de sinistralité combiné, il se calcule comme suit :

$$RSC = \frac{\sum_{3 \text{ derniers ex surv}} CU^9}{\sum_{3 \text{ derniers ex surv}} PA} + \frac{\sum_{3 \text{ derniers ex clos}} FG}{\sum_{3 \text{ derniers ex clos}} PE}$$

- $CU$ : la charge ultime
- $FG$  : frais de gestion
- $PA$  : primes acquises
- $PE$  : primes émises
- $PPNA$  : provision pour primes non acquises à la date d'évaluation.
- $PF$  : Primes futures à la date d'inventaire afférents aux contrats à tacite reconduction.
- $cad_i$ : Cadence de liquidation de l'année de projection  $i$ . Les cadences peuvent être estimées par la méthode de Chain Ladder sur le triangle des règlements cumulés (la somme des cadences est égale à 100%).
- $r_i$ : taux sans risque.
- (-) : nettes des frais d'acquisition.

<sup>8</sup> La provision pour risques en cours (PREC) est définie comme étant le montant à provisionner en supplément des primes non acquises pour couvrir les sinistres non encore survenus.

<sup>9</sup> On appelle charge ultime de l'année de survenance  $i$  le montant des règlements cumulés au bout d'un certain nombre d'années de développement jugé suffisant pour la clôture du sinistre.

Pour la détermination de la meilleure estimation des engagements pour primes, il est nécessaire à la compagnie d'assurances d'effectuer une segmentation de ses opérations par sous-catégories

Avant d'entreprendre le calcul de la  $ME_{primes}$ , il est nécessaire d'aborder le calcul de la PPNA. En effet, cette provision constitue l'une des provisions primordiales qui s'évaluent dans le cadre de la réglementation actuelle. Elle s'articule autour de deux natures de primes :

- **Les primes émises (PE) :** à la souscription ou au renouvellement du contrat liant l'assureur à l'assuré, les primes sont émises pour toute la période de couverture du contrat. Il s'agit de l'engagement de l'assuré envers l'assureur.
- **Les primes acquises (PA) :** Elles correspondent à la part de prime acquise par l'assureur au fur et à mesure de l'exécution du contrat.

La PPNA est la part des primes que l'assureur doit conserver pour couvrir les sinistres non encore survenus à la date d'inventaire. La PPNA se calcule par différence entre les primes émises et les primes acquises.

### I.2.2. Application :

Nous allons maintenant présenter les étapes de calcul de la  $ME_{primes}$ . Nous calculerons en premier lieu les primes émises et les primes acquises et ce par chaque exercice d'émission, nous en déduisons par la suite le montant de la PPNA du dernier exercice. Puis nous nous intéresserons au renouvellement des primes afin d'estimer les primes futures afférentes aux contrats à tacite reconduction. Enfin, nous calculerons le ratio de sinistralité combiné et les cadences de liquidation.

#### I.2.2.1. Description des données utilisées :

Nous disposons d'une base de données de production automobile des années 2013 à 2015 de la même compagnie d'assurance X dont les triangles des règlements ont été issus. Cette base de données, volumineuse de 588 716 observations, contient les variables suivantes :

- Numéro de police (IDPOL) ;
- Identifiant du client (idclient) ;

- Usage du véhicule assuré (Tourisme , transport public de voyageurs (TPV)..) ;
- La nature de la garantie (RC, DC, Bris de Glaces, Droit d'adhésion, Fond complémentaire,..) ;
- La flotte (OUI/NON) ;<sup>10</sup>
- NATAVE (changement de véhicule, renouvellement, résiliation, précision avec attestation, carte verte<sup>11</sup>, affaire nouvelle, correction des données tarifaires, changement de véhicule, annulation, remise en vigueur);
- Date d'émission, d'effet et date d'échéance ;
- La prime émise ;

	IDPOL	Flotte	date_emis	EFFET	ECHEANCE	NATAVE	idclient	IntBranche	Usage	garantie	Q_PrimeNe
1	1.009E7	N	09/10/2015	10/01/2016	09/04/2016	Renouvellemen	684678	AUTOMOBILE	TRANSPORT PUBLIC DE VOYAGEURS(TPV)	R.C	1899.8
2	1.009E7	N	13/10/2015	10/01/2016	09/04/2016	Annulation	684678	AUTOMOBILE	TRANSPORT PUBLIC DE VOYAGEURS(TPV)	R.C	-1900
3	2051850	N	05/11/2015	01/01/2016	31/12/2016	Renouvellemen	636992	AUTOMOBILE	TRANSPORT PUBLIC DE VOYAGEURS(TPV)	R.C	6428.5
4	1.005E7	N	17/11/2015	18/02/2016	17/05/2016	Renouvellemen	689227	AUTOMOBILE	TRANSPORT PUBLIC DE VOYAGEURS(TPV)	R.C	2160.7
5	3199154	N	17/11/2015	22/01/2016	21/01/2017	Renouvellemen	507862	AUTOMOBILE	TOURISME	R.C	2186.1

Figure 31: Aperçu de la base de données des primes

#### I.2.2.2. Traitement des données :

Dans notre étude, nous n'avons traité que les contrats relatifs à la garantie responsabilité civile (RC) qui concerne les véhicules destinés au transport public des voyageurs (TPV). Ainsi, toutes les autres polices ont été retirées de la base de données .De plus, les polices dont le montant de la prime est nul ont été retirées.

- Le premier traitement effectué sur notre base de données porte sur les valeurs manquantes. La PROC FORMAT et la PROC FREQ sous SAS sont utilisées pour détecter si ces valeurs existent et de déterminer leurs pourcentages dans le cas échant.

<sup>10</sup> Le contrat d'assurance flotte automobile assure en un seul contrat plusieurs véhicules.

<sup>11</sup> La carte verte est le document d'assurance délivré par l'assureur pour couvrir le véhicule en dehors du pays de résidence de l'assuré.

Dans notre base de données, On ne dispose pas des valeurs manquantes pour les variables qui interviennent dans le calcul de la meilleure estimation des engagements pour primes.

- Comme la durée d'un contrat RC automobile est au plus égale à l'année, les polices dont la durée de couverture est supérieure à une année ont été supprimées (5 observations). En outre, les polices présentant une date d'échéance antérieure à la date d'effet ou encore les polices dont la date d'effet ou la date d'échéance sont aberrantes (exemple : date d'effet 01/01/1984) ont été exclus de la base de données (4 observations). De plus, nous avons également éliminé les polices pour lesquelles la date d'effet est antérieure à l'année de souscription (2 observations). Nous avons fait l'hypothèse que ces quatre anomalies sont dues à des erreurs de saisie informatique.

#### 1.2.2.3. Calcul de la meilleure estimation des engagements pour primes :

##### ○ Calcul des primes émises par exercice :

Les primes émises d'un exercice donné sont obtenues en sommant les primes émises pour les différents contrats au cours dudit exercice. Nous exposons les montants des primes émises par exercice dans le tableau suivant.

	ann_emiss	primeemise
1	2013	128553919.74
2	2014	145714787.22
3	2015	159315707.03

Figure 32: Primes émises par exercice en MAD

##### ○ Calcul des primes acquises par exercice :

La prime acquise est la part de la prime émise correspondant à un risque passé. Elle correspondra donc au montant de la prime émise proraté du temps déjà écoulé. Le schéma suivant illustre les trois cas possibles envisagés lors du calcul de la prime acquise d'une police:

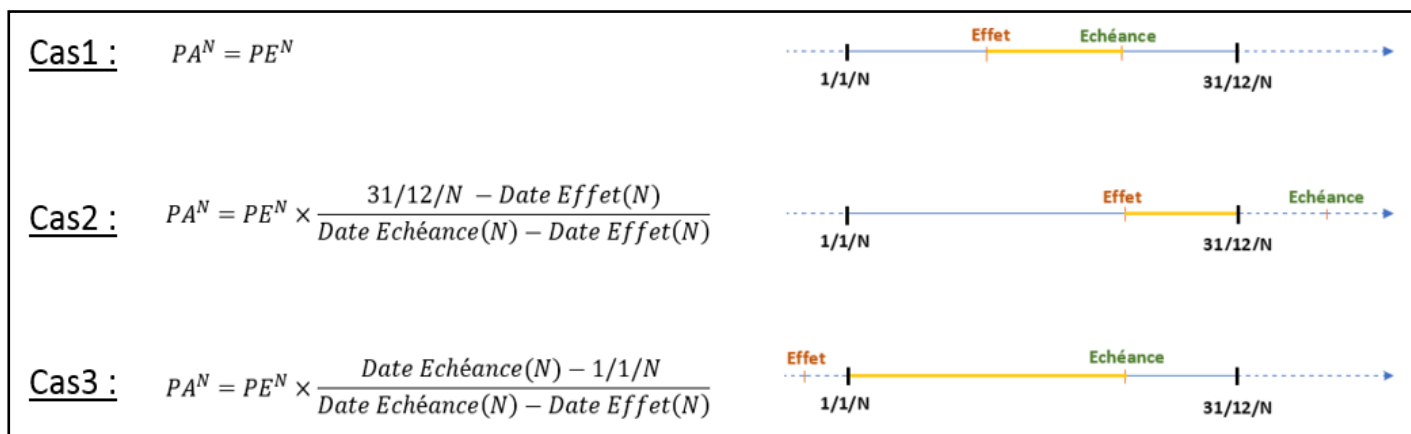


Figure 33 : Schéma illustratif des cas de calcul de la prime émise

où  $PA^N$ : La prime acquise de l'exercice N ;

$PE^N$ : La prime émise de l'exercice N ;

Pour calculer les primes acquises, trois variables ont été créés à savoir l'année d'effet, l'année d'échéance et la date d'exercice. Ensuite, les polices en vigueur sur deux exercices différents ont été dupliquées afin de n'être rattachées qu'à une seule année. Par exemple, la police xxx couvre la période 01/07/2014 à 01/07/2015, nous créons deux lignes : la première pour l'exercice de 2014, la seconde pour celui de 2015. Cela permet de calculer la prime acquise en utilisant les formules ci-dessus pour les deux exercices. Les deux tableaux ci-dessous illustre ce processus.

Police	Date d'émission	Date d'effet	Date d'échéance	Prime Emise	Année effet	Année échéance	Date d'exercice
xxx	01/01/2014	01/07/2014	22/04/2015	3000	2014	2015	31/12/2014

Tableau 50: Tableau avant duplication des lignes par exercice

Police	Date d'émission	Date d'effet	Date d'échéance	Prime Emise	Exercice	Date d'exercice	Prime acquise
xxx	01/01/2014	01/07/2014	01/07/2015	3000	2014	31/12/2014	1500
xxx	01/01/2014	01/07/2014	01/07/2015	3000	2015	31/12/2014	1500

Tableau 51: Tableau après duplication des lignes par exercice

Par la suite, nous avons regroupé la variable prime acquise par année d'exercice. Le montant des primes acquises par exercice est détaillé dans le tableau suivant.

	exercice	primeacquise
1	2013	62498357.024
2	2014	139473798.83
3	2015	155305990.08

Figure 34: Les primes acquises par exercice en MAD

○ **Calcul de la PPNA à la date d'inventaire :**

La PPNA à la date d'inventaire se calcule par différence entre la prime émise de 2015 et la prime acquise à 2015.

La PPNA à la date d'inventaire est de **4 009 716,95 MAD**.

○ **Calcul des primes futures afférentes aux contrats à tacite reconduction**

Le montant des primes futures afférentes aux contrats à tacite reconduction est calculé en multipliant les primes du dernier exercice d'émission par un taux moyen de renouvellement en montant calculé sur la base des deux derniers exercices d'émission.

Le taux de renouvellement en montant pour chaque exercice d'émission est calculé en divisant le montant des primes renouvelées dudit exercice sur le total des primes de l'exercice précédent.

Le montant des primes renouvelées pour un exercice donné est calculé en sommant les primes des assurés dont le numéro de la police figure dans l'exercice précédent et ayant la modalité renouvellement comme valeur de la variable NATAVE (nature avenant).

Le tableau ci-dessous représente les taux de renouvellement en montant pour les deux derniers exercices considérés ainsi que le taux moyen de renouvellement en montant:

TR2014	TR2015	TRM
0.4864659	0.6459645	0.5662152

Figure 35: Taux de renouvellement en montant

Ainsi, le montant estimé des primes futures afférentes aux contrats à tacite reconduction est : **90 206 974,92 MAD**.

Le pourcentage des frais d'acquisition vaut 12%. Par conséquent, le montant des primes futures nettes des frais d'acquisition est égal à **79 382 137,93 MAD**.

○ **Calcul des cadences de liquidation :**

Comme indiqué précédemment, les cadences de liquidation sont déduites des cadences cumulées<sup>12</sup> estimées par la méthode de Chain Ladder sur le triangle des règlements. La somme des cadences actualisées aux taux zéro-coupon est égale à 0,82.

○ **Calcul du ratio de sinistralité combiné :**

Comme nous avons vu ci-dessus, Le ratio de sinistralité combiné moyen correspond à la somme du :

- ✓ Rapport entre la somme des charges ultimes des trois derniers exercices de survenance et la somme des primes acquises des trois derniers exercices de survenance ;
- ✓ Rapport entre la somme des montants des frais de gestion des trois derniers exercices clos et la somme des primes émises des trois derniers exercices clos.

En reprenant le triangle des règlements cumulés de la branche étudiée complété par la méthode de Chain Ladder, le montant des charges ultimes des trois derniers exercices de survenance est égal à **338 727 456,80 MAD**. Ainsi le ratio de sinistralité hors frais de gestion est égal à 94,81%.

Quant au rapport entre la somme des montants des frais de gestion et les primes émises il est égal à 10%. Donc, le ratio de sinistralité combiné vaut 104,81%.

Après avoir tous les ingrédients nécessaires pour calculer la  $ME_{primes}$ , on applique la formule présentée précédemment. Le montant de la  $ME_{primes}$  pour la branche étudiée est égal à **1 591 644,17 MAD**. Ainsi, le montant de la meilleure estimation des engagements en 2015 vaut **497 650 614,40 MAD**.

---

<sup>12</sup> La cadence de liquidation cumulée d'une année de développement  $j$  est définie par la formule suivante :  $Cad_j^{cum} = \frac{1}{f_j \times \dots \times f_{n-1}}$ , où les  $f_j$  sont les coefficients de développement estimés par la méthode de Chain Ladder.

## II. La marge de risque (MR) :

### II.1. Définition :

Comme pour les opérations d'assurance vie, décès et capitalisation, la marge de risque est déterminée en appliquant un taux au produit de la meilleure estimation des engagements et la duration des engagements. La duration s'écrit comme suit

$$\text{Durantion} = \frac{\sum(\text{flux prime actualisés}_i + \text{flux règlements actualisés}_i) * i}{\sum(\text{flux prime actualisés}_i + \text{flux règlements actualisés}_i)}$$

Ainsi la marge de risque se calcule :

$$\text{MR} = \text{coefficient} \times \text{duration} \times \text{meilleure estimation des engagements}$$

Vu que le projet de circulaire n'a pas encore fixé la valeur du coefficient à appliquer pour effectuer le calcul, nous nous sommes inspirés de la Solvabilité II qui l'a fixé à 6%.

### II.2. Application :

En appliquant la formule de la duration présentée ci-haut, nous aboutissons à une valeur qui vaut **4,577**. Par conséquent, La duration des engagements de la catégorie TPV de la RC automobile est importante. Cela est dû aux garanties en cas de dommages corporels qui ont une phase de développement longue.

La valeur de la marge de risque de la branche étudiée est égale **136 664 811,7 MAD**.

### *Conclusion*

L'Autorité de Contrôle du secteur des assurances et de la prévoyance sociale (ACACPS) vise à travers la nouvelle réforme SBR à imposer des exigences qui tiennent compte de la nature, de la taille et de la complexité du secteur des assurances. Le premier pilier de la réforme SBR expose les exigences quantitatives qui doivent être mises en vigueur. Ce pilier présente une approche en trois étapes ; le calcul du Bilan Prudentiel, le calcul du niveau de fonds propres disponibles et le calcul du capital de solvabilité requis et du ratio de solvabilité.

L'étude réalisée ici s'est fixé comme objectif l'évaluation de la meilleure estimation des engagements pour un produit d'assurance vie et une garantie d'assurance non vie. Pour mener à bien notre analyse nous avons adopté une démarche en passant par des étapes clés. En premier lieu nous avons procédé à la construction de la courbe des taux réglementaire qui servira à l'actualisation des flux futurs dans le cadre de l'évaluation des engagements. Dans cette optique, nous avons créé un outil qui permet la construction de la courbe des taux zéro-coupon. En second lieu, nous avons valorisé les engagements pour un produit d'assurance vie, l'assurance décès emprunteur. L'étude de ce produit exige la construction de la loi de remboursement anticipé. Puis nous avons calculé la meilleure estimation des engagements pour ce produit, où nous avons constaté le gain en fonds propres réalisé en tenant compte du remboursement anticipé. En dernier lieu, nous avons pu évaluer la meilleure estimation des engagements pour une garantie d'assurance non vie ; la RC automobile des transports publics des voyageurs .Nous avons calculé la meilleure estimation des engagements pour sinistres, nous avons fait appel aux méthodes de provisionnement déterministes et stochastiques. Nous avons pu comparer les différents résultats par le biais d'applications numériques sur des triangles des règlements de la catégorie TPV de la branche RC automobile .Ensuite, nous avons détaillé le calcul de la meilleure estimation des engagements pour primes pour la garantie étudiée.

## **Conclusion**

---

Dans un autre ordre d'idée, nous trouvons que l'Autorité de contrôle doit fixer le coefficient utilisé pour constater la marge de risque ainsi que les chocs à appliquer aux hypothèses techniques utilisées pour évaluer l'exigence de capital relative aux risques de souscription pour mettre en vigueur cette nouvelle réglementation.

## *Bibliographie / Webographie*

### Bibliographie

- Projet de circulaire « Solvabilité Basée sur les Risques (SBR) », version du 25/04/2018.
- Actuaris Consulting, Formation « Solvabilité Basée sur les Risques (SBR) », Casablanca, 2017
- Marri Fouad, cours de l'assurance vie, INSEA, 2017-2018
- Marri Fouad, cours assurance non vie II : tarification et provisionnement, INSEA, 2017-2018
- S. Berrada Souni, Cours : Solvabilité des entreprises d'assurances et de réassurance
- Chaoubi Abdelaziz cours « GLM », INSEA 2019
- Chaoubi Abdelaziz cours « Analyse de la durée de vie », INSEA 2019
- CHARPENTIER Arthur, DENUIT M, Mathématiques de l'assurance non vie : Tome 2, Tarification et provisionnement, Avril 2005.
- LOUIS M., Evaluation des provisions techniques non-vie dans le contexte de Solvabilité II, Mémoire d'actuariat, Strasbourg, 2010.

### Webographie

- <http://eiopa.europa.eu/>
- <https://support.sas.com/en/support-home.html>
- <http://bkam.ma/>
- <http://Ressources-actuarielles.net>

## Annexes

### **Annexe 1 : A propos du Quantile-Quantile Plot**

Le Q-Q Plot est un outil graphique qui, à travers un tracé, permet de juger du degré d'ajustement d'une distribution à un jeu de données. Il autorise également la comparaison de deux distributions jugées similaires.

Comme son nom l'indique, le principe du diagramme Quantile-Quantile repose sur la comparaison des positions des quantiles théoriques et des quantiles empiriques. Concrètement, il s'agit de dessiner le nuage de points  $P_i(x_i^*, x_i)$  avec  $x_i^*$  est le quantile issu de la distribution théorique et  $x_i$  le quantile pris de l'échantillon empirique dont on veut chercher le modèle.

Si la loi sélectionnée s'ajuste bien aux données, le nuage des points  $P_i$  s'aligne de manière assez claire autour de la première bissectrice. A la rigueur, le nuage de points pourrait s'ajuster autour d'une droite d'équation :  $x_i = a \times x_i^* + b$ . Cela voudrait dire que la distribution choisie est adéquate aux données à une transformation près ; cela ne remet pas en question la forme de la loi mais plutôt ses paramètres.

## Annexe 2 : Estimation des paramètres du modèle Log-normal sur R

```

Coefficients:
              Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept) 13.649996   0.153820  88.740 < 2e-16 ***
lig2        -0.064222   0.149075  -0.431 0.667632
lig3        -0.332241   0.153315  -2.167 0.032843 *
lig4        -0.027640   0.157592  -0.175 0.861161
lig5        -0.503316   0.162198  -3.103 0.002551 **
lig6        -0.029572   0.167348  -0.177 0.860129
lig7         0.249593   0.173268   1.440 0.153158
lig8         0.068792   0.180253   0.382 0.703618
lig9        -0.029051   0.188723  -0.154 0.878004
lig10       -0.001591   0.199328  -0.008 0.993649
lig11       -0.049933   0.213157  -0.234 0.815313
lig12       -0.194953   0.232209  -0.840 0.403357
lig13        0.294181   0.260701   1.128 0.262108
lig14        0.420947   0.309656   1.359 0.177378
lig15       -0.499076   0.423349  -1.179 0.241521
col2         1.745820   0.149075  11.711 < 2e-16 ***
col3         2.317323   0.153315  15.115 < 2e-16 ***
col4         2.809816   0.157592  17.830 < 2e-16 ***
col5         2.772437   0.162198  17.093 < 2e-16 ***
col6         2.672218   0.167348  15.968 < 2e-16 ***
col7         2.431899   0.173268  14.035 < 2e-16 ***
col8         2.131021   0.180253  11.822 < 2e-16 ***
col9         1.896643   0.188723  10.050 < 2e-16 ***
col10        1.554178   0.199328   7.797 1.01e-11 ***
col11        1.448584   0.213157   6.796 1.09e-09 ***
col12        0.819656   0.232209   3.530 0.000655 ***
col13        0.740744   0.260701   2.841 0.005544 **
col14        1.051298   0.309656   3.395 0.001018 **
col15        1.379605   0.423349   3.259 0.001574 **
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

```

## Annexe 3 : Estimation des paramètres du modèle Gamma sur R

```

Coefficients:
      Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept) 13.73889   0.15683  87.602 < 2e-16 ***
lig2        -0.10353   0.15199  -0.681 0.497511
lig3        -0.34427   0.15632  -2.202 0.030165 *
lig4        -0.09578   0.16068  -0.596 0.552587
lig5        -0.48649   0.16538  -2.942 0.004139 **
lig6        -0.06953   0.17063  -0.407 0.684602
lig7         0.25091   0.17666   1.420 0.158935
lig8         0.04958   0.18378   0.270 0.787928
lig9        -0.09761   0.19242  -0.507 0.613183
lig10       -0.01992   0.20323  -0.098 0.922125
lig11       -0.09925   0.21733  -0.457 0.648983
lig12       -0.24287   0.23676  -1.026 0.307699
lig13        0.23532   0.26581   0.885 0.378317
lig14        0.35548   0.31572   1.126 0.263153
lig15       -0.58797   0.43164  -1.362 0.176506
col2         1.71001   0.15199  11.250 < 2e-16 ***
col3         2.28943   0.15632  14.646 < 2e-16 ***
col4         2.77156   0.16068  17.249 < 2e-16 ***
col5         2.76897   0.16538  16.744 < 2e-16 ***
col6         2.67481   0.17063  15.677 < 2e-16 ***
col7         2.43468   0.17666  13.782 < 2e-16 ***
col8         2.11611   0.18378  11.514 < 2e-16 ***
col9         1.96838   0.19242  10.230 < 2e-16 ***
col10        1.57054   0.20323   7.728 1.40e-11 ***
col11        1.40288   0.21733   6.455 5.17e-09 ***
col12        0.96361   0.23676   4.070 0.000100 ***
col13        0.74966   0.26581   2.820 0.005889 **
col14        1.20046   0.31572   3.802 0.000259 ***
col15        1.29071   0.43164   2.990 0.003585 **
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

(Dispersion parameter for Gamma family taken to be 0.1617172)

```

