

## Projet de Fin d'Etudes

\*\*\*\*\*

# Evaluation des réserves techniques en réassurance non vie

Préparé par : *Melle Fatima Zahra IDAR*

*Melle Keltouma AGHAD*

Sous la direction de : *Mr Abderrahim OULIDI (INSEA)*  
*Mr Kamal TALHAOUI (SCR)*

*Soutenu publiquement comme exigence partielle en vue de l'obtention du*  
**Diplôme d'Ingénieur d'Etat**

**Option : ACTUARIAT-FINANCE**

*Devant le jury composé de :*

- *Me Nouzha ZAOUJAL (INSEA)*
- *Mr Abderrahim OULIDI (INSEA)*
- *Mr Kamal TALHAOUI (SCR)*



## Dédicaces 1

*Je dédie ce travail*

*A mes parents*

*A ma mère МААΚΟΥΛ Khadiiffja qui m'a éclairée mon chemin, qui m'a encouragé et soutenue toute au long de mes études, qui a été là pour moi, et qui m'a donné un magnifique modèle de labeur et de persévérance.*

*A mon père АҒҒАД Abdallah qui m'a tant encouragé durant toutes les étapes de ma formation.*

*A vous deux, mes chers parents, je dédie ce travail qui n'est autre qu'un fruit de vos efforts et vos sacrifices que vous n'avez jamais cessé de consentir pour mon instruction et mon bien-être.*

*A mes sœurs : Latifa, Fatima Zahra et Imane*

*Pour leur encouragement, leur soutien permanent et leur présence au bon moment.*

*Je vous dédie ce travail tout en vous souhaitant le bonheur et la réussite.*

*A ma famille*

*Je dédie ce travail, comme preuve de respect, de gratitude, et de reconnaissance à toute ma famille, particulièrement à ma tante et mes cousines Kabira et Habiba qui m'ont toujours aidée, soutenue et encouragée tout au long de ce stage.*

*A mes amis*

*A mes amies Fatima Zahra ELHAMDI et Fatima Zahra IDAR avec qui j'ai passé de très agréables moments, je dédie ce travail en guise de gratitude pour leur grand soutien et pour leur affection sans limite.*

*Aghad Keltouma*

## Dédicaces 2

*Je dédie ce travail*

### *A mon défunt grand père*

*C'est avec une grande affliction que nous avons appris votre décès au 12/3/2013. Ton surprenant départ a laissé un chagrin assez douloureux au plus profond de nos âmes.*

*Ta disparition nous peine, mais ton souvenir reste impérissable.*

*Que ton âme repose en paix grand père.*

### *A mes très chers parents*

*Idar Ahmed et Saguini Souad*

*Aucune dédicace ne saurait être assez éloquente pour exprimer l'amour, l'estime, le dévouement et le respect que j'ai toujours eu pour vous.*

*Ce travail est le fruit de vos sacrifices que vous avez consentis pour mon éducation et ma formation.*

*Puisse Dieu, vous préserver et vous accorder santé, longue vie et bonheur.*

### *A toute ma famille*

*Je dédie ce modeste travail à toute ma famille. Un remerciement particulier et un respect assez profond à ma tante Saguini Jamila, mon oncle Najeh Mohamed, mon oncle Idar Mohamed et ma tante Rabha ezziani pour leurs aides, conseils et encouragements.*

*Que ce travail soit un témoignage de ma gratitude et mon profond respect.*

### *A mon frère Omar, ma sœur Fadoua et ma cousine Imane*

*En témoignage de l'attachement, de l'amour et de l'affection que je porte pour vous. Je vous dédie ce travail avec tous mes vœux de bonheur, de santé et de réussite.*

*Idar fatima zahra*

## Remerciements

Dans un premier temps, nous remercions toute l'équipe des professeurs de l'INSEA.

Nous tenons à remercier M. Abderrahim OULIDI, notre encadrant interne, pour son encadrement durant quatre mois. Il a bien voulu nous guider à chaque étape de la réalisation de ce projet de fin d'études. Il nous a toujours réservé le meilleur accueil, malgré ses obligations professionnelles. Ses encouragements inlassables, sa gentillesse méritent toute admiration.

Nous saisissons cette occasion pour lui exprimer notre profonde gratitude tout en lui témoignant notre respect.

Nous tenons tout particulièrement à remercier M. Abderrahim CHAFFAI, Directeur Général Délégué de la société centrale de réassurance, de nous avoir acceptées en tant que stagiaires au sein de la Société Centrale de Réassurance.

Nous remercions également M Kamal TALHAOUI, Responsable Actuariat, pour son encadrement et sa disponibilité tout au long de ce stage, pour le temps qu'il nous a consacré durant cette période, sachant répondre à toutes nos interrogations ; sans oublier sa participation au cheminement de ce rapport.

Nous tenons à remercier également M. Mohamed EL OUAGGAGI, Directeur de Département Actuariat et Surveillance du Portefeuille, pour l'aide et les conseils qu'il nous a apportés.

Enfin, nous demeurons très reconnaissantes à Mr Larbi HILALI pour ses efforts d'insertion au sein de cette société.

## Résumé et mots clés

Nous avons effectué notre stage de Projet de fin d'étude au sein de la Société Centrale de Réassurance (SCR). Le sujet qui nous a été confié se présente comme suit: **Evaluation des réserves techniques en assurance non vie.**

Dans le cadre des assurances ou de réassurance, la complexité liée à l'estimation des provisions techniques résulte du choix des méthodes à employer. Ces méthodes sont essentiellement statistiques et en fin de compte assez peu réglementées, le législateur s'assure principalement que le montant des provisions constituées couvre la sinistralité future. L'objectif de ce projet est de présenter quelques méthodes de calcul des provisions ainsi que d'effectuer les calculs sur trois branches d'assurance non vie.

Ce projet s'est donc intéressé à un portefeuille légal de la Société Centrale de Réassurance pour les branches Automobile, Accident de Travail et Responsabilité Civile ; et s'est décomposé selon les étapes suivantes : la première partie présente de manière générale les provisions ainsi que les méthodes réglementaires. La deuxième partie décrit le cadre théorique des différentes méthodes choisies pour estimer les provisions. Ensuite, la troisième partie présente les facteurs impactant l'estimation des réserves. Puis, la quatrième partie s'est consacrée à l'application des méthodes aux données de la Société Centrale de Réassurance concernant les trois branches étudiées. Enfin, la cinquième partie présente une étude comparative des méthodes tout en se basant sur les avantages et les inconvénients de chacune de ces dernières.

Notre travail a consisté, dans un premier temps, à nous documenter sur les méthodes d'estimation des provisions. Ensuite, nous avons appliqué ces méthodes aux données de la société centrale de réassurance tout en utilisant le logiciel SPSS, Excel et VBA Excel. Finalement, nous avons procédé à une analyse des résultats ainsi qu'une étude comparative des méthodes utilisées.

Suite aux résultats tirés de ce projet, l'importance de la méthode Chain Ladder réside dans sa simplicité. En outre, les méthodes stochastiques sont stables et donnent des estimations proches de la méthode de référence Chain Ladder avec une information sur la distribution des provisions. D'un autre côté, la méthode HCL est généralement une méthode stable. Ceci peut être expliqué par le fait que cette méthode s'appuie sur des données exogènes.

Il s'agit pour l'actuaire de choisir parmi les diverses méthodes à disposition, sachant qu'il n'existe pas de méthode générale. En effet, le choix doit tenir compte de nombreux paramètres, notamment du risque en question, des contraintes réglementaires, de la politique de la compagnie, de la branche d'assurance étudiée, etc.

**Mots clés :** estimation des provisions, réserve, charge à l'ultime, Chain Ladder, Bornhuetter-Ferguson, Hybrid Chain Ladder, méthodes stochastiques, méthodes déterministes, Bootstrap, Taylor inflation.

## Liste des abréviations

SCR : Société centrale de réassurance.

IARD : Incendie, Accidents et Risques Divers.

IBNR : incurred but not reported.

PPNA : provisions pour primes non acquises.

PSAP : Provisions pour sinistres à payer.

SAP : sinistres à payer.

PA : Primes acquises.

MSE : mean squared error.

RC : Responsabilité Civile.

AT : Accident de travail.

Auto : Automobile.

CL : Chain Ladder.

BF : Bornhuetter- Ferguson.

GLM : General linear Model.

HCL : Hybrid Chain Ladder.

IPC : indice des prix à la consommation.

MAD : Moroccan Dirham.

MDH : Million Dirhams.

## Liste des tableaux

Tableau 1 : Sinistres payés cumulés pour la branche AT .....	26
Tableau 2 : Estimation des paramètres par la méthode CL .....	26
Tableau 3 : Triangle des sinistres cumulés estimés par la méthode CL pour la branche AT.....	27
Tableau 4 : Résultats issus de la méthode CL pour la branche AT .....	27
Tableau 5 : Paramètres estimés par la méthode London Chain.....	28
Tableau 6 : Résultats issus de la méthode London Chain pour la branche AT.....	29
Tableau 7 : Primes émises pour la branche AT.....	30
Tableau 8 : Primes acquises pour chaque année de survenance pour la branche AT.....	31
Tableau 9 : Résultats issus de la méthode BF pour la branche AT .....	31
Tableau 10 : Triangle des S/P pour la branche AT en pourcentage.....	33
Tableau 11 : S/P estimés pour chaque année de survenance pour la branche AT en pourcentage. ....	33
Tableau 12 : Résultats issus de la méthode Loss-Ratio pour la branche AT .....	34
Tableau 13 : Paramètres estimés par la méthode de Vylder pour la branche AT.....	36
Tableau 14 : Normalisation des paramètres estimés par la méthode de Vylder pour la branche AT.....	36
Tableau 15 : Sinistres payés cumulés estimés par la méthode de Vylder pour la branche AT .....	37
Tableau 16 : Résultats issus par la méthode de Vylder pour la branche AT .....	37
Tableau 17 : Erreurs standards estimées par le modèle de Mack pour la branche AT .....	41
Tableau 18 : Résultats issus du modèle de Mack pour la branche AT.....	41
Tableau 19 : Matrice de régression pour les modèles factoriels stochastiques .....	45
Tableau 20 : Paramètres estimés de la méthode Log Normal pour la branche AT .....	46
Tableau 21 : Résultats issus du modèle Log Normal pour la branche AT .....	46
Tableau 22 : Résultats issus par le modèle GLM pour la branche AT .....	48
Tableau 23 : triangle des erreurs estimées pour la branche AT.....	50
Tableau 24 : Résultats issus de la méthode Bootstrap pour la branche AT.....	50
Tableau 25 : Les charges ultimes antérieures estimées et les $\alpha_i$ choisis .....	57
Tableau 26 : Paramètres estimés du modèle HCL pour la branche AT.....	57
Tableau 27 : les $\alpha_{ij}$ estimés du modèle HCL pour la branche AT .....	57
Tableau 28 : Sinistres payés cumulés estimés par le modèle HCL pour la branche AT .....	58
Tableau 29 : Résultats issus du modèle HCL pour la branche AT .....	58
Tableau 30 : Provisions individuelles issues des charges de sinistre pour la branche RC.....	68
Tableau 31 : Provisions individuelles issues des charges de sinistre pour la branche AT.....	69
Tableau 32 : Provisions individuelles issues des charges de sinistre pour la branche Auto .....	69
Tableau 33 : Provisions issues des sinistres payés pour les branches étudiées .....	71
Tableau 34 : Caractéristiques de l'ensemble de provisions issues de différentes méthodes.....	72
Tableau 35 : Résultats issus du modèle de Mack pour la branche RC.....	72
Tableau 36 : Résultats issus du modèle de Mack pour la branche AT.....	73
Tableau 37 : Résultats issus du modèle de Mack pour la branche Auto .....	73
Tableau 38 : triangle des coefficients de développement pour la branche RC.....	75
Tableau 39 : Vérification de l'hypothèse d'indépendance du modèle de Mack pour la branche RC.....	75
Tableau 40 : Test de Kolmogorov-Smirnov du modèle Log Normal pour la branche RC.....	76
Tableau 41 : Test de Kolmogorov-Smirnov du modèle Log Normal pour la branche AT.....	76
Tableau 42 : Test de Kolmogorov-Smirnov du modèle Log Normal pour la branche Auto .....	76
Tableau 43 : Test de Kolmogorov-Smirnov du modèle GLM pour la branche RC .....	77

Tableau 44 : Test de Kolmogorov-Smirnov du modèle GLM pour la branche AT .....	77
Tableau 45 : Test de Kolmogorov-Smirnov du modèle GLM pour la branche Auto.....	77
Tableau 46 : Indice général des prix à la consommation au Maroc pour la période 2002-2011 .....	78
Tableau 47 : Traitement de l'inflation par la méthode d'indice des prix.....	78
Tableau 48 : Paramètres estimés du modèle de Taylor pour la branche RC .....	78
Tableau 49 : Indice d'inflation de Taylor sur la base de 100 pour la branche RC.....	79
Tableau 50 : Indice d'inflation futur estimé par la méthode de Taylor pour la branche RC.....	79
Tableau 51 : Traitement d'inflation par le modèle de Taylor.....	79
Tableau 52 : Analyse scénarios des taux d'inflation de Taylor pour la branche RC .....	79
Tableau 53 : Etude de sensibilité des modèles de provisionnement pour la branche RC.....	85
Tableau 54 : Etude de sensibilité des modèles de provisionnement pour la branche AT .....	85
Tableau 55 : Etude de sensibilité des modèles de provisionnement pour la branche Auto.....	86
Tableau 56 : Tableau récapitulatif des avantages et inconvénients des méthodes étudiées.....	89
Tableau 57 : Triangle des sinistres payés cumulés pour la branche RC.....	93
Tableau 58 : Triangle des sinistres à payer cumulés pour la branche RC .....	93
Tableau 59 : Triangle des primes pour la branche RC.....	94
Tableau 60 : Triangle des sinistres payés cumulés pour la branche AT.....	95
Tableau 61 : Triangle des sinistres à payer cumulés pour la branche AT .....	95
Tableau 62 : Triangle des primes pour la branche AT.....	96
Tableau 63 : Triangle des sinistres payés cumulés pour la branche Auto .....	96
Tableau 64 : Triangle des sinistres à payer cumulés pour la branche Auto .....	97
Tableau 65 : Triangle des primes pour la branche Auto .....	97

## Liste des figures

Figure 1 : Représentation graphique des provisions par la méthode de Bootstrap pour la branche AT .....	51
Figure 2 : Interface graphique via l’outil VBA Excel .....	68
Figure 3 : Evolution des S/P pour la branche RC .....	70
Figure 4 : Evolution des S/P pour la branche AT .....	70
Figure 5 : Evolution des S/P pour la branche Auto .....	71
Figure 6 : Représentation graphique des couples $(C_{ij}, C_{i, j + 1})$ pour la branche RC.....	74
Figure 7 : Représentation graphique des coefficients de développement pour la branche RC.....	74
Figure 8 : Représentation graphique des points $(C_{ij}, \varepsilon_{ij})$ pour la branche RC.....	76
Figure 9 : Evolution des provisions individuelles par rapport à la moyenne pour la branche RC .....	81
Figure 10 : Evolution des provisions individuelles par rapport à la moyenne pour la branche AT .....	82
Figure 11 : Evolution des provisions individuelles par rapport à la moyenne pour la branche Auto.....	82
Figure 12 : Evolution de provisions individuelles des méthodes CL, BF et HCL pour la branche RC .....	83
Figure 13 : Evolution de provisions individuelles des méthodes CL, BF et HCL pour la branche AT .....	84
Figure 14 : Evolution de provisions individuelles des méthodes CL, BF et HCL pour la branche Auto.....	84

## Introduction

Une compagnie de réassurance a pour contrainte première de respecter ses engagements vis-à-vis des cédantes. Alors, en réassurance, comme en assurance, le cycle de production est inversé : le paiement de la prime est effectué avant le règlement des sinistres, autrement dit avant que le service soit fourni ; d'où cette préoccupation majeure d'estimation d'un réassureur vis-à-vis de ses engagements. Ces primes récoltées sont à la disposition de la compagnie, et lui permettent de ce fait de constituer des réserves pour les sinistres à venir. Ainsi, l'enjeu pour une compagnie est d'évaluer le montant des réserves à constituer afin d'être capable de faire face à toutes les indemnisations qu'elle aura à verser pour les sinistres qui seront survenus pendant la période couverte par la police. Elle pourra ainsi garantir sa solvabilité, pourvu qu'elle ait comblé ses besoins en capitaux propres. La prévision des réserves est donc un enjeu crucial.

Toutes Les méthodes déterministes permettant d'estimer les réserves de sinistres sont relativement simples d'utilisation, mais présentent l'inconvénient d'être très sensibles à des variations dans les données observées. Pour mesurer cette incertitude de provisionnement, nous allons avoir recours aux méthodes stochastiques de provisionnement.

L'idée des méthodes stochastiques est de pouvoir quantifier la variabilité des réserves estimées, notamment par la construction d'intervalles de confiance, et ainsi d'obtenir une marge d'erreur sur le montant des provisions. Elles construisent les réserves sous un angle probabiliste en considérant leur distribution.

Dans le but d'une amélioration d'estimation des réserves, une nouvelle méthode a été introduite. La méthode Hybrid Chain Ladder représente une combinaison de deux méthodes de référence. L'une multiplicative comme Chain Ladder, et l'autre additive comme Bornhuetter Ferguson. Cette méthode cherche en effet à combiner linéairement deux méthodes traditionnelles pour s'affranchir des défauts de chacune d'entre elles. La pondération libre de la méthode HCL entre CL et BF permet de renforcer la stabilité et aussi diminuer l'incertitude.

Nous considérons dans ce projet uniquement des engagements non vie, d'un portefeuille légal de la Société Centrale de Réassurance. Nous nous intéressons aux trois branches qui sont : Accident de Travail, Automobile et Responsabilité civile. Nous tenons à travers ce travail, à présenter les méthodes de provisionnement. Dans le cadre d'estimation des provisions, nous utilisons essentiellement le logiciel Excel et VBA Excel d'une part, et le logiciel SPSS pour vérifier quelques hypothèses des méthodes utilisées d'autre part.

## Sommaire

Dédicaces 1.....	3
Dédicaces 2.....	4
Remerciements.....	5
Résumé et mots clés.....	6
Liste des abréviations .....	7
Liste des tableaux .....	8
Liste des figures .....	10
Introduction.....	11
Chapitre 1: Préliminaire.....	16
I. La présentation de la société centrale de réassurance.....	16
II. Les provisions.....	16
II.1. Définition des provisions techniques .....	16
II.2. Quelques types de provisions.....	17
III. Les méthodes réglementaires.....	18
III.1. Méthode Dossier par Dossier.....	18
III.1.1. Le calcul de la provision pour sinistres survenus et déclarés.....	18
III.1.2. L'estimation de la provision pour sinistres survenus et non déclarés.....	18
III.2. Méthode du coût moyen .....	20
III.3. Méthode des cadences de règlements.....	20
Chapitre 2 : Méthodes d'évaluation des réserves techniques non vie.....	24
I. Evaluation déterministe des réserves non vie.....	24
I.1. Chain Ladde.....	24
I.1.1. Chain Ladder Standard.....	24
I.1.2. London Chain.....	27
I.2. Bornhuetter-Ferguson (ou Loss Ratio simple) .....	29
I.3. Loss Ratio .....	32
I.4. Méthode des moindres carrés de Vylder .....	34
II. Evaluation stochastique des réserves non vie .....	37
II.1. Chain Ladder stochastique : Modèle de Mack.....	37
II.2. Les modèles factoriels stochastiques .....	43
II.2.1 La régression Log Normale.....	43
II.2.2. La modélisation GLM .....	47

II.3. Le Bootstrap.....	49
III.    Hybrid Chain Ladder (HCL).....	51
III.1. Introduction .....	51
III.2. Présentation du modèle .....	51
III.2.1. Estimation des paramètres et prévisions des sinistres.....	53
III.2.2. Discussion des paramètres du modèle HCL .....	54
Chapitre 3 : Quelques facteurs impactant la réserve .....	60
I.    les facteurs externes et internes.....	60
I.1. Les facteurs externes.....	60
I.2. Facteurs internes.....	60
II.   Inflation .....	61
II.1. Modèle d'inflation .....	61
II.2. Approche de Taylor .....	62
Chapitre 4 : Application des modèles de provisionnement et analyse de résultats .....	66
I.    Portefeuille étudié.....	66
I.1. Branche Accident de Travail (AT) .....	66
I. 2. Branche Responsabilité Civile générale (RC).....	66
I.3. Branche Automobile (Auto) .....	67
II.   Description de la base des données.....	67
III.  Evaluation des réserves techniques .....	67
III.1. Evaluation des réserves techniques non vie .....	67
III.1.1. Evaluation des réserves avec les charges de sinistre :.....	68
III.1.2. Evaluation des réserves avec les sinistres payés.....	71
III.2.Vérification des hypothèses.....	74
III.3. Traitement des données avec inflation : .....	77
Chapitre 5 : Etude comparative des modèles de provisionnement .....	81
I.    Synthèse des résultats.....	81
I.1. l'évolution des provisions individuelles.....	81
I.2. Etude de sensibilité des méthodes.....	85
II.   Avantages et inconvénients des méthodes .....	86
II.1. Les limites de Chainé Ladder et sa dérivée.....	86
II.2. Critiques de Bornhuetter Ferguson .....	87
II.3. Avantage du modèle HCL.....	87
II.4. Critiques des autres méthodes .....	88

Conclusion .....	90
Bibliographie .....	91
Webographie.....	91
Annexe .....	92
I. Code des assurances .....	92
II. Les données .....	93
III. Note descriptive de l'outil de calcul .....	98
IV. Vérification des hypothèses de CL.....	99
V. Hypothèse de Mack.....	102
VI. Données avec erreurs.....	104



**Chapitre 1 :**  
***Préliminaire***

## **Chapitre 1: Préliminaire.**

### **I. La présentation de la société centrale de réassurance**

La Société Centrale de Réassurance agit dans le domaine d'activité de la Réassurance de toutes branches. Société anonyme régie par le Dahir du 23 Chaoual 1379 (20 Avril 1960) qui bénéficie de la garantie de l'Etat, la SCR a été créée en 1960 par convention entre l'Etat et la Caisse de Dépôt et de Gestion. La Société Centrale de Réassurance est la première compagnie de réassurance du marché marocain, elle offre des couvertures en réassurance pour l'ensemble des risques (toutes les branches IARD, Vie, Aviation, Maritime,.....etc).

La SCR a enregistré pour l'année 2012, un Chiffre d'Affaire de 2816,5 MAD avec un résultat net technique de 396,11 MDH.

La SCR réassure les compagnies marocaines, avec plus de 70% de part de marché. Elle joue pleinement son rôle de réassureur professionnel et assume entièrement les missions qui lui ont été assignés par les autorités de tutelle dès sa création et qui entre autres sont :

- La Régulation du marché.
- La Sécurisation face aux turbulences et incertitudes internationales.
- Une meilleure conservation des primes et partant la mobilisation de l'épargne et son investissement dans l'économie nationale.

Sur le plan international, la SCR qui compte parmi les plus anciennes sociétés de réassurances dans les pays en voie de développement, a apporté une contribution effective à la création et aux activités d'organismes régionaux comme l'Union Générale Arabe d'Assurance et l'Organisation Africaine d'Assurance. Elle a également œuvré à la création des sociétés régionales comme la Société Arabe de Réassurance et la Société Africaine de Réassurance, d'abord au stade des études qui ont abouti à leur création, ensuite comme membre fondateur et actionnaire.

### **II. Les provisions**

#### **II.1. Définition des provisions techniques**

Les provisions techniques recouvrent l'ensemble des charges et des paiements à prévoir en cas d'une éventuelle sinistralité. Les entreprises de réassurance doivent, à toute époque, inscrire à leur passif les provisions techniques suffisantes pour le règlement intégral des engagements contractés à l'égard des cédantes.

La problématique du provisionnement est liée à la nature même de l'activité de réassurance, à savoir l'inversion du cycle de production. Les réassureurs, ayant pris l'engagement d'indemniser tous les sinistres survenus durant la période de couverture, il convient de constituer des provisions pour indemniser les cédantes, même si celui-ci n'est déclaré, puis clôturé, que des années plus tard.

Les provisions techniques sont inscrites au passif du bilan d'une compagnie de réassurance. Elles correspondent :

- aux charges à prévoir pour faire face à la sinistralité non encore déclarée mais prévisible dans des contrats en cours. Par exemple, sommes qui seront probablement versées aux bénéficiaires dans le cas d'un sinistre automobile déjà déclaré.
- à une anticipation des prestations futures auxquelles le réassureur devra faire face lorsqu'un engagement prendra effet. Par exemple : l'anticipation des rentes futures dans le cas d'un contrat de retraite.

## II.2. Quelques types de provisions

Les provisions techniques doivent en principe être placées dans des emplois financiers définis par la réglementation et assurant le maximum de sécurité et de liquidité. En assurance non vie, il existe deux grandes provisions (grandes en montant) : la provision pour sinistre et la provision pour prime non acquise.

1. Les provisions pour sinistres sont des fonds constitués et inscrits au bilan d'un réassureur, pour les sinistres non encore réglés. Les actifs correspondant à ces provisions sont financés par les primes payées par les cédantes. Il existe de nombreuses sortes de provisions. Les deux principales provisions pour sinistres en réassurance non vie sont :

- les provisions pour sinistres inconnus (ou IBNR, Incurred But Not Reported) correspondent aux sinistres qui sont déjà survenus, mais dont lesquels le réassureur n'a pas encore connaissance. Il y'a toujours un délai entre le moment où un sinistre survient et celui où il est déclaré à la compagnie de réassurance : c'est pourquoi une pratique comptable standard en réassurance consiste à constituer des provisions pour les sinistres survenus mais pas encore déclarés (IBNR).
  - les provisions pour sinistres connus correspondent aux sinistres dont le réassureur a eu connaissance, mais qu'il n'a pas encore pu régler à sa cédante. Il peut s'agir de sinistres réglés mais non encore payés (on en connaît le montant exact), ou bien des sinistres à régler (les sinistres sont connus mais non leur montant exact).
2. La provision pour prime non acquise (PPNA) : correspond à la fraction des primes brutes émises qui doit être allouée à l'exercice comptable suivant. Ces provisions s'expliquent par le fait que, d'une manière générale, les primes de réassurance doivent être payées au début de la période couverte (début du contrat), qui ne coïncide habituellement pas avec l'exercice comptable. Par conséquent, lorsque le bilan est établi à la fin d'un exercice, une partie des primes de réassurance payables au cours de celui-ci est destinée à couvrir des risques de la période suivante. En effet, selon l'Arrêté du ministre des finances et de la privatisation n° 1548-05 du 6 ramadan 1426 (10 octobre 2005) relatif aux entreprises d'assurances et de réassurance : « *provision destinée à constater pour chacun des contrats à prime payable d'avance, la part des primes émises de l'exercice et des primes restant à émettre se rapportant à la période comprise entre la date de l'inventaire et la date de la prochaine échéance de prime ou, à défaut, du terme du contrat* ».

On cite par la suite d'autres types de provisions :

3. Provision pour risques en cours : Cette provision est destinée à palier une insuffisance de la tarification (risque modèle).
4. Provision pour risque d'exigibilité : provision destinée à faire face aux engagements dans le cas de moins-value.
5. Provision mathématique : Ensemble des provisions et réserves constituées par le réassureur afin de garantir toutes les prestations prévues par le contrat. Les provisions mathématiques, représentent la majeure partie des provisions techniques en assurance vie.

6. Provisions pour aléa financier : Cette réserve est constituée afin de palier une baisse du rendement des actifs par rapport aux engagements de taux garantis.
7. Provision pour participation aux excédants : Cette provision correspond au montant de la participation aux bénéfices que les réassureurs décident de ne pas incorporer immédiatement aux provisions mathématiques. Il s'agit d'un matelas permettant au réassureur de lisser les versements dans le temps.

En définitive, les provisions techniques correspondent à une part très importante du passif du bilan des compagnies de réassurance, et leur évaluation annuelle a donc un impact important sur le résultat de la compagnie.

Dans la suite de ce rapport, nous nous intéresserons seulement à la provision pour sinistre à payer puisqu'elle constitue la principale provision technique en réassurance non vie.

### **III. Les méthodes réglementaires**

L'évaluation des provisions se fait branche par branche, le provisionnement ne se fait pas de la même façon pour des branches courtes (santé par exemple) et les branches longues (RC ou construction). Trois méthodes sont généralement utilisées pour estimer ces provisions, la provision technique à retenir sera une réserve maximum des trois méthodes augmentée d'une réserve complémentaire.

#### **III.1. Méthode Dossier par Dossier**

L'évaluation des réserves techniques en assurance non-vie s'effectue selon l'exigence réglementaire marocaine en se basant sur la méthode dossier par dossier. C'est une méthode de base qui consiste à évaluer le coût de chaque sinistre, d'après les informations connues au moment de l'inventaire.

##### **III.1.1. Le calcul de la provision pour sinistres survenus et déclarés**

Cette étape consiste à calculer la réserve des sinistres survenus et déclarés à la date de l'inventaire. Nous procédons par une estimation du coût final des sinistres. Cette estimation se fait dossier par dossier selon plusieurs paramètres (âge, sexe, fonction, ...).

La provision individuelle est égale à la différence entre le coût final estimé et les paiements déjà faits, la réserve sera donc la somme de toutes ces provisions individuelles.

##### **III.1.2. L'estimation de la provision pour sinistres survenus et non déclarés**

La réserve des sinistres survenus et non déclarés à la date de l'inventaire, étant égale au produit du nombre de sinistre survenus et non déclarés par le coût moyen, il est nécessaire d'estimer les IBNR et de calculer leur coût moyen.

- Estimation du nombre de sinistre survenus et non déclarés :

Nous construisant un triangle cumulé des nombres de sinistres déclarés comme suit :

Survenance	Années de déroulement					
	0	1	2	3	4	5
0	$N_{00}$	$N_{01}$	$N_{02}$	$N_{03}$	$N_{04}$	$N_{05}$
1	$N_{10}$	$N_{11}$	$N_{12}$	$N_{13}$	$N_{14}$	
2	$N_{20}$	$N_{21}$	$N_{22}$	$N_{23}$		
3	$N_{30}$	$N_{31}$	$N_{32}$			
4	$N_{40}$	$N_{41}$				
5	$N_{50}$					

En se référant au tableau, nous calculons les coefficients d'aggravation annuels à l'aide de la formule ci-dessous :

$$q_h = \frac{\sum_{i=0}^{k-h-1} N_{i,h+1}}{\sum_{i=0}^{k-h-1} N_{ih}}$$

Où les années de survenance sont indexées par i, et les années de déroulement par j, nous estimons le triangle inférieur par :

$$N_{ij} = N_{ik} * \prod_{h=k}^{j-1} q_h$$

Le nombre des IBNR est donné par la formule :

$$N_i = N_{ik} * \prod_{h=k}^{n-1} (q_h - 1)$$

- Estimation du coût moyen:

Le coût moyen est égal au quotient du coût des sinistres terminés (c'est-à-dire les sinistres réglés définitivement et les sinistres classés sans suite) au cours des cinq derniers exercices comptables, par le nombre des sinistres terminés au cours de la même période (5 ans). Le coût d'un sinistre terminé est égal à la somme des paiements qui ont été versés au titre du même dossier

pendant l'année de fermeture (l'année où le sinistre a été déclaré terminé) et pendant les années qui l'ont précédé.

La réserve évaluée dossier par dossier sera la somme de la réserve pour sinistres survenus et déclarés et celle des sinistres survenus et non déclarés à la date d'inventaire. Donc :

$$\text{La réserve dossier par dossier} = \text{réserve pour sinistre déclaré} + \text{réserve pour IBNR}$$

### III.2. Méthode du coût moyen

La méthode est basée sur le coût moyen des sinistres, déterminé sur les années antérieures. Nous multiplions alors ce coût moyen (affecté d'une correction d'inflation) par le nombre de sinistres non réglés lors de la clôture des comptes.

Nous l'utilisons lorsque la valeur résiduelle pour une année de survenance donnée dépasse 30% de la charge totale des sinistres (c'est-à-dire lorsqu'on a réglé moins de 70% des sinistres survenus). Si par contre la valeur résiduelle reste inférieure à 30% de la charge totale des sinistres, nous utilisons la méthode réglementaire dossier par dossier. Par valeur résiduelle, nous entendons la part des réserves totales dans la charge totale des sinistres. Il s'agit du rapport :

$$\text{Valeur résiduelle} = \frac{\text{réserve totale}}{\text{charge totale des sinistres}}$$

En utilisant le coût moyen calculé précédemment. Nous avons donc :

$$\text{Réserve du coût moyen} = (\text{nombre des tardifs} + \text{nombre des sinistres déclarés}) * \text{coût moyen}$$

### III.3. Méthode des cadences de règlements

La méthode dite des cadences de règlements, méthode rétrospective, comme la précédente. Elle utilise le pourcentage des sommes réglées après un an, deux ans, ..., n années.

Elle consiste en premier lieu à déterminer une cadence moyenne pour la compagnie, et à en déduire la réserve pour sinistres à payer PSAP.

La cadence peut se définir comme étant le rythme des règlements des sinistres par la compagnie d'assurance. Elle estime la proportion réglée, de la charge totale des sinistres d'un exercice, à un délai donné, c'est-à-dire pour une année comptable précise.

L'utilisation de la méthode de cadence de règlements nécessite un triangle de liquidation d'au moins dix années ; donnant pour chaque exercice de survenance l'évolution de la charge des sinistres hormis les IBNR. Cette exclusion résulte du fait que la charge des sinistres d'un exercice comprend à la fois les réserves calculées par la méthode dossier par dossier (ces dernières incluent les IBNR), les paiements effectués l'année en cours et les paiements cumulés des années antérieures. La marge de dix ans a été fixée d'après l'expérience qui a prouvé que l'information pertinente était contenue dans la dernière décennie, et qu'au-delà de dix ans, l'utilité marginale de

l'information commençait à décroître. La plus part des compagnies d'assurances liquident environ 85% de la charge de leurs sinistres pendant une décennie.

La cadence de règlement de la compagnie résulte des cadences de règlement des exercices de survenance utilisés. La cadence de règlement d'une année de survenance donnée est calculée pour chaque année comptable, et est donnée par la formule :

$$PC_{ij} = \frac{C_{ij}}{C_{in}}$$

Où :

$PC_{ij}$  : La cadence cumulée par année de survenance i et de développement j.

$C_{ij}$  : Le montant cumulé des règlements par année de survenance i et de développement j.

$C_{in}$  : Le montant cumulé des règlements par année de survenance i, au dernier exercice inventorié.

Disposant ainsi du triangle des cadences de règlement pour toutes les années de survenance, nous déduisons la cadence moyenne de la compagnie, qui est une moyenne pondérés des cadences de règlement, par les charges sinistres du dernier exercice inventorié, on aura :

$$PCM_j = \frac{\sum_{i=1}^{n-j} PC_{ij} \times C_{in}}{\sum_{i=1}^{n-j} C_{in}} = \frac{\sum_{i=1}^{n-j} \frac{C_{ij}}{C_{in}} \times C_{in}}{\sum_{i=1}^{n-j} C_{in}} = \frac{\sum_{i=1}^{n-j} C_{ij}}{\sum_{i=1}^{n-j} C_{in}}$$

Autrement dit, la cadence moyenne de la compagnie s'obtient en rapportant les paiements de même délai, toutes années de survenance confondues, au paiement cumulé de toutes ces années de survenance, au dernier exercice d'inventaire.

La réserve PSAP étant en quelques sortes une estimation de la charge des sinistres non encore réglés, elle est déduite par la formule :

$$\text{Réserve} = \frac{\text{règlements cumulés} * (1 - PCM_j)}{PCM_j}$$

Cette réserve confirme que la réserve PSAP est nulle lorsque la cadence est de 100%.

- Les provisions complémentaires :

Elles sont non nulles pour les années de survenance pour lesquelles la réserve calculée par la méthode dossier par dossier est inférieure au maximum de celle calculée par la cadence de règlement et le coût moyen. Nous avons :

$$\text{Réserve complémentaire} = \max(\text{réserve CR}, \text{réserve CM}) - \text{réserve D/D}$$

- La réserve finale réglementaire à constituer est alors pour chaque exercice de survenance :

**Réserve = max (réserve D/D, réserve CR, réserve CM) + réserve complémentaire**

**Remarque :**

Seulement les compagnies d'assurances qui évaluent la réserve réglementaire. En réassurance, le triangle du nombre de sinistres n'est pas disponible vu que la cédante ne fournit pas de détails sur le nombre de sinistres déclarés.

**Chapitre 2 :**  
***Méthodes***  
***d'évaluation des***  
***réserves techniques***  
***non vie***

## Chapitre 2 : Méthodes d'évaluation des réserves techniques non vie

### I. Evaluation déterministe des réserves non vie

#### I.1. Chain Ladder

##### I.1.1. Chain Ladder Standard

La méthode de Chain Ladder est un modèle de développement par cadences. C'est une méthode déterministe permettant d'estimer les réserves de sinistres. Elle extrapole les sinistres futurs attendus à partir des sinistres déjà payés ou déclarés à l'aide de coefficients de multiplication que l'on nomme coefficients de développement. Ces coefficients sont utilisés pour prévoir la partie inconnue du tableau triangulaire.

Présentation du modèle:

Soit  $C_{ik}$  le montant, cumulé jusqu'à l'année de développement  $k$ , des sinistres survenus en l'année d'accident  $i$ , pour  $1 \leq i, k \leq n$ .

$C_{ik}$  peut représenter soit le montant payé, soit le coût total estimé (paiement déjà effectué plus réserve) du sinistre. Les montants  $C_{ik}$  sont connus pour  $i + k \leq n + 1$  et on cherche à estimer les valeurs des  $C_{ik}$  pour  $i + k > n + 1$ , et en particulier les valeurs ultimes  $C_{in}$  pour  $2 \leq i \leq n$ . Ces notations sont illustrées dans le triangle suivant :

Origine $i$	Année de développement					
	1	2	...	...	$n-1$	$n$
1	$C_{1,1}$	$C_{1,2}$	...	...	$C_{1, n-1}$	$C_{1,n}$
2	$C_{2,1}$	$C_{2,2}$	...	...	$C_{2, n-1}$	
...	...	...				
$n-1$	$C_{n-1, 1}$	$C_{n-1, 2}$				
$n$	$C_{n,n}$					

Les hypothèses :

Cette méthode statistique est fondée sur les cadences de règlement et s'appuie sur deux hypothèses principales :

1. Les règlements de sinistres sont stables, et il existe une relation de proportionnalité entre les montants cumulés, d'une année de développement à la suivante.

2. Les facteurs de développement sont indépendants de l'année d'origine des sinistres. C'est-à-dire, il est supposé que le coefficient de proportionnalité d'une année de développement est identique pour toutes les années de survenance.

Procédure de calcul :

Il s'agit de calculer les éléments manquants du tableau en estimant les paiements futurs pour aboutir à un rectangle complet de liquidation. Nous cherchons à estimer  $C_{ik}$  pour  $i+k > n+1$  :

$$\hat{C}_{ik} = C_{i,n+1-i} \cdot \hat{f}_{n+1-i} \dots \hat{f}_{k-1} \quad i+k > n+1$$

Avec :  $\hat{f}_k$  des coefficients de développement qui mesurent l'augmentation moyenne des sinistres cumulés d'une année de développement à l'autre. Les sinistres augmentent en général le plus vite pendant les premières années de développement.

$$\hat{f}_k = \frac{\sum_{i=1}^{n-k} C_{i,k+1}}{\sum_{i=1}^{n-k} C_{i,k}} \quad 1 \leq k \leq n-1$$

Les estimateurs ainsi obtenus sont sans biais et non corrélés.

Notons que le produit cumulé des estimations des coefficients de développement calculés de droite à gauche donne les coefficients de passage ou ce que nous appelons aussi les coefficients de charge totale. Ces coefficients permettent le passage direct du montant de sinistre de la diagonale au montant ultime de sinistre. Il est donc supposé que  $C_{ik}$  est proportionnel à  $C_{ik-1}$  et que le coefficient de proportionnalité  $f_{k-1}$ , calculé sur base des données sinistres du passé ne dépend pas de l'année d'accident  $i$ . Le montant ultime des sinistres survenus en année  $i$  est alors estimé par :

$$\hat{C}_{in} = C_{i,n+1-i} \cdot \hat{f}_{n+1-i} \dots \hat{f}_{n-1} \quad 2 \leq i \leq n$$

Les facteurs de liquidation qui correspondent aux schémas de versement des indemnités sont calculés de la manière suivante :

$$\text{Facteur de liquidation} = \frac{1}{\text{coefficients de charge totale}}$$

Le facteur de liquidation correspond à la partie des sinistres définitifs totaux, ayant été payés, en moyenne, durant les dernières années de souscription, jusqu'à l'année de développement correspondante.

Il est noté que le dernier facteur de liquidation doit être égal à 1 pour la dernière année de développement. Dans le cas contraire, ça indique que les sinistres n'ont pas encore été réglés à la dernière année de développement, et continuent d'augmenter. Pour corriger cela, la charge totale définitive à la dernière année de développement doit être augmentée par un facteur de durée.

La réserve de sinistre pour l'année d'accident  $i$  (c'est-à-dire ce qui reste à payer pour les sinistres survenus en l'année  $i$ ), qui est définie par :

$$R_i = C_{i,n} - C_{i,n+1-i}$$

Cette réserve est alors estimée par :

$$\hat{R}_i = C_{i,n+1-i} \hat{f}_{n+1-i} \dots \hat{f}_{k-1} - C_{i,n+1-i} \quad 2 \leq i \leq n$$

Les provisions sont donc les estimations de sinistres définitifs moins les sinistres déjà payés durant la période sous revue.

Exemple de calcul :

Nous nous servons du triangle des paiements cumulés afin d'appliquer la méthode CL :

Année de survenance	SINISTRES PAYES CUMULES									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2002	6 306 375	26 420 084	46 016 787	61 037 576	73 648 028	79 984 882	83 279 461	85 946 793	88 436 058	89 661 159
2003	7 085 114	28 752 421	51 563 454	75 600 404	87 013 752	92 714 481	97 086 399	100 414 471	102 073 527	
2004	6 582 806	24 154 204	46 878 762	62 328 307	70 507 046	75 495 077	79 913 074	82 405 110		
2005	5 884 118	26 841 107	47 942 830	60 975 090	68 278 312	74 079 666	76 812 244			
2006	8 044 911	29 588 818	48 496 983	61 211 909	70 523 005	75 539 417				
2007	7 806 644	31 220 529	51 462 875	66 921 570	75 558 139					
2008	7 814 948	33 550 836	56 501 884	74 061 019						
2009	7 137 716	31 546 577	54 782 490							
2010	6 967 316	29 561 361								
2011	9 375 696									

Tableau 1 : Sinistres payés cumulés pour la branche AT

Nous calculons les paramètres du modèle suivants :

<b>Coefficient de développement</b>	4,11	1,74	1,32	1,15	1,08	1,05	1,03	1,02	1,01
<b>Coefficient de passage</b>	13,09	3,18	1,83	1,38	1,20	1,12	1,07	1,04	1,01
<b>Facteur de liquidation</b>	0,08	0,31	0,55	0,72	0,83	0,89	0,93	0,96	0,99

Tableau 2 : Estimation des paramètres par la méthode CL

Ensuite, nous remplissons la partie inférieure du tableau par les paiements estimés :

Année de survenance	SINISTRES PAYES CUMULES									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2002	6 306 375	26 420 084	46 016 787	61 037 576	73 648 028	79 984 882	83 279 461	85 946 793	88 436 058	89 661 159
2003	7 085 114	28 752 421	51 563 454	75 600 404	87 013 752	92 714 481	97 086 399	100 414 471	102 073 527	103 487 547
2004	6 582 806	24 154 204	46 878 762	62 328 307	70 507 046	75 495 077	79 913 074	82 405 110	84 239 412	85 406 377
2005	5 884 118	26 841 107	47 942 830	60 975 090	68 278 312	74 079 666	76 812 244	79 317 016	81 082 578	82 205 811
2006	8 044 911	29 588 818	48 496 983	61 211 909	70 523 005	75 539 417	79 012 463	81 588 982	83 405 117	84 560 525
2007	7 806 644	31 220 529	51 462 875	66 921 570	75 558 139	81 244 527	84 979 875	87 750 986	89 704 285	90 946 954
2008	7 814 948	33 550 836	56 501 884	74 061 019	85 025 551	91 424 442	95 627 828	98 746 158	100 944 204	102 342 580
2009	7 137 716	31 546 577	54 782 490	72 569 783	83 313 542	89 583 590	93 702 339	96 757 881	98 911 669	100 281 888
2010	6 967 316	29 561 361	51 415 916	68 110 118	78 193 636	84 078 368	87 944 006	90 811 774	92 833 205	94 119 219
2011	9 375 696	38 551 329	67 052 120	88 823 231	101 973 269	109 647 619	114 688 845	118 428 736	121 064 908	122 742 015

Tableau 3 : Triangle des sinistres cumulés estimés par la méthode CL pour la branche AT

La dernière étape consiste à calculer les réserves individuelles ainsi que la réserve totale :

Année	Charge d'aujourd'hui	Charge à l'ultime	Réserves
2002	89 661 159	89 661 159	-
2003	102 073 527	103 487 547	1 414 020
2004	82 405 110	85 406 377	3 001 267
2005	76 812 244	82 205 811	5 393 568
2006	75 539 417	84 560 525	9 021 108
2007	75 558 139	90 946 954	15 388 815
2008	74 061 019	102 342 580	28 281 561
2009	54 782 490	100 281 888	45 499 398
2010	29 561 361	94 119 219	64 557 858
2011	9 375 696	122 742 015	113 366 318
<b>Total</b>			<b>285 923 914</b>

Tableau 4 : Résultats issus de la méthode CL pour la branche AT

### I.1.2. London Chain

Présentation du modèle:

La méthode London Chain suppose que la dynamique des  $(C_{i,k})_{k=1,\dots,n}$  est donnée par la relation suivante:

$$C_{i,k+1} = \lambda_k C_{i,k} + \alpha_k \quad i, k= 1, \dots, n$$

De façon pratique, nous pouvons noter que la méthode standard de Chain Ladder, reposant sur un modèle de la forme  $C_{i,k+1} = \lambda_k C_{i,k}$ , ne pouvait être appliqué que lorsque les points  $(C_{i,k}, C_{i,k+1})$  sont sensiblement alignés (à k fixé) sur une droite passant par l'origine. La méthode London Chain suppose elle aussi que les points soient alignés sur une même droite, mais nous ne supposons plus qu'elle passe par 0.

Procédure de calcul :

Dans ce modèle, nous avons alors 2n paramètres à identifier :  $\lambda_k$  et  $\alpha_k$  pour  $k = 1, \dots, n$ . nous utilisons la méthode des moindres carrés pour estimer ces paramètres. Dans ce sens, nous devons minimiser la fonction suivante :

$$(\hat{\lambda}_k, \hat{\alpha}_k) = \arg \min \{ \sum_{i=1}^{n-k} (C_{i,k+1} - \alpha_k - \lambda_k C_{i,k})^2 \}$$

Ce qui donne finalement :

$$\hat{\lambda}_k = \frac{\frac{1}{n-k} \sum_{i=1}^{n-k} C_{i,k} C_{i,k+1} - \bar{c}_k^{(k)} \bar{c}_{k+1}^{(k)}}{\frac{1}{n-k} \sum_{i=1}^{n-k} C_{i,k}^2 - \bar{c}_k^{(k)2}}$$

Où:

$$\bar{c}_k^{(k)} = \frac{1}{n-k} \sum_{i=1}^{n-k} C_{i,k} \quad \text{et} \quad \bar{c}_{k+1}^{(k)} = \frac{1}{n-k} \sum_{i=1}^{n-k} C_{i,k+1}$$

Et où la constante est donnée par :

$$\hat{\alpha}_k = \bar{c}_{k+1}^{(k)} - \hat{\lambda}_k \bar{c}_k^{(k)}$$

Nous notons que le dernier couple  $(\hat{\lambda}_{n-1}, \hat{\alpha}_{n-1})$  ne respecte pas les formules ci-dessus. Donc, par convention  $\hat{\alpha}_{n-1} = 0$  et  $\hat{\lambda}_{n-1} = \frac{\bar{c}_n}{\bar{c}_{n-1}}$

La méthode de London-Chain est plus élaborée et souple que la méthode de Chain-Ladder dans la mesure où elle tient compte d'une tendance multiplicative, mais aussi d'une tendance additive (ou incrémentale).

Exemple de Calcul :

En se basant sur l'exemple précédemment traité, nous calculons les paramètres suivants :  $\hat{\lambda}_k$  et  $\hat{\alpha}_k$ .

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\hat{\lambda}_k$	2,937	1,092	1,492	1,116	1,018	1,051	1,048	0,943	1,014
$\hat{\alpha}_k$	8 303137	18 766 179	- 8 352 296	2 093 235	4 240 691	- 416 392	- 1 373 705	7 421 216	-

Tableau 5 : Paramètres estimés par la méthode London Chain

A partir de ces paramètres, nous remplissons la partie inférieure du tableau de liquidation, et nous calculons les réserves :

Année	Charge d'aujourd'hui	Charge à l'ultime	Réserves
2002	5 429 846	5 429 846	-
2003	3 801 761	3 933 360	1 414 020
2004	4 165 744	4 406 931	3 871 354
2005	3 607 728	4 184 936	6 362 488
2006	2 805 851	3 929 155	9 813 825
2007	2 749 457	4 371 684	15 709 399
2008	3 263 995	5 258 467	27 031 169
2009	3 690 853	6 086 887	45 517 216
2010	2 165 975	5 506 103	64 091 632
2011	570 494	5 022 551	96 526 783
<b>Réserve Totale</b>			<b>270 337 885</b>

Tableau 6 : Résultats issus de la méthode London Chain pour la branche AT

## I.2. Bornhuetter-Ferguson (ou Loss Ratio simple)

### Présentation du modèle :

Cette méthode présente un nouvel élément qui est le ratio de sinistre.

Ratio de sinistre= Charge totale / Prime
--

Les méthodes basées sur des ratios utilisent en plus du triangle de liquidation, un supplément d'informations. En effet, la donnée d'un indicateur d'exposition au risque ou de sinistralité est indispensable pour l'application de telles méthodes. Dans le cas général, cet indicateur peut être le montant de primes, le nombre de sinistres, le nombre de contrats...

Dans la méthode de BF, l'indicateur utilisé est le montant des primes acquises noté Pa (Earned premium) par la suite.

### L'hypothèse:

Cette méthode suppose que :

- Le ratio de sinistre est constant ( $\lambda_i = \lambda$ ), Cependant, cette technique n'est applicable que pour les branches totalement stables et il se peut qu'elle donne des résultats aberrants.

### Procédure de calcul :

Nous introduisons le ratio de sinistre initial  $\lambda$  calculé à partir des sinistres définitifs explicitement évalués par les souscripteurs, où il représente un ratio de sinistre moyen adapté en fonction de l'insuffisance ou de l'excès de primes.

Ensuite nous les multiplions par les primes acquises  $P_a$  de chaque année de survenance, ce qui nous donne les évaluations de référence pour la charge à l'ultime :

$$\text{Charge ultime} = \lambda * P_a$$

Le niveau de provisions est alors directement déduit par différence entre la charge ultime et les sinistres déjà réglés après  $j$  années  $C_{i;n-i}$  :

$$\widehat{R}_l = \text{charge ultime} - C_{i;n-i}$$

Exemple de calcul:

Dans cette méthode, nous avons besoin du tableau des primes comme donnée pour effectuer les calculs nécessaires:

Année de survenance	Primes									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2002	77 155 907	97 011 838	99 235 644	99 272 564	99 272 564	99 350 357	99 350 357	99 350 357	99 351 093	99 351 093
2003	123 126 893	140 008 505	140 587 008	140 835 752	141 026 395	141 026 395	141 026 395	141 018 210	141 013 908	
2004	100 278 118	115 380 058	117 535 400	118 009 202	118 009 202	118 009 202	118 021 655	118 018 574		
2005	106 351 127	124 367 100	127 067 172	127 067 172	127 067 962	127 084 547	127 073 956			
2006	114 338 544	134 000 008	135 958 434	135 960 667	136 049 460	136 043 964				
2007	122 421 104	143 664 834	145 842 630	146 189 648	146 173 615					
2008	137 146 955	162 094 608	163 632 122	164 103 194						
2009	147 618 622	174 517 373	176 612 009							
2010	156 295 053	180 743 071								
2011	164 335 616									

Tableau 7 : Primes émises pour la branche AT

Nous prenons comme donnée exogène, le ratio de sinistre suivant :

<b>Ratio de sinistre (S/P)</b>	70%
--------------------------------	-----

Nous calculons les primes acquises pour chaque année de survenance :

Année de survenance	Prime acquise pour chaque année de survenance
2002	99 351 093
2003	141 013 908
2004	118 016 823
2005	127 068 076
2006	136 038 192
2007	146 188 319
2008	164 176 208
2009	176 990 777
2010	183 691 676
2011	195 817 477

Tableau 8 : Primes acquises pour chaque année de survenance pour la branche AT

A partir de triangle des sinistres payés, primes acquises et ratio de sinistre, nous obtenons les résultats suivants :

Année de survenance	Charge d'aujourd'hui	Charge ultime	Réserve
2002	89 661 159	69 545 765	-
2003	102 073 527	98 709 735	-
2004	82 405 110	82 611 776	206 666
2005	76 812 244	88 947 653	12 135 410
2006	75 539 417	95 226 734	19 687 317
2007	75 558 139	102 331 823	26 773 685
2008	74 061 019	114 923 345	40 862 327
2009	54 782 490	123 893 544	69 111 054
2010	29 561 361	128 584 173	99 022 813
2011	9 375 696	137 072 234	127 696 538
<b>Réserve Totale</b>			<b>372 016 624</b>

Tableau 9 : Résultats issus de la méthode BF pour la branche AT

### I.3. Loss Ratio

#### Présentation du modèle :

Au lieu de prendre un ratio de sinistre constant comme dans le cas de BF, cette méthode se base sur un ratio de sinistre calculé pour chaque année de survenance.

On notera :

$C_{i,j}$  le montant cumulé des sinistres survenu l'année  $i$ , en  $j$  années de développement, avec :

$$C_{i,j} = Y_{i,1} + Y_{i,2} + \dots + Y_{i,j}$$

$P_{i,j}$  le montant cumulé des primes acquises pour l'année de survenance  $i$ , en  $j$  années.

Alors :

$$\pi_{i,j} = \frac{C_{i,j}}{P_{i,j}}$$

Avec  $\pi_{i,j}$  rapport des Sinistres sur Primes (S/P) pour chaque année de survenance  $i$ , en  $j$  année de développement.

#### L'hypothèse :

Le ratio de sinistre n'est plus constant.

#### Procédure de calcul :

Dans un premier temps, nous calculons l'évolution des ratios S/P cumulés, puis nous décumulons le triangle des  $\pi_{i,j}$  obtenu. Nous nous servons de la moyenne des  $\pi_{i,j}$  pour remplir le tableau des  $\pi_{i,j}$  décumulés.

Nous sommions les colonnes pour chaque année de survenance afin de trouver un ratio de sinistre final :

$$\pi_i = \sum_{j=1}^7 \pi_{i,j}$$

Cette méthode permet, une fois calculés les  $\pi_i$ , d'estimer les réserves par la formule suivante :

$$\text{Réserve individuelle} = \text{Primes acquises} * \pi_i - C_{i;n-i}$$

Enfin le montant total des réserves obtenues par la méthode de Loss-Ratio est la somme des réserves individuelles pour chaque année de survenance.

Exemple de calcul:

Nous calculons le ratio de sinistre cumulé :

Année de survenance	S/P (en %)									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
<b>2002</b>	6,35	26,59	46,32	61,44	74,13	80,51	83,82	86,51	89,01	90,25
<b>2003</b>	5,02	20,39	36,57	53,61	61,71	65,75	68,85	71,21	72,39	
<b>2004</b>	5,58	20,47	39,72	52,81	59,74	63,97	67,71	69,82		
<b>2005</b>	4,63	21,12	37,73	47,99	53,73	58,30	60,45			
<b>2006</b>	5,91	21,75	35,65	45,00	51,84	55,53				
<b>2007</b>	5,34	21,36	35,20	45,78	51,69					
<b>2008</b>	4,76	20,44	34,42	45,11						
<b>2009</b>	4,03	17,82	30,95							
<b>2010</b>	3,79	16,09								
<b>2011</b>	4,79									

Tableau 10 : Triangle des S/P pour la branche AT en pourcentage.

Nous remplissons le triangle supérieur du tableau par le ratio de sinistre décumulé. Puis, nous complétons sa partie inférieure par la moyenne, pour chaque année de développement, des  $\pi_{i,j}$  calculés ci-dessus:

Année de survenance	S/P (en %)										S/P Total (en %)
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
<b>2002</b>	6,35	20,25	19,72	15,12	12,69	6,38	3,32	2,68	2,51	1,23	90,25
<b>2003</b>	5,02	15,37	16,18	17,05	8,09	4,04	3,10	2,36	1,18	1,23	73,62
<b>2004</b>	5,58	14,89	19,26	13,09	6,93	4,23	3,74	2,11	1,84	1,23	72,90
<b>2005</b>	4,63	16,49	16,61	10,26	5,75	4,57	2,15	2,39	1,84	1,23	65,91
<b>2006</b>	5,91	15,84	13,90	9,35	6,84	3,69	3,08	2,39	1,84	1,23	64,07
<b>2007</b>	5,34	16,02	13,85	10,57	5,91	4,58	3,08	2,39	1,84	1,23	64,80
<b>2008</b>	4,76	15,68	13,98	10,70	7,70	4,58	3,08	2,39	1,84	1,23	65,93
<b>2009</b>	4,03	13,79	13,13	12,30	7,70	4,58	3,08	2,39	1,84	1,23	64,08
<b>2010</b>	3,79	12,30	15,83	12,30	7,70	4,58	3,08	2,39	1,84	1,23	65,04
<b>2011</b>	4,79	15,62	15,83	12,30	7,70	4,58	3,08	2,39	1,84	1,23	69,36

Tableau 11 : S/P estimés pour chaque année de survenance pour la branche AT en pourcentage.

Après avoir trouvé les ratios de sinistre pour chaque année de survenance, nous calculons la charge à l'ultime et les réserves individuelles ainsi que la réserve totale:

Année de survenance	Charge d'aujourd'hui	Charge à l'ultime	Réserves
<b>2002</b>	89 661 159	89 661 159	-
<b>2003</b>	102 073 527	103 812 373	<b>1 738 846</b>
<b>2004</b>	82 405 110	86 033 094	<b>3 627 983</b>
<b>2005</b>	76 812 244	83 749 662	<b>6 937 418</b>
<b>2006</b>	75 539 417	87 153 298	<b>11 613 882</b>
<b>2007</b>	75 558 139	94 734 133	<b>19 175 994</b>
<b>2008</b>	74 061 019	108 242 635	<b>34 181 616</b>
<b>2009</b>	54 782 490	113 409 100	<b>58 626 610</b>
<b>2010</b>	29 561 361	119 480 668	<b>89 919 307</b>
<b>2011</b>	9 375 696	135 824 332	<b>126 448 636</b>
Réserve totale			<b>352 270 292</b>

Tableau 12 : Résultats issus de la méthode Loss-Ratio pour la branche AT

### I.4. Méthode des moindres carrés de Vylder

#### Présentation du modèle :

La méthode des moindres carrés de Vylder repose sur une modélisation des montants des paiements non cumulés. Elle fait partie de la modélisation factorielle qui permet d'écrire les montants incrémentaux comme le produit de trois facteurs :

- $\alpha_i$  : facteur ligne par année de survenance  $i \in \{0, \dots, n\}$  ;
- $\beta_j$  : facteur colonne relatif aux années de développement  $j \in \{0, \dots, n\}$  ;
- $\gamma_{i+j}$  : facteur représentant l'inflation par année calendaire.

Le modèle s'écrit :

$$Y_{i,j} = \alpha_i \times \beta_j \times \gamma_{i+j}$$

Avec  $Y_{i,j}$  représente le montant (non cumulé) des paiement relatifs à l'année de survenance  $i$  effectué au bout de  $j$  années.

#### Les hypothèses :

Il est nécessaire d'introduire des contraintes pour que le modèle soit identifiable.

Le modèle des moindres carrés de Vylder consiste à ne pas tenir compte d'un effet éventuel de l'inflation, c'est-à-dire de poser  $\gamma_{i+j} = 1$ .

Le modèle peut alors s'écrire :

$$Y_{i,j} = \alpha_i \times \beta_j \quad 0 \leq i, j \leq n$$

Procédure de calcul :

Année de survenance	Année de Développement						
	0	1	2	3	4	5	6
1995	$\alpha_0\beta_0$	$\alpha_0\beta_1$	$\alpha_0\beta_2$	$\alpha_0\beta_3$	$\alpha_0\beta_4$	$\alpha_0\beta_5$	$\alpha_0\beta_6$
1996	$\alpha_1\beta_0$	$\alpha_1\beta_1$	$\alpha_1\beta_2$	$\alpha_1\beta_3$	$\alpha_1\beta_4$	$\alpha_1\beta_5$	
1997	$\alpha_2\beta_0$	$\alpha_2\beta_1$	$\alpha_2\beta_2$	$\alpha_2\beta_3$	$\alpha_2\beta_4$		
1998	$\alpha_3\beta_0$	$\alpha_3\beta_1$	$\alpha_3\beta_2$	$\alpha_3\beta_3$			
1999	$\alpha_4\beta_0$	$\alpha_4\beta_1$	$\alpha_4\beta_2$				
2000	$\alpha_5\beta_0$	$\alpha_5\beta_1$					
2001	$\alpha_6\beta_0$						

Nous cherchons à estimer les  $\alpha_i$  et les  $\beta_j$  afin de remplir le tableau ci-dessus. L'ajout de la contrainte  $\sum_{j=0}^n \beta_j = 1$  permet une interprétation des paramètres.

En effet,  $\sum_{j=0}^n Y_{i,j} = \alpha_i \sum_{j=0}^n \beta_j = \alpha_i$  implique que le paramètre  $\alpha_i$  peut être interprété comme le montant de recouvrement perçu durant l'année de survenance  $i$ . De plus, l'équation

$\beta_j = \frac{Y_{i,j}}{\alpha_i}$  permet de décrire  $\beta_j$  comme la proportion de ce montant payée au bout de  $j$  années de développement.

Les paramètres sont initialisés selon la formule suivante :

$$\beta_j^{(0)} = 1 \text{ avec } j = 1, \dots, n \text{ et } \alpha_i^{(0)} = \frac{\sum_{j=1}^n C_{i,j} \beta_j^{(0)}}{\sum_{j=1}^n \beta_j^{(0)^2}}$$

Pour  $k^{\text{ème}}$  itération les paramètres sont estimés par :

$$\alpha_i^{(k)} = \frac{\sum_{j=1}^n Y_{i,j} \beta_j^{(k)}}{\sum_{j=1}^n \beta_j^{(k)^2}} \text{ et } \beta_j^{(k)} = \frac{\sum_{i=1}^n Y_{i,j} \alpha_i^{(k)}}{\sum_{i=1}^n \alpha_i^{(k)^2}}$$

Nous nous arrêtons, lorsque nous remarquons que les paramètres estimés convergent. Pour que la contrainte  $\sum_{j=0}^n \tilde{\beta}_j = 1$  soit vérifiée, nous normalisons les paramètres :

$$\tilde{\beta}_j = \frac{\hat{\beta}_j^{(c)}}{\sum_{j=1}^n \hat{\beta}_j^{(c)}} \text{ et } \tilde{\alpha}_i = \frac{\sum_{j=1}^n C_{i,j} \tilde{\beta}_j}{\sum_{j=1}^n \tilde{\beta}_j^2}$$

Alors, nous obtenons le triangle complété de  $Y_{i,j}$  (les paiements décumulés) et  $C_{i,j}$  (les paiements cumulés) :

Enfin, nous calculons l'estimation des réserves par la formule suivante :

$$\tilde{R} = \sum_{i=1}^n (\tilde{c}_{i,n} - \tilde{c}_{i,n-i})$$

Exemple de calcul :

Dans notre exemple, nous nous arrêtons au 6<sup>ème</sup> itération et nous obtenons les résultats suivants :

$\hat{\beta}_1^{(6)}$	0,515081758	$\hat{\alpha}_1^{(6)}$	12865214,9
$\hat{\beta}_2^{(6)}$	1,608025736	$\hat{\alpha}_2^{(6)}$	15230462,8
$\hat{\beta}_3^{(6)}$	1,568842889	$\hat{\alpha}_3^{(6)}$	12585407,6
$\hat{\beta}_4^{(6)}$	1,214315843	$\hat{\alpha}_4^{(6)}$	12435952,4
$\hat{\beta}_5^{(6)}$	0,728603108	$\hat{\alpha}_5^{(6)}$	12378395,9
$\hat{\beta}_6^{(6)}$	0,42300035	$\hat{\alpha}_6^{(6)}$	13459414
$\hat{\beta}_7^{(6)}$	0,279449855	$\hat{\alpha}_7^{(6)}$	15137754,9
$\hat{\beta}_8^{(6)}$	0,209341295	$\hat{\alpha}_8^{(6)}$	14942627,9
$\hat{\beta}_9^{(6)}$	0,144140634	$\hat{\alpha}_9^{(6)}$	14002020
$\hat{\beta}_{10}^{(6)}$	0,095225898	$\hat{\alpha}_{10}^{(6)}$	18202345,7

Tableau 13 : Paramètres estimés par la méthode de Vylder pour la branche AT

D'où :

$\tilde{\beta}_1$	0,075903283	$\tilde{\alpha}_1$	87303700,4
$\tilde{\beta}_2$	0,236961281	$\tilde{\alpha}_2$	103354337
$\tilde{\beta}_3$	0,231187233	$\tilde{\alpha}_3$	85404920,4
$\tilde{\beta}_4$	0,178943552	$\tilde{\alpha}_4$	84390713
$\tilde{\beta}_5$	0,107368136	$\tilde{\alpha}_5$	84000133
$\tilde{\beta}_6$	0,062334018	$\tilde{\alpha}_6$	91335951,6
$\tilde{\beta}_7$	0,041180184	$\tilde{\alpha}_7$	102725219
$\tilde{\beta}_8$	0,030848873	$\tilde{\alpha}_8$	101401082
$\tilde{\beta}_9$	0,021240798	$\tilde{\alpha}_9$	95018090,8
$\tilde{\beta}_{10}$	0,014032643	$\tilde{\alpha}_{10}$	123521616

Tableau 14 : Normalisation des paramètres estimés par la méthode de Vylder pour la branche AT

Nous remplissons le tableau entier à partir des coefficients estimés :

Année	SINISTRES PAYES (CUMULES)									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2002	6 626 638	27 314 234	47 497 735	63 120 169	72 493 805	77 935 795	81 530 978	84 224 198	86 078 599	87 303 700
2003	7 844 934	32 335 910	56 230 113	74 724 705	85 821 668	92 264 159	96 520 309	99 708 674	101 904 003	103 354 337
2004	6 482 514	26 720 173	46 464 700	61 747 360	70 917 127	76 240 759	79 757 749	82 392 395	84 206 464	85 404 920
2005	6 405 532	26 402 864	45 912 919	61 014 093	70 074 967	75 335 379	78 810 604	81 413 962	83 206 488	84 390 713
2006	6 375 886	26 280 665	45 700 423	60 731 706	69 750 643	74 986 709	78 445 850	81 037 159	82 821 389	84 000 133
2007	6 932 699	28 575 783	49 691 489	66 035 468	75 842 039	81 535 376	85 296 607	88 114 218	90 054 267	91 335 952
2008	7 797 181	32 139 081	55 887 840	74 269 856	85 299 271	91 702 547	95 932 790	99 101 747	101 283 713	102 725 219
2009	7 696 675	31 724 805	55 167 441	73 312 511	84 199 756	90 520 493	94 696 208	97 824 317	99 978 157	101 401 082
2010	7 212 185	29 727 794	51 694 763	68 697 638	78 899 553	84 822 412	88 735 275	91 666 476	93 684 736	95 018 091
2011	9 375 696	38 645 537	67 202 157	89 305 554	102 567 840	110 267 438	115 354 081	119 164 584	121 788 282	123 521 616

Tableau 15 : Sinistres payés cumulés estimés par la méthode de Vylder pour la branche AT

Ensuite nous calculons les réserves individuelles ainsi que la réserve totale :

Année	Charge d'aujourd'hui	Charge à l'ultime	Réserves
2002	87 303 700	87 303 700	-
2003	101 904 003	103 354 337	1 450 334
2004	82 392 395	85 404 920	3 012 525
2005	78 810 604	84 390 713	5 580 109
2006	74 986 709	84 000 133	9 013 424
2007	75 842 039	91 335 952	15 493 913
2008	74 269 856	102 725 219	28 455 363
2009	55 167 441	101 401 082	46 233 641
2010	29 727 794	95 018 091	65 290 297
2011	9 375 696	123 521 616	114 145 920
Réserve totale			<b>288 675 527</b>

Tableau 16 : Résultats issus par la méthode de Vylder pour la branche AT

## II. Evaluation stochastique des réserves non vie

### II.1. Chain Ladder stochastique : Modèle de Mack

Présentation du modèle :

Le modèle de Mack est un des premiers modèles stochastiques pour la méthode chain ladder. Il est dès lors intéressant de pouvoir quantifier la variabilité des réserves estimées, notamment pour déterminer si la différence entre les résultats obtenus par Chain Ladder et ceux obtenus par une autre méthode est significative, mais également pour construire des intervalles de

confiance sur les estimations faites pour prévoir le montant ultime des sinistres. Pour mesurer cette variabilité, il faut d'abord déterminer quel est le modèle stochastique qui sous-tend la méthode de Chain Ladder et quelles sont les hypothèses sur lesquelles se base cette méthode.

Les hypothèses :

1. Les années de survenance sont indépendantes entre elles.

$$\{C_{i1}, \dots, C_{in}\}, \{C_{j1}, \dots, C_{jn}\} \quad \forall i, j \quad \text{sont indépendants}$$

Cette hypothèse traduit le fait que deux années de survenance différentes sont indépendantes. Ainsi,  $C_{ij}$  est indépendant de  $C_{i'j}$  pour  $i \neq i'$ . Cette hypothèse peut être remise en question, notamment en cas d'un grand changement dans la gestion des sinistres d'une année à l'autre...

2. Etant donné le développement  $C_{i1}, \dots, C_{ik}$  des sinistres survenus en année  $i$ , il existe un coefficient  $f_k$  tel que l'espérance de  $C_{ik+1}$  est égale à  $C_{ik} * f_k$ .

$$E(C_{ik+1} / C_{i1}, \dots, C_{ik}) = C_{ik} f_k \quad 1 \leq i \leq n, 1 \leq k \leq n-1$$

Ceci traduit deux hypothèses de base de la méthode de Chain Ladder. Premièrement seule la valeur la plus récente  $C_{ik}$  est utile pour déterminer  $C_{ik+1}$ , et deuxièmement le facteur  $f_k$  est indépendant de l'année d'accident  $i$  considérée.

3. Hypothèse relative à la volatilité des données. Le modèle suppose que pour une année d'origine définie nous avons :

$$\text{Var}(C_{ik+1} / C_{i1}, \dots, C_{ik}) = C_{ik} \sigma_k^2 \quad 1 \leq i \leq n, 1 \leq k \leq n-1$$

Procédure de calcul :

La description du modèle est la même que chain Ladder déterministe. A partir des estimations de la réserve, il est possible d'étudier plus précisément l'erreur de prévision.

- Estimation de l'erreur sur la réserve d'une année de survenance et construction d'un intervalle de confiance.

$\hat{C}_{in}$  fournit un estimateur mais pas la vraie valeur de  $C_{in}$ . Dans cette section, nous nous intéressons à la distance moyenne entre l'estimateur et la vraie valeur.

Nous définissons l'erreur carrée moyenne (mean squared error),  $mse(\hat{C}_{in})$  de l'estimateur  $\hat{C}_{in}$  de  $C_{in}$  par :

$$mse(\hat{C}_{in}) = E [(\hat{C}_{in} - C_{in})^2 / D]$$

Avec : D étant l'ensemble des données observées.

Nous définissons, de plus, l'erreur standard  $se(\hat{C}_{in})$  par :

$$se(\hat{C}_{in}) = \sqrt{mse(\hat{C}_{in})}$$

Nous nous intéressons à l'erreur sur la réserve :

$$mse(\hat{R}_i) = E[(\hat{R}_i - R_i)^2 / D] = E[(\hat{C}_{in} - C_{in})^2 / D] = mse(\hat{C}_{in})$$

L'erreur d'estimation de la réserve pour une année d'accident est donc égale à l'erreur d'estimation du montant final à payer pour les sinistres survenus lors de cette année. En effet, ces deux grandeurs sont égales à une constante additive près.

Pour pouvoir calculer  $mse(\hat{C}_{in})$ , nous allons le décomposer selon la formule :

$$E(X - a)^2 = \text{Var}(X) + (E(X) - a)^2$$

Donc :

$$\widehat{mse}(\hat{C}_{in}) = \text{Var}(C_{in} / D) + (E(C_{in} / D) - \hat{C}_{in})^2$$

Sous les trois hypothèses,  $mse(\hat{R}_i)$  peut être estimé par :

$$\widehat{mse}(\hat{R}_i) = \hat{C}_{in}^2 \sum_{k=n+1-i}^{n-1} \frac{\hat{\sigma}_k^2}{\hat{f}_k^2} \left( \frac{1}{\hat{C}_{in}} + \frac{1}{\sum_{j=1}^{n-k} C_{jk}} \right)$$

Avec :

- $\hat{C}_{ik} = C_{i,n+1-i} \cdot \hat{f}_{n+1-i} \dots \cdot \hat{f}_{k-1}$  (pour tout  $k > n+1-i$ ) sont les valeurs estimées de  $C_{i,k}$  et  $\hat{C}_{i,n+1-i} = C_{i,n+1-i}$ .
- $\hat{\sigma}_k^2 = \frac{1}{n-k-1} \sum_{i=1}^{n-k} C_{ik} \left( \frac{C_{i,k+1}}{C_{ik}} - \hat{f}_k \right)^2$  (pour tout  $1 \leq k \leq n-2$ ) est un estimateur sans biais de  $\sigma_k^2$  et  $\hat{\sigma}_{n-1}^2 = \min \left\{ \frac{\hat{\sigma}_{n-2}^4}{\hat{\sigma}_{n-3}^2}, \min(\hat{\sigma}_{n-3}^2, \hat{\sigma}_{n-2}^2) \right\}$

Remarque sur le choix de  $\hat{\sigma}_{n-1}^2$  :

Si  $\hat{f}_{n-1} = 1$  et que nous croyons que le développement des sinistres se termine après  $n-1$  années (et non pas  $n$ ), alors on prend  $\hat{\sigma}_{n-1} = 0$ .

Sinon, nous extrapolons la série  $\hat{\sigma}_1, \dots, \hat{\sigma}_{n-2}$ , pour ajouter un terme supplémentaire, soit par régression log-linéaire, soit en exigeant que  $\frac{\hat{\sigma}_{n-3}}{\hat{\sigma}_{n-2}} = \frac{\hat{\sigma}_{n-2}}{\hat{\sigma}_{n-1}}$  soit vérifiée, pour autant que  $\hat{\sigma}_{n-3} > \hat{\sigma}_{n-2}$ .

Après avoir trouvé les estimations pour la moyenne de la variable  $R_i$  (soit  $\hat{R}_i$ ) et l'écart type de cette variable (soit  $se(\hat{R}_i)$ ), il nous reste à faire une hypothèse paramétrique sur la distribution de  $R_i$  pour pouvoir construire facilement des intervalles de confiance sur les réserves estimées.

Si le volume de données est suffisant, nous pouvons supposer que la distribution est normale.

Un intervalle de confiance à 95% est alors donné par :

$$IC (R_i) = [ \hat{R}_i - 2 \text{se}(\hat{R}_i), \hat{R}_i + 2 \text{se}(\hat{R}_i) ]$$

Mais la distribution normale n'est peut être pas une bonne approximation si la vraie distribution de  $R_i$  n'est pas symétrique. De plus la distribution normale peut conduire à une borne inférieure négative même si la réserve ne peut pas être négative. Dans ces cas là il vaut mieux utiliser une approche basée sur une distribution log-normale de paramètres  $\mu_i$  et  $\sigma_i^2$  tels que la moyenne et la variance des deux distributions soient égales, c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} \exp(\mu_i + \frac{\sigma_i^2}{2}) &= \hat{R}_i \\ \exp(2\mu_i + \sigma_i^2) (\exp(\sigma_i^2) - 1) &= (\text{se}(\hat{R}_i))^2 \end{aligned}$$

Ce qui conduit à:

$$\begin{aligned} \mu_i &= \ln(\hat{R}_i) - \frac{\sigma_i^2}{2} \\ \sigma_i^2 &= \ln \left( 1 + \left( \frac{\text{se}(\hat{R}_i)}{\hat{R}_i} \right)^2 \right) \end{aligned}$$

Les bornes d'un intervalle de confiance à 95% sont:

$$[\exp(\mu_i - 2 \sigma_i), \exp(\mu_i + 2 \sigma_i)] = [\hat{R}_i \exp \left( \frac{-\sigma_i^2}{2} - 2 \sigma_i \right), \hat{R}_i \exp \left( \frac{-\sigma_i^2}{2} + 2 \sigma_i \right)]$$

Estimation de l'erreur sur la réserve totale:

Le calcul de l'erreur commise sur la réserve totale estimée  $\hat{R} = \hat{R}_1 + \hat{R}_2 + \dots + \hat{R}_n$  ne se fait pas par la somme des erreurs  $(\text{se}(\hat{R}_i))^2$  parce qu'elles sont corrélées entre elles (car toutes influencées par les mêmes  $\hat{f}_k$ ) mais on peut utiliser la formule suivante :

$$\widehat{mse}(\hat{R}) = \sum_{i=2}^n \left\{ mse(\hat{R}_i) + \hat{C}_{in} \left( \sum_{j=i+1}^n \hat{C}_{jn} \right) \sum_{k=n+1-i}^{n-1} \frac{\frac{2\hat{\sigma}_k^2}{\hat{f}_k^2}}{\sum_{k=n+1-i}^{n-k} C_{ik}} \right\}$$

Exemple de Calcul :

A partir des paiements cumulés, nous calculons les erreurs suivantes:

Année	$\widehat{mse}(\hat{R}_i)$	$\widehat{se}(\hat{R}_i)$	$\widehat{se}(\hat{R}_i) / \hat{R}_i$
2002	-		
2003	158 108 643 489 692	225 172	15,92%
2004	64 320 303 523 963	955 769	31,85%
2005	38 591 377 348 542	945 278	17,53%
2006	10 641 929 542 236	1 279 742	14,19%
2007	2 533 910 620 158	1 591 826	10,34%
2008	1 637 739 513 857	3 262 197	11,53%
2009	893 550 767 881	6 212 196	13,65%
2010	913 494 200 010	8 019 994	12,42%
2011	50 702 403 904	12 574 126	11,09%

Tableau 17 : Erreurs standards estimées par le modèle de Mack pour la branche AT

Nous obtenons par la suite les réserves et l'intervalle de confiance :

Année de survenance	Réserve	Intervalle de confiance	
2002	-	-	-
2003	1 414 020	972 683	1 855 357
2004	3 001 267	1 127 960	4 874 574
2005	5 393 568	3 540 822	7 246 313
2006	9 021 108	6 512 814	11 529 402
2007	15 388 815	12 268 836	18 508 795
2008	28 281 561	21 887 655	34 675 467
2009	45 499 398	33 323 495	57 675 302
2010	64 557 858	48 838 670	80 277 046
2011	113 366 318	88 721 032	138 011 605
<b>Réserve totale</b>	<b>285 923 914</b>	<b>258 329 920</b>	<b>313 517 908</b>

Tableau 18 : Résultats issus du modèle de Mack pour la branche AT

Vérification des hypothèses :

- $H_1$  : Cette hypothèse suppose l'indépendance entre les différentes années de survenance. Elle peut, en effet, ne pas être vérifiée, en pratique, pour deux raisons :
  1. Changement dans l'organisation de l'équipe de gestion des sinistres, qui peuvent, par exemple, payer plus rapidement.
  2. Facteur d'inflation (qui intervient de façon calendaire, par diagonale, ce qui rendra les vecteurs non indépendants).

Mack a proposé une méthode pour tester cette hypothèse. Pour cela, on considère la colonne  $k$ , définie par :  $\delta_k = \{ C_{k,1}, C_{k-1,2}, \dots, C_{2,k-1}, C_{1,k} \}$  pour  $k=1, \dots, n$

On pose alors :

$$A_k = \left\{ \frac{C_{k,2}}{C_{k,1}}, \frac{C_{k,3}}{C_{k,2}}, \dots, \frac{C_{2,k}}{C_{2,k-1}}, \frac{C_{1,k+1}}{C_{1,k}} \right\} = \text{'' } \frac{\delta_{k+1}}{\delta_k} \text{ ''}$$

Et

$$A_{k-1} = \left\{ \frac{C_{k-1,2}}{C_{k-1,1}}, \frac{C_{k-2,3}}{C_{k-2,2}}, \dots, \frac{C_{2,k-1}}{C_{2,k-2}}, \frac{C_{1,k}}{C_{1,k-1}} \right\} = \text{'' } \frac{\delta_k}{\delta_{k-1}} \text{ ''}$$

Pour chaque  $k$ , on peut alors noter  $N_k^+$  le nombre d'éléments plus grands que la médiane de  $A_k$  et  $N_k^-$  le nombre d'éléments inférieurs à cette dernière. S'il n'y a pas de changements d'une année sur l'autre, alors  $N_k^+$  et  $N_k^-$  doivent « être proches », ou encore  $N_k = \min(N_k^+, N_k^-) = Z_k$

Doit être proche de  $\frac{(N_k^+ + N_k^-)}{2}$ .

Pour élaborer un test, on peut noter que, sous l'hypothèse de stabilité,  $N_k^+$  et  $N_k^-$  suivent des lois binomiales,  $B(p=1/2, n=N_k^+ + N_k^-)$  et donc :

$$\mathbb{E}(Z_k) = \frac{n_k}{2} - \frac{(n_k-1)!}{m_k!(n_k-1-m_k)!} * \frac{n_k}{2^{n_k}}$$

Avec :

$$n_k = N_k^+ + N_k^- \text{ et } m_k = \frac{n_k - 1}{2}$$

Alors :

$$V(Z_k) = \frac{n_k * (n_k - 1)}{4} - \frac{(n_k - 1)!}{m_k!(n_k - 1 - m_k)!} * \frac{n_k * (n_k - 1)}{2^{n_k}} + \mathbb{E}(Z_k) - \mathbb{E}(Z_k)^2$$

Nous pouvons alors effectuer un test en faisant une hypothèse de normalité sur  $Z = Z_1 + \dots + Z_{n-1}$ , et par exemple, un intervalle à 95% pour  $Z$  sera de la forme  $\mathbb{E}(Z_k) \pm 1,96\sqrt{V(Z_k)}$ .

- $H_2$  : il existe une relation de proportionnalité entre les montants cumulés, d'une année de développement à la suivante. Cette hypothèse doit être vérifiée par un graphe qui assure la linéarité entre les montants cumulés d'une année de développement à la suivante.

- $H_3$  : Cette hypothèse s'interprète graphiquement par le fait que pour une année de développement  $j$  donnée, la représentation des points  $(C_{ij}, \varepsilon_{ij})$  doit être non structurée.

Les  $\varepsilon_{ij} = \frac{C_{ij+1} - \hat{f}_j C_{ij}}{\sqrt{C_{ij}}}$  qui représentent les résidus de l'estimation par moindres carrés, doivent ne pas être auto-corrélés, ou afficher de tendance claire.

## II.2. Les modèles factoriels stochastiques

### Définition :

Nous cherchons à expliquer les paiements observés non cumulés  $(y_{i,j})$  d'un triangle en fonction de trois types de variables explicatives :

- Les variables années d'origine :  $(\alpha_i)$ ,  $i=1 \dots n$  avec  $\alpha_1=0$  ;
- Les variables années de développement :  $(\beta_j)$ ,  $j=1 \dots n$  avec  $\beta_1=0$  ;
- Les variables années calendaires :  $(\mu_{i+j})$ . Pour un triangle déflaté, elles seront représentées par un unique paramètre  $\mu$ .

Le facteur  $\alpha_i$  prend alors en compte la variation de la taille du portefeuille ; le facteur  $\beta_j$  correspond à la vitesse de règlement des sinistres ; et le facteur  $\mu_{i,j}$  intègre les effets calendaires.

### L'hypothèse :

Dans le cadre de ces modèles, nous utilisons les triangles de paiements décumulés  $y_{i,j}$ . L'hypothèse fondamentale sous-jacente est l'indépendance des paiements : Les variables  $y_{i,j}$  sont indépendants  $i, j = 0, \dots, n$ .

Dans ce rapport, deux types de modèles ont été retenus : la régression Log Normale et le modèle linéaire généralisé (GLM).

### II.2.1 La régression Log Normale

#### Présentation du modèle :

Nous supposons que les paiements non cumulés  $(y_{i,j})$  suivent chacun une loi log normale :

$$\mathcal{LN}(m_{i,j}, \sigma^2) \text{ où } m_{i,j} = \alpha_i + \beta_j + \mu.$$

Soit la variable  $Y_{i,j} = \ln(y_{i,j})$  (appelée log-incrément). Cette variable suit donc une loi

$$Y_{i,j} \sim \mathcal{N}(m_{i,j}, \sigma^2)$$

$$\text{avec : } m_{i,j} = \mathbb{E}(Y_{i,j}) \text{ et } \sigma^2 = \text{var}(Y_{i,j})$$

$$\text{Ainsi : } \mathbb{E}(y_{i,j}) = \mu_{i,j} = e^{m_{i,j} + \frac{\sigma^2}{2}} \text{ et } \text{var}(y_{i,j}) = e^{2m_{i,j} + \sigma^2} (e^{\sigma^2} - 1)$$

#### Procédure de calcul :

La régression Log Normale est donc un modèle linéaire Normal appliqué aux log-incréments du triangle :  $Y=X * A + \varepsilon$

Où :

- Y est le vecteur des log-incréments du triangle pris ligne à ligne (de taille  $N = n + (n-1) + \dots + 2 + 1$ ).

- $X$  est la matrice de régression (de taille  $Np$ ). Elle correspond à la matrice Jacobienne de la transformation  $f : A \rightarrow f(A) = m_{i,j}$

$$\text{Définie par : } \begin{cases} \frac{\partial m_{i,j}}{\partial \mu} = 1 \\ \frac{\partial m_{i,j}}{\partial \alpha_k} = 1 \text{ si } k = i, 0 \text{ sinon} \\ \frac{\partial m_{i,j}}{\partial \beta_l} = 1 \text{ si } l = j, 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

- $A = (\mu, \alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_n)$  le vecteur des paramètres de régression (de taille  $p$ ).
- $\varepsilon$  le vecteur des erreurs, distribuées selon une loi  $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ .

L'estimateur sans biais du maximum de vraisemblance de  $A$  est  $\hat{A} = (X'X)^{-1}Y$ .

Notons  $(e_i)$  le résidu, estimation de l'erreur  $(\varepsilon_i)$  ;  $e_i = Y_i - \hat{Y}_i$  où  $\hat{Y}_i$  est la  $i^{\text{ème}}$  valeur prévue par le modèle.

L'estimateur sans biais de  $\sigma^2$  est :

$$S^2 = \frac{1}{N-p} \sum_{i=1}^N e_i^2$$

L'estimation des incréments est alors donnée par :

$$\hat{\mu}_{i,j} = e^{\hat{\mu} + \hat{\alpha}_i + \hat{\beta}_j + S^2/2}$$

Donc l'estimation des provisions est :

$$\hat{R} = \sum_{i+j > n} \hat{\mu}_{i,j}.$$

### ➤ Validation du modèle par examen des résidus

Les résidus sont supposés tous suivre une loi normale mais de paramètres différents. Il convient donc de les normaliser.

Nous utiliserons les résidus studentisés définis comme suit :

$$e_i^* = \frac{e_i}{S\sqrt{1-h_i}}$$

Où :

-  $S$  est l'estimation de  $\sigma$  l'erreur standard du modèle

-  $h_i$  est le  $i^{\text{ème}}$  élément de la diagonale de la matrice  $H$  de projection des  $Y_i$  sur  $\hat{Y}_i$  :

$$H = X(X'X)^{-1}X'$$

Leur étude permet en particulier de détecter les valeurs « atypiques », observations pour lesquelles  $|e_i^*| > 2$ .

Nous devons s'assurer du caractère «indépendant et identiquement distribués» des résidus suivant la loi normale. Pour cette fin, nous pouvons dans un premier temps effectuer un test de Kolmogorov-Smirnov afin d'examiner la normalité. Ensuite, et dans le but de tester l'indépendance des résidus, l'examen des graphiques des résidus en fonction des valeurs prévues et des différentes variables explicatives ne doit faire apparaître aucune structure non aléatoire.

Exemple de calcul :

Nous reprenons le même exemple étudié auparavant pour illustrer la méthode Log-normale :

Nous construisons le vecteur  $Y_{i,j} = \ln(y_{i,j})$  et la matrice X .

La matrice X est de dimension (55,19) dans cet exemple, les 20 premières lignes de la matrice X sont montrées ci-dessous:

	a1	a2	a3	a4	a5	a6	a7	a8	a9	a10	b2	b3	b4	b5	b6	b7	b8	b9	b10
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
3	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
4	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
5	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
6	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
7	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
8	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
9	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
10	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
11	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
12	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
13	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
14	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
15	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
16	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
17	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
18	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
19	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
20	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Tableau 19 : Matrice de régression pour les modèles factoriels stochastiques

En régressant le vecteur Y par la matrice X, nous obtenons l'estimation de  $\sigma^2$  qui est  $S^2 = 0,02$  et les coefficients suivants du vecteur A:

$\mu$	15,778
$\alpha_2$	0,078
$\alpha_3$	-0,076
$\alpha_4$	-0,159
$\alpha_5$	-0,080
$\alpha_6$	-0,019
$\alpha_7$	0,096
$\alpha_8$	0,057
$\alpha_9$	0,0002
$\alpha_{10}$	0,276
$\beta_2$	1,135
$\beta_3$	1,113
$\beta_4$	0,823
$\beta_5$	0,321
$\beta_6$	-0,202
$\beta_7$	-0,634
$\beta_8$	-0,931
$\beta_9$	-1,292
$\beta_{10}$	-1,759

Tableau 20 : Paramètres estimés de la méthode Log Normal pour la branche AT

Nous estimons les incréments, et nous calculons les paiements cumulés ainsi que les réserves :

Année de survenance	Charge d'aujourd'hui	Charge ultime	Réserve
2002	93 449 042	93 449 042	-
2003	99 734 461	101 073 060	1 338 599
2004	83 665 021	86 642 759	2 977 738
2005	74 590 683	79 749 417	5 158 734
2006	77 126 110	86 222 748	9 096 639
2007	76 271 732	91 711 281	15 439 548
2008	74 605 513	102 821 390	28 215 877
2009	54 448 083	98 936 700	44 488 617
2010	29 539 362	93 429 981	63 890 620
2011	9 471 559	123 118 758	113 647 199
Réserve Totale			<b>284 253 570</b>

Tableau 21 : Résultats issus du modèle Log Normal pour la branche AT

## II.2.2. La modélisation GLM

### Présentation du modèle:

Les modèles linéaires généralisés sont une généralisation du modèle linéaire normal et sont formés de trois composantes : la composante aléatoire, la composante systématique et la fonction de lien.

- La composante aléatoire :

Nous cherchons toujours à expliquer les variables réponses  $(y_{i,j})$ . Nous supposons maintenant qu'elles suivent une loi de probabilité de type exponentielle.

- La composante systématique :

Soit  $X$  la matrice de régression et  $A$  le vecteur des paramètres. La composante systématique est notée  $\eta$  et est définie par  $\eta = X * A$ .

- La fonction de lien :

Notée  $g$ , c'est la fonction qui fait le lien entre la composante aléatoire et la composante systématique.

Une fois ces trois composantes définies, nous avons alors :

$$\begin{cases} \mu_{i,j} = g^{-1}(\eta_{i,j}) \\ \mathbb{E}(y_{i,j}) = \mu_{i,j} \\ V(y_{i,j}) = \varphi V(\mu_{i,j}) \end{cases}$$

### Procédure de calcul:

Premièrement, nous cherchons à estimer le vecteur  $A = (\mu, (\alpha_i)_{i=1,\dots,n}, \dots, (\beta_j)_{j=1,\dots,n})$ . Pour cette fin, nous construisons la matrice  $X$  du modèle à partir de valeurs binaires (0 et 1) de telle sorte à faire coïncider chaque valeur prévue de la variable à modéliser avec le paramétrage qui lui correspond. L'estimateur sans biais de  $A$  est  $\hat{A} = (X'X)^{-1}Y$ .

Nous nous sommes particulièrement intéressés aux familles Poisson ce qui implique :

$$\mu_{i,j} = e^{\mu + \alpha_i + \beta_j} \text{ avec : } \eta_{i,j} = \mu + \alpha_i + \beta_j$$

L'estimation des incréments est alors donnée par :

$$\hat{\mu}_{i,j} = e^{\hat{\mu} + \hat{\alpha}_i + \hat{\beta}_j}$$

Donc l'estimation des provisions est :

$$\hat{R} = \sum_{i+j > n} \hat{\mu}_{i,j}$$

Exemple de calcul :

Nous construisons le vecteur  $Y_{i,j} = \ln(y_{i,j})$  et la matrice X. En utilisant les coefficients du vecteur A calculés auparavant dans log-normale, nous obtenons l'estimation suivante des réserves :

Année de survenance	Charge d'aujourd'hui	Charge ultime	Réserve
2002	92 503 233	92 503 233	-
2003	98 725 036	100 050 087	1 325 050
2004	82 818 237	85 765 837	2 947 600
2005	73 835 742	78 942 263	5 106 522
2006	76 345 506	85 350 077	9 004 570
2007	75 499 776	90 783 059	15 283 283
2008	73 850 421	101 780 722	27 930 301
2009	53 897 007	97 935 349	44 038 342
2010	29 240 390	92 484 364	63 243 974
2011	9 375 696	121 872 657	112 496 961
Réserve Totale			284 253 570

Tableau 22 : Résultats issus par le modèle GLM pour la branche AT

➤ Validation du modèle par examen de résidus

Comme pour la régression Log Normale, il est nécessaire de passer par l'examen des résidus pour mesurer la qualité d'ajustement du modèle. Cependant, dans le cadre des modèles GLM, les résidus bruts ne sont pas pertinents. Il est préférable d'utiliser des résidus normalisés comme ceux de Pearson :

$$r_{i,j}^p = \frac{y_{i,j} - \hat{\mu}_{i,j}}{\sqrt{V(\hat{\mu}_{i,j})}}$$

Comme précédemment, les analyses graphiques et les tests de normalité sont effectués sur les résidus studentisés:

$$r_i^* = \frac{r_i^p}{\hat{S}\sqrt{1-h_i}}$$

## II.3. Le Bootstrap

### Présentation du modèle :

Il est de plus en plus important de pouvoir évaluer non seulement la valeur des provisions pour sinistres, mais aussi leur étendue probable. Des méthodes stochastiques comme le Bootstrap produisent une distribution statistique des sinistres définitifs et des provisions pour sinistres.

### L'hypothèse :

L'hypothèse sur laquelle repose le Bootstrap est l'indépendance (d'où le tirage avec remise) ainsi que la distribution identique des lois de chacun des éléments composant l'échantillon.

Le problème est, dans le cas du Bootstrap sur les règlements, que l'hypothèse d'indépendance entre les règlements incrémentaux observés n'est évidemment pas vérifiée. Il faut donc trouver une méthode pour normaliser ces incréments, et permettre que l'hypothèse iid puisse être faite. Pour cela, nous proposons une transformation des incréments, et utilisons ainsi le « Residual Bootstrap », ré-échantillonnage basé non pas sur les observations, mais sur les résidus calculés à partir de ces observations.

### Procédure de calcul dans le cadre de la modélisation GLM:

A l'aide du modèle GLM, nous calculons les paramètres. Nous utilisons ces paramètres pour calculer les valeurs « attendues », c.à.d. pour reproduire le triangle supérieur des paiements estimés.

Pour la partie supérieure du triangle, nous soustrayons les valeurs attendues calculées des valeurs réelles pour produire un ensemble de « valeurs résiduelles ».

Nous Ré-échantillonons avec remise les résidus. Puis, nous produisons un nouvel ensemble de valeurs pseudo-« réelles » en prenant chaque valeur attendue et en l'ajoutant à l'une des « valeurs résiduelles » sélectionnée au hasard. Nous appliquons la méthode de provisionnement choisie à ces valeurs pseudo-réelles et nous enregistrons l'estimation de provisions résultante.

Nous répétons ces étapes informatiquement jusqu'à 1000 fois ou plus.

### Exemple de calcul :

Après l'estimation des paramètres du modèle GLM, nous recalculons la partie supérieure du triangle des sinistres  $\hat{C}_{ij}$ . Ensuite, nous calculons les résidus  $r_{ij}$  par la formule suivante :

$r_{ij} = \log C_{ij} - \log \hat{C}_{ij}$ , ce qui est donné par le tableau ci-dessous :

année de survenance	les erreurs (log (sinistre payés observés) – log (sinistres payés estimés))									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2002	- 0,1208	- 0,0955	- 0,1002	- 0,0763	0,2510	0,0862	-0,1363	- 0,0502	0,2421	-
2003	- 0,0828	- 0,0996	- 0,0267	0,3155	0,0728	-0,0980	0,0682	0,0927	- 0,2421	
2004	- 0,0023	- 0,1550	0,1235	0,0275	-0,1064	-0,0775	0,2328	- 0,0425		
2005	- 0,0316	0,1041	0,1324	- 0,0598	-0,1367	0,1564	-0,1648			
2006	0,2031	0,0536	- 0,0554	- 0,1624	0,0281	-0,0670				
2007	0,1114	0,0752	- 0,0490	- 0,0288	-0,1088					
2008	- 0,0019	0,0554	- 0,0377	- 0,0157						
2009	- 0,0541	0,0409	0,0131							
2010	- 0,0210	0,0210								
2011	-									

Tableau 23 : triangle des erreurs estimées pour la branche AT

Nous procédons par un ré-échantillonnage des résidus 500 fois à l'aide d'une simulation par la loi uniforme [1,..., N] avec N le nombre des observations (55 dans notre cas).

En se basant sur les résidus trouvés, nous recalculons le triangle supérieur des sinistres par la formule suivante :  $\log(\tilde{C}_{ij}) = r_{ij} + \log \hat{C}_{ij}$ . Alors, nous aboutissons à 500 triangles.

Enfin, nous estimons les réserves totales pour 500 triangles par la méthode de Chain Ladder.

Statistiques descriptives des provisions	
Min	247 026 776
Max	342 567 662
Moyenne	283 500 685
Ecart-type	17 747 292

Tableau 24 : Résultats issus de la méthode Bootstrap pour la branche AT

La méthode Bootstrap permet en plus de calcul du montant des provisions de donner la distribution de ces derniers comme présenté par le graphique ci-dessous.

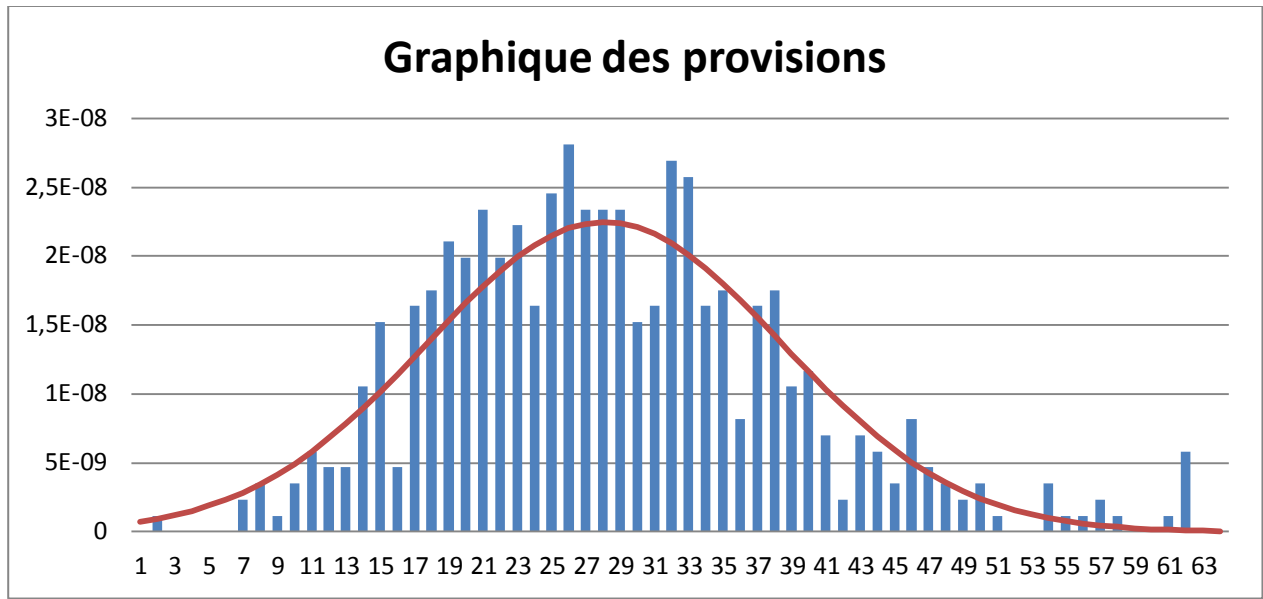


Figure 1 : Représentation graphique des provisions par la méthode de Bootstrap pour la branche AT

### III. Hybrid Chain Ladder (HCL)

#### III.1. Introduction

Nous introduisons la méthode HCL comme étant une combinaison pondérée de deux approches. La première approche est multiplicatif de la structure et est guidée par les données et ressemble à la méthode Chain-Ladder. La seconde approche présente une structure additive et utilise les estimations des experts de pertes finales similaires à la méthode Bornhuetter-Ferguson.

Lorsque les deux méthodes CL et BF sont les deux seuls choix admissibles pour calculer les provisions, choisir une parmi les deux peut ne pas être adéquat pour l'ensemble des données. Les praticiens ont souvent besoin d'une méthode qui combine des caractéristiques favorables à la fois de la méthode CL et BF. Pour cette fin nous introduisons la méthode HCL comme étant une méthode stochastique non paramétrique.

#### III.2. Présentation du modèle

Nous gardons les mêmes notations que celles de Chain Ladder présentée précédemment.

Les méthodes stochastiques ont pour but de prédire le triangle inférieur, avec un certain degré d'incertitude. En particulier, nous nous intéressons à la prédiction de la charge ultime  $C_{ij}$  pour chaque année de survenance  $i$ .

Pour estimer la charge ultime  $C_{ij} \notin D_I = \{C_{ij}; 1 \leq i \leq I, 0 \leq j \leq J, i + j \leq I\}$  et les incertitudes associées, nous introduisons la distribution de modèle de chaîne de Markov.

Il existe les paramètres suivants:

- $\gamma_j$  et  $\sigma_j^2 > 0$  pour  $j = 0, \dots, J$
- $\beta_j > 0$  pour  $j = 0, \dots, J-1$
- $\alpha_{ij} \in [0,1]$  pour  $i = 1, \dots, I$  et  $j = 1, \dots, J$

- $\mu_i > 0$  pour  $i=1, \dots, I$

Avec :

- $(C_{1j})_{j=0, \dots, J}, \dots, (C_{Ij})_{j=0, \dots, J}$  sont des processus de Markov indépendants
- $\mathbb{E}[C_{i0}] = \gamma_0 \mu_i$
- $\mathbb{E}[C_{ij}/C_{i,j-1}] = C_{i,j-1} + \gamma_j (\alpha_{ij} \frac{C_{i,j-1}}{\beta_{j-1}} + (1 - \alpha_{ij}) \mu_i)$  pour  $j=1, \dots, J$
- $\text{Var}(C_{i0}) = \sigma_0^2 \mu_i$
- $\text{var}(C_{ij}/C_{i,j-1}) = \sigma_j^2 \mu_i$  pour  $j=1, \dots, J$

La prévision conditionnelle  $\mathbb{E}[C_{ij} - C_{i,j-1}/C_{i,j-1}]$  du sinistre incrémenté  $C_{ij} - C_{i,j-1}$  est égale au produit de  $\gamma_j$  et  $m_{ij}$  avec :

- $\gamma_j$  est la fraction de la charge ultime estimée pour l'année de développement  $j$ . Il s'agit d'un pourcentage de sinistres attendus.
- $m_{ij}$  est une mesure de volume de l'année de survenance  $i$  définie par :

$$m_{i0} = \mu_i \text{ et } m_{ij} = \alpha_{ij} \frac{C_{i,j-1}}{\beta_{j-1}} + (1 - \alpha_{ij}) \mu_i \quad \text{pour } j > 0$$

$m_{ij}$  représente la moyenne pondérée de :

- $\mu_i$  qui est une estimation a priori de la charge ultime attendu  $\mathbb{E}[C_{ij}]$  qui est indépendante du processus des sinistres.
- $\frac{C_{i,j-1}}{\beta_{j-1}}$  qui a une relation linéaire par rapport à l'observation précédente  $C_{i,j-1}$ .  
Le facteur de proportionnalité  $\beta_{j-1}$  est une estimation du rapport des sinistres cumulés jusqu'à l'année  $j-1$  sur la charge ultime. Avec :  $\beta_j = \sum_{k=0}^j \gamma_k$

Les  $\alpha_{ij}$  quantifient l'influence de la dernière observation sur la moyenne du prochain sinistre. Nous avons pour  $\alpha_{ij}$  proche de 0,  $\mathbb{E}[C_{ij}/C_{i,j-1}]$  hérite des caractéristiques similaires à celles du modèle BF, tandis que pour  $\alpha_{ij}$  proche de 1,  $\mathbb{E}[C_{ij}/C_{i,j-1}]$  est similaire au modèle de Chain Ladder. En effet, nous montrons ci-dessous que pour les cas extrêmes  $\alpha_{ij} = 1$  ou  $\alpha_{ij} = 0$  pour tout  $j = I-i+1, \dots, J$  on a :

$$\mathbb{E}[C_{ij}/D_I] = \mathbb{E}[C_{ij}/C_{i,I-i}] = \begin{cases} C_{i,I-i} \prod_{I-i < j \leq J} \frac{\beta_{j-1} + \gamma_j}{\beta_{j-1}} & \text{si } \alpha_{ij} = 1 \\ C_{i,I-i} + \mu_i \sum_{I-i < j \leq J} \gamma_j & \text{si } \alpha_{ij} = 0 \end{cases}$$

En particulier, pour  $\alpha_{ij} = 1$  nous obtenons une structure multiplicative qui ressemble au modèle de Chain Ladder tandis que pour  $\alpha_{ij} = 0$  nous obtenons une structure additive qui correspond au modèle de Bornhuetter-Ferguson.

Les théorèmes suivants déduisent la structure de la moyenne et de la variance de  $C_{ij}$ .

Pour simplifier on note :

$$\xi_{ij} = 1 + \alpha_{ij} \frac{\gamma_j}{\beta_{j-1}} \text{ pour } i=1, \dots, I \text{ et } j=1, \dots, J$$

Théorème :

pour  $0 \leq k \leq j \leq J$  on a :

$$\mathbb{E}[C_{i,j}/C_{i,k}] = C_{i,k} \prod_{k < m \leq j} \xi_{i,m} + \mu_i \sum_{k < n \leq j} [(1 - \alpha_{i,n}) \gamma_n \prod_{n < m \leq j} \xi_{i,m}] \quad (*)$$

Théorème :

pour  $0 \leq k \leq j \leq J$  on a :

$$\text{var}[C_{i,j}/C_{i,k}] = \mu_i \sum_{k < n \leq j} \sigma_n^2 \prod_{n < m \leq k} \xi_{i,m}^2$$

### III.2.1. Estimation des paramètres et prévisions des sinistres

Dans ce paragraphe, nous définissons des estimateurs pour  $\gamma_j$  et  $\sigma_j^2$  en se basant sur  $D_I$ . D'abord, nous admettons que les paramètres  $\beta_j, \mu_i$  et  $\alpha_{i,j}$  sont connus et constants. D'où,  $m_{ij}$  peut être calculé.

Nous définissons premièrement :

$$\Gamma_{i,0} = \frac{C_{i,0}}{\mu_i} \text{ et } \Gamma_{i,j} = \frac{C_{i,j} - C_{i,j-1}}{m_{ij}} \text{ pour } j > 0$$

Nous définissons de plus le poids :

$$w_{i,0} = \mu_i \text{ et } w_{i,j} = \frac{\sigma_j^2}{\text{var}(\frac{\Gamma_{i,j}}{C_{i,j-1}})} = \frac{m_{i,j}^2}{\mu_i} \text{ pour } j > 0$$

Dans ce cas,  $i$  et  $j$  tel que  $C_{i,j-1} < 0$ , nous admettons que  $\alpha_{i,j}$  est tellement petit ( $\alpha_{i,j} = 0$ ) pour garantir  $m_{ij} > 0$ .

Dans la suite, conditionné sur  $C_{i,-1}$  indique conditionné sur l'ensemble vide. Par exemple :  $\mathbb{E}[\Gamma_{i,0}/C_{i,-1}] = \mathbb{E}[\Gamma_{i,0}]$ .

Nous notons :  $\mathbb{E}[\Gamma_{i,j}/C_{i,j-1}] = \gamma_j$  et  $w_{i,j}$  est indépendant avec  $\sigma_j^2$ . En utilisant  $\Gamma_{i,j}$ , nous définissons les estimateurs linéaires suivants de  $\gamma_j$  et  $\sigma_j^2$  basés sur  $D_I$ . Pour  $j=0, \dots, J$  nous avons :

$$\hat{\gamma}_j^I = \frac{1}{\Omega_j^I} \sum_{i=1}^{I-j} w_{i,j} \Gamma_{i,j}$$

$$\widehat{\sigma}_j^2 = \frac{1}{I-j-1} \left( \sum_{i=1}^{I-j} w_{i,j} (\Gamma_{i,j} - \hat{\gamma}_j^I)^2 \right)$$

Avec :  $\Omega_j^I = \sum_{i=1}^{I-j} w_{i,j}$ .

Si  $J=I-1$ , il y a une seule observation pour la dernière année de développement et  $\widehat{\sigma}_J^2 = 0$ . Donc, dans ce cas nous estimons  $\sigma_j^2$  par :  $\widehat{\sigma}_j^2 = \min(\widehat{\sigma}_{j-2}^2, \widehat{\sigma}_{j-1}^2, \frac{\sigma_{j-1}^4}{\widehat{\sigma}_{j-2}^2})$ .

Le théorème suivant donne des propriétés des estimateurs présentés ci-dessus, qui sont analogues aux caractéristiques des estimateurs des coefficients de développement dans le modèle de Chain Ladder.

Théorème :

- (1)  $\mathbb{E}[\widehat{\gamma}_j^I] = \gamma_j$
- (2)  $cov(\widehat{\gamma}_j^I, \widehat{\gamma}_k^I) = 0$  pour  $j \neq k$
- (3) Parmi tous les estimateurs,  $\widehat{\gamma}_j^I$  a une variance minimale :  $var(\widehat{\gamma}_j^I) = \frac{\sigma_j^2}{\Omega_j^I}$
- (4)  $\mathbb{E}[\widehat{\sigma}_j^2] = \sigma_j^2$

Pour prédire la charge ultime  $C_{i,J}$ , nous remplaçons tous les  $\gamma_j$  dans  $\mathbb{E}[C_{i,J}/D_i] = \mathbb{E}[C_{i,J}/C_{i,I-i}]$  (voir (\*) en haut) par  $\widehat{\gamma}_j^I$ :

$$\widehat{C}_{i,J}^I = C_{i,I-i} \prod_{I-i < m \leq J} \widehat{\xi}_{i,m}^I + \mu_i \sum_{I-i < n \leq J} ((1 - \alpha_{ij}) \widehat{\gamma}_n^I \prod_{n < m \leq J} \widehat{\xi}_{i,m}^I)$$

Où :  $\widehat{\xi}_{i,m}^I = 1 + \frac{\alpha_{im} \widehat{\gamma}_m^I}{\beta_{m-1}}$

### III.2.2. Discussion des paramètres du modèle HCL

Lors du premier modèle HCL, les paramètres  $\beta_j$  et  $\alpha_{ij}$  sont supposés fixes et constants. Dans cette section, nous discutons des approches pratiques pour régler ces paramètres.

- Réglage de  $\gamma_j$  et  $\beta_j$ : il peut sembler surprenant que dans le modèle HCL, les paramètres sont introduits comme paramètres distincts bien que leur rôle est très similaire à décrire le modèle d'évolution des sinistres. Dans ce qui suit, nous considérons la relation entre ces deux paramètres. Bien que les  $\beta_j$  sont considérés dans le modèle HCL comme des estimations exogènes, nous proposons une méthode pour des estimations basées sur  $D_j$ . En tenant compte des estimations antérieures données  $\mu_i$  et un modèle d'évolution connu  $\gamma_j$ , nous pourrions s'attendre à une méthode stochastique réaliste de réserve qui satisfait :

$$\mathbb{E}(C_{i,j}) = (\gamma_0 + \dots + \gamma_j) \mu_i \quad \text{pour tout } 0 \leq j \leq J \quad (*)$$

$$\mathbb{E}(C_{i,J}) = \mu_i \quad (**)$$

Les  $\gamma_j$  et  $\mu_i$  donnent une meilleure estimation pour le processus d'évolution

Le lemme suivant donne une relation entre  $\beta_j$  et  $\gamma_j$  de telle sorte que (\*) et (\*\*) soient vérifiés.

Lemme : suppose que  $\gamma_0 + \dots + \gamma_j = 1$  et  $\gamma_0 + \dots + \gamma_j = \beta_j$  pour tout  $j < J$ . alors les relations (\*) et (\*\*) soient vérifiés.

Suite au lemme, nous proposons les adaptations suivantes à la méthode HCL à être utilisé dans la pratique :

- ❖ Pour les estimations initiales, nous utilisons les formules déjà mentionnées à savoir:

$$\hat{\gamma}_j^I = \frac{1}{\Omega_j^I} \sum_{i=1}^{I-j} w_{i,j} \Gamma_{i,j} \quad \text{et} \quad \widehat{\sigma}_j^2 = \frac{1}{I-j-1} (\sum_{i=1}^{I-j} w_{i,j} (\Gamma_{i,j} - \hat{\gamma}_j^I)^2)$$

Puis nous lisons et / ou redimensionnons  $\hat{\gamma}_j^I$  de telle sorte que  $\sum_{j=0}^J \hat{\gamma}_j^I = 1$  soit vérifié.

- ❖ Nous fixons  $\beta_j$  tel que  $\beta_j = \sum_{k=0}^J \hat{\gamma}_k^I$  soit vérifié. ceci peut être obtenu en exécutant la procédure d'estimation plusieurs fois de manière itérative jusqu'à ce que  $\sum_{k=0}^J \hat{\gamma}_k^I$  converge vers  $\beta_j$ .

Cette approche accorde une dépendance supplémentaire des données et l'incertitude à  $\beta_j$ . Cependant, nous supposons que ces sources additionnelles d'erreurs sont négligeables par rapport aux termes d'erreurs déjà calculés. L'une des raisons de le faire, est que l'estimation  $\beta_j$  est la plus stable depuis des années de développement tardives. Pour  $j$  petit, lorsque l'erreur relative de  $\beta_j$  est élevé, nous choisissons  $\alpha_{ij}$  généralement petit, ce qui diminue l'impact final. En effet les tests numériques montrent que pour  $\alpha_{ij}$  choisi comme proposé dans le paragraphe suivant, l'impact des erreurs dans  $\beta_j$  est en général très faible.

- Réglage de  $\alpha_{ij}$  : le choix de  $\alpha_{ij}$  contrôle la dépendance de la méthode HCL sur les données  $D_j$ . Nous pouvons distinguer deux manières pour montrer comment  $\alpha_{ij}$  influence le résultat final :
  - ❖ Pour  $i + j \leq I$ ,  $\alpha_{ij}$  contrôle la dépendance de données dans l'estimation des paramètres. Chaque  $\alpha_{ij}$  donne une mesure de la puissance prédictive de  $\frac{C_{i,j-1}}{\beta_{j-1}}$  comme estimateur de la charge ultime  $C_{i,J}$ .
  - ❖ Pour  $i + j > I$ ,  $\alpha_{ij}$  contrôle le pouvoir prédictif de la valeur en diagonal  $C_{i,I-i}$  de la charge ultime  $C_{i,J}$ . En d'autres termes, comment la sensibilité de la prédiction  $\hat{C}_{i,J}^I$  est aux écarts de  $C_{i,I-i}$ .

Reconnaissant les deux manières distinctes d'influence, nous faisons les propositions suivantes pour régler  $\alpha_{ij}$  :

- ❖ Pour  $i + j \leq I$ , nous supposons que la cadence des sinistres devient très stable pour les prochaines années de développement. C'est-à-dire  $\alpha_{ij}$  augmente jusqu'à 1 lorsque  $j$  augmente. Une approche simple et pratique qui satisfait cette condition est :  $\alpha_{ij} = \beta_{j-1}$  pour tout  $i + j \leq I$ .  
Nous mettons en évidence que les  $\alpha_{ij}$  comme indiqué ci-dessus sont constantes pour chaque année de développement.
- ❖ D'autre part, pour  $i + j > I$ , nous proposons de mettre  $\alpha_{ij}$  constante pour chaque année de survenance comme suit :



Exemple de Calcul

En se basant sur l'exemple traité auparavant, nous utilisons le tableau des paiements cumulés  $C_{i,j}$ , l'estimation des charges ultimes antérieures  $\mu_i$  et nous choisissons les  $\alpha_i$  comme suit :

Année de survenance	$\mu_i$	$\alpha_i$
2002	88 725 706	
2003	90 459 402	1
2004	105 228 910	1
2005	86 223 652	1
2006	83 794 186	1
2007	86 228 801	1
2008	94 196 224	1
2009	105 024 306	1
2010	102 377 649	0
2011	92 775 560	0

Tableau 25 : Les charges ultimes antérieures estimées et les  $\alpha_i$  choisis

Nous calculons par la suite les paramètres du modèle :

$\gamma_k$	7,8%	23,6%	22,9%	17,5%	10,6%	6,13%	4,0%	3,0%	2,1%	1,35%
$\beta_k$	7,8%	31%	54%	72%	82%	89%	93%	96%	98%	99%
$\sigma_k^2$	16737,19	89820,71	38127,21	166886,94	46 686	4 729	4 787	251	6 162	251,3808686

Tableau 26 : Paramètres estimés du modèle HCL pour la branche AT

Ensuite, nous calculons les  $\alpha_{ij}$  afin d'obtenir le tableau suivant :

0	7,8%	31%	54%	72%	82%	89%	93%	96%	98%
0	7,8%	31%	54%	72%	82%	89%	93%	96%	1
0	7,8%	31%	54%	72%	82%	89%	93%	1	1
0	7,8%	31%	54%	72%	82%	89%	1	1	1
0	7,8%	31%	54%	72%	82%	1	1	1	1
0	7,8%	31%	54%	72%	0	0	0	0	0
0	7,8%	31%	54%	0	0	0	0	0	0
0	7,8%	31%	0	0	0	0	0	0	0
0	7,8%	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Tableau 27 : les  $\alpha_{ij}$  estimés du modèle HCL pour la branche AT

Après avoir calculé tous les paramètres du modèle, nous complétons la partie inférieure du tableau des paiements cumulés :

Année	SINISTRES PAYES CUMULES									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2002	6 306 375	26 420 084	46 016 787	61 037 576	73 648 028	79 984 882	83 279 461	85 946 793	88 436 058	89 661 159
2003	7 085 114	28 752 421	51 563 454	75 600 404	87 013 752	92 714 481	97 086 399	100 414 471	102 073 527	103 483 196
2004	6 582 806	24 154 204	46 878 762	62 328 307	70 507 046	75 495 077	79 913 074	82 405 110	84 191 474	85 354 186
2005	5 884 118	26 841 107	47 942 830	60 975 090	68 278 312	74 079 666	76 812 244	79 310 203	81 029 476	82 148 520
2006	8 044 911	29 588 818	48 496 983	61 211 909	70 523 005	75 539 417	78 981 003	81 549 492	83 317 308	84 467 947
2007	7 806 644	31 220 529	51 462 875	66 921 570	75 558 139	80 846 916	84 324 329	86 919 555	88 705 774	89 868 391
2008	7 814 948	33 550 836	56 501 884	74 061 019	84 051 499	89 828 951	93 627 673	96 462 695	98 413 957	99 683 999
2009	7 137 716	31 546 577	54 782 490	73 152 755	84 291 664	90 733 249	94 968 643	98 129 557	100 305 122	101 721 158
2010	6 967 316	29 561 361	52 990 407	70 897 733	81 755 937	88 035 192	92 163 851	95 245 109	97 365 849	98 746 200
2011	9 375 696	31 263 110	52 494 725	68 722 508	78 562 312	84 252 629	87 994 058	90 786 322	92 708 156	93 959 043

Tableau 28 : Sinistres payés cumulés estimés par le modèle HCL pour la branche AT

Nous obtenons par la suite les réserves individuelles pour chaque année de survenance :

Année	Charge ultime	Réserves
2002	89 661 159	0
2003	103 483 196	1 409 669
2004	85 354 186	2 949 076
2005	82 148 520	5 336 276
2006	84 467 947	8 928 530
2007	89 868 391	14 310 253
2008	99 683 999	25 622 980
2009	101 721 158	46 938 668
2010	98 746 200	69 184 840
2011	93 959 043	84 583 347
<b>Réserve Totale</b>		<b>259 263 639</b>

Tableau 29 : Résultats issus du modèle HCL pour la branche AT

**Chapitre 3 : Quelques  
facteurs impactant la  
réserve**

## Chapitre 3 : Quelques facteurs impactant la réserve

Les décisions de provisionnement sont fondées sur les prévisions de règlements finaux des sinistres. Tout écart important entre les hypothèses et la réalité conduit à des révisions des provisions. Au niveau sectoriel et du portefeuille, les évolutions juridiques inattendues, la modification de la procédure de gestion des sinistres, les catastrophes naturelles, l'inflation et d'autres facteurs, peuvent tous influencer sur les sinistres à développement lent, et donc, au final, sur le provisionnement. Ces facteurs peuvent être répartis en deux grandes catégories : les facteurs externes et les facteurs internes.

### I. les facteurs externes et internes

#### I.1. Les facteurs externes

- Evolution de la jurisprudence : en raison des changements juridiques, les provisions peuvent être surestimées ou bien sous-estimées, par exemple Le manque d'expertise en Assurance chez les juges influence considérablement leurs décisions, parfois fort contestables au regard des professionnels de l'assurance. En effet, l'engagement financier d'un réassureur dans le cadre d'un contrat est plafonné par les limites de garantie. Donc, si lors d'un litige, un juge ne respecte pas ces limites, le réassureur pourrait devoir payer des indemnités supérieures à celles estimées lors de la détermination des primes.
- Conjoncture économique : La conjoncture économique peut en effet directement influencer le compte de résultat des réassureurs tant au niveau des primes perçues que de la sinistralité. Deux types d'impact peuvent être recensés:
  1. Impact sur la matière ré-assurable : la croissance économique assure des gains de pouvoir d'achat des ménages, une croissance de l'activité des entreprises, source d'investissements et donc d'accroissement de la matière ré-assurable. Contrairement, lorsque l'environnement économique se détériore, les chiffres d'affaires et les profits chutent ce qui entraîne une baisse des assiettes de cotisation.
  2. Impact sur la charge sinistre : on constate empiriquement une augmentation sensible de la sinistralité lorsque conjoncture est dégradée. Cette augmentation s'observe tant pour les sinistres volontaires (fraude, acte de malveillance,..) que pour ceux d'origine accidentelle.
- Inflation future : L'inflation touche les réassureurs de plusieurs façons. L'impact le plus net se reflète sur le coût des sinistres futurs au titre des polices en vigueur. Par exemple : les indemnités d'accidents de travail sont en fonction des salaires au moment des accidents; les salaires ont tendance à augmenter en période d'inflation, ce qui engendre une augmentation du coût des sinistres.

Il existe d'autres facteurs externes autre que ceux mentionnés ci-dessus, on cite par exemple : Nature des sinistres (déroulement court/ long ; coût unitaire important), nouveaux produits (nouveaux risques), délai de transmission des sinistres... etc.

#### I.2. Facteurs internes

- Fiabilité des bases de données : lorsqu'on prend par exemple la méthode du coût moyen, on constate qu'elle est basée essentiellement sur le nombre moyen de sinistre calculé sur la base de l'historique de la société. Ce qui exige la fiabilité des données pour que l'estimation des provisions soit précise.

- Ajustement dans la politique, la procédure de gestion des sinistres : modalités des méthodes d'évaluation tout au long du cycle de vie du sinistre, ouverture des dossiers, procédure de règlement, méthode d'évaluation et de provisionnement, ... etc.
- Politique commerciale : évolution tarifaire ou de la structure du portefeuille, modification des conditions de souscription (nature des garanties, franchise, ...), changements au niveau des procédures de sélection des risques, ...
- Le retard de réception de l'information : il y'a toujours un retard, auprès de la cédante, dans la transmission de l'information au réassureur.

## II. Inflation

Pour un même sinistre survenant à des dates différentes, les montants versés en guise d'indemnisation sont sensiblement différents. De manière générale, les montants des règlements augmentent avec le temps. Parmi tous les facteurs mentionnés ci-dessus, l'inflation est le facteur le plus important.

Nous essayons à travers ces deux approches de prendre en compte l'effet de l'inflation sur les triangles des sinistres payés.

### II.1. Modèle d'inflation

Méthodologie :

A titre d'illustration, nous présenterons la méthode de prise en compte de l'inflation au niveau d'un triangle de liquidation « non complété ». Cette méthode doit être appliquée sur un triangle des incréments présentant des données dépourvues d'inflation :

Année de survenance	Année de développement								
	0	1	...	j	...	n-i	...	n-1	n
0	$Y_{0,0}$	$Y_{0,1}$	...	$Y_{0,j}$	...	$Y_{0,n-i}$	...	$Y_{0,n-1}$	$Y_{0,n}$
1	$Y_{1,0}$	$Y_{1,1}$	...	$Y_{1,j}$	...	$Y_{1,n-i}$	...	$Y_{1,n-1}$	
...	...	...	...	...	...	...	...		
...	...	...	...	...	...	...			
I	$Y_{i,0}$	$Y_{i,1}$	...	$Y_{i,j}$	...				
...	...	...	...	...					
...	...	...	...						
n-1	$Y_{n-1,0}$	$Y_{n-1,1}$							
N	$Y_{n,0}$								

La première étape consiste en la construction d'un tableau faisant apparaître le rapport de l'indice des prix à la consommation<sup>1</sup> pour chaque année calendaire du triangle des incréments ( $IPC_{i+j}$ ) et l'indice des prix pour l'année calendaire n ( $IPC_n$ ). l'année calendaire n ne doit pas être sujet à inflation puisque le triangle est complété « au 31/12/n ».

Année	Rapport des prix à la consommation
-------	------------------------------------

<sup>1</sup> IPC : mesure l'évolution du niveau moyen des prix des biens et services consommés par les ménages, pondérés par leur part dans la consommation moyenne des ménages. L'indice (105 par exemple) permet de mesurer l'inflation (ou la déflation en cas de baisse des prix) sur une période (ici + 5 % de hausse des prix) et donc l'évolution de la valeur de la monnaie (la valeur de la monnaie diminue lorsque les prix augmentent).

<b>0</b>	$R_0 = \frac{IPC_1}{IPC_n}$
<b>1</b>	$R_1 = \frac{IPC_2}{IPC_n}$
...	...
<b>i+j</b>	$R_{i+j} = \frac{IPC_{i+j}}{IPC_n}$
...	...
<b>n-1</b>	$R_{n-1} = \frac{IPC_{n-1}}{IPC_n}$
<b>N</b>	$R_1 = \frac{IPC_n}{IPC_n} = 1$

Ensuite, les ratios du tableau sont appliqués à chaque année calendaire en vue de faire apparaître un triangle qui tient compte de l'inflation :

Année de survenance	Année de développement								
	0	1	...	j	...	n-i	...	n-1	n
<b>0</b>	$Y_{0,0} * R_0$	$Y_{0,1} * R_1$	...	$Y_{0,j} * R_j$	...	$Y_{0,n-i} * R_{n-i}$	...	$Y_{0,n-1} * R_{n-1}$	$Y_{1,n} * 1$
<b>1</b>	$Y_{1,0} * R_1$	$Y_{1,1} * R_2$	...	$Y_{1,j} * R_{j+1}$	...	$Y_{1,n-i} * R_{n-i+1}$	...	$Y_{1,n-1} * 1$	
...	...	...	...	...	...	...	...		
...	...	...	...	...	...	...	...		
<b>I</b>	$Y_{i,0} * R_i$	$Y_{i,1} * R_{i+1}$	...	$Y_{i,j} * R_{j+i}$	...				
...	...	...	...	...					
...	...	...	...						
<b>n-1</b>	$Y_{n-1,0} * R_{n-1}$	$Y_{n-1,1} * 1$							
<b>N</b>	$Y_{n,0} * 1$								

A partir du tableau ci-dessus, qui prend en compte le facteur d'inflation, nous calculons les provisions tout en choisissant la méthode convenable.

## II.2. Approche de Taylor

Cette méthode a été proposée par Taylor. L'idée est de considérer l'inflation comme un facteur endogène aux triangles. Nous travaillons pour cela sur des triangles non-agrégés, et nous supposons que le montant des paiements  $Y_{ij}$ , relatifs aux sinistres survenus l'année i, et payés l'année i+j-1 est de la forme suivante :

$Y_{ij} = r_j \mu_{i+j-1}$ pour tout i, j
---

Le triangle des paiements s'écrit alors :

$r_1 \mu_1$	$r_2 \mu_2$	...	...	$r_{n-1} \mu_{n-1}$	$r_n \mu_n$
$r_1 \mu_2$	$r_2 \mu_3$	...	...	$r_{n-1} \mu_n$	
...	...	...			
$r_1 \mu_{n-1}$	$r_2 \mu_n$				
$r_1 \mu_n$					

Autrement dit, les paiements sont en fonction d'une cadence de paiement  $r_j$ , dépendant du temps de développement  $j$  (que l'on retrouve sur l'ensemble de la  $j$  ème colonne) et d'un facteur d'inflation  $\mu_{i+j-1}$  dépendant de l'année de paiement  $i+j-1$  (que l'on retrouve sur l'ensemble de la  $i+j$  ème diagonale).

Le but est alors d'estimer les coefficients de développement  $r_1, r_2, \dots, r_n$  et les facteurs d'inflation  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ . Pour estimer ces  $2n$  coefficients, nous ferons l'hypothèse de normalisation des  $r_j$  à savoir  $r_1 + r_2 + \dots + r_n = 1$ . Aussi la somme sur la diagonale est :

$$d_n = Y_{1,n} + Y_{2,n-1} + \dots + Y_{n,1} = \mu_n(r_1 + r_2 + \dots + r_n) = \mu_n$$

Pour la première sur-diagonale, nous pouvons noter que :

$$d_{n-1} = Y_{1,n-1} + Y_{2,n-2} + \dots + Y_{n-1,1} = \mu_{n-1}(r_1 + r_2 + \dots + r_{n-1}) = \mu_{n-1}(1 - r_n)$$

Et de plus, en considérant la  $n$  ème colonne,  $\gamma_n = Y_{1,n} = r_n \mu_n$  d'où :

$$r_n = \frac{\gamma_n}{\mu_n} \quad \text{et} \quad \mu_{n-1} = \frac{d_{n-1}}{1 - r_n}$$

De façon générale, pour la  $i$  ème sur-diagonale, nous pouvons noter que :

$$d_{n-i} = Y_{1,n-i} + Y_{2,n-i-1} + \dots + Y_{n-i,1} = \mu_{n-i}(r_1 + r_2 + \dots + r_{n-i}) = \mu_{n-i}(1 - r_n + r_{n-1} + \dots + r_{n-i+1})$$

Et de plus, en considérant la  $n - i + 1$  ème colonne :

$$\begin{aligned} \gamma_{n-i+1} &= Y_{1,n-i+1} + Y_{2,n-i+1} + \dots + Y_{i-1,n-i+1} \\ &= r_{n-i+1} \mu_{n-i+1} + \dots + r_{n-i+1} \mu_{n-1} + r_{n-i+1} \mu_n \end{aligned}$$

D'où :

$$r_{n-i+1} = \frac{\gamma_{n-i+1}}{\mu_n + \mu_{n-1} + \dots + \mu_{n-i+1}}$$

et

$$\mu_{n-i} = \frac{d_{n-i}}{1 - (r_n + r_{n-1} + \dots + r_{n-i+1})}$$

Après avoir estimé les coefficients de développement  $r_1, \dots, r_n$  et les facteurs d'inflation  $\mu_1, \dots, \mu_n$ , il est nécessaire de remplir la partie inférieure du tableau. Pour cela, nous prévoyons un taux d'inflation annuel  $t$  afin d'estimer  $\mu_{n+1}, \dots, \mu_{2n}$  à partir de la relation suivante :

$$\mu_{n+i} = (1 + t) * \mu_{n+i-1}$$

Ensuite, nous calculons la partie inférieure du triangle à partir des paramètres estimés et sur la base du modèle, comme suit :

$r_1 \mu_1$	$r_2 \mu_2$	...	...	$r_{n-1} \mu_{n-1}$	$r_n \mu_n$
$r_1 \mu_2$	$r_2 \mu_3$	...		$r_{n-1} \mu_n$	$r_n \mu_{n+1}$
				$r_{n-1} \mu_{n+1}$	
...	...	...	...		
$r_1 \mu_{n-1}$	$r_2 \mu_n$	...			
$r_1 \mu_n$	$r_2 \mu_{n+1}$				$r_n \mu_{2n}$

Nous calculons par la suite les provisions à partir de la différence entre la charge à l'ultime issue du tableau des paiements estimés cumulés et la diagonale du triangle.

**Chapitre 4 : Application  
des modèles de  
provisionnement et  
analyse des résultats**

## Chapitre 4 : Application des modèles de provisionnement et analyse de résultats

### I. Portefeuille étudié

L'activité de la Société centrale de réassurance (SCR) était dominée par la cession légale<sup>2</sup> qui représente 50% de son chiffre d'affaire.

Tout au long de ce rapport nous étudions quelques branches d'un portefeuille légal de la société centrale de réassurance, à savoir : AT, RC et Auto.

#### I.1. Branche Accident de Travail (AT)

Le Dahir n° 1-60-223 du 12 ramadan 1382 (6 février 1963) portant modification en la forme du Dahir du 25 Hija 1345 (25 juin 1927) relatif à la réparation des accidents du travail, définit les accidents du travail comme ceux dont sont victimes les personnes appartenant aux catégories définies aux articles 7 à 12 du même Dahir (voir annexe), et qui donnent droit au profit de la victime ou de ses représentants à une indemnité à la charge de l'entreprise ou de l'employeur, si ces accidents sont survenus par le fait ou à l'occasion du travail.

Ce Dahir, institue une procédure qui devrait être suivie en cas de survenance de l'accident du travail, comportant l'information de l'employeur, la déclaration par l'employeur, son préposé ou la victime de l'accident auprès des autorités compétentes, l'enquête judiciaire menée par le juge de première instance, à l'issue de laquelle une décision statuant sur les indemnités dues par l'employeur ou son assureur au profit de la victime. Pour l'identification d'un accident de travail, il suffit de constater que le travail a été acteur dans le dommage corporel même si l'accident en question n'a fait qu'aggraver ou mettre en mouvement les effets des forces de la nature. Par dérogation, l'employeur ou l'assureur peut rapporter la preuve d'une disposition pathologique de la victime. L'AT comprend également les accidents de trajet entre le domicile et le lieu du travail en plus des accidents survenus au cours d'un déplacement professionnel ou ce qu'on appelle accidents de mission.

#### I. 2. Branche Responsabilité Civile générale (RC)

Le principe général de la responsabilité civile est prévu et décrit dans le Code civil. Il est une obligation légale qui impose à toute personne de réparer les dommages causés à une victime de son fait, de celui des personnes dont elle doit répondre ou des choses dont elle a la charge.

Il y'a plusieurs types de la responsabilité civile, on cite par exemple :

- La responsabilité civile familiale : est une assurance de Responsabilité Civile qui sert à payer les dommages (matériels et /ou corporels) aux tiers, causés dans le cadre de votre vie privée.

La responsabilité civile professionnelle : L'assurance responsabilité civile professionnelle garantit les dommages matériels, immatériels ou corporels causés à des tiers (clients, fournisseurs, partenaires) du fait d'erreurs, de fautes ou de négligences causées par vous-même ou par votre personnel, vos locaux ou votre matériel professionnel dans l'exercice de vos fonctions.

---

<sup>2</sup> Les compagnies d'assurance sont obligées de verser une part à la SCR. La part de cette cession légale est établie à 10% de la prime réalisée pour tout risque souscrit au Maroc.

### I.3. Branche Automobile (Auto)

Une assurance automobile au Maroc est une assurance destinée aux véhicules à moteur assurés au Maroc et circulant sur le territoire marocain ou dans la zone carte verte (certains pays européens) ou la zone carte orange (certains pays arabes).

Elle est obligatoire depuis 1958 et est régie par la loi n°77-99 portant code des assurances. Son but principal est d'apporter un soutien financier face aux pertes subies par un assuré ou une personne tierce, notamment lors d'un accident de la route, mais aussi pour des dommages subis en dehors de la circulation.

Les formes de contrats comme les garanties proposées par les compagnies d'assurances sont variées. Chaque contrat souscrit est propre à une situation. Que ce soit le véhicule, les garanties choisies, le souscripteur ou la compagnie d'assurance.

L'obligation d'assurance ne concerne que la garantie « responsabilité civile », c'est-à-dire les dommages causés aux tiers et aux passagers.

Nous ferons de ces trois branches l'objet de notre projet. Plus précisément, nous essayerons de calculer les provisions pour sinistres à payer pour la branche Accident de Travail, Automobile et Responsabilité Civile à partir des données de la société centrale de réassurance.

## II. Description de la base des données

Les données dont nous disposons sont principalement les éléments des triangles de liquidation d'un portefeuille légale. Ces derniers comprennent l'ensemble des paiements effectués relativement aux sinistres déclarés dans la période s'étalant de 2002 jusqu'à 2011. Le déroulement total des trois branches qui sont : AT, Auto et RC, est supposé de 10 ans.

Nous disposons donc des tableaux exposés en annexe pour les trois branches, exprimés en MAD :

- SPC : sinistres payés cumulés sont, comme leur nom l'indique, pour une même année de survenance, le cumul des sinistres payés année par année. Les sinistres payés indiquent les paiements des sinistres totalement ou partiellement réglés. Les sinistres payés comprennent également le montant versé dans le cas des sinistres non terminés.
- SAP : sinistres à payer cumulés.
- Charges de sinistres : SPC + SAP.
- Primes : Triangle de primes cumulées pour chaque année de souscription et durant la période de déroulement (10 ans).

## III. Evaluation des réserves techniques

### III.1. Evaluation des réserves techniques non vie

- En se référant aux méthodes suivantes : Chain Ladder, London chain, Bornthuetter-Ferguson, Loss Ratio, Vylder, Mack, log-normal, GLM et Bootstrap et en utilisant les données convenables pour chaque méthode de calcul, nous calculons les provisions des branches suivantes : RC, AT et Auto tout en se basant sur la procédure de calcul déjà élaborée dans la présentation du cadre théorique des méthodes. Nous avons utilisé le logiciel Excel afin d'effectuer les calculs, ainsi que VBA pour créer une interface graphique pour l'affichage des résultats de quelques méthodes. Nous exposons en annexe la note descriptive de cet outil de calcul.

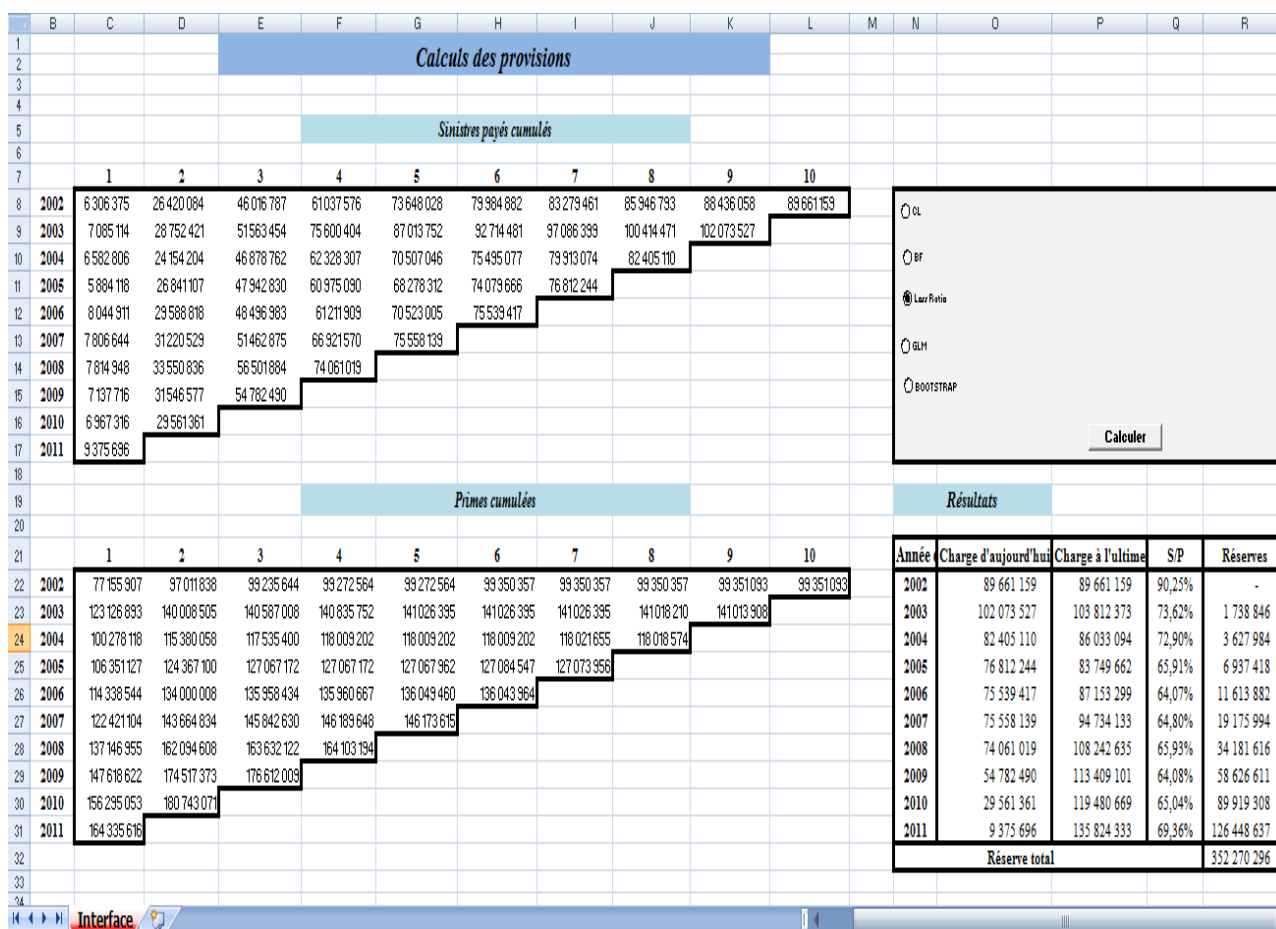


Figure 2 : Interface graphique via l'outil VBA Excel

Nous rappelons que les montants obtenus tout au long de ce rapport sont en MAD.

### III.1.1. Evaluation des réserves avec les charges de sinistre :

Nous utilisons le triangle des charges de sinistres pour calculer les charges à l'ultime pour chaque branche :

Pour la branche RC :

Année	CL	London Chain	BF	Loss-Ratio	HCL
2002	10 703 993	10 703 993	6 279 594	10 703 993	10 703 993
2003	7 514 026	7 514 026	6 723 463	7 616 236	7 518 124
2004	10 783 608	10 557 330	7 098 741	11 544 712	10 744 298
2005	9 263 307	9 215 815	7 705 658	10 345 464	9 236 742
2006	5 988 200	9 030 134	8 954 076	9 548 776	4 652 555
2007	9 062 783	9 452 520	10 641 275	11 300 889	7 161 778
2008	11 665 572	9 933 242	11 453 415	14 668 529	10 123 216
2009	14 137 205	10 170 049	11 935 600	17 577 208	11 339 612
2010	13 265 807	9 973 919	13 095 173	17 290 778	8 603 626
2011	13 606 998	10 116 209	13 720 795	16 997 175	10 069 375

Tableau 30 : Provisions individuelles issues des charges de sinistre pour la branche RC

Pour la branche AT :

Année	CL	London Chain	BF	Loss-Ratio	HCL
2002	109 103 802	109 103 802	83 454 918	109 103 802	109 103 802
2003	121 376 441	121 376 441	118 451 682	124 968 018	121 327 493
2004	109 056 026	111 047 015	99 134 132	111 200 816	108 775 821
2005	103 945 744	108 103 894	106 737 184	105 410 058	103 598 372
2006	109 478 286	111 823 300	114 272 081	114 877 445	108 295 415
2007	125 600 427	120 343 093	122 798 188	130 546 398	125 279 794
2008	136 128 062	125 913 813	137 908 014	140 957 870	135 476 998
2009	137 233 136	126 367 467	148 672 253	139 865 709	136 318 933
2010	142 570 070	124 531 522	154 301 008	146 027 077	141 101 658
2011	150 244 935	125 365 530	164 486 681	158 590 011	148 613 143

**Tableau 31 : Provisions individuelles issues des charges de sinistre pour la branche AT**

Pour la branche Auto :

Année	CL	London Chain	BF	Loss-Ratio	HCL
2002	218 827 975	218 827 975	203 640 894	218 827 975	218 827 975
2003	234 147 927	234 147 927	210 230 715	244 617 642	233 783 557
2004	230 758 000	230 424 365	223 696 500	253 919 422	229 573 116
2005	230 969 728	230 503 109	235 769 003	265 330 726	228 869 139
2006	249 418 468	243 033 024	248 660 926	303 437 639	245 973 904
2007	281 927 483	267 292 894	277 578 538	355 814 716	281 931 820
2008	328 206 924	292 236 811	311 908 906	427 286 646	329 860 438
2009	350 283 097	303 970 829	355 289 334	463 928 169	342 811 961
2010	335 256 885	288 983 588	378 103 062	449 832 875	316 389 777
2011	437 274 115	328 166 716	402 942 320	547 764 338	426 795 567

**Tableau 32 : Provisions individuelles issues des charges de sinistre pour la branche Auto**

Les charges à l'ultime calculées à partir des triangles des charges des sinistres, exposées ci-dessus, sont inférieures aux charges d'aujourd'hui. Ce qui engendre des réserves individuelles négatives. Ceci peut être expliqué par le fait que les données reçues auprès des cédantes comprennent les IBNR dans leurs calculs.

Etudions maintenant la tendance de la sinistralité pour chaque branche, à partir du ratio S/P (charges à l'ultime / primes acquises) calculé pour chaque méthode :

Pour la branche RC :

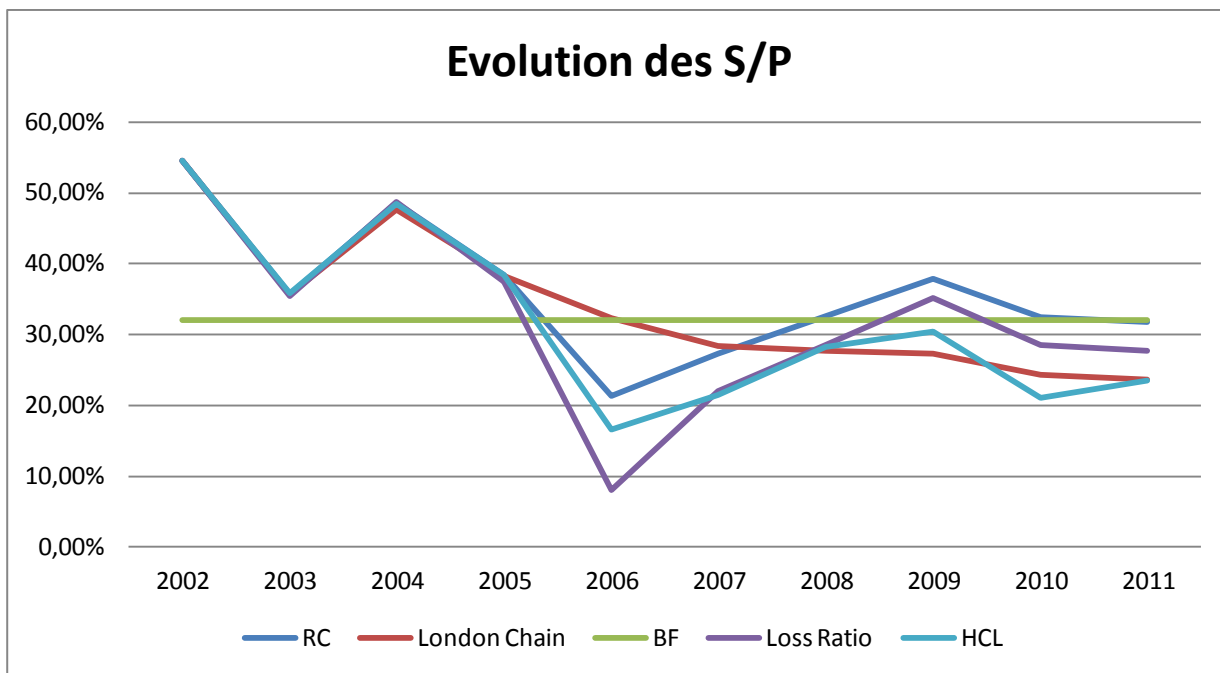


Figure 3 : Evolution des S/P pour la branche RC

La sinistralité pour la branche RC est de l'ordre de 33%, il s'agit d'une faible sinistralité par rapport aux autres branches.

Pour la branche AT :

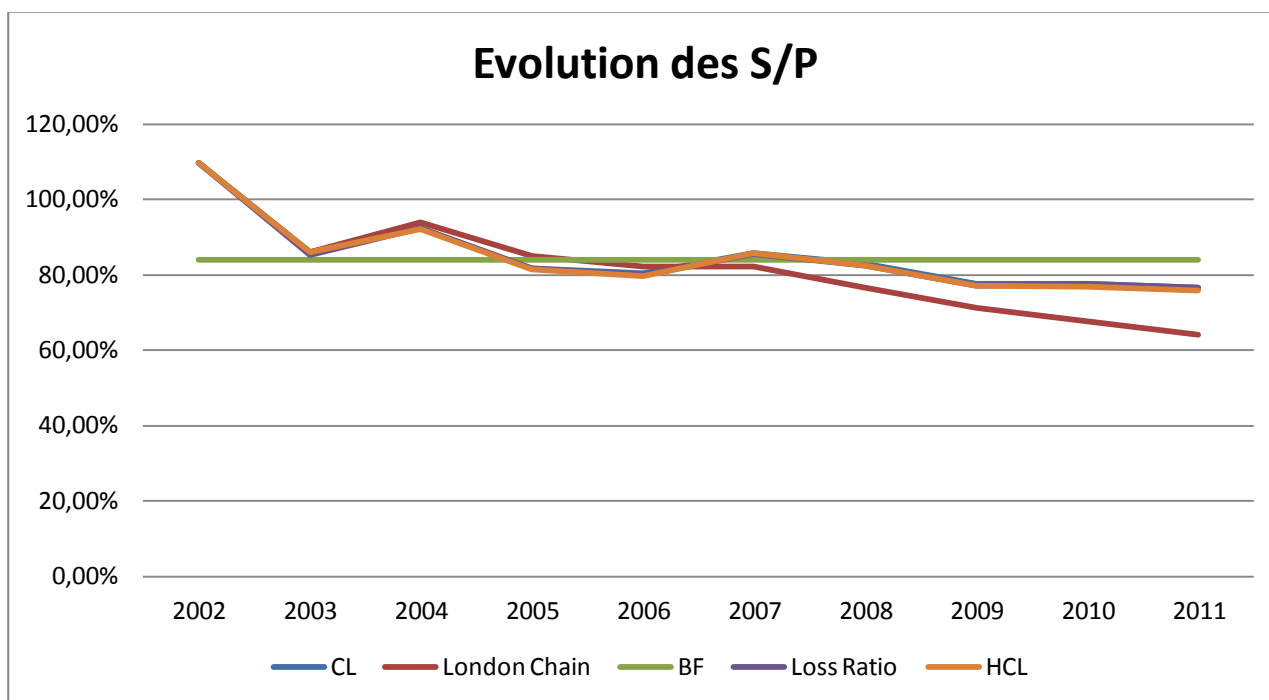


Figure 4 : Evolution des S/P pour la branche AT

La sinistralité pour la branche AT est de l'ordre de 84%. Il s'agit d'une forte sinistralité.

Pour la branche Auto :

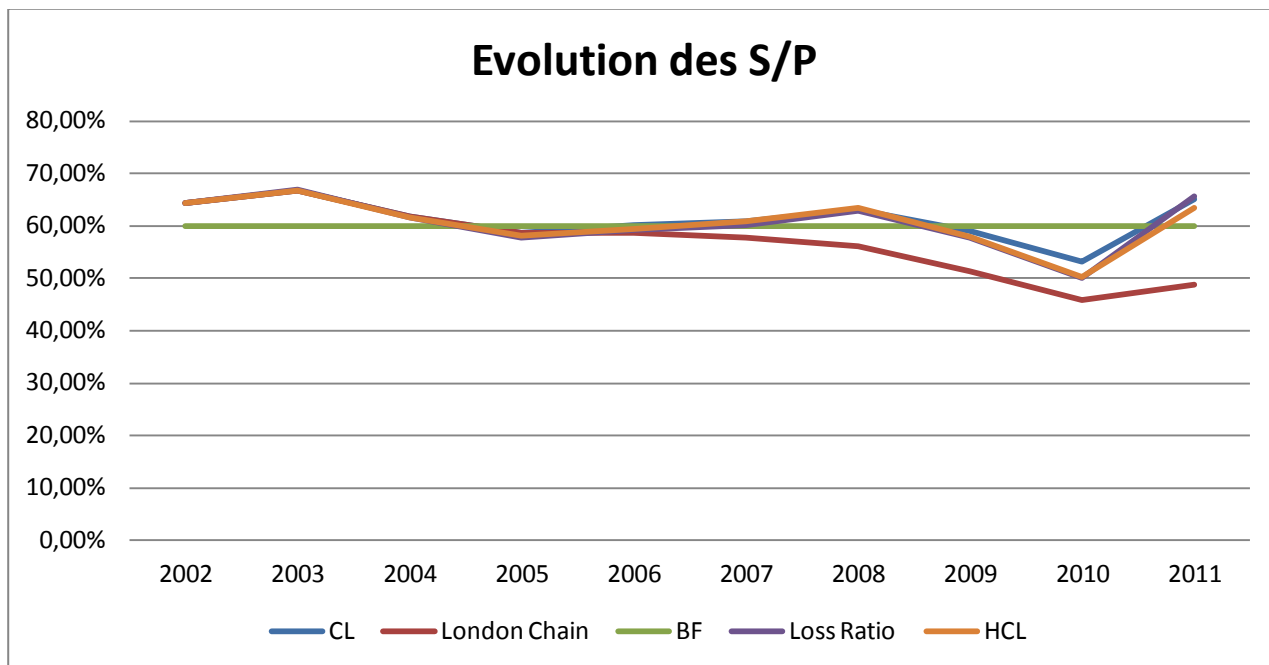


Figure 5 : Evolution des S/P pour la branche Auto

Pour la branche Auto, la sinistralité est de l'ordre de 60%. Elle est moins forte que la sinistralité pour la branche AT.

### III.1.2. Evaluation des réserves avec les sinistres payés

Nous appliquons par la suite les méthodes étudiées au triangle des sinistres payés.

- Le tableau ci-dessus récapitule les résultats trouvés pour les méthodes utilisées:

	RC	AT	Auto
CL	22 011 852	285 923 914	1 245 963 986
London Chain	15 878 215	270 337 885	576 464 089
BF	30 258 265	395 495 809	935 727 833
Loss Ratio	26 671 265	352 270 292	921 164 591
Vylder	20 138 410	288 675 527	1 153 272 193
HCL	21 342 980	280 115 029	1 059 102 047
Log Normal	24 058 863	284 253 570	1 407 253 998
GLM	23 064 536	281 376 604	1 372 612 103
Bootstrap	24 048 378	283 500 685	1 400 176 211

Tableau 33 : Provisions issues des sinistres payés pour les branches étudiées

Nous remarquons que pour la branche RC, la méthode BF donne un sur-provisionnement tandis que la méthode de London Chain donne un sous- provisionnement.

Nous constatons que pour la branche AT, les montants des provisions issus des différentes méthodes convergent, à l'exception des montant issus des méthodes BF et Loss Ratio.

Pour la branche Auto, nous remarquons que la méthode London Chain donne un montant très inférieur aux montants donnés par les autres méthodes.

Pour plus de précision quant à la dispersion de l'ensemble des réserves calculées à partir des méthodes traitées, nous présentons les caractéristiques suivantes :

	RC	AT	Auto
Moyenne	23 052 529	305 229 286	1 103 221 633
Ecart-type	4 046 463	44 249 453	291 869 093
Coefficient de variation	18%	14%	26%

**Tableau 34 : Caractéristiques de l'ensemble de provisions issues de différentes méthodes**

Plus la valeur du coefficient de variation est élevée, plus la dispersion autour de la moyenne est grande. C'est ce qui est noté pour la branche Auto.

- Le modèle de Mack fournit des intervalles de confiance pour la provision individuelle ainsi que totale.

La branche RC:

Année	Réserves	$se(\hat{R}_i)$	$se(\hat{R}_i)/\hat{R}_i$	$IC(\hat{R}_i)$	
2002					
2003	131 599	3 275	2,49 %	125 180	138 018
2004	245 198	18 762	7,65 %	208 425	281 971
2005	587 612	94 664	16,11 %	402 069	773 154
2006	976 170	218 963	22,43 %	547 002	1 405 338
2007	1 593 303	352 063	22,10 %	903 258	2 283 347
2008	2 952 410	759 545	25,73 %	1 463 702	4 441 118
2009	4 840 885	1 057 878	21,85 %	2 767 444	6 914 326
2010	4 938 063	1 084 581	21,96 %	2 812 283	7 063 842
2011	5 746 613	2 264 554	39,41 %	1 308 088	10 185 138
<b>Total</b>	<b>22 011 852</b>	<b>2 387 602</b>	<b>11 %</b>	<b>17 332 154</b>	<b>26 691 551</b>

**Tableau 35 : Résultats issus du modèle de Mack pour la branche RC**

L'erreur standard est de 11%, c'est-à-dire que l'écart type de l'estimation  $E(R_i)$  ne représente que 11% du montant total des réserves estimées.

La branche AT :

Année	Réserves	$se(\hat{R}_i)$	$se(\hat{R}_i)/\hat{R}_i$	IC( $\hat{R}_i$ )	
2002	0	0	0	-	-
2003	1 414 020	225 172	15,92 %	972 683	1 855 357
2004	3 001 267	955 769	31,85 %	1 127 960	4 874 574
2005	5 393 568	945278	17,53 %	3 540 822	7 246 313
2006	9 021 108	1 279742	14,19 %	6 512 814	11 529 402
2007	15 388 815	1 591826	10,34 %	12 268 836	18 508 795
2008	28 281 561	3 262 197	11,53 %	21 887 655	34 675 467
2009	45 499 398	6 212 196	13,65 %	33 323 495	57 675 302
2010	64 557 858	8 019 994	12,42 %	48 838 670	80 277 046
2011	113 366 318	12 574 126	11,09 %	88 721 032	138 011 605
<b>Total</b>	<b>285 923 914</b>	<b>14 078 568</b>	<b>5 %</b>	<b>258 329 920</b>	<b>313 517 908</b>

Tableau 36 : Résultats issus du modèle de Mack pour la branche AT

D'après ce tableau, nous remarquons que l'erreur standard pour la branche AT est inférieure à celui de la branche RC.

La branche Auto :

Année	Réserves	$se(\hat{R}_i)$	$se(\hat{R}_i)/\hat{R}_i$	IC( $\hat{R}_i$ )	
2002					
2003	2 689 001	1 157 977	43,06 %	419 365	4 958 636
2004	6 716 092	1 903 485	28,34 %	2 985 262	10 446 921
2005	13 882 649	2 883 467	20,77 %	8 231 055	19 534 244
2006	26 720 547	4 351 997	16,29 %	18 190 632	35 250 461
2007	52 475 306	8 317 400	15,85 %	36 173 202	68 777 410
2008	104 293 882	13 727 695	13,16 %	77 387 599	131 200 165
2009	171 854 738	20 472 362	11,91 %	131 728 908	211 980 567
2010	254 237 726	40 138 717	15,79 %	175 565 842	332 909 610
2011	613 094 045	112 144 772	18,29 %	393 290 292	832 897 798
<b>Total</b>	<b>1 245 963 986</b>	<b>70 085 178</b>	<b>6 %</b>	<b>1 108 597 037</b>	<b>1 383 330 934</b>

Tableau 37 : Résultats issus du modèle de Mack pour la branche Auto

L'erreur standard de la branche Auto calculée à partir du modèle de Mack a presque le même ordre de grandeur que celui de la branche AT.

### III.2. Vérification des hypothèses

- Chain Ladder :

Malgré La simplicité d'utilisation de la méthode CL, il est important d'effectuer certaines vérifications pour valider cette méthode. Nous allons retenir deux tests graphiques :

Graphique pour la branche RC :

➤ L'alignement des couples  $(C_{ij}, C_{i,j+1})$  pour  $i = 0, \dots, n-j-1$  :

Pour  $j$  fixé, nous avons supposé l'existence d'un coefficient  $f_{ij}$  tel que  $C_{i,j+1} = f_{ij} C_{ij}$ . Les couples  $(C_{ij}, C_{i,j+1})$  pour  $i = 0, \dots, n-j-1$  doivent donc être sensiblement alignés par une droite passant par l'origine.

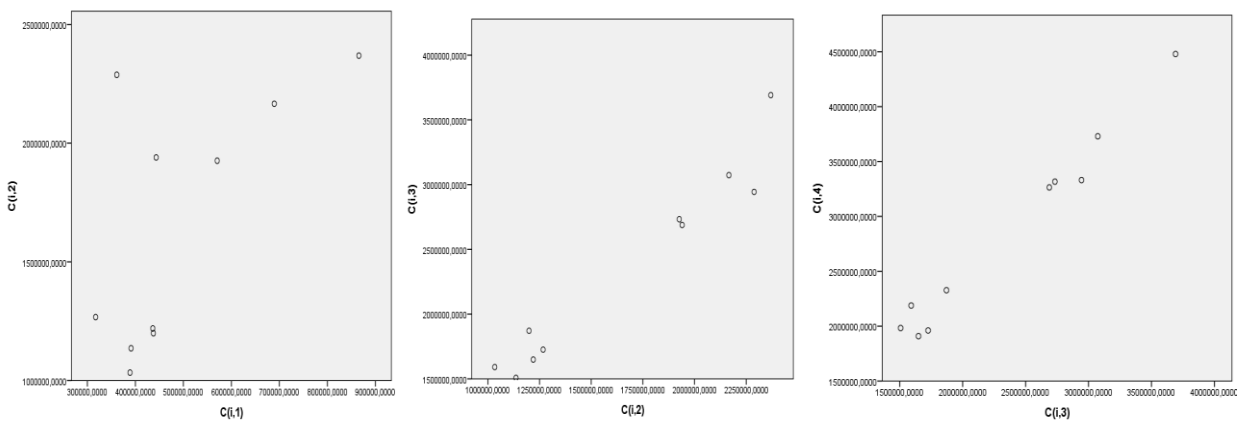


Figure 6 : Représentation graphique des couples  $(C_{ij}, C_{i,j+1})$  pour la branche RC

Nous pouvons remarquer la linéarité des couples à partir de  $C(i,3)$  pour les trois branches.

➤ L'examen du triangle de développement :

Le triangle de développement est défini par les facteurs de développement individuels  $f_{ij} = \frac{C_{i,j+1}}{C_{ij}}$ .

L'hypothèse fondamentale est vérifiée si, pour  $j=0, \dots, n-1$ , les  $f_{ij}$  sont sensiblement constants. C'est à dire, les taux moyens d'augmentation du cumul des sinistres sont stables dans le temps, la liquidation future sera similaire à la liquidation passée.

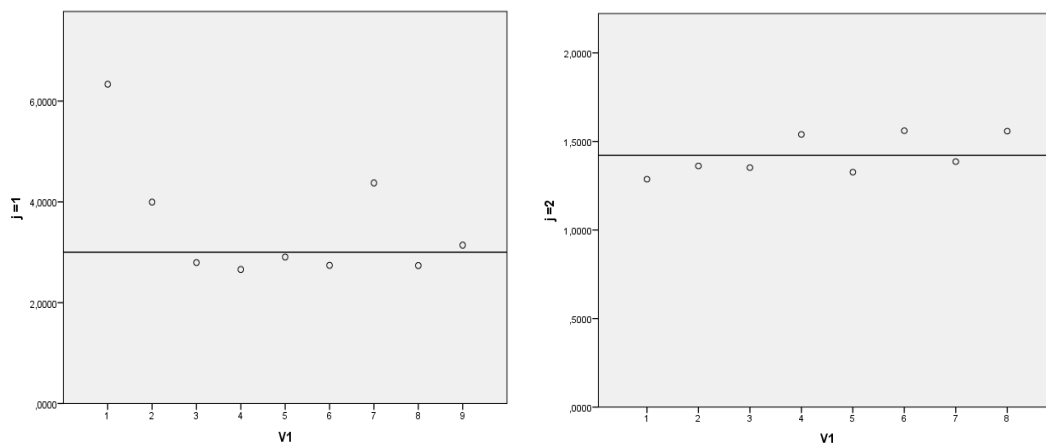


Figure 7 : Représentation graphique des coefficients de développement pour la branche RC

Nous constatons que d'après le triangle de développement, les coefficients de développement de la branche RC sont également sensiblement constants à partir de la deuxième année de développement.

6,3351	1,2868	1,1315	1,1006	1,1530	1,1049	1,0957	1,0255	1,0346
3,9959	1,3617	1,1364	1,1541	1,2990	1,1753	1,0779	1,0206	
2,7959	1,3521	1,1579	1,4826	1,1373	1,1549	1,1203		
2,6587	1,5396	1,3752	1,1845	1,1358	1,2254			
2,9056	1,3268	1,3156	1,2192	1,1604				
2,7409	1,5604	1,2436	1,1813					
4,3764	1,3860	1,2141						
2,7367	1,5581							
3,1424								

Tableau 38 : triangle des coefficients de développement pour la branche RC

Il ressort que pour le triangle des branches Auto et AT, les conditions sont vérifiées de la même manière que pour le triangle de RC.

Les graphiques concernant les trois autres branches sont exposés en annexe.

- Mack :

L'hypothèse d'indépendance des années de survenance doit être vérifiée pour les trois branches étudiées afin de valider le modèle de Mack.

Les calculs intermédiaires pour la branche RC et pour chaque année de survenance sont résumés dans le tableau suivant :

$N_k^+$	$N_k^-$	$Z_k$	n	$E(Z_k)$	$Var(Z_k)$
1	1	1	2	0,5	0,25
3	0	0	3	0,75	0,19
4	0	0	4	1,25	0,44
2	1	1	3	0,75	0,19
3	3	3	6	2,06	0,62
1	5	1	6	2,06	0,62
4	4	4	8	2,90	0,80
2	5	2	7	2,40	0,55
Somme		12	-	12,69	3,66

Tableau 39 : Vérification de l'hypothèse d'indépendance du modèle de Mack pour la branche RC

Pour un seuil de 5%, nous pouvons donc conclure que l'hypothèse d'indépendance entre les années de survenance est acceptée car :  $9 \leq Z=12 \leq 16$  (ou bien  $-1,96 \leq t= -0,36 \leq 1,96$ ).

$$\text{Avec } t = \frac{\sum_k Z_k - E(\sum_k Z_k)}{\sqrt{\text{Var}(\sum_k Z_k)}} .$$

L'hypothèse d'indépendance de Mack est ainsi validée pour la branche RC. Il nous reste à vérifier la troisième hypothèse de Mack afin de valider ce modèle pour la branche RC.

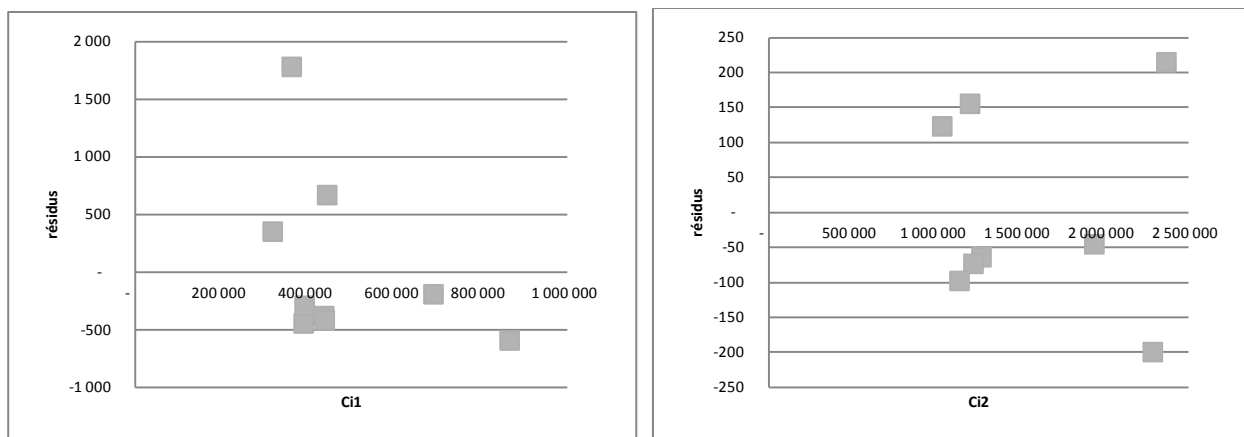


Figure 8 : Représentation graphique des points  $(C_{ij}, \varepsilon_{ij})$  pour la branche RC

Les graphiques ci-dessus représentent respectivement les points  $(C_{ij}, \varepsilon_{ij})$  pour  $j=1, 2$ . En faisant la même chose pour  $j=3, \dots, 5$  (voir Annexe), nous concluons que l’hypothèse de Mack est vérifiée pour la branche RC.

Par conséquent, le modèle de Mack est validé pour cette branche.

Cependant, l’hypothèse d’indépendance n’est pas validée concernant les deux autres branches qui sont AT et Auto pour lesquelles nous aboutissons aux résultats suivants :  $t = -2,60$  et  $t = -4,41$  respectivement. Ceci peut être résolu par un redressement des triangles des paiements des sinistres.

- Log Normal :

Pour la branche RC :

	Kolmogorov-Smirnov <sup>a</sup>			Shapiro-Wilk		
	Statistique	ddl	Signification	Statistique	ddl	Signification
ei*	,114	53	,083	,962	53	,086

Tableau 40 : Test de Kolmogorov-Smirnov du modèle Log Normal pour la branche RC

Au seuil de 5%, le test de kolmogorov smirnov confirme la normalité des résidus puisque  $0,083 > 0,05$ .

Cependant, les résidus studentisés de la branche AT ne suivent pas la loi normale :

	Kolmogorov-Smirnov <sup>a</sup>			Shapiro-Wilk		
	Statistique	ddl	Signification	Statistique	ddl	Signification
ei*	,128	53	,031	,941	53	,012

Tableau 41 : Test de Kolmogorov-Smirnov du modèle Log Normal pour la branche AT

Pour la branche Auto, d’après le résultat illustré par le tableau ci-dessous, on ne rejette pas la normalité des résidus:

	Kolmogorov-Smirnov <sup>a</sup>			Shapiro-Wilk		
	Statistique	ddl	Signification	Statistique	ddl	Signification
ei*	,064	53	,200	,970	53	,207

Tableau 42 : Test de Kolmogorov-Smirnov du modèle Log Normal pour la branche Auto

Donc, la méthode Log normale est validée pour la branche RC et Auto, ce qui est n'est pas le cas pour la branche AT.

- GLM :

Nous cherchons à tester l'hypothèse de normalité des résidus de Pearson, pour ce faire, nous utilisons le test de kolmogorov smirnov.

Pour la branche RC :

Tests de normalité						
	Kolmogorov-Smirnov <sup>a</sup>			Shapiro-Wilk		
	Statistique	ddl	Signification	Statistique	ddl	Signification
ri*	,114	54	,076	,961	54	,073

Tableau 43 : Test de Kolmogorov-Smirnov du modèle GLM pour la branche RC

Au seuil de 5%, nous avons  $0,076 > 0,05$  donc les résidus suivent une loi normale pour la branche RC. Par conséquent, le modèle GLM est validé pour cette branche. Ce résultat est identique pour les autres branches, ce qui est illustré par les tableaux suivants :

Pour la branche AT :

	Kolmogorov-Smirnov <sup>a</sup>			Shapiro-Wilk		
	Statistique	ddl	Signification	Statistique	ddl	Signification
ri*	,110	54	,154	,940	54	,009

Tableau 44 : Test de Kolmogorov-Smirnov du modèle GLM pour la branche AT

Pour la branche Auto :

	Kolmogorov-Smirnov <sup>a</sup>			Shapiro-Wilk		
	Statistique	ddl	Signification	Statistique	ddl	Signification
ri*	,068	54	,200	,970	54	,188

Tableau 45 : Test de Kolmogorov-Smirnov du modèle GLM pour la branche Auto

### III.3. Traitement des données avec inflation :

L'inflation, comme indiqué précédemment, est un facteur qui influe la cadence des règlements et par la suite le montant des provisions. Par hypothèse, les triangles de paiements utilisés dans les calculs ne contiennent pas le facteur d'inflation. Donc, si nous voulons traiter l'impact de ce facteur sur les provisions, nous devons retraiter les triangles des paiements. Pour cette raison, nous utilisons l'indice général des prix à la consommation comme étant une mesure d'inflation.

<b>Indice général des prix à la consommation IPC (base 100: 2001)</b>	
<b>Année</b>	<b>IPC</b>
<b>2002</b>	102,8
<b>2003</b>	101,2
<b>2004</b>	101,5
<b>2005</b>	101,0
<b>2006</b>	103,3
<b>2007</b>	102,0
<b>2008</b>	103,7
<b>2009</b>	101,0
<b>2010</b>	101,0
<b>2011</b>	100,9

Tableau 46 : Indice général des prix à la consommation au Maroc pour la période 2002-2011

Source : site du haut commissariat au plan

Nous multiplions par la suite le tableau des paiements décumulés par le rapport des prix à la consommation, comme indiqué auparavant dans le cadre théorique, afin d'obtenir un triangle des paiements qui tient en compte l'inflation. Ensuite, nous appliquons à ce dernier tableau la méthode Chain Ladder, ce qui nous donne les résultats suivants :

Branche étudiée	Chain Ladder		
	Avant inflation	Après inflation	Variation
RC	22 011 852	21 978 516	33 336
AT	285 923 914	285 296 193	627 721
Auto	1 245 963 986	1 242 698 390	3 265 596

Tableau 47 : Traitement de l'inflation par la méthode d'indice des prix

Le calcul avec inflation engendre une diminution du montant des provisions vu la fluctuation de l'indice général des prix.

Si nous nous appuyons sur le modèle de Taylor schématisé là-dessus, nous estimons tout d'abord les paramètres du modèle tout en se basant sur les formules déjà élaborées, si nous prenons par exemple la branche RC, les paramètres sont :

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$d_k$	361 141	2 243 893	2 042 531	2 017 868	2 035 897	2 863 999	4 215 497	5 264 684	5 082 075	6 124 119
$\gamma_k$	4 900 510	10 288 547	5 215 951	2 987 404	2 819 521	2 366 110	2 121 210	1 163 563	207 221	181 667
$\mu_k$	3 352 888	6 377 628	4 104 173	3 408 425	294 2831	364 7026	4 772 921	5 529 567	5 237 439	6 124 119
$r_k$	0,1077	0,2441	0,1458	0,0944	0,0998	0,0935	0,0979	0,0689	0,0182	0,0297

Tableau 48 : Paramètres estimés du modèle de Taylor pour la branche RC

Sous cette forme, le facteur d'inflation ne paraît pas explicite. En se ramenant en base 100, il est possible de mieux visualiser l'impact de l'inflation : Toutefois, dans ce cas, pour pouvoir effectuer le calcul des provisions, il est alors nécessaire de faire des prévisions d'inflation future.

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\mu_k$	3 352 888	6 377 628	4 104 173	3 408 425	2 942 831	3 647 026	4 772 921	5 529 567	5 237 439	6 124 119
Base 100	100	190	122	102	88	109	142	165	156	183

**Tableau 49 : Indice d'inflation de Taylor sur la base de 100 pour la branche RC**

En prévoyant un taux d'inflation annuel de l'ordre de 7% (il s'agit de l'inflation moyenne

=  $((6\,124\,119/3\,352\,888)^{1/9} - 1)$  nous obtenons la partie inférieure du triangle à partir des coefficients suivants :

k	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
$\mu_k$	6 124 119	6 552 807	7 011 503	7 502 309	8 027 470	8 589 393	9 190 651	9 833 996	10 522 376	11 258 942
Base 100	100	195	209	224	239	256	274	293	314	336

**Tableau 50 : Indice d'inflation futur estimé par la méthode de Taylor pour la branche RC**

Nous calculons par la suite les provisions. Nous faisons la même chose pour les autres branches, nous aboutissons aux résultats suivants :

Branche étudiée	Avant inflation	Après inflation (Taylor)
RC	22 011 852	24 042 146
AT	285 923 914	305 443 612
Auto	1 245 963 986	892 127 249

**Tableau 51 : Traitement d'inflation par le modèle de Taylor**

Le choix de l'inflation future de l'ordre de 7% affecte les résultats, utilisons une analyse scénarios pour la branche RC afin de visualiser ce changement :

Synthèse de scénarios		Taux1	Valeur actuelle	taux2	taux3	taux4
<b>Cellules variables :</b>						
Taux		3,00%	7,00%	10,00%	15,00%	20,00%
<b>Cellules résultantes :</b>						
Provisions		21 259 515	24 042 146	26 386 523	30 858 821	36 154 188

**Tableau 52 : Analyse scénarios des taux d'inflation de Taylor pour la branche RC**

Nous remarquons d'après ce tableau que l'augmentation du taux d'inflation de Taylor engendre une augmentation des provisions. L'estimation obtenue dans le cas ordinaire de chaîne Ladder correspond à une prévision d'inflation de l'ordre de 4,13%.

**Chapitre 5 : Etude  
comparative des  
modèles de  
provisionnement**

# Chapitre 5 : Etude comparative des modèles de provisionnement

## I. Synthèse des résultats

### I.1. l'évolution des provisions individuelles

Les trois graphes ci-dessous illustrent, pour chaque branche, l'écart de la provision individuelle de chaque méthode par rapport à la moyenne des méthodes testées.

Branche RC :

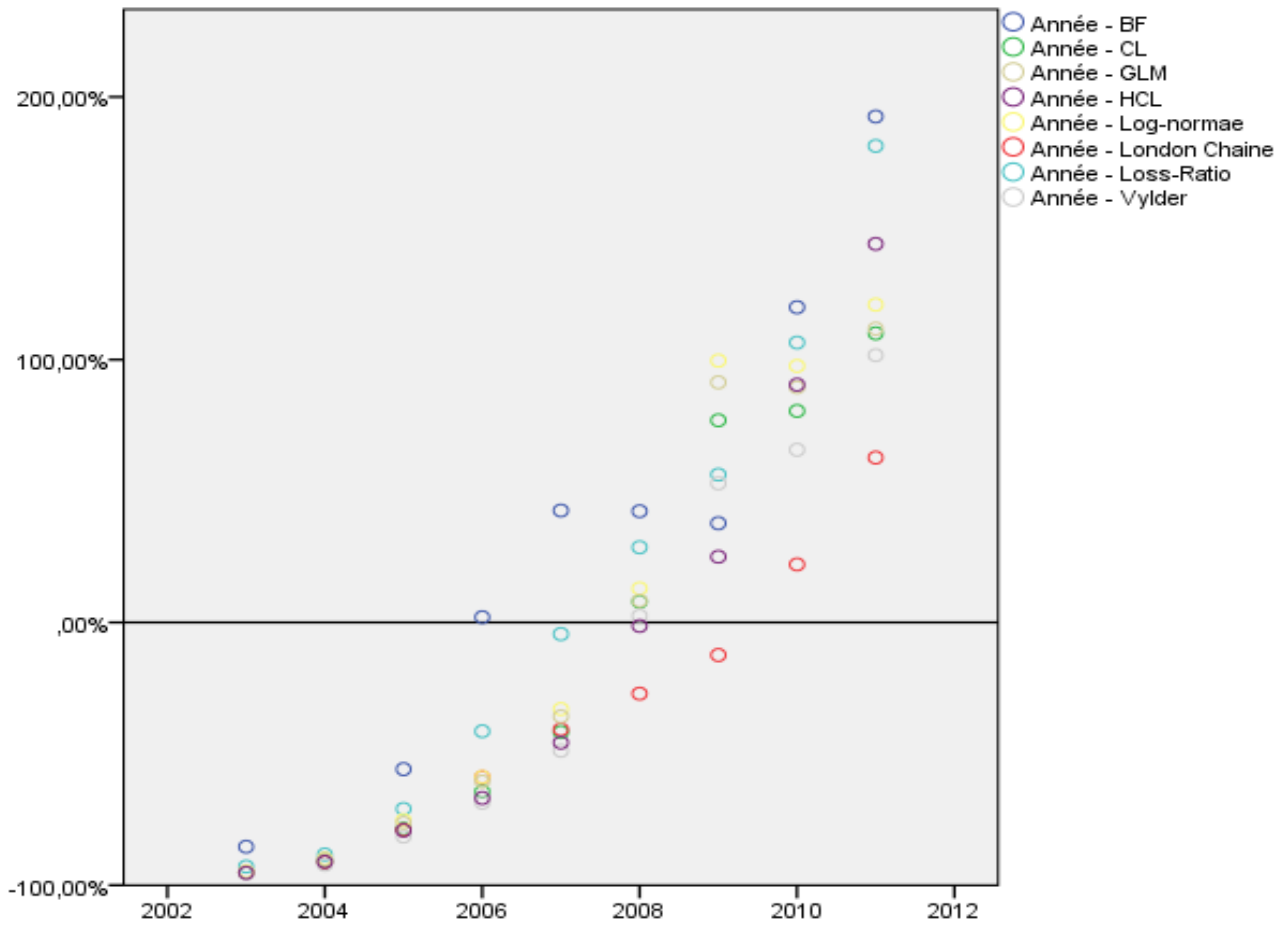


Figure 9 : Evolution des provisions individuelles par rapport à la moyenne pour la branche RC

Ce graphe montre que la branche RC est plus dispersée quand à l'évolution des réserves individuelles. Nous remarquons également que les provisions individuelles augmentent d'une année de survenance à l'autre.

Branche AT :

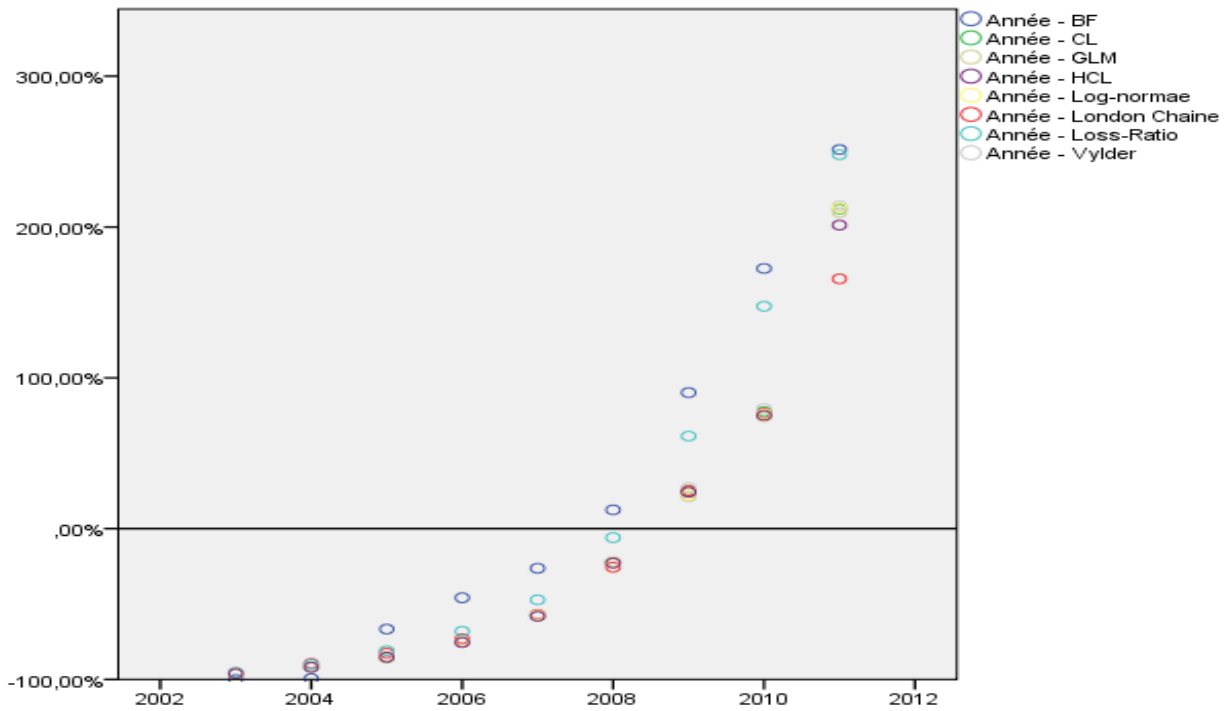


Figure 10 : Evolution des provisions individuelles par rapport à la moyenne pour la branche AT

Nous remarquons que toutes les méthodes à l'exception de BF et Loss ratio convergent vers Chain Ladder.

Branche Auto :

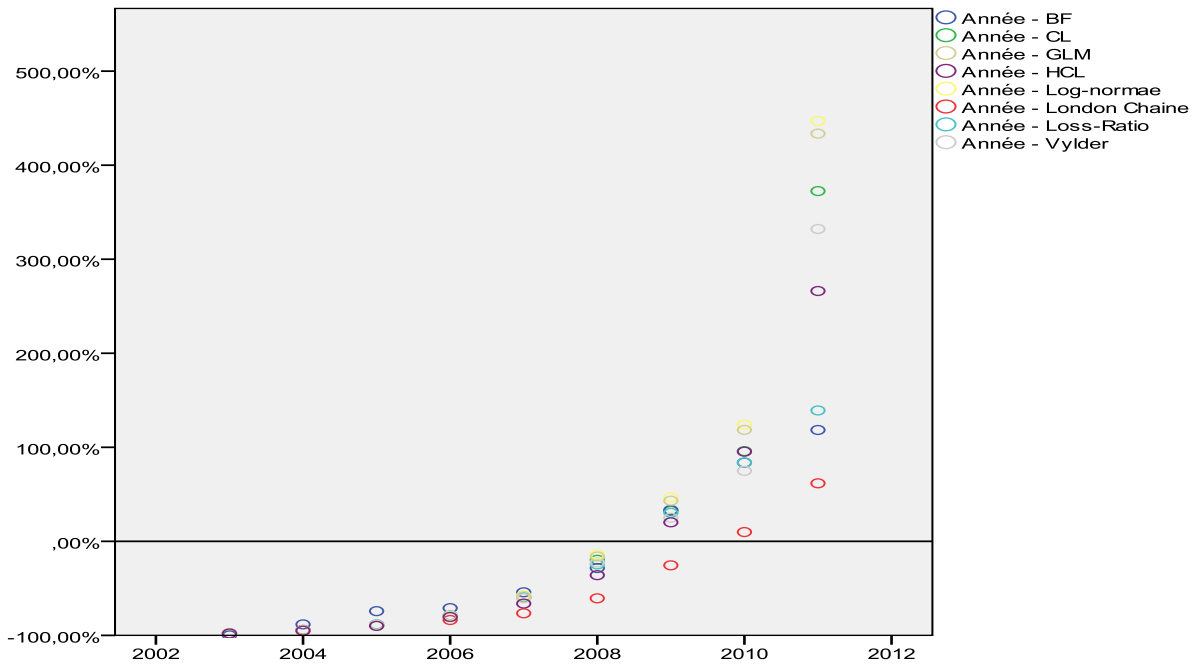


Figure 11 : Evolution des provisions individuelles par rapport à la moyenne pour la branche Auto

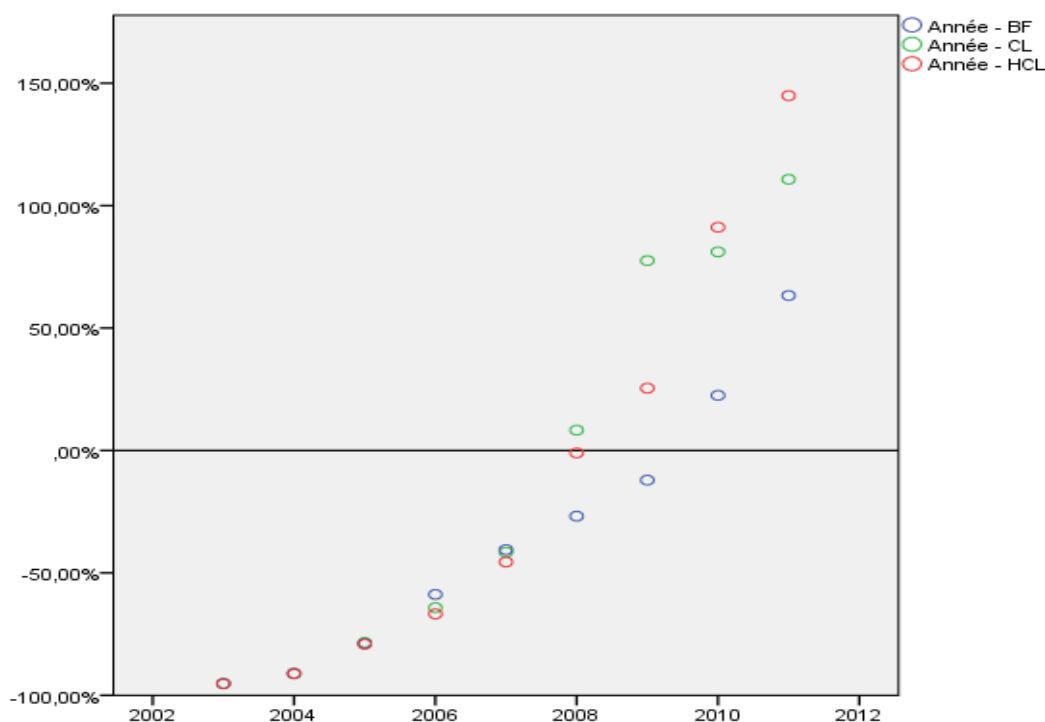
Pour la branche Automobile, les réserves individuelles pour la dernière année de survenance ont des montants assez différents pour chaque méthode.

Nous remarquons d'après ces trois graphes, que les réserves individuelles issues des différentes méthodes convergent pour les premières années de survenance tandis qu'elles divergent pour les dernières années de survenance. De plus, Toutes les méthodes ont une tendance à l'augmentation pour les réserves individuelles.

Un triangle homogène conduit à une rapide convergence des estimations des différentes méthodes. A l'inverse, un triangle hétérogène conduit à une variabilité plus forte des résultats selon la méthode utilisée.

Si nous reprenons les écarts par rapport à la moyenne des trois méthodes suivantes : BF, CL et HCL, nous obtenons le graphe suivant qui illustre l'évolution des réserves individuelles pour ces trois méthodes:

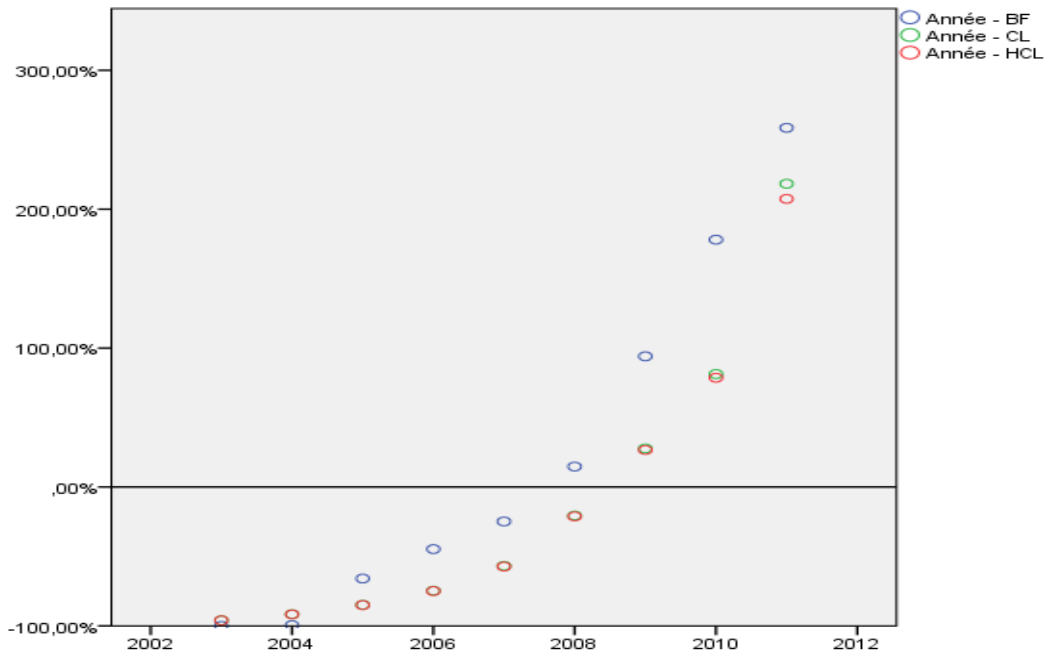
Branche RC :



**Figure 12 : Evolution de provisions individuelles des méthodes CL, BF et HCL pour la branche RC**

D'après ce graphique, la méthode HCL a la même allure que CL pour les premières années de développements, alors qu'elle suit l'évolution du BF pour les dernières années.

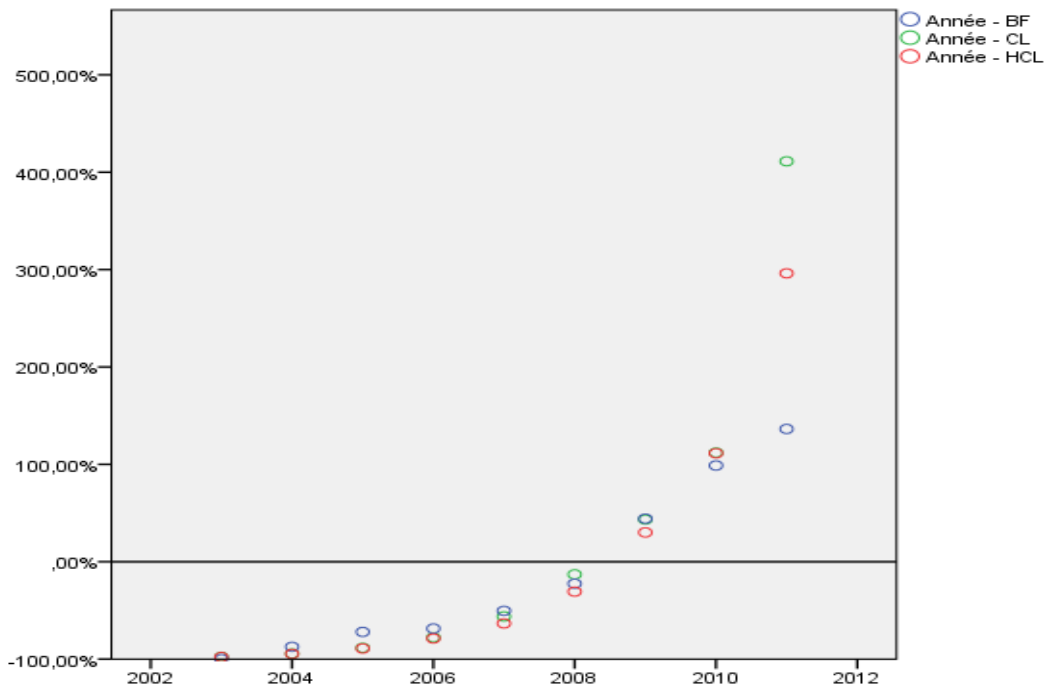
Branche AT :



**Figure 13 : Evolution de provisions individuelles des méthodes CL, BF et HCL pour la branche AT**

Pour cette branche, HCL suit exactement la méthode CL. Ceci peut être expliqué par le choix de  $\alpha_i$  qui détermine le poids de CL et BF dans le calcul de HCL.

Branche Auto :



**Figure 14 : Evolution de provisions individuelles des méthodes CL, BF et HCL pour la branche Auto**

En comparant la méthode HCL à CL, pour la dernière année de survénance, nous trouvons que la méthode HCL diminue l'écart par rapport à la moyenne.

## I.2. Etude de sensibilité des méthodes

Dans ce paragraphe, nous cherchons à étudier la sensibilité des méthodes étudiées, par rapport aux changements des cadences des paiements dues aux plusieurs facteurs, à savoir : augmentation ou diminution inattendue du montant des sinistres pour une année donnée, erreurs de saisie...

Pour cela nous jetons des erreurs au hasard dans le triangle des paiements pour la branche RC, et nous recalculons le montant des provisions pour chacune des méthodes suivantes :

Méthodes	CL	London chaine	BF	Loss-Ratio	Vylder	Log-Normale	GLM	HCL
Calcul avec erreur	23 315 278	15 362 077	30 291 353	27 001 948	21 210 636	25 334 571	23 797 971	21 589 858
Calcul sans erreur	22 011 852	15 878 215	30 258 265	26 671 265	20 138 410	24 058 863	23 064 536	21 342 980
variation	1 303 425	516 138	33 088	330 683	1 072 226	1 275 708	733 435	246 878
Variation en %	5,92%	3,25%	0,11%	1,24%	5,32%	5,30%	3,18%	1,16%

**Tableau 53 : Etude de sensibilité des modèles de provisionnement pour la branche RC**

D'après ce tableau, nous constatons que les méthodes CL, Log-Normale et Vylder sont les méthodes les plus sensibles aux changements des cadences des paiements par rapport aux autres méthodes. La deuxième remarque que nous pouvons tirer de ce tableau, La méthode HCL et BF sont des méthodes plus stables par rapport aux autres, et cela peut être expliqué par l'utilisation d'autres données (primes, ratio de sinistre et charge des années antérieures) que le triangle des paiements. Cette remarque peut être généralisée pour les autres branches étudiées. Ce qui est illustré par les tableaux suivants :

Pour la branche AT :

Méthodes	CL	London chaine	BF	Loss-Ratio	Vylder	Log-Normale	GLM	HCL
Calcul avec erreur	308 077 630	257 921 637	396 495 809	359853315	310 455 215	330 441 210	290 965 342	263 447 053
Calcul sans erreur	285 923 914	270 337 885	395 495 809	352 270 292	288 675 527	284 253 570	281 376 604	259 263 639
variation	22 153 716	12 416 248	1 000 000	7 583 023	21 779 688	46 187 640	9 588 738	4 183 414
Variation en %	7,75%	4,59%	0,25%	2,15%	7,54%	16,25%	3,41%	1,61%

**Tableau 54 : Etude de sensibilité des modèles de provisionnement pour la branche AT**

Pour la branche Auto :

Méthodes	CL	London chaine	BF	Loss-Ratio	Vylder	Log-Normale	GLM	HCL
Calcul avec erreur	1 346 952 558	502 268 389	932 576 699	934 038 959	1 244 958 163	1 574 998 477	1 445 211 224	1 071 127 797
Calcul sans erreur	1 245 963 986	576 464 089	935 727 833	921 164 591	1 153 272 193	1 407 253 998	1 372 612 103	1 059 102 047
variation	100 988 573	74 195 700	3 151 133	12 874 368	91 685 970	167 744 478	72 599 121	12 025 749
Variation en %	8,11%	12,87%	0,34%	1,40%	7,95%	11,92%	5,29%	1,14%

Tableau 55 : Etude de sensibilité des modèles de provisionnement pour la branche Auto

Remarque : les triangles des paiements avec erreur pour chaque branche sont exposés en annexe.

## II. Avantages et inconvénients des méthodes

### II.1. Les limites de Chaine Ladder et sa dérivée

La méthode Chain Ladder est certainement la plus utilisée. Elle obtient de bons résultats surtout lorsque les hypothèses sont respectées.

Sa simplicité lui octroie un caractère objectif, ce qui permet d'obtenir un consensus plus facilement entre les différents actuaires qui l'utilisent. En général, ces deux qualités suffisent à inciter à faire une approximation préliminaire à l'aide de la méthode Chain Ladder pour avoir une idée générale du montant de la réserve.

A l'inverse, si les hypothèses ne sont pas soutenues les données, les prévisions de la méthode risquent d'être erronées. Une grande perte exceptionnelle fera augmenter le taux de façon démesurée, car les estimations qu'elle fournit pour les années d'accident les plus récentes sont très sensibles à des variations dans les données observées.

C'est une méthode purement multiplicative, l'estimation pour chaque période d'origine est formée en multipliant la valeur la plus récente dans chaque période d'origine par un facteur de développement. Si la valeur la plus récente est nulle, alors l'estimation sera nulle. D'autre part, si la valeur la plus récente est exceptionnellement grande, le facteur de développement peut exagérer les pertes finales pendant cette période.

La dernière année de souscription  $C_{n,1}$ , doit être surveillée puisqu'elle est la seule valeur connue de cette année d'origine et la valeur la plus exposée au biais multiplicatif de Chain Ladder. Une valeur élevée ou nulle de cet incrément aura un impact très important.

De même le ratio de lien doit être stable à travers les périodes d'origine afin de produire des résultats raisonnables et une telle stabilité est rare. Les incréments correspondant aux périodes de développement élevées comportent peu d'observations. Le dernier coefficient est par exemple calculé à partir de seulement deux valeurs et est appliqué à toute la colonne.

La méthode London Chain est plus élaborée et plus flexible que la méthode Chain Ladder. En plus de considérer une tendance multiplicative entre les périodes (les facteurs  $\lambda_j$ ), on suppose qu'il y a aussi une tendance incrémentale (les facteurs  $\alpha_j$ ).

La méthode London Chain modélise les paiements par une relation linéaire avec tendance contrairement à la méthode Chain Ladder qui suppose une relation affine entre les paiements. Alors cette méthode est une généralisation de la méthode Chain Ladder, car si la tendance incrémentale est nulle, on peut obtenir la méthode Chain Ladder, dépendamment de la façon d'estimer la droite optimale.

## II.2. Critiques de Bornhuetter Ferguson

La méthode Bornhuetter Ferguson utilise un ratio de sinistre comme une donnée exogène, laquelle est déterminée à partir du triangle des charges de sinistres. La spécificité de cette méthode tient à l'application d'un unique ratio de sinistre à un groupe d'années homogènes.

L'objectif primaire de la méthode est d'assurer une meilleure stabilité de l'estimation des réserves. Ceci est particulièrement vrai pour les années d'accident récentes où les réserves dépendent trop des derniers paiements contrairement à la méthode Chain Ladder. Par exemple, dans le cas d'un triangle de données où il y'a des valeurs aberrantes pour certaines années de survenance. La méthode de Chain Ladder est très sensible aux valeurs aberrantes dans la diagonale. Dans ce cas, la méthode de Bornhuetter-Ferguson est robuste mais demande des informations supplémentaires par des experts. Ce qui comprend une source additionnelle d'incertitude.

Etant donné que les coefficients de cadence de règlement sont calculés à partir des coefficients de Chain Ladder, les mêmes limites sur la qualité des estimations peuvent être faites. Cependant, cette méthode est privilégiée dans les situations où le modèle Chain-Ladder capte mal la nature du risque car elle permet d'incorporer facilement de l'information extérieure (ratio de sinistre) issue du jugement de l'actuaire.

Enfin, cette méthode ne permet pas de déterminer l'évolution du recouvrement par projection du triangle, mais seulement d'estimer du montant de la charge ultime.

## II.3. Avantage du modèle HCL

La méthode HCL comme proposé dans ce rapport permet de choisir librement une pondération entre un multiplicateur et un comportement additif contourner le problème des hypothèses contradictoires dans un cadre d'une distribution non paramétrique. Les deux aspects suivants mettent en évidence les principales différences entre HCL et les modèles de référence (CL et BF).

- La méthode HCL voit ce poids comme paramètre de sélection du modèle à travers lequel l'actuaire peut déterminer si une structure multiplicative comme dans CL ou une structure additive comme dans BF est plus approprié de prévoir la demande finale.
- HCL s'appuie sur une distribution non paramétrique. Cela nous permet d'éviter les hypothèses nécessaires à des méthodes basées sur la distribution, telles que la positivité des revendications supplémentaires ou hypothèse de distribution.

La pondération libre de la méthode HCL entre CL et BF permet de renforcer la stabilité et aussi diminuer l'incertitude. Par exemple, dans le cas d'un triangle de données où il y'a des valeurs aberrantes pour certaines années de survenance. La méthode de Chain Ladder est très sensible aux valeurs aberrantes dans la diagonale. Dans ce cas, la méthode de Bornhuetter-Ferguson est robuste

mais demande des informations supplémentaires par des experts. Ce qui comprend une source additionnelle d'incertitude dans l'utilisation de BF seulement.

## II.4. Critiques des autres méthodes

- Loss Ratio :

Le ratio de sinistre est déterminé de différentes façons : selon l'expérience passée, à partir d'une évaluation liée à la tarification initiale des contrats ou sur une bonne connaissance du marché.

Cette méthode paraît très simple, elle n'utilise pas les déroulés des triangles, elle ne dépend que d'un paramètre exogène. Elle présuppose une très bonne connaissance du marché. Il faut connaître par exemple les changements tarifaires d'une année sur l'autre. En réassurance, le souscripteur peut donner une bonne estimation du Loss Ratio attendu de son portefeuille. Cette méthode n'est donc efficace que sur des branches stables car elle n'utilise pas l'expérience passée des sinistres dans l'évaluation de la charge finale, même si cette expérience est incluse dans le choix du loss ratio. Elle est utile pour une première estimation des sinistres ultimes sur les années de souscription récentes qui n'ont pas ou peu d'historique.

- Vylder :

Dans cette méthode, nous avons  $(2I + J + 1)$  paramètres à estimer, ce qui peut nous conduire, sans contrainte préalable sur le modèle, à une sur-paramétrisation ; le modèle ne sera pas identifiable. D'un point de vue de la qualité de l'estimation, les performances sur l'ensemble d'apprentissage (i.e. les données ayant servi à la construction du modèle) seront meilleures que dans le cas de Chain-Ladder par exemple. En revanche, elles seront probablement plus mauvaises pour les nouvelles données (en termes de prédiction) du fait de la trop forte variance des estimateurs locaux.

- Les modèles factoriels et le modèle de Mack:

Ces modèles produisent presque les mêmes réserves que la méthode Chain Ladder. En effet, le modèle de Poisson surdispersé et le modèle de Mack forment une liste non-exhaustive des modèles les plus connus. Cependant, en ajoutant quelques hypothèses additionnelles, ces modèles permettent de décrire le risque par une distribution ou bien par un intervalle de valeurs probables et aussi de déterminer le degré d'incertitude de la réserve, ce qui peut s'avérer une information capitale pour les stratégies financières de la compagnie. Puisque la méthode Chain Ladder est déjà traditionnellement très utilisée, l'implantation de ces nouveaux modèles ne peut apporter que des avantages, puisque les réserves sont les mêmes.

A partir de la régression utilisée, il est alors possible aux moyens de méthode de simulation (Bootstrap) de calculer la distribution estimée des provisions et de calculer les volatilités ultime. Cependant, l'inconvénient majeur est la nécessité de vérifier de nombreuses hypothèses par exemple : la normalité des réponses, l'indépendance...

Pour terminer cette partie, voici un tableau récapitulatif des avantages et inconvénients des méthodes de provisionnement étudiées.

Méthodes	Avantages	Inconvénients
Chain Ladder	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Application simple</li> <li>• Méthode de référence.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Hypothèses fortes.</li> <li>• Sensibilité fortes des estimations des provisions.</li> </ul>
London Chain	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Application simple.</li> <li>• Moins contraint que Chain Ladder.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Sensibilités fortes des estimations des provisions.</li> </ul>
Vylder	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Prise en compte des effets calendaires.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Estimation des paramètres lourde.</li> </ul>
Bornhuetter-Ferguson	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Faibles sensibilité des estimations des provisions.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Besoin des données exogènes.</li> </ul>
Mack	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Mêmes résultats que Chain Ladder.</li> <li>• Calcul de l'incertitude des réserves.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Hypothèses fortes.</li> <li>• Sensibilité fortes des estimations des provisions.</li> </ul>
GLM	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Choix de la distribution des incréments.</li> <li>• Résultats proches de Chain Ladder.</li> <li>• Utilisé lors des procédures Bootstrap.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Hypothèses paramétriques.</li> <li>• Estimation des paramètres lourde.</li> </ul>
HCL	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Combinaison pondérée de deux approches.</li> <li>• Faibles sensibilités des estimations des provisions.</li> <li>• Calcul de l'incertitude des réserves.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Besoin des données exogènes.</li> <li>• Estimation des paramètres lourde.</li> </ul>

Tableau 56 : Tableau récapitulatif des avantages et inconvénients des méthodes étudiées

## Conclusion

Dans le cadre du provisionnement, l'actuaire dispose d'un panel de méthodes pour effectuer ses estimations. Le premier objectif de ce mémoire est de montrer que parmi toutes celles-ci, chacune a des qualités et des défauts. Afin de les détailler, nous les avons testées sur trois triangles différents. Un triangle de Responsabilité Civile, qui se comporte assez bien. Les deux autres triangles sont : Accident de Travail et Automobile qui sont moins réguliers et se développent de façon beaucoup plus lente.

Les caractères différents de ces triangles ont permis de souligner qu'une même méthode pouvait être appropriée dans un cas mais aberrante dans un autre. Ce constat, nous l'avons fait sur les résultats entre les triangles, mais aussi au sein d'un même triangle pour des années de survenance différentes.

Dans un premier temps, l'application des méthodes déterministes, basées sur les facteurs de développement, ont permis d'apporter une première approche sur l'estimation des réserves. Elles sont plus simples à appliquer mais elles ne produisent pas d'information sur l'erreur des estimations. Quand aux méthodes des ratios, elles se distinguent des méthodes précédentes en faisant appel à une information exogène connue.

L'utilisation des méthodes stochastiques ont ensuite permis de donner une dimension stochastique aux méthodes déterministes. Elles développent une approche permettant de quantifier le risque présent dans l'estimation de la provision.

L'approche nouvelle du HCL a introduit un nouveau paramètre qui détermine le poids de chacune des méthodes de référence à savoir CL et BF. Elle utilise aussi la charge de sinistre des années antérieures comme une information supplémentaire.

Les modèles traités d'inflation permettent de prendre en considération le facteur d'inflation et son impact sur les estimations. Nous constatons une variation entre les estimations sans inflation et celles avec inflation. En se basant sur le modèle de Taylor, les branches à développement long sont les plus influencées par l'inflation.

Enfin, et d'après une étude comparative des méthodes étudiées, nous concluons que la méthode CL est une méthode de référence, simple à appliquer mais elle se base sur des hypothèses fortes tandis que London Chain est moins contraint que CL. Ces deux méthodes présentent l'inconvénient de sensibilité forte des estimations. D'une autre part, la méthode BF résout ce problème de sensibilité mais elle nécessite une information exogène ce qui entraîne une autre source d'erreur. Quand au modèle de Mack, il fournit la même estimation que CL avec un intervalle de confiance. Les méthodes factorielles stochastiques à savoir GLM et Log-Normale s'appuient sur des hypothèses paramétriques avec une estimation des paramètres lourde. La méthode HCL apparaît plus stable par rapport aux autres méthodes.

## Bibliographie

- Swiss Re, provisionnement des sinistres en assurance de dommages : progressé sur un défi stratégique, Sigma n°2/2008.
- Sandra Pitrebois, Philippe De Longueville, Michel Denuit, Jean-François Walhin, Etude de techniques IBNR modernes.
- Swiss Reinsurance Company, Late claims reserves in reinsurance, Zurich, 2000.
- Arrêté du ministre des finances et de la privatisation n° 1548-05 du 6 ramadan 1426 (10 octobre 2005) relatif aux entreprises d'assurances et de réassurance.
- Ghizlane Khouzaimi et Amal Hannouda, Estimation des provisions pour sinistres à payer pour la branche accident de travail. Projet de Fin d'études, INSEA, 2012.

## Webographie

- [http://fr.wikipedia.org/wiki/Provision\\_technique](http://fr.wikipedia.org/wiki/Provision_technique).
- [http://fr.wikipedia.org/wiki/Solvabilit%C3%A9\\_II](http://fr.wikipedia.org/wiki/Solvabilit%C3%A9_II).
- <http://databank.worldbank.org/data/home.aspx> (Données des prix à la consommation).
- Claire GUILLAUMIN, Mémoire d'Actuariat Détermination d'une méthode de provisionnement pour les créances douteuses, Université Paris Dauphine, 2008.
- Hélène COMPAIN, Analyse du risque de provisionnement non-vie dans le cadre de la réforme Solvabilité II, l'Université Paris Dauphine et l'Institut des Actuaire, 18 novembre 2010.
- PHILIPP ARBENZ and ROBERT SALZMANN, A robust distribution free loss reserving method with weighted data and expert reliance.
- Sandra Pitrebois Philippe De Longueville Michel Denuit ,Jean-François Walhin, Etude de techniques IBNR modernes.
- Ilan HABIB, Stéphane RIBAN, Quelle méthode de provisionnement pour des engagements non-vie dans Solvabilité 2 ?, l'ENSAE Paris Tech, 26 juin 2012.
- Hélène Gibello et Benoit Lebrun, crédibilisation des méthodes de provisionnement non vie, le centre d'études actuarielles.
- Clélia Sauvet, Solvency II, Quelle modélisation stochastique des provisions techniques prévoyance et non vie? , 21 Février 2006.

## Annexe

### I. Code des assurances

**Dahir n° 1-60-223 du 12 ramadan 1382 (6 février 1963) portant modification en la forme du dahir du 25 hija 1345 (25 juin 1927) relatif à la réparation des accidents du travail. Bulletin officiel n° 2629 du 15/03/1963 (15 mars 1963).**

#### **Chapitre II : Catégories d'employeurs assujettis et de personnes bénéficiaires.**

**Article 7 :** Bénéficient du présent dahir les ouvriers, employés, agents de maîtrise ou de direction au service des entreprises et employeurs ci-après :

- 1- Exploitations agricoles et forestières dans les conditions spécialement déterminées par dahir ;
- 2- Entreprises industrielles (telles qu'usines, manufactures, chantiers, industries du bâtiment et des travaux publics, entreprises de transport par terre, par eau ou par air, entreprises de chargement ou de déchargement, magasins publics, mines, carrières) ;
- 3- Entreprises commerciales ;
- 4- Entreprises ayant pour objet les soins personnels (telles que salons de coiffure, établissements de bains, de douches, d'hydrothérapie, de pédicure, de manucure, de soins de beauté) ;
- 5- Employeurs exerçant une profession libérale, notaires, sociétés civiles, coopératives, syndicats, associations ou groupements de quelque nature que ce soit ; établissements du culte, congrégations, établissements religieux, établissements hospitaliers ; établissements d'assistance ou de bienfaisance ; sociétés, associations ou établissements ayant pour objet la pratique du sport, de la gymnastique ou de la culture physique.

**Article 12 :** Les employeurs peuvent se placer eux-mêmes ou placer les membres de leur famille sous le bénéfice de la présente réglementation pour les accidents dont ils viendraient à être victimes, par le fait ou à l'occasion du travail.

## II. Les données

Branche RC :

Année	SINISTRES PAYES CUMULES (SPC)									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2002	361 141	2 287 863	2 943 949	3 331 185	3 666 350	4 227 135	4 670 735	5 117 689	5 248 179	5 429 846
2003	317 172	1 267 374	1 725 813	1 961 192	2 263 508	2 940 368	3 455 803	3 725 029	3 801 761	
2004	436 242	1 219 689	1 649 176	1 909 576	2 831 165	3 219 751	3 718 362	4 165 744		
2005	388 747	1 033 572	1 591 324	2 188 467	2 592 216	2 944 164	3 607 728			
2006	391 040	1 136 187	1 507 451	1 983 249	2 417 919	2 805 851				
2007	437 601	1 199 417	1 871 515	2 327 426	2 749 457					
2008	443 223	1 939 714	2 688 457	3 263 995						
2009	865 573	2 368 773	3 690 853							
2010	689 275	2 165 975								
2011	570 494									

**Tableau 57 : Triangle des sinistres payés cumulés pour la branche RC**

Année	SAP CUMULES									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2002	10 784 128	11 083 309	10 474 705	9 799 907	9 310 211	7 636 563	7 537 511	6 608 569	5 601 416	5 274 147
2003	9 157 649	7 202 967	7 080 595	6 930 515	6 206 953	5 097 485	4 855 182	4 052 555	3 814 475	
2004	10 771 214	12 309 434	11 174 437	10 839 994	9 024 085	27 441 123	8 152 060	7 378 969		
2005	11 402 701	8 465 809	7 596 160	7 601 762	7 963 491	7 510 620	6 737 736			
2006	11 350 664	9 474 864	9 083 695	8 627 233	8 905 799	6 742 925				
2007	11 682 011	9 564 589	8 305 229	9 540 016	8 551 432					
2008	15 369 898	15 022 401	13 100 914	11 404 534						
2009	14 210 577	17 548 095	13 886 354							
2010	16 343 200	15 124 803								
2011	16 426 681									

**Tableau 58 : Triangle des sinistres à payer cumulés pour la branche RC**

Année	Primes									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2002	16 593 174	18 993 395	19 511 724	19 622 892	19 610 862	19 623 850	19 623 850	19 623 850	19 623 850	19 623 731
2003	17 606 021	20 303 339	20 753 924	20 866 502	20 936 326	20 950 587	20 950 587	20 955 457	21 010 948	
2004	18 968 118	21 726 074	22 534 511	22 691 925	22 717 370	22 146 225	22 148 309	22 153 406		
2005	19 631 658	23 162 524	23 927 767	23 961 155	23 971 792	24 042 911	24 043 624			
2006	22 823 725	26 754 240	27 731 581	27 772 551	27 943 112	27 938 106				
2007	26 017 486	31 575 563	32 699 959	33 249 413	33 340 732					
2008	25 966 256	33 802 864	35 205 328	35 799 330						
2009	27 743 460	34 969 259	36 982 210							
2010	32 164 482	39 084 221								
2011	33 941 641									

Tableau 59 : Triangle des primes pour la branche RC

Branche AT

Année de survenance	SINISTRES PAYES CUMULES									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2002	6 306 375	26 420 084	46 016 787	61 037 576	73 648 028	79 984 882	83 279 461	85 946 793	88 436 058	89 661 159
2003	7 085 114	28 752 421	51 563 454	75 600 404	87 013 752	92 714 481	97 086 399	100 414 471	102 073 527	
2004	6 582 806	24 154 204	46 878 762	62 328 307	70 507 046	75 495 077	79 913 074	82 405 110		
2005	5 884 118	26 841 107	47 942 830	60 975 090	68 278 312	74 079 666	76 812 244			
2006	8 044 911	29 588 818	48 496 983	61 211 909	70 523 005	75 539 417				
2007	7 806 644	31 220 529	51 462 875	66 921 570	75 558 139					
2008	7 814 948	33 550 836	56 501 884	74 061 019						
2009	7 137 716	31 546 577	54 782 490							
2010	6 967 316	29 561 361								
2011	9 375 696									

Tableau 60 : Triangle des sinistres payés cumulés pour la branche AT

Année	SAP									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2002	90 155 369	78 070 135	59 320 384	47 331 192	40 286 301	36 244 669	25 734 052	22 331 763	23 896 169	19 442 644
2003	111 321 742	89 519 145	68 993 115	57 685 768	44 696 006	44 223 381	29 905 528	26 320 039	22 894 491	
2004	113 900 886	72 260 087	61 855 956	46 885 948	37 783 558	30 477 261	28 400 901	28 795 705		
2005	92 343 818	80 261 506	63 163 479	51 201 530	40 379 702	32 133 874	28 597 814			
2006	122 423 934	92 740 143	69 585 613	52 876 208	41 619 404	39 338 028				
2007	129 155 258	103 757 985	77 611 415	58 580 479	54 988 259					
2008	144 669 842	121 344 460	80 923 606	66 896 851						
2009	145 762 361	104 975 871	85 083 219							
2010	141 920 360	116 465 716								
2011	149 214 315									

Tableau 61 : Triangle des sinistres à payer cumulés pour la branche AT

Année	Primes									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2002	77 155 907	97 011 838	99 235 644	99 272 564	99 272 564	99 350 357	99 350 357	99 350 357	99 351 093	99 351 093
2003	123 126 893	140 008 505	140 587 008	140 835 752	141 026 395	141 026 395	141 026 395	141 018 210	141 013 908	
2004	100 278 118	115 380 058	117 535 400	118 009 202	118 009 202	118 009 202	118 021 655	118 018 574		
2005	106 351 127	124 367 100	127 067 172	127 067 172	127 067 962	127 084 547	127 073 956			
2006	114 338 544	134 000 008	135 958 434	135 960 667	136 049 460	136 043 964				
2007	122 421 104	143 664 834	145 842 630	146 189 648	146 173 615					
2008	137 146 955	162 094 608	163 632 122	164 103 194						
2009	147 618 622	174 517 373	176 612 009							
2010	156 295 053	180 743 071								
2011	164 335 616									

Tableau 62 : Triangle des primes pour la branche AT

## Branche Auto :

Année de survenance	SINISTRES PAYES CUMULES									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2002	9 754 030	36 617 960	65 020 904	98 994 532	127 636 128	148 966 971	161 645 479	168 605 143	171 570 221	174 084 963
2003	13 257 455	41 022 133	74 157 196	111 051 418	142 140 989	162 587 095	173 179 585	178 580 264	183 459 136	
2004	12 583 560	40 646 938	76 755 193	115 938 962	145 572 558	161 639 625	169 835 933	178 708 146		
2005	14 653 305	45 496 274	85 267 389	124 902 497	149 887 818	161 866 859	170 894 077			
2006	14 783 221	50 212 305	97 846 662	137 011 075	159 778 694	177 923 244				
2007	24 653 065	67 346 524	112 176 434	148 115 499	181 115 606					
2008	31 256 347	87 073 801	126 829 054	177 420 333						
2009	37 321 935	88 171 658	134 985 020							
2010	45 347 289	89 250 080								
2011	65 801 583									

Tableau 63 : Triangle des sinistres payés cumulés pour la branche Auto

Année	SAP									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2002	259 398 882	239 264 323	205 988 783	173 191 089	151 949 956	114 725 300	89 600 833	71 472 432	57 042 452	44 743 012
2003	259 533 414	260 330 569	230 371 902	202 831 977	154 455 803	122 738 854	98 313 534	79 783 728	61 158 506	
2004	286 580 872	258 455 066	240 411 414	191 310 771	143 928 542	123 330 294	92 876 540	75 211 275		
2005	281 697 850	281 790 834	229 944 756	170 288 773	138 002 352	116 955 580	94 436 649			
2006	289 039 253	288 788 419	232 036 825	188 541 774	155 861 046	125 514 395				
2007	337 825 263	296 561 304	264 167 558	220 407 373	174 699 110					
2008	346 556 265	399 308 138	308 918 287	249 866 313						
2009	369 049 086	369 527 124	328 943 149							
2010	448 045 642	360 582 795								
2011	481 962 755									

Tableau 64 : Triangle des sinistres à payer cumulés pour la branche Auto

Année de survenance	Primes									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2002	330 237 973	339 791 683	339 511 883	339 408 641	339 408 641	339 404 236	339 404 236	339 404 236	339 402 548	339 401 490
2003	340 184 165	350 280 403	350 447 451	350 308 438	350 390 946	350 390 946	350 390 946	350 391 084	350 385 617	
2004	365 308 280	373 292 940	372 875 405	372 873 316	372 873 316	372 873 316	372 841 675	372 832 531		
2005	383 219 428	392 738 074	392 980 078	392 980 078	392 980 078	392 963 022	392 956 970			
2006	401 536 208	414 021 209	414 479 963	414 478 990	414 463 947	414 454 712				
2007	447 617 552	459 017 534	461 102 428	461 118 194	462 660 632					
2008	503 645 728	518 554 751	520 073 847	519 522 809						
2009	566 338 604	591 116 235	591 940 314							
2010	615 569 647	629 108 527								
2011	651 605 536									

Tableau 65 : Triangle des primes pour la branche Auto

### III. Note descriptive de l'outil de calcul

A partir des calculs effectués par le logiciel VBA Excel, nous réalisons une interface graphique simplifiant l'affichage des résultats obtenus par le modèle de provisionnement choisis, comme présenté ci-dessous :

Calculs des provisions										
Sinistres payés cumulés										
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2002	6 306 375	26 420 084	46 016 787	61 037 576	73 648 028	79 984 882	83 279 461	85 946 793	88 436 058	89 661 159
2003	7 085 114	28 752 421	51 583 454	75 600 404	87 013 752	92 714 481	97 086 339	100 414 471	102 073 527	
2004	6 582 806	24 154 204	46 878 762	62 328 307	70 507 046	75 495 077	79 913 074	82 405 110		
2005	5 884 118	26 841 107	47 942 830	60 975 090	68 278 312	74 079 666	76 812 244			
2006	8 044 911	29 588 818	48 436 983	61 211 909	70 523 005	75 539 417				
2007	7 806 644	31 220 529	51 462 875	66 321 570	75 558 139					
2008	7 814 948	33 550 836	56 501 884	74 061 019						
2009	7 137 716	31 546 577	54 782 490							
2010	6 967 316	29 561 361								
2011	9 375 696									

Primes cumulées										
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2002	77 155 907	97 011 838	93 235 644	99 272 564	99 272 564	99 350 357	99 350 357	99 350 357	99 351 093	99 351 093
2003	123 126 893	140 008 505	140 587 008	140 835 752	141 026 395	141 026 395	141 026 395	141 018 210	141 013 908	
2004	100 278 118	115 380 058	117 535 400	118 009 202	118 009 202	118 009 202	118 021 655	118 018 574		
2005	106 351 127	124 367 100	127 067 172	127 067 172	127 067 962	127 084 547	127 073 958			
2006	114 338 544	134 000 008	135 958 434	135 960 667	136 049 460	136 043 364				
2007	122 421 104	143 664 834	145 842 630	146 189 648	146 173 615					
2008	137 146 955	162 094 608	163 632 122	164 103 194						
2009	147 618 622	174 517 373	176 612 009							
2010	156 295 053	180 743 071								
2011	164 335 616									

Résultats				
Année	Charge d'aujourd'hui	Charge à l'ultime	S/P	Réserves
2002	89 661 159	89 661 159	90,25%	-
2003	102 073 527	105 812 373	73,62%	1 738 846
2004	82 405 110	86 033 094	72,90%	3 627 984
2005	76 812 244	83 749 662	65,91%	6 937 418
2006	75 539 417	87 153 299	64,07%	11 613 882
2007	75 558 139	94 734 133	64,80%	19 175 994
2008	74 061 019	108 242 635	65,93%	34 181 616
2009	54 782 490	113 409 101	64,08%	58 626 611
2010	29 561 361	119 480 669	65,04%	89 919 308
2011	9 375 696	135 824 333	69,36%	126 448 637
Réserve total				352 270 296

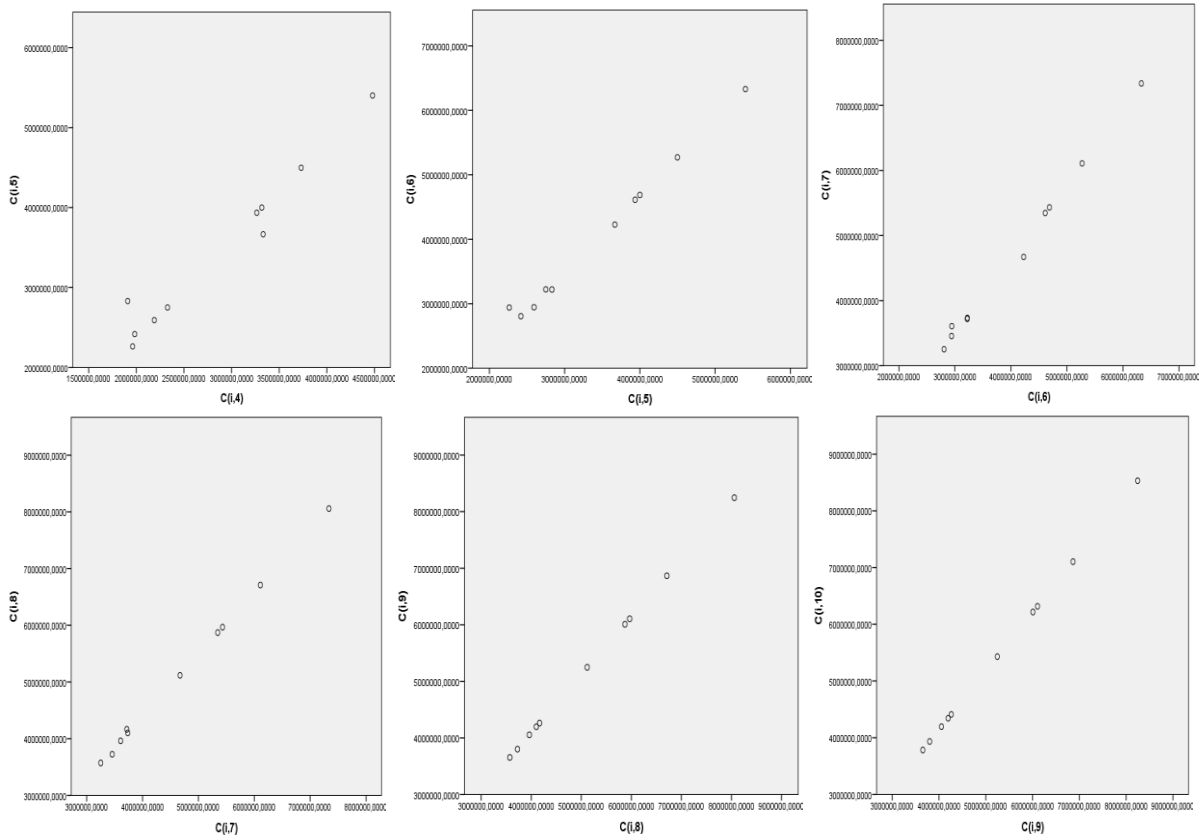
Cette interface comprend quatre zones. La première concerne les sinistres cumulés (payés, à payer ou charges de sinistres). Il s'agit d'un triangle de dix années de développement. La deuxième zone représente le triangle de primes cumulées. La troisième représente une liste des méthodes à choisir pour estimer les réserves. La dernière zone permet l'affichage de la charge d'aujourd'hui ainsi que la charge à l'ultime, les ratios de sinistre, les réserves individuelles et la réserve totale.

L'utilisation de cette interface se fait comme suit :

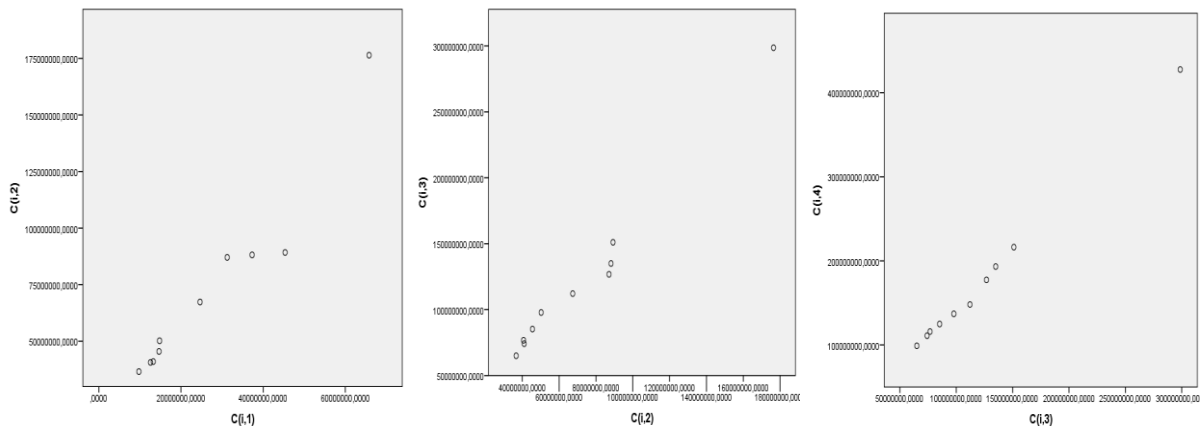
- Entrer les inputs (sinistres payés cumulés et primes cumulées) nécessaire pour le calcul ;
- Effectuer un choix du modèle de calcul à partir d'un menu (CL, BF, Loss-Ratio, GLM et Bootstrap) ;
- Enfin, afficher une zone des résultats issus du modèle choisis.

## IV. Vérification des hypothèses de CL

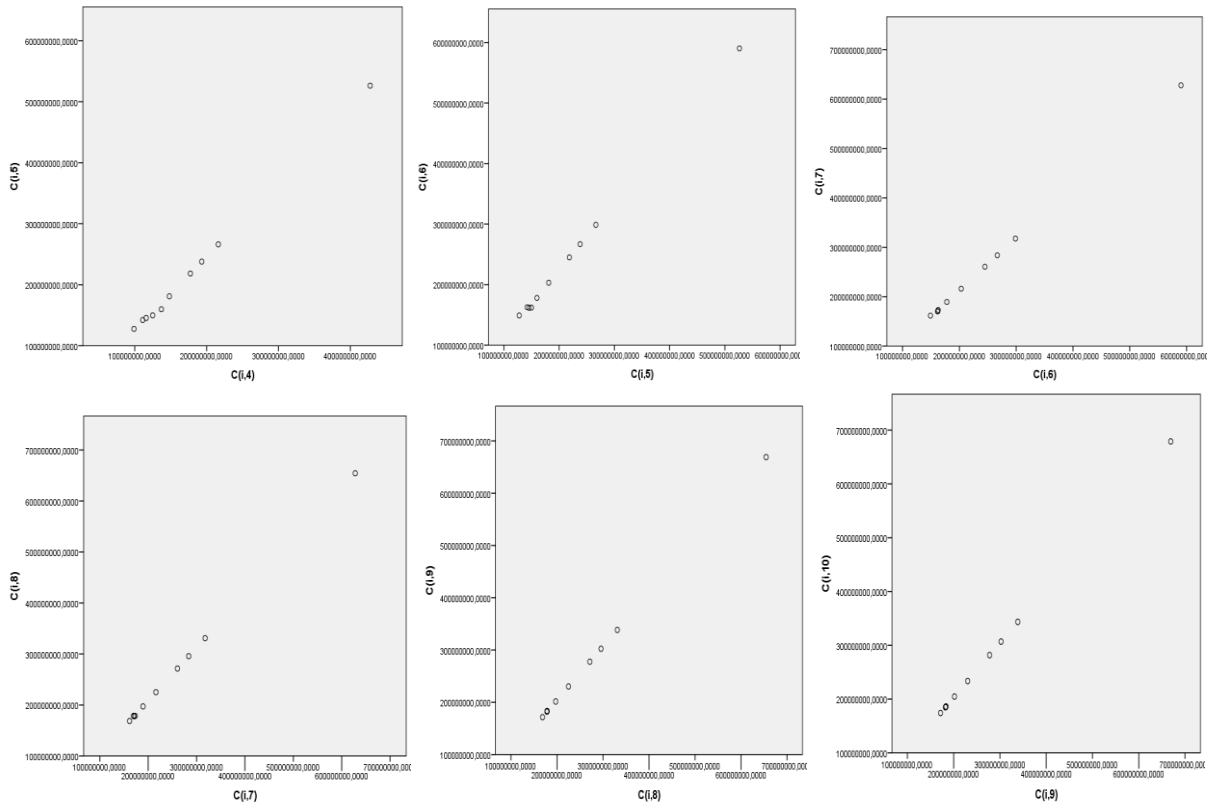
### Pour la branche RC



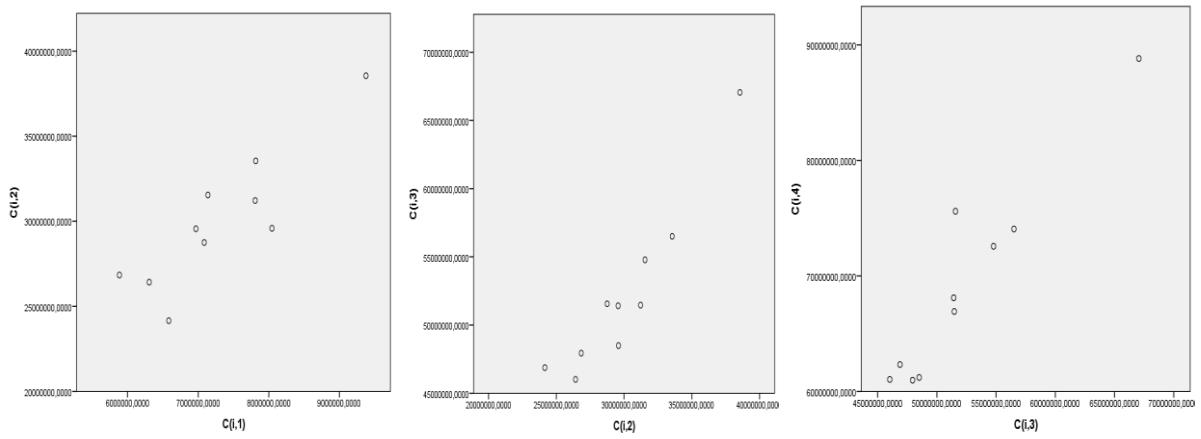
### Pour la branche Auto :

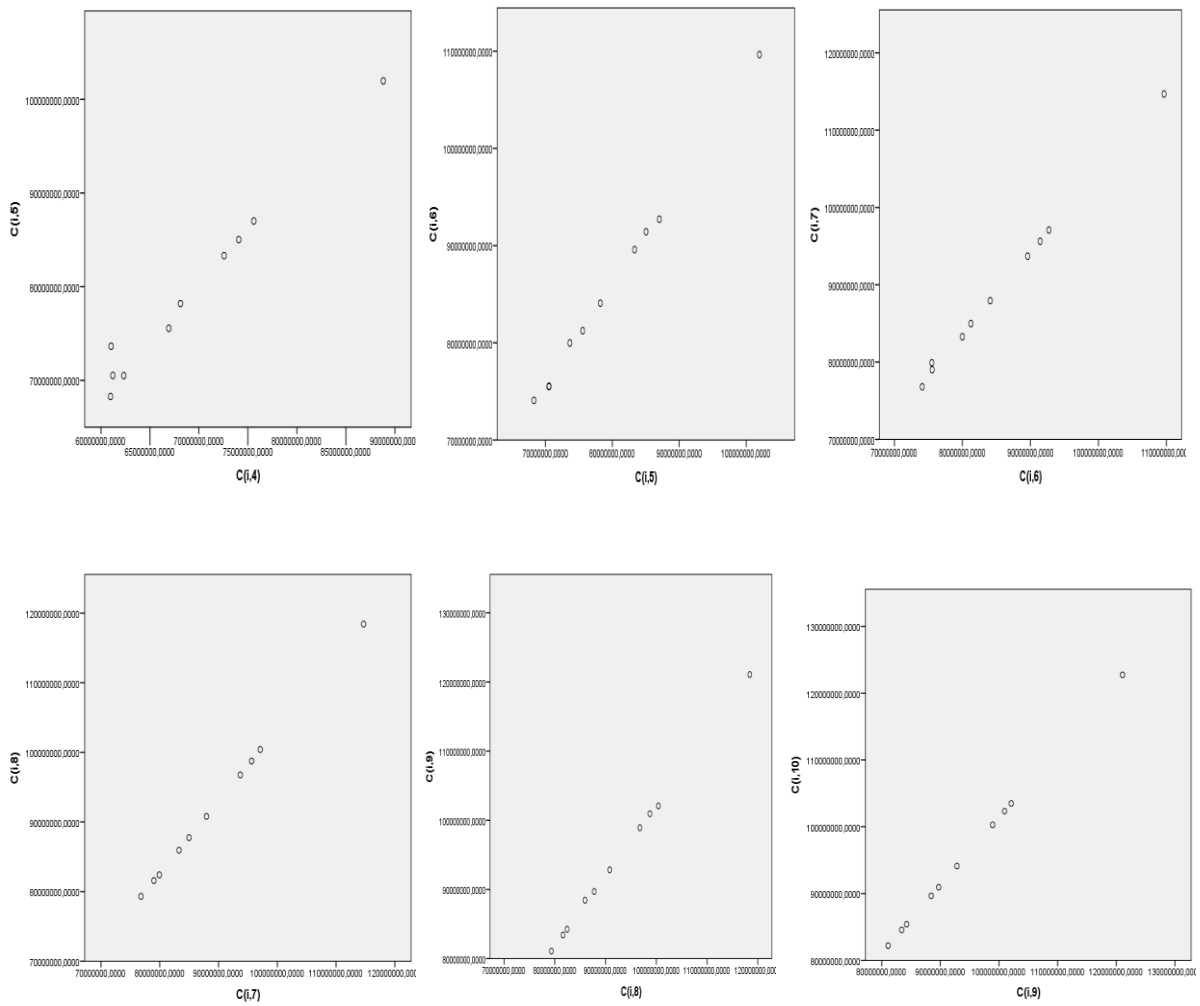


Annexe



Pour la branche AT :





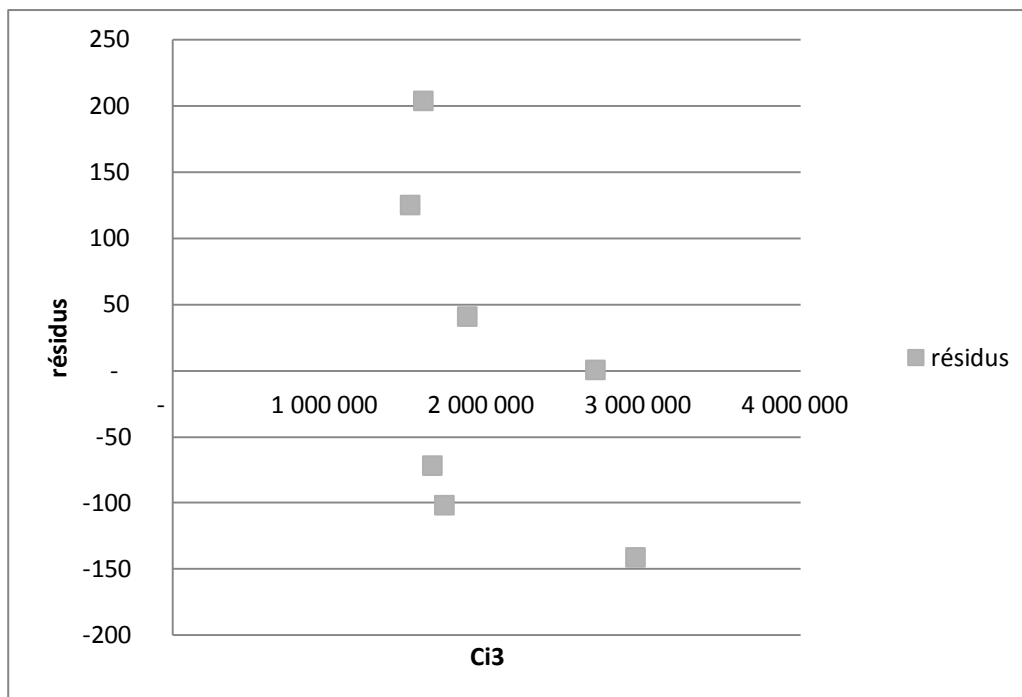
Triangle de développement pour la branche Auto :

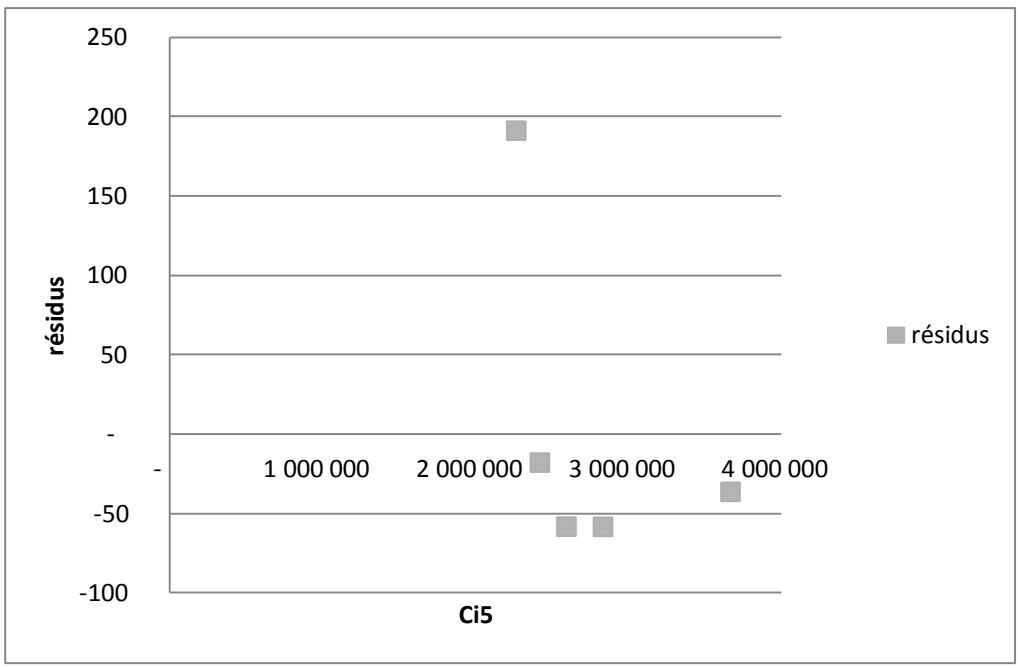
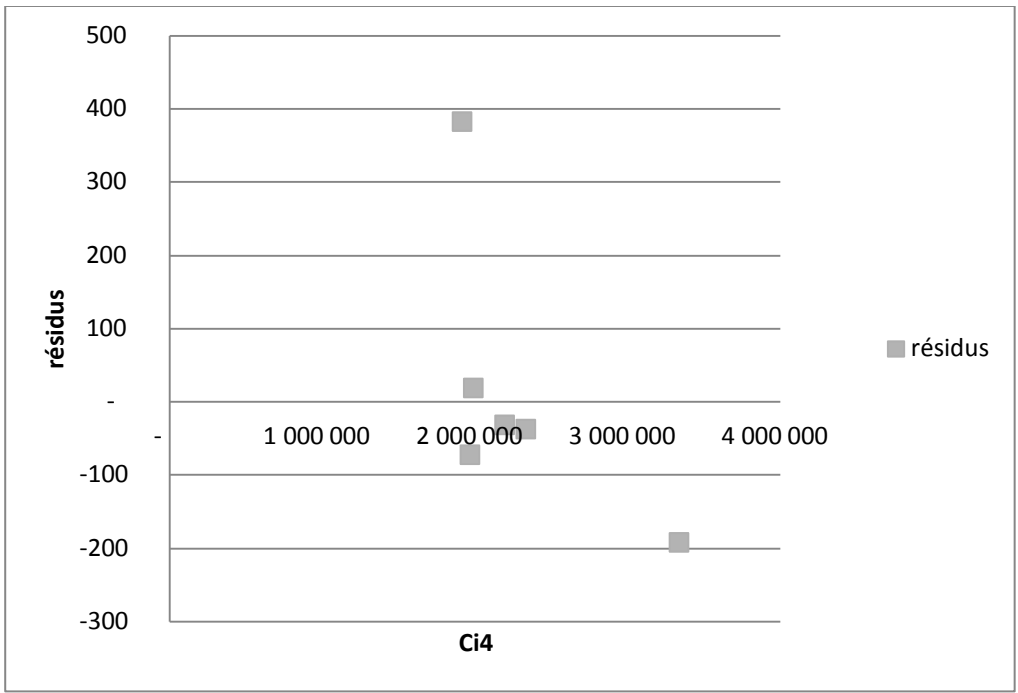
3,7541	1,7757	1,5225	1,2893	1,1671	1,0851	1,0431	1,0176	1,0147
3,0943	1,8077	1,4975	1,2800	1,1438	1,0651	1,0312	1,0273	
3,2302	1,8883	1,5105	1,2556	1,1104	1,0507	1,0522		
3,1048	1,8742	1,4648	1,2000	1,0799	1,0558			
3,3966	1,9487	1,4003	1,1662	1,1136				
2,7318	1,6657	1,3204	1,2228					
2,7858	1,4566	1,3989						
2,3625	1,5309							
1,9681								

Triangle de développement pour la branche AT :

4,1894	1,7417	1,3264	1,2066	1,0860	1,0412	1,0320	1,0290	1,0139
4,0581	1,7934	1,4662	1,1510	1,0655	1,0472	1,0343	1,0165	
3,6693	1,9408	1,3296	1,1312	1,0707	1,0585	1,0312		
4,5616	1,7862	1,2718	1,1198	1,0850	1,0369			
3,6780	1,6390	1,2622	1,1521	1,0711				
3,9992	1,6484	1,3004	1,1291					
4,2932	1,6841	1,3108						
4,4197	1,7366							
4,2429								

## V. Hypothèse de Mack





## VI. Données avec erreurs

Pour la branche RC :

Année	Sinistre payé cumulé									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2002	361 141	2 287 863	2 943 949	3 331 185	3 666 350	4 184 855	4 670 735	5 117 689	5 248 179	5 448 014
2003	317 181	1 267 374	1 725 813	1 961 192	2 263 508	2 940 368	3 455 803	3 725 029	3 801 761	
2004	436 242	1 219 689	1 649 176	1 909 576	2 831 246	3 219 751	3 718 362	4 165 744		
2005	388 747	1 033 572	927 481	2 188 467	2 592 216	2 944 164	3 513 792			
2006	391 040	1 136 187	1 507 451	1 983 249	2 417 919	2 805 851				
2007	437 601	1 199 417	1 871 515	2 118 756	2 749 457					
2008	443 223	1 939 714	2 688 457	3 263 995						
2009	865 573	2 368 773	3 690 853							
2010	689 275	2 165 975								
2011	631 342									

Pour la branche AT :

Année	Sinistre payé cumulé									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2002	6 306 375	26 420 084	46 016 787	61 037 576	73 648 028	79 184 882	83 279 461	85 946 793	88 436 058	89 961 159
2003	7 085 314	28 752 421	51 563 454	75 600 404	87 013 752	92 714 481	97 086 399	100 414 471	102 073 527	
2004	6 582 806	24 154 204	46 878 762	62 328 307	70 509 046	75 495 077	79 913 074	82 405 110		
2005	5 884 118	26 841 107	27 942 830	60 975 090	68 278 312	74 079 666	74 812 244			
2006	8 044 911	29 588 818	48 496 983	61 211 909	70 523 005	75 539 417				
2007	7 806 644	31 220 529	51 462 875	60 921 570	75 558 139					
2008	7 814 948	33 550 836	56 501 884	74 061 019						
2009	7 137 716	31 546 577	54 782 490							
2010	6 967 316	29 561 361								
2011	10 375 696									

Pour la branche Auto :

Année	Sinistre payé cumulé									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2002	9 754 030	36 617 960	65 020 904	98 994 532	127 636 128	147 477 020	161 645 479	168 605 143	171 570 221	174 667 439
2003	13 257 829	41 022 133	74 157 196	111 051 418	142 140 989	162 587 095	173 179 585	178 580 264	183 459 136	
2004	12 583 560	40 646 938	76 755 193	115 938 962	145 576 687	161 639 625	169 835 933	178 708 146		
2005	14 653 305	45 496 274	49 696 944	124 902 497	149 887 818	161 866 859	166 444 420			
2006	14 783 221	50 212 305	97 846 662	137 011 075	159 778 694	177 923 244				
2007	24 653 065	67 346 524	112 176 434	134 835 879	181 115 606					
2008	31 256 347	87 073 801	126 829 054	177 420 333						
2009	37 321 935	88 171 658	134 985 020							
2010	45 347 289	89 250 080								
2011	72 819 897									