

ROYAUME DU MAROC  
\*\_\*\_\*\_\*\_\*  
HAUT COMMISSARIAT AU PLAN  
\*\_\*\_\*\_\*\_\*\_\*\_\*\_\*\_\*  
INSTITUT NATIONAL  
DE STATISTIQUE ET D'ECONOMIE APPLIQUEE

**INSEA**



Projet de Fin d'Études

**Enjeux et impacts de l'application de la Formule  
Standard de la norme Solvabilité II au  
portefeuille d'AXA Assurance Maroc**

Préparé par : M. Mehdi AFFANE

Sous la direction de : M. Abdesselam FAZOUANE (INSEA)

M. Mohammed BOUMASSAOUD  
(AXA Assurance Maroc)

M. Yassine DAOUDI  
(AXA Assurance Maroc)

Soutenu publiquement comme exigence partielle en vue de l'obtention du

**Diplôme d'Ingénieur d'Etat**

Option : Actuariat-Finance

Année universitaire 2013/2014

# Table des matières

<b>Résumé</b>	<b>3</b>
<b>Abstract</b>	<b>3</b>
<b>Dédicace</b>	<b>4</b>
<b>Remerciements</b>	<b>5</b>
<b>Introduction</b>	<b>6</b>
<b>1 Aperçu sur les éléments du contexte</b>	<b>8</b>
1.1 Présentation du dispositif de solvabilité I . . . . .	8
1.2 Les limites de solvabilité I . . . . .	9
1.2.1 Les critiques quantitatives . . . . .	10
1.2.2 Les critiques qualitatives . . . . .	10
1.3 Différences entre Solvabilité I et Solvabilité II . . . . .	10
1.4 Les buts de Solvabilité II . . . . .	11
1.5 La structure des piliers de la Solvabilité II . . . . .	12
1.5.1 Pilier 1 : Les exigences quantitatives en capital . . . . .	12
1.5.2 Pilier 2 : Surveillance prudentielle . . . . .	12
1.5.3 Pilier 3 : La diffusion de l'information . . . . .	12
1.6 La branche VIE et Capitalisation . . . . .	13
1.6.1 Définition . . . . .	13
1.6.2 Types de contrats d'assurance vie capitalisation . . . . .	13
Les contrats d'épargne par capitalisation . . . . .	13
Les contrats en unités de comptes . . . . .	14
1.6.3 Caractéristiques des contrats vie et capitalisation . . . . .	14
<b>2 Approche modèle standard</b>	<b>16</b>
2.1 Les spécificités du bilan prudentiel . . . . .	16
2.1.1 Méthode Best Estimate . . . . .	17
2.1.2 La Marge de risque . . . . .	18
2.2 FORMULE STANDARD : Le calcul du Capital de Solvabilité Requis (SCR)	19
2.2.1 Le calcul du BSCR . . . . .	22
2.3 Cartographie des risques assurentiels : Assurance VIE . . . . .	22
2.3.1 Cadre simplifié des risques assurantiels . . . . .	22
2.3.2 Cartographie des risques : Risques relatifs au Passif . . . . .	23
2.3.3 Cartographie des risques : Risques relatifs à l'Actif . . . . .	25
2.3.4 Stratégie pour mesurer les risques encourus . . . . .	29

<b>3</b>	<b>Générateur de scénarios économiques</b>	<b>31</b>
3.1	Modélisation du Passif . . . . .	31
3.1.1	Hypothèses et paramètres du modèle . . . . .	31
3.1.2	Le déroulement général du modèle . . . . .	32
3.1.3	Modélisation des rachats . . . . .	35
	Les facteurs explicatifs . . . . .	35
	Les rachats conjoncturels . . . . .	35
	Les rachats structurels . . . . .	35
3.2	Modélisation stochastique de l'actif . . . . .	37
3.2.1	Modélisation de la courbe des taux : Modèle de Vasiček . . . . .	37
	Discrétisation du processus d'Ornstein-Uhlenbeck . . . . .	38
	Estimation des paramètres $a$ , $b$ , et $\sigma$ . . . . .	39
3.2.2	Modélisation du cours des actions : Modèle de Black and Scholes . . . . .	47
	Principales caractéristiques du modèle Black and Scholes . . . . .	47
	Application du modèle Black and Scholes . . . . .	49
<b>4</b>	<b>Analyse des résultats</b>	<b>53</b>
4.1	Analyse du portefeuille . . . . .	53
4.2	Modélisation retenue pour les rachats structurels . . . . .	54
4.3	Projection des flux du portefeuille . . . . .	56
4.4	Calcul du Solvency Capital Requirement : SCR . . . . .	60
4.4.1	Risque de souscription vie . . . . .	60
	Risque de mortalité . . . . .	60
	Risque de rachat . . . . .	61
	Risque des frais de gestion : . . . . .	62
4.4.2	Risque de marché . . . . .	62
	Risque de taux d'intérêt . . . . .	62
	Risque des actions . . . . .	63
4.5	Calcul de la Marge de risque . . . . .	63
4.6	Bilan de l'entreprise sous la solvabilité II . . . . .	64
	<b>Conclusion</b>	<b>64</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>66</b>
	<b>Annexes</b>	<b>66</b>

# Résumé

Nous allons nous intéresser dans ce mémoire à la nouvelle réglementation du secteur de l'assurance vie appelée Solvabilité II qui a remplacé l'ancien système Solvabilité I du fait que ce dernier ne tenait pas en compte tous les risques encourus par une compagnie d'assurance. Plus précisément nous allons étudier les impacts des chocs appliqués par le nouveau dispositif sur les engagements de l'entreprise d'assurance-vie, notamment sur leur allocation d'actifs.

Dans un premier temps, nous présenterons les principaux concepts qui serviront la base de ce mémoire, à savoir les contrats d'assurance vie, les fondements de Solvabilité II, la différence par rapport à l'ancien régime, ainsi les finalités pour lesquelles ce changement a été fait.

Ensuite, nous nous intéresserons de manière plus approfondie aux aspects quantitatifs de Solvabilité II en décrivant les différents éléments du bilan prudentiel. Nous définirons le mode de calcul des provisions techniques dans une vision économique ainsi une présentation de la formule standard qui permet de calculer le capital de solvabilité requis SCR.

Dans la troisième partie, nous présenterons l'outil que nous avons développé et qui permet de calculer le Best Estimate d'une compagnie d'assurance pratiquant de l'assurance vie épargne. Nous verrons en quoi les spécificités de l'assurance vie nécessitent l'utilisation d'un modèle actif-passif et le recours à une méthode de type Monte-Carlo.

La dernière partie est consacrée à une analyse des résultats trouvés à savoir les projections des flux de la campagne, le total du Best Estimate, et la valeur de la marge de risque. Pour terminer, nous allons analyser comment les actions et les obligations peuvent impacter le capital de solvabilité requis au titre du risque de marché.

# Abstract

This thesis targets the new regulations in the sector of life insurance called Solvency II which replaced the old Solvency I system since the latter does not take into account all the risks taken by an insurance company. More precisely we will discuss the impacts of shocks applied by the new system on the commitments of the life insurance business, including their assets allocation.

At first, we will present the main concepts that will be used as the basis of this thesis, namely the life insurance contracts, the foundations of Solvency II, the difference from the old regime, as well as the purposes for which this change was made.

Then we will be deeply interested in the quantitative aspects of Solvency II by describing the different elements of the prudential balance sheet. We will define the calculation of technical provisions in an economic vision as well as a presentation of the standard formula to calculate the Solvency Capital Requirement SCR.

In the third part, we will present the tool we developed and applied to calculate the Best Estimate of an insurance company engaged in life insurance savings. We'll see how the specifics of life insurance require the use of an asset-liability model and the use of a Monte Carlo-type method.

The last part is devoted to an analysis of the results gotten namely the flow projections of the company, the total of Best Estimate, and the value of the risk margin. To end, we will analyze how stocks may influence the Solvency Capital Requirement under the market risk.

# Dédicace

*A la mémoire de mon défunt Père : Hassan*

*Aucune dédicace ne saurait exprimer l'amour, l'estime, le dévouement et le respect que j'ai toujours eu pour vous.*

*A ma très chère mère : Zahra*

*Affable, honorable, aimable : Tu représentes pour moi le symbole de la bonté par excellence, la source de tendresse et l'exemple du dévouement qui n'a jamais cessé de m'encourager et de prier pour moi.*

*A mes chers frères et sœurs, et spécialement à mon cher frère Aziz qui m'est un tuteur tout au long de mon parcours académique.*

*A mes chers amis et amies*

*Veillez trouver dans ce modeste travail ma reconnaissance pour tous vos efforts*

# Remerciements

En préambule de ce rapport, il semble judicieux d'adresser mes remerciements aux personnes qui m'ont apporté leur aide et contribué à l'élaboration de ce mémoire.

J'aimerais remercier tout d'abord Mr Abdesselam FAZOUANE, le directeur de l'Institut et mon tuteur académique de m'avoir accueilli et fait confiance durant mon stage, ainsi pour ses conseils avisés. Ainsi Mr GUEDIRA qui a accepté de juger ce travail autant qu'examineur.

Un merci particulier va à Mr Mohammed BOUMASSAOUD, Directeur du Risk Management à AXA Assurance Maroc et mon encadrant externe qui a su se rendre disponible à toutes les étapes clés de ce travail, malgré une actualité particulièrement chargée. Son expérience sectorielle, sa maîtrise technique et sa vivacité d'esprit m'ont aidé à surmonter plusieurs difficultés.

Je remercie également mes collègues de département du Risk Management, et en particulier Mr Yassine DAOUDI, avec qui j'ai eu le plaisir d'échanger pendant ces quelques mois, et qui m'a nourri ma réflexion tout au long de ce travail.

Enfin je remercie toutes les autres personnes qui, d'une manière ou d'une autre, m'ont permis de réaliser ce mémoire.

# Introduction

Tout d'abord, le monde de l'assurance et sa réglementation vivent aujourd'hui des évolutions considérables, où la préoccupation du risque tient une place primordiale. Ces changements visent à mieux tenir en compte des différents risques inhérents à l'activité d'assurance et à améliorer la transparence des informations fournies par les compagnies au sujet de leur situation financière. Le but est de retracer le plus fidèlement possible l'image de la société, de ses engagements en se basant sur une vision économique.

Toute compagnie d'assurance doit donc pouvoir disposer des indicateurs pour évaluer au plus juste sa richesse et la hauteur de ses engagements. Ceci constitue également un point fondamental dans le pilotage de la gestion, que ce soit au niveau de la compétitivité ou de la solvabilité, elle doit savoir si elle est capable de respecter ses engagements et si sa richesse est largement suffisante pour garantir sa pérennité dans des circonstances défavorables. En particulier, le secteur d'assurance au Maroc représente un pilier très important dans la croissance économique du pays, il contribue fortement dans l'épanouissement de l'investissement et la relance du cycle économique. Pour rendre ce secteur plus dynamique et plus efficace, des efforts en matière de réglementation sont réalisés par la DAPS pour mettre en application les normes de la nouvelle réforme Solvabilité II qui permet une meilleure absorption des risques auxquels sont confrontées les différentes compagnies d'assurance et évitera toutes augmentations des tarifs.

Pour ce faire, il faut appliquer des approches qui soient conformes aux principes de la nouvelle réglementation, fondées sur la réalité des aspects économiques et financiers, et capables de tenir en compte tous les risques qui menacent la solvabilité des entreprises d'assurance. A cet effet les assureurs marocains pensent déjà à se conformer aux méthodes de calcul exigées. Cette conformité leur permettra de connaître les fonds propres nécessaires lors d'un éventuel passage aux directives de Solvabilité II. Ce passage passe par une évaluation approfondie des engagements de l'assureur et du capital permettant de garantir ces engagements. Il paraît alors évident aux assureurs de réfléchir premièrement sur le pilier 1 de solvabilité II qui exige l'évaluation économique du passif en passant par le calcul de la provision Best Estimate pour les passifs répliquables et à l'évaluation en valeur de marché pour les passifs non répliquables (risques d'actifs), ainsi le calcul du Solvency Capital requirement (SCR). Le SCR est calibré de manière à réduire la probabilité de ruine à une fois tous les deux cent ans, Il est calculé sous une formule standard conformément à la nature des risques encourus.

C'est dans cet univers dominé par la maîtrise des risques et la conformité aux exigences réglementaires que AXA Assurance Maroc m'a reçu au sein de son équipe actuarielle afin de réfléchir sur le calcul de la provision Best Estimate et du Solvency Capital Requirement généré par le risque de souscription vie et le risque de marché.

# Chapitre 1

## Aperçu sur les éléments du contexte

### 1.1 Présentation du dispositif de solvabilité I

La solvabilité I est une réglementation qui a commencé par l'application de deux directives européennes, une de 1973 pour l'assurance non vie et l'autre de 1979 pour l'assurance vie. Cette réforme avait pour objectif de protéger ce que les assureurs développaient au mieux leurs engagements et veillait sur la constitution des provisions techniques prudentes. En effet elle était reposée sur les trois notions suivantes :

- La Marge de Solvabilité constituée par le patrimoine de l'organisme libre de tout engagement prévu.
- La Marge de Solvabilité Réglementaire qui est le montant minimum en fonds propres que chaque société d'assurance doit disposer.
- Fonds de Garantie qui est considéré comme une seconde réserve pour les ressources dont doit disposer la société.

#### La Marge de Solvabilité (MS)

La Marge de Solvabilité est composée par l'ensemble des ressources contenant les fonds propres secondaires que les entreprises d'assurance doivent provisionner pour affronter des événements imprévus qui peuvent toucher le respect de leurs engagements envers leurs assurés.

#### La Marge de Solvabilité Réglementaire (MSR)

La Marge de Solvabilité Réglementaire est le capital requis pour qu'une entreprise puisse continuer son activité, elle représente le montant en dessous duquel la marge de solvabilité ne doit pas baisser.

Son calcul dépend des branches vie ou non vie :

- **MSR pour la branche vie** : Le minimum réglementaire de la marge en vie caractérise le risque lié aux garanties décès et l'ensemble des autres risques.

Calcul par rapport aux provisions techniques vie

- a- Provisions mathématiques et provision de gestion, brutes de cessions en réassurance.
  - b- Provisions mathématiques et provision de gestion, nettes de cessions en réassurance.
  - c- Taux de rétention b/a (minimum 85%)
- A- Premier résultat :**  $(a) \times (c) \times 5\%$

Calcul par rapport aux capitaux sous risques

- d- Toutes assurances à l'exclusion des temporaires décès de durée inférieure ou égale à 5 ans.
  - e- Temporaires décès de durée supérieure à 3 ans et inférieure ou égale à 5 ans.
  - f- Temporaires décès de durée inférieure ou égale à 3 ans.
  - g- Total des capitaux sous risques non négatifs bruts de cessions en réassurance.
  - h- Capitaux sous risques après cessions en réassurance.
  - i- Taux de rétention h/g (minimum 50%)
- B- Deuxième résultat :**  $(d) \times (i) \times 0,3\% + (e) \times (i) \times 0,15\% + (f) \times (i) \times 0,1\%$ .

**Montant de la marge vie à constituer :**  $(A + B)$

## Fonds de Garantie (FG)

Le montant de Fonds de Garantie représente le tiers de la Marge de Solvabilité Réglementaire, il est défini comme suit.

$$FG = \text{Max}(FG \text{ Minimum}; 33,3\% \text{ de MSR})$$

## Les exigences réglementaires

Dans un cadre réglementaire de la solvabilité I, la Marge de Solvabilité doit être supérieure à la Marge de Solvabilité Réglementaire et par conséquent au Fond de Garantie. Si cette marge est inférieure à la Marge de Solvabilité Réglementaire, le comité de contrôle exige à la compagnie d'assurance de constituer un plan de redressement dans un délai d'un mois, de plus si la Marge de Solvabilité est inférieure au Fond de Garantie, l'entreprise doit faire un plan de refinancement à court terme (dans un délai d'un mois) qui doit être soumis à l'autorité de contrôle. Mais, si la compagnie d'assurance n'arrive pas à disposer une Marge de Solvabilité suffisante, l'autorité de contrôle peut lui retirer son agrément.

## 1.2 Les limites de solvabilité I

Le dispositif solvabilité I comprend des avantages, il est relativement simple mais peu coûteux puisque les données sont effectuées sur des données comptables. Il comporte cependant des faiblesses majeures qui sont réparties sous formes de deux volets, le premier est qualitatif, par contre le deuxième est quantitatif.

### 1.2.1 Les critiques quantitatives

- Tous les risques auxquels la compagnie est exposée n'étaient pas pris en compte, parce que la solvabilité I ne tenait pas en compte le profil des risques de l'entreprise.
- La solvabilité I se fondait sur une vision rétrospective, en supposant que le passé reflète le futur c'est-à-dire en prenant en compte le passé comme référence pour représenter le futur, ce qui contredit la réalité.
- Le dispositif solvabilité I ne pénalisait pas les entreprises qui sous-provisionnaient contrairement à celles qui sur-provisionnaient, ce qui était contradictoire.

### 1.2.2 Les critiques qualitatives

- Dans le cadre de la solvabilité I, le pilier qualitatif était négligé, ce qu'il n'y avait pas de surveillance appliquée sur le contrôle interne.
- La directive de solvabilité I ne répondait pas aux normes internationales.
- La solvabilité I s'est révélée être moins complète par rapport à d'autres systèmes internationaux ce qui a encouragé l'Union Européenne à la remettre en cause.

## 1.3 Différences entre Solvabilité I et Solvabilité II

Tout d'abord, la Solvabilité I était considérée comme une solution provisoire, avant l'adoption d'une nouvelle réglementation reflétant de manière plus réaliste les risques auxquels les compagnies d'assurance sont confrontées. D'ailleurs, Solvabilité II n'est pas une version « améliorée » de Solvabilité I, parce que la Commission Européenne est commencée de zéro pour créer ce nouveau dispositif, elle a essayé d'identifier les véritables risques portés par les assureurs, il n'y a donc rien de comparable entre les deux directives, ce qui explique le fait qu'il y ait de nombreuses différences entre eux, on peut trouver parmi les plus majeures :

- Le pilier 2, c'est-à-dire l'aspect qualitatif qui intègre les chantiers à mener sur la gestion des risques, le Contrôle Interne et l'Audit Interne est la principale différence entre la Solvabilité I et la Solvabilité II qui était négligée dans l'ancien système.
- Le calcul de la marge de solvabilité a été modifié et intègre désormais pleinement les risques. Avec Solvabilité I, tous les risques étaient traités de la même façon, et l'exigence de marge de solvabilité était simple à déterminer (par l'application des coefficients comme indiqué ci-dessus). Par contre dans la Solvabilité II, le capital de l'entreprise doit être adapté aux différents types de risques auxquels ses activités sont exposées.
- A la différence du bilan économique. Solvabilité I évalue les postes du bilan prudemment, en accord avec les principes de comptabilité générale, par contre le bilan Solvabilité II est économique. En effet, l'actif est inscrit au bilan à sa valeur de marché et les provisions techniques sont calculées selon une vision « Best Estimate », contrairement aux provisions Solvabilité I déterminées à partir d'hypothèses prudentes.

Bilan Comptable: Solvabilité 1		Bilan Economique: Solvabilité 2	
Actif	Passif	Actif	Passif
Plus Values Latentes	Excédent de FP	Actifs en Valeur de Marché	Excédent de FP
Actifs en Valeur Comptable	Besoin de marge sous Solvabilité 1		SCR
	Provisions techniques prudentes		MCR
			Réassurance
Autres Actifs	Autres Passifs	Provisions techniques en ( Best Estimate)	

FIGURE 1.1 – Passage du Bilan Comptable au Bilan Économique

A partir des deux bilans ci-dessus, on pourra retenir les principales différences entre le bilan comptable et le bilan économique :

- Au niveau de l'Actif : la prise en compte des placements en valeur de marché ( « Fair value ») et non plus en valeur historique amortie.
- Au niveau du Passif : la vision comptable qui existe dans Solvabilité I était complètement abandonnée dans la nouvelle réforme. L'application d'une nouvelle méthode de calcul des provisions au plus juste en « Best Estimate » et l'ajout d'une marge de risque destinée à couvrir le risque d'une insuffisance des provisions.

## 1.4 Les buts de Solvabilité II

Les objectifs majeurs de la directive solvabilité II sont les suivants :

- Renforcer la gestion des risques opérationnels, et la maîtrise des risques par les sociétés d'assurance en fixant une marge de solvabilité mieux adaptée aux risques réellement encourus.
- Le niveau des capitaux propres devra être proportionné au risque des passifs et actifs détenus par les assurances (exigence d'une meilleure allocation des fonds propres aux risques) : plus un actif sera risqué, plus les capitaux propres réglementaires en capital correspondant devront être élevés, afin de donner à la société d'assurance la possibilité de faire face à ses engagements en cas d'imprévu.
- Garantir aux assurés une protection uniforme. Renforcer, et consolider la qualité et la sécurité des produits auxquels les clients ont un accès.
- Enfin renforcer l'intégration du marché de l'assurance, et la compétitivité des assureurs et réassureurs au niveau international.

## 1.5 La structure des piliers de la Solvabilité II

La réglementation de la solvabilité II est organisée sur les trois piliers que nous nous proposons dans ce qui suit :

- **Pilier 1** : Exigences quantitatives en capital.
- **Pilier 2** : Surveillance prudentielle.
- **Pilier 3** : La diffusion de l'information.

### 1.5.1 Pilier 1 : Les exigences quantitatives en capital

Le premier pilier définit des règles quantitatives de calcul pour les provisions techniques et les fonds propres.

En ce qui concerne les provisions techniques, le but principal est d'harmoniser leur valorisation, par contre au niveau des fonds propres il y a deux indicateurs à calculer :

- le MCR (Minimum Capital Requirement ou Capital Minimum Requis) est le capital minimum exigé par l'autorité de régulation dans le cadre de Solvabilité II. Il représente le niveau minimum de fonds propres en-dessous duquel l'intervention de l'autorité de contrôle sera automatique, et pourra entraîner le retrait de l'agrément de l'entreprise.
- le SCR (Solvency Capital Requirement ou Capital Cible) est le capital exigé pour assurer la solvabilité d'une entreprise dans le cadre de la directive. Il représente le capital cible nécessaire pour absorber le choc provoqué par une sinistralité exceptionnelle, et donc procurer aux assurés une assurance raisonnable que l'assureur pourra honorer ses engagements. Son calcul repose sur une formule standard ou sur l'utilisation d'un modèle interne total ou partiel propre à la compagnie d'assurance.

### 1.5.2 Pilier 2 : Surveillance prudentielle

Le deuxième pilier a pour objectif de fixer des normes qualitatives de suivi des risques en interne aux sociétés et de définir comment l'autorité de contrôle doit exercer ses pouvoirs de surveillance dans ce contexte.

Les entreprises d'assurance et de réassurance doivent mettre en place un système de gouvernance efficace pour garantir une gestion prudente de leur activité. De plus, elles devront procéder à l'évaluation de leur besoin global de solvabilité dans le cadre de leur système de gestion des risques.

### 1.5.3 Pilier 3 : La diffusion de l'information

Le pilier 3 concerne la diffusion des informations de solvabilité, ce qui permettra au public (actionnaires et analystes) et aux autorités de contrôle de juger la qualité de l'information publiée. Un certain nombre d'informations ayant servi à déterminer le capital de solvabilité sera donc livré aux différents acteurs. Ainsi le profil de risque de chaque entreprise d'assurance pourra être apprécié plus en détail.

il y a deux types de rapport qui sont à fournir :

- le SFCR (Solvency and Financial Condition Report), publié annuellement dans le but d'informer les actionnaires et les analystes de marché.
- le RTS (Reporting To Supervisor) permettant de vérifier le calcul de l'exigence en capital, publié trimestriellement à l'attention des autorités de contrôle. Ces informations recouvrent entre la performance financière, et les hypothèses utilisées pour la détermination du SCR.

## **1.6 La branche VIE et Capitalisation**

Les produits étudiés dans le cadre de notre travail sont des produits d'assurance vie et capitalisation. Dans cette section, nous donnerons une présentation de la branche avec toutes les notions qui la caractérise.

### **1.6.1 Définition**

Un contrat d'assurance-vie est un contrat qui garantit, moyennant le paiement d'une prime, le versement d'une somme d'argent en cas de survenance d'un événement lié à la vie de l'assuré. On distingue essentiellement deux types de garantie :

- La garantie en cas de vie : il s'agit d'un contrat qui assure le versement d'un capital ou d'une rente à un bénéficiaire (le plus souvent l'assuré lui-même) dans le cas où l'assuré est en vie à la fin du contrat.
- La garantie en cas de décès : il s'agit d'un contrat qui assure le versement d'un capital ou d'une rente à un bénéficiaire (désigné dans le contrat) en cas de décès de l'assuré. Les contrats mixtes sont des contrats comprenant simultanément des garanties en cas de vie et des garanties en cas de décès.

### **1.6.2 Types de contrats d'assurance vie capitalisation**

En assurance-vie, les contrats sont souvent assez complexes, car ils peuvent contenir (implicitement ou explicitement) des options et des garanties financières.

Il existe essentiellement deux types de contrats d' « assurance-vie » au Maroc :

- Les contrats d'épargne par capitalisation.
- Les contrats en unités de comptes (UC).

#### **Les contrats d'épargne par capitalisation**

Dans les contrats traditionnels d'assurance-vie, l'assuré verse une prime périodique ou une somme de son choix, l'entreprise d'assurance va alimenter un compte individuel dédié à l'assuré qui va être revalorisé tous les ans au moyen d'un taux minimum garanti et augmenté de participation au bénéfice. Ce mécanisme est

désigné par le vocable « capitalisation ».

### **Les contrats en unités de comptes**

Il s'agit de contrats d'assurance vie qui au lieu d'être exprimés en dirhams sont exprimés en parts de valeurs mobilières (en général en part d'OPCVM). C'est donc la valeur de ces actifs qui détermine la valeur de l'épargne de l'assuré. Le risque d'investissement est transféré vers l'assuré : les provisions mathématiques sont adossées à des actifs, c'est à dire que le contrat est indexé sur la valeur de marché d'un ou plusieurs actif(s).

Les contrats en unités de comptes sont en phase de démarrage sur le marché marocain. Ils ont beaucoup plus vocation à être distribués par les réseaux bancaires que par les réseaux traditionnels d'agents et courtiers.

Ce type de contrats nécessite une certaine culture des marchés financiers de la part des souscripteurs pour qu'ils puissent mesurer les risques de placement qu'ils prennent.

### **1.6.3 Caractéristiques des contrats vie et capitalisation**

#### **Options et garanties implicites :**

En assurance vie, les contrats contiennent très souvent des options et des garanties dites implicites.

**Le taux minimum garanti :** Il fait partie des garanties implicites des contrats d'assurance-vie. Les contrats à taux garanti (appelés également les « contrats en dirhams ») présentent un risque financier important pour l'assureur.

Les entreprises pratiquant les opérations d'assurances sur la vie ou de capitalisation peuvent garantir, dans leurs contrats un taux minimum auquel évolue la provision chaque année. Ce taux minimum, qui est fixé annuellement pour l'année suivante, ne peut excéder 85% de la moyenne des taux de rendement des actifs de l'entreprise affectés aux opérations d'assurances sur la vie ou de capitalisation calculés pour les deux derniers exercices.

**La participation au bénéfice :** De plus, les souscripteurs ont droit aux plus-values financières générées par l'actif de l'assureur, c'est ce qu'on appelle la participation aux bénéfices (PB). Bien souvent, les assureurs distribuent ces bénéfices en suivant un schéma de lissage, à savoir une partie du bénéfice est placée dans la réserve pour être distribuée lors des périodes suivantes.

**L'option de rachat et de suspension :** L'assureur accorde généralement à l'assuré un droit de rachat ou de suspension du contrat. Dans le premier cas, il s'agit du droit de l'assuré de résilier son contrat totalement ou partiellement et de disposer de l'épargne constituée. Le second droit permet à l'assuré de cesser le

paiement des primes périodiques à tout moment, pendant la durée du contrat. Ces droits conférés à l'assuré incitent à la souscription de tels produits car son investissement reste liquide et son engagement allégé. Bien que l'exercice de ces droits soit en général accompagné de paiement de pénalités, qui sont censés de couvrir les frais encourus par la compagnie, le risque que court la compagnie peut être très élevé.

Toutes ces garanties et droits accordés aux souscripteurs présentent un risque important pour l'assureur, cependant, leur valeur n'est pas prise en compte dans le calcul des provisions mathématiques du contrat selon la réglementation en vigueur. Selon les nouvelles règles de Solvabilité II, l'évaluation des engagements de l'assureur devra se faire au prix du marché et donc devra refléter tous les coûts potentiels liés aux contrats. Il s'agit de prendre en compte les garanties financières et les différentes options qui permettent aux souscripteurs de modifier les conditions de leurs contrats.

Nous avons présenté les dernières évolutions du contexte général, maintenant nous allons nous intéresser plus particulièrement aux aspects quantitatifs et techniques de la réforme de Solvabilité II, à savoir les modalités de valorisation des différents éléments du bilan, et la détermination du SCR.

# Chapitre 2

## Approche modèle standard

### 2.1 Les spécificités du bilan prudentiel

Nous allons présenter dans ce chapitre les deux éléments les plus importants qui composent le bilan prudentiel selon solvabilité II à savoir les provisions techniques (Best Estimate + Marge de risque) et les exigences quantitatives (SCR). Pour cela nous nous sommes basés sur les dernières spécifications techniques qui sont sorties à l'occasion du lancement du QIS 5. Mais avant tout développement, nous allons mettre en lumière les spécificités du nouveau bilan prudentiel.

Solvabilité II repose sur une vision économique. A chaque date  $t$ , on peut définir le bilan économique de la compagnie d'assurance de la façon suivante :

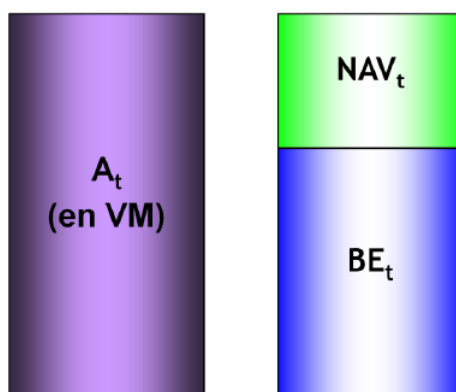


FIGURE 2.1 – Bilan Économique

Avec les notations suivantes :

- $A_t$  : l'actif de l'assureur en valeur de marché.
- $BE_t$  : le Best Estimate soit la valeur économique des passifs.
- $NAV_t$  (Net Asset Value) : les fonds propres économiques qui sont définis en utilisant l'équation d'équilibre du bilan :

$$NAV_t = A_t - BE_t$$

La valeur de chacun de ces postes du bilan correspond à l'espérance sous la probabilité risque neutre des flux futurs correspondants actualisés.

Ainsi, tout comme le Best Estimate correspond à la valeur actuelle probable des flux générés par les passifs, les fonds propres sont définis comme la valeur actuelle probable des résultats futurs :

$$NAV_0 = E^{Q \otimes P} [\sum_{u \geq 1} \delta_u \times R_u]$$

avec :

- Q : la probabilité risque neutre (probabilité d'un monde dans lequel tous les actifs ont pour rendement moyen le taux sans risque).
- P : probabilité réelle qui s'applique à la durée de vie des assurés
- $\delta_u$  : le facteur d'actualisation qui s'exprime en fonction du taux sans risque instantané r :

$$\delta_u = e^{-\int_0^u r_h dh}$$

- $R_u$  : le résultat dégagé par la compagnie et qui intervient à l'instant u.

### 2.1.1 Méthode Best Estimate

Le Best Estimate (noté BE) est défini dans la directive comme la moyenne pondérée par leur probabilité des flux de trésorerie futurs, compte tenu de la valeur temporelle de l'argent (valeur actuelle attendue des flux de trésorerie futurs), estimée sur la base de la courbe des taux sans risque pertinents.

Sous forme mathématique, cela peut s'écrire :

$$BE = E^{Q \otimes P} [\sum_{u \geq 1} \delta_u \times L_u]$$

- Q : la probabilité risque neutre (probabilité d'un monde dans lequel tous les actifs ont pour rendement moyen le taux sans risque).
- P : probabilité réelle qui s'applique à la durée de vie des assurés.
- $\delta_u$  : le facteur d'actualisation qui s'exprime en fonction du taux sans risque instantané r :

$$\delta_u = e^{-\int_0^u r_h dh}$$

- $L_u$  : les flux de passif (prestations, primes contractuelles, décès, rachat, frais...) intervenant à l'instant u.

Le calcul du Best Estimate est globalement la projection des flux et leurs actualisations sur la courbe des taux sans risque.

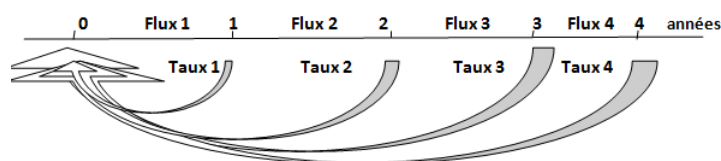


FIGURE 2.2 – Illustration du calcul Best Estimate

Ce qui est en pratique s'effectue par simulation est :

$$BE = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \sum_{t=1}^T \frac{Flux_{t,n}}{(1+r_n)^t}$$

Avec :

- $Flux_t$  : Flux probables de l'année t.
- $r_t$  : taux sans risque de maturité t.
- T : l'horizon de simulation.
- N : nombre de scénarios.

### 2.1.2 La Marge de risque

Dans Solvabilité II les provisions techniques sont évaluées à la valeur de transfert du portefeuille d'assurance, c'est-à-dire au montant qu'un assureur s'attend à recevoir en contrepartie de la reprise du portefeuille d'assurance.

Dans le cas où les risques sont couvrables (hedgeables), les provisions techniques correspondent au prix de la couverture financière permettant de construire une stratégie d'investissement dans des instruments financiers observables et liquides qui répliquent parfaitement les flux d'assurance.

Dans le cas contraire, lorsque les risques ne sont pas couvrables, la provision technique est la somme du best estimate et de la marge de risque.

La marge de risque correspond au montant que l'on doit ajouter au Best Estimate pour qu'un autre assureur accepte de reprendre le passif. Il s'agit du montant qui sert à dédommager le repreneur d'avoir à immobiliser du capital pour supporter les engagements d'assurance qu'il va récupérer, et ce, jusqu'à leur extinction. Les capitaux à immobiliser tout au long de la durée de vie restante du passif correspondent aux SCRs futurs générés par les engagements d'assurance si bien que la marge de risque (RM pour Risk Margin en anglais) peut être définie par la formule suivante :

$$RM = E^{Q \otimes P} [COC \times \sum_{u \geq 0} \delta_{u+1} \times SCR_u] = COC \cdot \sum_{t \geq 0} \frac{SCR(t)}{(1+r_{t+1})^{t+1}}$$

Avec :  $SCR(t)$  : SCR de l'année t de l'entreprise de référence.

Le coût du capital COC étant fixé à 6%.

$r_t$  : le taux sans risque.

Dans les spécifications techniques du QIS5 une formule simplifiée du calcul de la marge de risque est aussi proposée.

$$RM = \frac{COC}{1 + r_1} Dur_{mod}(0) \times SCR(0)$$

Avec :

$Dur_{mod}(0)$  : duration modifiée en  $t = 0$ .

$r_1$  : taux sans risque de maturité 1.

$$Dur(0) = \frac{\sum_{t \geq 1} t \times BEL_t}{\sum_{t \geq 1} BEL_t}$$

D'une façon générale :

$$Dur(i) = \frac{\sum_{t \geq i+1} t \times BEL_t}{\sum_{t \geq 1} BEL_t}$$

où :  $i \in \{0, 1, \dots, 41\}$

$$Dur_{mod}(0) = \frac{Dur(0)}{1 + r_a}$$

$r_a$  : taux actuariel.

En moyenne, le Best Estimate doit ainsi permettre de payer les prestations et les frais, tandis que la marge de risque pourra être consommée de manière à garantir un rendement de 6%, en plus du taux sans risque à ceux qui financent l'activité en apportant les fonds propres nécessaires à la couverture du SCR année après année.

## 2.2 FORMULE STANDARD : Le calcul du Capital de Solvabilité Requis (SCR)

La réforme Solvabilité II doit permettre de mieux garantir la solvabilité des assureurs grâce à une mesure plus précise des risques.

Le SCR est le seul indicateur à prendre en compte les risques réels auxquels sont exposées les sociétés d'assurance et peut être calculé soit à partir de la formule standard, soit à partir d'un modèle interne (global ou partiel).

La formule standard est la méthode par défaut utilisée pour le calcul du SCR ; il est donc indispensable de comprendre son fonctionnement. C'est d'ailleurs la seule méthode qui est imposée par Solvabilité II : même si une société d'assurance choisit un modèle interne pour l'évaluation de son SCR, elle devra quand même comparer ce résultat avec celui obtenu par application de la formule standard.

Le SCR se calcule comme étant une somme de tous les risques pris par les sociétés d'assurance.

La formule standard du SCR repose sur la relation :

$$SCR = BSCR - Adj + SCR_{OP}$$

Avec :

BSCR : Capital de solvabilité requis de base.

$SCR_{OP}$  : Chargement en capital au titre de risque opérationnel.

Adj : Ajustements pour tenir compte des pertes futures qui seront compensées par la réduction des impôts différés à payer et par la réduction de la participation aux bénéfices futurs à distribuer aux assurés. Cependant dans notre étude, nous n'avons pas inclus les ajustements.

Hors risque opérationnel, tous les risques sont pris en compte dans le calcul du BSCR selon une approche modulaire (modules et sous-modules).

**Le BSCR est constitué des 6 modules de risques suivants** (représentant les grandes familles de risques auxquelles les sociétés d'assurance sont confrontées) :

- **Le risque de souscription Vie**( $SCR_{life}$ ) : Il regroupe l'ensemble des risques lié à une tarification insuffisamment prudente lors de la souscription ou le rachat du contrat (comprenant le risque de mortalité, de longévité, de rachat, etc.).
- **Le risque de souscription Non vie**( $SCR_{nl}$ ) : Il représente le risque d'assurance spécifique résultant des contrats d'assurance. Il fait référence à l'incertitude concernant les résultats de la souscription de l'assureur (montants et délais de règlements des sinistres, taux de primes nécessaires pour couvrir les passifs, etc.).
- **Le risque de souscription Santé**( $SCR_{health}$ ) : Il couvre le risque de souscription pour toutes les garanties santé et accidents du travail.
- **Le risque de marché**( $SCR_{mkt}$ ) : Il résulte du niveau ou de la volatilité des cours de marché des instruments financiers qui ont un impact sur la valeur des actifs et des passifs de l'entreprise concernée. L'exposition au risque de marché est mesurée par l'impact des mouvements dans le niveau des variables financières tel que le cours des actions, les taux d'intérêt, les cours de l'immobilier et les taux de change.
- **Le risque de défaut ou de contrepartie**( $SCR_{def}$ ) : Il représente le risque qu'un débiteur ou une contrepartie de la société d'assurance ou de réassurance n'honore pas ses engagements dans les conditions initialement prévues.
- **Le risque d'actifs intangibles**( $SCR_{intang}$ ) : Il concerne les actifs incorporels qui représentent les actifs immatériels de l'entreprise : goodwill, brevet, licence, marque, etc. C'est le dernier module de risque qui a été introduit par le QIS 5.

Ces 6 modules de risques sont eux-mêmes constitués de sous-modules de risques. Le SCR global a donc une structure complexe qui a cette forme modulaire :

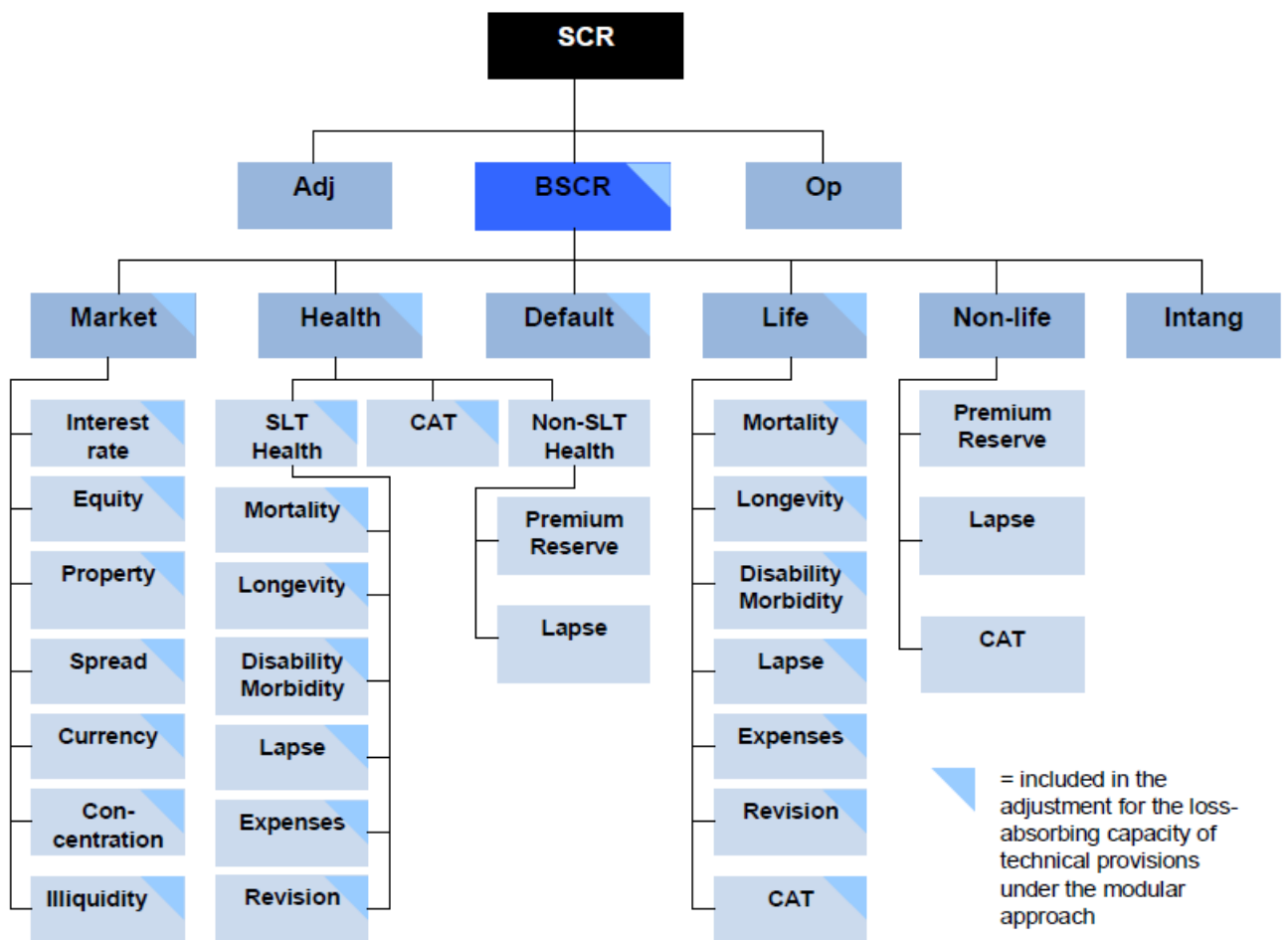


FIGURE 2.3 – Architecture de la Formule Standard

## 2.2.1 Le calcul du BSCR

Le BSCR se calcule de la façon suivante afin d'agrèger l'ensemble de ces risques :

$$BSCR = \sqrt{\sum_{i,j} Corr_{ij} \times SCR_i \times SCR_j} + SCR_{intang}$$

Avec :

$SCR_i$  = SCR du module de risque i (sauf le SCR du risque intangible).

$Corr(i,j)$  = Coefficient de la matrice de corrélation entre les modules de risques i et j.

L'agrégation des SCR des modules s'effectue à l'aide d'une matrice de corrélation :

<b>Corr(i,j)</b>	<b>SCR<sub>life</sub></b>	<b>SCR<sub>nl</sub></b>	<b>SCR<sub>health</sub></b>	<b>SCR<sub>mkt</sub></b>	<b>SCR<sub>def</sub></b>
<b>SCR<sub>life</sub></b>	1				
<b>SCR<sub>nl</sub></b>	0	1			
<b>SCR<sub>health</sub></b>	0,25	0,25	1		
<b>SCR<sub>mkt</sub></b>	0,25	0,25	0,25	1	
<b>SCR<sub>def</sub></b>	0,25	0,5	0,25	0,25	1

FIGURE 2.4 – Matrice de corrélation entre les modules des risques

Un coefficient de corrélation entre les modules de risques peut être :

- nul si les risques sont indépendants (risque vie et non vie).
- positif si les risques sont corrélés positivement (risque actions et immobilier).
- négatif si les risques sont corrélés négativement (risque de mortalité et longévité).

Nous allons par la suite modéliser seulement deux modules de risques, risque de souscription vie, et risque de marché, les autres risques ne figurent pas dans ce travail.

## 2.3 Cartographie des risques assurentiels : Assurance VIE

L'objectif de cette section est de présenter une cartographie détaillée des risques encourus par une compagnie d'assurance vie. La première partie présente une initiation, dans un cadre simplifié à la notion d'un risque encouru par une compagnie d'assurance. La deuxième et la troisième partie segmentent ces risques selon qu'ils soient des risques liés à l'actif ou au passif de la compagnie.

### 2.3.1 Cadre simplifié des risques assurantiels

Afin d'appréhender les risques assurantiels, revenons à la définition même d'assurance. Analyser de manière simplifiée, l'assurance est une mutualisation de risques. Le montant de prime que le souscripteur cotise pour se prémunir d'un risque donné se modélise par une formule relativement basique :

Prime=Probabilité de survenance  $\times$  Coût moyen d'un sinistre + Frais de gestion

A partir de cette simple formule, nous constatons trois principaux phénomènes pouvant influencer le calcul de la prime :

a. La probabilité de survenance : cette probabilité est liée elle-même à de multiples facteurs tels que :

- La nature et les caractéristiques de la garantie.
- Les limites et les franchises afférentes à ces garanties.
- Les fréquences liées à la survenance des sinistres assurés.
- les évolutions jurisprudentielles et/ ou réglementaires...

b. Le coût moyen d'un sinistre :

Quant à cet élément, le mécanisme est assez logique. Plus le sinistre a un coût élevé, plus le montant de la prime augmente.

c. Frais de gestion :

Ces frais sont influencés par des éléments relatifs d'un côté à la procédure de gestion (selon qu'elle soit plus ou moins automatisée), et d'un autre, à la complexité des dossiers relatifs à la garantie et des traitements qui y sont afférents.

Ceci n'est qu'un cadre simplifié du processus relatif à l'activité de l'assureur. Après réception des primes, ce dernier est tenu d'investir. Les assureurs présentent généralement une importance majeure en tant qu'investisseurs institutionnels dans l'économie et plus particulièrement dans les marchés boursiers. L'activité sur le marché financier implique d'autres risques à prendre en compte et à gérer par la compagnie. Ces risques seront développés par la suite.

### 2.3.2 Cartographie des risques : Risques relatifs au Passif

Les risques relatifs au passif résultent d'une tarification non prudente à la souscription ou au rachat du contrat. Ces risques sont englobés dans le risque de souscription qui provient des engagements d'assurance vie.

Le risque de souscription vie résulte d'une tarification insuffisante lors de la souscription. Il est composé des sous modules suivants : mortalité, longévité incapacité/invalidité, rachat, dépenses, révision, catastrophe.

Pour ce travail, seuls les risques de mortalité, rachat, et frais de gestion qui seront traités, cela revient aux conditions particulières du produit étudié qui comprend seulement ces risques cités.

Pour obtenir le capital de Solvabilité requis au titre du risque de souscription vie, il faut agréger les capitaux requis de ses sous-modules de la manière suivante :

$$SCR_{life} = \sqrt{\Sigma_{r \times c} CorrLife_{r,c} \times Life_r \times Life_c}$$

La matrice de corrélation entre les sous modules est la suivante :

Corr(i,j)	Life <sub>mort</sub>	Life <sub>long</sub>	Life <sub>dis</sub>	Life <sub>lapse</sub>	Life <sub>exp</sub>	Life <sub>rev</sub>	Life <sub>CAT</sub>
Life <sub>mort</sub>	1						
Life <sub>long</sub>	-0,25	1					
Life <sub>dis</sub>	0,5	0	1				
Life <sub>lapse</sub>	0	0,25	0	1			
Life <sub>exp</sub>	0,25	0,25	0,5	0,5	1		
Life <sub>rev</sub>	0	0,25	0	0	0,25	1	
Life <sub>CAT</sub>	0	0	0	0	0	0	1

FIGURE 2.5 – Matrice de corrélation entre les sous modules du risque VIE

Avec :

- .  $Life_{rev}$  : Capital requis au titre du risque de révision.
- .  $Life_{mort}$  : Capital requis au titre du risque de mortalité.
- .  $Life_{long}$  : Capital requis au titre du risque de longévité.
- .  $Life_{dis}$  : Capital requis au titre du risque d'invalidité/incapacité.
- .  $Life_{exp}$  : Capital requis au titre du risque de dépenses.
- .  $Life_{CAT}$  : Capital requis au titre du risque de catastrophe.
- .  $CorrLife_{r,c}$  : Coefficient de corrélation entre les modules r et c.

### Le risque de Mortalité

Il correspond au risque que les assurés meurent plus vite que ne le prévoyaient les hypothèses du Best Estimate. Il s'applique à tous les engagements pour lesquels les prestations à payer en cas de décès excèdent les provisions techniques, et pour lesquels une hausse de la mortalité conduira donc à une augmentation des provisions techniques.

Le capital réglementaire pour le risque de mortalité est défini comme la variation de la NAV (Net Asset Value) après la hausse des taux de mortalité.

$$Life_{mort} = \text{Max}(\Delta NAV_{choc\ mort}; 0)$$

**Scénario choqué pour le calcul du SCR : hausse (permanente) de 15% des taux de mortalité à tout âge.**

### Le risque de Rachat

C'est le risque de perte ou d'augmentation des passifs dû à un écart entre le taux réel d'exercice des options contractuelles de l'assuré et celui estimé dans le Best Estimate. Le terme d'options doit être vu au sens large : le sous-module couvre les options de rachat, de résiliation, de réduction mais aussi d'extension des garanties. Pour certains contrats, l'exercice d'options peut être bénéficiaire à l'organisme, pour d'autres il conduira à des pertes. Ce sous-module comprend donc deux scénarios : un pour lequel les options seront plus exercées que prévu

et un pour lequel elles le seront moins.

Le QIS5 spécifie que la charge en capital relative au risque de rachat est obtenue en calculant la variation de la NAV après l'application des chocs à la hausse et à la baisse sur les taux de rachats. Le capital généré par le risque rachat est déterminé de la manière suivante :

$$Life_{lapse} = Max(Lapse_{down}; Lapse_{up}; Lapse_{mass}; 0)$$

Avec :

- .  $Life_{lapse}$  : Capital requis pour le risque de rachat.
- .  $Lapse_{down}$  : Capital requis en cas de diminution permanente des taux de rachat.
- .  $Lapse_{up}$  : Capital requis en cas d'augmentation permanente des taux de rachat.
- .  $Lapse_{mass}$  : Capital requis en cas de rachats massifs.

Les besoins en capital de chaque scénario de rachats sont calculés de la manière suivante :

$$Lapse_{down} = \Delta NAV_{choc\ lapse_{down}}$$

$$Lapse_{up} = \Delta NAV_{choc\ lapse_{up}}$$

$$Lapse_{mass} = \Delta NAV_{choc\ lapse_{mass}}$$

Soit T le taux de rachat avant les chocs. Le calibrage du risque rachat selon le QIS5 est présenté comme suit :

QIS5		
Chocs	UP	Max(50%T; T-20%)
appliqués	DOWN	Min(150%T; 100%)
Rachats	massifs	30%

FIGURE 2.6 – Chocs de rachats

### Le risque des frais de gestion

Le risque de dépenses est dû à une augmentation des frais de gestion des contrats d'assurance. Le capital requis pour le risque de dépenses correspond à la variation de la NAV suite à une augmentation de 10% des dépenses futures par rapport aux anticipations du Best Estimate et à une augmentation de 1% par an du taux d'inflation des dépenses par rapport aux anticipations.

$$Life_{exp} = Max(\Delta NAV_{choc\ exp}; 0)$$

### 2.3.3 Cartographie des risques : Risques relatifs à l'Actif

Ces risques sont de types financiers. C'est globalement le risque de perte qui peut résulter des fluctuations des prix des instruments financiers qui composent

un portefeuille.

L'exposition au risque de marché est mesurée par l'impact de mouvements de variables financières telles que les cours des actions, les taux d'intérêt, les prix de l'immobilier et les taux de change.

Pour obtenir le capital de Solvabilité requis au titre du risque de marché, il faut agréger les capitaux requis de ses sous-modules par la manière suivante :

$$SCR_{Mkt} = Max(SCR_{Mkt}^{UP}; SCR_{Mkt}^{DOWN})$$

où :

$$SCR_{Mkt}^{UP} = \sqrt{\sum_{r \times c} CorrMkt_{r,c}^{UP} \times Mkt_r^{UP} \times Mkt_c^{UP}}$$

Avec :

- .  $CorrMkt_{r,c}^{UP}$  : Coefficient de corrélation entre les sous modules r et c pour le choc à la hausse.
- .  $Mkt_r^{UP}$  : Chargement en capital du sous module r pour le choc à la hausse.
- .  $Mkt_c^{UP}$  : Chargement en capital du sous module c pour le choc à la hausse.

Et :

$$SCR_{Mkt}^{DOWN} = \sqrt{\sum_{r \times c} CorrMkt_{r,c}^{DOWN} \times Mkt_r^{DOWN} \times Mkt_c^{DOWN}}$$

- .  $CorrMkt_{r,c}^{DOWN}$  : Coefficient de corrélation entre les sous modules r et c pour le choc à la baisse.
- .  $Mkt_r^{DOWN}$  : Chargement en capital du sous module r pour le choc à la baisse.
- .  $Mkt_c^{DOWN}$  : Chargement en capital du sous module c pour le choc à la baisse.

Les QIS5 défini ainsi deux matrices de corrélation au regard du choc appliqué.

CorrMkt <sup>UP</sup>	Mkt <sup>UP</sup> <sub>interest</sub>	Mkt <sup>UP</sup> <sub>equity</sub>	Mkt <sup>UP</sup> <sub>property</sub>	Mkt <sup>UP</sup> <sub>spread</sub>	Mkt <sup>UP</sup> <sub>currency</sub>	Mkt <sup>UP</sup> <sub>concentration</sub>	Mkt <sup>UP</sup> <sub>illiquidity</sub>
Mkt <sup>UP</sup> <sub>interest</sub>	1						
Mkt <sup>UP</sup> <sub>equity</sub>	0	1					
Mkt <sup>UP</sup> <sub>property</sub>	0	0,75	1				
Mkt <sup>UP</sup> <sub>spread</sub>	0	0,75	0,5	1			
Mkt <sup>UP</sup> <sub>currency</sub>	0,25	0,25	0,25	0,25	1		
Mkt <sup>UP</sup> <sub>concentration</sub>	0	0	0	0	0	1	
Mkt <sup>UP</sup> <sub>illiquidity</sub>	0	0	0	-0,5	0	0	1

FIGURE 2.7 – La matrice de corrélation entre les modules de risques en cas de choc à la hausse

CorrMkt <sup>Down</sup>	Mkt <sup>DOWN</sup> <sub>interest</sub>	Mkt <sup>DOWN</sup> <sub>equity</sub>	Mkt <sup>DOWN</sup> <sub>property</sub>	Mkt <sup>DOWN</sup> <sub>spread</sub>	Mkt <sup>DOWN</sup> <sub>currency</sub>	Mkt <sup>DOWN</sup> <sub>concentration</sub>	Mkt <sup>DOWN</sup> <sub>liquidity</sub>
Mkt <sup>DOWN</sup> <sub>interest</sub>	1						
Mkt <sup>DOWN</sup> <sub>equity</sub>	0,5	1					
Mkt <sup>DOWN</sup> <sub>property</sub>	0,5	0,75	1				
Mkt <sup>DOWN</sup> <sub>spread</sub>	0,5	0,75	0,5	1			
Mkt <sup>DOWN</sup> <sub>currency</sub>	0,25	0,25	0,25	0,25	1		
Mkt <sup>DOWN</sup> <sub>concentration</sub>	0	0	0	0	0	1	
Mkt <sup>DOWN</sup> <sub>illiquidity</sub>	0	0	0	-0,5	0	0	1

FIGURE 2.8 – La matrice de corrélation entre les modules de risques en cas de choc à la baisse

### Le risque de taux d'intérêt

Le portefeuille des compagnies d'assurance étant essentiellement constitué d'obligations, le risque de taux induit par une variation des taux d'intérêt, doit être pris en compte.

En effet, une brusque augmentation des taux d'intérêt entraîne une baisse de la valeur du portefeuille obligataire et peut inciter les assurés à racheter leur contrat, les taux d'intérêt servis par l'assureur étant moins compétitifs. Ce scénario, oblige l'assureur à vendre une partie de son portefeuille, et enregistre des moins-values latentes.

Inversement en cas de forte baisse des taux, il est difficile pour l'assureur de satisfaire ses engagements c'est-à-dire de servir un taux d'intérêt supérieur au marché. Notons par ailleurs que cela impacte directement les calculs de provisionnement, correspondant aux flux futurs actualisés au taux du marché.

Quel que soit le sens dans lequel varie le taux d'intérêt, l'assureur peut être rapidement amené à puiser dans ses fonds propres pour tenir ses engagements auprès de ses clients.

Le capital requis du risque de taux d'intérêt correspond à la variation de la NAV après application de deux scénarios de choc sur les taux, un scénario à la hausse et à la baisse.

$$Mkt_{int}^{UP} = NAV_{UP}$$

$$Mkt_{int}^{DOWN} = NAV_{DOWN}$$

Les structures par terme modifiées sont dérivées en multipliant la courbe des taux d'intérêt actuelle par  $(1 + S^{UP})$  et  $(1 + S^{DOWN})$ , où  $S^{UP}(t)$  est le choc haussier et  $S^{DOWN}(t)$  est le choc baissier pour les différentes échéances t sont les suivantes :

Échéance t (années)	QIS5	
	S <sup>UP</sup>	S <sup>DOWN</sup>
1	70%	-75%
2	70%	-65%
3	64%	-56%
4	59%	-50%
5	55%	-46%
6	52%	-42%
7	49%	-39%
8	47%	-36%
9	44%	-33%
10	42%	-31%
11	39%	-30%
12	37%	-29%
13	35%	-28%
14	34%	-28%
15	33%	-27%
16	31%	-28%
17	30%	-28%
18	29%	-28%
19	27%	-29%
20	26%	-29%
21	26%	-29%
22	26%	-30%
23	26%	-30%
24	26%	-30%
25	26%	-30%
30	25%	-30%

FIGURE 2.9 – Choc pour le risque des taux

Le graphe ci-dessous représente la courbe des taux initiaux, des taux en cas de choc haussier et des taux en cas de choc baissier par maturité :

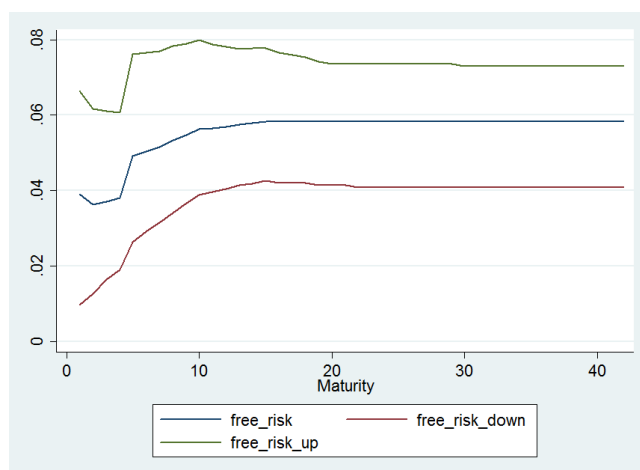


FIGURE 2.10 – La courbe des taux

## Le risque action

Les actions ont une part relativement importante dans le portefeuille des assureurs. En effet ces derniers ont recours dans une certaine limite aux actions afin d'améliorer leur performance financière.

La détermination du chargement en capital au titre du risque sur actions selon le « QIS5 » fait appel à un indice « Global », qui regroupe les actions cotées dans les pays de l'Espace Economique Européen (EEE) et de l'Organisation de Coopération et de Développement Economique (OCDE), et à un indice « Autres » qui comprend les actions exclusivement cotées sur les marchés émergents, les actions non cotées, les fonds spéculatifs et les autres investissements alternatifs.

Pour calculer le SCR action, il faut faire une distinction entre les deux catégories d'actions, les actions « globales » et les actions « autres ». Pour chaque type d'action le capital requis est obtenu suite à la variation de la NAV après l'application d'un choc spécifique.

$$Mkt_{equity} = Max(\Delta NAV_{choc\ action}; 0)$$

**Actions globales :** Application d'un choc de 30%.

**Actions autres :** Le choc proposé pour les actions « autres » est 40%.

### 2.3.4 Stratégie pour mesurer les risques encourus

Le SCR est calculé comme la variation des fonds propres économiques ou de l'actif net réévalué engendré par ces scénarios. Solvabilité II mesure ainsi les risques par leur impact sur le bilan de la société d'assurance en full fair value, c'est-à-dire par leur impact sur leurs actifs et leurs passifs économiques.

Nous présentons ci-dessous le schéma qui décrit le passage du scénario central au scénario choqué.

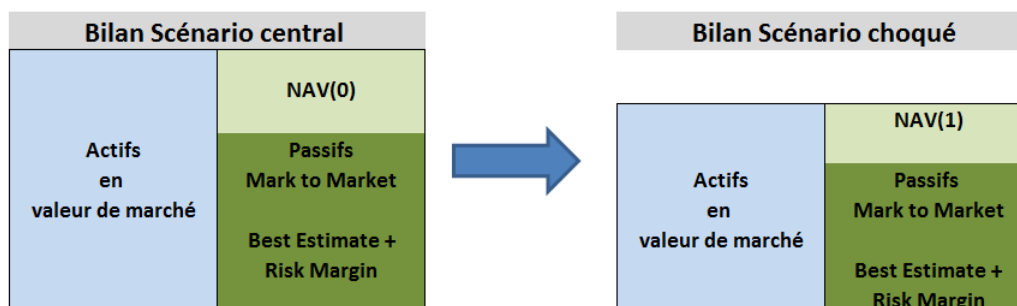


FIGURE 2.11 – Le passage du scénario central au scénario choqué

**Pour mesurer un risque, plusieurs étapes sont nécessaires :**

1. Établir un bilan full fair value à la date 0.
2. Appliquer le choc affecté par la directive au risque déterminé.
3. Simuler le bilan full fair value à la date 1 ( en prenant en compte les impacts sur les obligations, les provisions techniques actualisées, etc.) .
4. Calculer la diminution de fonds propres engendrée par le scénario, qui donne le montant du SCR telle que :  $SCR = \text{Max}(\Delta NAV; 0)$ .

Où NAV : Net Asset Value (Actif Net Réévalué) : Fonds propres économiques.

Avec :  $\Delta NAV = NAV(0) - NAV(1)$

A ce stade il y a deux cas qui peuvent se produire :

- Si  $\Delta NAV \geq 0$ , alors  $SCR = \Delta NAV \implies$  Le scénario entraîne une baisse de la NAV (fonds propres économiques).
- Si  $\Delta NAV < 0$ , alors  $SCR = 0 \implies$  Le scénario entraîne une hausse de la NAV (fonds propres économiques).

$\implies$  Si le scénario mis en place entraîne un gain au niveau de la NAV, alors le SCR ou le capital requis correspondant est nul ( il ne doit jamais être négatif).

# Chapitre 3

## Générateur de scénarios économiques

### 3.1 Modélisation du Passif

Le passif représente les engagements de l'assureur envers les assurés. A travers l'inversion du cycle de production en assurance, il constitue la partie la plus délicate du bilan. Il doit être évalué à juste valeur afin de ne pas compromettre la solvabilité de l'entreprise. Par conséquent il est important de segmenter la modélisation du passif selon le type de produit. Pour le produit d'épargne qui nous a été confié, un regroupement par génération de contrat permet de mieux évaluer les flux du passif du fait que les assurés de la même génération ont en général un comportement similaire.

Conformément aux spécifications technique du QIS5, la projection se fait jusqu'à l'extinction totale du portefeuille. Elle calcule pour chaque contrat, l'ensemble des flux générés par an et estime ainsi la réserve disponible en fin d'année. Elle utilise différents paramètres et nécessite donc la formulation d'hypothèses sur les valeurs prises par ces paramètres.

#### 3.1.1 Hypothèses et paramètres du modèle

La projection du passif passe par la détermination des flux de produits et de charges, et donc des paramètres nécessaires à leur estimations. Certains de ces paramètres sont déterministes, d'autres sont variables et nécessitent la formulation d'hypothèses pour leur estimation.

Les hypothèses du modèle sont les suivantes :

- Le TMG : utilisé pour la revalorisation de l'épargne en fin d'année. Il est fixe pour chaque contrat (taux garanti conformément à la réglementation marocaine est de 3%).
- La participation aux bénéfices : le taux de participation aux bénéfices est fixé à 70% des placements des fonds collectés.

- Seules les primes futures qui correspondent à l'engagement de l'assuré dans le cadre du contrat sont prises en compte dans les projections.
- Les projections sont faites sous l'hypothèse qu'il n'y a pas de réassurance.
- Le taux de rachat structurel des différentes générations est supposé être une fonction de l'ancienneté, et que l'âge limite à la sortie est de 60 ans (c-à-d les assurés âgés au plus de 60 ans ont un taux de rachat 100%), de plus nous avons supposé qu'à partir de la sixième année les pénalités sur rachats ne seront plus appliquées, et en fin les assurés qui rachètent leur contrats après la huitième année seront exonérés des impôts.
- Les primes sont versées par les assurés au début de chaque année, et elles sont calculées sur la base d'un taux de tarification qui se varie en fonction de l'âge de l'assuré.
- L'actualisation des flux futurs se fait par la courbe des taux sans risque.
- Les frais sont supposés versés à la fin de l'année. Ceux-ci sont estimés à partir d'un taux de frais de gestion qui s'applique à la provision mathématique de clôture de l'année N-1.
- Les sinistres tels que les décès et les rachats, qui donnent lieu à un versement de prestations ont lieu en milieu d'année.
- D'après l'hypothèse recommandée par le QIS5 le portefeuille est fermé, et que la durée de projection est de 42 ans jusqu'à l'extinction du passif.
- La mortalité des assurés est supposée déterministe : le taux de mortalité est celui de la table « TD88-90 » diminué de 50% pour les hommes ainsi que pour les femmes. Cette hypothèse de taux de décès déterministe revient à supposer une mutualisation parfaite au niveau des décès et que la mortalité des assurés suit effectivement cette table.
- Les contrats sont regroupés en groupes homogènes.

### 3.1.2 Le déroulement général du modèle

Le modèle considéré est implémenté sous VBA (Visual Basic for Applications), projette un compte de résultat et permet d'évaluer le besoin en capital pour le portefeuille et les risques considérés. Il comprend deux composantes :

- Le module paramètres et hypothèses : qui comporte tous les paramètres et les hypothèses nécessaires à la projection.
- L'outil de projection : qui projette le passif.

#### 1. Nombre de contrats :

Le nombre de contrats représente les adhérents pour lesquels l'assureur a encore des engagements.

$$Nbre.contrats(n) = Nbre.contrats(n-1) - Nbre.deces(n-1) - Nbre.rachats(n-1)$$

#### 2. Nombre de décès :

Le nombre de décès est l'effectif des assurés qui décèdent au cours de l'année.

$$Nbre.deces(n) = Taux.deces(n) \times Nbre.contrats(n)$$

### 3. Nombre de rachats :

Le nombre de rachats représente le nombre des adhérents qui rachètent leur contrats d'assurance au cours de l'année.

$$Nbre.rachats(n) = (Nbre.contrats(n) - Nbre.deces(n)) \times Taux.rachats(n)$$

### 4. PM ouverture :

Les  $PM_{ouverture}$  sont les provisions mathématiques au début de l'année que l'assureur provisionne pour confronter les événements imprévus au cours de l'année.

$$PM_{ouverture}(n) = PM_{cloture}(n - 1)$$

### 5. PM clôture :

Elles représentent la provision constituée après la collecte des primes et le paiement des prestations.

$$PM_{cloture}(n) = cotis.eparg(n) \times (1 + TMG)^{1/2} - Montant.deces.eparg(n) - Montant.rachats(n) - FGP(n) - Penalites.rachats(n) + PM_{ouverture}(n) \times (1 + TMG)$$

### 6. Prestation épargne :

C'est une prestation disposée pour servir les contrats de rachats.

$$Prestation.eparg(n) = Montant.deces.eparg(n) + Montant.rachats(n)$$

### 7. Prestation décès :

La prestation provisionnée due à l'événement du décès.

$$Prestation.deces(n) = Capital.assure \times Nbre.deces(n)$$

Avec :

Capital assuré : c'est le montant que l'assuré s'engage à rembourser en cas de sinistre.

### 8. Montant des rachats :

Le montant des rachats est la somme payée par l'assureur suite à une interruption du contrat par l'assuré.

$$Montant.rachats(n) = Taux.rachats(n) \times prov.reval(n)$$

Avec :

$$Prov.reval(n) = (cotis.eparg(n) + PM_{ouverture}(n)) \times (1 + TMG)^{1/2}$$

### 9. Montant des décès épargne :

Le montant des décès épargne est la somme payée par l'assureur suite aux décès des assurés. Pour les contrats d'épargne cette somme correspond à l'épargne constituée.

$$\text{Montant.deces.eparg}(n) = \text{Taux.deces}(n) \times \text{prov.reval}(n)$$

### 10. Cotisation épargne :

Ce sont les cotisations que l'assuré verse à son assureur pour son propre épargne(garantie de base).

$$\text{Cotis.eparg}(n) = \text{Cotis.eparg}(n - 1) \times \text{Nbre.contrats}(n)$$

### 11. Taux de tarification :

Le taux de tarification est le taux tarifaire sur lequel l'assureur se base pour calculer les primes, il varie selon l'âge de l'assuré et est exprimé par :

$$\text{Taux.tarif}_x = \frac{C_x}{D_x}$$

Avec :

$C_x = v^{x+1/2} \times d_x$  : les décédés à l'âge x actualisés en milieu d'année.

$D_x = v^x \times l_x$  : les survivants à l'âge x actualisés.

### 12. Primes de décès :

Les primes de décès représentent les versements payés par les assurés au cours de l'année pour la garantie décès (garantie facultative).

$$\text{Primes.deces}(n) = \text{Nbre.contrats}(n) \times (\text{Taux.tarif}(n) + \text{TauxCHG}) \times \text{Capital.assure}$$

### 13. Les chargements de gestion :

De manière à couvrir ses frais et à s'assurer une certaine marge sur la gestion des contrats, l'assureur prélève annuellement un certain pourcentage de l'encours de chaque contrat (FGP : Frais de gestion prélevés), mais en réalité l'assureur dépense des frais de gestion réelles pour chaque contrat, et les chargements de gestion sont exprimés par la différence entre ces deux derniers.

Avec :

$$\text{FGR}(n) = \text{Nbre.contrats}(n) \times \text{cout.contrat} \times (1 + \text{Taux.inflation})^{n-1}$$

$$\text{FGP}(n) = \text{TauxCHG} \times \text{prov.reval}(n)$$

### 14. La participation au bénéfice :

La participation aux bénéfices correspond à la partie des bénéfices réalisés par

l'assureur pendant l'année et qui sont reversés aux assurés. La réglementation impose à l'assureur de reverser un minimum de 70% des bénéfices financiers qu'elle réalise avec l'épargne des assurés. En pratique, la pression de la concurrence fait que les assureurs reversent souvent bien plus que l'exigence.

#### 15. **Pénalités sur rachats :**

La pénalité sur rachats est le montant retiré de l'épargne de l'assuré suite à un rachat avant une date convenue dans le contrat.

$$Penalites.rachats(n) = Taux.Penalites.rachats(n) \times Montant.rachats(n)$$

### 3.1.3 **Modélisation des rachats**

Avec la mise en application de la nouvelle réforme Solvabilité II, la prise en compte du risque de rachat dans la valorisation des contrats devient primordiale. En effet, la vision plus « économique » du bilan entraîne une estimation au plus proche des rachats, car ils ont une incidence directe sur les engagements de l'assureur et sur les flux futurs de trésorerie.

L'objectif des paragraphes suivants est d'appréhender au mieux ce risque de rachat à travers l'énumération de ses principales variables explicatives. Par la suite nous allons exposer une modélisation de rachat structurel faite au niveau de l'organisme d'accueil et sur laquelle nous nous basons.

#### **Les facteurs explicatifs**

Le comportement des assurés face au rachat de leur contrat d'épargne ne possède pas une explication unique. Certains rachats sont faits à cause de la conjoncture économique alors que d'autres résultent de raisons propres à l'assuré. Le phénomène de rachat peut donc se décomposer en rachats conjoncturels et en rachats structurels.

#### **Les rachats conjoncturels**

Les rachats conjoncturels sont liés à la conjoncture économique, puisqu'ils résultent du fait que les assurés préfèrent racheter leur contrat pour s'orienter vers un autre produit jugé plus rémunérateur. C'est pourquoi nous parlons de taux de rachats exogènes. Ceux-ci sont en général estimés à partir d'un écart de rendement entre le taux servi par le contrat d'épargne détenu et le taux que peut espérer l'assuré s'il modifie son investissement.

#### **Les rachats structurels**

Les rachats structurels s'expliquent par des facteurs propres aux caractéristiques du contrat épargne qui influencent de manière microéconomique la décision de rachat. Nous parlons de taux de rachat endogènes.

Ce comportement de rachat peut s'expliquer au travers de différents facteurs dont les principaux sont :

- La fiscalité :

Les plus values réalisées sur un contrat d'assurance-vie sont exonérés d'impôt sur le revenu après la huitième année de souscription.

- La durée du contrat :

Le terme contractuel peut avoir un effet non négligeable sur les rachats. En effet, dans le cadre de contrats à durée fixe, la quasi-totalité des contrats sont rachetés dans les quelques mois qui suivent la date de terme, puisqu'ils ne sont plus rémunérés au-delà de cette date.

- La saisonnalité :

Lors d'études effectuées sur le taux de rachat intra-années, il a pu être mis en avant l'existence d'une saisonnalité. Des effets saisonniers mensuels peuvent être observés sur la période de fin d'année.

- L'âge de l'assuré :

L'âge de l'assuré peut également avoir un impact sur les rachats. En effet, le souscripteur n'a pas les mêmes besoins suivant son âge. Certains épargnent en vue d'un événement nécessitant un grand besoin en liquidités, tandis que d'autres préfèrent épargner pour la constitution d'un capital retraite.

- Montant versé par l'assuré :

Le taux de rachat peut aussi être fonction du montant investi par l'assuré. En effet, il paraît pertinent de dire que, moins l'assuré investit, plus il aura tendance à exercer son droit de sortie.

Tous ces facteurs explicatifs ne forment pas une liste exhaustive, mais ils apparaissent comme des variables pouvant le plus vraisemblablement définir le taux de rachat structurel d'un contrat.

## 3.2 Modélisation stochastique de l'actif

La particularité comptable d'une compagnie d'assurance, par rapport à toute autre compagnie, est son cycle inversé de production. Cette particularité nécessite la constitution de provisions réglementaire, afin d'honorer les engagements de la compagnie, et réciproquement elle nécessite la gestion d'un actif lourd. Cette dernière se fait par une modélisation stochastique qui nécessite la sélection de modèles pour les différents types de placements et le choix de leur discrétisation afin d'être en mesure de simuler l'évolution des différents cours. La base de cette simulation consiste à créer l'aléa du modèle. Une attention toute particulière doit donc être accordée à cette étape car la qualité du générateur va entièrement dépendre du caractère aléatoire de ces nombres.

On va donc chercher à reproduire des tirages de variables aléatoires suivant certaines lois de probabilité. Une série de tirage va donc permettre, grâce au modèle, de créer un scénario à  $T$  périodes. En reproduisant cette étape un très grand nombre de fois. Cette technique s'appelle la méthode de Monte-Carlo.

Dans le cadre de ce mémoire, nous supposons que le portefeuille d'actifs de l'assureur est composé uniquement d'actions et d'obligations, donc nous allons nous intéresser dans ce qui suit à la projection de la structure par terme des taux d'intérêt et des rendements des actions.

La modélisation de la courbe des taux va se faire par le modèle de Vasiček. Par contre la modélisation des actions va être traitée par le modèle de Black and Scholes.

### 3.2.1 Modélisation de la courbe des taux : Modèle de Vasiček

Le modèle de Vasiček (1977) qui s'apparente aux modèles à variables d'état (il est en fait à une seule variable d'état) dicte que le taux court détient à lui seul les commandes des changements des prix des titres obligataires et que celui-ci est censé suivre un processus d'Ornstein-Uhlenbeck dont l'évolution est donnée par :

$$dr(t) = a [b - r(t)] + \sigma dW(t)$$

Où :

- $r(t)$  : taux court en  $t$  (assimilable au taux jour-jour).
- $b$  : moyenne sur long terme du taux court.
- $a$  : la vitesse d'ajustement du taux court actuel vers sa moyenne de long terme  $b$ .
- $\sigma$  : écart-type du changement instantané de  $r(t)$ .
- $W(t)$  : mouvement brownien standard.

Cette modélisation permet de prendre en compte l'effet de retour à la moyenne constaté sur les taux d'intérêt. En effet les valeurs élevées des taux ont tendance

à être suivies plus fréquemment par des baisses que par des hausses, l'effet inverse est également constaté pour les niveaux de taux bas.

Autrement dit, lorsque  $r(t)$  est éloigné de  $b$ , l'espérance de variation instantanée de  $r(t)$ , égale à  $a(b - r(t))$  est positive si  $r(t) < b$ . Dans ce cas, le taux court a tendance à augmenter, se rapprochant de la moyenne sur le long terme d'autant plus intensément qu'il s'en est écarté et que le paramètre  $a$  est grand.

A l'inverse, si  $r(t) > b$ , l'espérance de variation instantanée de  $r(t)$  est négative et  $r(t)$  diminue dans le temps pour se rapprocher de  $b$ .

La solution du processus d'Ornstein-Uhlenbeck est donnée par :

$$r_t = r_0 e^{-at} + b(1 - e^{-at}) + \sigma e^{-at} \int_0^t e^{as} dw(s)$$

La solution de l'équation différentielle partielle à laquelle doit obéir le prix d'un titre est la suivante :

$$P(t, T) = A(t, T) e^{-B(t, T)r(t)}$$

où :

$$B(t, T) = \frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a}$$

$$A(t, T) = \exp\left\{(B(t, T) - (T - t)) \times R - \frac{\sigma^2 B(t, T)^2}{4a}\right\}$$

$R = b + \frac{\sigma\pi}{a} - \frac{1}{2} \frac{\sigma^2}{a^2}$  : représente le taux implicite à long terme.

$\pi$  correspond à la prime de risque supposée nulle dans notre étude (elle est intégrée dans le taux sans risque).

### Discrétisation du processus d'Ornstein-Uhlenbeck

Les propriétés de l'intégrale d'une fonction déterministe par rapport à un mouvement brownien conduisent à la discrétisation suivante :

$$r_{t+1} = r_t e^{-a} + b(1 - e^{-a}) + \sigma \sqrt{\frac{1 - e^{-2a}}{2a}} \varepsilon_t$$

Où  $\varepsilon$  est une variable aléatoire de loi normale centrée réduite.

L'estimation des paramètres du processus d'Ornstein-Uhlenbeck peut s'effectuer en recourant soit à la méthode des moindres carrés ordinaires, soit à celle du maximum de vraisemblance.

$$r_t = b(1 - e^{-a}) + e^{-a} r_{t-1} + \varepsilon_t$$

Avec :  $\varepsilon_t \rightsquigarrow \mathcal{N}(0; \frac{\sigma^2(1 - e^{-2a})}{2a})$

### Estimation des paramètres $a$ , $b$ , et $\sigma$

Avant de procéder à une estimation des paramètres du modèle, il faut tout d'abord valider certaines hypothèses en utilisant le taux moyen pondéré (TMP) du marché interbancaire publié au jour le jour, comme données journalières allant du 01/01/2008 au 02/12/2013, soit au total de 2149 observations, dont l'évolution dans le temps est représentée par le graphe suivant :

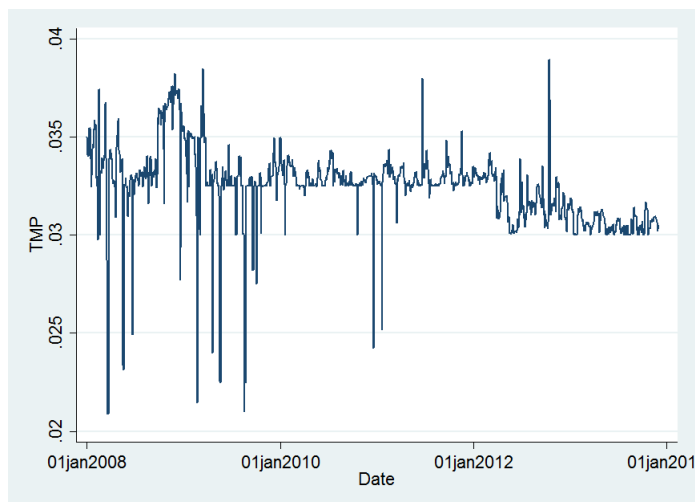


FIGURE 3.1 – L'évolution du TMP dans le temps

D'après le résultat du graphe TMP, on constate que ce dernier a connu des fluctuations très importantes tout au long de la période 01/03/2008 au 01/09/2009 surtout des pics à la baisse, et cela revient à la crise financière qui a impacté tout les agrégats du marché financier y compris le taux moyen interbancaire, puis à partir du 01/01/2010, il commence à se converger autour d'une valeur moyenne avec des pics assez légers.

Le modèle concerné est un modèle autorégressif d'ordre 1, ce qu'il faut vérifier pour les données empiriques disponibles. Avant cela et avant d'effectuer une régression quelconque, on doit étudier la stationnarité de la série en question en faisant appel aux tests de Dickey-Fuller augmentés sur STATA, mais avant tout ça on doit vérifier tout d'abord que notre série de taux est un AR(1) en étudiant le corrélogramme de la série.

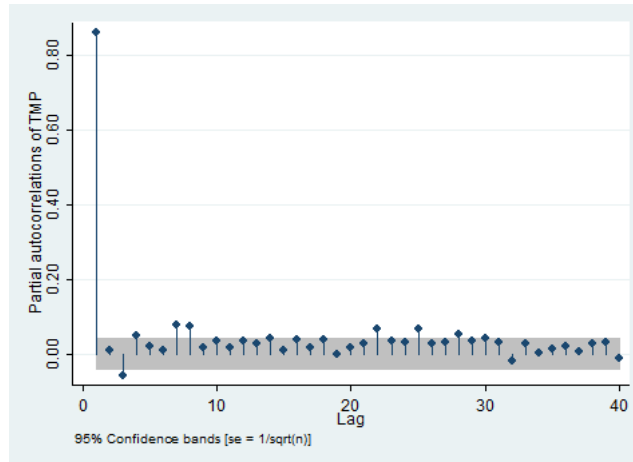


FIGURE 3.2 – Le corrélogramme simple et partiel de la série TMP

D'après le corrélogramme ci-dessus, nous ne rejetons pas l'hypothèse de la nullité des PAC (les autocorrélations partielles), étant donné que celles-ci commencent à être très peu significatives à partir du second ordre, et par conséquent, notre processus se rapproche d'un processus auto régressif d'ordre 1 AR(1).

La plupart des séries économiques financières sont non stationnaires, c'est-à-dire que le processus qui les décrit ne vérifie pas au moins une des conditions de la définition d'un processus stationnaire SSL. Pour évaluer et identifier les caractéristiques d'une série chronologique, il faut que celle-ci soit stationnaire.

### Tests de Dickey-Fuller

Les tests de Dickey-Fuller sont des tests qui permettent de détecter l'éventuelle existence d'une tendance de la série chronologique, ils permettent par ailleurs de déterminer la meilleure façon de stationnariser. Dans ces tests simples, le processus  $\varepsilon_t$  est par hypothèse, un bruit blanc, cependant, il n'y a aucune raison pour que les résidus soient des bruits blanc (non corrélée). On appelle tests de Dickey Fuller Augmentés (1981) la prise en compte de cette hypothèse : Les trois modèles utilisés pour développer le test ADF sont les suivants :

- Modèle3 :  $\Delta r_t = \rho r_t + \alpha + \beta t + \phi_1 \Delta r_{t-1} + \varepsilon_t$
- Modèle2 :  $\Delta r_t = \rho r_t + \alpha + \phi_1 \Delta r_{t-1} + \varepsilon_t$
- Modèle1 :  $\Delta r_t = \rho r_t + \phi_1 \Delta r_{t-1} + \varepsilon_t$

$\varepsilon_t \rightsquigarrow BB(0, \sigma^2)$

On cherche à tester l'hypothèse de racine unitaire :

$$H_0 : \rho = 0 \quad vs \quad H_1 : \rho < 0$$

Si  $t_{\hat{\rho}} > t_{table}$  alors, on ne rejette pas l'hypothèse nulle, d'où il existe une racine unitaire (la série est non SSL).

Nous allons à présent proposer une stratégie de tests de Dickey Fuller permettant de tester la non stationnarité conditionnellement à la spécification du modèle utilisé.

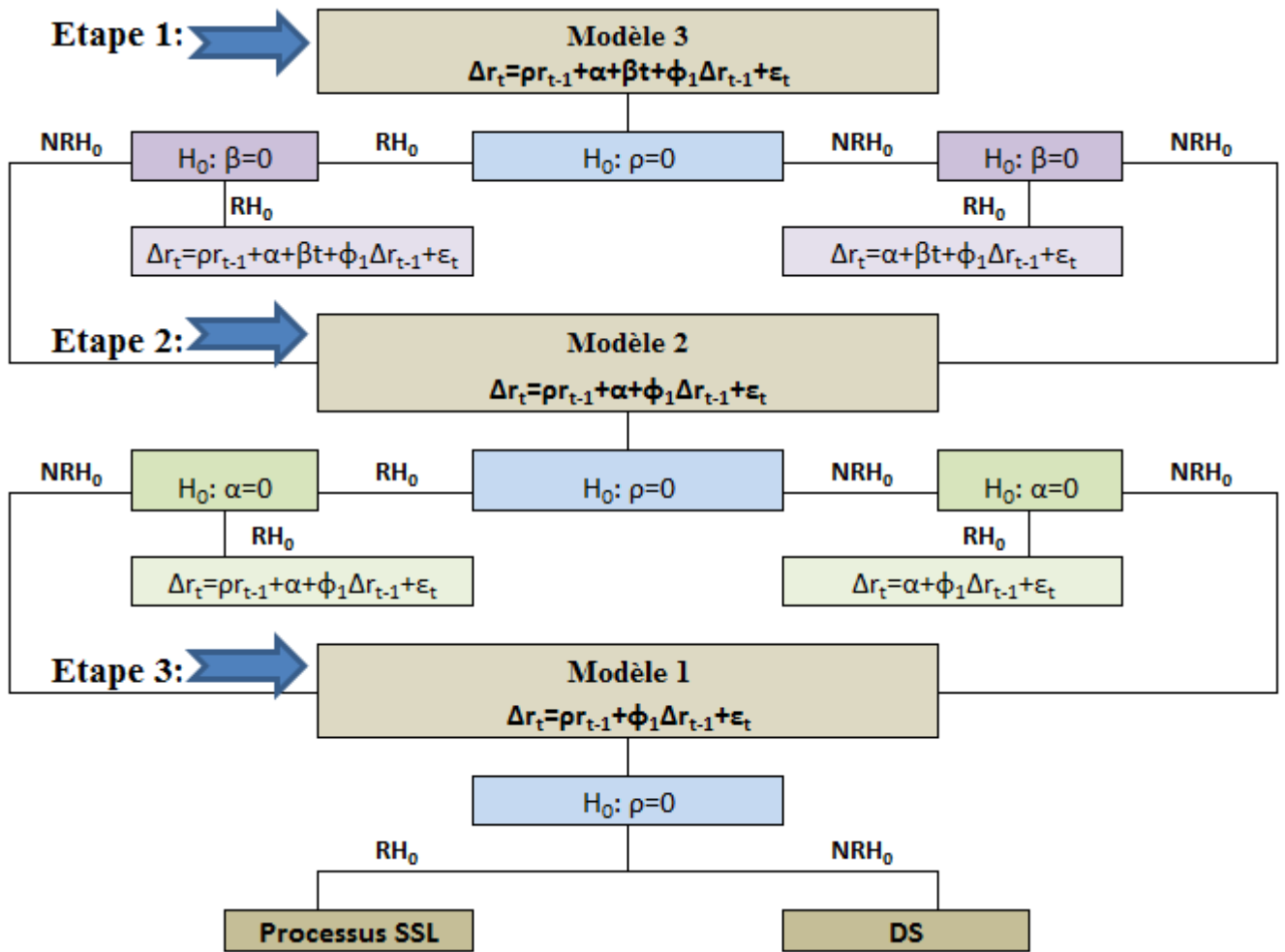


FIGURE 3.3 – Stratégie de tests de Dickey Fuller

**Étape 1 :**

**Modèle 3 :**  $\Delta r_t = \rho r_t + \alpha + \beta t + \phi_1 \Delta r_{t-1} + \varepsilon_t$

```
. dfuller TMP , trend regress lags(1)
```

Augmented Dickey-Fuller test for unit root                      Number of obs =                      **2149**

Test Statistic	Interpolated Dickey-Fuller		
	1% Critical Value	5% Critical Value	10% Critical Value
z(t)	<b>-13.368</b>	-3.960	<b>-3.410</b>

Mackinnon approximate p-value for z(t) = **0.0000**

D. TMP	Coef.	Std. Err.	t	P> t	[95% Conf. Interval]
TMP					
L1.	-.1656206	.0123889	-13.37	0.000	-.1899161    -.141325
LD.	.0059691	.0215869	0.28	0.782	-.0363642    .0483025
_trend	-2.20e-07	3.88e-08	<b>-5.68</b>	0.000	-2.96e-07    -1.44e-07
_cons	.0056115	.0004222	13.29	0.000	.0047836    .0064393

FIGURE 3.4 – sortie ADF appliqué au modèle 3 pour tester la tendance

- Tester l’hypothèse :  $H_0 : \rho = 0$
- Statistique observée :  $t_{\hat{\rho}} = -13.368$
- Décision :  $t_{\hat{\rho}} < -3.410$ , alors  $H_0$  est rejetée ( $H_0 : \rho \neq 0$ )
- Tester l’hypothèse :  $H_0 : \beta = 0$
- Statistique observée :  $t_{\hat{\beta}} = -5.68$
- Décision :  $t_{\hat{\beta}} < 2.78$ , alors  $H_0$  est non rejetée ( $H_0 : \beta = 0$ )

N.B : la valeur 2.78 est lue dans la table statistique ADF du modèle 3.



Si  $LM = n \times R^2 > \chi_{(2)}^2$ , lu dans la table au seuil  $\alpha$ , alors on rejette l'hypothèse d'homoscédasticité des erreurs.

```
. reg Erreur2 TMP TMP2
```

Source	SS	df	MS			
Model	1.1357e-08	2	5.6785e-09	Number of obs =	2154	
Residual	1.6001e-06	2151	7.4388e-10	F( 2, 2151) =	7.63	
Total	1.6114e-06	2153	7.4846e-10	Prob > F =	0.0005	
				R-squared =	0.0070	
				Adj R-squared =	0.0061	
				Root MSE =	2.7e-05	

Erreur2	Coef.	Std. Err.	t	P> t	[95% Conf. Interval]	
TMP	-.012311	.0031545	-3.90	0.000	-.0184971	-.0061249
TMP2	.1958262	.0506231	3.87	0.000	.0965509	.2951015
_cons	.0001941	.0000493	3.93	0.000	.0000973	.0002908

FIGURE 3.6 – RLM de l'erreur au carré sur les variables explicatives

donc :  $LM = 15,078 > 5,9915$ , d'où on rejette l'hypothèse nulle, par conséquent le modèle est hétéroscédastique. Donc pour remédier le phénomène d'hétéroscédasticité, il suffit d'estimer les paramètres du modèle par la méthode des moindres carrés généralisés au lieu de la méthode des moindres carrés ordinaires, et cela se fait tout simplement par une seule commande sur STATA : "reg l2.TMP l1.TMP, robust" ; ou bien "rreg l2.TMP l1.TMP".

### Test d'auto-corrélation des erreurs : Test Durbin Watson

Pour tester l'auto corrélation des erreurs, on procède en fait par le test de Durbin Watson :

$$H_0 : \rho = 0 \text{ vs } H_1 : \rho \neq 0$$

```
. estat dwatson
Number of gaps in sample: 1
Durbin-watson d-statistic( 2, 2149) = 2.015136
```

FIGURE 3.7 – Test de Durbin Watson

On constate que  $d_2 < DW = 2.015136 < 4 - d_2$  sachant que  $d_2 = 1.72$  lu dans la table de Durbin Watson, alors on ne rejette pas  $H_0$ , d'où l'absence des auto corrélations entre les erreurs.

### Test de la normalité

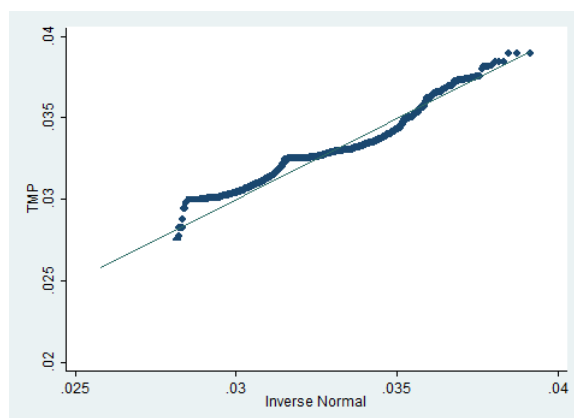


FIGURE 3.8 – Q-Qplot

Sur le Q-Qplot on remarque que la distribution de la série des TMP s'ajuste avec la première bissectrice. On déduit donc que la normalité des résidus est vérifiée, ce qui est généralement le cas en réalité. Ainsi les résultats de notre régression sont assurés par la vérification des hypothèses de modèle.

### Régression linéaire simple

D'après avoir vérifié que le modèle est un AR(1) stationnaire ainsi que toutes ses hypothèses sont valides, maintenant on effectue une régression linéaire simple par la méthode des moindres carrés généralisés sur la série des TMP afin d'estimer les paramètres du modèle :

Rappelons que notre modèle de régression s'écrit sous cette forme :

$$r_t = b(1 - e^{-a}) + e^{-a}r_{t-1} + \varepsilon_t$$

L'estimation du modèle donne les résultats suivants :

$$b(1 - e^{-a}) = 0,0044421 \quad , \quad e^{-a} = 0,8632143 \quad \text{et} \quad \sigma = 0,0010164$$

Finalement, on trouve :  $a = 0,14709$  ,  $b = 0,03247489$  , et  $\sigma = 0,0010164$

Après avoir utilisé le TMP pour vérifier les hypothèses du modèle, maintenant nous allons arriver au stade de la modélisation de la courbe des taux dont nous employons le taux sans risque comme moyen pour représenter l'évolution des taux courts sur les prochaines années. Et cela se fait par la discrétisation d'Euler. Rappelons que pour un pas de discrétisation d'une année, nous avons :

$$r_{t+1} = b(1 - e^{-a}) + e^{-a}r_t + \sigma \sqrt{\frac{(1 - e^{-2a})}{2a}} \varepsilon_t$$

Pour chaque année projetée, nous avons effectué, sous Excel, 1000 simulations du taux court à partir du paramétrage suivant :

- .  $t_0 = 01/01/2014$ ;
- .  $r_0 = 3,91\%$ ;
- .  $\varepsilon_t$  :est la réalisation d'une loi normale centrée réduite obtenue à l'aide du générateur pseudo aléatoire « Rand () » d'Excel et l'inverse de la loi normale.

Nous obtenons la représentation graphique ci-après où nous n'avons gardé que 20 simulations des taux courts pour une meilleure lisibilité.

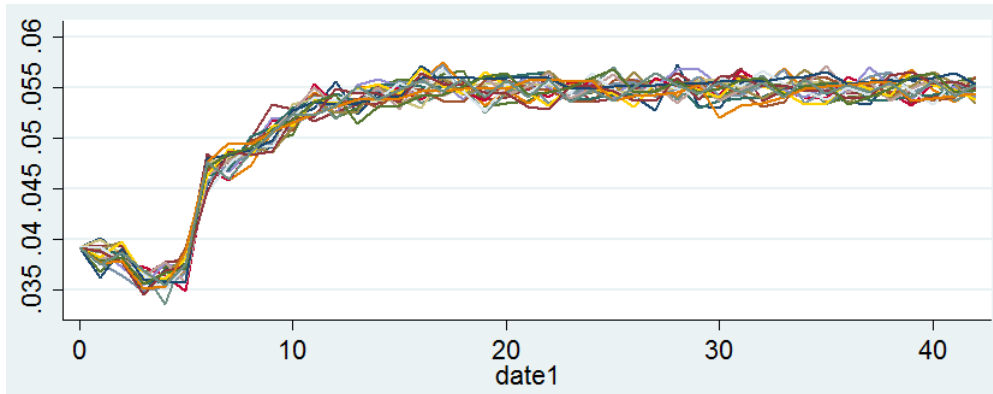


FIGURE 3.9 – Simulation des taux courts du modèle de Vasicek

### Prix des obligations

Le prix  $\text{prix.obg}(T)$  d'une obligation sans risque de défaut, de valeur nominale  $N = 100$ , de maturité  $T = 21\text{ans}$  et de taux de coupon  $c = 0$ , est calculé selon la formule suivante :

$$\text{prix.obg}(T) = N \times P(0, T)$$

où  $P(0, T)$  :le prix à la date 0 d'une obligation zéro-coupon de maturité  $T$ .

	A	B	C	D	E	F	G	H
2		CommandBut						
3	Échéance t	free_risk	free_risk_est	B(t,T)	A(t,T)	P(t,T)	Prix obg(T)	Nbre obg(T)
4	0	0.0391	0.0391	6.488780966	0.62439152	0.45344805	453	1 357 831
5	1	0.0391	0.046643778	6.43971015	0.64396046	0.47688002	477	1 291 113
6	2	0.0363	0.038250181	6.382863528	0.66397526	0.52014063	520	1 183 729
7	3	0.0372	0.037745758	6.31700894	0.68441217	0.53921805	539	1 141 849
8	4	0.0381	0.035597944	6.240718977	0.70523941	0.56474854	565	1 090 230
9	5	0.0491	0.036852192	6.152340038	0.72641559	0.57905361	579	1 063 297
10	6	0.0503	0.047154682	6.049956495	0.74788786	0.56226275	562	1 095 050
11	7	0.0516	0.046809486	5.931349165	0.76958978	0.58301576	583	1 056 071
12	8	0.0533	0.049376572	5.793947213	0.79143886	0.59452774	595	1 035 622
13	9	0.0548	0.049806685	5.634772426	0.81333368	0.61430535	614	1 002 280
14	10	0.0563	0.051250971	5.450374662	0.83515068	0.63161193	632	974 817
15	11	0.0566	0.052715099	5.236757066	0.8567405	0.65006926	650	947 139
16	12	0.057	0.053931146	4.989289436	0.87792393	0.67080726	671	917 858
17	13	0.0575	0.054310025	4.702607868	0.89848745	0.69597517	696	884 666
18	14	0.058	0.052627885	4.370498485	0.91817844	0.72951626	730	843 992
19	15	0.0584	0.05426944	3.985762757	0.93670027	0.75450223	755	816 042
20	16	0.0584	0.054624483	3.540061465	0.95370728	0.78602042	786	783 320
21	17	0.0584	0.05444513	3.023733953	0.96880021	0.82174557	822	749 266
22	18	0.0584	0.055869609	2.425588727	0.98152229	0.85712865	857	718 335
23	19	0.0584	0.05575284	1.732660881	0.99135687	0.90007115	900	684 063
24	20	0.0584	0.053759725	0.929931077	0.99772726	0.94907432	949	648 743
25	21	0.0584	0.055328606	0	1	1	1000	615 706

FIGURE 3.10 – Implémentation du modèle de Vasicek sur VBA

### 3.2.2 Modélisation du cours des actions : Modèle de Black and Scholes

Bien que les titres obligataires occupent une place prédominante dans le portefeuille d'investissement des compagnies d'assurance vie, une part non négligeable est aussi allouée aux actifs risqués. Ainsi, dans le cadre d'une démarche de gestion actif-passif, les assureurs doivent être en mesure de modéliser de manière stochastique le cours des actions pour se protéger contre les risques liés à leur dépréciation.

En effet, le modèle de Black and Scholes est devenu un modèle de référence pour étudier la dynamique des cours des actifs risqués, celui-ci est facile à comprendre et simple à réaliser puisqu'il suppose que la dynamique des cours des actions est décrite par un mouvement brownien géométrique.

Dans ce contexte, nous allons tout d'abord définir une composante essentielle à toute modélisation stochastique : le mouvement brownien géométrique. Par la suite, nous présenterons l'application du modèle de Black and Scholes.

#### Principales caractéristiques du modèle Black and Scholes

##### Mouvement Brownien Standard

Un processus stochastique  $(X_t, t \in T)$  est une suite de variables aléatoires indexées sur le temps  $t$ , à valeurs dans un ensemble défini. Une réalisation d'un processus stochastique est appelée trajectoire.

Dans les modèles stochastiques utilisés en finance, la partie aléatoire du processus de prix est souvent représentée par un mouvement brownien.

Soit  $(\Omega, F, P)$  un espace probabilisé, et soit  $B_t, t \in [0, \infty]$  un processus sur cet espace. Le processus  $B_t, t \in [0, \infty]$  est dit mouvement brownien s'il vérifie les propriétés suivantes :

- Continuité des trajectoires.
- Indépendance des accroissements relatifs : si  $u \leq t$ , l'accroissement relatif  $(B_t - B_u)/B_u$  est indépendant de la tribu  $\sigma(B_v; v \leq u)$ .
- Stationnarité des accroissements relatifs : si  $u \leq t$ , la loi  $(B_t - B_u)/B_u$  est identique à celle de  $(B_{t-u} - B_0)/B_0$ .

### Lemme d'Itô

Le lemme d'Itô est utilisé dans les processus stochastiques. Si  $X$  est la solution de l'équation différentielle stochastique (EDS) :

$$X(t) = X(0) + \int_0^t \mu(X(s), s) ds + \int_0^t \sigma(X(s), s) dB_s$$

Alors le processus d'Itô s'écrit :

$$dX(t) = \mu(X(t), t)dt + \sigma(X(t), t)dB_t$$

Avec  $B_t$  un mouvement brownien,  $\mu$  le drift, et  $\sigma$  la volatilité.

Le modèle de Black and Scholes est basé sur des hypothèses très restrictives qui sont généralement en désaccord avec les observations empiriques. Parmi ces hypothèses, nous avons :

- la continuité des trajectoires des prix des actions ;
- la constante de la volatilité utilisée ;
- la normalité de la distribution des rendements des actions.

Dans le modèle de Black and Scholes, les cours des actions « $S_t$ » évoluent selon un processus stochastique de mouvement brownien géométrique :

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dB_t$$

Avec :

- $\mu$  : la moyenne des rendements des actions.
- $\sigma$  : l'écart-type du rendement des actions.
- $S_t$  : le prix de l'action à l'instant  $t > 0$ , et prend la valeur  $S_0$  en  $t = 0$ .
- $B_t$  : un mouvement brownien standard.

En appliquant le lemme d'Itô à  $X_t = \ln(S_t)$  et la condition à l'origine  $S(0) = S_0$  nous obtenons une solution explicite de l'équation différentielle stochastique :

$$S_t = S_0 \exp\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma B_t\right)$$

Par conséquent, on déduit une discrétisation du processus :

$$S_{t+1} = S_t \exp\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} + \sigma(B_{t+1} - B_t)\right)$$

Comme  $B_t$  est un mouvement brownien, l'accroissement  $B_{t+1} - B_t$  suit une loi normale centrée réduite.

Ainsi le rendement du fond d'actions entre les deux dates successives  $t$  et  $t + 1$ , donnée par l'équation ci-dessous, suit une loi normale de moyenne  $\mu - \frac{\sigma^2}{2}$  et de variance  $\sigma^2$ .

$$r_t = \ln\left(\frac{S_t}{S_{t-1}}\right) = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) + \sigma(B_t - B_{t-1})$$

### Application du modèle Black and Scholes

Pour modéliser la dynamique des cours des actions nous avons choisi comme benchmark, l'indice MASI. La raison pour laquelle nous avons opéré ce choix est due, non seulement au fait qu'il présente l'évolution du marché marocain dans son ensemble et fournit une référence à long terme, mais aussi parce qu'il est réputé pour avoir connu de grandes variations.

Nous disposons d'observations quotidiennes des cours pour la période du 02 janvier 2009 au 15 avril 2014, soit un total de 1321 valeurs boursières dont l'évolution durant cette période est représentée par le graphique suivant :



FIGURE 3.11 – L'évolution de l'indice du MASI entre janvier 2009 et avril 2014

D'une façon générale, on constate qu'à partir du 02/01/2009 l'indice de MASI a enregistré des fluctuations très importantes à la hausse et à la baisse jusqu'à 12/01/2011 où il atteint son maximum avec 13397,47 points, cela revient aux perturbations dont le marché financier avait connu tout au long de cette période

(la crise financière mondiale), après cette date le MASI a connu une rétraction plus ou moins lente jusqu'à 29/08/2013 où il a enregistré une valeur minimale de 8356,4 points, La dernière période s'est inscrite dans une tendance haussière s'étalant jusqu'au terme de notre horizon d'observation.

En suite, on représente la série des rendements de l'indice du MASI sur le graphique suivant :

D'après cette représentation graphique des rendements de MASI, on remarque

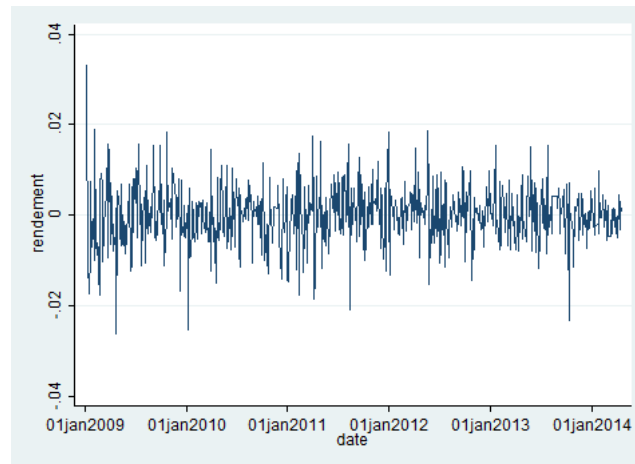


FIGURE 3.12 – L'évolution des rendements de MASI

que la série se caractérise par une volatilité plus ou moins de 4%, et elle ressemble stationnaire, toutefois il est nécessaire de vérifier sa stationnarité par le test de Dickey-Fuller.

```
. dfuller Rendement
Dickey-Fuller test for unit root                Number of obs =    1024
-----+-----+-----+-----+-----+-----+-----+-----+-----+-----+-----+
Test Statistic      1% Critical Value      5% Critical Value      10% Critical Value
-----+-----+-----+-----+-----+-----+-----+-----+-----+-----+-----+
z(t)                -27.972                -3.430                -2.860                -2.570
-----+-----+-----+-----+-----+-----+-----+-----+-----+-----+-----+
Mackinnon approximate p-value for z(t) = 0.0000
```

FIGURE 3.13 – Test de Dickey-Fuller

D'après les résultats du test, on remarque que la probabilité critique du test est inférieure à un niveau de risque de 5%, ce qui dit que l'hypothèse nulle sera rejetée, c-à-d la série des rendements possède une racine unitaire. Il ressort donc de ce tableau que la série des rendements journaliers du MASI est bien stationnaire.

Pour valider l'application du modèle Black and Scholes, il nous reste seulement une autre hypothèse à vérifier, c'est la normalité de la série des rendements, ce qui montre l'illustration graphique suivante, puisque la distribution de la série des rendements est confondue avec la bissectrice passant par l'origine.

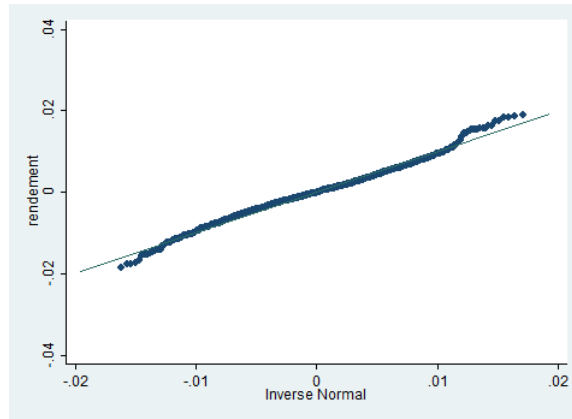


FIGURE 3.14 – Test de normalité

À partir des observations retenues « rendement du MASI », nous calibrons le modèle des actions en obtenant les estimateurs des paramètres théoriques : une moyenne  $\mu = 0,6\%$  et une volatilité  $\sigma^2 = 0,20\%$ .

En suite, on simule les trajectoires du cours de notre fonds d'actions sur une période de projection précise en utilisant la méthode de Monte-Carlo.

Etant donné que le processus représentant le cours des actions est continu, il est d'abord nécessaire de trouver une discrétisation exacte de celui-ci avant de lancer la simulation. Ainsi, pour un mouvement brownien géométrique et en choisissant  $\Delta t$  comme pas de discrétisation, nous obtenons le schéma récursif exact suivant :

$$S_{t+\Delta t} = S_t \exp\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)\Delta t + \sigma\varepsilon_t\sqrt{\Delta t}\right)$$

où :  $\varepsilon_t \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, 1)$

Nous effectuons 1000 simulations de trajectoires sous Excel, avec le paramétrage suivant :

- $S(0) = S_0 = 250dhs$  : cours d'action à l'état initial.
- Projection sur 5 ans avec des données mensuelles.
- Nombre d'itérations : 60.
- Pas de discrétisation :  $\Delta t = 1$ .

Ce qui donne le résultat suivant :

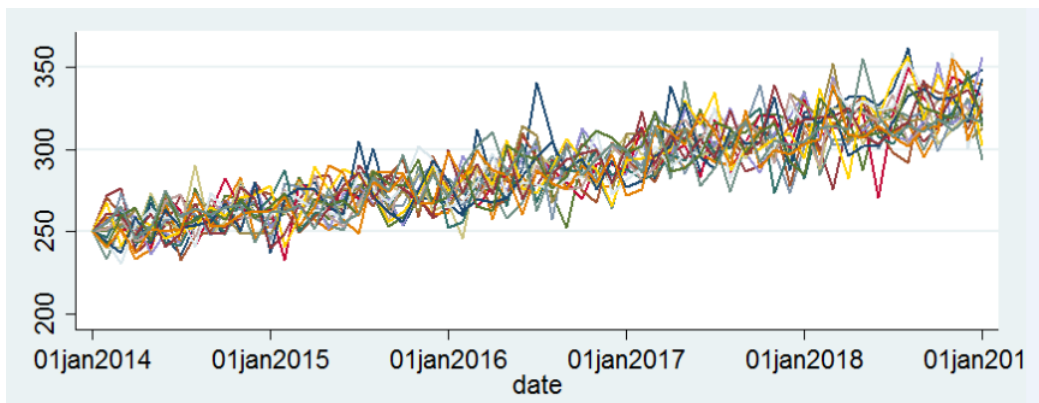


FIGURE 3.15 – Simulation de 1000 trajectoires du cours des actions pour  $S(0) = 250dhs$

# Chapitre 4

## Analyse des résultats

### 4.1 Analyse du portefeuille

Le produit Optimis est un produit épargne ayant pour objet la constitution d'une retraite complémentaire moyennant le paiement d'une prime. Ce produit est fondé sur une garantie de base : épargne et une garantie facultative : décès, avec une option de rachat.

AXA Assurance Maroc constitue pour chaque assuré, un compte épargne-retraite alimenté par les primes périodiques et versement spéciaux net des frais et commissions. Cette épargne est revalorisée chaque année au taux minimal garanti augmenté de la participation aux bénéfices.

Dans les conditions particulières du contrat, il y a plusieurs types de sorties à savoir :

- Le rachat partiel ou total pouvant être demandé à tout moment de la durée de vie du contrat. En cas de rachat total, une pénalité de 5% est prélevée sur l'épargne constituée si la durée du contrat est inférieure à 6 ans.
- Le décès de l'assuré : dans ce cas, l'épargne constitué est reversé totalement au bénéficiaire ou à défaut, à un ayant droit.
- Le terme du contrat : intervenant quand l'assuré part à la retraite (à partir de 60 ans). Les options au terme du contrat sont le capital, la rente certaine, et la rente viagère réversible ou non réversible.

Le portefeuille étudié est constitué de l'historique des cotisations moyennes de contrats d'épargne, commercialisés par la compagnie AXA Assurance Maroc, il est caractérisé par un épargne cumulé très important (634.748.241 dhs) durant une période de 6 ans allant de 2006 jusqu'à 2013 pour 8503 contrats dont la masse des assurés présentés sont ceux de l'âge 33 ans et 53 ans comme le montre le graphique suivant :

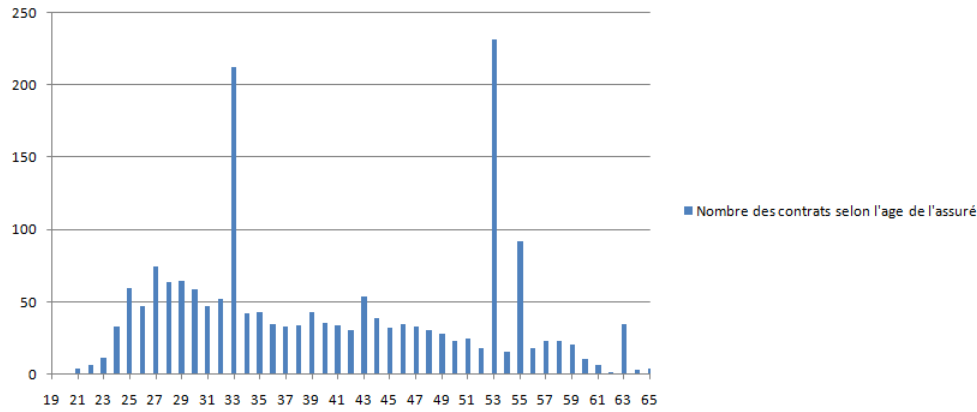


FIGURE 4.1 – Le nombre des contrats souscrits selon l’âge de l’assuré

## 4.2 Modélisation retenue pour les rachats structurels

Comme nous avons cité précédemment, il y a plusieurs facteurs qui peuvent expliquer le risque de rachat et différentes méthodes ont été développées pour leur modélisation. Mais les données dont nous disposons ne se prêtent pas à la réalisation d’une modélisation complexe, puisque la seule variable disponible est l’ancienneté du contrat. Nous nous bornerons donc à déterminer les taux de rachats en fonction de l’ancienneté des contrats.

Nous supposons que les rachats se font de manière uniforme sur toute l’année d’exercice, ce qui nous permet d’émettre l’hypothèse du rachat en milieu d’année. L’effectif du portefeuille en milieu d’année est obtenu en faisant la moyenne des effectifs en début et en fin d’année. Ceci est justifiable par l’hypothèse que les autres sorties (décès, maturité) se font également en milieu d’année.

Le tableau ci-dessous nous donne le résultat des taux de rachats estimés :

<b>Ancienneté</b>	<b>Taux de rachat</b>
<b>1</b>	<b>4.43%</b>
<b>2</b>	<b>13.61%</b>
<b>3</b>	<b>13.66%</b>
<b>4</b>	<b>14.08%</b>
<b>5</b>	<b>14.16%</b>
<b>6</b>	<b>12.22%</b>
<b>7</b>	<b>11.78%</b>
<b>8</b>	<b>10.07%</b>
<b>9</b>	<b>9.56%</b>
<b>10</b>	<b>9.50%</b>
<b>11</b>	<b>9.50%</b>
<b>12</b>	<b>9.50%</b>
<b>....</b>	<b>....</b>
<b>42</b>	<b>9.50%</b>

FIGURE 4.2 – Taux de rachats estimés selon l'ancienneté

Un premier constat est que ces taux sont élevés. Ceci est dû au fait que tout les contrats sont des contrats d'épargne individuelle, et donc l'assuré fait son arbitrage entre des gammes variées de possibilité de placement.

A partir de la huitième année d'ancienneté les valeurs du taux rachat oscillent autour d'une valeur fixe. Il est donc supposé que le taux de rachat fixe à partir de cette période en prenant la moyenne des valeurs au delà de la 8<sup>ième</sup> année d'ancienneté. Nous pouvons donc déduire que plus l'ancienneté du contrat augmente, moins l'assuré est poussé à racheter son contrat. Pour les taux de rachat avant la 8<sup>ième</sup> année, ils sont modélisés à l'aide de courbe de tendance polynomiale d'ordre 6.

Fonction d'ajustement des taux de rachats pour les anciennetés inférieures à 8 ans :

$$T.rachat = -0,0001Anct^6 + 0,004Anct^5 - 0,046Anct^4 + 0,261Anct^3 - 0,788Anct^2 + 1,2Anct - 0,587$$

$$R^2 = 0,9992$$

### 4.3 Projection des flux du portefeuille

Afin de calculer la valeur du BE, il est nécessaire de projeter tous les flux du passif, à savoir les primes, les prestations, ainsi les frais de gestion :  
Nous avons choisi le scénario standard afin de projeter les flux nécessaires pour le calcul du BE.

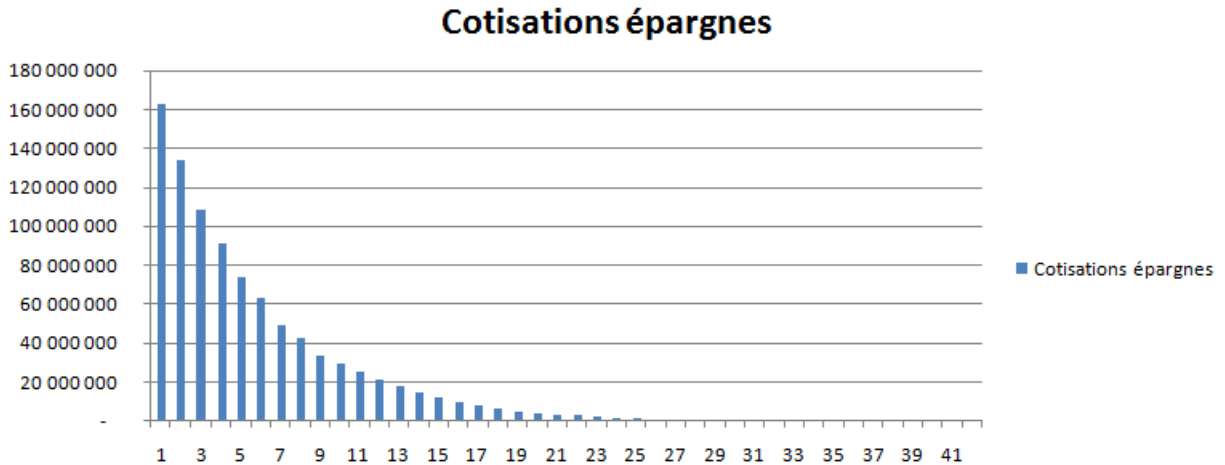


FIGURE 4.3 – Projection des cotisations épargnes

Les cotisations épargnes connaissent une rétraction avec le temps, ce qui est tout à fait logique compte tenu de nombreuses sorties principalement les rachats dans le portefeuille au fil des années.

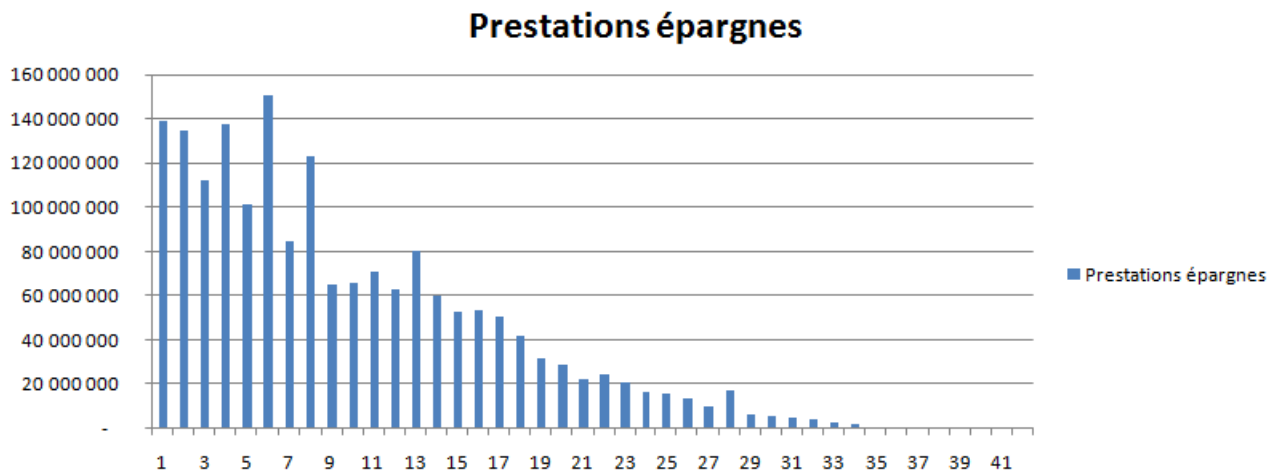


FIGURE 4.4 – Projections des prestations épargnes

Tout d'abord, les prestations épargnes contiennent à la fois le montant décès épargne, c'est le montant remboursé auprès de l'assureur à l'assuré en cas de décès (montant épargné par l'assuré durant la période de ses cotisations), et le montant des rachats (garantie de base), c'est le capital que la compagnie

d'assurance doit payer à son assuré si ce dernier rachète son contrat.

D'après le graphe ci-dessus, on constate que le montant des prestations épargnes est très élevé par rapport à celui des prestations décès, ce qui est tout à fait normal vue qu'on travaille sur un produit épargne, d'autre part deux fluctuations assez importantes sont inscrites durant la période de la projection, celle en sixième année car à partir de cette date il n'y aura plus des pénalités sur rachats ce qui confirme le comportement des assurés, c-à-d ils attendent jusqu'à la sixième année pour racheter leur contrat pour qu'ils ne seront pas pénalisés. La deuxième fluctuation se fait après la huitième année, cela se traduit par le fait après cette date, les assurés sont exonérés des impôts (selon des conditions particulières du produit épargne).

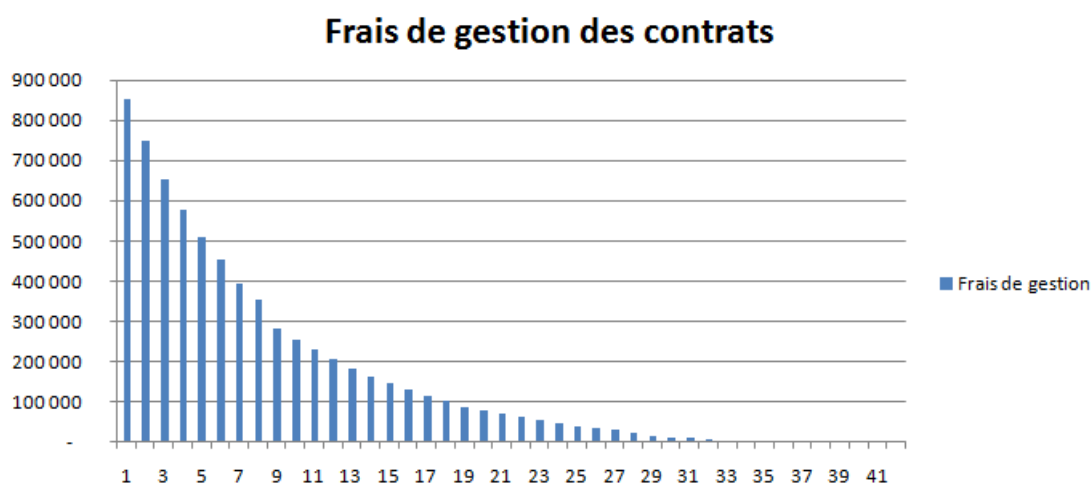


FIGURE 4.5 – Projection des frais de gestion des contrats

On constate qu'au fil de temps les frais de gestion des contrats enregistrent une baisse significative, cela revient au nombre d'assurés qui quittent le portefeuille année après année.

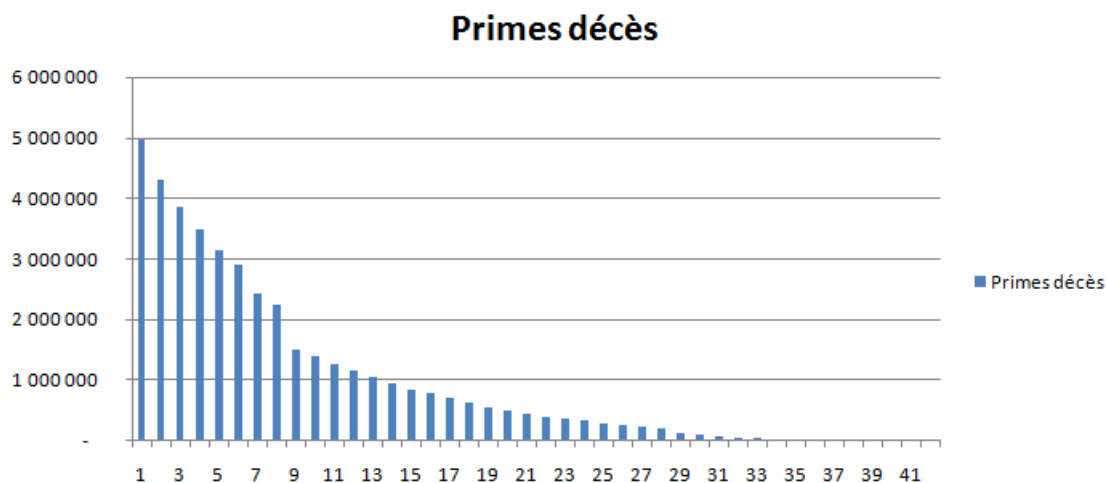


FIGURE 4.6 – Projection des primes décès

Les primes décès ont enregistré une décroissance ordinaire et proportionnelle à la table de mortalité TD 88-90, ce qui est logique puisque les assurés quittent le portefeuille année après année due aux décès.

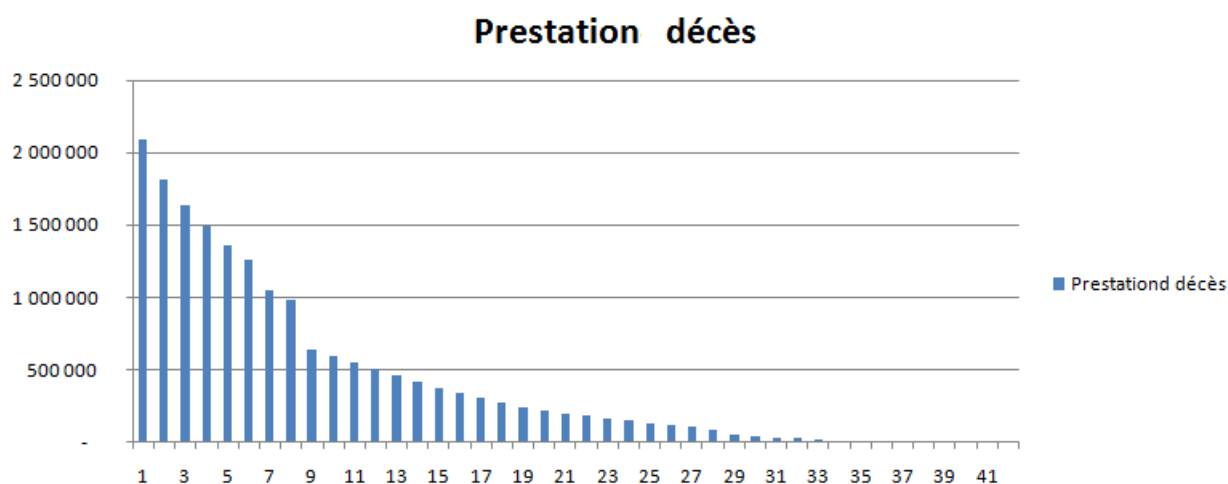


FIGURE 4.7 – Projection des prestations décès

Les prestations décès diminuent fortement durant les premières années due aux décès, mais à partir de la 8<sup>ème</sup> année elles connaissent une rétraction lente qui est considérable du nombre des assurés dans le portefeuille.

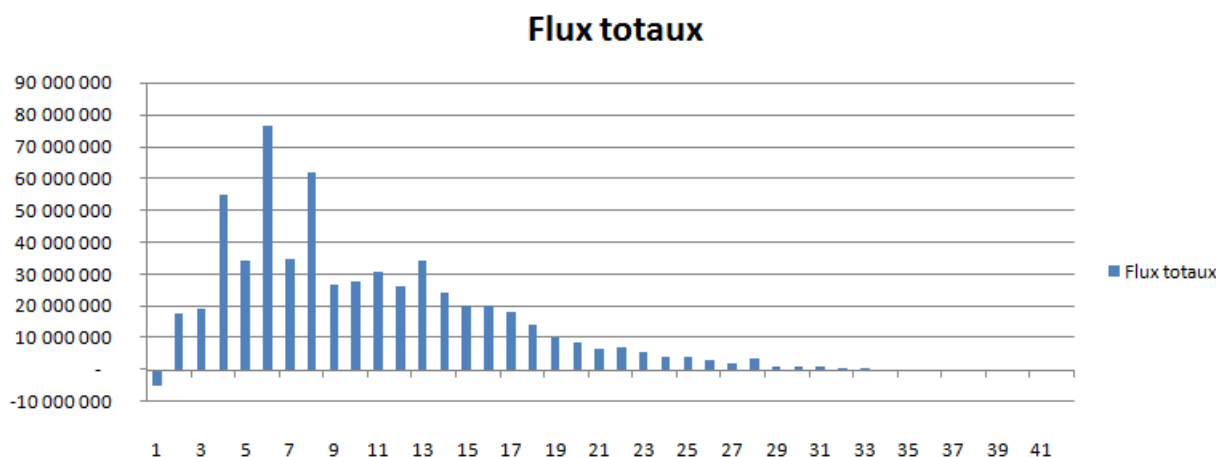


FIGURE 4.8 – Projection des flux totaux : BEL

D'après l'illustration graphique des flux, on remarque que la différence entre les flux sortants et les flux entrants a enregistré une valeur négative dans la première année ce qui traduit par les primes reçues sont supérieures aux prestations. Plus qu'on avance dans le temps les primes diminuent et les prestations augmentent. Le pic de la sixième année coïncide avec le pic des rachats. Cela confirme le fait que les rachats sont les prestations les plus importantes du portefeuille.

Le tableau ci-dessous donne un aperçu sur les résultats contrat par contrat :

Échéance t	Prestations	Primes	Frais_gestion	BEL
1	164 251 287	169 436 636	850 300	- 4 990 231
2	158 713 442	139 478 627	747 449	17 910 884
3	134 279 776	112 876 529	654 604	19 181 923
4	158 766 051	94 757 402	577 056	55 116 534
5	121 336 541	77 475 768	510 055	34 513 726
6	169 454 038	66 195 627	455 384	76 921 057
7	101 241 082	51 601 049	392 670	34 904 227
8	138 760 082	44 581 805	353 957	62 163 301
9	78 552 525	35 101 491	281 041	26 882 461
10	78 644 499	30 666 702	255 009	27 743 900
11	82 871 090	26 606 285	229 661	30 705 781
12	74 032 992	22 711 225	206 312	26 387 713
13	90 483 185	19 475 304	185 139	34 329 040
14	69 267 569	15 755 662	165 161	24 302 507
15	60 853 306	13 110 512	147 034	20 377 944
16	60 881 269	11 014 485	131 721	20 110 092
17	57 124 887	9 019 483	116 580	18 329 336
18	47 191 965	7 256 018	102 906	14 376 959
19	36 490 843	5 841 814	89 262	10 424 853
20	32 559 253	4 862 590	79 745	8 900 837
21	25 740 078	4 023 953	70 150	6 593 802

FIGURE 4.9 – Extrait des résultats du BEL

Après agrégation des résultats des montants du Best Estimate contrat par contrat, le Best Estimate global du portefeuille « Optimis » est de 600 390 257 dhs.

Ce montant étant considéré comme meilleure estimation des provisions techniques et représente les flux futurs correspondants aux capitaux versés aux clients au titre de leurs épargnes actualisés au 31/12/2013 et ce, en tenant compte des rachats et décès futurs, de plus il sera majoré par la suite par une marge de risque pour constitué les provisions techniques sous la Solvabilité II.

## 4.4 Calcul du Solvency Capital Requirement : SCR

Nous avons calculé le SCR seulement pour les modules souscription vie et marché, et dans chacun d'eux, nous avons pris en compte les sous risques cités précédemment.

### 4.4.1 Risque de souscription vie

#### Risque de mortalité

La valeur du capital requis pour le risque de mortalité en appliquant un choc de 15% sur le quotient de mortalité est : **803.024 dhs**.

En effet, le calcul se fait par la manière suivante :

- Scénario central :

$$Actif(0) = 634.748.241 \text{ dhs} \text{ et } Passif(0) = 600.039.027 \text{ dhs}$$

$$\implies NAV(0) = Actif(0) - Passif(0) = 34.709.214 \text{ dhs}$$

- Scénario choqué :

$$Actif(1) = 634.748.241 \text{ dhs} \text{ et } Passif(1) = 600.842.050 \text{ dhs}$$

$$\implies NAV(1) = Actif(1) - Passif(1) = 33.906.191 \text{ dhs}$$

Par conséquent :

$$\Delta NAV = NAV(0) - NAV(1) = 803.024 \text{ dhs}$$

d'où :

$$Life_{mort} = Max(803.024; 0) = 803.024 \text{ dhs}$$

## Risque de rachat

Le capital requis pour le risque des rachats en appliquant un choc à la hausse, et à la baisse, ainsi un choc massif sur les taux de rachats structurels, on obtient : **39.787.488 dhs**

Choc baissier des rachats :

- Scénario choqué :

$Actif(1) = 634.748.241 \text{ dhs}$  et  $Passif(1) = 556.019.160 \text{ dhs}$

$$\implies NAV(1) = Actif(1) - Passif(1) = 78.729.081 \text{ dhs}$$

Par conséquent :

$$\Delta NAV = NAV(0) - NAV(1) = -44.019.866 \text{ dhs}$$

d'où :

$$Lapse_{down} = -44.019.866 \text{ dhs}$$

Choc haussier des rachats :

- Scénario choqué :

$Actif(1) = 634.748.241 \text{ dhs}$  et  $Passif(1) = 622.042.564 \text{ dhs}$

$$\implies NAV(1) = Actif(1) - Passif(1) = 12.705.677 \text{ dhs}$$

Par conséquent :

$$\Delta NAV = NAV(0) - NAV(1) = 22.003.537 \text{ dhs}$$

d'où :

$$Lapse_{up} = 22.003.537 \text{ dhs}$$

Choc massif des rachats :

- Scénario choqué :

$Actif(1) = 634.748.241 \text{ dhs}$  et  $Passif(1) = 639.826.514 \text{ dhs}$

$$\implies NAV(1) = Actif(1) - Passif(1) = -5.078.273 \text{ dhs}$$

Par conséquent :

$$\Delta NAV = NAV(0) - NAV(1) = 39.787.488 \text{ dhs}$$

d'où :

$$Lapse_{massif} = 39.787.488 \text{ dhs}$$

Finalement, on déduit le résultat :

$$Life_{lapse} = \text{Max}(0; 39.787.488; 22.003.537; -44.019.866) = 39.787.488 \text{ dhs}$$

### Risque des frais de gestion :

Le capital requis pour le risque de dépenses correspond à la variation de la NAV suite à une augmentation de 10% des dépenses futures par rapport aux anticipations du Best Estimate et à une augmentation de 1% par an du taux d'inflation des dépenses par rapport aux anticipations.

- Scénario choqué :

$$Actif(1) = 634.748.241 \text{ dhs} \text{ et } Passif(1) = 600.659.684 \text{ dhs}$$

$$\implies NAV(1) = Actif(1) - Passif(1) = 34.088.557 \text{ dhs}$$

Par conséquent :

$$\Delta NAV = NAV(0) - NAV(1) = 620.658 \text{ dhs}$$

d'où :

$$Life_{exp} = Max(620.658; 0) = 620.658 \text{ dhs}$$

Après l'agrégation des sous-risques de souscription vie, on déduit le  $SCR_{life}$ .

$$SCR_{life} = \sqrt{Life_{mort}^2 + Life_{lapse}^2 + Life_{exp}^2 + 0,5 \times Life_{mort} \cdot Life_{exp} + Life_{lapse} \times Life_{exp}}$$

Alors :

$$SCR_{life} = 40.112.565 \text{ dhs}$$

### 4.4.2 Risque de marché

L'exposition au risque de marché est mesurée par l'impact des variations des variables financières telles que les cours des actions, les taux d'intérêt. Nous avons supposé que notre actif est composé seulement par les obligations et les actions, dont la compagnie investie une part de 97% dans les obligations y compris les bons de trésorerie qui représentent 86% de la part totale, et 3% dans les actions, cette répartition d'investissement entre les obligations et les actions est inéquitable, cela revient que Les actions étant connues pour leur variabilité importante, engendrent un risque qui peut fortement impacter le résultat de l'entreprise.

### Risque de taux d'intérêt

La valeur du capital requis pour le risque de taux d'intérêt en appliquant un choc à la hausse, et à la baisse sur la courbe des taux sans risque est : **103.846.612 dhs**.

$$MKT_{int}^{down} = \Delta NAV = -115.142.017$$

$$MKT_{int}^{up} = \Delta NAV = 582.037.856 - 478.191.243 = 103.846.612$$

Donc :

$$\implies MKT_{int} = Max(MKT_{int}^{down}; MKT_{int}^{up}) = 103.846.612 \text{ dhs}$$

## Risque des actions

La valeur du capital requis pour le risque des actions en appliquant un choc à la baisse de 40% sur les prix d'actions est : **7.200.468 dhs**.

$$MKT_{equity}^{down} = \Delta NAV = 18.001.171 - 10.800.702 = 7.200.468 \text{ dhs}$$

Après l'agrégation des sous-risques de marché, on obtient le  $SCR_{MKT}$ .

$$SCR_{MKT} = \sqrt{MKT_{int}^2 + MKT_{eq}^2 + MKT_{int} \times MKT_{eq}}$$

Alors :

$$SCR_{MKT} = 107.627.645 \text{ dhs}$$

Ensuite, on applique une agrégation globale sur les risques étudiés, à savoir le risque de souscription vie, et risque de marché, on aura le BSCR suivant :

$$BSCR = \sqrt{SCR_{life}^2 + SCR_{MKT}^2 + 0,5 \times SCR_{life} \cdot SCR_{MKT}}$$

$$\Rightarrow BSCR = 123.900.517 \text{ dhs}$$

D'après l'agrégation faite au niveau du risque de marché et du risque de souscription vie, on a eu comme valeur estimée par les normes de la nouvelle directive, un capital cible de 123.900.517 dhs qui représente 20,64% des provisions économiques, ce qui est traduit par une surestimation de la marge de solvabilité, mais cela revient au capital requis du risque de marché qui prend une place prédominante dans la part provisionnée pour les sinistres imprévus (86,87% du BSCR), ce qui est tout à fait normal parce que le marché boursier marocain est très volatil et nécessite une exigence du capital très importante.

## 4.5 Calcul de la Marge de risque

Nous présentons ci-dessous les résultats de la duration des flux du passif.

Maturité t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Dur(t)	<b>10.41</b>	<b>10.35</b>	<b>10.25</b>	<b>9.88</b>	<b>9.60</b>	<b>8.83</b>	<b>8.42</b>	<b>7.59</b>	<b>7.19</b>	<b>6.73</b>	<b>6.16</b>	<b>5.63</b>
Maturité t	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	
Dur(t)	<b>4.89</b>	<b>4.32</b>	<b>3.81</b>	<b>3.28</b>	<b>2.76</b>	<b>2.33</b>	<b>2.00</b>	<b>1.70</b>	<b>1.47</b>	<b>1.21</b>	<b>1.00</b>	

FIGURE 4.10 – La duration des flux du passif

Le calcul de la marge de risque est fondé sur l'hypothèse que l'entreprise de référence est elle-même afin d'utiliser le SCR de souscription vie précédemment calculé comme SCR de l'entreprise de référence.

$$RM = \frac{COC}{1 + r_1} Dur_{mod}(0) \times SCR(0)$$

Avec :

- $r_1 = 3,91\%$
- $COC = 6\%$
- $Dur_{mod}(0) = \frac{Dur(0)}{1+r_a} = 9,886ans$   
où  $r_a = 5\%$

$$AN : \quad RM = \frac{6\%}{1 + 3,91\%} \times 9,886 \times 40.112.565$$

$$\Rightarrow \quad RM = 22.899.425 \text{ dhs}$$

## 4.6 Bilan de l'entreprise sous la solvabilité II

Finalement, le bilan de l'entreprise construit dans le cadre de la Solvabilité II est présenté comme suit :

Actif		Passif		
Actif en valeur de marché	<b>634 748 241</b>	FP	<b>123 900 517</b>	
		Provisions techniques en (Best Estimate)	RM	<b>22 899 425</b>
			Best Estimate	<b>600 390 257</b>

FIGURE 4.11 – Bilan de l'entreprise sous la Solvabilité II

# Conclusion

Nous nous sommes intéressés dans ce mémoire à la réforme Solvabilité II dans le cadre de l'assurance vie épargne, et plus précisément dans l'utilisation de la formule standard pour le calcul des fonds propres de l'entreprise d'assurance. Ce calcul des fonds propres repose sur une évaluation des provisions techniques sous la nouvelle réglementation qui requiert un modèle actif-passif et une approche stochastique permettant de prendre en compte les risques financiers particuliers à cette activité. Grâce à l'outil de calcul du Best Estimate vie que j'ai contribué à faire évoluer tout au long de mon stage, nous avons pu analyser sur un produit épargne, l'impact de l'événement du décès et de l'option de rachat sur le Best Estimate et nous avons observé comment ces options et garanties pouvaient représenter un coût venant accroître le Best Estimate, nous avons aussi pu voir en quoi l'investissement en obligations et en actifs volatils comme les actions contribue également à gonfler le Best Estimate et à entamer ainsi les fonds propres de la société.

Les résultats de calcul sous les spécifications de Solvabilité II conduisent à une hausse significative des fonds propres. Bien sûr que cette hausse conduit à la diminution de la probabilité de ruine mais elle semble très élevée. C-à-d les résultats que nous avons trouvés sous le QIS 5 ont montré une forte augmentation des fonds propres. Or les risques pris en compte dans notre étude ne sont que ceux de souscription vie et de marché. Plusieurs risques n'ont pas été pris en considération comme le risque opérationnel et le risque des actifs intangibles. La prise en compte de ces risques non considérés engendrerait vraisemblablement une hausse supplémentaire des fonds propres, ce qui impliquerait un hyper coût dans les tarifs, d'où certaines entreprises seraient parfois amenées à se retirer du marché, au fait que les nouvelles normes appliquées pour déterminer le capital requis ne tiennent pas en compte le contexte économique et les particularités du marché financier de chaque pays. Toutefois, il est important de souligner que Solvabilité II a mis en place des mesures d'ajustements du capital requis. Aussi les chocs appliqués ont été faits selon l'exposition au risque du marché européen comme étant un agrégat standard que tous les marchés financiers du monde le ressemblent.

Pour conclure ce travail, il serait nécessaire de poser la question suivante :

**Les chocs définis par la nouvelle réforme reflètent-ils les degrés de risques du marché financier marocain ? Si non, est ce que La DAPS et la fédération des assurances ne doivent-elles pas envisager de déterminer un niveau de chocs adéquat au marché marocain ?**

# Bibliographie

- [1] Z.HAKOUCH, E.KABORE;(2010-2011); Solvency II : Risque de Rachat et de reversement.
- [2] M.CLAUDE, M.EDZIVANTALI;(2012-2013); Solvabilité II :Calcul du Best Estimate et du Solvency Capital Requirement.
- [3] E. OHNOUNA ;2008 ; Evaluation « Best Estimate » de contrats d'épargne en euros.
- [4] G. GERBER;(2009-2010); Allocation d'actifs sous Solvabilité II : cas de l'assurance vie épargne.
- [5] K.LAHLOU, A.TOUATI;(2012-2013);Conception d'une application pour le Pricing, la valorisation et la gestion des Swaps de taux.

## Articles

- Dossier Optimind - Solvabilité II : Point d'étape, actualités de la réforme et enjeux du moment.
- Dossier Optimind –Volatilités des marchés : quels impacts concrets pour les organismes assureurs ?
- EUROPEAN COMMISSION – QIS5 Technical Specifications

## webographie

- . <https://eiopa.europa.eu/>
- . <https://Ressources-actuarielles.net>

## Cours

- A. Oulidi, « Assurance vie », INSEA, 2012.
- F. Marri, « Séries chronologiques », INSEA, 2012.
- Y. El Qalli, « Econométrie de la finance », INSEA, 2012.
- Y. El Qalli, « Calcul stochastiques et simulation», INSEA, 2013.
- A. TOUHAMI, « Micro et macro économétrie avancée », INSEA,2013.

# Annexes

## Annexe 1

Produit	Age	Annee_effet	Anciennete	Frequence	Cumul_cotis_moy	Epargne t(0)	Sum_at_risk	Cumul_cotisations
226	19	2 012	2	1	440	900	100 000	880
226	20	2 011	3	1	460	1 496	100 000	1 380
226	20	2 012	2	1	1 106	2 251	100 000	2 212
226	20	2 013	1	1	1 333	1 348	100 000	1 333
226	21	2 011	3	4	4 922	15 215	400 000	14 765
226	21	2 012	2	4	4 047	8 236	400 000	8 093
226	21	2 013	1	2	2 593	2 608	200 000	2 593
226	22	2 011	3	1	145	464	100 000	436
226	22	2 012	2	4	11 302	23 025	400 000	22 604
226	22	2 013	1	7	29 249	29 625	700 000	29 249
226	23	2 011	3	5	7 189	22 574	500 000	21 567
226	23	2 012	2	12	35 347	72 379	1 200 000	70 694
226	23	2 013	1	11	19 681	19 877	1 100 000	19 681
226	24	2 009	5	2	8 052	43 155	200 000	40 261
226	24	2 010	4	2	11 142	47 258	200 000	44 568
226	24	2 011	3	13	39 963	124 341	1 300 000	119 890
226	24	2 012	2	24	71 791	146 873	2 400 000	143 582
226	24	2 013	1	33	70 559	71 383	3 300 000	70 559
226	25	2 008	6	3	5 186	22 939	300 000	31 118
226	25	2 009	5	6	9 977	51 940	600 000	49 883
226	25	2 010	4	16	43 839	186 208	1 600 000	175 355
226	25	2 011	3	29	98 612	306 110	2 900 000	295 835
226	25	2 012	2	41	122 857	223 386	4 100 000	245 715

FIGURE 4.12 – Extrait des données du portefeuille

Maturité	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
Tx sans_risque	3.91%	3.63%	3.72%	3.81%	4.91%	5.03%	5.16%	5.33%	5.48%	5.63%	5.66%	5.70%	5.75%	5.80%
Maturité	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28
Tx sans_risque	5.84%	5.84%	5.84%	5.84%	5.84%	5.84%	5.84%	5.84%	5.84%	5.84%	5.84%	5.84%	5.84%	5.84%
Maturité	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42
Tx sans_risque	5.84%	5.84%	5.84%	5.84%	5.84%	5.84%	5.84%	5.84%	5.84%	5.84%	5.84%	5.84%	5.84%	5.84%

FIGURE 4.13 – Taux sans risque

Age	TD88-90	q <sub>x</sub>	Age	TD88-90	q <sub>x</sub>	Age	TD88-90	q <sub>x</sub>	Age	TD88-90	q <sub>x</sub>	Age	TD88-90	q <sub>x</sub>
0	100000	0.8710%	23	97830	0.1564%	46	92727	0.4659%	69	67655	2.9650%	92	5763	24.52%
1	99129	0.0726%	24	97677	0.1566%	47	92295	0.5006%	70	65649	3.2080%	93	4350	26.18%
2	98057	0.0474%	25	97524	0.1548%	48	91833	0.5456%	71	63543	3.5535%	94	3211	27.90%
3	99010	0.0333%	26	97373	0.1551%	49	91332	0.6066%	72	61285	3.8737%	95	2315	29.37%
4	98977	0.0293%	27	97222	0.1563%	50	90778	0.6687%	73	58911	4.2352%	96	1635	31.80%
5	98948	0.0273%	28	97070	0.1586%	51	90171	0.7319%	74	56416	4.6051%	97	1115	33.63%
6	98921	0.0243%	29	96916	0.1620%	52	89511	0.8044%	75	53818	5.0764%	98	740	38.78%
7	98897	0.0212%	30	96759	0.1674%	53	88791	0.8785%	76	51086	5.5495%	99	453	41.94%
8	98876	0.0212%	31	96597	0.1739%	54	88011	0.9612%	77	48251	6.1491%	100	263	44.87%
9	98855	0.0202%	32	96429	0.1804%	55	87165	1.0601%	78	45284	6.8037%	101	145	47.59%
10	98835	0.0212%	33	96255	0.1912%	56	86241	1.1421%	79	42203	7.4924%	102	76	51.32%
11	98814	0.0213%	34	96071	0.2009%	57	85256	1.2257%	80	39041	8.2401%	103	37	54.05%
12	98793	0.0223%	35	95878	0.2107%	58	84211	1.3395%	81	35824	9.2285%	104	17	58.82%
13	98771	0.0223%	36	95676	0.2226%	59	83083	1.4431%	82	32518	10.1421%	105	7	85.71%
14	98749	0.0375%	37	95463	0.2367%	60	81884	1.5656%	83	29220	11.1499%	106	1	100.00%
15	98712	0.0456%	38	95237	0.2520%	61	80602	1.6861%	84	25962	12.2564%			
16	98667	0.0618%	39	94997	0.2642%	62	79243	1.8121%	85	22780	13.4109%			
17	98606	0.0872%	40	94746	0.2850%	63	77807	1.9433%	86	19725	14.6109%			
18	98520	0.1157%	41	94476	0.3112%	64	76295	2.0644%	87	16843	16.0898%			
19	98406	0.1311%	42	94182	0.3334%	65	74720	2.2016%	88	14133	17.7457%			
20	98277	0.1425%	43	93868	0.3761%	66	73075	2.3387%	89	11625	19.2344%			
21	98137	0.1528%	44	93515	0.4085%	67	71366	2.5320%	90	9389	20.7796%			
22	97987	0.1602%	45	93133	0.4359%	68	69559	2.7372%	91	7438	22.5195%			

FIGURE 4.14 – Table TD88-90

Ancienneté	Tx_rachat	Tx_rachat <sup>up</sup>	Tx_rachat <sup>down</sup>	Tx_rachat <sup>massif</sup>	Ancienneté	Tx_rachat	Tx_rachat <sup>up</sup>	Tx_rachat <sup>down</sup>	Tx_rachat <sup>massif</sup>
1	4.43%	6.65%	2.22%	30.00%	22	9.50%	14.25%	4.75%	30.00%
2	13.61%	20.42%	6.81%	30.00%	23	9.50%	14.25%	4.75%	30.00%
3	13.66%	20.49%	6.83%	30.00%	24	9.50%	14.25%	4.75%	30.00%
4	14.08%	21.12%	7.04%	30.00%	25	9.50%	14.25%	4.75%	30.00%
5	14.16%	21.24%	7.08%	30.00%	26	9.50%	14.25%	4.75%	30.00%
6	12.22%	18.33%	6.11%	30.00%	27	9.50%	14.25%	4.75%	30.00%
7	11.78%	17.67%	5.89%	30.00%	28	9.50%	14.25%	4.75%	30.00%
8	10.07%	15.11%	5.04%	30.00%	29	9.50%	14.25%	4.75%	30.00%
9	9.56%	14.34%	4.78%	30.00%	30	9.50%	14.25%	4.75%	30.00%
10	9.50%	14.25%	4.75%	30.00%	31	9.50%	14.25%	4.75%	30.00%
11	9.50%	14.25%	4.75%	30.00%	32	9.50%	14.25%	4.75%	30.00%
12	9.50%	14.25%	4.75%	30.00%	33	9.50%	14.25%	4.75%	30.00%
13	9.50%	14.25%	4.75%	30.00%	34	9.50%	14.25%	4.75%	30.00%
14	9.50%	14.25%	4.75%	30.00%	35	9.50%	14.25%	4.75%	30.00%
15	9.50%	14.25%	4.75%	30.00%	36	9.50%	14.25%	4.75%	30.00%
16	9.50%	14.25%	4.75%	30.00%	37	9.50%	14.25%	4.75%	30.00%
17	9.50%	14.25%	4.75%	30.00%	38	9.50%	14.25%	4.75%	30.00%
18	9.50%	14.25%	4.75%	30.00%	39	9.50%	14.25%	4.75%	30.00%
19	9.50%	14.25%	4.75%	30.00%	40	9.50%	14.25%	4.75%	30.00%
20	9.50%	14.25%	4.75%	30.00%	41	9.50%	14.25%	4.75%	30.00%
21	9.50%	14.25%	4.75%	30.00%	42	9.50%	14.25%	4.75%	30.00%

FIGURE 4.15 – Taux rachats choqués

## Annexe 2

### Processus SSL

Un processus  $X_t$  est dit Stationnaire au Sens Large (SSL) ssi :

- $E(X_t)$  est constante.
- $E(X_t^2) < \infty$
- La fonction d'auto-covariance est indépendante de  $t$  tq :  $\forall k \in \mathbb{Z}$

$$\gamma(k) = cov(X_t, X_{t+k}) = E\{(X_t - E(X_t))(X_{t+k} - E(X_{t+k}))\}$$

### Processus Auto régressif d'ordre 1 : AR(1)

On appelle processus autoregressif d'ordre 1, un processus  $X_t$  défini par :

$$X_t = \mu + \phi X_{t-1} + a_t$$

- $a_t \sim BB(0, \sigma^2)$
- $\mu, \phi \in \mathbb{R}^2$  : représentent les paramètres inconnus du modèle que l'on cherche à estimer.
- $\phi \neq 0$ .
- l'influence du passé se manifeste par une régression linéaire sur la dernière valeur.

### Processus TS

Un processus TS s'écrit :  $X_t = \alpha + \beta t + a_t$

avec :  $a_t \sim BB(0, \sigma^2)$

- Un processus TS est non SSL car  $E(X_t) = \alpha + \beta t$  dépend du temps  $t$ .
- Le processus  $X_t$  peut être stationnaire en retranchant à  $X_t$  la valeur estimée  $\hat{\alpha} + \hat{\beta}t$  par la méthode des moindres carrés ordinaires :
- On cherche  $\hat{\alpha}$  et  $\hat{\beta}$  qui minimisent l'erreur quadratique :

$$\sum_{j=1}^n (X_j - \alpha - \beta j)^2$$

### Processus DS

Un processus DS avec dérive s'écrit :

$$X_t = X_{t-1} + \beta + a_t, \quad a_t \sim BB(0, \sigma^2)$$

Un processus DS avec dérive est non stationnaire car :

- $E(X_t) = X_0 + \beta t$  : dépend du temps  $t$ .
- $Var(X_t) = t\sigma^2$

Un processus  $X_t$  avec ou sans dérive peut être stationnaire en retranchant à  $X_t$  la valeur  $X_{t-1}$  ;

- $X_t - X_{t-1} = \beta + a_t$  avec dérive.
- $X_t - X_{t-1} = a_t$  sans dérive.

Un processus DS peut se réécrire :  $(1 - B)X_t = \beta + a_t$

### Annexe 3

Valeurs critiques du test de Dickey Fuller simple pour la constante et la tendance

Modèle 2			
Constante			
T	1%	5%	10 %
100	3.22	2.54	2.17
250	3.19	2.53	2.16
500	3.18	2.52	2.16
$\infty$	3.18	2.52	2.16

Modèle 3						
	Constante			Trend		
T	1%	5%	10 %	1%	5%	10 %
100	3.78	3.11	2.73	3.53	2.79	2.38
250	3.74	3.09	2.73	3.49	2.79	2.38
500	3.72	3.08	2.72	3.48	2.78	2.38
$\infty$	3.71	3.08	2.72	3.46	2.78	2.38