

ROYAUME DU MAROC
._._*._*
HAUT COMMISSARIAT AU PLAN
._._*._*._*._*._*

INSTITUT NATIONAL
DE STATISTIQUE ET D'ECONOMIE APPLIQUEE

INSEA



Projet de Fin d'Etudes

N° 68

Analyse critique des tables de mortalité réglementaires

Préparé par : *M. Marouan ABOULOUAFA*

Sous la direction de : *M. Abderrahim OULIDI (INSEA)*
M. Mohamed BOUMASSAOUD (AXA)

Soutenu publiquement comme exigence partielle en vue de l'obtention du

Diplôme d'Ingénieur d'Etat

Option : ACTUARIAT-FINANCE

Devant le jury composé de :

- *M. Abderrahim OULIDI (INSEA)*
- *M. Lahcen MOUTIK (INSEA)*
- *M. Mohamed BOUMASSAOUD (AXA)*

Juin 2012

Résumé et mots clés

Résumé :

L'objet du présent travail est de critiquer l'utilisation des tables de mortalité françaises dans l'évaluation des engagements liés aux produits d'assurance-vie au Maroc. Tout d'abord, nous avons modélisé les tables de mortalité nationales, qui sont quinquennales, à l'aide de modèles paramétriques pour pouvoir extrapoler les quotients de mortalité à tous les âges, et comparer ces tables avec les tables réglementaires. Cette comparaison a montré ses faiblesses et a justifié le besoin d'utiliser des tables de mortalité d'expérience qui se basent sur l'expérience de mortalité du portefeuille des assurés. La méthodologie de construction des tables de mortalité d'expérience a été illustrée sur la base de données réelles de la population assurée en considérant une période d'expérience de 5 ans : fiabilisation de la base des données, construction de la table de mortalité brute, lissage des taux bruts, validation de la table et extrapolation de la mortalité aux grands âges. Cependant, même si cette table est le « BEST ESTIMATE » de la mortalité de la population assurée, elle reste exposée aux risques de modèle et de la non vérification de la loi des grands nombres à cause des petits échantillons, ce qui ne permet pas de mutualiser les risques de décès et/ou de vie au sein d'un portefeuille. Une méthode de déplacement de cette table a été proposée en vue de la rendre prudente.

Mots clés :

- table de mortalité
- kaplan Meier
- lissage
- âge ultime
- Value at Risk

Remerciements

Au titre de ce travail,

Je suis énormément reconnaissant envers M. BOUMASSAOUD, Risk manager à AXA et mon encadrant du stage, ses qualités professionnelle et relationnelles ne sont plus à démontrer. Il a accepté inconditionnellement ma demande stage, et il m'a intégré au sein de sa très bonne équipe d'actuaire (Laila, Massin, yassin et Ghofran), malgré les contraintes logistiques.

Je suis énormément reconnaissant envers M. OULIDI Abderrahim, mon professeur d'actuariat, pour ses qualités nombreuses, surtout sa disponibilité de tous les instants et son envie continue de booster les compétences de ses étudiants.

Je remercie Monsieur MOUTIK Lahcen, chef du département de mathématique et recherche opérationnelle à l'INSEA, et mon professeur de topologie et de programmation non linéaire, qui m'a fait l'honneur de participer au jury.

Table des matières

RESUME ET MOTS CLES	3
REMERCIEMENTS	4
TABLE DES MATIERES	5
LISTE DES ABREVIATIONS	8
LISTE DES TABLEAUX	9
LISTE DES FIGURES	10
INTRODUCTION GENERALE	11
CHAPITRE PRELIMINAIRE : APERÇU DE L'ORGANISME D'ACCUEIL	13
I. HISTORIQUE.....	13
II. ORGANIGRAMME DE L'ORGANISME D'ACCUEIL.....	14
III. CHIFFRES CLES DE L'EXERCICE 2011	14
CHAPITRE 1 : LA MODELISATION DEMOGRAPHIQUE EN ACTUARIAT.....	15
I. INTRODUCTION.....	15
II. L'ASSURANCE SUR LA VIE.....	15
III. LES BASES TECHNIQUES DE L'ASSURANCE VIE.....	16
IV. LE MODELE PROBABILISTE DE REPRESENTATION DE LA DUREE DE VIE HUMAINE.....	16
IV.1. La durée de vie considérée comme aléatoire	17
IV.2. La probabilité de survie.....	18
IV.3. La Probabilité de décès	18
IV.4. Le nombre moyen de survivants et la loi de survie	19
IV.5. Le taux instantanée de mortalité	21
V. LES TABLES DE MORTALITE.....	22
V.1. Typologie des tables de mortalité	23
V.2. L'allure classique d'une table de mortalité	24
VI. LE PRINCIPE DE TARIFICATION EN ACTUARIAT-VIE.....	26
VI.1. Définition.....	26
VI.2. Principe général de calcul des primes.....	26
VII. LA REGLEMENTATION ET L'ACTUARIAT	27
VIII. LES TABLES DE MORTALITE EN VIGUEUR AU MAROC.....	27
IX. CONCLUSION	29
CHAPITRE 2 : ETUDE DES TABLES DE MORTALITE NATIONALES	30
I. INTRODUCTION.....	30
II. LOI DE WEIBULL	31
II.1. Modèle.....	31
II.2. Résultats	32
III. LOI DE MAKEHAM	33
III.1. Modèle.....	33
III.2. Résultats	34
IV. LOI DE HELIGMAN-POLLARD.....	35
IV.1. Modèle	35

IV.2. Résultats	36
V. CHOIX DU MEILLEUR MODELE POUR LES DEUX SEXES	37
VI. CONCLUSION	39
CHAPITRE 3 : COMPARAISON DE LA TABLE DE MORTALITE REGLEMENTAIRE AVEC LA TABLE DE MORTALITE NATIONALE	40
I. INTRODUCTION	40
II. COMPARAISON GRAPHIQUE	40
III. COMPARAISON DES COUTS D'UNE RENTE	42
IV. EVALUATION DES SURCOUTS	43
V. RECHERCHE D'UN TAUX TECHNIQUE EQUIVALENT	44
VI. LE RECOURS AUX TABLES D'EXPERIENCE	45
VII. LA METHODOLOGIE GENERALE DE CONSTRUCTION D'UNE TABLE D'EXPERIENCE	45
VII.1. Validation des données initiales et justification du contexte d'analyse	46
VII.2. Estimation des taux annuels bruts de décès	46
VII.3. Lissage de taux annuels de décès	46
VII.4. La Validation de la table construite	47
VII.5. Les Méthodes d'extrapolation dans le cas de données insuffisantes	47
VIII. CONCLUSION	47
CHAPITRE 4 : LA CONSTRUCTION DE LA TABLE DE MORTALITE BRUTE	48
I. INTRODUCTION	48
II. LES DONNEES DE LA POPULATION ASSUREE	48
II.1. Présentation des fichiers	48
II.1. La préparation des données	50
III. LES DIFFERENTS TYPES DE DONNEES	51
IV. METHODOLOGIE DE L'ESTIMATION EN PRESENCE DE DONNEES COMPLETES	52
V. LE PROVISIONNEMENT DES DECLARATIONS TARDIVES	53
VI. METHODE ACTUARIELLE CLASSIQUE	55
VII. METHODE DE KAPLAN-MEIER	57
VIII. METHODE DES EXPOSITIONS AU RISQUE	58
IX. METHODE SIMPLISTE	59
X. COMPARAISON DES METHODES	60
XI. CONCLUSION	61
CHAPITRE 5 : LE LISSAGE DE LA TABLE DE MORTALITE BRUTE	62
I. INTRODUCTION	62
II. LISSAGES PARAMETRIQUES	63
II.1. Méthode des splines	63
II.1.1. Présentation.....	63
II.1.2. Résultats : spline carré à un noeuds.....	64
II.2. Loi de la famille Gompertz-Makeham	66
II.2.1. Présentation.....	66
II.2.2. Résultats.....	66
III. LISSAGES NON PARAMETRIQUES	67
III.1. La méthode des moyennes mobiles	67
III.1.1. Présentation.....	67
III.1.2. Résultats.....	68
III.2. La méthode Wittaker-Henderson	69
III.2.1. Présentation.....	69
III.2.2. Résultats.....	70
IV. MODELES RELATIONNELS	70
IV.1. Modèles de Cox	70
IV.1.1. Présentation.....	70
IV.1.1. Résultats	71
V.2. Modèle de Brass	72
V.2.1. Présentation.....	72
V.2.2. Résultats	73
VI. CONCLUSION	74

CHAPITRE 6 : LA VALIDATION DE LA TABLE CONSTRuite.....	75
I. INTRODUCTION.....	75
II. TEST DE CHI-DEUX D'AJUSTEMENT	76
III. CRITERE DE FIDELITE AUX TAUX BRUTS	77
IV. CRITERE DE REGULARITE DES TAUX LISSES	78
V. CHOIX DE LA MEILLEURE TABLE	78
VI. CONCLUSION	79
CHAPITRE 7 : L'EXTRAPOLATION DE LA MORTALITE AUX GRANDS AGES.....	80
I. INTRODUCTION.....	80
II. METHODE DE DENUIT ET GODERNIAUX	80
III. METHODE DE COALE ET KISKER	81
IV. LE MODELE LOGISTIQUE	83
V. L'AJUSTEMENT MECANIQUE.....	83
V.1. <i>Présentation</i>	83
V.2. <i>Résultats</i>	83
VI. L'AJUSTEMENT DE JAUMAIN	84
VI.1. <i>Présentation</i>	84
VI.2. <i>Résultats</i>	85
VII. CHOIX DE LA METHODE D'EXTRAPOLATION.....	86
VIII. CONCLUSION	88
CHAPITRE 8 : LE DEPLACEMENT DE LA TABLE	89
I. INTRODUCTION.....	89
II. SIMULATION DE SCENARIOS DEMOGRAPHIQUES SELON LA TABLE D'EXPERIENCE	89
II.1. <i>Présentation de la méthode</i>	89
II.2. <i>Résultats</i>	91
III. IMPACT DES SCENARIOS DEMOGRAPHIQUES SUR LA VALEUR ACTUELLE DE L'ENGAGEMENT DE L'ASSUREUR	93
IV. LA MESURE DU RISQUE LIE AUX ENGAGEMENTS DE L'ASSUREUR	93
IV.1. <i>Présentation</i>	93
IV.2. <i>Résultats</i>	95
V. LA METHODOLOGIE DE DEPLACEMENT DE LA TABLE	95
V.1. <i>Présentation de la méthode</i>	95
V.2. <i>Résultats</i>	97
VI. CONCLUSION	98
CONCLUSION GENERALE	99
BIBLIOGRAPHIE	101
ANNEXES.....	102
ANNEXE I : LES TABLES DE MORTALITE EN VIGUEUR AU MAROC	103
ANNEXE II : TABLES DE MORTALITE DU MAROC POUR LES PERIODES : 1980, 1986-1988, 2009-2010	104
ANNEXE III : RESULTATS DES ESTIMATIONS DES TAUX DE MORTALITE BRUTS.....	105
ANNEXE IV : RESULTATS DES METHODES DE LISSAGE.....	106

Liste des abréviations

CERED	Centre d'études et de recherches démographiques
DAPS	Direction des assurances et de prévoyance sociale
ENDPR	Enquête nationale démographique à passages répétés
HCP	Haut commissariat au plan
INSEE	Institut national de la statistique et des études économiques
TD 88-90	Table de mortalité de la population masculine française 1988-1990
TV 88-90	Table de mortalité de la population féminine française 1988-1990

Liste des tableaux

Tableau 1: Structure du chiffre d'affaires de l'Exercice 2011 (en millions de DH).....	14
Tableau 2: Paramètres de Weibull pour les périodes 1980, 1986-1988, 2009-2010	32
Tableau 3: Paramètres de Makeham pour les périodes 1980, 1986-1988, 2009-2010.....	34
Tableau 4: $\log(qx)$ - ajustement de Heligman-Pollard - Maroc 2009-2010	36
Tableau 5: comparaison des ajustements paramétriques.....	38
Tableau 6: prix de rentes viagères selon la table TV 88-90	42
Tableau 7: prix de rentes viagères selon la table masculine Marocaine 2009-2010.....	42
Tableau 8 : prix de rentes viagères selon la table féminine marocaine 2009-2010.....	42
Tableau 9: surcouts des tables réglementaires par rapport aux tables masculines	43
Tableau 10: surcouts des tables de réglementaires par rapport aux tables féminines.....	43
Tableau 11: taux technique équivalent par rapport à la table masculine	44
Tableau 12: taux technique équivalent par rapport à la table féminine	44
Tableau 13: triangle de développement (déclarations tardives)	54
Tableau 14: résultats de l'ajustement COX	71
Tableau 15: ajustement de qx par la méthode de Brass.....	73
Tableau 16: tableau du test de Khi-deux pour les différents lissages.....	76
Tableau 17: critère de fidélité 1	77
Tableau 18: critère de fidélité 2	77
Tableau 19: comparaison régularité	78
Tableau 20: valeurs de quantiles des engagements de l'assureur selon la table d'expérience	95
Tableau 21: valeurs des coefficients de déplacement de la table selon les cas couverts	97

Liste des figures

Figure 1: Logo d'Axa assurances Maroc	13
Figure 2: Organigramme général d'AXA Assurances Maroc.....	14
Figure 3: diagramme instants de décès	19
Figure 4: les présentations pratiques d'une table de mortalité	23
Figure 5: allure classique d'une courbe de probabilités de décès	25
Figure 6: allure classique de la transformation logarithmique des probabilités de décès.....	25
Figure 7: tables de mortalité réglementaires	29
Figure 8: $\log(qx)$ - ajustement de Weibull - Maroc 2009-2010	32
Figure 9: $\log(qx)$ - ajustement de Makeham - Maroc 2009-2010	34
Figure 10: $\log(qx)$ - ajustement de Heligman-Pollard - Maroc 2009-2010.....	37
Figure 11: $\log(qx)$ - choix du meilleur modèle d'ajustement –Maroc 2009-2010.....	38
Figure 12: représentation simultanée: $\log(qx)$ nationale et réglementaire	40
Figure 13: Méthodologie de construction d'une table d'expérience	45
Figure 14: la base de données de la population assurée	50
Figure 15: application de la méthode chain-ladder	55
Figure 16: estimateur actuariel classique	56
Figure 17: estimateur de Kaplan Meier.....	58
Figure 18: estimateur exposition au risque	59
Figure 19: estimateur méthode simpliste	60
Figure 20: comparaison des estimations brutes.....	60
Figure 21: $\log(qx)$ - ajustement par la méthode des splines	65
Figure 22: ajustement par la méthode de Gompertz-Makeham	67
Figure 23: $\log(qx)$ - ajustement par la méthode de la moyenne mobile	68
Figure 24: ajustement par la méthode de Wittaker-Henderson	70
Figure 25: ajustement $\log(\mu_{qx})$ modèle de COX	71
Figure 26: ajustement de qx par le modèle de COX	72
Figure 27: représentation des logits: assurés, tables: TD,TV et nationale.....	73
Figure 28: ajustement des logits.....	74
Figure 29: $\log(qx)$ - ajustement par la méthode de Brass.....	74
Figure 30: $\log(qx)$ - les différents résultats du lissage	75
Figure 31: les lissages retenus suite au test de Khi-deux	77
Figure 32: $\log(qx)$ - Le lissage retenu	78
Figure 33: résultats de l'ajustement mécanique, $k=1,2,3$	84
Figure 34: résultats de l'ajustement de Jaumain, $k=1,2,3$	86
Figure 35: comparaison entre les ajustements mécaniques et Jaumain, $k=3$	86
Figure 36 : la table de mortalité corrigée au point de raccord de l'extrapolation	87
Figure 37: $\log(qx)$ - La table de mortalité proposée.....	87
Figure 38: simulation du nombre de survivants par âge selon la table d'expérience.....	91
Figure 39: quotients de mortalité bruts sur la base de simulations de scénarios selon la table d'expérience	92
Figure 40: simulation du nombre d'années restant à vivre selon la table d'expérience	92
Figure 41: simulation de valeurs actuelles de l'engagement de l'assureur selon la table d'expérience	93
Figure 42: exemple de calcul par la méthode Monte-Carlo avec 1000 simulations.....	94
Figure 43: les différents déplacements de la table d'expérience.....	98

Introduction générale

Le Contexte du sujet,

On peut définir une opération d'assurance-vie comme étant un accord financier passé entre :

-un organisme d'assurances (l'assureur) qui prend un engagement irrévocable de verser des prestations monétaires en fonction de la réalisation d'événements aléatoires qui dépendent de la durée de vie humaine.

et :

-un souscripteur prenant l'engagement révoquant de verser à dates convenues des primes ou cotisations en fonction de la réalisation d'événements aléatoires viagers.

Abstraction faite des frais de gestion et de commercialisation, l'évaluation de ces deux engagements se base sur deux éléments essentiels :

- Un taux d'intérêt pour actualiser les engagements.
- la loi de survenance de ces événements touchant la durée de vie humaine, donnée selon une table qu'on appelle table de mortalité.

Par ailleurs, ces paramètres ne sont pas laissés au libre choix de l'assureur, mais contrôlés par un organisme de réglementation qui surveille l'activité de l'assurance. Cette surveillance trouve son fondement dans la protection du consommateur preneur d'assurance.

La Problématique,

Actuellement, le législateur Marocain oblige les assureurs à évaluer leurs engagements envers les assurés en se basant sur des tables de mortalité observées sur la population française pendant les années 1988-1990.

En fait, les praticiens de l'assurance-vie le savent très bien, mais cette pratique continue toujours à sévir dans le marché Marocain quoiqu'elle contredise largement tous les principes d'évaluation des risques et ne repose sur aucun fondement scientifique robuste.

L'objet de l'étude

L'objectif de présent travail est d'étudier cette problématique des tables de mortalité non marocaines imposées dans l'évaluation des engagements pris pas les assureurs, et d'illustrer la méthodologie de construction des tables de mortalité d'expérience sur la base des données de la population assurée.

Les étapes du travail,

Le présent travail a été subdivisé en neuf chapitres :

Le premier chapitre sera consacré à la présentation du modèle probabiliste de la durée de vie humaine, et son utilisation pratique en actuariat-vie. Ce chapitre est censé initier le lecteur à la problématique.

Le second chapitre sera axé essentiellement sur la constitution d'une base de données de la mortalité Marocaine et la modélisation des probabilités de survie à tous les âges.

Le troisième chapitre comparera les tables de mortalité réglementaires et celles nationales selon différents aspects.

Le quatrième chapitre présentera la méthodologie de construction des tables de mortalité d'expérience et présentera la base de données de la population assurée sur laquelle nous nous baserons pour construire une table d'expérience à travers le reste de ce travail.

Le cinquième chapitre exposera quatre méthodes de construction des quotients de mortalité bruts en présence de données tronquées et censurées : méthode actuarielle classique, méthode de Kaplan Meier, méthode des expositions au risque et une méthode simpliste.

Le sixième chapitre abordera des méthodes de lissage sur les résultats bruts observés sur l'échantillon : lissages paramétriques, lissages non paramétriques et modèles relationnels.

Le septième chapitre traitera de la dernière étape de création d'une table d'expérience, à savoir : la validation de la table, qui se base avant tout sur la validation du modèle statistique, puis faire un arbitrage entre les deux critères : fidélité et régularité.

Le huitième chapitre présentera des modèles d'extrapolation de la mortalité aux grands âges, et extrapolera la mortalité aux grands âges à l'aide des deux méthodes : ajustement mécanique et ajustement de Jaumain à cause du manque de données au-delà de l'âge 69.

Le neuvième chapitre proposera une méthodologie de déplacement de la table basée sur l'indicateur : la Value-At-Risk.

Chapitre Préliminaire : Aperçu de l'organisme d'accueil

I. Historique



Figure 1: Logo d'Axa assurances Maroc

- Novembre 1996 : AXA arrive au Maroc. La marque fait son apparition à la faveur du rapprochement international AXA-UAP (union des assurances de Paris). Jusque-là, l'UAP était présente au Maroc à travers Assurance Al Amane qui deviendra pour la circonstance AXA Al Amane.
- Septembre 1999 : AXA Al Amane devient AXA-ONA, holding financier né d'un accord de partenariat entre AXA et ONA, 1er groupe privé marocain exerçant des activités industrielles et financières.
- Mai 2000 : AXA Assurance Maroc voit le jour avec la fusion entre AXA Al Amane et la Compagnie Africaine d'Assurance. Le Groupe AXA détient 51% du capital de la nouvelle Compagnie tandis que les 49% reviennent au Groupe ONA.
- Décembre 2006 : Enfin, dernier fait marquant de l'histoire d'AXA Assurance Maroc, le rachat par le Groupe AXA des 49% détenus dans le capital de la Compagnie par le Groupe ONA. En décembre 2006, AXA Assurance Maroc devient alors filiale à 100% du Groupe AXA.

II. Organigramme de l'organisme d'accueil

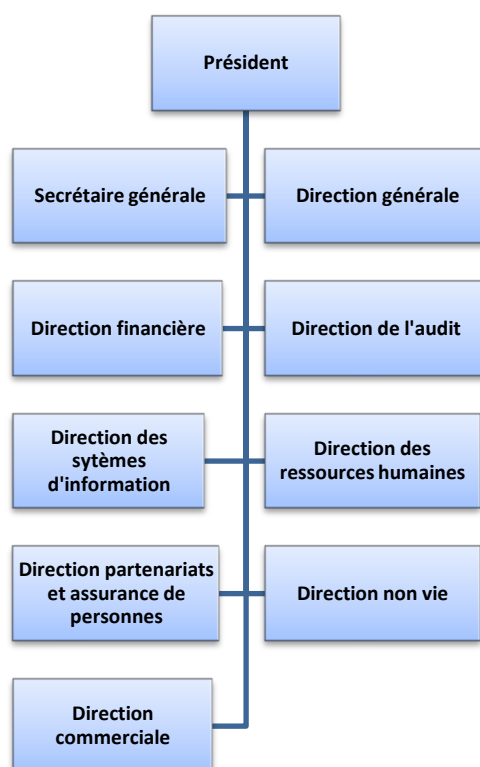


Figure 2: Organigramme général d'AXA Assurances Maroc

III. Chiffres clés de l'exercice 2011

	Chiffre d'affaires	Part marché	Evolution 2010/2011
Assurance vie et capitalisation	7 650,60	32,0%	15,9%
Automobile	7 531,30	31,5%	6,4%
Accidents corporels	2 799,60	11,7%	2,7%
Accidents de travail	1 957,30	8,2%	3,3%
Incendie	1 062,70	4,4%	2,9%
Assistance-Crédit-Caution	763,70	3,2%	3,4%
Transport	730,00	3,1%	9,2%
Responsabilité civile générale	490,50	2,1%	7,0%
Autres opérations non vie	405,60	1,7%	11,5%
Risques techniques	339,50	1,4%	113,7%
Acceptations en réassurance	163,20	0,7%	-23,0%
Total	23 893,90	100,0%	9,2%

Tableau 1: Structure du chiffre d'affaires de l'Exercice 2011 (en millions de DH)

Chapitre 1 : La modélisation démographique en actuariat

I. Introduction

L'assurance vie est un large champ d'application des probabilités. L'alea repose principalement sur la variable aléatoire durée de vie humaine. L'objet de ce chapitre est de présenter le modèle probabiliste de la durée de vie humaine, ainsi que l'application de la démographie en actuariat. Ce chapitre est censé initier le lecteur à la problématique.

II. L'assurance sur la vie

On appelle assurance sur la vie (ou assurance-vie), une opération dont les flux (montants et/ou échanges des capitaux) dépendent de la survie ou du décès d'une ou plusieurs personnes, pour laquelle les risques liés à la durée aléatoire de la vie humaine sont pris en charge par un organisme spécialisé (le plus souvent une compagnie d'assurance sur la vie) qui les mutualise dans un ensemble suffisamment étendu d'opérations similaires, de sorte qu'on puisse appliquer la loi des grands nombres.

Un contrat d'assurance-vie peut couvrir :

-le risque de décès : le contrat garantit en cas de décès de la personne assurée au cours d'une période de temps donnée des prestations (capitaux ou rentes) en faveur de bénéficiaires désignés.

-le risque de survie : le contrat garantit des prestations (capitaux ou rentes) en faveur de l'assuré si celui-ci survit à des échéances fixées.

III. Les bases techniques de l'assurance vie

Le principe d'équivalence actuarielle impose l'égalité entre l'espérance de la valeur actuelle des prestations assurées d'une part, et l'espérance de la valeur actuelle des primes pures qui seront payées d'autre part.

La tarification d'une assurance sur la vie suppose donc que l'on ait défini :

-les taux d'intérêt de base duquel on calculera des valeurs actuelles des prestations et des primes, on appelle ce taux le taux d'intérêt technique.

-la loi de survenance des événements assurés (survie de l'assuré à une date donnée ou décès avant cette date donnée), cette loi s'exprime le plus souvent par une table de mortalité donnant la probabilité pour qu'un assuré d'âge x ($x=0,1,2,\dots$) décède avant d'avoir atteint l'âge $x+1$.

-Les divers chargements pour déterminer les primes commerciales.

Ces trois éléments : taux d'intérêt technique, table de mortalité et chargements, constituent les bases techniques du tarif.

IV. Le modèle probabiliste de représentation de la durée de vie humaine

Les calculs actuariels de l'assurance vie sont basés sur un modèle probabiliste simple que l'on va présenter. Il s'agit essentiellement d'une famille de variables aléatoires indexées par l'âge de l'assuré.

IV.1. La durée de vie considérée comme aléatoire

On considère un individu à la date de sa naissance prise pour origine du temps et l'on note T_0 sa durée de vie future. La fonction de répartition de la variable aléatoire T_0 est donnée par :

$$F_0(t) = \begin{cases} 0 & \text{Si } t \leq 0 \\ P(T_0 < t) & \text{Si } t > 0 \\ 1 & \text{Si } t \geq \omega \end{cases}$$

Où ω est la borne supérieure de la durée de la vie humaine.

En matière d'assurance vie, on est naturellement amené à considérer un individu ayant déjà atteint un âge x positif. On dit que l'on est en présence d'une tête d'âge x , ce que l'on note (x) , dans ce cas, on désigne par T_x la durée de vie future ou résiduelle de (x) . Pour cet individu, nous avons donc, puisque $T_0 > x$, $T_0 = x + T_x$.

Si l'on note par F_x la fonction de répartition de T_x , nous aurons, pour tout réel strictement positif t ,

$$F_x(t) = \frac{F_0(x+t) - F_0(x)}{1 - F_0(x)}$$

Nous avons introduit une famille de variables aléatoires T_x , indexées par l'âge x , ainsi que la famille de leurs lois de probabilité données par les fonctions de répartition F_x . L'assureur s'intéresse aux valeurs de F_x lorsque t appartient à l'intervalle $[0, \omega - x]$ où ω désigne la borne supérieure de la durée de la vie humaine mentionnées ci-dessus.

Nous supposerons dans toute la suite que la fonction de répartition F_x est continue, strictement croissante et admet une densité de probabilité notée f_x .

Compte tenu de la relation (1), nous avons aussi pour tout réel t strictement positif,

$$f_x(t) = \frac{f_0(x+t)}{1-F_0(x)}$$

IV.2. La probabilité de survie

Nous allons présenter les notions de probabilité de survie et de probabilité de décès d'un individu, ainsi que leur notation usuelle. Ces deux probabilités sont à la base des divers calculs effectués par les assureurs pour évaluer le risque qu'ils prennent en charge en assurant un souscripteur unique ou, plus généralement, un groupe de souscripteurs.

Conformément à la notation actuarielle internationale, la fonction de survie est notée ${}_t p_x$ et est définie pour tout réel t strictement positif par :

$${}_t p_x = P(T_x > t / T_x > 0) = 1 - F_x(t)$$

Cela définit une fonction des deux variables t et x , souvent considérée comme fonction de t seul quand x est fixé.

Remarque

Puisqu'en pratique la vie humaine est bornée par ω , on a pour tout réel $t > \omega - x$, ${}_t p_x = 0$. Par ailleurs, on a ${}_0 p_x = 1$.

Notation

Notons que ${}_1 p_x$ est appelé taux annuel de vitalité et est noté tout simplement p_x .

IV.3. La Probabilité de décès

Considérons une tête d'âge x ainsi que deux nombres t et $h > 0$. La probabilité de décès de (x) entre les instants t et $t+h$ est notée ${}_t / h q_x$ et est définie par :

$${}_{t/h}q_x = P(t < T_x < t+h / T_x > 0)$$

Il s'agit donc de la probabilité de décès e l'individu sur un intervalle de temps donné, sachant qu'il était vivant à l'âge x.

Le diagramme suivant représente les différents instants considérés. Ils sont repérés, soit par rapport à l'âge initial x, soit par rapport à l'instant initial d'observation pris pour origine des temps.

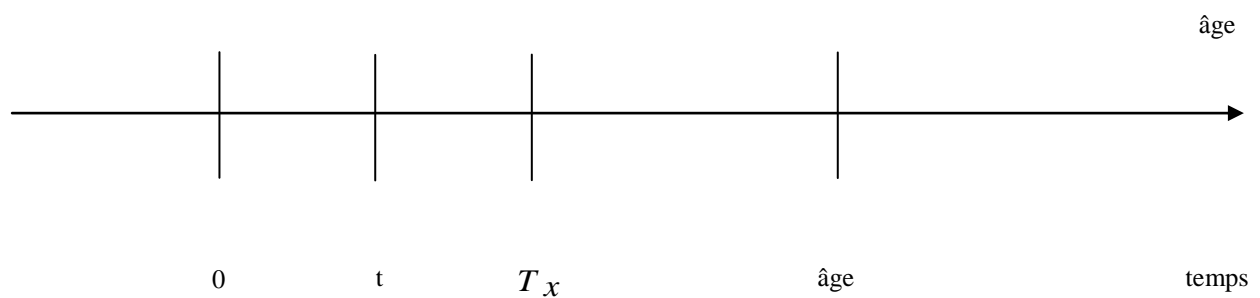


Figure 3: diagramme instants de décès

IV.4. Le nombre moyen de survivants et la loi de survie

Jusqu'à présent nous n'avons considéré qu'un seul individu. Nous allons donc considérer maintenant un groupe composé de deux ou plusieurs individus. Après avoir précisé les hypothèses, nous introduirons les nombres moyens de vivants à un âge donné et nous les relierons aux probabilités de survie. Par ailleurs, nous proposerons une méthode simple pour estimer le nombre d'individus vivants à une époque future t. Au préalable il est utile de définir la notion de groupe homogène de risques à laquelle on se réfère souvent par la suite, et qui est d'un usage constant dans la pratique de l'assurance.

L'établissement des tarifs de l'assurance vie est basé sur l'étude statistique de la mortalité dans la population d'assurés réels ou potentiels. Le fait de considérer une population au lieu d'un seul individu conduit naturellement à répartir les assurés en groupes « homogènes » qui présentent des caractéristiques identiques vis-à-vis du risque décès.

La classification dépend de la nature et du nombre des critères retenus. On peut noter toutefois que, du point de vue statistique, la division d'une population en sous-populations, homogènes ou non, présente l'inconvénient de diminuer la précision de l'estimation des paramètres pour chaque sous-population. En revanche, la précision est généralement améliorée pour l'estimation des paramètres de la population totale.

Etant donné un groupe homogène d'individus, on observe l'évolution de la mortalité sur un certain nombre d'années. On suppose qu'à l'intérieur de ce groupe et à un instant pris comme origine le nombre des individus d'âge x est L_x . Puisque ce groupe est homogène, la probabilité de décès au cours d'une année donnée est identique pour chacun de ces L_x individus.

Dans le groupe considéré, nous définissons pour tout i , l'indicateur de survie de l'individu i à l'instant t par

$$X_i(t) = \begin{cases} 1 & \text{Si l'individu } i \text{ est vivant à l'instant } t \\ 0 & \text{Sinon} \end{cases}$$

Pour tout i , suit la loi de Bernoulli de paramètre ${}_t p_x$.

Grâce aux notations précédentes, le nombre de survivants à l'instant t du groupe initial comprenant L_x individus peut s'écrire

$$L_{x+t} = \sum_{i=1}^{L_x} X_i(t)$$

Supposons aussi que les individus de ce groupe décèdent indépendamment les uns des autres.

Les hypothèses faites entraînent donc que les variables aléatoires $X_i(t)$ sont indépendantes et de même loi de Bernoulli $B({}_t p_x)$, d'où l'on déduit que la variable aléatoire L_{x+t} suit la loi binomiale $B(L_x, {}_t p_x)$ dont l'espérance mathématique et la variance sont données par :

$$E(L_{x+t}) = L_x \times {}_t p_x \text{ et } \text{Var}(L_{x+t}) = L_x \times {}_t p_x \times {}_t q_x$$

Pour tout $t > 0$, on note $E(L_{x+t})$ par l_{x+t} . Il s'agit de la moyenne théorique du nombre de vivants à l'âge $x+t$. Cette quantité est souvent appelée nombre moyen, ou nombre probable, de vivants à l'âge $x+t$. Dans le cas où L_x est supposé connu, on a :

$$E(L_x) = l_x$$

On en tire la relation entre les probabilités de survie et les nombres moyens théoriques de vivants.

$${}_t p_x = \frac{l_{x+t}}{l_x}$$

Remarque :

en particulier pour l'âge limite ω nous avons, quel que soit $\alpha > 0$,

$$l_{\omega+\alpha} = l_x \times {}_{\omega-x+\alpha} p_x = 0$$

On dit que l'ensemble des valeurs l_y pour $x \leq y \leq \omega$ constitue la loi de survie pour les individus d'âge x . Il s'agit donc de la suite des nombres moyens de vivants pour tous les âges supérieurs ou égaux à x .

IV.5. Le taux instantané de mortalité

La mortalité est un phénomène continu dans le temps, donc pour passer à une modélisation plus concrète, nous allons passer à une écriture en temps continu :

$$x \in [0, \omega] \subset \mathbb{R}$$

Pour ce faire, nous supposons approximativement que la fonction l_x est continue et dérivable, et définissons le taux instantané de mortalité par :

$$\begin{aligned}
 \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} h q_x &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{l_x} \frac{l_x - l_{x+h}}{h} \\
 &= -\frac{1}{l_x} \frac{d}{dx} l_x \\
 &= -\frac{d}{dx} \ln l_x \\
 &= \mu_x
 \end{aligned}$$

Le taux instantané de mortalité est noté μ_x

Lien entre taux instantané de mortalité et probabilité de survie

$$\mu_{x+t} = -\frac{d}{dt} \ln l_{x+t}$$

Donc :

$$\int_0^n \mu_{x+t} dt = -[\ln l_{x+t}]_0^n = -(\ln l_{x+n} - \ln l_x) = -\ln \frac{l_{x+n}}{l_x} = -\ln {}_n p_x$$

Et donc

$${}_n p_x = \exp\left(-\int_0^n \mu_{x+t} dt\right)$$

V. Les tables de mortalité

Les tables de mortalité, appelées aussi tables de survie, fournissent pour chaque âge entier x le nombre moyen de survivants l_x d'une population comportant initialement l_0 individus d'âge 0 (nouveau-nés). Autrement dit, ces tables donnent la loi de survie correspondant à l'âge $x=0$. Par différence, on en déduit la valeur d_x du nombre moyen de décès entre les âges x et $x+1$:

$$d_x = l_x - l_{x+1}$$

Le taux annuel de mortalité q_x est donc donné par :

$$q_x = \frac{d_x}{l_x}$$

Il est important de noter que les chiffres présentés dans les tables de mortalité sont des estimations de valeurs théoriques inconnues. La construction des tables de mortalité est généralement basée sur des études démographiques (recensements) et nécessite des traitements statistiques appropriés.

âge	l_x	âge	q_x	âge	p_x
0	10000	0	0,001	0	0,999
1	999	1	0,002	1	0,998
2		2		2	
3		3		3	
4		4		4	
...		
...		
$\omega-1$	12	$\omega-1$	0,999	$\omega-1$	
ω	6	ω	1	ω	0
$\omega+1$	0				

Figure 4: les présentations pratiques d'une table de mortalité

V.1. Typologie des tables de mortalité

Les tables de mortalité constituent le référentiel central de toutes les activités d'une compagnie d'assurance exerçant dans la branche vie, puisqu'elles permettent d'estimer la probabilité de survie ou de décès des personnes assurées. Il existe deux catégories de tables :

- Les tables de mortalité statiques, périodiques ou instantanées, ces tables caractérisent la mortalité de la population actuelle dans sa globalité : une même probabilité de décès est appliquée quelle que soit la génération de la personne assurée, qui peut être identique pour toute la population ou segmentée suivant des variables influençant de manière significative le risque de décès (Homme/Femme, Fumeur/Non Fumeur, type de contrat).
- Les tables dynamiques ou prospectives, dites de « génération », ce sont des tables bidimensionnelles : deux variables expliquent le décès, à la fois l'âge de l'assuré mais aussi le temps. Les probabilités de survenance du risque de mortalité intègrent les évolutions potentielles de la mortalité avec le temps (recul de la mortalité, phénomène de longévité).

V.2. L'allure classique d'une table de mortalité

L'âge est le facteur qui a le plus d'influence sur la probabilité de décès. C'est pourquoi il constitue le facteur essentiel dans les calculs actuariels d'assurance-vie. Classiquement, On a une variation de q_x du type suivant :

- De 0 à 11 ans : Décroissance rapide
- De 10 à 11 ans : Probabilité de décès la plus faible
- De 11 à 20 ans : Croissance assez rapide
- De 20 à 40 ans : Croissance lente. Une décroissance entre 20 et 25
- De 40 à 100 ans : Croissance exponentielle

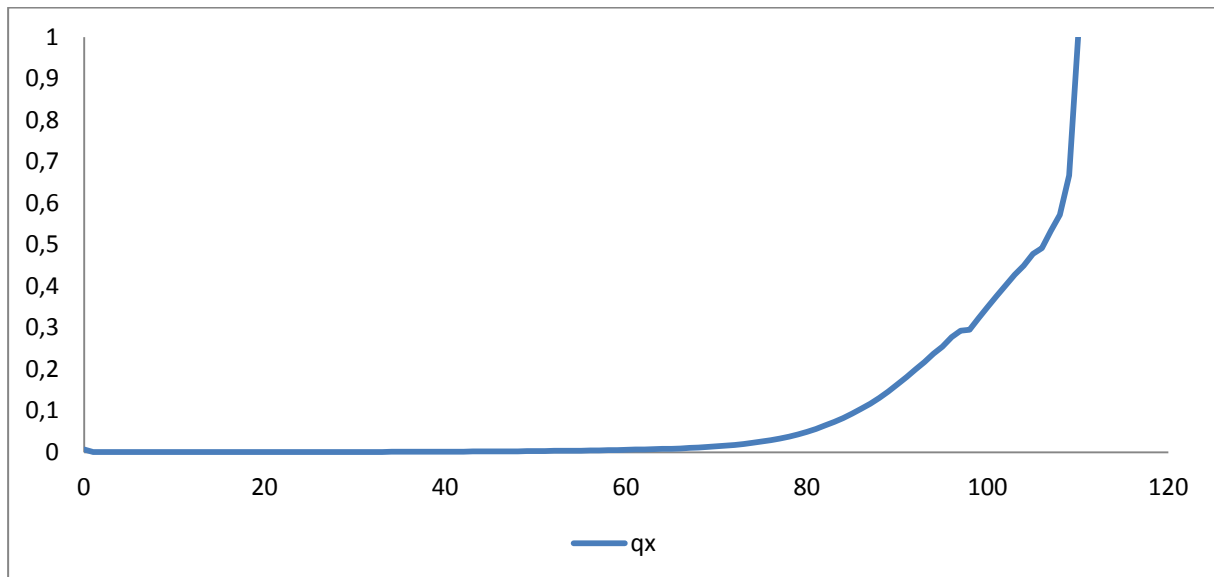


Figure 5: allure classique d'une courbe de probabilités de décès

Cette représentation ne permet pas de connaître l'allure de la courbe aux petits âges, les praticiens ont plutôt l'habitude d'utiliser la représentation logarithmique de base 10.

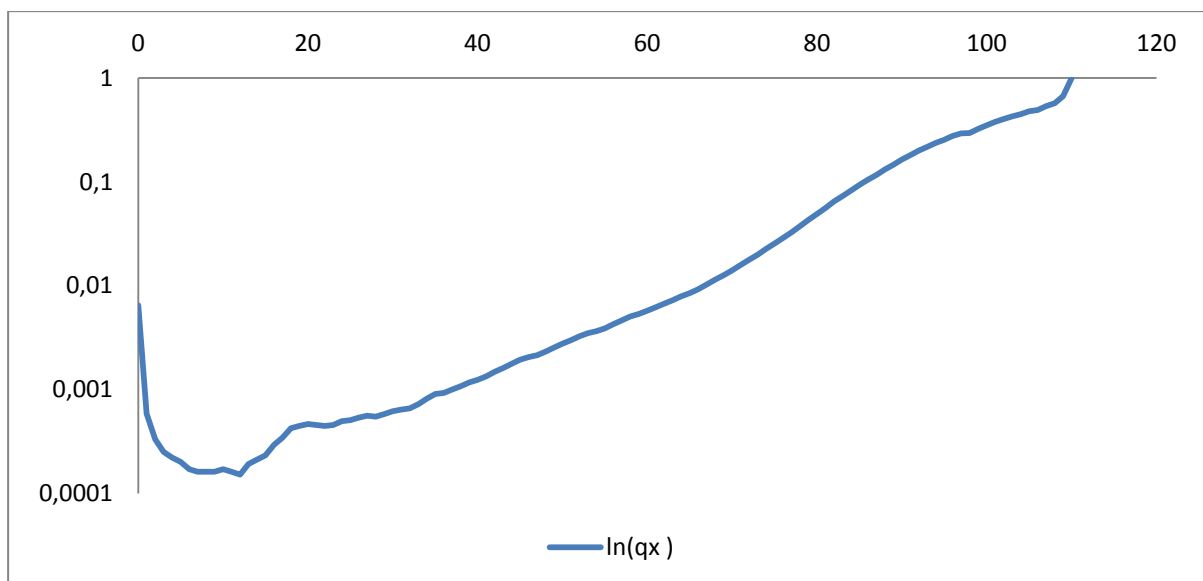


Figure 6: allure classique de la transformation logarithmique des probabilités de décès

VI. Le principe de tarification en actuariat-vie

VI.1. Définition

On appelle prime pure le prix théorique d'une assurance où seuls interviennent dans le calcul les éléments viagers et financiers (table de mortalité et taux d'intérêt).

C'est le cout technique du risque pris en charge par l'assureur.

Dans la pratique, les assureurs doivent faire payer à l'assuré des primes pures mais aussi des chargements destinés à faire face à leurs dépenses de toutes natures : frais de commercialisation, frais de gestion...

Prime pure+chargements=prime commerciale

La prime pure peut être payable :

- Une seule fois=prime pure unique.
- Annuellement ou semestriellement ou trimestriellement=prime pure périodique.

VI.2. Principe général de calcul des primes

Un contrat d'assurance est une convention conclue entre une entreprise d'assurance et un contractant. Il comporte des engagements réciproques, se traduisant par des versements d'argent dépendants de la durée de vie humaine.

Le contrat d'assurance est aléatoire et l'aléa est viager. Cette caractéristique aléatoire est fondamentale.

Le contrat le plus général comporte :

- un engagement de l'assuré=le paiement des primes, P_0, P_1, \dots, P_{n-1} à des époques $0, t_1, \dots, t_{n-1}$ avec des probabilités $1, p_1, \dots, p_{n-1}$.

-un engagement de l'assureur=Le versement à des époques à priori quelconques d'une prestation C_S dépendant des événements viagers E_S observables à l'époque S .

Le principe fondamental de calcul des primes ures d'assurance consiste donc à évaluer à la date de souscription du contrat la valeur actuelle probable de l'engagement de l'assureur et la valeur actuelle probable de l'engagement de l'assuré.

On écrit alors :

$$VAP(A,0)=VAP(a,0)$$

VII. La réglementation et l'actuariat

La réglementation du secteur des assurances a pour objectif principal la protection des droits des assurés. Les entreprises privées d'assurances sont placées sous le contrôle de l'autorité publique qui délivre l'autorisation d'opérer et exerce par ailleurs des contrôles permanents portant sur leurs activités d'assureurs. Ainsi la protection d'assurance et la solvabilité des compagnies d'assurances seraient garanties à l'avenir.

VIII. Les tables de mortalité en vigueur au Maroc

Extrait de l'Arrêté du ministre des finances et de la privatisation n° 1548-05 du 6 ramadan 1426 (10 octobre 2005) relatif aux entreprises d'assurances et de réassurance.

Section II

De la constitution et de l'évaluation des provisions techniques

Article 15. - Les entreprises pratiquant les opérations d'assurances visées aux 1°) à 6°) de l'article premier ci-dessous doivent constituer à leur passif les provisions techniques ci-après :

-Provision mathématique : c'est la différence entre les valeurs actuelles des engagements respectivement pris par l'assureur et les assurés. Cette provision, qui est déterminée selon les bases tarifaires, ne peut être inférieure au montant calculé d'après les taux d'intérêt retenus

pour l'établissement des tarifs et, s'ils comportent un élément viager, d'après les tables de mortalité TV 88-90 pour les assurances en cas de vie et TD 88-90 pour les assurances en cas de décès.

1°) Vie et décès : toute opération d'assurances comportant des engagements dont l'exécution dépend de la durée de la vie humaine.

2°) Nuptialité-natalité : toute opération ayant pour objet le versement d'un capital en cas de mariage ou de naissance d'enfants.

3°) Capitalisation : toute opération d'appel à l'épargne en vue de la capitalisation et comportant, en échange de versements uniques ou périodiques directs ou indirects, des engagements déterminés.

4°) Opérations ayant pour objet l'acquisition d'immeubles au moyen de la constitution de rentes viagères.

5°) Assurances liées à des fonds d'investissement : toutes opérations comportant des engagements dont l'exécution dépend de la durée de la vie humaine ou faisant appel à l'épargne et liées à un ou plusieurs fonds d'investissement.

6°) Opérations faisant appel à l'épargne dans le but de réunir les sommes versées par les assurés en vue de la capitalisation en commun, en les faisant participer aux bénéfices des sociétés gérées ou administrées directement ou indirectement par l'entreprise d'assurances et de réassurance.

Les tables de mortalité TD 88-90 et TV 88-90 ont été établies par l'INSEE suite aux observations réalisées sur la population française entre 1988 et 1990, respectivement sur les hommes et les femmes. Elles ont été utilisées en France respectivement, pour la tarification des engagements en cas de décès et les engagements en cas de vie pendant la période s'étalant du 27 Avril 1993 au 31 Juillet 2006.

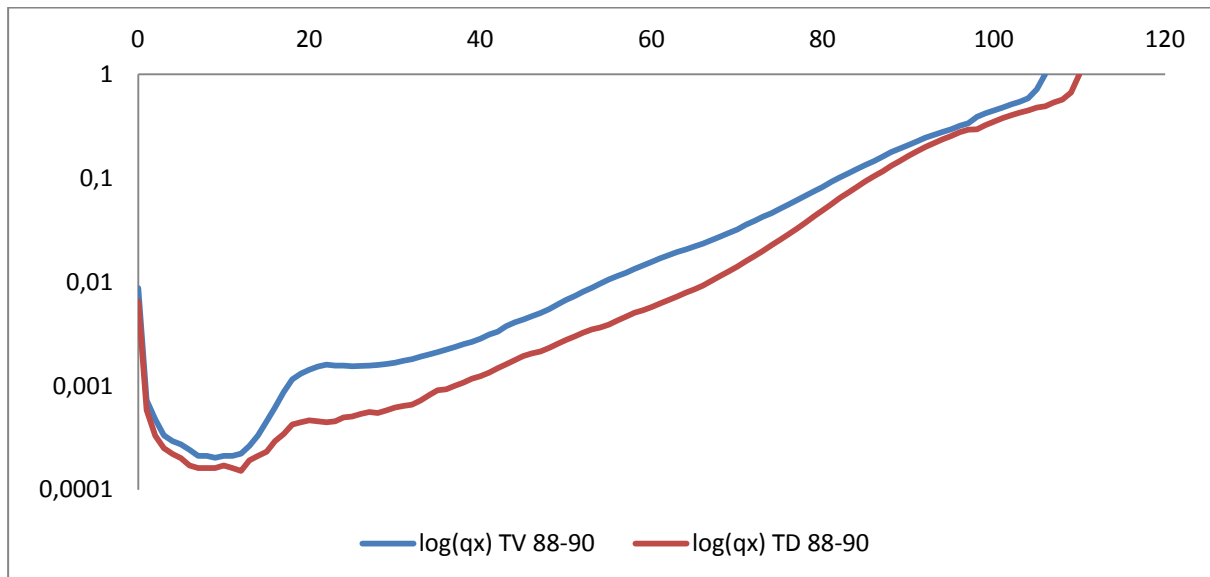


Figure 7: tables de mortalité réglementaires

On voit bien qu'il y a un décalage entre les deux courbes, à savoir des probabilités de décès élevés chez les hommes, c'est ce qui justifie l'utilisation prudente de la table TD 88-90 dans les engagements en cas de décès.

IX. Conclusion

L'objet du présent chapitre a été de présenter les bases théoriques de la modélisation démographique en actuariat : modèle de la durée de vie humaine, principe de tarification et les tables de mortalité en vigueur au Maroc : les tables françaises de la période TD 88-90 et TV 88-90. Le chapitre suivant traitera des données de la mortalité nationale : constitution de la base de données ainsi que la modélisation à tous les âges pour pouvoir comparer la mortalité réglementaires avec la mortalité nationale.

Chapitre 2 : Etude des tables de mortalité nationales

I. Introduction

Actuellement, le Maroc dispose de quatre images de la mortalité Marocaine, cet historique correspond aux périodes : 1980, 1986-1988 et 2009-2010, c'est-à-dire trois tables de mortalité Marocaines. Ces tables sont segmentées selon le sexe.

Ces tables de mortalité nationales sont sous un format qu'on appelle abrégé, ou table de mortalité abrégée c'est-à-dire, contenant les probabilités de décès pour chaque groupe d'âge 0-1, 1-5, 5-10 et ainsi de suite. La raison principale de fournir des données de la mortalité sous une forme abrégée est le manque d'informations sur les décès à tous les âges à cause de la documentation incomplète et instable de l'état civil, et donc la qualité des données ne permet pas de construire des tables de mortalité complètes.

Cependant, pour comparer les indicateurs actuariels des tables de mortalité réglementaires et des tables nationales, une table de mortalité complète est nécessaire. La littérature actuarielle propose énormément de modèles paramétriques qui permettent de modéliser la mortalité à tous les âges spécifiquement en cas de manque de données.

Dans ce chapitre, nous avons choisit d'étudier trois modèles : modèle de Weibull, modèle de Makeham et modèle de Heligman-Pollard. Et vu que les données de la mortalité sont segmentées par sexe, nous avons pris un effectif initial contenant autant de femmes que d'hommes pour pouvoir construire une table de mortalité pour les deux sexes. Cette modélisation va porter sur les âges supérieurs à 10 ans.

L'accent sera mis sur la période 2009-2010, car c'est la table de cette période que nous comparerons avec les tables réglementaires.

II. Loi de Weibull

II.1. Modèle

L'un des modèles les plus simples (2 paramètres) de représentation de la mortalité, est celui de Weibull, qui propose la modélisation des taux instantané de mortalité sous la forme :

$$\mu_a = \frac{\theta_1}{\theta_2 \theta_1} a^{\theta_1 - 1}$$

avec $\theta_1 > 0$ un paramètre de forme et $\theta_2 > 0$ un paramètre d'échelle.

Les taux de Weibull tiennent son origine dans les modèles généralement appliqués à la résistance des matériaux et à la durée de vie des machines. À l'instar des engins qui cessent de fonctionner lorsque l'un de leurs composants principaux est en panne, l'organisme humain est ainsi supposé mourir dès lors qu'une de ses fonctions vitales ne fonctionne plus.

À la formule de weibull est associée la probabilité de survie suivante :

$${}_tP_a = \exp\left(\left(\frac{a}{\theta_2}\right)^{\theta_1} - \left(\frac{a+t}{\theta_2}\right)^{\theta_1}\right)$$

II.2. Résultats

La minimisation par les moindres carrés donne le résultat suivant :

		Paramètres	
		Sexe	θ_1
1980	masculin	5,2731043955846	78,6314193412654
	féminin	6,9871237990444	80,3334546704218
	ensemble	6,0126134852728	79,5548571354125
1986-1988	masculin	5,0522791343334	81,8684306137658
	féminin	8,9708431965281	83,3435411376543
	ensemble	6,3640310125771	82,8822889075179
2009-2010	masculin	11,7966446594791	82,3897926438639
	féminin	13,1700656418686	84,8505983035565
	ensemble	12,3257969313839	83,6879519819201

Tableau 2: Paramètres de Weibull pour les périodes 1980, 1986-1988, 2009-2010

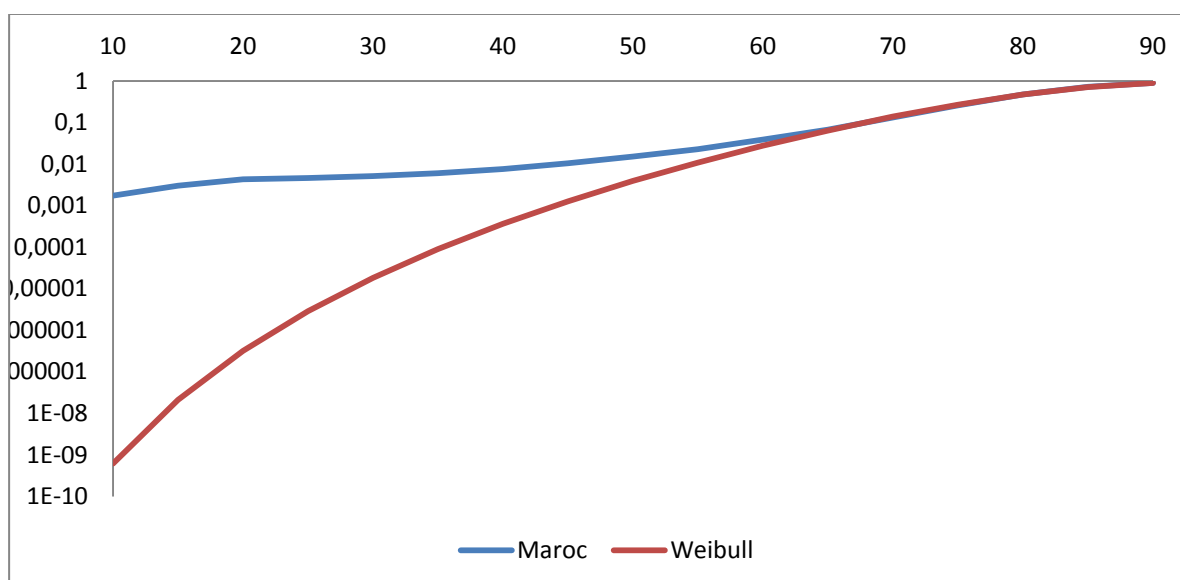


Figure 8: log(qx) - ajustement de Weibull - Maroc 2009-2010

On voit bien sur le graphe de la représentation de la transformation logarithmique des quotients de décès que le modèle de Weibull ne s'ajuste pas très bien aux données.

III. Loi de Makeham

III.1. Modèle

Le mathématicien anglais Makeham propose de modéliser le taux instantané de mortalité par :

$$\mu_a = \theta_1 + \theta_2 \theta_3^a$$

avec $\theta_1 \geq 0$, $\theta_2 > 0$ et $\theta_3 > 1$.

Le modèle de Makeham revient donc à considérer que le taux instantané à l'âge a se décompose comme suit :

1. Un premier terme constant, θ_1 , qui est indépendant de l'âge atteint a et représente la mortalité accidentelle ainsi que celle due aux maladies pouvant survenir indifféremment à tout âge.
2. Un second terme croissant en a , $\theta_2 \theta_3^a$, qui représente la mortalité due au vieillissement pour laquelle on postule un comportement exponentiel.

Pour des taux instantanés de mortalité de la forme de Makeham, nous avons :

$$\frac{d}{da} \mu_a = \theta_2 \theta_3^a \ln \theta_3 > 0 \text{ quel que soit } a > 0$$

de sorte que le modèle de Makeham ne permet pas de rendre compte des décroissances des taux instantanés de mortalité avec l'âge. Il ne peut donc pas être ajusté (ou la mortalité infantile induit des taux de mortalité élevés) et la bosse accident (résultant des morts violentes, accidents de la route et suicides, affectant les jeunes adultes, et causant des taux de mortalité plus élevés qu'au cours de l'enfance et de l'âge adulte).

Le modèle de Makeham fournit la probabilité de survie suivante :

$${}_tP_a = \exp\left(-\theta_1 t - \frac{\theta_2 \theta_3^a}{\ln \theta_3} (\theta_3^t - 1)\right)$$

III.2. Résultats

		Paramètres		
Sexe		θ_1	θ_2	θ_3
1980	masculin	0,0010405817799081	0,0002399185344442	1,0749808956072600
	féminin	0,0014249271975498	0,0001603187994594	1,0788032820657700
	ensemble	0,0012452602885788	0,0001957418951146	1,0771315666897600
1986-1988	masculin	0,00045898640618167	0,0001835864840443	1,0746154597096100
	féminin	0,0013918189799333	0,0000334543188457	1,0980816641714300
	ensemble	0,0011174478573506	0,0000705765305385	1,0887932056994100
2009-2010	masculin	0,0005287210196305	0,0000068985693647	1,1241993923445500
	féminin	0,0004510810836994	0,0000039916896655	1,1273912759902500
	ensemble	0,0004895143584586	0,0000054161612906	1,1254506388583900

Tableau 3: Paramètres de Makeham pour les périodes 1980, 1986-1988, 2009-2010

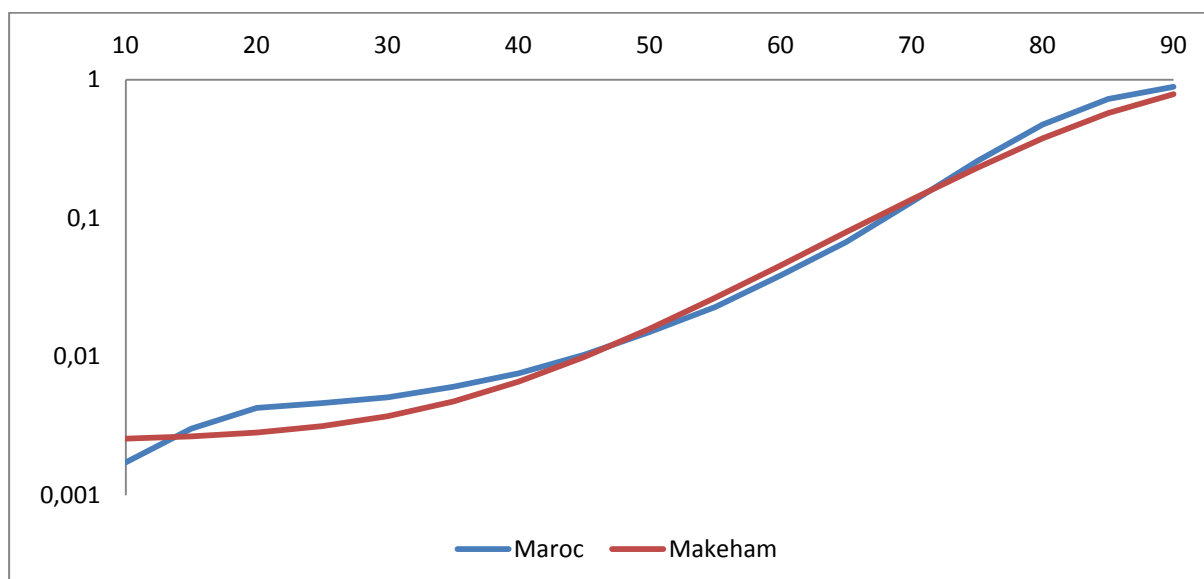


Figure 9: log(qx) - ajustement de Makeham - Maroc 2009-2010

On voit bien sur le graphe de la représentation de la transformation logarithmique des quotients de décès que le modèle de Makeham s'ajuste assez bien aux données nationales quoiqu'ils y a un certain décalage pour la période 15-35 ans.

IV. Loi de Heligman-Pollard

IV.1. Modèle

Toutes les lois évoquées précédemment possèdent l'avantage de ne posséder qu'un faible nombre de paramètres. Revers de la médaille, de tels modèles ne sont généralement capables de modéliser la mortalité que sur une tranche d'âges parfois restreinte. C'est ainsi qu'un certain nombre d'auteurs ont poursuivi l'objectif d'une modélisation de la vie entière des individus, moyennant l'usage d'un nombre plus important de paramètres.

En 1980, Heligman et Pollard ont formulé une modélisation de la mortalité contenant trois termes pour rendre compte de la mortalité infantile ainsi que de la bosse accident, tout en décrivant bien la mortalité due au vieillissement.

Le modèle, de type exponentiel prends la forme :

$$\frac{q_a}{p_a} = \theta_1 (a + \theta_2)^{\theta_3} + \theta_4 \exp(-\theta_5 (\ln a - \ln \theta_6)^2) + \theta_7 \theta_8^a$$

où chacun des trois termes prends en compte la mortalité dans une tranche d'âges particulière. Le premier terme, une exponentielle décroissante, représente la mortalité infantile. Le deuxième terme, une exponentielle décroissante, représente la mortalité infantile. Le deuxième rend compte de la bosse accident et est censé modéliser les âges de 10 à 40 ans. Enfin, le troisième et dernier terme reprend la loi de Gompertz, appliquée cette fois à q_a / p_a plutôt qu'aux taux instantanés μ_a . Il modélise la mortalité des adultes au-dessus de 50 ans.

Heligman et Pollard proposent une estimation des paramètres de leur modèle basée sur la minimisation de la somme des carrés des erreurs proportionnelles, c'est-à-dire :

$$\sum_{a=a_{\min}}^{a_{\max}} \left(\frac{q_a - \hat{q}_a}{\hat{q}_a} \right)^2$$

où q_a sont les quotients estimés à partir d'un échantillon et \hat{q}_a les quotients ajustés selon la loi de Heligman-Pollard, c'est-à-dire :

$$q_a = \frac{\theta_1^{(a+\theta_2)^{\theta_3}} + \theta_4 \exp(-\theta_5(\ln a - \ln \theta_6)^2) + \theta_7 \theta_8^a}{1 + \theta_1^{(a+\theta_2)^{\theta_3}} + \theta_4 \exp(-\theta_5(\ln a - \ln \theta_6)^2) + \theta_7 \theta_8^a}$$

La minimisation de la somme des carrés des erreurs proportionnelles passe donc par la résolution d'un problème des moindres carrés pondérés.

IV.2. Résultats

		θ4	θ5	θ6	θ7	θ8
1980	ensemble	0,994735850	-0,000243371	0,078552780	0,000001529	1,153336373
	Masculin	0,994777581	-0,000195164	0,044888746	0,000005836	1,133965349
	Féminin	0,994936103	-0,000237720	0,078548409	0,000001361	1,153263883
1986-1988	ensemble	0,997910345	-0,000124819	0,079073466	0,000000500	1,169030213
	masculin	0,995907721	-0,000178175	0,072201513	0,000001080	1,157808400
	féminin	0,997910345	-0,000124819	0,079073466	0,000000405	1,169030213
2009-2010	ensemble	0,999980252	-0,000268544	4,593843648	0,000000171	1,172483118
	masculin	0,999984060	-0,000293057	4,593843625	0,000000187	1,172604742
	féminin	0,999980252	-0,000268544	4,593843648	0,000000143	1,172483118

Tableau 4: log(qx) - ajustement de Heligman-Pollard - Maroc 2009-2010

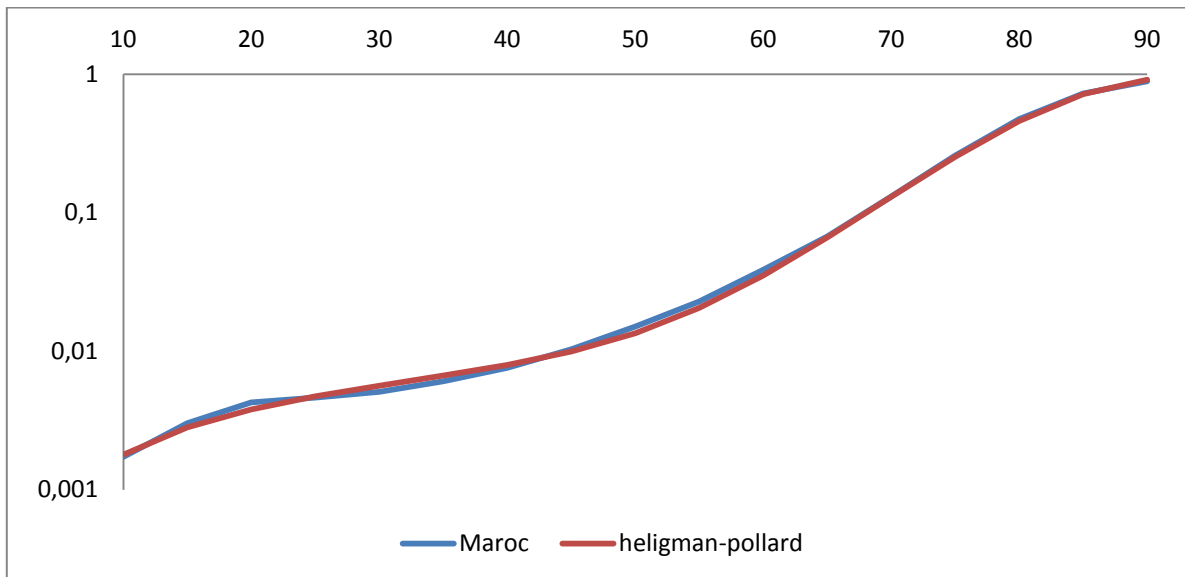


Figure 10: $\log(q_x)$ - ajustement de Heligman-Pollard - Maroc 2009-2010

On voit bien sur le graphe de la représentation de la transformation logarithmique des quotients de décès que le modèle de Heligman-Pollard s'ajuste très bien aux données aux données nationales.

V. Choix du meilleur modèle pour les deux sexes

L'observation graphique a montré qu'il y a une très bonne adéquation du modèle de Heligman Pollard aux données nationales, ce constat est assez naturel vu le nombre de paramètres important (5 paramètres pour les âges supérieurs à 10 ans).

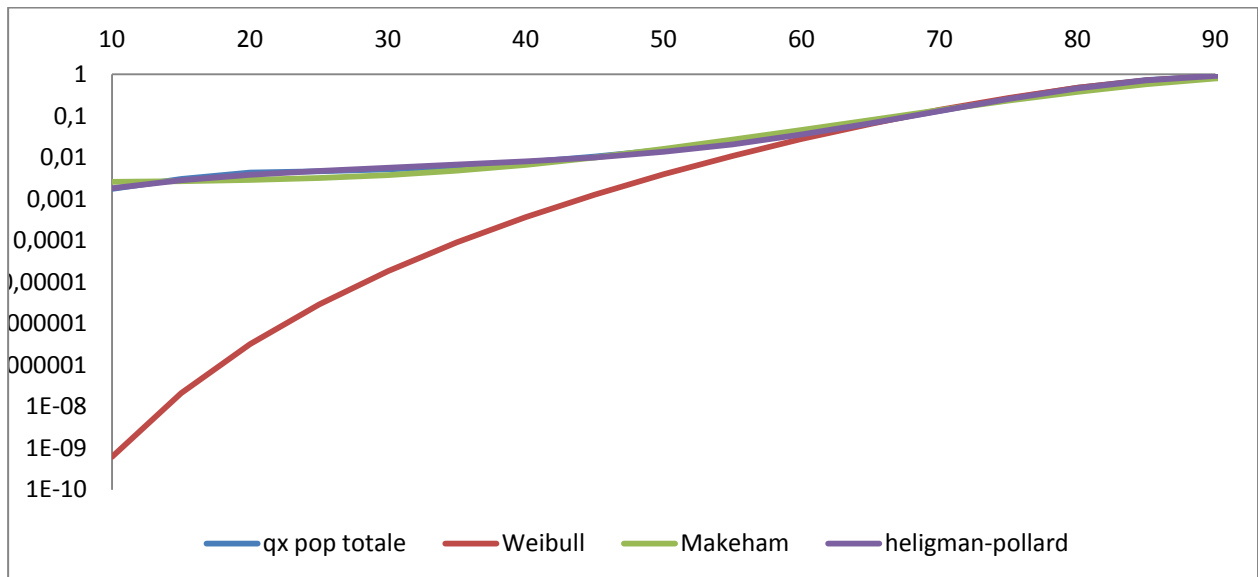


Figure 11: log(qx) - choix du meilleur modèle d'ajustement –Maroc 2009-2010

Pour valider l’adéquation au modèle nous allons nous baser sur le test de Khi-deux, en se basant sur la statistique des décès :

$$\text{Statistique de Khi-deux} = \frac{(\text{décès théorique} - \text{décès observé})^2}{\text{décès théorique}}$$

Cette statistique suit la loi de khi-deux avec (k=Nombre de classes-nombres de paramètres estimés-1) degrés de liberté, naturellement sous l’hypothèse d’adéquation au modèle cette statistique devrait être très petite. Une grande valeur de la statistique de khi-deux relativement au seuil fixé conduirait au rejet de cette hypothèse.

Modèle	Nombre de paramètres	Statistique de Khi-deux	Seuil $\alpha=1\%$
Weibull	2	5293294,26679672	Rejet
Makeham	2	52,9677114108416	Rejet
Heligman-pollard	5	2,45232122192435	Pas de rejet

Tableau 5: comparaison des ajustements paramétriques

Le test de khi-deux rejette les deux modèles, et confirment le résultat l’observation graphique. Donc, on peut dire que les quotients de mortalité nationaux pendant la période 2009-2010 peuvent être modélisés selon le modèle suivant :

$$\forall a \geq 10, \quad q_a^{Maroc} = \frac{\theta_1(a+\theta_2)^{\theta_3} + \theta_4 \exp(-\theta_5(\ln a - \ln \theta_6)^2) + \theta_7 \theta_8^a}{1 + \theta_1(a+\theta_2)^{\theta_3} + \theta_4 \exp(-\theta_5(\ln a - \ln \theta_6)^2) + \theta_7 \theta_8^a}$$

Où :

$$\theta_4 = 0,999984060$$

$$\theta_5 = -0,000293057$$

$$\theta_6 = 4,593843625$$

$$\theta_7 = 0,000000187$$

$$\theta_8 = 1,172604742$$

VI. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons modélisé les quotients de mortalité par âge de la population Marocaine, en se basant sur la table de mortalité abrégée provenant des enquêtes nationales. Le chapitre suivant comparera cette table modélisée à l'aide du modèle de heligman-pollard avec la table réglementaire.

Chapitre 3 : Comparaison de la table de mortalité réglementaire avec la table de mortalité nationale

I. Introduction

Dans le présent chapitre, nous allons, dans un premier temps comparer entre les tables de mortalité nationales et celles réglementaires : comparaison graphiques, rentes viagères et espérances de vie. Puis, nous allons montrer l'intérêt et la méthodologie de construire des tables d'expérience.

II. Comparaison graphique

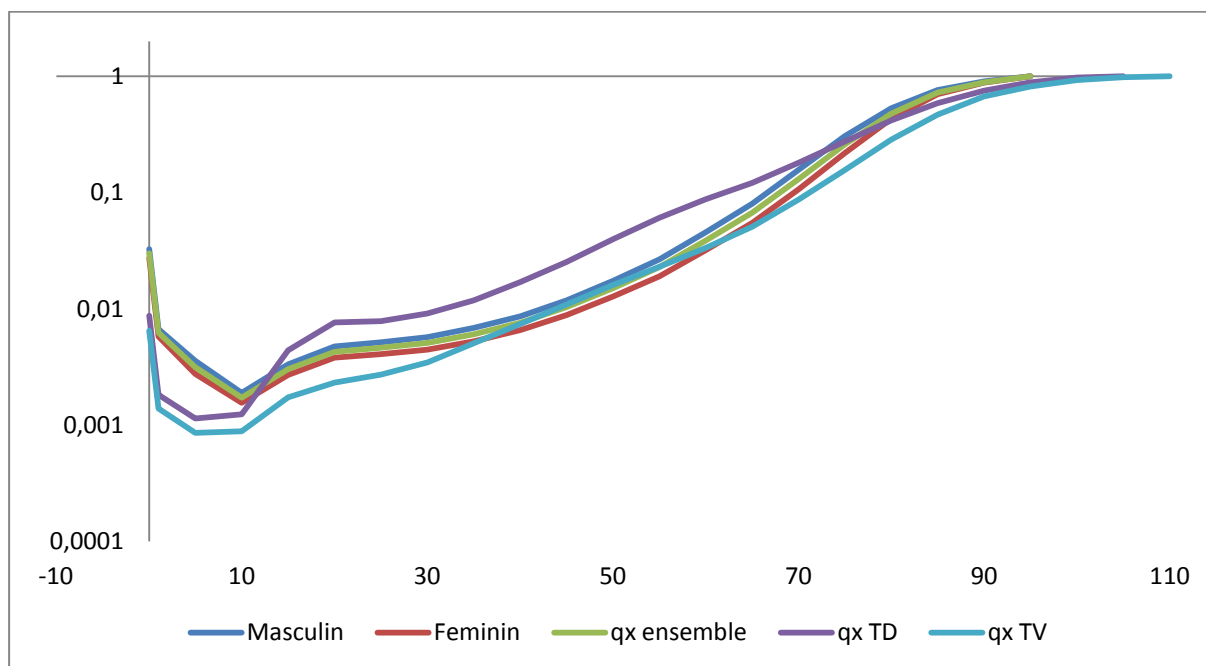


Figure 12: représentation simultanée: log(qx) nationale et réglementaire

Avant de faire une comparaison détaillée du graphique par tranches d'âges, il faut dire que naturellement, les deux courbes $t d$ et $t v$ devraient encadrer la courbe des quotients de mortalité de la population générale, qui selon l'approche prudentielle surestime les décès pour les engagements en cas de vie et sous-estime les décès pour les engagements en cas de vie.

Or si on fait une comparaison par tranche d'âges, pour les âges supérieurs à 10 ans car c'est la période qui intéresse le plus le domaine de l'assurance, on trouve que :

-Pour les âges 10-35 ans : l'approche prudentielle est vérifiée, car les courbes $t v$ et $t d$ encadrent la courbe de survie nationale.

-Pour les âges 35-75 ans : l'approche prudentielle n'est pas du tout respectée, mais plutôt les décès sont surestimés, ce qui est très prudent pour les engagements en cas de vie et dangereux pour les engagements en cas de vie.

-Pour les âges supérieurs à 75 ans : l'approche prudentielle n'est pas du tout respectée, mais plutôt les décès sont sous-estimés, ce qui est prudent pour les engagements en cas de vie et dangereux pour les engagements en cas de décès.

La comparaison graphique montre beaucoup de faiblesses au niveau des tables de mortalité imposées pour évaluer les engagements en cas de vie ou de décès, car elles ne correspondent pas du tout au profil du risque en question et ne s'inscrivent pas dans une approche prudentielle.

III. Comparaison des couts d'une rente

Comparaison des couts d'une rente viagère de valeur 1 payable d'avance selon les différentes tables de mortalité, pour différents âges et différentes valeurs du taux d'intérêt :

tables de mortalité réglementaires tv 88-90							
taux d'intérêt \ âge	40	45	50	55	60	65	70
0%	42,74	38,04	33,42	28,92	24,52	20,26	16,18
1%	34,55	31,40	28,18	24,90	21,56	18,17	14,80
2%	28,51	26,38	24,11	21,69	19,12	16,41	13,60
3%	23,99	22,52	20,89	19,09	17,10	14,92	12,56
4%	20,53	19,51	18,33	16,97	15,41	13,64	11,65
5%	17,85	17,12	16,25	15,22	13,99	12,54	10,86

Tableau 6: prix de rentes viagères selon la table TV 88-90

tables de mortalité masculines							
taux d'intérêt \ âge	40	45	50	55	60	65	70
0%	25,44	21,44	17,58	13,92	10,51	7,52	4,96
1%	22,21	19,09	15,95	12,87	9,89	7,20	4,82
2%	19,57	17,12	14,56	11,95	9,34	6,90	4,68
3%	17,41	15,46	13,36	11,14	8,83	6,62	4,55
4%	15,62	14,06	12,32	10,41	8,38	6,37	4,43
5%	14,12	12,87	11,41	9,77	7,97	6,13	4,32

Tableau 7: prix de rentes viagères selon la table masculine Marocaine 2009-2010

tables de mortalité féminines							
taux d'intérêt \ âge	40	45	50	55	60	65	70
0%	28,25	24,09	20,05	16,19	12,52	9,21	6,27
1%	24,35	21,19	17,99	14,80	11,67	8,74	6,04
2%	21,22	18,80	16,25	13,61	10,91	8,30	5,83
3%	18,70	16,82	14,77	12,56	10,24	7,91	5,64
4%	16,63	15,17	13,50	11,65	9,63	7,55	5,45
5%	14,93	13,77	12,41	10,85	9,09	7,22	5,28

Tableau 8 : prix de rentes viagères selon la table féminine marocaine 2009-2010

à première vue, on voit clairement qu'il y a des écarts assez importants entre les prix des rentes viagères calculées sur la base des tables réglementaires et celles nationales.

IV. Evaluation des surcoûts

surcout des tables de mortalité réglementaires par rapport aux tables masculines							
taux d'intérêt \ âge	40	45	50	55	60	65	70
0%	68%	77%	90%	108%	133%	169%	226%
1%	56%	64%	77%	93%	118%	152%	207%
2%	46%	54%	66%	82%	105%	138%	191%
3%	38%	46%	56%	71%	94%	125%	176%
4%	31%	39%	49%	63%	84%	114%	163%
5%	26%	33%	42%	56%	76%	105%	151%

Tableau 9: surcoûts des tables réglementaires par rapport aux tables masculines

surcout des tables de mortalité réglementaires par rapport aux tables féminines							
taux d'intérêt \ âge	40	45	50	55	60	65	70
0%	51%	58%	67%	79%	96%	120%	158%
1%	42%	48%	57%	68%	85%	108%	145%
2%	34%	40%	48%	59%	75%	98%	133%
3%	28%	34%	41%	52%	67%	89%	123%
4%	23%	29%	36%	46%	60%	81%	114%
5%	20%	24%	31%	40%	54%	74%	106%

Tableau 10: surcoûts des tables de réglementaires par rapport aux tables féminines

L'évaluation des surcoûts montre qu'il y a un bénéfice assez important dégagé par application des tables réglementaires.

V. recherche d'un taux technique équivalent

Les performances financières supplémentaires à la réalisation de l'équilibre actuariel en termes de taux d'intérêt.

tables de mortalité masculines							
taux d'intérêt \ âge	40	45	50	55	60	65	70
1%	0,999523%	0,999619%	0,999619%	0,999619%	0,999619%	0,999619%	0,999619%
2%	1,999523%	1,999619%	1,999619%	1,999619%	1,999619%	1,999619%	1,999619%
3%	2,577045%	2,999619%	2,999619%	2,999619%	2,999619%	2,999619%	2,999619%
4%	2,387814%	3,193954%	3,999619%	3,999619%	3,999619%	3,999619%	3,999619%
5%	2,219563%	3,000717%	4,195480%	4,999619%	4,999619%	4,999619%	4,999619%

Tableau 11: taux technique équivalent par rapport à la table masculine

tables de mortalité féminine							
taux d'intérêt \ âge	40	45	50	55	60	65	70
1%	0,999523%	0,999523%	0,999523%	0,999523%	0,999523%	0,999523%	0,999523%
2%	1,999523%	1,999523%	1,999523%	1,999523%	1,999523%	1,999523%	1,999523%
3%	1,896122%	2,482632%	2,999523%	2,999523%	2,999523%	2,999523%	2,999523%
4%	1,745037%	2,317242%	3,177456%	3,999523%	3,999523%	3,999523%	3,999523%
5%	1,613026%	2,163296%	3,001575%	4,316692%	4,999523%	4,999523%	4,999523%

Tableau 12: taux technique équivalent par rapport à la table féminine

L'évaluation des performances financières (résultant de l'application des tables réglementaires) supérieures à la réalisation de l'équilibre actuariel montre qu'il y a un bénéfice financier assez important dégagé suite à l'évaluation des engagements à l'aide des tables françaises

VI. Le recours aux tables d'expérience

Ces calculs et ces comparaisons nous montrent un grand décalage de mortalité entre les tables réglementaires et les tables nationales.

Certifiée par un actuaire indépendant agréé par la Commission de l'Institut des Actuaires, une table d'expérience permet de modéliser le risque de mortalité en se fondant sur une étude précise d'un portefeuille donné. Les assureurs ont tout intérêt à opter pour ce genre de tables, car ils peuvent mieux cerner le risque de mortalité inhérent à leur portefeuille, et appréhender notamment le phénomène d'antisélection. La connaissance du portefeuille constitue d'ailleurs un point clé dans le processus de gestion et de la maîtrise des risques d'entreprise : un pilotage performant va de pair avec une bonne perception du profil de risque, comme le suggèrent les évolutions actuelles du monde de l'assurance (projet Solvabilité II).

VII. La méthodologie générale de construction d'une table d'expérience

La construction d'une table d'expérience se déroule en plusieurs étapes :

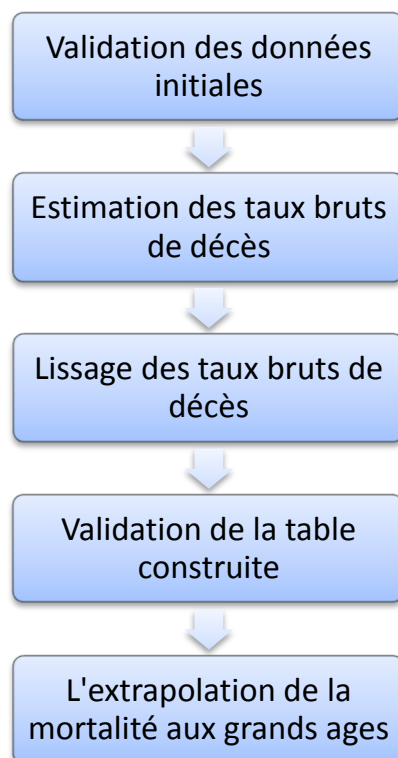


Figure 13: Méthodologie de construction d'une table d'expérience

VII.1. Validation des données initiales et justification du contexte d'analyse

Pour avoir des résultats pertinents et représentatifs de la mortalité d'une certaine population, il faut disposer de données qui soient fiables et exploitables. Il y a donc, avant de passer concrètement à la construction d'une table de mortalité, tout un travail à réaliser en amont pour préparer et nettoyer les données qui vont servir à l'étude. Il s'agit en particulier de procéder à une analyse descriptive de la population étudiée, de vérifier son homogénéité ou de mettre en évidence certaines variables explicatives de la mortalité qui permettront par la suite d'effectuer une segmentation (typiquement, différencier les hommes et les femmes). Plus cette phase de nettoyage sera rigoureuse et poussée, plus les résultats seront précis et de bonne qualité.

VII.2. Estimation des taux annuels bruts de décès

Une estimation des taux annuels bruts de décès consiste à évaluer les probabilités de décès q_x pour les différents âges x de la vie, à partir des données relevées au cours de la période d'observation. Pour ce faire, il est nécessaire de connaître le nombre d'individus en vie à l'âge x et le nombre d'individus décédés pendant leur $x + 1$ ème année. Il est de plus supposé que, sur l'intervalle d'âge $[x, x + 1]$, tous les décès sont indépendants et que la probabilité de décès est identique quel que soit l'individu. Toute la difficulté réside alors dans la présence de données tronquées ou censurées qui sont liées à une observation partielle et qui nécessitent des méthodes particulières d'estimation.

VII.3. Lissage de taux annuels de décès

Les taux annuels bruts de décès présentent en général des irrégularités en rapport avec les fluctuations d'échantillonnage. Il est donc nécessaire de lisser ces taux afin d'obtenir une courbe de mortalité qui progresse graduellement avec l'âge. Il existe différentes techniques qui peuvent faire aussi l'objet d'une utilisation conjointe.

VII.4. La Validation de la table construite

L'objectif est de s'assurer du respect de certaines règles de cohérence. Plusieurs éléments sont à vérifier : croissance des taux de mortalité avec l'âge, correspondance avec les données initiales, respect des connaissances a priori de la mortalité. Par exemple, dans le cas d'une différenciation par sexe, il est logique d'observer, pour un même âge, que les taux de décès des femmes sont inférieurs à ceux des hommes.

Différents critères et tests sont susceptibles de mesurer la qualité de la modélisation.

VII.5. Les Méthodes d'extrapolation dans le cas de données insuffisantes

Pour les âges élevés, les données observables ne sont généralement pas suffisamment fiables pour participer à l'ajustement de la courbe de mortalité. Il faut alors recourir à des techniques d'extrapolation afin de modéliser la mortalité aux grands âges.

VIII. Conclusion

L'objet du présent chapitre a été de comparer entre les tables de mortalité réglementaires et les tables de mortalité nationales, cette comparaison a montré les faiblesses de l'utilisation des tables réglementaires, et a justifié l'utilisation des tables d'expérience. Dans la suite du travail, nous allons illustrer la démarche de construction des tables de mortalité d'expérience d'un portefeuille de garantie décès.

Chapitre 4 : La construction de la table de mortalité brute

I. Introduction

Dans ce chapitre, nous allons avant de présenter les différentes méthodes de construction des tables de mortalité brute (résultant de l'observation).Après avoir fait une fiabilisation de la base des données, nous allons présenter quatre méthodes de construction des tables de mortalité brutes : méthode actuarielle classique, méthode de Kaplan-Meier, méthode des expositions au risque et une méthode simpliste.

Une période d'expérience de 5 ans a été retenue comme satisfaisante pour deux raisons principales :

- pouvoir compenser le manque d'information à certains âges quand l'observation est faite sur une courte période.

- la période de 5 ans, selon les experts a été retenue comme satisfaisante en termes de stabilité des décès.

II. Les données de la population assurée

II.1. Présentation des fichiers

Les données étudiées provenaient de deux fichiers :

- fichier 1 : informations sur l'ensemble des affiliés. (785110 enregistrements,15 variables)

-fichier 2 : informations sur les décès. (10539 enregistrements, 6 variables)

Ces deux fichiers contiennent les variables suivantes :

Variables su fichier 1 :

- Type du produit : 20 produits.
- Type de Garantie : décès, retraite complémentaire, retraite de base
- Numéro de la police.
- Catégorie socioéconomique de l'affilié : 48 catégories
- Numéro de l'affilié.
- Nom de l'affilié.
- Prénom de l'affilié.
- Sexe de l'affilié.
- Date de naissance de l'affilié.
- Date du début de la police.
- Etat de police : décès, échéance, liquidé, non valide, rachetée, résiliée, suspendue, en cours.
- Date état police.
- Etat affilié : décès, renouvellement, sortie, suspendu.
- Date état affilié.

Variables du fichier 2 :

- Numéro de l'affilié.
- Numéro du sinistre.
- Date de déclaration.
- Date de survenance.
- Etat sinistre : Clôturé, non valide, ouvert.
- Date état sinistre.

VIEWTABLE: Work.Deces

	NOM	PRENOM	SEXE	DATE_NAISSANCE	DATE_DEBUT_POLICE	ETAT_POLICE	DATE_ETAT_POLICE	ETAT_AFFILIE	DATE_ETAT_AFFILIE
156	EL ALJ	ABDESSLAM	M	19570701	19821001	RS	20011231	SO	19840210
157	NADDAM	BENAISSA	M	19500701	19821001	RS	20011231	SO	19840111
158	NADDAM	BENAISSA	M	19500701	19821001	RS	20011231	SO	19840111
159	FATTOUM	SELLAM	M	19490701	19790101	RS	19830518	SO	19850218
160	LARHZALI	MUSTAPHA	M	19620701	19690101	RS	20000101	SO	19850220
161	JAMALI	DRISS	M	19380701	19820101	RS	19940331	SO	19840823
162	SAHL	BOUCHAIB	M	19270701	19790101	RS	20041231	SO	19840131
163	BOUTOUBAA	BOUCETTA	M	19210701	19750101	RS	19830525	SO	19850307
164	GHALLOUDI	ABDELWAHAB	M	19540701	19750101	RS	19830525	SO	19850307
165	LARHNIMI	MOHAMED	M	19500101	19840101	RS	19841231	SO	19850308
166	LARHZALI	MUSTAPHA	M	19620701	19690101	RS	20000101	SO	19850220
167	BOUKHRIS	LAHCEN	M	19280701	19690101	RS	20000101		19850515
168	DAOUDI	MOHAMED	M	19310701	19690101	RS	20000101	SO	19831206
169	ZAKARIA	SALEM	M	19160701	19840701	RS	19921231	SO	19841031
170	HADJ HAYAL	MOHAMED	M	19280701	19820701	RS	19941231	SO	19841030
171	HAYEDDI	MALIKA	M	19560701	19571001	RS	19830520	SO	19840113
172	HAYEDDI	MALIKA	M	19560701	19571001	RS	19830520	SO	19840113
173	BEKKARI	SELLAM	M	19390701	19750101	RS	19901231	SO	19850521
174	HADJ HAYAL	MOHAMED	M	19280701	19820701	RS	19941231	SO	19841030
175	HAMOUJ	MOHAMED	M	19360701	19500401	RS	19830525	SO	19840405
176	HADJ HAYAL	MOHAMED	M	19280701	19820701	RS	19941231	SO	19841030
177	LARHNIMI	MOHAMED	M	19500101	19840101	RS	19841231	SO	19850308
178	AMARI	FATIHA	M	19550828	19750101	RS	20021231	SO	19841016
179	HADJ HAYAL	MOHAMED	M	19280701	19820701	RS	19941231	SO	19841030
180	OUCHTOUK	BRAHIM	M	19490701	19780901	RS	19981231	SO	19821231
181	AMARI	FATIHA	M	19550828	19750101	RS	20021231	SO	19841016
182	HADJ HAYAL	MOHAMED	M	19280701	19820701	RS	19941231	SO	19841030
183	BOUKHDDA	RAHHALI	M	19430701	19820701	RS	19941231		19850824
184	SCHMID DIANA	EPHESE	M	19390804	19750101	RS	19830525	SO	19851015
185	HADJ HAYAL	MOHAMED	M	19280701	19820701	RS	19941231	SO	19841030
186	HADJ HAYAL	MOHAMED	M	19280701	19820701	RS	19941231	SO	19841030
187	HADJ HAYAL	MOHAMED	M	19280701	19820701	RS	19941231	SO	19841030

Figure 14: la base de données de la population assurée

II.1. La préparation des données

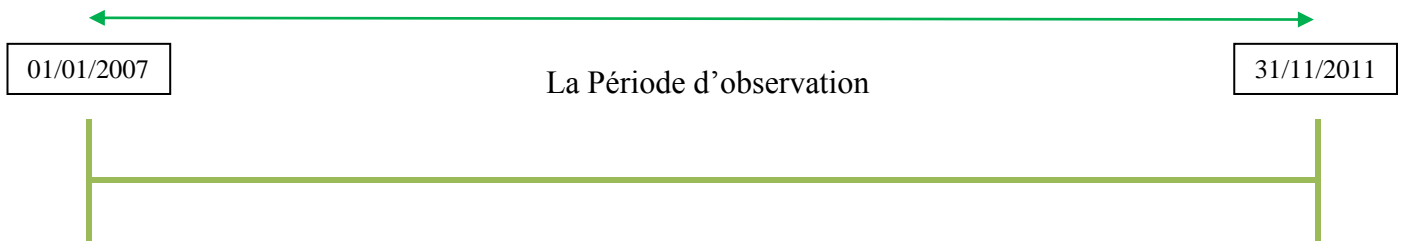
L’essentiel du travail effectué sur les données a été la sélection des différentes données fiables, c’est-à-dire ne contenant aucune anomalie, les différentes anomalies qui ont été détectées concernent :

- Les dates
- La non correspondance entre les deux fichiers
- enregistrements contenant des valeurs impossibles.

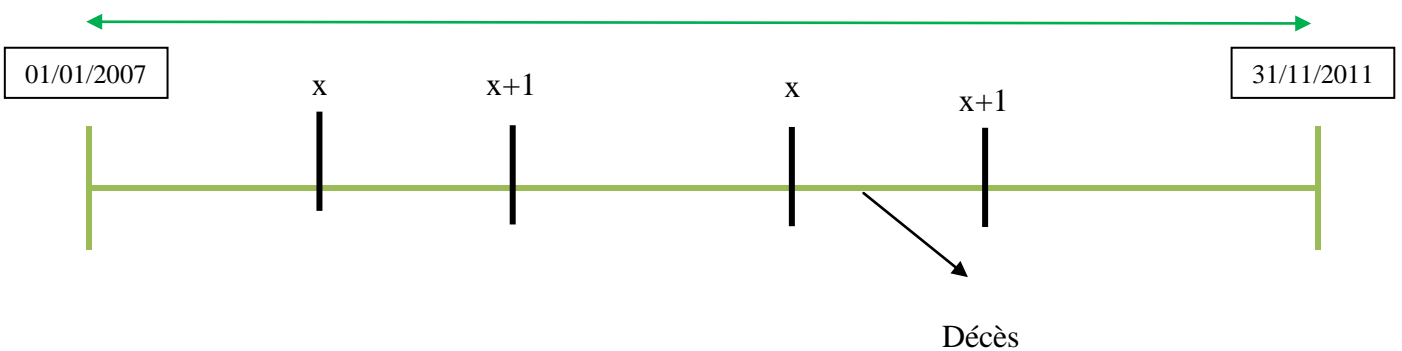
Cependant, une étude descriptive qui pourrait conduire à une éventuelle segmentation n’a pas été faite vu l’objectif que s’était fixé ce travail : illustrer la méthodologie de construction d’une table d’expérience à travers les différentes étapes de façon détaillée.

III. Les différents Types de données

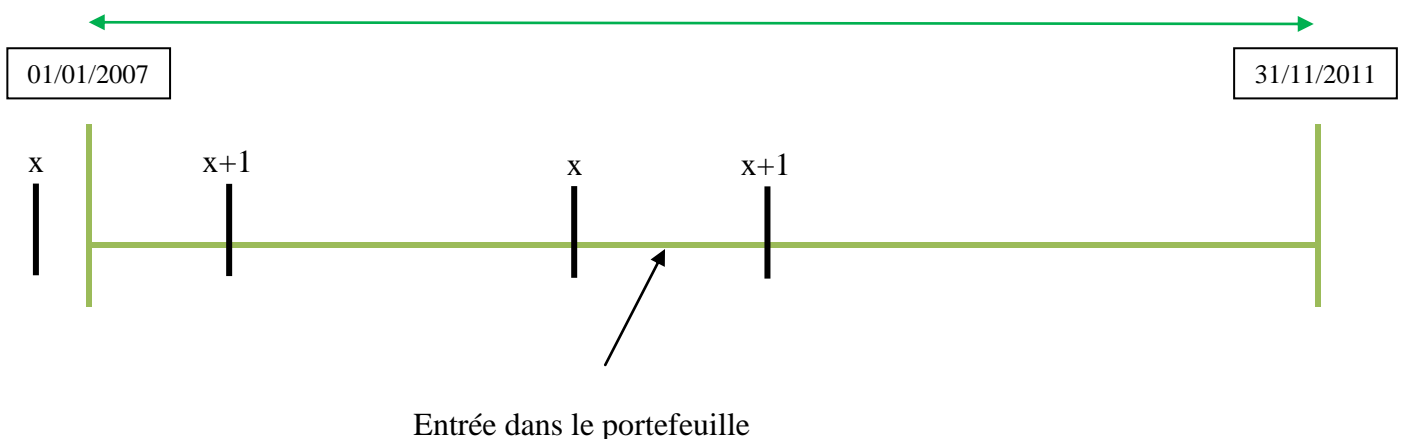
-Période d'observation : 01 Janvier 2007 au 31 Décembre 2011.



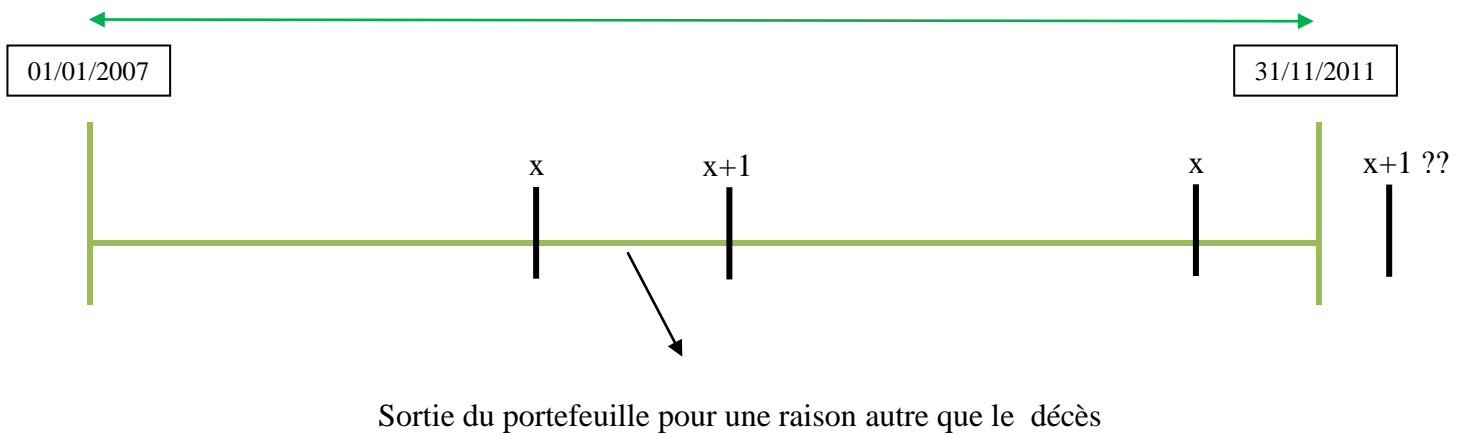
-Une donnée complète : l'individu atteint l'âge x après le début de la période d'observation, il est décédé ou fête son $(x+1)^{\text{ème}}$ anniversaire avant la fin de la période d'observation.



-Une donnée tronquée à gauche : l'individu a déjà entamé sa $(x+1)^{\text{ème}}$ année au début de la période d'observation.



-Une donnée censurée à droite : la date du $(x+1)^{\text{ème}}$ anniversaire n'est pas observable.



IV. Méthodologie de l'estimation en présence de données complètes

Il est très important de signaler que si toutes les observations étaient complètes et si aucune sortie de l'observation n'était possible, il serait possible d'estimer q_x par la méthode binomiale classique, sous l'hypothèse :

$$D_x \sim \text{Binomiale}(L_x, q_x)$$

C'est-à-dire que tous les individus de même âge x , ont la même probabilité de décéder entre les âges x et $x+1$.

Sous cette hypothèse, L'estimateur \hat{q}_x est obtenu de la manière suivante :

$$\hat{q}_x = \frac{D_x}{L_x}$$

Dans ce cas, l'estimateur \hat{q}_x est à la fois l'estimateur du maximum de vraisemblance et celui des moments.

Cependant, en pratique on est en présence de données :

- qui ne sont pas complètes :
 - troncatures à droite : certains individus ne sont observés qu'après avoir fêté leur $x^{\text{ème}}$, âge.
 - censures à gauche : certains individus quittent le portefeuille avant de fêter leur $(x+1)^{\text{ème}}$ anniversaire pour une autre cause que le décès.

Dans le cas de données incomplètes, une variété d'estimateurs est présente dans la littérature actuarielle.

- qui ne sont connues que peu de temps après : déclarations tardives des décès. Ces déclarations tardives vont être estimées pour ne pas sous-estimer les quotients de mortalité.

V. Le provisionnement des déclarations tardives

Comme nous l'avons constaté dans les données du portefeuille étudié, les décès survenus ne sont pas portés à la connaissance de l'assureur immédiatement et il existe un décalage important entre le temps de survenance et de déclaration du sinistre. En vue de ne pas sous-estimer le nombre de décès par âge, il a fallu estimer le nombre de sinistres tardifs par âge.

Plusieurs méthodes basées sur l'hypothèse fondamentale qu'il existe une stabilité statistique dans le processus de déclaration et de règlement des sinistres. De nombreuses lois sont envisageables, mais pour ne pas s'écarter de l'objectif principal de ce travail, nous allons travailler avec l'une des méthodes les plus couramment utilisées : méthode de Chain-Ladder.

La méthodologie est basée sur l'extrapolation des nombres cumulés de sinistres déclarés par exercice de survenance. L'extrapolation des nombres de sinistres déclarés s'effectue par triangulation à partir des triangles de développement.

Exercice de survenance	Année de développement				
	N	N+1	N+2	N+3	N+4
2007	8	9	9	9	9
2008	8	10	10	10	?
2009	10	12	12	?	?
2010	10	12	?	?	?
2011	11	?	?	?	?

Tableau 13: triangle de développement (déclarations tardives)

Ces triangles mettent en exergue la dynamique temporelle des nombres cumulés de sinistres déclarés pour un exercice de survenance donné. Le triangle ci-dessus représente le triangle cumulé des nombres de décès déclarés à l'âge 40.

Le problème consiste à estimer l'évolution finale jusqu'à N+4 des nombres de sinistres déclarés pour chaque exercice de survenance autre que l'année 2007. Cette estimation repose sur l'hypothèse que cette compagnie n'aura plus de déclarations tardives au delà de 4 ans après l'année de survenance des sinistres. En pratique, le problème revient à déterminer toute la partie inférieure du triangle.

L'approche de Chain-Ladder suppose que l'évolution des nombres cumulés de déclarés est fonction d'un facteur moyen de développement λ_j qui est fonction de l'année de développement j. Et en pratique, le triangle est complété par ligne, de proche en proche en multipliant le dernier nombre connu déclarés par les facteurs de développement moyens successifs propres à chaque année de développement. L'application de la méthode au triangle de l'âge 40 ci-dessus aboutit aux facteurs de développement ci-après :

$$\lambda_1 = \frac{9+10+12+12}{8+8+10+10} = 1,19444\dots$$

$$\lambda_2 = \frac{9+10+12}{9+10+12} = 1$$

$$\lambda_3 = \frac{9+10}{9+10} = 1$$

$$\lambda_4 = \frac{9}{9} = 1$$

Exercice de survenance	Année de développement				
	N	N+1	N+2	N+3	N+4
2007	8	9	9	9	9
2008	8	10	10	10	10
2009	10	12	12	12	12
2010	10	12	12	12	12
2011	11	13,13889	13,13889	13,13889	13,13889



× × × ×

λ_j	1,19444	1,00000	1,00000	1,00000
-------------	---------	---------	---------	---------

Figure 15: application de la méthode chain-ladder

Pour chaque exercice de survenance (ligne), le nombre de décès tardifs à prévoir est égal à la différence entre le nombre de la colonne (N+4) et celui de la dernière année connue (en bleu) sur la diagonale principale du carré ci-dessus, donc le nombre de décès tardifs est donné par :

$$0 + (10-10) + (12-12) + (12-12) + (13,13889-11) = 2,13889$$

Nous avons procédé à un arrondissement à l'entier supérieur du nombre obtenu pour ne pas sous-estimer le nombre de décès. (C'est-à-dire le nombre de décès tardifs à l'âge 40 ans dans ce cas est de 3)

Ce travail a été fait pour tous les âges.

VI. Méthode actuarielle classique

Les souscriptions de contrat font entrer dans les fichiers des assurés à tout instant, et réciproquement les résiliations, les arrivées à terme les font sortir du champ des observations.

Le principe général de prise en compte des aléas touchant à la période d'observations est de rapporter les décès constatés aux effectifs-années soumis au risque, ce qui implique :

- Les censures interviennent à des moments qui sont indépendants de l'état de santé de l'individu concerné.
- Dans le courant d'une année, les probabilités de décès sont proportionnelles au temps d'observation.

Ainsi dans un groupe d'individus d'âge x , si en début de période annuelle $N(x)$ est l'effectif présent, et si en un an on a $E(x)$ entrées, $D(x)$ décès, et $S(x)$ départs, le taux annuel brut de mortalité est habituellement évalué par la fraction :

$$\hat{q}_x = \frac{D_x}{L_x} = \frac{D_x}{N(x) + \frac{E(x)}{2} - \frac{S(x)}{2}}$$

Cela signifie que l'on suppose l'intervention moyenne des entrées et sorties en milieu d'année d'observations.

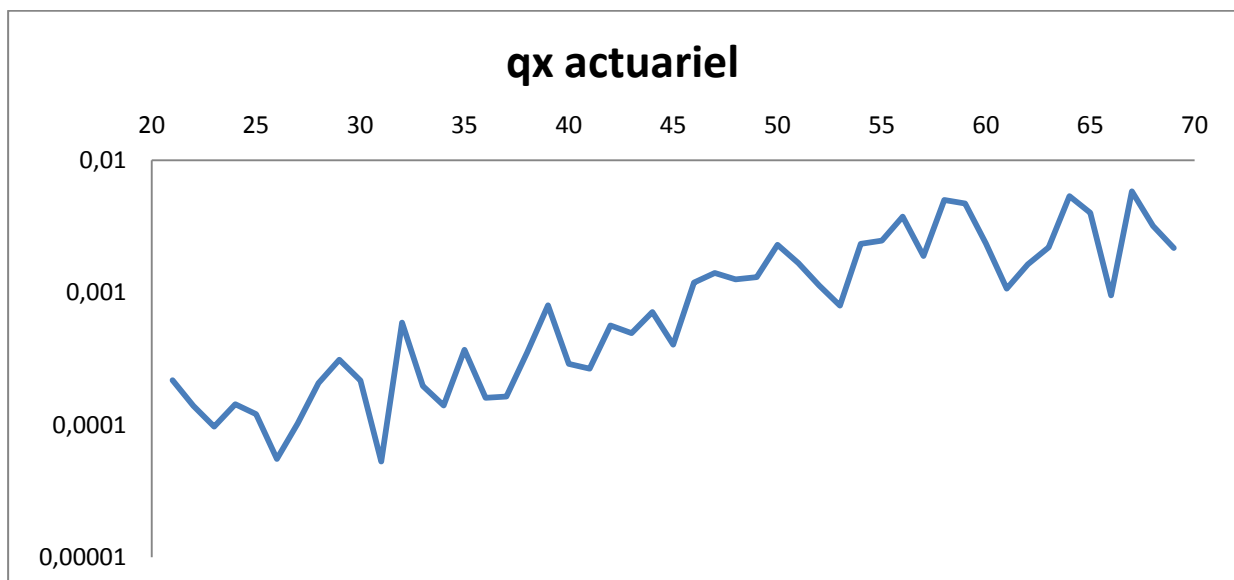


Figure 16: estimateur actuariel classique

VII. Méthode de Kaplan-Meier

Une censure intervient à une époque C_i dans l'observation de l'individu numéro i , et il quitte alors le champ d'observation alors qu'il est peut être en vie, désignant par T_i son époque aléatoire de décès, la sortie du fichier s'opère à $\min(C_i, T_i)$. On suppose habituellement que les variables C_i et T_i sont indépendantes.

Considérons un groupe initial de N individus d'âge x soumis à une même loi de mortalité et un processus de censures. On l'observe pendant une durée globale t_j à des dates successives $0 < t_1 < \dots < t_k < \dots < t_g$, qui sont les époques possibles de censures, les décès étant observables dans les intervalles correspondants. À t_k on note c_k censures, entre t_k et t_{k+1} on enregistre d_k décès, n_k est l'effectif observable après les c_k censures.

On a les relations :

$$n_0 = N \text{ et } n_{k+1} = n_k - d_k - c_{k+1}$$

On note π_k la probabilité de décès d'un individu vivant à t_k avant t_{k+1} et $S(t) = {}_t p_x$ la probabilité de survie à l'époque t de chacun des N individus présents à l'origine.

Les observations $0 < c_1, c_2, \dots, c_{g-1}, d_1, d_2, \dots, d_g$ ont une fonction de vraisemblance :

$$L = \prod_{k=0}^{g-1} C_{n_k}^{d_k} (\pi_k)^{d_k} (1-\pi_k)^{n_k - d_k}$$

La maximisation de L s'obtient en écrivant :

$$\frac{\delta L}{\delta \pi_k} = \frac{d_k}{\pi_k} - \frac{n_k - d_k}{1 - \pi_k} = 0$$

Ceci conduit à l'estimateur et donc :

$${}_t p_x = S(t) = \prod_{k, t_k < t} \left(1 - \frac{d_k}{n_k} \right) \text{ Pour } t < t_g$$

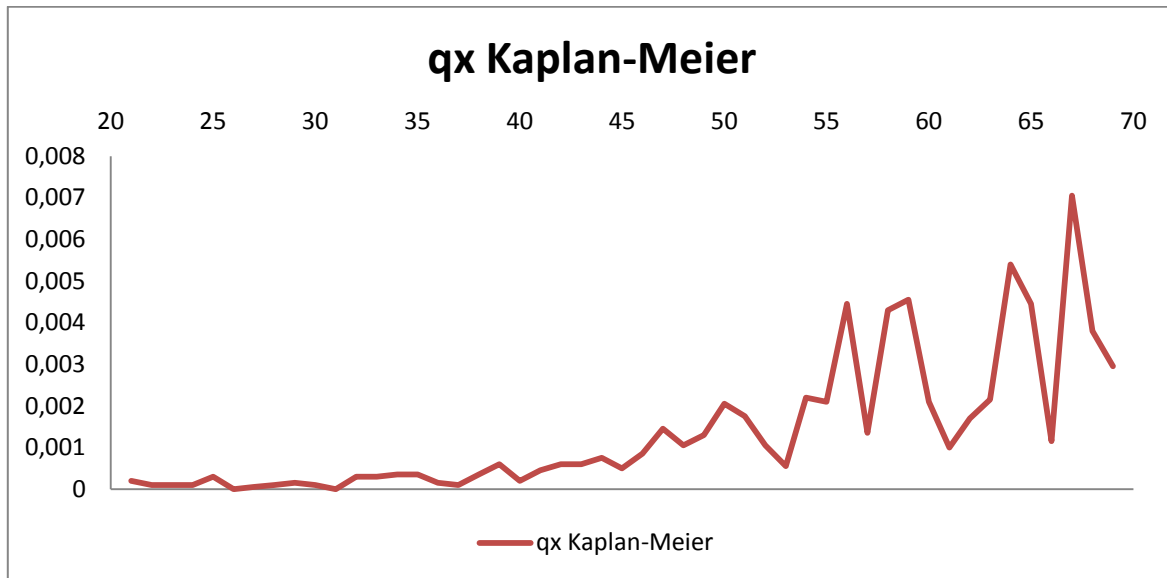


Figure 17: estimateur de Kaplan Meier

VIII. Méthode des expositions au risque

C'est une extension de l'estimation par la méthode binomiale classique, sous l'hypothèse que le nombre de survivants à l'âge x est égale prorata-temporis de l'exposition au risque de décès en étant à l'âge x pendant la période d'observation.

Pour intégrer un individu dans l'étude, on fait classiquement l'hypothèse qu'un individu i d'âge x , vivant en α décède dans l'intervalle $[\alpha, \beta]$ avec une probabilité égale à $(\beta - \alpha)q_x$.

En acceptant cette hypothèse, l'estimateur, généralisant l'estimateur binomial, est égal au quotient du nombre de décès observés par la durée totale d'exposition au risque.

Ainsi en notant 1_{D_i} l'indicatrice du décès de i (en cas de décès, $1_{D_i} = 1$ sinon), on a :

$$\hat{q}_x = \frac{\sum_i 1_{D_i}}{\sum_i (\beta_i - \alpha_i)}$$

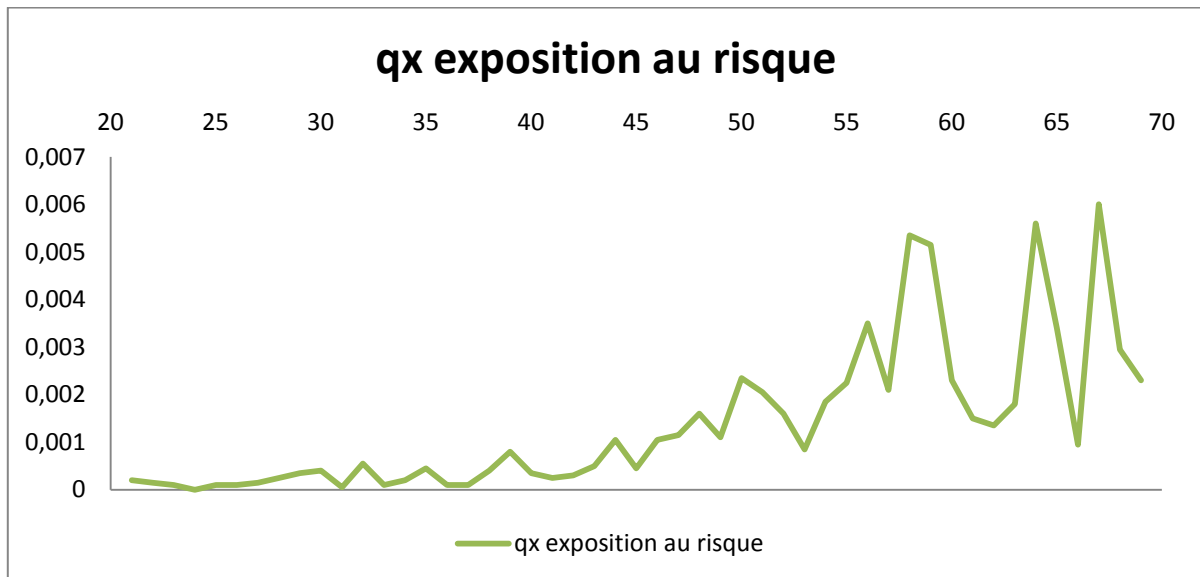


Figure 18: estimateur exposition au risque

IX. Méthode simpliste

C'est une extension de l'estimation par la méthode binomiale classique, et comme son nom l'indique elle est la plus simpliste, mais se base sur une hypothèse assez forte, à savoir : le nombre de survivants à l'âge x est égale au nombre de survivants à l'âge x au 30 Juin :

$$\hat{q}_x = \frac{D_x}{L_x} = \frac{D_x}{\text{agés de } x \text{ années au 30 Juin}}$$

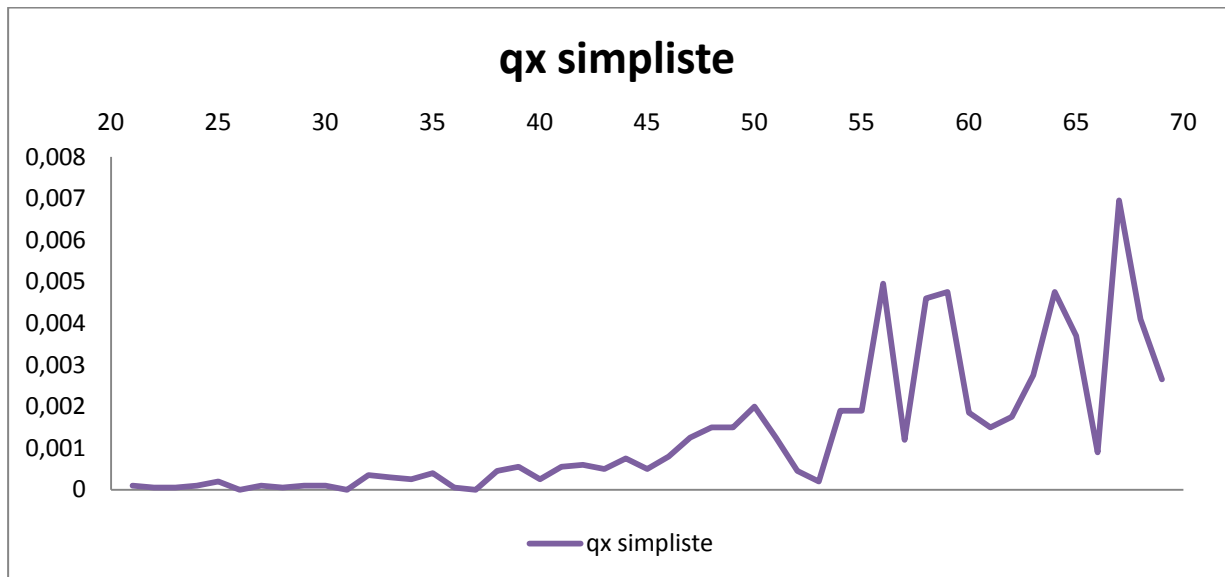


Figure 19: estimateur méthode simpliste

X. Comparaison des méthodes

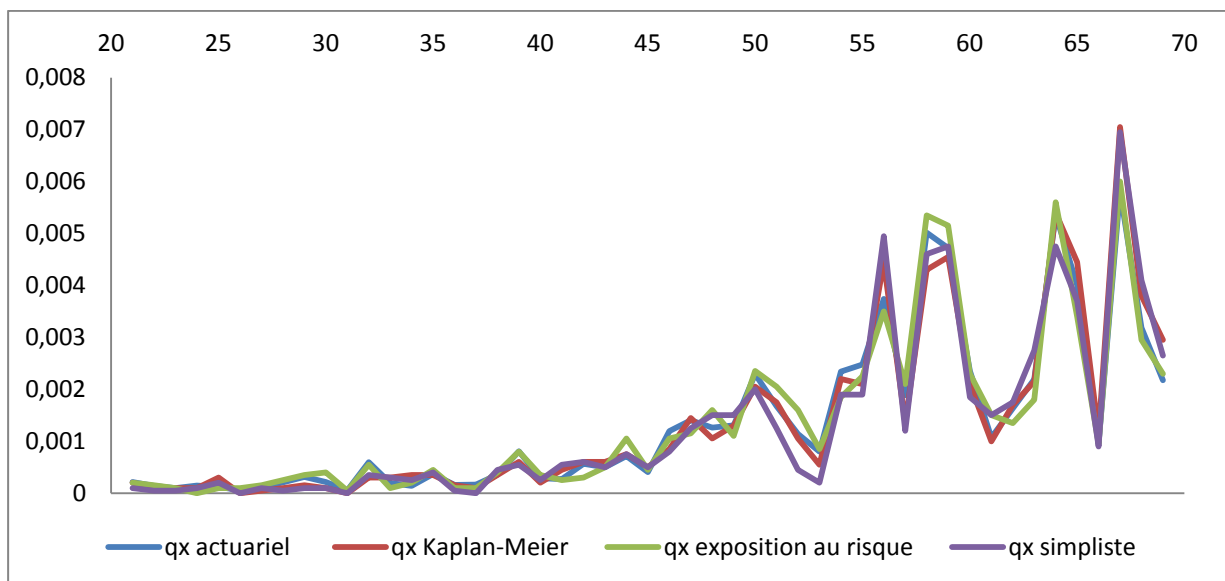


Figure 20: comparaison des estimations brutes

On voit dans le graphique de comparaison des méthodes d'estimation des tables brutes qu'il y a quelques petites différences entre les différentes estimations, on cherchera pas à comparer entre ces résultats qui sont dépendantes des données utilisées et des hypothèses de chaque méthode d'estimation.

Par la suite, nous allons retenir les estimations de Kaplan-Meier car c'est la méthode qui se base sur l'hypothèse la moins forte.

XI. Conclusion

Ce chapitre intitulé «construction de la table de mortalité brute » a présenté la première partie de construction d'une table de mortalité d'expérience : fiabilisation de la base des données, puis construction de la table de mortalité brute. la table brute retenue présente des irrégularités à cause des fluctuations de l'échantillonnage, le prochain chapitre traitera des méthodes de lissage qui s'appliqueront à la table brute.

Chapitre 5 : Le lissage de la table de mortalité brute

I. Introduction

Les taux annuels bruts de décès présentent en général des irrégularités en rapport avec les fluctuations d'échantillonnage. Il est donc nécessaire de lisser ces taux afin d'obtenir une courbe de mortalité qui progresse graduellement avec l'âge.

Un bon ajustement possède nécessairement deux qualités majeures :

- représentation fidèle des données brutes.
- régularité des variations des taux lissés.

Bien évidemment il faudrait faire un arbitrage entre ces deux qualités qui évoluent en sens inverse.

Il existe différentes techniques qui peuvent faire aussi l'objet d'une utilisation conjointe :

- les modèles paramétriques.
- les lissages paramétriques.
- les lissages non paramétriques.
- les modèles relationnels.

Les modélisations paramétriques sont à privilégier dans le cas de petits échantillons ou peu de données comme nous l'avons fait dans le chapitre 2. Dans notre cas de table d'expérience, on dispose d'un nombre important de données (quotients bruts dans la plage d'âges 21-69), nous avons choisit de présenter et d'appliquer les méthodes de lissages et les modèles relationnels

Nous allons effectuer plusieurs essais de sorte à choisir la méthode qui représente le mieux la mortalité du groupe observé.

II. Lissages paramétriques

Il s'agit de substituer aux taux annuels bruts de mortalité une série plus régulière ou lissée, en supposant que la courbe de mortalité appartient à une certaine famille de fonctions mathématiques.

Les modèles existants relèvent généralement d'un modèle de régression, comme la méthode des splines ou celles des lois de la famille Gompertz-Makeham.

II.1. Méthode des splines

II.1.1. Présentation

Le terme spline tire son origine d'une technique utilisée autrefois pour construire les coques des navires. Le spline était une longue latte de bois fixée en plusieurs endroits. Cette technique permettait d'obtenir, entre les points d'attache, la forme la plus lisse possible. Les mathématiciens ont étudié cette forme à partir de 1946 et en ont dérivé la fonction spline.

II.1.1.1. Définition

Une fonction spline de degré d ($d > 0$) à l nœuds k_1, \dots, k_l est une fonction de classe C^{d-1} dont les restrictions aux intervalles (k_i, k_{i+1}) , $i=0, \dots, l$ sont des polynômes de degré d . Par convention, on pose $k_0 = -\infty$ et $k_l = +\infty$.

Pour mémoire, une fonction de classe C^{d-1} est une fonction continue, différentiable $d-1$ fois et dont les dérivées d'ordre 1 à $d-1$ sont continues.

II.1.1.2. Le lissage par un spline

L'ajustement d'une fonction spline aux estimations brutes des taux de décès se fait par la méthode des moindres carrés pondérés (minimisation de la somme pondérée des écarts quadratiques entre les estimations brutes et lissées :

$$SC = \sum_{x_{\text{inf}}}^{x_{\text{sup}}} \left(w_x (g_x - \hat{q}_x)^2 \right)$$

Pour les poids, on peut par exemple utiliser les effectifs sous risque ou l'inverse des variances des estimateurs bruts.

Il n'existe pas de procédure pré-établie pour déterminer le nombre de nœuds optimal et leur valeur. On peut cependant souligner que :

- Plus le nombre de noeuds est élevé, plus les valeurs lissées seront proches des estimations brutes.

- Dans l'objectif de minimiser SC , le déplacement d'un noeud est parfois plus intéressant que l'ajout d'un noeud supplémentaire.

Pour déterminer les valeurs des nœuds, plusieurs approches sont envisageables. Une première consiste à les fixer préalablement à la minimisation et à comparer les résultats obtenus avec plusieurs choix différents. Une analyse graphique de la courbe de mortalité peut aider à déterminer les valeurs et le nombre de nœuds. Une approche alternative serait d'inclure les valeurs des nœuds dans les paramètres de la minimisation.

II.1.2. Résultats : spline carré à un noeuds

Pour lisser la courbe de mortalité par un spline carré à un noeuds sur l'intervalle d'âge [21,69] , on détermine les valeurs lissées des \hat{q}_x par :

$$q_x^{\text{lissé}} = \begin{cases} P_1(x) & \text{si } 21 \leq x \leq k \\ P_2(x) & \text{si } k \leq x \leq 69 \end{cases}$$

Où k_1, k_2 sont les deux nœuds et $P_i(x), i = 1, 2, 3$ des polynômes de degré 2

Le spline est une fonction de classe C^1 , par conséquent, le système doit vérifier :

$$P_1(k) = P_2(k) \text{ et } P_2'(k) = P_1'(k)$$

Ce qui revient à prendre :

$$P_1(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 \text{ et } P_2(x) = P_1(x) + c_3(x - k)^3$$

Avec un nœuds à l'âge 45

$$q_x^{lissé} = \begin{cases} 6,56909 \times 10^{-5} - 3,77879 \times 10^{-5}x + 1,3534 \times 10^{-6}x^2, 21 \leq x \leq 45 \\ 6,56909 \times 10^{-5} - 3,77879 \times 10^{-5}x + 1,3534 \times 10^{-6}x^2 - 1,88937 \times 10^{-7}, 45 \leq x \leq 69 \end{cases}$$

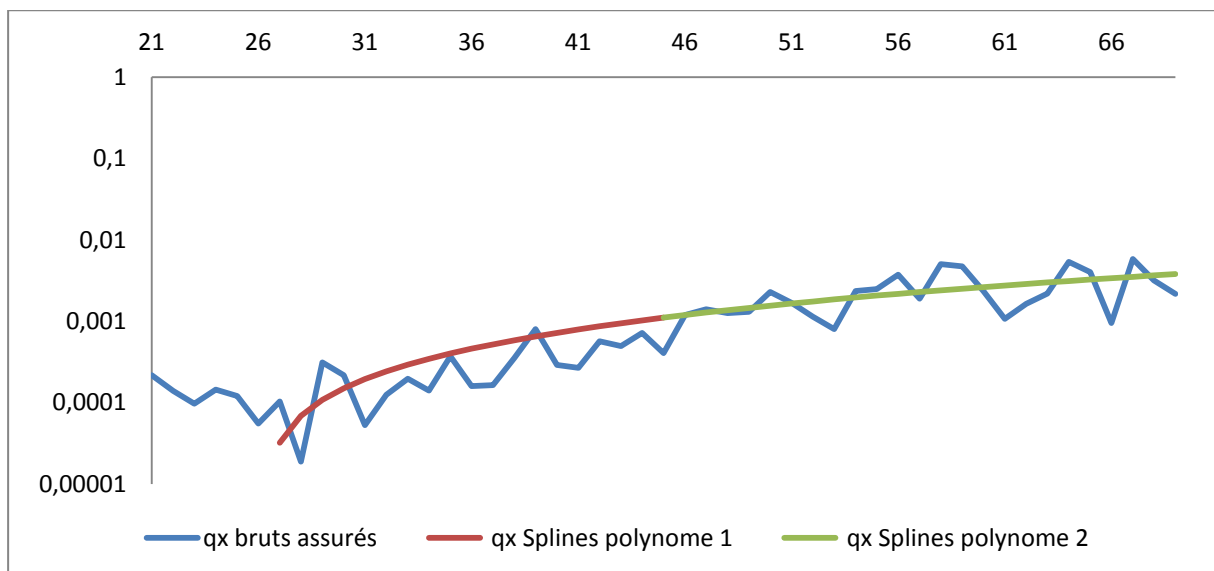


Figure 21: $\log(q_x)$ - ajustement par la méthode des splines

Dans la plage d'âges 21-26, l'ajustement donne des valeurs négatives,

Par contre, dans la plage d'âges 26-69, la méthode des splines donne un ajustement assez satisfaisant,

II.2. Loi de la famille Gompertz-Makeham

II.2.1. Présentation

On appelle loi de Gompertz-Makeham de paramètres r et s , $GM(r,s)$, une fonction de la forme : $P_1 + \exp(P_2)$ où P_1 et P_2 sont des polynômes de degrés $r-1$ et $s-1$ (en d'autres termes, r et s représentent les nombres de termes des polynômes P_1 et P_2).

Les lois de Gompertz et de Makeham sont des cas particuliers de cette famille de fonction.

Un lissage de la courbe de mortalité par une loi de la famille Gompertz-Makeham de paramètres r et s se fait posant $\mu_x = P_1 + \exp(P_2)$ puis en déterminant les coefficients des polynômes $\mu_x = P_1 + \exp(P_2)$ et $\mu_x = P_1 + \exp(P_2)$ puis en déterminant les coefficients des polynômes P_1 et P_2 par les méthodes des moindres carrés pondérés.

Usuellement, des lissages sont effectués pour plusieurs couples de paramètres (r,s) . Une analyse comparative des courbes lissées permet ensuite de déterminer celle qui donne les meilleurs résultats.

II.2.2. Résultats

Nous avons fait les différents ajustements de la famille $GM(r,s)$ où r et s sont inférieurs à 3. Le meilleur ajustement a été, naturellement, celui qui possède le plus de paramètre, à savoir :

$$GM(3,3): \mu_x = 6,7268 \times 10^{-5} + 7,0587 \times 10^{-6} x - 2,1477 \times 10^{-7} x^2 + \exp\left(-20,641911 + 0,46467813x - 0,00359126x^2\right)$$

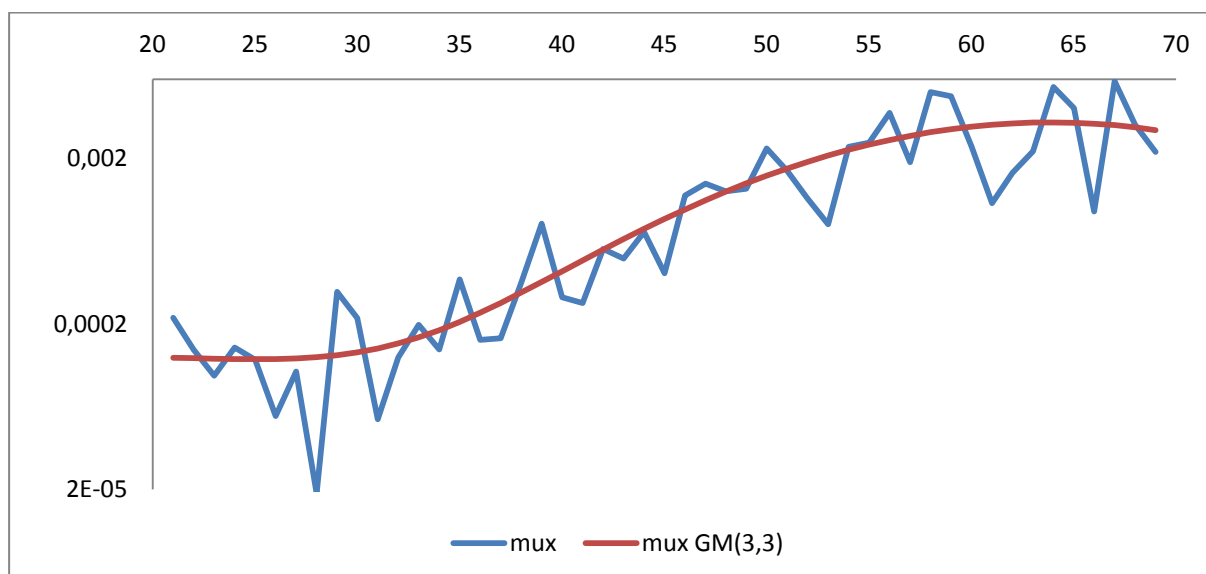


Figure 22: ajustement par la méthode de Gompertz-Makeham

Avec l'hypothèse que la force instantanée de mortalité est constante par âge, on retrouve facilement la courbe des quotients de mortalité.

III. Lissages non paramétriques

Le principe consiste à substituer aux données brutes des valeurs lissées, en supposant que la mortalité du groupe étudié est plutôt régulière, sans qu'aucune loi sous-jacente n'intervienne. Les méthodes les plus courantes sont celles des moyennes mobiles pondérées et de Whittaker-Henderson (1923).

III.1. La méthode des moyennes mobiles

III.1.1. Présentation

La méthode des moyennes mobiles centrées symétriques pondérées est l'une des premières méthodes de lissage à avoir été développée.

La valeur lissée du taux de mortalité est obtenue en prenant la moyenne mobile pondérée de $2k+1$ estimations initiales consécutives (quotients de décès bruts), indicées de $x-i$ à $x+i$. La formule générale pour un lissage de degré $2k+1$ est :

$$q_x^{lissé} = \sum_{i=-k}^k c_i \hat{q}_{x+i}$$

Classiquement on fait l'hypothèse : $c_i = c_{-k}$, pour $i=1, \dots, k$

On détermine les coefficients c_i en minimisant les écarts entre les valeurs observées et celles lissées.

Influence du paramètre k :

Le choix de k détermine la taille de la plage de lissage et permet d'arbitrer entre lissage et proximité aux données brutes : une augmentation de k permettra d'accroître le lissage aux dépens de la proximité entre les taux lissés et les taux bruts.

III.1.2. Résultats

Nous avons choisit de fixer le paramètre $k=3$, et de travailler avec un seuil coefficient constant, ce coefficient qui donne la courbe la plus régulière est le suivant :

$$c_i = 0,142857142857143$$

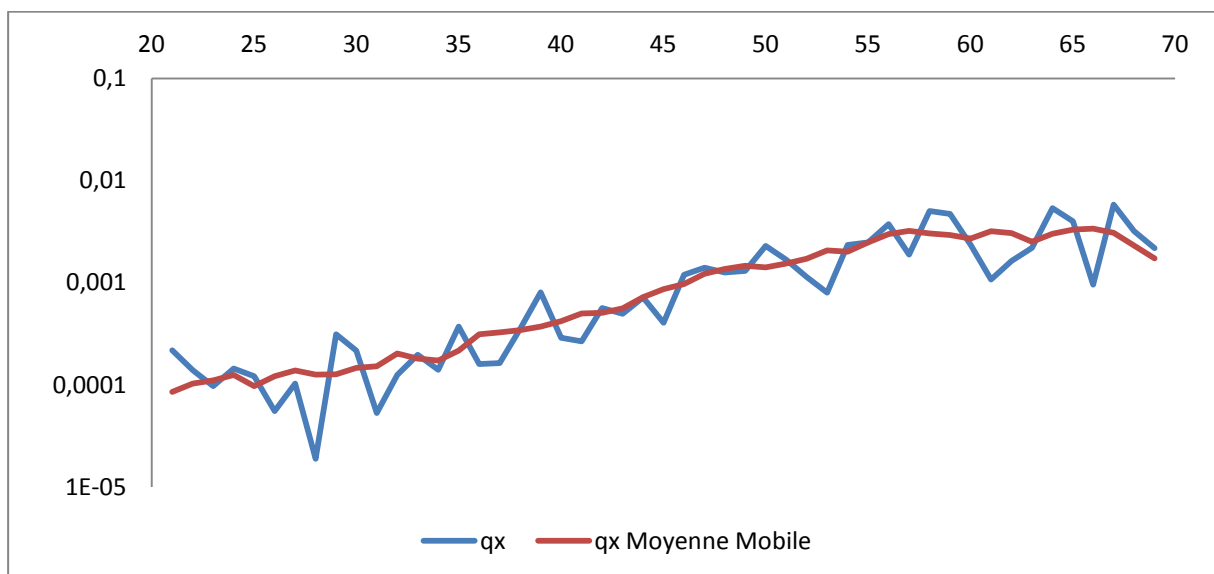


Figure 23: $\log(q_x)$ - ajustement par la méthode de la moyenne mobile

III.2. La méthode Wittaker-Henderson

III.2.1. Présentation

La méthode de Wittaker-Henderson consiste à rechercher le meilleur compromis entre l'adéquation aux données brutes et la régularité de la courbe de mortalité. Les taux de mortalité lissés sont obtenus en minimisant la mesure :

$$M = F + hS, \text{ où}$$

$$-F = \sum_{x=x_{\text{inf}}}^{x=x_{\text{sup}}} (q_x - \hat{q}_x)^2 : F \text{ est la somme pondérée des carrés des écarts entre les valeurs lissées et}$$

les valeurs brutes, elle mesure la fidélité des taux de mortalité lissés aux taux bruts. Plus les taux lissés se rapprochent des taux bruts, plus la valeur de F diminue.

$$-S = \sum_{x=x_{\text{inf}}}^{x=x_{\text{sup}}-z} \left(\Delta^z q_x \right)^2 : S \text{ est la somme des carrés des différences d'ordre } z \text{ des taux lissés,}$$

elle permet d'évaluer la régularité de la courbe lissée. Plus l'aspect de la courbe est régulier, plus la valeur de S diminue.

z est un entier positif. En pratique, les valeurs les plus utilisées sont z=2,3 ou 4. Pour mémoire, rappelons que :

$$\Delta^z q_x = \Delta^z q_{x+1} - \Delta^{z-1} q_x, \text{ pour } z > 0 \text{ et } \Delta^0 q_x = q_x$$

-h est un réel positif qui permet de contrôler l'influence de chacun des deux critères précédents. Plus h est grand, plus la minimisation porte sur le terme S et impose à la courbe d'être régulière. Plus h est petit, plus la minimisation accorde de l'importance au terme F et impose à la courbe lissée de se rapprocher des données brutes. Soulignons que si h=0, aucun lissage n'est effectué.

- w_x sont les poids donnés à chaque âge.

III.2.2. Résultats

La méthode de wittaker-Henderson se base sur un arbitrage de bon sens déterminé par le coefficient H, visuellement nous avons choisit de prendre H=10.

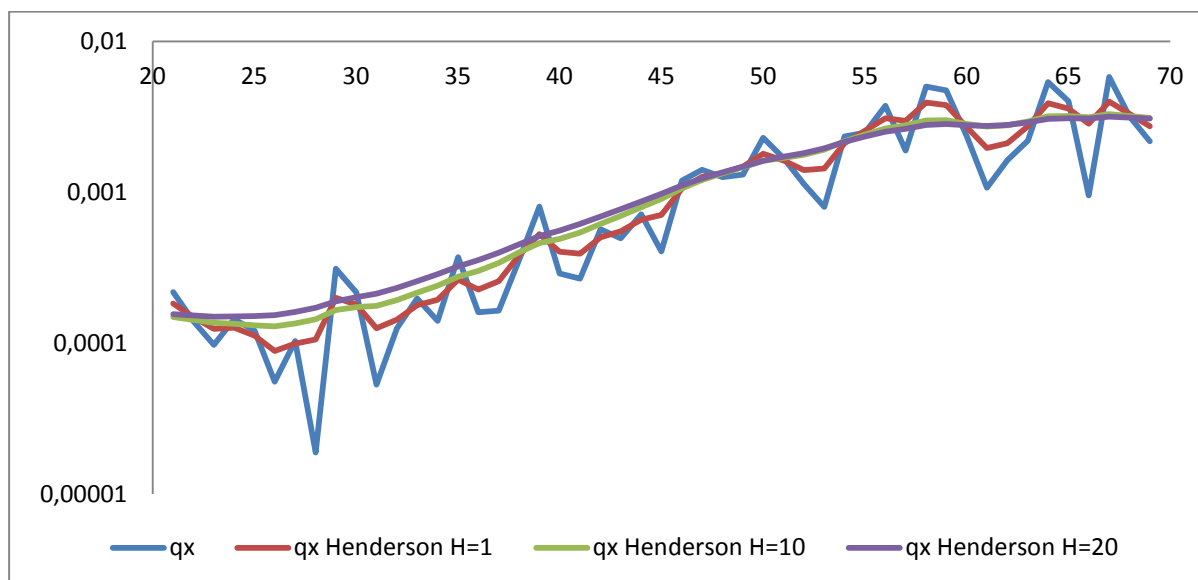


Figure 24: ajustement par la méthode de Wittaker-Henderson

IV. Modèles relationnels

Il s'agit de rapprocher les taux de mortalité bruts à ceux issus d'une table connue, construite à partir d'une population ayant des caractéristiques similaires et de transformer cette table de référence pour aboutir à celle du groupe visé. Les modèles de Cox (1972), de Brass (1971) et de Hannerz (2001) constituent les modèles de référence. Ils peuvent être utilisés séparément ou combinés dans le cadre de modèles additifs généralisés.

IV.1. Modèles de Cox

IV.1.1. Présentation

Les modèles paramétriques autorisent des comparaisons fines de la mortalité, mais sont évidemment sujets à mauvaise spécification : la forme paramétrique peut s'avérer erronée, jetant le discrédit sur les conclusions obtenues.

Le modèle à risques proportionnels proposé par Cox permet de s'affranchir d'une formulation paramétrique rigide. Il postule que les taux de mortalité du groupe auquel l'actuaire s'intéresse sont proportionnels à ceux d'une population de référence, le facteur de proportionnalité ne dépendant pas de l'âge. Plus précisément, les taux μ_a sont liés à un jeu de taux de référence μ_a^{ref} par la relation :

$$\mu_a = \theta \mu_a^{ref}, \quad a = a_{min}, \dots, a_{max}.$$

Il s'agit là du modèle relationnel le plus simple, liant la mortalité du groupe d'intérêt, représentée par les taux $\mu_{a_{min}}, \dots, \mu_{a_{max}}$ à celle de la mortalité de référence, représentée par les taux $\mu_{a_{min}}^{ref}, \dots, \mu_{a_{max}}^{ref}$, à l'aide du modèle.

IV.1.1. Résultats

L'ajustement de Cox se base sur la force instantanée de mortalité :

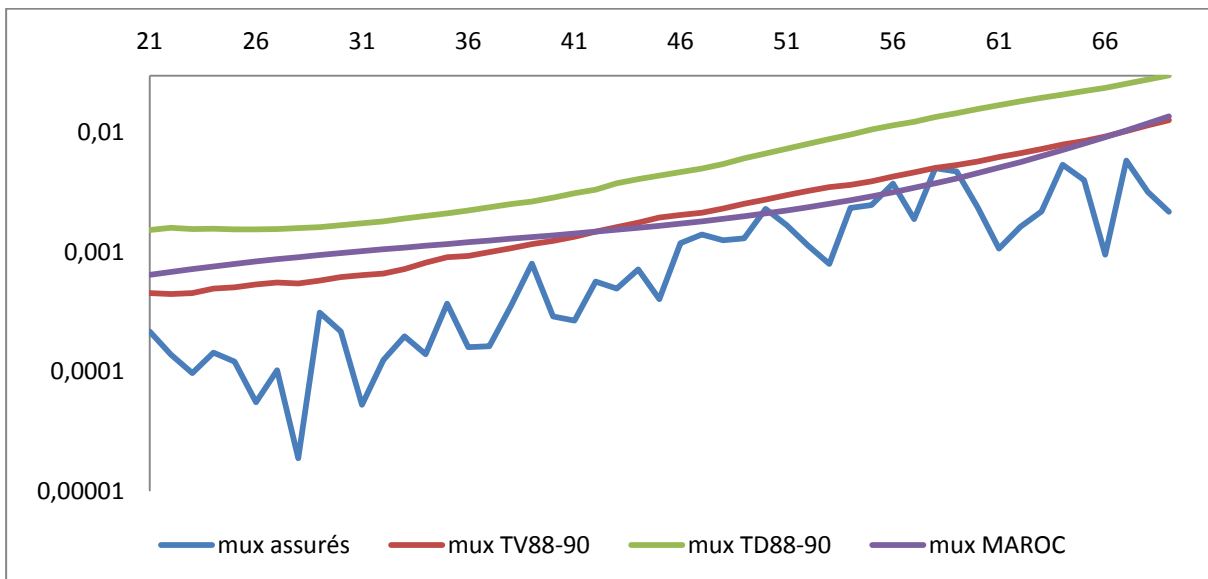


Figure 25: ajustement log(mux) modèle de COX

variable explicative	Coefficient	somme des carrés des écarts
mux TV 88-90	0,387961379	5,47252E-05
mux TD 88-90	0,154190183	5,15915E-05
mux Maroc	0,390032772	6,89129E-05

Tableau 14: résultats de l'ajustement COX

Selon les résultats de l'ajustement de Cox, on voit bien que c'est la courbe TD 88-90 qui explique au mieux la courbe de survie de la population assurée, ce qui est assez logique puisqu'on est en présence d'une garantie décès.

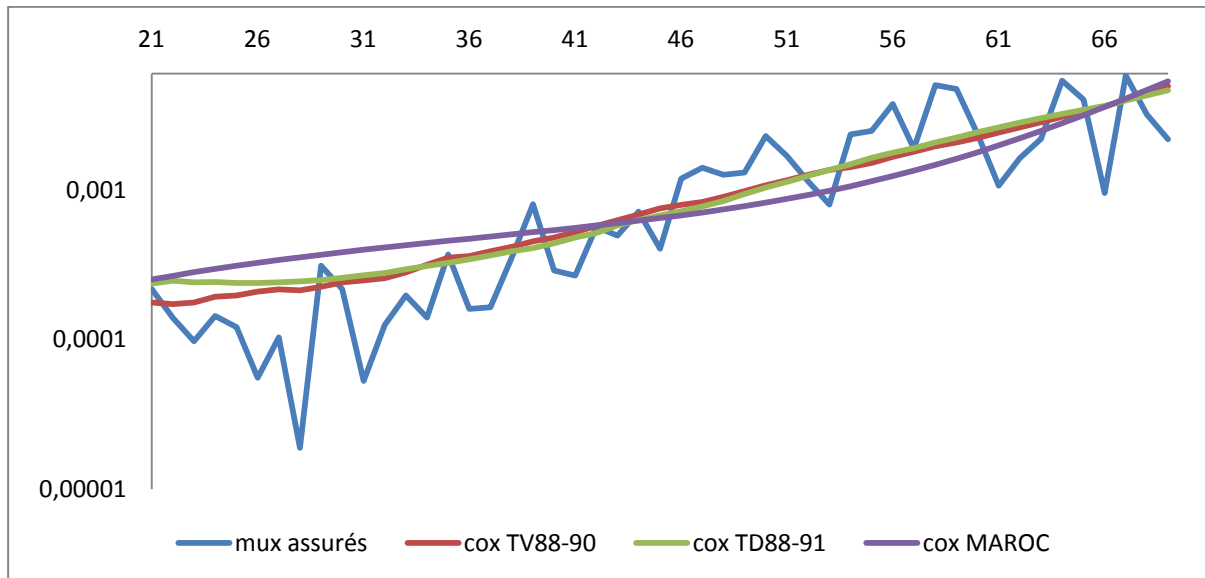


Figure 26: ajustement de qx par le modèle de COX

Graphiquement, on voit bien que c'est la courbe de cox TD 88-90 qui s'ajuste au mieux aux données d'expérience.

V.2. Modèle de Brass

V.2.1. Présentation

la validité de 1.1 a cependant été mise en doute par de nombreux auteurs, dont Brass. En lieu et place de 1.1, Brass suggère la relation :

$$\text{logit}({}_a q_0) = \theta_1 + \theta_2 \text{logit}({}_a q_0^{ref}), \quad a = a_{\min}, \dots, a_{\max}.$$

où $\text{logit}(q)=\ln(q/(1-q))$. Il s'agit d'une relation linéaire entre les logit des quotients de mortalité d'intérêt et ceux d'une population de référence. Le recours à la transformation logit permet d'obtenir une quantité non-contrainte (alors que $q \in [0,1]$, $\text{logit}(q) \in R$)

V.2.2. Résultats

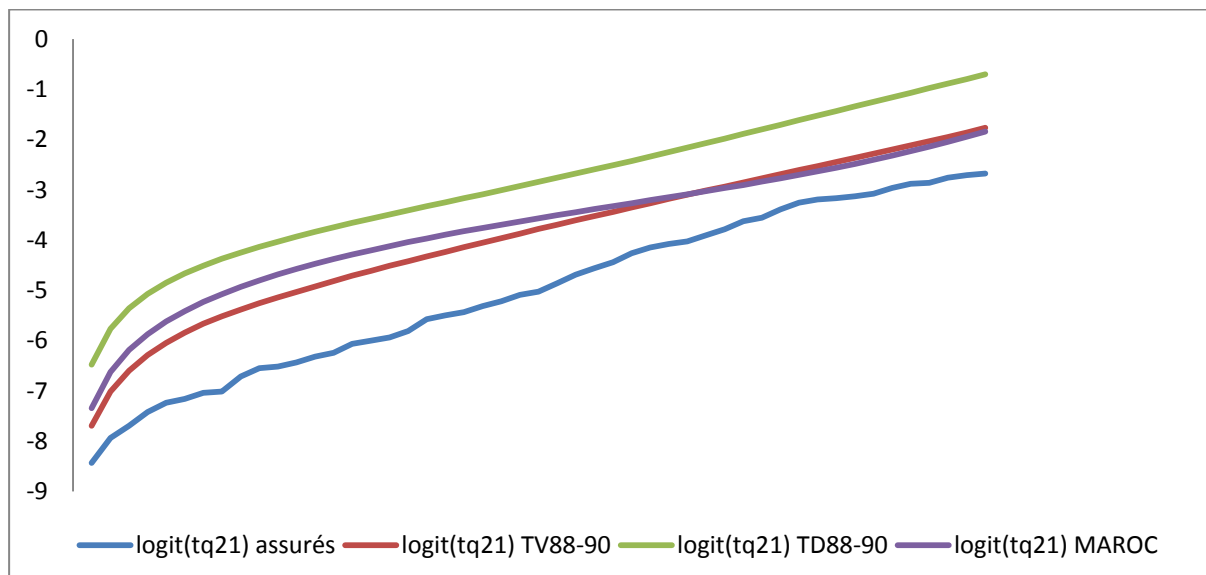


Figure 27: représentation des logits: assurés, tables: TD, TV et nationale

variable explicative du logit(tq21) assurés	coefficient de détermination	ordonnée	pente
logit(tq21) TV88-90	0,983772455	-0,64506332	1,10663262
logit(tq21) TD88-90	0,98542437	-1,64567446	1,15672395
logit(tq21) MAROC	0,957865243	-0,26990222	1,26040407

Tableau 15: ajustement de qx par la méthode de Brass

Ce tableau confirme le résultat obtenu avec le modèle de Cox, à savoir : la table TD 88-90 explique le mieux la courbe de survie des données d'expérience.

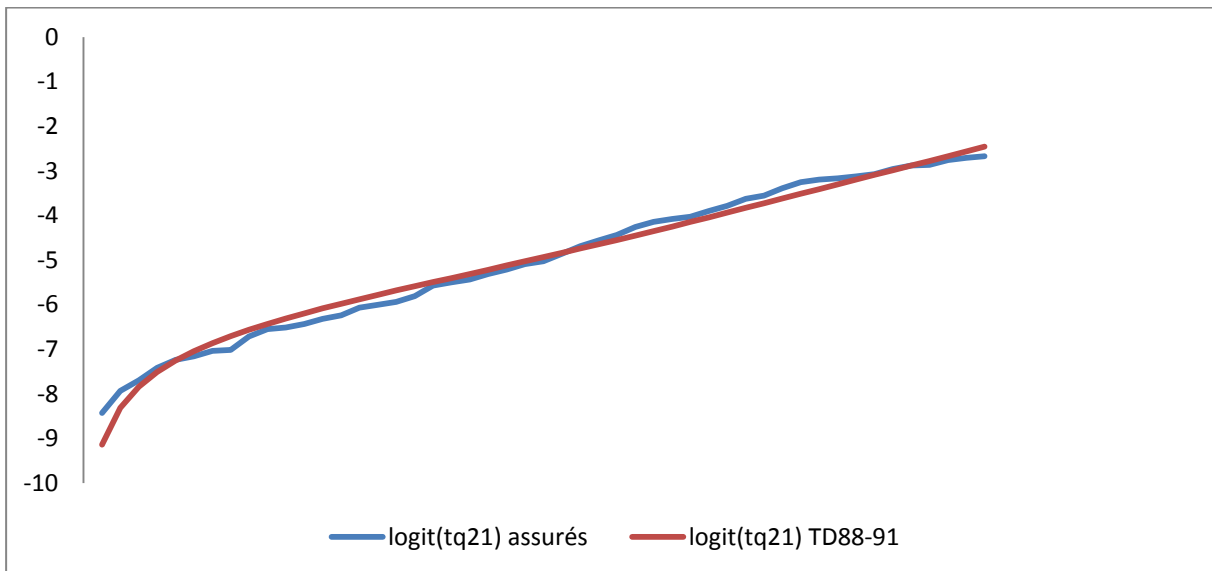


Figure 28: ajustement des logits

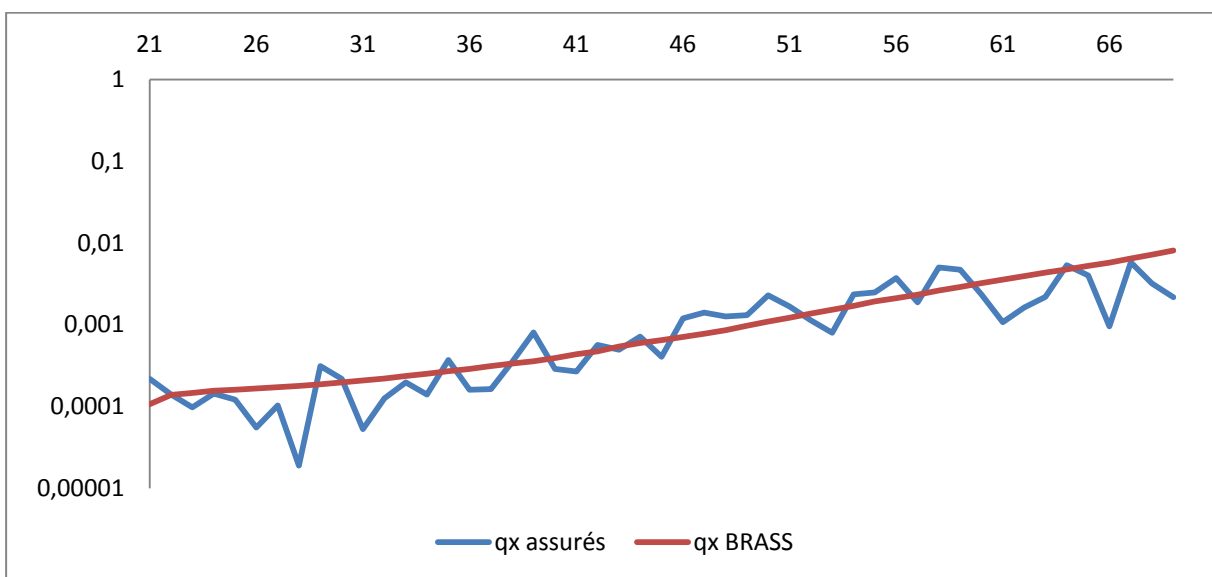


Figure 29: $\log(qx)$ - ajustement par la méthode de Brass

VI. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté et appliqué des méthodes de lissage paramétriques, non paramétriques et des modèles relationnels, sur la base de données de la population assurée.

Cependant, il serait difficile de décider de la meilleure table visuellement, le chapitre suivant s'intéresse aux critères de validation de la table de mortalité construite.

Chapitre 6 : La validation de la table construite

I. Introduction

L'objectif est de s'assurer du respect de certaines règles de cohérence. Plusieurs éléments sont à vérifier : croissance des taux de mortalité avec l'âge, correspondance avec les données initiales, respect des connaissances a priori de la mortalité. Par exemple, dans le cas d'une différenciation par sexe, il est logique d'observer, pour un même âge, que les taux de décès des femmes sont inférieurs à ceux des hommes. Différents critères et tests sont susceptibles de mesurer la qualité de la modélisation.

Récapitulatif

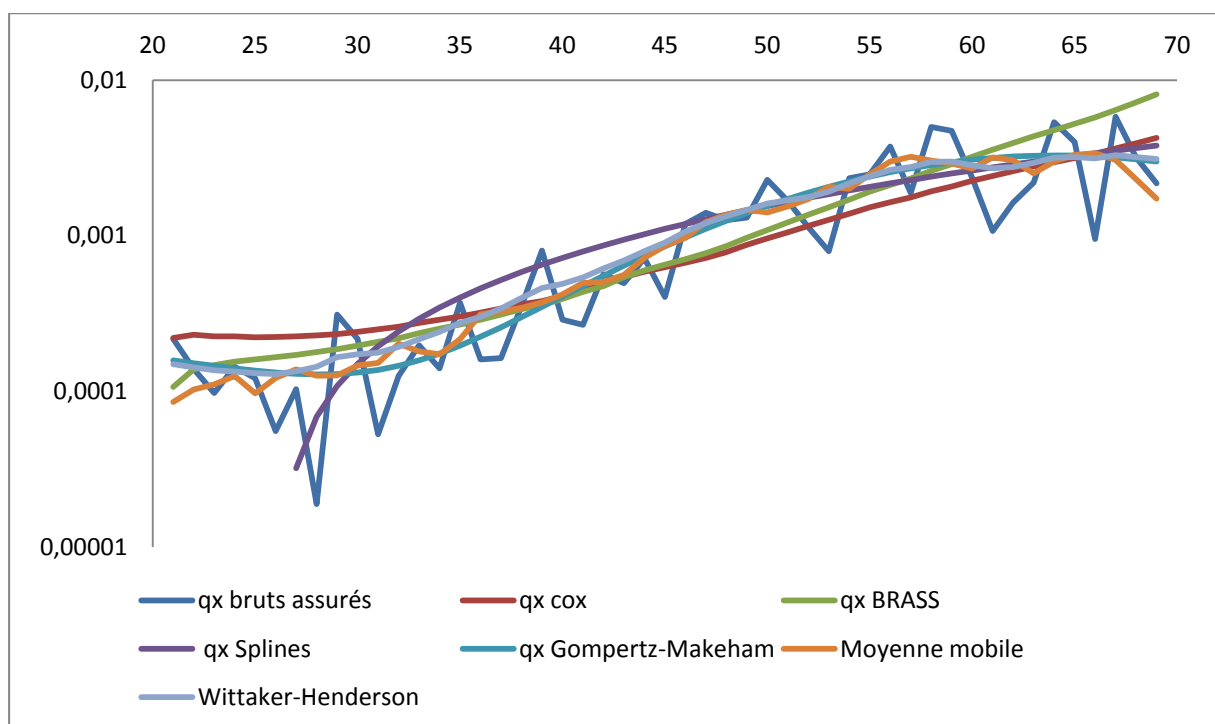


Figure 30: log(qx) - les différents résultats du lissage

II. Test de Chi-deux d'ajustement

Ce test rejette le modèle si les écarts entre les taux bruts et les taux ajustés sont trop significatifs pour être simplement dus au hasard, pour un certain niveau de confiance α :

$$\chi_{obs} = \sum_{x=0}^n \frac{(d_x - l_x \hat{q}_x)^2}{l_x \hat{q}_x}$$

Soit le degré de liberté k égal au nombre de tranches d'âges envisagées diminuer du nombre de paramètres estimés.

Rejet si : $\chi_{obs} > \chi_k^2(\alpha)$

			Décision au seuil α		
Modèle (paramètres)	Sous H0	Valeur observée	$\alpha = 10\%$	$\alpha = 5\%$	$\alpha = 1\%$
Cox (1)	$\chi^2(48)$	131,227989	rejet	rejet	rejet
Brass (2)	$\chi^2(47)$	97,52486649	rejet	rejet	rejet
Splines (1)	$\chi^2(48)$	32,60505382	pas de rejet	pas de rejet	pas de rejet
Gompertz-Makeham (4)	$\chi^2(45)$	69,21888642	rejet	rejet	rejet
Moyenne mobile (6)	$\chi^2(43)$	69,63383447	rejet	rejet	rejet
Wittaker-Henderson (1)	$\chi^2(43)$	56,68436537	pas de rejet	pas de rejet	pas de rejet

Tableau 16: tableau du test de Khi-deux pour les différents lissages

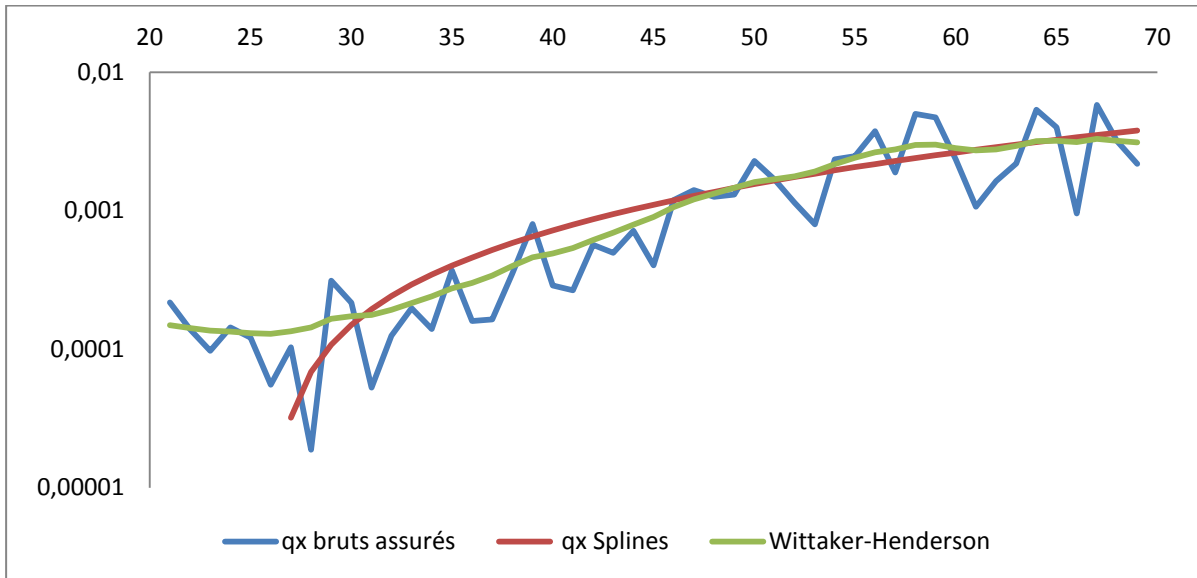


Figure 31: les lissages retenus suite au test de Khi-deux

III. Critère de fidélité aux taux bruts

$$CF1 = \sum_x |q_x^* - \hat{q}_x| \text{ ou } CF2 = \sum_x (q_x^* - \hat{q}_x)^2 \text{ où } q_x^* \text{ représente le taux brut.}$$

Plus le critère est proche de 0, plus les taux lissés sont fidèles aux taux bruts.

Critère de fidélité 1	
Splines	0,030149202
Wittaker-Henderson	0,02458813

Tableau 17: critère de fidélité 1

Critère de fidélité 2	
Splines	4,3499E-05
Wittaker-Henderson	3,4204E-05

Tableau 18: critère de fidélité 2

IV. Critère de régularité des taux lissés

$$CR = \sum_x \left(\Delta^z \hat{q}_x \right)^2 \text{ Soit pour } z=1 : CR = \sum_x \left(\hat{q}_x - \hat{q}_{x+1} \right)^2$$

Plus cette valeur est proche de 0 et plus le lissage est régulier

Critère de régularité	
Splines	3,7928E-07
Wittaker-Henderson	5,971E-07

Tableau 19: comparaison régularité

V. choix de la meilleure table

Bien évidemment les deux critères fidélité et régularité varient en sens inverses, nous avons rejeté la méthode des splines car elle n'a pas modélisé la courbe à tous les âges.

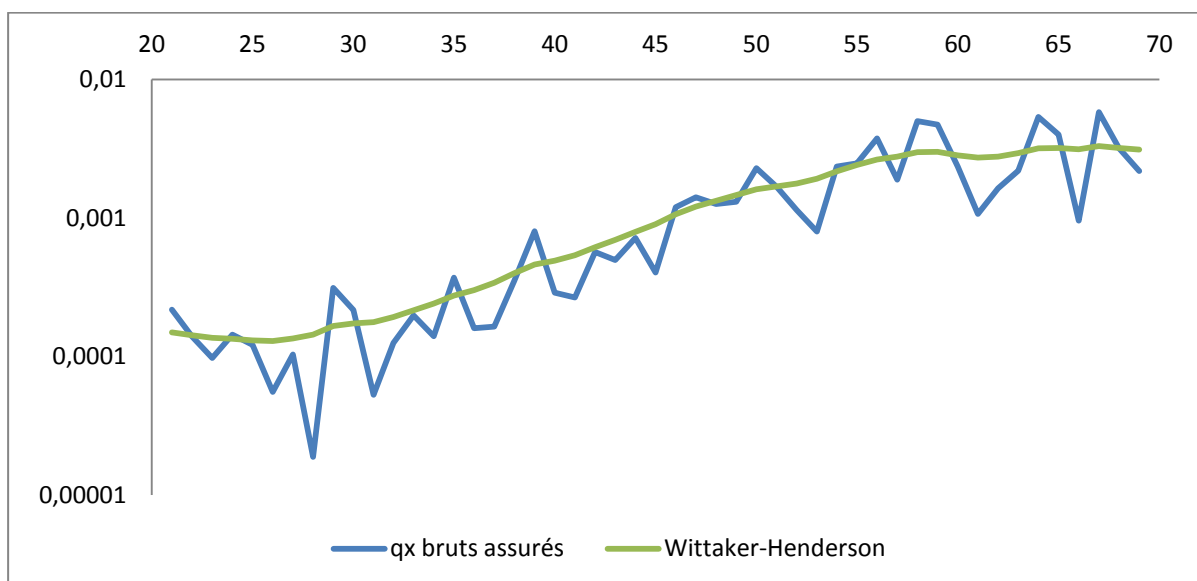


Figure 32: log(qx) - Le lissage retenu

VI. Conclusion

Le présent chapitre a montré les éléments de base de la validation des tables d'expérience : cette validation se fait selon deux étapes essentielles : validation ou rejet du modèle statistique, puis faire un arbitrage entre fidélité et régularité.

Chapitre 7 : L'Extrapolation de la mortalité aux grands âges

I. Introduction

Des études scientifiques récentes ont mis en lumière l'allure remarquable de la mortalité aux grands âges, à savoir une décroissance du taux de croissance de la mortalité à partir d'un certain âge. La littérature actuarielle présente énormément de méthodes d'extrapolation de la mortalité aux grands âges nommées aussi techniques de fermeture des tables.

Ces modèles d'extrapolation de la mortalité aux grands âges requièrent la disposition de données brutes sur les décès aux grands âges (à partir de 80 ans en général) , or on ne dispose pas d'estimation des quotients de mortalité au-delà de l'âge 69.

Dans ce chapitre, nous avons choisit de présenter les trois méthodes de fermetures de tables les plus utilisées en pratique:

- Méthode de Denuit et Goderniaux.
- Méthode de Coale et Kisker.
- Méthode logistique

L'extrapolation sera faire à l'aide de deux méthodes simplistes d'ajustement : ajustement mécanique et ajustement de Jaumain, en supposant que l'âge ultime est fixé à 110 ans.

II. Méthode de Denuit et Goderniaux

La méthode de Denuit et Goderniaux travaille sur les quotients de mortalité et introduit une contrainte de fermeture des tables de mortalité. Elle consiste à ajuster par moindres carrés le modèle log-quadratique :

$$\ln \hat{q}_x = a + bx + cx^2 + \varepsilon_x \text{ avec } \varepsilon_x \text{ iid } Nor(0, \sigma^2)$$

sur base des observations relatives aux âges les plus élevés, avec les deux contraintes

$$\begin{aligned} q_{130} &= 1 \\ q'_{130} &= 0 \end{aligned}$$

où q'_{130} désigne la dérivée première de q_{130} considérée comme fonction de l'âge x . Les deux contraintes conduisent à :

$$a + bx + cx^2 = c(130^2 - 260x + x^2)$$

Afin de déterminer l'âge à partir duquel les \hat{q}_x bruts seront remplacés par les valeurs ajustées provenant du modèle de Denuit et Goderniaux, nous avons choisi comme critère la maximisation du coefficient de détermination R^2 (en faisant varier cet âge de raccord dans l'intervalle 50-85 ans). Un lissage est parfois nécessaire autour de l'âge de raccord (Une simple moyenne géométrique pour les âges $x = x_0 - 5, \dots, x_0 + 5$ où x_0 est l'âge du raccord suffit en général). Ceci évite une cassure au voisinage de cet âge.

III. Méthode de Coale et Kisker

Le modèle de Coale et Kisker postule que

$$\hat{\mu}_x = \hat{\mu}_{65} \exp(k_x(x-65)) \text{ pour } x \geq 65 \text{ ans,}$$

où k_x est le taux de croissance de la mortalité à l'âge x . Les auteurs, après avoir examiné différents graphiques relatifs aux taux de croissance de la mortalité k_x de plusieurs pays considérés comme ayant des données de mortalité fiables aux âges élevés, ont remarqué que les k_x possédaient un pic aux alentours de 80 ans avant de décroître linéairement. Ceci les a amené à supposer que :

$$k_x = k_{80} + s.(x - 80), \quad x \geq 80$$

Afin de définir le coefficient s relatif à la pente, Coale et Kisker fixent arbitrairement le taux de mortalité pour un age ultime, soit 110 ans :

$$\hat{\mu}_{110} = 1 \text{ pour les hommes et } 0,8 \text{ pour les femmes}$$

On a alors

$$\hat{\mu}_{110} = \hat{\mu}_{79} \exp\left(\sum_{x=80}^{110} k_x\right) = \hat{\mu}_{79} \exp\left(\sum_{x=80}^{110} (k_{80} + s.(x - 80))\right)$$

qui donne :

$$s = -\frac{\ln\left(\frac{\hat{\mu}_{79}}{\hat{\mu}_{110}}\right) + 31k_{80}}{465}$$

Les taux de mortalité au-delà de 80 ans sont alors calculés de la manière suivante :

$$\hat{\mu}_x = \hat{\mu}_{79} \exp\left(\sum_{y=80}^x (k_{80} + s.(y - 80))\right), \quad x \in \{80, 81, \dots, 109\}$$

ou encore :

$$\hat{\mu}_x = \hat{\mu}_{x-1} \exp(k_{80} + s.(x - 80)), \quad x \in \{80, 81, \dots, 109\}$$

Il est à noter que les taux au-delà de 80 sont déterminés uniquement par :

$$\hat{\mu}_{79} \text{ et } k_{80} = \frac{\ln\left(\frac{\hat{\mu}_{80}}{\hat{\mu}_{65}}\right)}{15}$$

IV. Le modèle logistique

La courbe d'une fonction logistique est une courbe "en S", c'est-à-dire qui croît d'abord de manière accélérée puis de manière ralentie. De plus, elle a un comportement asymptotique intéressant. Le modèle logistique postule que :

$$\mu_x = c + \frac{a e^{bx}}{1 + \sigma^2 \frac{a}{b} (e^{bx} - 1)}$$

En pratique, il faut ajuster le modèle aux données par la moindres carrés dans la tranche d'âges 85-98 ans. Le modèle logistique a fait preuve d'une bonne adhérence aux données brutes au-delà de 99 ans.

V. L'ajustement mécanique

V.1. Présentation

L'ajustement mécanique se base sur la possibilité d'exprimer les probabilités q_x en fonction de $2k+1$ quotients de mortalité qui l'entourent comme suit :

$$q_x^{ajusté} = a_{-k} q_{x-k} + \dots + a_0 q_x + \dots + a_k q_{x+k}$$

V.2. Résultats

Dans notre cas on dispose q_x jusqu'à l'âge 69, et on cherche à connaître les q_x sous la contrainte $q_{110}=1$, donc nous allons adapter la formule de l'ajustement mécanique comme suit :

$$q_x^{ajusté} = a_{-k} q_{x-k} + \dots + a_{-1} q_{x-1}, \text{ ou } x > 69$$

Nous obtenus les résultats suivants :

$$k=1: q_x = (1,15122833104824) q_{x-1}$$

$$k=2: q_x = (0,615688538609344) q_{x-1} + (0,613847205904648) q_{x-2}$$

$$k=3 : q_x = (0,5802219742691) q_{x-1} + (0,4068509768732) q_{x-2} + (0,2825536046338) q_{x-3}$$

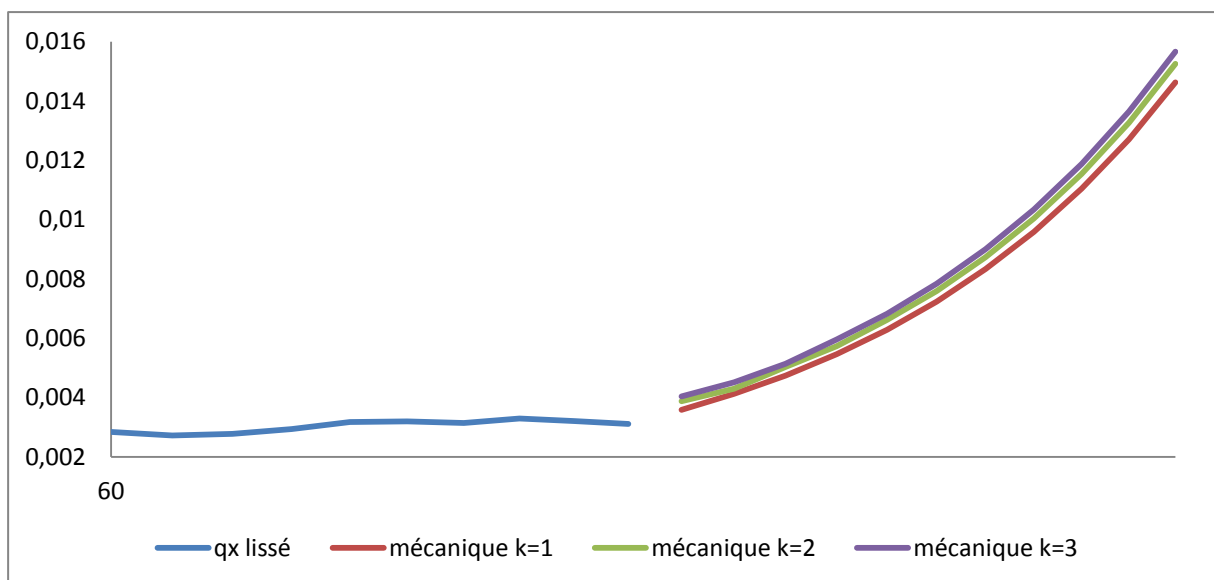


Figure 33: résultats de l'ajustement mécanique, k=1,2,3

Nous voyons qu'il y a une très bonne adéquation entre les quotients lissés et les quotients extrapolés à l'aide la méthode mécanique, nous allons retenir la méthode k=3 car c'est la plus prudente.

VI. L'ajustement de Jaumain

VI.1. Présentation

L'ajustement Jaumain se base sur la possibilité d'exprimer les probabilités q_x en fonction de $2k+1$ quotients de mortalité qui l'entourent, comme suit :

$$q_x^{ajusté} = q_{x-k}^{a-k} \times \dots \times q_{x-1}^{a-1}$$

VI.2. Résultats

Dans notre cas on dispose q_x jusqu'à l'âge 69, et on cherche à connaître les q_x sous la contrainte $q_{10}=1$, donc nous allons adapter la formule de l'ajustement mécanique comme suit :

$$q_x^{ajusté} = q_{x-k}^{a-k} \times \dots \times q_x^{a_0} \times \dots \times q_{x+k}^{a_k}, \text{ ou } x > 69$$

Nous obtenus les résultats suivants :

$$k=1: q_x = (q_{x-1})^{0,6}$$

$$k=2: q_x = (q_{x-1})^{0,25} (q_{x-2})^{0,263929781295054}$$

$$k=3: q_x = (q_{x-1})^{0,1212247867261} (q_{x-2})^{0,138247940583066} (q_{x-3})^{0,1}$$

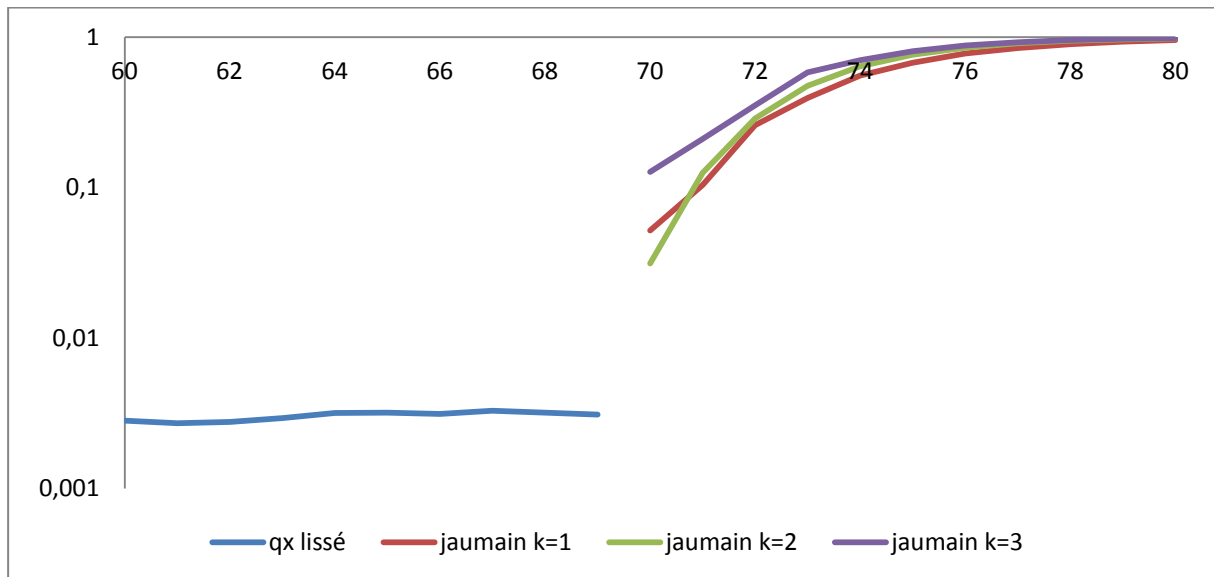


Figure 34: résultats de l'ajustement de Jaumain, k=1,2,3

Nous voyons qu'il n'y a pas une bonne adéquation entre les quotients lissés et les quotients extrapolés à l'aide de la méthode mécanique, nous allons comparer la méthode k=3 avec la méthode Jaumain.

VII. Choix de la méthode d'extrapolation

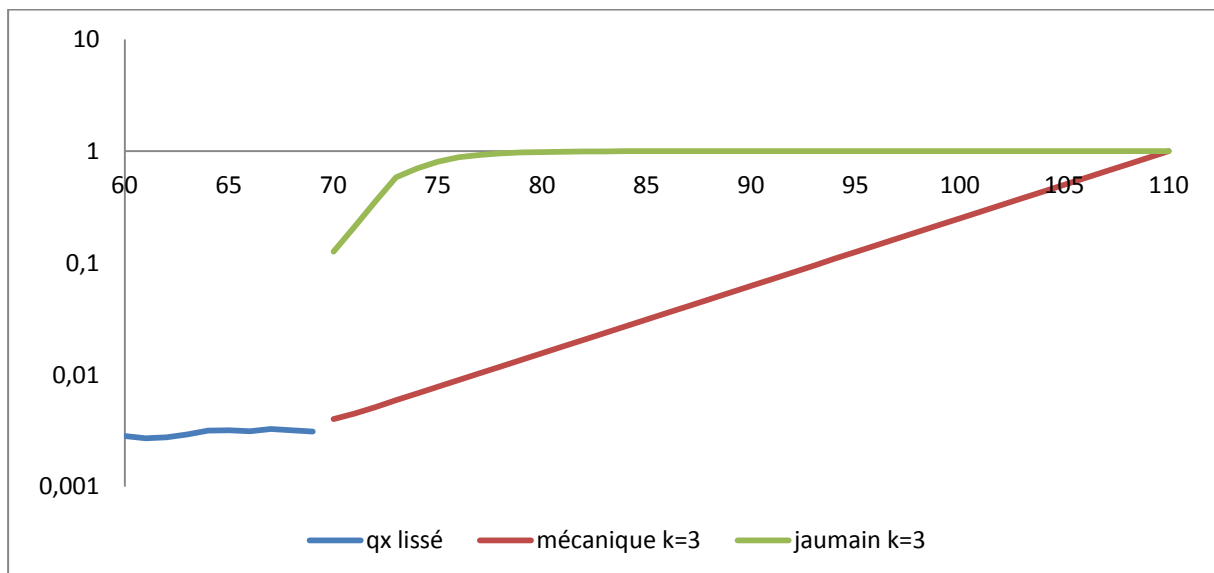


Figure 35: comparaison entre les ajustements mécaniques et Jaumain, k=3

Bien évidemment la méthode mécanique k=3 est un très adéquate dans notre cas pour extrapoler la mortalité aux grands âges.

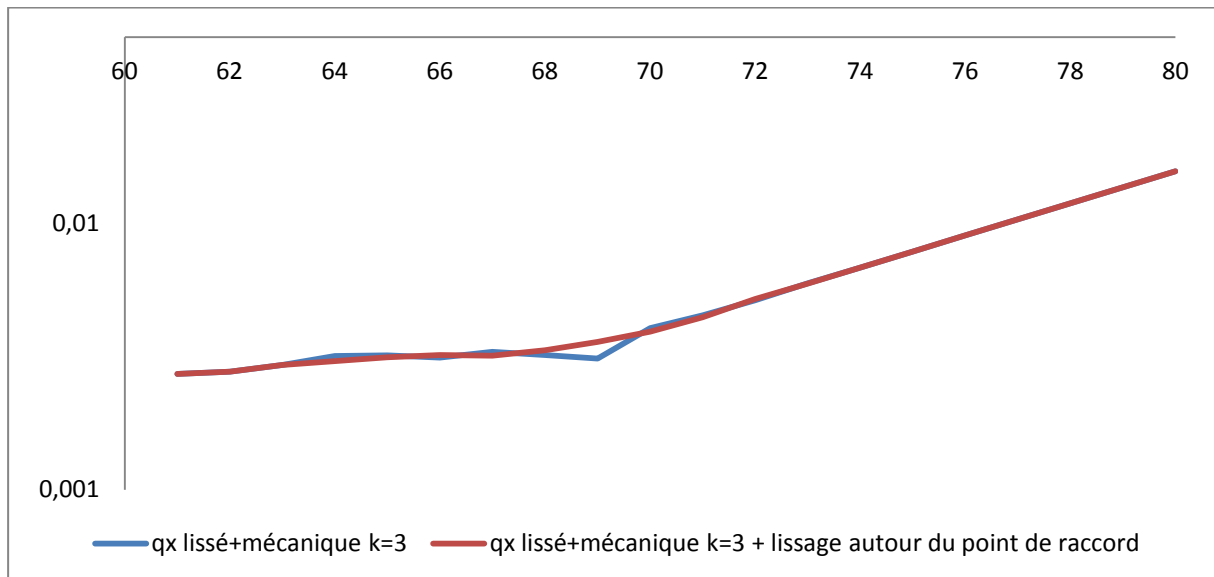


Figure 36 : la table de mortalité corrigée au point de raccord de l'extrapolation

Pour éviter la cassure au niveau du point de raccord, nous avons opté pour un lissage (Une simple moyenne géométrique pour les âges $x = x_0 - 5, \dots, x_0 + 5$ où x_0 est l'âge du raccord) autour de l'âge de raccord.

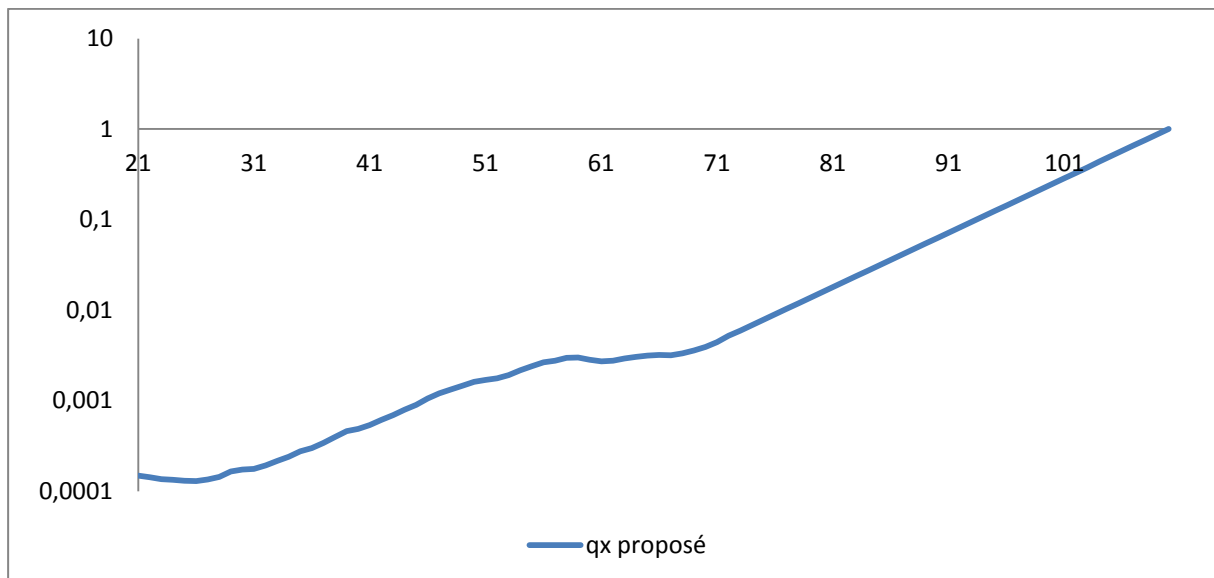


Figure 37: $\log(q_x)$ - La table de mortalité proposée

Ci-dessus la courbe de survie proposée, cette courbe a bien évidemment une allure assez classique mais elle est très riche en informations liées à l'historique du portefeuille de la garantie décès.

VIII. Conclusion

Le présent chapitre a présenté la philosophie des méthodes d'extrapolation de la mortalité aux grands âges, néanmoins, les résultats obtenus restent très critiquables du fait de la méconnaissance de l'allure courbe de survie aux grands âges.

Un travail assez consistant reste à faire dans sens : constitution d'une base de données de la population assurée âgée de plus de 80 ans qui pourra servir de référence pour faire des projections fiables et pouvoir se prononcer sur les indicateurs démographiques aux grands âges.

Chapitre 8 : Le déplacement de la table

I. Introduction

L'intérêt d'utiliser des tables de mortalité d'expérience n'est plus à démontrer, il faut choisir un échantillon représentatif de la population assurée et y appliquer les différentes méthodes énoncées précédemment. Mais dans quelle mesure peut-on faire confiance au modèle de la mortalité obtenu selon les données d'expérience ? Dans le présent chapitre, nous allons montrer que les projections faites selon la table d'expérience sont très sensibles aux fluctuations de l'échantillon : nous allons simuler différents scénarios démographiques, et scénarios de l'engagement de l'assureur, et puis nous proposerons une méthode de déplacement de la table basée sur la mesure du risque : la Value at Risk. Cette partie est motivée essentiellement par la non vérification de la loi des grands nombres à cause des petits échantillons.

II. Simulation de scénarios démographiques selon la table d'expérience

II.1. Présentation de la méthode

Bien évidemment, Pour chaque année, la survie d'un assuré dépendra de sa probabilité de survie sur l'année et d'une variable aléatoire : sa durée de vie.

Notons :

x : l'âge actuel de l'individu

k : les années projetées

p_{x+k} : La probabilité de survie dans l'année à venir d'un individu d'âge $x+k$

I_k^j la variable indicatrice de la survie de l'assuré au cours de l'année ou cours de l'année k sachant qu'il était encore en vie à la date $k-1$, c'est-à-dire au cours de l'année $[k-1, k]$

La variable I_k^j suit une loi de Bernoulli de paramètre p_{x+k}

La survie de l'assuré est simulée de sorte à retrouver en moyenne cette probabilité. Ainsi, en prenant la moyenne sur l'ensemble des simulations N , pour chaque année k , nous avons :

$$\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N I_k^j \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} p_{x+k}$$

En moyenne, on retrouve la probabilité de survie p_{x+k} .

Dans la pratique, pour simuler la réalisation des variables I_k^j , on simule une réalisation U_k^j d'une variable aléatoire uniforme sur $[0, 1]$.

Pour chaque simulation j et chaque date k ,

-si $I_{k-1}^j = 0$ alors l'assuré est déjà décédé et la simulation s'arrête.

-si $I_{k-1}^j = 1$ alors la valeur prise par I_k^j va dépendre de la réalisation de U_k^j , puisque nous appliquons le théorème de la fonction inverse :

-si $p_{x+k} > U_k^j$, alors l'individu est encore en vie et $I_k^j = 1$.

-si $p_{x+k} > U_k^j$, alors l'individu est décédé et $I_k^j = 0$.

Finalement pour déterminer l'âge de l'individu lors de son décès, il suffit de faire la somme sur les années de sorte que pour une simulation j , l'âge au décès est :

$$\text{Age au décès} = \text{âge initial de l'individu} + \sum I_k^j$$

Cette approche est très couteuse en temps de calcul sur les portefeuilles de taille importante car il faut simuler des nombres suivant la loi uniforme sur $[0,1]$ jusqu'à ce que l'assuré soit décédé.

II.2. Résultats

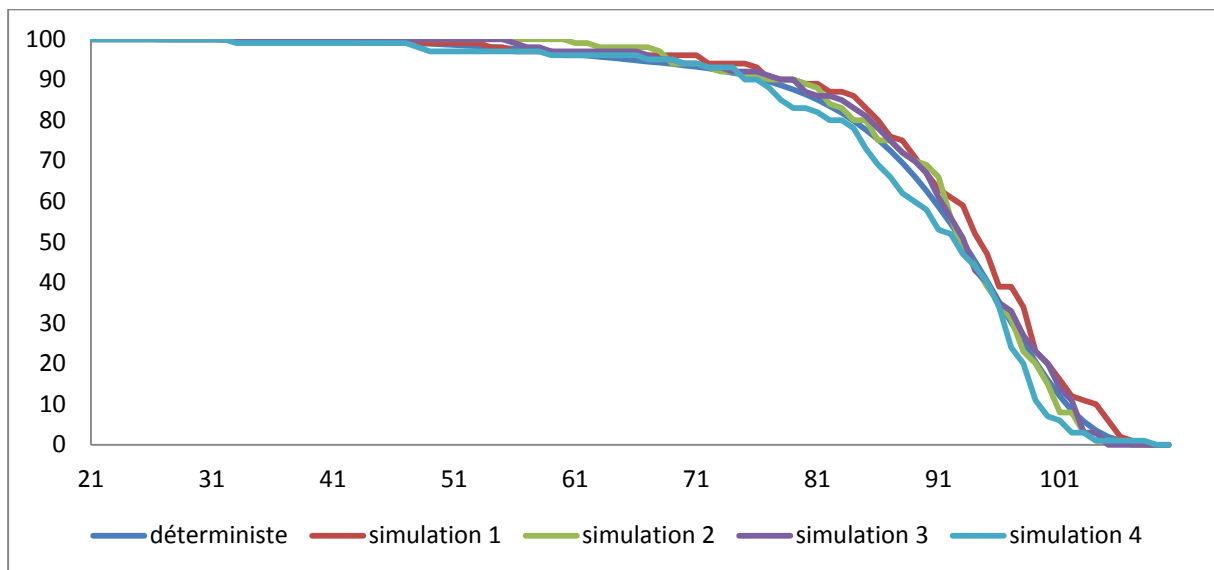


Figure 38: simulation du nombre de survivants par âge selon la table d'expérience

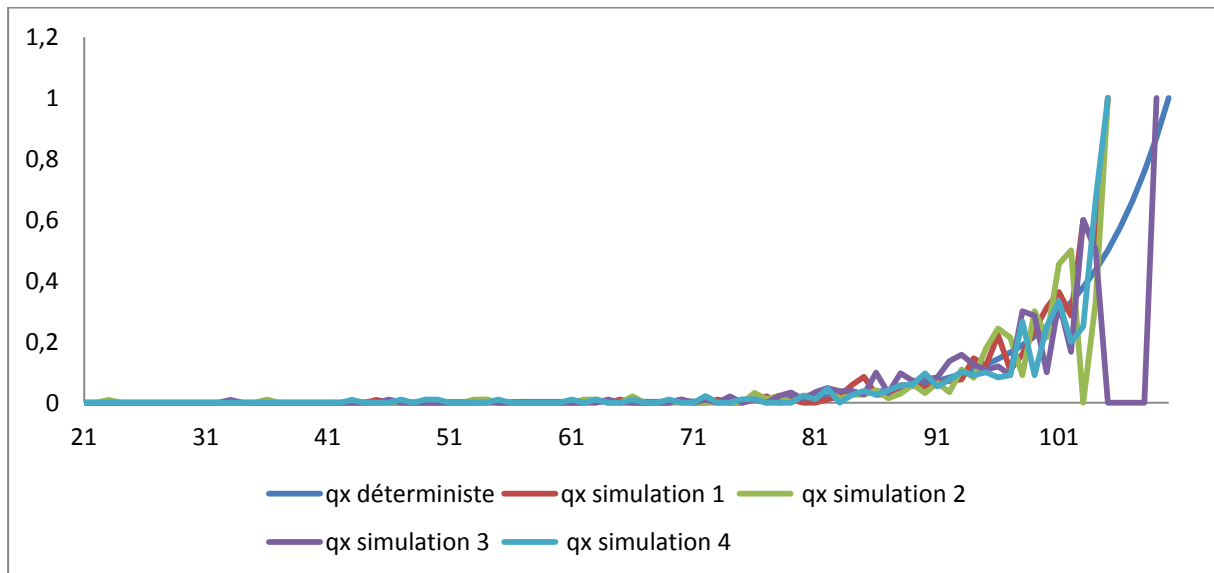


Figure 39: quotients de mortalité bruts sur la base de simulations de scénarios selon la table d'experience

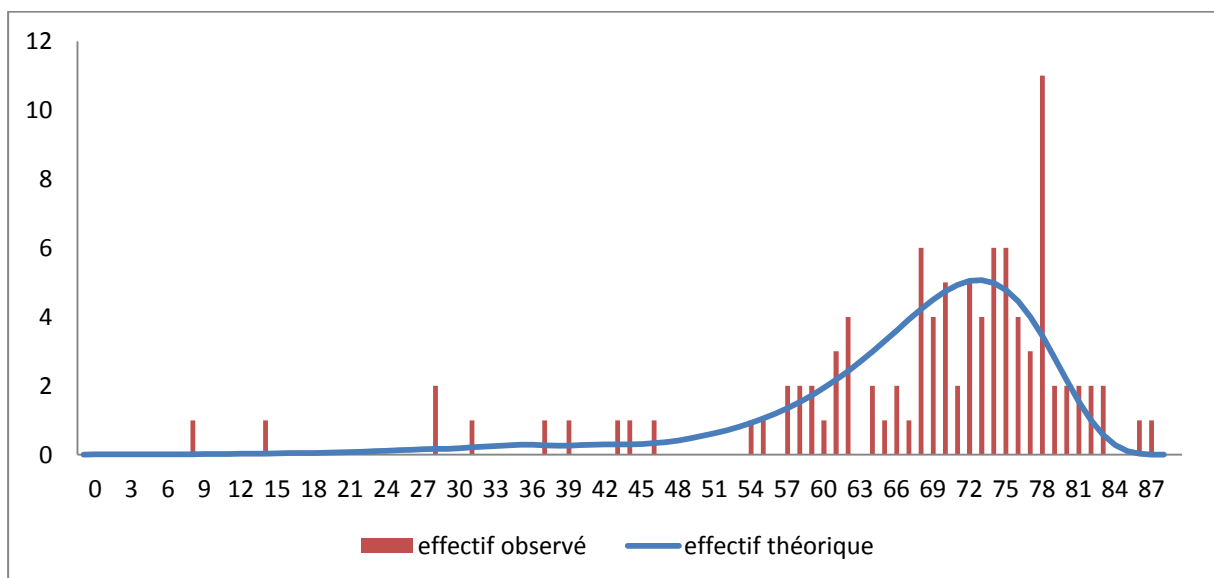


Figure 40: simulation du nombre d'années restant à vivre selon la table d'expérience

Ces simulations montrent que, du fait de la petite taille d'un échantillon, les scénarios démographiques peuvent être fortement différents du modèle, même si on suppose qu'il n'y a pas un risque de modèle.

Ces fluctuations démographiques ont un impact direct sur les montants des engagements de l'assureur.

III. Impact des scénarios démographiques sur la valeur actuelle de l'engagement de l'assureur

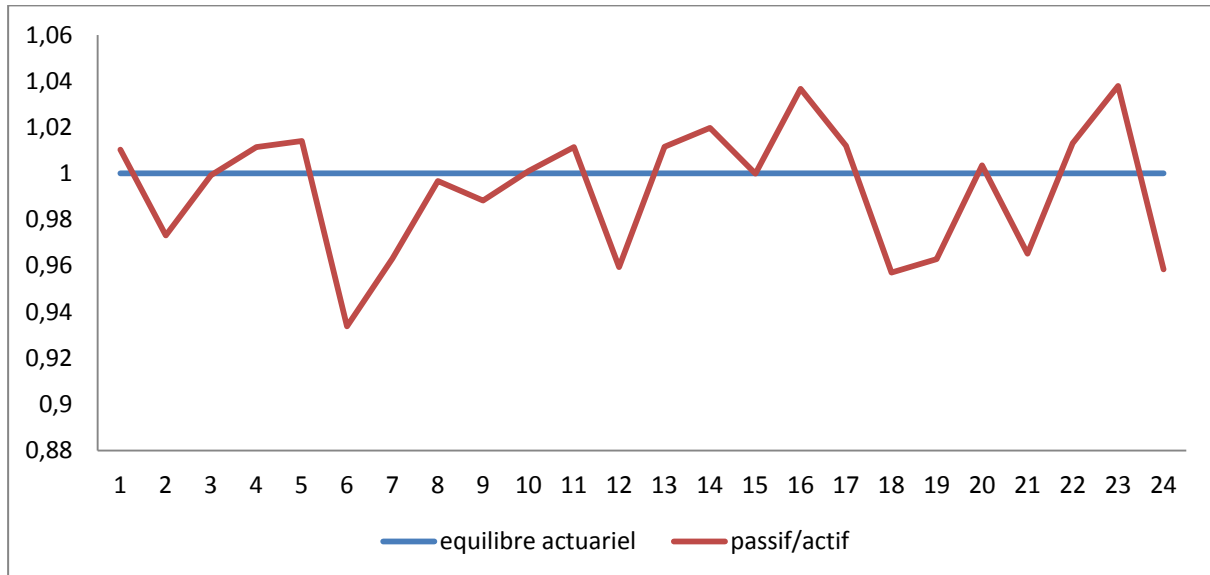


Figure 41: simulation de valeurs actuelles de l'engagement de l'assureur selon la table d'expérience

IV. La mesure du risque lié aux engagements de l'assureur

IV.1. Présentation

Il existe différentes mesures de risque pour comparer les risques et apprécier leur dangerosité. Dans ce travail, nous avons choisit d'étudier la Value-at-risk

La VaR représente la perte maximale pour une certain période et pour un niveau donné.

La VaR de niveau $\alpha \in [0;1]$ associée au risque X est données par :

$$VaR(X, \alpha) = \inf (x \in \mathbb{R}, P(X \leq x) > \alpha)$$

Dans le cas d'une variable X continue, la Value-at-Risk désigne également le quantile d'ordre α de la loi de X.

Dans le cas de plusieurs engagements, il n'y a pas une méthode analytique pour calculer la Value-at-Risk. Pour ce faire, nous allons recourir à la simulation Monte-Carlo qui consiste en la simulation d'un nombre important de réalisations de la variable aléatoire et puis prendre quantile associée à la valeur cherchée à partir des données simulées. Algorithme converge vers la valeur cherchée (selon la loi des grands nombres) au fur et à mesure qu'on augmente la taille de l'échantillon.

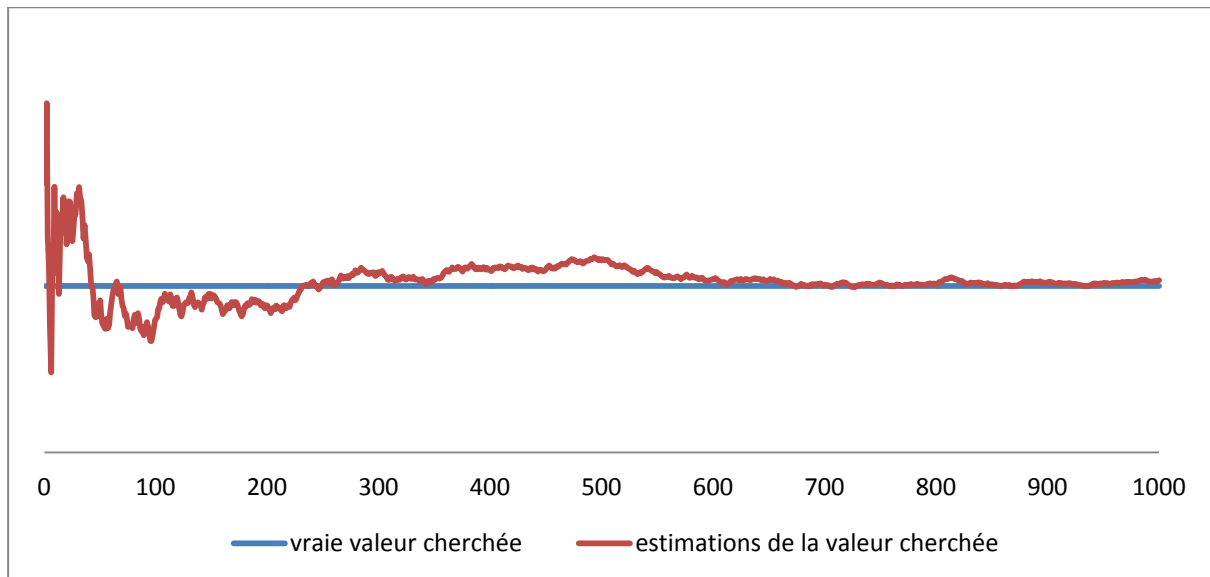


Figure 42: exemple de calcul par la méthode Monte-Carlo avec 1000 simulations

IV.2. Résultats

minimum	7,85692215
1%	106,98348
5%	307,718105
10%	642,01447
20%	1376,95529
30%	2071,33433
40%	2730,07504
50%	3399,28478
60%	3953,36006
70%	4684,81292
80%	5463,70928
90%	5960,12848
95%	6309,42946
99%	6601,35496
maximum	6637,60675

Tableau 20: valeurs de quantiles des engagements de l'assureur selon la table d'expérience

V. La méthodologie de déplacement de la table

V.1. Présentation de la méthode

L'idée de base de la méthodologie de déplacement de la table est assez simple :

- appliquer un coefficient de majoration aux probabilités de décès pour les engagements en cas de décès.
- appliquer un coefficient de minoration aux probabilités de survie pour les engagements en cas de vie.

Ainsi, l'évaluation des engagements de l'assureur sera prudente. Mais quel coefficient de majoration appliquer dans notre cas des engagements en cas de décès ?

Pour choisir les valeurs de ce paramètres nous allons nous baser sur l'indicateur : la Value at Risk. La problématique de déplacement de la table se réduit alors à la résolution du problème suivant :

Quel coefficient β appliquer pour que les tarifs faits selon la table de mortalité βq_x permettent de couvrir $\alpha\%$ des cas qui suivent la loi q_x ?

Résoudre ce problème revient à résoudre l'équation :

$$0 = f(\beta) = (\text{Valeur actuelle des engagement de l'assureur selon la table } \beta q_x)$$

-

$$(\text{VaR}(\text{engagement de l'assureur selon la table } q_x \text{ dans } \alpha\% \text{ des cas}))$$

Clairement, cette fonction est continue et strictement monotone, et donc on peut trouver son zéro unique facilement à l'aide la méthode dichotomique. Pour illustrer, si nous décidons de couvrir 90% des cas, il faut procéder ainsi :

-Calculer la VaR(assureur,90% des cas)

-trouver deux valeurs qui encadrent la solution β qu'on note a et b ($a < b$).

Soit c le milieu de l'intervalle $]a; b[$. $c = \frac{a+b}{2}$.

1^{er} cas : $f(c)=0$

c est alors la racine de f et le problème est résolu.

2^{ème} cas : $f(c) \neq 0$

1^{er} sous cas : $f(a)$ et $f(c)$ sont des signes opposés.

Dans ce cas, $\beta \in]a;c[$.

2^{ème} sous cas : f(b) et f(c) sont de signes opposés

Dans ce cas, $\beta \in]c;b[$.

On réitère le processus avec l'intervalle $]a;c[$ dans le premier cas et avec l'intervalle $]c;b[$ dans le second cas jusqu'à ce qu'on trouve approximativement le β cherché.

V.2. Résultats

Nombre de cas couverts	Coefficient de majoration
1%	99,55%
5%	103,63%
10%	104,86%
20%	108,09%
30%	115,30%
40%	115,63%
50%	117,50%
60%	123,51%
70%	130,80%
80%	149,43%
90%	207,64%
95%	213,47%
99%	286,63%

Tableau 21: valeurs des coefficients de déplacement de la table selon les cas couverts

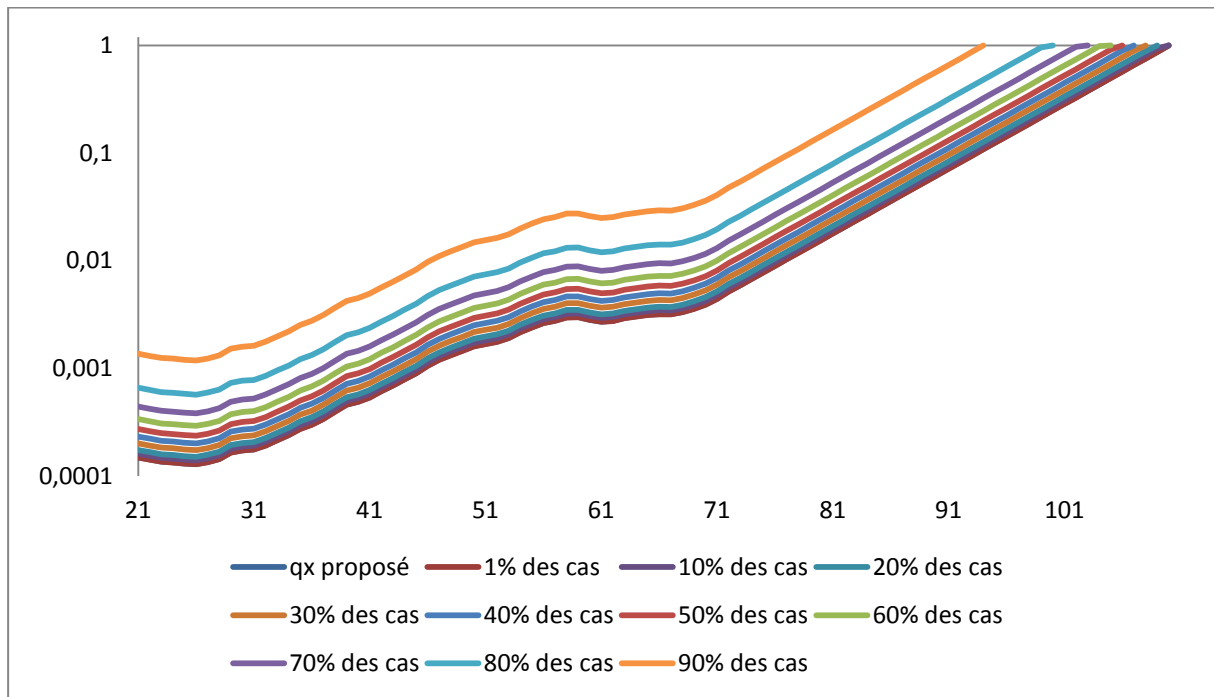


Figure 43: les différents déplacements de la table d'expérience

VI. Conclusion

Dans ce dernier chapitre, et sous l'hypothèse qu'il n'y a pas de risque de modèle, nous avons proposé une méthodologie de déplacement de la table basée sur le critère-la value at risk. Les résultats obtenus restent très liés aux engagements simulés, une bonne approche serait de simuler des engagements actuels pour un grand échantillon, et selon la loi des grands nombre nous tomberont approximativement sur les valeurs des déplacements optimaux.

Conclusion générale

L'idée Directrice de ce travail,

L'idée directrice de ce travail a été de montrer que les tables de mortalité réglementaires sont en inadéquation avec le profil de risque couvert.

L'essentiel des résultats,

L'essentiel de ce travail portait sur deux grandes lignes :

-La comparaison entre les tables nationales et les tables réglementaires, cette comparaison a montré l'inadéquation flagrante entre ces deux tables. En effet, le profil des deux risques n'est pas le même, chaque population a ses propres caractéristiques.

-La construction d'une table de mortalité de la population assurée selon les différentes étapes.

Pour synthétiser,

Il faut dire que les tables de mortalité réglementaires sont très critiquables selon deux volets : d'abord elles surestiment largement l'engagement de l'assureur, mais aussi elles n'ont aucun fondement scientifique robuste.

Actuellement, Les marchés internationaux de l'assurance-vie fonctionnent selon une logique compétitive de juste prix, et se voient en surprotection des assurés à cause de l'évolution de l'espérance de vie, alors que le législateur Marocain impose des bases techniques qui sont loin d'être réalistes.

Dans ce contexte, le législateur Marocain est très loin de remplir complètement sa mission centrale qui consiste à protéger les droits des assurés.

Perspectives,

Compte tenu des limites temporelle et académique de cette étude, nous n'avons pu analyser l'ensemble de ce sujet très vaste. Cependant, il nous semblerait intéressant, dans l'avenir, d'explorer d'autres pistes de réflexion selon trois aspects fondamentaux :

-Les données de la mortalité : constitution de données de la population assurée (surtout aux grands âges), pour connaître l'allure de la courbe de survie à tous les âges.

-faire un retour critique sur les différentes hypothèses et outils du travail : période d'expérience de 5 ans, âge limite fixé à 110 ans en raison du manque de données, étudier l'existence d'une période de stabilité des décès, étudier en profondeur les causes de la mortalité qui serviront à faire différentes segmentations.

-Traiter l'aspect stochastique des tables de mortalité (car bien évidemment cette table de mortalité n'est pas figée dans le temps).

Par ailleurs, la problématique des tables réglementaires reste un défi que tous les opérateurs du marché Marocain doivent relever.

Bibliographie

- ABDALLAOUI Ghali, 2011.** Cours de simulation discrète, INSEA.
- BENCHEKROUN Kamal, 2011.** Cours de théorie du risque, INSEA.
- Centre d'etudes et de recherches démographiques, 1986.** Analyse et tendances démographiques au Maroc.
- DBICH Abderrahim, 2011.** Cours d'assurance non-vie, INSEA.
- DENUIT Michel et DELWARDE Antoine, 2005.** Construction de tables de mortalité périodiques et prospectives.
- DENUIT Michel et QUASHIE Aki, 2005.** Modèles d'extrapolation de la mortalité aux grands ages.
- Direction de la statistique, 1993.** Enquete nationale démographique à passages repetés 1986-1988.
- Haut Commissariat au Plan, 2012.** Note d'information: "les tables de mortalité au Maroc 2009-2010".
- Ibrahim Rose Irnawaty, 2008.** Expanding an abridged Life table using the Heligman-Pollard Model.
- MARRI Fouad, 2012.** Cours d'analyse des durées de vie, INSEA.
- Ministère des finances et de la privatisation, 10 octobre 2005.** Arrêté du ministre des finances et de la privatisation relatif aux entreprises d'assurances et de réassurance.
- Optimind, Juin 2007.** Dossier technique d'information d'optimind: "Les tables de mortalité".
- OULIDI Abderrahim, 2011.** Cours d'assurance-vie/assurance non-vie, INSEA.
- PETAUTON Pierre, 2004.** Théorie et pratique de l'assurance vie.
- PLANCHET Frédéric, 2011-2012.** Cours de modèles de durée, ISFA.

Annexes

Annexe I : Les tables de mortalité en vigueur au Maroc

Annexe II : Tables de mortalité du Maroc pour les périodes : 1980, 1986-1988, 2009-2010

Annexe III : Résultats des estimations des taux de mortalité bruts

Annexe IV : Résultats des méthodes de lissage

Annexe I : Les tables de mortalité en vigueur au Maroc

TV 88-90			
Age	Lx	Age	Lx
0	100000	56	93848
1	99352	57	93447
2	99294	58	93014
3	99261	59	92545
4	99236	60	92050
5	99214	61	91523
6	99194	62	90954
7	99177	63	90343
8	99161	64	89687
9	99145	65	88978
10	99129	66	88226
11	99112	67	87409
12	99096	68	86513
13	99081	69	85522
14	99062	70	84440
15	99041	71	83251
16	99018	72	81936
17	98989	73	80484
18	98955	74	78880
19	98913	75	77104
20	98869	76	75136
21	98823	77	72981
22	98778	78	70597
23	98734	79	67962
24	98689	80	65043
25	98640	81	61852
26	98590	82	58379
27	98537	83	54614
28	98482	84	50625
29	98428	85	46455
30	98371	86	42130
31	98310	87	37738
32	98247	88	33340
33	98182	89	28980
34	98111	90	24739
35	98031	91	20704
36	97942	92	16959
37	97851	93	13580
38	97753	94	10636
39	97648	95	8118
40	97534	96	6057
41	97413	97	4378
42	97282	98	3096
43	97138	99	2184
44	96981	100	1479
45	96810	101	961
46	96622	102	599
47	96424	103	358
48	96218	104	205
49	95995	105	113
50	95752	106	59
51	95488	107	30
52	95202	108	14
53	94892	109	6
54	94560	110	2
55	94215	111	0

TD 88-90			
Age	Lx	Age	Lx
0	100000	56	86241
1	99129	57	85256
2	99057	58	84211
3	99010	59	83083
4	98977	60	81884
5	98948	61	80602
6	98921	62	79243
7	98897	63	77807
8	98876	64	76295
9	98855	65	74720
10	98835	66	73075
11	98814	67	71366
12	98793	68	69559
13	98771	69	67655
14	98745	70	65649
15	98712	71	63543
16	98667	72	61285
17	98606	73	58911
18	98520	74	56416
19	98406	75	53818
20	98277	76	51086
21	98137	77	48251
22	97987	78	45284
23	97830	79	42203
24	97677	80	39041
25	97524	81	35824
26	97373	82	32518
27	97222	83	29220
28	97070	84	25962
29	96916	85	22780
30	96759	86	19725
31	96597	87	16843
32	96429	88	14133
33	96255	89	11625
34	96071	90	9389
35	95878	91	7438
36	95676	92	5763
37	95463	93	4350
38	95237	94	3211
39	94997	95	2315
40	94746	96	1635
41	94476	97	1115
42	94182	98	740
43	93868	99	453
44	93515	100	263
45	93133	101	145
46	92727	102	76
47	92295	103	37
48	91833	104	17
49	91332	105	7
50	90778	106	2
51	90171	107	0
52	89511		
53	88791		
54	88011		
55	87165		

Annexe II : Tables de mortalité du Maroc pour les périodes : 1980, 1986-1988, 2009-2010

1980		
Age	qx masc	qx fém
0	0,09900	0,083
1	0,05301	0,05101
5	0,00896	0,00946
10	0,00747	0,00846
15	0,00946	0,00946
20	0,01341	0,01242
25	0,01489	0,0144
30	0,01784	0,0198
35	0,02176	0,02225
40	0,03101	0,02859
45	0,03633	0,0315
50	0,06202	0,04878
55	0,08015	0,06061
60	0,11053	0,09297
65	0,15456	0,1391
70	0,21628	0,17059
75	0,27400	0,32461
80 et +	1	1

1986-1988		
Age	qx masc	qx fém
0	0,08138	0,06976
1	0,01723	0,01704
2	0,00818	0,00914
3	0,00320	0,00376
4	0,00182	0,00161
5	0,00583	0,00429
10	0,00474	0,00832
15	0,00434	0,00777
20	0,00950	0,00975
25	0,01114	0,00673
30	0,01513	0,01242
35	0,02019	0,01390
40	0,02142	0,01808
45	0,02415	0,02191
50	0,03382	0,02815
55	0,05030	0,04075
60	0,10687	0,07748
65	0,16016	0,08245
70	0,17975	0,12848
75	0,20346	0,28322
80 et +	1	1

2009-2010		
age	qx masc	qx fém
0	0,03272	0,02741
1	0,0067	0,0058
5	0,00357	0,00275
10	0,0019	0,00156
15	0,00334	0,00271
20	0,00474	0,0038
25	0,00517	0,00408
30	0,00572	0,00446
35	0,00685	0,00527
40	0,00865	0,00656
45	0,01187	0,00884
50	0,01745	0,01275
55	0,02669	0,01908
60	0,04579	0,03192
65	0,08036	0,05479
70	0,15667	0,10648
75	0,30511	0,21815
80	0,53153	0,43066
85	0,76127	0,69999
90	0,9034	0,8797
95 et +	1	1

Annexe III : Résultats des estimations des taux de mortalité bruts

âge	qx Kaplan-Meier	qx actuariel	qx exposition au risque	qx simpliste
21	0,00021749	0,00008571	0,0002	8,57E-05
22	0,00013937	0,00012857	0,00025714	0,00012857
23	9,73E-05	0,00007143	0,00008571	7,14E-05
24	0,00014396	0,00015714	0,0001	0,00015714
25	0,00012107	0,00017143	0,00007143	0,00017143
26	5,54E-05	0,00005714	0,00007143	5,71E-05
27	0,00010307	0,0002	0,00008571	0,0002
29	0,00031183	0,00027143	0,00032857	0,00027143
30	0,00021686	0,00018571	0,00024286	0,00018571
31	5,30E-05	0,00005714	0,00005714	5,71E-05
33	0,00019742	0,00017143	0,00027143	0,00017143
34	0,00014017	0,00012857	0,00011429	0,00012857
35	0,00037092	0,00034286	0,00035714	0,00034286
36	0,00016004	0,00018571	0,00015714	0,00018571
37	0,00016373	0,0001	0,00017143	0,0001
38	0,00035348	0,00031429	0,00038571	0,00031429
39	0,00080307	0,00092857	0,0008	0,00092857
40	0,00028905	0,00034286	0,00037143	0,00034286
41	0,000267	0,00027143	0,0003	0,00027143
42	0,00056641	0,00057143	0,00065714	0,00057143
43	0,00049554	0,0006	0,0006	0,0006
44	0,00071516	0,00072857	0,0008	0,00072857
45	0,00040441	0,00042857	0,00047143	0,00042857
46	0,00119213	0,00124286	0,00132857	0,00124286
47	0,00140586	0,00148571	0,00125714	0,00148571
48	0,00125973	0,00125714	0,0013	0,00125714
49	0,00130641	0,00121429	0,00122857	0,00121429
50	0,00229299	0,00217143	0,00231429	0,00217143
51	0,00167603	0,0017	0,00165714	0,0017
52	0,00113588	0,00092857	0,00104286	0,00092857
53	0,00079724	0,00072857	0,00058571	0,00072857
54	0,00234302	0,00237143	0,00232857	0,00237143
55	0,00247484	0,00255714	0,00258571	0,00255714
56	0,00374182	0,00361429	0,00385714	0,00361429
57	0,00188608	0,00168571	0,00214286	0,00168571
58	0,00501253	0,00498571	0,00494286	0,00498571
59	0,00472279	0,00474286	0,00478571	0,00474286
60	0,00235479	0,00232857	0,00242857	0,00232857
61	0,00106998	0,00082857	0,00108571	0,00082857
63	0,00219395	0,00214286	0,00212857	0,00214286
64	0,00536193	0,00527143	0,00512857	0,00527143
65	0,00400641	0,00357143	0,00358571	0,00357143
66	0,0009542	0,00118571	0,00088571	0,00118571
67	0,00581395	0,00632857	0,00575714	0,00632857
68	0,00318471	0,00305714	0,00338571	0,00305714
69	0,00217628	0,00214286	0,00241429	0,00214286

Annexe IV : Résultats des méthodes de lissage

age	Modèles relationnels		Lissages paramétriques		Lissage non paramétrique	
	qx cox	qx BRASS	qx Splines	qx Gompertz-Makeham	Moyenne mobile	Wittaker-Henderson
21	0,000219994	0,0001069	-0,000131005	0,000158019	8,54E-05	0,000149103
22	0,000230611	0,000138314	-0,000110596	0,000151599	0,000102741	0,000142388
23	0,000225097	0,000146926	-8,75E-05	0,000145633	0,000110651	0,000136184
24	0,00022545	0,000155431	-6,17E-05	0,000140249	0,000125375	0,000133987
25	0,000222852	0,000160055	-3,31E-05	0,000135607	9,70E-05	0,000130886
26	0,000223197	0,000165647	-1,90E-06	0,000131901	0,000121637	0,000129037
27	0,000225024	0,000171692	3,20E-05	0,000129368	0,000138717	0,000134707
28	0,000228342	0,000178488	6,87E-05	0,000128287	0,000125718	0,000143875
29	0,000233159	0,000186249	0,000108052	0,000128991	0,000126308	0,000165785
30	0,000240974	0,00019636	0,000150115	0,000131869	0,000146601	0,000173334
31	0,000250317	0,000207804	0,000194885	0,000137368	0,000151902	0,000176748
32	0,000259707	0,00021942	0,000242361	0,000145996	0,000202196	0,000192941
33	0,000275127	0,000236405	0,000292544	0,000158327	0,000180511	0,000215817
34	0,000289135	0,000252542	0,000345434	0,000174992	0,000172921	0,000240457
35	0,000303226	0,000269085	0,000401031	0,000196681	0,000215852	0,000275102
36	0,00032041	0,000288776	0,000459334	0,000224129	0,000312691	0,000300557
37	0,000340721	0,000311812	0,000520345	0,000258108	0,00032578	0,000340309
38	0,000362682	0,000336982	0,000584062	0,000299409	0,000343898	0,000398369
39	0,00038026	0,000358637	0,000650486	0,000348823	0,000371826	0,00046086
40	0,000410122	0,000392622	0,000719616	0,000407111	0,000419754	0,000489987
41	0,000447845	0,000435313	0,000791454	0,00047498	0,00049853	0,000539066
42	0,000479796	0,00047362	0,000865998	0,000553047	0,000505805	0,000614928
43	0,000541176	0,000542844	0,000943249	0,000641802	0,000561385	0,000694909
44	0,000587833	0,000599503	0,01023207	0,00074157	0,00072093	0,000794656
45	0,000627315	0,000650565	0,01105872	0,000852478	0,00086275	0,000902323
46	0,000670396	0,000707038	0,01191055	0,00097441	0,000968464	0,01060671
47	0,000720289	0,000772693	0,01278566	0,01106979	0,01225243	0,01205778
48	0,000784996	0,000856912	0,01368407	0,01249501	0,01362511	0,01330397
49	0,000872763	0,000970212	0,01460576	0,01400968	0,01467007	0,01462688
50	0,000962051	0,01089999	0,01555074	0,01560044	0,01410593	0,01610413
51	0,01053046	0,01216865	0,01651902	0,01725062	0,01544473	0,01690025
52	0,01157188	0,01364894	0,01751058	0,0189404	0,01718059	0,01771259
53	0,01263718	0,01522548	0,01852543	0,02064702	0,02065974	0,01916361
54	0,01382713	0,01703029	0,01956357	0,02234524	0,02007843	0,02173326
55	0,01524747	0,01921706	0,020625	0,02400785	0,02484486	0,02412993
56	0,01642724	0,02120112	0,02170972	0,02560631	0,02996902	0,02647083
57	0,01762818	0,02330999	0,02281772	0,02711151	0,003219409	0,02771656
58	0,01926286	0,02612143	0,02394902	0,02849458	0,003037546	0,02984707
59	0,02075177	0,02888236	0,02510361	0,02972777	0,002917135	0,02995136
60	0,02251121	0,03218784	0,02628148	0,03078532	0,002696011	0,02832995
61	0,02424074	0,03564106	0,02748265	0,03164426	0,003192561	0,02719132
62	0,02605112	0,03942135	0,0287071	0,03228523	0,003048829	0,02770456
63	0,02793348	0,04354345	0,02995484	0,03269311	0,002510458	0,02935729
64	0,02967144	0,04768101	0,03122588	0,03285758	0,003004625	0,03175198
65	0,03164028	0,05245911	0,0325202	0,03277343	0,00330673	0,03196062
66	0,03360792	0,05753795	0,03383781	0,03244079	0,00338449	0,03135942
67	0,03638101	0,06440615	0,03517871	0,03186511	0,003071069	0,03294007
68	0,03932398	0,07209777	0,0365429	0,03105697	0,002305079	0,03200066
69	0,04258962	0,08100529	0,03793038	0,03003171	0,001732735	0,03107275

