



المندوبية السامية للتخطيط
HAUT-COMMISSARIAT AU PLAN

ROYAUME DU MAROC
..*.*.*
HAUT COMMISSARIAT AU PLAN
..*.*.*

INSTITUT NATIONAL
DE STATISTIQUE ET D'ECONOMIE APPLIQUEE



INSEA

Projet de Fin d'Etudes

L'optimisation des traités de réassurance et la conception d'une application de tarification

Préparé par : *Mlle. Sara ABILA*
Mlle. Sanaa BENZARIA

Sous la direction de : *Dr. Mohamed CHATER (INSEA)*
Mme. Rajae SAMKAOUI (RMA WATANYA)

Soutenu publiquement comme exigence partielle en vue de l'obtention du

Diplôme d'Ingénieur d'Etat

Filière : ACTUARIAT-FINANCE

Devant le jury composé de :

- *Dr. Mohamed CHATER (INSEA)*
- *Dr. Mehdi LAHLOU (INSEA)*
- *Mme. Rajae SAMKAOUI*

Juin 2016

N° 1

Résumé

Les risques couverts par les assureurs sont de plus en plus diversifiés. L'assureur cherche à diversifier ses produits et garantir en même temps sa solvabilité. Les calculs et tarifs proposés par les actuaires se basent généralement sur des hypothèses et des lois statistiques. Certains risques sont mieux prévisibles que d'autres.

L'assureur est confronté à plusieurs risques dont le risque de contrepartie. Pour faire face à ces risques surtout dans des branches où la survenance d'un seul sinistre peut bouleverser la stabilité du résultat, l'assureur a recours à la réassurance. Il cède une partie du risque à un réassureur qui va prendre en charge une partie du sinistre qui varie selon les traités adoptés. L'assureur cherche donc la combinaison optimale qui va lui permettre de rester solvable, de réaliser un bénéfice et de se protéger contre le risque avec un tarif convenable.

Ceci est l'objectif de notre travail. Nous nous sommes focalisés sur deux volets importants : la tarification et l'optimisation. Dans la partie tarification, nous avons utilisé trois méthodes de cotation, la méthode burning cost, la tarification par simulation et la tarification probabiliste. Dans la partie optimisation, nous avons optimisé le traité excédent de plein par le critère espérance-variance et le traité excédent de sinistre par le critère RORAC. Nous avons ensuite proposé l'introduction de deux nouveaux traités qui vont garantir la stabilité du résultat assureur et la continuité du contrat du réassureur excédent de plein.

MOTS CLES :

Réassurance, Tarification, Optimisation, excédent de plein, excédent de sinistre, Stop Loss, Aggregate Loss, RORAC, espérance-variance.

Abstract

The risks covered by insurers are increasingly diverse. The insurer seeks to diversify its products and ensure at the same time its solvency. The calculations and rates proposed by the actuaries are generally based on assumptions and statistical laws. Some risks are more predictable than others.

The insurer is confronted to several risks including counterparty risk. To face these risks where the occurrence of a single claim can destabilize the result, the insurer uses reinsurance. He gives some of the risk to a reinsurer who will take over part of the loss according to the treaty adopted. The insurer therefore seeks the optimal combination that will allow him to remain solvent, to profit and protect themselves against the risk with an appropriate rate.

This is the objective of our work. We focused on two important components: pricing and optimization. In the pricing part, we used three methods : the method of burning cost , pricing simulation and probabilistic pricing . In the optimization part, we have optimized the surplus treaty by the mean-variance criterion and excess of loss treaty by the RORAC criterion. Finally, we proposed the introduction of two new treaties that will ensure the stability of the insurer results and the continuity of the surplus treaty.

KEYWORDS :

Reinsurance, pricing, optimization, surplus, excess of loss, Stop Loss, Aggregate Loss, RORAC, mean-variance.

Dédicace

À mes très chers parents, pour leurs soutiens et tous leurs sacrifices

À mes frères pour leur amour et leur soutien

À toute ma famille

À tous mes amis

À ceux qui m'ont soutenu tout au long de ma vie

Je dédie ce modeste travail

Sara

Dédicace

*À Mes parents qui sont toujours présents à mes côtés pour m'encourager
et me soutenir.*

À mon frère.

À ma sœur.

À toute ma famille et à tous mes amis.

Sanaa

Remerciements

Il nous est agréable au terme de ce projet de fin d'études, d'exprimer notre reconnaissance et notre profonde gratitude à notre Professeur Mohamed CHATER pour son aide, ses encouragements et ses conseils. Nous lui sommes très reconnaissantes pour la qualité de son encadrement.

Ainsi, nous tenons à remercier Monsieur Said JABER, responsable du département ACTUARIAT à RMA WATANYA, de bien vouloir nous accorder ce stage de fin d'études au sein de son département.

Nous remercions également notre encadrante: Mme Rajae SAMKAOUI, pour ses directives précieuses et ses conseils pertinents qui nous ont été un appui considérable dans notre démarche.

Nous tenons aussi à remercier l'ensemble du personnel du département pour leur coopération et l'accueil chaleureux qu'ils nous ont offert durant notre stage au sein de la compagnie.

Nous ne saurions oublier dans nos remerciements tout le cadre professoral de l'INSEA, pour la formation prodigieuse qu'il nous a prodiguée.

Enfin, que tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à l'aboutissement de ce travail trouvent ici l'expression de notre reconnaissance et de nos remerciements.

Table des matières

RESUME	3
DEDICACE	5
REMERCIEMENTS	7
TABLE DES MATIERES	8
INTRODUCTION	15
CHAPITRE I : CONTEXTE D'ETUDE	16
I. ORGANISME D'ACCUEIL	16
I.1. Présentation générale	16
I.2. Histoire	16
I.3. Organigramme	17
I.3.1. Le Conseil d'administration	17
I.3.2. L'équipe dirigeante	18
I.4. Présentation de l'activité de Rma Watanya	18
I.5. L'assurance	18
I.6. Les limites de l'assurance	19
I.7. La réassurance	20
I.7.1. Critère juridique.....	21
1) La réassurance facultative	21
2) La réassurance obligatoire(les traités).....	21
3) La réassurance facultative-obligatoire	21
I.7.2. Critère technique	22
1) Les traités proportionnels :.....	22
2) Les traités non proportionnels :	23
I.7.3. Quelques clauses de réassurance	24
1) La commission de réassurance	24
2) Les clauses de participations aux bénéfices et les clauses de reconstitution de garantie	24
II. PRESENTATION DES DONNEES	25
II.1. Présentation du portefeuille incendie	25

II.2.	Présentation de la base de données	26
II.3.	Traitement de la base de données	26
II.4.	Analyse descriptive de la base de données	27
II.4.1.	Données relatives à l'assurance	27
1)	Analyse de la production	27
2)	Analyse de la sinistralité	29
II.4.2.	Données relatives à la réassurance	31
1)	Excédent de plein	31
2)	Excédent de sinistre.....	32
♦	Excédent de sinistre par risque	32
♦	Excédent de sinistre par événement.....	33
II.5.	Analyse comptable de la branche incendie	34
II.5.1.	Avant réassurance	34
II.5.2.	Après réassurance	34
II.5.3.	Comparaison de la situation avant et après réassurance	35
II.6.	Analyse du besoin de réassurance	36
II.6.1.	Cadre théorique	37
1)	Les fonds propres affectés au risque du hasard U.....	38
2)	Marge de solvabilité	38
3)	L'écart type hasard	38
4)	L'écart type global	38
II.6.2.	Calcul du coefficient de sécurité	38
1)	Avant réassurance	38
2)	Après réassurance	39
II.7.	Analyse du profil risque et du profil sinistre	40
II.7.1.	Profil risque	40
II.7.2.	Profil sinistre	40
CHAPITRE II : COTATION DES TRAITES DE REASSURANCE INCENDIE		42
I.	MODELISATION	42
I.1.	Détermination du seuil des sinistres graves	42
I.1.1.	Théorie excès au-delà d'un seuil	42
I.1.2.	L'estimateur de Hill.....	43
I.1.3.	Test d'adéquation de Kolmogorov-Smirnov.....	44
I.1.4.	Application sous R :	44
I.2.	Modélisation de la charge des sinistres	46
I.2.1.	Sinistres graves :	47
I.2.2.	Sinistres attritionnels :	47
I.3.	Modélisation de la fréquence des sinistres	49
I.3.1.	Sinistres graves	49
I.3.2.	Sinistres attritionnels.....	51

II.	COTATION DU TRAITE EXCEDENT DE SINISTRE.....	53
II.1.	La méthode Burning Cost.....	53
II.1.1.	Présentation de la méthode Burning Cost	53
II.1.2.	Application	53
II.2.	Méthode de Simulation :	54
II.2.1.	Principe de simulation :.....	54
II.2.2.	Procédure de génération :	55
II.3.	La méthode probabiliste :	55
II.3.1.	Principe de la méthode probabiliste :	55
II.3.2.	Application :	56
III.	L'APPLICATION DE COTATION EXCEDENT DE SINISTRE : TARIFICATION XS..	56
III.1.	Etape 1 : Insertion des données :	57
III.2.	Etape2 : Choix de la méthode de tarification :	58
III.2.1.	Simulation :	58
1)	Les données :	59
2)	Etape de calcul :	59
◆	Modélisation charges sinistres graves :	59
◆	Modélisation de la fréquence :	59
◆	Modélisation charge sinistres attritionnels :	60
◆	Simulation	60
III.2.2.	Probabiliste :	60
1)	Les données :	61
2)	Etapas de calcul :	61
◆	Modélisation de la charge réassureur XS	61
◆	Modélisation de la fréquence	61
◆	Calcul de la prime pure.....	61
◆	Calcul du taux de prime.....	61
III.2.3.	Burning Cost :	61
1)	Données :	62
2)	Etapas de calcul :	62
	CHAPITRE III : OPTIMISATION DES TRAITES DE REASSURANCE INCENDIE	63
I.	OPTIMISATION DU CRITERE EXCEDENT DE PLEIN : CRITERE ESPERANCE-	
	VARIANCE.	63
I.1.	Critère espérance variance :	63
I.2.	Formulation :	63
I.3.	Résolution :	64
I.3.1.	Codage sous AMPL :	64
1)	Contexte :	64

2) AMPL :.....	64
3) La résolution	65
1.3.2. Données utilisées :.....	65
1.3.3. Résolution :	66
II. OPTIMISATION DU CRITERE EXCEDENT DE SINISTRE : CRITERE RORAC.....	67
II.1. Critère RORAC :	67
II.2. Application :	68
CHAPITRE V : LE TRAITE STOP LOSS ET AGGREGATE LOSS.....	71
I. CONTEXTE :	71
II. LE TRAITE STOP LOSS :	71
II.1. Présentation Traité Stop Loss :	71
II.2. Simulation :	72
III. LE TRAITE AGGREGATE LOSS	74
III.1. Présentation Traité Aggregate Loss :.....	74
III.2. Simulation :	74
CONCLUSION.....	78
BIBLIOGRAPHIE	79
WEBOGRAPHIE	80
ANNEXES :	81

Liste des abréviations

AMPL : A Mathematical Programming Language

GEV : Generalized Extreme Value

GPD : Generalized Pareto Distribution

NSR : Niveau de Solvabilité Requis

RORAC : Return On Risk Adjusted Capital

XP : Excédent de plein

XS : Excédent de sinistre

VBA : Visual Basic for Application

Liste des tableaux

Tableau 1 : Quote part	22
Tableau 2 : L'excédent de plein	22
Tableau 3 : La production relative à la branche incendie.....	27
Tableau 4 : La sinistralité relative à la branche incendie durant la période 2005-2015	30
Tableau 5 : Evolution du plein de rétention, plein de souscription et taux de commission de XP depuis 2005 à 2015	31
Tableau 6 : Evolution des caractéristiques de l'excédent de sinistre par risque	32
Tableau 7 : Evolution des caractéristiques de l'excédent de sinistre par événement	33
Tableau 8 : Evolution du résultat avant réassurance durant la période 2005-2015	34
Tableau 9 : Evolution du solde net de réassurance relatif à la branche incendie de 2005 à 2015.....	35
Tableau 10 : Calcul du coefficient de sécurité pour la branche incendie avant réassurance pendant la période 2008-2015	39
Tableau 11 : Evolution du coefficient de sécurité après réassurance.....	39
Tableau 12 : Profil du risque des années 2005-2015.....	40
Tableau 13 : Profil sinistre des années 2005-2015	41
Tableau 14 : Paramètres de la loi GPD	46
Tableau 15 : résultat de la modélisation de la fréquence des sinistres graves	49
Tableau 16 : résultat de la modélisation de la fréquence des sinistres graves nets XP.....	50
Tableau 17 : Résultat de la modélisation de la fréquence des sinistres attritionnels	51
Tableau 18 : Résultat de la modélisation de la fréquence des sinistres attritionnels nets XP.....	52
Tableau 19 : Résultat de la méthode Burning Cost	54
Tableau 20 : Paramètre de la loi lognormale	56
Tableau 21 : Optimisation XP pour différents scénarios	66
Tableau 22 : Les différents scénarios proposés pour l'optimisation du traité XS.....	68
Tableau 23 : Calcul du taux de prime relatif à chaque scénario.....	69
Tableau 24 : Les paramètres des lois selon le scénario	69
Tableau 25 : Calcul de l'espérance des charges relative à chaque scénario	69
Tableau 26 : la valeur de la VaR	69
Tableau 27 : Priorité optimale	70
Tableau 28 : Stop Loss	71
Tableau 29 : Les différents scénarios proposés pour le traité SL.....	72
Tableau 30 : Evolution du résultat assureur net XP, réassureur XP et réassureur SL	72
Tableau 31 : Scénario optimal	74
Tableau 32 : Aggregate Loss	74
Tableau 33 : Les différents scénarios proposés pour l'Aggregate Loss	75
Tableau 34 : Evolution du résultat assureur net XP, résultat réassureur XP et résultat réassureur Aggregate Loss	75
Tableau 35 : Le scénario optimal.....	77

Liste des figures

Figure 1 : Historique de RMA WATANYA de 1949 à 2015	16
Figure 2 : Evolution du nombre de polices relatif à la branche incendie pendant la période 2005-2015	28
Figure 3 : Evolution de l'assiette de prime de la branche incendie pendant la période 2005-2015.....	28
Figure 4 : Evolution du capital assuré de la branche incendie pendant la période 2005-2015	29
Figure 5 : Evolution du capital assuré moyen de la branche incendie pendant la période 2005-2015	29
Figure 6 : Evolution du nombre de sinistres de la branche incendie pendant la période 2005-2015.....	30
Figure 7 : Evolution de la charge totale par exercice de garantie pendant la période 2005-2015	30
Figure 8 : Evolution du cout moyen de la branche incendie durant la période 2005-2015	31
Figure 9 : Evolution du taux de prime.....	32
Figure 10 : Evolution du ratio S/P avant et après réassurance	35
Figure 11 : Evolution des résultats avant et après réassurance.....	36
Figure 12 : Test de Kolmogorov Smirnov pour la loi normale	39
Figure 13 : Hill plot	45
Figure 14 : Résultat du test de Kolmogorov Smirnov	46
Figure 15 : Test de Kolmogorov-Smirnov de la loi lognormale.....	48
Figure 16 : Test de Kolmogorov-Smirnov de la loi lognormale.....	48
Figure 17 : Ajustement de la fréquence des sinistres graves sous R	49
Figure 18 : Ajustement de la fréquence des sinistres graves nets XP sous R.....	50
Figure 19 : Ajustement de la fréquence des sinistres attritionnels sous R	51
Figure 20 : Ajustement de la fréquence des sinistres attritionnels nets XP sous R.....	52
Figure 21 : Interface de l'application VBA	57
Figure 22 : Exemple de l'insertion des données (1 ^{ère} étape).....	58
Figure 23 : Exemple de l'insertion des données (2 ^{ième} étape).....	58
Figure 24 : Interface de calcul et résultat de la simulation	59
Figure 25 : Interface de calcul et résultat de la méthode probabiliste.....	61
Figure 26 : Interface de calcul et résultat du Burning Cost	62
Figure 27 : Modèle codé sous AMPL.....	65
Figure 28 : Instruction soumise à AMPL	66
Figure 29 : Résultats de l'optimisation	66
Figure 30 : Evolution du résultat assureur net XP selon les différents scénarios	73
Figure 31 : Evolution du résultat réassureur XP et du résultat réassureur SL selon les scénarios.....	73
Figure 32 : Evolution du résultat assureur net XP selon les scénarios.....	76
Figure 33 : Evolution du résultat réassureur XP et SL selon les scénarios	76

Introduction

Pour répondre de façon satisfaisante aux besoins des assurés en matière de couverture, les sociétés d'assurances disposent de moyens internes. Elles peuvent procéder par une augmentation de leurs fonds propres. Cependant, cette possibilité est limitée. Il existe aussi des moyens externes qui consistent à céder une partie des risques prise en charge au départ par une compagnie d'assurance pour ne laisser qu'un engagement total susceptible de préserver son équilibre financier. Il s'agit de la réassurance.

Notre projet, au sein du département Actuariat à RMA WATANYA, visait en premier lieu la tarification du traité de réassurance excédent de sinistre et en deuxième lieu l'optimisation des traités de réassurance. L'optimisation consiste à déterminer le plein optimal pour le traité excédent de plein et la priorité optimale pour le traité excédent sinistre.

Notre travail se divise en quatre grandes parties. La première partie présente des statistiques de l'évolution du résultat de l'assureur, du taux de prime, de la sinistralité, et d'autres indicateurs, ainsi que des indices qui décrivent le besoin en réassurance. La deuxième partie présente les trois méthodes de tarification du traité excédent de sinistre, ainsi que son automatisation. La troisième partie est la partie optimisation où nous avons présenté deux critères d'optimisation, le critère espérance variance et le critère RORAC. Nous avons terminé notre travail par une proposition d'introduction de deux nouveaux types de traités. Il s'agit du traité Stop Loss et Aggregate Loss.

Avant d'entamer ces différentes parties, nous avons jugé nécessaire de présenter l'organisme d'accueil, de définir l'assurance et la réassurance ainsi que les différents types de traités de réassurance.

Chapitre I : Contexte d'étude

I. Organisme d'accueil

I.1. Présentation générale

- **Création** : 1949
- **Dates clés** : 2005 Création de la dénomination RMA Watanya
- **Forme juridique** : Société anonyme
- **Siège social** : 20 000 Casablanca 83, avenue de l'armée royale (Maroc)
- **Direction** : Zouheir Bensaid (président du directoire)
- **Activité** : Assurances et services financiers ("Protection financière")
- **Produits** : Assurance vie, assurance dommages et gestionnaire d'actifs
- **Société mère** : Finance Com
- **Effectif** : 630 (2009)
- **Site web** : www.rmawatanya.com

I.2. Histoire

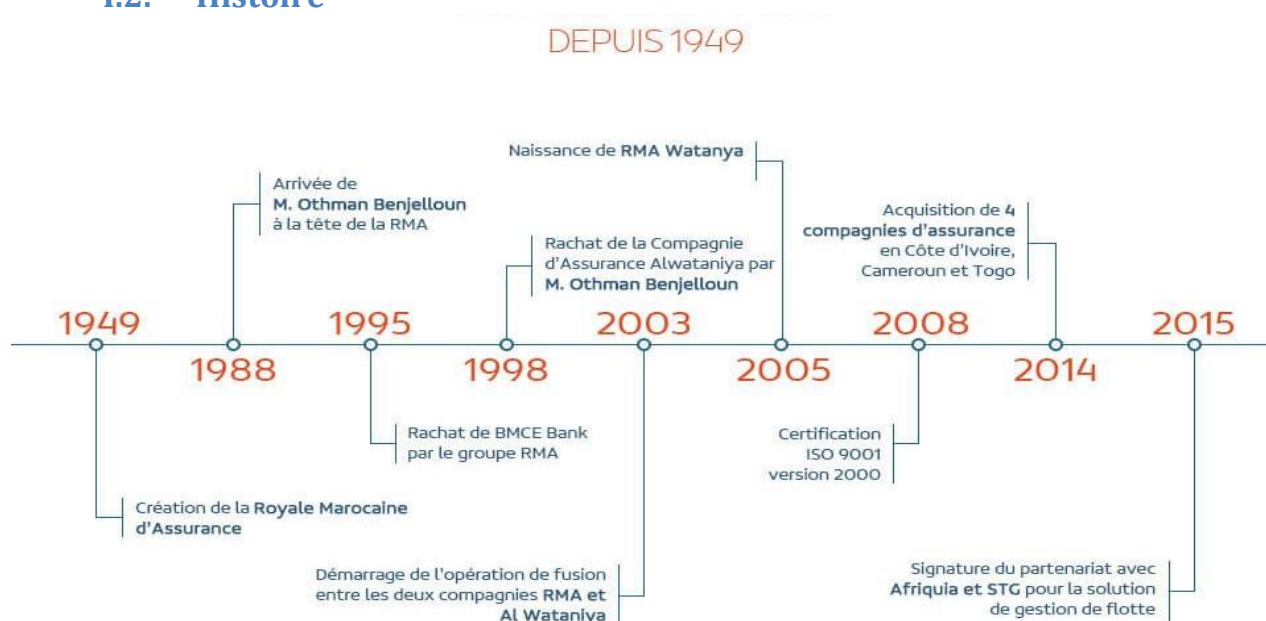
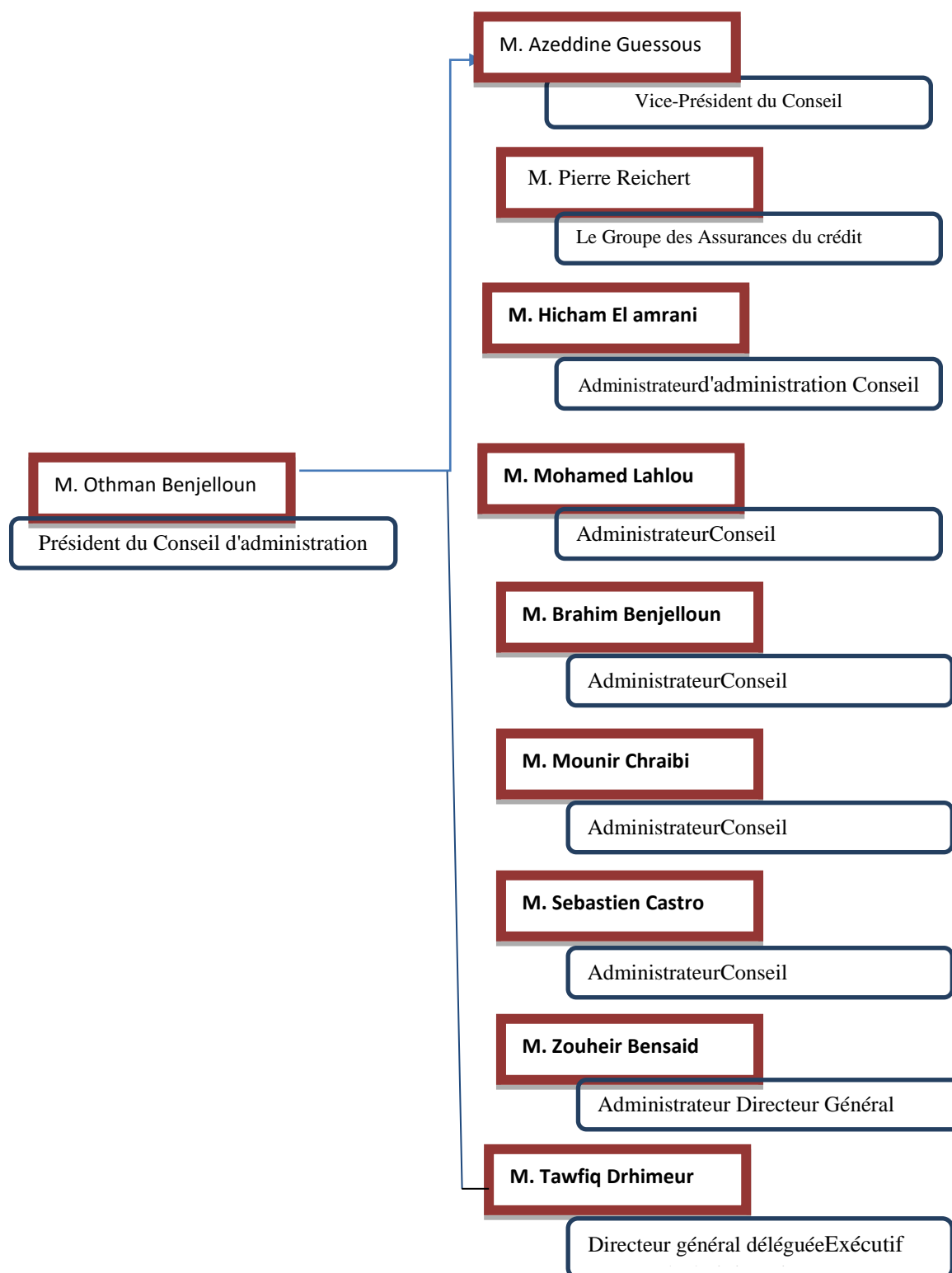


Figure 1 : Historique de RMA WATANYA de 1949 à 2015

I.3. Organigramme

I.3.1. Le Conseil d'administration

Le Conseil d'administration est composé des membres suivants :



I.3.2. L'équipe dirigeante

- **M. Zouheir Bensaïd** : Administrateur Directeur Général Exécutif
- **M. Tawfiq Drhimeur** : Directeur Général Délégué
- **Anisse ABOULHADI** : Directeur Général Adjoint des Risques d'Entreprises et Développement Commercial.
- **Samir BAALI** : Directeur Général Adjoint Pôle Finance
- **Chakib GUESSOUS** : Directeur Général Adjoint du pôle Immobilier et Achats
- **Yassine LAHLOU** : Directeur Général Adjoint des Risques Particuliers et Professionnels et Développement Commercial Réseau.
- **Hajar ALLALI** : Secrétaire Général
- **Hicham ABOUYOUB** : Directeur Exécutif Vie et Bancassurance
- **Hakim NAJIOULLAH** : Directeur Exécutif Prestations
- **Camil BENNANI SMIRES** : Directeur Organisation, Systèmes d'Informations et Qualité
- **Zineb LAHLOU** : Directeur Ressources Humaines
- **Tarik ZNIBER** : Directeur Recouvrement et Contentieux Primes
- **Jihane ERRACHIDI** : Audit Interne et Maîtrise des Risques

I.4. Présentation de l'activité de Rma Watanya

Filiale du Groupe Finance.com, RMA Watanya reste fidèle depuis plus de 60 ans à sa vocation: protéger les biens et les personnes contre les risques de la vie. Au quotidien, la Compagnie accompagne les particuliers, professionnels et entreprises dans la réalisation de leurs projets d'avenir. Elle assure à ses assurés un taux élevé de satisfaction grâce à une mesure régulière.

Assureur leader des risques techniques (barrages, centrales thermiques, aéroports, etc.) et des assurances à la personne, RMA Watanya s'affirme aujourd'hui comme l'un des acteurs majeurs du marché marocain de l'assurance, nouant des partenariats de premier plan avec des réseaux d'assureurs internationaux de renom.

I.5. L'assurance

La définition de la notion de l'assurance la plus utilisée dans la littérature est celle donnée par le professeur Joseph Hémar : *"L'assurance est une opération par laquelle une*

personne, l'assuré, se fait promettre, moyennant une rémunération, la prime, pour lui ou pour un tiers, en cas de réalisation d'un risque, une prestation par une autre partie, l'assureur qui, prenant en charge un ensemble de risques, les compense conformément aux lois de la statistique .”

Le rôle de l'assureur est d'organiser la compensation des risques au sein de la mutualité des assurés en faisant appel aux lois de la statistique. Cette organisation se traduit, par la tarification des risques et la surveillance au fur et à mesure des tarifs dans le but d'un éventuel ajustement.

A partir des modèles de fréquence et du coût des risques, l'entreprise de l'assurance va déterminer la prime pure qu'est égale au produit de la fréquence des sinistres par le coût moyen des sinistres. La prime pure sera ensuite chargée par une marge qui prend en considération la nature du risque et permettant ainsi une meilleure appréciation du coût du risque. Cette marge est appelée le chargement de sécurité. La somme de la prime pure et du chargement de sécurité représente le prix du risque. Au chargement de sécurité s'ajoute enfin les frais d'acquisition du contrat et les frais de gestion de l'assureur. Le total de la prime pure, le chargement de sécurité et les majorations d'acquisition et de gestion, représente la prime commerciale qui correspond au prix de vente de l'assureur.

Le prix de vente de la garantie offerte par l'assureur (la prime commerciale) est encaissé au moment de la conclusion du contrat, alors que le coût réel des prestations n'est connu qu'après. L'assureur ne connaît son prix de revient qu'après avoir vendu son produit. Pour caractériser cette situation, on parle de l'inversion du cycle de production dans l'industrie de l'assurance.

I.6. Les limites de l'assurance

Les objectifs de tout assureur sont :

- Faire face aux sinistres survenus au cours de l'exercice.
- Faire face aux frais généraux du même exercice.
- Eviter la ruine et réaliser le cas échéant un bénéfice.

Une compagnie d'assurance est ruinée quand sa charge de sinistres plus les frais généraux dépassent les fonds propres plus le chiffre d'affaire et les produits financiers. Soit :

$$CS + FG > FP + CA + PF$$

Le souhait de tout assureur est d'avoir à tout moment : $FP + CA + PF - CS - FG > 0$ mais, les objectifs de l'assureur ne sont réalisés que s'il souscrit sur une large étendue un nombre important de risques semblables en nature et en grandeur pour pouvoir les compenser conformément aux lois de la statistique (loi des grands nombres).

Les conditions précitées ne sont jamais réunies, car un portefeuille de contrats d'assurance n'est jamais assez homogène pour que les sinistres ne dépassent pas les primes. Il y a en effet des écarts entre les résultats théoriques sur lesquels l'assureur a basé son plan d'exploitation et les résultats obtenus en réalité. Devant ces limites, que doit faire l'assureur?

- Accepter les risques?
- Refuser les risques?

S'il accepte la totalité des risques qui lui sont proposés par les assurés, il risque de compromettre l'équilibre financier de son entreprise. En effet, quelque soit la taille de la compagnie d'assurance, certains risques peuvent provoquer des dommages assurés d'un montant énorme en cas de sinistre, de plus, certains événements (séisme par exemple) peuvent affecter simultanément un grand nombre de contrats d'assurance acceptés, et engendrer ainsi une charge globale majeure pour la compagnie, même si les dommages au niveau de chaque contrat considéré isolément sont relativement peu important (les sinistres d'accumulations) .

L'assureur peut penser également à une augmentation du tarif pour qu'il puisse supporter l'ensemble de ces risques. Cette augmentation aurait pour effet d'augmenter son chiffre d'affaire sans aggraver l'exposition de la compagnie d'assurance. Toutefois, il est illusoire sur un marché concurrentiel de procéder à des augmentations de tarifs dans le seul but de réduire la probabilité de faillite de la compagnie.

Si l'assureur refuse les risques précités, il risque de perdre des éléments qui peuvent être techniquement bons. En effet, plus on augmente le nombre de police, plus le résultat de la compagnie est stable.

Pour répondre de façon satisfaisante aux besoins des assurés en matière de couverture, les assureurs font recours à la réassurance.

I.7. La réassurance

Le principe de la réassurance est aussi simple que celui de l'assurance en partant du fait que le réassureur est l'assureur de l'assureur. Il s'agit pour la société d'assurance (la cédante)

de céder à une société spécialisée (le réassureur ou assureur secondaire) un risque aléatoire (les conséquences d'un sinistre incendie, mort, d'un tremblement de terre, d'un naufrage...) contre le règlement d'une prime de réassurance correspondant au risque transféré et au mode de transfert prévu dans le contrat de réassurance.

1.7.1. Critère juridique

1) La réassurance facultative

La réassurance facultative est un contrat conclu entre la cédante et un réassureur portant sur un ou des risques explicitement identifiés (un site de production en particulier, un ensemble de biens clairement délimité, etc.) et qui sont l'objet d'un seul et même contrat. La cession et l'acceptation en réassurance du risque en question résulte d'un libre choix de la part des deux acteurs, d'où la dénomination « facultative ». Ce mode de réassurance établit un lien direct entre le sort de la cédante et celui du réassureur, ces derniers partageant bien souvent dans la pratique leur appréhension de la qualité intrinsèque du risque concerné, et leur perception de la tarification appropriée.

2) La réassurance obligatoire(les traités)

Ils couvrent tout le portefeuille d'une cédante dans une sous-branche (par exemple : le portefeuille automobile ou incendie ...). La réassurance en traités couvre, par définition, des sommes plus importantes que la facultative et implique l'acceptation de tous les risques de la sous branche de la cédante.

Donc pour cette forme de réassurance, l'assureur est obligé de céder et le réassureur est obligé d'accepter les risques rentrant dans le cadre du traité.

3) La réassurance facultative-obligatoire

Il s'agit d'une forme de réassurance intermédiaire au terme de laquelle, la cédante n'est pas obligée de céder par contre, le réassureur est obligé d'accepter les risques qui lui sont proposés par l'assureur.

En ce qui nous concerne, nous nous limiterons à la réassurance obligatoire.

1.7.2. Critère technique

On distingue deux types de traités : Proportionnels et non proportionnels.

1) Les traités proportionnels :

Un traité de réassurance de type proportionnel se caractérise par l'égalité entre la proportion de primes reçues par le réassureur et la proportion du coût des sinistres transférés au réassureur :

$$\frac{\text{prime de réassurance}}{\text{primestotalesreçues parla cédante}} = \frac{\text{montant des sinistres à la charge du réassureur}}{\text{montant brut des sinistres à la charge de la cédante}}$$

La quote-part QP (Quota Share QS) : C'est la forme la plus simple de réassurance puisque le réassureur partage une proportion équivalente des primes et des sinistres du portefeuille de la cédante, mathématiquement, si n est le nombre de contrats (le nombre de polices) :

Risque	Risque total	Risque conservé	Risque cédé
Primes	$P = \sum_{i=1}^n P_i$	$aP = a \sum_{i=1}^n P_i$	$(1-a)P = (1 - a) \sum_{i=1}^n P_i$
Sinistres	$S = \sum_{i=1}^n S_i$	$aS = a \sum_{i=1}^n S_i$	$(1-a)S = (1 - a) \sum_{i=1}^n S_i$

Tableau 1 : Quote part

Avec a : Taux de rétention (1-a : Taux de cession)

L'excédent de plein XP (ou excédent de capitaux, ou excédent de risque) : Ce traité définit un plein de conservation et un plein de souscription (la différence entre les deux est appelée capacité du traité). Il ne s'applique qu'à des risques à capitaux garantis inférieurs au plein de souscription. Le taux de cession est calculé police par police, de plus, le réassureur n'intervient que si le capital à assurer dépasse le plein de rétention, formellement :

Risque	Risque total	Risque conservé	Risque cédé
Primes	$P = \sum_{i=1}^n P_i$	$\sum_{i=1}^n (1 - T_i) P_i$	$\sum_{i=1}^n T_i P_i$
Sinistres	$S = \sum_{i=1}^n S_i$	$\sum_{i=1}^n (1 - T_i) S_i$	$\sum_{i=1}^n T_i S_i$

Tableau 2 : L'excédent de plein

Avec $T_i = \min(\max(\frac{C_i - P}{C_i}, 0), \text{Plein de souscription})$

T_i : Le taux à céder sur le risque i

C_i : Le capital assuré

P : Plein de rétention

2) Les traités non proportionnels :

La garantie apportée à une cédante par un traité de réassurance non proportionnelle est liée, indépendamment des sommes assurées, à la seule éventualité de survenance d'un sinistre ou d'une perte. L'indemnisation due par le réassureur équivaut au montant du sinistre qui excède un seuil préalablement défini dans le traité, la priorité, ou franchise, et ne peut généralement pas dépasser une certaine limite, elle aussi définie contractuellement, la portée. Le plafond d'un traité de réassurance est alors défini comme la somme de la priorité et de la portée. La part éventuelle du sinistre qui excède ce plafond demeure à la charge de la cédante. En contrepartie, la cédante verse au réassureur une prime liée au transfert de risque qu'implique la couverture. La réassurance est non proportionnelle car il n'existe plus de relation purement proportionnelle entre le montant de la prime et le montant des sinistres cédés. Par ailleurs, une couverture non proportionnelle sera fréquemment composée de plusieurs tranches, chacune étant caractérisée par un couple priorité – portée.

L'excédent de sinistres ou XS (Excess of loss XL) : il est défini par une priorité (ou franchise) et un plafond. Le réassureur prend en charge la partie de tout sinistre qui excède la priorité du traité et dans la limite de la portée du traité (différence entre le plafond et la franchise). Formellement :

L'engagement du réassureur est : **Min {Portée ; Max (0, Sinistre -Franchise)}**

Le contrat peut être établi par risques ou par événement :

– Dans le premier cas, le réassureur s'engage à payer chaque fois qu'un sinistre supérieur à une franchise survient pour une police donnée.

– Dans le second cas, il intervient à chaque survenance d'événement (climatique par exemple) éventuellement sur plusieurs polices.

L'excédent de perte annuelle (aggregate loss et stop loss) : Ce traité prévoit l'intervention du réassureur lorsque la charge annuelle globale de sinistres (sur une branche donnée) dépasse un seuil déterminé : ce seuil est défini comme un montant (aggregate loss) ou comme un niveau de S/P (Stop Loss).

Enfin, la priorité est traditionnellement fixée à un niveau tel que l'indemnisation de réassurance ne puisse avoir lieu qu'en cas de réelle perte technique de la cédante (où la somme des sinistres et des frais est supérieure aux primes). Une couverture en excédent de perte est très appréciable pour la cédante, puisqu'elle peut ainsi protéger directement son bilan de toute fluctuation exceptionnelle de sa charge sinistre. Mais le coût du transfert de risque qui en résulte est généralement assez élevé.

1.7.3. Quelques clauses de réassurance

Parmi les clauses de réassurance qui peuvent influencer la tarification, nous citons :

1) La commission de réassurance

Exprimée en pourcentage des primes cédées, c'est la commission que le réassureur verse à l'assureur qui lui a apporté des affaires. En effet, dans un traité de réassurance proportionnelle, l'assureur apporte une fraction des primes commerciales contre une prise en charge par le cessionnaire d'une même fraction des sinistres. Or les primes commerciales comportent des chargements pour frais généraux que l'assureur continue à supporter : il paraît donc justifié que le réassureur le rémunère pour le travail de gestion qui reste à sa charge.

Le taux de commission de réassurance est généralement fixe. Il peut être variable, en fonction de la sinistralité constatée.

2) Les clauses de participations aux bénéfices et les clauses de reconstitution de garantie

Afin de responsabiliser l'assureur, le réassureur peut prévoir des clauses de participation aux bénéfices. Celles-ci prévoient généralement des reports de pertes d'une année sur l'autre (sur plusieurs années) afin que les bénéfices du réassureur viennent en priorité combler ses pertes passées.

Certains traités de réassurance prévoient également des clauses de participation aux pertes (lorsque la situation de leur cédante est un peu dégradée).

Enfin, les traités en excédent de sinistres prévoient généralement en cas de survenance d'un nombre déterminé de sinistres importants, des clauses de reconstitution de garantie : l'assureur doit verser une surprime ou prime de reconstitution pour continuer de bénéficier de la garantie qui a déjà joué à leur profit.

II. Présentation des données

II.1. Présentation du portefeuille incendie

L'assureur contre l'incendie répond de tous dommages causés par conflagration, embrasement ou simple combustion. Cependant, il ne répond pas de ceux occasionnés par la seule action de la chaleur ou par le contact direct et immédiat du feu ou d'une substance incandescente s'il n'y a eu ni incendie, ni commencement d'incendie susceptible de dégénérer en incendie véritable.

Les professionnels de l'assurance utilisent couramment une autre définition : il s'agit d'un phénomène de combustion par flamme qui se produit accidentellement hors d'un foyer normal et causant à l'assuré des dommages par l'embrasement de la matière qui n'était pas, à ce moment-là, destinée à la combustion.

En revanche, ne sont pas garantis :

- Les simples brûlures occasionnées par le contact du feu ou la trop grande proximité d'un foyer, les brûlures de cigarette ou occasionnées par un fer à repasser laissé brancher par mégarde. Ces dommages peuvent être néanmoins pris en charge au titre d'une garantie « risques ménagers ».
- Les bris de glace dus à un excès de chaleur sans qu'il y ait eu embrasement voisin.
- Les objets accidentellement tombés dans une cheminée.
- Les dommages causés par la fumée dégagée par l'incendie (cette garantie est cependant optionnelle).

II.2. Présentation de la base de données

La tarification du traité de réassurance nécessite une base de données complète.

Nous avons obtenu deux fichiers concernant la base de données de la branche incendie auprès du département actuariat.

- **Totalincendiemrsasfac** : un fichier sous SAS contenant l'ensemble des polices sans affaires facultatives de la branche incendie de 2005 jusqu'à 2015.
- **Totalincendiemragsasfac** : un fichier sous SAS contenant des données agrégées, c'est-à-dire les montants des sinistres sont groupés par police.

Ces deux fichiers contiennent la liste des variables suivante :

- **PLCCODPLCE** : le numéro de police
- **montsin** : le montant du sinistre en cas de survenance
- **nbresin** : le nombre de sinistres de la police
- **primenetresprorataqp** : primes retenues par la compagnie après coassurance
- **totcommprorataqp** : commissions à la charge de la compagnie après coassurance
- **Capitalqp** : le capital à la charge de l'assurance
- **exercicegarantie** : l'année de l'exercice de la police

II.3. Traitement de la base de données

Le traitement de la base de données est une étape importante avant d'entamer le sujet principal de notre projet fin d'étude.

Nous avons détecté les anomalies suivantes :

- Des capitaux assurés nuls ou vides alors que la prime correspondante est différente de 0.
- Des capitaux supérieurs à l'engagement maximal qui est de 300 millions.
- Des primes nulles ou vides ainsi que leur capital correspondant.

Une fois les anomalies détectées, nous avons procédé à la correction de la base de données.

Pour rectifier le premier problème, nous avons choisi d'estimer le capital manquant par une régression linéaire.

En ce qui concerne le deuxième problème, nous avons corrigé ces capitaux en prenant la valeur du capital de calcul utilisé dans le système d'information interne de RMA Watanya.

Enfin, pour résoudre la dernière anomalie, nous avons supprimé les lignes où les primes et le capital correspondant sont manquants puisque on ne peut pas estimer les deux à la fois.

II.4. Analyse descriptive de la base de données

Cette partie fait l'objet d'une analyse descriptive de la production et la sinistralité de la branche incendie.

II.4.1. Données relatives à l'assurance

1) Analyse de la production

Exercice garantie	assiette prime	nombre polices	capital assuré	capital assuré moyen
2005	68 736 383	20 411	64 205 164 745	3 145 616
2006	80 741 995	24 216	68 136 967 584	2 813 717
2007	74 789 058	24 074	67 543 566 709	2 805 664
2008	83 532 282	25 186	75 469 314 954	2 996 479
2009	92 138 804	26 271	88 948 553 517	3 385 808
2010	99 029 573	26 998	97 330 425 480	3 605 098
2011	104 459 547	27 534	102 964 284 402	3 739 532
2012	105 252 744	28 117	105 350 775 079	3 746 871
2013	103 519 247	28 408	107 075 026 409	3 769 186
2014	102 569 821	28 600	111 123 604 624	3 885 441
2015	105 289 842	29 067	116 720 763 247	4 015 577

Tableau 3 : La production relative à la branche incendie

Le tableau ci-dessus donne une idée sur le chiffre d'affaire de RMA WATANYA, ainsi que le nombre de polices souscrites par année.

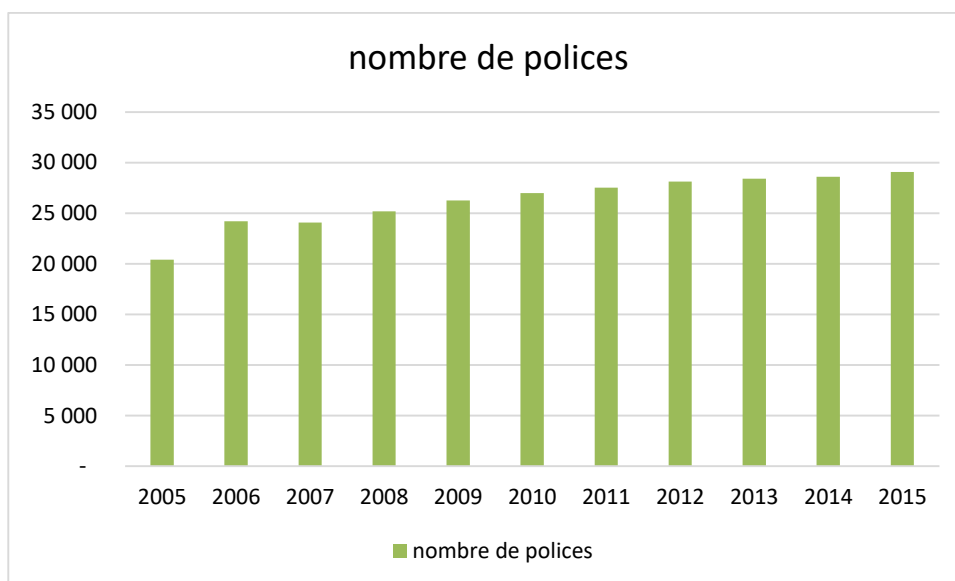


Figure 2 : Evolution du nombre de polices relatif à la branche incendie pendant la période 2005-2015

Nous constatons que le nombre de polices a une tendance haussière pendant la période 2005-2015.

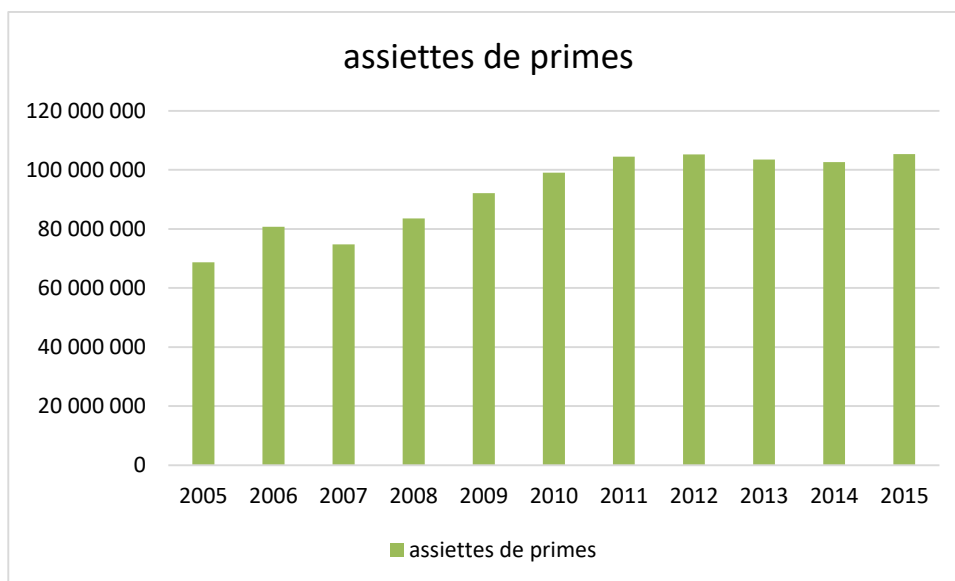


Figure 3 : Evolution de l'assiette de prime de la branche incendie pendant la période 2005-2015

Nous remarquons que l'évolution de l'assiette de primes suit celle du nombre de polices pour la période allant de 2005 à 2015. L'année 2006 représente des assiettes de prime importantes, chose qui peut être expliquée par la fusion entre la RMA et ALWATANIYA qui avait eu lieu en 2005.

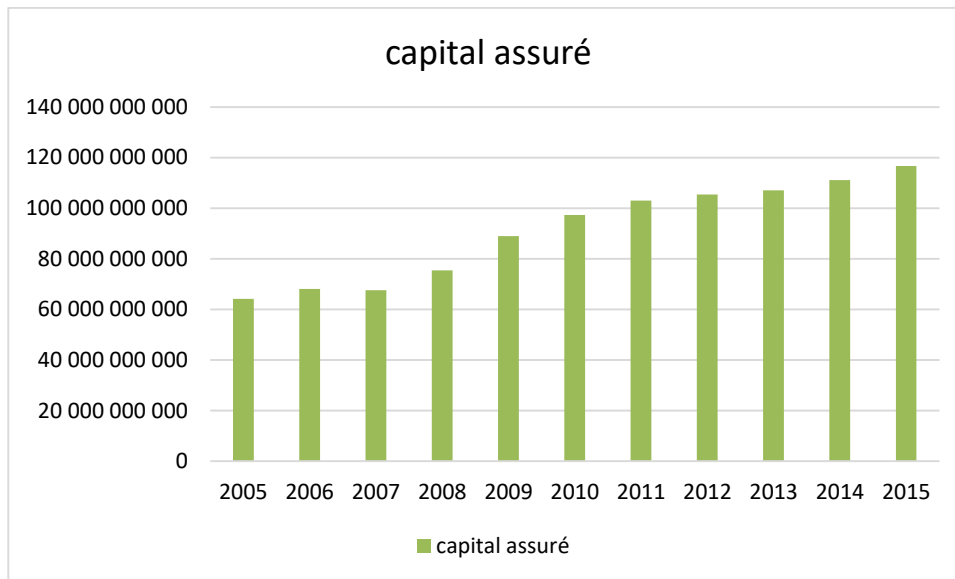


Figure 4 : Evolution du capital assuré de la branche incendie pendant la période 2005-2015

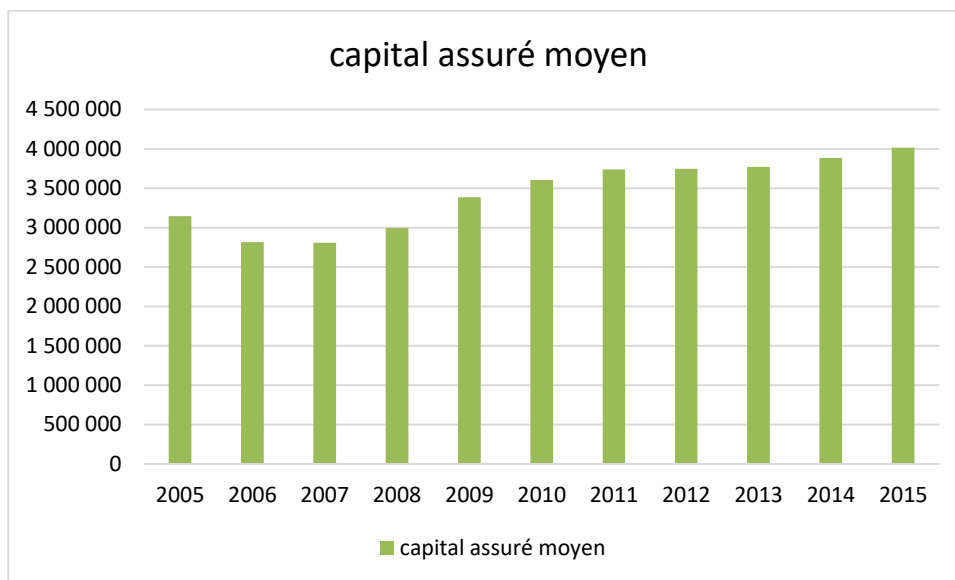


Figure 5 : Evolution du capital assuré moyen de la branche incendie pendant la période 2005-2015

Nous constatons que le capital assuré ainsi que le capital assuré moyen ont une tendance croissante de 2005 à 2015.

2) Analyse de la sinistralité

Cette partie est consacrée à l'analyse de la sinistralité relative à la branche incendie à travers les données de la base non agrégée.

Exercice garantie	nombre sinistre	charge sinistre	cout sinistre moyen
2005	333	22 614 289	67 911
2006	299	26 927 476	90 058
2007	359	7 662 432	21 344
2008	433	65 935 541	152 276
2009	496	22 335 128	45 031
2010	746	54 726 778	73 360
2011	511	94 854 752	185 626
2012	540	51 541 278	95 447
2013	506	36 625 262	72 382
2014	438	42 339 010	96 664
2015	424	127 867 793	301 575

Tableau 4 : La sinistralité relative à la branche incendie durant la période 2005-2015



Figure 6 : Evolution du nombre de sinistres de la branche incendie pendant la période 2005-2015

Nous constatons que l'année 2010 présente le pic en termes de nombre de sinistres.

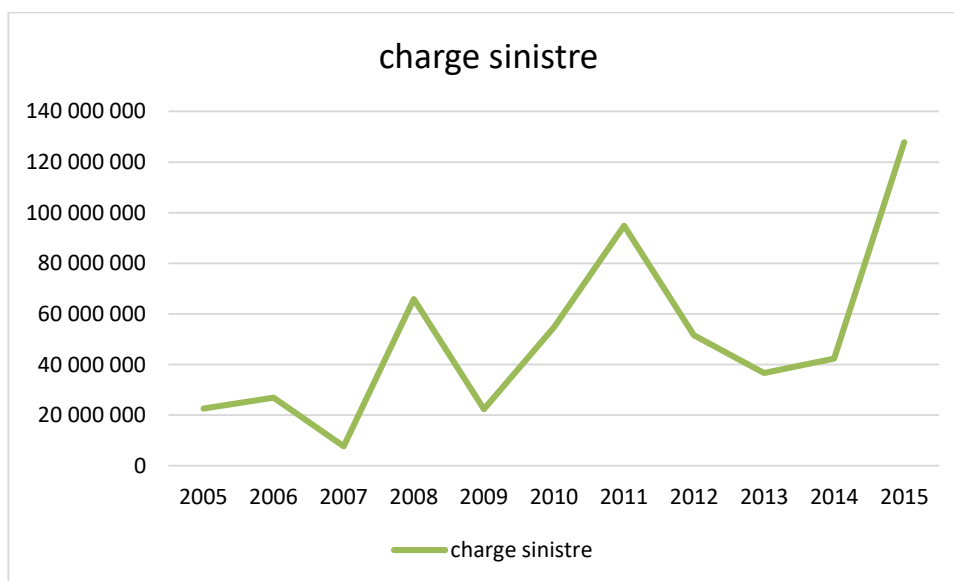


Figure 7 : Evolution de la charge totale par exercice de garantie pendant la période 2005-2015

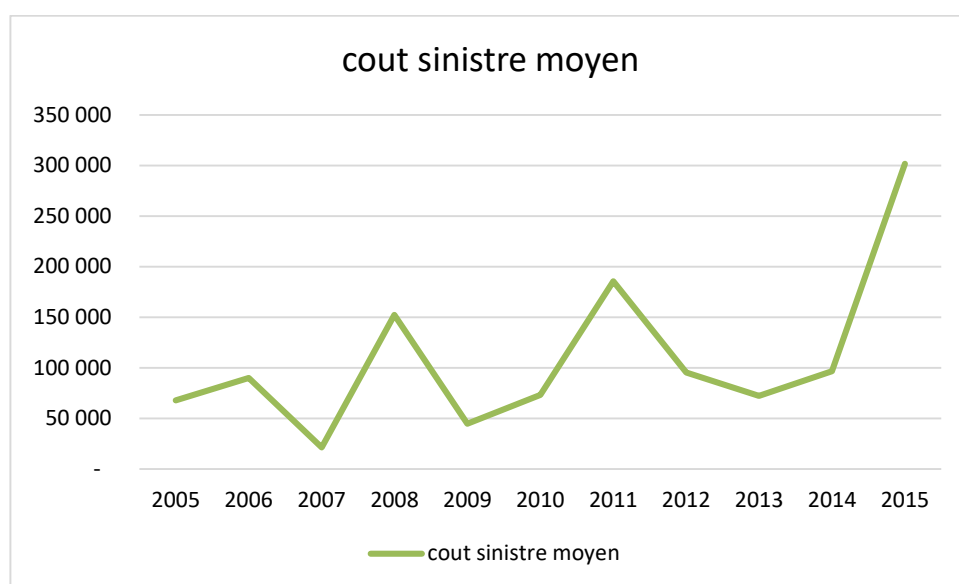


Figure 8 : Evolution du cout moyen de la branche incendie durant la période 2005-2015

D'après ces deux graphiques, nous remarquons une certaine volatilité de la sinistralité. L'année 2015 a connu des sinistres avec des charges trop importants.

II.4.2. Données relatives à la réassurance

1) Excédent de plein

Exercices	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015
Engagement	300	300	300	300	300	300	300	300	300	300	300
Plein de conservation	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30
Engagement Réassureur	270	270	270	270	270	270	270	270	270	270	270
Commission	35%	35%	35%	36%	36%	36,5%	36,5%	30% pour S/P 60% et 40% pour S/P 40% des primes cédées	25% pour S/P 60% et 40% pour S/P 40% des primes cédées	20% pour S/P 80% et 30% pour S/P 40% des primes cédées	20% pour S/P 80% et 30% pour S/P 40% des primes cédées

Tableau 5 : Evolution du plein de rétention, plein de souscription et taux de commission de XP depuis 2005 à 2015

Le plein de rétention ainsi que le plein de souscription sont restés fixes depuis 2005 avec un plein de rétention de 30 millions de Dhs et un plein de souscription de 300 millions de Dhs. Le taux de commission a connu de légers changements. Il est passé de 35% les

années 2005,2006 et 2007 à 36% en 2008 et 2009 et à 36,5% en 2010-2011.Pour les années 2012-2015, Le taux de commission varie selon des conditions sur le ratio S/P (sinistres/Primes).

Cette baisse continue du taux de commission XP a participé à positiver le résultat XP réassureur.

2) Excédent de sinistre

Le réassureur n'intervient que pour les sinistres qui dépassent un certain montant appelé priorité ou franchise, il prend alors à sa charge la partie du sinistre excédent ce premier risque.

◆ Excédent de sinistre par risque

Exercices	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015
Priorité	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
Portée	28	28	28	28	28	28	28	28	28	28	28
Taux de prime	17,45%	18%	16,35%	15,25%	9,79%	8,85%	7,50%	7,60%	8,20%	9,20%	11,45%

Tableau 6 : Evolution des caractéristiques de l'excédent de sinistre par risque

De 2005 à 2015, l'excédent de sinistre a une priorité fixe de 2 Millions et une portée de 28 Millions.

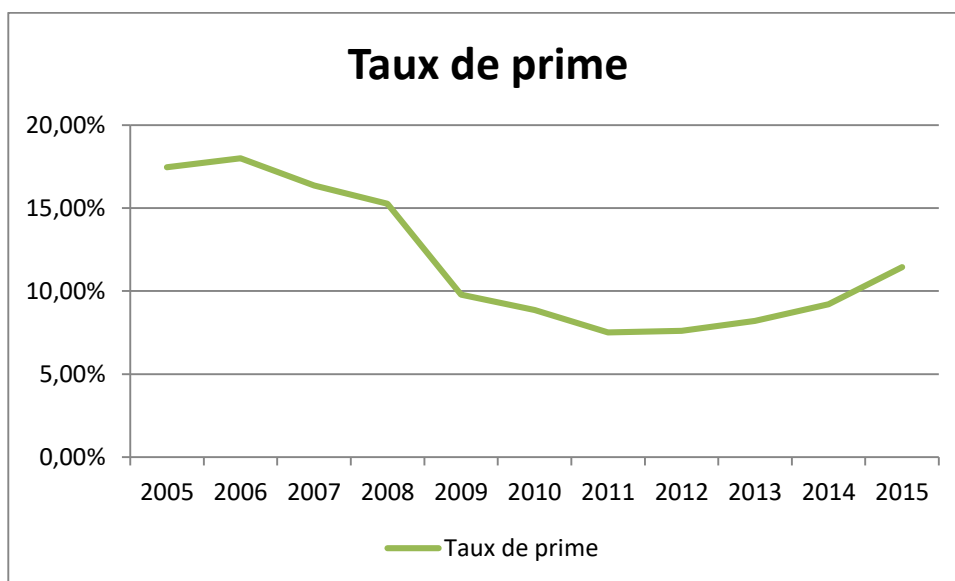


Figure 9 : Evolution du taux de prime

Nous remarquons que le taux de prime a une tendance baissière à partir de l'année 2006 jusqu'à l'année 2012 qui a connu une augmentation de ce taux.

◆ Excédent de sinistre par événement

La compagnie maintient ce traité pour mieux se couvrir contre des événements inattendus, (catastrophes naturelles). De ce fait, la compagnie cède une partie des primes sans cession de sinistres.

	Exercices	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015
Excédent de sinistre par événement 1 ^{ière} tranche	Priorité	3	3	3	4	8	8	8	8	8	8	8
	Portée	172,5	172,5	172,5	85	81,5	81,5	76	76	76	76	76
	Engagement Maximum par année NCL pour un seul et même evt	345	345	345	170	163	163	152	152	152	152	152
	Taux de prime	8%	PF(5%)	PF (4,5%)	PF de 3,900,000(4%)	PF de 4,000,000 (3,3%)	PF 4000000(2,9%)	2,47%	2,40%	2,55%	2,85%	4,26%
Excédent de sinistre par événement 2 ^{ième} tranche	Priorité	175,5	175,5	175,5	89	89,5	89,5	84	84	84	84	84
	Portée	345	345	345	211	211	211	224	224	224	224	224
	Engagement Maximum par année NCL pour un seul et même evt	690	690	690	422	422	422	448	448	448	448	448
	Taux de prime	3,60%	PF(3,2%)	PF(2,7%)	PF de 2,400,000(2,4%)	PF de 2,500,000 (2,1%)	PF 2,500,000(1,95%)	2,00%	2,25%	2,25%	2,26%	3,20%

Tableau 7 : Evolution des caractéristiques de l'excédent de sinistre par événement

Descriptif de la première tranche :

La priorité a connu deux augmentations, la première en 2008 en passant de 3 millions à 4 millions, la deuxième en 2009 en passant de 4 à 8 millions. La portée par contre a diminué en passant de 172.5 millions en 2005 à 76 millions en 2015, de même pour l'engagement maximum et le taux de prime qui a connu une diminution sauf en 2015 ou il a augmenté.

Descriptif de la deuxième tranche :

La deuxième tranche vient compléter la première. La priorité de la deuxième tranche est presque égale à la portée de la première et l'engagement maximum est beaucoup plus grand. Comme pour la première tranche, le taux de prime a baissé sauf en 2015 et 2009.

II.5. Analyse comptable de la branche incendie

II.5.1. Avant réassurance

Pour évaluer la branche Incendie en terme comptable avant réassurance, nous avons utilisé deux grandeurs principales:

– Le résultat économique hors réassurance qui représente le résultat de la compagnie sans réassurance après déduction des commissions et des autres charges d'exploitation (sans tenir compte des produits financiers).

– Le ratio S/P, qui indique la part des primes affectée aux sinistres.

Année	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015
Primes	68736383	80741995	74789058	83532282	92138804	99029573	104459547	105252744	103519247	102569821	105289842
Sinistres	22614289	26927476	7662432	65935541	22335128	54726778	94854752	51541278	36625262	42339010	127867793
Commissions	7541120	9865510	11729622	13253360	14655075	16208252	17274226	17923327	17393744	17640527	18108331
frais généraux	17596514	20669950	19145998	21384265	23587534	25351571	26741644	26944702	26500928	26257874	26954199
Résultat technique	20984460	23279059	36251006	-17040883	31561066	2742972	-34411075	8843437	22999314	16332410	-67640482
S/P	0,33	0,33	0,10	0,79	0,24	0,55	0,91	0,49	0,35	0,41	1,21

Tableau 8 : Evolution du résultat avant réassurance durant la période 2005-2015

Nous constatons que le résultat économique hors réassurance de la compagnie RMA Watanya relatif à la sous branche Incendie a affiché des valeurs positives et négatives au cours des années d'activité. Les années 2008 ,2011 et 2015 ont affiché des résultats négatifs. Ceci est dû, essentiellement, à la sinistralité qu'a connue cette sous branche durant ces trois exercices.

Le ratio S/P relatif à la sous branche Incendie a connu de considérables fluctuations durant la période d'étude. Les plus grandes valeurs de ce ratio ont été enregistrées au niveau des années les plus sinistrées et qui sont 2008 ,2011 et 2015.

II.5.2. Après réassurance

Nous procédons de la même manière que précédemment mais cette fois-ci en se basant sur le solde net de réassurance.

Année	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015
Primes	39682304	45822334	43889095	49525852	57248487	60169838	63057216	63940830	63308863	59366625	59796953
Sinistres	13886694	17080819	5626589,9	16254838	8245504	27366864	23998595	26376720	13405902	21693861,4	26541458,1
Commissions	4353575	5598830	6883393	7857848	9105620	9848047	10427621	10888385	10637424	10210202	10284212
Commissions réass	7233014	8701385	7812532	9034091	10323882	8667142	13245698	12798713	13822138	11063453	7552163
frais généraux	10158670	11730517	11235608	12678618	14655613	15403479	16142647	16368852	16207069	15197856	15308020
Rés technique	11283365	11412167	20143504	12734548	25241750	7551449	12488352	10306872	23058468	12264706	7663264
S/P	0,35	0,37	0,13	0,33	0,14	0,45	0,38	0,41	0,21	0,37	0,44

Tableau 9 : Evolution du solde net de réassurance relatif à la branche incendie de 2005 à 2015

Le résultat de la compagnie après réassurance n'a affiché que des résultats positifs durant la période d'étude. En comparant ces résultats avec les résultats obtenus avant réassurance, nous concluons que l'application des traités de réassurance a engendré des résultats positifs pour les années où le résultat était négatif, cependant, elle a diminué le résultat pour les autres exercices de garantie.

II.5.3. Comparaison de la situation avant et après réassurance

Pour bien illustrer l'effet de la réassurance sur le résultat de la compagnie, nous présentons, dans cette sous-section, des graphiques comparatifs entre la situation avant et après réassurance.

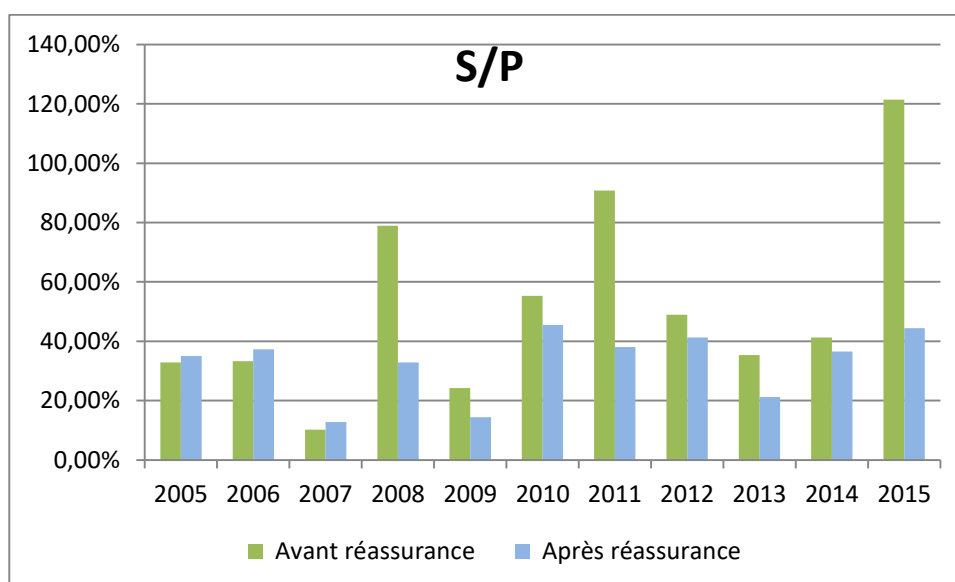


Figure 10 : Evolution du ratio S/P avant et après réassurance

A partir de l'année 2008, la réassurance baisse le S/P ce qui représente un bon indicateur pour la compagnie. Les S/P des années 2005-2007 n'étaient pas au niveau des

attentes, cela peut être expliqué par les nouvelles données suite à la fusion entre la RMA et ALWATANIYA qui a eu lieu en 2005.

Le résultat de la branche incendie a connu des changements avec la réassurance, le graphe suivant nous donne une idée sur la nature de ces changements :

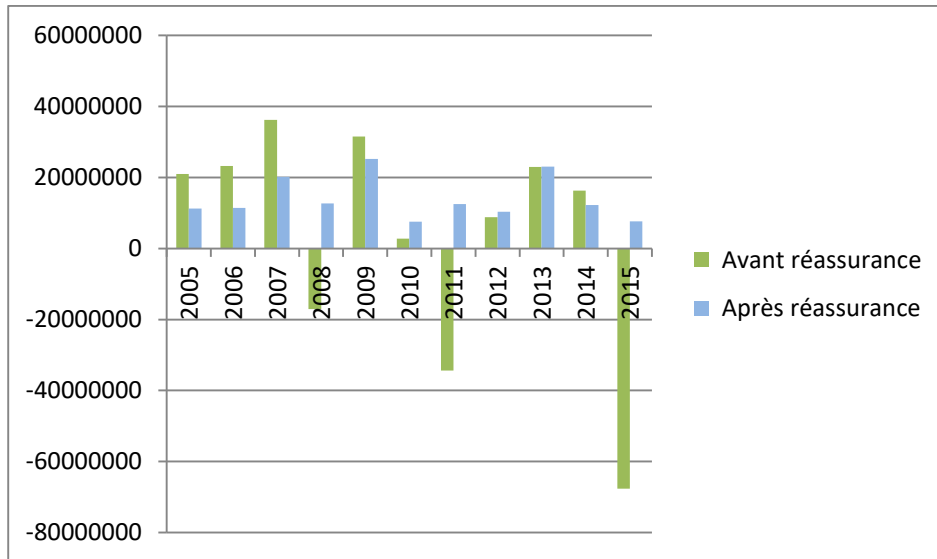


Figure 11 : Evolution des résultats avant et après réassurance

Nous remarquons que pour les exercices où les résultats sont négatifs (2008, 2011 et 2015), la réassurance a protégé l'assurance et a garanti un résultat assureur positif, pour les exercices 2010 et 2012, où les résultats sont positifs avant intervention de la réassurance, cette dernière a amélioré davantage ce résultat. Pour les autres exercices de garantie, la réassurance a baissé le résultat assureur. Ceci représente un constat naturel puisque la réassurance est un outil de couverture.

II.6. Analyse du besoin de réassurance

La réassurance permet de stabiliser le compte de résultat de la compagnie d'assurance contre les chocs du hasard. Ceci a pour conséquence de diminuer la probabilité de ruine de la compagnie d'assurance.

Dans cette partie, nous allons mettre en évidence cette idée en s'appuyant sur le calcul, avant et après réassurance, d'un indicateur, appelé coefficient de sécurité. De plus, ce coefficient va nous permettre de détecter le besoin en réassurance, pour la compagnie RMA Watanya.

II.6.1. Cadre théorique

Tout assureur désire avoir très peu de chances, disons moins de 1% de consommer ses fonds propres. En d'autres termes, il veut que la probabilité de se ruiner soit inférieure à 1%. Sachant que la probabilité de se ruiner est la probabilité que le résultat net soit négatif, ceci se traduit par la relation suivante:

$$P(U + L + F + R_p < 0) < 1\%$$

Avec :

U : Les fonds propres affectés au risque de hasard.

L : Le résultat de liquidation sur sinistres antérieurs.

R_p: Le résultat de l'exercice pur.

F : Le résultat financier.

L'inégalité décrite là-dessus peut être écrite comme : $P(U + R_e < 0) < 1\%$

Avec $R_e = L + F + R_p$: le résultat d'exploitation

Soit z la variable aléatoire centrée réduite de R_e , donc $Z = \frac{R_e - aP}{\sigma P}$.

Avec a : le taux de résultat et σ : l'écart type hasard

L'inégalité précédente devient : $P(U + z \sigma P + aP < 0) < 1\%$

Soit encore $P(z < -T) < 1\%$

$$\text{Donc } T = \frac{U + aP}{\sigma P}$$

Il apparaît que si T est suffisamment grand, l'inégalité est vérifiée d'où l'appellation coefficient de sécurité.

Donc, plus T est élevé plus la sécurité est importante et plus le risque de ruine est faible.

- Si le résultat suit une loi normale, il suffit que T dépasse 2,4.
- Dans l'ignorance totale de la loi, l'inégalité de Tchebychev majore T par la valeur 10. En effet, $P(|z| > 10) < 1/100 = 1\%$ et $P(z < -10) < P(|z| > 10)$.

1) Les fonds propres affectés au risque du hasard U

Les fonds propres sont destinés à absorber les pertes éventuelles engendrées par les aléas combinés du hasard, de la gestion et du marché. Il est donc logique que l'assureur affecte une part de ses fonds propres à ce risque. Ces fonds propres sont calculés comme suit :

$$FP = \min \left(MS ; \frac{\text{Ecart type hasard}}{\text{Ecart type global}} \times MS \right)$$

Avec MS : Marge de solvabilité

2) Marge de solvabilité

La marge de solvabilité non vie se calcule comme suit :

$$MS = \max (27\% \times \text{moyenne sinistre des trois derniers exercices} ; 20\% \times \text{Primes})$$

3) L'écart type hasard

$$\text{L'écart type hasard se calcule comme suit : } \sigma = \frac{\sqrt{s_1^2 + s_2^2 + \dots + s_n^2}}{P}$$

s_1, s_2, \dots : les sinistres survenus dans l'exercice

P : les primes acquises de l'exercice.

4) L'écart type global

Le résultat global de l'assureur est souvent très volatile. Par conséquent, pour comparer les résultats d'exercices successifs ou entre compagnies, nous utilisons le ratio taux de résultat. Ainsi, l'écart type de ce taux résultat dans le temps forme ce qu'on appelle l'écart type global.

II.6.2. Calcul du coefficient de sécurité

1) Avant réassurance

Après les calculs, nous obtenons les résultats suivants :

Année	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015
MS	16706456,5	18427760,7	19805914,66	20891909,49	21050548,88	20703849,42	20513964,28	21057968,47
FP	21694062,52	6251234,62	6185122,7	20891909,5	8377813,48	10072185,6	6371939,14	49747137,01
σ	42%	11%	10%	48%	13%	16%	10%	76%
Taux de résultat	-19%	36%	7%	-29%	11%	25%	19%	-61%
Ecart type global	32%	32%	32%	32%	32%	32%	32%	32%
T	0,16	3.87	1.31	0,01	1.45	2.21	2.5	-0.18

Tableau 10 : Calcul du coefficient de sécurité pour la branche incendie avant réassurance pendant la période 2008-2015

Nous avons testé sous R si le résultat suit une loi normale, nous avons obtenu le résultat suivant :

```
> ks.test(A, pnorm, fitnorm[1], fitnorm[2])

One-sample Kolmogorov-Smirnov test

data: A
D = 0.2437, p-value = 0.4591
alternative hypothesis: two-sided
```

Figure 12 : Test de Kolmogorov Smirnov pour la loi normale

Puisque la p-value est supérieure à 5%, le résultat suit bien une loi normale.

Conclusion :

La sécurité est insatisfaisante avant réassurance pour les années 2008, 2010, 2011, 2012, 2013 et 2015 puisque le coefficient de sécurité est inférieur à 2,4.

2) Après réassurance

Les mêmes étapes ont été suivies pour calculer le coefficient de sécurité après réassurance.

Année	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015
T	6,10	13,96	4,49	5,27	4,90	9,78	5,69	4,65

Tableau 11 : Evolution du coefficient de sécurité après réassurance

Nous remarquons que le coefficient de sécurité est supérieur à 2,4 pour chaque année d'étude. La sécurité est donc satisfaisante.

II.7. Analyse du profil risque et du profil sinistre

Le profil de risque d'une branche d'assurance décrit les principaux risques auxquels l'assureur est confronté (vis-à-vis de cette branche précise et ce en terme de produits).

Le profil de risque d'une branche consiste à analyser et à prendre une décision en ce qui concerne l'affectation des ressources, tandis que le profil de sinistre offre une analyse en termes de charges.

II.7.1. Profil risque

Pour réaliser le profil risque, nous avons ajouté la variable « tranche de capital assuré ». Les tranches constituant cette variable nous ont été communiquées par le service Actuariat.

Tranche capital	capital assuré	charge sinistre	assiette prime	charge cumulée	prime cumulée	S/P cumulée
1<K<=1 M	79 174 834 409,44	14 680 949,13	65 280 254,98	14 680 949,13	65 280 254,98	22%
1 M<K<=1,5 M	41 366 946 661,03	8 853 584,86	27 194 058,18	23 534 533,99	92 474 313,16	25%
1,5 M<K<=2 M	25 231 838 212,10	7 727 831,74	20 722 955,30	31 262 365,73	113 197 268,46	28%
2 M<K<=4 M	102 487 544 610,29	17 562 981,27	59 541 002,82	48 825 347,00	172 738 271,28	28%
4 M<K<=10 M	115 384 375 066,16	52 408 762,57	107 277 295,81	101 234 109,57	280 015 567,10	36%
10 M<K<=30 M	157 542 557 467,56	98 695 086,65	202 680 029,55	199 929 196,22	482 695 596,64	41%
30 M<K<=60 M	120 348 733 837,11	52 451 787,36	148 524 311,49	252 380 983,58	631 219 908,14	40%
60 M<K<=100 M	99 250 482 031,07	51 823 550,83	118 239 174,44	304 204 534,41	749 459 082,58	41%
100 M<K<=200 M	147 078 128 070,57	167 250 193,21	164 970 821,77	471 454 727,62	914 429 904,35	52%
200 M<K<=300 M	117 003 006 384,13	81 975 013,82	105 629 393,90	553 429 741,44	1 020 059 298,25	54%
Total	1 004 868 446 749,47	553 429 741,44	1 020 059 298,25			

Tableau 12 : Profil du risque des années 2005-2015

La tranche de capital la moins sinistrée concerne les polices dont le capital est inférieur à 1 000 000 Dhs.

La tranche 2 à 5 millions de Dhs a un S/P de 54% et est donc la plus sinistrée.

Nous remarquons également une faible sinistralité des polices dont les capitaux sont compris entre 15 000 000 et 40 000 000 Dhs.

II.7.2. Profil sinistre

Pour réaliser le profil sinistre, nous avons ajouté la variable « tranche sinistre ». Les tranches constituant cette variable nous ont été communiquées par le service Actuariat.

tranche sinistre	nombre police	capital assuré moyen	charge totale	Charge moyenne	charge cumulée	poids de la charge	poids de la charge cumulée
1<CH<=5 000	727	28 659 648,46	1 748 020,00	2 404,43	1 748 020,00	0,3%	0,3%
5 m<CH<=10 000	376	29 182 423,33	2 715 877,70	7 223,08	4 463 897,70	0,5%	1%
10 000<CH<=1 00 000	997	50 138 608,23	34 893 754,98	34 998,75	39 357 652,68	6%	7%
1 00 000<CH<= 500 000	274	77 720 922,77	58 265 431,23	212 647,56	97 623 083,91	11%	18%
500 000<CH<=1 M	68	64 796 107,60	46 961 278,04	690 607,03	144 584 361,95	8%	26%
1 M<CH<=2 M	31	74 711 047,71	43 458 126,35	1 401 875,04	188 042 488,30	8%	34%
2 M<CH<=3 M	15	85 752 661,38	37 856 936,95	2 523 795,80	225 899 425,25	7%	41%
3 M<CH<=4 M	11	33 483 293,49	38 886 054,81	3 535 095,89	264 785 480,06	7%	48%
4 M<CH<=5 M	7	43 046 847,54	32 363 470,05	4 623 352,86	297 148 950,11	6%	54%
5 M<CH<=10 M	9	92 024 073,31	66 305 057,55	7 367 228,62	363 454 007,66	12%	66%
CH>10 M	5	112 151 151,01	189 975 733,78	37 995 146,76	553 429 741,44	34%	100%
Total	2 520	691 666 784,83	553 429 741,44	58 394 375,82		100%	

Tableau 13 : Profil sinistre des années 2005-2015

La tranche des charges supérieures à 10 millions de Dhs a le poids le plus élevée.

Nous remarquons également un faible poids des charges comprises entre 1 et 10 000 Dhs.

Chapitre II : Cotation des traités de réassurance incendie

I. Modélisation

I.1. Détermination du seuil des sinistres graves

I.1.1. Théorie excès au-delà d'un seuil

La méthode des excès au-delà d'un seuil (ou Peak Over Threshold, POT) repose sur le comportement des valeurs observées au-delà d'un seuil donné. En d'autres termes, elle consiste à observer non pas le maximum ou les plus grandes valeurs mais toutes les valeurs des réalisations qui excèdent un certain seuil élevé. L'idée de base de cette approche consiste à choisir un seuil suffisamment élevé et à étudier les excès au-delà de ce seuil.

On définit un seuil $u \in \mathbb{R}$, $N_u = \text{card}\{i : i = 1, \dots, n, X_i > u\}$ et $Y_i = X_i - u > 0$ pour $1 \leq j \leq N_u$ où N_u est le nombre des dépassements du seuil u par les X_i , $1 \leq i \leq n$ et Y_1, \dots, Y_{N_u} les excès correspondants.

On cherche à partir de la loi F de X à définir une loi conditionnelle F_u par rapport au seuil u pour les variables aléatoires dépassant ce seuil. On définit alors la loi conditionnelle des excès F_u par :

$$F_u(y) = \Pr(X - u \leq y \mid X > u) = \frac{F(u + y) - F(u)}{1 - F(u)}$$

Le théorème de Pickands-Balkema-de Haan donne la forme de la loi limite pour les valeurs extrêmes : sous certaines conditions de convergence, la loi limite est une loi de Pareto généralisée que l'on notera GPD.

THÉORÈME (de Pickands-Balkema-de Haan) :

Soit F_u la distribution conditionnelle de la fonction de répartition inconnue F par rapport au seuil u . Lorsque le seuil u tend vers le point terminal x_F , on a :

$$\lim_{u \rightarrow x_F} \sup_{0 \leq y \leq x_F - u} |F_u(y) - H(y)| = 0$$

La distribution conditionnelle converge donc vers la fonction $H(y)$ qui correspond à la fonction de répartition de la loi Pareto généralisée.

En pratique le choix du seuil constitue une difficulté. En fait, u doit être assez grand pour que l'approximation GPD soit valide, mais pas trop élevé pour garder un nombre suffisant de dépassements pour estimer les paramètres du modèle. Le seuil doit être choisi de façon à faire un arbitrage, traditionnel en statistiques, entre le biais et la variance. Généralement, u est déterminé graphiquement en exploitant la linéarité de la fonction d'excès moyenne $e(u)$ pour la GPD. Cette technique fournit une aide précieuse, cependant, il ne faut pas attendre d'elle la bonne valeur de u . En pratique, plusieurs valeurs de u doivent être testées. Ce problème du choix a suscité de nombreux travaux dans la littérature. Beirlant a suggéré de choisir le seuil u qui minimise l'erreur quadratique moyenne asymptotique de l'estimateur de Hill de l'indice de queue, tout en supposant que F appartient au domaine d'attraction maximale de Fréchet. Parmi d'autres, Hall [1990] ; Danielsson [2001], ont introduit des approches Bootstrap pour trouver le seuil optimal. Une autre méthode utilisée par plusieurs auteurs consiste à choisir un seuil aléatoire. En fait, ils prennent k observations excédentaires et le k peut être déterminé par des méthodes Monte-Carlo.

1.1.2. L'estimateur de Hill

L'estimateur de Hill est donné par la forme empirique suivante :

$$\xi = \frac{1}{k-1} \sum_{i=1}^{k-1} (\ln X_{1:n} - \ln X_{k:n}) \text{ pour } k \geq 2$$

Avec k l'ordre statistique le plus élevé (le nombre des excès) et $\alpha = \frac{1}{\xi}$ est l'indice de la queue de distribution.

Cet estimateur intervient dans la construction du graphique Hill-plot : Représentation de α en fonction de la statique d'ordre $X_{1:n}$. Le Hill-plot nous permet de choisir un seuil élevé pour la construction d'un modèle (GPD).

Le Hill-plot est donc un outil à double utilité :

- l'estimation de l'indice de la queue de la distribution.
- l'estimation du seuil.

I.1.3. Test d'adéquation de Kolmogorov-Smirnov

Ce test d'ajustement nous permettra de vérifier si la loi de probabilité d'un échantillon des extrêmes observés appartient à la famille de lois théorique choisie pour l'analyse des extrêmes. Soit X_1, X_2, \dots, X_n les valeurs d'un échantillon des extrêmes (des maxima par bloc ou des dépassements d'un seuil) rangées par ordre croissant, et G la fonction de répartition théorique correspondante (respectivement, une GEV ou une GPD) avec les paramètres estimés à partir de l'échantillon considéré. On cherche alors à tester l'hypothèse H_0 selon laquelle l'échantillon X relève de la loi G .

Le principe du test d'adéquation de Kolmogorov Smirnov consiste simplement à trouver la différence entre les distributions de répartition empirique et théorique :

$D = \max_{x \in \mathbb{R}} |F(x) - G(x)|$ où la fonction de répartition empirique F est définie comme

$F(X_i) = \frac{i}{n+1}$. Quand ce maximum dépasse une certaine valeur D_{KS}^α , associé à une valeur de risque, $\alpha = 0.05$. La distribution d'échantillonnage, appelée statistique de Kolmogorov-Smirnov, est connue et fournie par des tables statistiques.

I.1.4. Application sous R :

Nous avons appliqué la méthode d'excès au-delà d'un seuil pour déterminer le seuil au-delà duquel un sinistre est considéré comme sinistre grave.

Nous avons eu recours à cette méthode car en essayant d'ajuster la loi des montants de sinistres, nous avons constaté que le portefeuille n'est pas homogène et ne peut pas être ajusté par une seule loi.

Nous avons choisi d'appliquer cette théorie sous le logiciel statistique R. Nous avons sélectionné les charges des sinistres par ordre croissant à partir de la base de données sous SAS.

Nous avons utilisé la fonction Hill plot sous R qui a donné le résultat suivant :

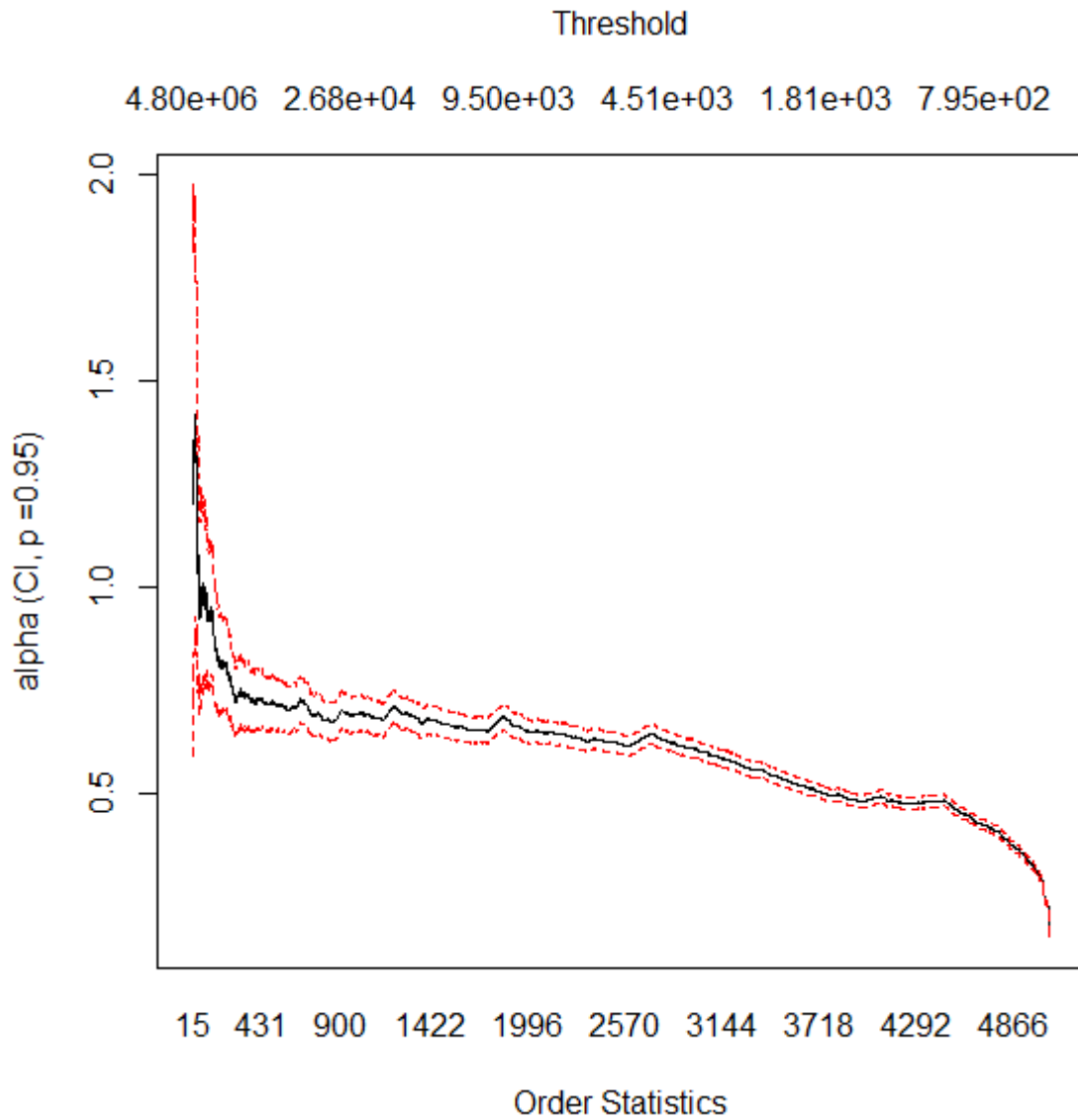


Figure 13 : Hill plot

Ce graphique Hill-plot, nous permet d'avoir des estimations du paramètre en fonction de l'ordre statistique le plus élevé (nombre des excès), nous choisissons ainsi l'indice le plus stable.

Nous estimons qu'à partir de l'ordre 4292 le graphe est stable.

Cet ordre correspond à un seuil approximatif de 2 millions.

Puisque ce test est graphique, nous avons utilisé le test de Kolmogorov-Smirnov pour vérifier si les montants au-dessus du seuil suivent une GPD (Annexe1).

Nous avons d'abord estimé les paramètres de la GPD :

xi	beta
6.474193e-01	2.291676e+06

Tableau 14 : Paramètres de la loi GPD

```
> ks.test(lar,rgpd(length(lar),xi=6.474193e-01 , beta=2.291676e+06 , mu=2000000))  
  
Two-sample Kolmogorov-Smirnov test  
  
data: lar and rgpd(length(lar), xi = 0.6474193, beta = 2291676, mu = 2e+06)  
D = 0.1364, p-value = 0.8079  
alternative hypothesis: two-sided
```

Figure 14 : Résultat du test de Kolmogorov Smirnov

La valeur de la statistique de Kolmogorov-Smirnov est 0,1364 qui est associé à une p-value = 0,8079. Étant donné que cette probabilité est supérieure à 5 %, nous pouvons conclure la pertinence du seuil choisi.

I.2. Modélisation de la charge des sinistres

Pour pouvoir appliquer les méthodes de tarification, nous avons besoin d'ajuster les charges des sinistres graves et attritionnels.

La démarche que nous avons adoptée pour modéliser les charges est la suivante :

La première étape consiste à estimer les paramètres des lois qui peuvent ajuster notre échantillon.

La deuxième étape consiste à tester quelle loi ajuste notre échantillon. Pour faire ceci nous avons utilisé le test de Kolmogorov Smirnov.

La troisième étape consiste à trancher entre les lois qui modélisent notre échantillon par le critère AIC. (le critère d'information Akaike).

Le critère d'information d'Akaike s'écrit comme suit:

$$AIC = 2k - 2\ln(L)$$

Où k est le nombre de paramètres à estimer du modèle et L est le maximum de la fonction de vraisemblance du modèle.

Si l'on considère un ensemble de modèles candidats, le modèle choisi est celui qui aura la plus faible valeur d'AIC. Ce critère repose donc sur un compromis entre la qualité de l'ajustement et la complexité du modèle, en pénalisant les modèles ayant un grand nombre de paramètres, ce qui limite les effets de sur-ajustement (augmenter le nombre de paramètre améliore nécessairement la qualité de l'ajustement).

L'AIC est basé sur la théorie de l'information: il propose une estimation de la perte d'information lorsqu'on utilise le modèle considéré pour représenter le processus qui génère les données. L'AIC ne fournit pas un test de modèle dans le sens d'une hypothèse nulle, c'est-à-dire que ce test ne dit rien de la qualité absolue du modèle. Il ne rendrait ainsi pas compte du fait que tous les modèles candidats ne produisent pas de bons ajustements.

Nous avons utilisé le logiciel statistique R pour la modélisation.

1.2.1. Sinistres graves :

Le seuil retenu pour considérer un sinistre comme étant grave est de deux millions.

Scénario sans excédent de plein :

Comme présenté avant, les sinistres graves suivent une loi GPD de paramètre :

$$x_i = 0,6474193 \quad \text{et} \quad \beta = 2291676$$

La loi GPD peut être approximé par une Pareto de paramètre $\alpha = \frac{1}{x_i} = 1,54$

Scénario avec excédent de plein de 30 millions:

De même, les sinistres graves suivent une loi de Pareto de paramètre $\alpha = \frac{1}{0,718699812} = 1,39$

1.2.2. Sinistres attritionnels :

Tous les sinistres au-dessous de deux millions sont considérés comme sinistres attritionnels.

Pour l'ajustement des charges des sinistres attritionnels, nous avons choisi d'ajuster le ratio S/P avec S le montant du sinistre et P la prime.

Scénario sans excédent de plein :

```
> fitlognorm=fitdistr(A,"lognormal")$estimate
> fitlognorm
      meanlog      sdlog
-4.6314885  0.1759503

> ks.test(A,plnorm,fitlognorm[1],fitlognorm[2])

      One-sample Kolmogorov-Smirnov test

data:  A
D = 0.1944, p-value = 0.8
alternative hypothesis: two-sided
```

Figure 15 : Test de Kolmogorov-Smirnov de la loi lognormale

Sous R, nous avons trouvé que la loi lognormale ajuste mieux le ratio S/P. C'est ce que confirme la p-value qui est supérieure à 5%.

Scénario avec excédent de plein de 30 millions:

```
> fitlognorm=fitdistr(A,"lognormal")$estimate
> fitlognorm
      meanlog      sdlog
-4.233894  0.176519

> ks.test(A,plnorm,fitlognorm[1],fitlognorm[2])

      One-sample Kolmogorov-Smirnov test

data:  A
D = 0.2386, p-value = 0.4856
alternative hypothesis: two-sided
```

Figure 16 : Test de Kolmogorov-Smirnov de la loi lognormale

Le p-value est supérieure à 5%, nous pouvons confirmer que le ratio S/P suit une loi lognormale.

I.3. Modélisation de la fréquence des sinistres

I.3.1. Sinistres graves

Scénario sans excédent de plein :

```
> ks.test(A,rpois(11,lambda=4 ))

Two-sample Kolmogorov-Smirnov test

data: A and rpois(11, lambda = 4)
D = 0.3636, p-value = 0.4611
alternative hypothesis: two-sided

Message d'avis :
In ks.test(A, rpois(11, lambda = 4)) :
 impossible de calculer la p-value exacte avec des ex-aequos
> ks.test(A,rnbinom(11, size=9.4363363, mu=3.9999632 ))

Two-sample Kolmogorov-Smirnov test

data: A and rnbinom(11, size = 9.4363363, mu = 3.9999632)
D = 0.2727, p-value = 0.8079
alternative hypothesis: two-sided

Message d'avis :
In ks.test(A, rnbinom(11, size = 9.4363363, mu = 3.9999632)) :
 impossible de calculer la p-value exacte avec des ex-aequos
> AICp=-fitdistr(A,"poisson")$loglik+1
> AICp
[1] 26.29993
> AICBN=-fitdistr(A,"negative binomial")$loglik+2
> AICBN
[1] 27.04588
```

Figure 17 : Ajustement de la fréquence des sinistres graves sous R

Distribution	Paramètres	test KS	AIC
Poisson	lambda=4	D=0.3636 pvalue=0.4611	26.29993
Binomial négative	size=9.4363363 mu=3.9999632	D=0.2727 pvalue=0.8079	27.04588

Tableau 15 : résultat de la modélisation de la fréquence des sinistres graves

Le test de Kolmogorov-Smirnov montre que les deux distributions sont appropriées pour modéliser la fréquence des sinistres graves, mais la loi de poisson reste la plus convenable puisque elle a le plus petit AIC.

Scénario avec excédent de plein de 30 millions:

```

> ks.test(A,rpois(11,lambda=3 ))

      Two-sample Kolmogorov-Smirnov test

data:  A and rpois(11, lambda = 3)
D = 0.1818, p-value = 0.9934
alternative hypothesis: two-sided

Message d'avis :
In ks.test(A, rpois(11, lambda = 3)) :
  impossible de calculer la p-value exacte avec des ex-aequos
> ks.test(A,rnbinom(11, size=25.9586801 , mu=3.0000001 ))

      Two-sample Kolmogorov-Smirnov test

data:  A and rnbinom(11, size = 25.9586801, mu = 3.0000001)
D = 0.0909, p-value = 1
alternative hypothesis: two-sided

Message d'avis :
In ks.test(A, rnbinom(11, size = 25.9586801, mu = 3.0000001)) :
  impossible de calculer la p-value exacte avec des ex-aequos
> AICp=-fitdistr(A,"poisson")$loglik+1
> AICp
[1] 23.02873
> AICBN=-fitdistr(A,"negative binomial")$loglik+2
> AICBN
[1] 24.00191

```

Figure 18 : Ajustement de la fréquence des sinistres graves nets XP sous R

Distribution	Parametres	test KS	AIC
Poisson	lambda=3	D = 0.1818 pvalue = 0.9934	23.02873
Binomial négative	size=25.9586801 mu=3.0000001	D = 0.0909 pvalue = 1	24.00191

Tableau 16 : résultat de la modélisation de la fréquence des sinistres graves nets XP

Pour ce scénario, nous retenons la loi de poisson de paramètre 3.

1.3.2. Sinistres attritionnels

Scénario sans excédent de plein :

```
> ks.test(A,rpois(11,lambda= 457.636364 ))

Two-sample Kolmogorov-Smirnov test

data: A and rpois(11, lambda = 457.636364)
D = 0.4545, p-value = 0.2058
alternative hypothesis: two-sided

Message d'avis :
In ks.test(A, rpois(11, lambda = 457.636364)) :
 impossible de calculer la p-value exacte avec des ex-aequos
> ks.test(A,rnbinom(11, size=17.601704 , mu= 457.636364))

Two-sample Kolmogorov-Smirnov test

data: A and rnbinom(11, size = 17.601704, mu = 457.636364)
D = 0.1818, p-value = 0.9971
alternative hypothesis: two-sided

> AICp=-fitdistr(A,"poisson")$loglik+1
> AICp
[1] 197.1677
> AICBN=-fitdistr(A,"negative binomial")$loglik+2
> AICBN
[1] 69.2093
```

Figure 19 : Ajustement de la fréquence des sinistres attritionnels sous R

Distribution	Parametres	test KS	AIC
Poisson	lambda=457.636364	D = 0.4545 pvalue = 0.2058	197.1677
Binomial négative	size=17.601704 mu=457.636364	D = 0.1818 pvalue = 0.9971	69.2093

Tableau 17 : Résultat de la modélisation de la fréquence des sinistres attritionnels

D’après ce tableau, nous pouvons conclure que la loi la plus adéquate pour la modélisation de la fréquence des sinistres attritionnels est la loi binomiale négative puisqu’elle a le plus petit AIC.

Scénario avec excédent de plein de 30 millions:

```

> ks.test(A,rpois(11,lambda= 458.636364 ))

      Two-sample Kolmogorov-Smirnov test

data:  A and rpois(11, lambda = 458.636364)
D = 0.4545, p-value = 0.2058
alternative hypothesis: two-sided

Message d'avis :
In ks.test(A, rpois(11, lambda = 458.636364)) :
 impossible de calculer la p-value exacte avec des ex-aequos
> fitdistr(A,"negative binomial")
      size      mu
17.542922 458.636364
( 7.692731) ( 33.641204)

> ks.test(A,rnbinom(11, size=17.542922 , mu= 458.636364 ))

      Two-sample Kolmogorov-Smirnov test

data:  A and rnbinom(11, size = 17.542922, mu = 458.636364)
D = 0.3636, p-value = 0.4792
alternative hypothesis: two-sided
> AICp=-fitdistr(A,"poisson")$loglik+1
> AICp
[1] 198.0862
> AICBN=-fitdistr(A,"negative binomial")$loglik+2
> AICBN
[1] 69.2498

```

Figure 20 : Ajustement de la fréquence des sinistres attritionnels nets XP sous R

Distribution	Parametres	test KS	AIC
Poisson	lambda=458.636364	D = 0.4545 pvalue = 0.2058	198.0862
Binomial négative	size=17.542922 mu=458.636364	D = 0.3636 pvalue = 0.4792	69.2498

Tableau 18 : Résultat de la modélisation de la fréquence des sinistres attritionnels nets XP

Pour ce scénario, la fréquence des sinistres attritionnels est modélisée par la loi binomiale négative de paramètres size=17,542922 mu=458,636364.

II. Cotation du traité excédent de sinistre

II.1. La méthode Burning Cost

II.1.1. Présentation de la méthode Burning Cost

La méthode Burning Cost est une méthode de cotation généralement utilisée pour coter le traité excédent de sinistre. C'est une méthode de cotation basée sur l'expérience.

Considérons un contrat Pr XS Po (priorité XS portée), et $X_{i,j}$ le montant du i ème sinistre survenu l'année j , et π_j l'assiette de prime de l'année j (i.e. le montant de prime de la branche incendie, perçue par la cédante). On dispose de n années disponibles.

Le montant à la charge du traité XS pour l'année j est :

$$C_j = \sum_{i=1}^{N_j} \min\{P, \max\{X_{i,j} - D, 0\}\}.$$

Le burning cost pur moyen est défini par :

$$BC = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n BC_j \quad \text{où} \quad BC_j = \frac{C_j}{\pi_j}$$

On définit la prime pure correspondante en considérant :

$$\pi = \pi_{\text{estimée}} * BC$$

II.1.2. Application

Nous avons appliqué la méthode Burning Cost pour tarifier le traité excédent de sinistre. Le tableau suivant présente les étapes de calcul et le résultat.

exercice	sinistres projetés	Primes	BC
2005	5 036 140,48	48 070 628,40	10%
2006	2 839 587,06	55 880 895,01	5%
2007	-	52 467 537,87	0%
2008	14 784 643,14	58 437 583,95	25%
2009	917 601,03	63 461 353,69	1%
2010	2 691 787,62	66 011 890,22	4%
2011	22 951 006,79	68 169 963,58	34%
2012	6 488 734,93	69 200 031,96	9%
2013	15 516 811,96	68 963 902,99	22%
2014	10 145 137,28	65 381 745,58	16%
2015	17 891 730,79	67 529 026,97	26%
Total	99 263 181,08	683 574 560,22	
Taux BC pur	14,50%		
taux de chargement	25%		
taux chargé	19%		

Tableau 19 : Résultat de la méthode Burning Cost

Le taux Burning Cost pur est de 14.5% et le taux Burning Cost chargé est de 19%.

II.2. Méthode de Simulation :

II.2.1. Principe de simulation :

Dans le but de mettre en œuvre la méthode de simulation nous rappelons que si F est la fonction de répartition d'une loi continue sur \mathbb{R} , et si X est une variable aléatoire réelle de fonction de répartition F , alors :

$Y=F(X)$ suit une loi uniforme continue sur $[0,1]$.

Donc pour simuler une valeur de X , il suffit de simuler un nombre entre 0 et 1, puis d'inverser la fonction de répartition afin d'obtenir la réalisation associée.

On utilise donc un générateur de nombres aléatoires pour simuler les nombres dans $[0,1]$. Cela correspond en fait à des simulations de $F(X)$ avec F fonction de répartition de la variable aléatoire dont on cherche à simuler un échantillon.

Comme par hypothèse nous avons la loi de la variable aléatoire réelle, il suffit d'inverser la fonction de répartition pour obtenir une réalisation. Par la suite $E(X)$ est donné par l'estimateur classique :

$$E(X) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i \quad \text{avec } N : \text{ nombre de simulations}$$

A partir des modèles des lois statistiques concernant le coût et la fréquence des grands sinistres et le S/P des petits sinistres, nous avons pu simuler N années et obtenir la charge des grands sinistres, la charge des petits sinistres et par la suite la charge totale.

II.2.2. Procédure de génération :

1ère étape :

Nous avons simulé la fréquence des sinistres de 10 000 années par la loi de poisson en utilisant un code VBA qui est présenté en détails dans l'annexe 2.

2ème étape :

Soit N_i le nombre de grands sinistres simulés au cours de l'année i . Pour chaque année i , nous avons simulé N_i charges des grands sinistres (qui dépassent 2 million Dh) sous VBA, nous avons utilisé la loi de Pareto (voir annexe2).

3ème étape :

Pour générer les petits sinistres nous avons simulé 10 000 fois le S/P des petits sinistres en utilisant un code VBA de simulation de la loi lognormale, nous avons multiplié ces S/P par l'assiette de primes simulée, afin d'obtenir la charge de petits sinistres. Le code VBA est en détails dans l'annexe.

II.3. La méthode probabiliste :

II.3.1. Principe de la méthode probabiliste :

Nous cherchons la cotation du traité excédent de sinistre p XS f (p la priorité, f la franchise).

Nous notons :

Y : le montant de sinistre individuel à la charge du réassureur XS.

N : la fréquence annuelle des sinistres à la charge du réassureur.

La méthode de tarification probabiliste consiste à modéliser en premier lieu les montants des sinistres individuels à la charge du réassureur et leur fréquence annuelle. Après la modélisation, il faut calculer la prime pure pour déduire ensuite le taux de prime.

La prime pure correspond à l'espérance mathématique de la fréquence des sinistres à la charge du réassureur multiplié par l'espérance mathématique des sinistres individuels à la charge du réassureur XS.

La prime pure = $E(N) \cdot E(Y)$

Le taux de prime probabiliste = $\frac{\text{Prime pure}}{\text{Chiffre d'affaire}}$

II.3.2. Application :

Nous avons modélisé la loi de la charge du réassureur excédent de sinistre par une loi log-normal de paramètre :

Moyenne	14,29936475	Ecart type	1,08230569
---------	-------------	------------	------------

Tableau 20 : Paramètre de la loi lognormale

La fréquence des sinistres à la charge du réassureur XS est modélisée par une loi de poisson de paramètre 3.

Prime pure = $E(N) \cdot E(Y) = 8\,742\,177,33$

Taux de prime probabiliste pur = 13%

Taux chargé = 16%

III. L'application de cotation excédent de sinistre : Tarification XS

Cette application a été conçue pour l'automatisation des trois méthodes de simulation présentées ci-dessus.

L'avantage de cette application est son autonomie par rapport aux autres logiciels statistiques utilisés pour la modélisation tels que SAS ou R. L'application se charge de la modélisation des charges et de la fréquence, pour donner les taux de prime selon les trois méthodes.

Dans le menu d'accueil, l'utilisateur a le choix entre quatre options :

Un bouton « Base de données » qui mène à la feuille où s'effectue l'insertion des données.

Un bouton « Simulation » qui mène à la feuille où s'effectue la tarification par simulation.

Un bouton « Probabiliste » qui mène à la feuille où s'effectue la tarification probabiliste.

Un bouton « Burning Cost » qui mène à la feuille où s'effectue la tarification Burning Cost.

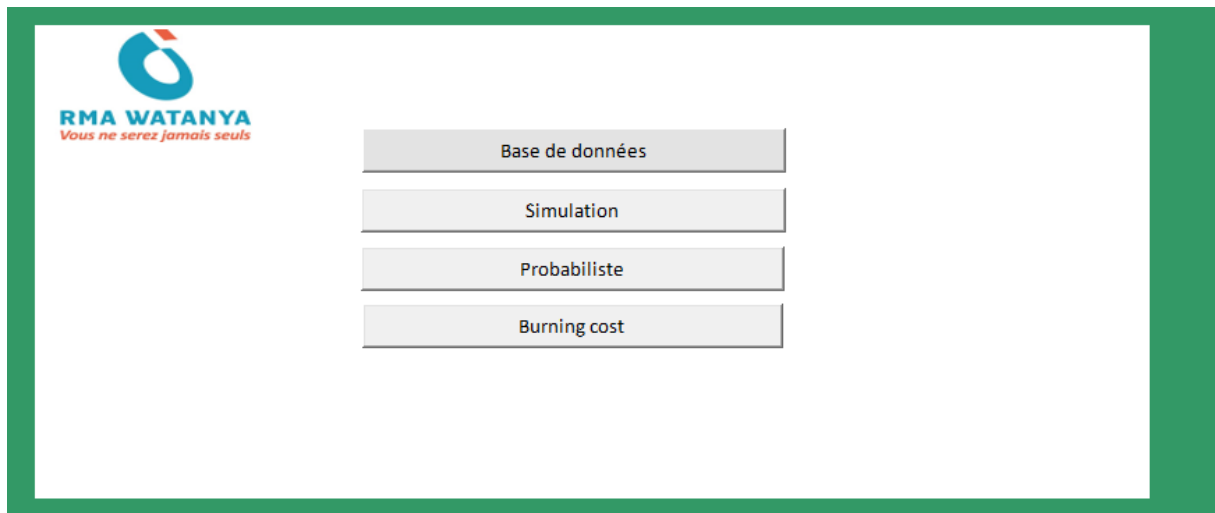


Figure 21 : Interface de l'application VBA

III.1. Etape 1 : Insertion des données :

L'introduction des données se fait en deux étapes :

- Les données nécessaires pour le fonctionnement de l'application « Tarification XS » simulation et probabiliste sont les montants à la charge de l'assureur par police nets de l'excédent de plein si ce traité existe et l'exercice de garantie qui correspond à chaque police.

Pour simplifier cette phase et faciliter l'introduction des données l'utilisateur se contentera d'entrer les charges supérieures à 1 million de Dhs.

exercice garantie	charge net xp
2006	1 200 964,00
2014	4 959 382,78
2005	1 633 499,00
2005	1 317 003,20
2011	2 716 682,76
2014	5 057 378,80
2008	1 556 500,00
2010	2 130 912,00

Figure 22 : Exemple de l'insertion des données (1^{ère} étape)

- Il faut introduite les charges totales nettes XP, les primes nettes XP correspondantes à chaque exercice de garantie sous la forme suivante :

exercice garantie	charges totales net xp	prime (net xp)
2005	18312324,35	48089452,35
2006	19762243,05	55883876,97
2007	6066987,834	52467537,87
2008	29923664,28	58439846,39
2009	9869637,805	63462624,85
2010	32138273,08	66011890,22
2011	46569914,57	68170673,84
2012	33190666,67	69204224,44

Figure 23 : Exemple de l'insertion des données (2^{ième} étape)

III.2. Etape2 : Choix de la méthode de tarification :

Dans chaque feuille de calcul les données en jaune sont les données à introduire, les données en orange sont les résultats communiqués par l'application tarification « XS ».

III.2.1. Simulation :

L'ajustement des fréquences des sinistres graves par une loi de poisson. Le paramètre poisson est la moyenne des nombres de sinistres par année d'exercice.

Le code VBA se trouve dans l'annexe4.

◆ Modélisation charge sinistres attritionnels :

L'ajustement du ratio S/P (sinistres/Primes) par une loi log-normale.

Nous avons utilisé le théorème suivant pour l'estimation : En théorie des probabilités et statistique, une variable aléatoire X est dite suivre une loi log-normale de paramètres μ et σ^2 si la variable $Y=\ln(X)$ suit une loi normale d'espérance μ et de variance σ^2 .

Le code VBA se trouve dans l'annexe4.

◆ Simulation

Nous simulons 10 000 scénarios représentant 10 000 exercices de garantie.

Le calcul du taux de prime se fait comme présenté dans la théorie de la méthode simulation.

III.2.2. **Probabiliste :**

assiette prime net xp	69 649 262,00	taux de chargement	20%
priorité	2 000 000		
portée	28 000 000		
parametre lognorm	14,29936475	param lognorm	1,08230569
parametre poisson	3		
Prime pur	8 742 177,33		
taux de prime	13%		
taux chargé	16%		
taux de prime		Retour à l'Accueil	

Figure 25 : Interface de calcul et résultat de la méthode probabiliste

1) Les données :

Pour trouver le taux de prime par la méthode probabiliste, il faut introduire les caractéristiques du traité : le seuil et la portée, le montant de l'assiette prime et le taux de chargement. Le taux de prime est calculé dans la cellule en rouge.

2) Etapes de calcul :

- ◆ Modélisation de la charge réassureur XS
L'ajustement de la charge réassureur par une loi lognormal.

- ◆ Modélisation de la fréquence
L'ajustement de la fréquence des sinistres à la charge du réassureur par une loi poisson.

- ◆ Calcul de la prime pure
Le code VBA est présenté dans l'annexe5.

- ◆ Calcul du taux de prime
Le code VBA est présenté dans l'annexe 5.

III.2.3. Burning Cost :

Chapitre III : Optimisation des traités de réassurance incendie

I. Optimisation du critère excédent de plein : Critère espérance-variance.

I.1. Critère espérance variance :

Le critère espérance-variance est un critère appliquée dans la théorie des portefeuilles. L'idée est que les investisseurs choisissent de façon optimale les portefeuilles efficients en minimisant le risque, mesuré par la variance, pour un niveau de rendement espéré.

Nous avons adapté ce critère pour notre besoin en optimisation du traité excédent de plein. Notre but est de trouver le plein optimal qui va garantir une variance du résultat annuel minimal pour un niveau de rendement fixé. La résolution du programme se base sur la base de données.

I.2. Formulation :

L'excédent de plein est un traité de réassurance proportionnelle. Il est caractérisé par le plein de rétention et le plein de souscription.

Le taux de cession dépend du capital assuré, Il change donc d'une police à une autre. T_{ij} le taux de cession a comme formule

$$T_{ij} = \min\left(\max\left(\frac{C_{ij} - \text{Plein de rétention}}{C_i}, 0\right), \text{Plein de souscription}\right)$$

	MIN Variance (Résultat net de réassurance)
SC	
	Espérance (résultat net) ≥ 12000000
Avec	
	Résultat net $j = \text{somme } ((1 - T_{ij}) * (P_{ij} - Y_{ij}))$
	$P_{ij} = \text{Prime de la police } i \text{ de l'exercice garantie } j$
	$Y_{ij} = \text{Le montant de sinistre de la police } i \text{ de l'exercice garantie } j$

Nous avons utilisé la formule statistique de la variance :

Si la série statistique est de moyenne m et prend les valeurs x_1, x_2, \dots, x_n , sa variance est :

$$V(X) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - m)^2$$

Pour l'espérance, nous l'avons assimilé à la moyenne des résultats.

La formulation devient donc :

Min variance (Résultat net de réassurance) = $\frac{1}{11} \sum_{j=1}^{11} (\text{Résultat net } j - \text{moyenne}(\text{Résultat net}))^2$

Avec Résultat net $i = \sum_{j=1}^n (1 - T_{ij}) * (P_{ij} - Y_{ij})$

i = la police i

SC

Moyenne (Résultat net) > 12000000

I.3. Résolution :

I.3.1. Codage sous AMPL :

1) Contexte :

Nous avons eu recours à AMPL car en essayant de faire la résolution avec le solveur Excel, nous avons fait face à la contrainte de la taille de la base de données. Le solveur Excel fournit des solutions locales qui varient selon la valeur initiale communiquée. En plus de la contrainte de la taille de la base de données, Le solveur Excel prend beaucoup de temps pour donner les résultats et peut bloquer à tout moment.

2) AMPL :

AMPL, acronyme pour « A Mathematical Programming Language », est un langage de modélisation et résolution algébrique et mathématique. Il permet la résolution des problèmes d'optimisation avec un grand nombre de variables et de contraintes, Le langage a été développé par Robert Fourer, Davide Gay et Bria Kernohan aux laboratoires Bell. AMPL intègre un grand nombre de solveurs (CEPLEX, MINOS, GUROBI...) dans ses deux versions libre et commerciale et également une panoplie de solveurs triée par type de problèmes est disponible sur Internet (NEOS solvers). Les problèmes sont fournis au logiciel sous deux formes ; l'une pour la modélisation sur un fichier d'extension « .mod » et l'autre pour les données de

résolution sur un fichier d'extension « .dat ». Il est possible également d'ajouter plusieurs spécifications sur un fichier d'extension « .run ».

Un avantage particulier de l'AMPL est la similarité de sa syntaxe avec les notations canoniques des problèmes d'optimisation. Cela permet une définition très concise et lisible des domaines de variable, des contraintes et de la fonction objective, sans oublier la performance de l'outil dans le domaine des problèmes non linéaires.

3) La résolution

Le modèle implémenté sous AMPL est de la forme suivante :

```
var P1 ;
param n;
param k;
param c{ i in 1..n,j in 1..k};

param p{i in 1..n,j in 1..k};

param Y{ i in 1..n,j in 1..k};

#Objectif function

minimize resultat_net:

    1/11*(sum{ j in 1..k}(sum{ i in 1..n}((1-(max((c[i,j]-P1)/c[i,j],0)))*(p[i,j]-Y[i,j])))
    -1/11*sum{j in 1..k}(sum{ i in 1..n}(1-(max((c[i,j]-P1)/c[i,j],0))*(p[i,j]-Y[i,j]))))^2;

#Constraints

subject to moyenne :

(1/11*sum{j in 1..k}(sum{ i in 1..n}(1-((c[i,j]-P1)/c[i,j]))*(p[i,j]-Y[i,j])))-20000000) >= 0;
```

Figure 27 : Modèle codé sous AMPL

1.3.2. Données utilisées :

Nous avons sélectionné les polices dont le capital est supérieur à 20 millions. Nous estimons que les polices qui ont un capital supérieur à 20 millions vont être à la charge de l'assureur avec un taux de rétention de 100%.

1.3.3. Résolution :

Sous AMPL, nous introduisons le modèle, les données et nous demandons la résolution. AMPL fait appel au solveur MINOS.

```
ampl: model model3.mod;
ampl: data capital20.dat;
ampl: solve;_
```

Figure 28 : Instruction soumise à AMPL

Résultat :

```
ampl: model model3.mod;
ampl: data capital20.dat;
ampl: solve;
MINOS 5.51: optimal solution found.
0 iterations, objective 1.676459593e+15
Nonlin evals: obj = 3, grad = 2.
ampl: display P1;
P1 = 29080500

ampl:
```

Figure 29 : Résultats de l'optimisation

Les résultats de la résolution pour différents espérance de résultat

Espérance résultat	Plein optimal
12 000 000	29 080 500
15 000 000	36 350 600
20 000 000	48 467 500
25 000 000	60 584 400

Tableau 21 : Optimisation XP pour différents scénarios

II. Optimisation du critère excédent de sinistre : Critère RORAC.

II.1. Critère RORAC :

Notons par S la sinistralité du portefeuille, $E[S]$ la charge moyenne de sinistre nette de réassurance et P la prime chargée. Comme les assurés échangent le risque d'assurance contre le paiement d'une prime d'assurance, ils ne souhaitent pas devoir subir l'éventuel défaut de l'assureur. Ce défaut peut survenir parce que l'assureur a sous-tarifé ses risques, ou bien parce qu'un évènement exceptionnel survient cette année-là. Pour éviter de transformer le risque d'assurance transféré à l'assureur en un risque de crédit (lorsque l'assureur fait défaut), l'assuré exige que l'assureur détienne un matelas financier qui sera utilisé en cas de forte déviation de la sinistralité par rapport à la sinistralité attendue. Ce matelas financier est le capital économique; il est fourni par les investisseurs.

En pratique, le NSR (Niveau de Solvabilité Requis) que doit atteindre l'assureur est fixé par un régulateur (une agence de notation ou une autorité de contrôle). Ce niveau de solvabilité doit tenir compte des spécificités du portefeuille de l'assureur. Il devrait théoriquement résulter d'un calcul basé sur un modèle de risque interne à la compagnie. Souvent, le niveau de solvabilité requis est donné sous la forme d'un quantile de la distribution de la sinistralité. On parle dans ce cas-là de Value at Risk, ou VaR. La VaR au niveau 99,5% de S est le montant que doit détenir l'assureur pour pouvoir faire face à ses engagements dans 99,5% des cas. Autrement dit, l'assureur fait défaut une fois tous les deux cents ans. En pratique, il n'est pas possible d'annuler cette probabilité de subir un risque de crédit. En effet, cela signifierait que l'assureur doit détenir un montant égal à la somme de ses engagements. D'une part, ce montant n'est pas disponible sur le marché et d'autre part, comme le capital économique doit être rémunéré, il s'ensuivrait que les primes réclamées par l'assureur seraient démesurées. Mathématiquement, la VaR s'écrit comme suit :

$$\text{VaR}_\alpha(S) = \inf (x/F_S(x) \geq \alpha, 0 < \alpha < 1)$$

Le niveau de solvabilité requis assimilé à la VaR noté (NSR) est un montant qui ne doit pas être mis à disposition uniquement par les investisseurs. En effet, une partie de ce montant est empruntée aux assurés via les primes que ces derniers versent à l'assureur en échange de la promesse d'une indemnisation en cas de sinistre futur. Nous concluons que le montant réellement mis à disposition par les investisseurs, le risk adjusted capital, ou RAC vaut :

$$\text{RAC}(S) = \text{NSR}(S) - P$$

Ce capital doit être rémunéré, ce qui se fait au moyen de la marge obtenue sur les primes d'assurance :

$$P - S. \text{ On définit alors le retour sur le RAC comme : } \frac{P - S}{RAC(S)}$$

Etant donné que S est une variable aléatoire, ce retour est lui-même une variable aléatoire. On en prend la moyenne pour obtenir le Return On Risk Adjusted Capital :

$$RORAC(S) = \frac{P - E(S)}{RAC(S)}$$

REMARQUE : Dans la pratique le RORAC peut être vu comme étant : $\frac{E(\text{PROFIT})}{RAC(S)}$

Le décideur qui est amené à choisir entre deux structures optera pour celle qui présente le RORAC le plus élevé. Nous allons donc apprécier ce critère économique à la suite d'un recours de l'assureur à la réassurance. Plusieurs traités en excédent de plein et en excédent de sinistre seront analysés.

II.2. Application :

Pour appliquer le critère RORAC à l'optimisation du traité XS, nous avons besoin de déterminer les scénarios, de calculer les taux de primes, l'espérance des charges et la Value at Risk correspondante à la branche incendie.

Les scénarios proposés sont les suivants :

Scénarios	Priorité
S0	1100000
S1	2000000
S2	3000000
S3	4000000
S4	5000000
S5	6000000

Tableau 22 : Les différents scénarios proposés pour l'optimisation du traité XS

A l'aide de l'application tarification XS, nous avons calculé les taux de primes correspondants à chaque scénario

Scénarios	Priorité	Taux de prime	Primes retenues nettes XS
S0	1100000	23,52%	49 055 869,94
S1	2000000	15,69%	54 081 465,99
S2	3000000	9,28%	58 190 356,57
S3	4000000	7,36%	59 422 438,09

S4	5000000	5,92%	60 347 714,46
S5	6000000	4,75%	61 093 641,21

Tableau 23 : Calcul du taux de prime relatif à chaque scénario

Pour calculer l'espérance de charge nette XS à la charge du réassureur, nous avons divisé le portefeuille en deux, Les charges nettes XS inférieur à 1000000 et les charges nettes XS supérieur à un million.

Nous avons modélisé le coût moyen annuel des charges inférieures à 1 million par une normale.

La fréquence des charges est modélisée par une loi de poisson.

Les charges XS supérieures à un million sont modélisées par une Pareto.

Scénarios	priorité	Moyenne charge nettes XS <1M	Ecart type charge nettes XS <1M	Paramètre poisson charge nettes XS<1M	Paramètre Pareto	Paramètre poisson charge > 1M
S0	1100000	29352,25	9785,556	457	11,57154327	5
S1	2000000	29352,25	9785,556	457	1,841555375	5
S2	3000000	29352,25	9785,556	457	1,30978561	5
S3	4000000	29352,25	9785,556	457	1,168283585	5
S4	5000000	29352,25	9785,556	457	1,115382005	5
S5	6000000	29352,25	9785,556	457	1,086484843	5

Tableau 24 : Les paramètres des lois selon le scénario

Les paramètres de la charge nette XS<1M ne changent pas car les scénarios n'ont effet que sur les charges supérieurs à la priorité.

Nous avons ensuite calculé l'espérance des charges

Scénarios	Priorité	E(S)
S0	1100000	15 922 602,34
S1	2000000	21 391 014,17
S2	3000000	31 589 828,99
S3	4000000	45 161 385,64
S4	5000000	58 783 948,17
S5	6000000	73 263 233,08

Tableau 25 : Calcul de l'espérance des charges relative à chaque scénario

A l'aide d'un algorithme implémenté sous VBA annexe2, nous avons calculé la Value at risk de la branche incendie:

VaR
230 628 380,85

Tableau 26 : la valeur de la VaR

Finalement, nous avons calculé le RORAC :

Scénarios	Priorité	Primes nettes XS	E(S)	Var	RORAC
S0	1100000	49 055 869,94	15 922 602,34	230 628 380,85	18%
S1	2000000	54 081 465,99	21 391 014,17	230 628 380,85	19%
S2	3000000	58 190 356,57	31 589 828,99	230 628 380,85	15%
S3	4000000	59 422 438,09	45 161 385,64	230 628 380,85	8%
S4	5000000	60 347 714,46	58 783 948,17	230 628 380,85	1%
S5	6000000	61 093 641,21	73 263 233,08	230 628 380,85	-7%

Tableau 27 : Priorité optimale

Nous remarquons aisément l'augmentation du RAROC qui atteint son maximum avec une priorité égale 2 millions Dès lors il commence à baisser. La priorité optimale retenue est donc 2 Millions.

Chapitre V : Le traité STOP LOSS et AGGREGATE LOSS

I. Contexte :

Durant les dernières années, le réassureur excédent de plein a réalisé des résultats négatifs. Pour limiter les pertes du réassureur XP afin qu'il continue à réassurer le portefeuille Incendie au sein de RMA Watanya, nous avons proposé de couvrir le traité excédent de plein par un traité Stop Loss ou un traité Aggregate Loss.

II. Le traité Stop Loss :

II.1. Présentation Traité Stop Loss :

Le traité en excédent de pourcentage de perte annuelle Stop Loss prévoit l'intervention du réassureur lorsque la charge annuelle globale de sinistres (sur une branche donnée) dépasse un seuil déterminé : ce seuil est défini comme un niveau de S/P .Ces traités ont également une portée limitée (S/P « maximum »).

Dans notre cas nous avons utilisé le traité Stop Loss lorsque le S/P du réassureur excédent de plein dépasse un certain seuil.

Ainsi, pour un traité Stop Loss U% XLT%, les cessions et rétentions sont :

Risque	Risque total	Risque conservé	Risque cédé
Primes	$P = \sum_{i=1}^n P_i$	$(1-Q)P$	QP
Sinistres	$S = \sum_{i=1}^n S_i$	$\text{Min}(S, TP) + (S - TP - UP)^+$	$\text{Min}(S - TP)^+, UP$

Tableau 28 : Stop Loss

L'avantage du Stop Loss provient du fait que les traités de réassurance sont en général souscrits avant que le chiffre d'affaires de l'exercice ne soit connu. Ce mécanisme d'indexation permet d'obtenir des portées et priorités adaptées au volume d'affaire.

II.2. Simulation :

Les scénarios proposés sont comme suit :

Scénarios	Rétention	Limite
S0	Sans limite	-
S1	120%	20%
S2	120%	50%
S3	130%	20%
S4	130%	50%
S5	140%	20%
S6	140%	50%
S7	150%	20%
S8	150%	50%

Tableau 29 : Les différents scénarios proposés pour le traité SL

Pour chaque scénario, nous avons calculé le résultat réassureur XP, le résultat réassureur Stop Loss et le résultat assureur. Le tableau suivant montre les résultats obtenus.

Scénarios	Résultat Assureur Net XP	Commissions	Résultat Réassureur XP	Taux de prime Stop Loss	Résultat réassureur Stop Loss
S0	58383815	11112457	-1100086	0%	-
S1	54171944	11112457	2686507	6%	425278
S2	54036684	11112457	2686507	10%	560538
S3	55348955	11112457	1673135	4%	261639
S4	55256745	11112457	1673135	7.6%	353849
S5	56160705	11112457	1018501	2.8%	104523
S6	56068495	11112457	1018501	6.4%	196733
S7	56666632	11112457	555623	5.1%	130320
S8	56597786	11112457	61473	5.1%	130320

Tableau 30 : Evolution du résultat assureur net XP, réassureur XP et réassureur SL

Les graphiques suivant montrent l'impact du traité Stop Loss sur le résultat de l'assureur net XP et le résultat du réassureur XP.

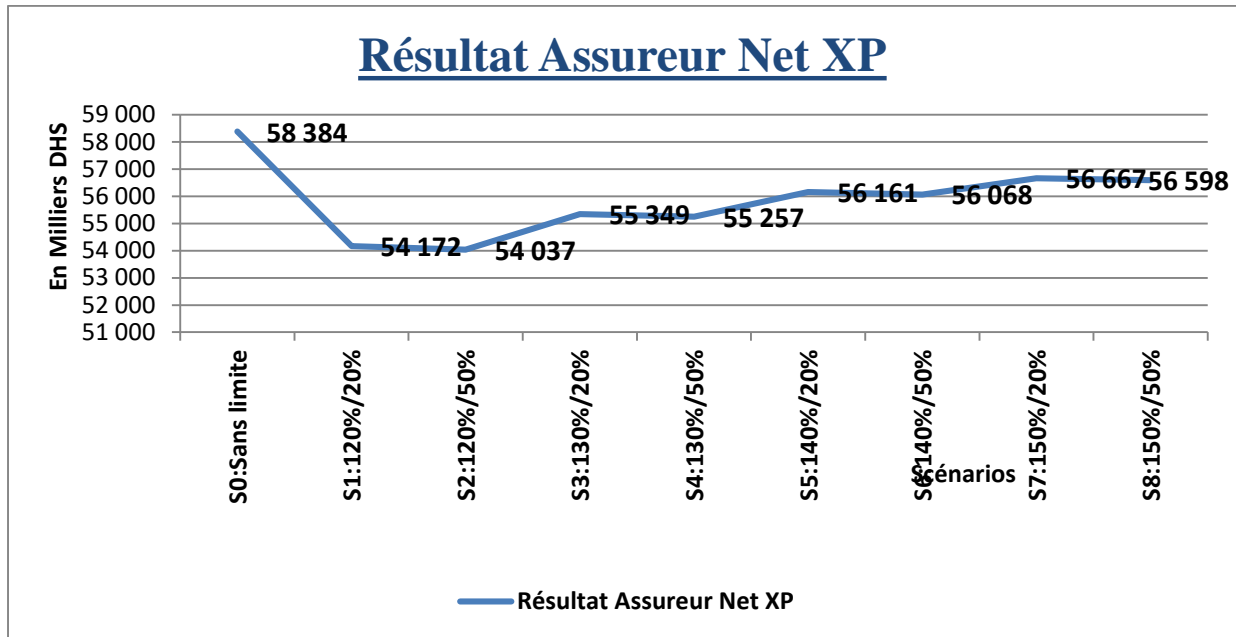


Figure 30 : Evolution du résultat assureur net XP selon les différents scénarios

Nous remarquons que le scénario qui maximise le résultat de l'assureur est le scénario S7 avec une rétention de 150% et une limite de 20%.

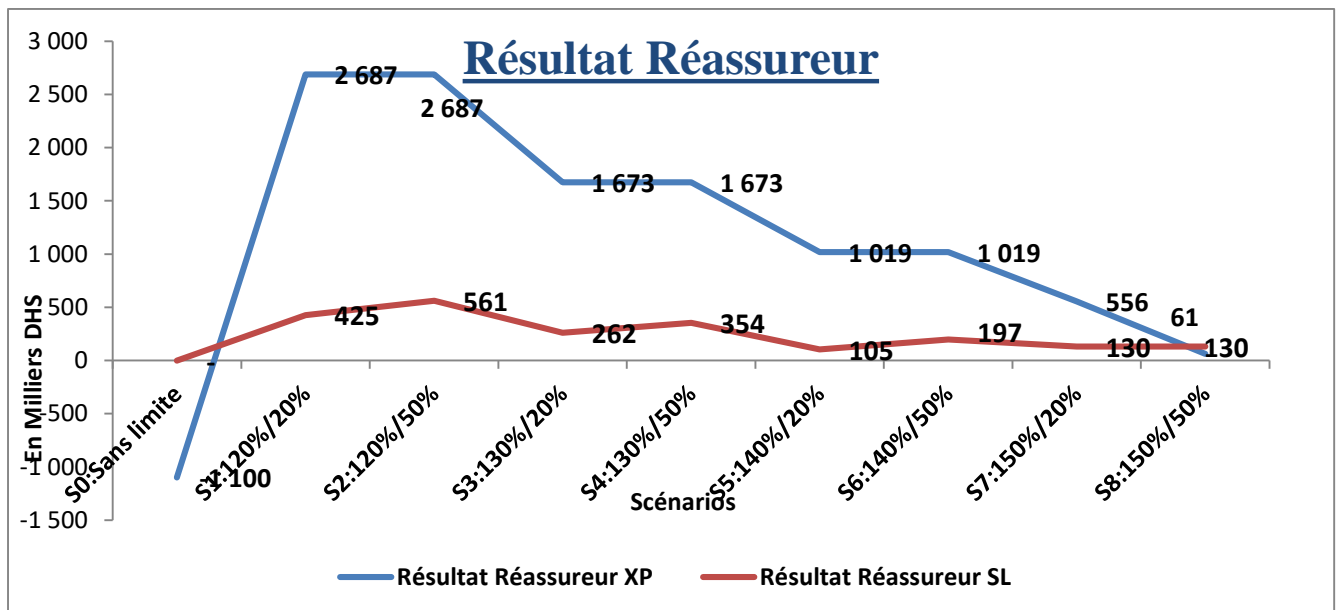


Figure 31 : Evolution du résultat réassureur XP et du résultat réassureur SL selon les scénarios

Nous remarquons que les scénarios qui maximisent le résultat du réassureur XP sont les scénarios S1 et S2.

Le scénario qui maximise le résultat du réassureur SL est le scénario S2.

Conclusion :

Notre objectif étant de minimiser la perte supportée par le réassureur excédent de plein tout en gardant un résultat optimal pour l'assureur, nous considérons que le scénario S7 est le plus adéquat car il garantit à la fois un résultat maximal pour l'assureur et limite les pertes de l'assureur excédent de plein.

scénario	Rétention/limite	Résultat assureur net XP	Résultat réassureur XP	Résultat réassureur SL
S7	150%/20%	56666632	555623	130320

Tableau 31 : Scénario optimal

III. Le traité Aggregate Loss

III.1. Présentation Traité Aggregate Loss :

L'aggregate Loss est identique au Stop Loss, à la seule différence que portée et priorité ne sont pas exprimées en pourcentages des primes brutes, mais en numéraires.

Ainsi, les cessions et rétention pour un U X ST agrégé sont :

Risque	Risque total	Risque conservé	Risque cédé
Primes	$P = \sum_{i=1}^n P_i$	$(1-Q)P$	QP
Sinistres	$S = \sum_{i=1}^n S_i$	$\text{Min}(S, T) + (S-T-U)^+$	$\text{Min}((S-T)^+, U)$

Tableau 32 : Aggregate Loss

Naturellement, l'Aggregate Loss peut ne couvrir qu'une ou plusieurs branches de la compagnie.

III.2. Simulation :

Les scénarios proposés sont les suivants :

Scénarios	Rétention	Limite annuelle
S0	Sans	-
S1	30M	40M
S2	30M	70M
S3	40M	30M
S4	40M	60M
S5	50M	20M
S6	50M	50M
S7	60M	20M
S8	60M	40M
S9	70M	20M
S10	70M	30M
S11	80M	10M
S12	80M	20M

Tableau 33 : Les différents scénarios proposés pour l'Aggregate Loss

Pour chaque scénario, nous avons calculé le résultat réassureur XP, le résultat réassureur Aggregate Loss et le résultat assureur. Le tableau suivant montre les résultats obtenus.

Scénarios	Résultat Assureur Net XP	Commissions	Résultat Réassureur XP	Taux de prime Aggregate Loss	Résultat réassureur Aggregate Loss
S0	58 383 815	11112457	-1100086	0%	-
S1	50174074	11112457	5651816	9.6%	1457839
S2	48859163	11112457	6801504	11.2%	1623062
S3	53646142	11112457	2924543	5.5%	713043
S4	52331232	11112457	4074231	7.1%	878266
S5	55992853	11112457	972569	2.8%	318307
S6	54677942	11112457	2122257	4.3%	483530
S7	56304341	11112457	718096	2.4%	261292
S8	56029167	11112457	958693	2.8%	295869
S9	57068905	11112457	49602	1.5%	165223
S10	57068905	11112457	49602	1.5%	165223
S11	58108642	11112457	-859489	0.3%	34576
S12	58108642	11112457	-859489	0.3%	34576

Tableau 34 : Evolution du résultat assureur net XP, résultat réassureur XP et résultat réassureur Aggregate Loss

Les graphiques suivants montrent l'impact du traité Aggregate Loss sur le résultat de l'assureur net XP et le résultat du réassureur XP.

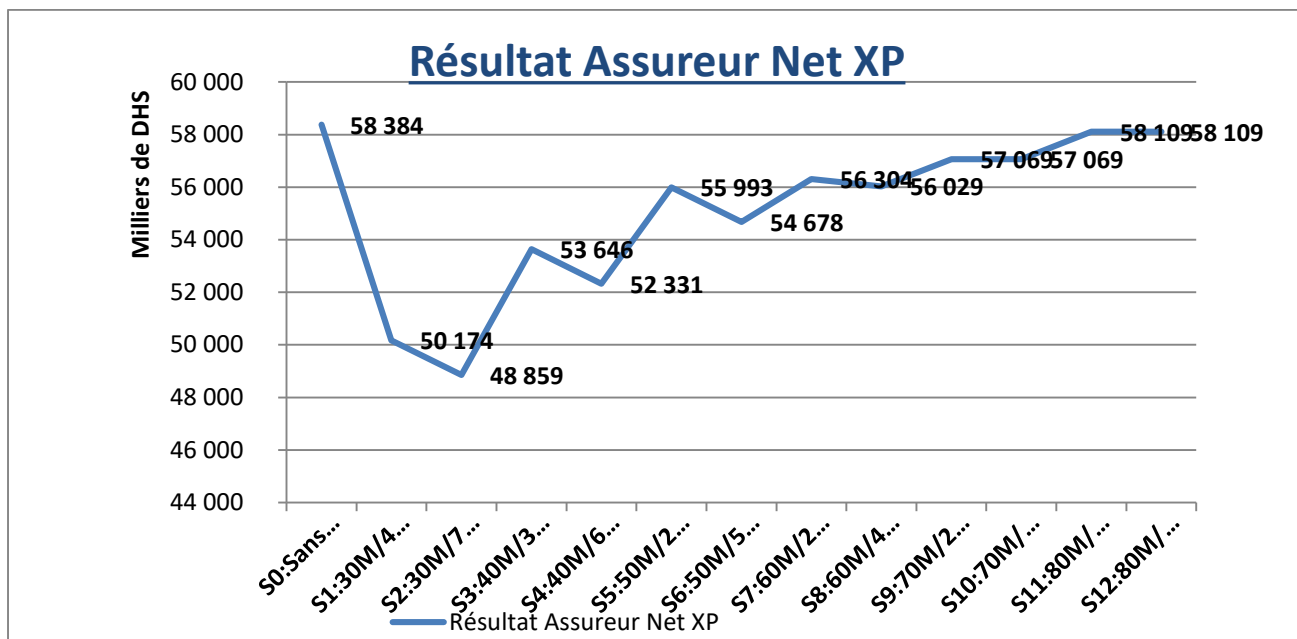


Figure 32 : Evolution du résultat assureur net XP selon les scénarios

Nous remarquons que les scénarios qui maximise le résultat de l'assureur sont les scénarios S11 et S12.

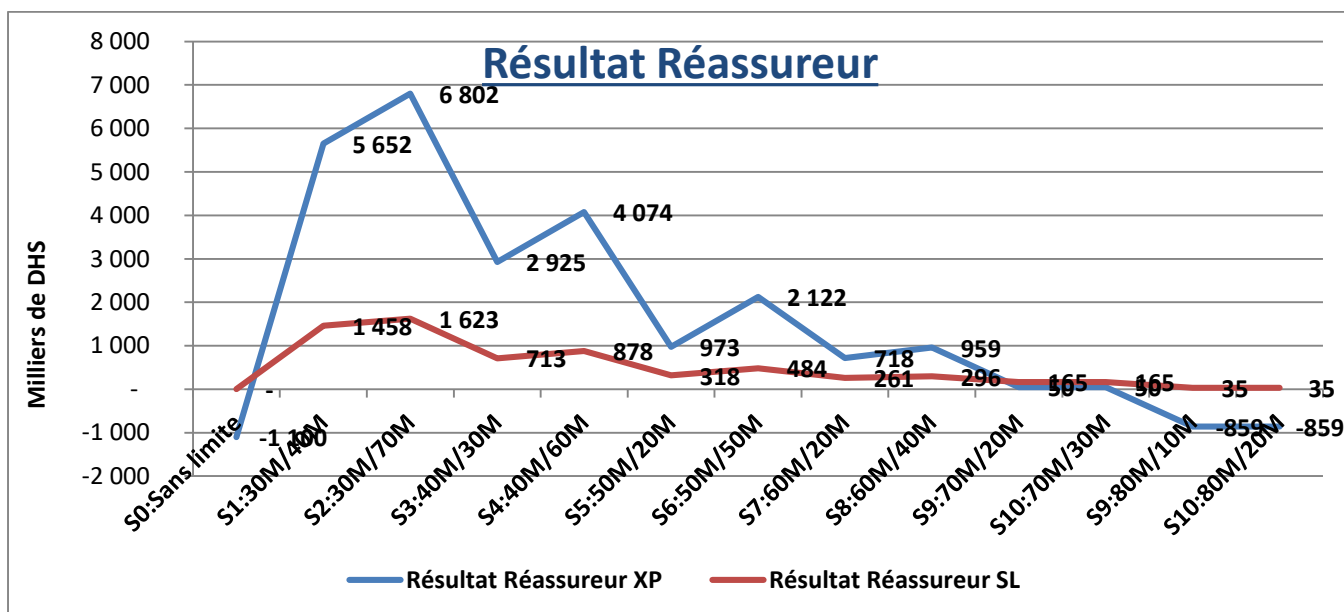


Figure 33 : Evolution du résultat réassureur XP et SL selon les scénarios

Nous remarquons que le scénario qui maximise le résultat réassureur XP est le scénario S2.

Le scénario qui maximise le résultat réassureur Aggregate Loss est le scénario S2.

Conclusion :

Notre objectif étant de minimiser la perte supportée par le réassureur excédent de plein tout en gardant un résultat optimal pour l'assureur, nous considérons que le scénario S8 est le plus adéquat car à la fois il garantit un résultat maximal pour l'assureur et limite les pertes de l'assureur excédent de plein.

scénario	Rétention/limite	Résultat assureur net XP	Résultat réassureur XP	Résultat Réassureur Aggregate Loss
S8	60M%/20M	958693	56029167	295869

Tableau 35 : Le scénario optimal

Conclusion

Au terme de notre travail, nous avons pu atteindre les objectifs que nous nous sommes fixés au début. Nous avons pu assimiler le fonctionnement des traités de réassurance adoptés au sein de RMA Watanya. Nous avons pu manipuler une base de données large sous SAS tout en surmontant les difficultés que nous avons rencontrées lors du traitement, notamment lors du transfert des données vers Excel ou R. Le problème de la taille de la base de données a été aussi un facteur important pour le choix de la méthode d'optimisation et nous a poussé à explorer d'autres logiciels de programmation non linéaire. Notre objectif était aussi de pouvoir appliquer nos connaissances théoriques en les combinant avec les techniques de programmation pour pouvoir faire la conception d'un outil de tarification indépendant des autres logiciels statistiques. Nous estimons que grâce à la diversification des cours présentés à l'INSEA et à la coexistence de plusieurs filières, nous avons pu combiner les méthodes de programmation non linéaire, les méthodes de programmation informatique, les critères financiers et les techniques actuarielles pour réaliser notre projet de fin d'études.

Les résultats que nous avons trouvés sont en concordance avec la stratégie de réassurance adaptée par RMA Watanya. Notre travail a facilité le processus d'étude de nouveaux traités de réassurance. L'application Tarification XS permet de trouver le taux de prime facilement pour différents scénarios et déterminer le traité le plus convenable.

Notre travail peut être développé par la suite en cherchant d'autres critères d'optimisation et en appliquant ces résultats sur les différentes branches de RMA Watanya.

Bibliographie

FONDEMENTS DE LA THÉORIE DES VALEURS EXTRÊMES, SES PRINCIPALES APPLICATIONS ET SON APPORT À LA GESTION DES RISQUES DU MARCHÉ PÉTROLIER, Bechir RAGGAD, Math. Sci. hum / Mathematics and Social Sciences (47e année, n° 186, 2009(2), p. 29-63)

CHARPENTIER, A. DENUIT, M. (2004). Mathématiques de l'assurance non-vie - Tome 1 : Principes fondamentaux de théorie du risque. Paris, ECONOMICA.

Rapport Selectis consulting. Analyse du traité de réassurance de la branche incendie AL Watanya. Document du 13 septembre 2002.

Présentation Journées techniques de la SCR Première édition. Thème1 Techniques de la réassurance. Jeudi 21 novembre 2013.

Présentation Journées techniques de la SCR Première édition. Thème2 La réassurance non proportionnelle. Jeudi 21 novembre 2013.

Présentation Journées techniques de la SCR Première édition. Thème3 Tarification des traités XS. Jeudi 21 novembre 2013.

Présentation Journées techniques de la SCR Première édition. Thème4 Les clauses de la réassurance. Jeudi 21 novembre 2013.

Optimal Reinsurance Programs An optimal Combination of several Reinsurance Protections on an heterogeneous Insurance Portfolio Robert Verlaak & Jan Beirlant Aon Re Belgium & K.U. Leuven IME 2002.

Tarification des traités en excédent de sinistres de la branche Responsabilité Civile : une approche entre expérience et exposition El Madhi Belhoudji.

Adéquation des fonds propres et de la police et de la politique de réassurance dans les sociétés d'assurance vie. Pierre Laversanne.

Méthodes de Monte Carlo appliquées au pricing d'options et à la gestion des risques multiples. Cours ENSAI 3^{ème} année.

Setting optimal reinsurance retentions. Swiss RE. Hans Shmitter, 2001.

Exposure Rating. Swiss RE. Daniel Guggisberg, 2000.

Mise en place d'un programme de réassurance. TRUST RE. JUIN 2014

Langage SAS, ENSAE, AXELLE CHAUVET-PEYRARD, année scolaire 2011-2012.

Théorie du risque et réassurance, Griselda DEELSTRA Guillaume PLANTIN.

Webographie

<https://www.rmawatanya.ma>

https://fr.wikipedia.org/wiki/Test_de_Kolmogorov-Smirnov

https://fr.wikipedia.org/wiki/Crit%C3%A8re_d%27information_d%27Akaike

https://www.scor.com/images/stories/pdf/library/actuarial-prize/2005_France_PierreVende.pdf

<https://www.ampl.com/>

<https://ampl.com/products/solvers/>

<https://www.ampl.com/resources/the-ampl-book/>

www.lsta.upmc.fr/Lejeune/SAS_Lejeune.pdf

www.sas.developpez.com/cours/

[http://www.ressourcesactuarielles.net/EXT/IA/sitebfa.nsf/0/1CC753F3E5B65371C1257E20005A89C5/\\$FILE/28_Article3.pdf?OpenElement](http://www.ressourcesactuarielles.net/EXT/IA/sitebfa.nsf/0/1CC753F3E5B65371C1257E20005A89C5/$FILE/28_Article3.pdf?OpenElement)

<http://www.univ-paris1.fr/diplomes/m2-ingenierie-du-risque-finance-et-assurances-irfa/programme/risque-et-assurance/reassurance/>

https://en.wikipedia.org/wiki/Generalized_Pareto_distribution

<http://www.investopedia.com/terms/b/burning-cost-ratio.asp>

Annexes :

Annexe 1 :

Test de Kolmogorov Smirnov de la GPD pour les montants qui dépassent le seuil :

```
hill(A)
```

```
lar=subset(A,A>=2000000)
```

```
gpd(lar,2000000)
```

```
ks.test(lar,rgpd(length(lar),xi=6.474193e-01, beta=2.291676e+06 , mu=2000000))
```

Annexe 2 :

Code de génération des fréquences des grands sinistres :

```
Public Function RandomPoisson(lambda As Double)
```

```
Dim l, k, p
```

```
l = Exp(-lambda)
```

```
k = 0
```

```
p = 1
```

```
Do
```

```
    k = k + 1
```

```
    p = p * Rnd()
```

```
Loop While p > l
```

```
RandomPoisson = k - 1
```

```
End Function
```

```
Public Function Simulation(pOne As Double)
```

```
Worksheets("Feuil1").Activate
```

```
Dim arr() As Variant, oRange As Range
```

```
Set oRange = Range(Cells(6, 1), Cells(10006, 1))
```

```
ReDim arr(6 To 10006, 1 To 1)
```

```
For i = 6 To 10006
```

```
arr(i, 1) = RandomPoisson(pOne)
```

```
Next i
```

```
oRange = arr
```

```
End Function
```

Code de génération des charges des grands sinistres par la loi de Pareto:

```
Public Function Simulationpa(pOne As Double, pTwo As Double)
```

```
Worksheets("Feuil1").Activate
```

```
Dim arr() As Variant, oRange As Range, h As Double
```

```
Set oRange = Range(Cells(6, 6), Cells(100006, 41))
```

```
ReDim arr(6 To 10006, 6 To 41)
```

```
For i = 6 To 10006
```

```
h = Cells(i, 1).Value
```

```
For j = 6 To h + 5
```

```
k = pOne * (1 - Rnd()) ^ (-1 / pTwo)
```

```
arr(i, j) = WorksheetFunction.min(k, Cells(1, 4))
```

```
arr(i, 40) = arr(i, 40) + arr(i, j)
```

```
arr(i, 41) = arr(i, 41) + WorksheetFunction.min((k - Cells(1, 2)), Cells(2, 2))
```

```
Next j
```

```
Next i
```

```
oRange = arr
```

```
End Function
```

Code de génération des S/P des petits sinistres par la loi lognormale :

```
Public Function Simulationln(pOne As Double, pTwo As Double)
```

```
Worksheets("sp").Activate
```

```
Dim arr() As Variant, oRange As Range
```

```
Set oRange = Range(Cells(6, 1), Cells(10006, 1))
```

```

ReDim arr(6 To 10006, 1 To 1)

    For i = 6 To 10006

        arr(i, 1) = WorksheetFunction.LogNorm_Inv(Rnd, pOne, pTwo)

    Next i

    oRange = arr

End Function

```

Annexe 3 :

Code pour le calcul de la VaR :

```

Public Function VaRisk(lambda1, lambda2, pOne, pTwo, m, s)

Dim a(1000), b(1000), c, sinistre_att(1000), sinistre_graves(1000), sinistres_tot(1000), var(5)

For k = 1 To 5

For t = 1 To 1000

c = WorksheetFunction.Binom_Inv(10000, (lambda1 / 10000), Rnd())

d = WorksheetFunction.Binom_Inv(10000, (lambda2 / 10000), Rnd())

For j = 1 To c

a(j) = (pOne * ((1 - Rnd()) ^ (-1 / pTwo)))

Next j

For i = 1 To d

b(i) = WorksheetFunction.NormInv(Rnd, m, s)

Next i

sinistre_att(t) = WorksheetFunction.Sum(b)

sinistre_graves(t) = WorksheetFunction.Sum(a)

sinistres_tot(t) = sinistre_att(t) + sinistre_graves(t)

Next t

var(k) = WorksheetFunction.Percentile(sinistres_tot, 0.95)

Next k

VaRisk = WorksheetFunction.Average(var)

```

End Function

Annexe4 :

Code pour l'estimation du paramètre Pareto:

```
Public Function parametrepareto(seuil As Double)

Worksheets("Feuil4").Activate

Dim charge_sup(1000), nbr(1000), lncharge(1000), sommec, sommen

Dim Taille As Long

With Sheets("Feuil4")

    Taille = .Cells(.Rows.Count, 1).End(xlUp).Row

End With

For i = 2 To Taille

    If Cells(i, 2).Value > seuil Then

        charge_sup(i) = Cells(i, 2).Value

        nbr(i) = 1

        lncharge(i) = WorksheetFunction.Ln((charge_sup(i) / seuil))

        Cells(i, 3) = charge_sup(i)

        Cells(i, 4) = nbr(i)

        Cells(i, 5) = lncharge(i)

    Else

        charge_sup(i) = 0

        lncharge(i) = 0

        nbr(i) = 0

    End If

    sommec = sommec + lncharge(i)

    sommen = sommen + nbr(i)

Next i
```

parametrepareto = sommen / sommec

End Function

Code pour l'estimation du paramètre Poisson:

```
Public Function parametrepoisson()
```

```
Worksheets("Feuil4").Activate
```

```
Max = Application.WorksheetFunction.Max(Range("a2:a" & Range("a65530").End(xlUp).Row))
```

```
min = Application.WorksheetFunction.min(Range("a2:a" & Range("a65530").End(xlUp).Row))
```

```
Dim tot(40), s, j
```

```
j = min
```

```
s = 1
```

```
interv = Max - min + 1
```

```
While (j <= Max) And (s <= interv)
```

```
For t = 2 To 55
```

```
  If Cells(t, 1).Value = j Then
```

```
    SOMME = SOMME + Cells(t, 4)
```

```
  End If
```

```
  Next t
```

```
  tot(s) = SOMME
```

```
  'Cells(s, 6) = somme
```

```
  SOMME = 0
```

```
  j = j + 1
```

```
  s = s + 1
```

```
Wend
```

```
  parametrepoisson = WorksheetFunction.Average(tot)
```

```
End Function
```

Code pour l'estimation du paramètre log normale:

```

Public Function parametrelognorm()

Worksheets("Feuil4").Activate

Max = Application.WorksheetFunction.Max(Range("a2:a" & Range("a65530").End(xlUp).Row))
min = Application.WorksheetFunction.min(Range("a2:a" & Range("a65530").End(xlUp).Row))

Dim tot(40), s, j, param(40), chargr(40), chargeattr(40)

j = min
s = 1
interv = Max - min + 1
While (j <= Max) And (s <= interv)

For t = 2 To 55
If Cells(t, 1).Value = j Then
SOMME = SOMME + Cells(t, 3)
End If
Next t
tot(s) = SOMME
Cells(s + 1, 10) = SOMME
Cells(s + 1, 11) = Cells(s + 1, 8) - Cells(s + 1, 10)
Cells(s + 1, 12) = Cells(s + 1, 11) / Cells(s + 1, 9)
Cells(s + 1, 13) = WorksheetFunction.Ln(Cells(s + 1, 12))

param(s) = Cells(s + 1, 13)

SOMME = 0
j = j + 1
s = s + 1
Wend

Worksheets("Feuil2").Activate

Cells(5, 3) = WorksheetFunction.Average(param)

```

```

Cells(6, 3) = WorksheetFunction.StDev(param)
End Function

Public Function effacer()

Worksheets("Feuil4").Activate

Worksheets("Feuil4").Range(Cells(2, 3), Cells(1000, 5)).Clear

End Function

```

Annexe 5 :

Code pour l'estimation du paramètre log normale:

```

Public Function parametrelognormprob(seuil As Double)

Worksheets("Feuil4").Activate

Dim j, charge_sup(1000), nbr(1000), lncharge(1000), sommec, sommen, charge_reass(1000),
lncharge_reass(1000), lncharge_reassparam(1000)

Dim Taille As Long

With Sheets("Feuil4")

    Taille = .Cells(.Rows.Count, 1).End(xlUp).Row

End With

For i = 2 To Taille

    If Cells(i, 2).Value > seuil Then

        charge_sup(i) = Cells(i, 2).Value

        nbr(i) = 1

        charge_reass(i) = charge_sup(i) - seuil

        lncharge_reass(i) = WorksheetFunction.Ln(charge_reass(i))

Cells(i, 3) = charge_sup(i)

Cells(i, 4) = nbr(i)

Cells(i, 5) = lncharge(i)

Cells(i, 6) = charge_reass(i)

Else

```

```

    charge_sup(i) = 0
    Incharge(i) = 0
    charge_reass(i) = 0
    nbr(i) = 0
    Incharge_reass(i) = 0
End If
Next i
For i = 2 To Taille
    If Cells(i, 6) > 0 Then
        Incharge_reassparam(j) = WorksheetFunction.Ln(charge_reass(i))
        j = j + 1
    End If
Next i
    Worksheets("Feuil5").Activate
    Cells(5, 3) = WorksheetFunction.Average(Incharge_reassparam)
    Cells(5, 5) = WorksheetFunction.StDev(Incharge_reassparam)
End Function

```

Code pour l'estimation du paramètre de la loi poisson :

```

Public Function parametrepoissonprob()
Worksheets("Feuil4").Activate
Max = Application.WorksheetFunction.Max(Range("a2:a" & Range("a65530").End(xlUp).Row))
min = Application.WorksheetFunction.min(Range("a2:a" & Range("a65530").End(xlUp).Row))

Dim tot(40), s, j
j = min
s = 1
interv = Max - min + 1
While (j <= Max) And (s <= interv)

```

```

For t = 2 To 55
  If Cells(t, 1).Value = j Then
    If Cells(t, 6) > 0 Then
      SOMME = SOMME + 1
    End If
  End If
Next t
tot(s) = SOMME
'Cells(s, 6) = somme
SOMME = 0
j = j + 1
s = s + 1
Wend
parametrepoissonprob = WorksheetFunction.Average(tot)

```

End Function

Code de calcul de la prime pure :

```

Public Function primepur(moyenne As Double, ecart As Double, parampoisson As Double)
  Dim espercharge, esperfreq
  espercharge = Exp(moyenne + (ecart * ecart) / 2)
  esperfreq = parampoisson
  primepur = espercharge * esperfreq

```

End Function

Code de calcul du taux

```

Public Function taux(primepur As Double, CA As Double)
  taux = primepur / CA

```

End Function

Public Function tauxcharge(taux As Double, tauxdech As Double)

tauxcharge = taux / (1 - tauxdech)

End Function

Annexe 6 :

Code de calcul du taux BC :

Public Function BC(ch, p)

BC = ch / p

End Function

Public Function BCcharge(BC, taux)

BCcharge = BC / (1 - taux)

End Function

