



المندوبية السامية للتخطيط  
HAUT-COMMISSARIAT AU PLAN

ROYAUME DU MAROC

\*.\*.\*.\*.\*

HAUT COMMISSARIAT AU PLAN

\*.\*.\*.\*.\*

INSTITUT NATIONAL  
DE STATISTIQUE ET D'ECONOMIE APPLIQUEE



INSEA

Projet de Fin d'Etudes

\*\*\*\*\*

**Evaluation Economique des Provisions pour  
Sinistres à Payer sous le référentiel Solvency II.**

Préparé par : M.ZAKI Yassine

Sous la direction de : *M.OULIDI Abderrahim* (INSEA)  
*M.FTOUHI Achraf* (SANAD)

*Soutenu publiquement comme exigence partielle en vue de l'obtention du*

**Diplôme d'Ingénieur d'Etat**

**Option : Actuariat-Finance.**

*Devant le jury composé de :*

*M.OULIDI Abderrahim* (INSEA)  
*M.DOGHMI Ahmed* (INSEA)  
*M.FTOUHI Achraf* (SANAD)

N°31

Juin 2014



## Résumé

La solvabilité d'une compagnie d'assurance traduit sa capacité à honorer ses engagements face aux tiers et principalement face aux assurés. Cette aptitude peut être mesurée par la détermination d'un capital de solvabilité qui sera exploité pour remédier à des évolutions de sinistralité défavorables. La réglementation actuelle, labellisée « Solvabilité I » propose aux assureurs d'évaluer prudemment leur passif et de détenir des actifs sûrs et liquides. Seulement, les assureurs constatent une faible représentation des risques réellement supportés par rapport aux prescriptions de Solvabilité I étant donné que ces directives ne concernent que les risques de souscription et négligent tout autre risque supporté par l'assureur.

A la différence des actifs, disposant d'un marché d'échange permettant la valorisation au prix du marché, le passif est illiquide, il est indispensable de déterminer des niveaux de provisions en « Best Estimate » avec des marges de risque adéquates. Les nouvelles normes de Solvabilité insistent sur la nécessité d'employer de nouvelles méthodes d'évaluation du passif d'assurance, mais aussi introduisent la notion de « Risk Margin » ou Marge de risque, elle est définie en complément du Best Estimate pour permettre de qualifier l'ensemble de « la valeur de marché ».

En outre, le nouveau référentiel de solvabilité insiste sur la dimension stochastique dans le calcul des provisions techniques, en effet celle-ci est indispensable dans l'évaluation du risque vu qu'elle permet à l'assureur de prévoir les scénarios les plus catastrophiques et faire ainsi des provisions en adéquation avec ses données.

## Mots clés :

Provision Best Estimate, Marge de Risque, Solvabilité II, GLM, Valorisation des passifs, Bootstrap.

## Dédicace

*Je dédie ce travail,*

*À notre amie Meriam, que Dieu puisse t'accueillir en sa sainte  
Miséricorde.*

*À ma tendre mère pour m'avoir éclairé le chemin et pour toutes ses  
prières.*

*À mon très cher père, pour son amour, son soutien moral et tout  
simplement pour avoir été là pour moi dans mes moments de joie et  
d'échec. Tu resteras toujours mon meilleur exemple dans la vie.*

*À mon cher frère Omar et à ma tendre sœur Zeineb pour tout le soutien  
et l'amour qu'ils me portent.*

*À mon amie Sarra, pour son amitié et ses encouragements, Merci d'avoir  
toujours été là pour moi.*

*Et à tous mes amis avec qui j'ai partagé les plus beaux moments de ma  
vie.*

*ZAKI Yassine.*

## Remerciements

*En premier lieu, je tiens à remercier mon cher maître de stage M. Achraf FTOUHI pour l'écoute et la disponibilité dont il a fait preuve, ainsi que l'inspiration, l'aide et les conseils fructueux qu'il m'a prodigués tout au long de la réalisation de ce modeste travail.*

*Je tiens à exprimer ma vive gratitude à mon cher professeur et encadrant Mr Abderrahim OULIDI, je lui témoignerai d'une profonde reconnaissance pour ses directives précieuses, conseils et compétence dont il a fait preuve tout au long de mon stage de fin d'études.*

*Mes remerciements s'adressent à Mr Nour Eddine EL KABABI et Mlle Halima BENDARAG, qui ont su partager leurs savoir-faire et qui malgré leurs occupations extrêmes, ont pu m'accorder des moments d'échange précieux.*

*Je ne saurai terminer ces remerciements sans rendre grâce à l'ensemble du personnel de SANAD Assurance, en particulier Mlle MOUSSADDAK Meriem, Mr FATTY Abdelhakim et Mlle TAIBI Nisrine qui ont fait preuve d'une grande hospitalité et amabilité.*

*Ma sincère reconnaissance va à tous ceux qui, de près ou de loin, ont contribué à l'aboutissement et au bon déroulement de ce modeste travail.*

## *Table des matières*

Résumé.....	3
Dédicace.....	4
Remerciements.....	5
Table des matières.....	6
Liste des abréviations.....	9
Liste des tableaux.....	10
Liste des figures.....	12
Introduction générale.....	13
Partie I : Sur les normes de Solvency II.....	15
Introduction.....	16
Chapitre II : Les nouvelles normes de Solvabilité : Présentation et Rappels.....	17
II.1 De Solvency I à Solvency II.....	17
II.1.1 Imperfection des normes de Solvency I.....	17
II.1.2 Pourquoi Solvency II ? .....	18
II.2 Les grands principes de Solvency II.....	18
II.3 Les 3 piliers de solvency II.....	19
II.3.1 Normes quantitatives de calcul des provisions techniques et des fonds propres.....	19
II.3.2 Normes qualitatives de suivi des risques en interne.....	19
II.3.3 Introduire une discipline de marché.....	20
II.4 Pilier I : Provisions techniques et besoins en capital.....	20
II.4.1 Estimation des provisions techniques.....	20
II.4.2 Estimation des besoins en capital.....	20
II.5 Caractère illiquide du passif d'assurance.....	21
II.6 Imperfection de la valorisation des actifs et passifs d'assurance par la méthode de la « juste valeur ».....	23
Chapitre III : Exemple d'autres normes de solvabilité.....	23
III.1 Le Système Américain : Le Risk Based Capital (RBC).....	23
III.2 Le Système Suisse : Le Swiss Solvency Test.....	24
Conclusion.....	25

PARTIE II : Modélisation Non Stochastique des provisions pour sinistres à payer.....	26
Introduction .....	27
Chapitre II : Etude de la base de données des Sinistres payés et Calcul de la provision réglementaire .....	28
II.1 Etude de la base de données. ....	28
II.1.1 Présentation de la base de données. ....	28
II.1.2 Analyse du tableau de règlements.....	30
II.2 Calcul des Provisions règlementaires pour Sinistres A Payer. ....	34
II.2.1 Aperçu sur les textes de lois. ....	34
II.2.2 Application de la méthode règlementaire. ....	35
Chapitre III : Application des méthodes déterministes dans le calcul des provisions pour sinistres à payer.....	38
III.1 Méthode Chain Ladder Standard. ....	38
III.1.1 Description de la méthode de Chain Ladder.....	38
III.1.2 Calcul de la réserve globale avec le modèle Chain Ladder Standard. ....	40
III.2 Correction du modèle de Chain Ladder. ....	40
III.2.1 Calcul de la réserve de Chain Ladder corrigée. ....	40
III.2.2 Analyse des résultats et vérification des hypothèses. ....	41
III.3 Modèle de London Chain. ....	45
III.4 Introduction à la méthode de London Pivot. ....	47
III.5 Lissage des coefficients de passage. ....	48
III.5.1 Choix de la distribution. ....	48
III.5.2 Projection des coefficients de Chain Ladder. ....	49
III.6 Méthode De Vylder. ....	50
Conclusion.....	52
Partie III : Calcul Stochastique des Provisions pour Sinistres A Payer.....	53
Introduction.....	54
Chapitre II : Méthodes stochastiques de calcul des Provisions Pour Sinistres A Payer..	55
II.1 Modèle de Mack. ....	55
II.1.1 Présentation du modèle. ....	55
II.1.2 Concept d'Erreur quadratique moyenne. ....	56
II.1.3 Construction des intervalles de confiance. ....	57
II.1.4 Comparaison des deux distributions. ....	59
II.1.5 Vérification des hypothèses de Mack. ....	60
II.1.6 Correction du biais du modèle de Mack. ....	61
II.2 Calcul des provisions par la méthode GLM. ....	63
II.2.1 Présentation des modèles linéaires généralisés. ....	63
II.2.2 Formalisme mathématique. ....	63

II.2.3	Modèle de Poisson.	64
II.2.4	Ajustement des règlements non cumulés.	66
II.3	Technique du Bootstrap.	74
II.3.1	Présentation de la technique.	74
II.3.2	Principe du Bootstrap et hypothèse de base.	74
II.3.3	Application du Bootstrap aux données.	74
Chapitre III : Choix du modèle optimal et calcul de la marge de risque.		79
III.1	Comparaison des méthodes utilisées.	79
III.1.1	Récapitulatif sur les modèles utilisées.	79
III.1.2	Chiffres et résultats des méthodes utilisées.	80
III.2	Choix de la méthode de provisionnement et de la marge de de risque.	81
III.2.1	Critères de choix du Best Estimate.	81
III.2.2	Application de la méthode de sélection du Best Estimate.	82
III.2.3	Calcul de la marge de risque.	83
Conclusion.		88
Annexe A : Présentation de l'Organisme.		89
Annexe B : Nuages de points des années de développement $j=2 \dots 7$ .		95
Annexe C : Principe du QQ-Plot.		98
Annexe D : Principe et calcul de la distance K-S.		99
Annexe E : Autour de l'AIC.		100
Annexe F : Tableau des écarts prédits et enregistrés.		102
Annexe G : Sur la Value At Risk et la Tail Value at Risk.		103

## *Liste des abréviations*

AIC	: Akaike Information Criterion.
BIC	: Bayesian Information Criterion.
CDG	: Caisse de Dépôt et de Gestion.
CEIOPS	: Committee of European Insurance and Occupational Pension Supervisors
DAPS	: Direction des Assurances et de la Prévoyance Sociale.
GLM	: Generalized Linear Models.
IAS	: International Accounting Standards .
IBNR	: Incurred But Not Reported.
IFRS	: International Financial Reporting Standards.
MCR	: Minimum Capital Requirement.
RBC	: Risk Based Capital.
RC	: Responsabilité Civile.
SAP	: Sinistres à Payer.
SCR	: Solvency Capital Requirement.
SP	: Sinistres Payés.
SST	: Swiss Solvency Test.
VaR	: Value At Risk.
TVaR	: Tail Value At Risk.

## Liste des tableaux

Tableau 1 : Cumul des règlements enregistrés par année de survenance et année de règlement.....	29
Tableau 2 : Cumul des sinistres enregistrés par année de survenance et année de déclaration.....	29
Tableau 3 : Coût moyen par année de survenance. ....	29
Tableau 4 : Règlements enregistrés par année de survenance et année de déroulement.	30
Tableau 5 : Règlements cumulés enregistrés par année de survenance et année de déroulement. ....	30
Tableau 6 : Facteurs de développement individuels. ....	33
Tableau 7 : Statistiques descriptives sur les facteurs individuels. ....	33
Tableau 8 : Estimation des sinistres survenus mai non déclarés. ....	36
Tableau 9 : Calcul des réserves complémentaires selon la méthode du Coût Moyen....	36
Tableau 10 : Calcul des réserves complémentaires selon la méthode des cadences....	37
Tableau 11 : Tableau explicatif de la méthode de Chain Ladder. ....	38
Tableau 12 : Tableau des règlements prédits par le modèle Chain Ladder.....	39
Tableau 13 : Réserve Globale sous le modèle Chain Ladder. ....	40
Tableau 14 : Réserve Globale sous le modèle Chain Ladder.Corrigé.....	41
Tableau 15 : Médianes des coefficients par année de développement.....	43
Tableau 16 : Test d'indépendant entre les années de survenance. ....	43
Tableau 17 :Estimation des paramètres de régression $C_{i,j+1} = f(C_{i,j})$ .....	46
Tableau 18 : Réserve Globale sous le modèle London Chain. ....	47
Tableau 19 :Coefficients de Chain Ladder ajustés. ....	50
Tableau 20 : Réserves de Chain Ladder ajustés. ....	50
Tableau 21 : Tableau des $\beta$ .....	51
Tableau 22 : Tableau des $\alpha$ . ....	51
Tableau 23 : Réserve calculée par la méthode de De Vylder. ....	52
Tableau 24 : Erreur quadratique moyenne selon l'année de survenance.....	57
Tableau 25 : Intervalles de confiance avec loi normale. ....	58
Tableau 26 : Intervalles de confiance avec loi LogNormale. ....	59

Tableau 27 : Calculs de $\widehat{\epsilon}_h$ et $\widehat{\sigma}_h$ du biais de Mack .	62
Tableau 28: Comparaison entre le modèle initial et le modèle corrigé de Chain Ladder	62
Tableau 29 : Estimation des paramètres dans la distribution de Poisson.....	65
Tableau 30 : Test de Kolmogorov-Smirnov de la distribution Gamma.....	68
Tableau 31 : Test de Kolmogorov-Smirnov de la distribution Normale.....	68
Tableau 32 : Test de Kolmogorov-Smirnov de la distribution LogNormale.....	68
Tableau 33 : Comparaison de la Statistique de l'AIC. ....	68
Tableau 34 : Paramètres de la loi Gamma. ....	72
Tableau 35 : Règlements prédits par le modèle Gamma. ....	73
Tableau 36 : Réserves prédites par le modèle Gamma. ....	73
Tableau 37 : Tableau récapitulatif des règlements non cumulés par année de survenance et année de développement. ....	73
Tableau 38 : Tableau récapitulatif des résidus de Pearson par année de survenance et année de développement. ....	76
Tableau 39 : Exemple d'une redistribution avec remise des résidus.....	76
Tableau 40 : Exemple de règlements non cumulés avec la distribution Gamma.....	76
Tableau 41 : Exemple de provisions simulées.....	77
Tableau 42 : Bootstrap sur les provisions sous le modèle Gamma.....	77
Tableau 43 : Statistiques descriptives obtenues avec le Bootstrap.....	78
Tableau 44 : Tableau récapitulatif des méthodes utilisées. ....	80
Tableau 45 : Récapitulatif des résultats des méthodes utilisées. ....	80
Tableau 46 : Tableau comparatif du modèle de Chain Ladder Standard et Chain Ladder Ajusté.....	82
Tableau 47 : Somme carrée des écarts des dernières années. ....	82
Tableau 48 : Récapitulatif des résultats du modèle GLM. ....	83
Tableau 49 : Test de Kolmogorov-Smirnov pour la loi Normale, Gamma et LogNormale. ....	98
Tableau 50 : Comparaison entre les règlements prédits et les règlements enregistrés pour différents modèles. ....	10

## Liste des figures

Figure 1 : Les trois piliers de Solvabilité I. ....	19
Figure 2 : Bilan d'une compagnie d'assurance sous le référentiel Solvabilité 2.....	21
Figure 3 : Règlements non cumulés par année de survenance. ....	31
Figure 4: Règlements cumulés par année de survenance. ....	32
Figure 5 : Nuage de points de l'année de développement $j=1$ . ....	45
Figure 6 : Lissage des coefficients de passage. ....	49
Figure 7 : Comparaison en les intervalles de confiance de la distribution Normale et LogNormale. ....	60
Figure 8 : Vérification des hypothèses 2 et 3 de Mack pour l'année de développement $j=1$ . ....	61
Figure 9 : QQ Plot de la distribution Gamma.....	66
Figure 10 : QQ Plot de la distribution Normale.....	67
Figure 11 : QQ Plot de la distribution LogNormale.....	67
Figure 12 : Histogramme de la distribution des réserves Bootstrapées avec le modèle Gamma.....	78
Figure 13 : Schéma explicatif de la méthode des diagonales.....	81
Figure 14 : Organigramme de SANAD Assurance.....	89
Figure 15 : Evolution du chiffres d'affaires de SANAD.....	92
Figure 16 : Répartition du portefeuille de SANAD.....	93
Figure 17 : Nuage de points de $C_{i,j+1} = f(C_{i,j})$ de l'année de développement $j=2$ à l'année $j=9$ .....	96

## *Introduction Générale*

L'activité d'un assureur se distingue par rapport aux entreprises traditionnelles par son cycle de production inversé, en effet, l'assuré verse une prime en échange d'un service conditionné par la réalisation d'un risque, d'une autre manière, le contrat d'assurance est un transfert du risque liant l'assuré à la compagnie, l'objectif pour une compagnie d'assurance étant de mutualiser le risque tout en maintenant sa capacité à honorer ses engagements.

Etant inconnus, la société d'assurance se doit de constituer des provisions techniques destinées à couvrir les engagements contractés, ces provisions techniques représentent une fraction très importante du passif d'une compagnie et revêtent un caractère spécial dans le bilan de l'assureur, c'est pour cela que le nouveau référentiel de solvabilité attire l'attention des assureurs sur l'importance de l'évaluation correcte de ce poste. Les nouvelles normes de solvabilité imposent ainsi aux compagnies d'assurance d'évaluer leurs engagements en « Best Estimate », meilleur estimateur des provisions.

Le présent projet aura pour fin ultime, le calcul des provisions pour sinistres à payer de la Compagnie d'Assurance et de réassurance SANAD afin de chercher une concordance entre les prescriptions de ce nouveau référentiel et les provisions comptables de la compagnie, ensuite, il sera question de trouver une marge de risque pour la méthode choisie et ce dans le but de compléter ce Best Estimate et trouver une juste valeur des provisions techniques.

Pour parvenir à cette fin, nous essayerons de présenter différentes méthodes de provisionnement et tenterons d'expliquer au mieux la logique de la construction de chaque modèle, nous commencerons dans un premier temps avec diverses méthodes déterministes fondées sur les éléments du triangle de liquidation, le résultat est une valeur ponctuelle qui varie selon le modèle choisi, nous nous intéresserons

particulièrement à la méthode de Chain Ladder, méthode de référence en provisionnement et jugerons de son pouvoir prédictif en testant la véracité des hypothèses liées au modèle, ensuite, nous verrons des variantes de cette méthode qui parient à l'insuffisance inhérente à ce modèle, notamment le modèle de London Chain ou celui de De Vylder. Néanmoins, les méthodes déterministes se caractérisent par leur simplicité d'implantation mais ne permettent pas de mesurer l'incertitude associée à la prévision.

Le recours aux modèles stochastiques devient impératif dans les nouvelles normes car il permet de cadrer les réserves prédites entre les bornes d'un intervalle de confiance, l'approche stochastique est complète dans le sens où celle-ci permet d'obtenir des informations sur la distribution de la réserve. Chaque méthode stochastique présente un certain nombre d'avantages et se distingue par des hypothèses particulières. Le modèle de Mack, n'est tout autre que la version stochastique du modèle de base Chain Ladder, les modèles GLM, quant à eux, permettent de décrire les règlements à prédire sous un angle paramétrique, permettant au passage, de retrouver les informations incorporées dans les lois de distributions, et enfin, le Bootstrap qui se couple aux différentes méthodes et permet de s'affranchir des difficultés liées aux formules analytiques complexes.

Enfin, nous nous intéresserons au choix du modèle décrivant le mieux possible les données afin de trancher quant au meilleur estimateur des réserves, qui est l'essence même de ce travail et chercherons à trouver une marge de risque, complément au Best Estimate qui est préconisé par les nouvelles directives de Solvabilité.

## Partie I : Sur les normes de Solvabilité II

Cette partie traitera de la nécessité du recours aux nouvelles normes de Solvabilité et des grandes avancées apportées par Solvency II par rapport au système actuel Solvency I.

Un premier chapitre exposera les grandes lignes de Solvency II en traitant au passage quelques reproches qui ont été faites au système actuel et qui ont initié ces nouvelles normes.

Le second chapitre abordera d'autres normes relatives à d'autres pays qui peuvent inspirer les régulateurs et ce dans le but ultime de créer un système international et commun à toutes les compagnies d'assurance.

## Introduction

Une compagnie d'assurance se distingue par rapport à une entreprise traditionnelle par son cycle d'exploitation inversé, l'assuré paie une prime pour être couvert en cas de survenance du sinistre, donc les réserves d'un assureur doivent lui permettre d'honorer ses engagements envers ses assurés, d'où l'importance que revêtent les normes de solvabilité.

Avant de traiter du concept du Best Estimate et de la marge de risque, nous avons jugé nécessaire de présenter le contexte dans lequel cette notion est apparue, Solvency II est le débat actuel au sein des compagnies d'assurances, son introduction devient primordiale vu que la solvabilité des compagnies d'assurance est un thème sensible et stratégique auquel il faut prêter une attention particulière car il s'agit pour l'assureur de respecter ses engagements envers les assurés.

Afin d'être les plus complètes possibles, les consultations menées par la CEIOPS, l'autorité Européenne chargée de la conception et mise en place de cette réforme majeure a regroupé l'ensemble des acteurs de l'assurance afin de soulever tous les problèmes auxquels les normes actuelles de Solvabilité ne répondent pas et surtout de garantir la bonne compréhension des enjeux posés par cette réforme pour que l'introduction de ces nouvelles directives se passe pour le mieux et que leur légitimité ne soit pas discutable.

## CHAPITRE II : LES NOUVELLES NORMES DE SOLVABILITE : PRESENTATION ET RAPPELS.

### II.1 De Solvency I à Solvency II.

#### II.1.1 Imperfection des normes de Solvency I.

Solvabilité I se caractérise par sa simplicité d'utilisation et par la comparaison entre les entreprises qu'elle permet, cependant elle a été beaucoup critiquée pour les raisons suivantes et qui expliquent le recours à de nouvelles normes de solvabilité.

- Le système de solvabilité I se base sur les provisions techniques dans le calcul des mobilisations de fonds propres nécessaires, c'est ainsi qu'un assureur très averse au risque se retrouve pénalisé par un capital à constituer très important alors qu'un assureur qui sous provisionne doit engager moins de fonds propres.
- L'approche actuelle se base uniquement sur le risque du passif dans le calcul des capitaux à constituer, cependant pour une compagnie d'assurance, il existe plusieurs risques qui concernent l'actif, le risque de marché entre autres peut peser lourdement sur le bilan de l'entreprise.
- Les « méthodes de réduction du risque » sont ignorées : Transfert du risque réassurance, produits dérivés... ne sont que faiblement représentées dans le calcul des marges de solvabilité.
- Les actifs et passifs sont évalués à leurs coûts historiques, les réformes de Solvabilité II rejoignent les nouvelles normes comptables IAS/IFRS et incitent les compagnies d'assurance à évaluer leurs actifs et passifs à leurs prix de marché.

En conclusion, nous pouvons dire que le référentiel Solvabilité I ne prend pas en considération de manière adéquate le risque propre à chaque compagnie d'assurance, d'où le recours à ces nouvelles normes de solvabilité.

### II.1.2 Pourquoi Solvency II ?

La réforme Solvency II a pour principal objectif d'harmoniser les normes de solvabilité des compagnies d'assurance et d'instaurer une bonne homogénéité entre les risques réellement supportés et les marges de solvabilité, sous ces normes, l'exigence en capital sera liée au profil de risque de la compagnie d'assurance, en outre, ces directives cherchent à faire évoluer les normes de comptabilité des assureurs en vue de rejoindre les normes IAS/IFRS et être plus en adéquation avec les données du marché. De plus ces normes insistent sur la nécessité, pour un assureur de mieux envisager la dégradation du risque supporté en l'incitant à provisionner un surplus au cas où l'estimation des réserves serait insuffisante.

### II.2 Les grands principes de Solvency II.

Le projet Solvabilité II dresse les directives que doivent suivre les compagnies d'assurance dans l'évaluation de leurs postes bilantaires et la détermination du capital requis, sans pour autant fixer des règles de calcul précises.

Dans Solvabilité II, la marge de solvabilité est élaborée en projetant les différents éléments du bilan, en effet, il est question d'évaluer la totalité du bilan de la compagnie et non de se limiter à son passif.

Par ailleurs, les nouvelles normes de solvabilité insistent sur la notion d'évaluation économique et non historique des actifs et passifs de la compagnie, si ce passif n'a pas de prix de marché, il faut faire appel à des modèles internes pour trouver ce que nous appellerons la « juste valeur ».

II.3 Les 3 piliers de solvency II.

Les normes Solvabilité II ont suivi les accords de Bâle 2 qui ont réformé le secteur bancaire, les nouvelles normes de solvabilité s'appuient sur trois piliers :

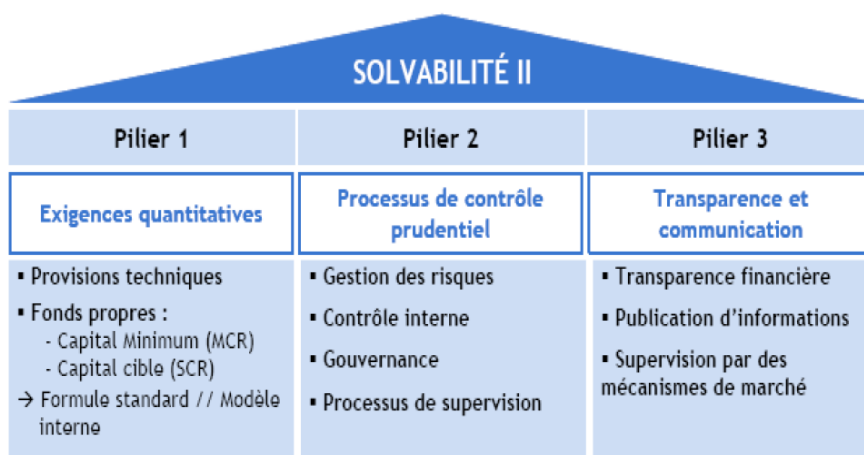


Figure 1 : Les trois piliers de Solvabilité I.

II.3.1 Normes quantitatives de calcul des provisions techniques et des fonds propres.

Les nouvelles normes imposent aux compagnies d'assurance de constituer des montants de provisions techniques et un besoin de capital ( MCR et SCR) plus en adéquation avec le risque qu'elles supportent, il est question de tester la suffisance des provisions techniques mais aussi d'harmoniser le calcul de ces provisions entre les différentes compagnies, par ailleurs, les nouvelles normes imposent aux assureurs de constituer des provisions indépendamment de leurs capitaux propres.

II.3.2 Normes qualitatives de suivi des risques en interne.

Il s'agit de donner aux autorités compétentes le pouvoir d'avoir un regard sur l'ensemble de la gestion et du fonctionnement des assureurs et d'exiger des augmentations de capitaux à ceux qui présentent un risque financier ou organisationnel important.

### II.3.3 Introduire une discipline de marché.

Ce pilier s'intéresse aux informations que doit diffuser un organisme assureur et qui permettront aux autorités et actionnaires de juger de la fiabilité des résultats. C'est pour cela que ce pilier indique aux compagnies les informations qu'elles doivent livrer et qui couvrent les éléments clés suivants :

- ✓ Solidité financière
- ✓ Profils de risque des assurés
- ✓ Mesures d'incertitude de la volatilité de leurs résultats par rapport au marché.

Nous allons dans ce travail nous intéresser au premier pilier relatif aux normes quantitatives de calcul des provisions techniques et des marges de solvabilité.

## II.4 Pilier I : Provisions techniques et besoins en capital.

### II.4.1 Estimation des provisions techniques.

En accord avec les nouvelles normes IFRS, les provisions techniques doivent être calculées en Best Estimate avec une marge de risque supplémentaire, de sorte que la probabilité d'une insuffisance des provisions par rapport aux prestations futures corresponde à un seuil prédéfini.

### II.4.2 Estimation des besoins en capital.

L'exigence de capital comprend deux paliers :

**Le SCR (Solvency Capital Requirement)** : qui correspond au capital souhaitable pour qu'une compagnie d'assurance puisse encaisser de gros sinistres sans que sa solidité financière ne soit affectée, il peut être calculé suivant des formules standard élaborées par les autorités compétentes ou de modèles internes validés par les autorités de contrôle.

**Le MCR (Minimum Capital Requirement)** : C'est le minimum absolu de marge de solvabilité requise, son dépassement permet aux autorités de contrôle d'intervenir et exiger la mise en place de certaines directives, son calcul devra être simple et facile à comprendre pour faciliter sa lecture.

Voici donc le passif d'une compagnie d'assurance vu suivant les nouvelles normes de solvabilité :

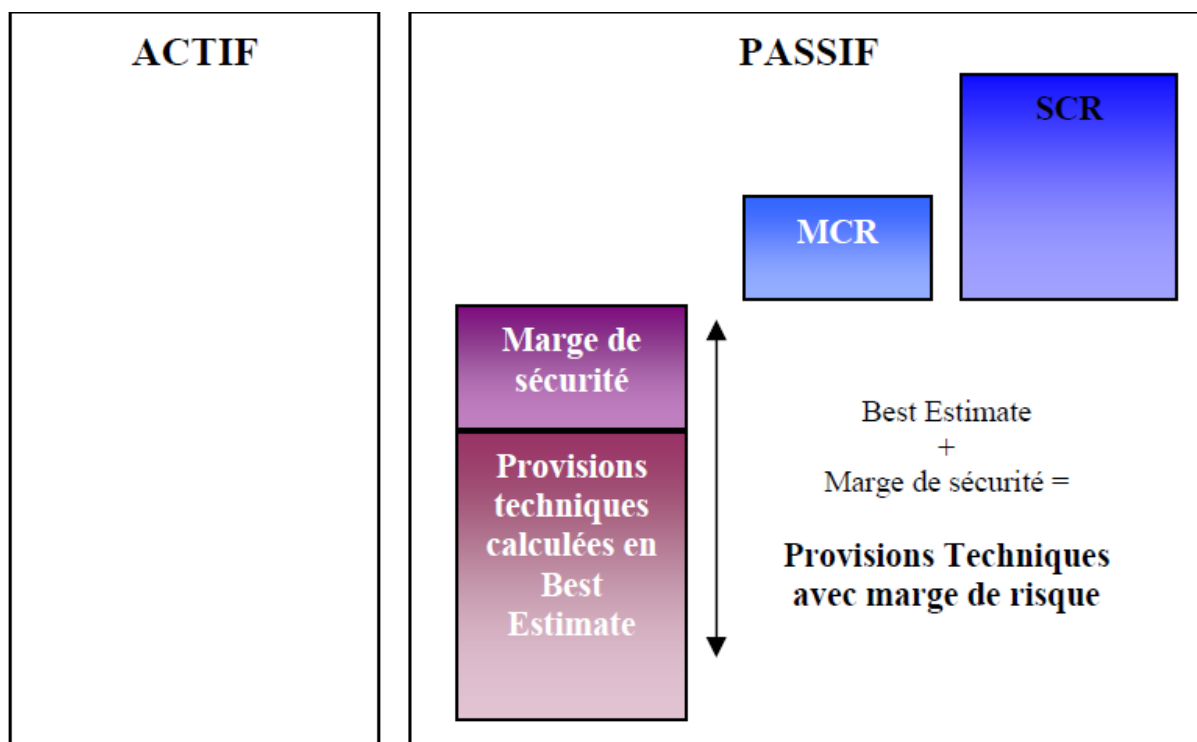


Figure 2 : Bilan d'une compagnie d'assurance sous le référentiel Solvabilité 2.

#### II.5 Caractère illiquide du passif d'assurance.

La problématique à laquelle nous essayons de répondre dans ce projet est relative à l'inefficacité de la politique du coût historique sur laquelle se base le système de solvabilité actuel, ce principe laisse place dans les nouvelles normes à celui de la « Juste Valeur », plus fidèle à la réalité économique et qui oblige les compagnies d'assurance à inscrire leurs actifs et passifs à leur juste valeur, c'est-à-dire à leur valeur normale de marché, celle-ci pouvant être calculée sur la base de la valeur actualisée des flux futurs de trésorerie que le bien peut générer ou en s'appuyant sur des modèles internes d'évaluation du bien en question. Le problème pour une compagnie d'Assurance provient du fait que ses passifs sont rarement échangeables, en effet, il n'existe point de marché secondaire pour les provisions techniques préférant ainsi un caractère illiquide et non répliquable aux passifs d'assurance.

Les contrats sont rarement échangés après la souscription et cela tient en partie de leur nature et des lois relatives aux opérations d'assurance. Il y a à cela plusieurs raisons qui tiennent à la fois à la nature des contrats d'assurance et à la régulation.

- La nature des contrats d'Assurance : Les contrats d'Assurance ont un horizon souvent très long, rendant difficile la valorisation des engagements des Assureurs. Aussi la multitude de risques liés aux contrats d'assurance et leur complexité complique l'évaluation économique de ces derniers.
- Régulation des marchés d'Assurance : Au Maroc comme partout ailleurs, les autorités surveillent de près les conditions de transfert de portefeuille d'assurance et préconisent le principe selon lequel l'assureur qui a souscrit le contrat doit rester responsable de celui-ci jusqu'à l'extinction des droits que ce dernier profère, les autorités craignent une dégradation de la gestion du contrat de l'assuré en cas de transfert.

Pour toutes ces raisons, les échanges de portefeuille sont rarement observés et ne concernent exclusivement que des sociétés ayant perdu leur agrément ou qui ont été rachetées par d'autres compagnies, d'où l'impossibilité d'avoir un prix de marché des engagements de l'assureur et le recours à ce que nous appellerons la Current Exit Value

#### **Notion de Current Exit Value**

La Current Exit Value des passifs d'assurance est constituée, selon les nouvelles normes, de trois éléments :

- le Best Estimate : Qui comme son nom l'indique est le meilleur estimateur des réserves que doit constituer l'Assureur.
- la marge de risque : C'est une marge que tout investisseur exige pour reprendre une dette incertaine, concrètement elle est utilisée en cas d'insuffisance du Best Estimate.

#### II.6 Imperfection de la valorisation des actifs et passifs d'assurance par la méthode de la juste valeur.

Il faut souligner que la juste valeur, si elle introduit une discipline de marché, ne résout néanmoins que très imparfaitement les problèmes soulevés par la valorisation des passifs et des actifs d'assurance :

- A cause de la dépendance entre les différents risques, on ne peut considérer le risque total de l'entreprise comme la somme des passifs liés aux différents portefeuilles, ces passifs étant constitués par des entités totalement indépendantes.
- Etant à développement long, le calcul de la juste valeur nécessite la prise en considération de nouvelles données et d'informations nouvelles, ce qui engendre des coûts supplémentaires.
- La comptabilité en juste valeur entraîne naturellement une volatilité dans le résultat de l'entreprise, celle volatilité est majoritairement due aux cours des actifs, très volatils, alors que les passifs d'un assureur sont plutôt stables, ce qui peut créer un déséquilibre à court terme injustifié.

### Chapitre III : Exemple d'autres normes de solvabilité.

Solvency II, projet destiné en premier lieu aux compagnies d'assurance Européennes, vise à harmoniser la notion de solvabilité en Europe dans un premier temps et a niveau international dans un seconde temps.

Certains pays ont leurs propres systèmes de Solvabilité tels que les Etats Unis d'Amérique ou la Suisse, le premier se base sur un modèle à facteur et le second sur des modèles à scénarios que nous nous proposons d'étudier.

#### III.1 Le Système Américain : Le Risk Based Capital (RBC).

Dans les normes Américaines de Solvabilité, le risque supporté par la compagnie d'assurance est découpé en six classes de risques en calculant les montants des fonds propres minimal  $R_i$  pour chacune d'elles :

$R_0$  : Actifs investis dans les succursales ou des filiales de la compagnie.

$R_1$  : Actifs à revenu fixe.

$R_2$  : Actifs investis en actions.

$R_3$  : Créances.

$R_4$  : Provisions de sinistres

$R_5$  : Primes.

Le Capital total requis se déduit à partir de la formule suivante :

$$R = R_0 + \sqrt{R_1^2 + R_2^2 + R_3^2 + R_4^2 + R_5^2}$$

L'utilisation de la racine carrée traduit la corrélation qui existe entre les différents risques que supporte l'assureur.

Après cela, il s'agit de comparer les fonds propres de l'assureur par rapport aux prescriptions du régulateur.

- Si les  $FP \geq R$ : Les autorités n'interviennent pas.
- Si les  $FP \leq 35\% \times R$ : Le régulateur intervient dans la gestion de l'entreprise.
- Si les  $35\% \times R < FP < R$ : L'assureur doit mettre en place un plan de redressement.

La critique majeure qui a été faite à ce système concerne le fait que le capital requis dépend trop des données du marché sans prendre en compte quelques spécificités de la compagnie.

### III.2 Le Système Suisse : Le Swiss Solvency Test

Ce modèle est assez similaire à celui de Solvency II, il s'inspire énormément des développements internationaux mais prend en considération les spécificités du marché Suisse, il est particulièrement intéressant dans le sens où il propose des lois pour modéliser chaque risque, en outre, le SST encourage les compagnies d'assurance à développer leurs modèles internes tout en prenant en considération quelques

scénarios défavorables( Evénement ou risques exceptionnels) pour garantir au mieux la solvabilité de la compagnie. Le capital de l'assureur doit être évalué sous deux perceptions :

- La solvabilité minimale (Comparable au MCR)
- Le capital Cible (SCR pour Solvency II) : Pour cela, le SST Se base sur l'Expected Shortfall :

$$ES(X, \alpha) = E((X - VaR(X, \alpha)))$$

- Le débit de la fortune liée : Correspond au capital nécessaire pour le rachat intégral de la compagnie par un autre assureur en cas de faillite.

## Conclusion

En conclusion, nous pouvons affirmer que les nouvelles réformes vont amener les compagnies d'assurance à changer de manière significative leur perception de la solvabilité, ce nouveau référentiel leur permettra de mieux considérer le risque supporté et de constituer des marges de solvabilité et provisions techniques en adéquation avec ce risque.

## PARTIE II : Modélisation Non Stochastique des provisions pour sinistres à payer.

Cette partie sera consacrée à un ensemble de méthodes déterministes qui nous ont semblé pertinentes pour la modélisation des provisions, cette partie sera subdivisée en deux chapitres.

Le premier chapitre se composera d'une étude de la base de données relative aux provisions pour déceler d'éventuelles particularités liées à la gestion de l'entreprise puis nous exposerons les diverses étapes dans le calcul des provisions règlementaires, nous allons expliciter les différentes fractions composant cette réserve.

Le second chapitre exposera un ensemble de méthodes non stochastiques, notamment les modèles de Chain Ladder, London Chain et De Vylder, nous donnerons le résultat trouvé par chacune de ces méthodes en prêtant une attention particulière aux spécificités liées à la gestion de la compagnie et son intégration dans nos modèles.

## Introduction

Toutes les réglementations sont des compromis, et celle des assurances en est un particulier. Celle-ci est vraisemblablement celle qui privilégie l'assuré au détriment de l'actionnaire. Au prix de contraintes très strictes posées sur les actifs et les passifs de la compagnie, elle permet d'éviter la faillite de grands groupes qui enrayeraient sur leur chemin plusieurs acteurs de l'Economie. De même, Solvency II permet d'éviter la tendance à la « fuite en avant » de certains assureurs tentés de conquérir des marchés par une politique de cotisations sous-évaluées, compensée par des spéculations financières.

Cependant, Solvency II ne peut faire face à tous les risques. Elle ne peut pas éviter la combinaison de conjonctures défavorables, comme celle de la chute des cours des actifs et de l'explosion de la sinistralité, qui peuvent amener certaines sociétés d'assurance prudentes à la faillite, Solvency II incite les compagnies à élaborer leurs propres modèles de risque et de faire des provisions avec une certaine marge de risque pour rester solvable sur un horizon d'un an et à l'ultime.

## Chapitre II : Etude de la base de données des sinistres payés et Calcul de la provision réglementaire.

### II.1 Etude de la base de données.

#### II.1.1 Présentation de la base de données.

##### II.1.1.1 Présentation de la base des sinistres payés.

Pour élaborer notre étude, nous aurons besoin des triangles de liquidation de la branche RC Automobile, le tableau de liquidation qui nous a été communiqué comprend les règlements des dix dernières années, et les charges des sinistres restants évalués à partir des estimations de l'expert, le déroulement total est de 10 années, de 2004 jusqu'à 2013, ce qui correspond aux prescriptions de la Direction des Assurances et de Prévoyance Sociale (DAPS), c'est une durée suffisante pour estimer la charge totale d'un sinistre.

Ci-après, le tableau des règlements(SP), avec pour chaque année, une estimation de la Charge Ultime des sinistres, en ce qui concerne l'année de survenance 2004, nous remarquons qu'après 10 années, certains sinistres ne sont pas clos, c'est pour cette raison que nous jugerons par la suite de la véracité de l'hypothèse de clôture du sinistre.

## Modélisation Non Stochastique des provisions pour sinistres à payer

	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013
SP	115 940	253 040	386 460	666 960	998 900	1 212 080	1 295 671	1 347 284	1 379 793	1 395 474
TOTAL	1 556 460	2 294 160	2 342 380	2 334 120	2 337 820	2 419 780	1 723 310	1 645 181	1 648 055	1 618 432
SP		103 940	245 060	408 220	787 880	1 058 940	1 179 313	1 257 852	1 323 115	1 363 174
TOTAL		1 428 860	1 895 580	2 015 060	2 069 300	2 175 800	2 147 936	2 040 880	1 654 679	1 618 892
SP			104 660	257 700	576 020	998 600	1 238 654	1 433 533	1 528 236	1 593 588
TOTAL			1 317 960	1 716 360	1 957 720	2 428 520	2 450 830	1 936 112	1 962 867	1 908 580
SP				105 420	268 600	626 880	925 995	1 217 769	1 449 974	1 579 904
TOTAL				1 184 860	1 667 060	2 407 860	2 574 181	2 630 365	2 114 277	2 094 715
SP					72 960	230 600	516 405	900 126	1 294 175	1 508 748
TOTAL					1 288 480	2 062 920	2 475 954	2 681 471	2 694 356	2 689 238
SP						99 560	250 962	563 140	1 060 944	1 381 864
TOTAL						1 730 620	2 845 151	3 054 076	3 014 862	3 017 723
SP							35 467	128 990	481 063	914 267
TOTAL							2 086 182	3 161 475	3 158 615	2 945 657
SP								13 860	105 382	358 252
TOTAL								2 545 200	2 917 498	2 665 439
SP									22 570	178 455
TOTAL									2 079 697	2 957 081
SP										11 612
TOTAL										1 990 050

Tableau 1 : Cumul des règlements enregistrés par année de survenance et année de règlement.

### II.1.1.2 Présentation de la base des nombres de sinistres et leurs coûts totaux

Aussi, nous avons eu pour chaque année, le nombre de sinistres déclarés, nombre de sinistres clos et leurs coûts totaux.

	2008	2009	2010	2011	2012	2013
2008	10840	22940	29300	33240	35200	36100
2009	13360	28900	36000	39400	40800	
2010	13500	30080	35300	37040		
2011	13940	29380	32880			
2012	12260	28520				
2013	11340					

Tableau 2 : Cumul des sinistres enregistrés par année de survenance et année de déclaration.

	2009	2010	2011	2012	2013
Coût des sinistres terminés	3 432 080 350	2 171 246 356	1 677 000 000	2 659 940 000	2 301 540 000
Nombre de sinistres terminés	179 000	89 400	112 040	139 320	164 800
CM	19173.63	24286.87	14967.86	19092.30	13965.65

Tableau 3 : Coût moyen par année de survenance.

Modélisation Non Stochastique des provisions pour sinistres à payer

II.1.2 Analyse du tableau de règlements

II.1.2.1 Etude de la cadence des règlements

Pour faciliter notre travail, nous avons résumé nos données et travaillé dans un premier temps avec le triangle de liquidation qui résumé comme suit :

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	115 940.00	137 100.00	133 420.00	280 500.00	331 940.00	213 180.00	83 590.54	51 613.25	32 508.76	15 681.40
2	103 940.00	141 120.00	163 160.00	379 660.00	271 060.00	120 373.31	78 538.54	65 263.11	40 058.74	
3	104 660.00	153 040.00	318 320.00	422 580.00	240 054.21	194 878.53	94 702.97	65 352.09		
4	105 420.00	163 180.00	358 280.00	299 115.05	291 773.49	232 205.15	129 930.44			
5	72 960.00	157 640.00	285 805.10	383 720.79	394 049.60	214 572.44				
6	99 560.00	151 401.98	312 177.61	497 804.84	320 920.02					
7	35 467.44	93 522.57	352 072.61	433 204.31						
8	13 859.69	91 521.97	252 870.67							
9	22 569.95	155 885.46								
10	11 612.49									

Tableau 4 : Règlements enregistrés par année de survenance et année de déroulement.

Ou en cumulant les règlements, nous obtenons :

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	115 940.00	253 040.00	386 460.00	666 960.00	998 900.00	1 212 080.00	1 295 670.54	1 347 283.79	1 379 792.55	1 395 473.94
2	103 940.00	245 060.00	408 220.00	787 880.00	1 058 940.00	1 179 313.31	1 257 851.85	1 323 114.96	1 363 173.70	
3	104 660.00	257 700.00	576 020.00	998 600.00	1 238 654.21	1 433 532.74	1 528 235.71	1 593 587.80		-
4	105 420.00	268 600.00	626 880.00	925 995.05	1 217 768.54	1 449 973.69	1 579 904.13		-	-
5	72 960.00	230 600.00	516 405.10	900 125.89	1 294 175.49	1 508 747.93		-	-	-
6	99 560.00	250 961.98	563 139.59	1 060 944.43	1 381 864.45		-	-	-	-
7	35 467.44	128 990.01	481 062.62	914 266.93		-	-	-	-	-
8	13 859.69	105 381.65	358 252.33		-	-	-	-	-	-
9	22 569.95	178 455.41		-	-	-	-	-	-	-
10	11 612.49			-	-	-	-	-	-	-

Tableau 5 : Règlements cumulés enregistrés par année de survenance et année de déroulement.

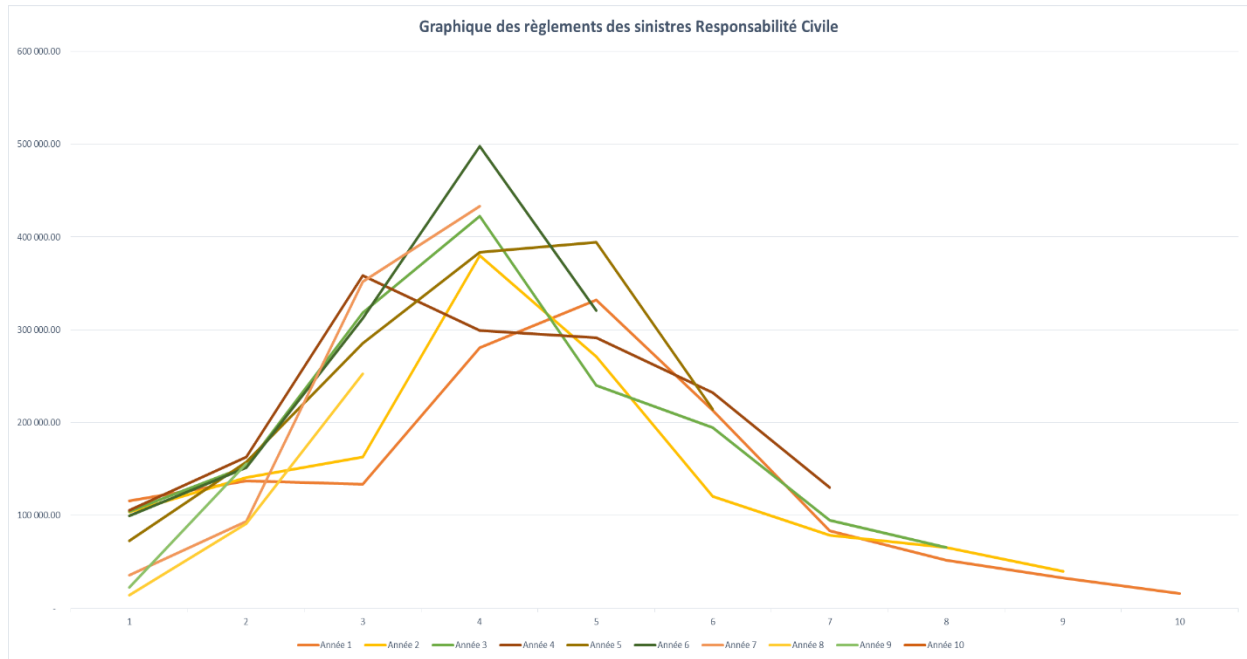


Figure 3 : Règlements non cumulés par année de survenance.

Nous remarquons une certaine hétérogénéité dans les courbes obtenues, les règlements effectués dans les premières années présentent une très grande variation les uns par rapport aux autres, néanmoins, nous remarquons que le développement des sinistres est identique pour toutes les années de survenance, les sinistres enregistrent une forte croissance entre la première et seconde année avant que le règlement n'atteigne son pic à la quatrième année où l'on enregistre le maximum de règlements.

Aussi, après la septième année, nous remarquons que les règlements s'atténuent et deviennent très faibles, ceci s'explique naturellement par le fait que la branche de Responsabilité Civile est à développement long, dans les premières années, le montant du sinistre est inconnu, les règlements effectués sont très faibles, ce n'est qu'après avoir bien estimé le sinistre que la liquidation débute.

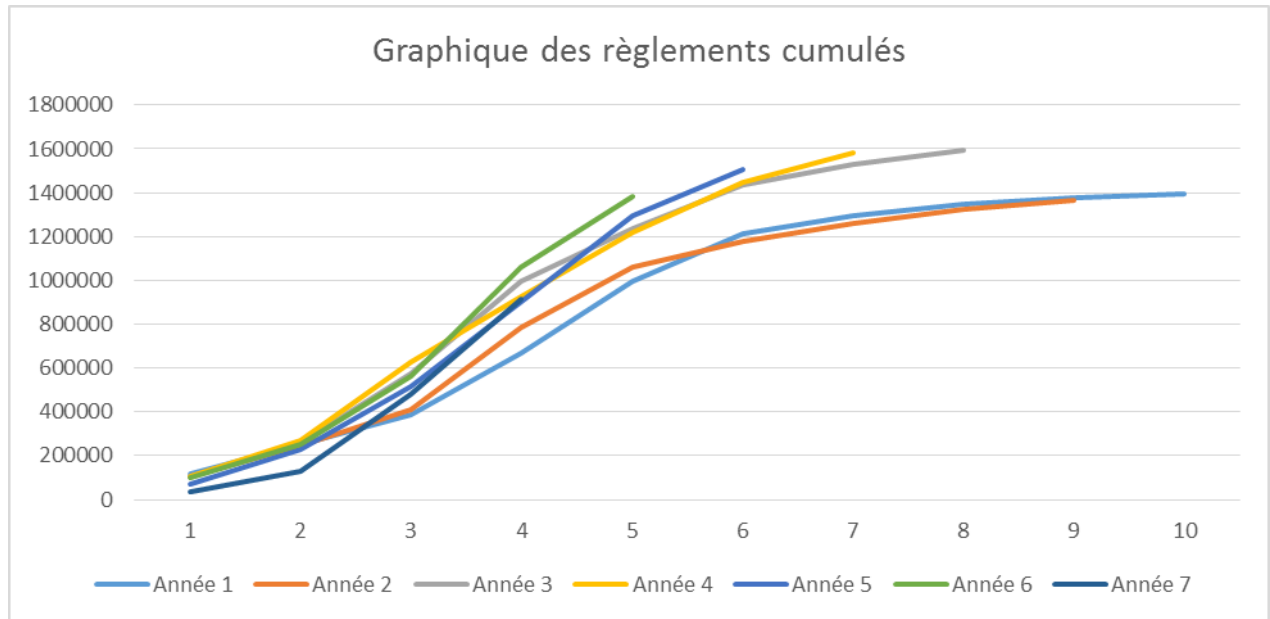


Figure 4: Règlements cumulés par année de survenance.

Ceci confirme le constat déjà élaboré, après la seconde année, le cumul explose jusqu'à la septième année où l'on remarque que le rythme des règlements devient stable.

Ce même constat peut être établi grâce aux cadences de règlements (Sous l'hypothèse qu'au bout de la dixième année, le sinistre est déjà clos, ce qui n'est pas toujours vérifié dans la réalité, cette hypothèse sera revue dans ce qui suit)

<b>Cadence de Règlement</b>	<b>4.78%</b>	<b>13.69%</b>	<b>31.22%</b>	<b>54.88%</b>	<b>73.51%</b>	<b>85.85%</b>	<b>92.15%</b>	<b>96.26%</b>	<b>98.88%</b>	<b>100.00%</b>
-----------------------------	--------------	---------------	---------------	---------------	---------------	---------------	---------------	---------------	---------------	----------------

Les cadences de règlement sont très faciles à interpréter, il s'agit du rapport entre les règlements effectués jusqu'à l'année j par la Charge Ultime du sinistre, la charge du sinistre étant égale au règlement effectué auquel est ajoutée la réserve correspondante à l'année de survenance, cette cadence renseigne sur la part du sinistres payée après j années de développement.

II.1.2.2 Etudes des facteurs de développement individuels.

Le facteur de développement du sinistre à l'année j est égal au développement entre l'année j et j+1. Ci-dessous le tableau avec les coefficients de développement annuels.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	2.18	1.53	1.73	1.50	1.21	1.07	1.04	1.02	1.01	
2	2.36	1.67	1.93	1.34	1.11	1.07	1.05	1.03		
3	2.46	2.24	1.73	1.24	1.16	1.07	1.04			
4	2.55	2.33	1.48	1.32	1.19	1.09				
5	3.16	2.24	1.74	1.44	1.17					
6	2.52	2.24	1.88	1.30						
7	3.64	3.73	1.90							
8	7.60	3.40								
9	7.91									
10										

Tableau 6 : Facteurs de développement individuels.

Nous remarquons qu'à partir de l'année de survenance  $i=7$ , il y'a un net changement dans les coefficients de passage entre la première et seconde année, ceci traduit une modification faite dans la gestion des sinistres, évidemment nous tiendrons compte de ce changement de gestion dans notre modélisation, nous remarquons aussi qu'il y'a une certaine instabilité au niveau des coefficients dans les premières années, ceux-ci ne se stabilisent qu'à partir de la Quatrième année.

Nous avons jugé qu'il serait plus juste de nous concentrer sur les dernières années car elles sont plus susceptibles de se reproduire, l'estimateur sera considéré meilleur avec les 3 dernières années de survenance qu'avec l'ensemble des observations de l'année de développement  $j=1$ .

	1	2	3	4	5	6	7	8
Ecart Type	2.2763	0.7695	0.1557	0.0947	0.0376	0.0113	0.0063	0.0043
Moyenne	6.38	2.42	1.77	1.36	1.17	1.07	1.04	1.03
Coefficient de Variation	35.67%	31.77%	8.79%	6.98%	3.22%	1.05%	0.60%	0.42%

Tableau 7 : Statistiques descriptives sur les facteurs individuels.

Il faut rappeler que ces statistiques sont très indicatives, nous nous sommes basés sur un nombre d'observations très limité pour certaines années, nous pouvons confirmer

néanmoins l'idée selon laquelle il y'a une nette volatilité dans les premières années, d'où le lissage auquel nous procéderons par la suite.

## II.2 Calcul des Provisions réglementaires pour Sinistres A Payer.

### II.2.1 Aperçu sur les textes de lois.

Selon l'Arrêté du ministre des finances et de la privatisation n° 1548-05 du 6 Ramadan 1426 (10 octobre 2005) relatif aux entreprises d'assurances et de réassurance. La provision pour sinistres restant à payer afférente aux opérations d'assurances de responsabilité civile des véhicules terrestres à moteur est faite comme suit :

Pour les sinistres corporels : les sinistres sont évalués dossier par dossier. Cette évaluation est augmentée d'une estimation du coût des sinistres survenus mais non déclarés à la date de l'inventaire. Cette estimation est obtenue en appliquant au coût moyen des sinistres défini ci-dessous, l'estimation du nombre des sinistres survenus mais non déclarés. L'évaluation obtenue ne doit pas être inférieure à l'évaluation la plus élevée dégagée par les méthodes indiquées ci-après. Dans le cas contraire l'évaluation obtenue est complétée de la différence.

Les méthodes utilisées sont les suivantes :

Première méthode : évaluation par référence au coût moyen des sinistres des exercices antérieurs. Le coût moyen est obtenu en divisant le coût total des sinistres terminés au cours des cinq dernières années par le nombre des sinistres définitivement réglés ou classés sans suite pendant ce temps. Tout accident, même s'il ouvre droit à une indemnité à plusieurs victimes, est compté pour un seul sinistre.

Ce coût moyen est appliqué au nombre total des sinistres survenus (y compris l'estimation de ceux non déclarés à la date de l'inventaire), pour chaque exercice dont la provision résiduelle, calculée dossier par dossier, est supérieure ou égale à 30% de la charge de sinistres. Toutefois, cette méthode n'est applicable que pour les dix derniers exercices au plus.

L'estimation du nombre de sinistres survenus et non déclarés à la date de l'inventaire est basée sur les cadences de déclaration observées dans l'entreprise sur une période de cinq exercices au moins précédant l'exercice en cours.

Deuxième méthode : évaluation basée sur les cadences de règlement observées dans l'entreprise sur une période de dix exercices au moins y compris l'exercice en cours.

#### II.2.2 Application de la méthode règlementaire.

La base de données qui nous a été communiqué comporte les sinistres à payer (SAP),

Cette réserve est la somme des :

- Réserves dossier/dossier : pour les sinistres déclarés en phase de paiement.
- Réserves pour les sinistres survenus mais non déclarés (IBNR).

Ce qu'il faut calculer à présent, ce sont les éventuelles réserves complémentaires :

##### II.2.2.1 Méthode des coûts moyens.

Pour cela nous allons dans un premier temps calculer le Coût moyen des sinistres (CM).

$$\begin{aligned} CM &= \frac{\text{Coût des sinistres clos}}{\text{Nombre de sinistres clos}} \\ &= \frac{3432080.350 + 2171246.356 + 1677000.00 + 2659940.00 + 2301540.00}{179000 + 89400 + 112040 + 139320 + 164800} \\ &= 17.88 \text{ KDhs.} \end{aligned}$$

Ce Coût Moyen est à multiplier par le nombre de sinistres total qui comprend :

- Le nombre de sinistres déclarés.
- Le nombre de sinistres survenus mais non déclarés (IBNR).

Ces derniers doivent être estimés, nous nous baserons sur la méthode de Chain Ladder dont nous allons expliquer le mécanisme par la suite :

Nous avons estimé le nombre de sinistres total par année de survenance et sur les 5 dernières années imposées par la réglementation :

	2008	2009	2010	2011	2012	2013
2008	10840	22940	29300	33240	35200	36100
2009	13360	28900	36000	39400	40800	41843
2010	13500	30080	35300	37040	38753	39744
2011	13940	29380	32880	35848	37506	38465
2012	12260	28520	34204	37291	39016	40013
2013	11340	24813	29758	32444	33945	34812

Tableau 8 : Estimation des sinistres survenus mai non déclarés.

Les estimations par année de survenance sont sur la dernière colonne du tableau.

Nombre de Sinistres	Coût Moyen	Sinistres Payés	Sinistres à Payer	Charge Estimée	SP/CU	charge CM	Provision CM	Provision
-	17.88	1395474	222 958.00	1 618 432.00	13.78%	-	-	-
-	17.88	1363174	255 719.00	1 618 892.00	15.80%	-	-	-
-	17.88	1593588	314 992.00	1 908 580.00	16.50%	-	-	-
-	17.88	1579904	514 811.00	2 094 715.00	24.58%	-	-	-
36 100	17.88	1508748	1 180 490.00	2 689 238.00	43.90%	645 566.82	- 863 181.18	1 180 490.00
41 843	17.88	1381864	1 635 859.00	3 017 723.00	54.21%	748 270.63	- 633 593.37	1 635 859.00
39 744	17.88	914267	2 031 390.00	2 945 657.00	68.96%	710 734.30	- 203 532.70	2 031 390.00
38 465	17.88	358252	2 307 187.00	2 665 439.00	86.56%	687 856.05	329 604.05	2 307 187.00
40 013	17.88	178455	2 778 625.00	2 957 081.00	93.97%	715 543.94	537 088.94	2 778 625.00
34 812	17.88	11612	1 978 438.00	1 990 050.00	99.42%	622 541.46	610 929.46	1 978 438.00

Tableau 9 : Calcul des réserves complémentaires selon la méthode du Coût Moyen.

NB : Les premières années ne sont pas retenues pour le calcul, nous ne gardons que les années où  $\frac{SP}{CU} > 30\%$ .

La réserve obtenue par cette méthode est identique à celle faite D/D, la réserve complémentaire est par conséquent nulle.

II.2.2.2 Méthode des Cadences.

Cette méthode nécessite dans un premier temps de calculer le cumul des sinistres à payer pour chaque année de développement. Pour l'année j, on considérera le cumul des sinistres pour les années de survenance ayant un développement supérieur ou égal à j et le cumul des charges ultimes est le cumul correspondant.

La cadence dans ce cas est égale à :

$$\frac{\text{Cumul Sinistres Payés}}{\text{Cumul Charges Sinistres}}$$

La SAP par la méthode des cadences est égale à :

$$SAP\ Cadence = SP\ Calendaire \frac{1 - Cadence}{Cadence}$$

Où le SP calendaire correspond au cumul des règlements ayant exactement j pour année de développement.

En fin de compte, nous ne garderons que les Sinistres à Payer par la méthode des cadences correspondant aux 5 dernières années comme le stipule la réglementation.

Cumul Sinistres payés	685 989.56	1 918 789.05	3 916 439.64	6 254 772.30	7 190 302.69	6 783 647.66	5 661 662.23	4 263 986.55	2 742 966.25	1 395 473.94
Charge Ultime	1 618 432.00	1 618 892.00	1 908 580.00	2 094 715.00	2 689 238.00	3 017 723.00	2 945 657.00	2 665 439.00	2 957 081.00	1 990 050.00
Cumul Charges Ultimes	23 505 807.00	21 515 757.00	18 558 676.00	15 893 237.00	12 947 580.00	9 929 857.00	7 240 619.00	5 145 904.00	3 237 324.00	1 618 432.00
Cadence	2.92%	8.92%	21.10%	39.35%	55.53%	68.32%	78.19%	82.86%	84.73%	86.22%
Règlement calendaire	11 612.49	178 455.41	358 252.33	914 266.93	1 381 864.45	1 508 747.93	1 579 904.13	1 593 587.80	1 363 173.70	1 395 473.94
SAP Cadence	386 295.68	1 822 600.05	1 339 383.66	1 408 864.96	1 106 459.24	699 746.96	440 612.71	329 600.69	245 681.29	222 958.06
SAP D/D	1 978 438.00	2 778 625.00	2 307 187.00	2 031 390.00	1 635 859.00	1 180 490.00	514 811.00	314 992.00	255 719.00	222 958.00
Provision a constituer	1 978 438.00	2 778 625.00	2 307 187.00	2 031 390.00	1 635 859.00	-	-	-	-	-

Tableau 10 : Calcul des réserves complémentaires selon la méthode des cadences.

Nous avons trouvé une réserve D/D supérieure à celle trouvée par la méthode des cadences, il n'y a pas lieu de constituer une réserve complémentaire.

## Chapitre III : Application des méthodes déterministes dans le calcul des provisions pour sinistres à payer.

### III.1 Méthode Chain Ladder Standard.

La méthode de Chain Ladder est un modèle de développement par cadences, basé sur le triangle des montants cumulés.

Soit un triangle de dimension  $n \times n$  de montants cumulés, avec en ligne les années de survenance (ou origine)  $i$  et en colonne les années de règlement (ou développement)  $j$ , en nombre d'années depuis la survenance.

La charge de sinistres survenus en  $i$  et payée jusqu'à l'année  $j$  est notée  $C_{i,j}$ . Le facteur de développement des sinistres de l'année de développement  $j$  à  $j+1$  est noté  $f_j$ .

	1	2	3	4	5	6	.	.	n
1	$C_{1,1}$	$C_{1,2}$	$C_{1,3}$	$C_{1,4}$	$C_{1,5}$	$C_{1,6}$	$C_{1,}$	$C_{1,}$	$C_{1,n}$
2	$C_{2,1}$								
3	$C_{3,1}$								
4	$C_{4,1}$								
5	$C_{5,1}$								
6	$C_{6,1}$								
.	$C_{,1}$								
.	$C_{,1}$								
n	$C_{n,1}$								

Coefficients de Chain Ladder	f <sub>1</sub>	f <sub>2</sub>	f <sub>3</sub>	f <sub>4</sub>	f <sub>5</sub>	f <sub>6</sub>	f <sub>7</sub>	f <sub>8</sub>	f <sub>n-1</sub>
------------------------------	----------------	----------------	----------------	----------------	----------------	----------------	----------------	----------------	------------------

Tableau 11 : Tableau explicatif de la méthode de Chain Ladder.

#### III.1.1 Description de la méthode de Chain Ladder

La méthode de Chain Ladder permet d'estimer la partie inférieure du triangle de liquidation, c'est à dire l'ensemble  $\{C_{i,j} \mid 2 \leq i \leq n, i + j > n + 1\}$ .

Cette méthode statistique est fondée sur les cadences de règlement et s'appuie sur deux hypothèses principales :

- Les règlements de sinistres sont stables.
- Les facteurs de développement sont indépendants de l'année d'origine des sinistres.

Les coefficients de passage  $f_j$  sont alors estimés grâce à la moyenne pondérée de la charge sinistre, comme le présente la formule suivante :

$$\hat{f}_j = \frac{\sum_{i=1}^{n-j} C_{i,j+1}}{\sum_{i=1}^{n-j} C_{i,j}}$$

Les coefficients de passage obtenus par la méthode Chain Ladder Standard sont :

Coefficients Chain-Ladder	2.8453	2.2504	1.7579	1.3464	1.1679	1.0733	1.0446	1.0272	1.0114
---------------------------	--------	--------	--------	--------	--------	--------	--------	--------	--------

Grâce à ces estimateurs, nous pouvons estimer

- Les charges ultimes par exercice de survénance :  $\widehat{C}_{i,n} = C_{i,n-i+1} \times \prod_{j=n-i}^{n-1} \hat{f}_j$
- Les provisions par exercice de survénance :  $\widehat{R}_i = \widehat{C}_{i,n} - C_{i,n-i+1}$
- La réserve totale à constituer :  $\widehat{R} = \sum_{i=1}^n \widehat{R}_i$

Ci-après le tableau avec les règlements prédits sous le modèle de Chain Ladder :

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	115 940.00	253 040.00	386 460.00	666 960.00	998 900.00	1 212 080.00	1 295 670.54	1 347 283.79	1 379 792.55	1 395 473.94
2	103 940.00	245 060.00	408 220.00	787 880.00	1 058 940.00	1 179 313.31	1 257 851.85	1 323 114.96	1 363 173.70	1 378 666.22
3	104 660.00	257 700.00	576 020.00	998 600.00	1 238 654.21	1 433 532.74	1 528 235.71	1 593 587.80	1 636 893.20	1 655 496.55
4	105 420.00	268 600.00	626 880.00	925 995.05	1 217 768.54	1 449 973.69	1 579 904.13	1 650 438.31	1 695 288.61	1 714 555.63
5	72 960.00	230 600.00	516 405.10	900 125.89	1 294 175.49	1 508 747.93	1 619 371.28	1 691 667.46	1 737 638.15	1 757 386.48
6	99 560.00	250 961.98	563 139.59	1 060 944.43	1 381 864.45	1 613 872.99	1 732 204.25	1 809 537.81	1 858 711.60	1 879 835.93
7	35 467.44	128 990.01	481 062.62	914 266.93	1 230 942.67	1 437 612.15	1 543 019.74	1 611 907.24	1 655 710.46	1 674 527.67
8	13 859.69	105 381.65	358 252.33	629 755.13	847 884.18	990 239.94	1 062 845.62	1 110 295.94	1 140 467.99	1 153 429.45
9	22 569.95	178 455.41	401 595.33	705 945.78	950 465.08	1 110 043.69	1 191 433.53	1 244 624.60	1 278 447.00	1 292 976.60
10	11 612.49	33 040.73	74 354.72	130 704.71	175 977.06	205 522.78	220 591.98	230 440.22	236 702.38	239 392.51

Tableau 12 : Tableau des règlements prédits par le modèle Chain Ladder.

III.1.2 Calcul de la réserve globale avec le modèle Chain Ladder Standard.

Avec le modèle Chain Ladder Standard, nous obtenons une réserve de 3 856 401.90Kdhs

Réserve de Chain-Ladder	
2004	-
2005	15 492.52
2006	61 908.75
2007	134 651.50
2008	248 638.55
2009	497 971.48
2010	760 260.75
2011	795 177.12
2012	1 114 521.19
2013	227 780.03
<b>Réserve Totale</b>	<b>3 856 401.90</b>

Tableau 13 : Réserve Globale sous le modèle Chain Ladder.

III.2 Correction du modèle de Chain Ladder.

III.2.1 Calcul de la réserve de Chain Ladder corrigée.

Comme il a été cité précédemment, les dernières années ont connu un léger changement dans la gestion des règlements, c'est pour cela que pour les premières années de développement, nous ne tiendrons compte que des trois dernières années pour retrouver des coefficients de Chain Ladder plus en adéquation avec la réalité.

Ainsi les coefficients obtenus sont :

Coefficients Chain-Ladder	3.8715	2.5130	1.7579	1.3248	1.1679	1.0733	1.0446	1.0272	1.0114
---------------------------	--------	--------	--------	--------	--------	--------	--------	--------	--------

La Provision correspondante est de : 4 057 296.92 Kdhs.

Réserve de Chain-Ladder	
2004	-
2005	15 492.52
2006	61 908.75
2007	134 651.50
2008	248 638.55
2009	497 971.48
2010	760 260.75
2011	795 177.12
2012	1 114 521.19
2013	428 675.02
<b>Réserve Totale 4 057 296.92</b>	

Tableau 14 : Réserve Globale sous le modèle Chain Ladder.Corrigé.

En tenant compte de cette modification, les coefficients sont plus importants dans la première année, donc la réserve plus importante et plus en adéquation avec la réalité.

### III.2.2 Analyse des résultats et vérification des hypothèses.

#### III.2.2.1 Analyse de la cadence des règlements.

La cadence de règlement renseigne sur la vitesse de règlement des sinistres, elle est calculée par la formule suivante :

$$\widehat{Cad}_j = \frac{\sum_{i=1}^n \widehat{C}_{i,j}}{\sum_{i=1}^n \widehat{C}_{i,n}} = \frac{1}{f_{j+1} \times f_{j+2} \times \dots \times f_{n-1}}$$

Pour les données du portefeuille RC, le calcul de la cadence des règlements donne les résultats suivants :

Cadence de Règlement	4.78%	13.69%	31.22%	54.88%	73.51%	85.85%	92.15%	96.26%	98.88%	100.00%
----------------------	-------	--------	--------	--------	--------	--------	--------	--------	--------	---------

Comme nous pouvions nous y attendre, cette branche à un développement très long, passé une année, les règlements n'atteignent que 5% du coût ultime du sinistre, il faut attendre la 4<sup>ème</sup> année pour dépasser les 50% du règlement total, ceci est dû à la lenteur

des règlements observés dans les sinistres corporels et à la longueur des procédures liées à l'expertise des sinistres.

### III.2.2.2 Vérification des hypothèses de Chain Ladder

#### III.2.2.2.1 L'indépendance des années de survenance.

Pour tester l'hypothèse de l'indépendance des années de survenance, on procède à un test non paramétrique se basant sur le triangle et les médianes des éléments des diagonales. En effet, ce test consiste à calculer la médiane pour chaque colonne du triangle des règlements.

Notons par  $A_j$ , le vecteur qui regroupe les éléments de la  $j$  ème diagonale de ce triangle pour  $j=1 \dots n$ .

Nous compterons ensuite le nombre des éléments de la diagonale qui sont supérieurs à la médiane que nous noterons  $n_{i+}$  et ceux qui lui sont inférieurs que nous noterons  $n_{i-}$ .

Nous allons dans un second temps définir  $Z_i = \min(n_{i+}, n_{i-})$ . Sous l'hypothèse d'indépendance, on s'attend à obtenir autant de valeurs supérieures, qu'inferieures à la médiane, mathématiquement, la variable  $n_{i+}$  devrait suivre une loi Binomiale de paramètres  $(n, 0.5)$ , où :

$$n = n_{i+} + n_{i-}$$

Notre test portera sur la valeur de  $Z_i$  qui devra être proche de l'espérance de la binomiale, à savoir  $\frac{n}{2}$ , nous ne garderons que les éléments pour lesquels le  $n$  est supérieur à 1.

Le lemme suivant donne l'espérance et la variance de la loi de  $Z_i$  :

Si  $X \sim B\left(n, \frac{1}{2}\right)$ , l'espérance et la variance de  $Z$   
 $= \min(X, n - X)$  sont égales:

$$E(Z) = \frac{n}{2} - C_{n-1}^m \times \frac{n}{2^n}$$

Et

$$V(Z) = \frac{n(n-1)}{4} - C_{n-1}^m \times \frac{n(n-1)}{2^n} + E(Z) - E(Z)^2$$

Où  $m$  est la partie entière de  $\frac{n}{2}$ .

Ci-après le tableau correspondant aux facteurs de développement par année de survenance et de déroulement, les médianes correspondent aux cellules vertes du tableau :

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	218%	153%	173%	150%	109%	110%	104%	102%	101%	
2	236%	167%	193%	134%	111%	110%	105%	103%		
3	246%	224%	173%	124%	116%	110%	104%			
4	255%	233%	148%	133%	119%	110%				
5	316%	224%	174%	144%	117%					
6	252%	224%	188%	130%						
7	364%	373%	190%							
8	760%	340%								
9	791%									
10										

Tableau 15 : Médianes des coefficients par année de développement.

En appliquant les formules à nos données, nous obtenons les résultats suivants :

$n_{i+}$	$n_{i-}$	$Z_i$	$n_i$	Ent	$E(Z_i)$	$V(Z_i)$
7	2	2	9	4	3.26953125	0.73594666
6	2	2	8	4	2.90625	0.80371094
4	3	3	7	3	2.40625	0.55371094
3	3	3	6	3	2.0625	0.62109375
1	4	1	5	2	1.5625	0.37109375
0	4	0	4	2	1.25	0.4375
0	3	0	3	1	0.75	0.1875
0	2	0	2	1	0.5	0.25
		11			14.70703125	3.96055603
	t	-1.863		Intervalle de Confiance	10.7268021	18.6872604

Tableau 16 : Test d'indépendant entre les années de survenance.

En ce qui concerne la loi de  $Z = Z_1 + \dots + Z_9$ , l'espérance est égale à :

$$E(Z) = E(Z_1) + \dots + E(Z_9)$$

La variance étant égale à  $V(Z) = V(Z_1) + \dots + V(Z_9)$ , sous l'hypothèse d'indépendance.

En supposant que notre statistique  $T = \frac{Z - E(Z)}{\sqrt{V(Z)}}$  suit une distribution normale, alors

$T = -1.863$ , inférieur à 2, donc on peut ne pas rejeter l'hypothèse de l'indépendance entre les années de survenance. Le même résultat est obtenu grâce à l'intervalle de confiance qui intègre la valeur de notre statistique.

#### III.2.2.2.2 Test de la capacité explicative de la durée de déroulement du sinistre.

Nous avons procédé au test de la seconde hypothèse qui stipule que :

$$\forall j = 1 \dots n - 1, \exists f_j \text{ tel que } C_{i,j+1} = f_j \times C_{i,j}$$

Cela s'interprète graphiquement par une droite de nuages de points qui passe par l'origine.

Nous allons donc tracer le nuage de points et voir si la droite passant par l'origine s'ajuste bien à nos données.

Dans le cas contraire, nous pouvons déduire qu'il existe une constante qui corrige notre modèle, ce sont les approches de London-Chain et London Pivot.

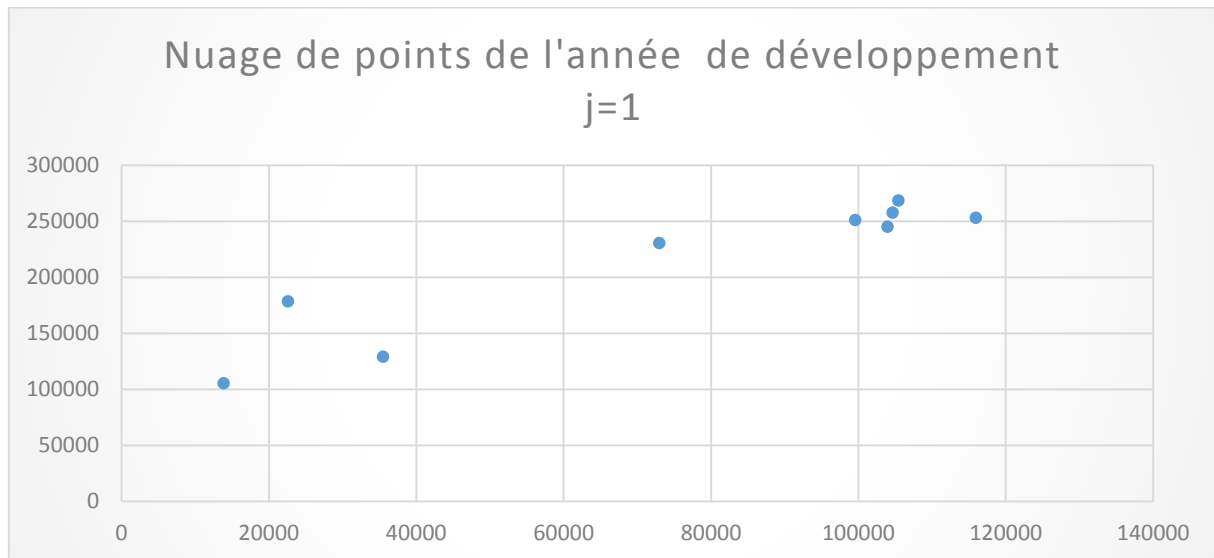


Figure5 : Nuage de points de l'année de développement j=1.

Nous avons donné ci-dessus le nuage de points concernant l'année de développement 1, on peut présupposer que l'hypothèse 2 n'est pas vérifiée, nous remarquons que la droite passant par les points ne passe pas par l'origine, pour valider ce constat, nous avons procédé à la régression des cumuls de la deuxième année par rapport à la première qui a rejeté la nullité de la constante (Voir annexe).

Comme expliqué précédemment, il est primordial dans ce cas de considérer l'existence d'une constante entre la première et la seconde année, elle trouve son origine dans les règlements très faibles que fait l'assureur après la survenance du sinistre, qui a besoin de plus de temps pour le valoriser et procéder à des règlements sur des évaluations plus fondées, c'est dans ce cadre ci que vient l'importance du modèle de London Chain.

### III.3 Modèle de London Chain.

Cette méthode a été introduite par Benjamin et Eagles en 1986 pour le calcul des réserves de Lloyds. Dans la méthode de London Chain, on suppose que la dynamique des coûts de sinistres est de la forme

$$\forall j = 1 \dots n - 1, \quad C_{i,j+1} = f_j \times C_{i,j} + a_j$$

Cela signifie que cette méthode repose sur l'hypothèse selon laquelle les points  $(C_{i,j}, C_{i,j+1})$  sont sensiblement alignés, à la différence que la droite n'est plus censée passer par l'origine.

Comme vu précédemment, la valeur de la constante est assez importante dans la première ligne et le test rejette sa nullité, pour la seconde année, on obtient le même résultat avec une constante encore plus grande que la première année, ce constat traduit une explosion du coût des sinistres et la déclaration de nouveaux sinistres entre la seconde et troisième année, ce qui n'est pas contradictoire avec la réalité où on enregistre des montées conséquentes dans le coût total des sinistres.

Les nuages de points correspondants au reste des années ont été présentés dans les annexes.

A partir de l'année de développement  $j=4$ , nous remarquons que les points  $(C_{i,j}, C_{i,j+1})$  s'alignent sur la droite passant par l'origine, le test ne rejette pas l'hypothèse de la nullité de la constante, nous travaillons avec un modèle avec constante nulle pour ces années et estimons les coefficients de London Chain.

Coefficients	1.28	2.24	2.52	1.96	1.17	1.07	1.04	1.03	1.01
Constante	117125.1	264208	277610	0	0	0	0	0	0

Tableau 17 : Estimation des paramètres de régression  $C_{i,j+1} = f(C_{i,j})$ .

Nous estimons la provision à constituer:

Réserve London Chain	
2004	-
2005	15 271.17
2006	61 317.42
2007	133 681.92
2008	225 499.26
2009	357 420.92
2010	593 157.60
2011	783 438.77
2012	1 236 931.24
2013	1 280 243.62
<b>Réserve Totale</b>	<b>4 686 962.92</b>

Tableau 18 : Réserve Globale sous le modèle London Chain.

La réserve totale à constituer dans ce cas est de 4 685 962.92, sensiblement supérieure à celle de Chain Ladder.

#### III.4 Introduction à la méthode de London Pivot.

Dans cette méthode, nous chercherons un paramètre  $a$  indépendant de l'année de développement  $j$  vérifiant l'équation  $(C_{i,j+1} + a) = f_j(C_{i,j} + a)$  commun à toutes les années de survenance.

Pour appliquer cette méthode, il faut procéder comme suit :

**Etape 1 :** Initialiser une valeur de  $a$  et des  $f_j$ .

**Etape 2 :** Approcher le  $f_j$  réel par  $f_j = \frac{\sum_{i=1}^{n-j} (C_{i,j+1} + a)(C_{i,j} + a)}{\sum_{i=1}^{n-j} (C_{i,j} + a)^2}$

**Etape3 :**  $a$  est la solution de  $Ba^2 + Ca + D = 0$

Avec

$$B = \sum_{j=1}^n (n - j) f_j$$

$$C = \sum_{j=1}^n (f_j \sum_{i=1}^{n-j} 2C_{i,j} - \sum_{i=1}^{n-j} (C_{i,j} + C_{i,j+1}))$$

$$D = \sum_{j=1}^n f_j \left( \sum_{i=1}^{n-j} (C_{i,j}^2 - C_{i,j} C_{i,j+1}) \right)$$

**Etape 4 :** Nous calculons  $\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^{n-j} ((C_{i,j+1} + a) - f_j(C_{i,j} + a))^2$  et chercherons à minimiser cet écart.

### III.5 Lissage des coefficients de passage.

Outre leur facilité d'utilisation et d'interprétation, les méthodes de Chain Ladder et de London Chain sont limitées et ont toutes les deux besoin d'être corrigées. La méthode de Chain Ladder repose sur l'hypothèse que les sinistres sont clos et qu'il n'y a plus de règlements à partir de la dixième année, cependant, il faut rappeler que la responsabilité Civile est une branche à développement long, donc passé 10 années, l'assureur peut être amené à régler des sinistres survenus 10 ans plus tôt, or la méthode de Chain Ladder présuppose que le sinistre est clos, c'est pour cela que nous allons corriger ce problème en procédant à une projection des coefficients de développement des sinistres. Aussi, cette méthode se base sur un nombre d'observations très limité, donc les coefficients obtenus peuvent être biaisés en cas de sursinistralité ou de soussinistralité d'où l'importance de l'ajustement des coefficients par les lois adéquates.

#### III.5.1 Choix de la distribution.

Les 4 familles que nous avons testé sont :

- La courbe exponentielle négative :  $f(j) = 1 + a \times e^{-bj}$   $a \in R, b > 0$ .
- La courbe puissance inverse :  $f(j) = 1 + a \times b \times (j + c)^{-b}$   $a, c \in R, b > 0$ .
- La courbe de puissance :  $f(j) = a^{bj}$   $a, b \in R$ .
- La courbe de Weibull :  $f(j) = \frac{1}{(1 - \exp(-a \times j^b))}$   $a, b \in R$

L'estimation des paramètres des lois a été effectuée avec la méthode des moindres carrés et nous avons obtenus les résultats suivants :

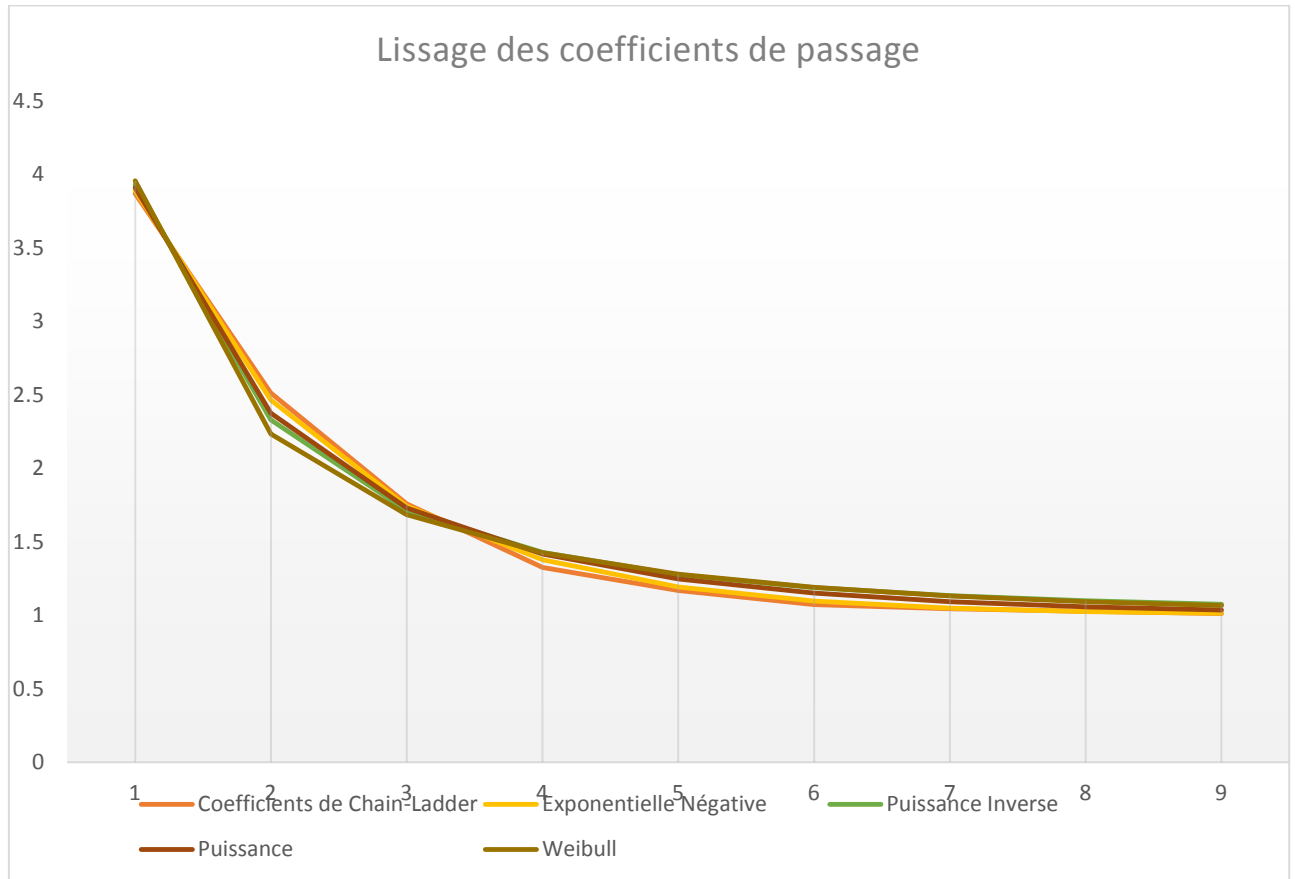


Figure 6 : Lissage des coefficients de passage.

La courbe qui s’ajuste le plus à notre distribution est celle de la loi exponentielle négative de paramètres  $\hat{a}=3.1970$  et  $\hat{b}= -0.5157$  , nous calculerons la réserve à constituer à partir des paramètres de la loi obtenue :

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Coefficients de Chain Ladder Ajustés	388.99%	246.60%	174.37%	137.72%	119.14%	109.71%	104.92%	102.50%	101.27%

III.5.2 Projection des coefficients de Chain Ladder.

Pour palier au problème posé par le développement très long enregistré dans l’Automobile, nous avons projeté les coefficients sur les cinq prochaines années.

	1	2	3	4	5	6	7
Coefficients de Chain Ladder Ajustés	388.99 %	246.60 %	174.37 %	137.72 %	119.14 %	109.71 %	104.92 %
	8	9	10	11	12	13	14
Coefficients de Chain Ladder Ajustés	102.50 %	101.27 %	100.64 %	100.33 %	100.17 %	100.08 %	100.04 %

Tableau 19 :Coefficients de Chain Ladder projetés.

Voici donc le calcul de la provision à constituer :

Réserve de Chain-Ladder ajusté	
2004	17 666.11
2005	32 721.69
2006	82 267.82
2007	155 375.19
2008	247 454.10
2009	379 439.53
2010	612 240.95
2011	797 892.09
2012	1 054 849.43
2013	1 096 598.98
<b>Réserve Totale</b>	
	<b>4 476 505.90</b>

Tableau 20 : Réserves de Chain Ladder ajustés.

La provision calculée est très éloignée par rapport à celle de Chain Ladder Corrigée et reflète plus la réalité économique dans le sens où ces coefficients sont moins sensibles à des années de sinistralité exceptionnelle.

### III.6 Méthode De Vylder.

La méthode des moindres carrés de De Vylder s'appuie sur une modélisation des règlements non cumulés. Elle fait partie de la modélisation factorielle qui permet d'écrire les montants incrémentaux comme le produit de trois facteurs :

- $\alpha_i$  :Facteur correspondant aux semestres d'origine  $i \in \{1, \dots, n\}$ .

- $\beta_j$  :Facteur relatif aux delais de règlement  $j \in \{1, \dots, n\}$ .
- $\gamma_{i+j}$  :Facteur représentant l'inflation .

Le modèle De Vylder ne prend pas en considération l'effet de l'inflation, donc  $\gamma_{i+j} = 1$  cela concorde parfaitement avec les lois édictées par la DAPS, qui autorise les sociétés d'Assurance au Maroc à ne pas tenir compte de l'inflation pour régler des sinistres antérieurs.

Le modèle de De Vylder s'écrit :

$$C_{i,j} = \alpha_i \times \beta_j$$

Il y'a une seconde contrainte dans ce modèle qui stipule que  $\sum_{j=1}^n \beta_j = 1$ , donc la somme  $\sum_{j=1}^n C_{i,j} = \alpha_i$ , ainsi le paramètre  $\alpha_i$  peut être interprété comme la charge ultime de l'année de survenance  $i$  et l'équation  $\beta_j = \frac{C_{i,j}}{\alpha_i}$  traduit le fait que  $\beta_j$  est la proportion du sinistre payée dans l'année  $j$ .

Les estimations des  $\hat{\beta}_j$  et  $\hat{\alpha}_i$  sont obtenus par la méthode des moindres carrés ordinaires et ont été obtenus grâce au Solveur d'Excel.

$\beta_1$	4.93%
$\beta_2$	8.88%
$\beta_3$	17.31%
$\beta_4$	23.62%
$\beta_5$	18.83%
$\beta_6$	12.34%
$\beta_7$	6.29%
$\beta_8$	4.10%
$\beta_9$	2.60%
$\beta_{10}$	1.11%

Tableau 21 : Tableau des  $\beta$ .

$\alpha_1$	1 395 473.94
$\alpha_2$	1 378 666.22
$\alpha_3$	1 655 496.55
$\alpha_4$	1 714 555.63
$\alpha_5$	1 757 386.48
$\alpha_6$	1 879 835.93
$\alpha_7$	1 674 527.67
$\alpha_8$	1 153 429.45
$\alpha_9$	1 292 976.60
$\alpha_{10}$	239 392.51

Tableau 22 : Tableau des  $\alpha$ .

La réserve obtenue est de :

Réserve de De Vylder	
2004	-
2005	15 253.53
2006	61 339.44
2007	133 739.71
2008	247 683.97
2009	496 906.74
2010	757 915.44
2011	794 554.88
2012	1 114 466.66
2013	227 599.82
Réserve Totale	3 849 460.21

Tableau 23 : Réserve calculée par la méthode de De Vylder.

La réserve obtenue par la méthode de De Vyler est égale à 3 849 460.21 KDhs et est très proche de celle obtenue par la méthode de Chain Ladder non corrigée, l'écart est inférieur à 1%.

## Partie III : Calcul Stochastique des Provisions pour Sinistres A Payer.

Cette partie regroupera un certain nombre de méthodes stochastiques, ayant pour but de quantifier la marge d'erreur dans le calcul des provisions techniques, le référentiel Solvency II marque le passage du système déterministe à un système où la prudence est quantifiée de manière explicite.

Le premier chapitre traitera de différentes méthodes stochastiques pour modéliser les provisions techniques, nous nous intéresserons dans un premier temps au modèle de Mack, version stochastique du modèle de Chain Ladder, pour déboucher sur le modèle GLM paramétrique et nous procéderons en fin de compte à un Bootstrap sur le modèle GLM retenu.

Le second chapitre, quant à lui, sera consacré au choix du modèle qui ajuste le mieux les réserves de la compagnie pour traiter à la fin du concept de la marge de risque prônée par les nouvelles normes de solvabilité.

## Introduction

L'idée dans cette partie est de pouvoir quantifier la variabilité des réserves estimées en procédant à la construction d'intervalles de confiance qui vont nous permettre de calculer une marge d'erreur sur le montant des provisions à constituer. Pour cela, les méthodes stochastiques sont adaptées, dans le sens où celles-ci considèrent les règlements sous un angle probabiliste et considèrent leurs lois de distribution.

Par ailleurs, cette modélisation stochastique revêt un aspect important dans la mesure où les nouvelles normes dictées par Solvency 2 imposent aux sociétés d'assurance de faire des calculs en matière de leurs besoins de réserves. C'est dans ce cadre ci que nous élaborerons plusieurs méthodes de provisionnement stochastiques et essayerons d'infirmer ou confirmer les hypothèses liées à ces modèles. Dans cette partie, les règlements effectués seront considérés comme variables aléatoires.

## Chapitre II : Méthodes stochastiques de calcul des Provisions Pour Sinistres A Payer.

### II.1 Modèle de Mack.

#### II.1.1 Présentation du modèle.

Ce modèle est la version Stochastique du modèle de Chain Ladder, cette méthode se base sur la réserve de Chain Ladder comme réserve à constituer et calcule les marges d'erreurs autour de cette réserve.

La méthode de Mack se base sur l'hypothèse de l'indépendance des exercices de survenance des sinistres qui a été testée auparavant.

De plus, cette méthode s'appuie sur deux hypothèses supplémentaires :

- Hypothèse 2 :  $E(C_{i,j+1} | C_{i,1}, \dots, C_{i,j}) = C_{i,j} \times f_j$  , l'espérance conditionnelle est sans biais.
- Hypothèse 3 :  $V(C_{i,j+1} | C_{i,1}, \dots, C_{i,j}) = C_{i,j} \times \sigma_j^2$  , la variance de  $C_{i,j+1}$  est donnée par la relation précédente.

Cet ensemble d'hypothèses peut être résumé en une seule hypothèse que nous testerons par la suite.

Elle stipule que :

$$C_{i,j+1} = f_j \times C_{i,j} + \sigma_j \sqrt{C_{i,j}} \times \varepsilon_{i,j}$$

Avec  $\varepsilon_{i,j}$  suivant une loi centrée réduite.

Sous ces hypothèses, Mack montre que les coefficients de Chain Ladder sont sans biais et non corrélés,

$$\text{En effet, } E(\hat{f}_j | C_{i,1}, \dots, C_{i,j}) = E\left(\frac{\sum_{i=1}^{n-j+1} C_{i,j+1}}{\sum_{i=1}^{n-j+1} C_{i,j}} \middle| C_{i,1}, \dots, C_{i,j}\right) = \frac{E(\sum_{i=1}^{n-j+1} C_{i,j+1} | C_{i,1}, \dots, C_{i,j})}{E(\sum_{i=1}^{n-j+1} C_{i,j})}$$

$$= \frac{f_j \times \sum_{i=1}^{n-j+1} E(C_{i,j})}{\sum_{i=1}^{n-j+1} E(C_{i,j})} = f_j$$

En utilisant les relations  $E(\widehat{f}_j) = E\left(E(\widehat{f}_j | C_{i,1}, \dots, C_{i,j})\right) = f_j$

Et  $E(\widehat{f}_j \times \widehat{f}_k) = E\left(E(\widehat{f}_j \times \widehat{f}_k | C_{i,1}, \dots, C_{i,j})\right) = E\left(\widehat{f}_j \times E(\widehat{f}_k | C_{i,1}, \dots, C_{i,j})\right) = E(\widehat{f}_j) \times E(\widehat{f}_k)$

Concernant les  $\sigma_j^2$ , ceux-ci peuvent être estimés par

$$\widehat{\sigma}_j^2 = \frac{1}{n-j-1} \sum_{i=0}^{n-j-1} C_{i,j} \times \left(\frac{C_{i,j+1}}{C_{i,j}} - \widehat{f}_j\right)^2, 0 \leq j \leq n-2$$

Etant donné que pour l'année  $n-1$ , une seule observation est disponible, on cherche à extrapoler la série des  $\{\widehat{\sigma}_1^2, \widehat{\sigma}_2^2, \dots, \widehat{\sigma}_{n-2}^2\}$  en imposant la condition

$$\frac{\widehat{\sigma}_{n-2}^2}{\widehat{\sigma}_{n-3}^2} = \frac{\widehat{\sigma}_{n-1}^2}{\widehat{\sigma}_{n-2}^2} \text{ (stabilité des règlements à l'approche de la clôture du sinistre).}$$

Ceci revient à prendre :

$$\widehat{\sigma}_{n-1}^2 = \min\left(\frac{\widehat{\sigma}_{n-2}^4}{\widehat{\sigma}_{n-3}^2}, \widehat{\sigma}_{n-2}^2, \widehat{\sigma}_{n-3}^2\right)$$

### II.1.2 Concept d'Erreur quadratique moyenne.

L'objectif des modèles stochastiques est de mesurer entre autres, l'erreur de la prévision, elle sera estimée par l'erreur quadratique moyenne ou Means Square Error qui représente la distance moyenne entre la prévision et la vraie valeur.

Pour calculer l'erreur quadratique de la réserve à constituer, il suffit de calculer celle relative à la charge finale du sinistre.

$$\begin{aligned} \text{En effet } MSE(R_i) &= E\left(\left(\widehat{R}_i - R_i\right)^2 \middle| (C_{i,1}, \dots, C_{i,j})\right) = E\left(\left(\widehat{C}_{i,n} - C_{i,j}\right) - \left(C_{i,n} - C_{i,j}\right)\right)^2 \\ &= E\left(\widehat{C}_{i,n} - C_{i,n}\right) = MSE(C_{i,n}) \end{aligned}$$

Sous ces hypothèses, Mack montre que l'erreur quadratique moyenne de l'année  $i$  peut être estimée par :

$$\widehat{MSE}(R_i) = \widehat{MSE}(C_{i,n}) = \widehat{C}_{i,n}^2 \times \sum_{j=n-i}^{n-1} \frac{\widehat{\sigma}_j^2}{\widehat{f}_j} \times \left( \frac{1}{\widehat{C}_{i,j}} + \frac{1}{\sum_{k=1}^{n-j} C_{i,k}} \right)$$

$$\widehat{MSE}(R) = \sum_{i=1}^n \left\{ \widehat{MSEP}(\widehat{R}_i) + \widehat{C}_{i,n} \times \left( \sum_{k=i+1}^n \widehat{C}_{k,n} \right) \times \sum_{j=n-i}^{n-1} \frac{2\widehat{\sigma}_j^2}{\widehat{f}_j^2 \times \sum_{u=0}^{n-j} C_{u,j}} \right\}$$

Nous avons calculé dans un premier temps les erreurs quadratiques moyennes :

Mse(Ri)
141359201.2
192650349.3
223315211.2
326187644.1
1347515894
6048681355
10657642851
88802696777
50721754541
1.93165E+11

Tableau 24 : Erreur quadratique moyenne

selon l'année de survenance.

II.1.3 Construction des intervalles de confiance.

Pour construire un intervalle de confiance, on calcule l'erreur standard (Racine carrée de l'erreur moyenne standard)

Le modèle de Mack ne présuppose pas de distribution préalable des réserves, cependant, pour construire les intervalles de confiance, il est primordial de considérer une distribution des réserves .

II.1.3.1 Distribution normale des réserves.

Dans un premier temps, nous allons considérer une distribution normale des réserves, ce qui veut dire que l'intervalle de confiance sera donné par la relation :

$$IC(R_i) = [\widehat{R}_i - 1.96 \times \widehat{SE}(R_i); \widehat{R}_i + 1.96 \times \widehat{SE}(R_i)]$$

Loi Normale	
Borne Inférieure	Borne Supérieure
12946.26	18 038.79
56 297.20	67 520.31
124 172.62	145 130.38
226 826.76	270 450.34
432 299.31	563 643.65
579 427.87	887 377.26
575 438.17	977 915.77
617 100.98	1 867 409.85
-261773.7437	954 372.06
3 082 271.30	5 032 322.54

Tableau 25 : Intervalles de confiance avec loi normale.

La longueur de l'intervalle de confiance est assez large:

$$5\,032\,322.54 - 3\,082\,271.30 = 1\,950\,051.24 \text{ KDHS}$$

Par ailleurs, le rapport entre l'erreur Standard et la réserve de Chain Ladder est assez grand (45%), ce qui veut dire que la loi normale est peu fiable pour estimer les intervalles de confiance.

#### II.1.3.2 Distribution Log-Normale des réserves.

Le choix de la loi Log-Normale s'est basé sur le fait que cette loi présente une distribution positive et une queue de distribution assez longue, nous choisirons une loi de paramètres  $\mu_i$  et  $\sigma_i$ .

On sait que, l'espérance et écart type d'une loi Log-Normale s'écrivent respectivement :

$$E(X_i) = e^{\mu_i + \frac{\sigma_i^2}{2}} \text{ et } Var(X_i) = (e^{\sigma_i^2} - 1) \times e^{2\mu_i + \sigma_i^2}$$

En usant de  $\widehat{R}_i$  et de  $\widehat{SE}(R_i)$  comme estimateurs de la réserve et de l'écart type, nous obtenons :

$$\widehat{\sigma}_i^2 = \ln\left(1 + \left(\frac{\widehat{SE}(R_i)}{\widehat{R}_i}\right)^2\right)$$

Et

$$\hat{\mu}_i = \ln(\hat{R}_i) - \frac{\hat{\sigma}_i^2}{2}$$

Et les intervalles de confiance :

$$IC(R_i) = [\exp(\hat{R}_i - 1.96 \times SE(\hat{R}_i)); \exp(\hat{R}_i + 1.96 \times SE(\hat{R}_i))]$$

Loi LogNormale	
Borne Inférieure	Borne Supérieure
15 227.76	15 651.83
61 584.24	62 102.16
134 130.72	134 961.54
247 417.50	249 366.09
492 468.61	501 266.44
713 106.13	745 720.54
744 271.60	796 572.72
1 061 707.25	1 363 612.43
81 272.22	818 582.86
3 911 069.81	5146654.41

Tableau 26 : Intervalles de confiance avec loi LogNormale.

En adoptant la loi Log Normale, nous avons obtenu des résultats plus fiables dans le sens où la longueur de l'intervalle est moindre, l'écart entre la borne inférieure et la borne supérieure n'est que de 1 235 584 KDhs.

#### II.1.4 Comparaison des deux distributions.

Nous avons fait un graphique mesurant les différences dans les longueurs des intervalles de confiance :

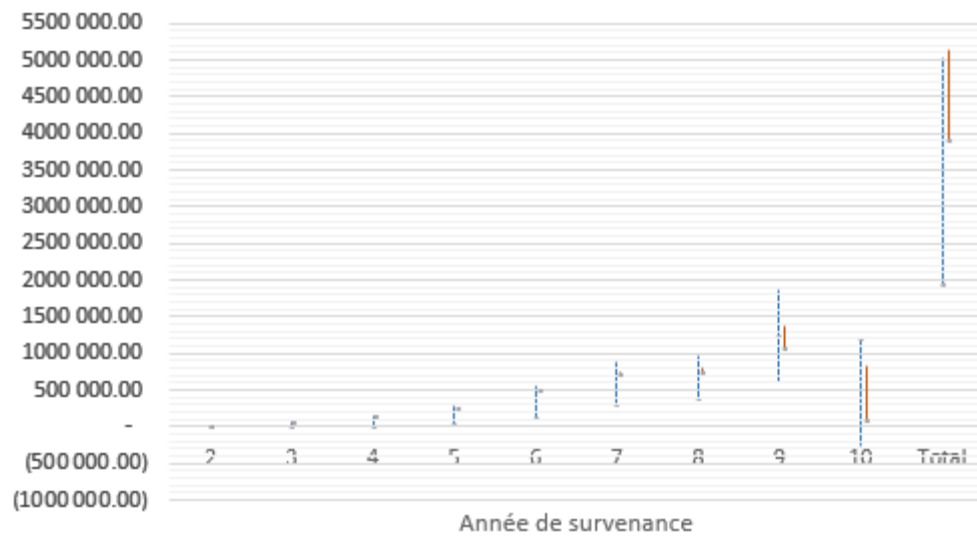


Figure 7 : Comparaison en les intervalles de confiance de la distribution Normale et LogNormale.

II.1.5 Vérification des hypothèses de Mack.

Le modèle de Mack repose sur des hypothèses semblables à celles de Chain Ladder, les tests déjà élaborés ont permis d'accepter l'hypothèse de l'indépendance et de rejeter celle sur la linéarité et nullité de la constante entre les premières années de règlements.

Nous avons vérifié l'exactitude de l'hypothèse 3 pour l'année de développement  $j=1$ .

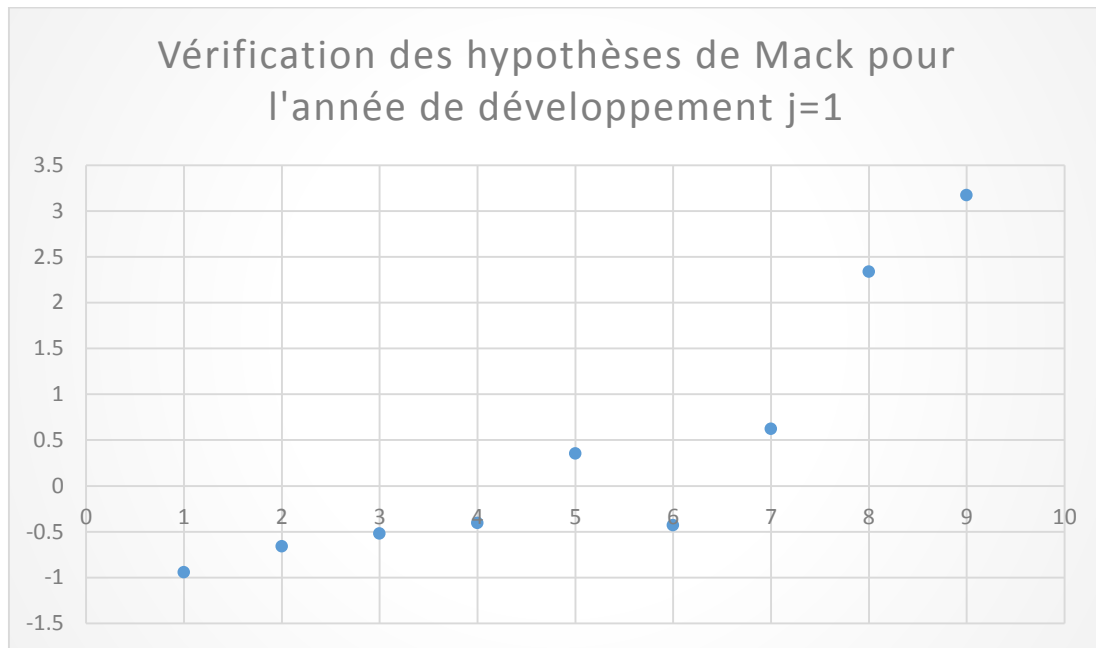


Figure 8 : Vérification des hypothèses 2 et 3 de Mack pour l'année de développement  $j=1$ .

Il est clair qu'une tendance se dessine pour la variable  $\frac{C_{i,j+1}-f_j \times C_{i,j}}{\sigma_j \sqrt{C_{i,j}}}$ , comme attendu, cette variable n'est pas aléatoire, ce n'est qu'à partir de la quatrième année que cette tendance disparaît.

#### II.1.6 Correction du biais du modèle de Mack.

Etant non vérifiées, nous avons essayé de parier aux problèmes posés par les hypothèses 2 et 3 en corrigeant le biais trouvé dans l'estimation des  $C_{i,j}$ .

En effet, sous certaines contraintes, l'estimateur  $\hat{f}_j$  n'est pas nécessairement un estimateur sans biais de  $f_j$ , nous chercherons à corriger le biais de cet estimateur, donc celui de  $\widehat{C}_{i,j}$ . Pour ce faire, nous allons adopter une approximation de  $E(\widehat{C}_{i,j})$  en usant des développements en série de Taylor :

$$E(f(X)) = E(f(\mu + (X - \mu))) = E\left(\sum_{j=0} f^{(j)}(\mu) \frac{(X - \mu)^j}{j!}\right) \approx f(\mu) + \frac{1}{2} \sigma^2 f''(\mu).$$

Où  $\mu$  est le moment d'ordre  $j$  de  $X$ .

La fonction qui s'impose et qui facilite le travail est sans doute la fonction exponentielle ( $f(\mu) = f''(\mu)$ ) donc :

$$E(\exp(X)) = \exp(\mu) \times (1 + \frac{1}{2}\sigma^2)$$

Et nous poserons :

$$X = \log(\widehat{C}_{i,j})$$

Donc 
$$E(\widehat{C}_{i,j}) = C_{i,j} \times (1 + \frac{1}{2}VAR(\log(\widehat{C}_{i,j}))) .$$

Le biais de l'estimation est égale à  $\frac{1}{2} \times C_{i,j} \times VAR(\log(\widehat{C}_{i,j}))$

La variation estimée par Taylor est égale à  $\frac{1}{2} \widehat{C}_{i,j} \times \sum_{h=n+1-i}^{k-1} \widehat{\sigma}_h^2 \times (1 + \frac{1}{n+1-k})$

Avec  $\widehat{\sigma}_h^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n-h} [k_{i,h} - \varepsilon_{i,h}]^2}{n-h}$  et  $\widehat{\varepsilon}_h = \sum_{i=1}^{n-h} \frac{k_{i,h}}{n-h}$

Les formules ont donné les calculs suivants :

	1	2	3	4	5	6	7	8
$\widehat{\varepsilon}_h$	2.8198685	1.4218159	0.7705977	0.3562446	0.1681797	0.0728082	0.0448276	0.0272026
$\widehat{\sigma}_h$	0.0780138	0.0581470	0.0377712	0.0274681	0.0111294	0.0000953	0.0000263	0.0000094

Tableau 27 : Calculs de  $\widehat{\varepsilon}_h$  et  $\widehat{\sigma}_h$  du biais de Mack .

Nous avons calculé les résultats donnés en corrigeant le biais de Mack.

Réserve Initiale	Réserve corrigée
-	-
15 492.52	18 126.25
61 908.75	72 433.24
134 651.50	157 542.26
248 638.55	290 907.11
497 971.48	582 626.63
760 260.75	889 505.07
795 177.12	930 357.23
1 114 521.19	1 303 989.79
227 780.03	266 502.63
3 856 401.90	4 511 990.22

Tableau 28: Comparaison entre le modèle initial et le modèle corrigé de Chain Ladder.

Le problème qui se pose désormais concerne l'élaboration d'intervalles de confiance en fonction du biais, pour cela, il faut calculer les Erreurs Standard, ce qui pose un très grand problème vu la complexité des formules du biais et demande des calculs analytiques très difficiles. Nous pouvons néanmoins garder la valeur estimée par ce modèle comme estimation de la réserve à constituer.

## II.2 Calcul des provisions par la méthode GLM.

### II.2.1 Présentation des modèles linéaires généralisés.

Les modèles linéaires généralisés ont été définis pour la première fois par John Nelder et Robert Wedderburn en 1972. Ils sont venus pallier à l'étroitesse des modèles linéaires car ils permettent de considérer des lois de probabilités autres que la loi Gaussienne et des fonctions de lien autres que l'identité.

### II.2.2 Formalisme mathématique.

Les modèles GLM se basent sur trois composantes :

- La composante aléatoire : On cherche à expliquer les variables aléatoires réelles dont la loi de probabilité est de type exponentiel. On se situe dans le cadre suivant :

(H1) Les paiements annuels non cumulés  $Y_{i,j}$  sont indépendants.

(H2) Les paiements annuels non cumulés  $Y_{i,j}$  appartiennent à la famille exponentielle de densité :

$$f_{\theta}(y) = \exp\left(\frac{y\theta - b(\theta)}{\phi} + c(y, \phi)\right)$$

Où :  $\theta$  est un paramètre réel, appelé paramètre naturel,

$\theta$  est un paramètre de dispersion strictement positif,

$b$  et  $c$  sont des fonctions spécifiques de la distribution,

On montre que :

$\mu = E(Y) = b'(\theta)$  soit  $\theta = b'^{-1}(\mu)$  si  $b'$  est inversible

$Var(Y) = b''(\theta) \times \phi = b''(b'^{-1}(\mu)) \times \phi = V(\mu) \times \phi$

La fonction  $V(\cdot)$  est appelée fonction variance de la distribution et joue un rôle essentiel dans la modélisation GLM.

- La composante systématique : Soit  $X$  la matrice de régression et  $\beta$  le vecteur des paramètres. La composante systématique est notée  $Z$  et est définie par  $Z = X \times \beta$ .
- La fonction lien :  $C$ 'est la fonction qui fait le lien entre la composante aléatoire et la composante systématique. Il s'agit d'une fonction  $g$  telle que :

$$g(\mu) = z \text{ ou bien } \mu_{i,j} = g^{-1}(z_{i,j})$$

Dans le cadre des méthodes stochastiques dédiées au calcul des provisions, la modélisation GLM tente de donner une estimation ponctuelle et par intervalle de confiance pour les différentes provisions. Ainsi, elle sélectionne le modèle probabiliste le plus adéquat aux incréments de paiement du triangle supérieur. Elle permet également le calcul des différents risques d'estimation ainsi que les mesures de la qualité d'ajustement du modèle choisi.

Dans cette section, nous appliquerons l'approche GLM sur les éléments du triangle de liquidation supposés aléatoires.

### II.2.3 Modèle de Poisson.

Notre intérêt s'est porté sur le modèle de Poisson dans le sens où les résultats prédits par cette approche avec la fonction de lien logarithmique sont identiques à ceux de Chain Ladder (Théorème de Renshaw & Verrall).

Pour le modèle de poisson simple, on considère que les règlements non cumulés sont indépendants et suivent une loi de Poisson.

On aura donc :

$$P(Y = y) = \exp\left\{\frac{y \ln(\gamma) - \gamma}{\phi} - \ln(y!)\right\}$$

Par identification, nous obtenons :  $\theta = \ln(\gamma)$   $b(\theta) = \gamma$   $\phi = 1$

$$c(y, \phi) = -\ln(y!)$$

$$E(Y) = b'(\theta) = \gamma$$

$$Var(Y) = \phi V(\mu) = \gamma$$

L'estimation des paramètres de la régression de Poisson a été faite sous SAS et a donné les résultats suivants :

Analysis Of Maximum Likelihood Parameter Estimates							
Parameter	DDL	Valeur estimée	Erreur type	Wald 95% Confidence Limits		Wald Chi-Square	Pr > Khi-2
Intercept	1	7.7549	0.0127	7.7299	7.7798	370690	<.0001
A1	1	1.9054	0.0099	1.8859	1.9248	36871.9	<.0001
A2	1	1.7183	0.0099	1.6988	1.7377	29945.0	<.0001
A3	1	1.9038	0.0099	1.8844	1.9233	36809.0	<.0001
A4	1	2.0844	0.0099	2.0650	2.1039	44166.2	<.0001
A5	1	1.9667	0.0099	1.9372	1.9761	38874.0	<.0001
A6	1	2.0342	0.0099	2.0147	2.0536	42004.9	<.0001
A7	1	1.7325	0.0100	1.7130	1.7520	30309.7	<.0001
A8	1	1.5352	0.0100	1.5155	1.5548	23454.0	<.0001
A9	1	1.8083	0.0101	1.7885	1.8281	32071.7	<.0001
A10	0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	.	.
B1	1	1.4948	0.0081	1.4789	1.5108	33810.6	<.0001
B2	1	2.3677	0.0081	2.3518	2.3835	86076.7	<.0001
B3	1	2.8226	0.0081	2.8068	2.8384	122819	<.0001
B4	1	3.2546	0.0080	3.2388	3.2704	163711	<.0001
B5	1	2.8567	0.0081	2.8409	2.8725	125698	<.0001
B6	1	2.3882	0.0081	2.3724	2.4041	87138.5	<.0001
B7	1	1.7407	0.0082	1.7246	1.7567	45193.0	<.0001
B8	1	1.4673	0.0083	1.4510	1.4837	31028.7	<.0001
B9	1	0.9574	0.0088	0.9401	0.9746	11834.6	<.0001
B10	0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	.	.
Scale	0	1.0000	0.0000	1.0000	1.0000		

Tableau 29 : Estimation des paramètres dans la distribution de Poisson.

La statistique de Wald élaborée sous l'hypothèse nulle  $H_0 : a_j = 0$  rejette la nullité des paramètres de régression, concernant les paramètres A10 et B10, une contrainte sur les paramètres pour rendre le problème identifiable a été rajoutée, c'est ce qui explique leur valeur mise à zéro.

Les réserves à constituer sont exactement celles trouvées par la méthode non corrigée de Chain Ladder.

II.2.4 Ajustement des règlements non cumulés.

II.2.4.1 Tests d'adéquation des lois statistiques.

Dans le cadre de notre projet, nous nous sommes intéressés à différentes lois de distribution des règlements cumulés avant de choisir celle qui s'adapte le plus à nos données.

Pour cela nous avons procédé dans un premier temps à des QQ-Plots que nous validerons grâce aux Statistiques de Kolmogorov Smirnov et de tests sur l'AIC.

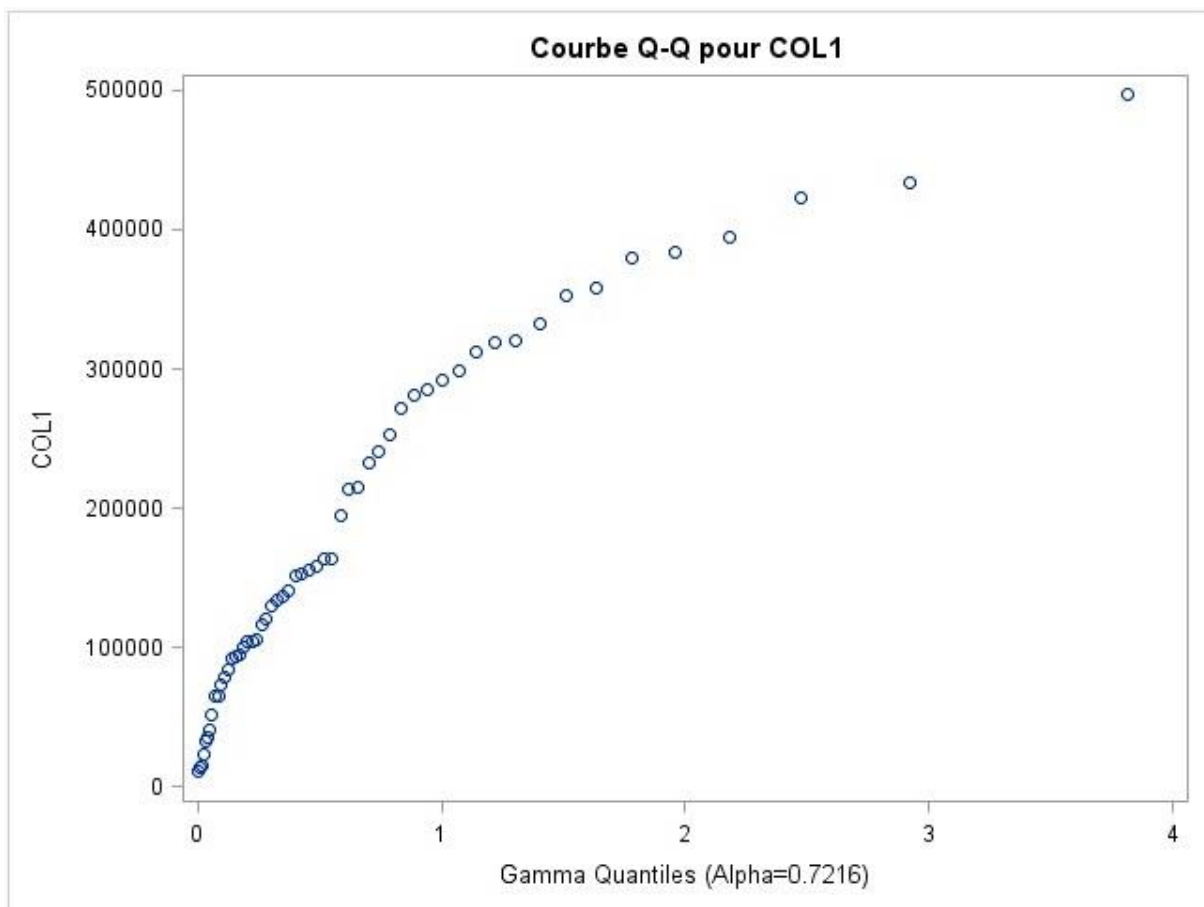


Figure 9 : QQ Plot de la distribution Gamma.

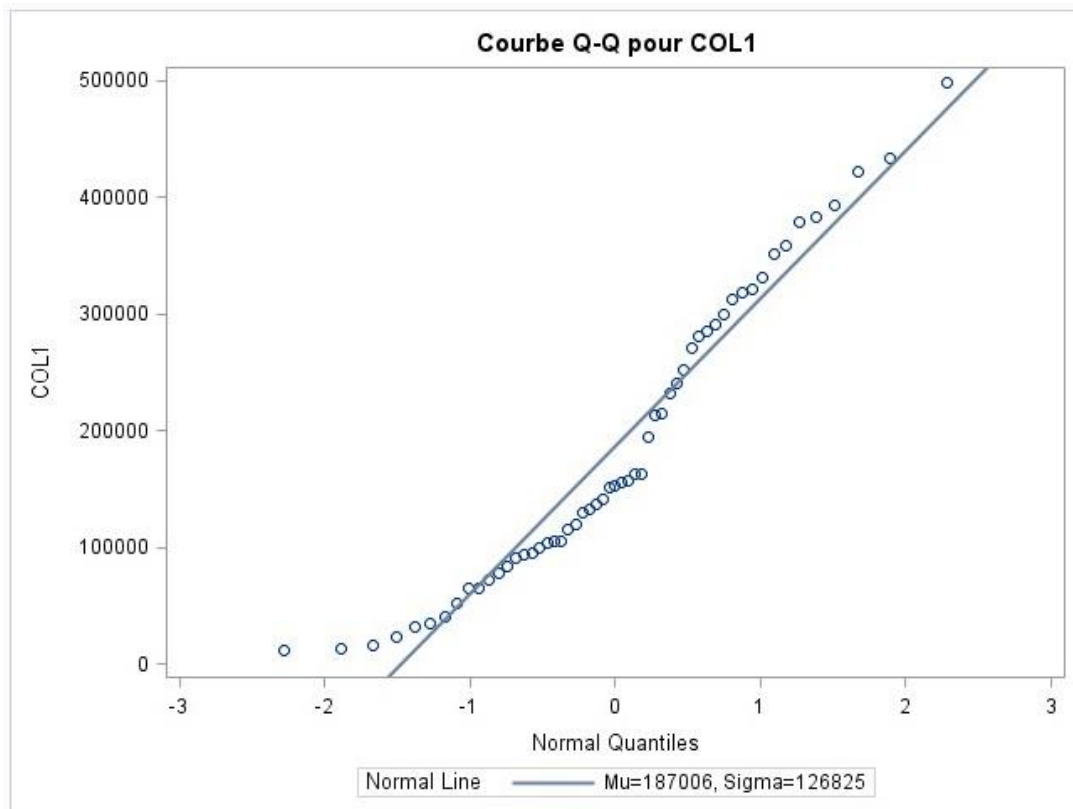


Figure 10 : QQ Plot de la distribution Normale

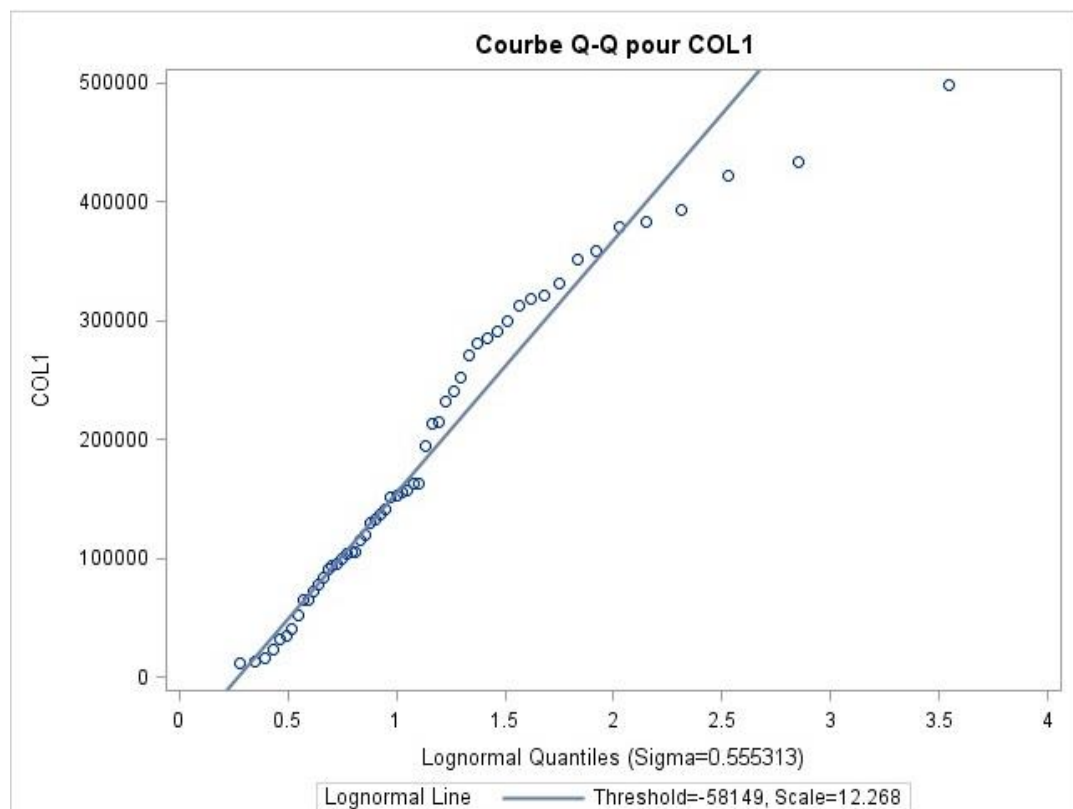


Figure 11 : QQ Plot de la distribution LogNormale.

Pour mieux apprécier le modèle à privilégier, nous nous sommes basés sur la statistique de Kolmogorov Smirnov qui donne les résultats suivants :

Goodness-of-Fit Tests for Gamma Distribution				
Test	Statistique		P-value	
Kolmogorov-Smirnov	D	0.08838984	Pr > D	>0.250
Cramer-von Mises	W-Sq	0.06048152	Pr > W-Sq	>0.250
Anderson-Darling	A-Sq	0.46317394	Pr > A-Sq	>0.250

Tableau 30 : Test de Kolmogorov-Smirnow de la distribution Gamma.

Goodness-of-Fit Tests for Normal Distribution				
Test	Statistique		P-value	
Kolmogorov-Smirnov	D	0.15632725	Pr > D	<0.010
Cramer-von Mises	W-Sq	0.20740513	Pr > W-Sq	<0.005
Anderson-Darling	A-Sq	1.14716837	Pr > A-Sq	<0.005

Tableau 31 : Test de Kolmogorov-Smirnow de la distribution Normale.

Goodness-of-Fit Tests for Lognormal Distribution				
Test	Statistique		P-value	
Kolmogorov-Smirnov	D	0.09355733	Pr > D	>0.150
Cramer-von Mises	W-Sq	0.14678622	Pr > W-Sq	0.025
Anderson-Darling	A-Sq	1.09727487	Pr > A-Sq	0.007

Tableau 32 : Test de Kolmogorov-Smirnow de la distribution LogNormale.

N'étant que descriptives, nous avons procédé au calcul de l'AIC pour trancher sur le modèle à choisir :

Statistique de l'AIC	
Modèle Normal	1 384.37
Modèle Log-Normal	1 451.64
Modèle Gamma	1 332.80

Tableau 33 : Comparaison de la Statistique de l'AIC.

Il est clair que la statistique de l'AIC confirme les résultats donnés par le QQ-Plot et la statistique de Kolmogorov-Smirnov, nous nous intéressons à présent aux résultats mathématiques relatifs à ce modèle.

#### II.2.4.2 Le Modèle Gamma.

##### II.2.4.2.1 Formalisme mathématique du modèle Gamma.

Cette loi s'adapte pour des phénomènes avec des grandeurs positives, la fonction de densité s'écrit comme suit :

$$f(z, a, b) = \frac{b^a}{\Gamma(a)} z^{a-1} e^{-bz} \text{ pour } z > 0$$

Cette loi peut s'écrire sous forme exponentielle, il suffit de considérer  $a = v$  et  $b = \frac{v}{\mu}$ , la formule devient :

$$f(z) = e^{((-\frac{v}{\mu} - \ln(\mu))v + c(z,v))}$$

Par identification, nous avons :

$$\phi = \frac{1}{v}$$

$$\theta = -\frac{1}{\mu}$$

$$E(Z) = \mu$$

$$V(\mu) = \mu^2$$

Nous remarquons que les règlements des cellules (10,1) et (1,10) non cumulés établis dans le GLM sont identiques aux règlements réels.

Ceci vient du fait, que par identification, SAS pose  $A_{10}=B_{10}=0$ , et retrouve par construction du problème  $exp^{(\alpha_1+\beta_{10}+m)} = exp^{(\alpha_1+m)} = y_{10,1}$

Et  $exp^{(\alpha_{10}+\beta_1+m)} = exp^{(\beta_1+m)} = y_{1,10}$

Le triangle avec les règlements déjà effectués est l'échantillon grâce auquel nous retrouverons les paramètres de notre distribution.

Concernant les variables explicatives que nous retiendrons dans notre modèle, il s'agit de :

- L'année de survenance : Sous SAS, elle correspondra aux paramètres A
- L'année de développement : Sous SAS, elle correspondra aux paramètres B.
- L'année calendaire : Ce paramètres est lié à l'année dans lesquels ont été faits les règlements, donc il s'agit de paramètres liées aux diagonales des triangles et sont interprétées comme étant le facteur d'inflation, cependant nos données sont déflatées, donc le paramètre sera considéré comme constant, ce paramètre sera noté  $\mu$ .

La fonction de lien qui sera considérée est la fonction logarithmique qui facilite pour SAS le calcul de la fonction de vraisemblance. Donc

$$\ln(E((Y_{i,j})) = \mu + A_i + B_j$$

Il faut désormais déterminer les estimateurs des paramètres  $\mu, A_i$  et  $B_j$ . Nous allons les trouver en nous basant sur la fonction de Maximum de vraisemblance, que nous noterons  $L(Y_{i,j}, \varepsilon)$  où  $\varepsilon = (A_i, B_j, \mu)$ , il faut annuler les dérivées partielles du log vraisemblance  $\ln(L) = l$ .

La log-vraisemblance a pour expression :

$$l((Y_{i,j}, \varepsilon)) = \frac{1}{\phi} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{J-i+1} (y_{i,j} \ln(\mu + A_i + B_j) - \exp^{\mu+A_i+B_j}) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{J-i+1} c(y_{i,j}, \phi)$$

Qu'il faut dériver par rapport aux paramètres que nous cherchons à trouver, d'où le système que nous obtenons, appelé système de Wedder-Burn :

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{J-i+1} \frac{(Y_{i,j} - \mu_{i,j})}{V(\mu_{i,j})} \frac{\delta \mu_{i,j}}{\delta \eta_{i,j}} b_{i,j}^{(n)}, n = 1, \dots, 2n + 1$$

Avec  $b_{i,j}^{(n)}$  est la dérivée partielle de  $\eta_{i,j}$  par rapport au nième élément de la suite  $(\mu, (A_i), (B_j))$ .

NB : La fonction C n'a pas d'importance car en dérivant la log-vraisemblance, celle-ci s'annulera.

Pour déterminer nos paramètres, nous prendrons  $A_{10}$  et  $B_{10}$  nuls pour éviter la surparamétrisation de notre problème, nous allons dériver notre fonction par rapport aux paramètres de régression :

$$\frac{\partial l}{\partial \mu} = \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^{J-i+1} (y_{i,j} - \exp^{(A_i+B_j+\mu)}) = 0$$

$$\frac{\partial l}{\partial B_i} = \sum_{j=1}^{J-i+1} (y_{i,j} - \exp^{(A_i+B_j+\mu)}) = 0, i = 1, \dots, 10.$$

$$\frac{\partial l}{\partial A_j} = \sum_{i=1}^{I-j+1} (y_{i,j} - \exp^{(A_i+B_j+\mu)}) = 0, j = 1, \dots, 10$$

Qu'il faut résoudre numériquement grâce à SAS.

II.2.4.2.2 Résultats de la modélisation avec le modèle Gamma.

Ci-dessous les paramètres de la modélisation GLM :

Analysis Of Maximum Likelihood Parameter Estimates							
Parameter	DDL	Valeur estimée	Erreur type	Wald 95% Confidence Limits		Wald Chi-Square	Pr > Khi-2
Intercept	1	7.8513	0.4176	7.0329	8.6698	353.49	<.0001
A1	1	1.8089	0.3088	1.2036	2.4142	34.31	<.0001
A2	1	1.7958	0.3096	1.1890	2.4025	33.65	<.0001
A3	1	1.9336	0.3108	1.3244	2.5429	38.70	<.0001
A4	1	2.0176	0.3131	1.4041	2.6312	41.54	<.0001
A5	1	1.9480	0.3168	1.3270	2.5690	37.80	<.0001
A6	1	2.0181	0.3191	1.3927	2.6435	40.00	<.0001
A7	1	1.7195	0.3293	1.0740	2.3649	27.26	<.0001
A8	1	1.2755	0.3419	0.6054	1.9455	13.92	0.0002
A9	1	1.4581	0.3601	0.7524	2.1639	16.40	<.0001
A10	0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	.	.
B1	1	1.5085	0.3088	0.9032	2.1138	23.86	<.0001
B2	1	2.2106	0.3134	1.5964	2.8248	49.77	<.0001
B3	1	2.8591	0.3168	2.2382	3.4800	81.45	<.0001
B4	1	3.1226	0.3159	2.5034	3.7419	97.69	<.0001
B5	1	2.8695	0.3158	2.2505	3.4884	82.57	<.0001
B6	1	2.4207	0.3190	1.7955	3.0459	57.58	<.0001
B7	1	1.7255	0.3256	1.0872	2.3637	28.08	<.0001
B8	1	1.3161	0.3348	0.6599	1.9724	15.45	<.0001
B9	1	0.8462	0.3521	0.1561	1.5362	5.78	0.0162
B10	0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	.	.
Scale	1	12.6574	2.3825	8.7522	18.3049		

Tableau 34 : Paramètres de la loi Gamma.

Comme pour le modèle de Poisson, le test de Wald rejette la nullité de tous les paramètres de la modélisation, tous les paramètres sont alors significatifs au seuil 5%.

Voici donc les estimations et prévisions faites avec le modèle Gamma des règlements non cumulés et la réserve à constituer correspondante :

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	70 880.35	143 033.04	273 570.45	356 063.11	276 421.32	176 468.67	98 054.69	78 476.07	36 548.75	15 681.40
2	69 954.80	141 165.32	269 998.19	351 413.66	272 811.83	174 164.35	96 904.87	67 712.50	36 071.50	15 476.63
3	80 296.56	162 034.47	309 913.32	403 364.83	313 142.92	199 911.90	109 752.44	76 244.41	41 404.12	17 764.61
4	87 332.74	176 233.14	337 070.24	438 710.67	340 582.84	217 429.68	108 493.49	72 049.24	45 032.26	19 321.28
5	81 457.18	164 376.56	314 392.87	409 195.16	317 669.15	202 801.47	101 194.28	67 201.93	32 002.59	18 021.39
6	87 371.60	176 311.57	337 220.24	438 905.90	340 734.40	217 526.44	108 541.78	72 081.31	35 052.30	19 329.88
7	64 817.28	130 798.06	250 169.37	325 605.64	252 776.38	201 373.62	90 522.53	73 474.06	43 422.39	14 340.02
8	41 576.93	83 900.18	160 470.69	308 859.15	182 142.95	183 512.82	101 651.03	64 300.84	31 438.73	9 198.38
9	49 909.68	100 715.25	192 631.84	350 718.20	204 639.25	194 258.61	112 002.81	61 175.33	35 735.43	11 041.89
10	11 612.49	22 433.42	53 819.66	76 334.61	43 286.72	77 911.25	43 426.20	18 580.27	6 087.86	2 569.12

Tableau 35 ; Règlements prédits par le modèle Gamma.

Réserve GLM modèle Gamma	
2004	-
2005	15 476.63
2006	59 168.74
2007	136 402.79
2008	218 420.19
2009	452 531.70
2010	675 909.00
2011	1 081 103.88
2012	1 162 203.36
2013	444 449.11
<b>Réserve totale Gamma</b>	<b>4 245 665.39</b>

Tableau 36 : Réserves prédites par le modèle Gamma.

La provision à constituer par la modèle Gamma est de 4 245 665.39 KDhs,

Pour le calcul de l'erreur d'estimation nous procéderons à la technique du Bootstrap .

### II.3 Technique du Bootstrap.

#### II.3.1 Présentation de la technique.

Cette méthode vient pallier aux problèmes liés aux problèmes de non suffisance des données.

C'est une technique statistique de rééchantillonnage utilisant des simulations de Monte-Carlo dans un contexte non paramétrique. Elle a été introduite par Efron en 1979 principalement pour étudier la variabilité d'un estimateur d'un paramètre d'intérêt qui dans notre cas est les règlements de l'année  $(i,j)$  et plus généralement la réserve à constituer.

Cependant, la mise en œuvre de cette technique nécessite la disponibilité d'outils informatiques performants et robustes.

#### II.3.2 Principe du Bootstrap et hypothèse de base.

##### II.3.2.1 Principe de base du Bootstrap.

Littéralement, Bootstrap signifie « se hisser en tirant sur ses propres lacets ». Statistiquement, il désigne le fait de se baser sur un échantillon initial pour faire  $B$  tirages aléatoires avec remise. Autrement, à partir d'un échantillon de taille  $N$ , on obtient de l'information supplémentaire en simulant un nombre  $B$  assez important d'échantillons de même taille, soit  $N \times B$  observations.

Dans notre cas, on a procédé au Bootstrap pour remédier aux problèmes des formules analytiques très complexes de calcul des marges d'erreurs des modèles GLM en les remplaçant par des formules plus simples et basées sur des simulations.

##### II.3.2.2 Hypothèse de base Du Bootstrap.

Le Bootstrap se base sur deux hypothèses qui sont l'indépendance entre les observations de l'échantillon, ce qui explique le tirage avec remise que nous réaliserons mais aussi cette technique nécessite des observations identiquement distribuées.

### II.3.3 Application du Bootstrap aux données.

#### II.3.3.1 Résidus de Pearson.

L'échantillon sur lequel nous allons appliquer le Bootstrap est celui des règlements non cumulés totalisant 55 observations, notre principal objectif est de

mesurer l'intervalle de confiance liés aux modèles qui a été retenu précédemment : le modèle de Gamma.

L'hypothèse de base sur laquelle se base le Bootstrap peut être violée surtout que les règlements effectués lors du développement du sinistre résultent d'un unique sinistre, la solution qui a été proposée s'intéressera aux « Résiduels Bootstrap », ré échantillonnage basé sur les résidus calculés à partir des observations

La théorie montre que les résidus de Pearson présentent cette caractéristique d'indépendance, ils sont définis comme suit :

Pour l'année de survenance  $i$  et de développement  $j$ :

$$R_{p_{i,j}} = \frac{y_{i,j} - \widehat{\mu}_{i,j}}{\sqrt{V(\widehat{\mu}_{i,j})}}$$

II.3.3.2 Bootstrap sur le modèle Gamma.

Nous aurons besoin dans un premier temps des règlements non cumulés enregistrés:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	70 880.35	143 033.04	273 570.45	356 063.11	276 421.32	176 468.67	98 054.69	78 476.07	36 548.75	15 681.40
2	69 954.80	141 165.32	269 998.19	351 413.66	272 811.83	174 164.35	96 904.87	67 712.50	36 071.50	
3	80 296.56	162 034.47	309 913.32	403 364.83	313 142.92	199 911.90	109 752.44	76 244.41		
4	87 332.74	176 233.14	337 070.24	438 710.67	340 582.84	217 429.68	108 493.49			
5	81 457.18	164 376.56	314 392.87	409 195.16	317 669.15	202 801.47				
6	87 371.60	176 311.57	337 220.24	438 905.90	340 734.40					
7	64 817.28	130 798.06	250 169.37	325 605.64						
8	41 576.93	83 900.18	160 470.69							
9	49 909.68	100 715.25								
10	11 612.49									

Tableau 37 : Tableau récapitulatif des règlements non cumulés par année de survenance et année de développement.

Pour le modèle Gamma, nous avons montré que :

$$V(\widehat{\mu}_{i,j}) = \widehat{\mu}_{i,j}$$

A partir du tableau et de la formule ci-dessus, nous avons calculé les résidus de Pearson :

Calcul Stochastique des Provisions pour Sinistres A Payer

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0.63571424	-0.0414802	-0.51230113	-0.2122183	0.20084803	0.20803316	-0.05069743	-0.11736131	-0.11053708	0
2	0.48581654	-0.00032107	-0.39569965	0.08037918	-0.00642139	-0.30885219	-0.09626998	0.13083147	0.11053707	
3	0.3034183	-0.05550962	0.02712591	0.0476372	-0.23340368	-0.02517795	-0.05062	-0.01347017		
4	0.20710745	-0.07406747	0.06292386	-0.31819518	-0.14331123	0.06795516	0.19758741			
5	-0.10431468	-0.04098246	-0.0909301	-0.06225482	0.24044023	0.05804182				
6	0.13950066	-0.14128166	-0.07426193	0.13419491	-0.05815198					
7	-0.45280893	-0.28498508	0.40733701	0.330457						
8	-0.66664954	0.09084352	0.57580601							
9	-0.54778404	0.54778404								
10	0									

Tableau 38 : Tableau récapitulatif des résidus de Pearson par année de survenance et année de développement.

Pour les résidus (1,10) et (10,1) ils sont nuls par construction, donc ces observations ne sont pas indépendantes, ils seront omis dans l'échantillon du tirage.

Nous avons ensuite procédé à une distribution avec remise de ces résidus grâce à SAS.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	-0.07406747	0.54778404	-0.51230113	0.57580601	-0.10431468	-0.31819518	0.0476372	-0.54778404	0.330457	0.63571424
2	0.40733701	0.20710745	-0.05069743	-0.11736131	0.20084804	-0.06225482	-0.23340368	-0.09626998	-0.05815198	
3	-0.11053708	-0.66664954	-0.07406747	-0.0414802	-0.04098246	0.20803316	0.08037918	0.20803316		
4	-0.05815198	0.54778404	-0.11736131	-0.51230113	-0.54778404	0.02712591	-0.02517795			
5	0.40733701	-0.39569965	0.63571424	0.48581654	0.57580601	-0.00032107				
6	-0.10431468	0.54778404	0.13083147	0.06292386	-0.05815198					
7	-0.39569965	-0.07426193	-0.45280893	-0.54778404						
8	-0.04098246	-0.07426193	-0.0414802							
9	-0.00032107	0.20084804								
10	0.06292386									

Tableau 39 : Exemple d'une redistribution avec remise des résidus.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	72062.2558	146329.4856	260443.3795	351600.1436	263498.3772	164616.316	86392.1227	49250.76655	40759.16045	25650.28173
2	74433.00425	151143.5231	269011.6061	363167.3015	272167.109	170031.9649	89234.30393	50871.04859	42100.0804	26494.14048
3	81437.004	165365.8323	294325.0708	397340.6325	297777.5003	186031.6394	97631.07696	55657.91452	46061.61542	28987.18716
4	81551.25149	165597.823	294737.9777	397898.0593	298195.2506	186292.6221	97768.04302	55735.99667	46126.23499	29027.85311
5	109351.207	222048.3621	395211.0238	533537.2817	399846.8444	249797.7983	131096.1305	74735.80596	61850.17859	38923.13993
6	81283.54048	165054.2095	293770.4315	396591.8661	297216.3551	185681.0731	97447.09661	55553.03026	45974.81486	28932.56241
7	41713.48317	84703.32309	150758.5407	203524.9453	152526.9366	95288.71738	50008.37562	28508.97462	23593.57939	14847.75328
8	40795.17629	82838.61081	147439.6473	199044.419	149169.1126	93190.97157	48907.45976	27881.36011	23074.17548	14520.88549
9	54727.14226	111128.8356	197791.7805	267020.1045	200111.8757	125016.6324	65609.85272	37403.12703	30954.24016	19479.91499
10	12343.18828	25064.05568	44610.06158	60223.85397	45133.33706	28196.31663	14797.68048	8435.920824	6981.435509	4393.510211

Tableau 40 : Exemple de règlements non cumulés avec la distribution Gamma

Et la provision correspondante :

Règlement Simulé GLM	
2004	-
2005	145 480.38
2006	57 027.67
2007	73 026.98
2008	707 649.85
2009	265 640.53
2010	68 792.30
2011	468 609.49
2012	930 788.09
2013	238 566.87
<b>Règlement Simulé GLM</b>	<b>2 955 582.17</b>

Tableau 41 : Exemple de provisions simulées  
avec la distribution Gamma.

Nous avons repris quelques résultats obtenus en réitérant le processus 30 000 fois. :

<b>Simulation Sur les provisions</b>
2171508.893
2189647.722
2190261.404
2202230.975
2229093.929
2250796.303
2253953.454
2258387.403
2267300.873
2268451.564
2270462.357

Tableau 42 : Bootstrap sur les provisions  
sous le modèle Gamma.

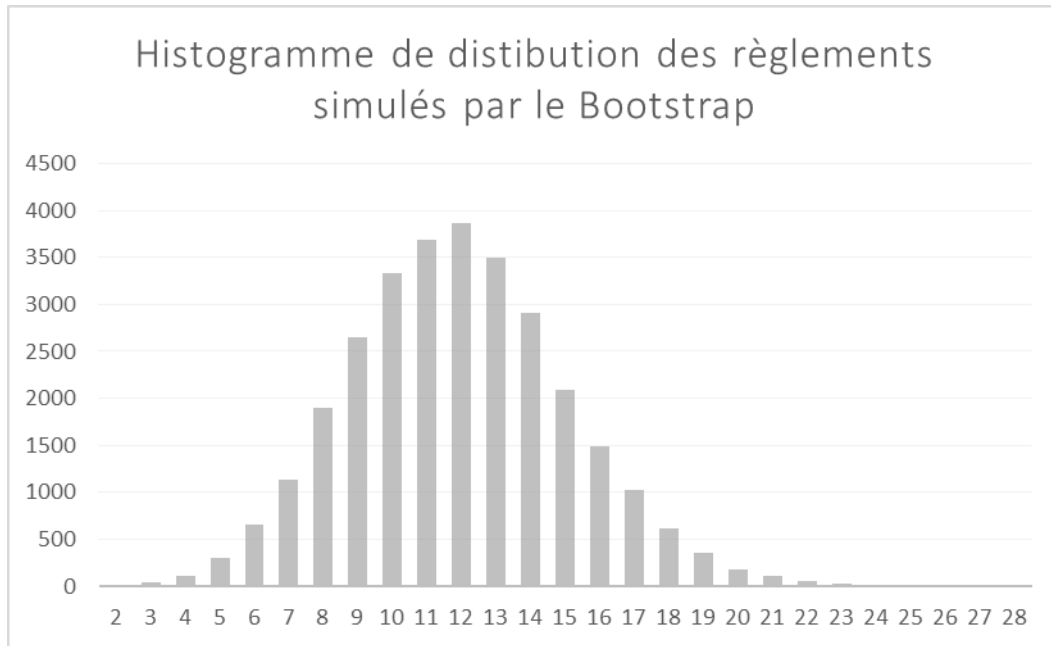


Figure 12 : Histogramme de la distribution des réserves Bootstrapées avec le modèle Gamma.

Le nombre important auquel nous avons procédé nous a permis d’obtenir une distribution assez homogène que nous exploiterons pour analyser les résultats.

II.3.3.3 Analyse des résultats de Bootstrap.

Pour ce faire, nous avons cherché à calculer quelques indicateurs clés qui sont :

Moyenne	4245665.39
Ecart Type	316481.5914
Value At Risk(75%)	4 650 125.25
Value At Risk (90%)	4850356.603
Value At Risk (99.5%)	4958002.25
Value At Risk (99.5%)	5339440.091

Tableau 43 : Statistiques descriptives obtenues avec le Bootstrap.

Nous remarquons que la moyenne obtenue avec le Bootstrap est assez proche de la réserve obtenue en considérant le modèle GLM , néanmoins, le Bootstrap a affiné ces résultats, la Value At Risk au niveau 90%, quant à elle est égale à 4 850 356 KDhs, ce qui veut dire, qu’il y’a 90% de chances de faire un règlement à l’ultime inférieur à ce

seuil et de 99.5% de ne pas dépasser le seuil de 4958002.25 Kdhs. La Tail Value At Risk –Moyenne de toutes les observations dépassant la VAR- à ce même niveau est de 5 339 440 KDhs.

## Chapitre III : Choix du modèle optimal et calcul de la marge de risque.

### III.1 Comparaison des méthodes utilisées.

#### III.1.1 Récapitulatif sur les modèles utilisés.

Les avantages et inconvénients de chacune des méthodes utilisées ont été présentées dans le tableau suivant :

Méthode	Avantages	Inconvénients
Méthode Règlementaire	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Prudence dans les provisions</li> <li>• Simple dans l'ensemble</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Biais dans les estimations des experts (Risque de Sous ou Sur provisionnement)</li> </ul>
Chain Ladder	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Application facile</li> <li>• Méthode de référence</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Sensible à l'aléa de la sinistralité(Années de développement très peu nombreuses).</li> <li>• Ignore les changements de gestion...</li> <li>• Hypothèses trop fortes</li> </ul>
London Chain	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Application facile</li> <li>• Respecte les règles de gestion</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Sensible à l'aléa de la sinistralité(Années de développement très peu nombreuses).</li> </ul>
	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Prise en considération des effet calendaires, de</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Nombre d'itérations très grand avant de trouver la solution.</li> </ul>

De Vylder	développement et de la survenance du sinistre.	
	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Même résultat que Chain Ladder</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Même inconvénient que Chain Ladder</li> </ul>
Mack	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Mesure de l'aléa de l'esimation (A une année et à l'ultime)</li> </ul>	
GLM	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Choix de la distribution des règlements.</li> <li>• Mesure de l'aléa</li> <li>• Permet de s'affranchir de la limite du nombre d'observations très faibles.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Hypothèse paramétriques</li> <li>• Difficultés liées au nombre restreint d'observations.</li> <li>• Difficile à mettre en place.</li> </ul>
« Bootstrap »		

Tableau 44 : Tableau récapitulatif des méthodes utilisées.

### III.1.2 Chiffres et résultats des méthodes utilisées.

Avant de choisir la méthode de provisionnement qui s'adapte le plus aux observations, nous avons dressé un tableau comprenant les différents résultats obtenus avec les différentes méthodes.

	Chain Ladder	Chain Ladder Corrigée	London Chain	De Vylder	Mack	Mack Corrigé	GLM (Gamma)
Réserve	3 856 401.895	4 057 296.92	4 686 962.83	3849460.208	3 856 401.895	4 511 990.217	4 245 665.39
Variation/Chain-Ladder Corrigé	-4.95%	-	15.52%	-5.12%	-4.95%	11.21%	4.64%
Erreur Standard					497462.0502		316481.5914

Tableau 45 : Récapitulatif des résultats des méthodes utilisées.

Nous avons jugé qu'il serait intéressant de considérer tous les modèles par rapport au modèle de Chain Ladder corrigé et non celui de Chain Ladder.

Comme nous le remarquons, la correction du biais de Mack donne les plus grandes réserves, c'est le modèle le plus prudent parmi ceux que nous avons vu.

Le modèle le moins prudent est celui de De Vylder avec 3 849 460 KDhs.

En conclusion, nous remarquons l'absence totale d'une logique globale qui lie les différentes méthodes utilisées. Néanmoins, nous pouvons avancer qu'il y'a certaines

méthodes qui sont plus prudentes que d'autres (London Chain en l'occurrence), d'autres le sont beaucoup moins (De Vylder).

A présent, il faut tenter de choisir la méthode qui s'adapte le plus à nos données, c'est le thème de la partie qui suivra.

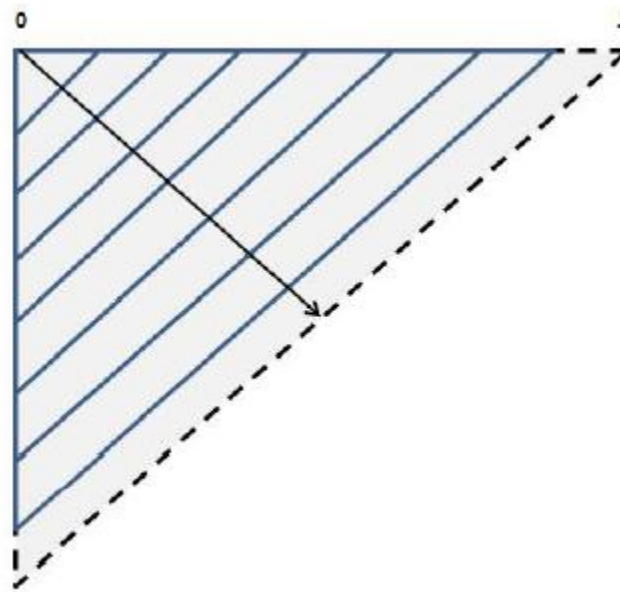
### III.2 Choix de la méthode de provisionnement et de la marge de risque.

#### III.2.1 Critères de choix du Best Estimate.

Il s'agit pour l'Actuaire de faire un choix parmi les différentes méthodes élaborées. Le choix doit prendre en considération plusieurs paramètres, notamment les contraintes réglementaires, la politique de gestion de la compagnie, de la branche d'assurance étudiée, etc.

Jusqu'à présent, nous avons élaboré un ensemble de modèles de provisionnement déterministes et stochastiques, mais sur un seul et même triangle. Nous avons remarqué qu'elles donnent des résultats totalement différents, donc, nous avons choisi d'orienter cette comparaison sur la particularité de la nature du triangle.

L'idée qui vient à l'esprit est de choisir la méthode qui s'est adapté le plus dans le passé, Plus concrètement, nous chercherons le modèle qui s'adapte le plus à nos règlements en comparant la provision qui aurait été prédite dans le passé par rapport à celle qui a été réellement effectuée.



Méthode par diagonales

Figure 13 : Schéma explicatif de la méthode des diagonales.

Il est important de noter encore une fois que cette technique, bien que pouvant paraître objective et pertinente, ne se fonde que sur un critère historique, particulier au triangle.

Pour choisir le meilleur modèle de provisionnement, nous allons appliquer les méthodes déjà vues précédemment au triangle composé des neuf premières années pour avoir les meilleurs estimateurs des provisions de la dixième année et calculer la somme des écarts par rapport à ce qui s’est réellement produit. Le meilleur modèle sera évidemment celui pour lequel la somme est minimale.

III.2.2 Application de la méthode de sélection du Best Estimate.

Chain Ladder Standard Prédit	60 262.07	229 344.76	834 908.48	1 439 967.86	1 512 239.39	1 547 334.97	1 598 184.04	1 355 040.55
Règlements enregistrés	178455.4138	358252.3266	914266.929	1381864.453	1508747.927	1579904.129	1593587.802	1363173.7

Chain Ladder Ajusté Prédit	60 262.07	229 344.76	834 908.48	1 439 967.86	1 512 239.39	1 547 334.97	1 598 184.04	1 355 040.55
Règlements enregistrés	178455.4138	358252.3266	914266.929	1381864.453	1508747.927	1579904.129	1593587.802	1363173.7

Tableau 46 : Tableau comparatif du modèle de Chain Ladder Standard et Chain Ladder Ajusté.

Les autres tableaux ont été mis en annexe.

Nous avons calculé, pour toutes les méthodes qui ont été faites la somme des carrés des écarts qui a donné les résultats suivants :

Chain Ladder Standard	4.93058E+12
Chain Ladder Corrigée	4.7901E+12
London Chain	4.57151E+12
De Vylder	4.60694E+12
GLM	4.44367E+12

Tableau 47 : Somme carrée des écarts des dernières années.

La méthode présentant le plus faible écart par rapport à la réalité est celle du modèle GLM, voici donc les résultats relatifs à cette méthode.

	GLM (Gamma)
Réserve	4 245 665.39
Ecart Type	316481.59
Value At Risk(75%)	4 650 125.25
Value At Risk (95%)	4 850 356.60
Value At Risk (99.5%)	4 958 002.25
Tail Value At Risk (99.5%)	5 339 440.09

Tableau 48 : Récapitulatif des résultats du modèle GLM.

### III.2.3 Calcul de la marge de risque.

La formule utilisée pour le calcul de la marge de risque est :

$$RM = 6\% \sum \frac{SCR_t}{(1 + r_t)^t}$$

$r_t$  désigne le taux d'intérêt de maturité t (courbe fournie par l'EIOPA).

$SCR_t$  désigne le SCR pour l'année t .

6% est le taux de coût du capital.

Cependant, cette formule reste assez difficile à calculer dans l'ensemble vu la difficulté du calcul du SCR, le CEIOPS a proposé la VaR au niveau 75% comme marge de risque à adopter.

Nous avons vu que le modèle GLM est le meilleur modèle estimant les provisions à constituer, les normes de Solvabilité II insistent sur la nécessité de constituer une marge de risque qui va être utilisée quand les provisions constituées se révèlent insuffisantes.

Le Best Estimate dans notre cas est celui de la moyenne trouvée dans ce modèle (4245665.39KDhs).

Le Bootstrap nous a permis d'avoir une marge d'erreur concernant la méthode GLM utilisée, nous allons exploiter les résultats pour calculer la marge de risque.

Cette marge est calculée en élaborant la Value At Risk (Voir les annexes) au niveau 75%, cependant, nous nous sommes rendu compte que ce seuil est assez proche des résultats obtenus avec les autres méthodes, donc, nous nous sommes proposés d'élaborer un second « seuil de cette marge », la TVaR au niveau 99.5%, la marge de risque serait la différence entre le Best Estimate et la TVaR calculée.

Nous avons procédé au calcul des la VaR et TvaR qui a donnée le résultat suivant :

$$VaR(75\%) = 4\ 650\ 125.25\ KDhs$$

$$TVar(99.5\%) = 5\ 339\ 440.09\ KDhs.$$

La marge de risque est égale à :

$$Marge\ de\ risque = 4\ 650\ 125.25 - 4\ 245\ 665.39 = 404\ 459.86\ KDhs.$$

$$"Marge\ de\ risque2" = 5\ 339\ 440.09 - 4\ 245\ 665.39 = 1\ 093\ 774.70\ KDhs.$$

La marge pour risque peut être interprétée comme le montant de provisions complémentaires au Best Estimate calculé de façon à ce que le montant total de provisions inscrit au bilan corresponde à celui qu'exigerait une entité de référence pour honorer les engagements à la charge de l'assureur.

## Conclusion

En conclusion, nous pouvons dire que les modèles stochastiques permettent de s'affranchir de la limite des modèles ponctuels, c'est-à-dire que ceux-ci permettent de délimiter un intervalle de confiance autour de la réserve déterministe, nous sommes parvenus à choisir le modèle GLM, comme modèle de référence pour déterminer les règlements à venir avec le marge de risque calculée grâce au Bootstrap.

## Conclusion Générale

Solvency II est un tournant pour les compagnies d'assurance, il marque le passage d'un système déterministe où la prudence est contenue dans les hypothèses des modèles au système stochastique où la prudence est clairement explicitée, ce qui permet à l'assureur de prévoir de la manière la plus claire qui soit, les scénarios les plus défavorables.

Dans le cadre du pilier I de cette réforme, les compagnies d'assurances devront répondre à des exigences particulières en termes de provisions techniques, ces normes quantitatives répondent au besoin de l'assureur d'honorer ses engagements vis-à-vis de ses assurés. Les modèles stochastiques auxquels nous avons procédé s'accordent parfaitement avec cette fin puisqu'ils ont pour but ultime la détermination d'un intervalle de confiance autour d'une réserve donnée.

Nous avons vu au terme de ce modeste travail que les méthodes actuarielles se sont révélées d'une extrême utilité pour répondre aux exigences dictées par le nouveau référentiel de Solvabilité. Au final, nous retiendrons les résultats dictés par le modèle GLM, comme modèle de base pour les provisions techniques de la compagnie, avec sa marge de risque correspondante.

## Bibliographie

- **Ouvrages :**

**PARTRAT C. ; LECOEUR E. ; NESSI J.-M. ; NISIPASU E. ; REIZ O.** [2007]  
Provisionnement technique en assurance non-vie, Economica.

**DENUIT M. , CHARPENTIER A.** [2005] Mathématiques de l'assurance non-vie  
- Tome 2, Tarification et provisionnement, Economica.

- **Mémoires d'Actuariat :**

**C.GUILLAUMIN** (2008) : « Détermination d'une méthode de provisionnement pour les créances douteuses », Mémoire Paris Dauphine.

**C. SAUVET** (2006) : « SOLVABILITE 2 : Quelle modélisation stochastique des provisions techniques en prévoyance et non vie ? », Mémoire ISFA

**J. DUGAS** (2013) : « Détermination d'un intervalle de confiances des réserves IBNR », Mémoire ULP Strasbourg.

**S. JAZIRI** (2011) : « Méthodes de provisionnement non-vie et risque de réserve à un an », ISFA.

**G. KHOUZAIMI**(2013) :« Estimation des provisions pour sinistres à payer pour la branche accident de travail », Mémoire INSEA.

- **Sites internet**

Site du CEIOPS (Committee of European Insurance and Occupational Pensions Supervisors) :<http://www.ceiops.org/>

Site de Ressources actuarielles :<http://www.ressources-actuarielles.net/>

# Annexes

***Annexe A : Présentation de l'Organisme.***

La Compagnie Marocaine d'Assurance et de Réassurance (SANAD), Société Anonyme au Capital de 250 Millions de Dirhams, fondée en 1946, est une filiale du groupe HOLMARCOM, Groupe Marocain multisectoriel d'envergure, et la Caisse de dépôt et de Gestion - CDG -, premier Groupe financier du royaume.

Le Groupe HOLMARCOM a renforcé son positionnement dans le secteur des assurances avec l'achat de la compagnie d'assurances SANAD en 1999.

Depuis 2005, 40% du capital ATLANTA/SANAD est détenu par le groupe C.D.G. SANAD devient une filiale d'Atlanta à 100%.

Avril 2014, la CDG cède 30% du capital d'ATLANTA au groupe HOLMARCOM.

## Organigramme de SANAD Assurance

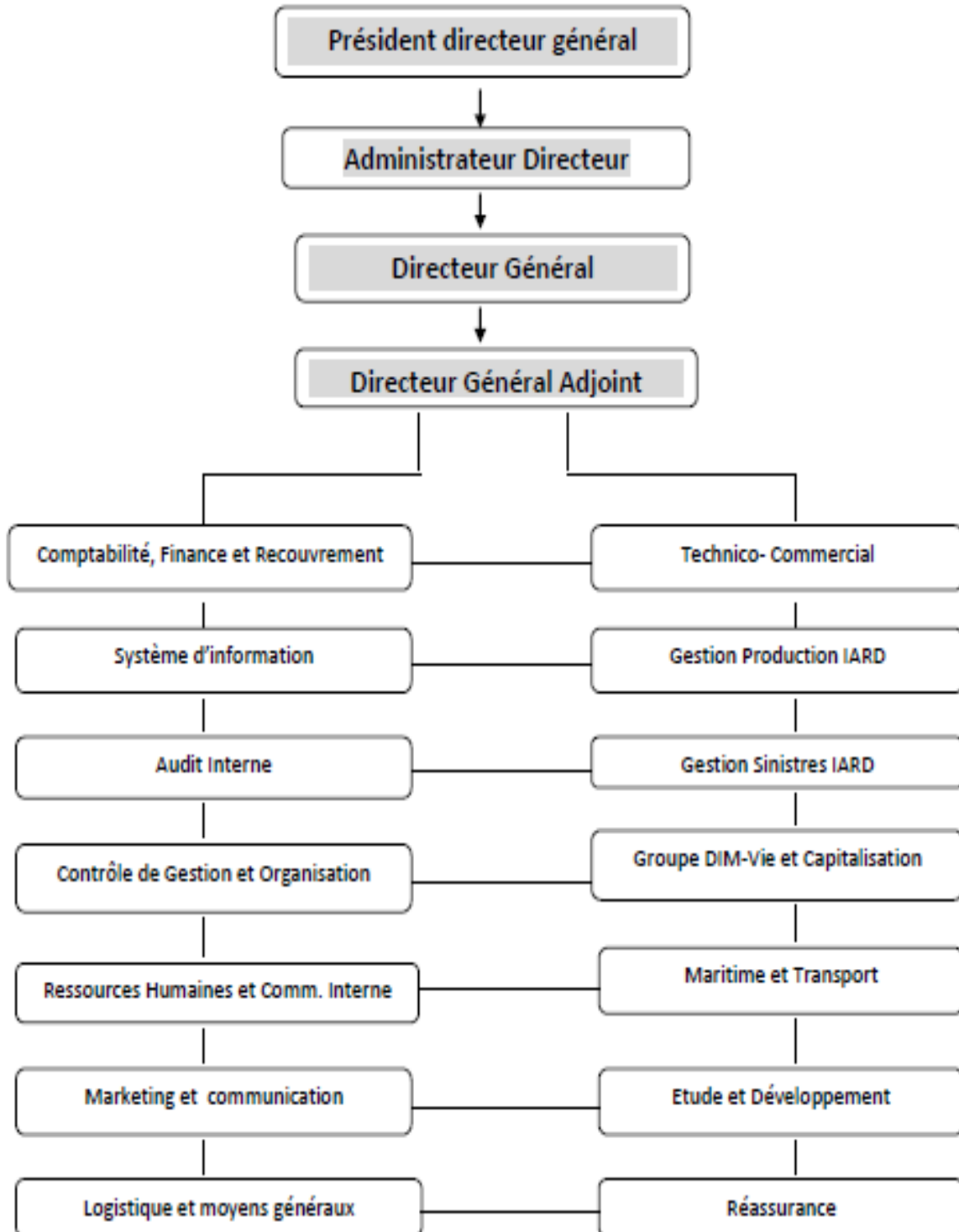


Figure 14 : Organigramme de SANAD Assurance.

## **Opérations d'assurances de la SANAD :**

SANAD opère dans les deux branches d'assurance à savoir ; vie et non vie.

1. Vie et décès : toute opération d'assurances comportant des engagements dont l'exécution dépend de la durée de la vie humaine.
3. Capitalisation : toute opération d'appel à l'épargne en vue de la capitalisation et comportant, en échange de versements uniques ou périodiques directs ou indirects, des engagements déterminés.
5. Assurances liées à des fonds d'investissement : toutes opérations comportant des engagements dont l'exécution dépend de la durée de la vie humaine ou faisant appel à l'épargne et liées à un ou plusieurs fonds d'investissement.
6. Opérations faisant appel à l'épargne dans le but de réunir les sommes versées par les assurés en vue de la capitalisation en commun, en les faisant participer aux bénéfices des sociétés gérées ou administrées directement ou indirectement par l'entreprise d'assurances et de réassurance.
7. Opérations d'assurances contre les risques d'accidents corporels.
8. Maladie – maternité.
9. Opérations d'assurances contre les risques résultant d'accidents ou de maladies survenus par le fait ou à l'occasion du travail.
10. Opérations d'assurances des corps des véhicules terrestres.
11. Opérations d'assurances contre les risques de responsabilité civile résultant de l'emploi de véhicules terrestres à moteur y compris la responsabilité du transporteur.
12. Opérations d'assurances des corps de navires.
13. Opérations d'assurances contre les risques de responsabilité civile résultant de l'emploi de véhicules fluviaux et maritimes y compris la responsabilité du transporteur.
14. Opérations d'assurances des marchandises transportées.
15. Opérations d'assurances des corps d'aéronefs.
16. Opérations d'assurances contre les risques de responsabilité civile résultant de l'emploi d'aéronefs y compris la responsabilité du transporteur.
17. Opérations d'assurances contre l'incendie et éléments naturels.

18. Opérations d'assurances des risques techniques : toute assurance couvrant les risques et engins de chantiers, les risques de montage, le bris de machines, les risques informatiques et la responsabilité civile décennale.
19. Opérations d'assurances contre les risques de responsabilité civile non visés aux paragraphes 9°, 11°, 13°, 16° et 18° ci-dessus.
20. Opérations d'assurances contre le vol.
21. Opérations d'assurances contre les dégâts causés par la grêle ou la gelée.
24. Opérations d'assurances contre les risques de pertes pécuniaires.
27. Protection juridique : toute opération d'assurances consistant à prendre en charge des frais de procédures ou à fournir des services en cas de différends ou de litiges opposant l'assuré à un tiers.
28. Opérations d'assurances contre les risques bris de glaces et dégâts des eaux.
29. Opérations de réassurance liées aux opérations d'assistance.

### Evolution du portefeuille de la compagnie.

Le chiffre d'affaire de la compagnie a enregistré une augmentation de 3,2%, passant de 1174398 KDH en 2010 à 1211505 KDH en 2012.

L'augmentation du chiffre d'affaire s'établit à 37107 KDH. Elle trouve son origine dans la progression des assurances non vie et vie qui ont atteint respectivement 19810 KDH et 17297 KDH, soit +1,8% et +20%.

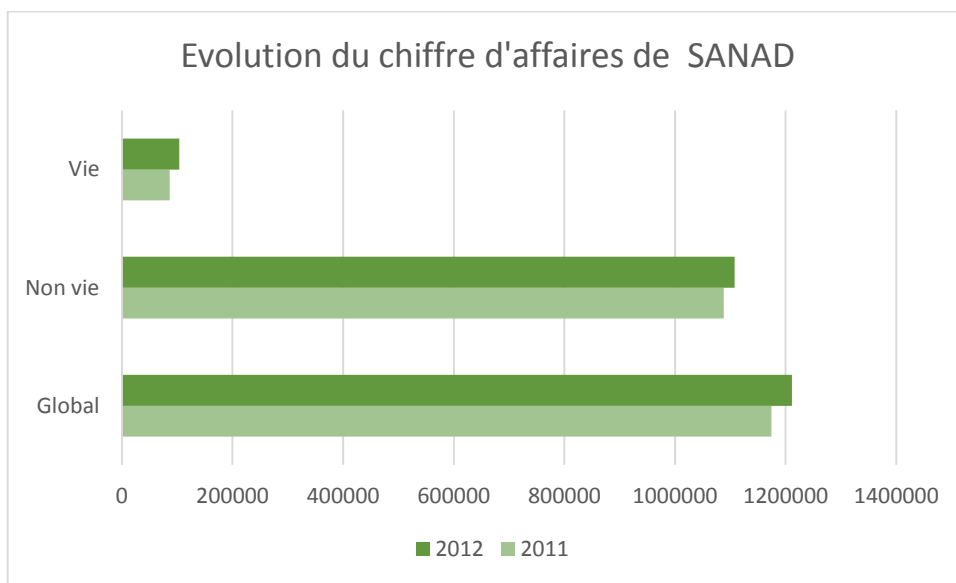


Figure 15 : Evolution du chiffres d'affaires de SANAD.

## Structure du portefeuille.

La structure du portefeuille se présente comme suit :

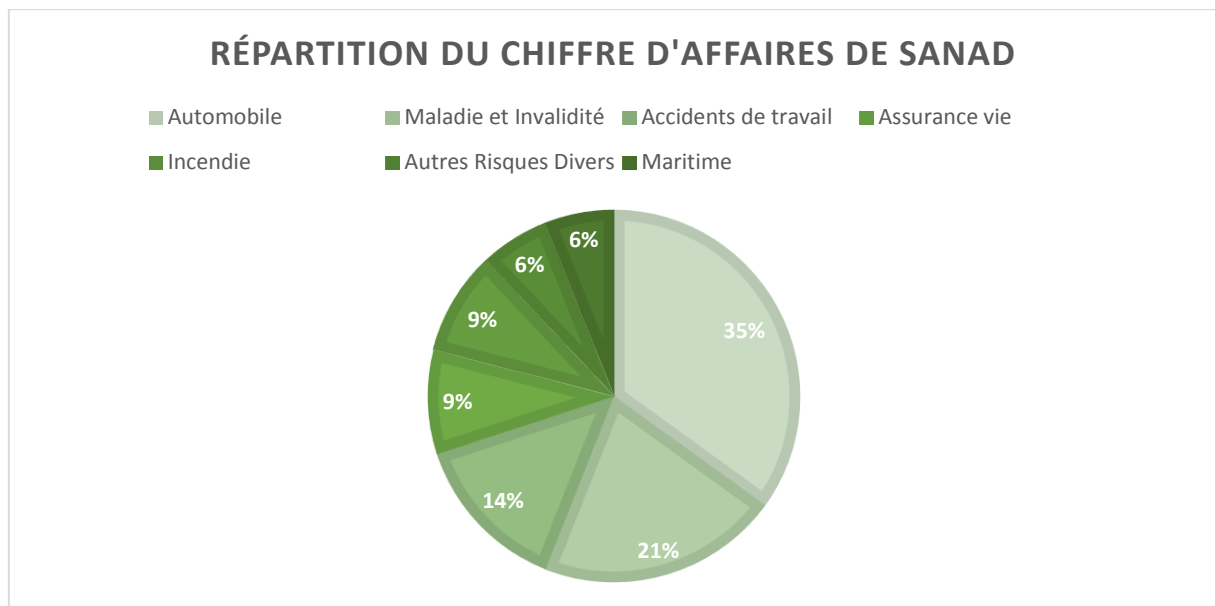
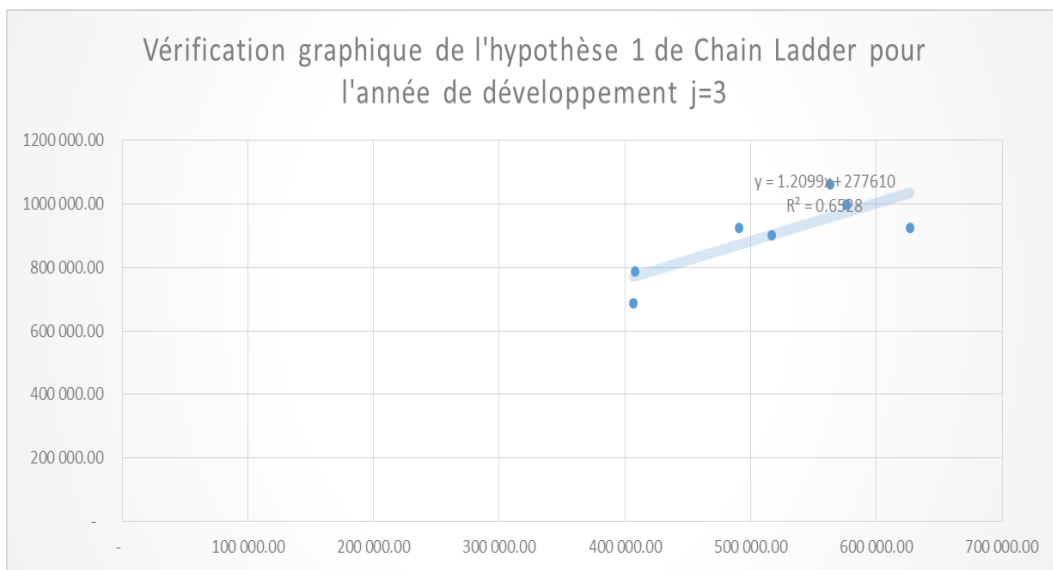
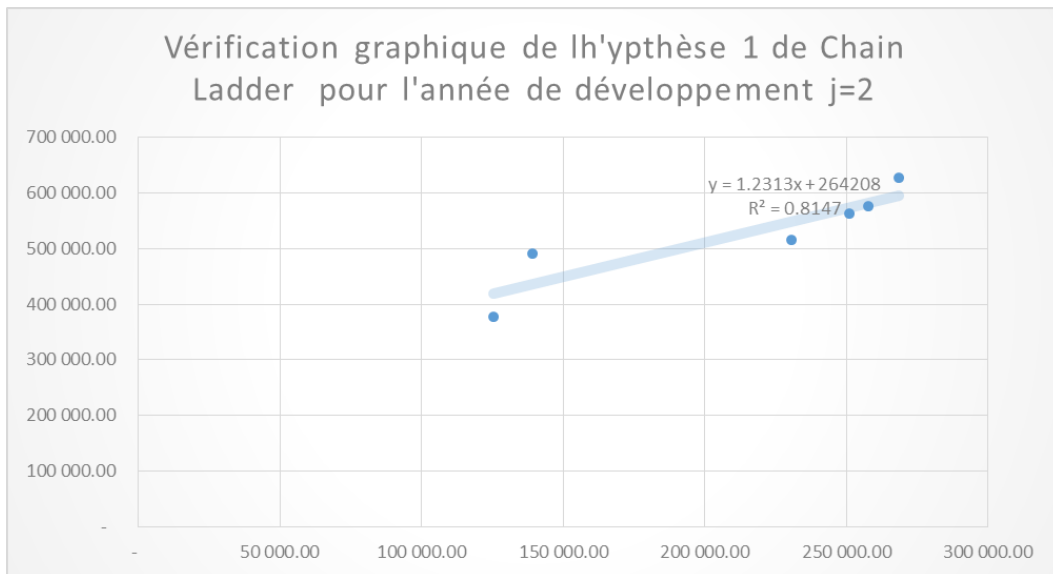
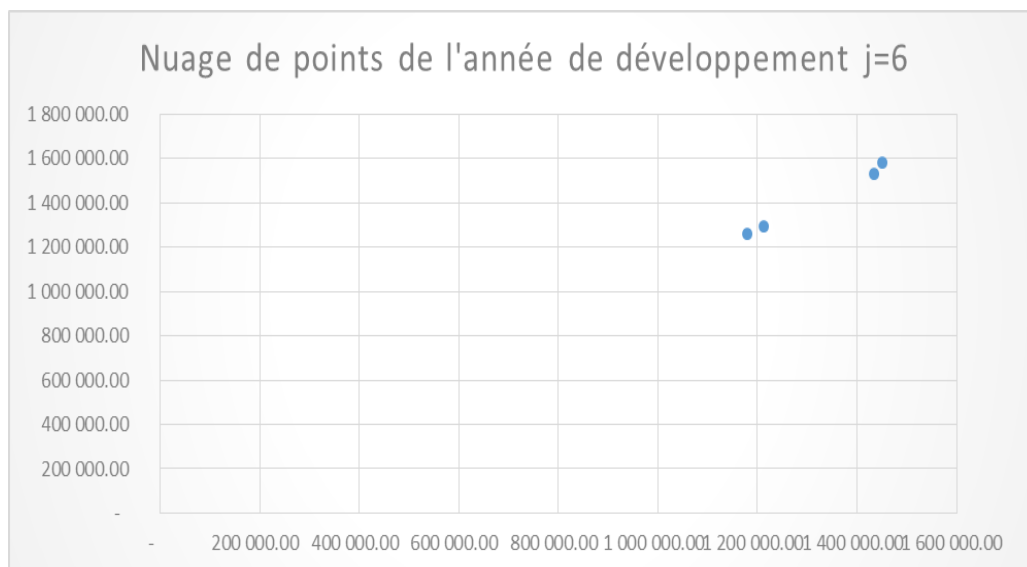
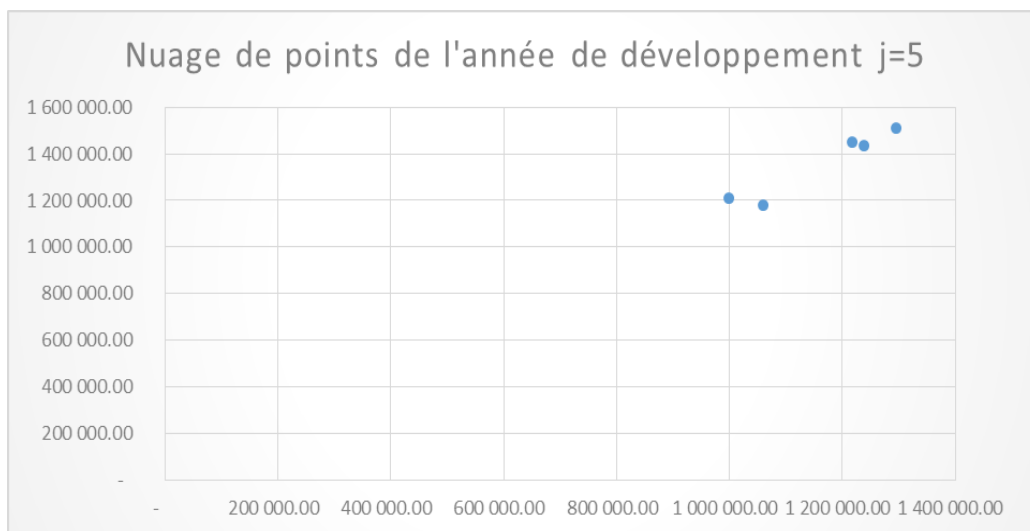
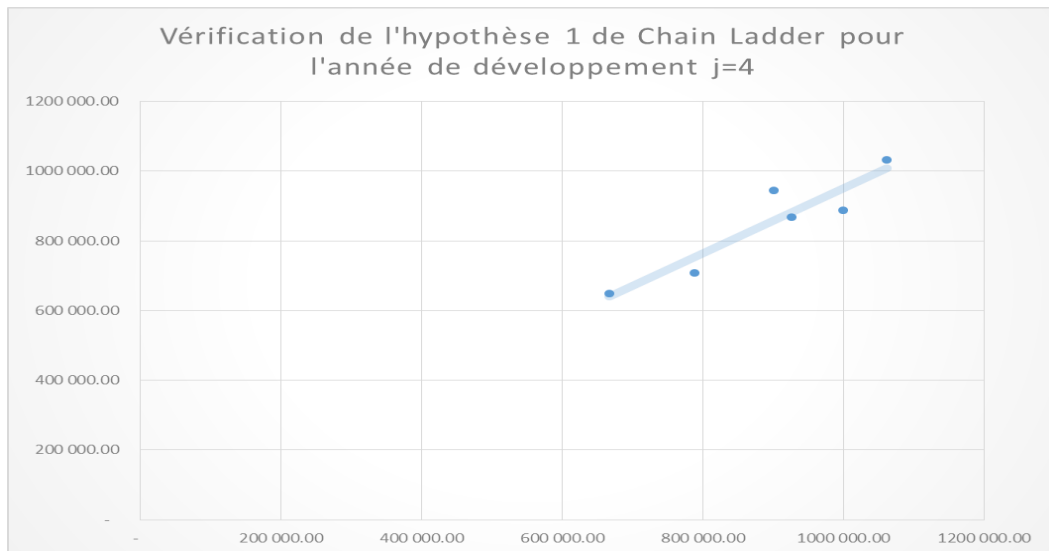


Figure 16 : Répartition du portefeuille de SANAD.

Nous remarquons une très grande présence du secteur automobile dans le portefeuille de la compagnie, d'où l'intérêt de faire des modèles de provisions de cette branche.

**Annexe B : Nuages e points des années de développement j=2....7.**





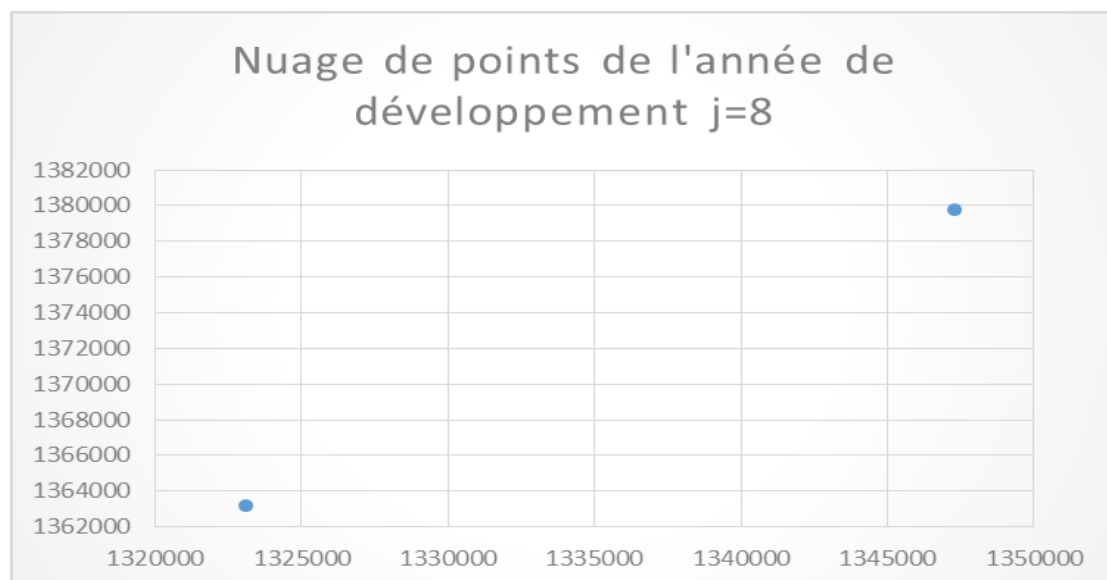
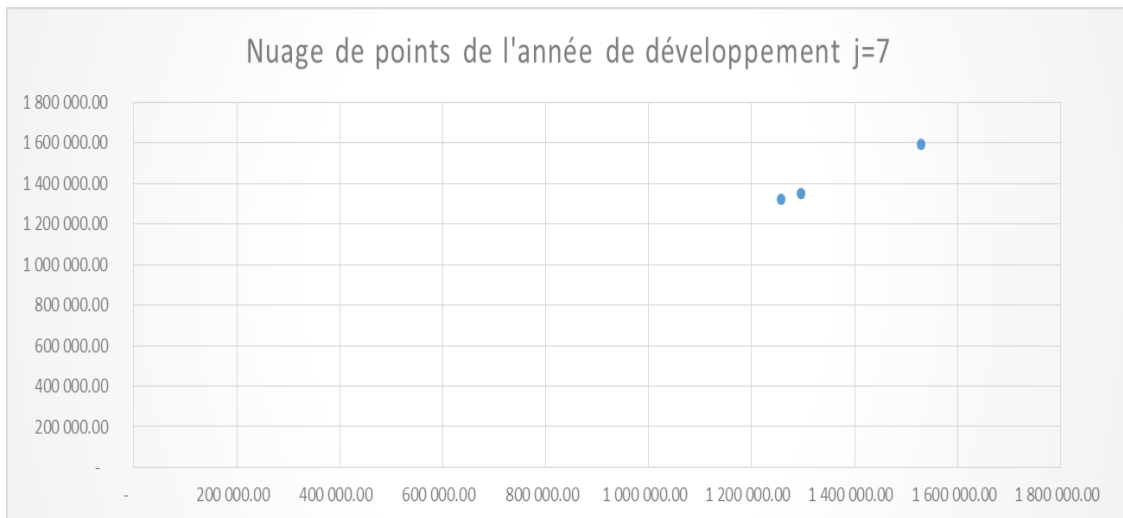


Figure 17 : Nuage de points de  $C_{i,j+1} = f(C_{i,j})$

de l' année de développement j=2 à l' année j=9

### ***Annexe C : Principe du QQ-Plot.***

Le QQ Plot ou le diagramme Quantile Quantile est un outil graphique permettant de juger de l'adéquation d'une distribution à un échantillon ou de savoir si deux distributions sont identiques.

Le test du QQ Plot repose sur la comparaison en les quantiles théoriques et ceux de l'échantillon, Il s'agit d'avoir le nuage de points  $A(x_i^*, x_i)$ ,  $x_i^*$  étant le point obtenu avec la distribution théorique et  $x_i$  avec la distribution empirique.

Bien évidemment si l'ajustement est bon, les points seront très proches de la bissectrice.

Si le QQ Plot donne une droite d'équation  $x_i = ax_i^* + b$ , cela veut dire que la distribution est adéquate mais que les paramètres choisis doivent être modifiés, les paramètres sont à revoir.

### ***Annexe D : Principe et calcul de la distance Kolmogorov-Smirnov .***

La distance de Kolmogorov Smirnov est une mesure descriptive de l'ajustement. Sa construction permet d'évaluer la distance entre les lois respectives de deux variables aléatoires ou entre une loi théorique et celle d'un échantillon.

La distance de K-S se formule ainsi :  $D_{X-Y} = \sup_x |F_X(x) - F_Y(x)|$ , avec X et Y deux variables aléatoires .

Sinon, s'il s'agit de la comparaison d'une loi de probabilité à une distribution empirique la distance K-S s'écrit :  $D_X = \sup_x |F_X(x) - F^*(x)|$ ,  $F^*$  étant la fonction de répartition de la loi théorique.

Dans notre cas, nous avons cherché à évaluer la distance entre la loi empirique et la loi théorique, essayons de construire le vecteur de la loi empirique, pour ce faire, nous avons cherché dans un premier temps à segmenter nos données afin d'obtenir une approximation de leur fonction de distribution qui est le cumul des observations précédentes. Pour notre cas où l'on veut calculer la distance entre la distribution d'un vecteur et celle de deux lois théoriques, pour avoir la fonction de répartition, il suffit de diviser ce cumul par le nombre total d'observations.

La fonction de répartition empirique obtenue grâce à Excel.

L'étape suivante consiste à calculer, pour chaque quantile, la valeur de la fonction de répartition de la loi théorique sélectionnée, à savoir la loi Gamma ou la loi normale ou LogNormale.

Annexes

	Normale	Gamma	Lognormal	Cumul obs	Fct répartition empirique	Différences absolues		
25000	0.1007315	0.04241642	0.03133255	4	0.072727273	0.028004225	0.03031085	0.041394724
50000	0.14001025	0.12335023	0.13516027	7	0.127272727	0.012737523	0.0039225	0.007887547
75000	0.18857706	0.21778304	0.25520471	11	0.2	0.011422937	0.017783038	0.055204712
100000	0.24634684	0.31413091	0.36576573	17	0.309090909	0.062744068	0.005040005	0.056674819
125000	0.31245286	0.40627196	0.46070023	22	0.4	0.087547138	0.006271962	0.060700226
150000	0.38522424	0.49107954	0.54023878	26	0.472727273	0.087503036	0.01835227	0.067511505
175000	0.46228963	0.56718382	0.60637507	32	0.581818182	0.119528549	0.014634363	0.024556891
200000	0.5408019	0.63425784	0.66134861	33	0.6	0.059198098	0.034257837	0.061348611
225000	0.61774947	0.69258137	0.70717814	35	0.636363636	0.018614161	0.056217733	0.070814503
250000	0.6902985	0.74276793	0.7455546	37	0.672727273	0.017571232	0.070040657	0.072827326
275000	0.75610179	0.78559312	0.77785332	39	0.709090909	0.047010878	0.076502213	0.068762415
300000	0.81351909	0.8218878	0.80518013	43	0.781818182	0.031700904	0.040069613	0.023361952
325000	0.86171577	0.85247324	0.82842135	46	0.836363636	0.025352134	0.016109607	0.007942285
350000	0.90063559	0.8781238	0.84828815	47	0.854545455	0.046090131	0.023578346	0.006257302
375000	0.93087013	0.89954719	0.86535307	49	0.890909091	0.039961044	0.008638102	0.025556024
400000	0.95346529	0.91737626	0.88007907	52	0.945454545	0.008010744	0.028078288	0.065375478
425000	0.96970978	0.93216776	0.89284243	53	0.963636364	0.006073418	0.031468609	0.070793936
450000	0.98094486	0.94440543	0.90395057	54	0.981818182	0.000873326	0.037412749	0.077867609
475000	0.98842009	0.95450546	0.91365601	54	0.981818182	0.006601905	0.027312726	0.068162167
500000	0.99320476	0.96282299	0.92216725	55	1	0.006795242	0.037177014	0.077832752
						0.119528549	0.076502213	0.077867609

Tableau 49 : Test de Kolmogorov-Smirnov pour la loi Normale, Gamma et LogNormale.

La loi qui semble s'ajuster le plus à notre distribution est la loi Gamma qui a la plus faible valeur de la distance.

### ***Annexe E : Autour de l'AIC.***

Le **critère d'information d'Akaike**, (en anglais Akaike information criterion ou AIC) est une mesure de la qualité d'un modèle statistique proposée par Hirotsugu Akaike en 1973.

Lorsque l'on estime un modèle statistique, il est possible d'augmenter la vraisemblance du modèle en ajoutant un paramètre. Le critère d'information d'Akaike et celui (BIC), permettent de pénaliser les modèles ayant un très grand nombre de paramètres contrairement au critère de la déviance qui se base uniquement sur la vraisemblance. Nous choisissons alors le modèle avec le critère d'information d'Akaike le plus faible.

Le critère d'information d'Akaike s'écrit comme la différence entre 2 fois le nombre de paramètres ( $k$ ) et deux fois la log-vraisemblance du modèle estimé.

$$AIC = 2k - \ln(L)$$

Où  $k$  est le nombre de paramètres du modèle.

***Annexe F : Tableau des écarts prédits et enregistrés.***

London Chain Prédit	121385.932	386587.7157	812 730.78	1439967.861	1512239.386	1547334.974	1598184.038	1355040.549
Règlements enregistrés	178455.4138	358252.3266	914266.929	1381864.453	1508747.927	1579904.129	1593587.802	1363173.7

De Vylder Prédit	87 296.29	316 079.88	1 005 339.98	1 435 760.94	1 499 788.14	1 528 843.60	1 567 483.26	1 343 853.39
Règlements enregistrés	178 455.41	358 252.33	914 266.93	1 381 864.45	1 508 747.93	1 579 904.13	1 593 587.80	1 363 173.70

GLM Prédit	117324.847	376557.79	910 631.58	1306967.841	1411259.12	1587945.14	1598184.38	1363242.97
Règlements enregistrés	178455.4138	358252.3266	914266.929	1381864.453	1508747.927	1579904.129	1593587.802	1363173.7

Tableau 50 : Comparaison entre les règlements prédits et les règlements enregistrés pour différents modèles.

**Annexe G : Sur la Value At Risk et la Tail Value at Risk.****Value at Risk (VaR).**

Définition : La Value At Risk au seuil  $\alpha$  d'une distribution  $X$  notée  $VaR(X, \alpha)$  se définit comme le quantile d'ordre  $\alpha$  ;

$$VaR(X, \alpha) = F_X^{-1}(\alpha).$$

Dans la pratique, celle-ci fournit une information sur les montants des sinistres à payer que l'assureur ne va pas dépasser avec une probabilité  $\alpha$ .

Cependant, celle-ci ne fournit aucune information sur la queue de distribution et ne vérifie pas certaines propriétés telles que la sous additivité, en effet, elle est la somme des VaR de plusieurs branches est inférieure à la VaR de toutes les branches réunies, d'où l'intérêt de la Tail Value at Risk.

$$VaR(A) + VaR(B) \leq VaR(A + B)$$

**Tail Value at Risk (TVaR).**

Définition: La Tail Value at Risk au seuil  $\alpha$  d'une distribution  $X$ , notée  $TVaR(X, \alpha)$  se définit :

$$TVaR(X, \alpha) = \frac{1}{1 - \alpha} \int_{\alpha}^1 VaR(X, \varepsilon) d\varepsilon$$

C'est donc la moyenne des VaR supérieures à  $\alpha$  que nous allons estimer par :

$$\overline{TVaR}_{\alpha} = \frac{VaR_{\alpha_{i>\alpha}}}{n}$$

$n$  était le nombre d'observations supérieurs à la VaR de niveau  $\alpha$ .

La TVaR est sous additive dans le sens où :

$$VaR(A + B) \leq VaR(A) + VaR(B)$$

