

Projet de Fin d'Etudes

La modélisation du risque de contrepartie lié aux instruments financiers et l'ajustement en valeur crédit (CVA) selon la norme IFRS 13.

Préparé par : Mlle. Hassnae SALIH

Sous la direction de : M. Yassine EL QALLI (INSEA)
Mme Hala BENKHALDOUN (MAZARS)

Soutenu publiquement comme exigence partielle en vue de l'obtention du

Diplôme d'Ingénieur d'État

Option : Actuariat-Finance

Devant le jury composé de :

- M. Yassine EL QALLI (INSEA)
- M. Mohammed EL HAJ TIRARI (INSEA)
- Mme Hala BENKHALDOUN (MAZARS)

Année Universitaire

2013-2014

Résumé

Depuis la crise financière de 2008 et la chute de Lehman Brothers, la prise en compte du risque de contrepartie dans la valorisation des instruments financiers négociés sur le marché de gré à gré est devenue d'une nécessité majeure.

En effet, le risque de contrepartie lié aux instruments financiers a été longtemps négligé par les institutions financières, du fait que les montants engagés dans les produits dérivés sont modestes et la probabilité de défaut des institutions financières est faible.

Cependant, l'expansion du marché des dérivés OTC, la détérioration massive des notations de crédit bancaires et l'augmentation significative de ce risque, ont poussé les différents acteurs de marché à changer leurs pratiques conformément aux exigences du cadre réglementaire relatif, tel qu'il a été défini par le comité de Bâle et la norme IFRS 13.

L'ajustement de valeur qui s'effectue sur un produit financier pour que celui-ci prenne en compte le risque de contrepartie s'appelle la Credit Value Adjustment (CVA).

Mon stage à MAZARS a eu pour objectif principal d'implémenter un outil sous VBA permettant la valorisation de la CVA sur des produits dérivés vanilles afin de permettre un audit fiable des clients soumis aux normes IFRS.

Mots clés :

- ❖ CVA
- ❖ Risque de contrepartie
- ❖ Option de change
- ❖ Change à terme
- ❖ Swap de taux

Dédicace

A mes parents,

Je vous dédie ce travail en témoignage de mon profond respect, mon grand amour et toute ma gratitude pour les sacrifices que vous m'avez consentis.

Que le tout Puissant vous accorde une longue vie Papa, Maman.

A mes frères, ma chère tante Khadija et à ma petite perle Aicha,

Vous étiez toujours présents à mes côtés pour me soutenir, m'aider et m'encourager. Je ne vous remercierai jamais assez pour tout ce que vous avez fait pour moi. Alors je vous prie d'accepter ce modeste travail pour vous témoigner ma reconnaissance et mon amour.

A mon fiancé,

Ce travail a aussi été réalisé grâce à toi, au temps et au soutien que tu as bien voulu m'accorder, à ta patience et ta bonne humeur.

Je me dois de considérer ma réussite comme une œuvre commune.

A toute ma famille,

A tous mes amis et professeurs de l'INSEA,

Je vous prie de trouver dans ce travail l'expression de mon estime et ma reconnaissance pour tous les moments de bonheur partagés.

Hassnae

Remerciements

Qu'il me soit permis, au terme de ce projet de fin d'études, d'exprimer ma reconnaissance et ma profonde gratitude à mon Professeur à l'INSEA M.Yassine ELQALLI pour son aide précieuse, ses conseil pertinents et l'intérêt qu'il a accordé à mon travail.

Je tiens également à exprimer ma gratitude et vifs remerciements à mon encadrante de stage Mme BENKHALDOUN Hala. Qu'elle trouve ici le témoignage de mon estime et de ma profonde reconnaissance pour ses directives précieuses et la qualité de son suivi tout au long de mon stage.

Je ne manquerai également d'exprimer mes remerciements à Mlle Roukia LAHLOU, et à toute l'équipe Actuariat de MAZARS, d'avoir convenu de partager leurs connaissances et leur professionnalisme avec moi.

Mes remerciements s'adressent également à M.Soufiane Fadili pour sa sympathie, sa bonne humeur et son soutien.

Je remercie également M.Mohammed ELHAJ TIRARI d'avoir accepté d'évaluer mon travail. Qu'il trouve ici le témoignage de mon respect.

Ma sincère reconnaissance va à tous ceux qui, de près ou de loin, ont contribué à l'aboutissement et au bon déroulement de ce modeste travail.

Table des matières

| | |
|--|----|
| Résumé..... | 3 |
| Dédicace..... | 4 |
| Remerciements..... | 5 |
| Table des matières..... | 6 |
| Liste des tableaux..... | 8 |
| Liste des figures..... | 9 |
| Liste des abréviations..... | 10 |
| Introduction générale..... | 11 |
| CHAPITRE Préliminaire : Présentation de l'organisme d'accueil | 12 |
| MAZARS à l'International..... | 13 |
| MAZARS au Maroc..... | 14 |
| CHAPITRE I :Présentation du cadre réglementaire de l'étude. | 17 |
| I-1-Introduction :..... | 19 |
| I-2-La norme IFRS13 et la valorisation à la « juste valeur » :..... | 19 |
| I-3- Les accords de Bâle III :..... | 21 |
| CHAPITRE II : Données de marché | 23 |
| II-1-La courbe des taux zéro-coupon..... | 25 |
| II-1-1 Terminologie :..... | 25 |
| II-1-2 les méthodes de construction de la structure à terme des taux zéro coupon..... | 27 |
| II-1-2-1-La méthode du Bootstrap :..... | 27 |
| II-1-2-2- Le modèle de Vasicek :..... | 30 |
| II-2-La notion du taux forward..... | 44 |
| II-2-1- Définition :..... | 44 |
| II-2-2 Calcul du taux forward :..... | 44 |
| II-2-2-1 Rappels du calcul stochastique :..... | 45 |
| II-2-2-2- Formule de calcul du taux forward..... | 46 |
| II-3- La notion de volatilité..... | 46 |
| II-3-1- Introduction..... | 46 |
| II-3-1-1- Définition :..... | 46 |
| II-3-1-2- Les types de volatilités :..... | 47 |
| II-3-2- Utilisation de la volatilité pour la valorisation des options de change :..... | 47 |
| II-3-2-1 La volatilité du cours EUR/USD :..... | 47 |
| II-3-2-2- La volatilité du cours EUR/MAD et USD/MAD :..... | 48 |
| CHAPITRE III :Valorisation des instruments financiers | 51 |
| III-1- La valorisation des options de change :..... | 53 |
| III-1-1- Déterminants de la prime d'une option :..... | 53 |
| III-1-2- le modèle de Black and Scholes d'origine:..... | 53 |

| | |
|--|-----------|
| III-1-3- le modèle de de Garman Kohlhagen : | 55 |
| III-2- La valorisation des Swaps de taux : | 60 |
| III-2-1- Définition et caractéristiques d'un swap de taux : | 60 |
| III-2-2- La valorisation des swaps de taux : | 61 |
| III-2-3- Application : | 62 |
| III-3- La valorisation des swaptions | 63 |
| III-3-1- Préliminaire : | 63 |
| III-3-1-1- Le Swap Market Model : | 63 |
| III-3-2-la valorisation des swaptions : | 64 |
| III-4-La valorisation d'un change à terme | 65 |
| III-4-1- Définition | 65 |
| III-4-2- Approche théorique : | 66 |
| III-4-3- La pratique du change à terme : | 66 |
| III-4-4- La valorisation du change à terme : | 67 |
| III-4-5-Application : | 68 |
| CHAPITRE IV :La mise en place de la CVA | 70 |
| IV-1-Généralités sur la CVA..... | 72 |
| IV-1-1-Définition : | 72 |
| IV-1-2- CVA unilatérale et CVA bilatérale | 72 |
| IV-1-3-Le risque de défaut : | 72 |
| IV-1-4-Modélisation mathématique de la CVA : | 73 |
| IV-1-5- Hypothèses de calcul de la CVA..... | 74 |
| IV-1-5-1-Le traitement de la corrélation entre l'exposition au défaut et le temps de défaut..... | 74 |
| IV-1-5-2-La formule de calcul de la CVA | 75 |
| IV-1-5 -3 La non-additivité de la CVA | 75 |
| IV-2- Estimation des paramètres de la CVA : | 76 |
| IV-2-1- Traitement de la LGD : | 76 |
| IV-2-2-Estimation des probabilités de défaut : | 76 |
| IV-2-2-1- L'utilisation des ratings –la notation : | 76 |
| IV-2-2-2- L'utilisation des spreads CDS:..... | 78 |
| IV-2-3-Estimation de l'exposition au défaut : | 79 |
| IV-2-3-1 La méthode des add-ons forfaitaires : | 79 |
| IV-2-3-2-La méthode des swaptions : | 79 |
| IV-2-3-3-La méthode des sensibilités : | 81 |
| IV-3- Résultats du calcul de la CVA : | 85 |
| IV-3-1-Calcul de la CVA pour un swap de taux : | 85 |
| IV-3-2-Résultats du calcul de la CVA pour le change à terme : | 88 |
| IV-3-3-Résultats du calcul de la CVA pour les options de change: | 89 |
| Conclusion..... | 94 |
| Bibliographie..... | 95 |
| Annexes..... | 96 |

Liste des tableaux

| | |
|--|----|
| Tableau 1 : Définition de la juste valeur selon l'IAS39 et l'IFRS13..... | 20 |
| Tableau 2 : Taux de référence du marché secondaire des bons du trésor (Courbe des taux) du 25/03/2011 | 29 |
| Tableau 3 : Structure à terme du taux de marché , du taux sans risque et la série $V(t,T)$ | 42 |
| Tableau 4 : Série des taux de marché et des taux théoriques (modèle de Vasiceck) | 43 |
| Tableau 5 : Surface de volatilité EUR/USD au 31/12/2013 | 47 |
| Tableau 6: Nappe de strike EUR/USD correspondants aux valeurs du delta en fonction des maturités au 31/12/2013 | 48 |
| Tableau 7: Poids des devises étrangères dans le panier MAD | 50 |
| Tableau 8: Echancier et cash-flows de la jambe variable | 62 |
| Tableau 9: Echancier et cash-flows de la jambe fixe..... | 62 |
| Tableau 10: la structure à terme de la probabilité de défaut pour différentes notations. | 78 |
| Tableau 11: Add-ons forfaitaires extrait du texte de Bâle II. | 79 |
| Tableau 12: Structure à terme de la probabilité de défaut de la contrepartie. | 86 |
| Tableau 13: Probabilités de défaut obtenues par interpolation linéaire. | 86 |
| Tableau 14: Résultats du calcul de l'exposition au défaut par la méthode des swaptions. | 87 |
| Tableau 15: Résultats du calcul de la CVA pour un swap receveur du fixe..... | 87 |
| Tableau 16 : Résultats du calcul de la CVA pour un swap payeur du fixe..... | 87 |
| Tableau 17: Valeurs de la CVA pour différentes valeurs du taux fixe pour un swap payeur/receveur du fixe. | 88 |
| Tableau 18: Tableau récapitulatif des résultats du calcul de la CVA pour change à terme..... | 89 |
| Tableau 19 : Caractéristiques d'une option FX EUR/USD | 90 |
| Tableau 20 : Caractéristiques De la contrepartie..... | 91 |
| Tableau 21 : Résultats du calcul de la CVA pour option de change | 92 |

Liste des figures

| | |
|---|----|
| Figure 1 : Distribution géographique de MAZARS dans le monde. | 13 |
| Figure 2 : Organigramme de MAZARS au Maroc | 15 |
| Figure 3 : schéma descriptif des risques couverts par une exigence en fonds propres selon le comité de Bâle. | 22 |
| Figure 4: Interface du fichier Excel calculant la courbe zéro-coupon par la méthode du Bootstrap | 30 |
| Figure 5 : Graphe représentant la série des TMP journaliers | 32 |
| Figure 6 : Résultats du test de Dickey-Fuller Augmenté pour l'existence d'une tendance (sortie EVIEWS)..... | 35 |
| Figure 7 : Résultat du test de Dickey-Fuller Augmenté pour la significativité de la constante (sortie EVIEWS) | 36 |
| Figure 8 : Corrélogramme de la série des taux courts | 37 |
| Figure 9 :Estimation des paramètres du modèle (sortie Eviews)..... | 38 |
| Figure 10 : Test de Jarque Bera pour la normalité des résidus (Sortie Eviews) | 39 |
| Figure 11 : Résultats de l'implémentation de la simulation de Monte Carlo pour la prévision du taux court | 42 |
| Figure 12 : Résultats de l'estimation de la prime moyennant la régression linéaire (sortie Excel) | 43 |
| Figure 13: Comparaison graphique de la structure à terme du taux ZC du marché et théorique..... | 44 |
| Figure 14 : Résultats de l'estimation de la prime moyennant la régression linéaire (Sortie Excel) | 49 |
| Figure 15 : capture de l'outil implémenté sur VBA-Excel pour la valorisation des options de change | 59 |
| Figure 16 : Swap de taux avec paiement annuel pour le taux fixe et semestriel pour le taux variable..... | 60 |
| Figure 17 : Interface du pricer des swaps de taux sur Excel | 63 |
| Figure 18 : Interface du pricer du change à terme sur Excel | 68 |
| Figure 19 : Schéma illustrant les scénarios possibles de l'évolution de l'exposition au défaut | 74 |
| Figure 20 : Path Dependant Simulation..... | 84 |
| Figure 21:Direct Jump Simulation | 85 |
| Figure 22 : Valeur de la CVA en fonction du taux fixe selon le type du swap. | 88 |
| Figure 23 :Interface du pricer de CVA pour change à terme..... | 89 |
| Figure 24 :Simulation (DJS) de l'exposition au défaut. | 91 |
| Figure 25 : Simulation PDS de l'exposition au défaut | 92 |
| Figure 26 :Interface de l'outil de calcul de la CVA pour options FX | 93 |

Liste des abréviations

CDS : Credit Default Swap.

CVA : Credit Value Adjustment.

DF : Discount Factor.

DJS : Direct Jump Simulation.

DVA : Debit Value Adjustment.

EaD : Exposition au Défaut.

FX : Forex.

IAS : International Accounting Standards.

IFRS : International Financial Reporting Standards.

LGD : Loss Given Default.

MtM : Mark-to-Market.

OTC : Over The Counter.

PD : Probabilité de défaut

PDS : Path Dependant Simulation.

RR : Recovery Rate.

TMP : Taux Moyen Pondéré

VBA : Visual Basic for Applications

ZC : Zéro Coupon

Introduction générale

La crise financière de 2008 a fortement impacté les produits dérivés et la gestion des risques qui leur sont liés. En effet, l'absence d'une évaluation appropriée de l'exposition de crédit et de la probabilité de défaut ont été un facteur déclencheur de la crise des subprimes.

L'augmentation significative du risque de contrepartie, conjuguée à l'entrée en vigueur de la norme IFRS 13 et aux accords de Bâle III qui exigent la prise en compte de ce risque dans la valorisation des instruments financiers, ont poussé les acteurs du marché à changer leurs pratiques et à remettre en question leur modélisation des risques.

Le risque de contrepartie est évalué au moyen de la Credit Value Adjustment (CVA), un ajustement qui reflète la valeur de marché de ce risque et sur lequel la lumière a été mise dans le présent mémoire.

Dans le premier chapitre, nous allons évoquer les dispositifs réglementaires qui font du calcul de la CVA une exigence inéluctable pour les institutions financières.

Nous allons ensuite traiter les données de marché indispensables à notre étude, à savoir le taux d'intérêt, le taux forward et la volatilité compte tenu des spécificités du marché marocain.

Dans le troisième chapitre, il est question de définir les modèles de valorisation des produits vanilles sur lesquels la CVA sera calculée par la suite à savoir les swaps de taux, les options de change et le change à terme, ainsi que d'exposer les résultats de l'implémentation de ces modèles de pricing sous le langage VBA.

Un intérêt particulier sera accordé au quatrième et dernier chapitre, où nous allons entamer la CVA, sa définition, ses propriétés, les hypothèses de son calcul, les méthodes d'estimation de ses paramètres, sa modélisation et les résultats de l'implémentation de ses pricers pour des dérivés vanilles.

**CHAPITRE PRÉLIMINAIRE :
PRÉSENTATION DE L'ORGANISME
D'ACCUEIL**

MAZARS à l'International

- Présentation :

MAZARS est une organisation internationale, intégrée et indépendante, spécialisée dans l'audit, le conseil et les services comptables, fiscaux et juridiques.

MAZARS a considérablement accéléré son développement dans le monde au cours des dernières années, et conforté son positionnement d'acteur international indépendant de premier plan.

La présence mondiale de MAZARS aujourd'hui est structurée autour de plateformes géographiques : l'Europe, l'Asie Pacifique, l'Afrique, le Moyen Orient, l'Amérique Latine et les Caraïbes, l'Amérique du Nord. Le Partner hip intégré de MAZARS est aujourd'hui présent dans 71 pays et fédère 13500 professionnels.

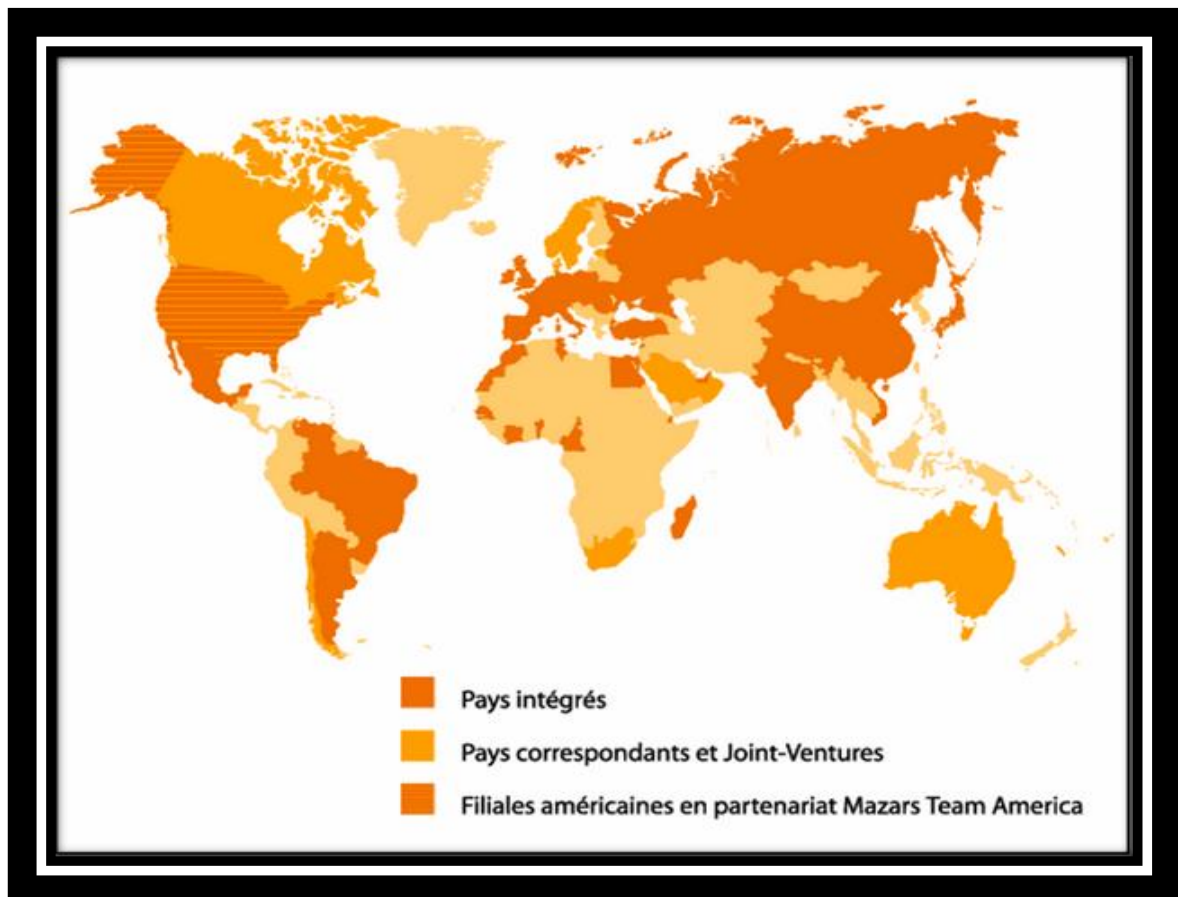


Figure 1 : Distribution géographique de MAZARS dans le monde.

MAZARS a une forte présence au niveau des instances européennes et internationales relative à ses métiers notamment l'IASB (International Accounting Standards Board), l'IFRIC (International Financial Reporting Interpretation Committee), l'EFRAG (European Financial Reporting Advisory Group ...etc.

- Organisation :

Depuis le début de son aventure en 1940, MAZARS a fait le choix exigeant d'être un groupe réellement intégré. Son organisation et son modèle de gouvernance sont le cœur de son modèle de développement.

➤ **Les règles du partnership intégré :**

Le principal objectif du partnership international intégré de MAZARS est de garantir un service de qualité constante aux clients, tous particulièrement aux clients internationaux qui souhaitent des services parfaitement coordonnés reflétant leur propre structure de groupe.

➤ **Les instances de gouvernance :**

La direction de MAZARS est assurée par son conseil de gérance sous la supervision du conseil et surveillance. Les présidents et membres de ses deux instances sont élus par les associés réunis lors de leur assemblée générale.

MAZARS publie annuellement ses comptes consolidés, audités et en normes IFRS dans son rapport annuel.

MAZARS au Maroc

- Présentation

Le cabinet MAZARS, membre intégré du partnership MAZARS, fait partie des cinq plus importants cabinets d'audit et de conseil au Royaume.

D'une expérience de plus de 35 ans et porté par une équipe de plus d'une centaine de professionnels, le cabinet poursuit son ambition de rester l'un des acteurs les plus en vue pour accompagner le secteur public dans ses stratégies de modernisation et le secteur privé dans ses projets de développement au Maroc et dans la région de l'Afrique du Nord et de l'Afrique subsaharienne.

Le cabinet compte actuellement :

- 7 associés
- Plus de 140 auditeurs et consultants

- Organisation

Le cabinet est géré par un comité exécutif sous la supervision d'un comité de surveillance, il est composé de Management Units métiers et de trois directions de support.

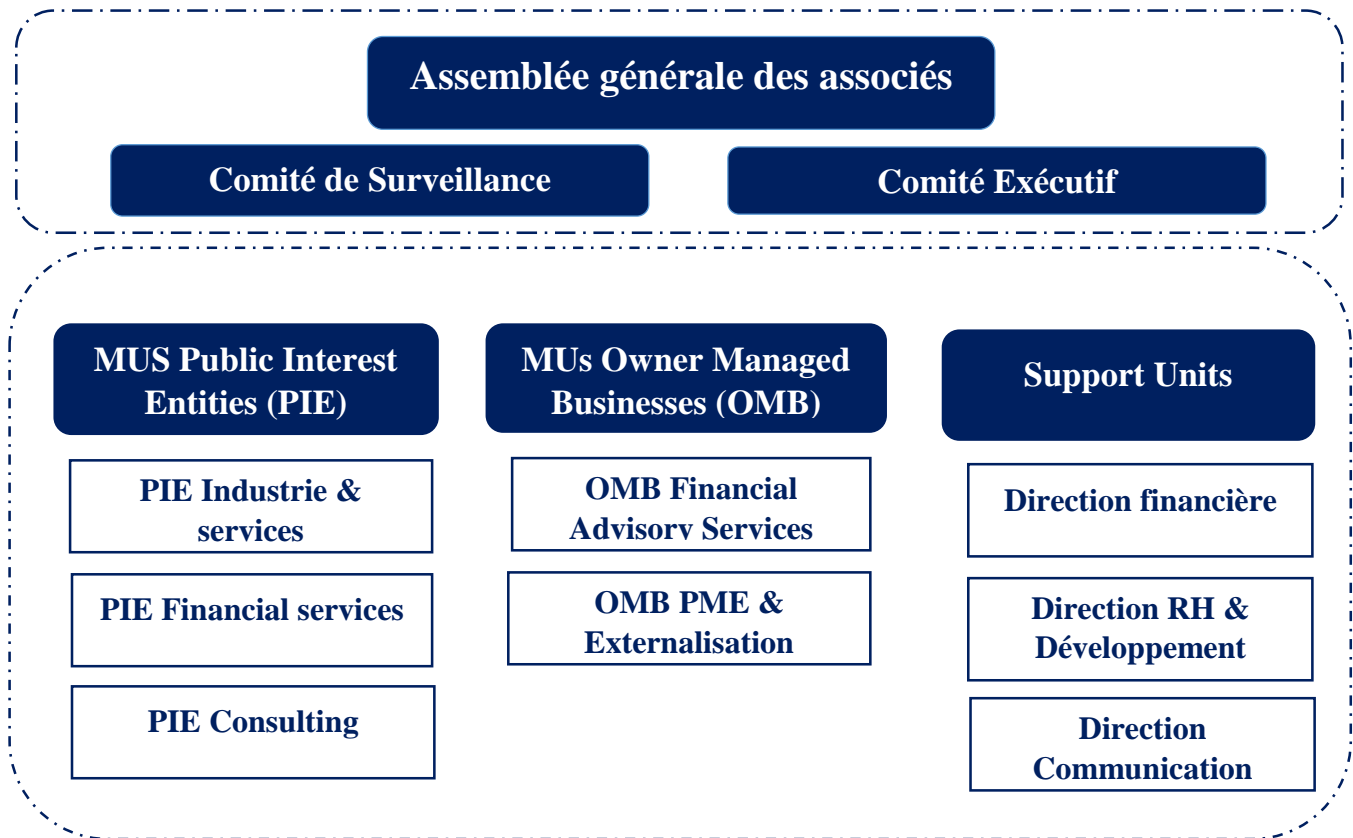


Figure 2 : Organigramme de MAZARS au Maroc

- Domaines d'expertise :

Le cabinet MAZARS intervient dans les métiers de l'audit financier, l'expertise comptable, l'actuariat, la fiscalité et le conseil aux entreprises, et ce, dans tous les secteurs d'activités, notamment en immobilier et BTP, services financiers et industrie et services.

Zoom sur l'offre Actuariat de MAZARS :

Les équipes "Actuariat" de Mazars regroupent quatre natures de compétences :

- Ingénierie financière,
- Actuariat d'assurance,
- Engagements sociaux,
- Statistiques et modélisation.

Ces équipes collaborent étroitement avec les autres équipes de l'organisation Mazars disposant de compétences "métier" connexes (audit financier, doctrine, contrôle interne, audit informatique...) ou d'une expertise sectorielle spécifique (banque, assurance...), pour constituer des équipes pluridisciplinaires traitant les besoins des clients portant notamment sur :

➤ **Actuariat financier / Assurance :**

- Définition et la mise en œuvre de votre stratégie de croissance dans les activités d'assurance,
- Elaboration de votre démarche de gestion actif/passif et d'allocation stratégique d'actifs,
- Pilotage et mise en œuvre des évolutions comptables (normes IFRS) et réglementaires (Solvency2, Bâle 2, Bâle 3) : diagnostic, études quantitatives d'impacts, modèles internes, reportings, déploiement,
- Evaluation critique et indépendante de vos engagements techniques d'assurance, économiques et réglementaires,
- Fonction financière : revue critique de méthodologies et modèles appliqués,
- Formation sur les problématiques financières (Solvabilité 2, Quantitative Impact Study – QIS, ORSA, Bâle 3, modélisation, évaluation des produits financiers complexes, stress tests et back tests...),
- Valorisation de sociétés, due diligence, accompagnement post-fusion,
- Pricing d'instruments financiers complexes.

➤ **Actuariat / Pensions et avantages au personnel**

- Assistance à la mise en place des Normes IAS 19 (passifs sociaux), IFRS 2 (rémunération en instruments de capitaux propres),
- Réalisation de bilans actuariels,
- Accompagnement pour l'externalisation des caisses internes de retraite,
- Evaluation des avantages de personnel, dans le cadre d'opérations de fusions-acquisitions ou de mise aux normes comptables internationales,
- Identification et évaluation de vos engagements de retraite et de vos dispositifs de rémunération en instruments de capitaux propres.

**CHAPITRE I :
PRÉSENTATION DU CADRE
RÉGLEMENTAIRE DE
L'ÉTUDE.**

Deux grands corps de règles régissent l'activité bancaire : les règles définies par le comité de Bâle qui déterminent les besoins en fonds propres nécessaires pour chaque activité et chaque type de risque et les règles comptables dites IFRS (International Financial Reporting Standards) pour les sociétés cotées.

Partant de ce constant, nous allons mettre l'accent dans ce chapitre sur le cadre réglementaire de la prise en compte du risque de contrepartie lié aux instruments financiers aussi bien dans les normes comptables à travers la norme IFRS13 que dans les accords de Bâle3.

I-1-Introduction :

La crise économique et financière de 2008 a remis en question la robustesse du secteur bancaire qui a rapidement gagné le reste du système financier et l'économie réelle, entraînant une très forte contraction de l'offre de liquidité et de crédit.

Les pouvoirs publics ont dû intervenir en procédant à des injections de liquidité sans précédent et en mettant en place des soutiens en fonds propres et des garanties, exposant le contribuable à de lourdes pertes.

Compte tenu de l'ampleur et de la rapidité avec laquelle la crise récente et les crises antérieures se sont propagées à travers le monde et du caractère imprévisible des crises futures, il est essentiel que tous les pays renforcent la résilience de leur secteur bancaire aux chocs tant internes qu'externes ainsi que l'efficacité de leur système comptable.

Dans ce contexte, et afin de pallier aux carences du marché financier, le Comité de Bâle et le bureau international des normes comptables ont instauré plusieurs mesures pour réformer en profondeur le dispositif réglementaire prudentiel et comptable international. Ces mesures vont être exposées dans le présent chapitre.

I-2-La norme IFRS13 et la valorisation à la « juste valeur » :

Pointées du doigt, les normes comptables, plus particulièrement le principe de la « fair value », ont été récemment accusées d'avoir joué un rôle important dans la crise économique et financière qui a ravagé l'Europe et le monde.

Il s'agit là d'un sujet autant déterminant que complexe, d'un grand intérêt théorique dans lequel se croisent économie, finance et comptabilité.

Le 12 mai 2011, International Accounting Standards Board (IASB) a publié IFRS 13, qui établit une source unique d'indications pour les évaluations à la juste valeur selon les IFRS. Cette norme est applicable de façon obligatoire pour les exercices ouverts à compter du 1er janvier 2013. Elle a pour objectif de regrouper sous une seule norme l'ensemble des définitions et guides relatifs à la détermination de la juste valeur qui étaient éparpillés dans les normes spécifiques, notamment dans l'IAS39 (Instruments financiers : Comptabilisation et évaluation) et dans l'IFRS 9 (Instruments financiers).

| Ancienne définition de la juste valeur dans l'IAS39/IFRS9 | Nouvelle définition de la juste valeur dans l'IFRS13 |
|--|---|
| « Le montant pour lequel un actif pourrait être échangé, ou un passif éteint, entre des parties bien informées, consentantes, et agissant dans des conditions de concurrence normale » | « Prix qui serait reçu pour la vente d'un actif ou payé pour le transfert d'un passif lors d'une transaction normale entre des intervenants du marché à la date d'évaluation. » |

Tableau 1 : Définition de la juste valeur selon l'IAS39 et l'IFRS13

Selon ces deux définitions , pour valoriser à la « fair value », il est nécessaire d'incorporer le risque de crédit des contreparties, c'est-à-dire , le risque que la contrepartie ne soit en mesure d'honorer ses engagements, pour prévaluer le prix que paierait un intervenant du marché pour acquérir l'actif (c'est-à-dire, le prix que le détenteur recevrait au titre de la vente de l'actif) , et ce, dans les réévaluations de portefeuille d'instruments financiers.

Extrait de la norme IFRS 13

"Quelle que soit la méthode retenue par l'entité, la juste valeur d'un passif doit refléter l'effet du risque de non-exécution. Le risque de non-exécution comprend notamment le risque de crédit propre à l'entité. Le risque de non-exécution est présumé être le même avant et après le transfert du passif."

Cet extrait permet de mettre en exergue la différence entre l'ancienne définition de la juste valeur basée sur la notion de règlement et la définition récente basée sur la notion du transfert. En effet , la non prise en considération du risque de contrepartie dans la valorisation était soutenue par l'idée que le montant auquel une entité peut régler un passif financier avec une contrepartie est différent du montant auquel ce passif pourrait être transféré à une autre entité sur le marché financier, car dans le cas d'un règlement , la transaction tiens compte uniquement du risque de défaut de la contrepartie et néglige celui du débiteur, tandis que la notion du prix de transfert stipule que l'emprunteur tient compte de son propre risque de crédit de la même façon que la contrepartie qui détient les actifs tient compte du risque de crédit de l'emprunteur.

La méthode de valorisation conçue pour tenir compte du risque de contrepartie est appelée la CVA (Credit value adjustment) et celle adoptée pour mesurer son propre risque de défaut est la DVA (Debit value adjustment). Ces mesures sont définies comme étant la différence entre la valorisation sans risque et la valorisation qui tient compte de la probabilité de défaut.

I-3- Les accords de Bâle III :

En décembre 2010, le comité de Bâle a publié un dispositif réglementaire : L'accord de Bâle III. Cet accord comprend un ensemble de mesures destinées à renforcer la résilience des grandes banques internationales ainsi que des mesures spécifiques sur le risque de liquidité.

Ces deux textes ont été publiés le 16 décembre 2010. Une version révisée de l'Accord de Bâle III complétée sur le risque de contrepartie a été publiée le 1er juin 2011.

Sa mise en œuvre sera progressive :

- les premières mesures entreront en vigueur le 1er janvier 2013 ;
- l'ensemble des mesures devront être appliquées au 1er janvier 2019.

Le comité de Bâle a dans le cadre de la réglementation Bâle III introduit une nouvelle charge en capital, la CVA (Credit Value Adjustment). Cette charge supplémentaire a été créée dans le but d'améliorer la résistance des banques à une détérioration de la valeur de marché de leurs actifs, en temps de crise majeure. L'esprit reste le même que celui des réglementations précédentes, c'est-à-dire obliger les banques à détenir des fonds propres suffisants pour faire face aux périodes de stress. Bâle III apporte de nouvelles exigences au regard du risque d'ajustement de valorisation sur les actifs :

Extrait de Bâle III "Outre l'exigence de fonds propres en regard du risque de contrepartie déterminée sur la base des approches standard ou notations internes (NI) du risque de crédit, une banque doit ajouter une exigence visant à couvrir le risque de pertes, en valeur de marché, résultant du risque de contrepartie attendu (de telles pertes étant dénommées ajustement de valorisation sur actifs CVA, credit value adjustment) sur les dérivés de gré à gré."

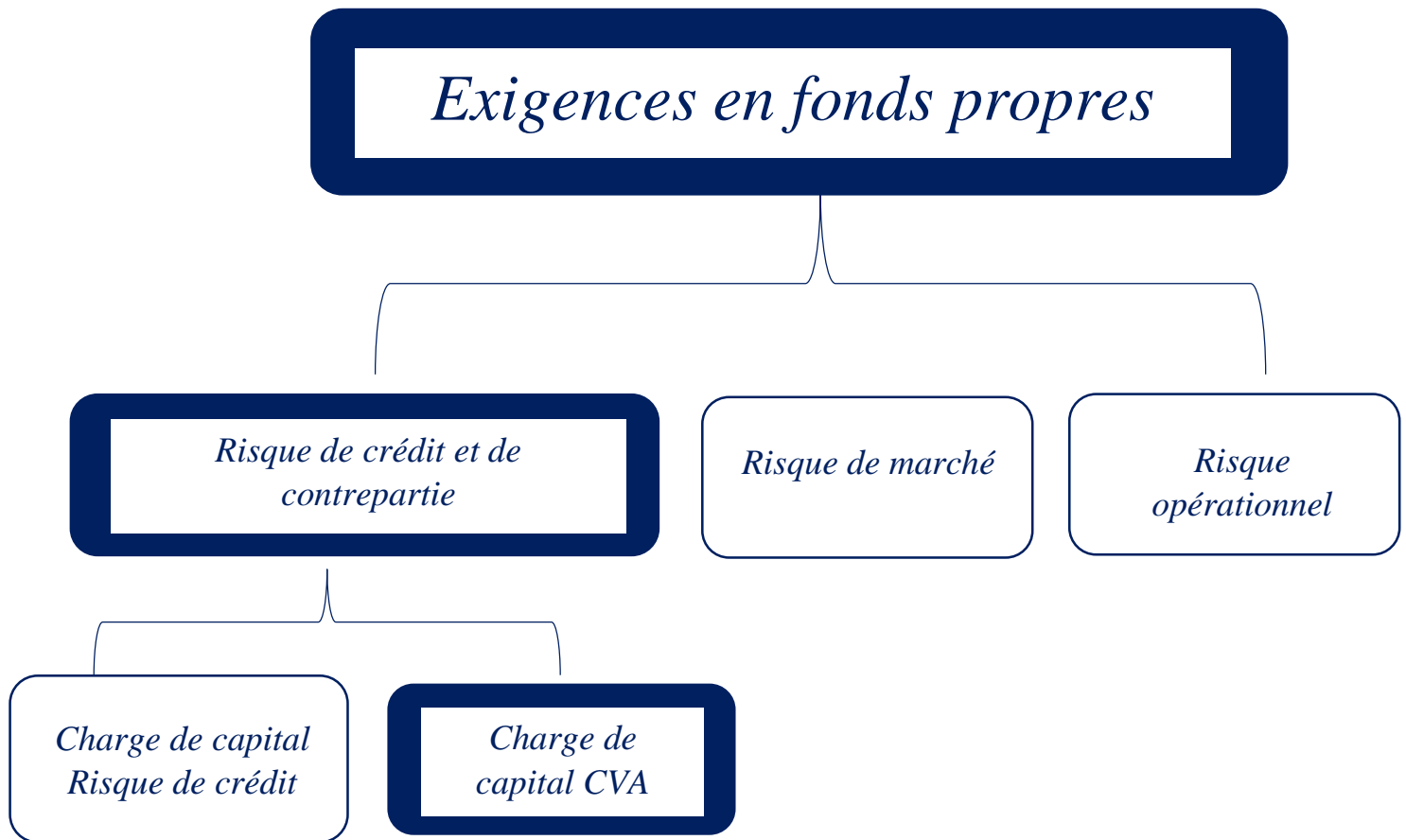


Figure 3 : schéma descriptif des risques couverts par une exigence en fonds propres selon le comité de Bâle.

Ainsi, les normes comptables IFRS 13 ainsi que les règles prudentielles du comité de Bâle exigent la prise en compte de la CVA dans la valorisation, d'où la nécessité d'étudier cet ajustement et d'évaluer son impact sur le Mark to Market des dérivés.

Le chapitre suivant aura pour objectif de traiter les données de marché nécessaires à la valorisation des instruments financiers spécifiques à ce mémoire et au calcul de la CVA.

CHAPITRE II :
DONNÉES DE MARCHÉ

La valorisation des instruments financiers requiert des paramètres et des données qui sont tantôt extraits du marché si ce dernier est liquide, tantôt construits moyennant des modèles mathématiques.

L'objectif de ce chapitre est de nous arrêter sur les données de marché indispensables au pricing des instruments financiers auxquels nous nous intéresserons dans la suite de notre exposé.

II-1-La courbe des taux zéro-coupon

La valorisation des instruments financiers consiste en l'actualisation des flux futurs. Cette actualisation se fait par le biais d'une courbe de taux appelée la courbe des taux zéro-coupon.

Ainsi, nous avons décidé de consacrer cette partie à la détermination de la courbe des taux zéro coupon, en allant de sa définition jusqu'aux différentes méthodes déterministes et stochastiques de son calcul.

II-1-1 Terminologie :

➤ *L'instrument zéro-coupon :*

On appelle instrument zéro-coupon tout instrument qui ne verse aucun flux intermédiaire et ne donne lieu qu'à deux flux : un flux initial à la date de valeur et un flux final de remboursement à sa date de maturité. Le taux de rendement actuariel de cet instrument est son taux zéro-coupon.

Certains instruments zéro-coupon sont négociés dans le marché, comme les obligations zéro-coupon ou les swaps zéro-coupon. Ils sont cependant peu nombreux.

Afin de mieux rapprocher le lecteur à cette notion de « zéro-coupon », nous nous réfèrerons à l'obligation dans la mesure où celle-ci reste facile à comprendre et à manier.

Une obligation est une créance détenue par une partie prêteuse sur une partie emprunteuse.

L'émission d'un emprunt obligataire est une opération financière par laquelle l'Etat ou un organisme public ou privé émet des obligations en contrepartie des sommes empruntées. Vis-à-vis du détenteur d'une obligation, l'émetteur s'oblige à rembourser le prêt à son échéance et à payer un intérêt sur la somme empruntée, cet intérêt est appelé coupon.

L'obligation zéro-coupon est donc l'obligation qui ne verse pas de flux intermédiaires et ne donne ainsi lieu qu'à un seul flux à l'échéance.

Chaque flux intermédiaire d'une obligation standard peut être assimilé à une obligation zéro coupon de même montant et d'échéance correspondante à la date de tombée du flux. Donc une obligation peut être considérée comme la somme d'obligations zéro coupon. .

Etant donné qu'il n'existe pas suffisamment d'obligations zéro coupon sur le marché pour avoir les taux d'actualisation correspondants à toutes les maturités, on recourt à des méthodes d'interpolation comme l'interpolation linéaire et cubique.

➤ **Le prix zéro-coupon :**

Le Prix zéro-coupon est le prix d'un bon zéro-coupon de maturité T , il correspond à la valeur aujourd'hui (en t) d'une unité monétaire payée à T , sans paiements intermédiaires entre ces deux dates. L'on a alors :

$$P(t, T) = \frac{1}{[1 + \pi(T - t) \times L(t, T)]}$$

$\pi(T - t)$: différence entre les dates t et T selon la convention de décompte de jours retenue ;

$L(t, T)$: taux de marché à la date t .

➤ **Le taux zéro-coupon :**

Communément connu comme étant le taux le plus utile sur le marché financier, le taux zéro-coupon à n années est le taux d'intérêt obtenu sur un investissement engendrant un seul flux au terme des n années sans flux intermédiaires.

A chaque fois que l'on parle d'évaluation de produits financiers, qu'il s'agisse d'obligations, d'options ou autres, le taux zéro-coupon est forcément évoqué. Le taux zéro-coupon permet l'actualisation des flux à une date donnée, ce qui constitue en fait le principe de l'évaluation d'un actif. L'intérêt du taux zéro-coupon dans ce sens, apparait principalement à travers son unicité.

En effet, pour une maturité donnée il n'existe qu'un seul taux zéro-coupon permettant l'actualisation à une date préalable t .

Il est à noter que l'évaluation des dérivés de taux dépend deux fois de cette courbe de taux plus que les dérivés sur actions ou sur devises, plus particulièrement en raison du fait que le taux d'intérêt, étant le sous-jacent, intervient à la fois dans la définition des Payoffs de ces actifs et dans l'actualisation de ceux-ci.

➤ **Courbe des taux zéro-coupon :**

La courbe des taux zéro-coupon, appelée également la structure par terme des taux d'intérêt zéro-coupon, est une fonction qui, à une date donnée et pour chaque maturité en abscisse, indique le niveau du taux d'intérêt zéro-coupon associé en ordonnée $t: T \rightarrow R_{zc}(t, T)$ (ou du prix zéro coupon $t: T \rightarrow P_{zc}(t, T)$).

II-1-2 les méthodes de construction de la structure à terme des taux zéro coupon.

Il existe plusieurs approches déterministes et stochastiques de détermination de la structure à terme des taux zéro coupon. Dans ce qui suit, nous allons appliquer la méthode du bootstrap comme approche déterministe reposant sur les taux du marché et une méthode stochastique utilisant le modèle de Vasicek.

Il est à noter qu'il existe plusieurs modèles outre celui de Vasicek, nous en citerons, à titre d'exemple, celui de Cox-Ingersoll-Ross (CIR) et celui de Heath-Jarrow-Merton (HJM). Nous aurions souhaité étudier ces autres modèles également, mais ceci n'étant pas l'objectif primaire de notre travail et faute de temps nous nous limiterons à celui de Vasicek.

II-1-2-1-La méthode du Bootstrap :

➤ Présentation de la méthode :

Il s'agit de techniques d'interpolation précédées par une opération dite le Bootstrap. Le Bootstrap est une méthode basée sur l'hypothèse selon laquelle le prix théorique d'une obligation est la somme de ses flux actualisés aux taux zéro-coupon de l'échéance de chaque flux. Elle consiste à calculer les taux à maturité proche à l'aide des titres d'horizon court et à en déduire, de proche en proche, les taux ZC correspondants aux maturités plus éloignées.

- Pour les titres à maturité < 1 an

Les obligations dont la maturité est inférieure à 1 an, sont assimilables à des obligations zéro coupon. En effet, il n'y a qu'un seul paiement, un seul flux. Donc le taux actuariel est identique au taux zéro coupon.

Mais dans la réalité, les taux relatifs aux instruments financiers de court terme, appelés taux monétaires, ont pour base annuelle 360 jours. Puisque les taux actuariels ou taux zéro coupon ont pour base annuelle 365 jours alors, il faut procéder à une transformation pour se ramener à la base annuelle de 365 jours.

$$\left(1 + t_m \times \frac{n}{360}\right) = (1 + t_a)^{n/365} \Rightarrow t_a = \left(1 + t_m \times \frac{n}{360}\right)^{365/n} - 1$$

n : la maturité du titre

t_m : le taux monétaire

t_a : le taux actuariel

Ainsi sont extraits les taux actuariels (taux zéro coupon) correspondants aux maturités pour lesquelles Bank Al Maghreb a publié les taux monétaires de référence.

- Pour les titres à maturité >1 an

Les taux non monétaires, dont la maturité est supérieure à 1 an, correspondent déjà à une base annuelle de 365 jours. Donc le besoin de transformer en taux actuariel ne se pose plus. Par contre ces taux relatifs à des titres de maturité supérieure à 1 an ne sont pas des taux zéro coupon. Il faut donc construire les taux zéro coupon correspondants.

Avant d'exposer la méthode, précisons que les taux publiés par Bank Al Maghreb sont des taux de rendement pair. Pour une émission au pair, le taux facial est égal au taux de rendement actuariel. Ainsi, le prix est égal au nominal. L'émission au pair permet de gommer l'effet coupon. En effet, le prix de deux obligations de même maturité ne dépendra plus du taux facial du moment où l'émission est faite au pair.

Avec l'émission au pair, on peut considérer que toutes les obligations ont le prix 100 et à chaque maturité correspond un et un seul taux actuariel qui est le taux de rendement au pair pour la maturité correspondante. Alors de proche en proche, en utilisant les taux de rendement au pair publiés par Bank Al Maghreb, les taux zéro coupon sont déterminés de la façon suivante :

En général, la formule calculant le taux zéro-coupon pour toute maturité $n > 1$ an et pour un nominal N , s'écrit comme suit, C_n étant le flux à verser :

$$t_{zcn} = \left[\frac{N + C_n}{N - C_n \sum_{t=1}^{n-1} (1 + t_{zi})^{-t}} \right]^{1/n} - 1$$

Avec cet algorithme, il est possible de retrouver de proche en proche l'ensemble des taux zéro coupon. Mais remarquons que: les taux publiés par Bank Al Maghreb ne correspondent pas exactement aux maturités pleines : 1, 2, 3, ... ans.

Or l'algorithme présenté ci-dessous n'est valable que pour ces maturités. Ainsi il faudrait se ramener à ces maturités pleines moyennant une interpolation. Il existe en fait plusieurs types d'interpolations, cependant nous utiliserons, pour la simplicité qu'elle présente, une interpolation linéaire qui suppose que la fonction entre deux points est affine. Le taux à calculer est ainsi obtenue selon la formule :

$$r_k = \frac{(t_j - t_k) \times r_i + (t_k - t_i) \times r_j}{(t_j - t_i)}$$

r_i est le taux zéro-coupon de maturité t_i et $t_k \in [t_i; t_j]$.

Une fois la courbe des taux zéro coupon construite, les flux pour chaque maturité peuvent être actualisés. Il devient alors possible de valoriser les différents titres.

➤ Application:

Considérons dans un premier temps la courbe de taux des bons du trésor affichée par Bank Al Maghrib au 31/12/2013. Cette courbe qui sert en fait de référence, représente l'ensemble des transactions effectuées par la banque centrale sur les bons du trésors en précisant le montant de ces transactions ainsi que les taux auxquels elles ont été effectuées. En principe, le programme est tel que la courbe est quotidiennement mise à jour.

| Date : 31/12/2013 | | | |
|--------------------------|---------------------|---------------------------|-----------------------|
| Echéance | Transactions | Taux moyen pondéré | Date de valeur |
| 13/01/2014 | 50.92 | 3,35% | 31/12/2013 |
| 20/01/2014 | 184.59 | 3,38% | 31/12/2013 |
| 17/02/2014 | 30.44 | 3,38% | 31/12/2013 |
| 17/03/2014 | 51.53 | 3,40% | 31/12/2013 |
| 05/04/2014 | 90.68 | 3,50% | 30/12/2013 |
| 05/05/2014 | 250.78 | 3,52% | 30/12/2013 |
| 14/07/2014 | 91.18 | 3,60% | 31/12/2013 |
| 15/09/2014 | 50.51 | 3,77% | 31/12/2013 |
| 15/12/2014 | 32.59 | 3,89% | 31/12/2013 |
| 20/04/2015 | 26.61 | 4,14% | 27/12/2013 |
| 03/08/2015 | 21.94 | 4,29% | 27/12/2013 |
| 18/07/2016 | 400.71 | 4,52% | 31/12/2013 |
| 16/04/2018 | 72.54 | 4,83% | 30/12/2013 |
| 03/03/2020 | 24.62 | 5,04% | 30/12/2013 |
| 05/08/2023 | 994.10 | 5,58% | 13/12/2013 |
| 17/06/2024 | 987.61 | 5,66% | 06/01/2014 |
| 16/04/2029 | 771.12 | 5,96% | 06/01/2014 |
| 03/05/2030 | 45.58 | 5,26% | 20/06/2013 |
| 04/12/2036 | 43.57 | 4,74% | 09/12/2013 |

Tableau 2 : Taux de référence du marché secondaire des bons du trésor (Courbe des taux) du 25/03/2011

Afin d'appliquer la méthode du Bootstrap, il est essentiel de convertir les taux affichés en des taux pleins via interpolation linéaire. On entend par taux plein tout taux correspondant à une maturité pleine : 1 jour, 1 semaine, 2 semaines, 1 mois, 2 mois, 3 mois, 9 mois, 1 an, 2 ans, 3 ans, 4 ans, 5 ans...etc.

Nous considérerons le taux moyen pondéré TMP comme référence pour le taux journalier. Celui-ci est également affiché quotidiennement par Bank Al Maghrib.

Ci-dessous le résultat de l'implémentation de la méthode du Bootstrap.

| | A | B | C | D | E | F | G | H |
|----|----------------------------|-----------------|-------------------|----------------|---|------------------------|-------|---|
| 1 | Maturité résiduelle | Echéance | Taux plein | Taux ZC | | TMP(31/12/2013) | 3,03% | |
| 2 | 1 | 01/01/2014 | 3,0300% | 3,1196% | | | | |
| 3 | 7 | 07/01/2014 | 3,1900% | 3,2861% | | | | |
| 4 | 15 | 15/01/2014 | 3,3586% | 3,4614% | | | | |
| 5 | 30 | 30/01/2014 | 3,3800% | 3,4814% | | | | |
| 6 | 90 | 30/03/2014 | 3,4693% | 3,5644% | | | | |
| 7 | 180 | 28/06/2014 | 3,5822% | 3,6654% | | | | |
| 8 | 270 | 27/09/2014 | 3,7857% | 3,8573% | | | | |
| 9 | 365 | 31/12/2014 | 3,9195% | 3,9740% | | | | |
| 10 | 730 | 31/12/2015 | 4,3873% | 4,3964% | | | | |
| 11 | 1095 | 26/12/2016 | 4,5965% | 4,6127% | | | | |
| 12 | 1460 | 26/12/2017 | 4,7767% | 4,8028% | | | | |
| 13 | 1825 | 30/12/2018 | 4,9086% | 4,9438% | | | | |
| 14 | 2190 | 29/12/2019 | 5,0201% | 5,0654% | | | | |
| 15 | 2555 | 28/12/2020 | 5,1683% | 5,2339% | | | | |
| 16 | 2920 | 11/12/2021 | 5,3245% | 5,4171% | | | | |
| 17 | 3285 | 04/01/2023 | 5,4806% | 5,6061% | | | | |
| 18 | 3650 | 04/01/2024 | 5,6165% | 5,7745% | | | | |
| 19 | 4015 | 17/06/2024 | 5,6950% | 5,8691% | | | | |
| 20 | 4380 | 06/12/2025 | 5,7571% | 5,9441% | | | | |
| 21 | | | | | | | | |
| 22 | | | | | | | | |
| 23 | | | | | | | | |

Interface Excel avec onglets : Courbe des taux BAM, TMP journalier, **Bootstrapping**, Vasicek, estimation prime de risque.

Figure 4: Interface du fichier Excel calculant la courbe zéro-coupon par la méthode du Bootstrap

II-1-2-2- Le modèle de Vasicek :

Tenant compte du caractère supposé non déterministe du taux d'intérêt, nous avons choisi de recourir à un modèle pour modélisation du taux court afin d'établir l'expression du prix zéro-coupon.

➤ Présentation du modèle :

Le modèle de Vasicek (1977) est un modèle à une seule variable d'état. Les modèles à une variable d'état ou encore à un seul facteur considèrent que le taux d'intérêt à court terme, supposé sans risque, est la seule variable d'état dont la dynamique détermine celle des titres et, par conséquent, celle de la structure par terme des taux.

Le mouvement du taux d'intérêt de court terme r est en général décrit dans ce type de modèles par l'équation de diffusion suivante :

$$dr(t) = \mu(r)dt + \sigma(r)dW(t)$$

Où :

- $\mu(r)$: l'espérance du changement instantané de $r(t)$;
- $\sigma(r)$: écart-type de ce changement ;
- $W(t)$: Mouvement Brownien standard;

Le modèle de Vasicek, est défini tel que : $\mu(r, t) = a[b - r(t)]$ et que $\sigma(r) = \sigma$; où a et σ sont des scalaires strictement positifs.

Avec :

- b : Moyenne sur long terme du taux court assimilable au TMP journalier ;
- a : Vitesse de retour à la moyenne du taux à long terme b ;
- $W(t)$: Mouvement Brownien standard.

La solution de l'équation présentée par le modèle s'écrit dès lors :

$$r_t = r_0 e^{-at} + b(1 - e^{-at}) + \sigma e^{-at} \int_0^t e^{as} dB_s$$

Soit après discrétisation :

$$r_{t+1} = r_t e^{-a} + b(1 - e^{-a}) + \sigma \frac{1 - e^{-a}}{2a} \varepsilon$$

ε étant une variable aléatoire de loi Normale contrée réduite.

L'expression finale du prix zéro-coupon qui nous intéresse le plus à ce niveau-ci, issue de celle du taux court à laquelle il aboutit et, est en revanche la suivante :

$$P(t, T) = A(t, T) e^{-B(t, T)r(t)}$$

Avec :

$$B(t, T) = \frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a}$$

Et :

$$A(t, T) = \exp \left[\left(B(t, T) - (T - t)R(\infty) - \frac{\sigma^2 B(t, T)^2}{4a} \right) \right]$$

Où : $R(\infty) = b - \frac{\pi}{a} - \frac{1}{2} \left(\frac{\sigma}{a} \right)^2$, π étant la constante de la prime de risque.

➤ Estimation des paramètres :

Obtenir l'expression du prix zéro coupon revient tout d'abord à estimer chacun des paramètres \mathbf{a} , \mathbf{b} , σ ainsi que la prime de risque π . Nous commencerons dans un premier temps par déterminer les trois premiers paramètres, nous consacrerons ensuite une partie pour la prime de risque, sa définition et la démarche entreprise pour la préciser.

Pour ce faire, nous avons effectué une régression linéaire simple sur la série de taux courts du marché monétaire marocain. Les données utilisées sont celles de la période allant du 01/01/2013 au 31/12/2013, soit une période de 1 an dont les données sont représentées par le graphe suivant :

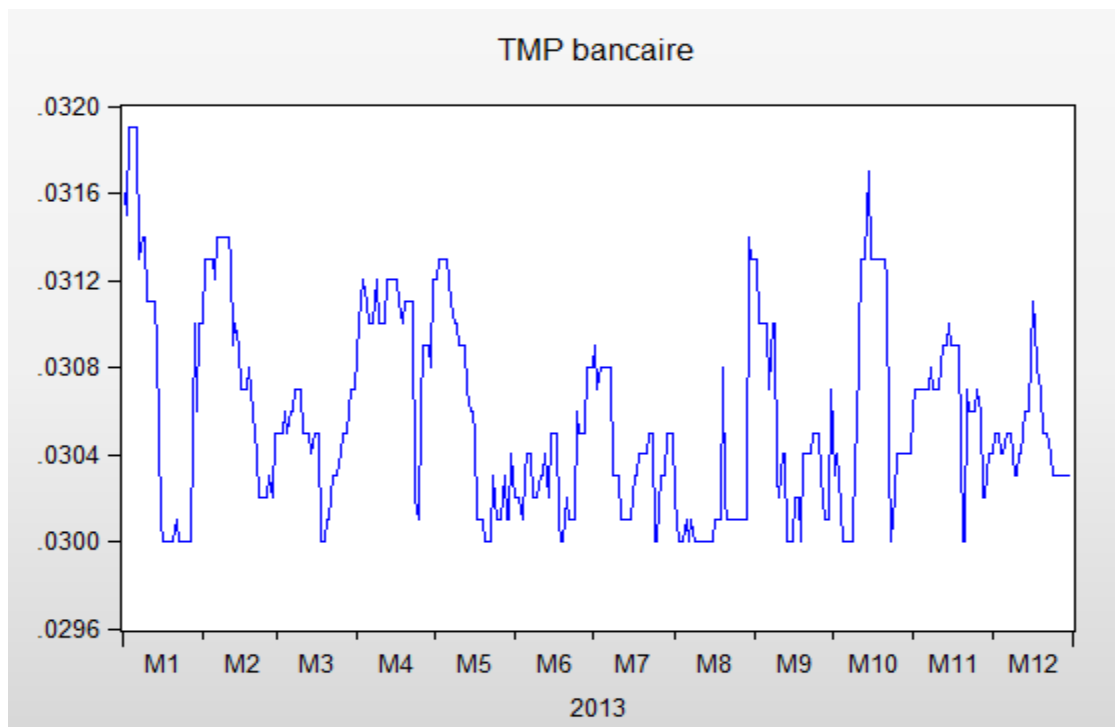


Figure 5 : Graphe représentant la série des TMP journaliers

i-Estimation des paramètres a , b et σ :

Rappelons l'expression établie par le modèle de Vasicek, à savoir :

$$r_t = b(1 - e^{-a}) + r_{t-1}e^{-a} + \varepsilon_t$$

Le modèle ci-dessus est un modèle auto-regressif d'ordre 1, chose qu'il va falloir vérifier pour les données empiriques du taux court dont on dispose. Avant cela et avant d'effectuer une régression quelconque, l'on se doit d'étudier la stationnarité de la série en question en faisant appel aux tests de Dickey-Fuller augmentés sur E-Views.

➤ **Tests de Dickey-Fuller pour la stationnarité de la série de taux :**

Il n'est possible d'évaluer et d'identifier les caractéristiques d'une série chronologique que si celle-ci est stationnaire.

Un processus stochastique X_t est stationnaire si :

- $E(X_t) = E(X_{t+m}) = \mu \quad \forall m, t$;
- $V(X_t) < \infty \quad \forall t$: La variance de X_t est finie et indépendante du temps ;
- $\gamma_m = \text{Cov}(X_t, X_{t+m}) = E[(X_t - \mu)(X_{t+m} - \mu)]$

Une série chronologique est donc **stationnaire** si celle-ci est la réalisation d'un processus stationnaire, ce qui implique bien qu'elle ne comporte point de tendance et plus particulièrement aucun facteur évoluant avec le temps.

Les tests de Dickey-Fuller sont des tests qui permettent de détecter l'éventuelle existence d'une tendance de la série chronologique, ils permettent par ailleurs de déterminer la meilleure façon de stationnariser la série.

A la base de ces tests se tiennent trois modèles. Le principe étant de vérifier si pour le modèle générale : $Y_t = C + bt + \Phi_1 Y_{t-1} + a_t$ l'hypothèse $H_0: \Phi_1 = 1$ est vraie pour l'un des modèles suivants (Test de présence d'une racine unitaire, d'où l'appellation *Unit Root Test*).

Si tel est le cas, le processus est alors non-stationnaire :

Modèle 1 : $X_t = \Phi_1 X_{t-1} + a_t$ (Modèle autorégressif d'ordre 1) ;

Modèle 2 : $X_t = \Phi_1 X_{t-1} + \alpha + a_t$ (Modèle autorégressif avec constante) ;

Modèle 3 : $X_t = \Phi_1 X_{t-1} + \alpha + \beta t + a_t$ (Modèle autorégressif avec tendance).

Se baser sur les modèles cités auparavant pour vérifier la stationnarité de la série suppose que les erreurs sont des bruits blancs **BB** (θ, σ^2).

Cependant, il n'y a aucune raison pour que les résidus soient des bruits blancs (non corrélés).

Pour remédier à la prise en compte de cette hypothèse, on fait appel aux tests de Dickey Fuller augmentés. Les trois modèles développés pour les tests ADF sont les suivants :

$$\text{Modèle 1 : } \Delta X_t = \rho X_{t-1} + \sum_1^{\mu} \phi_j \Delta X_{t-j} + a_t$$

$$\text{Modèle 2 : } \Delta X_t = \rho X_{t-1} + \alpha + \sum_1^{\mu} \phi_j \Delta X_{t-j} + a_t +$$

$$\text{Modèle 3 : } \Delta X_t = \rho X_{t-1} + \alpha + \beta t + \sum_1^{\mu} \phi_j \Delta X_{t-j} + a_t$$

Avec $a_t \rightarrow$ BB $(0, \sigma^2)$ et sont indépendantes et identiquement distribuées.

Nous expliciterons dans les annexes le schéma illustrant les étapes du test de Dickey Fuller augmenté (*annexe 1*), ainsi que le tableau des valeurs critiques du test (*annexe 2*).

Tests sur la série de taux choisie :

Etape 1 :

| | |
|---------------------------|---|
| Modèle sous test | Modèle 3 |
| Hypothèse nulle | $H_0 : \rho = 0$ vs $H_1 : \rho < 0$ |
| Seuil de confiance | 5% |
| Résultat du test | $t_\rho = -5.009605 < t\text{-Statistic} = -3.422218$ |
| Décision | On rejette l'hypothèse nulle |

| | |
|---------------------------|---|
| Modèle sous test | Modèle 3 |
| Hypothèse nulle | $H_0 : \beta = 0$ vs $H_1 : \beta \neq 0$ |
| Seuil de confiance | 5% |
| Résultat du test | $t_\beta = -0.760933 > t_{\text{tabulé}} = -3.42$ |
| Décision | On ne rejette pas l'hypothèse nulle |

Null Hypothesis: TMP_BANCAIRE has a unit root
 Exogenous: Constant, Linear Trend
 Lag Length: 0 (Automatic - based on SIC, maxlag=16)

| | t-Statistic | Prob.* |
|--|-------------|--------|
| Augmented Dickey-Fuller test statistic | -5.009605 | 0.0002 |
| Test critical values: | | |
| 1% level | -3.983471 | |
| 5% level | -3.422218 | |
| 10% level | -3.133955 | |

*MacKinnon (1996) one-sided p-values.

Augmented Dickey-Fuller Test Equation
 Dependent Variable: D(TMP_BANCAIRE)
 Method: Least Squares
 Date: 04/17/14 Time: 12:06
 Sample (adjusted): 1/02/2013 12/31/2013
 Included observations: 364 after adjustments

| Variable | Coefficient | Std. Error | t-Statistic | Prob. |
|--------------------|-------------|-----------------------|-------------|-----------|
| TMP_BANCAIRE(-1) | -0.124338 | 0.024820 | -5.009605 | 0.0000 |
| C | 0.003812 | 0.000740 | 0.950579 | 0.5120 |
| @TREND(1/01/2013) | -8.01E-08 | 1.05E-07 | -0.760933 | 0.4472 |
| R-squared | 0.065277 | Mean dependent var | | -3.57E-06 |
| Adjusted R-squared | 0.060099 | S.D. dependent var | | 0.000212 |
| S.E. of regression | 0.000206 | Akaike info criterion | | -14.13064 |
| Sum squared resid | 1.53E-05 | Schwarz criterion | | -14.09852 |
| Log likelihood | 2574.777 | Hannan-Quinn criter. | | -14.11788 |
| F-statistic | 12.60541 | Durbin-Watson stat | | 2.006829 |
| Prob(F-statistic) | 0.000005 | | | |

Figure 6 : Résultats du test de Dickey-Fuller Augmenté pour l'existence d'une tendance (sortie *EViews*)

L'étape suivante renseigne sur la significativité ou non de la constante du modèle

Etape 2:

| | |
|---------------------------|---|
| Modèle sous test | Modèle 2 |
| Hypothèse nulle | $H_0 : \rho = 0$ vs $H_1 : \rho < 0$ |
| Seuil de confiance | 5% |
| Résultat du test | $t_\rho = -4.965931 < t\text{-Statistic} = -2.869263$ |
| Décision | On rejette l'hypothèse nulle |

| | |
|---------------------------|--|
| Modèle sous test | Modèle 2 |
| Hypothèse nulle | $H_0 : \beta = 0$ vs $H_1 : \beta \neq 0$ |
| Seuil de confiance | 5% |
| Résultat du test | $t_\beta = 0.960579 > t_{\text{tabulé}} = -2.88$ |
| Décision | On ne rejette pas l'hypothèse nulle |

Exogenous: Constant
Lag Length: 0 (Automatic - based on SIC, maxlag=16)

| | t-Statistic | Prob.* |
|--|-------------|--------|
| Augmented Dickey-Fuller test statistic | -4.965931 | 0.0000 |
| Test critical values: | | |
| 1% level | -3.448111 | |
| 5% level | -2.869263 | |
| 10% level | -2.570952 | |

*MacKinnon (1996) one-sided p-values.

Augmented Dickey-Fuller Test Equation
Dependent Variable: D(TMP_BANCAIRE)
Method: Least Squares
Date: 04/17/14 Time: 11:54
Sample (adjusted): 1/02/2013 12/31/2013
Included observations: 364 after adjustments

| Variable | Coefficient | Std. Error | t-Statistic | Prob. |
|--------------------|-------------|-----------------------|-------------|-----------|
| TMP_BANCAIRE(-1) | -0.120223 | 0.024210 | 4.965931 | 0.0000 |
| C | 0.003671 | 0.000740 | 0.960579 | 0.5140 |
| R-squared | 0.063778 | Mean dependent var | | -3.57E-06 |
| Adjusted R-squared | 0.061192 | S.D. dependent var | | 0.000212 |
| S.E. of regression | 0.000206 | Akaike info criterion | | -14.13453 |
| Sum squared resid | 1.53E-05 | Schwarz criterion | | -14.11312 |
| Log likelihood | 2574.485 | Hannan-Quinn criter. | | -14.12602 |
| F-statistic | 24.66048 | Durbin-Watson stat | | 2.011881 |
| Prob(F-statistic) | 0.000001 | | | |

Figure7 : Résultat du test de Dickey-Fuller Augmenté pour la significativité de la constante (sortie EVIEWS)

Le dernier test nous permettra de définir la nature de notre série de taux.

Etape 3:

| | |
|---------------------------|---|
| Modèle sous test | Modèle 1 |
| Hypothèse nulle | $H_0 : \rho = 0$ vs $H_1 : \rho < 0$ |
| Seuil de confiance | 5% |
| Résultat du test | $t_\rho = -3.391006 < t\text{-Statistic} = -1.9416$ |
| Décision | On rejette l'hypothèse nulle |

Null Hypothesis: TMP_BANCAIRE has a unit root
Exogenous: None
Lag Length: 0 (Automatic - based on SIC, maxlag=16)

| | t-Statistic | Prob.* |
|--|-------------|--------|
| Augmented Dickey-Fuller test statistic | -3.391006 | 0.0017 |
| Test critical values: | | |
| 1% level | -2.571330 | |
| 5% level | -1.941697 | |
| 10% level | -1.616116 | |

Figure 8 : Résultat du test de la racine unitaire pour la stationnarité de la série (sortie EVIEWS)

Compte tenu des résultats du test de Dickey Fuller Augmenté obtenus, on conclut que la série des taux est un processus stationnaire au sens large.

➤ **Vérification du processus auto-régressif AR(1) :**

Le modèle de Vasicek précédemment défini est celui d'un processus autorégressif d'ordre 1 AR(1). Vérifions donc que cela est bien le cas de la série de taux choisie :

Nous reviendrons pour ce faire, vers le corrélogramme établi et que nous présenterons ci-dessous :

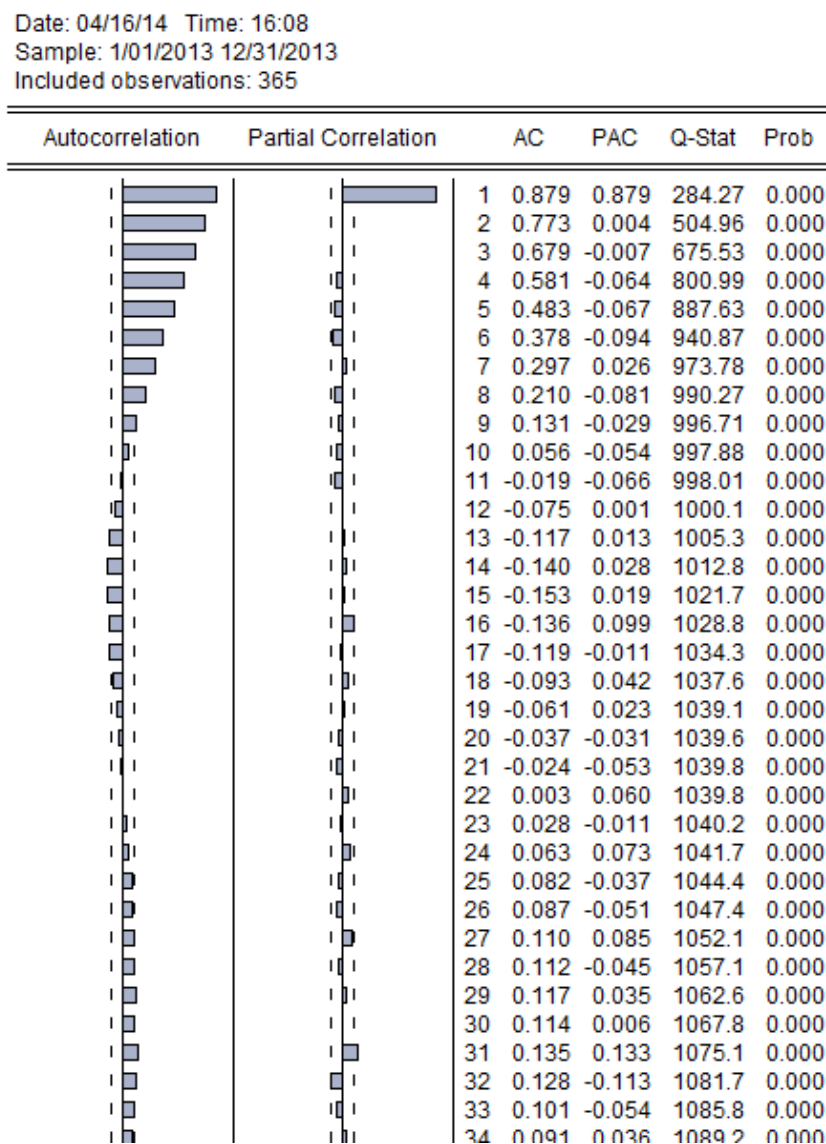


Figure 8 : Corrélogramme de la série des taux courts

On remarque que d'un côté, les autocorrélations partielles sont bien celles d'un autorégressif d'ordre 1, étant donné que celles-ci commencent à s'annuler ou à être très peu significatives à partir

du second ordre. D'un autre côté, la valeur des autocorrélations décroît jusqu'à s'annuler à partir du 9^{ème} rang.

On constate que la valeur de la première autocorrélation partielle dépasse l'intervalle de confiance, elle est donc différente de zéro. Le nombre p de retards à considérer est ainsi $p=1$.

Après avoir donc vérifié la stationnarité de la série et la légitimité d'un processus AR(1), nous passons à la régression du taux d'intérêt court suivant le modèle présenté par Vasicek.

➤ **Régression linéaire simple :**

Les résultats de la régression sont les suivants :

Dependent Variable: TMP_BANCAIRE
 Method: Least Squares
 Date: 05/20/14 Time: 09:31
 Sample (adjusted): 1/02/2013 12/31/2013
 Included observations: 364 after adjustments
 Convergence achieved after 3 iterations

| Variable | Coefficient | Std. Error | t-Statistic | Prob. |
|--------------------|-------------|-----------------------|-------------|-----------|
| C | 0.030538 | 8.99E-05 | 339.7238 | 0.0000 |
| AR(1) | 0.879777 | 0.024210 | 36.34002 | 0.0000 |
| R-squared | 0.784856 | Mean dependent var | | 0.030564 |
| Adjusted R-squared | 0.784262 | S.D. dependent var | | 0.000443 |
| S.E. of regression | 0.000206 | Akaike info criterion | | -14.13453 |
| Sum squared resid | 1.53E-05 | Schwarz criterion | | -14.11312 |
| Log likelihood | 2574.485 | Hannan-Quinn criter. | | -14.12602 |
| F-statistic | 1320.597 | Durbin-Watson stat | | 2.011881 |
| Prob(F-statistic) | 0.000000 | | | |
| Inverted AR Roots | .88 | | | |

Figure 9 : Estimation des paramètres du modèle (sortie Eviews)

Les valeurs de la statistique de Student relatives à chaque coefficient estimé sont supérieures à la valeur critique 1,96 correspondante à un seuil de confiance de 5%. L'hypothèse donc de la nullité de chaque coefficient à part est à rejeter. Par ailleurs, la p-value associée à la statistique de Fisher est de même inférieure au seuil 5%, de ce fait l'hypothèse de la nullité de tous les coefficients estimés simultanément est également à rejeter.

Avec en plus un $R^2 = 78.48\%$ et une valeur de la statistique de Durbin-Watson proche de 2 ($DW \approx 2(1-r)$ avec r le coefficient d'autocorrélation des erreurs), on peut alors écrire :

$$r_{t+1} = 0.030538 * (1 - 0.87978) + 0.87978 r_t + \varepsilon_t$$

Suite à cela, l'on a :

$$b(1 - e^{-a}) = 0.00367 \quad ; \quad e^{-a} = 0.87977 \quad ; \quad \sigma = \hat{\sigma}_\epsilon \sqrt{\frac{-\ln b^2}{1-b^2}}$$

Ce qui implique :

$$a = 0.12809 \quad ; \quad b = 0,03053 \quad ; \quad \sigma = 0,00023$$

➤ **Test de normalité des résidus**

Le test de Jarque-Bera sur les résidus de la régression effectuée donne lieu aux résultats suivants :

La statistique du test s'écrit comme suit : $JB = \frac{n-k}{6} (S^2 + \frac{(K-3)^2}{4})$

Avec n : nombre des observations , k : le nombre des variables explicatives.

S : le coefficient d'asymétrie et K : le kurtosis de l'échantillon testé.

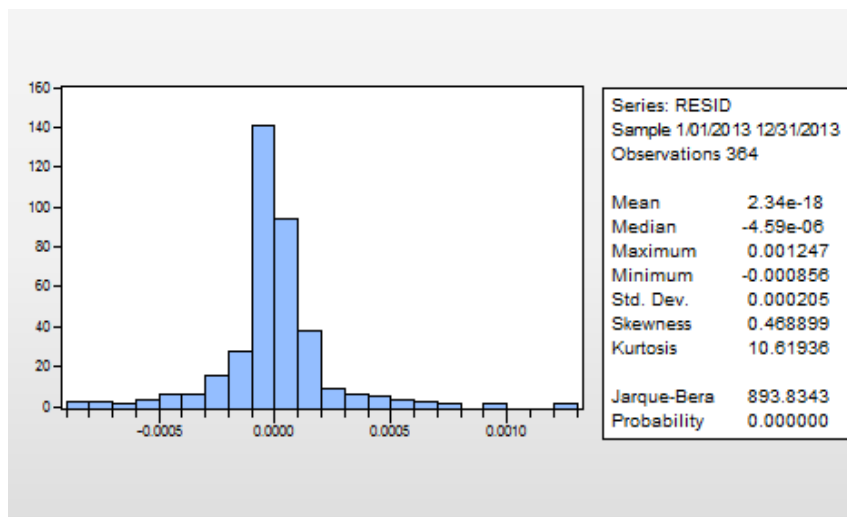


Figure 10 : Test de Jarque Bera pour la normalité des résidus (Sortie Eviews)

La p-value étant inférieure au seuil de 5%, on déduit que la normalité des résidus n'est pas assurée. Cela n'entrave pas notre étude dans la mesure où la normalité est généralement non vérifiée en réalité.

ii-Estimation de la prime de risque :

➤ **La théorie de la prime de risque :**

La théorie de la prime de risque stipule que le taux d'intérêt à long terme doit être plus élevé que le taux d'intérêt à court terme.

Ce constat est justifié par le fait que les épargnants doivent être remboursés pour l'argent comptant auquel ils renoncent, et plus la maturité de leur prêt s'éloigne, plus leur taux d'indemnisation doit être considérable. Ainsi, le rendement pour une obligation à long terme devra être plus élevé que pour une obligation de court terme, car les rendements d'obligations à long terme doivent inclure une prime de risque pour inciter les épargnants à les acheter.

Le modèle de Vasicek suppose cette prime constante par rapport au temps.

➤ **Estimation de la prime de risque :**

La procédure adoptée pour l'estimation de la prime de risque consiste à établir une relation entre le taux zéro coupon sans risque et les taux zéro coupons réels en présence de la prime de risque, puis recourir à une régression linéaire pour aboutir à une valeur approchée de la prime de risque.

Considérons le taux zéro-coupon dont l'expression est la suivante :

$$R(t, T) = -\frac{1}{T-t} \times \left[\left(\frac{1 - e^{-a((T-t))}}{a} - (T-t) \right) R(\infty) - \frac{\sigma^2(1 - e^{-a((T-t)})^2}{4a^3} - \frac{1 - e^{-a((T-t))}}{a} r(t) \right]$$

En remplaçant $R(\infty)$ par son expression contenant la prime, l'on se retrouve avec l'expression finale :

$$R(t, T) = \left[\left(b - \frac{\pi}{a} - \frac{1}{2} \left(\frac{\sigma}{a} \right)^2 \right) + \frac{\sigma^2(1 - e^{-a((T-t)})^2}{4a^3(T-t)} + \frac{1 - e^{-a((T-t))}}{a(T-t)} \left(r(t) - \left(b - \frac{\pi}{a} - \frac{1}{2} \left(\frac{\sigma}{a} \right)^2 \right) \right) \right]$$

Dans un premier temps, on suppose que cette prime est nulle à une date donnée. L'on aura alors :

$$R(t, T) = \left[\left(b - \frac{1}{2} \left(\frac{\sigma}{a} \right)^2 \right) + \frac{\sigma^2(1 - e^{-a((T-t)})^2}{4a^3(T-t)} + \frac{1 - e^{-a((T-t))}}{a(T-t)} \left(r(t) - \left(b - \frac{1}{2} \left(\frac{\sigma}{a} \right)^2 \right) \right) \right]$$

Retenons donc cette expression et notons $R(t, T)$ le taux avec prime de risque nulle. Le taux en considérant la prime, lui, sera noté désormais $R_M(t, T)$.

L'on a donc :

$$R_M(t, T) = \left[\left(b - \frac{\pi}{a} - \frac{1}{2} \left(\frac{\sigma}{a} \right)^2 \right) + \frac{\sigma^2(1 - e^{-a((T-t)})^2}{4a^3(T-t)} + \frac{1 - e^{-a((T-t))}}{a(T-t)} \left(r(t) - \left(b - \frac{\pi}{a} - \frac{1}{2} \left(\frac{\sigma}{a} \right)^2 \right) \right) \right]$$

Essayons maintenant de développer cette expression de façon à expliciter $R(t, T)$ et π :

$$\begin{aligned} R_M(t, T) &= \left[\left(b - \frac{1}{2} \left(\frac{\sigma}{a} \right)^2 \right) + \frac{\sigma^2(1 - e^{-a((T-t)})^2}{4a^3(T-t)} + \frac{1 - e^{-a((T-t))}}{a(T-t)} \left(r(t) - \left(b - \frac{1}{2} \left(\frac{\sigma}{a} \right)^2 \right) \right) \right] - \pi \left[\frac{1}{a} - \frac{1 - e^{-a((T-t))}}{a^2(T-t)} \right] \\ &= R(t, T) - \pi \left[\frac{1}{a} - \frac{1 - e^{-a((T-t))}}{a^2(T-t)} \right] \end{aligned}$$

On posera :

$$V(t, T) = \left[\frac{1}{a} - \frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a^2(T-t)} \right]$$

Et l'on obtient au final :

$$R_M(t, T) = R(t, T) - \pi V(t, T)$$

Il est question maintenant de faire des estimations en vue de déterminer la prime de risque et ce, en faisant une régression linéaire simple basée sur l'estimation par la méthode des moindres carrés ordinaire.

Données pour la régression :

Trois séries de données sont requises : les taux de marché $R_M(t, T)$, les taux théoriques calculés $R(t, T)$ ainsi que la série de $V(t, T)$.

Comme nous l'avons précisé auparavant, le modèle de Vasicek considère que la prime ne dépend pas du temps. Aussi allons-nous choisir arbitrairement une date t . Ce choix a porté sur la date du 31/12/2013. Pour ce qui est des maturités, nous choisirons bien entendu les taux correspondants aux maturités pleines précédemment définies, allant de 1 jour jusqu'à 12 ans

Les taux de marché $R_M(t, T)$:

Le programme élaboré reçoit comme entrée la courbe des taux de Bank Al Maghrib du 31/12/2013 pour laquelle il effectue l'ensemble des interpolations et applique la méthode du Bootstrap afin de concevoir au final une courbe zéro-coupon qui correspond à cette date.

Les taux théoriques $R(t, T)$:

Cette seconde série de taux correspond à la série de taux à prime de risque nulle. Nous la calculerons à l'instant t , pour chacune des maturités pleines, en utilisant la formule suivante:

$$R(t, T) = \left[\left(b - \frac{1}{2} \left(\frac{\sigma}{a} \right)^2 \right) + \frac{\sigma^2 (1 - e^{-a(T-t)})^2}{4a^3(T-t)} + \frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a(T-t)} \left(r(t) - \left(b - \frac{1}{2} \left(\frac{\sigma}{a} \right)^2 \right) \right) \right]$$

Le calcul des valeurs de cette série requiert le taux court $r(t)$ qu'on va anticiper compte tenu du modèle autorégressif du taux d'intérêt.

Pour ce faire, on va recourir à une simulation de Monte Carlo qui va nous permettre de générer une moyenne de 1000 scénarios pour l'erreur. Cette dernière va être incorporée dans le modèle qui décrit la dynamique du taux court, soit :

$$r_{t+1} = r_t e^{-a} + b(1 - e^{-a}) + \sigma \frac{1 - e^{-a}}{2a} \varepsilon$$

Vu que des explications approfondies de la méthode Monte Carlo seront fournies dans le dernier chapitre de notre exposé, nous nous contenterons maintenant des résultats obtenus :

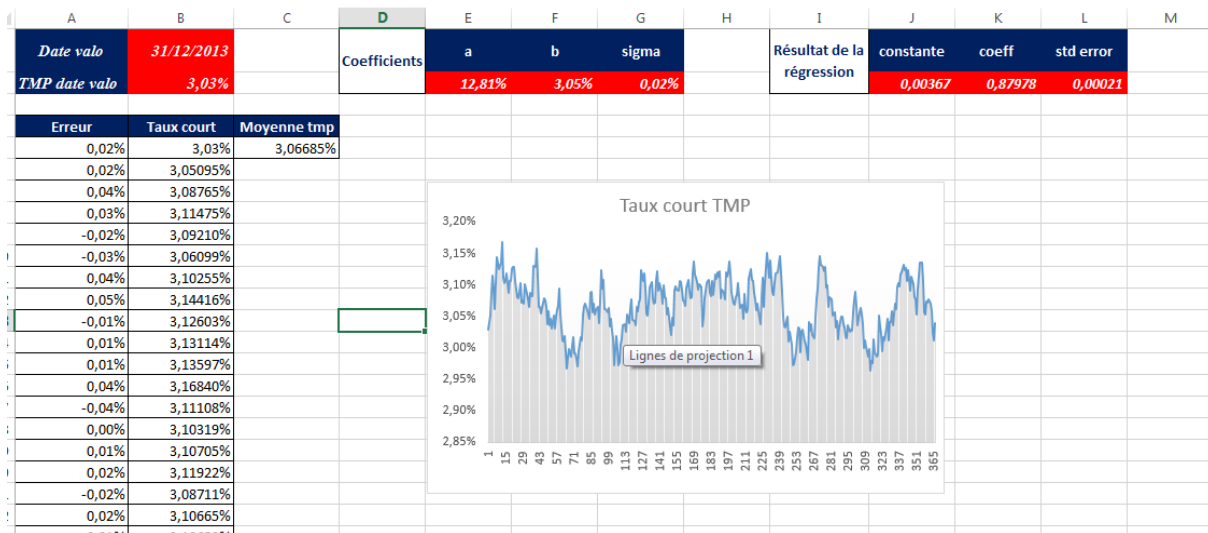


Figure 11 : Résultats de l'implémentation de la simulation de Monte Carlo pour la prévision du taux court.

La série $V(t, T)$:

Rappelons l'expression de $V(t, T)$:
$$V(t, T) = \left[\frac{1}{a} - \frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a^2(T-t)} \right]$$

On remplace les paramètres par leurs valeurs et on considère les maturités pleines.

Le calcul de ces séries a été explicité dans le tableau ci-dessous :

| Maturité en années | Maturité en jrs | Rm(t, T) | R(t,T) | V(t,T) |
|--------------------|-----------------|----------|--------|-------------|
| 0,003 | 1 | 3,1196% | 3,069% | 0,001369703 |
| 0,019 | 7 | 3,2861% | 3,069% | 0,009581194 |
| 0,041 | 15 | 3,4614% | 3,068% | 0,020511939 |
| 0,082 | 30 | 3,4814% | 3,068% | 0,040952054 |
| 0,247 | 90 | 3,5644% | 3,068% | 0,121999921 |
| 0,493 | 180 | 3,6654% | 3,068% | 0,241464569 |
| 0,740 | 270 | 3,8573% | 3,068% | 0,358453151 |
| 1 | 365 | 3,9740% | 3,068% | 0,479318646 |
| 2 | 730 | 4,3964% | 3,067% | 0,919808884 |
| 3 | 1095 | 4,6127% | 3,066% | 1,324994418 |
| 4 | 1460 | 4,8028% | 3,065% | 1,698058574 |
| 5 | 1825 | 4,9438% | 3,065% | 2,041878513 |
| 6 | 2190 | 5,0654% | 3,064% | 2,359055904 |
| 7 | 2555 | 5,2339% | 3,063% | 2,651944431 |
| 8 | 2920 | 5,4171% | 3,063% | 2,922674484 |
| 9 | 3285 | 5,6061% | 3,062% | 3,173175309 |
| 10 | 3650 | 5,7745% | 3,062% | 3,405194895 |
| 11 | 4015 | 5,8691% | 3,062% | 3,620317833 |
| 12 | 4380 | 5,9441% | 3,061% | 3,819981354 |

Tableau 3 : Structure à terme du taux de marché, du taux sans risque et la série $V(t, T)$

Afin d'estimer la prime de risque, une régression par la méthode des moindres carrés ordinaires a été effectuée.

| RAPPORT DÉTAILLÉ | | | | |
|---|------------------|------------------|--------------------|-------------|
| Statistiques de la régression | | | | |
| Coefficient de détermination R ² | | 0,974718293 | | |
| Erreur-type | | 0,001569249 | | |
| Observations | | 19 | | |
| ANALYSE DE VARIANCE | | | | |
| | Degré de liberté | Somme des carrés | Moyenne des carrés | F |
| Régression | 1 | 0,001585977 | 0,001585977 | 385,754013 |
| Résidus | 17 | 6,98933E-05 | 4,11137E-06 | |
| Total | 18 | 0,00165587 | | |
| | Coefficients | Erreur-type | Statistique t | Probabilité |
| Constante | 0,034962966 | 0,000541043 | 64,62145323 | 8,88252E-22 |
| Variable X 1 | 0,006725509 | 0,000262703 | 25,60122941 | 5,11866E-15 |

Figure 12 : Résultats de l'estimation de la prime moyennant la régression linéaire (sortie Excel)

Avec un R² = 97.47% , la valeur estimée de la prime de risque est $\pi = - 0.672$ %

Une fois la prime de risque estimée, nous avons calculé les taux zéro-coupon théoriques émanant du modèle de Vasicek.

| Maturité en années | Maturité en jrs | Rm(t,T) | R th |
|--------------------|-----------------|---------|--------|
| 0,003 | 1 | 3,1196% | 3,269% |
| 0,019 | 7 | 3,2861% | 3,275% |
| 0,041 | 15 | 3,4614% | 3,282% |
| 0,082 | 30 | 3,4814% | 3,295% |
| 0,247 | 90 | 3,5644% | 3,347% |
| 0,493 | 180 | 3,6654% | 3,424% |
| 0,740 | 270 | 3,8573% | 3,500% |
| 1 | 365 | 3,9740% | 3,578% |
| 2 | 730 | 4,3964% | 3,862% |
| 3 | 1095 | 4,6127% | 4,123% |
| 4 | 1460 | 4,8028% | 4,364% |
| 5 | 1825 | 4,9438% | 4,586% |
| 6 | 2190 | 5,0654% | 4,790% |
| 7 | 2555 | 5,2339% | 4,979% |
| 8 | 2920 | 5,4171% | 5,154% |
| 9 | 3285 | 5,6061% | 5,315% |
| 10 | 3650 | 5,7745% | 5,465% |
| 11 | 4015 | 5,8691% | 5,704% |
| 12 | 4380 | 5,9441% | 5,832% |

Tableau 4 : Série des taux de marché et des taux théoriques (modèle de Vasicek)

Ci-dessous, une comparaison graphique de la courbe des taux de marchés et celle des taux estimés par le modèle de Vasicek :

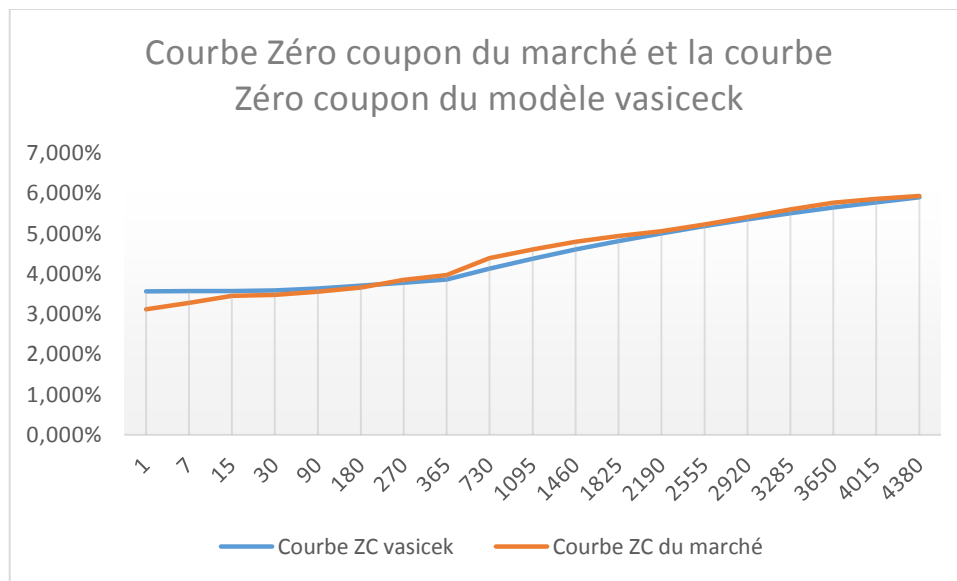


Figure 13: Comparaison graphique de la structure à terme du taux ZC du marché et théorique

On constate ainsi que les deux courbes sont similaires. On peut affirmer que le modèle de Vasicek nous a permis d'obtenir une courbe de taux très proche de celle de marché.

Nous notons que plus la structure à terme du taux ZC présente une courbure considérable, moins est la qualité d'ajustement du modèle de Vasicek, ceci est dû à la construction linéaire du modèle.

Dans ce qui suit, nous retiendrons la méthode du bootstrap qui repose sur les taux cotés sur le marché pour construire la courbe zéro coupon et en déduire les facteurs d'actualisation et ce, pour l'évaluation des options de change, des swaps de taux et du change à terme.

II-2-La notion du taux forward

II-2-1- Définition :

Le taux Forward est le taux d'emprunt ou de placement, pour des périodes futures vu du moment présent, il s'agit du taux vu en t (présent) qui capitalise un montant entre T et S (instants futurs) . on le notera dans ce qui suit $L(t,T,S)$.

II-2-2 Calcul du taux forward :

Avant de rapprocher la formule permettant d'extraire les taux forwards à partir de la courbe zéro coupon, nous allons rappeler des résultats du calcul stochastique essentiels pour la définition du taux forward.

II-2-2-1 Rappels du calcul stochastique :

La théorie de la valorisation des instruments financiers étant basée sur le concept de martingales, nous rappelons ici la définition de ce concept.

Définition 1 : Soit $X = (X_t)_{t \geq 0}$ un processus réel F-adapté. X est une martingale si pour tout $t \geq 0$, $E(X_t) < \infty$ et , pour tous réels positifs s et t ,tel que $s \leq t$, on a $E(X_t | \mathcal{F}_s) = X_s$ presque sûrement.

Théorème 1 : Soit $W = (W^1, W^2, \dots, W^n)$ un mouvement brownien de dimension n et

$M = (M_t)_{t \geq 0}$ un processus réel adapté à la filtration naturelle de W. M est une F-martingale continue si et seulement si M peut s'écrire :

$$M_t = M_0 + \sum_{i=1}^n \int_0^t H^i_u dW^i_u$$

Où les H^i sont adaptés , mesurables et vérifient $\int_0^t (H^i_u)^2 du < \infty$ presque sûrement pour tout t , $0 \leq t \leq T$.

Définition 2 : On appelle numéraire tous processus de prix presque sûrement strictement positif.

Théorème 2 : Soit Q la mesure risque neutre associée au numéraire localement sans risque (Bt), où

$$B_t = \exp\left(\int_0^t r_u du\right).$$

Soit X un actif échangé de dynamique sous la mesure Q :

$$dX_t = r_t X_t dt + \sigma^X(t, X_t) dW_t^Q$$

Soit Y un actif échangé de dynamique :

$$dY_t = r_t Y_t dt + \sigma^Y(t, Y_t) dW_t^Q$$

Alors le prix actualisé $\frac{X_t}{Y_t}$ est une Q^Y martingale de dynamique :

$$d\frac{X_t}{Y_t} = \frac{X_t}{Y_t} (\sigma^X(t, X_t) - \sigma^Y(t, Y_t)) dW_t^{Q^Y}$$

Tel que Q^Y est définie par sa dérivée de Radon-Nikodym :

$$\left(\frac{dQ^Y}{dQ}\right)_{F_t} = \frac{Y_t B_0}{Y_0 B_t}$$

et $dW_t^{Q^Y} = dW_t^Q - \sigma^Y(t, Y_t) dt$ est un mouvement brownien sous Q^Y .

Ce résultat est obtenu par application du lemme d'Itô au processus $(\frac{X}{Y})$.

II-2-2-2- Formule de calcul du taux forward :

Nous pouvons déterminer le taux forward en T années maturant dans S années en fonction des prix zéro-coupons. En effet, considérons que nous sommes à l'instant t, nous avons alors la relation suivante :

$$P(t, T, S)(1 + (S - T)L(t, T, S)) = 1$$

Cette relation nous dit que la capitalisation entre T et S d'un montant égal à celui du zéro coupon débutant en T et maturant en S vaut 1. C'est la définition du zéro coupon.

Sachant que $P(t, T) \cdot P(t, T, S) = P(t, S)$, nous obtenons la relation suivante pour le taux forward :

$$L(t, T, S) = \frac{P(t, T) - P(t, S)}{(S - T) \cdot P(t, S)}$$

Cette relation est importante et nous sera très utile dans la suite, Elle implique que le taux forward est une martingale sous la probabilité associée au zéro coupon $P(t, S)$. En effet, le numérateur et le dénominateur étant des actifs échangeables, ont tous les deux le même terme de dérive égal au taux sans risque sous la probabilité risque neutre. En utilisant le théorème sur le changement de numéraire, on s'aperçoit alors que $L(t, T, S)$ n'a plus de terme de dérive sous la probabilité associée au numéraire $P(t, S)$ appelée la probabilité S-forward ou la probabilité forward-neutre

Le théorème de représentation des martingales permet de conclure sur la martingalité de $L(t, T, S)$ sous cette probabilité.

II-3- La notion de volatilité

II-3-1- Introduction

L'évaluation des options de change dans les chapitres à venir impliquera l'introduction de la volatilité : une notion que nous avons préféré d'aborder dans cette partie.

II-3-1-1- Définition :

La volatilité mesure l'importance des variations d'un actif financier sur une période donnée.

C'est un indicateur primordial de la fluidité des marchés car elle permet de mesurer le degré de dépendance d'un titre aux fluctuations du marché.

La volatilité peut toutefois bien s'interpréter comme la mesure de la variance d'un titre par rapport à son cours moyen. Plus la volatilité est importante, plus l'option est chère.

II-3-1-2- Les types de volatilités :

Il existe deux approches pour le calcul de la volatilité:

La volatilité historique : elle se calcule sur la base des cours historiques du sous-jacent.

La volatilité implicite : détermine le prix de l'option et se calcule en utilisant des méthodes numériques itératives sur la formule de Black and Scholes , vue que cette dernière ne peut être inversée.

II-3-2- Utilisation de la volatilité pour la valorisation des options de change :

II-3-2-1 La volatilité du cours EUR/USD :

Pour valoriser les options, on recourt à la volatilité implicite calculée à partir des prix des puts et des calls cotés, qu'on peut retrouver dans Bloomberg (le fournisseur externe des données de marché). Cette volatilité prend souvent la forme d'une surface de volatilité. En effet, en pratique, la volatilité d'une option évolue en fonction du prix d'exercice (Strike) ou du delta de l'option et de la maturité de l'option et atteint son niveau le plus bas à la monnaie et a souvent la forme d'un sourire d'où l'appellation de *Smile* de volatilité.

Le tableau ci-dessous présente la surface de volatilité (EUR/USD) issue de Bloomberg au 31/12/2013 .

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K | L | M | N | O | P | Q | R |
|----|----------------|------------|--------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 1 | Date de valo | 31/12/2013 | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 2 | Spot EUR/USD | 1,37770499 | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 3 | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 4 | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 5 | Maturité/delta | 10 | 15 | 20 | 25 | 30 | 35 | 40 | 45 | ATM | 45 | 40 | 35 | 30 | 25 | 20 | 15 | 10 |
| 6 | 1 | 7,87% | 7,77% | 7,67% | 7,60% | 7,54% | 7,50% | 7,48% | 7,46% | 7,45% | 7,44% | 7,44% | 7,45% | 7,46% | 7,48% | 7,52% | 7,57% | 7,62% |
| 7 | 7 | 8,13% | 7,99% | 7,86% | 7,75% | 7,67% | 7,61% | 7,57% | 7,55% | 7,53% | 7,51% | 7,50% | 7,50% | 7,51% | 7,54% | 7,58% | 7,64% | 7,71% |
| 8 | 14 | 8,43% | 8,25% | 8,08% | 7,94% | 7,83% | 7,74% | 7,69% | 7,64% | 7,61% | 7,58% | 7,56% | 7,55% | 7,56% | 7,60% | 7,65% | 7,73% | 7,82% |
| 9 | 21 | 8,53% | 8,33% | 8,15% | 7,99% | 7,87% | 7,79% | 7,72% | 7,64% | 7,64% | 7,60% | 7,58% | 7,57% | 7,58% | 7,61% | 7,68% | 7,76% | 7,85% |
| 10 | 31 | 8,58% | 8,38% | 8,19% | 8,03% | 7,90% | 7,81% | 7,74% | 7,69% | 7,65% | 7,62% | 7,59% | 7,58% | 7,59% | 7,63% | 7,69% | 7,77% | 7,87% |
| 11 | 42 | 8,62% | 8,57% | 8,34% | 8,14% | 7,99% | 7,87% | 7,78% | 7,72% | 7,66% | 7,60% | 7,56% | 7,53% | 7,53% | 7,56% | 7,63% | 7,72% | 7,83% |
| 12 | 60 | 8,96% | 8,69% | 8,43% | 8,21% | 8,03% | 7,91% | 7,81% | 7,73% | 7,66% | 7,60% | 7,54% | 7,50% | 7,49% | 7,52% | 7,59% | 7,69% | 7,81% |
| 13 | 91 | 9,49% | 9,17% | 8,87% | 8,61% | 8,40% | 8,24% | 8,11% | 8,01% | 7,93% | 7,85% | 7,79% | 7,76% | 7,74% | 7,78% | 7,81% | 7,89% | 7,98% |
| 14 | 120 | 9,78% | 9,42% | 9,08% | 8,78% | 8,54% | 8,35% | 8,20% | 8,09% | 7,99% | 7,90% | 7,83% | 7,79% | 7,77% | 7,78% | 7,84% | 7,92% | 8,02% |
| 15 | 160 | 9,95% | 9,56% | 9,20% | 8,88% | 8,62% | 8,42% | 8,26% | 8,13% | 8,03% | 7,93% | 7,86% | 7,80% | 7,78% | 7,80% | 7,85% | 7,94% | 8,04% |
| 16 | 182 | 10,07% | 9,66% | 9,28% | 8,94% | 8,67% | 8,46% | 8,30% | 8,16% | 8,05% | 7,95% | 7,87% | 7,81% | 7,79% | 7,81% | 7,87% | 7,95% | 8,06% |
| 17 | 273 | 10,39% | 9,92% | 9,47% | 9,09% | 8,80% | 8,57% | 8,40% | 8,26% | 8,15% | 8,04% | 7,94% | 7,87% | 7,82% | 7,82% | 7,86% | 7,94% | 8,03% |
| 18 | 365 | 10,78% | 10,28% | 9,82% | 9,43% | 9,11% | 8,87% | 8,68% | 8,52% | 8,40% | 8,29% | 8,19% | 8,12% | 8,08% | 8,08% | 8,13% | 8,21% | 8,30% |

Tableau 5 : Surface de volatilité EUR/USD au 31/12/2013

A partir de cette surface de volatilité, et en inversant la formule de calcul du delta de l'option, nous construisons la surface présentant les strikes en fonction des maturités et delta.

Le delta d'une option est la sensibilité du prix de l'option aux variations du cours du sous-jacent. (Nous reviendrons dans la suite de l'exposé sur certaines notions ici-mentionnées comme le delta et le modèle de Black and Scholes).

| EUR/USD | -10% | -15% | -20% | -25% | -30% | -35% | -40% | -45% | 50% | 45% | 40% | 35% | 30% | 25% | 20% | 15% | 10% |
|----------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| Maturité/delta | 10 | 15 | 20 | 25 | 30 | 35 | 40 | 45 | ATM | 45 | 40 | 35 | 30 | 25 | 20 | 15 | 10 |
| 1 | 1,3704 | 1,3719 | 1,3730 | 1,3740 | 1,3748 | 1,3756 | 1,3763 | 1,3770 | 1,3777 | 1,3784 | 1,3791 | 1,3798 | 1,3806 | 1,3814 | 1,3823 | 1,3834 | 1,3848 |
| 7 | 1,3579 | 1,3620 | 1,3651 | 1,3678 | 1,3701 | 1,3722 | 1,3741 | 1,3760 | 1,3778 | 1,3796 | 1,3814 | 1,3833 | 1,3854 | 1,3876 | 1,3901 | 1,3931 | 1,3969 |
| 14 | 1,3488 | 1,3548 | 1,3595 | 1,3634 | 1,3668 | 1,3698 | 1,3726 | 1,3752 | 1,3778 | 1,3804 | 1,3831 | 1,3858 | 1,3887 | 1,3918 | 1,3955 | 1,3998 | 1,4053 |
| 21 | 1,3421 | 1,3495 | 1,3553 | 1,3601 | 1,3642 | 1,3680 | 1,3714 | 1,3747 | 1,3779 | 1,3811 | 1,3843 | 1,3876 | 1,3912 | 1,3951 | 1,3996 | 1,4049 | 1,4118 |
| 31 | 1,3343 | 1,3434 | 1,3504 | 1,3563 | 1,3613 | 1,3659 | 1,3701 | 1,3741 | 1,3779 | 1,3818 | 1,3857 | 1,3898 | 1,3941 | 1,3989 | 1,4044 | 1,4109 | 1,4194 |
| 42 | 1,3260 | 1,3370 | 1,3455 | 1,3525 | 1,3585 | 1,3639 | 1,3688 | 1,3735 | 1,3781 | 1,3826 | 1,3871 | 1,3918 | 1,3967 | 1,4023 | 1,4086 | 1,4163 | 1,4261 |
| 60 | 1,3155 | 1,3288 | 1,3392 | 1,3477 | 1,3549 | 1,3614 | 1,3673 | 1,3729 | 1,3784 | 1,3837 | 1,3891 | 1,3947 | 1,4006 | 1,4072 | 1,4148 | 1,4240 | 1,4359 |
| 91 | 1,2978 | 1,3151 | 1,3286 | 1,3396 | 1,3490 | 1,3574 | 1,3650 | 1,3722 | 1,3790 | 1,3859 | 1,3928 | 1,3999 | 1,4074 | 1,4158 | 1,4254 | 1,4369 | 1,4518 |
| 120 | 1,2839 | 1,3045 | 1,3204 | 1,3334 | 1,3445 | 1,3543 | 1,3632 | 1,3715 | 1,3794 | 1,3873 | 1,3953 | 1,4035 | 1,4122 | 1,4218 | 1,4329 | 1,4464 | 1,4637 |
| 150 | 1,2718 | 1,2951 | 1,3132 | 1,3280 | 1,3405 | 1,3515 | 1,3615 | 1,3709 | 1,3798 | 1,3886 | 1,3975 | 1,4067 | 1,4165 | 1,4273 | 1,4399 | 1,4550 | 1,4747 |
| 182 | 1,2605 | 1,2864 | 1,3065 | 1,3229 | 1,3367 | 1,3489 | 1,3600 | 1,3704 | 1,3801 | 1,3899 | 1,3997 | 1,4099 | 1,4207 | 1,4326 | 1,4466 | 1,4634 | 1,4853 |
| 273 | 1,2324 | 1,2651 | 1,2903 | 1,3108 | 1,3280 | 1,3431 | 1,3567 | 1,3696 | 1,3814 | 1,3936 | 1,4057 | 1,4182 | 1,4315 | 1,4462 | 1,4632 | 1,4840 | 1,5110 |
| 365 | 1,2069 | 1,2452 | 1,2749 | 1,2992 | 1,3196 | 1,3376 | 1,3539 | 1,3692 | 1,3831 | 1,3976 | 1,4121 | 1,4271 | 1,4431 | 1,4609 | 1,4816 | 1,5067 | 1,5396 |

Tableau 6: Nappe de strike EUR/USD correspondants aux valeurs du delta en fonction des maturités au 31/12/2013

Le programme que nous avons implémenté sur VBA, permet de ressortir à partir du strike équivalent de l'option et de sa maturité, la valeur de la volatilité et ce, en effectuant une interpolation cubique.

Le strike EUR/USD équivalent s'écrit comme suit :
$$K_{eq} = \frac{K_{dev/MAD}}{Spot_{dev/MAD}} * Spot_{EUR/USD}$$

II-3-2-2- La volatilité du cours EUR/MAD et USD/MAD :

Pour les options de change dont la valorisation va être détaillée dans le chapitre suivant, Il est difficile d'obtenir une volatilité pour la parité DEV/MAD, et il n'existe pas actuellement de cotation d'une volatilité implicite des parités de change DEV/MAD, on a choisi alors de retenir celle de l'EUR/USD pour estimer celle de la parité DEV/MAD, moyennant les formules déterminant les poids de l'Euro et du Dirham dans le panier MAD.

Ainsi, nous allons poursuivre par un paragraphe présentatif du régime de change marocain, qui nous permettra de déduire par la suite les volatilités EUR/MAD et USD/MAD à partir de la volatilité cotée sur le marché (volatilité de EUR/USD).

i-La politique de change au Maroc :

La politique de change de Bank Al Maghrib est fondée sur un principe fondamental qui est la stabilité et le maintien du pouvoir d'achat de la monnaie nationale.

Cet objectif de stabilité du Dirham donne lieu à la pondération de sa parité à l'intérieur d'un panier de devises présentes dans la balance des paiements, dont essentiellement l'Euro et le Dollar.

Cette politique a pour but d'éviter de s'exposer à la volatilité internationale d'une seule devise qui compromettrait la stratégie économique du pays, et marque une volonté d'indépendance monétaire.

Nous aborderons dans ce qui suit une méthode qui nous permettra d'estimer la pondération de chaque devise dans le panier.

ii-La composition du panier MAD :

Comme nous l'avons mentionné, les variations du dirham sont une combinaison des variations de l'EUR, USD et dans une moindre mesure du franc suisse et de la livre sterling.

Pour déterminer la pondération des principales devises dans le panier MAD, nous allons tout d'abord effectuer une régression linéaire multiple expliquant le taux de change EUR/MAD par les différents taux de change.

$$EUR/MAD = \beta_0 + \beta_1 EUR/USD + \beta_2 EUR/CHF + \beta_3 EUR/GBP + \varepsilon$$

L'estimation de ce modèle de régression linéaire multiple par l'utilitaire « analyse des régressions » d'Excel a donné les résultats suivants :

| RAPPORT DÉTAILLÉ | | | | | |
|---|------------------|------------------|--------------------|-------------|----------------------|
| Statistiques de la régression | | | | | |
| Coefficient de détermination R ² | 0,971404767 | | | | |
| Erreur-type | 0,032792552 | | | | |
| Observations | 120 | | | | |
| Analyse de la variance | | | | | |
| | Degré de liberté | Somme des carrés | Moyenne des carrés | F | Valeur critique de F |
| Régression | 3 | 2,08804302 | 0,69601434 | 647,243576 | 3,06626E-72 |
| Résidus | 116 | 0,124740772 | 0,001075351 | | |
| Total | 119 | 2,212783792 | | | |
| Estimation des coefficients | | | | | |
| | Coefficients | Erreur-type | Statistique t | Probabilité | |
| Constante | 9,15678434 | 0,080452075 | 113,8166339 | 7,325E-121 | |
| Variable X 1 | 1,478542595 | 0,03365348 | 43,93431527 | 3,8415E-74 | |
| Variable X 2 | 0,006549336 | 0,023890646 | 0,274138092 | 0,78446608 | |
| Variable X 3 | 0,033143231 | 0,045490895 | 0,72856845 | 0,46773398 | |

Figure 14 : Résultats de l'estimation de la prime moyennant la régression linéaire (Sortie Excel)

Le rapport ci-haut, donne un coefficient de détermination de 97%, ce qui signifie que les taux de change EUR/USD, EUR/GBP, EUR/CHF expliquent à 97% le taux de change EUR/MAD.

La p-value relative à la nullité des coefficients de la régression prend des valeurs inférieures au seuil de confiance (5%) pour la constante et le coefficient de l'EUR/USD , d'où le rejet de l'hypothèse de leur nullité à ce niveau et des valeurs supérieures à 5% pour les coefficients des autres couples de devises impliqués dans la régression, d'où leur non significativité dans l'explication du panier MAD.

Il reste à déterminer les poids de ces devises dans le panier MAD :

Quand les termes $\beta_1 \text{ EUR/USD} + \beta_2 \text{ EUR/CHF} + \dots$ tendent vers 0, on aura un taux EUR/MAD estimé égal à 9,1567 (ce chiffre donne la contribution de l'Euro dans la variation du dirham). Donc pour trouver le poids de l'EUR dans le panier, il suffit de diviser cette valeur par la moyenne de l'EUR/MAD.

De même l'estimation de β_1 (b_1), donne la contribution de l'USD dans la variation du dirham.

D'où le poids de l'USD dans le panier MAD sera égal à $b_1 \times \frac{\overline{\text{EUR/USD}}}{\overline{\text{EUR/MAD}}}$.

Avec \bar{X} représente la moyenne de la grandeur X.

Ainsi on aura les résultats suivants :

| | EUR | USD | CHF | GBP |
|---------|---|--|--|--|
| Formule | $\frac{b_0}{\overline{\text{EUR/MAD}}}$ | $b_1 \times \frac{\overline{\text{EUR/USD}}}{\overline{\text{EUR/MAD}}}$ | $b_2 \times \frac{\overline{\text{EUR/CHF}}}{\overline{\text{EUR/MAD}}}$ | $b_3 \times \frac{\overline{\text{EUR/GBP}}}{\overline{\text{EUR/MAD}}}$ |
| Valeur | 82% | 18% | 0% | 0% |

Tableau 7: Poids des devises étrangères dans le panier MAD

Ces résultats stipulent que le poids de l'Euro dans le panier est de 82%, et celui du Dollar est 18%.

On peut écrire :

$$\text{EUR/MAD} = 0,18 \text{ EUR/USD} \quad \text{et} \quad \text{USD/MAD} = 0,82 \text{ EUR/USD}$$

Ce paragraphe dont l'objectif est la détermination des poids des principales devises composant le panier MAD, servira dans le calcul de la volatilité USD/MAD et celle de l'EUR/MAD. En effet, la volatilité USD/MAD et EUR/MAD est ainsi calculée suivant les formules suivantes :

$$\text{Volatilité (USD /MAD)} = 0.82 * \text{Volatilité (EUR/USD)}$$

$$\text{Volatilité (EUR /MAD)} = 0.18 * \text{Volatilité (EUR/USD)}$$

CHAPITRE III :
LA VALORISATION DES
INSTRUMENTS FINANCIERS

La valorisation des instruments financiers consiste tout d'abord à analyser et comprendre les risques du produit à valoriser. En fonction des risques spécifiques du produit il faut Choisir le modèle de valorisation le plus adapté aux risques inhérents.

L'objectif de ce chapitre est de procéder à la valorisation des instruments financiers pour lesquels la CVA devrait être calculée par la suite, notamment, les swaps de taux, les options de change et le change à terme et des swaptions dont l'évaluation servira au calcul de la CVA .

III-1- La valorisation des options de change :

La valorisation des options de change repose sur plusieurs paramètres du marché.

Ainsi, afin de pouvoir modéliser la prime, il est fort crucial de savoir quels sont les principaux déterminants de cette dernière.

III-1-1- Déterminants de la prime d'une option :

On retient cinq déterminants explicatifs de la prime d'une option :

- La volatilité de l'actif sous-jacent : La volatilité présente le risque attaché à la détention actuelle ou future d'un actif. La prime d'une option (put ou call), est positivement corrélée à la volatilité du support.
- Le prix du sous-jacent et le prix d'exercice : c'est l'écart entre ces deux paramètres qui importe le plus car il conditionne la valeur intrinsèque d'une option.
- La durée de vie de l'option : la valeur temps décroît avec le temps, elle tend vers la valeur zéro tout en s'approchant de la date d'échéance. On trouve ici une justification au fait qu'il faut céder une option devenue inutile et ne pas la laisser expirer, car elle peut être négociée en fonction de la valeur temps qu'elle comporte encore.
- Le taux d'intérêt : la prime payée par l'acheteur de l'option est l'espérance de la valeur actualisée de son payoff sous la probabilité risque neutre, donc lorsque le taux d'intérêt augmente, il contribue à diminuer la valeur actuelle de la prime, et inversement.
- le prix d'exercice de l'option ou le strike est le prix convenu dans le contrat pour l'acquisition ou la cession du sous-jacent.

III-1-2- le modèle de Black and Scholes d'origine:

La détermination de la prime des options est un problème qui a mis les mathématiques financières en échec depuis des siècles.

En effet, l'équation de Black & Scholes à laquelle le marché des dérivés doit son succès n'a été conçue que dans les années 1970 et publiée en 1973. Cette équation a permis d'estimer théoriquement la prime exacte que l'acquéreur d'un call ou d'un put devrait payer et la stratégie de couverture que le vendeur pourrait adopter pour se prémunir du risque, et ce, pour les options européennes.

Les hypothèses du modèle :

Le modèle Black-Scholes repose sur les hypothèses suivantes :

- Le prix de l'actif sous-jacent S_t suit un mouvement brownien géométrique avec une volatilité σ constante et une dérive μ constante :

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t ,$$

où W_t est un processus de Wiener.

- Il n'y a pas d'opportunité d'arbitrage,
- Le temps est une fonction continue,
- Il est possible d'effectuer des ventes à découvert,
- Il n'y a pas de coûts de transactions,
- Il existe un taux d'intérêt sans risque, connu à l'avance et constant,
- Tous les sous-jacents sont parfaitement divisibles.
- Dans le cas d'une action, celle-ci ne paie pas de dividendes entre le moment de l'évaluation de l'option et son échéance.

Lorsque toutes ces hypothèses sont remplies, on parle alors de modèle de Black-Scholes, ou on dit qu'on est dans le cas Black-Scholes.

Il est à noter que le modèle, de par ses hypothèses, ne correspond pas à la réalité des marchés financiers mais permet d'aboutir à des résultats rationnels

Formule de Black-Scholes

La formule de Black-Scholes permet de calculer la valeur théorique d'une option à partir de ses cinq déterminants :

- Le prix sous-jacent S_0
- La volatilité du sous-jacent σ
- Le strike K
- Le taux d'intérêt r
- La maturité T

Le prix théorique d'une option d'achat (call), qui donne le droit mais pas l'obligation d'acheter l'actif S à la valeur K à la date T, et caractérisé par son Pay-off $(S_T - K)^+ = \max(S_T - K, 0)$

Le prix d'un call est donné par l'espérance sous probabilité risque neutre du payoff terminal actualisé :

$$C = E(\text{Pay Off} * e^{-rT})$$

Soit la formule de Black-Scholes :

$$C(S_0, K, r, t, \sigma) = S_0 N(d_1) - K \cdot e^{-rT} \cdot N(d_2)$$

De même, le prix théorique d'une option de vente, de payoff $(K - S_T)^+ = \max(K - S_T, 0)$ est donné par :

$$P(S_0, K, r, t, \sigma) = -S_0 N(-d_1) + K \cdot e^{-rT} \cdot N(-d_2)$$

avec

- N la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite $N(0,1)$

$$N(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}u^2} du$$

- $d_1 = \frac{1}{\sigma\sqrt{T}} \left[\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)T \right]$

- $d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$

III-1-3- le modèle de de Garman Kohlhagen :

Le modèle de Garman-Kohlhagen est une adaptation du modèle de Black & Scholes au marché des devises qui a été proposée en 1983.

Hypothèses du modèle :

Les hypothèses de ce modèle se résument comme suit :

- Les variations des cours de change sont supposées évoluer selon une distribution log-normale.
- Les taux d'intérêt sont constants pendant toute la durée de vie de l'option.
- Absence des coûts de transactions.

Selon ce modèle le cours de change suit la dynamique suivante :

$$dS_t = (r_d - r_f)S_t dt + \sigma S_t dW_t$$

Avec :

r_d et r_f représentent les taux d'intérêt domestique et étranger.

S : le prix de l'actif

σ : la volatilité du sous-jacent

W est un processus de Wiener qui suit une normale de moyenne 0 et d'écart type t ,

Formules de calcul

Le prix d'un call : $C(S_0, K, r, t, \sigma) = S_0 N(d_1) e^{-r_f T} - K e^{-r_d T} N(d_2)$

Le prix d'un put : $P(S_0, K, r, t, \sigma) = -S_0 N(-d_1) e^{-r_f T} + K e^{-r_d T} N(-d_2)$

Avec :

- $d_1 = \frac{1}{\sigma\sqrt{T}} \left[\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r_d - r_f + \frac{1}{2}\sigma^2\right)T \right]$
- $d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$

Si S_0 désigne le taux de change entre la devise domestique et la devise étrangère, alors $1/S_0$ présente le taux de change inverse.

Présentation des grecques :

Les grecques sont des indicateurs qui calculent l'impact sur le prix de l'option d'une variation des paramètres dont elle dépend.

Pour le modèle de Garman Kohlhagen pour lequel nous avons opté dans la valorisation des options de change, les expressions des Grecs se présentent comme suit :

- **Le Delta** : Le delta d'une option mesure la sensibilité du prix de l'option à la variation du sous-jacent.

On a:

$$\Delta_{call} = \frac{\partial C}{\partial S} = N(d_1) e^{-r_f T}$$

Et

$$\Delta_{Put} = \frac{\partial P}{\partial S} = (N(d_1) - 1) \cdot e^{-r_f \cdot T}$$

- **Le Thêta** : Le thêta d'une option exprime la sensibilité du prix de l'option au temps.

On a :

$$\theta_{call} = \frac{\partial C}{\partial T} = r_f \cdot S_0 \cdot N(-d_1) e^{-r_f \cdot T} - r_d \cdot K \cdot e^{-r_d \cdot T} \cdot N(d_2) - \sigma \cdot S_0 \cdot \frac{e^{-r_f \cdot T} N'(d_1)}{2\sqrt{T}}$$

Et

$$\theta_{Put} = \frac{\partial P}{\partial T} = -r_f \cdot S_0 \cdot N(-d_1) e^{-r_f \cdot T} + r_d \cdot K \cdot e^{-r_d \cdot T} \cdot N(d_2) - \sigma \cdot S_0 \cdot \frac{e^{-r_f \cdot T} N'(d_1)}{2\sqrt{T}}$$

- **Le Véga** : Le Véga d'une option mesure la sensibilité de la prime de l'option à la volatilité.

On a :

$$v\acute{e}g\alpha_{call} = v\acute{e}g\alpha_{put} = \frac{\partial C}{\partial \sigma} = S_0 \sqrt{T} \cdot N'(d_1) e^{-r_f \cdot T}$$

- **Le Rhô** : Le Rhô d'une option permet de mesurer la sensibilité de la valeur de la prime à une variation du taux d'intérêt.

On distingue le Rhô foreign et le Rhô domestique :

Le Rhô foreign correspond à la sensibilité de la prime au taux étranger.

On a :

$$Rho_{foreign\ call} = \frac{\partial C}{\partial r_f} = -TS_0 N(d_1) e^{-r_f \cdot T}$$

ET :

$$Rho_{foreign\ put} = \frac{\partial P}{\partial r_f} = TS_0 N(-d_1) e^{-r_f \cdot T}$$

Quant au Rhô domestique, il correspond à la sensibilité de la prime de l'option au taux domestique.

On a :

$$Rho_{domestique\ call} = \frac{\partial C}{\partial r_d} = T \cdot K \cdot N(d_2) e^{-r_d \cdot T}$$

ET

$$\text{Rhodomestique}_{\text{put}} = \frac{\partial P}{\partial r_d} = -T \cdot K \cdot N(-d_2) e^{-r_d \cdot T}$$

Les formules de calcul des grecques nous serviront ultérieurement pour le calcul de la CVA pour les options de change.

I-4-Application

Partant de ce modèle de valorisation et des formules qu'il procure, nous avons conçu un pricer pour options de change qui intègre les déterminants de l'option de change et calcule sa valeur marché à la date de valorisation.

Les inputs de ce pricer sont :

- La date de départ
- La date d'échéance de l'option
- Le type de l'option (Call/Put)
- Le sens de la transaction (Achat P / Vente S)
- Le strike
- La devise de base.
- La devise secondaire.
- Le cours spot (Cours de change à la date de valorisation).
- Le taux d'intérêt domestique et étranger.
- La volatilité EUR/USD.
- Le coefficient de pondération de la volatilité.
- Le montant du notionnel

La figure ci-dessous représente une capture de l'outil implémenté sur VBA-excel pour la valorisation des options de change.

| Durée Résiduelle (en J) | Date de départ | Date Échéance | Type Option | Sens | Devises de base | Devises Secondaire | Notionnel | Devises du notionnel | Notionnel en devise de base | Strike | Strike EUR/USD Equivalent | FX spot | Forex spot | Foreign Rate | Domestic Rate | Volatility EUR/USD |
|-------------------------|----------------|---------------|-------------|------|-----------------|--------------------|--------------|----------------------|-----------------------------|---------|---------------------------|---------|------------|--------------|---------------|--------------------|
| 2,00 | 25/11/13 | 02/01/2014 | CALL | P | EUR | MAD | 2 000 000,00 | EUR | 2 000 000,00 | 11,2012 | 1,3741 | 11,2305 | 11,2305 | 0,1115% | 3,1174% | 7,55900345 |
| 2,00 | 25/11/13 | 02/01/2014 | PUT | S | EUR | MAD | 2 000 000,00 | EUR | -2 000 000,00 | 11,1712 | 1,3704 | 11,2305 | 11,2305 | 0,1115% | 3,1174% | 7,78951882 |
| 24,00 | 31/12/13 | 24/01/2014 | CALL | S | EUR | MAD | 60 690,00 | EUR | -60 690,00 | 11,2112 | 1,3753 | 11,2305 | 11,2305 | 0,2061% | 3,2331% | 7,65948082 |
| 24,00 | 11/12/13 | 24/01/2014 | CALL | S | EUR | MAD | 93 190,00 | EUR | -93 190,00 | 11,2112 | 1,3753 | 11,2305 | 11,2305 | 0,2061% | 3,2331% | 7,65948082 |
| 24,00 | 18/12/13 | 24/01/2014 | PUT | P | EUR | MAD | 96 120,00 | EUR | 96 120,00 | 11,1712 | 1,3704 | 11,2305 | 11,2305 | 0,2061% | 3,2331% | 7,74117251 |
| 24,00 | 31/12/13 | 24/01/2014 | PUT | P | EUR | MAD | 60 690,00 | EUR | 60 690,00 | 11,1712 | 1,3704 | 11,2305 | 11,2305 | 0,2061% | 3,2331% | 7,74117251 |
| 24,00 | 03/12/13 | 24/01/2014 | PUT | S | EUR | MAD | 250 000,00 | EUR | -250 000,00 | 11,1712 | 1,3704 | 11,2305 | 11,2305 | 0,2061% | 3,2331% | 7,74117251 |
| 24,00 | 03/12/13 | 24/01/2014 | CALL | P | EUR | MAD | 250 000,00 | EUR | 250 000,00 | 11,2112 | 1,3753 | 11,2305 | 11,2305 | 0,2061% | 3,2331% | 7,65948082 |
| 24,00 | 11/12/13 | 24/01/2014 | PUT | P | EUR | MAD | 93 190,00 | EUR | -93 190,00 | 11,1712 | 1,3704 | 11,2305 | 11,2305 | 0,2061% | 3,2331% | 7,74117251 |
| 24,00 | 18/12/13 | 24/01/2014 | CALL | S | EUR | MAD | 96 120,00 | EUR | -96 120,00 | 11,2112 | 1,3753 | 11,2305 | 11,2305 | 0,2061% | 3,2331% | 7,65948082 |
| 29,00 | 23/12/13 | 29/01/2014 | CALL | S | EUR | MAD | 304 230,00 | EUR | -304 230,00 | 11,3513 | 1,3925 | 11,2305 | 11,2305 | 0,2333% | 3,2593% | 7,60113137 |
| 29,00 | 06/06/13 | 29/01/2014 | CALL | P | EUR | MAD | 1500 000,00 | EUR | 1500 000,00 | 11,3513 | 1,3925 | 11,2305 | 11,2305 | 0,2333% | 3,2593% | 7,60113137 |
| 29,00 | 27/12/13 | 29/01/2014 | PUT | P | EUR | MAD | 420 780,00 | EUR | 420 780,00 | 11,3113 | 1,3876 | 11,2305 | 11,2305 | 0,2333% | 3,2593% | 7,58959268 |
| 29,00 | 31/12/13 | 29/01/2014 | CALL | S | EUR | MAD | 49 020,00 | EUR | -49 020,00 | 11,3513 | 1,3925 | 11,2305 | 11,2305 | 0,2333% | 3,2593% | 7,60113137 |
| 29,00 | 24/12/13 | 29/01/2014 | PUT | P | EUR | MAD | 127 770,00 | EUR | 127 770,00 | 11,3113 | 1,3876 | 11,2305 | 11,2305 | 0,2333% | 3,2593% | 7,58959268 |
| 29,00 | 06/06/13 | 29/01/2014 | PUT | S | EUR | MAD | 1500 000,00 | EUR | -1500 000,00 | 11,3113 | 1,3876 | 11,2305 | 11,2305 | 0,2333% | 3,2593% | 7,58959268 |
| 29,00 | 09/12/13 | 29/01/2014 | CALL | P | EUR | MAD | 103 380,00 | EUR | 103 380,00 | 11,3113 | 1,3876 | 11,2305 | 11,2305 | 0,2333% | 3,2593% | 7,58959268 |
| 29,00 | 09/12/13 | 29/01/2014 | CALL | S | EUR | MAD | 103 380,00 | EUR | -103 380,00 | 11,3513 | 1,3925 | 11,2305 | 11,2305 | 0,2333% | 3,2593% | 7,60113137 |
| 29,00 | 17/12/13 | 29/01/2014 | PUT | P | EUR | MAD | 120 440,00 | EUR | 120 440,00 | 11,3113 | 1,3876 | 11,2305 | 11,2305 | 0,2333% | 3,2593% | 7,58959268 |
| 29,00 | 23/12/13 | 29/01/2014 | PUT | P | EUR | MAD | 304 230,00 | EUR | 304 230,00 | 11,3113 | 1,3876 | 11,2305 | 11,2305 | 0,2333% | 3,2593% | 7,58959268 |

Figure 15 : capture de l'outil implémenté sur VBA-Excel pour la valorisation des options de change.

Prenons l'exemple d'une option de change qui a les caractéristiques suivantes :

| | |
|----------------------------------|--------------|
| Le type de l'option | Call |
| La date de départ | 29/11/2013 |
| La date d'échéance | 28/10/2014 |
| La date de valorisation | 31/12/2013 |
| Le sens de la transaction | Achat |
| La devise de base | EUR |
| La devise secondaire | MAD |
| Le strike | 11.4815 |
| Le cours de change spot | 11.2305 |
| Montant du notionnel | 1500 000 EUR |

L'outil de valorisation implémenté calcule le taux d'intérêt domestique et le taux étranger en effectuant une interpolation linéaire des courbes des taux zéro coupon compte tenu de la maturité résiduelle du contrat.

Il calcule ensuite la valeur du strike équivalent EUR/USD et l'injecte comme input dans la fonction d'interpolation cubique pour ressortir la volatilité EUR/USD. De cette dernière, il déduit la volatilité EUR/MAD en la multipliant par le coefficient de pondération défini dans le chapitre précédent .

$$Volatilité (USD /MAD) = 0.82 * Volatilité (EUR/USD)$$

$$Volatilité (EUR /MAD) = 0.18 * Volatilité (EUR/USD)$$

Une fois ces paramètres sont calculés, l'outil recourt à la formule de Black ans Scholes pour évaluer le prix de l'option selon s'il s'agit d'un call ou d'un put et détermine le signe du MtM en fonction du sens de la transaction (positif dans le cas d'un achat « Purchase » et négatif dans le cas d'une vente « Sale »).

Pour notre exemple, cette option d'achat vaut 11.28% du notionnel, soit 169 232.11 DH

Donc le Mark-To-Market est d'une valeur de : $MtM = 11.28\% * 1\ 500\ 000 = 169\ 232.11\ DH$.

III-2- La valorisation des Swaps de taux :

III-2-1- Définition et caractéristiques d'un swap de taux :

Un swap de taux est une opération dans laquelle deux contreparties contractent simultanément un prêt et un emprunt dans une même devise, pour un même nominal mais sur des références de taux différentes.

On distingue deux types de swaps de taux:

- ✓ les swaps taux fixe / taux variable.
- ✓ les swaps taux flottant / taux variable (Basis Swap).

Dans le présent rapport, nous allons nous intéresser aux swaps de taux standards permettant à deux contreparties l'échange d'un taux fixe contre un taux variable.

Le taux fixe est déterminé à la signature du contrat alors que le taux variable est défini à chaque date de « reset » ou fixing. Les intérêts entre deux périodes sont payés aux dates de paiement.

Les dates de reset et de paiement pour les taux variables et fixes peuvent ne pas avoir les mêmes échelles de temps ni les mêmes conventions de comptage de jours dans une année.

Un swap est dit receveur (respectivement payeur) lorsque le détenteur du swap paie le taux variable (respectivement le taux fixe) à sa contrepartie et reçoit d'elle le taux fixe (respectivement le taux flottant).

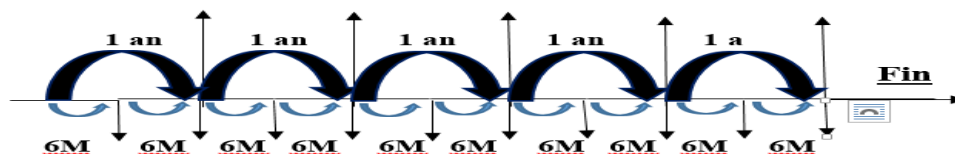


Figure 16 : Swap de taux avec paiement annuel pour le taux fixe et semestriel pour le taux variable.

III-2-2- La valorisation des swaps de taux :

Un swap est composé d'un ensemble de flux à payer et à recevoir dans le futur. On peut donc, comme pour tout instrument de taux, le valoriser en calculant la valeur actuelle des flux échangés.

La valeur d'un Swap de taux standard au moment de sa conclusion est nulle, néanmoins cette valeur peut devenir positive ou négative tout au long de la période négociée.

En reprenant les notations du chapitre précédent, relatives à l'expression du taux forward, l'évaluation d'un swap de taux débutant en T_0 avec des dates de paiement de coupons variables les T_i , $1 \leq i \leq N$ et des dates de paiement de coupons fixes les T'_j avec $1 \leq j \leq N'$ est telle que :

La valeur de la jambe fixe est :

$$\begin{aligned} JF(t) &= E_t^Q \left(\sum_{j=1}^{N'} (T'_j - T'_{j-1}) \cdot DF(t, T'_j) \cdot K^* \cdot N \right) \\ &= K^* \cdot N \cdot \left(\sum_{j=1}^{N'} (T'_j - T'_{j-1}) \cdot P(t, T'_j) \right) \end{aligned}$$

Et la jambe variable vaut :

$$\begin{aligned} JV(t) &= E_t^Q \left(\sum_{i=1}^N (T_i - T_{i-1}) \cdot DF(t, T_i) \cdot L(T_{i-1}, T_i) \cdot N \right) \\ &= N \cdot \sum_{i=1}^N (T_i - T_{i-1}) \cdot P(t, T_i) \cdot E_t^{Q'} (L(T_{i-1}, T_i)) \end{aligned}$$

Où Q' représente la probabilité T_i -forward

Or, nous avons vu dans le chapitre précédent que $L(T_{i-1}, T_i)$ est une martingale sous la probabilité T_i -forward, par conséquent :

$$\begin{aligned} JV(t) &= N \cdot \sum_{i=1}^N (T_i - T_{i-1}) \cdot P(t, T_i) \cdot \frac{P(t, T_{i-1}) - P(t, T_i)}{(T_i - T_{i-1}) \cdot P(t, T_i)} \\ &= N \cdot (P(t, T_0) - P(t, T_N)) \end{aligned}$$

Un swap payeur de taux fixe a donc une valeur égale à :

$$Swap(t, T_0, T_N) = JV(t) - JF(t) = N \left(P(t, T_0) - P(t, T_N) - K^* \cdot \sum_{j=1}^{N'} (T'_j - T'_{j-1}) \cdot P(t, T'_j) \right)$$

Le taux de swap K^* est le taux fixe qui égalise les deux jambes et qui donne par conséquent une valorisation au pair du swap :

$$K^* = \frac{P(t, T_0) - P(t, T_N)}{\sum_{j=1}^{N'} (T'_j - T'_{j-1}) \cdot P(t, T'_j)}$$

En nous basant sur la méthode décrite auparavant, nous nous sommes parvenus à implémenter un pricer des swaps sur VBA-excel qui calcule les flux échangés ainsi que les échéanciers des deux jambes et fournit le mark-to-market (la valeur marché) du swap à une date de valorisation précise.

III-2-3- Application :

Prenons l'exemple d'un swap de taux, dans lequel nous échangeons un taux fixe 1.56% contre un EURIBOR 6M sur un notionnel de 1 000 000 EUR.

Le swap a été conclu le 12/05/2008, a pris effet le 15/08/2008 et atteindra sa maturité le 14/07/2018.

La jambe fixe a une fréquence annuelle et une base de comptage exact/exact, tandis que la jambe variable a une fréquence semestrielle et une base de comptage exact/360.

Nous nous plaçons dans le cas d'un swap receveur et nous le valorisons au 31/12/2013.

Le détail des cash-flows prévus pour ce swap, sera explicité dans les tableaux ci-dessous.

| Date Début | Date Fin | Fraction année | Notionnel | Taux zéro coupon | Taux forward | Discount factor | Durée résiduelle | PV jbe variable |
|------------|------------|----------------|---------------------|------------------|--------------|-----------------|------------------|-----------------|
| 14/01/2014 | 14/07/2014 | 0,503 | 1 000 000,00 | 0,2826% | 0,3890% | 99,8473% | 0,542 | 1952,8185 |
| 14/07/2014 | 14/01/2015 | 0,511 | 1 000 000,00 | 0,3331% | 0,3863% | 99,6505% | 1,053 | 1967,3432 |
| 14/01/2015 | 14/07/2015 | 0,503 | 1 000 000,00 | 0,4564% | 0,7139% | 99,2941% | 1,556 | 3564,0381 |
| 14/07/2015 | 14/01/2016 | 0,511 | 1 000 000,00 | 0,5362% | 0,7778% | 98,9010% | 2,067 | 3931,6408 |
| 14/01/2016 | 14/07/2016 | 0,506 | 1 000 000,00 | 0,6484% | 1,1053% | 98,3514% | 2,572 | 5495,6336 |
| 14/07/2016 | 14/01/2017 | 0,511 | 1 000 000,00 | 0,7626% | 1,3352% | 97,6848% | 3,083 | 6666,4386 |
| 14/01/2017 | 14/07/2017 | 0,503 | 1 000 000,00 | 0,8878% | 1,6523% | 96,8799% | 3,586 | 8048,3058 |
| 14/07/2017 | 14/01/2018 | 0,511 | 1 000 000,00 | 1,0151% | 1,9036% | 95,9464% | 4,097 | 9335,3602 |
| 14/01/2018 | 14/07/2018 | 0,503 | 1 000 000,00 | 1,1398% | 2,1508% | 94,9199% | 4,600 | 10264,6341 |

Tableau 8: Echancier et cash-flows de la jambe variable

| Date Début | Date Fin | Fraction année | Taux ZC | DISCOUNT FACTOR | Durée résiduelle | Notionnel | PV JAMBE FIXE |
|------------|------------|----------------|---------|-----------------|------------------|-----------|---------------|
| 14/07/2013 | 14/07/2014 | 1,0000 | 0,2826% | 99,848% | 0,539 | 1 000 000 | 15576,30 |
| 14/07/2014 | 14/07/2015 | 1,0000 | 0,4564% | 99,302% | 1,539 | 1 000 000 | 15491,06 |
| 14/07/2015 | 14/07/2016 | 1,0000 | 0,6484% | 98,373% | 2,539 | 1 000 000 | 15346,13 |
| 14/07/2016 | 14/07/2017 | 1,0000 | 0,8878% | 96,920% | 3,539 | 1 000 000 | 15119,58 |
| 14/07/2017 | 14/07/2018 | 1,0000 | 1,1398% | 94,986% | 4,539 | 1 000 000 | 14817,77 |

Tableau 9: Echancier et cash-flows de la jambe fixe.

La MtM de ce swap au 31/12/2013 est donc : MtM= 25 124.62 EUR.

La figure ci-dessous représente l'interface du pricer implémenté sur VBA-Excel .

| Devise | EUR | swap | Partie | Paie | Base de calcul | Frequence | position |
|-------------------|--------------|----------|--------|------------|----------------|-----------|----------|
| Date debut | 12-mai-08 | variable | | EURIBOR 6M | exact/360 | 2 | payeur |
| Date de valeur | 15-mai-08 | fixe | | 1,5600% | exact/exact | 1 | receveur |
| Date de valo | 31-déc-13 | | | | | | |
| Maturité | 14-juil-18 | | | | | | |
| Montant notionnel | 1 000 000,00 | | | | | | |
| Taux fixe | 1,5600% | | | | | | |
| Taux initial | 0,9800% | | | | | | |
| Variable | EURIBOR 6M | | | | | | |
| fixing | 0,3890% | | | | | | |

| | | |
|---------------------|---------------------------|---------------------|
| Exécuter (jmbe var) | Valeur du Swap: 25 124,62 | Exécuter(jmbe fixe) |
| Mise à zéro | | |

| Echéancier jambe variable | | | | | | | | Echéancier jambe fixe | | | | |
|---------------------------|------------|----------------|--------------|------------------|--------------|-----------------|------------------------|-----------------------|------------|------------|----------------|---------|
| Date Debut | Date Fin | Fraction année | Notionnel | Taux zéro coupon | Taux forward | Discount factor | Duree résiduelle E/360 | PV jbe variable | Date Debut | Date Fin | Fraction année | Taux ZC |
| 14/01/2014 | 14/07/2014 | 0,503 | 1 000 000,00 | 0,2826% | 0,3890% | 99,8473% | 0,542 | 1952,8185 | 14/07/2013 | 14/07/2014 | 1,0000 | 0,2826% |
| 14/07/2014 | 14/01/2015 | 0,511 | 1 000 000,00 | 0,3331% | 0,3863% | 99,6505% | 1,053 | 1967,3432 | 14/07/2014 | 14/07/2015 | 1,0000 | 0,4564% |
| 14/01/2015 | 14/07/2015 | 0,503 | 1 000 000,00 | 0,4564% | 0,7139% | 99,2941% | 1,556 | 3564,0381 | 14/07/2015 | 14/07/2016 | 1,0000 | 0,6484% |
| 14/07/2015 | 14/01/2016 | 0,511 | 1 000 000,00 | 0,5362% | 0,7778% | 98,9010% | 2,067 | 3931,6408 | 14/07/2016 | 14/07/2017 | 1,0000 | 0,8878% |
| 14/01/2016 | 14/07/2016 | 0,506 | 1 000 000,00 | 0,6484% | 1,1053% | 98,3514% | 2,572 | 5495,6336 | 14/07/2017 | 14/07/2018 | 1,0000 | 1,1398% |
| 14/07/2016 | 14/01/2017 | 0,511 | 1 000 000,00 | 0,7626% | 1,3352% | 97,6848% | 3,083 | 6666,4386 | | | | |
| 14/01/2017 | 14/07/2017 | 0,503 | 1 000 000,00 | 0,8878% | 1,6523% | 96,8799% | 3,586 | 8048,3058 | | | | |
| 14/07/2017 | 14/01/2018 | 0,511 | 1 000 000,00 | 1,0151% | 1,9036% | 95,9464% | 4,097 | 9335,3602 | | | | |
| 14/01/2018 | 14/07/2018 | 0,503 | 1 000 000,00 | 1,1398% | 2,1508% | 94,9199% | 4,600 | 10264,6341 | | | | |

Figure 17 : Interface du pricer des swaps de taux sur Excel

III-3- La valorisation des swaptions

III-3-1- Préliminaire :

III-3-1-1- Le Swap Market Model :

Le swap Market Model est un modèle de marché qui considère le taux de swap comme suivant une loi log normale. On rappelle que le taux de swap d'un swap débutant en α et qui atteint sa maturité en β , s'écrit :

$$S(T_\alpha, T_\beta, t) = \frac{P(t, T_\alpha) - P(t, T_\beta)}{\sum_{j=\alpha+1}^{\beta} (T'_j - T'_{j-1}) \cdot P(t, T'_j)}$$

On remarque que le taux de swap s'écrit comme une fraction de deux actifs échangeables.

Le théorème énoncé plus tôt sur le changement de numéraire permet de conclure sur la martingalité du taux de swap sous la probabilité associée au numéraire $\sum_{j=\alpha+1}^{\beta} (T'_j - T'_{j-1}) \cdot P(t, T'_j)$ et appelée annuité.

Comme nous l'avons annoncé précédemment, le marché fait l'hypothèse que le comportement est log-normal.

III-3-1-2- Définition :

Une swaption est une option call ou put sur un swap, elle confère à son détenteur le droit de rentrer dans un swap de taux d'intérêt à la maturité de l'option. Une swaption est dite acheteuse (call) lorsqu'elle donne à l'investisseur le droit s'il l'exerce, de payer la jambe fixe et de recevoir la jambe variable du swap. Elle est dite receveuse dans le cas contraire. On parle de swaptions européennes lorsqu'elles ne peuvent être exercées qu'à une date précise à la signature du contrat.

Nous allons maintenant nous intéresser à la valorisation de cet instrument financiers .

III-3-2-la valorisation des swaptions :

Le modèle fréquemment utilisé pour l'évaluation des options européennes est le modèle de Black
 Déterminons maintenant la juste valeur d'une swaption de maturité T_0 (date d'exercice de la swaption), de ténor T (maturité du swap sous-jacent) et de strike K .Nous nous plaçons dans le cas d'une swaption de type acheteuse.

Le payoff du swap à maturité, c'est-à-dire en T_0 est :

$$\begin{aligned} \text{Payoff}(T_0) &= (\text{Swap}(T_0))_+ \\ &= (\sum_{i=1}^N (T_i - T_{i-1})P(T_0, T_i)L(T_0, T_{i-1}, T_i) - K \sum_{j=1}^{N'} (T'_j - T'_{j-1})P(T'_0, T'_j)) + \\ &= \sum_{j=1}^{N'} (T'_j - T'_{j-1})P(T'_0, T'_j) \cdot \left(\frac{\sum_{i=1}^N (T_i - T_{i-1})P(T_0, T_i)L(T_0, T_{i-1}, T_i)}{\sum_{j=1}^{N'} (T'_j - T'_{j-1})P(T'_0, T'_j)} - K \right)_+ \end{aligned}$$

Le prix de cette swaption à l'instant t est l'espérance du payoff sous la probabilité annuité:

$$\begin{aligned} \text{Prix Swaption}(t, \text{Maturité} = T_0, \text{ténor} = T_N, \text{Strike} = K) &= E_t^Q (DF(t, T_0) \text{Payoff}(T_0)) \\ &= P(t, T_0) E_t^{Q^{T_0}} (\sum_{j=1}^{N'} (T'_j - T'_{j-1})P(T'_0, T'_j) (S_{T_0, T_N}(T_0) - K)_+) \\ &= \text{Annuité}(t) \cdot E_t^{Q^{LVL}} ((S_{T_0, T_N}(T_0) - K)_+) \end{aligned}$$

où $\text{Annuité}(t) = \sum_{j=1}^{N'} (T'_j - T'_{j-1})P(t, T'_j)$.

Le changement de mesure qui a été effectué correspond à la dérivée de Radon-Nikodyn suivante :

$$\frac{dQ^{LVL}}{dQ^T} = \frac{\text{annuité}(t)}{\text{annuité}(T_0)} \cdot \frac{1}{P(t, T_0)}$$

Ainsi, on obtient, en appliquant la formule de Black et compte tenu de la distribution log-normale du taux de swap, ce qui suit :

$$\text{PrixSwaption}(t, T_0, T_N, K) = \text{Annuité}(t) \cdot (S_{T_0, T_N}(t) \cdot N(d_1) - K \cdot N(d_2))$$

Avec N la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite et :

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_{T_0, T_N}(t)}{K}\right) + \frac{\sigma^2}{2} T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

σ est la volatilité du prix de l'actif sous-jacent, soit, le swap .

En effet, en plus des données nécessaires pour la valorisation de swaps, il est nécessaire de récupérer la volatilité implicite à intégrer dans la formule de Black pour la valorisation des swaptions.

Les swaptions européennes sont cotées en volatilité implicite.

La volatilité implicite est la résultante d'une inversion de la formule de Black.

Cette volatilité est cotée sur le marché financier sous forme d'une surface qui fait correspondre à chaque maturité et ténor, une valeur pour la volatilité (*Annexe 3*).

Etant donné que cette surface ne peut couvrir toutes les combinaisons de ténor et maturité qui correspondent aux contrats de notre portefeuille, nous avons eu recours à une double interpolation et extrapolation linéaire pour pallier ce problème.

Remarque : L'utilité de consacrer cette partie pour la valorisation des swaptions réside dans le rôle essentiel que jouera cette valorisation dans le calcul de la CVA sur swap.

III-4-La valorisation d'un change à terme

III-4-1- Définition

Le change à terme ou le forex forward est un produit financier négocié sur un marché de gré à gré pour des raisons de couverture contre le risque de change. La pratique du change à terme est liée aux transactions commerciales conclues entre agents économiques (notamment les importateurs et les exportateurs) dans des devises différentes.

Le change à terme ou le forward est un accord d'échange à une date future, d'un montant dans une devise donnée contre un autre libellé dans une autre devise, à un cours de change fixé d'avance.

Au Maroc, L'échéance est définie dans le cadre de la circulaire de l'office des changes pour un contrat forward : elle est d'un an aussi bien pour les transactions commerciales que les transactions financières.

Les éléments constitutifs d'un contrat à terme sont :

- le montant de l'opération ou le notionnel.
- les devises échangées à terme (devise de base et devise secondaire).
- le cours à terme retenu pour l'échange.
- l'échéance du contrat.

III-4-2- Approche théorique :

La théorie de la parité des taux d'intérêt, conceptualisée par John M. Keynes, atteste que les cours de change des devises tendent à s'ajuster aux parités des taux d'intérêt qui prévalent dans chaque pays.

La parité du taux d'intérêt est présentée par la formule suivante et sert d'éviter qu'il y ait des opportunités d'arbitrage dans le marché :

$$CAT(t, T) = Spot(t) * \frac{1 + r_d(t, T)}{1 + r_f(t, T)}$$

Avec :

r_d le taux d'intérêt domestique.

r_f le taux d'intérêt étranger.

III-4-3- La pratique du change à terme :

Les principes de base d'une opération de change à terme sont les mêmes que pour une opération au comptant. La différence essentielle provient du fait que l'échange ne s'effectue qu'à maturité du contrat.

Ce décalage dans le temps va générer ce qu'on appelle des points de swaps ou Report/Déport qui serviront à calculer le prix à terme.

Une devise de base est dite en report si elle est plus chère à terme qu'au comptant, en d'autres termes, si le taux d'intérêt de la devise secondaire est supérieur à son taux d'intérêt. Ce report s'ajoute au cours comptant de son cours.

Inversement, si le taux d'intérêt en devise secondaire est inférieur au taux d'intérêt de la devise de base, cette dernière est dite en déport. Le déport est alors retranché de son cours comptant.

Si les taux sont égaux, le cours à terme est égal au cours au comptant, on parle alors de cours au pair.

Pour fixer le cours à terme, on recourt à une technique financière consistant à utiliser le taux de change spot courant et les deux taux d'intérêt dans chaque devise correspondant à la maturité du contrat.

$$\text{Cours à terme} = \text{Cours au comptant} \pm \text{Report/Déport}$$

Ceci peut être expliqué par le mécanisme suivant :

Un achat à terme d'une devise A contre une devise B est assimilé à l'exécution de 3 opérations:

- Un emprunt en devise B;
- Un achat spot de la devise A contre la devise B;
- Un placement de la devise A.

Une vente à terme d'une devise A contre une devise B est assimilée à l'exécution de 3 opérations :

- Un emprunt en devise A;
- Une vente spot de la devise A contre la devise B;
- Un placement de la devise B:

III-4-4- La valorisation du change à terme :

Soit c_1 le taux de change comptant à la date t_1 entre la devise de base A et la devise secondaire B :
En t_1 , un montant A_1 de A sera donc égal à un montant B_1 de B avec :

$$A_1 * c_1 = B_1$$

Si r_A est le taux d'intérêt applicable sur le marché monétaire de la devise A entre la date t_1 et une date ultérieure t_2 , la valeur A_2 à la date t_2 du montant A_1 sera donc :

$$A_2 = A_1 * \left(1 + r_A \cdot \frac{t_2 - t_1}{360}\right)$$

Si r_B est le taux d'intérêt applicable sur le marché monétaire de la devise B entre la date t_1 et une date ultérieure t_2 , la valeur B_2 à la date t_2 du montant B_1 sera donc :

$$B_2 = B_1 * \left(1 + r_B \cdot \frac{t_2 - t_1}{360}\right)$$

En partant de ce raisonnement , nous pouvons contruire un cours de change synthétique c_2 entre la devise A et B à la date t_2 , tel que :

$$A_2 * c_2 = B_2$$

Le cours résultant c_2 est appelé le cours à terme. Il correspond au cours de change fixé en t_1 pour une transaction en t_2 .

Ainsi , nous pouvons calculer la valeur du cours à terme en fonction du cours au comptant et des taux d'intérêt des devises impliquées entre la date de calcul et la maturité .

$$c_2 = c_1 * \frac{1 + r_B \cdot \frac{t_2 - t_1}{360}}{1 + r_A \cdot \frac{t_2 - t_1}{360}}$$

Remarque : Cette relation met en exergue l'interdépendance qui existe entre les différents compartiments du marché financier.

Afin d'évaluer le mark-to-market du contrat à la date de valorisation, nous avons :

- Dans le cas d'un contrat d'achat à terme :

$$MtM = (\text{cours à terme résiduel} - \text{cours à terme initial}) * \text{notionnel}$$

- Dans le cas d'une vente à terme :

$$MtM = (\text{cours à terme initial} - \text{cours à terme résiduel}) * \text{notionnel}$$

Le cours à terme initial correspond à la valeur du cours à terme évaluée à la date de conclusion du contrat.

Le cours à terme résiduel correspond au cours à terme évalué à la date de valorisation du contrat.

III-4-5-Application :

En se référant à cette méthodologie de calcul, nous avons implémenté un pricer pour les contrats du change à terme qui permet de calculer le cours à terme et la valeur marché MtM du contrat.

Ci-dessous l'interface du pricer :

| Date de valeur | Date de maturité | Code Contrepartie | Position(% a la devise de base) | Notional Amount Foreign(en devise de) | Notional Amount Domestic (en devise secondaire) | devise de base | Strat_foreign devise de base | devise secondaire | Strat_domes tic (dev sec) | Cours à terme initial | Spot date de valo | Cours à terme durée résiduelle | Taux dépôt foreign(ddb) | DF(ddb) | Actualisation Foreign(en ddb) |
|----------------|------------------|-------------------|---------------------------------|---------------------------------------|---|----------------|------------------------------|-------------------|---------------------------|-----------------------|-------------------|--------------------------------|-------------------------|---------|-------------------------------|
| 13/06/2013 | 09/01/2014 | SL22TNG | Achat | 400 000 | - 4 525 726 | EUR | Ask | MAD | Bid | 11,31 | 11,23 | 11,2390 | 0,13% | 100,00% | 399 987,10 |
| 13/06/2013 | 09/01/2014 | SLL2TNG | Achat | 400 000 | - 4 525 726 | EUR | Ask | MAD | Bid | 11,31 | 11,23 | 11,2390 | 0,13% | 100,00% | 399 987,10 |
| 13/06/2013 | 09/01/2014 | SCL3TNG | Achat | 300 000 | - 3 394 294 | EUR | Ask | MAD | Bid | 11,31 | 11,23 | 11,2390 | 0,13% | 100,00% | 299 990,32 |
| 29/07/2013 | 27/11/2014 | PNNLCAS | Achat | 5 000 000 | - 57 861 361 | EUR | Ask | MAD | Bid | 11,57 | 11,23 | 11,6080 | 0,27% | 99,75% | 4 987 681,78 |
| 29/07/2013 | 30/12/2014 | PNNLCAS | Achat | 5 000 000 | - 58 028 028 | EUR | Ask | MAD | Bid | 11,61 | 11,23 | 11,6504 | 0,27% | 99,73% | 4 986 258,26 |
| 29/07/2013 | 30/10/2014 | PNNLCAS | Achat | 5 000 000 | - 57 782 783 | EUR | Ask | MAD | Bid | 11,56 | 11,23 | 11,5726 | 0,27% | 99,78% | 4 988 837,47 |
| 13/08/2013 | 29/08/2014 | PNNLCAS | Achat | 5 000 000 | - 57 622 623 | EUR | Ask | MAD | Bid | 11,52 | 11,23 | 11,4964 | 0,26% | 99,83% | 4 991 311,88 |
| 13/08/2013 | 30/09/2014 | PNNLCAS | Achat | 5 000 000 | - 57 710 210 | EUR | Ask | MAD | Bid | 11,54 | 11,23 | 11,5354 | 0,26% | 99,80% | 4 990 052,44 |
| 13/08/2013 | 31/07/2014 | PNNLCAS | Achat | 5 000 000 | - 57 590 090 | EUR | Ask | MAD | Bid | 11,52 | 11,23 | 11,4619 | 0,26% | 99,85% | 4 992 427,68 |
| 16/09/2013 | 30/04/2014 | PNNLCAS | Achat | 5 000 000 | - 56 843 844 | EUR | Ask | MAD | Bid | 11,37 | 11,23 | 11,3568 | 0,25% | 99,92% | 4 995 823,83 |
| 16/09/2013 | 30/05/2014 | PNNLCAS | Achat | 5 000 000 | - 57 013 514 | EUR | Ask | MAD | Bid | 11,40 | 11,23 | 11,3903 | 0,25% | 99,89% | 4 994 740,28 |
| 16/09/2013 | 30/06/2014 | PNNLCAS | Achat | 5 000 000 | - 57 177 678 | EUR | Ask | MAD | Bid | 11,44 | 11,23 | 11,4257 | 0,26% | 99,87% | 4 993 599,19 |
| 23/09/2013 | 04/04/2014 | SL22TNG | Achat | 300 000 | - 3 396 697 | EUR | Ask | MAD | Bid | 11,32 | 11,23 | 11,3284 | 0,25% | 99,94% | 299 805,01 |
| 23/09/2013 | 04/04/2014 | SLL2TNG | Achat | 250 000 | - 2 830 581 | EUR | Ask | MAD | Bid | 11,32 | 11,23 | 11,3284 | 0,25% | 99,94% | 249 837,51 |
| 23/09/2013 | 16/05/2014 | SLL2TNG | Achat | 250 000 | - 2 839 590 | EUR | Ask | MAD | Bid | 11,36 | 11,23 | 11,3746 | 0,25% | 99,90% | 249 762,40 |
| 23/09/2013 | 16/05/2014 | SL22TNG | Achat | 300 000 | - 3 407 508 | EUR | Ask | MAD | Bid | 11,36 | 11,23 | 11,3746 | 0,25% | 99,90% | 299 714,87 |

Figure 18 : Interface du pricer du change à terme sur Excel

Prenons l'exemple d'un contrat à terme de caractéristiques suivantes :

| | |
|---------------------------------|---------------|
| Le type du contrat | Achat à terme |
| La date de départ | 29/07/2013 |
| La date d'échéance | 29/11/2014 |
| La date de valorisation | 31/12/2013 |
| La devise de base | EUR |
| La devise secondaire | MAD |
| Le cours à terme initial | 11.57 |
| Le cours de change spot | 11.2305 |
| Montant du notionnel | 5 000 000 EUR |

L'outil de valorisation implémenté calcule le taux d'intérêt domestique et le taux étranger en effectuant une interpolation linéaire aux courbes des taux zéro coupon compte tenu de la maturité résiduelle du contrat, qui est égale à la différence entre la date de maturité et la date de valorisation. Il calcule ensuite à partir des valeurs du taux d'intérêt des deux devises et du cours de change au comptant le cours à terme résiduel, puis donne la valeur marché du contrat en fonction de son type (Achat/Vente).

Pour notre exemple, le cours à terme résiduel est estimé à 11.608

Donc le Mark-To-Market du contrat est d'une valeur de :

$$\text{MtM} = (11.608 - 11.570) * 5\,000\,000 \text{ EUR} = 172\,335 \text{ DH.}$$

CHAPITRE IV :
LA MISE EN PLACE DE LA CVA

La CVA est l'ajustement de la valeur de marché des instruments financiers par la prise en compte du risque de contrepartie.

Après avoir défini la valeur marché des instruments financiers dans le chapitre précédent, nous allons définir et mettre en place, à travers le présent chapitre quelques méthodes appropriées de calcul de la CVA sur des produits financiers vanilles à savoir, les swaps de taux, les options de change et le change à terme.

IV-1-Généralités sur la CVA

IV-1-1-Définition :

La CVA est la quantification du risque de contrepartie sur un ou plusieurs instruments financiers.

Il s'agit d'une décote sur la valorisation d'un dérivé qu'une entité subit en raison du risque de contrepartie.

Concrètement, si une entité contracte un instrument financier de valeur intrinsèque V mais avec une contrepartie risquée, sa valeur de marché sera égale à V' avec $V' \leq V$. La CVA est par définition égale à $V - V'$. Si la contrepartie est sans risque, l'on se retrouvera avec une valeur de CVA nulle.

IV-1-2- CVA unilatérale et CVA bilatérale

Dans un contrat de produits dérivés de gré à gré, le risque couru par les parties contractantes peut vêtir un aspect unilatéral, c'est-à-dire que la valeur marché du produit ne peut pas changer de signe en cours de vie du contrat et que le risque de crédit est supporté par une seule entité, c'est le cas des options dont la valeur marché est toujours positive. Comme il peut être de nature bilatérale dans la mesure où le contrat peut prendre une valeur de marché positive pour une des parties, ce qui implique que le même contrat aura une valeur de marché négative pour l'autre partie. Cette valeur de marché peut, en cours de vie du contrat, changer de signe pour l'une (respectivement l'autre) contrepartie, ce qui signifie que le risque de crédit est présent de part et d'autre. C'est le cas par exemple d'un swap de taux.

La DVA (*Debit Valuation Adjustment*) correspond exactement à la même quantité mais concernant le propre risque de crédit engendré par le contrat. C'est la CVA du point de vue de la contrepartie.

Les méthodologies de calcul de la CVA sont symétriques à celles de la DVA, par conséquent, nous nous limiterons dans le présent rapport sur le calcul de la CVA.

IV-1-3-Le risque de défaut :

Lorsqu'une contrepartie fait défaut sur un contrat que nous avons contracté avec elle et qui n'a pas encore atteint sa maturité, il faut réévaluer la valeur de marché au moment de défaut de ce contrat. Pour plus de commodité, la valeur de marché sera notée MtM (« Mark-to-market ») tel qu'elle est reconnue par les praticiens.

Si le MtM du contrat est positif, ce qui est équivalent à dire que la contrepartie nous doit de l'argent, si elle veut récupérer le contrat, la contrepartie va seulement nous verser la partie restante du MtM.

Cependant, économiquement, l'entité ayant fait défaut doit remplir ses obligations financières selon un ordre précis. Et étant donné que les contrats financiers ne figurent pas à la tête de cette liste, il se peut que la contrepartie ne soit en mesure de rembourser qu'une partie de la valeur du contrat. La proportion remboursée est appelée **le taux de recouvrement** qu'on notera par la suite **R**. Ce taux peut être nul dans le cas où 'entreprise n'a plus d'argent après liquidation.

Ainsi, si le MtM est positif, la contrepartie nous rembourse $R \cdot \text{MtM}$.

Par contre, si le MtM est négatif au moment du défaut, nous sommes dans l'obligation de payer le MtM à la contrepartie.

On peut conclure alors, que le cas défavorable, est le cas où le MtM est positif car on doit sa somme à une contrepartie en défaut et on en récupérera qu'une partie, soit $R \cdot \text{MtM}$.

IV-1-4-Modélisation mathématique de la CVA :

Lorsqu'un événement de défaut survient, la perte subie est $(1-R) \cdot \text{MtM}$, aussi notée $\text{LGD} \cdot \text{MtM}$.

Ainsi, en notant $\tau_{\text{défaut}}$ la variable aléatoire modélisant le temps de défaut, la perte financière au moment du défaut est :

$$\text{Perte}(t = \tau_{\text{défaut}}) = \text{LGD} \cdot \text{MtM}_+(\tau_{\text{défaut}}) \cdot \mathbf{1}_{\tau_{\text{défaut}} \leq T}$$

Où MtM_+ représente la partie positive de la MtM, et T la maturité du contrat.

Plaçons nous sous la probabilité risque neutre Q. Sous cette probabilité, un actif échangeable actualisé est une martingale.

Nous avons alors à l'instant t :

$$\text{CVA}(t) = E_t^Q [\text{DF}(t, \tau_{\text{défaut}}) \cdot \text{LGD} \cdot \text{MtM}_+(\tau_{\text{défaut}}) \cdot \mathbf{1}_{\tau_{\text{défaut}} \leq T}]$$

La valorisation de la CVA est, donc, équivalente à la détermination de la loi jointe de plusieurs variables aléatoires. Et la plupart des méthodologies adoptées dans le calcul du risque de contrepartie reposent sur la détermination de trois composantes principales :

- Les probabilités et temps de défaut.
- La perte en cas de défaut.
- L'exposition en cas de défaut.

Il est à noter qu'une valeur négative du MtM d'un instrument financier à la date de calcul n'implique pas que cet instrument va maintenir une valeur négative dans le futur. En effet, il peut changer de signe et donner lieu à des pertes en cas de défaut.

La figure ci-dessous illustre ce constat :

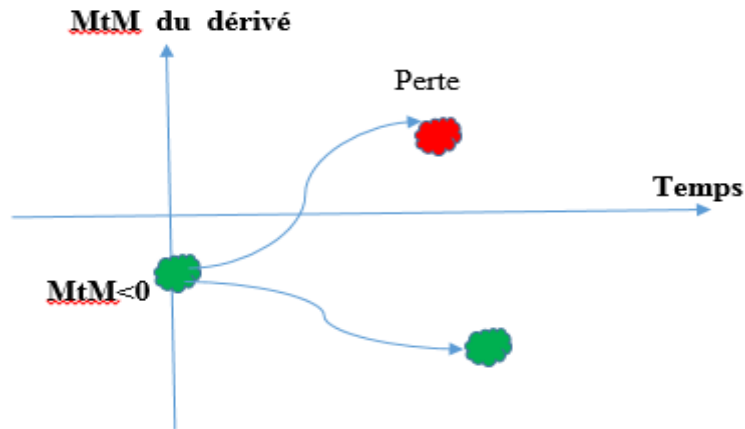


Figure 19 : Schéma illustrant les scénarios possibles de l'évolution de l'exposition au défaut

La figure ci-dessus montre que même les dérivés ayant une valorisation négative à la date de valorisation, sont concernés par la problématique de CVA. Cela s'explique par le fait que l'exposition économique dont il est question est une exposition future, et non une exposition en date de valorisation du dérivé.

IV-1-5- Hypothèses de calcul de la CVA

IV-1-5-1-Le traitement de la corrélation entre l'exposition au défaut et le temps de défaut.

Certes, pour pouvoir calculer la CVA, une estimation des lois marginales des éléments composants l'espérance s'avère nécessaire et le défi majeur à relever. Cependant, cette formule cache derrière elle un paramètre très important à estimer également : Il s'agit de la corrélation entre la qualité de crédit de la contrepartie et l'EAD. En effet, $EAD = MtM_+(t = \tau_{\text{défaut}})$.

On appelle cet effet lorsque la corrélation est négative le « wrong way risk ».

Compte tenu de la complexité du problème lié au calcul de la CVA, nous n'allons pas tenir compte de ce paramètre et nous allons supposer que le défaut de la contrepartie est indépendant de l'exposition au défaut.

En pratique, certains dérivés ne respectent pas cette hypothèse et peuvent au contraire présenter une très forte corrélation entre l'exposition et la probabilité de défaut.

Pour illustrer ce risque, prenons un swap de taux payeur (le taux fixe est payé, et le taux variable est perçu), conclu avec une contrepartie qui se finance intégralement à taux variable. Lorsque les

taux augmentent, la rentabilité et donc la valeur de ce swap de taux payeur augmentent, cependant la qualité de crédit de la contrepartie qui se finance à taux variables baisse puisque le coût de son financement a augmenté.

IV-1-5-2-La formule de calcul de la CVA

Compte tenu de l'hypothèse faite sur la corrélation entre l'EaD et le temps de défaut et supposant la perte en cas de défaut (LGD) constante, nous apportons des simplifications à la formule de calcul de la CVA :

$$\begin{aligned} CVA(t) &= LGD \cdot E_t^Q \left[DF(t, \tau_{défaut}) \cdot MtM_+(\tau_{défaut}) \cdot \mathbf{1}_{\tau_{défaut} \leq T} \right] \\ &= LGD \cdot E_t^Q \left[E_t^Q (DF(t, s) \cdot MtM_+(s) \cdot \mathbf{1}_{s \leq T | \tau_{défaut}=s}) \right] \\ &= LGD \cdot \int_{s=t}^T E_t^Q (DF(t, s) \cdot MtM_+(s)) \cdot p_{\tau_{défaut}}(s) ds \end{aligned}$$

Avec $p_{\tau_{défaut}}$ la densité de la variable du temps de défaut.

Afin de pouvoir calculer numériquement la CVA sur les instruments financiers, une discrétisation de l'intégrale s'avère indispensable.

Pour cette fin, on fait l'hypothèse que la variable stochastique qui modélise le temps de défaut est une variable aléatoire discrète, on suppose donc que le défaut ne peut intervenir qu'à des dates prédéfinies.

$$CVA(t) = LGD \cdot \sum_{i=1}^N E_t^Q (DF(t, T_i) \cdot MtM_+(T_i)) \cdot (P(\tau_{défaut} \leq T_i) - P(\tau_{défaut} \leq T_{i-1}))$$

Où $T_0 = t$ et $T_N = T$

La discrétisation de l'intervalle permet de dégager deux termes principaux :

- Une exposition positive actualisée : $DF(t, T_i) \cdot MtM_+(T_i)$
- Une variation des probabilités de défaut entre deux instants:

$$P(\tau_{défaut} \leq T_i) - P(\tau_{défaut} \leq T_{i-1})$$

Avec cette interprétation, nous pouvons nous intéresser de manière indépendante à la valorisation de l'exposition au défaut et des probabilités de défaut.

IV-1-5 -3 La non-additivité de la CVA

Parmi les propriétés de la CVA, le non additivité.

Cette caractéristique découle de l'inégalité mathématique qui stipule que la partie positive d'une somme est inférieure à la somme des parties positives :

$$(\sum MtM_i)_+ \leq \sum (MtM_i)_+$$

Cette caractéristique complexifie grandement la méthode de calcul de la CVA lorsque celle-ci doit être calculée non sur un produit mais sur un portefeuille.

IV-2- Estimation des paramètres de la CVA :

IV-2-1- Traitement de la LGD :

La LGD est une variable aléatoire qui sert de modéliser le pourcentage de la perte supportée en cas de défaut :

Le plus souvent, la LGD est supposée constante. Son estimation émane de deux pratiques principales dans le marché :

- *Si le marché de CDS est liquide, la LGD peut être estimée à partir des probabilités « de marché » consensus utilisées lors de la valorisation des CDS, ce qui aboutit à une LGD de l'ordre de 60%.*
- *Si le marché des CDS n'est pas liquide, la LGD est estimée en se basant sur des études historiques et des modèles de notation interne.*

Etant donné que nous calculons la CVA dans un contexte marocain, l'estimation de la LGD ne peut reposer sur la première approche. Ainsi, nous avons utilisé la LGD calculée à base de modèles de notation interne du client.

IV-2-2-Estimation des probabilités de défaut :

La probabilité de défaut est la probabilité qu'un débiteur ne puisse faire face à ses obligations de remboursement.

Il existe différentes approches pour construire la structure par terme des probabilités de défaut,

La structure par terme des probabilités de défaut est la courbe $t:T \rightarrow P_{Défaut}(t,T)$ qui permet d'estimer à une date t , la probabilité qu'une entité fasse défaut à une date ultérieure T .

Nous allons présenter maintenant deux méthodologies principales pour la calibration des probabilités de défaut, la première est basée sur des données historiques, tandis que la deuxième est fondée sur des anticipations du marché.

IV-2-2-1- L'utilisation des ratings –la notation :

Une première approche pour la calibration des probabilités de défaut est la notation ou le rating. La notation est l'évaluation du risque qu'un emprunteur ne puisse honorer ses engagements et remplir ses obligations contractuelles.

i-La notation externe :

Cette méthode consiste à utiliser les données des agences de notation reconnues dans le domaine comme (Standard&Poor's, Moody's et Fitch) et leurs matrices de taux de défaut historiquement observés.

Les notes révélées par ces agences peuvent être obtenues par une analyse statistique des données historiques de défaillance et ce en suivant les différentiels de taux pour les prêts aux entreprises. Plus l'accroissement de ce différentiel est considérable, plus la probabilité de défaillance est importante.

L'avantage principal de cette méthode est la simplicité de sa mise en œuvre, encore, faut-il que l'entreprise dont nous souhaitons calculer la probabilité de défaut soit notée par ces agences. Or, ce dernier critère est loin d'être vérifié dans notre cas vu que les transactions sont conclues sur le marché marocain ou peu d'entreprises sont notées par des agences internationales.

Cette méthode n'est cependant exempte de critiques. En effet, l'estimation des probabilités de défaut à partir des données historiques peut conduire à une sous-estimation du risque de défaut, surtout en période de crise, chose qui a été constatée lors de la crise de 2008 où les agences de notation n'ont pu prédire la faillite de Lehmann Brothers et autres.

ii-La notation interne :

Pour estimer la probabilité de défaut de leurs contreparties, certaines entreprises recourent à des modèles de notation interne comme le modèle CreditMonitor de la firme KMV-Moody's, la méthode CreditMetrics de la firme JP Morgan, le logiciel CreditRisk+ de la Credit Suisse et le modèle à intensité.

Dans les bases de données dont nous disposons, le client a fourni pour certaines contreparties une structure à terme des probabilités de défaut résultant de son modèle de notation interne, et pour d'autres, une probabilité de défaut à l'horizon d'un an à partir de laquelle nous avons construit une structure par terme des probabilités de défaut.

L'approche utilisée pour la construction de la structure à terme des probabilités de défaut est la suivante :

Nous considérons le modèle à intensité : ce modèle repose sur l'idée que le défaut est modélisé par le premier saut d'un processus de Poisson. L'instant du défaut correspond à l'instant du premier saut, tandis que l'ampleur du défaut est modélisée par l'importance du saut. L'intensité du processus de Poisson correspond à l'intensité de défaut, c'est-à-dire à la probabilité instantanée du défaut.

Selon ce modèle on a :

$$P(t, T) = 1 - e^{-\int_t^T \lambda_s ds}$$

Avec $P(t, T)$ la probabilité qu'un défaut survienne entre t et T .

Et λ_s l'intensité de défaut à l'instant s .

Nous faisons l'hypothèse que l'intensité de défaut est constante dans le temps $\lambda_s = \lambda, \forall s$ et nous calculons sa valeur à partir de la probabilité de défaut donnée pour un horizon d'un an.

$$\begin{aligned} P(t, T) &= 1 - e^{-\lambda \int_t^T ds} \\ &= 1 - e^{-\lambda(T-t)} \end{aligned}$$

| Note \ Maturité | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | Intensité |
|-----------------|-------|--------|--------|--------|--------|-----------|
| A | 0,0% | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 0,00% |
| B | 2,1% | 4,16% | 6,17% | 8,14% | 10,07% | 2,12% |
| C | 3,8% | 7,46% | 10,97% | 14,36% | 17,61% | 3,87% |
| D | 5,2% | 10,13% | 14,80% | 19,23% | 23,43% | 5,34% |
| E | 8,3% | 15,91% | 22,89% | 29,29% | 35,16% | 8,66% |
| F | 12,9% | 24,14% | 33,92% | 42,45% | 49,87% | 13,81% |
| G | 15,9% | 29,27% | 40,52% | 49,98% | 57,93% | 17,32% |
| H | 18,8% | 34,07% | 46,46% | 56,53% | 64,70% | 20,83% |

Tableau 10: La structure à terme de la probabilité de défaut pour différentes notations.

Remarque :

L'approche adoptée pour la construction de la structure à terme des probabilités de défaut présente plusieurs limites qui ne se rapportent pas au modèle lui-même, mais à l'hypothèse considérée (intensité constante).

En effet, compte tenu de cette hypothèse, deux entités qui présentent le même risque de défaut à l'horizon d'un an, ont la même structure de défaut.

Aussi, selon cette hypothèse, une firme qui a une probabilité de défaut nulle à l'horizon d'un an, ne court aucun risque de défaillance à long terme.

En dépit de ces limites, nous allons opter pour les résultats obtenus dans l'absence d'une approche alternative.

IV-2-2-2- L'utilisation des spreads CDS:

Cette méthode consiste à estimer les probabilités de défaut à partir des prix de CDS cotés sur le marché. Elle permet de valoriser le risque de défaut tel qu'il est perçu sur le marché et est vénérée comme ayant un pouvoir prédictif meilleur que celui des ratings.

Cependant , cette méthode présente quelques limites , notamment , la sensibilité des spreads CDS à l'information financière sur le marché , ce qui peut induire à une volatilité injustifiée des probabilités de défaut et son non-adaptabilité à un marché de CDS peu liquide ou inexistant comme le cas du marché marocain.

IV-2-3-Estimation de l'exposition au défaut :

IV-2-3-1 La méthode des add-ons forfaitaires :

Cette méthode consiste à utiliser l'approche réglementaire définie par le comité de Bâle pour le calcul de l'exposition au défaut appelée CEM «*Current Exposure Method* ».

Selon cette approche , l'exposition potentielle est définie comme suit :

$$EaD = \max(MtM + add - on, 0)$$

Avec MtM le mark-to-market ou la valeur marché du dérivé

Et add-on une dérive forfaitaire qui est ajoutée à la valorisation, en fonction du type de sous-jacent et de la maturité, et qui modélise d'éventuels mouvements de marché.

| Échéance résiduelle | Contrats sur : | | | | |
|---------------------|----------------|---------------|---------|---------------------------|-------------------------|
| | taux d'intérêt | devises et or | actions | métaux précieux (sauf or) | autres produits de base |
| ≤ 1 an | 0,0 % | 1,0 % | 6,0 % | 7,0 % | 10,0 % |
| > 1 an et ≤ 5 ans | 0,5 % | 5,0 % | 8,0 % | 7,0 % | 12,0 % |
| > 5 ans | 1,5 % | 7,5 % | 10,0 % | 8,0 % | 15,0 % |

Tableau 11: Add-ons forfaitaires extrait du texte de Bâle II.

IV-2-3-2-La méthode des swaptions :

Pour valoriser la CVA sur un swap de taux d'intérêt, nous pouvons utiliser une approche analytique appelée : « la méthode des swaptions ».

La méthode des swaptions stipule que l'exposition potentielle est la moyenne des valorisations positives attendues à la date du défaut.

Rappelons la formule de la CVA obtenue précédemment :

$$CVA(t) = LGD \cdot \sum_{i=1}^N E_t^Q (DF(t, T_i) \cdot MtM_+(T_i)) \cdot (P(\tau_{défaut} \leq T_i) - P(\tau_{défaut} \leq T_{i-1}))$$

Le terme de l'espérance dans la somme, correspondant à l'espérance de la partie positive du MtM au temps « s » actualisée, est la valeur d'une option sur le swap résiduel. C'est-à-dire la valeur d'une swaption.

Par conséquent, le calcul de la CVA dans le cadre d'un swap de taux d'intérêt nous ramène au calcul des prix de swaptions sur le swap considéré sur toutes les maturités s'étalant de l'instant t à la maturité T. En d'autres termes, pour estimer l'exposition au défaut d'un swap de taux d'intérêt à une date de défaut probable, il convient de valoriser la swaption dont la maturité est la date de défaut probable et qui porte sur le « swap résiduel ».

Ces prix de swaptions sont pondérés par la variation de la probabilité de défaut entre les deux instants consécutifs de la discrétisation.

Ainsi, la formule de calcul de la CVA sur un swap de taux est :

$$CVA(t) = LGD \cdot \sum_{i=1}^N swaption(t, T_i, T_N) \cdot (P(\tau_{défaut} \leq T_i) - P(\tau_{défaut} \leq T_{i-1}))$$

Les intervalles de discrétisation retenus pour le calcul de la CVA sur les swaps de taux sont définis par les instants de tombée de coupon de la jambe la plus fréquente.

Cette méthode peut être étendue à d'autres produits notamment le change à terme. En effet, en raisonnant par analogie et compte tenu de l'expression du mark-to-market du contrat forward FX explicitée dans le chapitre précédent, nous avons :

- Dans le cas d'un contrat d'achat à terme :

La valeur marché du contrat est :

MtM = (cours à terme résiduel – cours à terme initial) * Notionnel.

Et l'exposition potentielle à l'instant de défaut est :

EaD = max (MtM, 0)

Ainsi l'exposition potentielle au temps de défaut est égale au payoff d'une option d'achat de strike égal au cours à terme initial K et de sous-jacent égal au cours à terme résiduel R.

D'où :

$$CVA(t) = LGD \cdot \sum_{i=1}^N call(t, T_i, R, K) \cdot (P(\tau_{défaut} \leq T_i) - P(\tau_{défaut} \leq T_{i-1}))$$

Avec T_i la maturité de l'option.

- Dans le cas d'une vente à terme :

La valeur marché du contrat est :

MtM = (cours à terme initial – cours à terme résiduel) * Notionnel.

Et l'exposition potentielle à l'instant du défaut est : $EaD = \max(MtM, 0)$

Donc , l'exposition potentielle au temps de défaut est égale au payoff d'une option de vente de strike égal au cours à terme initial K et de sous-jacent égal au cours à terme résiduel R .

D'où :

$$CVA(t) = LGD \cdot \sum_{i=1}^N put(t, T_i, R, K) \cdot (P(\tau_{défaut} \leq T_i) - P(\tau_{défaut} \leq T_{i-1}))$$

Avec T_i la maturité du put.

Contrairement aux swaps de taux, un contrat de change à terme ne connaît qu'un seul échange de flux et ce, à la maturité du contrat.

Ainsi, la discrétisation se fait selon une fréquence classique de tombées de flux , par exemple , une fréquence mensuelle , trimestrielle, semestrielle ou annuelle.

Dans notre cas, nous avons utilisé une discrétisation suivant une fréquence mensuelle.

IV-2-3-3-La méthode des sensibilités :

Ce modèle cherche à calculer la CVA sur des produits vanilles quelconques. Il permet de calculer l'exposition future non pas comme un produit connu pour un sous-jacent donné (swaption pour un swap, option pour un forward ...), mais de modéliser directement le Mark-To-Market future.

Nous supposons que le MtM future peut s'écrire au premier ordre à l'instant t pour un instant future u comme suit :

$$MtM(u) = E_t(MtM(u)) + \sum_i \delta_{S_i}(u) \Delta_{t \rightarrow u} S_i$$

où les S_i correspondent aux paramètres auxquels est sensible le MtM.

Ces paramètres ont une variation entre t et u de $\Delta_{t \rightarrow u} S_i$ d'espérance nulle conditionnellement à F_t .

Les $\delta_{S_i}(u)$ correspondent aux sensibilités futures du MtM à ces mêmes paramètres.

Les paramètres considérés sont supposés suivre des lois log-normales, de plus, il est courant de convertir les volatilités lognormales en volatilités normales afin d'obtenir un modèle gaussien équivalent au modèle log-normal.

En effet :

$$\begin{aligned} \Delta S_t &= \sigma S_t \Delta W_t \\ &= \sigma_N \Delta W_t \end{aligned}$$

Où W_t est un processus de Wiener et où l'on pose σS_t constant et égal à σ_N .

Ainsi, on a bien des paramètres dont la variation est gaussienne d'espérance nulle.

En reprenant l'équation du MtM future , on s'aperçoit que le MtM peut alors s'écrire comme une somme de variables gaussiennes. Il est donc une gaussienne.

Le choix d'utiliser un modèle gaussien est motivé par plusieurs points. Le premier est qu'il existe une formule fermée pour le calcul de l'espérance sur la partie positive d'une gaussienne (la formule de Bachelier), ensuite, le MtM future caractérisant la valeur d'un dérivé quelconque dans le futur peut prendre des valeurs aussi bien négatives que positives, ce qui est possible avec une distribution normale.

Si la distribution du MtM est normale, il nous suffit de déterminer son espérance et sa variance pour caractériser sa loi. L'espérance est la valeur future du MtM, tandis que le calcul de la variance est plus compliqué.

Rappelons l'expression du MtM future :

$$MtM(u) = E_t(MtM(u)) + \sum_i \delta_{S_i}(u) \Delta_{t \rightarrow u} S_i$$

Sous hypothèse de corrélations négligeables entre les différents paramètres, on a :

$$Var(MtM(u)) = \sum_i \delta_{S_i}(u) Var(\Delta_{t \rightarrow u} S_i)$$

Et sous l'hypothèse que :

$$\begin{aligned} \Delta S_t &= \sigma S_t \Delta W_t \\ &= \sigma_N \Delta W_t \end{aligned}$$

On a :

$$\begin{aligned} Var(MtM(u)) &= \sum_i \delta_{S_i}(u) (\sigma_i S_i(t))^2 Var(\Delta_{t \rightarrow u} W) \\ &= \sum_i \delta_{S_i}(u) (\sigma_i S_i(t))^2 (u - t) \end{aligned}$$

Par conséquent , si nous nous parvenons à obtenir les sensibilités futures du MtM aux paramètres du marché (les $\delta_{S_i}(u)$) , alors la variance du MtM future peut être calculée.

Ceci peut par exemple être effectué en calculant le MtM future après choc de ses paramètres.

De plus , les volatilités (les σ_i) de certains paramètres comme le taux FX sont côtées sur le marché et peuvent facilement être obtenues.

Enfin , il ne reste plus qu'à calculer l'exposition au défaut, qui correspond à l'espérance de la partie positive du MtM future .

La formule de Bachelier permet de donner pour une gaussienne G qui suit une normale d'espérance μ et de variance σ^2 :

$$E(G^+) = \mu N\left(\frac{\mu}{\sigma}\right) + \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\mu}{\sigma}\right)^2\right)$$

IV-2-3-4-la méthode de simulation :

Les méthodes listées auparavant reposent sur une estimation de l'exposition au défaut moyennant des approches déterministes.

Pour les produits pour lesquels il existe une formule ferme de valorisation et qui présentent plusieurs facteurs de risques, recourir à des méthodes stochastiques s'avère nécessaire. Ces méthodes consistent à simuler différents scénarios pour l'exposition potentielle et retenir le scénario moyen en diffusant les paramètres de marchés dont elle dépend moyennant les méthodes de Monte-Carlo.

i- Présentation de la méthode de Monte Carlo

La méthode de simulation de Monte Carlo est une méthode numérique qui utilise des procédés aléatoires et des techniques probabilistes.

Ces méthodes ont été introduites par Louis Buffon qui, à travers son expérience « aiguille de Buffon ». À travers cette expérience, Buffon a pu rapprocher la probabilité qu'une aiguille jetée d'une même hauteur touche 2 stries d'un parquet à lattes parallèles et écartées de même distance.

En effet, en lançant un grand nombre d'aiguilles et en comptant celles qui touchaient deux stries il détenait une valeur approximative de la probabilité. Cette expérience repose sur un théorème : la loi forte des grands nombres.

La méthode de Monte-Carlo est une généralisation de la méthode de l'aiguille de Buffon à n'importe quel procédé aléatoire.

Théorème (Loi forte des grands nombres) :

Soit $(X_i, i \geq 1)$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées (*i.i.d*)

Telles que $E(|X_1|) < \infty$, alors :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n X_i \right) = E(X_1)$$

Ce théorème permet d'utiliser des algorithmes probabilistes pour calculer n'importe quelle espérance.

En effet, supposons le cas où les variables aléatoires suivent une loi normale (0,1). Un générateur aléatoire permet de simuler cette loi. Pour approcher son espérance, il suffit donc de simuler n fois cette loi et d'en tirer le scénario moyen.

ii- La génération des scénarios :

Un scénario est généralement défini par une équation stochastique à dérivées partielles, spécifiquement, les équations ayant une solution explicite.

Tel est le cas de l'équation couramment utilisée pour décrire la dynamique du taux de change :

$$dX(t) = \mu X(t)dt + \sigma X(t)dW_t$$

Avec :

$\mu(t) = (r_d - r_f)$: Le drift.

r_d et r_f : les taux d'intérêt domestique et étranger.

X : le taux de change.

σ : la volatilité du taux de change.

W est un mouvement brownien,

Dans une simulation de Monte Carlo, la génération de scénarios peut être effectuée suivant deux approches :

➤ *Path dependant simulation* : cette méthode consiste à générer un chemin d'évolution de l'exposition au défaut dans le temps suivant des intervalles prédéfinis $\{t_k\}_{k=0}^n$.

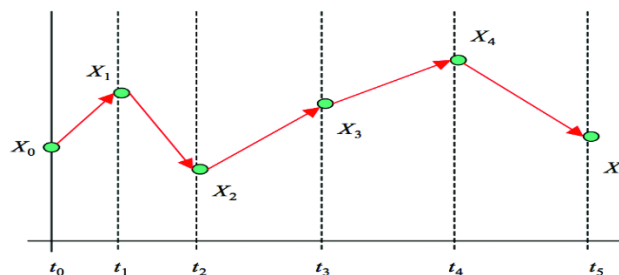


Figure 20 : Path Dependant Simulation

Selon cette approche , la solution de l'équation différentielle décrivant la dynamique du taux de change s'écrit :

$$X(t_k) = X(t_{k-1}) \exp \left(\left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) (t_k - t_{k-1}) + \sigma \sqrt{t_k - t_{k-1}} \cdot Z \right)$$

Avec Z suit une loi normale de moyenne 0 et d'écart type 1 .

➤ *Direct Jump Simulation* : cette méthode consiste à définir à partir des valeurs des paramètres à t=0 un scénario pour l'exposition au défaut à maturité sans prendre en considération les évolutions intermédiaires de ces paramètres.

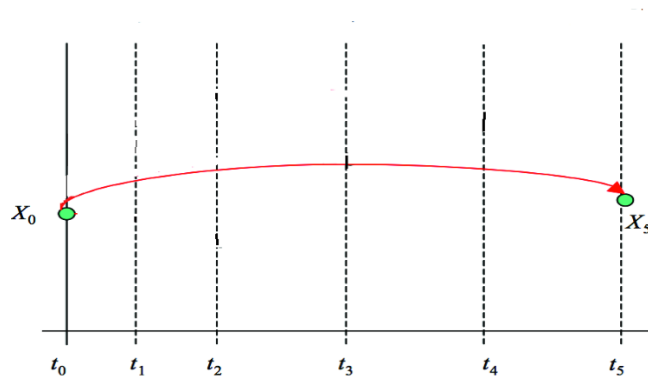


Figure 21:Direct Jump Simulation

Selon cette approche, la solution de l'équation différentielle décrivant la dynamique du taux de change s'écrit :

$$X(t_n) = X(t_0) \exp \left(\left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) (t_n - t_0) + \sigma \sqrt{t_n - t_0} \cdot Z \right)$$

Avec Z suit une loi normale de moyenne 0 et d'écart type 1 .

Nous allons nous servir des résultats des deux approches pour la simulation de l'exposition au défaut des options de change et du change à terme sous hypothèse que le paramètre qui impacte considérablement sa valeur est le taux de change.

IV-3- Résultats du calcul de la CVA :

IV-3-1-Calcul de la CVA pour un swap de taux :

Parmi les méthodes de calcul de la CVA expliquées auparavant, nous allons opter pour la méthode des swaptions qui s'avère être la plus appropriée aux swaps de taux.

Afin d'illustrer la mise en place de cette méthode, nous allons prendre l'exemple d'un swap de taux d'intérêt conclu entre deux parties le 12/05/2008, entrant en vigueur le 15/05/2008 et arrivant à échéance le 14/07/2018.

La première partie paye un taux fixe de 1.56% sur un notionnel de 1.000.000 EUR avec une fréquence semestrielle et une base de comptage exact/exact.

La deuxième partie, quant à elle, paye un Euribor 6M sur le même montant du notionnel avec une fréquence semestrielle et une base de comptage exact/360.

Toutes les valorisations sont effectuées au 31/12/2013 avec les taux de marché de l'époque et en considérant un univers monocourbe. Cela implique que la courbe utilisée pour l'actualisation des cash-flows est l'Euribor 6 mois.

➤ Premier cas : un swap receveur du taux fixe.

La structure à terme de la probabilité de défaut et la valeur de la perte en cas de défaut (LGD) de la contrepartie qui sont retenues pour cet exemple, sont illustrées dans le tableau ci-dessous :

| Maturité en jours | Maturité en années | Default Probability (%) | Recovery Rate |
|-------------------|--------------------|-------------------------|---------------|
| 365 | 1 | 2,11 | 30% |
| 730 | 2 | 3,23 | LGD |
| 1095 | 3 | 3,61 | 70% |
| 1826 | 5 | 3,72 | |
| 2556 | 7 | 4,02 | |

Tableau 12: Structure à terme de la probabilité de défaut de la contrepartie.

Afin d'avoir les probabilité correspondante aux dates de maturité de nos swaptions , nous effectuons une interpolation linéaire sur la structure à terme de la probabilité de défaut.

| Maturité | PD |
|-------------------|---------------|
| 14/01/2014 | 1,033% |
| 14/07/2014 | 1,588% |
| 14/01/2015 | 2,153% |
| 14/07/2015 | 2,708% |
| 14/01/2016 | 3,252% |
| 14/07/2016 | 3,541% |
| 14/01/2017 | 3,649% |
| 14/07/2017 | 3,748% |
| 14/01/2018 | 3,805% |

Tableau 13: Probabilités de défaut obtenues par interpolation linéaire.

Le calcul de la l'exposition au défaut revient à valoriser des swaptions de maturité T_i , de strike $K=1.56\%$ (le taux fixe) et de sous-jacent égal au taux de swap , avec i la date de tombée de coupons de la jambe la plus fréquente , soit la semestrielle.

Ci-dessous, le tableau récapitulatif du calcul des prix des swaptions :

| Maturité | Ténor | Annuité | Strike | DF (maturité) | DF (ténor) | Taux de swap | Volatilité | Prix de l'option | EaD |
|------------|------------|---------|--------|---------------|------------|--------------|------------|------------------|-----------|
| 14/07/2014 | 14/07/2018 | 4,406 | 1,56% | 99,85% | 95,0% | 1,103% | 44,06% | 2,077% | 20 767,48 |
| 14/01/2015 | 14/07/2018 | 3,911 | 1,56% | 99,66% | 95,0% | 1,193% | 46,24% | 1,874% | 18 743,14 |
| 14/07/2015 | 14/07/2018 | 3,408 | 1,56% | 99,30% | 95,0% | 1,266% | 45,15% | 1,615% | 16 152,62 |
| 14/01/2016 | 14/07/2018 | 2,916 | 1,56% | 98,92% | 95,0% | 1,347% | 43,25% | 1,338% | 13 384,65 |
| 14/07/2016 | 14/07/2018 | 2,417 | 1,56% | 98,37% | 95,0% | 1,400% | 41,41% | 1,103% | 11 027,22 |
| 14/01/2017 | 14/07/2018 | 1,928 | 1,56% | 97,72% | 95,0% | 1,414% | 38,99% | 0,881% | 8 810,54 |
| 14/07/2017 | 14/07/2018 | 1,436 | 1,56% | 96,92% | 95,0% | 1,347% | 37,31% | 0,671% | 6 714,54 |
| 14/01/2018 | 14/07/2018 | 0,955 | 1,56% | 96,00% | 95,0% | 1,060% | 34,66% | 0,500% | 4 996,91 |

Tableau 14: Résultats du calcul de l'exposition au défaut par la méthode des *swaptions*.

Le Calcul de de l'exposition et l'estimation des probabilités de défaut et de la perte en cas de défaut ainsi faits, nous pouvons déduire la valeur de la CVA :

| Maturité T_0 | Ténor T_N | Notionnel | EaD | PD | Δ PD | LGD | CVA |
|---|-------------|-----------|-----------|--------|-------------|-----|----------------|
| 14/01/2014 | - | 1 000 000 | - | 1,033% | - | - | - |
| 14/07/2014 | 14/07/2018 | 1 000 000 | 20 767,48 | 1,588% | 0,555% | 70% | 80,74 |
| 14/01/2015 | 14/07/2018 | 1 000 000 | 18 743,14 | 2,153% | 0,565% | 70% | 74,08 |
| 14/07/2015 | 14/07/2018 | 1 000 000 | 16 152,62 | 2,708% | 0,555% | 70% | 62,80 |
| 14/01/2016 | 14/07/2018 | 1 000 000 | 13 384,65 | 3,252% | 0,544% | 70% | 50,96 |
| 14/07/2016 | 14/07/2018 | 1 000 000 | 11 027,22 | 3,541% | 0,289% | 70% | 22,32 |
| 14/01/2017 | 14/07/2018 | 1 000 000 | 8 810,54 | 3,649% | 0,264% | 70% | 6,66 |
| 14/07/2017 | 14/07/2018 | 1 000 000 | 6 714,54 | 3,748% | 0,100% | 70% | 4,65 |
| 14/01/2018 | 14/07/2018 | 1 000 000 | 4 996,91 | 3,805% | 0,058% | 70% | 1,99 |
| Valeur de la CVA en EUR | | | | | | | 304,14 |
| Valeur de la CVA en % du nominal | | | | | | | 0,0304% |

Tableau 15: Résultats du calcul de la CVA pour un swap receveur du fixe.

Ainsi , la valeur retenue pour la CVA est de 304.14 EUR soit 0.03% du nominal .

➤ Deuxième cas : un swap payeur du taux fixe

Pour un swap payeur du taux fixe, les résultats obtenus sont illustrés dans le tableau ci-dessous.0

| Maturité T_0 | Ténor T_N | Notionnel | Prix de l'option | EaD | PD | Δ PD | LGD | CVA |
|---|-------------|-----------|------------------|----------|--------|-------------|-----|----------------|
| 14/01/2014 | 14/07/2018 | 1 000 000 | - | - | 1,033% | - | - | - |
| 14/07/2014 | 14/07/2018 | 1 000 000 | 0,063% | 628,31 | 1,588% | 0,555% | 70% | 2,44 |
| 14/01/2015 | 14/07/2018 | 1 000 000 | 0,439% | 4 387,65 | 2,153% | 0,565% | 70% | 17,35 |
| 14/07/2015 | 14/07/2018 | 1 000 000 | 0,612% | 6 118,65 | 2,708% | 0,555% | 70% | 23,77 |
| 14/01/2016 | 14/07/2018 | 1 000 000 | 0,716% | 7 161,67 | 3,252% | 0,544% | 70% | 27,27 |
| 14/07/2016 | 14/07/2018 | 1 000 000 | 0,717% | 7 165,35 | 3,541% | 0,289% | 70% | 14,50 |
| 14/01/2017 | 14/07/2018 | 1 000 000 | 0,600% | 6 004,21 | 3,649% | 0,264% | 70% | 11,10 |
| 14/07/2017 | 14/07/2018 | 1 000 000 | 0,366% | 3 656,01 | 3,748% | 0,100% | 70% | 2,56 |
| 14/01/2018 | 14/07/2018 | 1 000 000 | 0,023% | 225,25 | 3,805% | 0,058% | 70% | 0,09 |
| Valeur de la CVA en EUR | | | | | | | | 99,08 |
| Valeur de la CVA en % du nominal | | | | | | | | 0,0099% |

Tableau 16 : Résultats du calcul de la CVA pour un swap payeur du fixe.

La valeur de la CVA sur ce contrat est 99.08 EUR soit 0.01% du nominal .

Nous pouvons maintenant afficher un abaque de valeurs de CVA dans le cas receveur et payeur de taux fixe pour différentes valeurs du taux fixe .

| Taux fixe | CVA (payeur de taux fixe) | CVA (receveur du taux fixe) |
|-----------|---------------------------|-----------------------------|
| 0,2% | 0,0669% | 0,0000% |
| 0,5% | 0,0474% | 0,0001% |
| 0,7% | 0,0355% | 0,0009% |
| 1,0% | 0,0223% | 0,0070% |
| 2,0% | 0,0035% | 0,0527% |
| 3,0% | 0,0001% | 0,1134% |
| 4,0% | 0,0000% | 0,1777% |
| 5,0% | 0,0000% | 0,2423% |

Tableau 17: Valeurs de la CVA pour différentes valeurs du taux fixe pour un swap payeur/receveur du fixe.

L'illustration graphique de ces résultats, figurant ci-dessous , montre que la valeur de la CVA augmente avec le taux fixe dans le cas d'un swap receveur du taux fixe, et diminue jusqu'à s'annuler dans le cas d'un swap payeur du fixe.

En effet , lorsqu'une entité reçoit le taux fixe , plus ce dernier augmente ,plus son exposition au défaut augmente et le risque de contrepartie qu'elle court devient plus important.

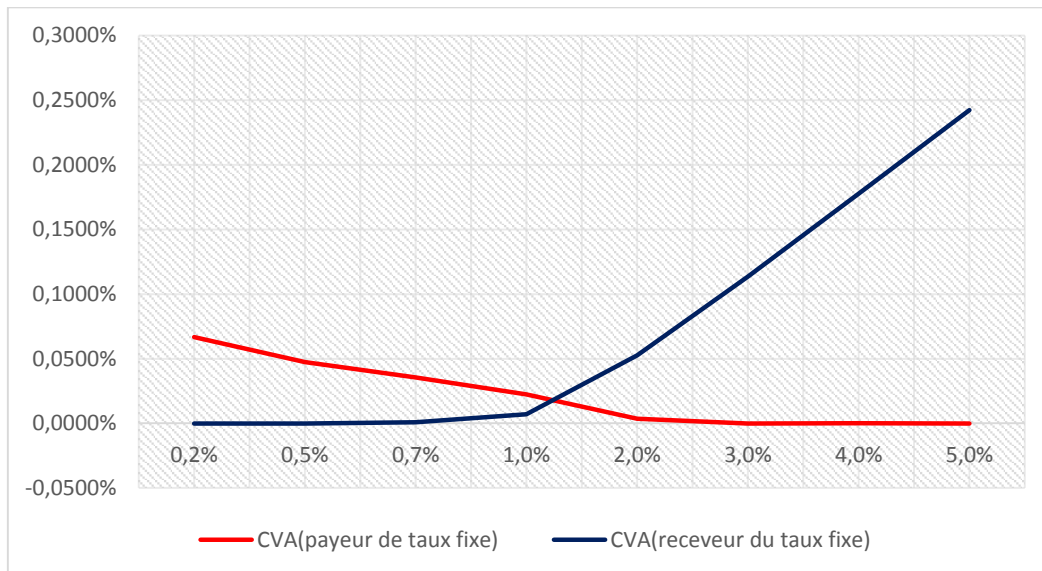


Figure 22 : Valeur de la CVA en fonction du taux fixe selon le type du swap.

IV-3-2-Résultats du calcul de la CVA pour le change à terme :

L'outil implémenté permet de calculer la CVA pour les forwards FX suivant deux méthodes : la première est la méthode des swaptions adaptée au change à terme, et la deuxième est la méthode

de diffusion du taux de change par une simulation DJS qui sert d'estimer la valeur de l'exposition au défaut .

Prenons le contrat d'achat à terme EUR/MAD que nous avons valorisé dans le chapitre III .

| | |
|---------------------------------|---------------|
| Le type du contrat | Achat à terme |
| La date de départ | 29/07/2013 |
| La date d'échéance | 29/11/2014 |
| La date de valorisation | 31/12/2013 |
| La devise de base | EUR |
| La devise secondaire | MAD |
| Le cours à terme initial | 11.57 |
| Le cours de change spot | 11.2305 |
| Montant du notionnel | 5 000 000 EUR |

Ci-dessous l'interface du pricer de CVA pour le change à terme :

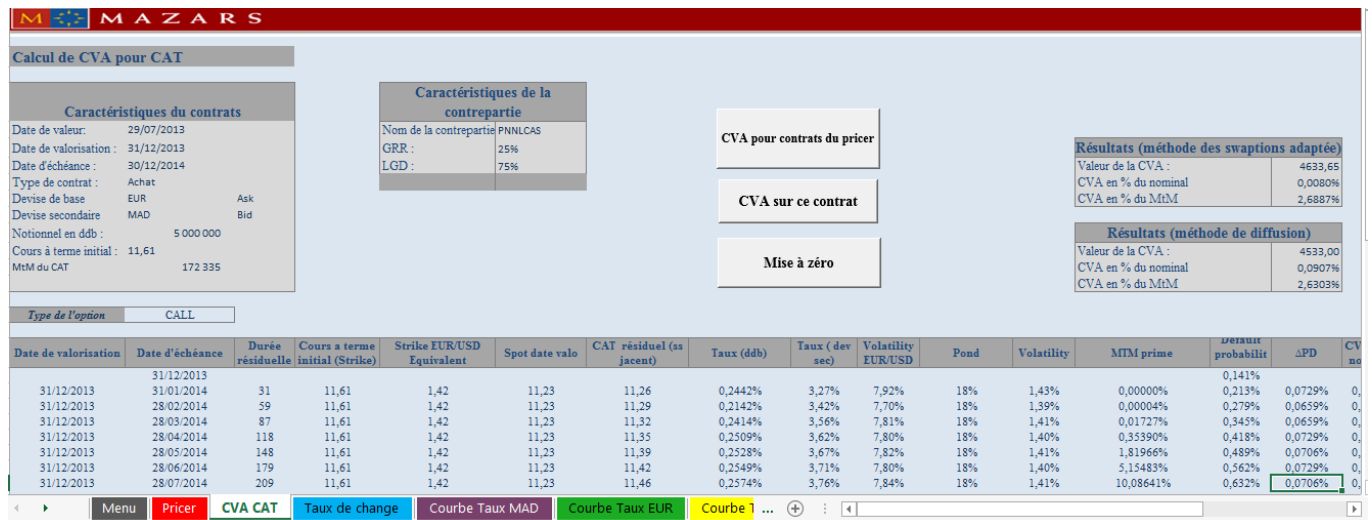


Figure 23 :Interface du pricer de CVA pour change à terme.

Les résultats affichés par notre outil sont synthétisés dans le tableau ci-dessous :

| | <i>Méthode des swaptions adaptée</i> | <i>Méthode de diffusion</i> |
|----------------------------|--------------------------------------|-----------------------------|
| Valeur de la CVA | 4633.65 MAD | 4533.00 MAD |
| CVA en % du nominal | 0.008% | 0.008% |
| CVA en % du MtM | 2.6887% | 2.6303% |

Tableau 18:Tableau récapitulatif des résultats du calcul de la CVA pour change à terme

On remarque que les deux méthodes convergent ,dans la mesure où l'écart relevé n'est pas élevé.

IV-3-3-Résultats du calcul de la CVA pour les options de change:

Dans le dessein de calculer une valeur de la CVA pour les options de change , nous avons opté pour la méthode des sensibilités et la méthode de diffusion moyennant une simulation PDS et DJS.

Le choix de la méthode des sensibilités est motivé par le fait que les sensibilités du Mark-to-market d'une option aux paramètres du marché sont faciles à obtenir et ont une formule ferme moyennant les grecques.

Le choix de la méthode de diffusion repose sur l'hypothèse que le taux de change (le sous-jacent) est le paramètre qui impacte le plus la valeur marché d'une option de change. Donc, en simulant des trajectoires aléatoires du taux FX et en optant pour le scénario moyen, nous nous parviendrons à avoir une estimation de l'exposition au défaut à la maturité et par conséquent, une valeur pour la CVA.

Afin d'illustrer les résultats obtenus pour les deux méthodes, nous allons considérer une option FX EUR/USD de caractéristiques suivantes :

| Caractéristiques du contrat | |
|-----------------------------|------------|
| Date de valeur: | 25/11/2013 |
| Date de valorisation : | 31/12/2013 |
| Date d'échéance : | 20/05/2014 |
| Sens du contrat | P |
| Type de l'option : | CALL |
| Devise de base | EUR |
| Devise secondaire | USD |
| Notionnel en ddb : | 2000000,00 |
| Strike : | 1,3500 |
| Spot date valo | 1,3777 |
| Volatilité | 1,285% |
| Taux domestique: | 0,309% |
| Taux foreign: | 0,252% |

Tableau 19 : Caractéristiques d'une option FX EUR/USD

Ce contrat a été conclu avec une contrepartie dont la LGD et la structure à terme de la probabilité sont présentées comme suit :

| Caractéristiques de la contrepartie | | |
|--|--------------|------------------|
| Nom de la contrepartie : | LOCCAS | |
| GRR : | 25% | |
| LGD : | 75% | |
| Structure à terme des probabilités de défaut | | |
| Maturité | Spread (bps) | Default Prob (%) |
| 31/12/2014 | 75,17 | 1,00 |
| 31/12/2015 | 107,32 | 1,86 |
| 30/12/2016 | 131,26 | 2,40 |
| 31/12/2018 | 153,16 | 2,49 |
| 30/12/2020 | 151,24 | 1,92 |
| 31/12/2023 | 139,78 | 1,41 |
| 31/12/2043 | 128,54 | 1,55 |

Tableau 20 : Caractéristiques De la contrepartie

Les graphes ci-dessous illustrent la simulation de Monte (PDS) et (DJS) de l'exposition au défaut de notre option.

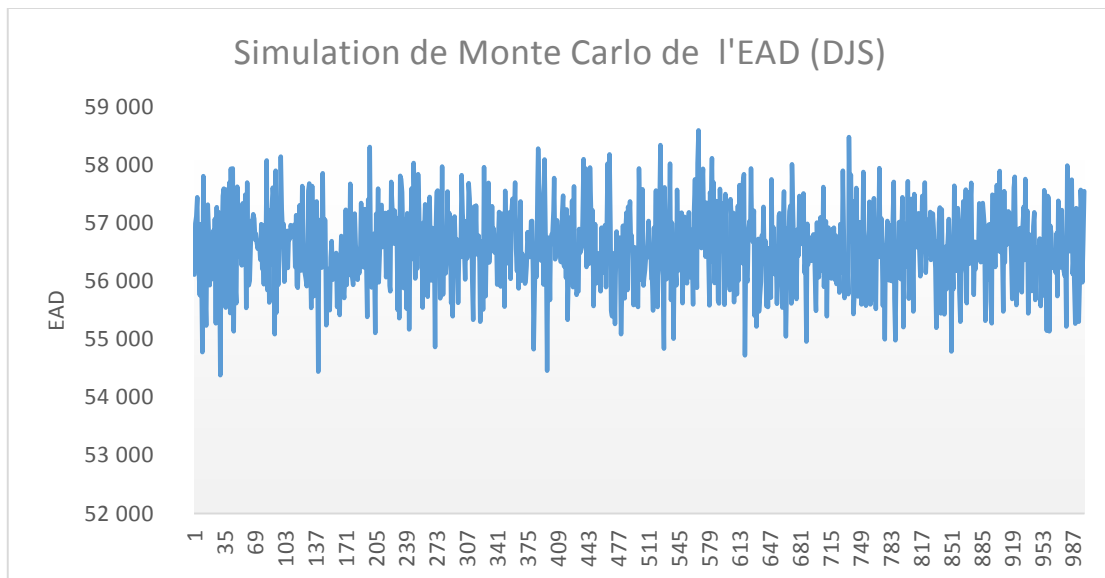


Figure 24 : Simulation (DJS) de l'exposition au défaut.

Le graphique montre que les 1000 scénarios prévus pour la valeur de l'exposition au défaut à la maturité du contrat oscillent autour d'une valeur moyenne de 56 593 USD.

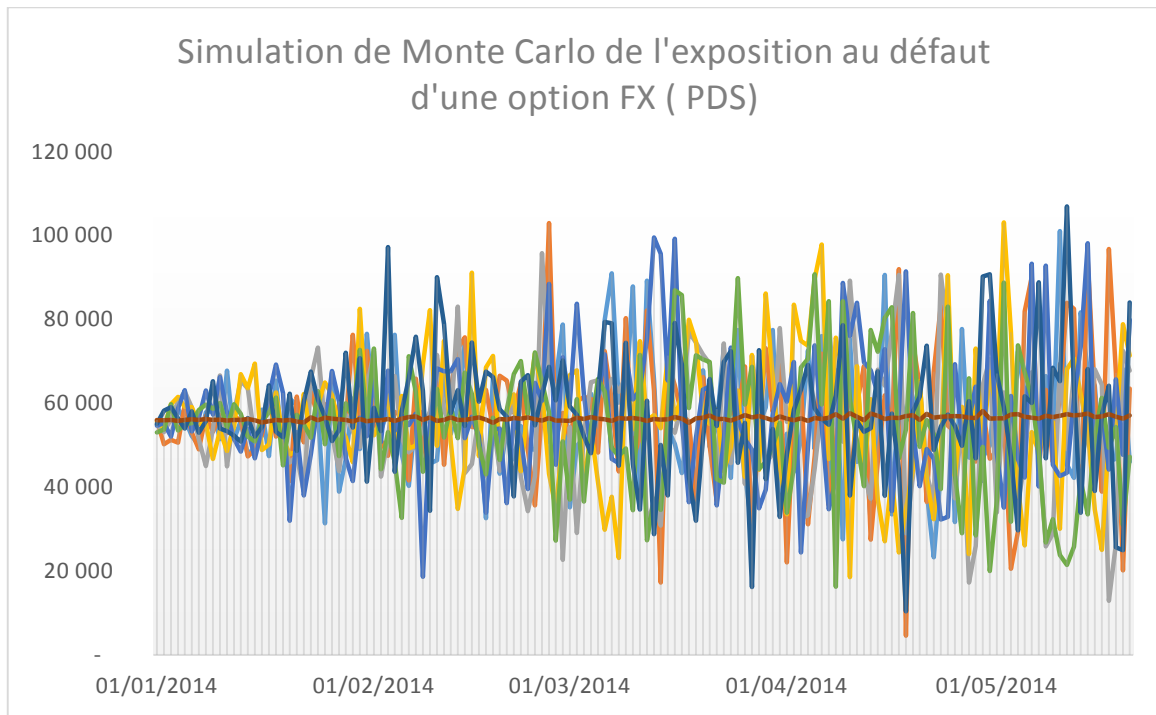


Figure 25 : Différents scénarios de l'évolution de l'exposition au défaut moyennant une simulation PDS.

Le graphique montre que l'exposition au défaut peut suivre des scénarios différents avec une tendance tantôt baissière, tantôt haussière, mais qui convergent vers un scénario moyen (présenté en rouge).

Les résultats du calcul de la CVA par les 2 méthodes et pour les deux types de simulations sont synthétisés dans le tableau suivant :

| | <i>Méthode des sensibilités</i> | <i>Méthode de diffusion PDS</i> | <i>Méthode de diffusion DJS</i> |
|----------------------------|---------------------------------|---------------------------------|---------------------------------|
| <i>Valeur de la CVA</i> | 197.28 USD | 197.75 USD | 201.37 USD |
| <i>CVA en % du nominal</i> | 0.0099% | 0.0099% | 0.010% |
| <i>CVA en % du MtM</i> | 0.3524% | 0.3533% | 0.3597% |

Tableau 21 : Résultats du calcul de la CVA pour option de change

L'écart relevé entre les différentes méthodes est minime, ceci revient principalement au type de produit sur lequel elles ont été appliquées. En effet, les options européennes ne peuvent être exercées qu'à la maturité et ne génèrent pas de flux intermédiaires qui peuvent donner lieu à des écarts considérables entre les différentes valeurs de l'exposition au défaut et donc de la CVA.

La figure.26 présente l'interface de l'outil implémenté sous VBA-Excel pour le calcul de la CVA :



Figure 26 : Interface de l'outil de calcul de la CVA pour options FX

Conclusion

Le travail réalisé au cours de ce stage a porté sur la modélisation du risque de contrepartie lié aux dérivés OTC : une problématique récente qui gagne du terrain sur le marché financier depuis la crise financière de 2008.

Dans l'étude ainsi menée, il a d'abord été question de présenter les nouvelles dispositions réglementaires qui ont permis un renforcement du dispositif de gestion du risque de contrepartie. En effet, ces dispositions sont en adéquation avec les exigences en matière des normes comptables IFRS et des accords de Bâle.

Ensuite, il a été jugé utile d'implémenter sur VBA-Excel un pricer pour des produits dérivés vanilles, à savoir les options de change, le change à terme et les swaps de taux afin de définir la valeur marché de ces dérivés.

L'attention a été accordée par la suite au calcul de l'ajustement de la valeur crédit (CVA) sur les produits financiers cités auparavant. En faisant des hypothèses fortes sur le traitement des données de marché, nous avons pu déterminer une formule fermée de la CVA et définir quelques méthodes déterministes et stochastiques pour son calcul. Ces méthodes s'adaptent non seulement au type du produit mais également aux données de marché qui nous ont été accessibles.

Néanmoins, ce mémoire présente quelques limites par rapport au calcul de la CVA :

La première limite réside dans la spécificité des instruments choisis. En effet, l'ajustement de la valeur crédit concerne également des instruments financiers qui n'ont pas été traités dans le présent rapport comme les produits structurés, les swaps amortissables.....etc.

Une autre perspective de ce travail consisterait à mieux prendre en compte les accords de netting dans le calcul de la CVA. Cet élément est très important pour les institutions financières qui détiennent des portefeuilles de produits multiples avec de très nombreuses contreparties. Un modèle de corrélation entre les temps de défaut des contreparties est aussi envisageable dans le cadre d'une étude plus approfondie pour mieux représenter l'effet de contagion du marché.

Bibliographie

❖ Ouvrages :

- [1] D. Brigo and M. Masetti, *Risk Neutral Pricing of Counterparty Risk*, version 08/11/2005.
- [2] D. Brigo and M. Masetti, *A Formula for Interest Rate Swaps Valuation under Counterparty Risk in presence of Netting Agreements*, version 4/05/05.
- [3] J.Hull, *options, futures and other derivatives*, version 2005.
- [4] D.Lamberton et B.lapeyre, *Introduction au calcul stochastique appliqué à la finance*.

❖ Documents :

- [1] M. Nordine CHOUKAR , *CVA-DVA Tour d'horizon des methodologies de calcul*, juin 2013, [Document électronique] , www.mazars.fr/Accueil/News/Publications/Enquetes-et-Etudes.
- [2] Banque des Réglements et Etudes, *Bâle III – Risque de contrepartie – Questions fréquemment posées* , Novembre 2011. [Document électronique], <http://www.bis.org/publ/bcbs209>.

❖ Mémoires :

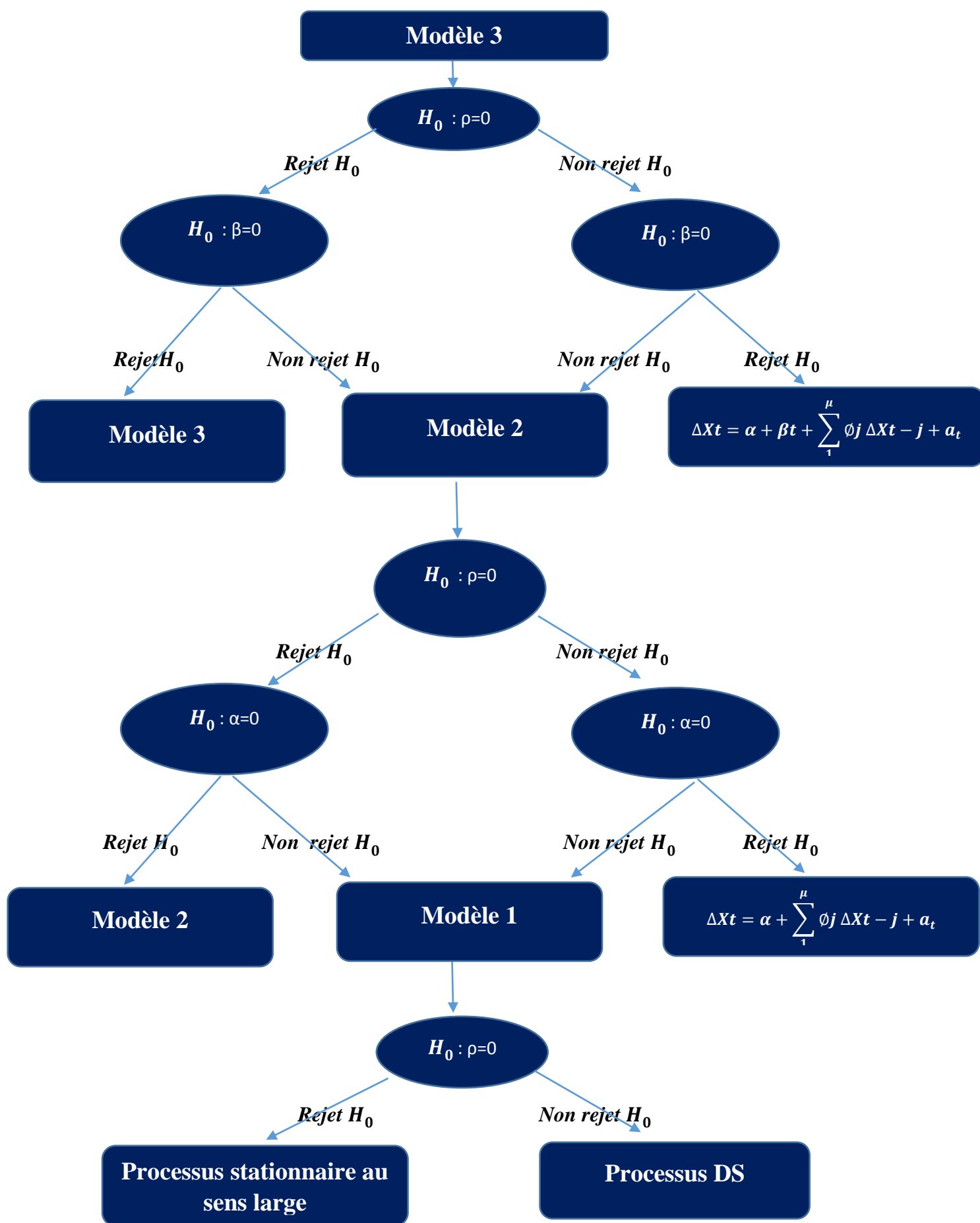
- [1] H.BENKHALDOUN , *Risque de contrepartie et ajustement en valeur de crédit*. Université Paris Dauphine , Master Ingénierie statistique et financière. Septembre 2012 .
- [2] L. NORMAN and G. CHEN , *Modeling CVA for Interest rate swaps in a CIR framework*. University of Gothenberg , School of Business, Economics and Law , 2013.
- [3] B.LANGE, *Méthodes de calcul de la CVA*, Université Paris-Diderot, Master2 Modélisation Aléatoire, Octobre 2012
- [4] Robert A.Korajczyk, *The Pricing of Forward Contracts for Foreign Exchange*. Kellogg Graduate School of Management , Northwestern University , Juin 1984.
- [5] B.LE Grignou, *La surface de volatilité*. Ecole Normale Supérieure, Septembre 2010.

❖ Webographie :

- [1] http://www.fimarkets.com/pages/operations_change.php
- [2] <http://www.strategies-options.com/modele-evaluation.html>
- [3] <http://www.next-finance.net/Mieux-comprendre-les-enjeux-de-CVA>



ANNEXES



Annexe 1 : Schéma du test ADF (Dickey Fuller Augmenté)

| T | 1% | 5% | 10 % |
|-----------------|-------|-------|-------|
| Modèle 1 | | | |
| 100 | -2.60 | -1.95 | 1.61 |
| 250 | -2.58 | 1.95 | -1.62 |
| 500 | -2.58 | -1.95 | -1.62 |
| ∞ | -2.58 | -1.95 | -1.62 |
| Modèle 2 | | | |
| 100 | -3.51 | -2.89 | -2.58 |
| 250 | -3.46 | -2.88 | -2.57 |
| 500 | -3.44 | -2.87 | -2.57 |
| ∞ | -3.43 | -2.86 | -2.57 |
| Modèle 3 | | | |
| 100 | -4.04 | -3.45 | -3.15 |
| 250 | -3.99 | -3.43 | -3.13 |
| 500 | -3.98 | -3.42 | -3.13 |
| ∞ | -3.96 | -3.41 | -3.12 |

Annexe 2 : Valeurs critiques du test de Dickey Fuller pour différents seuils de confiance.

| | | Ténoir (en années) | | | | | | | | | | | | | | |
|-----------------------------|-------|---------------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|------|------|------|
| | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 12 | 15 | 20 | 25 | 30 |
| maturité (en années) | 0,082 | 64,88 | 64,95 | 54,82 | 45,6 | 41 | 34,9 | 31,27 | 27,95 | 26,55 | 24,8 | 23,1 | 20,6 | 18,9 | 18 | 17,7 |
| | 0,247 | 61,38 | 59,93 | 51,9 | 43,58 | 38,67 | 33,3 | 30,07 | 27,6 | 25,75 | 24,1 | 22,48 | 20 | 18,4 | 17,7 | 17,2 |
| | 0,493 | 70,47 | 65,55 | 54,82 | 44,23 | 38,2 | 33,4 | 30,45 | 28,25 | 26,3 | 25,1 | 23,4 | 20,85 | 19,3 | 18,6 | 18,2 |
| | 0,74 | 73,05 | 65,65 | 52,4 | 43,25 | 38 | 33,2 | 30,3 | 28,2 | 26,55 | 25,3 | 23,75 | 21,45 | 19,6 | 18,9 | 18,5 |
| | 1 | 73,7 | 62,3 | 50,8 | 42,3 | 36,5 | 32,7 | 30,02 | 27,95 | 26,5 | 25,2 | 23,65 | 21,35 | 19,7 | 19,2 | 18,7 |
| | 2 | 56,55 | 46,88 | 40,23 | 34,85 | 31,35 | 29 | 27,35 | 25,9 | 24,75 | 23,8 | 22,4 | 20,48 | 19,4 | 18,9 | 18,5 |
| | 3 | 41,9 | 36,63 | 32,45 | 29,6 | 27,57 | 26,2 | 24,9 | 24,03 | 23,2 | 22,5 | 21,2 | 19,45 | 18,8 | 18,3 | 18,1 |
| | 4 | 33,32 | 30,25 | 28,07 | 26,35 | 24,95 | 24 | 23,15 | 22,52 | 21,95 | 21,4 | 20,5 | 19,2 | 18,4 | 18,1 | 17,8 |
| | 5 | 28,73 | 26,8 | 25,55 | 24,4 | 23,4 | 22,7 | 22,07 | 21,57 | 21,18 | 20,8 | 20 | 18,9 | 18 | 17,8 | 17,5 |
| | 6 | 26 | 24,85 | 23,85 | 22,9 | 22,1 | 21,5 | 21 | 20,6 | 20,3 | 20 | 19,3 | 18,25 | 17,5 | 17,3 | 17,1 |
| | 7 | 24 | 23,25 | 22,4 | 21,55 | 20,85 | 20,5 | 20,15 | 19,95 | 19,55 | 19,4 | 18,75 | 17,85 | 17,1 | 16,9 | 16,7 |
| | 8 | 22,95 | 21,9 | 21,2 | 20,7 | 20,2 | 19,9 | 19,55 | 19,3 | 19 | 18,8 | 18,2 | 17,35 | 16,6 | 16,5 | 16,3 |
| | 9 | 21,55 | 20,65 | 20,1 | 19,75 | 19,45 | 19,2 | 18,95 | 18,75 | 18,5 | 18,3 | 17,75 | 16,95 | 16,2 | 16,1 | 16 |
| | 10 | 20,2 | 19,65 | 19,3 | 19,07 | 18,85 | 18,6 | 18,5 | 18,2 | 18,05 | 17,9 | 17,35 | 16,6 | 15,9 | 15,8 | 15,7 |
| | 15 | 17 | 16,57 | 16,5 | 16,45 | 16,35 | 16,3 | 16,2 | 16,15 | 16,05 | 16 | 15,4 | 14,5 | 14,3 | 14,1 | 14 |
| | 20 | 15,2 | 14,93 | 14,95 | 14,95 | 14,8 | 14,8 | 14,75 | 14,75 | 14,7 | 14,7 | 14,13 | 13,3 | 13,2 | 13,1 | 12,9 |
| 25 | 14,25 | 14,35 | 14,5 | 14,68 | 14,8 | 14,8 | 14,75 | 14,72 | 14,68 | 14,5 | 14,18 | 13,7 | 13,7 | 13,6 | 13,5 | |
| 30 | 13,7 | 13,93 | 14,2 | 14,5 | 14,73 | 14,6 | 14,6 | 14,8 | 14,82 | 14,8 | 14,5 | 14 | 14,3 | 14 | 13,8 | |

Annexe 3 : la surface de volatilité des swaps de taux du 31/12/2013 récupérée de Bloomberg.