المندوبية السامية للتخطيط
HAUT-COMMISSARIAT AU PLAN

ROYAUME DU MAROC

--*-*-*

HAUT COMMISSARIAT AU PLAN

--*-*-*-*-*-*

INSTITUT NATIONAL
DE STATISTIQUE ET D'ECONOMIE APPLIQUEE

INSEA

INSEA

Projet de Fin d'Etudes

*****

Pricing des produits de couverture du risque de taux d'intérêt au Maroc

Préparé par : **M. Amine Sadiki**

Sous la direction de : ***M. Abdelaziz Chaoubi*** **(INSEA)**
M. Youssef Ousbane **(CAM)**

Soutenu publiquement comme exigence partielle en vue de l'obtention du

Diplôme d'Ingénieur d'Etat

Option : Actuariat-Finance

Devant le jury composé de :

M. Abdelaziz Chaoubi (INSEA)
Mme Fatima Bakass (INSEA)
M. Youssef Ousbane (CAM)

Juin 2014

Résumé

Ce rapport traite la problématique du *pricing* ou d'évaluation des produits dérivés de taux d'intérêt. Dans un contexte mondial de crise, la couverture des différents risques est devenue primordiale et nécessaire.

Ainsi, le Maroc via l'instauration d'un marché à terme dans un futur proche, envisage de compléter son marché financier, le rendre plus moderne, et ainsi de pouvoir y trouver toutes les gammes de produits. Le marché à terme pourra apporter des solutions aux problèmes rencontrés sur le marché, tel que le problème de liquidité en attirant de nouveaux investisseurs.

C'est de là que vient l'intérêt de ce sujet qui revêt une grande importance pour les acteurs du marché financier, en général, et des salles de marchés, en particulier.

Nous nous intéressons dans ce rapport à la réalisation des *pricers* d'une gamme de produits dérivés de taux d'intérêt. Nous avons, dans un premier lieu, abordé les modèles de taux d'intérêt dans leurs versions déterministes (construction de la courbe des taux, méthode de calibration,…), et dans leurs versions stochastiques (modèle de *Cox-Ingersoll-Ross*, modèle de *Vasicek*). Ensuite, nous avons évalué les options sur zéro-coupon, les *Caps/Floors*, et les swaps suivant les modèles de taux présentés.

Mots Clés

Modèle de taux d'intérêt, courbe des taux zéro-coupon, modèle de *Nelson-Siegel*, modèle de *Svensson*, modèle de *Cox-Ingersoll-Ross*, modèle de *Vasicek*, option sur zéro-coupon, *caps*, *floors*, *swaps* de taux.

Dédicace

Je dédie ce modeste travail à ma mère et mon père :

Pour l'amour et l'affection qu'ils m'ont procurés tout au long de ma vie.

Pour l'éducation qu'ils m'ont prodigué, leur confiance et leur patience.

A mes très chères sœurs Soumaya, Ihsane et Kaoutar.

A mes grandes mères, mon grand-père, mes oncles, mes tantes, mes cousins et cousines.

A toute la famille SADIKI et SOCARNO

A mes amis et à toute la promo de l'INSEA.

Je vous remercie de tout cœur pour chaque bel moment passé ensemble.

Remerciements

Avant de développer le présent rapport, je tiens tout d'abord à remercier toutes les personnes qui ont contribué de près ou de loin au bon déroulement de mon stage, et toutes les personnes qui m'ont formé et accompagné tout au long de cette expérience professionnelle avec beaucoup de patience et de pédagogie, à savoir :

M. CHAOUBI ABDELAZIZ : Directeur adjoint chargé des Affaires Pédagogiques et de la recherche, mon encadrant interne et professeur à l'INSEA pour son soutien et ses conseils pour surmonter les différentes difficultés.

Mme BAKASS FATIMA : Professeur à l'INSEA, d'avoir accepté d'examiner ce travail et de faire partie des membres du jury.

M. OUSBANE YOUSSEF : Directeur de la Direction des Finances de Marchés et mon responsable de stage, pour son encadrement, son temps précieux, ses conseils et son aide concernant les différentes missions et tâches à réaliser.

M. DRISSENEK MOHAMMED KARIM : Trader Change (FOREX) et lauréat de l'INSEA 2011, pour ses interventions et ses remarques précieuses.

M. FAKHREDDINE MOHAMED : Directeur de pôle Marché des Capitaux et l'International, pour son accueil au sein du Crédit Agricole.

Finalement, un grand merci aux enseignants de l'INSEA pour la formation qu'ils m'ont inculquée le long de mon parcours au sein de l'Institut, et à l'ensemble du personnel de la salle des marchés pour leur accueil sympathique et leur coopération professionnelle tout au long de ma période de stage.

Table des matières

Listes des Tableaux et Figures

Introduction

La métamorphose que vit la structure du marché financier marocain via l'instauration, dans un future proche, d'un marché à terme impose la connaissance des différents produits financiers, notamment les dérivés et leur mode de fonctionnement. Le marché à terme constitue la dernière pierre à l'édifice, qu'est le marché financier. C'est une égide qui permet aux agents économiques de se protéger contre les différents risques qu'ils encourent suite à la détention d'un actif financier. En effet, il s'agit des trois catégories de risque de marché, à savoir le risque de cours, le risque de change et le risque de taux d'intérêt.

Le présent rapport s'intéresse au risque de taux d'intérêt, qui représente un risque majeur encouru par l'investisseur via une dévalorisation du patrimoine ou une diminution des revenus, et l'emprunteur à travers la revalorisation du patrimoine ou une augmentation des revenus.

La couverture contre ce risque peut se faire grâce aux produits dérivés de taux d'intérêts. Cependant, pour une bonne utilisation de ces produits, une bonne connaissance du marché, ses composantes, ses intervenants et ses acteurs s'impose. En analysant la courbe de l'encours mondiale des produits dérivés de gré-à-gré (OTC), nous remarquons que les produits de taux d'intérêt prennent position de *leader* sur le marché avec plus de 50% de l'encours mondial et un volume de 650 000 milliards de Dollars, devançant ainsi les produits de change, les valeurs boursières et les matières premières.

Pour le cas du Maroc, le projet de loi relatif à la mise en place d'un marché à terme est dans sa phase finale. Ce projet prévoit la création de deux organismes de marché pour gérer au mieux les opérations. Il s'agit de la Société Gestionnaire du Marché à Terme, qui se chargera de la partie juridiction et réglementation, et la Chambre de Compensation, qui est nécessaire et primordiale au développement d'un marché organisé des produits dérivés. Cette dernière jouera le rôle d'intermédiaire dans les transactions et sera la contrepartie de tous les opérateurs puisque l'objectif est d'éliminer le risque de défaut sur le marché à terme. La Chambre de Compensation est l'organisme qui fait la différence entre un marché organisé et un marché de gré à gré (OTC).

Ainsi, la problématique de *pricing* des produits dérivés relève d'une grande importance, non seulement par l'instauration d'un marché à terme marocain, mais aussi par le développement du marché des produits dérivés de gré à gré. En effet, plusieurs banques marocaines ont commencé à vendre des produits dérivés à leurs clients (option sur action, option de change produits dérivés de taux,…)

Ce rapport présente l'environnement financier marocain dans lequel les banques exercent aujourd'hui leurs activités de marché, et propose une modélisation stochastique des prix des produits dérivés de taux d'intérêt.

Dans la première partie, nous décrivons sommairement le marché financier marocain, ses acteurs et les typologies des transactions. Nous présentons également l'organisme d'accueil « Groupe Crédit Agricole Maroc » et sa salle des marchés.

Dans la seconde partie, nous introduisons les modèles de taux d'intérêt dans leurs versions déterministes et stochastiques. Cette partie est d'une grande importance pour effectuer le *pricing* des produits dérivés de taux d'intérêt.

Finalement, dans la dernière partie nous réalisons des *pricers* d'une gamme de produits dérivés de taux d'intérêt, sous le cadre des modèles de taux d'intérêt présentés dans la seconde partie du rapport.

Partie I
Le Marché Financier Marocain

Dans cette partie, nous présentons le marché financier marocain, ses acteurs et les typologies des transactions. Nous décrivons également l'organisme d'accueil « Groupe Crédit Agricole Maroc » et sa salle des marchés.

I. Le Marché Financier Marocain : Réglementation et Organisation

Le marché financier est une variante et une illustration particulière du phénomène de marché. L'expression est également employée au pluriel : «Les marchés financiers ». Le terme renvoie à une double signification :

- C'est d'abord un lieu où différents types d'acteurs peuvent s'échanger des capitaux au comptant ou à terme, effectuer des transactions sur des actifs financiers et sur des produits dits "dérivés".

- C'est aussi le mécanisme de moins en moins « géographique » et de plus en plus « abstrait », « dématérialisé », « virtuel » par lequel sont agrégées en temps réel et de façon de plus en plus continue les offres des vendeurs et les demandes des clients en vue de déterminer une cotation (un taux ou une valeur)[1].

Le marché financier peut être défini aussi comme étant le lieu où les acheteurs et vendeurs négocient des actifs, tels que les actions, les obligations, les devises et les dérivés. Les marchés financiers sont caractérisés par leur transparence, une réglementation basique et claire, ainsi que les prix des valeurs mobilières qui ne sont déterminés que par les coûts, taxes et par la loi de l'offre et de la demande.

Pour le Maroc, le marché financier a connu plusieurs réformes qui avaient pour but sa modernisation, notamment celle de 1993 qui touchait le marché boursier. Grâce à ces réformes, la bourse des valeurs de Casablanca a pu être classée troisième place financière du continent africain. Cependant, depuis 2008, les indices boursiers marocains ne cessent de s'enfoncer dans le rouge. A priori, les investisseurs ont perdu confiance dans le marché, et ce dernier se trouve donc face à une crise de liquidité.

Face à ces problèmes, le Maroc essaye de rattraper son retard et de trouver des solutions à ces problèmes. Le projet de Casa Finance City et le projet d'instauration d'un marché à terme, étant des initiatives ambitieuses et structurantes, qui peuvent être les clés de la résolution des problèmes du marché financier marocain.

I.1 Les acteurs du marché financier au Maroc[2]

I.1.1 La Bourse des Valeurs de Casablanca

La gestion de la bourse des valeurs de Casablanca est confiée à une société anonyme appelée la Bourse des Valeurs de Casablanca (BVC).

[1] Source : www.wikipedia.com
[2] Les informations figurantes dans cette partie sont principalement tirées des différents circulaires et des rapports d'activités des organismes cités, et aussi du site : http://www.crownconsulting.org/biblio/Les%20Acteurs%20Du%20Marche%20Financier%20Au%20Maroc.pdf

Le capital de la société gestionnaire de la bourse est souscrit dans son intégralité par les sociétés de bourse agréées, il est détenu à tout moment à parts égales par l'ensemble des sociétés de bourse.

Sa mission s'articule autour des points suivants :

• Prononcer l'introduction des valeurs mobilières à la cote de la Bourse des valeurs et leur radiation ;

• Organiser les séances de cotation à travers un système électronique ;

• Veiller à la conformité des opérations effectuées par les Sociétés de Bourse ;

• Porter à la connaissance du Conseil Déontologique des Valeurs Mobilières toute infraction qu'elle aura relevée dans l'exercice de sa mission.

I.1.2 Les sociétés de Bourse

Les sociétés de bourse sont les seules habilitées à exercer directement le métier d'intermédiation et de négociation en bourse. Elles bénéficient d'un monopole de négociation des valeurs mobilières inscrites à la bourse des valeurs.

La création d'une société de bourse est soumise à autorisation du Ministère des Finances. Par ailleurs, avant d'exercer son activité, toute société de bourse doit présenter des garanties suffisantes d'un point de vue organisationnel, technique et financier. Le capital social de la société de bourse doit être d'au moins de 1,5 millions de Dirhams, lorsque son activité concerne l'exécution des opérations de bourse ; il doit être supérieur à 5 millions de dirhams lorsqu'elle assure également la garde des titres et la contrepartie.

Les sociétés de bourse ont pour rôle :

• d'exécuter les opérations de bourse ;

• de placer les titres émis par des personnes morales faisant appel public à l'épargne ;

• d'assurer la garde des titres ;

• d'entreprendre le démarchage de la clientèle (pour l'acquisition des valeurs mobilières) ;

Les transactions effectuées par l'entremise des sociétés de bourse donnent lieu au paiement de commissions par le vendeur et l'acheteur au profit de la société gestionnaire.

I.1.3 Maroclear

Maroclear ou Dépositaire Central est chargé de :

- réaliser tout acte de conservation adapté à la nature et à la forme des titres qui lui sont confiés (action, obligations,…) ;

- administrer les comptes courants de valeurs mobilières ouverts au nom de ses affiliés (banques, émetteurs, sociétés de bourse et OPCVM) ;
- exercer des contrôles sur la tenue de la comptabilité, titres des banques et sociétés de bourse.

I.1.4 Les Banques

Les banques ne bénéficient pas d'un accès direct au marché boursier. Leur intervention dans le domaine des titres est centrée autour de la conservation de valeurs mobilières et de la collecte des ordres des clients pour les acheminer vers les sociétés de bourse.
Il existe environ 9 banques aux Maroc. Nous citerons quelques chiffres sur les 5 premières banques marocaines issus de leurs rapports d'activités de l'année 2012.

- *AttijariWafa BANK*

• Wafa Gestion, filiale dédiée à la gestion d'actifs, a clôturé l'année 2012 avec des actifs sous gestion de 72,3 milliards de Dhs, en progression de 8,7 % par rapport à 2012.

• Wafa Gestion a une part de marché de 30% (position leader).

• Wafa Gestion a lancé Attijari Gold, premier OPCVM au Maroc indexé 100% sur l'or.

• Pour l'activité de conservation des actifs (Custody), une part globale de marché de 35 % en 2012.

• Pourtant, Attijari Intermédiation (Spécialisée dans l'intermédiation boursière) ne semble pas être en bonne santé avec un résultat net qui a reculé de 66.8%.

• WAFA Bourse, filiale spécialisée dans la bourse en ligne, a atteint 35% de part de marché contre 29% un an auparavant.

• Quelques chiffres clés :
  - 1338 MRDS de Dhs de volume de change global.
  - 170 MRDS de Dhs sur le marché obligataire.
  - 126349 contrats matières premières.

• Notons aussi le développement et l'extension du groupe Attijariwafa Bank en Afrique.

• Un total bilan en 2012 de : 368.5 Milliards de Dhs.

• Dépôts de 227 Milliards de Dhs.

• Crédits de 247.6 Milliards de Dhs.

- *Banque Centrale Populaire*

• Un Total Bilan de 271.4 Milliards de Dhs.

• Dépôts de 201.9 Milliards de Dhs.

• Crédits de 184,2 milliards de Dhs, qui revient à 24,1% de part de marché.

• 4ème capitalisation boursière marocaine.

• Le portefeuille de change à terme a enregistré un niveau quasi-stable durant l'année 2012 conjugué à un accroissement du volume des Swaps de change.

• La BCP dispose du réseau bancaire le plus dense et le plus étendu du pays avec un maillage conforme au découpage régional.

• Upline Corporate Finance « UCF » a enregistré une évolution de 38% de son chiffre d'affaires et de 125% de son résultat net par rapport à l'exercice précédent.

• La part de marché réalisée par Upline Securities (Intermédiation boursière) au 31 décembre 2012 est de l'ordre de 16,41%.

• Le positionnement d'Upline Capital Management dans le quatuor de tête de l'industrie de la gestion collective à la 4ème place sur 18 sociétés de gestion, en réduisant sensiblement l'écart par rapport au 3ème et en augmentant de manière prononcée l'écart qui le sépare du 5ème acteur.

• MEDIAFINANCE (intermédiation en Valeurs du trésor, Banque de marché) : Des résultats en vert.

- *BMCE Bank*

• Appartient au Groupe FINANCECOM (RMA Wataniya, RMA Capital, MAGHREBAIL, MAROC FACTORING, etc.).

• Forte expansion en Afrique, et présence en Europe et Asie.

• BMCE Capital Gestion a une part de marché qui oscille autour des 14%.

• Pour BMCE Capital Bourse, sa part de marché s'établissant à 16,6% contre 19,1% une année auparavant (affectée par la baisse des indices boursiers).

• Total Bilan de 231 Milliards de Dhs.

• Dépôts de 145 Milliards de Dhs.

• Crédits de 139 Milliards de Dhs.

• BMCE Capital Markets s'est positionnée au premier rang sur le marché de la dette privée en 2012.

• Pour BMCE Capital Titres, elle dispose d'une part de marché stabilisée aux alentours de 28%.

- *Société Générale Maroc*

• La solidité du résultat a permis de renforcer les fonds propres, qui affichent une croissance de + 8% et permettent d'extérioriser un ratio de solvabilité de 13,8 %.

• Un Total Bilan de 71,2 Milliards de Dhs.

• Dépôts de 50.7 Milliards de Dhs.

• Crédits de 54.8 Milliards de Dhs.

• Activité de la Salle des marchés : l'activité Change et malgré un contexte économique difficile, la Salle des Marchés a pu stabiliser le volume commercial au même niveau que l'année précédente, soit à 77 milliards de Dhs.

• SOGECAPITAL Gestion gère une gamme complète et performante de 25 OPCVM Grand Public et Dédiés pour un total de 11,3 milliards de Dhs d'actifs sous gestion à fin décembre 2012.

• SOGECAPITAL Gestion maintient son rang de 4ème opérateur.

- *Groupe BMCI*

• Un Total Bilan de 64.4 Milliards de Dhs.

• Dépôts de 42.5 Milliards de Dhs.

• Crédits de 50.2 Milliards de Dhs.

• Un résultat net consolidé en baisse de 1.4% par rapport à 2011.

• Le résultat net de BMCI est en hausse de 16 % par rapport à 2012, atteignant -4,11 millions de Dhs, traduisant les efforts de maîtrise des dépenses.

• BMCI Gestion (BMCI Asset Management) le chiffre d'affaires brut progresse de +1,3 % et le résultat net s'élève à 17 MDhs, soit une variation de -8 %.

• BMCI Leasing a un trend baissier (C'est le cas de tout le secteur, à cause de la conjoncture économique), elle dispose d'une part de marché de 7%.

• Inauguration d'un second Trade Center à Tanger (la mission est d'assister les clients pour identifier et mettre en place les solutions les plus adaptées dans le domaine du commerce international).

I.1.5 Les Organismes de Placement Collectif en Valeurs Mobilières (OPCVM)

Pour le petit épargnant qui désire investir en Bourse et qui n'a aucune idée des valeurs à acheter ou à vendre, il lui est conseillé de placer son argent dans ce qu'on appelle un organisme de placement collectif en valeurs mobilières (OPCVM).

Les OPCVM sont créés pour les raisons suivantes :

- Assurer une répartition des risques inhérents aux valeurs mobilières pour une meilleure gestion des portefeuilles, surtout ceux des particuliers qui n'ont pas une connaissance approfondie sur les différents marchés boursiers ;
- Décharger les épargnants des soucis liés à la complexité du suivi des valeurs mobilières ;
- Offrir des produits permettant de bénéficier d'avantages fiscaux.

Les O.P.C.V.M sont composés des:

- Sociétés d'Investissement à Capital Variable (S.I.C.A.V) ;
- Fonds Communs de Placement (F.C.P).

Les OPCVM se répartissent en quatre types :

- les OPCVM actions ;
- les OPCVM obligations ;
- les OPCVM diversifiés ;
- les OPCVM monétaires.

Notons que les OPCVM diversifiés ont pour but, l'acquisition d'un portefeuille, portant sur différents types de valeurs mobilières de manière à diviser le risque.

I.1.6 Le Conseil Déontologique des Valeurs Mobilières

Le Conseil Déontologique des Valeurs Mobilières (CDVM) est un établissement public de surveillance et de contrôle des opérateurs de bourse. Il a pour missions principales de :

- protéger l'épargne investie en valeurs mobilières ou en autres placements suite à un appel public à l'épargne ;
- veiller au respect de la loi par les intermédiaires financiers (sociétés de bourse, banques et OPCVM) ;
- informer les investisseurs par la délivrance d'un visa aux notes d'information qui sont mises à la disposition du public. Ces notes sont publiées lorsqu'il y a un appel public à l'épargne, (introduction en bourse, émission de valeurs mobilières, augmentation de capital...);
- instruire les demandes d'agrément des SICAV et des fonds communs de placement (FCP).

I.1.7 Bank Al Maghrib

La banque centrale du Royaume du Maroc, dénommée « Bank Al-Maghrib » est un établissement public doté de la personnalité morale et de l'autonomie financière. Elle a été créée en 1959 en substitution à l'ancienne « Banque d'Etat du Maroc ».

Missions fondamentales de la Banque :

- Exercer le privilège de l'émission des billets de banque et des pièces de monnaie ayant cours légal sur le territoire du Royaume.
- Mettre en œuvre les instruments de la politique monétaire pour assurer la stabilité des prix.
- Veiller à la stabilité de la monnaie et à sa convertibilité.
- Veiller au bon fonctionnement du marché monétaire et à assurer son contrôle.
- Établir et publier les statistiques sur la monnaie et le crédit.
- Gérer les réserves publiques de change.
- S'assurer du bon fonctionnement du système bancaire et veiller à l'application des dispositions législatives et réglementaires relatives à l'exercice et au contrôle de l'activité des établissements de crédit et organismes assimilés.
- Veiller à la surveillance et à la sécurité des systèmes et moyens de paiement et à la pertinence des normes qui leur sont applicables.

Autres missions de la Banque :

- Assurer le rôle d'agent financier du Trésor.
- Conseiller le Gouvernement dans le domaine financier.
- Représenter le Gouvernement auprès des institutions financières et monétaires internationales créées en vue de promouvoir la coopération dans les domaines monétaire et financier.
- Participer à la négociation des accords financiers internationaux et à leur exécution.

I.1.8 Office des Changes

Créé par le Dahir du 22 Janvier 1958, l'Office des Changes est un établissement public doté de la personnalité civile et de l'autonomie financière. Il est placé sous la tutelle du Ministère chargé des Finances, lequel détermine les modalités générales de sa gestion, de son contrôle et arrête son budget annuel.

L'Office des Changes est chargé de deux missions essentielles :

- Edicter les mesures relatives à la réglementation des changes. Dans le cadre des mesures de libéralisation financière prises par le Maroc et suite à l'adhésion en 1993 aux dispositions de l'article VIII des statuts du Fonds Monétaire International relatives à la convertibilité des opérations courantes, l'Office des Changes a délégué aux banques le pouvoir d'effectuer librement la quasi-totalité des règlements financiers à destination de l'étranger portant sur les opérations d'importation, d'exportation, de transport international, d'assurances et de réassurance, d'assistance technique, de voyages, de scolarité... De par ce processus de libéralisation, l'Office des Changes s'attache à assurer le contrôle a posteriori des opérations déléguées aux banques pour détecter et sanctionner tout transfert irrégulier de fonds à l'étranger et de préserver, par-là, les équilibres extérieurs de l'économie marocaine. L'Office des Changes veille également au suivi des rapatriements des recettes d'exportation de biens et services, et ce, en vue d'assurer la reconstitution des réserves en devises.

- Etablir les statistiques des échanges extérieurs et de la balance des paiements. Plusieurs publications statistiques sont éditées dans ce cadre dont entre autres les indicateurs mensuels des échanges extérieurs, la balance des paiements trimestrielle et annuelle, l'annuaire du commerce extérieur, la balance des règlements, la Position Financière Extérieure Globale du Maroc. Ces statistiques qui revêtent un caractère capital permettent aux autorités monétaires et économiques nationales de disposer des informations nécessaires en vue de piloter la conduite de la politique économique. L'Office des Changes veille à cet égard au respect des normes internationales relatives à la production et à la diffusion des statistiques des échanges extérieurs, notamment, les normes des Nations Unies et du Fonds Monétaire International.

Parallèlement à ses activités de réglementation des opérations de change et de publication des statistiques des échanges extérieurs, l'Office des Changes participe activement à toutes les actions tendant à promouvoir les exportations et le développement de l'économie nationale.

I.1.9 Ministère de l’Economie et des Finances

Dans le cadre de ses attributions, le Ministère des Finances est en charge des questions financières et monétaires. Il représente l’autorité de tutelle supérieure disposant de pouvoirs importants sur les principaux acteurs du marché, notamment le CDVM, la Bourse de Casablanca et Maroclear.

I.2 Typologies des transactions

Les marchés financiers sont à la fois des marchés de gros et de détail. Le plus gros volume des échanges a maintenant lieu via des produits dérivés (*forwards, futures, options, swaps, etc*.) qui sont en forte croissance depuis le début des années 1980. Les transactions ont lieu :

- soit sur des marchés organisés : par exemple la bourse de Casablanca, où les transactions sont effectuées sur des actifs standardisés et où cette dernière s'interpose, comme contrepartie universelle, entre les acheteurs et les vendeurs,
- soit de gré à gré: entre participants ou entre un participant et une contrepartie centrale (par exemple le marché secondaire des obligations).

I.3 Principaux marchés

Le marché des capitaux au Maroc est diversifié. Il peut être subdivisé en trois grandes familles de marché : le marché à opérations à long terme, le marché des produits dérivés et le marché monétaire (opérations à court terme).

Pour le marché à opérations à long terme, où les placements dépassent une année, il s'agit du marché des actions, des obligations privées, des OPCVMs et du marché hypothécaire.

Le marché des produits dérivés, ou le marché à terme, est le marché qui traite les opérations projetées dans le futur, mais en fixant les caractéristiques de l'opération à la date de conclusion du contrat. Il s'agit des produits *swaps*, *options*, *futures* et *warrants.*

Pour le marché monétaire ou marché à opérations à court terme, nous y trouvons le marché interbancaire (où les banques prêtent et empruntent à court terme des actifs financiers), marché du repo (ou pension livrée), marché des TCNs (Titre de créances négociables) et marché de change.

I.3.1 Marché monétaire et obligataire

- *Marché monétaire*

Le marché monétaire correspond au marché des capitaux à court et moyen terme. Nous exposons dans la suite les principales caractéristiques liées à son fonctionnement.

Les autorités de tutelle, représentées par le Ministère des Finances et Bank Al Maghrib constituent le noyau autour duquel s'organisent les organes de consultation et de coordination ainsi que les établissements de crédit. Le Ministère des Finances est chargé au niveau du marché monétaire de la détermination de la politique monétaire à suivre, de la réglementation et du contrôle des établissements de crédits. Bank Al Maghrib a pour mission selon ses statuts de « réguler le cours de circulation monétaire afin de contribuer, en accord avec la politique économique et financière du gouvernement, à l'expansion économique du pays. Elle doit à cet égard assurer la stabilité de la monnaie et sauvegarder son pouvoir d'achat. »

Nous pouvons distinguer entre :

- Marché interbancaire : est le lieu privilégié des interventions de la banque centrale et par conséquent de l'expression de la politique monétaire, et encore c'est le lieu où les banques placent leurs excédents de la monnaie centrale ou couvrent leurs besoin de la monnaie centrale (la liquidité bancaire), donc la banque gère sa trésorerie pour ne pas avoir , au terme d'une journée, un solde débiteur auprès de l'institut d'émission (BAM), par conséquent, doit veiller en permanence à détenir un certain montant en monnaie centrale.
- Marché des titres de créances négociables «TCNs» : au début de la décennie 80, le marché monétaire ne contenait que le compartiment de l'interbancaire, et dans le cadre du mouvement de libéralisation, de décloisonnement, de désintermédiation, et de déréglementation, s'est progressivement élargi à un autre compartiment celui des TCNs,

bien que le trésor marocain eut accès au marché monétaire dès 1983 à travers l'émission de bons du trésor à un mois.
En effet, ce n'est qu'à partir de la moitié de la décennie 90, qu'il est possible de parler de marché des TCNs. La possibilité d'émettre des actifs à court terme a été ouverte successivement :

- Aux banques : certificats de dépôts ;
- Aux entreprises : billets de trésorerie ;
- Au trésor : bons du trésor négociables ;
- Aux institutions financières spécialisées : bons des IFS ;
- Aux sociétés financières : bons des SF;

- *Marché obligataire*

Plus qu'un simple marché de capitaux, le marché obligataire occupe dans les économies développées une position centrale dans la mesure où il est appelé à remplir plusieurs fonctions économiques prépondérantes. En effet, il constitue :

- Un circuit de financement de l'économie nationale ;
- Un instrument organisant la liquidité de l'épargne investie à long terme.

Nous distinguons principalement entre deux catégories d'obligations :

- Certificats de dépôt (CD) : Un certificat de dépôt est un titre de créance négociable, émis par un établissement de crédit pour une durée déterminée, en représentation d'un droit de créance qui porte intérêt. Le montant unitaire minimum est de 100 000 DH. La durée est de 10 jours au moins à 7ans au plus. Le taux est librement déterminé ; il doit cependant être fixé pour une durée de moins d'un an. Les intérêts sont payables annuellement à la date anniversaire du titre quand il est supérieur à un an, ou encore sur la période restant à courir lorsqu'il est inférieur à une année.
  Les certificats de dépôts permettent de placer vos excédents de trésorerie pour des rendements avantageux, sur une durée pouvant aller jusqu'à 7 ans. Les intérêts sont livrés à chaque date d'anniversaire de souscription. A l'échéance, le client recevra le montant nominal du titre placé à l'émission majoré des intérêts y afférents.
- Bons du Trésor Négociables (BTNs) : Les Bons du Trésor sont des titres représentatifs d'une dette à court terme du trésor, donc de l'Etat. Ils sont émis tout au long de l'année, au gré de la demande des épargnants. La durée du BTN varie d'une semaine à 30 ans ; le taux est soit fixe ou bien révisable et le mode d'amortissement est *infine*. Dans le cas d'un bon de trésor dont la durée est supérieure à un an, les intérêts sont livrés à chaque date d'anniversaire de souscription. A l'échéance, le souscripteur reçoit le montant nominal du titre placé à l'émission majoré des intérêts y afférents.

Avantages :

- Absence totale de risque sur l'émetteur.
- Titres facilement négociables et appartenant à un marché d'intervenants étendus.
- Titres disponibles sur plusieurs maturités, variant d'une semaine à 30 ans.

Inconvénients :

- Rémunération inférieure à celle des autres titres de créances négociables.
- Risque lié à la variation des taux en cas de revente avant l'échéance.
- Risque de perte d'opportunités de placement en cas de variation à la hausse des taux d'intérêt sur le marché.

I.3.2 Marché des changes (Forex)

Le marché de change au Maroc est le lieu où s'échangent les monnaies internationales cotées par Bank Al Maghrib. Chaque fois qu'une opération commerciale ou financière est effectuée avec l'étranger, son dénouement se traduit par une conversion de devises par rapport à la monnaie nationale ou inversement sur le marché des changes. Cette conversion se nomme opération de change. Le Marché de Change a démarré au Maroc le 3 Juin 1996. La demande induite par l'activité des entreprises importatrices ou exportatrices y est relayée. C'est un marché de gré à gré, animé principalement par les banques. C'est un marché virtuel (non localisé physiquement) composé de tous les opérateurs économiques et financiers réalisant des opérations de change.

Nous pouvons parler des opérations aux comptants et des opérations à termes.

- Une opération de change au comptant (spot) consiste à acheter ou vendre immédiatement une devise contre une autre, à un prix fixe, avec une date de livraison ou d'échange, intervenant après deux jours ouvrés. La cotation qui est communiquée se base sur le prix du marché, selon la loi de l'offre et de la demande. Par exemple, pour le cas d'un importateur, la banque vend de la devise au comptant contre dirham le jour J (qui est le jour de l'engagement avec le cours déterminé). L'échange se fera à J+2 qui est le jour de la livraison. Concrètement, la banque transmet au client la devise à J+2 par l'intermédiaire de son correspondant en faveur du bénéficiaire indiqué par le client lui-même. Cas d'exportateur : La banque achète au comptant des devises contre dirham le jour J (qui est le jour de l'engagement avec un cours déterminé). L'échange se fera à J+2 qui est le jour de livraison. La banque reçoit donc de la part de son client les devises et livrera la contre-valeur en dirham. Ce type d'opération présente une multitude d'avantages à savoir : souplesse des conditions de fonctionnement, passation d'ordres limites afin d'optimiser le cours recherché, confirmation des opérations en temps réel, dénouement intervenant deux jours ouvrés après la conclusion de l'opération et la présence d'un indicateur direct et dédié. Cependant, l'inconvénient de l'opération de change au comptant, pour l'importateur ou l'exportateur, est le risque de change depuis le moment de la signature du contrat commercial ou du bon de commande jusqu'à livraison.

- Le contrat de change à terme est un engagement pris par deux opérateurs de livrer pour celui qui est vendeur et de recevoir pour celui qui est acheteur une certaine quantité de devises, à un cours fixé d'avance et pour une échéance future déterminée. Le contrat de change à terme protège le client contre le risque de change qui pèse sur ses contrats en devise, jusqu'au moment de leur dénouement financier. Pour le cas d'un importateur, Cas d'un importateur : le client désire acheter à terme une devise contre dirhams car il anticipe une hausse de devise. A l'échéance du contrat à terme, les devises seront livrées au cours négocié préalablement avec la banque, quel que soit le cours de change au comptant. De même, ce type d'opération présente des avantages, tel que : la fixation d'un cours de la date de négociation du contrat à terme jusqu'à sa date d'échéance, garantie d'achat ou de vente à une date donnée et la possibilité de repousser l'échéance.

I.3.3 Marché des actions

Ils sont au nombre de trois. Le Marché Principal cible les grandes entreprises, la consolidation des comptes est nécessaire pour les sociétés disposant de filiales ; le Marché Développement s'adresse aux entreprises de taille moyenne présentant des perspectives d'évolution attractives alors que le Marché Croissance est réservé aux sociétés en forte croissance ayant un projet à financer. Pour pouvoir accéder à ces marchés et lever les fonds nécessaires à leur développement, les entreprises doivent respecter au préalable certaines conditions d'admission. Une fois admises à la cote, les sociétés doivent respecter, à tout moment, en plus de la condition principale (un flottant minimum exprimé en nombre de titres, identique au nombre minimum de titres à émettre mentionné dans le tableau), une condition dite additionnelle : des capitaux propres minimums de 50 MDH pour les sociétés cotées sur le marché principal et un chiffre d'affaires annuel minimum de 50 MDH pour celles cotées sur le marché Développement. Le séjour dans l'un des trois marchés n'est pas figé : une entreprise peut être transférée d'un marché à l'autre. La Bourse de Casablanca procède annuellement au reclassement des sociétés sur la base de ces critères de séjour. Au 31 décembre 2011, 45 sociétés étaient cotées sur le 1er compartiment, 18 sur le 2ème et 13 sur le 3ème.

I.4 L'organisme d'accueil : Groupe Crédit Agricole du Maroc

I.4.1 Historique

- 1961-1967 : Création de la (CNCA) Caisse Nationale de Crédit Agricole :
  - Entrée en fonction de la Caisse Nationale de Crédit Agricole.
  - Implantation des caisses locales sous formes de succursales.

- 1970 -1987: Début de l'activité bancaire:
  - Lancement de la collecte des dépôts et des activités bancaires.
  - Financement de l'agro-industrie en 1979.
  - Réorientation de la CNCA et financement de nouveaux secteurs en 1987 dont la pêche côtière, l'artisanat, le tourisme, le commerce et les services…

- 1988 -1996 : Nouvelles dispositions pour la CNCA :

- Impôt sur les sociétés.
- Dispositions de la nouvelle loi bancaire.
- Mise en place de la salle des marchés en 1996.

- 1997–2001 : Nouveau positionnement stratégique de la CNCA (banque rurale de proximité avec une nouvelle identité visuelle) :
  - Mise en place des directions de réseau décentralisées.
  - Plan d'entreprise Oufok 2003 lancé en 1999 : une nouvelle stratégie visant principalement à mettre à niveau l'institution et à engager les actions de redressement de sa situation financière et ce, dans le cadre d'un positionnement rénové en tant que banque rurale généraliste de proximité, agissant en partenaire actif de toute la filière agricole et de l'ensemble du monde rural.
  - Adoption de la nouvelle réforme institutionnelle du Crédit Agricole par le conseil des ministres en avril 1999.
  - Signature de la convention État-CNCA relative au traitement du surendettement des agriculteurs en 2001.

- 2003-2004 : Extension du réseau du Groupe Crédit Agricole :
  - Acquisition du Réseau BMAO.
  - Acquisition du Réseau BNDE.
- 2004: Changement de statut : La CNCA devient Société Anonyme à Directoire et à Conseil de Surveillance, dénommée « Crédit Agricole du Maroc » régie par la loi relative aux sociétés anonymes ainsi que par la loi relative à l'exercice de l'activité des établissements de crédit et de leur contrôle.

- 2005: Achat du siège de la BNDE et Fusion/absorption de la BMAO.

Aujourd'hui le crédit agricole du Maroc est une société anonyme à directoire et à conseil de surveillance au capital de 2.850.512.800 DH, siège social à Rabat ; dirigée par un conseil de surveillance, avec une organisation ciblée par le marché, un large réseau, des produits diversifiés et une force commerciale spécialisée. Il s'inscrit dans une logique de proximité pour une clientèle hétérogène sans cesse renouvelée.

I.4.2 Missions et objectifs du Crédit Agricole du Maroc

•Acteur majeur dans le développement de l'agriculture et la modernisation du monde rural

Le Crédit Agricole joue, depuis sa création en 1961, un rôle essentiel dans le financement de l'agriculture et dans la consolidation du secteur dans son ensemble. Le Crédit Agricole pérennise ce rôle de promotion du monde rural à travers son développement de Banque Universelle. Par ailleurs, CAP 2008, le nouveau plan d'entreprise du Crédit Agricole du Maroc, se propose d'afficher ses ambitions stratégiques pour lui permettre d'envisager l'avenir avec sérénité et confiance.

•La mission du Crédit Agricole du Maroc est triple :

- Définir une stratégie de déploiement de l'activité de la banque afin de pérenniser et de sécuriser sa croissance.
- Modifier en profondeur la culture de l'entreprise pour ancrer dans le quotidien le réflexe de l'optimisation du rapport rendement / risque.
- Mettre en place des outils de gestion qui souscriront la banque au standard des normes de la place.

- Par ailleurs, le crédit agricole du Maroc a pour objectifs notamment de :

- Faciliter l'accession des agriculteurs à des formes modernes et rentables d'exploitation ;
- Mobiliser l'épargne nationale au profit du développement rural ;
- Développer la bancarisation des agriculteurs et des ruraux par l'offre de services financiers adaptés ;
- Appuyer la création d'entreprises agricoles en améliorant leur accessibilité au crédit ;
- Promouvoir le conseil et l'expertise au profit des exploitations agricoles en vue d'accroître leur production ;
- Valoriser la production agricole par l'intégration agro-industrielle et la commercialisation;

Par ailleurs, le crédit agricole du Maroc a pour objectifs notamment de soutenir l'économie sociale de production et de services relatifs à l'économie rurale.

Il peut être également chargé, par les pouvoirs publics, de toutes missions d'intérêt national ou régional relatif à l'agriculture et au développement rural.

I.4.3 La salle des marchés du Groupe Crédit Agricole du Maroc

Créée en juin 1996, la Salle des Marchés du CREDIT AGRICOLE DU MAROC s'est rapidement imposée comme partenaire privilégié au service des entreprises lui confiant leurs opérations à l'international, en matière de financement et de change. La Salle des Marchés du CAM occupe un rôle de plus en plus prépondérant au sein du concert national des leaders en marchés monétaires, de change et de titres de placement. Celle-ci propose à ses clients une palette exhaustive de produits d'immunisation contre les risques de change et de taux ainsi que des solutions de maximisation du rendement de leurs activités agricoles, industrielles, ou plus généralement commerciales.

Le déploiement quotidien de cette expertise s'accompagne de publications quotidiennes, hebdomadaires et mensuelles, de bulletins de veille retraçant les évolutions macroéconomiques et systémiques pouvant impacter les marchés précités, ainsi le CAM propose à tous les segments de ses clients des prestations à haute valeur ajoutée, innovantes et sur mesure qui répondent aux attentes de cette clientèle.

- **Composition**

  - Desk Trading Change :

Cette entité a pour mission d'accompagner les clients du CAM dans la gestion des risques financiers et dans l'optimisation des leurs marges économiques, industrielles, commerciales ou financières.

  - Desk Analyse & Recherche :

Elle fournit des études de marchés relatives au change, aux matières premières, au taux d'intérêt ainsi que des rétrospectives du marché Actions ; elle apporte également aux clients une aide dans leurs processus de prise de décision. L'analyse & Recherche s'attèle à offrir une recherche de grande qualité, opérationnelle, réactive, évolutive et adaptable aux besoins, et ce, dès l'ouverture des marchés financiers concernés.

  - Desk Trading Taux :

Elle offre des solutions optimales pour gérer la trésorerie des clients, ainsi qu'elle leur propose une gestion rationnelle et adaptée du portefeuille titres tout en garantissant le maximum de rendement et le minimum de risque.

  - Desk Trading Actions :

Intervient pour le compte propre de la banque sur le marché actions national.

Partie II
Modèles de taux d'intérêt

Dans cette partie, nous présentons les modèles de taux d'intérêt dans leurs versions déterministes (construction de la courbe des taux, modèle de Nelson-Siegel et modèle de Svensson) et stochastiques (modèle de Vasicek et modèle de Cox-Ingersoll-Ross).

II. Modèles de taux d'intérêt

II.1 Modèles déterministes de taux d'intérêt

Nous allons nous intéresser dans cette partie à l'étude de quelques modèles de taux d'intérêt en univers déterministe, c'est-à-dire en considérant l'absence du facteur aléatoire dans l'évolution de ce dernier.

Nous considérons des actifs financiers caractérisés par le versement de flux futurs connus avec certitude à la date d'évaluation ***t***. L'actif considéré dans la plupart des cas est l'obligation à taux fixe.

II.1.1 Structure par terme du taux d'intérêt

La théorie économique met en avant un certain nombre de critères permettant de classer les taux d'intérêt. Les critères les plus souvent évoqués sont la durée du prêt correspondant, la liquidité du titre support, le risque de défaillance de l'emprunteur et les clauses de remboursements.

Chacun des facteurs évoqués est explicatif de la dynamique des taux d'intérêt. Toutefois, le critère de durée a été largement privilégié, tout simplement parce qu'il fait référence à ce qui fait « l'essence » du principe de l'intérêt : le temps.

L'étude de l'influence du facteur temps doit être menée sur la base de taux d'intérêt uniquement différenciés par la durée du titre support. L'actif idéal est un bon sans coupon, sans risque de défaut, et à valeur faciale normée à l'unité, c'est-à-dire un titre conférant à son détenteur le droit de recevoir une unité monétaire au moment de son échéance. Ordonnant alors les taux d'intérêt portés par ces titres en fonction de leur échéance, nous obtenons une structure par terme des taux d'intérêt.

L'actif idéal n'existe pas en réalité. La structure des taux doit donc être estimée à partir des prix de marché des actifs réellement disponibles, et, en particulier, des actifs obligataires. Dans notre cas, nous allons nous baser sur les taux de référence des Bons de Trésor publiés par Bank al Maghrib.

II.1.1.1 Obligations zéro-coupon

Une obligation est un titre de dette, émis par une société ou par l'Etat (Bons de trésor), avec les caractéristiques suivantes :

- Montant emprunté (nominal)
- Taux d'intérêt (taux nominal)
- Echéance (ou maturité)
- Prix d'émission (qui peut différer du nominal)
- Valeur de remboursement (qui peut différer du nominal aussi)
- Modalités de paiement des intérêts (coupons) : une fois par an, in fine,…

- Modalités de remboursement du capital : amortissement constant, annuités constantes, in fine,…

Par contre une obligation zéro-coupon est une obligation qui ne verse qu'un seul cash-flow, à l'échéance (la valeur de remboursement). Aucun coupon n'est versé pendant sa durée de vie.

Notons *P(t,T)* le prix en t d'un zéro-coupon de maturité *T*, avec $T \geq t$. Nous définissons le taux zéro-coupon correspondant *R(t,T)* comme étant le taux annuel de rentabilité interne d'un zéro-coupon commençant en t et de maturité *T*.

En temps continu, nous avons la relation qui lie le prix *P(t,T)* au taux *R(t,T)* :

$$\boldsymbol{P(t,T) = e^{-T*R(t,T)}}$$

Qui revient à :

$$\boldsymbol{R(t,T) = -\frac{ln(P(t,T))}{T}}$$

En temps discret, la relation devient :

$$\boldsymbol{P(t,T) = \frac{1}{\big(1 + R(t,T)\big)^{T}}}$$

Et :

$$\boldsymbol{R(t,T) = \left(\frac{1}{P(t,T)}\right)^{-T} - 1}$$

Le taux court s'obtient en tendant la maturité *T* vers *0*. Le taux court est le rendement d'un placement sur un horizon infinitésimal, c'est-à-dire entre *t* et *t+dt*. Notons ce taux par r_t , nous avons :

$$\boldsymbol{r_t = \lim_{T \to 0} R(t,T)}$$

Qui revient à :

$$\boldsymbol{r_t = -\frac{\partial ln(P(t,T))}{\partial T} |(T = t)}$$

Par contre, le taux *forward* (ou le taux à terme) que nous notons *F(t,s,T-s)*, calculé en *t*, commençant en *s*, et de maturité *T-s*, est le taux d'un prêt in fine consenti aujourd'hui et différé à la date *s*. Ce taux est calculé à partir de la formule suivante :

$$\boldsymbol{F(t,s,T-s) = \left(\frac{(1 + R(t,T)^{T-t}}{(1 + R(t,s)^{s-t}}\right)^{\frac{1}{T-s}} - 1}$$

Le taux *forward* instantané (taux court à terme), noté *f(t,s)* , déterminé en *t* et commençant en *s* sur un horizon infinitésimal *s+ds* est défini comme étant la limite de *F(t,s,T-s)* quand *T-s* tend vers 0, nous avons :

$$\boldsymbol{f(t,s) = \lim_{T-s \to 0} F(t,s,T-s)}$$

Qui revient à :

$$\boldsymbol{f(t,s) = -\frac{\partial ln(P(t,s))}{\partial s}}$$

Nous pouvons définir pour chaque taux d'intérêt défini ci-dessus, une courbe des taux équivalente. En effet, la structure par terme des taux d'intérêt est la fonction qui à chaque maturité fait correspondre un unique taux d'intérêt. Ce taux peut être le taux zéro-coupon, le taux *forward* ou carrément le taux *forward* instantané. Ajoutons aussi, que les différentes courbes sont équivalentes et se déduisent aisément les unes des autres.

II.1.1.2 Interpolation linéaire et méthode du Bootstrap

Pour la construction de la courbe des taux zéro-coupon, il est nécessaire de passer par une des méthodes d'interpolation (linéaire, cubique,…) et la méthode du *Bootstrap*. En effet, les données dont nous disposons portent sur des obligations couponnées (mis à part les instruments négociés sur le court terme) et ne couvrent pas toutes les échéances désirées.

- **Interpolation linéaire :** Nous connaissons les taux zéro-coupon de maturité T_1 et T_2, et nous voulons calculer le taux pour une maturité T tel que $T_1 < T < T_2$. Nous interpolons le taux de maturité T en utilisant la formule suivante :

$$\boldsymbol{R(t,T) = \frac{(T_2 - T)R(t,T_1) + (T - T_1)R(t,T_2)}{T_2 - T_1}} \qquad \boldsymbol{(2.1)}$$

  Avec $\boldsymbol{R(t,T)}$ le taux zéro-coupon à la date de calcul $\boldsymbol{t}$ pour une maturité $\boldsymbol{T}$.

- **Méthode du *Bootstrap* :** Afin de pallier au problème posé par les obligations couponnées, c'est-à-dire le passage des taux de rendements proposés par ces obligations (instruments côtés) aux taux zéro-coupon, la méthode utilisée s'appelle *bootstrap*. Cette méthode est basée sur l'hypothèse, que le prix théorique d'une obligation soit la somme de ses flux actualisés aux taux zéro-coupon de l'échéance de chaque flux.

  Exemple :
  Prenons une obligation de durée de vie 4 ans, avec un coupon annuel de 3.5%, ainsi que les taux zéro-coupon ci-dessous :

Tableau 1 Exemple des flux générés par une obligation

Échéance	Flux de l'obligation	Taux ZC de la maturité	VA du flux de l'obligation
1	3,5	2,19%	3,424992661
2	3,5	2,68%	3,319680783
3	3,5	3,20%	3,184409805
4	103,5	3,47%	90,29891946

Le prix théorique de cette obligation est la somme de la valeur actuelle de ses flux. C'est-à-dire :

$$\boldsymbol{P = 3,424992661 + 3,319680783 + 3,184409805 + 90,29891946}$$

=> $\boldsymbol{P = 100{,}2280027}$

Pour la construction de la courbe des taux en utilisant la méthode du *bootstrap*, prenons les obligations suivantes :

Tableau 2 Exemple des obligations pour la construction de la courbe des taux

Maturité (années)	Coupon annuel	Prix de l'obligation (Négocié)
0,5	0%	99,4
1	0%	97,85
2	3,50%	101,4
3	4%	102,5

Les deux premiers titres (deux premières lignes) sont déjà des obligations zéro-coupons puisqu'ils ne génèrent pas de flux intermédiaires entre la date d'acquisition du titre et la maturité.

Donc pour ces deux titres, il est assez facile de calculer le taux zéro-coupon. En effet, nous avons :

$$\boldsymbol{r_{6m} = \left(\frac{100}{99.4} - 1\right) * \frac{12}{6} = 1,20724\%}$$

$$\boldsymbol{r_{1an} = \left(\frac{100}{97.85} - 1\right) * \frac{12}{12} = 2,19724\%}$$

Cependant, pour les maturités supérieures à 1 an, la formule de calcul des taux zéro-coupon diffère de celle utilisée précédemment. Nous utiliserons le principe de base du *bootstrap* qui affirme que l'obligation peut être considérée comme la somme de zéro-coupon. Son prix (théorique) est donc, par conséquent, équivalent à la somme des valeurs actuelles de ces zéro-coupons.

Pour l'obligation à maturité 2 ans :

$$P = \frac{C}{1 + r_{1an}} + \frac{C + N}{(1 + r_{2ans})^2}$$

$$=> \; r_{2ans} = \left(\frac{C + N}{P - \frac{C}{(1 + r_{1an})}} \right)^{1/2} - 1$$

Avec :

- **P** : prix de l'obligation
- **C** : coupon de l'obligation (Il s'obtient en multipliant le taux de coupon par le nominal)
- **N** : nominal de l'obligation

Nous avons déjà calculé le taux zéro-coupon pour une maturité d'une année, donc :

$$r_{2ans} = \left(\frac{103.5}{101.4 - \frac{3.5}{(1 + 2,19724\%)}} \right)^{1/2} - 1 = 2,78080\%$$

De même, nous utilisons le taux zéro-coupon de maturité 1 an et 2 ans (r_{1an} et r_{2ans}) pour le calcul du taux zéro-coupon de maturité 3 ans, et la formule suivante :

$$r_{3ans} = \left(\frac{C + N}{P - \frac{C}{(1 + r_{1an})} - \frac{C}{(1 + r_{2ans})^2}} \right)^{1/3} - 1$$

$$=> \; r_{3ans} = \left(\frac{104}{102,5 - \frac{4}{(1 + 2,19724\%)} - \frac{4}{(1 + 2,78080\%)^2}} \right)^{1/3} - 1 = 3,13571\%$$

Ainsi, via la méthode du *bootstrap*, nous pouvons obtenir les taux zéro-coupon à partir des taux in-fine, en utilisant la formule récursive utilisée ci-dessus.

- **<u>Application : Construction de la courbe des taux marocaine</u>**

Pour la construction de la courbe des taux marocaine, nous nous sommes basés sur les publications journalières de la banque centrale marocaine des taux de référence journalière du marché secondaire des bons de trésor. Le tableau ci-dessous présente les données publiées le **19/03/2014** :

Tableau 3 Taux de référence du marché des BDTs au 19/03/2014(Source : www.bkam.ma)

Echéance	Transactions	Taux moyen pondéré	Date de valeur
05/04/2014	209.99	3,225%	14/03/2014
14/06/2014	83.25	3,220%	18/03/2014
28/06/2014	71.93	3,250%	17/03/2014
07/07/2014	2 019.06	3,256%	17/03/2014
14/07/2014	710.84	3,262%	17/03/2014
02/08/2014	24.88	3,260%	17/03/2014
15/12/2014	30.45	3,330%	19/03/2014
03/11/2015	273.66	3,614%	19/03/2014
14/03/2016	247.60	3,715%	14/03/2014
18/04/2016	280.74	3,747%	14/03/2014
19/11/2018	806.10	4,230%	19/03/2014
17/06/2024	52.05	5,110%	17/03/2014
19/04/2027	159.78	5,430%	19/03/2014
03/05/2030	45.58	5,255%	20/06/2013
04/12/2036	43.57	4,735%	09/12/2013
Total	5059.48		

Les étapes suivies pour l'obtention de la structure par terme des taux d'intérêts, sont :

1) Calcul des maturités en jours des titres négociés sur le marché secondaire, en utilisant le tableau 3 (**Maturité = Echéance – Date de valeur**), et de les ordonner par ordre croissant.

2) Calcul du Taux moyen pondéré pour les maturités « standards » : 13 semaines, 26 semaines, 52 semaines, 2 ans, 5 ans, 10 ans, 15 ans, 20 ans. Le calcul se fait en utilisant la formule d'interpolation linéaire expliquée quelques pages auparavant.
Par exemple, pour le calcul du TMP pour une maturité de 26 semaines, c'est-à-dire de 182 jours, nous cherchons les deux premiers titres qui ont une maturité supérieure et inférieure à 182 jours. Il s'agit dans notre exemple des titres ayant comme échéance le 02/08/2014 (maturité=138 jours) et le 15/12/2014 (maturité= 271 jours). Et nous appliquons la formule d'interpolation :

$$\boldsymbol{R(t,T) = \frac{(T_2 - T)R(t,T_1) + (T - T_1)R(t,T_2)}{T_2 - T_1} \quad avec \ T_1 < T < T_2}$$

$$=> \quad \boldsymbol{R(26_{sem}) = \frac{(271 - 182) * 3.26\% + (182 - 138) * 3.33\%}{271 - 138}}$$

$$=> \quad \boldsymbol{R(26_{sem}) = 3,2832\%}$$

Nous retrouvons le tableau ci-dessous :

Tableau 4 Le TMP pour des maturités standards après interpolation

Maturité	Maturité en Jours	TMP (Interpolé)
13 sem.	91	3,2260%
26 sem.	182	3,2832%
52 sem.	364	3,4118%
2 ans	730	3,7141%
5 ans	1825	4,2814%
10 ans	3650	5,0690%
15 ans	5475	5,3419%
20 ans	7300	4,9900%

3) Calcul du *taux in fine* (ou *TMP)* par interpolation linéaire pour des maturités différentes des maturités standards (1 semaine, 1 mois, 2 mois, 4 mois, etc.). Une fois calculé, nous effectuons la conversion des *taux in fine* en *taux zéro-coupon* via la méthode du *bootstrap*. Cependant, cette conversion ne concerne que les titres ayant une maturité supérieure à 1 an. Pour les titres ayant une maturité inférieure à 1an, la conversion des *taux in fine* en taux *zéro-coupon* se fait via la formule de conversion du taux monétaire en taux actuariel, et qui est :

$$\boldsymbol{t_a = \left(1 + \frac{t_m * n}{360}\right)^{1/f} - 1} \qquad (\mathbf{2.2})$$

Avec : **tm** : le taux monétaire,
ta : le taux actuariel,
n : le nombre de jours du placement,
f : la fraction d'année du placement (base exact/exact).

Le code sous ***VBA*** de la fonction récursive qui calcule les taux zéro-coupon par la méthode du *bootstrap* est fourni en annexe (**Voir Annexe A**).
La fonction $Rzc(Tx, Ca, n)$ a comme argument trois 3 variables.

- La variable d'entrée Tx est le taux du coupon qui est fixe.
- Ca est le nominal de l'obligation (généralement nous considérons, pour des raisons d'optimisation du temps de calcul, $Ca = 1$).
- n est la maturité du zéro-coupon pour lequel nous voulons calculer le taux.

Par exemple, pour le calcul du taux zéro-coupon d'une obligation de maturité 5 ans, sachant que son taux *in-fine* est de 4,2814%, il suffit de faire appel à la fonction $Rzc(0.042814\,;1\,;5)$.

Nous obtenons les résultats suivants :

Tableau 5 Les taux zéro-coupon pour les différents titres en fonction de leur maturité

Tenor	In Fine	ZC	Maturité	Date
MADBDT-ON	**3,02%**	0,031060358	1	15/03/2014
MADBDT-01W	0,030309333	0,031198012	7	22/03/2014
MADBDT-01M	0,030866667	0,031747383	31	15/04/2014
MADBDT-02M	0,031563333	0,032431232	61	15/05/2014
MADBDT-13W	**3,23%**	0,033111803	91	14/06/2014
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
MADBDT-15Y	**5,34%**	0,053486941	5479	15/03/2029
MADBDT-16Y	0,052715316	0,052776076	5844	15/03/2030
MADBDT-17Y	0,052011963	0,052066157	6209	15/03/2031
MADBDT-18Y	0,051306683	0,051355094	6575	15/03/2032
MADBDT-19Y	0,05060333	0,05064663	6940	15/03/2033
MADBDT-20Y	**4,99%**	0,049938731	7305	15/03/2034

- Les taux in-fine en rouge, sont les TMP des maturités standards (13 semaines, 52 semaines, 5ans,…). Pour calculer les taux *in-fine* des autres maturités du tableau, nous utilisons la formule d'interpolation linéaire (2.1).
- Pour le calcul du taux zéro-coupon de maturité inférieure à une année (**MADBDT-ON** à **MADBDT-01Y**), nous utilisons la formule (2.2) de conversion du taux monétaire en taux actuariel (le taux monétaire est le taux *in-fine*).
- Pour le calcul du taux zéro-coupon de maturité supérieure à une année (**MABDT-01Y** à **MABDT-20Y**) à partir des taux *in-fine*, nous utilisons la fonction $Rzc(Tx, Ca, n)$programmée sous **VBA.**

Nous pouvons à présent tracer la courbe des taux zéro-coupon, qui attribue à chaque maturité son taux zéro-coupon équivalent :

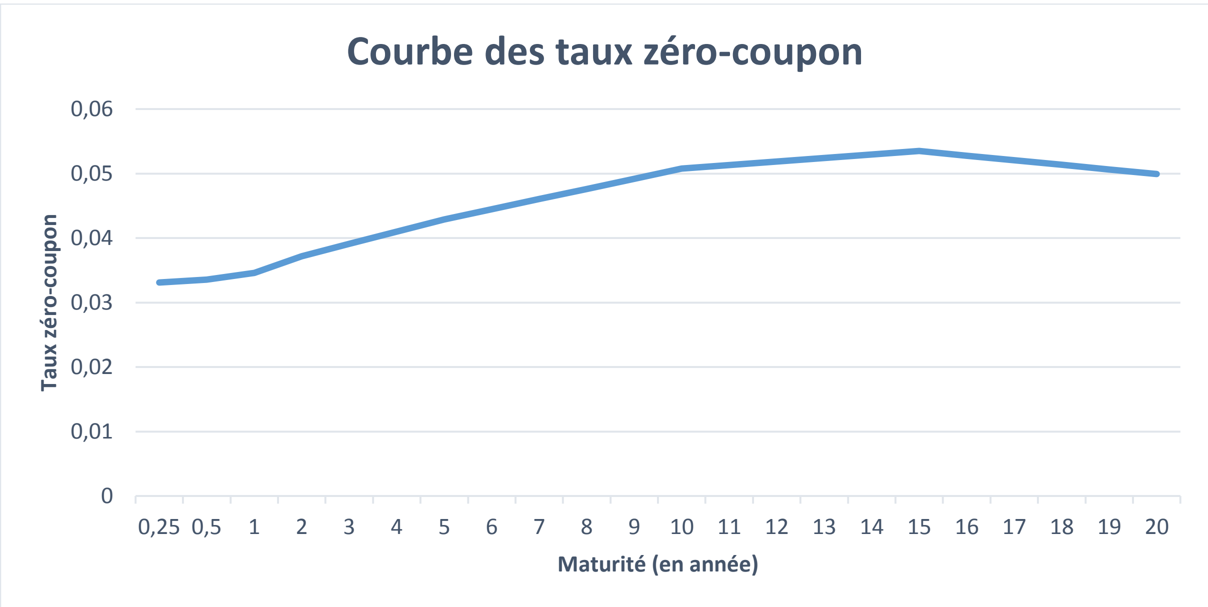


Figure 1 Courbe des taux marocaine au 19/03/2014

Derrière toute courbe des taux d'un pays, existe un ensemble d'interprétation économique du pays en question. En principe, la courbe des taux est croissante, puisque les obligations à longues durées doivent fournir un taux de rendement plus élevé que les obligations qui ont une maturité plus courte. En effet, les investisseurs ont toujours une préférence pour le court terme, car la vision du futur est assez claire. Et donc, pour qu'un investisseur s'engage à placer son argent à long terme avec un taux défini aujourd'hui, il demandera une rémunération plus élevée qu'à celle d'un placement à courte durée.

Cependant, la courbe des taux n'est pas toujours croissante. D'ailleurs, c'est le cas de la courbe des taux marocaine tracée au **19/03/2014.** Nous remarquons, en effet, un point de changement de tendance à la maturité 15 ans. Ce phénomène est constaté quand les investisseurs, en analysant le marché, prévoient un ralentissement économique, et donc, une baisse des taux obligataires.

II.1.2 Modèle de Nelson-Siegel

La reconstitution de la courbe des taux est une opération nécessaire car il n'existe pas assez d'obligations zéro-coupon cotées sur le marché. Nous ne pouvons pas obtenir les taux zéro-coupon pour un continuum de maturité. Il faut donc interpoler les points pour obtenir une courbe continue.

Par la suite, cette courbe des taux zéro-coupon devra être extrapolée afin de pouvoir obtenir des taux pour des maturités postérieures à celles observées aujourd'hui sur le marché financier.

Le modèle de Nelson-Siegel constitue une des différentes méthodes de reconstitution de la courbe des taux. Il propose l'utilisation de la fonctionnelle suivante pour la modélisation des taux zéro-coupon au temps (maturité) T :

$$\boldsymbol{R^{NS}(t,T) = \beta_{1,t} * h_{1,t}(T) + \beta_{2,t} * h_{2,t}(T) + \beta_{3,t} * h_{3,t}(T)}$$

Avec

$$\boldsymbol{h_{1,t}(T) = 1,} \qquad \boldsymbol{h_{2,t}(T) = \frac{1 - e^{\frac{-T}{\theta}}}{\frac{T}{\theta}},} \quad \boldsymbol{h_{3,t}(T) = \frac{1 - e^{\frac{-T}{\theta}}}{\frac{T}{\theta}} - e^{\frac{-T}{\theta}}}$$

et

$\boldsymbol{\beta_{1,t}}$: Facteur de niveau correspondant au taux long.

$\boldsymbol{\beta_{2,t}}$: Facteur de rotation correspondant à l'écart entre le taux court et le taux long.

$\boldsymbol{\beta_{3,t}}$: Facteur de courbure.

$\boldsymbol{\theta}$: Paramètre d'échelle (fixe dans le temps).

Le nombre de paramètres à estimer est de 4. La fonctionnelle est une combinaison linéaire de trois fonctions dont les coefficients sont obtenus par minimisation de l'écart quadratique entre les prix obtenus à partir de celle-ci et les prix de marché.

La méthode de *Nelson-Siegel* permet d'obtenir les quatre formes de courbe classiques, à savoir : ascendante, descendante, plate et inversée.

Nous nous sommes basés pour l'estimation des paramètres sur les données du *tableau 5*, c'est-à-dire sur la courbe des taux zéro-coupon au **19/03/2014**. Pour estimer les paramètres sous le logiciel **R**, nous avions besoin du package *YieldCurve*[3]. Le code utilisé pour l'implémentation du modèle de *Nelson-Siegel* sous **R** est donné en **annexe B**.

Nous retrouvons via ce code les paramètres $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ et θ $(1/lambda)$:

$$\begin{cases} \widehat{\boldsymbol{\beta_1}} = \mathbf{0,01932446} \\ \widehat{\boldsymbol{\beta_2}} = \mathbf{0,01174901} \\ \widehat{\boldsymbol{\beta_3}} = \mathbf{0,09016941} \\ \widehat{\mathbf{1/\boldsymbol{\theta}}} = \mathbf{0,09079789} \end{cases}$$

Une fois les paramètres estimés, nous recalculons via le modèle de Nelson-Siegel les taux d'intérêts pour les différentes maturités possibles. Nous obtenons la courbe en rouge :

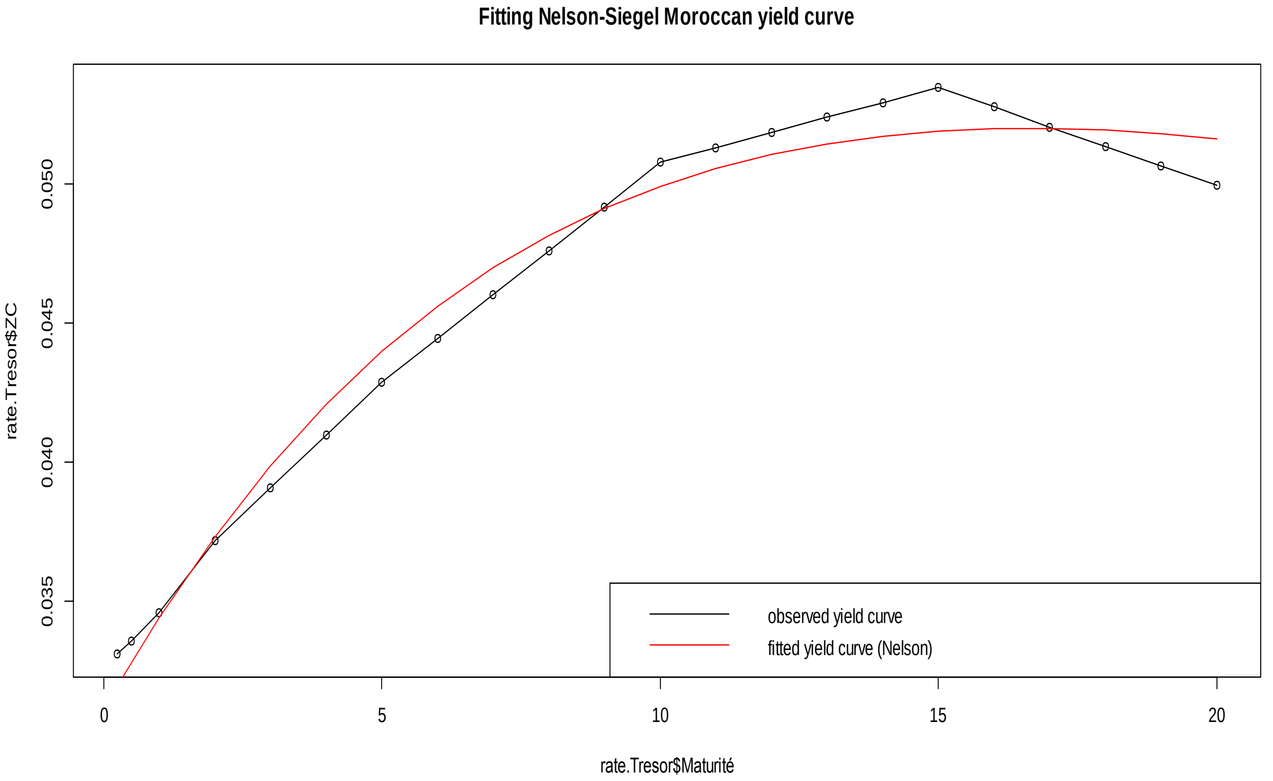


Figure 2 Construction de la courbe des taux marocaine sous le modèle de Nelson-Siegel

[3] Pour plus d'information : http://cran.r-project.org/web/packages/YieldCurve/YieldCurve.pdf

Malgré que l'ajustement de la courbe des taux marocaine via le modèle de *Nelson-Siegel* soit « assez bon », sauf que ce dernier est le modèle le moins flexible, il ne permet pas de représenter toutes les courbes observées sur le marché, notamment celles avec une bosse et un creux.

Pour ce qui est des paramètres estimés, $\beta_1$est le taux long, c'est-à-dire quand la maturité T tend vers $+\infty$ le taux zéro-coupon $R^{NS}(t,T)$ tend vers β_1. Quand $T = 0$, le taux zéro-coupon tend vers $\beta_1 + \beta_2$. L'interprétation ici du taux $R^{NS}(t,0)$ peut être assimilée au taux court au comptant. Il s'agit du taux de placement sur le marché monétaire entre une t et t+dt.

II.1.3 Modèle de Svensson

Le modèle de *Svensson* est une extension du modèle de *Nelson-Siegel* qui permet de donner plus de flexibilité à la courbe. La fonctionnelle utilisée dans ce modèle est la suivante :

$$\boldsymbol{R^S(t,T) = \beta_{1,t} * h_{1,t}(T) + \beta_{2,t} * h_{2,t}(T) + \beta_{3,t} * h_{3,t}(T) + \beta_{4,t} * h_{4,t}(T)}$$

Avec

$$\boldsymbol{h_{1,t}(T) = 1, \qquad h_{2,t}(T) = \frac{1 - e^{\frac{-T}{\theta_1}}}{\frac{T}{\theta_1}}, \quad h_{3,t}(T) = \frac{1 - e^{\frac{-T}{\theta_1}}}{\frac{T}{\theta_1}} - e^{\frac{-T}{\theta_1}},}$$

$$\boldsymbol{et \quad h_{4,t}(T) = \frac{1 - e^{\frac{-T}{\theta_2}}}{\frac{T}{\theta_2}} - e^{\frac{-T}{\theta_2}}}$$

$\boldsymbol{\beta_4\ et\ \theta_2}$: Paramètres supplémentaires qui ont une influence sur la partie courte de la courbe.

Le nombre de paramètres à estimer est passé de 4 à 6. Ils sont estimés par minimisation de l'écart quadratique entre les prix obtenus à partir de cette fonctionnelle et les prix de marché (prix issus de la courbe des taux déjà tracée).

L'ajout de ces paramètres supplémentaires permet à la courbe d'être plus flexible à court terme.

Le code utilisé pour l'implémentation du modèle de *Svensson* sous **R** est fourni en **annexe B**, et se base sur les fonctions du package *YiedCurve* (comme dans le modèle de *Nelson-Siegel*).

Nous retrouvons via le code utilisé sous le logiciel **R** les paramètres β_1, β_2, β_3, β_4, $\theta_1(tau1)$ et $\theta_2(tau2)$:

$$\begin{cases} \widehat{\beta_1} = -0,08593814 \\ \widehat{\beta_2} = 0,1183185 \\ \widehat{\beta_3} = 0,0488286 \\ \widehat{\beta_4} = 0,3887738 \\ \widehat{\theta_1} = 2,369957 \\ \widehat{\theta_2} = 11,15275 \end{cases}$$

Une fois les paramètres estimés, nous recalculons via le modèle de *Svensson* les taux d'intérêts pour les différentes maturités possibles. Nous obtenons la courbe en vert :

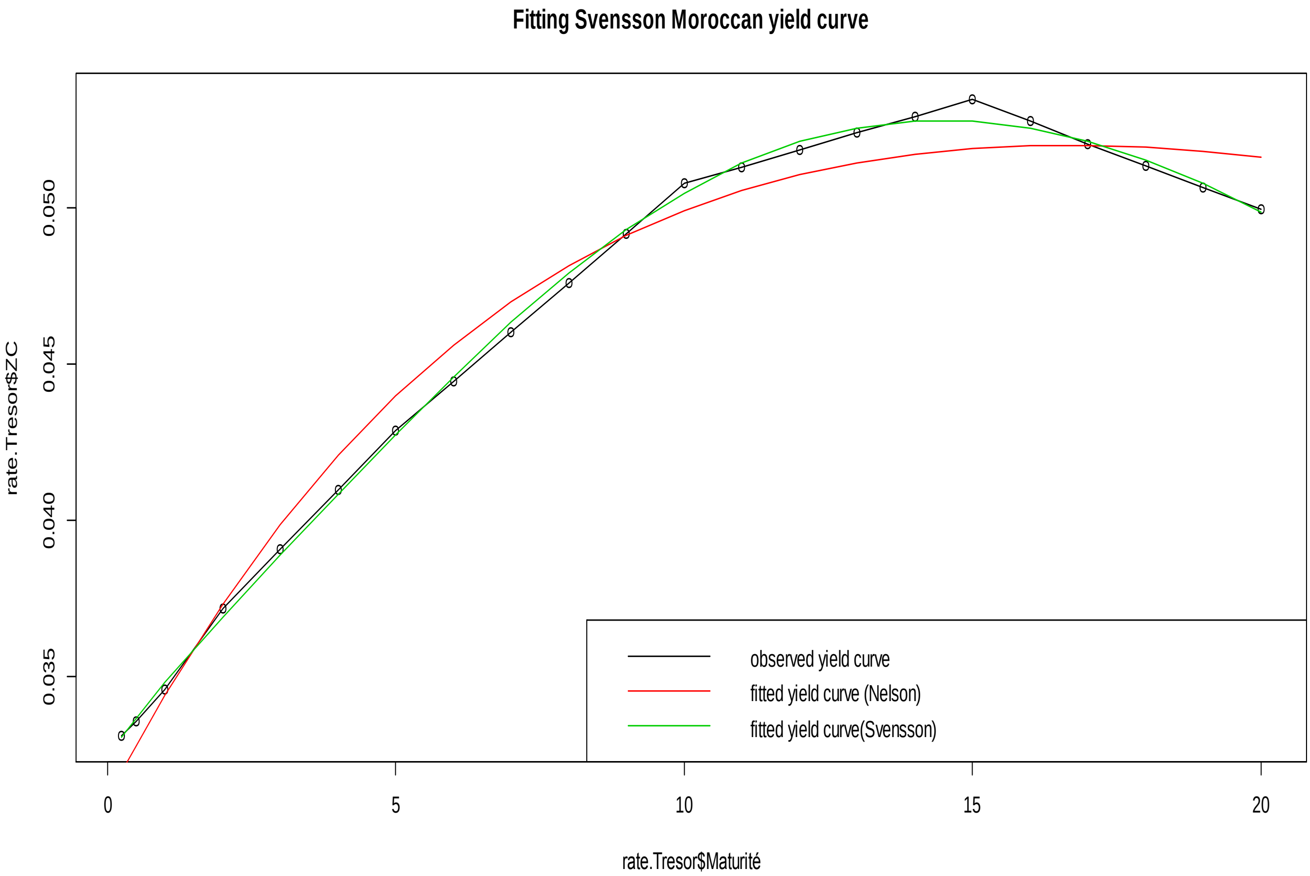


Figure 3 Construction de la courbe des taux marocaine sous le modèle de Svensson

Nous remarquons que la courbe du modèle de *Svensson* ajuste presque parfaitement la courbe des taux zéro-coupon marocaine (mieux que la courbe du modèle de *Nelson-Siegel*). Cette méthode de calibration a été adoptée par les banques centrales des pays avancés, telles que la Banque de France et la Banque d'Angleterre (*Bank of England*). Le modèle de *Svensson* nous sera utile dans le calcul des taux zéro-coupon pour des maturités dont nous ne disposons pas, à l'aide des paramètres estimés.

II.2 Modèles stochastiques de taux d'intérêt

Il existe plusieurs familles de classification des modèles stochastiques d'évolution de la structure temporelle des taux d'intérêt, selon la méthodologie utilisée. Nous citons :

- Les modèles d'arbitrage standard: ces modèles conduisent à l'élaboration d'équations de structure des taux, construites à partir d'une ou plusieurs variables, appelées variables d'état, et d'un raisonnement dit d'arbitrage. Nous citons, dans ce contexte, le modèle de *Vasicek* (1977) à une variable que nous allons développer dans ce rapport, et le modèle de *Brennan et Schwartz* (1979) à deux variables.
- Les modèles d'équilibre intertemporel: plus ambitieux que les modèles d'arbitrage, les modèles d'équilibre tentent à partir d'une description d'ensemble de l'économie, sous-jacente et de considérations sur les préférences des investisseurs, d'obtenir également des équations de structure des taux. Le modèle le plus célèbre en la matière est le modèle de *Cox, Ingersoll et Ross* (1985). Ce dernier sera traité de façon plus détaillée dans les chapitres suivants.
- Les modèles de déformation: plutôt que de se baser sur des variables censées dicter l'évolution des taux, les modèles de déformation partent de la structure initiale des taux telle qu'elle peut être observée, et lui font ensuite subir des déformations consistantes. Le modèle de base, construit selon un schéma binomial, est le modèle de *Ho et Lee* (1986); ce modèle a été généralisé par *Heath, Jarrow et Morton* (1987, 1990).

II.2.1 Modèle de Vasicek

II.2.1.1 Présentation du modèle

Le modèle de Vasicek (1977) est fondé sur l'idée que le taux court est le seul paramètre qui régit les prix des titres obligataires, que celui-ci est censé suivre un processus d'Ornstein - Uhlenbeck dont l'évolution stochastique obéit à l'équation différentielle de type :

$$\boldsymbol{dr(t) = a\big(b - r(t)\big)dt + \sigma dB_t}$$

$$\boldsymbol{r(0) = r_0}$$

Avec :

- $\boldsymbol{r(t)}$: Taux court en t (assimilable au taux JJ).
- $\boldsymbol{b}$: Moyenne sur le long terme du taux court.
- $\boldsymbol{a}$: Désigne la vitesse d'ajustement du taux court actuel vers sa moyenne de long terme b.
- $\boldsymbol{\sigma}$: Ecart-type du changement instantané de r(t).
- $\boldsymbol{B_t}$: Mouvement brownien standard.

La solution de l'équation différentielle stochastique ci-dessus, est donnée par :

$$\boldsymbol{r(t) = r(s)e^{-a(t-s)} + b\left(1 - e^{-a(t-s)}\right) + \sigma \int_s^t e^{-a(t-u)} dB_u}$$

Nous obtenons la solution en appliquant le lemme d'Itô à $\boldsymbol{X_t = r(t)e^{at}}$.

Cette modélisation permet de prendre en compte l'effet de retour à la moyenne constatée sur les taux d'intérêts, d'où l'utilisation d'un processus *d'Ornstein - Uhlenbeck*. En effet, des valeurs élevées des taux ont tendance à être suivies plus fréquemment par des baisses que par des hausses. L'effet inverse est également constaté pour des niveaux de taux inhabituellement bas.

Ce processus induit un prix à l'instant t des obligations zéro-coupon de maturité T, prix qui se calcule selon la formule suivante[4] :

$$\boldsymbol{P(t,T) = exp((R_\infty - r_t)\left(\frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a}\right) - (T-t)R_\infty - \frac{\sigma^2}{4a^3}\left(1 - e^{a(T-t)}\right)^2)}$$

Où R_∞représente le taux à long terme asymptotique qui se définit par :

$$\boldsymbol{R_\infty = b + \frac{\lambda\sigma}{a} - \frac{\sigma^2}{2a^2}}$$

λ représente la prime de risque liée à l'incertitude de l'évolution des taux :

$$\boldsymbol{\lambda = \frac{r-b}{\sigma}}$$

Ainsi, nous pouvons déduire l'expression du taux zéro-coupon, à partir de la formule des prix présentée ci-dessus :

$$\boldsymbol{R(t,T) = (r_t - R_\infty)\left(\frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a(T-t)}\right) + R_\infty + \frac{\sigma^2}{4a^3(T-t)}\left(1 - e^{a(T-t)}\right)^2}$$

L'espérance et la variance conditionnelle du modèle de *Vasicek* sont données par les formules suivantes :

$$\boldsymbol{\begin{cases} E_s\big(r(t)\big) = b + (r(s) - b)e^{-a(t-s)} \\ V_s\big(r(t)\big) = \dfrac{\sigma^2}{2a}(1 - e^{-2a(t-s)}) \end{cases}}$$

[4] Pour plus de détails, voir : LONDON,Justin. Vasicek Model. In *Modeling derivatives in C++* : Wiley Finance, 2004, p. 404-411.

II.2.1.2 Calibration du modèle de Vasicek par la méthode des MCO

Pour estimer les paramètres du modèle de *Vasicek*, nous allons utiliser la discrétisation exacte proposée par *Gouriéroux, Montfort et Renault (1993)* qui est donnée sous la forme suivante :

$$\boldsymbol{r_t = r_{t-1} + b(1 - e^{-a}) + (e^{-a} - 1)r_{t-1} + \epsilon_t}$$

$$\boldsymbol{r_t = b(1 - e^{-a}) + e^{-a}r_{t-1} + \epsilon_t}$$

Avec :

$$\boldsymbol{\epsilon_t \sim N(0, \frac{\sigma^2}{2a}(1 - e^{-2a}))}$$

La normalité de l'erreur découle du Lemme disant si H est une fonction déterministe alors $\int_{t-1}^{t} H_s.dB_s$ suit une loi normale de moyenne 0 et de variance $\int_{t-1}^{t} {H_s}^2 ds$. Dans notre cas, $H_s = \sigma e^{-a(t-s)}$.

Nous pouvons à présent en utilisant les données discrètes du taux court, estimer les paramètres du modèle de *Vasicek* via l'équation simplifiée suivante :

$$\boldsymbol{r_t = \alpha + \beta r_{t-1} + \epsilon_t}$$

Avec $\boldsymbol{\alpha = b(1 - e^{-a})}$, $\boldsymbol{\beta = e^{-a}}$ *et* $\boldsymbol{\epsilon_t \sim N(0, \frac{\sigma^2}{2a}(1 - e^{-2a}))}$

L'équation ci-dessus indique que le taux court s'ajuste suivant un processus autorégressif d'ordre 1 (**AR(1)**).

- ***Présentation des données***

Pour estimer les paramètres α et β (donc a ,b et σ^2), nous avons choisi comme taux court terme, le taux moyen pondéré du marché monétaire interbancaire. Il s'agit d'un marché de gré à gré où ont lieu les placements et refinancements à très court terme.

La base de données sur laquelle nous nous sommes basés contient des taux au jour le jour du **01/01/2004** au **15/04/2014** publié par la banque centrale du Maroc, soit 3758 observations :

Tableau 6 Historique du taux moyen pondéré du marché monétaire interbancaire

	A	B	C	D	E	F
1	Du :	01/01/2004	Au :	15/04/2014		
2						
3		Importer les données				Supprimer les zéros
4						
5	*Date*	*TMP*	*Volume*			*Nombre d'observations contenant des zéros*
6	15/04/2014	0,03068	1618			1131
7	14/04/2014	0,03002	948			
8	13/04/2014	0,03004	0			
9	12/04/2014	0,03004	0			
10	11/04/2014	0,03004	1934			
11	10/04/2014	0,03	1445			
12	09/04/2014	0,03013	1961			
13	08/04/2014	0,03028	2234			
14	07/04/2014	0,03063	2540			
15	06/04/2014	0,03037	0			
16	05/04/2014	0,03037	0			
17	04/04/2014	0,03037	2073			

Le graphe des données figurantes dans le tableau ci-dessus est le suivant :

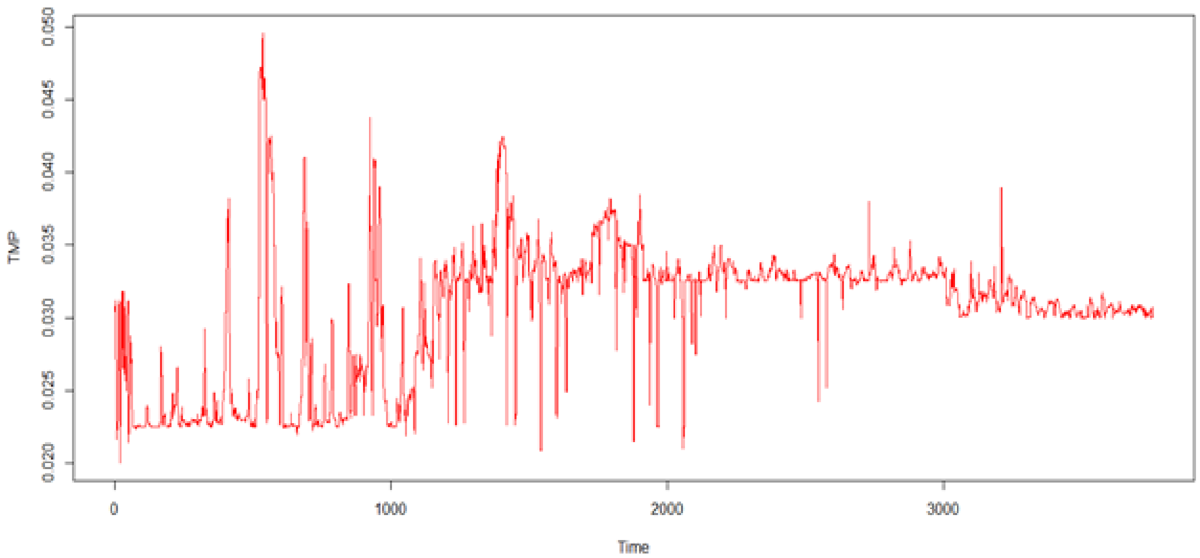


Figure 4 Evolution du TMP du 01/01/2004 au 15/04/2014

D'après la courbe ci-dessus, nous remarquons l'absence d'une tendance de la série du TMP, ce qui indique la stationnarité de cette série. Cependant, un test statistique est nécessaire pour le justifier.

- ***Test de stationnarité (Dickey Fuller)***

Dickey et Fuller proposent un test qui détecte la stationnarité d'une série temporelle. Le test de Dickey-Fuller est un test de racine unitaire qui estime l'hypothèse nulle de racine unitaire (ou de non-stationnarité). Nous effectuons ce test avec le logiciel **R** (voir **Annexe C**)

La $\boldsymbol{p-value = 0,01}$, donc on rejette l'hypothèse nulle du test (H_0: Il y'a non-stationnarité). D'où la stationnarité de la série du taux moyen pondéré.

- ***Test d'autocorrélation des erreurs***

La $\boldsymbol{p-value < 2,2 * 10^{-16}}$, on rejette l'hypothèse nulle du test (H_0: Il y'a absence d'autocorrélation des erreurs), d'où l'autocorrélation des erreurs (Voir **Annexe C** pour les sorties sous **R**).

- ***Test d'homoscédasticité***

Le test ARCH permet de détecter s'il y'a homoscédasticité ou hétéroscédasticité. Les modèles *AutoRegressifs Conditionnellement Hétéroscédastique* ont été introduits pour modéliser la volatilité des actifs financiers qui change avec le temps.

La $\boldsymbol{p-value < 2,2 * 10^{-16}}$, on rejette l'hypothèse nulle du test (H_0: Il n'y a pas d'effet ARCH), d'où l'hétéroscédasticité des erreurs (voir **Annexe C** pour les sorties sous R).

- ***Test de Normalité***

La $\boldsymbol{p-value < 2,2 * 10^{-16}}$, on rejette l'hypothèse nulle du test (H_0: les erreurs suivent une loi normale), d'où la non-normalité des erreurs (voir **Annexe C** pour les sorties sous R).

Remarque

Malgré le rejet de la plupart des hypothèses d'application du modèle autorégressif d'ordre 1, sauf que la discrétisation de l'équation différentielle stochastique du modèle de *Vasicek*, nous impose la normalité des erreurs et l'homoscédasticité, qui vient de l'utilisation du mouvement brownien dans le modèle. Donc pour nous, ces hypothèses que nous avons testées sont plutôt des contraintes du modèle plus que des suppositions. Pour l'estimation des paramètres du modèle de *Vasicek*, nous allons travailler en supposant que les hypothèses de base sont vérifiées.

- ***Estimation des paramètres***

Toujours à l'aide du logiciel **R**, nous obtenons :

Tableau 6 Estimation des paramètres du modèle AR(1)

Coefficient	AR(1)	Constante
Estimation	0,9609	0,0305
Ecart-type	0,0045	0,0005

Variance	AIC	BIC	Log Vraisemblance
1,659*10^ (-6)	-39342,48	-39323,78	19674,24

Donc:

$$\begin{cases} \hat{\alpha} = 0.0305 * (1 - 0.9609) \\ \hat{\beta} = 0.9609 \\ \widehat{\sigma^2_e} = 1.66 * 10^{-6} \end{cases}$$

Ce qui nous permet d'estimer les paramètres d'origine du modèle de *Vasicek* (via la méthode des moindres carrés) :

$$\begin{cases} \hat{a} = 0.03988493 \\ \hat{b} = 0.0305 \\ \hat{\sigma} = 1.31419 * 10^{-3} \end{cases}$$

II.2.1.3 Calibration du modèle de Vasicek par la méthode du maximum de vraisemblance

Pour appliquer la méthode du maximum de vraisemblance, il est nécessaire de connaitre la distribution du taux court sous le modèle de *Vasicek.*

L'équation de la densité de la probabilité conditionnelle du taux court r_{i+1}sachant une ancienne observation r_i est donnée par :

$$f(r_{i+1}|r_i\,; a, b, \sigma^*) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\,\sigma^{*2}}}\exp(-\frac{(r_{i+1} - r_i e^{-a} - b(1 - e^{-a}))^2}{2\sigma^{*2}})$$

Avec :

$$\sigma^{*2} = \sigma^2 \frac{1 - e^{2a}}{2a}$$

Pour des observations du taux court $(r_0, r_1, r_2, \dots, r_i, \dots, r_n)$, la fonction de log-vraisemblance peut être déduite de la fonction de densité conditionnelle. Nous avons :

$$ln(L(a, b, \sigma^*)) = \sum_{i=1}^{n-1} ln(f(r_{i+1}|r_i\,; a, b, \sigma^*))$$

$$= -\frac{n-1}{2} ln(2\pi) - (n-1)\, ln(\sigma^*) - \frac{1}{2\sigma^{*2}} \sum_{i=1}^{n-1} (r_{i+1} - r_i e^{-a} - b(1 - e^{-a}))^2$$

Les conditions de premier ordre permettent d'aboutir aux équations suivantes :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L(a, b, \sigma^*)}{\partial a} = 0 \\ \dfrac{\partial L(a, b, \sigma^*)}{\partial b} = 0 \\ \dfrac{\partial L(a, b, \sigma^*)}{\partial \sigma^*} = 0 \end{cases}$$

$$=> \begin{cases} b = \dfrac{\sum_{i=1}^{n-1}(r_{i+1} - r_i e^{-a})}{(n-1)(1-e^{-a})} \\ a = -ln(\dfrac{\sum_{i=1}^{n-1}(r_{i+1} - b)(r_i - b)}{\sum_{i=1}^{n-1}(r_i - b)^2}) \\ \sigma^{*\,2} = \dfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1}(r_{i+1} - b - e^{-a}(r_i - b))^2 \end{cases}$$

Le problème avec ces solutions, est que chaque paramètre dépend d'un autre. Cependant, *a* et *b* sont tous les deux indépendants de σ^* , et en trouvant la valeur d'un des deux paramètres *a* et *b* va nous permettre de trouver la valeur de l'autre. La valeur de σ^* pourra être déterminée une fois les valeurs des deux paramètres *a* et *b* ont été trouvés. Donc, pour résoudre ces équations, il suffit de trouver seulement un des deux paramètres *a* ou *b*.
Pour trouver *b,* il suffit de remplacer l'équation de *a* par celle de *b*.

Posons les notations suivantes :

$$\begin{cases} r_x = \sum_{i=1}^{n} r_{i-1} \\ r_y = \sum_{i=1}^{n} r_i \\ r_{xx} = \sum_{i=1}^{n} {r_{i-1}}^2 \\ r_{yy=} \sum_{i=1}^{n} {r_i}^2 \\ r_{xy} = \sum_{i=1}^{n} r_i\, r_{i-1} \end{cases}$$

En utilisant ces notations, nous trouvons :

$$\begin{cases} b = \dfrac{r_y r_{xx} - r_x r_{xy}}{n(r_{xx} - r_{xy}) - (r_x^2 - r_x r_y)} \\ a = -ln\left(\dfrac{r_{xy} - b\, r_x - b\, r_y + nb^2}{r_{xx} - 2br_x + nb^2}\right) \\ \sigma^{*\,2} = \dfrac{1}{n}\left(r_{yy} - 2\alpha r_{xy} + \alpha^2 r_{xx} - 2b(1-\alpha)(r_y - \alpha r_x) + nb^2(1-\alpha^2)\right) \\ \alpha = e^{-a}\ et\ \sigma^2 = \dfrac{\sigma^{*\,2}}{1-\alpha^2} \end{cases}$$

- ***Estimation des paramètres***

La base de données utilisée est la même que celle utilisée précédemment dans l'estimation des paramètres du modèle de *Vasicek* par la méthode des *MCO*.

L'implémention des estimateurs du maximum de vraisemblance est faite manuellement sous **R**. Il n'existe pas de procédure d'estimation directe des paramètres. Le code d'implémentation des estimateurs de maximum de vraisemblance sous le logiciel ***R*** est fourni en **Annexe D**.

Nous retrouvons donc les estimations des paramètres du modèle de *Vasicek*, en utilisant la méthode du maximum de vraisemblance :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\hat{a} = 0.03997892} \\ \boldsymbol{\hat{b} = 0.03047177} \\ \boldsymbol{\hat{\sigma} = 0.001313707} \end{cases}$$

II.2.1.4 Simulation de trajectoire du modèle de Vasicek (Taux court)

Cette partie vient pour illustrer la méthode de génération des trajectoires du modèle du taux court de *Vasicek*. Elle est d'une grande utilité pour le *pricing* des produits dérivés de taux d'intérêt dans le cadre du modèle de *Vasicek*.

L'estimation des paramètres, qui a été traitée dans les parties précédentes, soit par la méthode du maximum de vraisemblance soit par la méthode des moindres carrés a pour objectif de déterminer les paramètres du modèle pour générer après des trajectoires du taux court (ou carrément la courbe zéro-coupon), et obtenir ainsi une dynamique des taux.

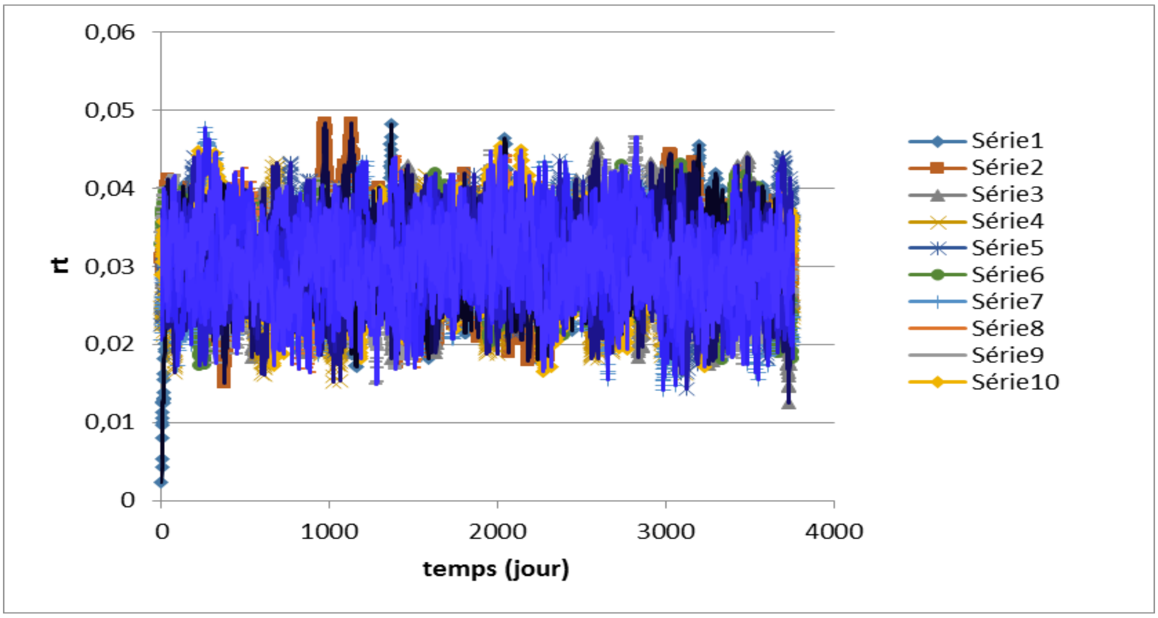


Figure 5 Simulation de 10 trajectoires du taux court sous le modèle de Vasicek

Dans l'application sous Excel, que nous avons développée, l'utilisateur a libre choix de choisir entre l'utilisation des paramètres issus de l'estimation par maximum de vraisemblance ou par moindre carrés (deux boutons « Générer (MV) » et « Générer (MC) »). Le paramètre *n* fait référence au nombre de simulations désirées. Par exemple si n=10, nous obtenons un tableau à 11 colonnes et 10 trajectoires du taux court dans un même graphique (*Voir figure 4*). Le paramètre *dt* est le pas de la marche aléatoire.

Les paramètres *a*, *b*, *sigma* sont les paramètres spécifiques au modèle de *Vasicek* et dont les méthodes d'estimation ont été expliquées ci-dessus. Le paramètre *r0* est la première observation de notre base de données et qui servira de point de départ pour l'algorithme de calcul.

Nous fournissons en **annexe E** le code **VBA** pour générer le tableau des données du taux court ainsi que les graphiques, et une capture d'écran de l'application développée.

II.2.1.5 Limites du modèle de Vasicek

Le modèle de *Vasicek* présente de nombreux éléments intéressants : distributions connues et faciles à manipuler (gaussiennes), formules explicites pour les obligations et taux zéro-coupon, simulation aisée, etc. Cette simplicité ne va pas sans inconvénients.

Le premier inconvénient du modèle de *Vasicek* est dû à son caractère gaussien, qui ne garantit pas la positivité du taux court *r(t) (Voir figure 5 ci-dessous).*

En outre, la courbe des taux zéro-coupon obtenue n'est pas assez souple pour reproduire toutes les formes de courbes observées sur les marchés.

Enfin, le modèle de *Vasicek* est un modèle dit endogène, puisque la courbe de taux zéro-coupon est entièrement définie par le modèle. On ne peut donc pas passer les observations de marché en entrée du modèle.

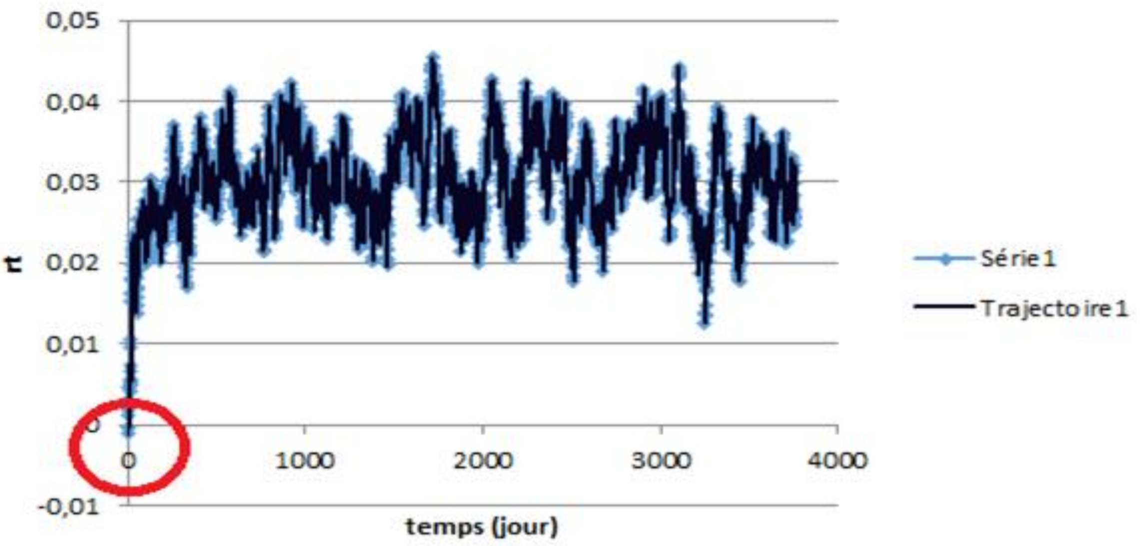


Figure 6 Trajectoire du taux court de Vasicek, avec des taux négatifs.

Le modèle *CIR* présenté dans le paragraphe suivant cherche à répondre au problème de la positivité du taux court.

II.2.2 Modèle de Cox, Ingersoll and Ross (CIR)

II.2.2.1 Présentation du modèle

Le modèle de *Cox, Ingersoll et Ross* occupe depuis les années 80, une position privilégiée au sein du champ théorique de l'évaluation des actifs financiers. La raison essentielle du succès des travaux de *Cox, Ingersoll et Ross* tient au fait qu'ils parviennent à nous fournir un modèle parfaitement compatible avec les hypothèses de la théorie standard.

L'un des problèmes rencontré dans l'utilisation du modèle de *Vasicek* est la non-positivité du taux court. Le modèle *CIR* a répondu à ce problème en proposant un modèle « racine carré », dont la variance instantanée est proportionnelle à la racine carrée du niveau atteint.

La dynamique de taux proposée par le modèle est donnée par :

$$\boldsymbol{dr(t) = a\big(b - r(t)\big)dt + \sigma\sqrt{r(t)}dB_t}$$
$$\boldsymbol{avec\ a > 0\ , b > 0\ et\ \sigma > 0\ .}$$

La solution explicite de l'équation différentielle stochastique ci-dessus, est donnée par :

$$\boldsymbol{r(t) = (r(0) - b)e^{-at} + \sigma e^{-at}\int_0^t e^{au}\sqrt{r(u)}\,dB_u}$$

Il est possible de montrer que si $2ab > \sigma^2$, alors, la solution n'atteint pas 0, dans ce cas, le drift de l'équation (le terme multiplié par *dt*) est suffisamment important pour contraindre la diffusion (le terme multiplié par dB_t) d'atteindre 0**.** Nous supposons cette hypothèse qui assure la non négativité du taux court.

Le processus « racine carrée » est un processus décrivant l'attirance élastique du taux court autour de la valeur centrale b avec une vitesse d'ajustement a.

Cependant, lorsque $r(t)$ devient nul, la dynamique du taux court est ici décrite par l'équation déterministe $dr(t) = a * b * dt > 0$ (car $a, b > 0$). Ceci montre, d'une part, le taux court ne peut jamais être négatif, et, d'autre part, qu'il redevient immédiatement positif juste après avoir atteint la valeur zéro. Zéro est une « barrière réfléchissante » pour le taux d'intérêt.

Nous remarquons également que $\sigma^2 r(t)$, la variance instantanée du changement du taux court, croît avec son niveau. Ceci concorde avec les constatations empiriques, qui montrent que les taux sont d'autant plus volatiles que leur niveau est élevé.

Lorsque le paramètre a tend vers l'infini (l'ajustement se fait de plus en plus rapidement), l'espérance de $r(t)$ tend vers b, et sa variance vers zéro. A l'inverse, lorsque a tend vers zéro (l'attraction vers b est de plus en plus faible), l'espérance du taux futur tend vers son niveau courant, et sa variance vers $\sigma^2 r(t)T$, ce qui, dans ce cas, témoigne de l'absence de toute force de rappel. Nous remarquons également que la variance de $r(s)$ tend vers la constante finie $b\sigma^2\ (2a)^{-1}$, lorsque *s* tend vers l'infini.

La variance conditionnelle du modèle *CIR* est donnée par :

$$V\big(r(t+s)\big|r(t)\big) = \sigma^2 \frac{1-e^{-as}}{2a}\left(2r(t)e^{-as} + b(1-e^{-as})\right)$$

La valeur d'un zéro-coupon se calcule via la formule suivante[5] :

$$P(t,T) = A(T-t) * e^{B(T-t)\, r(t)}$$

Avec :

$$\begin{cases} A(T-t) = \left(\dfrac{2\delta \exp(\frac{1}{2}(a+\delta)(T-t))}{(a+\delta)\big(\exp\big(\delta(T-t)\big)-1\big)+2\delta}\right)^{\frac{2ab}{\sigma^2}} \\ B(T-t) = \dfrac{2\big(\exp\big(\delta(T-t)\big)-1\big)}{(a+\delta)\big(\exp\big(\delta(T-t)\big)-1\big)+2\delta} \\ \delta = \sqrt{a^2+2\sigma^2} \end{cases}$$

Donc le taux zéro-coupon dérivé du modèle CIR est égal à :

$$R(t,T) = \frac{1}{T-t}(B(t,T).r_t) - \log(A(t,T)))$$

II.2.2.2 Calibration du modèle CIR par la méthode des MCO

La discrétisation de l'équation différentielle stochastique du modèle CIR nous donne :

$$r_{t+1} - r_t = a(b - r_t) + \sigma\sqrt{r_t}\,\epsilon_t$$

Avec ϵ_t suit une loi normale de moyenne 0 et de variance 1 ($\Delta t = t + 1 - t = 1$).

Pour l'utilisation de la méthode des moindres carrés ordinaires, nous transformons l'équation ci-dessus en :

$$\frac{r_{t+1} - r_t}{\sqrt{r_t}} = \frac{ab}{\sqrt{r_t}} - a\sqrt{r_t} + \sigma\,\epsilon_t$$

Pour des observations données du taux court $(r_0, r_1, r_2, \dots, r_i, \dots, r_n)$, nous retrouvons les paramètres via la minimisation de la fonction objective :

$$(\hat{a}, \hat{b}) = argmin_{a,b}\,(\sum_{i=0}^{n-1} \frac{r_{t+1} - r_t}{\sqrt{r_t}} - \frac{ab}{\sqrt{r_t}} + a\sqrt{r_t})$$

[5] Pour plus de détails, voir : LONDON,Justin. Cox-Ingersoll-Ross model. In *Modeling derivatives in C++* : Wiley Finance, 2004, p. 431-436.

Sous le logiciel **R**, pour réaliser une régression des séries temporelles, il serait mieux d'utiliser la procédure **dynlm** du package « dynlm », au lieu d'utiliser la procédure standard de la régression linéaire **lm**. En posant $x1 = \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\boldsymbol{r_t}}}$ et $x2 = \sqrt{\boldsymbol{r_t}}$, nous retrouvons les estimations suivantes :

Tableau 7 Estimation des paramètres du modèle de CIR par la méthode des MCO

Coefficients	Estimation	Ecart-type	t-value	p-value
x1	0.0011398	0.0001322	8.619	<2e-16
x2	-0.0374005	0.0043946	-8.511	<2e-16
Ecart-type des erreurs				
0.007449				

Nous avons donc:

$$\begin{cases} -\hat{\boldsymbol{a}} = -\mathbf{0.0374005} \\ \widehat{\boldsymbol{ab}} = \mathbf{0.0011398} \\ \hat{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{0.007449} \end{cases}$$

$$=> \begin{cases} \hat{\boldsymbol{a}} = \mathbf{0.0374005} \\ \hat{\boldsymbol{b}} = \mathbf{0.03047553} \\ \hat{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{0.007449} \end{cases}$$

II.2.2.3 Calibration du modèle CIR par la méthode du maximum de vraisemblance

Une autre alternative pour estimer les paramètres est de trouver les valeurs de ces derniers qui maximisent la fonction de vraisemblance. Pour les N+1 observations du taux court $(r_0, r_1, r_2, \dots, r_i, \dots, r_n)$, la fonction de vraisemblance est :

$$\boldsymbol{L(a,b,\sigma)} = \prod_{\boldsymbol{i=0}}^{\boldsymbol{n-1}} \boldsymbol{f(r_{t+1}|r_t\,; a,b,\sigma)}$$

$$=> \boldsymbol{ln(L(a,b,\sigma))} = \sum_{\boldsymbol{i=0}}^{\boldsymbol{n-1}} \boldsymbol{ln(f(r_{t+1}|r_t\,; a,b,\sigma))}$$

L'équation de la densité de la probabilité conditionnelle du taux court r_{i+1}sachant une ancienne observation r_i est donnée par :

$$\boldsymbol{f(r_{t+1}|r_t\,; a,b,\sigma) = c\,\exp(-uv)\ (\frac{u}{v})^{q/2}\, I_q(2\sqrt{uv})}$$

Avec:

$$\begin{cases} \boldsymbol{c = \dfrac{2a}{\sigma^2(1-e^{-a})}} \\ \boldsymbol{u = c\, r_t e^{-a}} \\ \boldsymbol{v = c\, r_{t+1}} \\ \boldsymbol{q = \dfrac{2ab}{\sigma^2} - 1} \\ \boldsymbol{I_q(x) = (\frac{x}{2})^q \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(\frac{x}{2})^{2n}}{n!\,\Gamma(q+n+1)}} \end{cases}$$

Donc :

$$\boldsymbol{ln\big(L(a,b,\sigma)\big) = (n-1)ln(c) + \sum_{i=0}^{n-1}(-u - v + \frac{1}{2}q\, ln\left(\frac{v}{u}\right) + ln\left(I_q(2\sqrt{uv})\right))}$$

Pour trouver les estimateurs des paramètres du modèle de *Cox-Ingersoll-Ross*, la fonction de vraisemblance doit être maximisée, en dérivant cette dernière par rapport aux trois paramètres du modèle :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\dfrac{\partial L(a,b,\sigma)}{\partial a} = 0} \\ \boldsymbol{\dfrac{\partial L(a,b,\sigma)}{\partial b} = 0} \\ \boldsymbol{\dfrac{\partial L(a,b,\sigma)}{\partial \sigma} = 0} \end{cases}$$

Toujours sous le logiciel R, l'estimation des paramètres par maximum de vraisemblance se fera en trois étapes. Nous allons tout d'abord programmer la fonction *expBes*, qui est la fonction exponentielle de *Bessel*. En effet, pour éviter l'explosion de la fonction de *Bessel* $I_q(x)$, il est préférable d'utiliser la version exponentielle en exploitant la relation $log(e^{-x}I_q(x)) = log\left(I_q(x)\right) - x$. Ensuite, nous allons programmer la fonction de vraisemblance ***CIRLikehood,*** et utiliser enfin la procédure ***mle*** pour trouver les estimations de a, b et σ (Voir le code **R** en **Annexe D**) :

D'après les sorties du logiciel **R**, nous avons :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\hat{a} = 0.023802649} \\ \boldsymbol{\hat{b} = 0.030943860} \\ \boldsymbol{\hat{\sigma} = 0.007611121} \end{cases}$$

II.2.2.4 Simulation des trajectoires du modèle de CIR

Dans cette partie, la procédure de simulation est la même que celle utilisée dans le cadre du modèle de *Vasicek.* L'algorithme du calcul des taux courts est le seul à changer.

Le modèle de *Cox-Ingersoll-Ross* est une extension du modèle de *Vasicek*, dans la mesure où il apporte une amélioration à ce dernier. Le premier inconvénient du modèle de *Vasicek* est dû à son caractère gaussien qui ne garantit pas la positivité du taux court. En effet, après la simulation de plusieurs trajectoires du taux court, nous remarquons parfois que la courbe franchit l'axe des abscisses, et donc le taux court prend des valeurs négatives. Par contre, dans le modèle *CIR*, il est impossible d'obtenir des valeurs négatives de taux d'intérêts (voir *figure 6*).

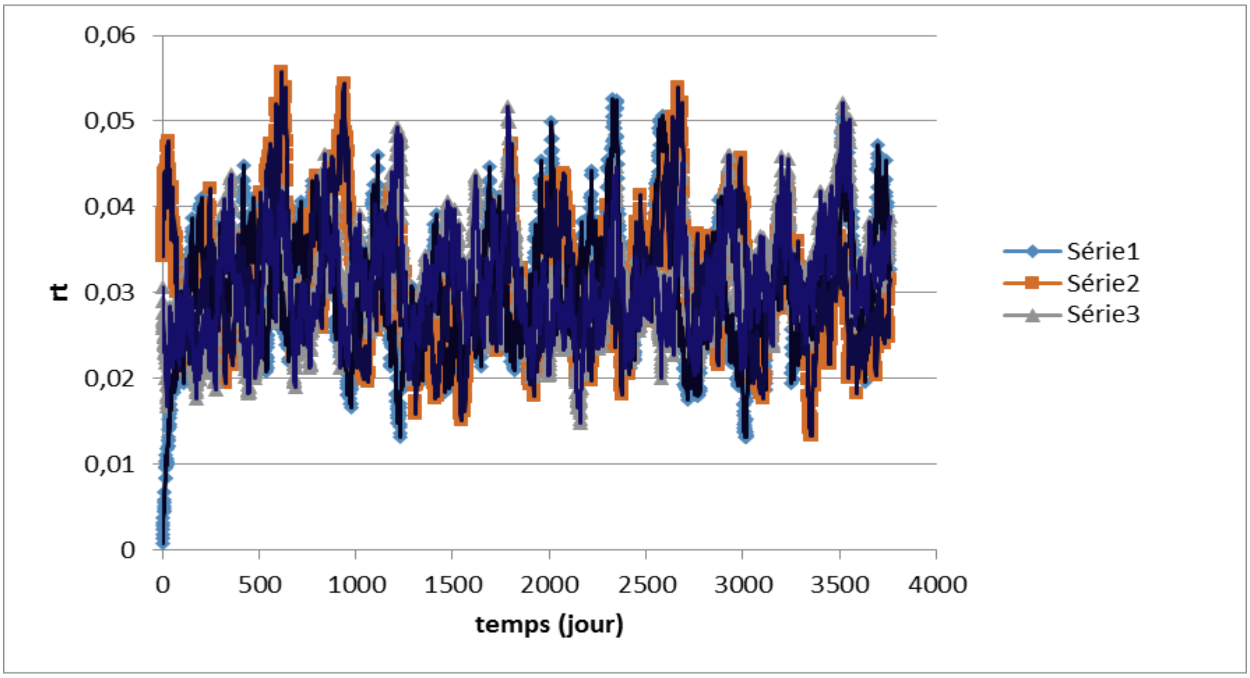


Figure 7 Simulation de 3 trajectoires du taux court sous le modèle de Cox-Ingersoll-Ross

Nous fournissons en **annexe E** le code **VBA** pour la génération des trajectoires du taux court du modèle de *Cox-Ingersoll-Ross* et une capture d'écran de l'application développée.

Partie III
Valorisation des produits de couverture du risque de taux d'intérêt

Dans cette partie, nous présentons trois produits de couverture du risque de taux d'intérêt : l'option sur zéro-coupon, les caps/floors et les swaps de taux d'intérêt. Pour les deux premiers produits, nous allons effectuer le pricing sous le modèle de Vasicek et le modèle de Cox-Ingersoll-Ross. Pour les swaps, nous les valorisons sous le modèle classique du marché.

III. Valorisation des produits de couverture du risque de taux d'intérêt

III.1 Option européenne sur un zéro-coupon

Dans cette partie, l'évaluation de ce type de produit dérivé reposera sur des méthodes stochastiques, c'est-à-dire en supposant une équation différentielle stochastique d'évolution des taux d'intérêts.

Selon Bisière (1997), une option est un contrat passé entre deux parties : l'acheteur de l'option et le vendeur (appelé aussi émetteur) de l'option. Par ce contrat, l'acheteur acquiert temporairement le droit d'effectuer une certaine transaction (dans les conditions précisées sur le contrat) dont la contrepartie sera le vendeur de l'option. Le prix de l'option, appelé la prime, est versé par l'acheteur au moment de la signature du contrat. Si l'acheteur décide d'effectuer la transaction (ce qu'il n'est jamais obligé de faire), on dit qu'il exerce son option.

Le contrat de l'option précise toujours :

- La date d'expiration de l'option : qui est la date après laquelle l'option ne peut être exercée (appelée aussi date d'échéance).
- L'actif sous-jacent : c'est l'actif qui fera l'objet de la transaction en cas d'exercice.
- Le prix d'exercice (*Strike*) : prix auquel se fera la transaction, généralement exprimé par unité du sous-jacent.
- La quantité du sous-jacent sur laquelle portera la transaction.

Une distinction doit être faite concernant la période d'exercice. Pour une *option européenne*, elle ne peut être exercée qu'à l'échéance (qui est précisée dans le contrat d'option). Par contre, pour une *option américaine*, elle peut être exercée à n'importe quel moment entre la conclusion du contrat et son échéance. Nous distinguons aussi entre un *call* et un *put*. Un *call* donne le droit d'achat du sous-jacent au prix d'exercice (*Strike*), et un *put* donne le droit de le vendre.

Pour le cas d'un *call* sur zéro-coupon conclu à la date *t* donne le droit à son détenteur d'acheter à la date d'échéance de l'option (notée *s*), une obligation zéro-coupon (supposée de nominal égal à 1, d'échéance $T \geq s$ et dont prix à chaque date t est noté $P(t,T)$). Notons le prix d'exercice du *call* par K.

En notons C_t le prix du call à la date *t*, nous avons :

$$\text{Date t : } C_t \quad \left.\begin{array}{ll} \nearrow \; P(s,T) - K & \text{Si } P(s,T) > K \\ \searrow \; 0 & \text{Si } P(s,T) \leq K \end{array}\right\} \quad \text{A la date } s$$

Donc le *payoff* (pertes ou profits réalisés par le porteur le porteur de l'option) à la date s du call égal à :

$$[\boldsymbol{P(s,T) - K}]^{+} = \boldsymbol{max[(P(s,T) - K);0]}$$

III.1.1 Calcul des prix analytiques

En notant **Q** la probabilité risque-neutre, sous lequel les prix actualisés sont des martingales par rapport à la filtration brownienne F_t, le prix du call à la date s'écrit :

$$\boldsymbol{C_t = C(t,s,T,K) = E^{Q}(\exp(-\int_t^s r(u).du)[P(s,T) - K]^{+} \mid F_t)}$$

Les modèles stochastiques de taux d'intérêt vus dans le chapitre 2 du présent rapport permettent de donner des solutions explicites à la formule d'espérance. Pour chaque modèle dynamique de taux, nous avons une formule du prix zéro-coupon et du taux zéro-coupon qui est différente. Nous avons traité deux modèles de taux : le modèle de *Vasicek* et le modèle de *Cox-Ingersoll-Ross*. Donc pour chacun des deux modèles, nous trouverons des formules différentes du prix de l'option sur un zéro-coupon.

- Pour le modèle de *Vasicek*, rappelons l'équation différentielle stochastique du taux court :

$$\boldsymbol{dr(t) = a\big(b - r(t)\big)dt + \sigma dB_t}$$

Avec $\boldsymbol{a > 0}$, $\boldsymbol{b > 0}$ et $\boldsymbol{\sigma > 0}$ **.**

Le prix à la date t d'une option d'achat européenne d'échéance s et de prix d'exercice K sur une obligation zéro-coupon d'échéance T s'obtient à l'aide de la formule ci-dessous [6]:

$$\boldsymbol{C_t = C(t,s,T,K) = P(t,T) * \phi(h) - K * P(t,s) * \phi(h - \sigma_c)}$$

Avec

$$\begin{cases} \boldsymbol{h = ln\left(\dfrac{P(t,T)}{K * P(t,s)}\right) * \dfrac{1}{\sigma_c} + \dfrac{\sigma_c}{2}} \\ \boldsymbol{\sigma_c = \dfrac{\sigma}{a}(1 - e^{-a(T-s)})\sqrt{\dfrac{1}{2a}(1 - e^{-2a(s-t)}}} \end{cases}$$

Et ϕ est la fonction cumulative (fonction de répartition) de la loi normale de moyenne 0 et d'écart-type égal à 1.

---

[6] Démonstration de la formule sur le site (Voir page 4) : http://shanyang.public.iastate.edu/FS/pricing%20of%20the%20bond.pdf

De même, en utilisant les mêmes notations, nous donnons le prix à la date *t* d'une option de vente européenne(Put) d'échéance s et de prix d'exercice *K* sur une obligation zéro-coupon d'échéance *T* [7]:

$$\boldsymbol{P_t = P(t,s,T,K) = K * P(t,s) * \phi(-h + \sigma_c) - P(t,T) * \phi(-h)}$$

- Dans le cas du modèle de Cox-Ingersoll-Ross, le processus des taux court est régi par l'équation différentielle ci-dessus :

$$\boldsymbol{dr(t) = a\big(b - r(t)\big)dt + \sigma\sqrt{r(t)}dB_t}$$

Avec : $\boldsymbol{a > 0, b > 0\ et\ \sigma > 0}$

Le prix d'un call à la date t, d'échéance s et de prix d'exercice K sur une obligation zéro-coupon d'échéance T, par le modèle de Cox-Ingersoll-Ross est :

$$\begin{aligned}\boldsymbol{C_t} &= \boldsymbol{P(t,T)X^2\left(2b(\rho + \psi + B(T-s));\ \frac{4ab}{\sigma^2},\frac{2\rho^2 r(t)e^{\delta(s-t)}}{\rho + \psi + B(s-t)}\right)} \\ &\quad \boldsymbol{- KP(t,s)X^2\left(2\tilde{r}(\rho + \psi);\ \frac{4ab}{\sigma^2},\frac{2\rho^2 r(t)e^{\delta(s-t)}}{\rho + \psi}\right)}\end{aligned}$$

Avec :

$$\begin{cases}\boldsymbol{\rho = \dfrac{2\delta}{\sigma^2\big(\exp\big(\delta(s-t)\big) - 1\big)}} \\ \boldsymbol{\psi = \dfrac{a + \delta}{\sigma^2}} \\ \boldsymbol{\tilde{r} = \dfrac{ln(\frac{A(T-s)}{K})}{B(T-s)}}\end{cases}$$

$X^2(.\,; p, q)$ désigne la fonction de répartition de la loi de *Khi-deux décentrée* à p degrés de liberté et de paramètre de décentrage q. Cette loi ne possède pas de formule analytique pour le calcul de sa fonction de répartition et n'est pas en général disponible sur les logiciels de programmation. Il s'est avéré nécessaire de la programmer en VBA.

Rappelons aussi que $A(T-t)$, $B(T-t)$ et δ, dans le cas du modèle de *Cox-Ingersoll-Ross,* sont définies par les relations suivantes :

[7] Démonstration de la formule sur le site (Voir page 6) :
http://shanyang.public.iastate.edu/FS/pricing%20of%20the%20bond.pdf

$$\begin{cases} \boldsymbol{A(T-t)} = \left(\dfrac{\boldsymbol{2\delta \exp(\frac{1}{2}(a+\delta)(T-t))}}{\boldsymbol{(a+\delta)\big(\exp\big(\delta(T-t)\big)-1\big)+2\delta}} \right)^{\frac{2ab}{\sigma^2}} \\ \boldsymbol{B(T-t)} = \dfrac{\boldsymbol{2\big(\exp\big(\delta(T-t)\big)-1\big)}}{\boldsymbol{(a+\delta)\big(\exp\big(\delta(T-t)\big)-1\big)+2\delta}} \\ \boldsymbol{\delta = \sqrt{a^2+2\sigma^2}} \end{cases}$$

Pour le calcul du prix à la date t d'un *put* sur un zéro-coupon dans le cas du modèle de *Cox-Ingersoll-Ross*, nous procéderons à l'utilisation de la parité *put-call*, au lieu de reprendre les mêmes formules assez longues qui ont été utilisées pour le calcul du prix du *call.*

Le principe de la parité *put-call* est simple et efficace, dans la mesure où elle permet de lier entre le prix du *call* à celui du *put.* Pour expliquer cette relation, nous considérons deux portefeuilles A et B :

- Portefeuille A : Un call européen + Un montant en cash égal à *K*exp(-r(s-t)).*
- Portefeuille B : Un put européen + Le sous-jacent S_t (Dans notre cas le sous-jacent est l'obligation zéro-coupon S_t = *P(t,T)*).

Le put et call portent sur le même sous-jacent qui est l'obligation zéro-coupon de maturité *T*, ont la même échéance *s* et le même *strike K.*

A l'échéance *s* :

- $Portefeuille\ A = \max(P(s,T) - K\ , 0) + K = \max(P(s,T), K)$
- $Portefeuille\ B = \max(K - P(s,T)\ , 0) + P(s,T) = \max(K, P(s,T))$

Les deux portefeuilles A et B ont la même valeur à l'échéance, et puisque nous supposons qu'il n'existe pas d'opportunité d'arbitrage, alors les deux portefeuilles doivent avoir la même valeur à n'importe quelle date *t* < *s*. Nous avons :

$$\boldsymbol{C_t + K * e^{-r(s-t)} = P(t,T) + P_t}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{P_t = C_t + K * e^{-r(s-t)} - P(t,T)}$$

III.1.2 Simulation de Monte-Carlo

En finance, le *payoff* des produits dérivés est donné par une fonction de l'actif sous-jacent à une (ou des) date(s) future(s). Le prix du produit dérivé, dans un modèle complet, est alors l'espérance sous l'unique probabilité risque neutre du *payoff* actualisé. Donc, l'objectif des méthodes numériques en général est de calculer cette espérance de la manière la plus efficace et la plus rapide possible.

Parmi ces méthodes, nous citons les méthodes de *Monte-Carlo*, qui nécessitent de savoir simuler l'équation différentielle stochastique du sous-jacent. Souvent, il faut recourir à des schémas numériques. De plus, même cette discrétisation effectuée, il peut s'avérer que la méthode ne soit pas efficace, par exemple lorsque la variance est trop élevée. Les méthodes de réduction de la variance permettent d'éviter ce genre de difficulté.

Les formules de *pricing* des options sur zéro-coupon expliquées précédemment ne nécessitent aucune simulation. Ce sont des formules analytiques qui permettent de donner un prix à ces produits dérivés. D'où l'avantage de l'utilisation des modèles de *Vasicek* et de *Cox-Ingersoll-Ross*.

Pour utiliser les méthodes de *Monte-Carlo* pour les options, nous aurons besoin de deux théorèmes : la *loi forte des grands nombres* et le *théorème central limite*.

Théorème 1 : Loi forte des grands nombres

Soit $(X_i\,, i \geq 1)$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées (*idd*) telles que $E(|X_1|) < +\infty$, alors :

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = E(X_1)$$

Ce théorème permet d'utiliser des algorithmes probabilistes pour calculer n'importe quelle espérance. Considérons le cas où les variables aléatoires suivent une loi normale ***N(0,1)***. Alors un générateur aléatoire permet de simuler cette loi. Pour approcher son espérance, il suffit donc de simuler n fois cette loi et de faire la moyenne des simulations. C'est aussi pour cela que le terme de gauche est souvent appelé moyenne arithmétique noté $\overline{X_n}$.

Il faut remarquer également que cette méthode permet de calculer un certain nombre d'intégrales. Soit $I = \int_0^1 f(u)du$ où f est une fonction intégrable. Nous remarquons immédiatement que I se réécrit comme $I = E\big(f(U)\big)$ où U est une variable aléatoire de loi $U_{[0,1]}$. En appliquant l'algorithme précédant à $X_i = f(U_i)$ nous calculons I.

Pour évaluer théoriquement l'efficacité de cette méthode, il existe des théorèmes qui permettent de calculer la vitesse de convergence.

Théorème 2 : Théorème central limite

Soit $(X_i\,, i \geq 1)$ une suite de variables aléatoires, indépendantes et identiquement distribuées telles que $E(X_i^2) < +\infty$. Notons $\sigma^2 = Var(X_i)$, alors :

$$\frac{\sqrt{n}}{\sigma^2}\left(E(X_1) - \frac{1}{n}(X_1 + \cdots + X_n)\right) \xrightarrow{L} G \text{ où } G \sim N(0,1)$$

Donc si nous notons par $\overline{X_N}$ l'estimateur *Monte-Carlo* de $E(X)$ et $\overline{\sigma_N}^2$ l'estimateur standard de la variance, avec :

$$\begin{cases} \overline{X_N} = \dfrac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X_i \\ \overline{\sigma_N}^2 = \dfrac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(X_i - \overline{X_N}) \end{cases}$$

Alors avec une probabilité de 0.95, $E(X)$ appartient à l'intervalle (aléatoire) donné par :

$$\left[\overline{X_N} - \frac{1.96}{\sqrt{N}}\,\overline{\sigma_N}\ ,\overline{X_N} + \frac{1.96}{\sqrt{N}}\,\overline{\sigma_N}\right]$$

Donc, avec un peu de calcul additionnel, (calcul de $\overline{\sigma_N}$) nous pouvons donner une estimation raisonnable de l'erreur d'approximation de $E(X)$ par $\overline{X_N}$. La possibilité d'avoir une erreur d'estimation avec un coût numérique faible est une propriété très utile des méthodes *Monte-Carlo.*

III.1.3 Application (Sous Excel et VBA)

A l'aide d'Excel et VBA, nous avons réussi à créer des macros de *pricing* des options de vente et d'achat sur zéro-coupon sous le modèle de *Vasicek* et *Cox-Ingersoll-Ross.* Nous avons fourni en annexe le code de programmation du *pricer* sous **VBA** et un tableau expliquant les différentes variables utilisées dans le code (**Annexe F**).

- ***Sous le modèle de Vasicek***

Pour le calcul du prix d'un zéro-coupon à la date t_i , de maturité t_j ,avec pour taux court r et en utilisant les paramètres calculés par la méthode du maximum de vraisemblance ($l = 0$), nous utilisons la fonction $ZeroCoupon(r,\ t_i\ ,\ \ t_j\ , 0)$ et $ZeroCoupon(r,\ t_i\ , t_j\ , 1)$ pour la méthode des moindres carrés.

Pour calculer le prix du *put/call* en utilisant la simulation de *Monte-Carlo*, nous avons besoin d'un générateur de variable aléatoire d'une loi gaussienne. Pour générer un tableau de N variable de loi normale de moyenne 0 et de variance 1, et remédier au problème posé par le générateur de variable aléatoire inclus dans Excel, nous utilisons la fonction *NRandVars(N).*

Maintenant que nous avons défini les fonctions qui nous seront utiles dans la programmation, le code fourni en **annexe G** permet de calculer le prix du *put* et du *call*, sous le modèle de *Vasicek*, en utilisant la formule analytique déjà définie, et aussi de les calculer en utilisant la simulation de *Monte-Carlo.* Dans ce code, les calculs sont effectués en utilisant les estimations du maximum de vraisemblance. Pour effectuer le calcul en utilisant les estimations de la méthode des moindres carrés, il suffit de remplacer la variable $l = 0$ par 1. Rappelons que l'objet de notre étude est de *pricer* les options sur zéro-coupon, c'est-à-dire de donner un prix du *put* et du *call* selon une dynamique de taux. Nous fournissons une capture d'écran du *pricer* des options (*put* et *call*) sous le modèle de Vasicek en **annexe G.**

<u>Remarque</u>

Il faut souligner l'impact du nombre de simulations sur les prix *Monte-Carlo* du *call* et du *put*. En effet, plus le nombre N est grand, plus les prix *Monte Carlo* convergent vers les prix analytiques (par application de la *loi forte des grands nombres*). Le tableau ci-dessous permet d'illustrer cet impact :

Tableau 8 Evolution du prix du Call/Put en changeant le nombre de simulations

N	Put	Call
1	0	0,0688465
10	0	0,07057594
100	0	0,07227328
10000	0	0,07126655
100000	0	0,07118481

Prix analytique	3,7556E-25	0,07123372

Les prix sont calculés en utilisant les valeurs des paramètres suivants :

Tableau 9 Paramètres utilisés pour le calcul des prix du put/call

a	0,03997892	Maturité du Zéro-coupon(en jours)	10
b	0,03047177	Maturité de l'option(en jours)	6
sigma	0,00131371	Prix d'exercice (Strike)	0,8
r0	0,03043		

- ***Sous le modèle de Cox-Ingersoll-Ross***

Pour obtenir les prix du put et du call sur zéro-coupon sous le modèle de *Cox-Ingersoll-Ross*, il s'est avéré nécessaire de programmer une fonction qui calcule la fonction de répartition de loi de Khi-deux décentrée, car cette loi ne figure pas dans *Excel.* Le code de la fonction de répartition est fourni dans la première partie de l'**annexe H.**

Les fonctions $A(T-t)$ et $B(T-t)$ qui sont nécessaires pour le calcul du prix d'un zéro-coupon dans le modèle de *Cox-Ingersoll-Ross*, sont calculées grâce aux fonctions **VBA** de l'**annexe H.**

Une fois que nous avons défini les fonctions qui nous seront utiles dans la programmation, le code de la dernière partie de l'**annexe H** permet de calculer le prix du *put* et du *call*, sous le modèle *CIR* en utilisant les formules analytiques déjà définies. Dans ce code, les calculs sont effectués en utilisant les estimations du maximum de vraisemblance. Pour effectuer le calcul en utilisant les estimations de la méthode des moindres carrés, il suffit de remplacer la variable $l = 0$ par 1. Nous donnons dans le même annexe une capture d'écran du *pricer* développé.

- ***Comparaison des prix du put/call des deux modèles***

Supposons que nous voulons calculer le prix d'une option d'achat et de vente sur un zéro-coupon de maturité 100 jours, avec une date d'exercice de l'option de 80 jours et comme prix d'exercice K=0,9.
En utilisant les estimations du maximum de la vraisemblance, par exemple, nous trouvons :

Tableau 10 Prix du put/call sous les modèles de Vasicek et CIR

	Vasicek	Cox-Ingersoll-Ross
Put	0,031417878	0,031176756
Call	2,79029E-18	1,22474E-14

Malgré la différence entre les équations différentielles stochastiques des modèles de *Vasicek* et de *Cox-Ingersoll-Ross*, l'écart entre les primes du put/call des deux modèles est assez petit.

III.2 Caps et floors

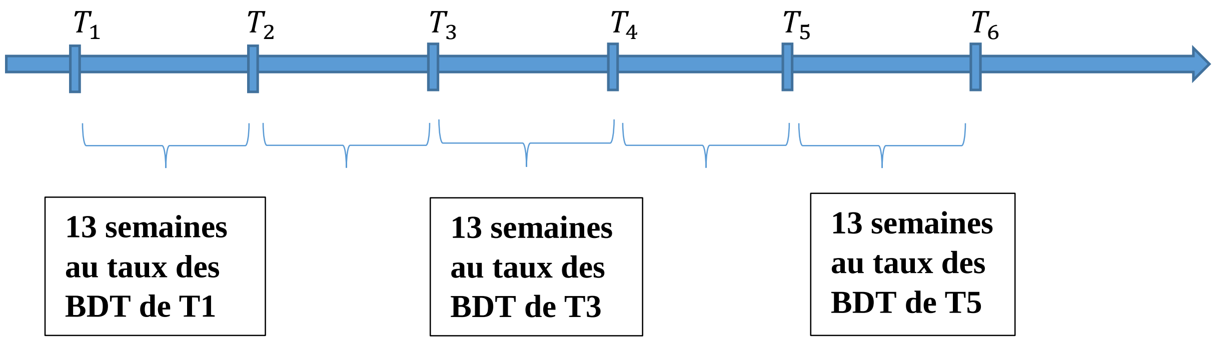
Un *cap* est un contrat où le vendeur promet de rétribuer son porteur si le taux d'intérêt de référence vient à dépasser un niveau prédéterminé (le taux d'exercice du *cap*) à certaines dates dans le futur. L'acheteur d'un *cap* utilise ce produit pour se couvrir contre une hausse des taux d'intérêt, par exemple, pour couvrir un prêt à taux variable consenti par une banque. Inversement, le vendeur d'un *floor* promet de rétribuer son porteur si le taux de référence vient à passer sous le taux d'exercice du *floor*.

A chaque constat, si le niveau du taux variable constaté est supérieur au prix d'exercice, l'acheteur du *cap* reçoit du vendeur le différentiel de taux, appliqué au montant nominal et rapporté au nombre de jours de la période d'intérêt. De même, si le niveau du taux variable constaté est inférieur au taux d'exercice, le vendeur du *floor* verse à l'acheteur la différence entre les deux taux. Ce différentiel de taux est appliqué au montant nominal et rapporté au nombre de jours exact de la période d'intérêt.

L'intérêt des *caps* et des *floors* est évidemment d'offrir une couverture contre un sens de variation particulier des taux d'intérêt. A l'inverse, les *FRA (Forward Rate Agreement), Futures et Swaps* permettent de se couvrir contre toute variation des taux, que cette variation soit à la hausse soit à la baisse, alors que généralement seul l'un des deux sens est défavorable pour un intervenant donné (l'autre étant favorable).

Pour mieux comprendre le mode de fonctionnement de ces deux produits dérivés, nous considérons l'exemple suivant :

Supposons un bon à taux variable (Une obligation à taux variable) pour lequel l'intérêt versé est réajusté au niveau du *taux des BDT* de manière périodique. Considérons que ce taux est ainsi réajusté tous les 13 semaines au niveau du *taux des bons du Trésor*. Le taux d'intérêt payé par le bon est celui qui prévaut au début de la période. Ainsi le taux pour les 13 premières semaines est le taux initial, le *taux des BDT* dans 13 semaines sera le taux effectif du bon pour les 13 semaines suivantes, etc.… Nous considérerons le taux initial à 5%.



L'investisseur ou l'organisme qui a émis le bon sur le marché, est soucieux de verser des intérêts trop élevés, il va donc chercher à se couvrir contre une hausse des taux. La première solution possible est d'acheter plusieurs *calls* (option d'achat sur zéro-coupon) avec comme échéance les dates $T_1, T_2, \dots, T_6$. Le *cap* sur taux n'est rien d'autre qu'un ensemble de calls regroupés. En souscrivant à un cap de 1,75 ans $(13\ semaines * 7 = 91\ semaines = 1.75\ ans)$ à 5%, l'émetteur va plafonner son taux d'intérêt à 5% pendant une période de 91 semaines. Si par exemple à date T_4 le taux est de 7%, alors l'émetteur va exercer le cap, et il ne versera pendant les 13 semaines suivant cette date que 5%, puisqu'il va recevoir de la part de l'émetteur du cap, un différentiel de $7\% - 5\% = 2\%$ multiplié fois par le nominal qui figure dans le contrat du *cap*.

Avant d'entamer la partie du *pricing* des *caps/floors*, nous citerons les caractéristiques de ces contrats :

- La devise ;
- Le montant nominal sur lequel portent les intérêts ;
- L'acheteur et le vendeur de l'option ;
- La référence variable ;
- La durée (de 1 mois à 10 ans et plus) ;
- Le taux d'exercice ;
- La périodicité des flux (date de conclusion, date de départ, date de constatation du taux variable et date de paiement du différentiel de taux) ;
- La prime.

III.2.1 Pricing du Cap/floor sous le modèle de Vasicek et de Cox-Ingersoll-Ross

Considérons un *cap* de nominal 1 DH, de taux d'exercice r_E , dont le taux de référence est le taux du marché des bons du Trésor de maturité s qui est noté $R(t, s)$ en t. Ce *cap* est caractérisé par l'échéancier suivant :

t	T_0	T_1	T_2	…	T_n
		C_1	C_2		C_n

Pour $j = 1, \dots, n$ nous avons $\boldsymbol{T_j - T_{j-1} = s}$.

La relation qui relie les prix zéro-coupon avec les taux $R(t,s)$ est donnée par :

$$\boldsymbol{P(t,s) = \frac{1}{1 + s * R(t,s)}}$$

Au lieu de :

$$P(t,s) = \left(\frac{1}{1 + R(t,s)}\right)^s$$

Cette relation est fausse, car les taux d'intérêts de référence sont des taux inférieurs à 1 an. Dans l'exemple du paragraphe précédent, le taux de référence était le taux des bons de trésor de 13 semaines.

A chaque date T_j (pour $j = 1, \dots, n$) le détenteur du cap touche un flux C_j, avec :

$$\boldsymbol{C_j = \left[s\left(R\left(T_{j-1}, s\right) - r_E\right)\right]^+ = max\left(s\left(R\left(T_{j-1}, s\right) - r_E\right), 0\right)}$$

Puisque

$$\boldsymbol{s * R\left(T_{j-1}, s\right) = \frac{1}{P\left(T_{j-1}, s\right)} - 1}$$

Et si nous notons ϵ_j le domaine d'exercice associé au flux C_j, nous avons :

$$\boldsymbol{\epsilon_j = \left\{\frac{1}{P\left(T_{j-1}, s\right)} - 1 \geq s * r_E\right\}}$$

$$\boldsymbol{=> \epsilon_j = \left\{P\left(T_{j-1}, s\right) \leq \frac{1}{1 + s * r_E}\right\}}$$

Donc ϵ_j est le domaine d'exercice d'un *put* européen d'échéance T_{j-1}, sur un zéro coupon d'échéance $T_{j-1} + s = T_j$ et de prix d'exercice :

$$\boldsymbol{K = \frac{1}{1 + s * r_E}}$$

Ainsi le *cap* est égal à la somme de n *puts* européens de même prix d'exercice K.

Donc pour le cas du modèle de *Vasicek*, nous retrouvons le prix du *cap* qui est égal à :

$$CAP_t{}^V = \sum_{j=1}^{n} P\left(t,\ T_{j-1},\ T_j, \frac{1}{1+s*r_E}\right)$$

$$CAP_t{}^V = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{1+s*r_E} * P\big(t,\ T_{j-1}\big) * \phi(-h+\sigma_c) - P\big(t,\ T_j\big) * \phi(-h)$$

Avec

$$\begin{cases} h = ln\left(\dfrac{P\big(t,\ T_j\big)}{\dfrac{1}{1+s*r_E} * P\big(t,\ T_{j-1}\big)}\right) * \dfrac{1}{\sigma_c} + \dfrac{\sigma_c}{2} \\ \sigma_c = \dfrac{\sigma}{a}\big(1-e^{-a(s)}\big)\sqrt{\dfrac{1}{2a}\big(1-e^{-2a(\,T_{j-1}-t)}} \end{cases}$$

Et dans le cas où le taux court suit l'équation différentielle stochastique du modèle de *Cox-Ingersoll-Ross*, le prix du *cap* est égal à :

$$CAP_t{}^{CIR} = \sum_{j=1}^{n} P\left(t,\ T_{j-1},\ T_j, \frac{1}{1+s*r_E}\right)$$

Comme nous l'avons déjà vu dans la partie du *pricing* du *put* sur un zéro-coupon, nous utilisons la parité *put-call* pour trouver le prix du *put* en fonction du *call*, donc :

$$CAP_t{}^{CIR} = \sum_{j=1}^{n} C\left(t,\ T_{j-1},\ T_j, \frac{1}{1+s*r_E}\right) + \frac{1}{1+s*r_E} * e^{-r(\,T_{j-1}-t)} - P\big(t,\ T_j\big)$$

Avec la fonction C est le prix du *call* sous le modèle *CIR.*

De même pour le *floor*, nous trouvons qu'il est égal à la somme de *n calls* européens de même prix d'exercice *K* avec :

$$K = \frac{1}{1+s*r_E}$$

Nous avons donc le prix du *floor* sous le modèle de *Vasicek* égal à :

$$FLOOR_t{}^V = \sum_{j=1}^{n} C\left(t,\ T_{j-1},\ T_j, \frac{1}{1+s*r_E}\right)$$

$$FLOOR_t{}^V = \sum_{j=1}^{n} P\big(t,\ T_j\big) * \phi(h) - \frac{1}{1+s*r_E} * P\big(t,\ T_{j-1}\big) * \phi(h-\sigma_c)$$

Les expressions de h et σ_c sont définis ci-dessus (Prix du $CAP_t{}^V$).

Et sous le modèle de *Cox-Ingersoll-Ross* :

$$\boldsymbol{FLOOR_t}^{\boldsymbol{CIR}} = \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{P(t,\, T_j)X^2\Bigg(2b(\rho+\psi}$$

$$\boldsymbol{+B(\,T_j-\,T_{j-1})\big);\,\frac{4ab}{\sigma^2}\,,\frac{2\rho^2 r(t)e^{\delta(\,T_{j-1}-t)}}{\rho+\psi+B(\,T_{j-1}-t)}\Bigg) - \frac{1}{1+s*r_E}}$$

$$\boldsymbol{*\,P(t,\,T_{j-1})X^2\left(2\tilde{r}(\rho+\psi);\,\frac{4ab}{\sigma^2}\,,\frac{2\rho^2 r(t)e^{\delta(\,T_{j-1}-t)}}{\rho+\psi}\right)}$$

Avec :

$$\begin{cases} \boldsymbol{A(\,T_j-t)=\left(\dfrac{2\delta\exp(\frac{1}{2}(a+\delta)(\,T_j-t))}{(a+\delta)\left(\exp\left(\delta(\,T_j-t)\right)-1\right)+2\delta}\right)^{\frac{2ab}{\sigma^2}}} \\ \boldsymbol{B(\,T_j-t)=\dfrac{2\left(\exp\left(\delta(\,T_j-t)\right)-1\right)}{(a+\delta)\left(\exp\left(\delta(\,T_j-t)\right)-1\right)+2\delta}} \\ \boldsymbol{\delta=\sqrt{a^2+2\sigma^2}} \\ \boldsymbol{\rho=\dfrac{2\delta}{\sigma^2\left(\exp\left(\delta(\,T_{j-1}-t)\right)-1\right)}} \\ \boldsymbol{\psi=\dfrac{a+\delta}{\sigma^2}} \\ \boldsymbol{\tilde{r}=\dfrac{ln(\frac{A(\,T_j-\,T_{j-1})}{K})}{B(\,T_j-\,T_{j-1})}} \end{cases}$$

III.2.2 Application (Sous Excel et VBA)

Pour évaluer les *Caps/Floors*, nous avons utilisé Excel et VBA pour programmer les différentes formules présentées dans le paragraphe précédent. La problématique d'évaluation des produits dérivés présente toujours un obstacle et une contrainte assez difficile à surpasser, surtout quand il s'agit d'implémenter des modèles stochastiques complexes. L'avantage des modèles *Vasicek* et *Cox-Ingersoll-Ross* est qu'ils nous donne la possibilité de retrouver des formules assez simples et bien définies des prix des différents produits dérivés. L'utilisation des méthodes de simulation (*Monte-Carlo*) est jugé non nécessaire. Dans ces deux *pricers* (sous *Vasicek* et *CIR*), nous avons laissé le choix à l'utilisateur de choisir les différents paramètres du modèle stochastique. Il a la possibilité de choisir entre l'utilisation des paramètres estimés à partir de la méthode du maximum de vraisemblance, ou bien la méthode des moindres carrés (séries temporelles). Malgré que la différence entre les deux estimations soit très petite, mais avec l'utilisation des grands montants, cette différence peut causer de grandes pertes à la banque. De même, pour les paramètres (Durée du contrat, taux d'exercice, …) du *Cap/Floor*, nous avons laissé libre choix à l'utilisateur de choisir les différentes caractéristiques du produit dérivé.

Nous avons fourni en **annexe I** les codes VBA utilisés pour les *pricers* du Cap/Floor sous le modèle de *Vasicek* et *Cox-Ingersoll-Ross*, et les captures d'écrans des *pricers* sous les deux modèles.

- ***Comparaison des prix du Cap/Floor sous les deux modèles***

Pour un contrat *Cap/Floor*, présentant les caractéristiques suivantes :

Tableau 11 Paramètres utilisés pour le calcul des prix Cap/Floor

Taux d'exercice (r_e)	0,045
Maturité du Taux de référence(en jours)	90
Durée du contrat	720
Date de prise d'effet du Cap/floor	60
Nominal	1

Nous retrouvons les prix suivants :

- Sous le modèle de *Vasicek* :

Tableau 12 Prix du Cap/Floor sous le modèle de Vasicek

	Maximum de vraisemblance	**Moindre carrés**
Cap	0,161246106	0,16108548
Floor	2,049E-129	9,9822E-129

- Sous le modèle de *Cox-Ingersoll-Ross* :

Tableau 13Prix du Cap/Floor sous le modèle CIR

	Maximum de vraisemblance	**Moindre carrés**
Cap	0,160757013	0,161327817
Floor	1,3902E-10	4,3176E-29

Nous remarquons qu'il n'existe pas une grande différence entre les prix du *Cap* ou *Floor* sous les deux méthodes d'estimations. Par contre, en comparant les deux modèles sous une méthode d'estimation, nous pouvons remarquer qu'il existe un écart à partir du troisième chiffre après la virgule. Cela peut être expliqué par la distinction de la dynamique des taux courts considérés par chacun des deux modèles.

III.3 Swaps de taux d'intérêt

Dans cette partie, nous présenterons une introduction sur les swaps de taux d'intérêts, et les modèles de *pricing* de ces produits. Nous commencerons par présenter les concepts importants du marché des *swaps*. Après nous donnerons les différents principes d'évaluation des swaps de taux d'intérêts, qui différent de ceux utilisées dans le *pricing* des options sur zéro-coupon ou dans le *pricing* des *caps* et *floors*.

III.3.1 Introduction aux contrats des swaps de taux d'intérêt

Les contrats *Swaps* (ou contrats d'échanges financiers) tels qu'ils sont pratiqués aujourd'hui étaient encore inexistants avant 1980. Ils représentent actuellement un encours mondial de 20 trillions de dollars (20 milles milliards). Conçus à l'origine pour contourner la réglementation en vigueur en Grande-Bretagne jugée trop contraignante en matière de change, leur développement a été fulgurant depuis que le premier *swap* de taux a été initié entre la Banque Mondiale et la société IBM et qui a porté sur un emprunt obligataire de 290 millions de dollars échangé contre des francs suisses et des marks allemands.

Le principe d'un swap de taux d'intérêt est de comparer un taux variable et un taux garanti et de se verser mutuellement les différentiels de taux d'intérêt sans échange en capital. Le swap de taux est particulièrement adapté à la gestion du risque de taux à long terme en entreprise. Le marché des swaps a connu un essor considérable et les banques occupent un rôle déterminant dans l'animation de ce marché. Les trésoriers d'entreprise apprécient la souplesse du swap qui leur permet de choisir la durée, le taux variable de référence et le notionnel. Le swap conclu entre une banque et une entreprise peut être liquidé à tout moment en calculant la valeur actuelle des flux fixes prévus au taux du marché en la comparant au notionnel initial. L'utilisation du swap est également fréquente pour gérer le risque de taux sur des actifs à taux variable ou à taux fixe.[8]

Nous distinguons en général deux familles de *swaps* de taux d'intérêts : d'abord pour les emprunts dans une même monnaie où nous pouvons envisager des *swaps* taux fixe contre taux variable ou encore variable contre variable ; ensuite, pour les emprunts dans deux monnaies différentes, s'ajoutent aux premiers la possibilité d'un *swap* de taux fixe contre taux fixe.

Rappelons aussi, que le contrat *swap* est un contrat de gré à gré, donc tout est négociable et se négocie sur un marché OTC (Over The Counter).

Si nous considérons une entreprise anticipant une baisse des taux d'intérêt sur le marché, en envisageant un *swap* de taux, elle pourra transformer un endettement à taux fixe (crédit par exemple) en un endettement à taux variable. Il lui suffit de trouver la banque ou l'entreprise qui accepterait de lui payer le taux fixe en échange du taux variable. Il est nécessaire de savoir que les deux parties engagées dans le *swap*, peuvent en tirer bénéfice. En effet, le principe exploité ici est le principe de *l'avantage comparatif,* de *David Ricardo,* puisque l'environnement économique change d'un pays à un autre. Le fait que nous ayons des politiques économiques différentes, permet d'avoir une diversification et de multitude cotations des taux d'intérêts, et

[8] Source : www.lesechos.fr

donc chaque entreprise aura à emprunter sur le marché qui lui est favorable. Un autre facteur qui peut expliquer la différence des taux d'emprunts entre entreprises, est la solvabilité. En effet si une entreprise A est plus solvable qu'une entreprise B (et donc a une meilleure notation), le taux d'emprunt de A est plus petit que celui de B.

Pour mieux comprendre, nous donnons l'exemple suivant :

Deux entreprises A et B souhaitent emprunter 20 Millions d'euros sur 10 ans. Nous supposons qu'elles ont le choix entre un emprunt à taux fixe ou à un taux variable. Les taux proposés pour cet emprunt sont résumés dans le tableau suivant :

Tableau 14 Taux des emprunts des deux entreprises A et B

	Fixe	**Variable**
A	8%	*Libor* 6 mois+40 pts
B	9,20%	*Libor* 6 mois+110 pts

Le LIBOR, ou London Interbank Offered Rate, est le taux du marché monétaire observé à Londres. Il est égal à la moyenne arithmétique des taux offerts sur le marché bancaire à Londres pour une échéance déterminée (entre 1 et 12 mois) et une devise donnée (euro, livre, dollar)[9].

Le fait qu'il y'a une différence entre les taux auxquels les deux entreprises A et B peuvent emprunter a créé la possibilité de l'utilisation d'un *swap* de taux de d'intérêt. En effet, cette différence vaut 1,2% sur le taux fixe et 0,7% sur le taux variable. Donc, l'entreprise B a un avantage comparatif sur le taux variable et l'entreprise A a cet avantage sur le taux fixe. B empruntera à un taux variable *LIBOR* +1,1% et A empruntera à un taux fixe de 8%. Les deux entreprises peuvent conclure un *swap* où l'entreprise A paiera le *LIBOR* 6 mois sur un principal de 20 Millions d'euros (montant de l'emprunt) et l'entreprise B paiera un taux fixe de 7,95% sur le même principal. Nous utiliserons le graphique suivant pour expliquer le cheminement de l'opération :

[9] Source : www.lesechos.fr

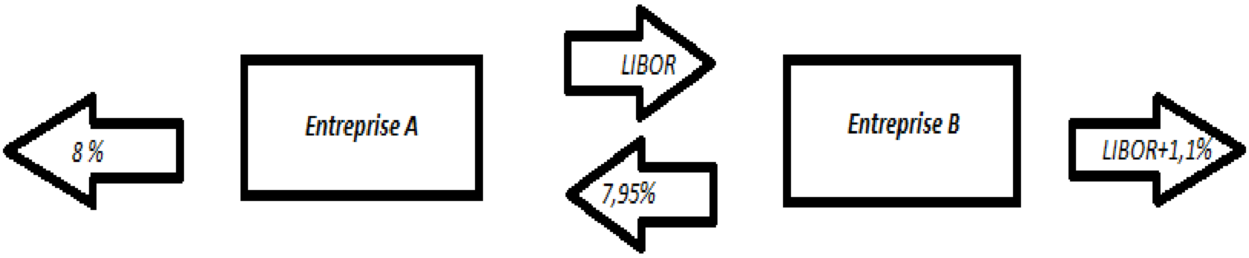


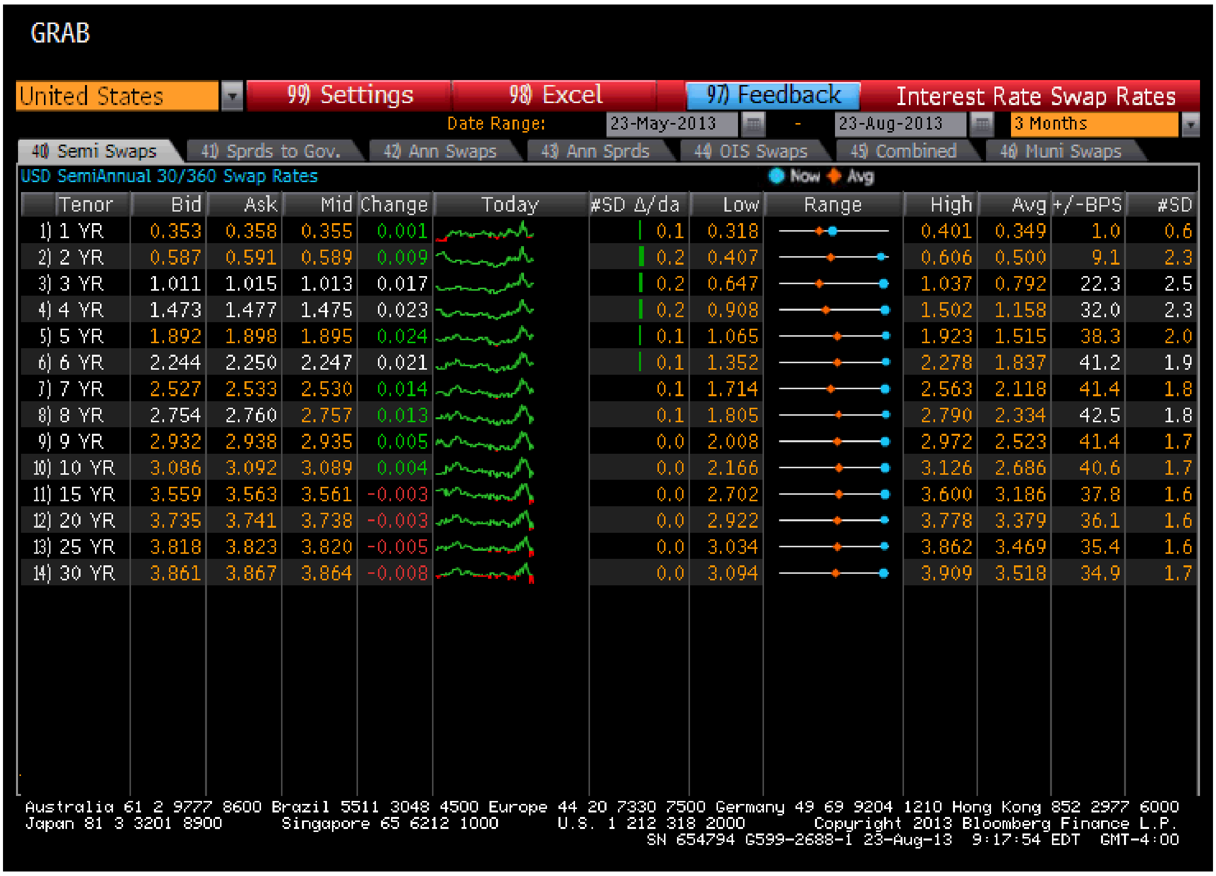
Figure 8 Swap entre Entreprise A et Entreprise B sur la base du tableau

Du point de vue de l'entreprise A, cette opération de swap revient à un emprunt à un taux variable *LIBOR* +5pts qui est inférieur au LIBOR +40pts (LIBOR+5pts = LIBOR + 8% - 7,95%). Et pour l'entreprise B, il revient à un emprunt à un taux fixe de 9,05% qui est inférieur au taux 9,20% qui lui est proposé (9,05% = 7,95% + *LIBOR* +1,1% - *LIBOR*). De ce fait, nous pouvons affirmer que cette opération de swap est bénéfique pour les deux entreprises et permet d'optimiser leurs taux d'emprunts.

Le fait que les emprunts des différentes entreprises soient généralement différents, en termes d'échéance et montants, les entreprises ont recours à un intermédiaire financier (généralement une banque) pour pouvoir contracter un *swap* de taux d'intérêt. L'implication d'un intermédiaire financier changera les résultats précédents. Par exemple le taux reçu par l'entreprise A sera 7,93% au lieu de 7,95%, et l'entreprise B aura à payer un taux de 7,97% au lieu de 7,95%.

Les swaps permettent aussi aux intervenants sur le marché financier de mieux gérer leur exposition au risque de leur bilan sans toutefois y apporter des changements. De ce fait, les swaps permettent de séparer entre la gestion des risques et la gestion de la liquidité.

La cotation des *swaps* se fait grâce au taux fixe, qui joue le rôle de variable de cotation. Les teneurs de marché cotent un taux prêteur (prix *bid*), auquel il est prêt à payer la patte fixe et un taux emprunteur (prix *ask*), auquel il est prêt à payer la patte variable, pour chaque maturité. Naturellement, les taux prêteurs sont supérieurs aux taux emprunteurs. Nous pouvons voir, à titre d'illustration, les cotations du marché swaps US Dollar contre *LIBOR* dans la capture d'écran ci-dessous :



	Tenor	Bid	Ask	Mid	Change	Today	#SD Δ/da	Low	Range	High	Avg	+/-BPS	#SD
1)	1 YR	0.353	0.358	0.355	0.001		0.1	0.318		0.401	0.349	1.0	0.6
2)	2 YR	0.587	0.591	0.589	0.009		0.2	0.407		0.606	0.500	9.1	2.3
3)	3 YR	1.011	1.015	1.013	0.017		0.2	0.647		1.037	0.792	22.3	2.5
4)	4 YR	1.473	1.477	1.475	0.023		0.2	0.908		1.502	1.158	32.0	2.3
5)	5 YR	1.892	1.898	1.895	0.024		0.1	1.065		1.923	1.515	38.3	2.0
6)	6 YR	2.244	2.250	2.247	0.021		0.1	1.352		2.278	1.837	41.2	1.9
7)	7 YR	2.527	2.533	2.530	0.014		0.1	1.714		2.563	2.118	41.4	1.8
8)	8 YR	2.754	2.760	2.757	0.013		0.1	1.805		2.790	2.334	42.5	1.8
9)	9 YR	2.932	2.938	2.935	0.005		0.0	2.008		2.972	2.523	41.4	1.7
10)	10 YR	3.086	3.092	3.089	0.004		0.0	2.166		3.126	2.686	40.6	1.7
11)	15 YR	3.559	3.563	3.561	-0.003		0.0	2.702		3.600	3.186	37.8	1.6
12)	20 YR	3.735	3.741	3.738	-0.003		0.0	2.922		3.778	3.379	36.1	1.6
13)	25 YR	3.818	3.823	3.820	-0.005		0.0	3.034		3.862	3.469	35.4	1.6
14)	30 YR	3.861	3.867	3.864	-0.008		0.0	3.094		3.909	3.518	34.9	1.7

Figure 9 Capture d'écran des cotations des swaps US Dollar contre LIBOR 3mois (Source : Bloomberg Terminal)

Par exemple, pour un swap de taux de maturité 4 ans, la patte fixe du swap est de 1,477%. Le *LIBOR* 3 mois est de 0,5%. A la date de règlement, le payeur du fixe recevra 1,477%-0,5%=0,977% multiplié par le principal.

III.3.2 Méthodes d'évaluation des Swaps de taux d'intérêt

Nous abordons dans cette partie l'évaluation des *swaps*. Notons qu'au moment où un *swap* de taux d'intérêt est conclu sa valeur est nulle, c'est-à-dire qu'il n'y a pas de versement d'une prime à la date de conclusion du contrat contrairement aux options. Cependant, la valeur du *swap* peut devenir positive ou négative au cours du temps. Les deux méthodes d'évaluation qui existent consistent soit à considérer le *swap* comme un portefeuille d'obligations soit à utiliser l'approche classique du marché.

- ***<u>Le Swap comme portefeuille obligataire</u>***

En considérant un swap sans échange du principal, la valeur du *swap* est égale à :

$$\boldsymbol{PV_{swap} = B_{fixe} - B_{variable}}$$

pour un swap payeur, c'est-à-dire lorsqu'on est la contrepartie dans un swap vanille qui paie le taux variable et reçoit le taux fixe. A l'inverse, pour un swap receveur où la contrepartie paye le taux fixe et reçoit le taux variable :

$$\boldsymbol{PV_{swap} = B_{variable} - B_{fixe}}$$

Pour le calcul de B_{fixe} , nous utilisons le principe classique d'évaluation des obligations. Elle est égale à la somme des valeurs actuelles des flux qu'elle génère, c'est-à-dire à la somme des coupons actualisés sans prendre en considération le montant du principal. Les coupons dans notre cas est le principal multiplié par le taux fixe du contrat *swap*. Et pour le calcul de $B_{variable}$, elle est égale à la somme des valeurs actuelles des coupons variables.

Nous présentons les formules de calcul :

$$\boldsymbol{B_{fixe} = \sum_{t=1}^{m*n} \frac{\frac{C}{m}}{(1+\frac{r_t}{m})^t}}$$

Avec :

- m : nombre de payements par an.
- n : maturité du swap.
- r_t: taux d'actualisation à la date t.
- C: coupon fixe (taux fixe du swap multiplié par le principal).

Et

$$\boldsymbol{B_{variable} = N - \frac{N}{(1+\frac{r_{m*n}}{m})^{m*n}}}$$

Car

$$\boldsymbol{N = \sum_{t=1}^{m*n} \frac{\frac{V_t}{m}}{(1+\frac{r_t}{m})^t} + \frac{N}{(1+\frac{r_{m*n}}{m})^{m*n}}}$$

Où V_t est le coupon variable qui est inconnu.

Nous pouvons simplifier les relations en incluant les facteurs d'actualisation (Prix zéro-coupon sur une unité monétaire) :

$$\boldsymbol{\begin{cases} B_{fixe}(t_0) = \frac{C}{m} * \sum_{t=1}^{m*n} P(t_0, t) \\ B_{variable}(t_0) = N - N * P(t_0, m*n) \\ C = N * R \end{cases}}$$

$$\boldsymbol{=> PV_{swap}(t_0) = \frac{C}{m} * \sum_{t=1}^{m*n} P(t_0, t) - N + N * P(t_0, m*n) \quad (\textit{pour un swap payeur})}$$

Où R est le taux fixe du *swap.*

Nous appelons taux de swap, le taux R qui rend le PV_{swap} égal à zéro. En utilisant les différentes formules présentées ci-dessus, nous obtenons à t=0 :

$$\boldsymbol{PV_{swap}(0) = 0}$$

$$=> \boldsymbol{B_{fixe}(0) - B_{variable}(0) = 0}$$

$$=> \boldsymbol{R = \frac{1 - 1 * P(0, m*n)}{\frac{1}{m} * \sum_{t=1}^{m*n} P(0,t)}}$$

- ***<u>Approche classique du marché</u>***

L'approche classique du marché consiste à ce que les taux futurs de la patte variable sont égaux aux taux *forwards* calculés à la date où nous souhaitons évaluer le *swap.*

En utilisant les notations de l'approche précédente, nous avons :

$$\boldsymbol{PV_{swap}(t_0) = \frac{C}{m} * \sum_{t=1}^{m*n} P(t_0, t) - \sum_{t=1}^{m*n} V_t * P(t_0, t) \quad (pour\ un\ swap\ payeur)}$$

Avec

$$\boldsymbol{V_t = F(t_0, t, t+m)}$$

III.3.3 Application

Dans cette partie, nous considérons un exemple de *swap* de taux 4 mois (Taux zéro-coupon de maturité 4 mois) de maturité 5 ans caractérisé par l'échéancier suivant :

				-F1			-F2			-F3			-F4			-F5
t	T0	T1	T2	T3	T4	T5	T6	T7	T8	T9	T10	T11	T12	T13	T14	T15
		V1	V2	V3	V4	V5	V6	V7	V8	V9	V10	V11	V12	V13	V14	V15

Avec : $T_{i+1} - T_i = 4\ mois$ pour tout $i = \{0, \ldots 15\}$.

Il est clair d'après le tableau qu'il s'agit d'un *swap* payeur. Donc, après chaque 4 mois, nous recevons la jambe variable et nous payons au bout de chaque année la jambe fixe.

Nous souhaitons connaitre à la date t de ce *swap* qui commence en T_0.Elle est donnée par la formule suivante :

$$\boldsymbol{SWAP_t = N * \left(\frac{1}{3} * \sum_{i=1}^{15} V_i P(t, T_i) - \sum_{j=1}^{5} F_j P(t, T_{5j}) \right)}$$

Avec N est le principal ou nominal du *swap.*

Dans cette application, nous utiliserons l'approche d'évaluation classique du marché qui repose sur le fait que le taux zéro-coupon 4 mois qui vont se réaliser dans le futur sont égaux aux taux zéro-coupon 4 mois *forwards.* Cela implique de connaitre :

- la courbe zéro-coupon au comptant (c'est-à-dire à la date t) ;

- les taux zéro-coupon 4 mois forwards.

Nous allons à présent émettre les hypothèses de calcul :

- la date de calcul est le 26/05/2014 ;
- la date t est égale à la date T_0 ;
- le principal du *swap* est fixé à 100 millions de dirhams ;
- le taux fixe du swap est égal à 4%.

La courbe des taux zéro-coupon au 26/05/2014 est reconstituée à partir de la méthode du *Bootstrap* décrite dans la partie « *Modèles déterministes de taux d'intérêts* » du deuxième chapitre du présent rapport.

Les taux zéro-coupon 4 mois *forwards* sont déduits de la courbe des taux zéro-coupon par la formule

$$\boldsymbol{F(t,T_i,T_{i+1}) = \left(\frac{P(t,T_i)}{P(t,T_{i+1})} - 1\right) * \frac{360}{T_{i+1} - T_i}}$$

Où $F(t,T_i,T_{i+1})$ est le taux zéro-coupon 4mois *forward* calculé en t, démarrant en T_i et d'échéance T_{i+1}.

Ces deux courbes sont résumées dans le tableau suivant :

Tableau 15 Evaluation du swap de taux zéro-coupon 4 mois de maturité 5 ans

Échéance	Ti en jours	Taux Zéro-Coupon	P(t, Ti)	F(t,Ti,Ti+1)	1/3 F(t,Ti,Ti+1)*P(t,Ti)	- Fixe.j*P(t,T4j)
T0						
T1	120	0,031718447	0,98948288	0,031718447	0,01046162	
T2	240	0,032081621	0,978839349	0,032620874	0,010643532	
T3	360	0,03250876	0,96801397	0,033549243	0,010825379	-0,038720559
T4	480	0,033178887	0,956725735	0,03539646	0,011288235	
T5	600	0,033849015	0,945146795	0,036752831	0,01157894	
T6	720	0,034519142	0,933290949	0,038109808	0,011855846	-0,037331638
T7	840	0,03508092	0,921405111	0,038699061	0,011885837	
T8	960	0,035642697	0,90933002	0,039837322	0,012075091	
T9	1080	0,036204474	0,89707714	0,04097601	0,012252881	-0,035883086
T10	1200	0,036765068	0,884661471	0,042103119	0,012415669	
T11	1320	0,037325661	0,872091649	0,043240254	0,012569821	
T12	1440	0,037886255	0,859379193	0,044377813	0,012712457	-0,034375168
T13	1560	0,038446377	0,846537342	0,045509574	0,012841851	
T14	1680	0,039006498	0,833576061	0,046647024	0,012961281	
T15	1800	0,03956662	0,820506783	0,047784899	0,013069278	-0,032820271

La valeur du swap s'établit alors à

$$\boldsymbol{SWAP_t = 100000000} * \left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}} * \sum_{i=1}^{15} \boldsymbol{F(t, T_i, T_{i+1}) P(t, T_i)} - \sum_{j=1}^{5} \boldsymbol{F_j P\big(t, T_{5j}\big)} \right)$$

$$=> \boldsymbol{SWAP_t = 30699,5788\ Dhs}$$

Conclusion

La convergence de notre pays vers la modernisation de son marché financier via l'instauration d'un marché à terme et la création de Casa Finance City(CFC), aura un impact sur la nature des opérations traitées dans les salles des marchés des banques marocaines. L'objectif majeur de notre étude étant de *pricer* des produits de couverture du risque de taux d'intérêt. Cette problématique aura plus d'importance quand la loi sur les marchés à termes sera opérationnelle.

Cependant, avant d'attaquer la partie *pricing* des trois produits dérivés de base de taux d'intérêts, nous avons été amenés à lire les rapports d'activités des cinq premières banques marocaines et à lire aussi les circulaires des différents organismes étatiques intervenants sur le marché financier, à savoir : Bank-Al-Maghrib, le Conseil Déontologique des Valeurs Mobilières, l'Office des Changes. L'objectif étant de comprendre le fonctionnement et la réglementation du marché financier, chose qui est indispensable pour une personne exerçant un métier de marché tel qu'un *Trader*, un Structureur, un *Quant* ou un Analyste Financier.

Après, nous avons traité les modèles de taux d'intérêt dans leurs versions déterministes et stochastiques. Dans les modèles déterministes, nous avons construit la courbe des taux zéro-coupon marocaine, et étudié des méthodes de calibration avancée tels que le modèle de *Nelson-Siegel* et le modèle de *Svensson*. Ces deux modèles de calibration sont utilisés par les banques centrales des pays avancés. Dans les modèles stochastiques, nous avons étudié les deux modèles classiques de l'évolution du taux court, à savoir le modèle de *Vasicek* et le modèle de *Cox-Ingersoll-Ross*. Après estimation des paramètres de ces deux modèles stochastiques, sur la base des taux moyens pondérés du marché interbancaire publié par la banque centrale marocaine, nous avons construit un générateur des trajectoires du taux court via les deux modèles.

Dans la troisième et dernière partie du rapport, nous avons présenté trois produits de couverture du risque de taux d'intérêt, à savoir l'option d'achat ou de vente sur une obligation zéro-coupon, les *caps/floors* et les *swaps* de taux d'intérêts. Le *pricing* des deux premiers produits s'est effectué sur la base des deux modèles stochastiques présentés dans la deuxième partie (*Vasicek* et *Cox-Ingersoll-Ross*) et des estimations trouvées à l'aide de la méthode des moindres carrés et la méthode du maximum de vraisemblance. Donc pour chaque produit, nous nous retrouvons avec quatre prix (2 modèles + 2 méthodes d'estimations des paramètres).

Tout compte fait, notre projet présente une importance relativement haute pour la salle des marchés, étant donné l'essor du marché financier marocain. Ainsi, ce sujet sort du cadre classique du rôle du *Trader* dans une salle de marché marocaine à savoir : la gestion des risques et le traitement des ordres.

Limite de la modélisation et ouverture Tout bon travail engendre de petites « limites » qu'il faudra surpasser dans d'éventuelles études. Pour le cas de notre projet, les limites se manifestent dans le fait que les modèles stochastiques de taux d'intérêt utilisés sont anciens. Ainsi, nous proposons au cher lecteur, désireux d'approfondir notre travail, de se baser sur des modèles stochastiques d'actualité tel que le modèle *Heath-Jarrow-Morton (HJM).*

Bibliographie

LONDON, Justin. Modeling derivatives in C++. New Jersey : John Wiley & Sons,Inc. ,2005. 841p.

WILMOTT, Paul. Paul Wilmott Introduces Quantitative Finance. 2ème éd. Angleterre : John Wiley & Sons Ltd, 2007. 724p.

FLAVELL, Richard. Swaps and other derivatives. Angleterre : John Wiley & Sons Ltd, 2002. 464p.

RACICOT, François-Éric. THEORET, Raymond. Finance computationnelle et gestion des risques : Ingénierie financière avec application Excel (Visual Basic) et Matlab. Québec : Presses de l'Université du Québec, 2006. 738p.

M.IACUS, Stephano. Simulation and Inference for Stochastic Differential Equations With R Examples. USA : Springer Science+Business Media, LLC, 2008. 300p.

DE MUNNIK, Jeroen. SCHOTMAN, Peter. Cross-sectional versus time series estimation of term structure models : empirical results for the Dutch bond market. Journal of BANKING & FINANCE, 1994, vol.18, p.997-1025.

CHACKO, George. DAS, Sanjiv. Pricing Interest Rate Derivatives : A General Approach. The Review of Financial Studies, printemps 2002, vol. 15, No. 1, p.195-241.

BALL, Clifford. TOROUS, Walter. Unit roots and the estimation of interest rate dynamics. Journal of EMPIRICAL FINANCE, 1996, vol.3, p.215-238.

BIAD, Sahar. HATIM, Sara. Modélisation de l'évolution de la courbe des taux et réalisation d'un simulateur de performance. 124p. Diplôme d'Ingénieur d'Etat : Actuariat-Finance : INSEA : 2009.

H.ELHAMMAR, Mouhcine. Etude et pricing d'une gamme de produits dérivés sur Taux d'Intérêts. 80p. Diplôme d'Ingénieur d'Etat : Actuariat-Finance : INSEA : 2003.

MARTELLINI, Lionel. PRIAULET, Philipe. Produits de Taux d'Intérêt : Méthodes dynamiques d'évaluation et de couverture. Paris : ECONOMICA, 2000.

Annexe A

- Code **VBA** de la fonction *Rzc* qui calcule le taux zéro-coupon avec la méthode du *bootstrap* :

```
Public Function Rzc(Tx As Double, Ca As Double, n As Integer) As
Double

Dim A As Double, B As Double, i As Integer

If n = 1 Then
Rzc = Sheets("TauxZC").Range("C16").Value
End If
If n > 1 Then
A = Ca
For i = 1 To n - 1
A = A - (Tx * Ca / (1 + Rzc(Tx, Ca, i)) ^ i)
Next
B = (Ca * (1 + Tx) / A) ^ (1 / n) - 1
Rzc = B
End If

  End Function
```

Annexe B

-Code **R** pour estimer les paramètres et pour tracer la courbe du modèle de *Nelson-Siegel :*

```
library(YieldCurve)

rate.Tresor=read.csv("C:/Users/user/Desktop/Credit Agricole Maroc/Courbe des taux/Données Nelson Siegel.csv", header=TRUE, sep=";", dec=",")
x <- xts(t(rate.Tresor$ZC), Sys.Date(), maturity=rate.Tresor$Maturité, dimnames=list(NULL, paste("X", rate.Tresor$Maturité, sep="")))
NSParameters <- Nelson.Siegel(rate=x, maturity=attr(x,'maturity'))
Nelson.rate <- NSrates(NSParameters, attr(x,'maturity'))
plot(rate.Tresor$Maturité, rate.Tresor$ZC, main="Fitting Nelson-Siegel Moroccan yield curve", type="o")
lines(rate.Tresor$Maturité,Nelson.rate, col=2)
legend("bottomright", legend=c("observed yield curve","fitted yield curve (Nelson)","fitted yield curve(Svensson)"),col=c(1,2,3), lty=1)

> NSParameters
                beta_0      beta_1      beta_2      lambda
2014-04-10  0.01932446  0.01174901  0.09016941  0.09079789
```

-Code **R** pour estimer les paramètres et pour tracer la courbe du modèle de *Svensson* :

```
library(YieldCurve)

rate.Tresor=read.csv("C:/Users/user/Desktop/Credit Agricole Maroc/Courbe des taux/Données Nelson Siegel.csv", header=TRUE, sep=";", dec=",")
x <- xts(t(rate.Tresor$ZC), Sys.Date(), maturity=rate.Tresor$Maturité, dimnames=list(NULL, paste("X", rate.Tresor$Maturité, sep="")))
SvenssonParameters <- Svensson(x, attr(x,'maturity'))
Svensson.rate <- Srates( SvenssonParameters ,attr(x,'maturity'),"Spot")
lines(rate.Tresor$Maturité,Svensson.rate, col=3)

> SvenssonParameters
                beta_0      beta_1     beta_2     beta_3      tau1      tau2
2014-04-10  -0.08593814  0.1183185  0.0488286  0.3887738  2.369957  11.15275
```

Annexe C

-Sorties **R** des différents tests de stationnarité, de l'autocorrélation, d'hétéroscédasticité et de normalité de la série TMP :

```
> adf.test(data$TMP)

        Augmented Dickey-Fuller Test

data:  data$TMP
Dickey-Fuller = -6.2163, Lag order = 15, p-value = 0.01
alternative hypothesis: stationary

> AutocorTest(residuals(arima(data$TMP,order=c(1,0,0))))

        Box-Ljung test

data:  residuals(arima(data$TMP, order = c(1, 0, 0)))
X-squared = 103.2895, df = 9, p-value < 2.2e-16

> ArchTest(residuals(arima(data$TMP,order=c(1,0,0))))

        ARCH LM-test; Null hypothesis: no ARCH effects

data:  residuals(arima(data$TMP, order = c(1, 0, 0)))
Chi-squared = 145.9426, df = 12, p-value < 2.2e-16

> ks.test(residuals(arima(data$TMP,order=c(1,0,0))),"pnorm")

        One-sample Kolmogorov-Smirnov test

data:  residuals(arima(data$TMP, order = c(1, 0, 0)))
D = 0.4952, p-value < 2.2e-16
alternative hypothesis: two-sided
```

Annexe D

-Code **R** des estimateurs du maximum de vraisemblance du modèle de *Vasicek* :

```
> n <- 3758
> rx <- sum(r[1:length(r)-1])
> ry <- sum(r[2:length(r)])
> rxx <- crossprod(r[1:length(r)-1], r[1:length(r)-1])
> rxy <- crossprod(r[1:length(r)-1], r[2:length(r)])
> ryy <- crossprod(r[2:length(r)], r[2:length(r)])
>
> b <- (ry * rxx - rx * rxy) / (n* (rxx - rxy) - (rx^2 - rx*ry) )
> a <- -log((rxy - b * rx - b * ry + n * b^2) /   (rxx - 2 * b * rx + n * b^2))
> alpha <- exp(-a)
> sigmaetoile2 <- (ryy - 2 * alpha * rxy + alpha^2 * rxx - 2 * b * (1-alpha) * (ry - alpha *
rx) + n * b^2 * (1 - alpha)^2)/n
> sigma <- sqrt(sigmaetoile2 * 2 * a / (1 - alpha^2))
```

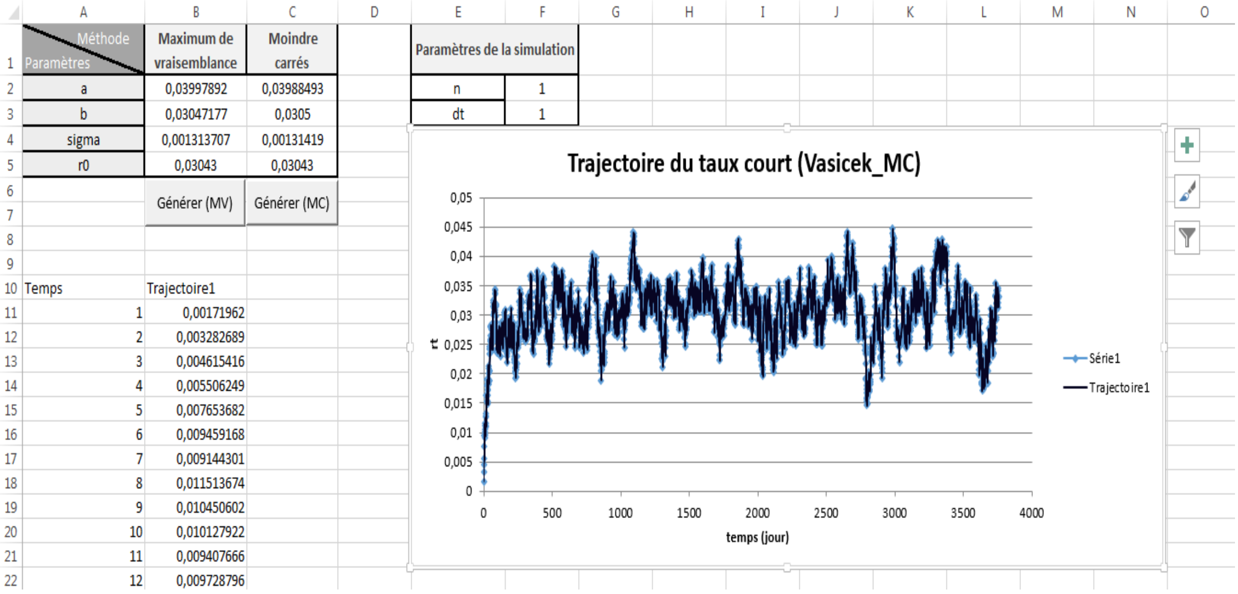
-Code **R** de la fonction de vraisemblance et des estimateurs du MV du modèle de *Cox-Ingersoll-Ross :*

```
>expBes <- function (x,nu ){
+ mu <- 4*nu ^2
+ A1 <- 1
+ A2 <- A1 * (mu - 1) / (1 * (8*x))
+ A3 <- A2 * (mu - 9) / (2 * (8*x))
+ A4 <- A3 * (mu - 25) / (3 * (8*x))
+ A5 <- A4 * (mu - 49) / (4 * (8*x))
+ A6 <- A5 * (mu - 81) / (5 * (8*x))
+ A7 <- A6 * (mu -121) / (6 * (8*x))
+ 1/ sqrt (2*pi*x) * (A1 - A2 + A3 - A4 + A5 - A6 + A7)
+ }
> dcCIR <- function (x, x0 , a , b , sigma , log = FALSE ){
+ c <- 2*a /((1 - exp (-a))* sigma^2)
+ u <- c*x0* exp (-a)
+ v <- c*x
+ q <- 2* a*b / sigma^2 -1
+ likehood <- ( log (c) - (u+v) + q/2 * log (v/u) + log (expBes ( 2* sqrt (u*v),
q))+2*sqrt(u*v))
+ if(! log )
+ likehood <- exp ( likehood )
+ likehood
+ }
> CIRLikehood<- function ( a1 , b1 , sigma1 ) {
+ n <- length (data$TMP)
+ -sum ( dcCIR (x=data$TMP[2: n], x0=data$TMP[1:(n -1)] , a=a1 , b=b1, sigma=sigma1,
+ log = TRUE)) }
> fit <- mle ( CIRLikehood , start=list( a1=0.02 , b1=0.02 , sigma1=0.001) ,method="L-
BFGS-B",lower=c(0.01 ,0.01 ,0.0001) , upper=c(0.04 ,0.04,0.04))
```

Annexe E

- Pour générer des trajectoires du taux court sous le modèle de *Vasicek* :

```
Sub Bouton1_Cliquer()

Dim r0 As Double
Dim a As Double
Dim b As Double
Dim sigma As Double
Dim n As Integer
Dim dt As Double
Dim dr As Double
Dim i As Integer
Dim j As Integer


a = Range("C2")
b = Range("C3")
sigma = Range("C4")
r0 = Range("C5")
dt = Range("F3")
n = Range("F2")


Range("A10") = "Temps"

For j = 0 To n - 1

For i = 0 To 3757
Randomize
eps = Application.WorksheetFunction.NormSInv(Rnd)
rt = rt + a * (b - rt) * dt + sigma * eps * Sqr(dt)
Range("B11").Offset(i, j) = rt
Next i
Worksheets("Vasicek").Cells(10, j + 2) = "Trajectoire" & j + 1
Next j



 Dim nb_graphe As Long
    nb_graphe = Worksheets("Vasicek").ChartObjects.Count
    If nb_graphe = 0 Then
        Dim plage As Range
        Set plage = Worksheets("Vasicek").Range(Worksheets("Vasicek").Cells(11, 1), _
                          Worksheets("Vasicek").Cells(11 + 3757, 2 + n - 1))
        Dim graphe_in As ChartObject
        Dim graphe As Chart
        Set graphe_in = Worksheets("Vasicek").ChartObjects.Add(100, 30, 400, 250)
        Set graphe = graphe_in.Chart
        graphe.ChartType = xlXYScatterLines
        graphe.SetSourceData plage, xlColumns
        graphe.HasTitle = True
        graphe.ChartTitle.Text = "Trajectoire du taux court (Vasicek_MC)"
        graphe.Axes(xlValue, xlPrimary).HasTitle = True
        graphe.Axes(xlValue, xlPrimary).AxisTitle.Text = "rt"
        graphe.Axes(xlCategory, xlPrimary).HasTitle = True
        graphe.Axes(xlCategory, xlPrimary).AxisTitle.Text = "temps (jour)"
        Dim serie As Series
        For i = 1 To n
            Set serie = graphe.SeriesCollection.NewSeries
            serie.XValues = Worksheets("Vasicek").Range(Worksheets("Vasicek").Cells(11, 1), _
                           Worksheets("Vasicek").Cells(11 + 3758, 1))
            serie.Values = Worksheets("Vasicek").Range(Worksheets("Vasicek").Cells(11, 1 + i), _
                          Worksheets("Vasicek").Cells(11 + 3758, 1 + i))
            serie.Name = "Trajectoire" & i
            serie.Border.Color = RGB(7 * i, 5 * i, 35 * i)
            serie.MarkerStyle = xlMarkerStyleNone
        Next i
    End If
    Set graphe = Nothing
    Set graphe = Nothing

End Sub
```



Méthode / Paramètres	Maximum de vraisemblance	Moindre carrés
a	0,03997892	0,03988493
b	0,03047177	0,0305
sigma	0,001313707	0,00131419
r0	0,03043	0,03043
	Générer (MV)	Générer (MC)

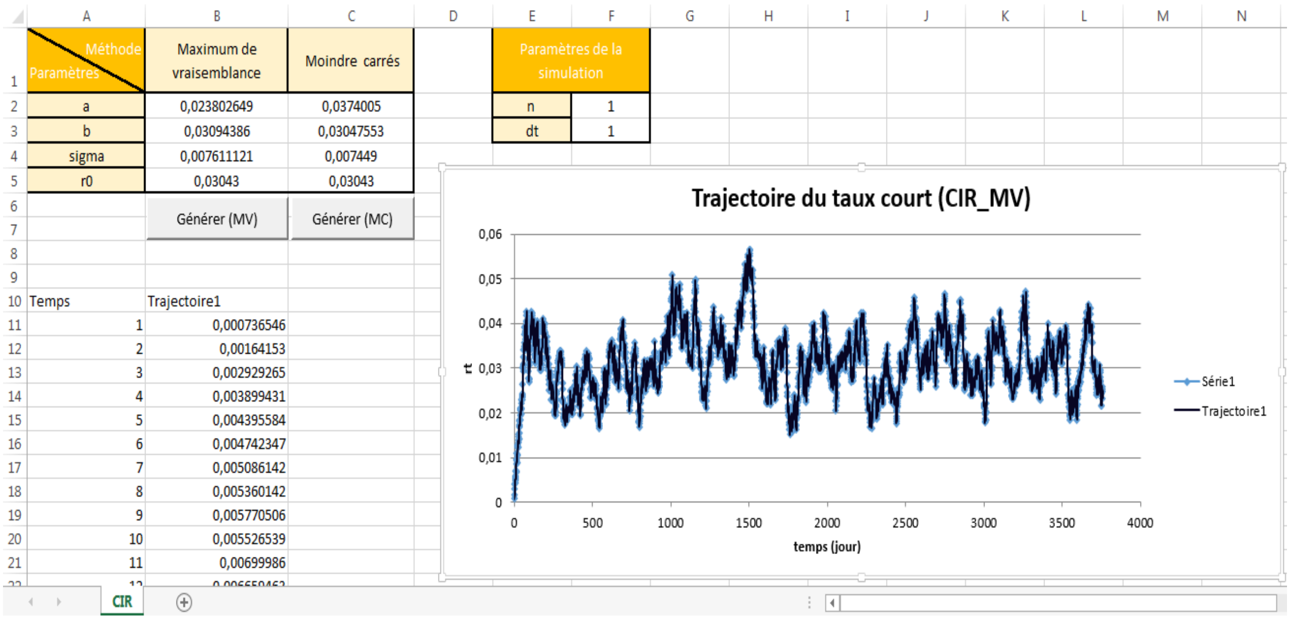
Paramètres de la simulation	
n	1
dt	1

Temps	Trajectoire1
1	0,00171962
2	0,003282689
3	0,004615416
4	0,005506249
5	0,007653682
6	0,009459168
7	0,009144301
8	0,011513674
9	0,010450602
10	0,010127922
11	0,009407666
12	0,009728796

Figure 10 Générateur de trajectoires du taux court sous le modèle de Vasicek

Pour générer les trajectoires du taux court du modèle de *Cox-Ingersoll-Ross*, il suffit de remplacer la boucle qui figure dans le code précédent du modèle de Vasicek par la boucle suivante :

```
For j = 0 To n - 1

For i = 0 To 3757
Randomize
eps = Application.WorksheetFunction.NormSInv(Rnd)
rt = rt + a * (b - rt) * dt + sigma * Sqr(rt) * eps * Sqr(dt)
Range("B11").Offset(i, j) = rt
Next i
Worksheets("CIR").Cells(10, j + 2) = "Trajectoire" & j + 1
Next j
```



Méthode / Paramètres	Maximum de vraisemblance	Moindre carrés
a	0,023802649	0,0374005
b	0,03094386	0,03047553
sigma	0,007611121	0,007449
r0	0,03043	0,03043
	Générer (MV)	Générer (MC)

Paramètres de la simulation	
n	1
dt	1

Temps	Trajectoire1
1	0,000736546
2	0,00164153
3	0,002929265
4	0,003899431
5	0,004395584
6	0,004742347
7	0,005086142
8	0,005360142
9	0,005770506
10	0,005526539
11	0,00699986

Figure 11 Générateur de trajectoires du taux court sous le modèle de Cox-Ingersoll-Ross

Annexe F

Tableau 16 Tableau des variables utilisés dans le code VBA pour le calcul des prix du put/call

Variable dans le code VBA	Notation usuelle	Signification
r0	$r(0)$	Taux court à la date de calcul (dans notre cas c'est le taux moyen pondéré du marché interbancaire)
a	a	La vitesse d'ajustement du taux court actuel vers sa moyenne de long terme b
b	b	Moyenne sur le long terme du taux court
sigma	σ	Ecart type du changement instantané de r(t)
N		Nombre de simulation pour le calcul de Monte-Carlo
MaturityO	s	Maturité de l'option (Put ou call)
MaturityB	T	Maturité du zéro-coupon
K	K	Prix d'exercice de l'option (Strike)
OptionP	$P(t,s,T,K)$	Prix calculé du put à l'aide de la formule analytique
OptionC	$C(t,s,T,K)$	Prix calculé du call à l'aide de la formule analytique
simgac	σ_c	Volatilité du zéro-coupon sous le modèle de Vasicek
rt	$r(t)$	Taux court à la date t
payoffcall_Act		Payoff d'un seul scénario de la simulation du call actualisé
payoffput_Act		Payoff d'un seul scénario de la simulation du put actualisé
MC_Call	$C^{MC}(t,s,T,K)$	Prix Monte-Carlo (simulé) du call
MC_Put	$P^{MC}(t,s,T,K)$	Prix Monte-Carlo (simulé) du put
PtT	$P(t,T)$	Prix d'un zéro coupon de maturité T
Pts	$P(t,s)$	Prix d'un zéro coupon de maturité s
PsT	$P(s,T)$	Prix d'un zéro coupon de maturité T à la date s
Ert	$E(r(t))$	Espérance de r(t) sous le modèle de Vasicek

Var_rt	$V(r(t))$	Variance de r(t) sous le modèle de Vasicek
std_rt	$\sigma(r(t))$	Ecart type de r(t) sous le modèle de Vasicek
NRandVars(N)		Fonction qui génère N nombres de la loi normal de moyenne 0 et variance 1
BtT	$B(T-t)$	Ce sont deux fonctions qui simplifient le calcul du prix d'une obligation zéro-coupon (en adoptant l'écriture affine du prix)
AtT	$A(T-t)$	
l		Variable binaire qui prend la valeur 1 ou 0. Si l =1 dans une fonction, cela veut dire que les paramètres utilisés pour le calcul sont issus des estimations par la méthode des moindres carrés. Sinon (l = 0), les estimations utilisées sont celles du maximum de vraisemblance.
Cumchn(x,df,pnonc)	$X^2(.;p,q)$	Est la fonction de répartition de la loi Khi-deux décentrée à p degrés de liberté et de paramètre de décentrage q.
h, psi, rho	h,ψ,ρ	Paramètres intermédiaires de calcul des prix des options dans les deux modèles

Annexe G

- Code de la fonction qui calcule le prix zéro-coupon sous le modèle de *Vasicek* :

```
Public Function ZeroCoupon(r As Double, ti As Double, tj As Double, l As Byte) As Double
  If l = 0 Then
  a = Range("B2")
  b = Range("B3")
  sigma = Range("B4")
  Else
  a = Range("C2")
  b = Range("C3")
  sigma = Range("C4")
  End If

  BtT = (1 - Exp(-a * (tj - ti))) / a
  AtT = Exp((b - 0.5 * sigma * sigma / (a * a)) * (BtT - (tj - ti)) - 0.25 * sigma * sigma * BtT * BtT / a)
  ZeroCoupon = AtT * Exp(-BtT * r)
End Function
```

- Code pour simuler N nombres de loi $N(0,1)$:

```
Public Function NRandVars(N As Long) As Variant
  ReDim randArr(1 To N) As Variant
  Dim i, n2, counter As Single
  n2 = Application.Floor(N / 2, 1)
  Dim v1, v2, tmp, fac As Double
  counter = 0
  For i = 1 To n2
    Do
      v1 = 2 * Rnd - 1
      v2 = 2 * Rnd - 1
      tmp = v1 * v1 + v2 * v2
    Loop Until tmp <= 1
    fac = Sqr(-2 * Log(tmp) / tmp)
    counter = counter + 1
    randArr(counter) = v1 * fac
    counter = counter + 1
    randArr(counter) = v2 * fac
  Next i
  If (N > (n2 * 2)) Then
    Do
      v1 = 2 * Rnd - 1
      v2 = 2 * Rnd - 1
      tmp = v1 * v1 + v2 * v2
    Loop Until tmp <= 1
    fac = Sqr(-2 * Log(tmp) / tmp)
    counter = counter + 1
    randArr(counter) = v2 * fac
  End If
  NRandVars = randArr
End Function
```

- Code pour le calcul des prix analytique et *Monte Carlo* du *put/call* sous le modèle de *Vasicek :*

```
Sub Bouton1_Cliquer()
Dim r0 As Double
Dim a As Double
Dim b As Double
Dim sigma As Double
Dim N As Long
Dim i As Long
Dim MaturityO As Double
Dim MaturityB As Double
Dim K As Double
Dim OptionC As Double
Dim OptionP As Double
Dim sigmac As Double
```

```
Dim h As Double
Dim rt As Double
Dim payoffcall_Act As Double
Dim payoffput_Act As Double
Dim MC_call As Double
Dim MC_put As Double
Dim Sum_payoffcall_Act As Double
Dim Sum_payoffput_Act As Double
a = Range("B2")
b = Range("B3")
sigma = Range("B4")
r0 = Range("B5")
N = Range("F11")
MaturityO = Range("B10")
MaturityB = Range("B9")
K = Range("B11")
PtT = ZeroCoupon(r0, 0, MaturityB, 0)
Pts = ZeroCoupon(r0, 0, MaturityO, 0)
sigmac = (sigma / a) * (1 - Exp(-a * (MaturityB - MaturityO))) * Sqr((1 / (2 * a)) * (1 - Exp(-2 * a * MaturityO)))
h = Log(PtT / (K * Pts)) * (1 / sigmac) + (sigmac / 2)

OptionC = PtT * Application.WorksheetFunction.Norm_Dist(h, 0, 1, True) _
        - K * Pts * Application.WorksheetFunction.Norm_Dist(h - sigmac, 0, 1, True)
OptionP = K * Pts * Application.WorksheetFunction.Norm_Dist(-h + sigmac, 0, 1, True) _
        - PtT * Application.WorksheetFunction.Norm_Dist(-h, 0, 1, True)
Range("B14").Value = OptionP
Range("B15").Value = OptionC
Mt = (b - sigma ^ (2) / a ^ (2)) * (1 - Exp(-a * (MaturityO))) + (sigma ^ (2) / (2 * a ^ (2))) * (1 - Exp(-a * (2 * MaturityO)))
Ert = r0 * Exp(-a * (MaturityO)) + Mt
Var_rt = (sigma ^ (2) / (2 * a)) * (1 - Exp(-2 * a * (MaturityO)))
std_rt = Var_rt ^ 0.5
normal = NRandVars(N)
For i = 1 To N
eps = normal(i)
rt = Ert + std_rt * eps
PsT = ZeroCoupon(rt, MaturityO, MaturityB, 0)
payoffcall_Act = Pts * WorksheetFunction.Max(PsT - K, 0)
payoffput_Act = Pts * WorksheetFunction.Max(K - PsT, 0)
Sum_payoffcall_Act = Sum_payoffcall_Act + payoffcall_Act
Sum_payoffput_Act = Sum_payoffput_Act + payoffput_Act
Next i
MC_call = Sum_payoffcall_Act / N
MC_put = Sum_payoffput_Act / N
Range("F14") = MC_put
Range("F15") = MC_call
End Sub
```

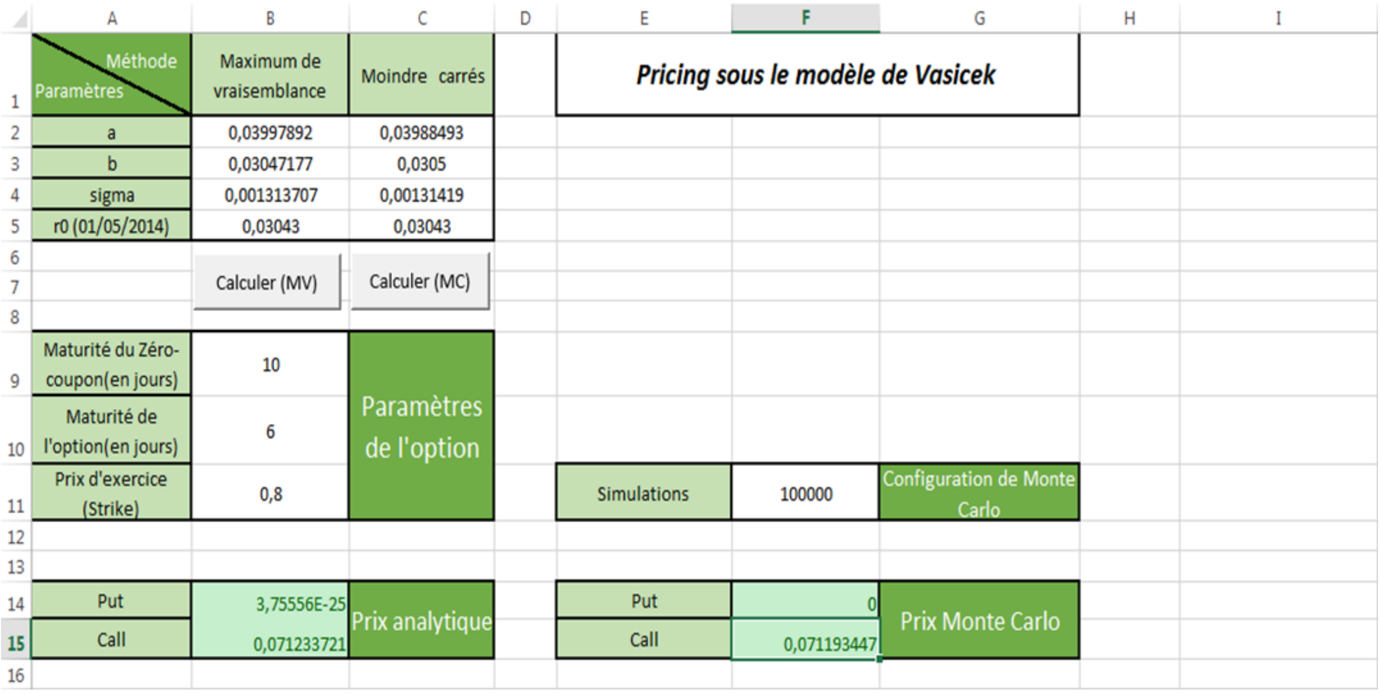


Figure 12 Pricer des options sur zéro-coupon sous le modèle de Vasicek

Annexe H

Le code ci-dessous permet de calculer la fonction de répartition de la loi Khi-deux décentrée[10] :

```
Function ncdchi(chi2'l As Double, df As Double, nsX As Double)
   ncdchi = cumchn(chi2'l, df, nsX)
End Function
Private Function qsmall(x As Double, sum As Double) As Boolean
      Dim eps As Double
        eps = 0.000001
       qsmall = (sum < 1E-20) Or (x < eps * sum)
End Function

Function cumchn(x As Double, df As Double, pnonc As Double)
      Dim adj As Double, centaj As Double, centwt As Double, chid2 As Double, dfd2 As Double, eps As Double, lcntaj As Double, _
      lcntwt As Double, lfact As Double, pcent As Double, pterm As Double, sum As Double, sumadj As Double, term As Double, _
      wt As Double, xnonc As Double, xx As Double
      Dim i As Long, icent As Long
      Dim cum As Double
      If (x <= 0#) Then
        cumchn = 0#
        Exit Function
      End If
      If (pnonc <= 0.0000000001) Then
        cumchn = 1 - Application.ChiDist(x, df)
        Exit Function
      End If
      xnonc = pnonc / 2#
      icent = xnonc
      If (icent = 0) Then icent = 1
      chid2 = x / 2#
      lfact = Application.GammaLn(CDbl(icent + 1))
      lcntwt = -xnonc + icent * Log(xnonc) - lfact
      centwt = Exp(lcntwt)
      pcent = 1 - Application.ChiDist(x, dg(icent, df))
      dfd2 = dg(icent, df) / 2#
      lfact = Application.GammaLn(1# + dfd2)
      lcntaj = dfd2 * Log(chid2) - chid2 - lfact

      centaj = Exp(lcntaj)
      sum = centwt * pcent
      sumadj = 0#
      adj = centaj
      wt = centwt
      i = icent
      Do
        dfd2 = dg(i, df) / 2#
        adj = adj * dfd2 / chid2
        sumadj = sumadj + adj
        pterm = pcent + sumadj
        wt = wt * (i / xnonc)
        term = wt * pterm
        sum = sum + term
        i = i - 1
      Loop Until (qsmall(term, sum) Or (i = 0))
      sumadj = centaj
      adj = centaj
      wt = centwt
      i = icent
      Do
        wt = wt * (xnonc / (i + 1))
        pterm = pcent - sumadj
        term = wt * pterm
        sum = sum + term
        i = i + 1
        dfd2 = dg(i, df) / 2#
        adj = adj * chid2 / dfd2
        sumadj = sumadj + adj
      Loop Until (qsmall(term, sum))
      cumchn = sum

End Function

Function dg(i As Long, df)
     dg = df + 2# * CDbl(i)
End Function
```

[10] Ce code est disponible sur le site : http://www.ec.kagawa-u.ac.jp/~hori/delphistat/noncentralchi.bas

- Code **VBA** des fonctions $B(T-t)$ et $A(T-t)$ du modèle *CIR* :

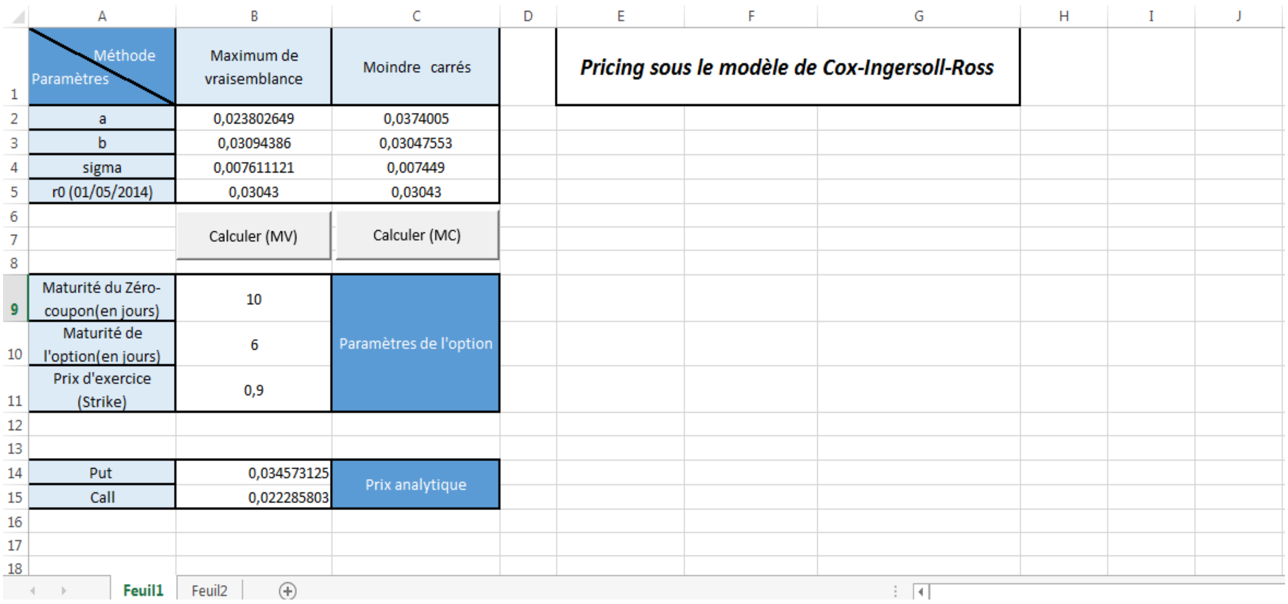
```
Public Function Bt(ti As Double, tj As Double, l As Byte) As Double
Dim delta As Double
Dim a As Double
Dim b As Double
Dim sigma As Double
If l = 0 Then
  a = Range("B2")
  b = Range("B3")
  sigma = Range("B4")
  Else
  a = Range("C2")
  b = Range("C3")
  sigma = Range("C4")
  End If
delta = Sqr(2 * sigma ^ (2) + a ^ (2))
Bt = (2 * (Exp(delta * (tj - ti)) - 1)) / ((a + delta) * (Exp(delta * (tj - ti)) - 1) + 2 * delta)
End Function

Public Function At(ti As Double, tj As Double, l As Byte) As Double
Dim delta As Double
Dim a As Double
Dim b As Double
Dim sigma As Double
If l = 0 Then
  a = Range("B2")
  b = Range("B3")
  sigma = Range("B4")
  Else
  a = Range("C2")
  b = Range("C3")
  sigma = Range("C4")
  End If
delta = Sqr(2 * sigma ^ (2) + a ^ (2))
At = (2 * delta * Exp(0.5 * (a + delta) * (tj - ti)) / ((a + delta) * (Exp(delta * (tj - ti)) - 1) + 2 * delta)) _
     ^ (2 * (a * b) / (sigma ^ (2)))
End Function
```

- Code **VBA** de la fonction du prix zéro-coupon $P(t,T)$ du modèle *CIR* :

```
Public Function ZeroCoupon(r As Double, ti As Double, tj As Double, l As Byte) As Double
Dim a As Double
Dim b As Double
Dim delta As Double
Dim sigma As Double

  If l = 0 Then
  a = Range("B2")
  b = Range("B3")
  sigma = Range("B4")
  Else
  a = Range("C2")
  b = Range("C3")
  sigma = Range("C4")
  End If

  delta = Sqr(2 * sigma ^ (2) + a ^ (2))
  BtT = (2 * (Exp(delta * (tj - ti)) - 1)) / ((a + delta) * (Exp(delta * (tj - ti)) - 1) + 2 * delta)
  AtT = (2 * delta * Exp(0.5 * (a + delta) * (tj - ti)) / ((a + delta) * (Exp(delta * (tj - ti)) - 1) + 2 * delta)) _
  ^ (2 * (a * b) / (sigma ^ (2)))

  ZeroCoupon = AtT * Exp(-BtT * r)
End Function
```

- Code **VBA** pour le calcul des prix analytiques du *Put/Call* sous le modèle *CIR* :

```
Sub Bouton1_Cliquer()
Dim r0 As Double
Dim a As Double
Dim b As Double
Dim sigma As Double
Dim n As Long
Dim i As Long
Dim MaturityO As Double
Dim MaturityB As Double
Dim K As Double
Dim OptionC As Double
Dim OptionP As Double
Dim rho As Double
Dim psi As Double
Dim r_bar As Double
Dim delta As Double
Dim rt As Double
a = Range("B2")
b = Range("B3")
sigma = Range("B4")
r0 = Range("B5")
n = Range("F11")
MaturityO = Range("B10")
MaturityB = Range("B9")
K = Range("B11")
PtT = ZeroCoupon(r0, 0, MaturityB, 0)
Pts = ZeroCoupon(r0, 0, MaturityO, 0)
delta = Sqr(a ^ 2 + 2 * sigma ^ 2)
rho = 2 * delta / (sigma ^ 2 * (Exp(delta * MaturityO) - 1))
psi = (a + delta) / sigma ^ 2

r_bar = Log(At(MaturityO, MaturityB, 0) / K) / Bt(MaturityO, MaturityB, 0)
OptionC = PtT * cumchn(2 * b * (rho + psy + Bt(MaturityO, MaturityB, 0)), 4 * a * b / sigma ^ 2, _
(2 * rho ^ 2 * r0 * Exp(delta * MaturityO)) / (rho + psi + Bt(0, MaturityO, 0))) _
- K * Pts * cumchn(2 * r_bar * (rho + psi), 4 * a * b / sigma ^ 2, (2 * rho ^ 2 * r0 * Exp(delta * MaturityO)) / (rho + psi))
OptionP = OptionC + K * Pts - PtT
Range("B15").Value = OptionC
Range("B14").Value = OptionP
End Sub
```



	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	Méthode / Paramètres	Maximum de vraisemblance	Moindre carrés		*Pricing sous le modèle de Cox-Ingersoll-Ross*					
2	a	0,023802649	0,0374005							
3	b	0,03094386	0,03047553							
4	sigma	0,007611121	0,007449							
5	r0 (01/05/2014)	0,03043	0,03043							
6										
7		Calculer (MV)	Calculer (MC)							
8										
9	Maturité du Zéro-coupon(en jours)	10	Paramètres de l'option							
10	Maturité de l'option(en jours)	6								
11	Prix d'exercice (Strike)	0,9								
12										
13										
14	Put	0,034573125	Prix analytique							
15	Call	0,022285803								
16										
17										
18										

Feuil1 Feuil2

Figure 13 Pricer des options sur zéro-coupon sous le modèle de Cox-Ingersoll-Ross

Annexe I

- Code **VBA** des différentes fonctions utilisées pour le calcul des prix *Caps/Floors* sous *Vasicek :*

```
Public Function ZeroCoupon(r As Double, ti As Double, Tj As Double, a As Double, b As Double, sigma As Double) As Double

  BtT = (1 - Exp(-a * (Tj - ti))) / a
  AtT = Exp((b - 0.5 * sigma * sigma / (a * a)) * (BtT - (Tj - ti)) - 0.25 * sigma * sigma * BtT * BtT / a)
  ZeroCoupon = AtT * Exp(-BtT * r)

End Function
```

```
Function BondCall_Vasicek(t As Double, MaturityB As Double, MaturityO As Double, K As Double, r0 As Double, a As Double, _
b As Double, sigma As Double)

Dim sigmac As Double
Dim h As Double
Dim PtT As Double
Dim Pts As Double
Dim OptionC As Double

PtT = ZeroCoupon(r0, 0, MaturityB, a, b, sigma)
Pts = ZeroCoupon(r0, 0, MaturityO, a, b, sigma)

sigmac = (sigma / a) * (1 - Exp(-a * (MaturityB - MaturityO))) * Sqr((1 / (2 * a)) * (1 - Exp(-2 * a * MaturityO)))
h = Log(PtT / (K * Pts)) * (1 / sigmac) + (sigmac / 2)

OptionC = PtT * Application.WorksheetFunction.Norm_Dist(h, 0, 1, True) - _
K * Pts * Application.WorksheetFunction.Norm_Dist(h - sigmac, 0, 1, True)

BondCall_Vasicek = OptionC

End Function
```

```
Function BondPut_Vasicek(t As Double, MaturityB As Double, MaturityO As Double, K As Double, r0 As Double, a As Double, _
b As Double, sigma As Double)

Dim sigmac As Double
Dim h As Double
Dim PtT As Double
Dim Pts As Double
Dim OptionP As Double

PtT = ZeroCoupon(r0, 0, MaturityB, a, b, sigma)
Pts = ZeroCoupon(r0, 0, MaturityO, a, b, sigma)
sigmac = (sigma / a) * (1 - Exp(-a * (MaturityB - MaturityO))) * Sqr((1 / (2 * a)) * (1 - Exp(-2 * a * MaturityO)))
h = Log(PtT / (K * Pts)) * (1 / sigmac) + (sigmac / 2)

OptionP = K * Pts * Application.WorksheetFunction.Norm_Dist(-h + sigmac, 0, 1, True) - _
PtT * Application.WorksheetFunction.Norm_Dist(-h, 0, 1, True)

BondPut_Vasicek = OptionP

End Function
```

```
Function Cap_Vasicek(t As Double, T0 As Double, MaturityRef As Double, MaturityCap As Double, r0 As Double, _
Taux_exercice As Double, a As Double, b As Double, sigma As Double)

Dim n As Integer
Dim j As Integer
Dim Tj As Double

n = Int(MaturityCap / MaturityRef)
Cap_Vasicek = 0

For j = 1 To n
Tj = T0 + (j - 1) * MaturityRef
Cap_Vasicek = Cap_Vasicek + BondPut_Vasicek(t, Tj + MaturityRef, Tj, 1 / (1 + MaturityRef * Taux_exercice / 360), r0, a, b, sigma)
Next j

End Function
```

```
Function Floor_Vasicek(t As Double, T0 As Double, MaturityRef As Double, MaturityCap As Double, r0 As Double, _
Taux_exercice As Double, a As Double, b As Double, sigma As Double)

Dim n As Integer
Dim j As Integer
Dim Tj As Double

n = Int(MaturityCap / MaturityRef)
Floor_Vasicek = 0

For j = 1 To n
Tj = T0 + (j - 1) * MaturityRef
Floor_Vasicek = Floor_Vasicek + BondCall_Vasicek(t, Tj + MaturityRef, Tj, 1 / (1 + MaturityRef * Taux_exercice / 360), r0, a, b, sigma)
Next j
End Function
```

- Code **VBA** des différentes fonctions utilisées pour le calcul des prix *Caps/Floors* sous *CIR :*

```vba
Public Function ZeroCoupon(r As Double, ti As Double, tj As Double, a As Double, b As Double, sigma As Double) As Double

  delta = Sqr(2 * sigma ^ (2) + a ^ (2))
  BtT = (2 * (Exp(delta * (tj - ti)) - 1)) / ((a + delta) * (Exp(delta * (tj - ti)) - 1) + 2 * delta)
  AtT = (2 * delta * Exp(0.5 * (a + delta) * (tj - ti)) / ((a + delta) * (Exp(delta * (tj - ti)) - 1) + 2 * delta)) ^ (2 * (a * b) _
  / (sigma ^ (2)))

  ZeroCoupon = AtT * Exp(-BtT * r)

End Function
```

```vba
Public Function Bt(ti As Double, tj As Double, a As Double, b As Double, sigma As Double) As Double
Dim delta As Double

delta = Sqr(2 * sigma ^ (2) + a ^ (2))
Bt = (2 * (Exp(delta * (tj - ti)) - 1)) / ((a + delta) * (Exp(delta * (tj - ti)) - 1) + 2 * delta)

End Function
```

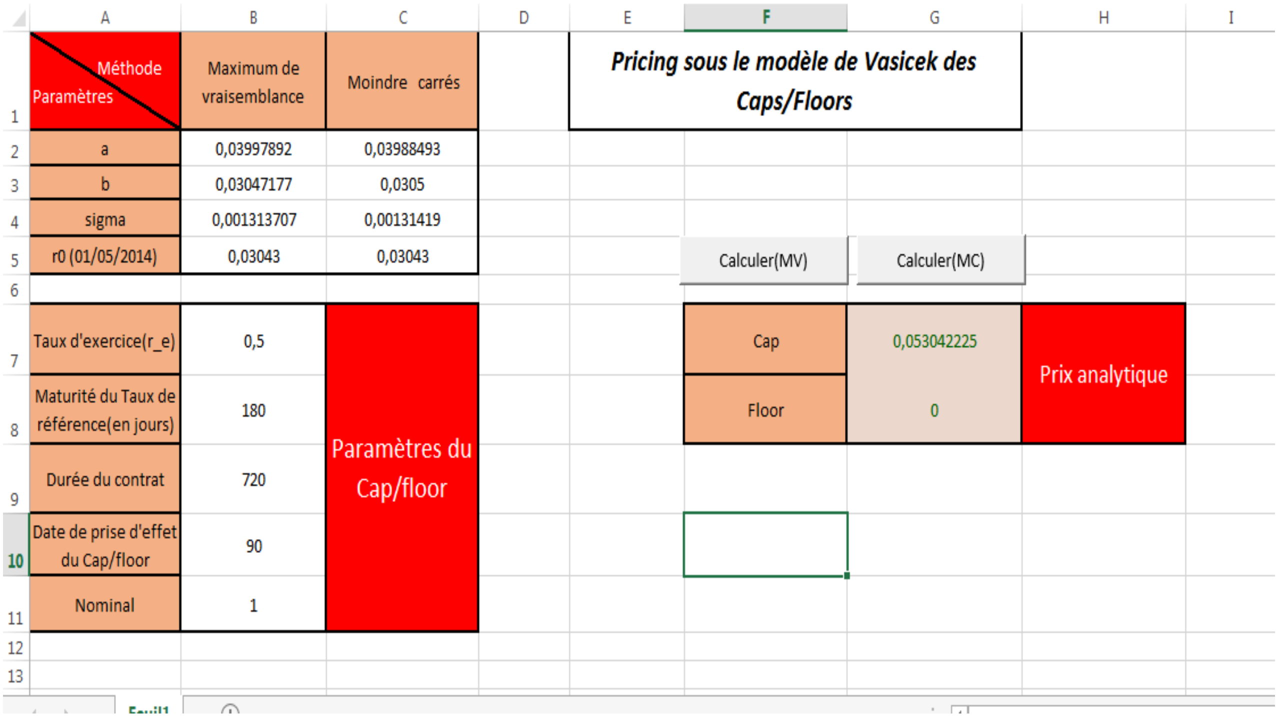
```vba
Public Function At(ti As Double, tj As Double, a As Double, b As Double, sigma As Double) As Double

Dim delta As Double
delta = Sqr(2 * sigma ^ (2) + a ^ (2))
At = (2 * delta * Exp(0.5 * (a + delta) * (tj - ti)) / ((a + delta) * (Exp(delta * (tj - ti)) - 1) + 2 * delta)) ^ (2 * (a * b) _
/ (sigma ^ (2)))

End Function
```

```vba
Function BondCall_CIR(t As Double, MaturityB As Double, MaturityO As Double, K As Double, r0 As Double, a As Double, b As Double, _
sigma As Double)

Dim delta As Double
Dim rho As Double
Dim psi As Double
Dim r_bar As Double
Dim PtT As Double
Dim Pts As Double
Dim OptionC As Double

PtT = ZeroCoupon(r0, 0, MaturityB, a, b, sigma)
Pts = ZeroCoupon(r0, 0, MaturityO, a, b, sigma)

delta = Sqr(a ^ 2 + 2 * sigma ^ 2)
rho = 2 * delta / (sigma ^ 2 * (Exp(delta * MaturityO) - 1))
psi = (a + delta) / sigma ^ 2
r_bar = Log(At(MaturityO, MaturityB, a, b, sigma) / K) / Bt(MaturityO, MaturityB, a, b, sigma)

OptionC = PtT * cumchn(2 * b * (rho + psy + Bt(MaturityO, MaturityB, a, b, sigma)), 4 * a * b / sigma ^ 2, _
(2 * rho ^ 2 * r0 * Exp(delta * MaturityO)) / (rho + psi + Bt(0, MaturityO, a, b, sigma))) - _
K * Pts * cumchn(2 * r_bar * (rho + psi), 4 * a * b / sigma ^ 2, (2 * rho ^ 2 * r0 * Exp(delta * MaturityO)) / (rho + psi))
OptionP = OptionC + K * Pts - PtT


BondCall_CIR = OptionC

End Function
```

```vba
Function BondPut_CIR(t As Double, MaturityB As Double, MaturityO As Double, K As Double, r0 As Double, a As Double, b As Double, _
sigma As Double)

Dim delta As Double
Dim rho As Double
Dim psi As Double
Dim r_bar As Double
Dim PtT As Double
Dim Pts As Double
Dim OptionC As Double

PtT = ZeroCoupon(r0, 0, MaturityB, a, b, sigma)
Pts = ZeroCoupon(r0, 0, MaturityO, a, b, sigma)

delta = Sqr(a ^ 2 + 2 * sigma ^ 2)
rho = 2 * delta / (sigma ^ 2 * (Exp(delta * MaturityO) - 1))
psi = (a + delta) / sigma ^ 2
r_bar = Log(At(MaturityO, MaturityB, a, b, sigma) / K) / Bt(MaturityO, MaturityB, a, b, sigma)

OptionP = OptionC + K * Pts - PtT

BondPut_CIR = OptionP

End Function
```

```
Function Cap_CIR(t As Double, T0 As Double, MaturityRef As Double, MaturityCap As Double, r0 As Double, Taux_exercice As Double, _
a As Double, b As Double, sigma As Double)

Dim n As Integer
Dim j As Integer
Dim tj As Double

n = Int(MaturityCap / MaturityRef)
Cap_Vasicek = 0

For j = 1 To n
tj = T0 + (j - 1) * MaturityRef
Cap_CIR = Cap_CIR + BondPut_CIR(t, tj + MaturityRef, tj, 1 / (1 + MaturityRef * Taux_exercice / 360), r0, a, b, sigma)
Next j

End Function
```

```
Function Floor_CIR(t As Double, T0 As Double, MaturityRef As Double, MaturityCap As Double, r0 As Double, Taux_exercice As Double, _
a As Double, b As Double, sigma As Double)

Dim n As Integer
Dim j As Integer
Dim tj As Double

n = Int(MaturityCap / MaturityRef)
Floor_Vasicek = 0

For j = 1 To n
tj = T0 + (j - 1) * MaturityRef
Floor_CIR = Floor_CIR + BondCall_CIR(t, tj + MaturityRef, tj, 1 / (1 + MaturityRef * Taux_exercice / 360), r0, a, b, sigma)
Next j
End Function
```



Méthode / Paramètres	Maximum de vraisemblance	Moindre carrés
a	0,03997892	0,03988493
b	0,03047177	0,0305
sigma	0,001313707	0,00131419
r0 (01/05/2014)	0,03043	0,03043

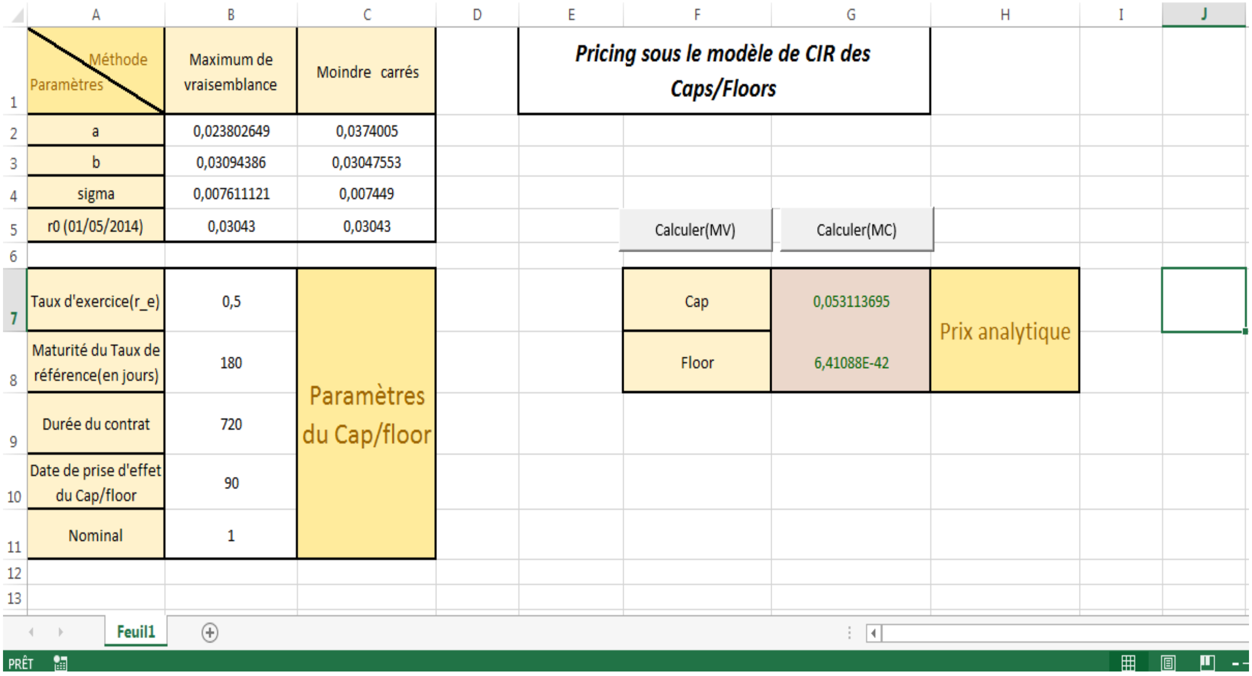
Taux d'exercice(r_e)	0,5	Paramètres du Cap/floor
Maturité du Taux de référence(en jours)	180	
Durée du contrat	720	
Date de prise d'effet du Cap/floor	90	
Nominal	1	

Pricing sous le modèle de Vasicek des Caps/Floors

Calculer(MV) Calculer(MC)

Cap	0,053042225	Prix analytique
Floor	0	

Figure 14 Pricer du Cap/Floor sous le modèle de Vasicek



Méthode / Paramètres	Maximum de vraisemblance	Moindre carrés
a	0,023802649	0,0374005
b	0,03094386	0,03047553
sigma	0,007611121	0,007449
r0 (01/05/2014)	0,03043	0,03043

Taux d'exercice(r_e)	0,5	Paramètres du Cap/floor
Maturité du Taux de référence(en jours)	180	
Durée du contrat	720	
Date de prise d'effet du Cap/floor	90	
Nominal	1	

Pricing sous le modèle de CIR des Caps/Floors

Calculer(MV) Calculer(MC)

Cap	0,053113695	Prix analytique
Floor	6,41088E-42	

Feuil1

PRÊT

Figure 15 Pricer du Cap/Floor sous le modèle de Cox-Ingersoll-Ross