



المندوبية السامية للتخطيط
HAUT-COMMISSARIAT AU PLAN

ROYAUME DU MAROC
..*.*.*
HAUT COMMISSARIAT AU PLAN
..*.*.*
INSTITUT NATIONAL
DE STATISTIQUE ET D'ECONOMIE APPLIQUEE



INSEA

Projet de Fin d'Etudes

Calibrage interne de la courbe de perte pour des besoins de modélisation de la rétrocession

Préparé par : Mme Samia IHOUM
M. Elikplim Timothée Douna DENYIGBA

Sous la direction de : M. Khalil SAID (INSEA)
M. Anass ASSALI (SCR)

Soutenu publiquement comme exigence partielle en vue de l'obtention du

Diplôme d'Ingénieur d'Etat

Filière : Actuariat Finance

Devant le jury composé de :

- M. Mohammed EL HAJ TIRARI (INSEA)
- M. Khalil SAID (INSEA)
- M. Anass ASSALI (SCR)

Remerciements

Tout d'abord, nous adressons nos sincères remerciements à toutes les personnes qui ont contribué au succès de ce travail.

Plus particulièrement, nous tenons à remercier M. Anass ASSALI, Directeur de la direction de la protection du capital à la Société Centrale de Réassurance (SCR), ainsi que son adjointe Mme. Basma DOURAS pour leur encadrement, leur suivi, leur soutien inconditionnel et leur disponibilité tout au long de la réalisation de ce travail.

Nos remerciements s'adressent également à M. Khalil SAID, notre professeur et encadrant interne, pour avoir accepté de nous encadrer dans ce projet et pour sa supervision permanente, sa disponibilité ainsi que ses nombreux encouragements et conseils.

Enfin, nous tenons à remercier sincèrement M. Mohammed EL HAJ TIRARI pour avoir accepté d'évaluer ce travail. Nous souhaitons également exprimer notre gratitude à l'ensemble du corps professoral de l'INSEA pour la qualité de la formation dont nous avons bénéficié et qui nous a permis de mener à bien ce travail.

Résumé

Ce mémoire est le résultat d'un travail de recherche mené pendant une période de quatre mois au sein de la direction de la protection du capital à la SCR. Notre choix s'est porté sur un sujet d'une grande actualité au sein de la SCR, à savoir la modélisation interne des "EP curves". Actuellement, cette modélisation est confiée à une étude externe largement utilisée par le marché.

Dans le cadre de notre étude, nous avons consacré nos efforts au calibrage interne des paramètres de sévérité et de fréquence en utilisant des lois de probabilité appropriées pour chaque composante. Nous avons également adopté une approche basée sur les courbes d'exposition pour modéliser la sévérité. Notre étude s'est focalisée sur le portefeuille prépondérant à la SCR, à savoir le portefeuille des FAC Maroc, pour ce portefeuille nous disposons des données nécessaires à la modélisation. Notre objectif était de comparer les résultats du calibrage interne avec ceux du calibrage externe.

Nous avons aussi développé un outil sur Excel qui nous a permis de tracer les "EP curves" pour les deux cas de calibrage, interne et externe. Les résultats obtenus ont révélé que les pertes estimées par le modèle interne étaient supérieures à celles du modèle externe, quelle que soit la période de retour considérée. Ces résultats indiquent que la modélisation actuellement utilisée par notre organisme sous-estime les pertes réelles.

En conclusion, ce mémoire présente notre démarche de modélisation interne des "EP curves" en utilisant les données spécifiques de notre portefeuille des FAC Maroc. Les résultats obtenus mettent en évidence l'importance d'une modélisation précise et adaptée aux caractéristiques propres de notre portefeuille. Notre travail contribue ainsi à une meilleure évaluation des risques et à une prise de décision plus éclairée en matière de gestion des risques au sein de notre organisme.

Mots clés

Rétrocession - Fréquence - Sévérité - Courbes de pertes - Taux de destruction

Abstract

This thesis is the result of a four-month research project conducted within the Capital Protection Department at SCR. We chose a highly relevant topic within SCR, which is the internal modeling of EP curves. Currently, this modeling is outsourced to an external study widely used in the market.

In our study, we focused on the internal calibration of severity and frequency parameters using appropriate probability distributions for each component. We also adopted an approach based on exposure curves to model severity. Our study specifically focused on SCR's predominant portfolio, the FAC Marocco portfolio, for which we had the necessary data for modeling. Our objective was to compare the results of internal calibration with those of external calibration.

Additionally, we developed an Excel tool that allowed us to plot the EP curves for both internal and external calibration cases. The results revealed that the losses estimated by the internal model were higher than those of the external model, regardless of the chosen return period. These findings suggest that the current modeling approach used by our organization underestimates actual losses.

In conclusion, this thesis presents our approach to internal modeling of EP curves using specific data from our FAC Marocco portfolio. The results highlight the importance of precise modeling tailored to the unique characteristics of our portfolio. Our work contributes to a better risk assessment and informed decision-making in risk management within our organization.

Key words

Reinsurance - Frequency - Severity - Loss curves - Destruction rate.

Table des matières

Remerciements	5
Résumé	6
Abstract	7
Introduction générale	15
I Contexte général du projet	17
1 Notions sur la réassurance	18
1 Définition et bref historique	18
2 Intérêts de la réassurance	20
3 Les différentes formes de réassurance	20
2 Présentation de l'organisme d'accueil	29
1 Présentation globale	29
2 la SCR en Chiffres	32
3 La rétrocession	34
II Cadre théorique de la modélisation	38
1 Cadre général de la modélisation	40
1 Le modèle collectif	40
2 Principe de la simulation de Monte Carlo	42
3 Construction de l' <i>EP Curve</i> par simulation de Monte Carlo	43
2 Approche actuelle de la SCR pour la modélisation de l'EP Curve	46
1 Modélisation de la fréquence	47
2 Modélisation de la sévérité	48
3 Limites de l'approche actuelle	49
3 Calibrage interne	50
1 Modélisation de la fréquence des sinistres	50

2	Modélisation de la sévérité des sinistres	51
3	Estimation des paramètres	59
4	Validation des ajustements des lois	62
5	Détermination du seuil de sinistralité grave	65
III Modélisation de l'EP Curve du portefeuille		68
1	Présentation des données	69
1	Présentation de la base	69
2	Retraitements effectués	70
3	Analyse descriptive des données	71
2	Résultats de la modélisation de la fréquence et de la sévérité	74
1	Estimation de la distribution de la fréquence	75
2	Estimation de la distribution de la sévérité	79
3	Résultats de la modélisation de l'EP Curve du portefeuille FAC Maroc incendie	103
1	Présentation de l'outil de simulation	103
2	Résultats obtenus	109
Conclusion		112
Bibliographie		114
Annexes		116

Table des figures

1.1	Schéma de transmission des risques en assurance et en réassurance	19
1.2	La réassurance en quote part	22
1.3	La réassurance XP	22
1.4	XP en fonction de la somme assurée	22
1.5	La réassurance XS	24
1.6	La réassurance Stop loss	26
2.1	Logo de la SCR	29
2.2	Bureaux de représentation de la SCR	30
2.3	Organigramme de la SCR	31
2.4	Chiffres Clés de la SCR(en millions) en 2021	32
2.5	Evolution des chiffres clés de la SCR de 2017 à 2021	33
2.6	Répartition du chiffre d'affaires entre 2020 et 2021 de la SCR	34
1.1	Modélisation de la sinistralité totale par le modèle collectif	41
2.1	Exemple de profil de risque de la SCR	46
2.2	Approche actuelle de la modélisation	49
3.1	Courbes d'exposition pour la perte totale, Swiss Re et Lloyd	54
3.2	Comparaison des fonctions de répartition du taux de destruction pour les courbes Swiss Re	59
1.1	Histogramme du taux de destruction	72
1.2	Fonction de répartition empirique	73
2.1	La densité d'une loi Binomiale négative (rouge) superposée à celle du nos données	75
2.2	QQ-plot de la loi Binomiale négative	76
2.3	La desité et le QQ-plot de la loi de poisson	77
2.4	La densité et le QQ-plot de la loi Binomiale	77
2.5	Comparaison fonction de répartition empirique et fonction de répartition de la loi Lognormale de paramètres estimés par MLE	80
2.6	Comparaison fonction de densité empirique et fonction de densité de la loi Lognormale de paramètres estimés par MLE	80
2.7	Comparaison fonction de répartition empirique et fonction de répartition de la loi Lognormale de paramètres estimés par MME	81

2.8	Comparaison fonction de densité empirique et fonction de densité de la loi Lognormale de paramètres estimés par MME	81
2.9	Comparaison fonction de répartition empirique et fonction de répartition de la loi Weibull de paramètres estimés par MLE	82
2.10	Comparaison fonction de densité empirique et fonction de densité de la loi Weibull de paramètres estimés par MLE	82
2.11	Comparaison fonction de répartition empirique et fonction de répartition de la loi Weibull de paramètres estimés par MME	83
2.12	Comparaison fonction de densité empirique et fonction de densité de la loi Weibull de paramètres estimés par MME	83
2.13	Comparaison fonction de répartition empirique et fonction de répartition de la loi Pareto de paramètres estimés par MLE	84
2.14	Comparaison fonction de densité empirique et fonction de densité de la loi Pareto de paramètres estimés par MLE	84
2.15	Comparaison fonction de répartition empirique et fonction de répartition de la loi Weibull de paramètres estimés par MME	85
2.16	Comparaison fonction de densité empirique et fonction de densité de la loi Pareto de paramètres estimés par MME	85
2.17	Q-Qplot dela loi Lognormale de paramètres estimés par MLE	86
2.18	Q-Qplot dela loi Lognormale de paramètres estimés par MME	86
2.19	Q-Qplot dela loi Weibull de paramètres estimés par MLE	87
2.20	Q-Qplot dela loi Weibull de paramètres estimés par MME	87
2.21	Q-Qplot dela loi Pareto de paramètres estimés par MLE	88
2.22	Q-Qplot dela loi Pareto de paramètres estimés par MME	88
2.23	QQplot LogNormale et Pareto	90
2.24	Q-Q Plot Exponentiel	91
2.25	Mean Excess plot	91
2.26	Hill plot	92
2.27	Pickands plot	92
2.28	Gertensgarbe plot	93
2.33	Comparaison fonction de répartition empirique et fonction de répartition MB-BEFD à deux paramètres	98
2.34	Comparaison fonction de densité empirique et fonction de densité MBBEFD à deux paramètres	98
2.35	Q-Qplot MBBEFD à deux paramètres	99
2.36	Comparaison fonction de répartition empirique et fonction de répartition MB-BEFD à un paramètre	100
2.37	Comparaison fonction de densité empirique et fonction de densité MBBEFD à un paramètre	101
2.38	Q-Qplot MBBEFD à un paramètre	101
3.6	Simulations (cas des hypothèses externes)	108
3.7	Onglet "EP Curve"	109
3.8	EP Curve FAC Maroc Incendie (Calibrage interne et Externe)	109
3.9	Comparaisons des EP Curves(Tableau)	110

3.10 Comparaisons des EP Curves (Courbe) 110

Liste des tableaux

1.1	Statistiques descriptives du nombre de sinistres	71
1.2	Statistiques descriptives du taux de destruction	72
2.1	Paramètres des lois ajustées	78
2.2	Résultats des tests d'adéquation	78
2.3	Paramètres estimés	79
2.4	Résultats des tests d'adéquation	89
2.5	Statistiques descriptives du taux de destruction	93
2.6	Résultats de la modélisation	95
2.7	Statistiques descriptives du taux de destruction	95
2.8	Résultats de la modélisation	97
2.9	Paramètres estimés pour MBBEFD à deux paramètres	97
2.10	Résultats des tests d'adéquation	99
2.11	Paramètres estimés pour MBBEFD à un paramètre	100
2.12	Résultats des tests d'adéquation	102

Liste des abréviations

AAD : Annual Aggregate Deductible
AAL : Annual Aggregate Limit
AEP : Aggregate Exceedance Probability
AIC : Akaike Information Criterion
BIC : Bayesian Information Criterion
CDG : Caisse de Dépôt et de Gestion
FAC : Facultatives
GEV : Generalized Extrême Value
GPD : Pareto généralisée
LES : Méthode des moindre carrés
MLE : Méthode du Maximum de vraisemblance
MME : Méthode des Moments
OEP : Occurence Exceedance Probability
QP : Le quote part
QS : quote share
SCR : Société Centrale de Réassurance
SI : Somme assurée
SL : Stop loss
VaR : Value at Risk
XL : Excess-of-Loss
XP : Excédent de Plein

Introduction générale

Pour protéger son capital contre la volatilité des risques qu'elle couvre, la Société Centrale de Réassurance (SCR) partage une partie de ses risques avec d'autres réassureurs au moyen de traités de couverture, notamment le Non Marine XL qu'elle renouvelle chaque année. Cette opération est appelée rétrocession.

L'évaluation de l'adéquation du traité de rétrocession au portefeuille de la SCR est essentielle. Pour cela, la SCR modélise la sinistralité probable de son portefeuille avant et après rétrocession. Cette modélisation est représentée par une courbe de perte appelée "EP Curve", qui relie les pertes probables à leur période de retour.

Le processus de modélisation commence par la construction de la courbe de perte avant rétrocession, également appelée "Gross EP Curve", à l'aide de simulations stochastiques. Ensuite, la structure de rétrocession est appliquée à chaque scénario stochastique pour obtenir la courbe de perte après rétrocession. Les métriques de mesure de risque telles que la "Value at Risk" sont comparées à l'aide des "EP Curves" pour évaluer l'adéquation de la structure de rétrocession, tout en optimisant le couple profit-risque.

L'objectif de notre mémoire est de réaliser un calibrage interne de la courbe de perte avant rétrocession afin de pouvoir tester l'adéquation de la rétrocession. En effet, l'approche actuelle de la modélisation de la courbe de perte se base sur le modèle collectif (fréquence/sévérité) où le calibrage des lois de fréquence et de sévérité est sujet à des hypothèses externes couramment utilisées dans le marché. Cependant, ces hypothèses peuvent ne pas refléter la réalité du risque du portefeuille de la SCR, ce qui introduit un risque de modélisation important. Aussi, l'utilisation du modèle collectif suppose l'indépendance entre le nombre de sinistres et le coût des sinistres, ce qui peut ne pas être forcément vérifié. Cependant, cette hypothèse ne sera pas discutée dans notre travail et pourra faire l'objet d'une future étude.

Notre calibrage portera essentiellement sur les facultatives de la branche Non Marine Maroc de la SCR et cela pour plusieurs raisons : Tout d'abord, le portefeuille facultative domestique (FAC Maroc) constitue une part importante du chiffre d'affaires de la SCR. Par ailleurs, nous n'avons pas de données sur les risques couverts à l'international ce qui rend notre calibrage difficile pour les portefeuilles internationaux. Par contre, nous avons suffisamment de données pour le Maroc. En ce qui concerne les traités, la modélisation de la sinistralité probable du portefeuille nécessite une connaissance des risques ligne par ligne c'est-à-dire connaître l'évolution de chaque risque couvert par le traité. Ce travail est chronophage et pour l'instant la SCR ne dispose que de données agrégées concernant la sinistralité des traités. De plus, nous traiterons uniquement les risques NON CAT car les risques CAT (catastrophes naturelles) nécessitent une modélisation particulière qui ne rentre pas dans le

cadre de notre étude.

Il est important de noter que, pour des raisons de confidentialité, les données utilisées pour le calibrage ainsi que les données du profil de risque utilisé pour la construction de la courbe de perte ont été biaisées avec un coefficient fourni par la SCR. De plus, ces données ne constituent qu'un échantillon de la base de données utilisée pour notre étude.

Notre mémoire s'articulera en trois grandes parties. La première partie sera une présentation générale de la réassurance et de la SCR.

Dans la deuxième partie, nous expliciterons le cadre théorique de la modélisation. Pour ce faire, nous donnerons d'abord le cadre générique de la modélisation de la courbe de perte qui se base sur le modèle collectif et la simulation de Monte Carlo ; ensuite nous ferons une présentation de l'approche actuelle utilisée pour la modélisation de l'EP Curve ; enfin nous donnerons les divers fondements théoriques des méthodes utilisées pour modéliser la fréquence des sinistres et leur sévérité. Pour la sévérité, en plus des lois classiques couramment utilisées, nous présenterons également les distributions MBBEFD qui se base sur le principe des courbes d'exposition. Nous ferons également une brève description des méthodes graphiques utilisées pour la détermination du seuil de sinistralité grave.

Après avoir exposé notre fondement théorique, nous passerons dans la troisième partie au calibrage de la sinistralité du portefeuille FAC Maroc Incendie. Dans un premier chapitre, nous présenterons d'abord la base de données utilisée, les différents retraitements effectués et une analyse descriptive de nos variables cibles. Le second chapitre montrera les différents résultats obtenus pour la modélisation de la fréquence des sinistres et de la sévérité. Le dernier chapitre de la troisième partie aura pour but de présenter l'outil de simulation réalisé afin de construire la courbe de perte. Nous présenterons également les résultats obtenus en utilisant les hypothèses externes ainsi que notre calibrage réalisé.

En conclusion, nous analyserons le travail réalisé et son impact sur la modélisation de la rétrocession, mettant en évidence les points forts et les pistes d'amélioration possibles.

Première partie

Contexte général du projet

Chapitre 1

Notions sur la réassurance

1 Définition et bref historique

1.1 Définition

La réassurance est l'opération par laquelle une compagnie d'assurance (la cédante) cède une partie de ses risques à une compagnie de réassurance (le réassureur) qui en accepte la charge en échange d'un paiement (la prime de réassurance).

Du point de vue de l'assuré, la réassurance est invisible, c'est-à-dire que l'assureur est seul responsable des engagements vis-à-vis du preneur d'assurance. La réassurance est donc « l'assurance des assureurs », elle permet de réaliser une vaste compensation des risques dans l'espace et dans le temps.

En pratique, les assureurs cèdent aux réassureurs une fraction des risques qu'ils acceptent sur leur marché, en leur reversant une fraction des primes. Ces cessions se font sous déduction d'une commission qui doit permettre aux assureurs de couvrir leurs frais et de réaliser un profit. La réassurance n'existe donc que par l'assurance, et ne peut revendiquer d'existence propre indépendamment de cette dernière.

Il est à noter que les réassureurs peuvent également se faire couvrir par un autre réassureur (« assurance de la réassurance »), on parle dans ce cas de rétrocession.

La réassurance stabilise les résultats des compagnies d'assurance et permet la croissance et l'innovation. En raison de l'importance des sommes d'argent qu'ils investissent sur les marchés financiers, les réassureurs contribuent également de manière significative à l'économie réelle. Bien qu'ils aient été relativement peu connus dans le passé, les réassureurs sont de plus en plus reconnus avec la recrudescence des catastrophes majeures pour le rôle qu'ils jouent en aidant les assureurs, les gouvernements et la société dans son ensemble à faire face aux risques actuels.

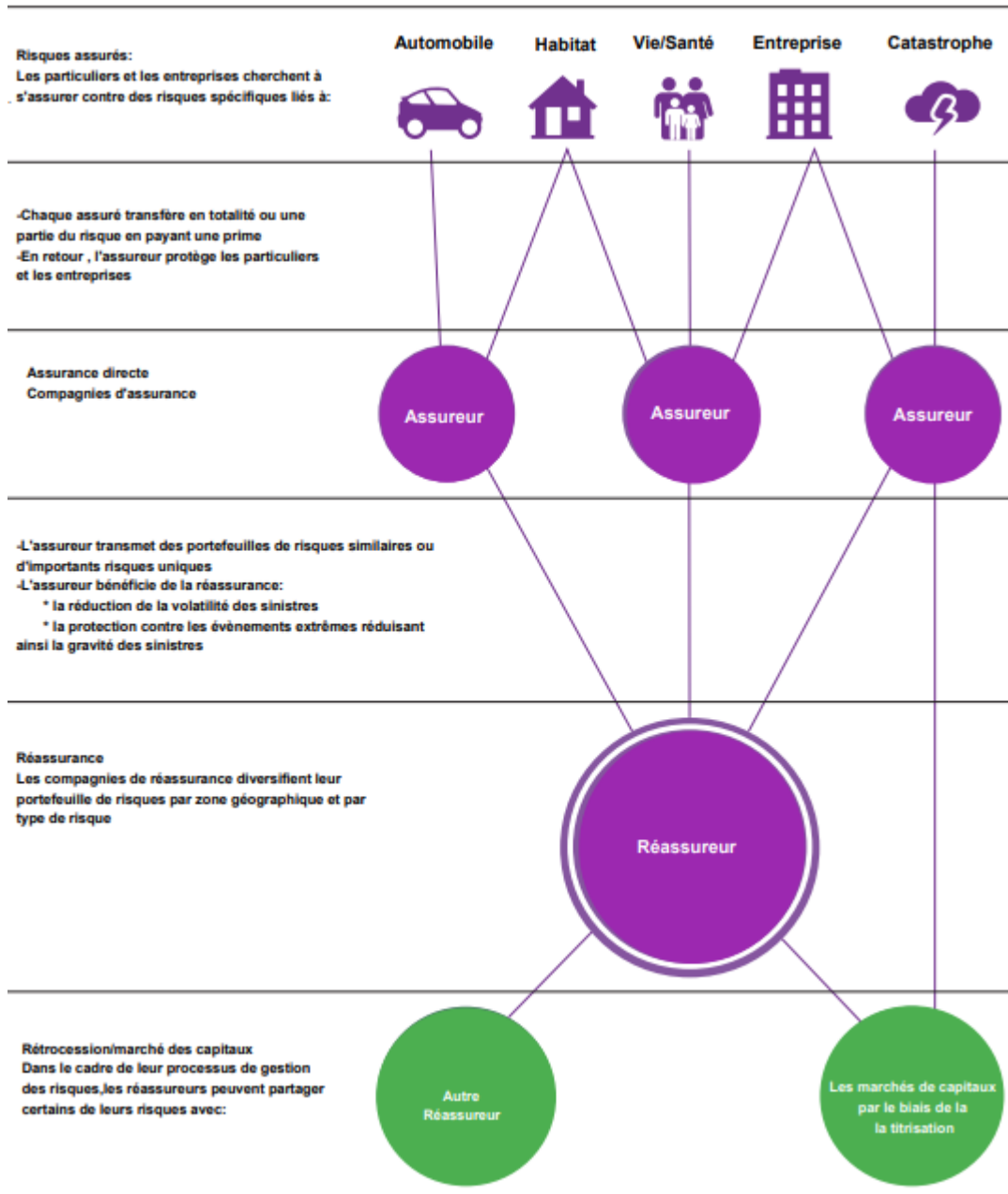


FIGURE 1.1 – Schéma de transmission des risques en assurance et en réassurance

1.2 Histoire de la réassurance

La réassurance est un concept datant du XIV^{ème} siècle. On estime que le premier contrat de réassurance a été établi en 1370, quand deux assureurs vénitiens assurant la marchandise d'un bateau décidèrent de céder le risque à un troisième assureur sur la partie la plus périlleuse du voyage.

On a retrouvé depuis des contrats de réassurance en Italie, en France et au Royaume-Uni. Mais ceux-ci restent limités à quelques cessions spécifiques et sont surtout présents dans le commerce maritime. La réassurance moderne et à grande échelle est apparue en Allemagne vers la fin du XIV^{ème} siècle, à la suite de la révolution industrielle. Le grand incendie d’Hambourg de 1842 obligea les sociétés d’assurances allemandes à mieux se couvrir et à faire appel à des contrats de réassurance. C’est ainsi que voit le jour la première société de réassurance en 1846, la Kölnische Rückversicherungs Gesellschaft, principalement pour protéger les usines et complexes industriels. Depuis, de nombreuses sociétés de réassurances se sont développées, mais restent implantées majoritairement dans les pays développés tels que l’Allemagne, la Suisse, le Royaume-Uni, la France, les États-Unis et le Japon.

En août 1992, l’ouragan Andrew toucha très fortement la Floride aux États-Unis. Il est alors apparu nécessaire de se protéger contre les phénomènes naturels. Ainsi, plusieurs nouveaux ré-assureurs sont apparus aux Bermudes, la fiscalité avantageuse de ces dernières permettant aux cédantes américaines de se couvrir contre les dommages occasionnés par des catastrophes. Dès le milieu des années 1990, ces réassureurs ont recherché un meilleur équilibre de leurs expositions mondiales en se développant principalement au Japon, puis en Asie, et enfin en Europe. Aujourd’hui, ces sociétés sont à majorité multibranches et beaucoup d’entre elles disposent de bureaux ou filiales en Europe ou en Asie.

Le marché de la réassurance est en forte croissance depuis vingt ans et a généré un chiffre d’affaires d’environ 308 Milliards en 2021. Avec de nombreuses sociétés de réassurances sur le marché mondial, les 10 premières sociétés se partagent plus de 70% du marché avec à leur tête Munich Re, Swiss Re, Hannover Re, Berkshire et SCOR.

2 Intérêts de la réassurance

Pour l’assureur, les raisons de se réassurer sont multiples :

- partager les risques et réduire son exposition,
- avoir une plus grande stabilité dans son bilan en cas d’apparition de sinistres extrêmes à faible fréquence, de cumul non anticipé de sinistres ou encore de dérapage de bilan d’une branche en particulier
- augmenter sa capacité de souscription
- obtenir une aide technique sur un domaine de compétence pas totalement maîtrisé en interne, ou encore se faire former sur des sujets techniques
- diminuer le coût du capital

3 Les différentes formes de réassurance

La réassurance fonctionne de manière similaire à l’assurance, mais on constate cependant plusieurs formes de réassurances : la réassurance obligatoire, la réassurance facultative et la réassurance obligatoire-facultative.

3.1 La réassurance obligatoire

Ces contrats imposent des obligations réciproques : elle est la plus utilisée. La cédante s'engage à céder tous ses risques (sur une période donnée) et la compagnie de réassurance s'engage à les accepter. Ils couvrent donc un portefeuille de risques, c'est-à-dire l'ensemble des assurés d'une branche. Par principe, tout ce qui n'est pas explicitement exclus du traité est inclus. Les risques sont donc couverts de manière automatique C'est ce type de contrat qui est appelé *traité*. il est signé entre l'assureur et un ou plusieurs réassureurs. Il existe deux types de couverture pour les traités :

- La réassurance proportionnelle
- La réassurance non-proportionnelle

3.1.1 La réassurance proportionnelle

Dans la réassurance proportionnelle, tous les éléments du risque (primes et sinistres) sont partagés proportionnellement entre l'assureur et le réassureur. Pour cette raison, il y a un réel partage du risque entre les deux. La réassurance proportionnelle est principalement utilisée par :

- Des assureurs de petite et moyenne taille (diminution du besoin de marge de solvabilité)
- Des assureurs en fort développement
- Des branches à développement rapide comportant des investisseurs techniques On distingue alors deux types de réassurances proportionnelles :

- **Le quote part(QP) ou quote share(QS)** Dans le cas d'un traité en *quote-part* (ou "traités en participation"), l'assureur cède un pourcentage constant a (appelé *taux de cession*) du risque au réassureur et conserve le reste. C'est la forme la plus simple de réassurance, mais elle contraint l'assureur à céder une part importante de ses primes au réassureur. En effet, la cédante cède également un pourcentage a des primes au réassureur. Ce type de traité est notamment utilisé pour les nouvelles branches pour lesquelles la répartition des sinistres est encore mal connue.

Soit X_i le $i_{\text{ème}}$ sinistre survenu, Π_i la prime de la police i , S la sinistralité totale des risques couverts par le traité et Π le total des primes.

	Risque Total	Risque conservé	Risque cédé
Primes	$\Pi = \sum_{i=1}^n \Pi_i$	$\sum_{i=1}^n (1 - a)\Pi_i = (1 - a)\Pi$	$\sum_{i=1}^n a\Pi_i = a\Pi$
Sinistres	$S = \sum_{i=1}^n X_i$	$\sum_{i=1}^n (1 - a)X_i = (1 - a)S$	$\sum_{i=1}^n aX_i = aS$

- **L'excédent de plein (XP)** Dans le cas d'un traité en excédent de plein, l'assureur conserve un montant constant des risques, appelé *plein de conservation*, et le réassureur prend à sa charge, sur chaque risque, la partie qui dépasse ce plein dans la limite de la capacité du traité. Le pourcentage cédé est donc différent pour chaque risque. Soit a_i le taux de cession du risque i . On a donc :

Le taux de cession est calculé sur la base de la somme assurée SI (ou capital assuré) et non sur la base des sinistres. De plus le réassureur n'intervient que si la somme à assurer dépasse le plein R , mais sans dépasser la capacité de l'excédent de plein C .

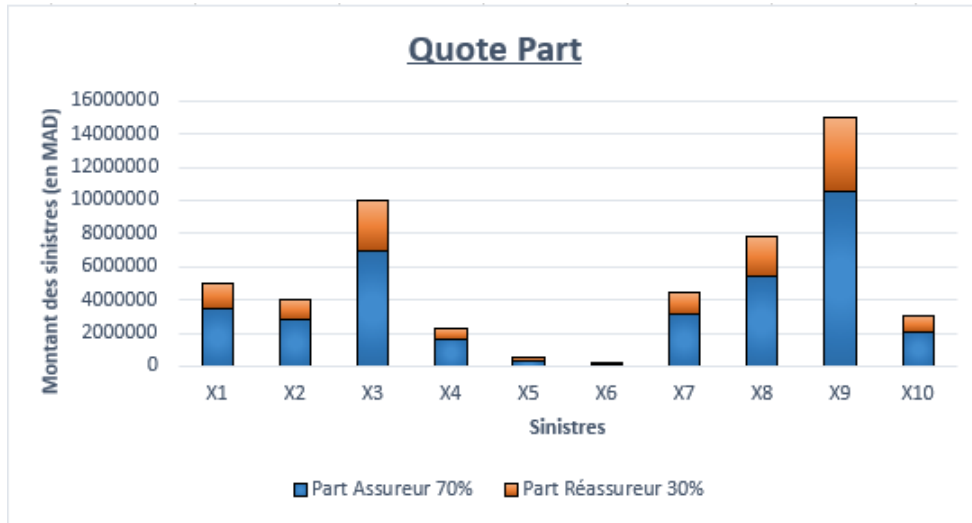


FIGURE 1.2 – La réassurance en quote part

	Risque Total	Risque conservé	Risque cédé
Primes	$\Pi = \sum_{i=1}^n \Pi_i$	$\sum_{i=1}^n (1 - a_i) \Pi_i$	$\sum_{i=1}^n a_i \Pi_i$
Sinistres	$S = \sum_{i=1}^n X_i$	$\sum_{i=1}^n (1 - a_i) X_i$	$\sum_{i=1}^n a_i S_i$

Pour chaque risque le taux de cession est donc établi comme suit :

$$a_i = \min\left(\max\left(0, 1 - \frac{R}{SI_i}\right), \frac{C}{SI_i}\right) \quad (1.1)$$

La capacité est exprimée en général comme un multiple du plein de rétention. L'excédent de plein est une forme très particulière de réassurance proportionnelle du fait que la cédante conserve un montant constant des risques à sa charge. Ainsi, le partage du risque n'est pas total puisque le réassureur n'interviendra que sur les risques importants, dépassant la rétention de l'assureur. Ce traité permet d'introduire un nivellement des risques et permet également à la cédante de conserver davantage de primes.

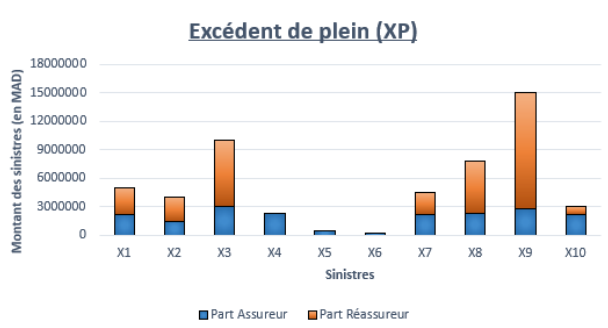


FIGURE 1.3 – La réassurance en XP

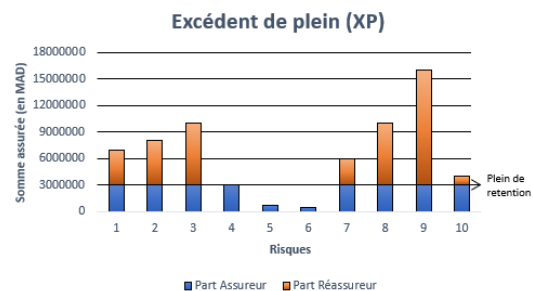


FIGURE 1.4 – XP en fonction de la somme assurée

3.1.2 La réassurance non-proportionnelle

La réassurance est dite non proportionnelle lorsqu'un réassureur reçoit une prime unique annuelle et prend en charge un montant qui ne dépend pas seulement de la survenance ou non d'un sinistre mais aussi de deux paramètres : la *priorité* et la *portée*.

- La priorité est le seuil à partir duquel le réassureur intervient dans la prise en charge du sinistre.
- la portée est une limite à l'engagement du réassureur. La portée peut être limitée ou illimitée.

Il permet de protéger l'assureur contre les sinistres de type catastrophe et les sinistres à fréquence élevée par exemple. L'appellation la plus couramment utilisée pour cette forme de couverture de réassurance est **Portée XS Priorité**. Elle est la plus souvent découpée en différentes tranches. La *limite* (ou plafond) est la somme de la priorité et de la portée. Dans la suite nous noterons la priorité P , la portée C et la limite $L = P + C$.

On distingue deux types de réassurance non proportionnelle : *l'excédent de sinistre* et *l'excédent de perte annuelle* ou *Stop-loss*.

- **L'excédent de sinistre (excess-of-loss), XL ou XS**

Le contrat peut être par risque ou par événement. Dans le premier cas, le réassureur s'engage à payer à chaque fois qu'un sinistre supérieur à une franchise survient, pour une police donnée. Dans le second cas, il intervient à chaque survenance d'évènement (climatique) éventuellement sur plusieurs polices.

- **L'excédent de sinistre par risque (ou par tête) ou XS** : Ce type de traité est utilisé par les cédantes pour acquérir de la capacité ou pour limiter leur exposition par risque. Le réassureur prend à sa charge tous les sinistres au-delà d'un certain montant. L'assureur détermine le montant maximum qu'il peut conserver sur un seul sinistre pour une branche donnée et le réassureur prend en charge l'excédent de ce sinistre. Contrairement à ce qui se passe dans un traité proportionnel, la prime de réassurance d'un traité non proportionnelle est déterminée par le réassureur, qui la calcule à partir de statistiques de la cédante et/ou du marché pour une branche donnée. Le réassureur s'engage à payer un montant inférieur ou égal à la portée à chaque fois qu'une police est sinistrée pour un montant supérieur à la priorité. On parlera d'excédent de sinistre par risque en non-vie et d'excédent de sinistre par tête en vie.

Ainsi, si X est le montant du sinistre couvert par un traité XS, le montant à la charge du réassureur X^{reass} sera :

$$X^{reass} = \begin{cases} 0 & \text{si } X \leq P \\ X - P & \text{si } P \leq X \leq L \\ C & \text{si } X \geq L \end{cases}$$

On peut donc écrire :

$$\begin{aligned} X^{reass} &= \min(\max(X - P, 0), C) \\ &= (X - P)\mathbb{1}_{\{X \leq L\}} + C\mathbb{1}_{\{X > L\}} \\ &= (X - P)_+ - (X - L)_+ \end{aligned}$$

Avec $(x)_+ = \max(0, x)$.

Le montant à la charge de la cédante devient donc : $X^{net} = X - X^{reass}$.

Pour tous les risques couverts par le traité on a :

	Risque Total	Risque conservé	Risque cédé
Primes	Π	$(1 - t)\Pi$	$t\Pi$
Sinistres	$S = \sum_{i=1}^N X_i$	$\sum_{i=1}^N X_i^{net}$	$\sum_{i=1}^N X_i^{reass}$

Avec Π le montant total des primes récoltées par l'assureur sur toutes les polices sujettes au traité. La prime cédée au réassureur est un taux de prime t qui est appliqué sur l'ensemble des primes sujettes au traité Π .

De façon pratique la portion de prime cédée au réassureur est exprimée sous la forme d'un taux sur la limite de couverture appelée « *rate on line* » :

$$Rate\ on\ line = \frac{\text{prime cédée en réassurance}}{\text{limite de la tranche du traité (Portée)}} \quad (1.2)$$

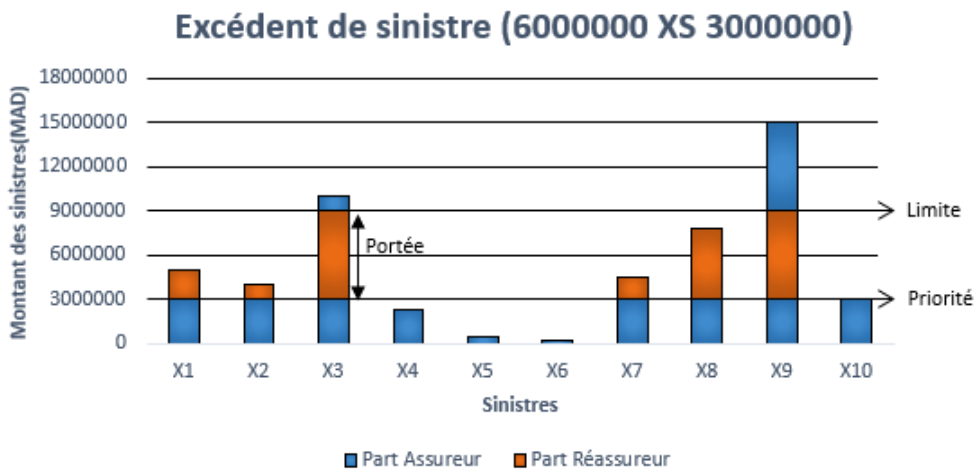


FIGURE 1.5 – La réassurance XS

— **L'excédent de sinistre par évènement :**

Ce type de traité couvre ce qu'on appelle un évènement. Un évènement est un sinistre

qui touche plusieurs risques ou têtes en même temps : catastrophe naturelle, accident industriel, déraillement de train, attentat, etc. Un évènement est défini contractuellement dans sa nature, dans l'espace et dans le temps. On parle également d'excédent de sinistre catastrophe (« **XS CAT** »).

Des clauses peuvent être ajoutées au contrat de réassurance. Ces clauses sont généralement restrictives dans le temps et l'espace, pour limiter la charge du réassureur provenant d'un même évènement :

- **Clause de limitation géographique** : la prise en charge sera constituée de plusieurs sinistres issus du même évènement et dans un périmètre géographique limité.
- **Clause de limitation dans le temps** : le traité comporte une durée maximale pendant laquelle les sinistres imputables à une même cause sont pris en compte. Cette période peut généralement varier de 72 à 168 heures en fonction des évènements couverts (inondations, accident industriel chimique, etc.)

Certaines couvertures peuvent être à la fois par risque et par évènement.

- **L'excédent de perte annuelle ou stop loss (SL)**

La souscription d'un traité Stop-Loss permet à l'assureur de protéger son ratio Sinistres/Primes . Sur une branche donnée, il va ainsi se fixer un S/P limite, et céder tous les sinistres au-delà de ce S/P seuil. Comme dans le cas du XS, le SL est défini par une priorité et une portée, mais celles-ci sont cette fois-ci exprimées en pourcentage. Le SL peut également être noté « Portée% XS Priorité% ». Un traité SL permet de se prémunir contre une dégradation des résultats, quelle qu'en soit la cause. L'assureur s'assure ainsi d'obtenir le résultat voulu, et est protégé contre l'accumulation de sinistres. Ce type de traité présente par contre l'inconvénient d'être particulièrement coûteux pour la cédante.

On note X_1, X_2, \dots, X_n les sinistres de la cédante durant la période de couverture et Π le total des primes reçues .

La charge du Stop Loss sera pour le réassureur :

$$S^{reass} = \begin{cases} 0 & \text{si } \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{\Pi} \leq P \\ \left(\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{\Pi} - P \right) \times \Pi & \text{si } P \leq \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{\Pi} \leq L \\ C \times \Pi & \text{si } X \geq L \end{cases}$$

Soit

$$S^{reass} = \min(\max(\sum_{i=1}^n X_i - P \times \Pi, 0), C \times \Pi)$$

	Risque Total	Risque conservé	Risque cédé
Primes	Π	$(1 - t)\Pi$	$t\Pi$
Sinistres	$S = \sum_{i=1}^N X_i$	$S^{net} = S - S^{reass}$	S^{reass}

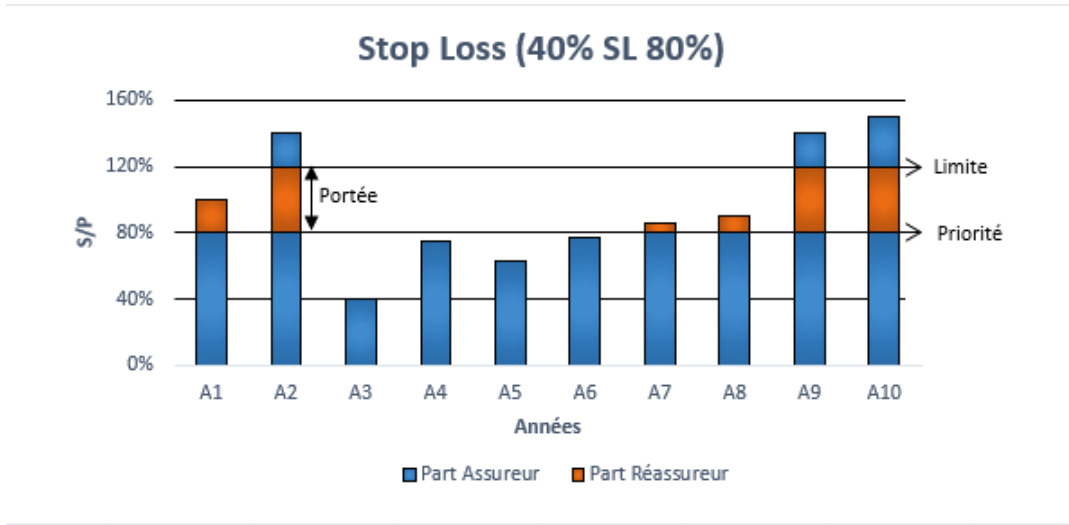


FIGURE 1.6 – La réassurance Stop loss

3.1.3 Clauses particulières

On constate de nombreuses options que l'on ajoute au contrat dans les traités non-proportionnels. On appelle celles-ci des « **clauses** ». Les clauses les plus importantes sont :

- **L'Annual Aggregate Limit (AAL)** : Afin de limiter son engagement le réassureur peut également déterminer dans le traité un montant maximum de sinistres cumulés sur une année au-delà duquel il n'intervient plus. Cela s'appelle une *limite aggregate*.
Limitation de la sinistralité agrégée :

$$S_R^{AAL} = \min(S_R, AAL)$$

Avec S_R la sinistralité agrégée annuelle retenue par le réassureur avant l'AAL et S_R^{AAL} après application de l'AAL.

- **L'Annual Aggregate Deductible (AAD)** : Cette limite correspond à un seuil de montant de perte à partir duquel le réassureur interviendra. C'est une franchise annuelle.

Limitation de la sinistralité agrégée :

$$S_R^{AAD} = (S_R - AAD)_+$$

Avec S_R la sinistralité agrégée annuelle retenue par le réassureur avant l'AAD et S_R^{AAD} après application de l'AAD.

On peut aussi combiner l'AAL et l'ADD :

$$S_R^{AAD,AAL} = \min((S_R - AAD)_+, AAL).$$

- **Les participations aux bénéficiaires** : Cette clause propose simplement d'offrir une ristourne à la cédante (correspondant à une partie du bénéfice du réassureur) si le solde de réassurance est positif. Le solde correspond ici au montant des primes auquel on retranche les sinistres et les frais engagés.
- **Le no-claim bonus** : Cette clause garantit à l'assureur une baisse de sa prime si en fin d'année aucun sinistre n'a touché la tranche. Il s'agit ainsi d'un système bonus-malus. Si la tranche considérée n'est pas touchée une seule fois durant la période de couverture, le réassureur rendra à la cédante un pourcentage $x\%$ de la prime de réassurance. Lors de la tarification de cette clause, il est important de prendre en compte l'arbitrage que va faire la cédante. Ainsi, lors des simulations effectuées pour la tarification il faut considérer que tous les loss ratios simulés inférieurs à $x\%$ entraîneront un paiement de $x\%$ par le réassureur.
- **Les reconstitutions (reinstatements)** : Avec un traité XS, la portée de celui-ci est une garantie annuelle. C'est-à-dire que si un sinistre utilise toute la portée du traité, alors un sinistre futur ne sera pas couvert par celui-ci. Il existe alors des clauses de reconstitutions qui permettent de reconstituer la garantie du traité. Cette reconstitution peut être gratuite ou payante moyennant une prime de reconstitution. En droit coutumier de la réassurance, lorsque rien n'est précisé, le traité est supposé fonctionner avec des reconstitutions illimitées et gratuites. Lorsque le nombre de reconstitutions est précisé, par exemple le réassureur accorde N reconstitutions de garantie, l'assureur pourra bénéficier $N + 1$ fois de la protection que lui procure le contrat XS (la garantie initiale + N reconstitutions). Cette reconstitution peut être gratuite mais se fait souvent au moyen d'une prime additionnelle appelée prime de reconstitution (reinstatement premium), définie comme un certain pourcentage de la prime initiale, au prorata des capitaux absorbés (prorata capita) et plus rarement au double prorata de la durée restante du contrat et des capitaux (prorata temporis + prorata capita). Donc un contrat XS s'accompagne généralement du nombre N de reconstitutions accordées, de la prime de reconstitution (en général égale à 1% de la portée), et la clause de reconstitution (généralement comprise entre 0 et 50% en prorata capita, et entre 0 et 100% en double prorata).

3.2 La réassurance facultative

La réassurance facultative est une solution de réassurance sur mesure pour un assuré en particulier. Elle s'effectue au moyen d'une proposition décrivant précisément chaque risque, que la cédante soumet à différents réassureurs, lesquels sont libres d'accepter ou de refuser. Les facultatives utilisent les mêmes méthodes de couverture que les traités, la différence résidant dans le fait qu'elles ne couvrent qu'un seul assuré à la fois. Il existe alors des facultatives en quote-part et des facultatives en excédent de sinistre. La réassurance facultative offre une couverture et des services spécifiques par rapport à la réassurance traditionnelle, une capacité financière élevée, une expertise technique et un suivi des risques. Mais la réassurance facultative présente aussi des inconvénients. Elle représente une gestion très lourde pour le réassureur puisque la gestion s'effectue affaire par affaire, chaque risque faisant l'objet de

comptes et de documents spécifiques. Quant à l'assureur, le placement d'un risque est parfois long et difficile et il n'est pas certain d'obtenir la capacité financière qu'il recherche.

3.3 La réassurance facultative-obligatoire

La réassurance facultative-obligatoire est une forme de réassurance plus rare. Elle couvre les risques d'une catégorie ou sous-catégorie donnée pendant une période donnée. Elle est facultative pour la cédante, celle-ci choisit quels sont les risques qu'elle cédera au réassureur. La partie obligatoire est prise par le réassureur qui se doit d'accepter les cessions que lui propose la cédante.

Chapitre 2

Présentation de l'organisme d'accueil

1 Présentation globale

La Société Centrale de Réassurance (SCR), a été créée en 1960 par convention entre l'État Marocain et la Caisse de Dépôt et de Gestion (CDG), actionnaire majoritaire de la Société Centrale de Réassurance avec 94% du capital.



FIGURE 2.1 – Logo de la SCR

la SCR occupe la place de 1er Réassureur arabe et celle de 3ème Réassureur Africain sur la base de primes souscrits . La SCR opère sur plus de 70 Marchés, avec plus de 500 Clients en Afrique, au Moyen-Orient et en Asie. Elle possède des bureaux de représentation à Abidjan en Côte d'Ivoire, au Caire en Égypte, à Kigali au Rwanda et dernièrement à Johannesburg en Afrique du Sud.

Elle joue un rôle d'investisseur institutionnel en participant à la conservation des primes au niveau national et à la mobilisation de l'épargne dans l'économie du pays. Elle assure sa rentabilité économique tout en se plaçant au service du marché Marocain et en développant les affaires étrangères. Elle compte parmi les plus anciennes sociétés de réassurance dans les pays en voie de développement. Elle a œuvré à la création des sociétés régionales comme la Société Arabe de Réassurance et la Société Africaine de Réassurance. Elle est notée en **B++ (Good)** par **AM Best**.

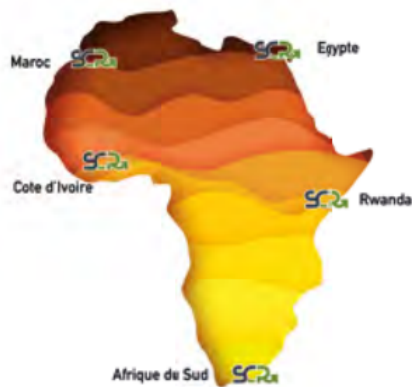


FIGURE 2.2 – Bureaux de représentation de la SCR

La SCR jouit d'une présence régionale historique dans différentes Organisations :

- Manager du Centre Africain des Risques Catastrophiques
- Actionnaire de SEN Re et Arab Re
- Manager de l'Aviation du Pool FAIR (Federation of Afro-Asian Insurers & Reinsurers)
- Membre fondateur de l'Organisation des Assurances Africaines (OAA)
- Membre actif de l'Union Générale Arabe d'Assurances (UGAA)
- Membre de la Fédération des Sociétés d'Assurances en Droit National Africaines (FANAF)
- Membre du General Arab Insurance Federation (GAIF)

1.1 Principaux axes d'intervention

- la SCR est un support de réassurance pour le Marché Marocain ;
- Elle intervient dans la gestion des risques catastrophiques ;
- elle participe au développement à l'international des assureurs et des grands groupes marocains ;
- Elle contribue à la mise en place des nouveaux produits pour le compte des compagnies d'assurance Marocaines et Africaines (Crédit Caution, Assurance Paramétrique, Cyber Risque, Violence Politique...) ;
- Elle concourt au partage des risques à l'international en souscrivant en Afrique, au Moyen Orient et dans certains Marchés de l'Asie (Inde, Chine, Iran, Corée du Sud, Pakistan...)

1.2 Organigramme

L'organisation de la SCR est conçue pour être au service de ses clients et partenaires et pour favoriser la croissance à la fois individuelle et collective de ses collaborateurs.

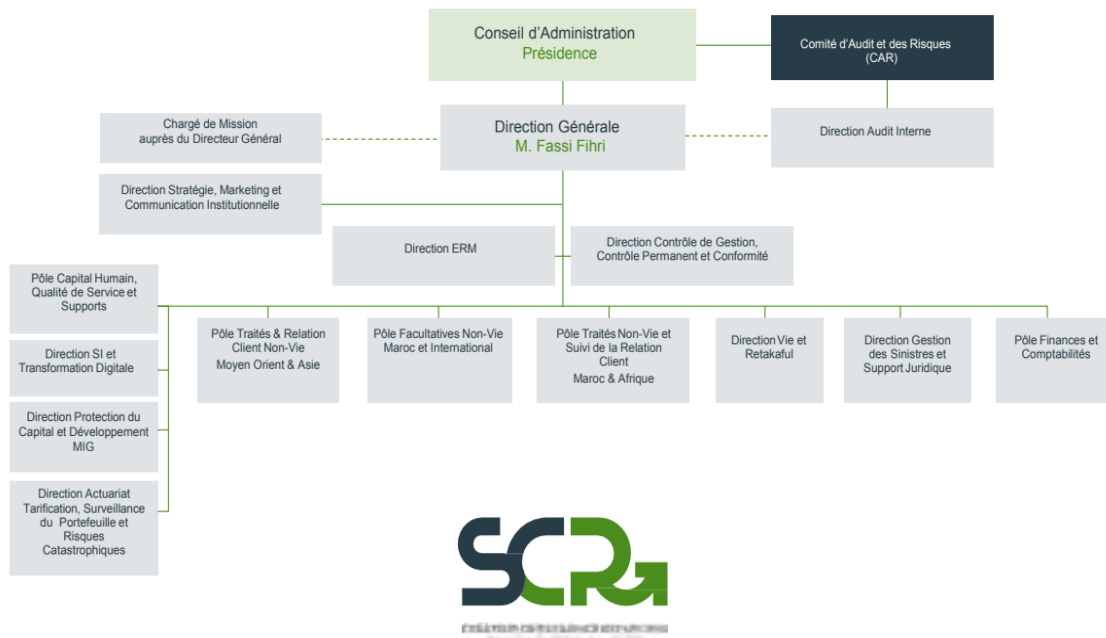


FIGURE 2.3 – Organigramme de la SCR

1.3 Politique de souscription

La SCR agit en tant que réassureur généraliste sur le marché marocain et à l'international. Elle propose les catégories de couverture enn réassurance vie et en non vie suivantes :

- Traités proportionnels et non proportionnels
- Facultatifs proportionnelles et non proportionnelles :

La SCR souscrit principalement dans les branches suivantes :

- Dommages aux Biens
- Engineering
- Responsabilité civile (RC)
- Automobile (RC & Dommages)
- Accident de Travail
- Risques agricoles
- Aviation
- Energie (Oil and Gas)
- Marine (Corps et Facultés)
- RC décennale
- Violence politique
- Crédit caution
- Vie et individuelle accident

A l'international, la SCR souscrit des Affaires en Afrique(hors Afrique du Sud), Au Moyen Orient et en Asie pour les pays suivants : Turquie, Pakistan, Inde, Chine et Corée du Sud.

2 la SCR en Chiffres

La SCR a réalisé en 2021 un chiffre d'affaires de 2.615 Millions MAD, un résultat net de 311 Millions MAD et un ROE de 11,7%. La marge de solvabilité de la SCR la même année est de 175,9%, selon le référentiel Européen Solvabilité 2. Aussi, le Réassureur a renforcé ses fonds propres par une augmentation de Capital Social de 1,5 MMDH à 2,2 milliards MAD.



FIGURE 2.4 – Chiffres Clés de la SCR(en millions) en 2021

Les graphiques suivants montrent l'évolution des chiffres clés de la SCR sur les 5(cinq) dernières années.

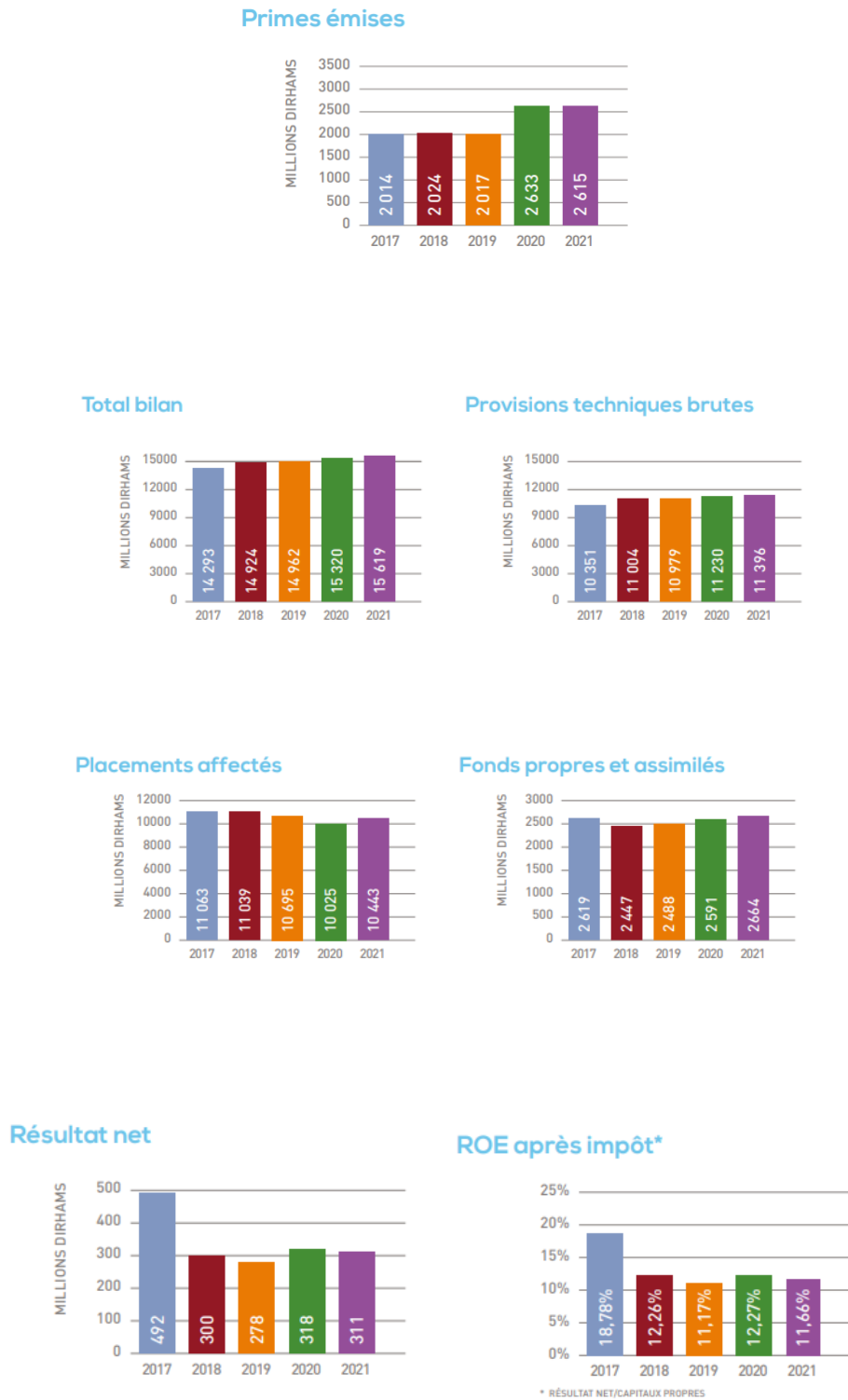


FIGURE 2.5 – Evolution des chiffres clés de la SCR de 2017 à 2021

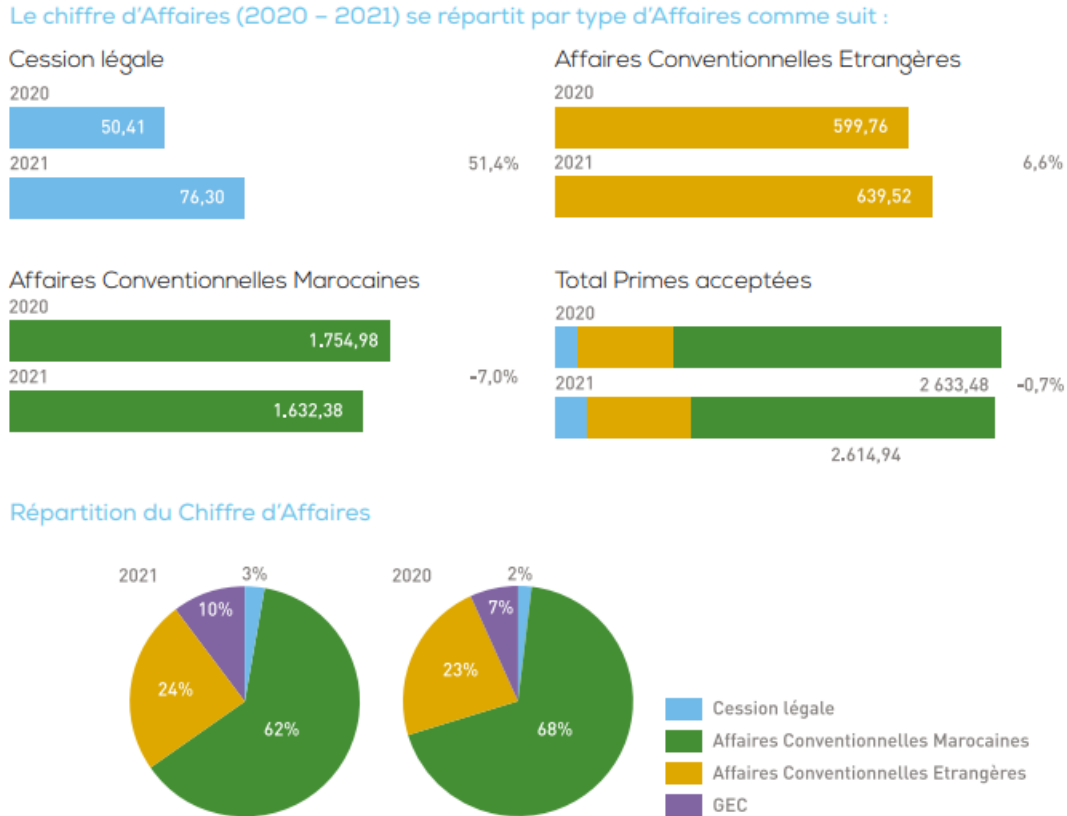


FIGURE 2.6 – Répartition du chiffre d'affaires entre 2020 et 2021 de la SCR

3 La rétrocession

3.1 Définition

La rétrocession en réassurance, est un processus dans lequel une compagnie de réassurance cède une partie de ses risques à une autre compagnie de réassurance appelé rétrocessionnaire. En d'autres termes, une compagnie de réassurance peut transférer une partie des risques qu'elle a acceptés de couvrir à une autre compagnie de réassurance, afin de limiter son exposition à ces risques.

Elle fonctionne de la même manière que la cession entre l'assureur et le réassureur. La rétrocession peut se faire de manière proportionnelle non proportionnelle .

C'est une pratique courante dans l'industrie de la réassurance, car elle permet aux compagnies de réassurance de mieux gérer leur portefeuille de risques et de se protéger contre des pertes potentielles importantes.

3.2 Intérêts de la rétrocession

Les objectifs de la rétrocession sont les mêmes que pour la réassurance à savoir :

- **La gestion des risques** : la rétrocession permet aux compagnies de réassurance de mieux gérer leur portefeuille en réduisant leur exposition à des risques spécifiques et en diversifiant leurs risques.
- **La protection contre des pertes importantes** : la rétrocession permet également aux compagnies de réassurance de se protéger contre des pertes potentiellement importantes.
- **L'accès à de nouveaux marchés** : la rétrocession peut également aider les compagnies de réassurance à accéder à de nouveaux marchés en travaillant avec des partenaires de rétrocession qui ont une présence locale et une connaissance approfondie de ces marchés.
- **La protection du capital** : la rétrocession permet également aux compagnies de réassurance de réduire le capital alloué aux fonds propres.

Cependant la rétrocession est un processus complexe qui peut être coûteux et la compagnie de réassurance peut subir le risque de contrepartie (la compagnie de réassurance qui accepte de prendre en charge ses risques n'est pas en mesure de remplir ses obligations contractuelles).

3.3 Processus de rétrocession

Le processus de la rétrocession implique plusieurs étapes clés. Voici les principales étapes du processus de la rétrocession :

1. **Évaluation des risques** : La compagnie de réassurance évalue son portefeuille de risques pour déterminer les risques qui peuvent être transférés à d'autres compagnies de réassurance. Cette évaluation peut être basée sur les exigences de solvabilité, les limites de rétention et les préférences de risques de la compagnie de réassurance.
2. **Sélection de la compagnie de réassurance** : La compagnie de réassurance choisit une ou plusieurs compagnies de réassurance pour transférer ses risques. Cette sélection peut être basée sur plusieurs critères, tels que la solidité financière, l'expertise en matière de risques, la réputation et les capacités de la compagnie de réassurance.
3. **Négociation des termes** : Les compagnies de réassurance négocient les termes de l'accord de rétrocession, tels que les limites de couverture, les primes, les commissions et les conditions contractuelles. Les termes peuvent être influencés par les risques transférés, les exigences réglementaires et les préférences de chaque compagnie de réassurance.
4. **Signature du contrat** : Une fois les termes convenus, les compagnies de réassurance signent un contrat de rétrocession. Ce contrat établit les obligations et les responsabilités de chaque partie et les modalités de l'accord.

5. **Gestion de la rétrocession** : La compagnie de réassurance gère la rétrocession en suivant les obligations contractuelles, en surveillant la solvabilité de la compagnie de réassurance rétrocedante et en traitant les réclamations ou les pertes qui surviennent.
6. **Renouvellement de la rétrocession** : Le contrat de rétrocession peut être renouvelé périodiquement pour continuer la couverture de réassurance pour la compagnie de réassurance. Les conditions du renouvellement peuvent être modifiées en fonction des performances de la compagnie de réassurance et des changements dans le marché de la réassurance.

3.4 Processus de rétrocession de la SCR

La rétrocession s'inscrit dans le modèle économique de la SCR comme le principal mécanisme de transfert de risque. Ses objectifs principaux sont une réduction de l'exposition aux risques de souscription, une diminution de la volatilité des résultats financiers, une stabilisation de la solvabilité avec une utilisation efficace du capital disponible et une prédisposition accrue d'absorber les pertes majeures et/ou catastrophiques tout en augmentant la capacité de souscription de la compagnie.

Le processus de rétrocession de la SCR est conduit par la **Direction Protection du Capital et Développement MIG** sous la tutelle de Mr.ASSALI.L'équipe en charge de la rétrocession est composée de Mr.Assali et de sa directrice adjointe Mme. BASMA.

L'étape principal du processus de rétrocession est la mise en place d'un programme de rétrocession optimal, adapté aux besoins de la SCR et renouvelé chaque année.

Le processus de rétrocession est un processus cyclique qui met à contribution l'ensemble des parties prenantes stratégiques : pôles de souscription, direction des risques, direction juridique et de gestion des sinistres, pôle financier, exécutif et administrateurs.

Les étapes clés du processus mis en oeuvre par la SCR sont les suivantes : ‘

1. **Elaboration de la stratégie de rétrocession** Cette étape se compose essentiellement de l'analyse quantitative du portefeuille existant et de la mise en place de la structure du programme .
Les analyses quantitatives réalisées consistent en une étude des profils de risque et leur adéquation avec la structure actuelle, en un examen de la sinistralité expérimentée et en une modélisation des risques les plus matériels du portefeuille de la SCR.
Les résultats des études réalisées aboutit à un projet de structure de rétrocession.La structure et la stratégie de placement sont ainsi définies en collaboration avec les équipes de souscription.
Le plan de rétrocession prévisionnel est ensuite soumis à l'ensemble des instances de gouvernance et communiqué à l'ACAPS.
2. **Consultation du marché de la réassurance et placement** Cette étape consiste à la mise en place effective de la rétrocession : Un dossier de renouvellement incluant les cahiers des charges des couvertures est constitué pour être soumis au marché international de la réassurance via des courtiers ou en direct.

Les diverses offres sont ensuite évaluées sur des critères spécifiques via un outil de scoring dédié.

.Les leaders des couvertures sont aussi sélectionnés et les contracts sont établis.

- 3. Gestion administrative et reportings** La gestion administrative et les reportings jouent un rôle essentiel dans le processus de rétrocession de la Société Centrale de Réassurance (SCR). Ces activités consistent à assurer un suivi rigoureux et efficace de toutes les opérations liées à la rétrocession, depuis la mise en place des traités jusqu'à leur renouvellement annuel. Cela implique la gestion des contrats de rétrocession, la collecte et la vérification des données nécessaires, la communication avec les réassureurs partenaires, ainsi que la préparation et la transmission des reportings réguliers.

Deuxième partie

Cadre théorique de la modélisation

Introduction

Dans le cadre du processus de rétrocession adoptée par la SCR, la première étape est de modéliser la sinistralité probable du portefeuille couvert par la SCR. Ainsi pour modéliser ses pertes, la SCR utilise actuellement une approche reposant sur des hypothèses externes. Dans le cadre de notre travail, notre objectif est de développer un calibrage interne de la modélisation des pertes. Nous nous concentrerons particulièrement sur les facultatives(FAC) marocaines, qui constituent une part importante du portefeuille de la SCR. Ce choix s'explique par la disponibilité des données et le fait que les FAC sont des contrats spécifiques à chaque risque individuel ce qui nous permet de disposer de données détaillées pour chaque contrat, contrairement aux traités qui regroupent plusieurs risques ce qui ne permet une modélisation des risques individuels.

Dans cette deuxième partie de notre rapport, nous commencerons par présenter l'approche actuellement utilisée par la SCR pour la modélisation de ses pertes. Ensuite, nous introduirons le cadre théorique de notre modélisation interne. Nous détaillerons également les lois de probabilité que nous avons choisies pour la modélisation de la fréquence et de la sévérité. De plus, nous présenterons en détail les critères que nous avons utilisés pour évaluer et valider chaque modèle, en nous appuyant sur des tests statistiques et des analyses de données.

Chapitre 1

Cadre général de la modélisation

Ce chapitre se concentre sur l'explication du cadre générique de la modélisation de l'EP Curve, qui repose sur le modèle collectif (approche fréquence/sévérité) et le principe de simulation stochastique. Nous détaillerons également la méthodologie de construction des courbes de perte, communément appelées "EP curves". Ces courbes jouent un rôle essentiel dans l'évaluation des risques et la mesure de la solvabilité des compagnies d'assurance/réassurance. Elles permettent de relier les pertes probables à leur période de retour, fournissant ainsi une représentation visuelle de la sinistralité probable.

1 Le modèle collectif

1.1 Définition

Le modèle de risque collectif se base sur l'approche fréquence/sévérité et consiste à spécifier les distributions de probabilité pour le nombre total de sinistres survenus dans une période déterminée et le coût individuel de ces sinistres avec pour but ultime de modéliser le risque lié à un portefeuille d'assurance ou de réassurance.

Le modèle collectif donne la somme agrégé des montants des sinistres sur une période d'exercice donnée à maille de portefeuille plutôt qu'à la maille contrat ou groupe homogène de contrat. On suppose que le nombre de sinistres est donné par une variable de comptage $N \in \mathbb{N}$, de loi notée

$$p_N(n) = P(N = n), \quad n = 0, 1, \dots \quad (1.1)$$

Les montants de sinistres X_1, X_2, \dots, X_N forme une suite de variables aléatoires positives de densité de probabilité f_X et de fonction de répartition F_X . le montant agrégé S est donné par :

$$S = X_1 + X_2 + X_3 + \dots + X_N = \begin{cases} 0 & \text{si } N = 0 \\ \sum_{i=1}^N X_i & \text{si } N > 0 \end{cases} \quad (1.2)$$

Les hypothèses du modèle sont les suivantes :

- les montants des sinistres X_i sont indépendants et identiquement distribués (i.i.d)

— le nombre de sinistres N est indépendant des X_i

Ce modèle est moins précis que le modèle individuel (aggrégation par police) mais bien plus facile à calibrer. Son problème principal est l'absence de formule fermée (à quelques exceptions près) pour sa fonction de répartition.

En pratique, on ajuste des lois statistiques à des données de sinistres, en modélisant d'une part, la fréquence des sinistres et d'autre part, leur sévérité. Le choix des modèles est ensuite validé par des tests statistiques. Par la suite on combine les deux distributions pour obtenir la distribution de pertes totales.

La modélisation de la distribution de la sinistralité totale se fera pour chaque "Line of Business" (Branche d'activité) afin d'obtenir une certaine homogénéité de la distribution. Une bonne approximation de la fonction de répartition de cette distribution peut-être obtenu avec la méthode de simulation de Monte-Carlo.

La condition essentielle pour appliquer cette méthode sera la disponibilité de données de sinistres historiques afin de calibrer le modèle.

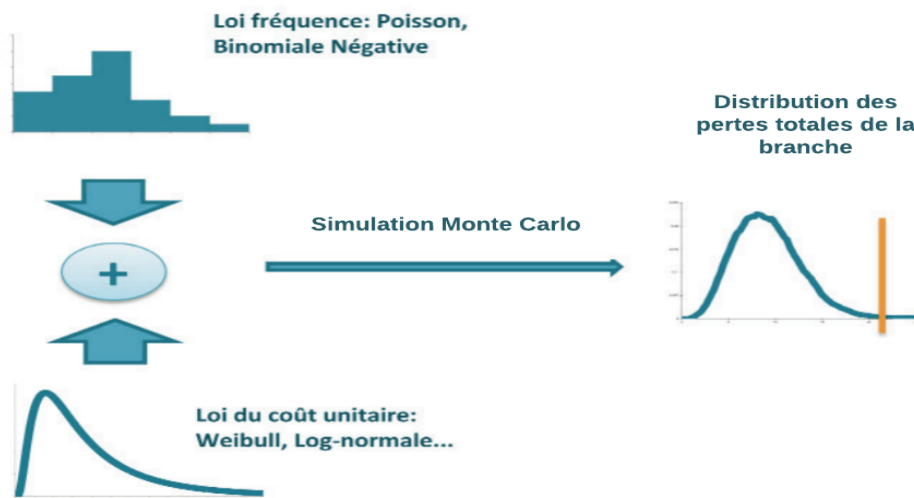


FIGURE 1.1 – Modélisation de la sinistralité totale par le modèle collectif

1.2 Propriétés

La mesure de probabilité de S est mixte au sens où elle admet un atome de probabilité en $X = 0$ correspondant à l'évènement $\{N = 0\}$. On a :

$$dP_S(x) = P(N = 0)\delta_0(x) + f_S^+(x)d\lambda(x)$$

où $f_S^+(x)$ correspond à la densité de la partie absolument continue de S définie par

$$f_S^+(x) = \sum_{n=1}^{\infty} P_N(n)f_X^{*n}(x), x > 0$$

avec f_X^{*n} qui désigne le n^{me} produit de convolution de f_X avec elle-même : c'est la densité de la somme $X_1 + \dots + X_n = \sum_{i=1}^n X_i$.

Pour la fonction de répartition de S , En conditionnant par rapport au nombre de sinitres, on a :

$$F_S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(S \leq x / N = n) P(N = n) = \sum_{n=0}^{+\infty} F_X^{*n}(x) P_N(n)$$

avec $F_X^{*n}(x) = P(X_1 + \dots + X_n \leq x)$ le produit de convolution d'ordre n de F_X .

L'expression de f_S^+ ou de $F_S(x)$ est problématique car elle implique une série infinie avec des produits de convolutions imbriqués. Il existe certains cas où la fréquence et la sévérité sont de telles natures que le résultat de l'agrégation est immédiatement obtenu par une formule analytique ou un algorithme simple.

Les différentes stratégies pour calculer la loi de S sont :

- l'algorithme de Panjer ou la transformée de Fourier rapide (FFT) qui passe par la discrétisation de la loi de X (passer d'un modèle continu à un modèle discret)
- des approximations : loi normale, normal-power ou gamma
- une approche par simulation. L'approche par simulation est plus facile à implémenter et offre plus de flexibilité.

Pour l'espérance et la variance de S , en utilisant l'hypothèse d'indépendance on a les expressions suivantes :

- $E(S) = E(N)E(X)$
- $Var(S) = E(N)Var(X) + Var(N)(E(X))^2$

2 Principe de la simulation de Monte Carlo

Après avoir déterminé les lois de fréquence et de sévérité, on essaie de simuler le comportement de la sinistralité du portefeuille pour plusieurs scénarios. Pour ce faire, on utilise la simulation de Monte Carlo qui est la méthode la plus connue et la plus utilisée.

Cette méthode consiste à générer des nombres aléatoires suivant une loi prédéfinie.

Il existe plusieurs façons de générer des nombres aléatoires suivant une loi quelconque.

La méthode la plus simple est la méthode de transformation inverse que nous expliciterons par la suite.

Soit X une variable aléatoire de fonction de répartition $F(x) = P(X \leq x)$, alors F est une fonction croissante et continue à droite. On définit la fonction inverse de F sur $[0, 1]$:

$$\forall u \in [0, 1], F^{\leftarrow}(u) = \inf\{x \in \mathbb{R} : F(x) \geq u\}$$

Cette fonction inverse est la fonction réciproque de F lorsque F est bijective. On a alors, $\forall u \in [0, 1]$ et $x \in \mathbb{R}$,

$$F^{\leftarrow}(u) \leq x \iff u \leq F(x)$$

Si U suit une loi uniforme sur $[0, 1]$, la variable aléatoire $F^{-1}(U)$ suit une loi de fonction de répartition F . En effet,

$$\forall x \in \mathbb{R}, P(F^{\leftarrow}(U) \leq x) = P(U \leq F(x)) = F(x)$$

Alors pour générer un échantillon X_1, X_2, \dots, X_n de variables aléatoires indépendantes et de même loi de fonction de répartition F , on procède en 3 étapes :

1. on calcul notre inverse de fonction de répartition F
2. on génère un échantillon U_1, U_2, \dots, U_n de variables aléatoires indépendantes de loi Uniforme sur $[0, 1]$,
3. on pose alors $X_i = F^{\leftarrow}(U_i)$

Pour le cas des variables discrètes, la méthode est la même avec quelques modifications :

Soit X une variable aléatoire discrète tel que $p_k = P(X = x_k)$, $s_0 = 0$ et $s_k = \sum_{k=1}^{+\infty} p_k$, $s_k \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{N}^*$.

$\forall u \in [0, 1]$, l'inverse généralisé est donné par

$$F^{\leftarrow}(u) = \inf \left\{ x \in \mathbb{R} : \sum_{k=1}^{+\infty} p_k \mathbb{1}_{\{x_k \leq x\}} \geq u \right\} = \{x_k : s_{k-1} < u \leq s_k\}.$$

Alors pour $U \sim \mathcal{U}(0, 1)$, la variable aléatoire Z suit la même loi que X :

$$Z = \begin{cases} x_1 & \text{si } u \in [0, s_1] \\ x_k & \text{si } u \in]s_{k-1}, s_k], k \leq 2 \end{cases}$$

En pratique, il suffit donc de trouver, pour une réalisation u suivant la loi $U([0, 1])$, l'unique indice k tel que $s_{k-1} < u \leq s_k$. Ceci est facile à mettre en œuvre lorsque le support est fini mais peut être plus complexe lorsqu'il est infini dénombrable comme pour le cas de la loi de Poisson.

Dans le cadre du modèle collectif, on génère le montant agrégé S par la procédure suivante :

1. On commence par tirer, dans la loi du nombre de sinistres, un nombre de sinistres N .
2. Ensuite, N fois de suite, on tire, dans la loi du montant des sinistres, un montant de sinistre X .
3. Enfin on fait

faire la somme des N nombres X tirés. Pour obtenir la distribution de S , il faut répéter ce processus autant de fois que cela est nécessaire à l'obtention de la dite distribution.

3 Construction de l'*EP Curve* par simulation de Monte Carlo

Dans un premier temps, il est nécessaire de rappeler quelques définitions sur les mesures de risque.

3.1 Mesures de risque

3.1.1 Définition

Soit M un ensemble de variables aléatoires réelles définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. M représente l'ensemble des pertes et gains L à horizon fixe. Si $L > 0$, il s'agira

d'une perte alors que si $L \leq 0$, il est question d'un gain.

Une mesure de risque est une application ρ de M dans \mathbb{R} . Si $\rho(L) = \infty$ alors la position de perte L est inacceptable ou non-assurable. L'interprétation de $\rho(L)$ est le montant que l'on peut ajouter à L afin que la position de perte devienne acceptable, c'est à dire qu'on cherche à avoir $\rho(L) \leq 0$.

3.1.2 Propriétés d'une mesure de risque

On dit que la mesure de risque ρ est :

1. invariante par translation si

$$\forall L \in M \text{ et } \forall l \in \mathbb{R}, \rho(L + l) = \rho(L) + l$$

2. sous-additive si

$$\forall L_1, L_2 \in M, \rho(L_1 + L_2) \leq \rho(L_1) + \rho(L_2)$$

L'agrégation ne crée pas de risque supplémentaire et la diversification réduit le risque.

3. positivement homogène si

$$\forall L \in M, \forall \lambda \geq 0, \rho(\lambda L) = \lambda \rho(L)$$

4. monotone si

$$\forall L_1, L_2 \in M, L_1 \leq L_2 \text{ p.s.} \Rightarrow \rho(L_1) \leq \rho(L_2)$$

5. cohérente si elle possède les propriétés 1,2,3 et 4. La mesure de risque la plus utilisée est la *Value at Risk*.

3.1.3 La Value at Risk

La *Value at Risk* (VaR) correspond au quantile de perte qui ne devrait être dépassé qu'avec une probabilité donnée α et sur un horizon donné, un an ou plusieurs années.

Celle-ci est le plus souvent exprimée en fonction de période de retour :

$$VaR_\alpha = \frac{1}{100 - \alpha} \tag{1.3}$$

La période de retour est le nombre d'années moyen séparant des événements de même intensité. Par exemple la VaR à 200 ans (qui correspond à $\alpha = 99,5\%$) représente la perte probable sur un horizon de 200 ans.

On a :

$$\begin{aligned} P(L \leq VaR_\alpha) &= \alpha \\ VaR_\alpha &= \inf\{x | P(L \leq x) \geq \alpha\} \\ &= F_L^{-1}(\alpha) \end{aligned}$$

La *Value at Risk* s'intéresse aux probabilités d'évènements rares et extrêmes. Malgré le fait qu'elle n'est pas cohérente (elle ne respecte la condition de sous-additivité), elle demeure la principale mesure de risque dans le monde de l'assurance.

3.1.4 L'EP Curve ou Exceedance Probability Curve

L'EP Curve est un graphique qui permet de fournir une image complète du risque d'un portefeuille, avec une indication sur la probabilité de dépassement de certains seuils.

Il existe deux types d'EP Curves :

- L'OEP ou *Occurrence Exceedance Probability*, représente la perte maximale associée à une période de retour.
- L'AEP ou *Aggregate Exceedance Probability* qui représente la somme des pertes associées à une période de retour. Nous nous intéresserons à ce type d'EP Curve

Pour construire L'EP Curve, On effectue n scénarios de simulation et on détermine les pertes totales associée à chaque scénario. On classe ensuite les pertes simulées par ordre croissant.

La perte de période de retour k correspond à la perte classée au rang $n(1 - \frac{1}{k})$. Par exemple pour 10000 simulations, la perte de période de retour 200 ans (la $VaR_{99,5}$) est le 9950^{ème} plus grand montant simulé.

Chapitre 2

Approche actuelle de la SCR pour la modélisation de l'EP Curve

Actuellement, l'approche utilisée par la SCR pour la modélisation de la sinistralité repose sur des hypothèses externes. Cela crée une dépendance vis-à-vis de sources externes et limite la capacité de la SCR à ajuster des modèles en fonction de ses propres spécificités et exigences.

Pour les besoins de la modélisation, le portefeuille de la SCR est organisé en profils de risques, qui représentent une découpe du portefeuille en ensembles de bandes de sommes assurées où les risques sont considérés comme homogènes. Chaque profil de risque est une description détaillée du portefeuille, présentée sous la forme d'un tableau. Chaque ligne de ce tableau est appelée une "bande" et regroupe les risques en fonction de la somme assurée, accompagnée d'informations telles que la prime, le nombre de risques dans chaque tranche, la somme assurée totale et la somme assurée moyenne par bande.

Les bandes sont généralement créées de manière à être cohérentes avec la structure de rétrocession de la branche. Cette segmentation par bandes permet une meilleure évaluation des risques et une analyse plus précise de la sinistralité probable pour chaque tranche de sommes assurées. .

LoB	N° band	N° Layer	band min (D)	band max (C)	∑ SCR Exposure	Number of Risk	Average liability	∑ SCR EPI
NM_FCM_Fire	1	Ret	0 DH	15.000.000 DH	139.729.401 DH	17	8.219.377 DH	1.239.556 DH
NM_FCM_Fire	2	Ret	15.000.000 DH	25.000.000 DH	431.505.360 DH	22	19.613.880 DH	753.413 DH
NM_FCM_Fire	3	L1	25.000.000 DH	50.000.000 DH	1.260.561.600 DH	35	36.016.046 DH	5.295.962 DH
NM_FCM_Fire	4	L1	50.000.000 DH	75.000.000 DH	1.505.512.254 DH	22	68.432.375 DH	9.959.667 DH
NM_FCM_Fire	5	L2	75.000.000 DH	100.000.000 DH	1.686.450.626 DH	19	88.760.559 DH	2.925.192 DH
NM_FCM_Fire	6	L2	100.000.000 DH	125.000.000 DH	1.275.551.491 DH	11	115.959.226 DH	1.605.702 DH
NM_FCM_Fire	7	L2	125.000.000 DH	150.000.000 DH	1.915.797.381 DH	14	136.842.670 DH	2.690.533 DH
NM_FCM_Fire	8	L3	150.000.000 DH	200.000.000 DH	4.178.069.340 DH	24	174.086.223 DH	4.392.136 DH
NM_FCM_Fire	9	L3	200.000.000 DH	250.000.000 DH	2.654.175.525 DH	12	221.181.294 DH	4.576.615 DH
NM_FCM_Fire	10	L3	250.000.000 DH	300.000.000 DH	4.208.674.404 DH	15	280.578.294 DH	6.770.285 DH
NM_FCM_Fire	11	L3	300.000.000 DH	350.000.000 DH	4.284.560.443 DH	13	329.581.573 DH	15.134.321 DH
NM_FCM_Fire	12	L4	350.000.000 DH	450.000.000 DH	8.592.961.499 DH	22	390.589.159 DH	20.323.292 DH
NM_FCM_Fire	13	L4	450.000.000 DH	550.000.000 DH	1.368.497.212 DH	3	456.165.737 DH	1.350.556 DH
NM_FCM_Fire	14	L4	550.000.000 DH	650.000.000 DH	2.372.144.701 DH	4	593.036.175 DH	1.647.228 DH
NM_FCM_Fire			Total		35.874.191.236 DH	233	153.966.486 DH	78.664.457 DH

FIGURE 2.1 – Exemple de profil de risque de la SCR

Comme nous l'avons dit précédemment, la modélisation actuelle de la sinistralité probable du portefeuille utilise des hypothèses externes pour calibrer les lois de fréquence et de sévérité. Ces hypothèses seront détaillées dans les sections suivantes.

1 Modélisation de la fréquence

Pour chaque bande k du profil de risque identifiée, le modèle estime la fréquence par une loi de Poisson de paramètre :

$$\lambda_{Bande\ k} = \frac{Loss\ Ratio * EPI(k)}{E(x) * SA(k)}$$

qui peut être interprété comme suit :

$$\lambda_{Bande\ k} = \frac{Perte\ totale\ moyenne\ annuelle\ de\ la\ bande}{Perte\ moyenne\ individuelle\ de\ la\ bande}$$

où le loss ratio est le rapport sinistres/primes de la branche identifiée, $EPI(k)$ l'ensemble des primes de la bande k , $E(x)$ la moyenne du taux de destruction et $SA(k)$ la somme assurée moyenne de la bande k .

Calcul du paramètre λ

Pour chaque bande k du profil de risque, il faut connaître la répartition w_k de la prime d'assurance totale P ainsi que les ratios de sinistres a primes (loss ratios), notés LR_k dans chaque tranche.

On obtient grâce a ces données la prime pure PP_k qui est égale a l'espérance des sinistres annuels $E(S_k)$ pour chaque bande :

$$PP_k = E(S_k) = P * w_k * LR_k \quad (2.1)$$

On considère que le loss ratio est le même pour toutes les bandes ;il est donc égal au loss ratio de la branche LR . pour la répartition des primes par bande, on a déjà l' $EPI(k)$ obtenu en regroupant les différents risques appartenant à la même bande. Finalement on a donc :

$$PP_k = E(S_k) = EPI(k) * LR \quad (2.2)$$

Par hypothèse, les risques d'une bande de sommes assurées sont homogènes, indépendants et identiquement distribués. Soit X_k la variable aléatoire associée au montant de sinistre individuel dans la bande k et N_k la variable aléatoire associée au nombre de sinistres annuels dans la bande. Le modèle collectif permet d'écrire la sinistralité annuelle totale S_k dans la tranche k :

$$S_k = \sum_{i=1}^{N_k} X_{k,i}$$

$$E(S_k) = E(N_k)E(X_k)$$

$$E(N_k) = \frac{E(S_k)}{E(X_k)}$$

En utilisant la variable taux de destruction : $x_k = \frac{X_k}{SA(k)}$ On a :

$$E(X_k) = E(x_k * SA(k)) = SA(k) * E(x_k)$$

En supposant que l'espérance du taux de destruction est identique pour chaque bande on a :

$$E(N_k) = \frac{EPI(k) * LR}{SA(k) * E(x)}$$

Pour la loi de Poisson le paramètre λ est égale à l'espérance du nombre de sinistres donc finalement on a :

$$\lambda_k = E(N_k) = \frac{EPI(k) * LR}{SA(k) * E(x)}$$

2 Modélisation de la sévérité

Quant à la modélisation de la sévérité des sinistres, on fait appel aux courbes de Swiss Re, qui sont des références reconnues dans l'industrie de la réassurance. Les courbes de Swiss Re sont des outils statistiques qui permettent d'estimer la distribution de la sévérité des sinistres en fonction de différents paramètres, tels que la taille du sinistre, la nature de l'événement, etc. Ces courbes sont élaborées à partir d'une analyse approfondie des données historiques et des caractéristiques spécifiques du marché. En utilisant ces courbes, on est en mesure d'estimer le taux de destruction $x\%$ qui servira à calculer la charge des sinistres par la formule suivante :

$$\text{charge sinistre} = x\% * SA(k) \tag{2.3}$$

Le choix de la courbe Swiss Re appropriée se fait de manière qualitative sur avis d'expert en prenant en compte l'historique des sinistres majeurs ainsi que leur fréquence de survenance. En examinant les sinistres majeurs passés et en évaluant leur période de retour, les professionnels du domaine sélectionne la courbe Swiss Re la plus adaptée. Après avoir déterminé le paramètre λ pour chaque bande et la courbe Swiss Re appropriée, on réalise une simulation stochastique afin d'avoir l'EP Curve brut qui relie les pertes probables à leur période de retour .

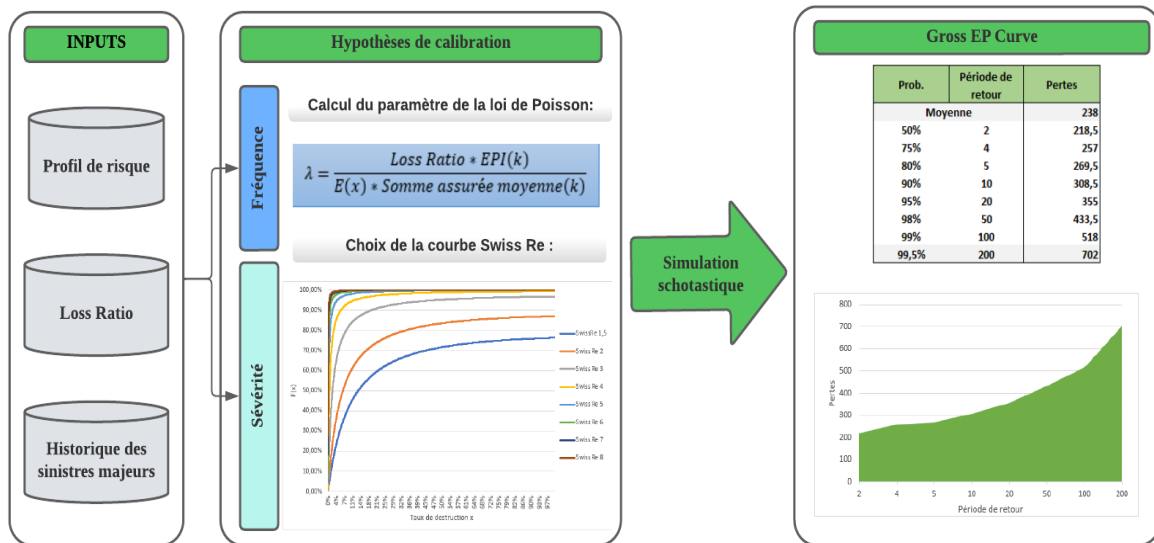


FIGURE 2.2 – Approche actuelle de la modélisation

3 Limites de l'approche actuelle

L'approche actuelle de modélisation utilisée repose sur des hypothèses externes qui peuvent ne pas refléter fidèlement le portefeuille de la SCR.

En ce qui concerne la modélisation de la fréquence, l'utilisation de la loi de Poisson, considérée comme une distribution de référence couramment utilisée, présente des inconvénients importants. En effet, la loi de Poisson est une distribution ni sur-dispersée ni sous-dispersée, cela signifie que la variance des événements est égale à leur espérance, et dans de nombreux cas réels la variance des événements peut différer de leur espérance, ce qui rend la loi de Poisson inadaptée pour modéliser la fréquence de manière précise. Quant à la sévérité, le fait d'utiliser les sinistres majeurs pour estimer la distribution de la sévérité sans une réelle modélisation de celle-ci peut conduire à surestimer la sévérité et ne pas tenir compte des spécificités que pourraient avoir le portefeuille qu'on veut modéliser.

Il est donc crucial d'adopter une approche plus adaptée qui tienne compte des caractéristiques spécifiques du portefeuille de la SCR, cela va permettre d'obtenir des estimations plus précises des risques, améliorer la compréhension des pertes potentielles et prendre des décisions plus éclairées en matière de gestion des risques.

Chapitre 3

Calibrage interne

Dans ce chapitre nous présenterons les connaissances théoriques nécessaires pour le calibrage interne de notre modèle, en mettant en évidence les distributions statistiques appropriées pour la modélisation de la fréquence et la sévérité, les testes statistiques et les méthodes d'estimation des paramètres.

1 Modélisation de la fréquence des sinistres

1.1 La loi de Poisson

La loi de Poisson est une distribution de probabilité qui décrit le nombre d'événements qui se produisent dans un intervalle de temps donné, sachant que ces événements se produisent à un taux constant et indépendamment les uns des autres. Elle est caractérisée par un seul paramètre, le taux d'occurrence, qui représente le nombre moyen d'événements qui se produisent par unité de temps. La loi de Poisson est une loi particulièrement bien adaptée aux problèmes de réassurance car elle permet de décrire la survenance d'événements peu probables ou rares dans un portefeuille constitué de nombreuses polices. On note N la variable aléatoire du nombre de sinistres.

Pour $\lambda \in \mathbb{R}^{+*}$, $\forall k \in \mathbb{N}^+$

$$P_k(N = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

La loi de Poisson n'est ni sur-dispersée, ni sous-dispersée. Elle s'adapte de ce fait particulièrement bien aux échantillons issus d'une population homogène, dans laquelle chaque individu est indépendant des autres, et est soumis à une fréquence de Poisson de même moyenne.

Dans la pratique, du fait d'une abondance de valeurs nulles et de la présence de quelques valeurs extrêmes, la variance est supérieure à la moyenne. Dans ce cas, on parle d'une surdispersion de la variable N . Dans cette situation la loi de Poisson simple soit rejetée au profit de lois dites sur-dispersées.

1.2 La loi Binomiale

Le nombre de sinistres annuels N dans le portefeuille suit une loi Binomiale de paramètres $n \in \mathbb{N}^+$ et de probabilité $p \in]0, 1[$ de succès, si sa densité s'écrit :

$$P_{n,p}(N = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k}$$

Avec :

$$E(N) = np \text{ et } Var(N) = np(1-p) < E(N)$$

Puisque $(1-p) < 1$, l'indice de dispersion de la loi Binomiale est inférieur à 1. Il s'agit de ce fait d'une loi dite sous-dispersée.

1.3 La loi binomiale négative

Dans un modèle binomial négatif, on définit la probabilité pour que N prenne la valeur k par :

$$P_{n,p}(N = k) = C_{n+k-1}^k p^n (1-p)^k$$

Avec :

$$E(N) = \frac{n(1-p)}{p} \text{ et } Var(N) = \frac{n(1-p)}{p^2}$$

La loi binomiale négative est une méthode solide pour décrire l'hétérogénéité de la fréquence d'un groupe, ainsi que sa tendance à la contagion, ou les deux. De plus, sa forme analytique est simple, ce qui est couramment utilisé par les actuaires pour décrire la sur-dispersion de leurs échantillons.

1.4 Remarques sur les différentes lois statistiques présentées

Toutes les lois que nous avons choisies pour modéliser le nombre de sinistres sont des lois discrètes à valeurs positives.

L'utilisation d'une loi binomiale sera pertinente quand nous aurons l'inégalité $E(N) \geq Var(N)$. Ce cas ne se présente pas souvent en assurance non-vie, la loi binomiale est donc peu utilisée. Nous verrons que sur nos données, l'inégalité sera dans le sens inverse. Nous n'utiliserons donc pas la loi binomiale pour modéliser le nombre de nos sinistres.

La loi de Poisson, quant à elle est souvent utilisée en assurance non-vie. Cependant, elle ne prend pas bien en compte la "surdispersion" des sinistres, en effet pour la loi de Poisson, on a un seul paramètre et on a la contrainte $E(N) = Var(N)$.

La loi Binomiale négative est également souvent utilisée en assurance non-vie. Avec les deux paramètres, cette loi permet de bien prendre en compte la "surdispersion" du nombre de sinistres. En effet, pour la loi binomiale négative nous avons l'inégalité $E(N) \leq Var(N)$. Ce cas est particulièrement fréquent en assurance non-vie.

2 Modélisation de la sévérité des sinistres

Dans cette section nous présenterons les lois classiques utilisées en réassurance pour modéliser la sévérité ainsi que le concept des courbes d'exposition duquel découle les courbes Swiss Re et les distributions MBBEFD.

2.1 Lois classiques utilisées pour la sévérité

2.1.1 La loi de Pareto

La variable X suit une loi de Pareto de paramètres θ et a ($\theta > 0$ et $a > 0$), $X \sim Pa(\theta, a)$ si sa densité est de la forme :

$$f(x) = \frac{\theta a^\theta}{x^{\theta+1}} \mathbb{1}_{[a, +\infty[}(x)$$

et sa fonction de répartition :

$$F(x) = 1 - \left(\frac{a}{x}\right)^\theta$$

Les moments de la loi de Pareto sont donnés par :

$$E(X) = \frac{a\theta}{\theta - 1}, \text{ pour } \theta > 1$$

$$Var(X) = \frac{\theta a^2}{(\theta - 2)(\theta - 1)^2}, \text{ pour } \theta > 2$$

2.1.2 La loi de Weibull

La variable X suit une loi de Weibull de paramètres α et β ($\alpha > 0$ et $\beta > 0$), $X \sim W(\alpha, \beta)$ si sa densité est de la forme :

$$f(x) = \alpha \beta^{-\alpha} x^{\alpha-1} \exp\left(-\left(\frac{x}{\beta}\right)^\alpha\right) \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(x)$$

et sa fonction de répartition :

$$F(x) = 1 - \exp\left[-\left(\frac{x}{\beta}\right)^\alpha\right]$$

Les moments de la loi de Weibull sont donnés par :

$$E(X) = \frac{\beta}{\alpha} \Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)$$

$$Var(X) = \frac{\beta^2}{\alpha} \left[2\Gamma\left(\frac{2}{\alpha}\right) - \frac{1}{\alpha} \left(\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)\right)^2\right]$$

avec $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$.

2.1.3 La loi Log-normale

La variable X suit une loi Log-normale de paramètres μ et σ ($\mu \in \mathbb{R}$ et $\sigma > 0$), $X \sim LN(\mu, \sigma)$ si le logarithme de X suit une loi normale ($\ln(X) \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$). sa densité est de la forme :

$$f(x) = \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-(\ln(x) - \mu)^2}{2\sigma^2}\right) \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(x)$$

La loi Log-Normale n'a pas de fonction de répartition explicite. Les moments de la loi de Log-Normale sont donnés par :

$$E(X) = \exp\left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right)$$
$$Var(X) = [\exp(2\mu + \sigma^2)][\exp(\sigma^2) - 1]$$

2.2 Les courbes d'exposition

Les courbes d'exposition exprime directement le pourcentage du montant retenu par la cédante par rapport à la perte brute totale. Bien que ces courbes soient largement utilisées, elles sont toutes basées sur des données très ancienne. Dans la littérature, il existe peu de recherche récente, complète et accessible au public sur ce sujet.

Parmi les courbes les plus utilisées on trouve :

- **Courbes de Lloyds** : Ces courbes étaient historiquement utilisées par le marché londonien et sont basées sur des données très anciennes d'origine inconnue. Les données sous-jacentes pourraient avoir été des données marines ou même des pertes par le feu de la période de la Seconde Guerre mondiale. Les courbes ne varient ni selon la taille des risques ni selon les métiers.
- **Courbes de Ludwig** : Ludwig a basé ses courbes sur les propriétaires et les pertes commerciales du Hartford Insurance Group pour les années d'accident 1984-1988. Les courbes varient selon la classe de construction/protection pour les propriétaires et la classe d'occupation pour les pertes commerciales, cependant, le portefeuille commercial analysé était très petit et il est discutable si les courbes dérivées seraient également représentatives pour les grands comptes.
- **Courbes Swiss Re** : Les courbes originales de Swiss Re, également appelées courbes de Gasser, ont été développées par Peter Gasser sur la base des données de la «Statistique incendie de l'Association suisse des institutions cantonales d'assurance incendie» pour les années 1959–1967. Les courbes sont largement utilisées par les réassureurs européens et certaines recommandations pour leur application sont disponibles (Guggisberg, 2004). En raison de leur importance, les courbes seront décrites dans d'autres sections de manière plus détaillée.
- **Les Courbes MBBEFD** : Bernegger (1997) a construit un nouveau concept théorique selon lequel toute courbe d'exposition peut être décrite par une fonction à deux paramètres basée sur la distribution MBBEFD du degré de dommage. Encore une fois en raison de son importance, le concept sera traité dans la suite.

2.2.1 Choix de la courbe d'exposition

Le contexte théorique pour la construction des courbes sera décrit plus en détail, cependant, à ce stade, certaines réflexions sur la manière de sélectionner la courbe appropriée seront discutées.

La courbe d'exposition est dérivée de la distribution de degré de dommage qui est une variable aléatoire et sera noté plus loin comme x , $x \in [0, 1]$ et défini comme $x = \frac{X}{M}$ où X désigne une variable aléatoire décrivant le montant brut de sinistre individuel et M indique la valeur du risque respectif sur lequel la réclamation donnée se produit. cette valeur est appelée "somme assurée".

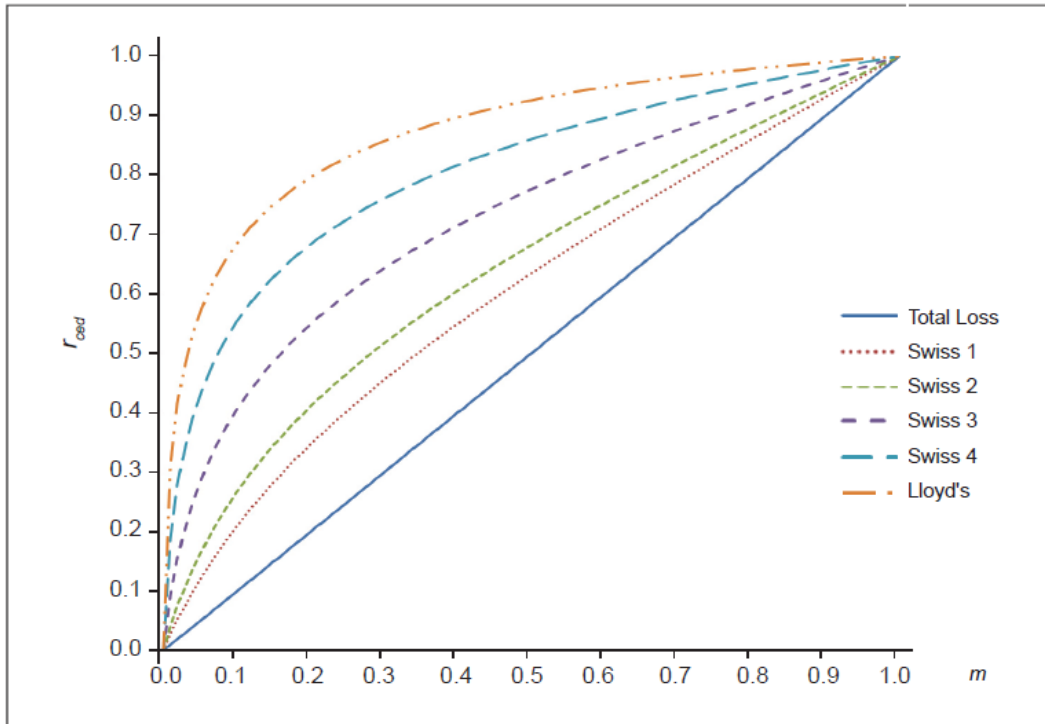


FIGURE 3.1 – Courbes d'exposition pour la perte totale, Swiss Re et Lloyd

Les courbes tendant davantage vers la diagonale conviennent aux portefeuilles caractérisés par des dommages totaux ou supérieurs, pour ce type de risques, la courbe Swiss 1 serait appropriée. En revanche, plus la courbe est éloignée de la zone extérieure, moins la perte totale est probable.

Selon Guggisberg les aspects suivants, lors de la sélection de la courbe, doivent être pris en compte.

- **Risques couverts dans le portefeuille**

Un incendie cause généralement plus de dégâts à un bâtiment individuel qu'une tempête de vent qui, dans de nombreux cas, n'endommage que les toits.

- **Classe de risque**

Les usines de poudre à canon sont plus exposées à la perte totale que, par exemple, les bâtiments d'aéroport dotés d'une bonne protection contre les incendies.

- **Taille du risque**

Les incendies ne causent souvent que des dommages partiels aux grands bâtiments ou aux installations industrielles, alors que les petits risques sont plus exposés à subir une perte totale.

2.2.2 Contexte théorique des courbes d'exposition

- **Définition de la courbe d'exposition**

Dans ce qui suit, la relation entre la fonction de distribution $F(x)$ définie sur l'intervalle $[0, 1]$ et sa fonction d'espérance limitée $L(d) = E(\min(d, x))$ sera discutée.

Ici, $d = \frac{D}{M}$ et $x = \frac{X}{M}$ représentent respectivement la franchise normalisée et la perte normalisée. M est la perte maximale possible et $X < M$ la perte brute. La franchise D est la retenue maximale de la cédante dans le cadre d'un traité de réassurance non proportionnelle. $M * L(d)$ est la l'espérance des pertes retenues par la cédante tandis que $M * (L(1) - L(d))$ est l'espérance des pertes payées par le réassureur.

Ainsi, le rapport entre les primes de risque pures retenues par la cédante et les primes pures totales est donné par la fonction d'espérance limitée relative $G(d) = \frac{L(d)}{L(1)}$.

La courbe représentant cette fonction est appelée courbe d'exposition :

$$G(d) = \frac{L(d)}{L(1)} = \frac{\int_0^d (1 - F(y)) dy}{\int_0^1 (1 - F(y)) dy} = \frac{\int_0^d (1 - F(y)) dy}{E(x)} \quad (3.1)$$

Du fait que $1 - F(x) > 0$ et $F'(x) = f(x) > 0$, $G(d)$ est une fonction croissante et concave sur l'intervalle $[0, 1]$. De plus, $G(0) = 0$ et $G(1) = 1$ par définition.

- **Dérivation de la fonction de répartition à partir de la courbe d'exposition**

Si la courbe d'exposition $G(x)$ est donnée, la fonction de répartition correspondante $F(x)$ peut être dérivée de G :

$$G'(d) = \frac{1 - F(d)}{E(x)} \quad (3.2)$$

Avec $F(0) = 0$ et $G'(0) = \frac{1}{E(x)}$ on obtient :

$$F(x) = \begin{cases} 1 & x = 1 \\ 1 - \frac{G'(x)}{G'(0)} & 0 \leq x < 1 \end{cases} \quad (3.3)$$

Ainsi, $F(x)$ et $G(x)$ sont des représentations équivalentes de la distribution des pertes.

- **Probabilité de perte totale et espérance**

La probabilité p d'une perte totale est égale à $1 - F(1^-)$ et la perte espérée (ou moyenne) μ est égale à $E(x)$. Ces deux fonctions de la fonction de répartition $F(x)$ peuvent être dérivées directement des dérivées de $G(x)$ en $x = 0$ et $x = 1$:

$$\begin{aligned} \mu = E(x) &= \frac{1}{G'(0)} \\ p = 1 - F(1^-) &= \frac{G'(1)}{G'(0)} \end{aligned} \quad (3.4)$$

Le fait que G soit une fonction concave et croissante sur l'intervalle $[0,1]$ avec $G(0) = 0$ et $G(1) = 1$ implique que $G'(0) \geq 1 \geq G'(1) \geq 0$. Cela se traduit également par la relation :

$$0 \leq p \leq \mu \leq 1.$$

2.2.3 Les courbes MBBEFD

Les courbes d'exposition connues sont des courbes empiriques (courbes discrètes) ce qui rend difficile leur utilisation pour approximer une distribution continue du taux de destruction. De plus la plupart de ces courbes sont construits par les compagnies de réassurance en interne et ne sont pas rendus publiques. C'est dans ce contexte que S.Bernegger(1997) a développé une famille de fonctions analytiques permettant une bonne approximation des courbes d'exposition en particulier les courbes Swiss Re. Cette famille de fonctions est connue sous le nom de "distributions MBBEFD".

On distingue deux types de distributions MBBEFD :

- **La distribution MBBEFD générale**, qui prend en compte deux paramètres.
- **La distribution MBBEFD hyperbolique**, qui prend en compte un unique paramètre.

- **La classe MBBEFD des courbes d'exposition à deux paramètres**

Dans cette section, nous étudierons les courbes d'exposition et les fonctions de distribution associées définies par :

$$G(x) = \frac{\ln(a + b^x) - \ln(a + 1)}{\ln(a + b) - \ln(a + 1)} \quad (3.5)$$

La fonction de distribution appartenant à cette courbe d'exposition est donnée par :

$$F(x) = \begin{cases} 1 & x = 1 \\ 1 - \frac{(a+1)b^x}{a+b^x} & 0 \leq x < 1 \end{cases} \quad (3.6)$$

Les fonctions de distribution du type (3.5), définies sur l'intervalle $[0, \infty]$ ou $[-\infty, \infty]$, sont très bien connues en mécanique statistique (distribution de Maxwell-Boltzmann, Bose-Einstein, FermiDirac et Planck) . La mise en œuvre de ces fonctions dans la théorie des risques ne signifie pas que la distribution des pertes assurées puisse être dérivée de la théorie de la mécanique statistique. Cependant, la classe de distribution MBBEFD définie en (3.5) s'avère très appropriée pour la modélisation de distributions de pertes empiriques sur l'intervalle $[0,1]$.

Les paramètres (a, b) sont restreints aux valeurs pour lesquelles $G(x)$ est une fonction réelle, croissante et concave sur l'intervalle $[0, 1]$. Il est plus simple de remplir cette condition en utilisant l'inverse $g = \frac{1}{p}$ de la probabilité de perte totale p comme paramètre de la courbe et de remplacer le paramètre a dans (3.5) et (3.6) :

$$g = \frac{a + b}{(a + 1)b}; a = \frac{(g - 1)b}{1 - gb} \quad (3.7)$$

D'une part, la condition $0 \leq p \leq 1$ n'est remplie que pour $g \geq 1$. D'autre part, $G(x)$ n'est une fonction réelle que pour $b \geq 0$. On peut montrer qu'aucune autre restriction concernant l'ensemble de paramètres n'est nécessaire.

Cependant, les cas $b = 1$ (c'est-à-dire $a = -1$), $b = 0$ ou $g = 1$ (c'est-à-dire $a = 0$) et $bg = 1$ (c'est-à-dire $a = \infty$) doivent être traités comme des cas particuliers.

En considérant séparément les cas particuliers $b = 1$, $g = 1$ et $bg = 1$, toutes les fonctions réelles, croissantes et concaves $G(x)$ sur l'intervalle $[0, 1]$ avec $G(0) = 0$ et $G(1) = 1$ appartenant à la classe MBBEFD (3.5) peut être représenté comme suit :

$$G_{b,g}(x) = \begin{cases} x & g = 1 \text{ ou } b = 0 \\ \frac{\ln(1 + (g-1)x)}{\ln(g)} & b = 1 \text{ et } g > 1 \\ \frac{1 - b^x}{1 - b} & bg = 1 \text{ et } g > 1 \\ \frac{\ln\left(\frac{(g-1)b + (1-bg)b^x}{1-b}\right)}{\ln(bg)} & b > 0 \text{ et } b \neq 1 \text{ et } bg \neq 1 \text{ et } g > 1 \end{cases} \quad (3.8)$$

Dérivés

Les dérivées des courbes d'exposition sont données par :

$$G'(x) = \begin{cases} 1 & g = 1 \text{ ou } b = 0 \\ \frac{g-1}{\ln(g)(1+(g-1)x)} & b = 1 \text{ et } g > 1 \\ \frac{b-1}{\ln(b)b^x} & bg = 1 \text{ et } g > 1 \\ \frac{\ln(b)(1-gb)}{\ln(bg)((g-1)b^{1-x} + (1-gb))} & b > 0 \text{ et } b \neq 1 \text{ et } bg \neq 1 \text{ et } g > 1 \end{cases} \quad (3.9)$$

Avec :

$$G'(0) = \begin{cases} 1 & g = 1 \text{ ou } b = 0 \\ \frac{g-1}{\ln(g)} & b = 1 \text{ et } g > 1 \\ \frac{\ln(b)g}{b-1} = \frac{\ln(g)g}{b-1} & bg = 1 \text{ et } g > 1 \\ \frac{\ln(b)(1-gb)}{\ln(bg)(1-b)} & b > 0 \text{ et } b \neq 1 \text{ et } bg \neq 1 \text{ et } g > 1 \end{cases} \quad (3.10)$$

Et :

$$G'(1) = \begin{cases} 1 & g = 1 \text{ ou } b = 0 \\ \frac{g-1}{\ln(g)g} & b = 1 \text{ et } g > 1 \\ \frac{\ln(b)b}{b-1} = \frac{\ln(g)}{b-1} & bg = 1 \text{ et } g > 1 \\ \frac{\ln(b)(1-gb)}{\ln(bg)g(1-b)} & b > 0 \text{ et } b \neq 1 \text{ et } bg \neq 1 \text{ et } g > 1 \end{cases} \quad (3.11)$$

Probabilité de perte totale

A partir de (3.10) et (3.11) On obtient l'expression de la probabilité de perte totale p :

$$p = \frac{G'(1)}{G'(0)} = \frac{1}{g} \quad (3.12)$$

L'espérance μ

D'après (3.4) l'espérance μ est donnée par :

$$\mu = E(x) = \frac{1}{G'(0)} = \begin{cases} 1 & g = 1 \text{ ou } b = 0 \\ \frac{\ln(g)}{b-1} & b = 1 \text{ et } g > 1 \\ \frac{g-1}{b-1} = \frac{g-1}{\ln(g)g} & bg = 1 \text{ et } g > 1 \\ \frac{\ln(gb)(1-b)}{\ln(b)(1-gb)} & b > 0 \text{ et } b \neq 1 \text{ et } bg \neq 1 \text{ et } g > 1 \end{cases} \quad (3.13)$$

La fonction de répartition :

la fonction de distribution appartenant à la courbe d'exposition $G_{b,g}(x)$ est donnée par :

$$F(x) = \begin{cases} 1 & x = 1 \\ 0 & x < 1 \text{ et } (g = 1 \text{ ou } b = 0) \\ 1 - \frac{1}{1 + (g-1)x} & x < 1 \text{ et } b = 1 \text{ et } g > 1 \\ 1 - b^x & x < 1 \text{ et } bg = 1 \text{ et } g > 1 \\ 1 - \frac{1-b}{(g-1)b^{1-x} + (1-gb)} & x < 1 \text{ et } b > 0 \text{ et } b \neq 1 \text{ et } bg \neq 1 \text{ et } g > 1 \end{cases} \quad (3.14)$$

La fonction de densité :

En raison de la probabilité finie $p = 1/g$ pour une perte totale, la fonction de densité $f(x) = F'(x)$ n'est définie que sur l'intervalle $[0,1[$:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & g = 1 \text{ ou } b = 0 \\ \frac{g-1}{(1 + (g-1)x)^2} & b = 1 \text{ et } g > 1 \\ -\ln(b)b^x & bg = 1 \text{ et } g > 1 \\ \frac{(b-1)(g-1)\ln(b)b^{1-x}}{((g-1)b^{1-x} + (1-gb))^2} & b > 0 \text{ et } b \neq 1 \text{ et } bg \neq 1 \text{ et } g > 1 \end{cases} \quad (3.15)$$

- **La classe MBBEFD des courbes d'exposition à un paramètre**

Les courbes d'exposition empiriques Swiss Re $Y_{i \in \{1,2,3,4\}}$ sont très bien connues et largement utilisées par les souscripteurs européens d'assurance dommages non proportionnelle. Bernegger (1997) a paramétré ces courbes à l'aide des distributions MBBEFD et après avoir évalué les estimations des paramètres b et g , il a trouvé une dépendance entre ces paramètres. Il a par la suite défini une nouvelle sous-classe de courbes d'exposition MBBEFD à un seul paramètre.

La sous-classe des courbes d'exposition MBBEFD à un paramètre est définie comme suit :

$$G_c(x) = G_{b_c, g_c}(x) \quad (3.16)$$

avec

$$b_c = b(c) = e^{3,1-0,15(1+c)c}$$

$$g_c = g(c) = e^{(0,78+0,12c)c}$$

Pour $c = 0$, la courbe correspond à la distribution des pertes totales, les courbes définies par $c = \{1, 5; 2, 3, 4\}$ correspondent respectivement aux courbes de Swiss Re Y_1, Y_2, Y_3, Y_4 . $c = 5$ correspond à la courbe de Lloyd'S utilisée pour les activités industrielles lourdes. Les diverses fonctions de répartition des taux de destruction suivant les distributions des courbes Swiss Re ne convergent pas uniformément vers 1 à leur maximum : la forme de la fonction $F(x)$ est différente pour $x < 1$ et pour $x = 1$: ce n'est pas une fonction continue.

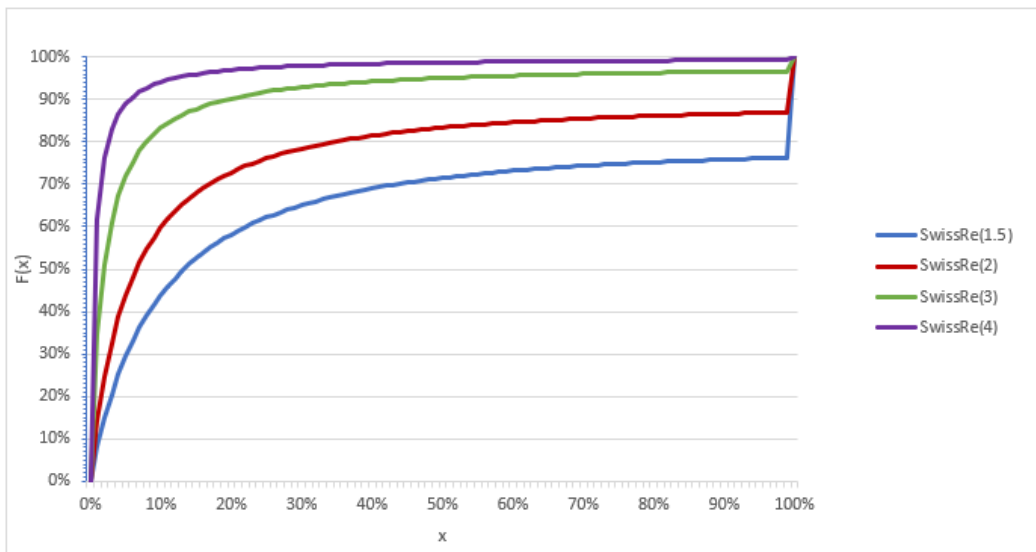


FIGURE 3.2 – Comparaison des fonctions de répartition du taux de destruction pour les courbes Swiss Re

3 Estimation des paramètres

Nous avons deux méthodes principales pour estimer les paramètres d'une loi de probabilité, à savoir l'estimation par maximum de vraisemblance et l'estimation par la méthode des moments.

3.1 La méthode du maximum de vraisemblance

Considérons un vecteur aléatoire $X = (X_1, \dots, X_n)$, supposé indépendant et de même loi de distribution. Nous admettons que la loi de probabilité de X possède une densité $f(x_1, \dots, x_n; \theta)$ par rapport à la mesure dominante, où θ est le paramètre à estimer.

La fonction de vraisemblance est définie comme la fonction :

$$L(\theta) = L(x_1, \dots, x_n \setminus \theta) = f(x_1, \dots, x_n; \theta) \quad (3.17)$$

avec (x_1, \dots, x_n) les observations de la variable aléatoire X .

Du fait de l'hypothèse d'indépendance nous pouvons écrire que :

$$L(\theta) = L(x_1, \dots, x_n \setminus \theta) = f(x_1, \dots, x_n; \theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i; \theta) \quad (3.18)$$

avec $f(x_i; \theta)$ la densité de la loi marginale X_i .

Cette fonction est nommée vraisemblance, lorsque θ est la véritable valeur du paramètre, elle quantifie la probabilité d'observer (x_1, \dots, x_n) . Dans la méthode du maximum de vraisemblance, on cherche à maximiser cette fonction en utilisant les observations disponibles pour estimer θ . Pour faciliter la maximisation, on utilise souvent la fonction log-vraisemblance, qui est définie comme le logarithme naturel de la fonction de vraisemblance : $I(\theta) = \ln(L(\theta)) = L(x_1, \dots, x_n \setminus \theta)$

Cette fonction est souvent plus simple à maximiser que la fonction de vraisemblance (le passage au logarithme permet de transformer le produit en somme, il est donc plus facile de dériver cette fonction).

On définit alors l'estimateur du maximum de vraisemblance comme ci dessous :

$$T = \operatorname{argmax} L(x_1, \dots, x_n \setminus \theta) \quad (3.19)$$

Lorsque les X_i sont des variables aléatoires discrètes (notamment pour la modélisation du nombre de sinistres), on considère alors la densité par rapport à la mesure de comptage et $f(x_i; \theta) = P_\theta(X_i = x_i)$.

La quantité $L(x_1, \dots, x_n \setminus \theta)$ s'interprète alors directement comme la probabilité ou "vraisemblance" d'observer (x_1, \dots, x_n) lorsque θ est la vraie valeur du paramètre.

3.2 Estimateur des moments

La méthode des moments est une technique permettant de trouver des estimations pour les paramètres inconnus d'une distribution paramétrique. Bien que les estimations obtenues par cette méthode ne soient généralement pas optimales, la méthode des moments est souvent utilisée pour sa rapidité et sa simplicité d'implémentation. En général, on préfère l'estimateur du maximum de vraisemblance pour ses propriétés statistiques supérieures, mais la méthode des moments peut être utilisée en amont de la méthode du maximum de vraisemblance pour définir des valeurs initiales pour la maximisation de la fonction de vraisemblance.

Soit une variable aléatoire X . Pour $j \in N^*$, nous définissons le $j^{\text{ème}}$ moment de la distribution de X de la façon suivante :

$$m_j = E(X_j)$$

Si X suit une loi paramétrique, on peut alors exprimer les moments m_j en fonction des paramètres de la loi.

Nous définissons l'estimateur empirique du $j^{\text{ème}}$ moment \hat{m}_j de la façon suivante :

$$\hat{m}_j = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^j$$

A partir d'observations $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ de X , on peut calculer l'estimateur empirique du $j^{\text{ème}}$ moment \hat{m}_j .

La méthode des moments consiste à trouver des estimateurs pour les paramètres d'une loi en égalant les moments théoriques de la loi à leurs moments empiriques. Si l'on veut estimer une loi qui a deux paramètres, il suffit d'égaliser les deux premiers moments. Cette méthode est généralement facile à utiliser et nécessite peu de temps de calcul.

3.3 Cas des distributions MBBEFD

Il existe plusieurs façons d'estimer les paramètres des distributions MBBEFD. Bernegger(1997) recommande les méthodes des moments mais l'utilisation de la méthode du maximum de vraisemblance ou de la méthode des moindres carrés ordinaires est également possible.

3.3.1 Méthode des moments

Bernegger(1997) a montré que pour chaque couple $p = \frac{1}{g}$ et $E(x)$ remplissant la condition $0 \leq p \leq E(x) \leq 1$ il existe une seule fonction de distribution MBBEFD. Le paramètre g s'obtient directement par la formule 3.12. Pour estimer $p = P(x = 1)$ il suffit de faire le rapport entre le nombre d'observations montrant une perte totale et le nombre total d'observations. Pour le paramètre b on utilise la relation (3.13). Le cas général

$$E(x) = \frac{\ln(gb)(1-b)}{\ln(b)(1-gb)}$$

nécessite une résolution itérative.

Pour les distributions MBBEFD à un seul paramètre il suffit de remplacer b et g par $b(c)$ et $g(c)$. On alors $E(x) = h(c)$ avec h une fonction non linéaire. On résout ensuite l'équation de manière itérative.

3.3.2 Méthode du maximum de vraisemblance

La fonction de vraisemblance qui doit être maximisée a la forme suivante dans le cas général :

$$L(b, g) = \prod_{i=1}^n f(x_i/b, g) = \prod_{i=1}^n \frac{(b-1)(g-1)\ln(b)b^{1-x_i}}{((g-1)b^{1-x_i} + (1-gb))^2} \quad (3.20)$$

et son logarithme est

$$\ln L(b, g) = \sum_{i=1}^n \ln \frac{(b-1)(g-1)\ln(b)b^{1-x_i}}{((g-1)b^{1-x_i} + (1-gb))^2} \quad (3.21)$$

On cherche ensuite les valeurs de b et g qui le maximise en résolvant

$$\frac{\partial \ln L(b, g)}{\partial b} = 0 \quad (3.22)$$

$$\frac{\partial \ln L(b, g)}{\partial g} = 0 \quad (3.23)$$

L'ensemble des équations ne peut être résolu analytiquement. Il faut donc utiliser une méthode numérique (algorithme de Newton-Raphson).

Pour les distributions MBBEFD à un seul paramètre il suffit de remplacer b et g par $b(c)$ et $g(c)$. On résout alors

$$\frac{\partial \ln L(c)}{\partial c} = 0$$

3.3.3 Méthode des moindres carrés (LSE)

Cette méthode consiste à minimiser la somme des carrés des écarts (SSE) entre la distribution théorique $F(X)$ et la distribution empirique $F_n(x)$:

$$SSE = \sum_{i=1}^n (F_n(x_i) - F(x_i))^2 \quad (3.24)$$

On détermine donc la fonction de répartition empirique du taux de destruction puis on utilise un algorithme d'optimisation pour déterminer le(s) paramètre(s) qui minimise (3.24).

4 Validation des ajustements des lois

Pour évaluer la qualité de l'ajustement de nos lois statistiques, nous avons besoin de critères permettant de sélectionner le meilleur ajustement. Tout d'abord, nous utiliserons des critères graphiques tels que les QQ-plots. Ensuite, nous nous basons sur des critères purement statistiques tels que les tests statistiques ou les critères d'information comme l'AIC ou le BIC.

4.1 Critères graphiques

Dans cette section, nous présenterons des méthodes graphiques pour évaluer la qualité de l'ajustement de la loi statistique aux données. Nous commencerons par décrire la comparaison entre les fonctions théoriques et empiriques, puis nous aborderons le concept de QQ-plot (ou graphique quantile-quantile).

4.1.1 Comparaison des fonctions théoriques et empiriques

Pour évaluer la qualité de l'ajustement d'un modèle, une approche intuitive consiste à comparer les fonctions de répartition théorique et empirique via un graphique. De plus, nous pouvons comparer l'histogramme des données avec la densité du modèle ajusté selon le même principe. Si la fonction théorique est similaire à la fonction empirique, nous considérons le modèle comme étant bon. Cependant, cette méthode de comparaison est subjective car la notion de "similaire" est difficile à définir avec précision. Par conséquent, ces critères sont utilisés comme première étape pour classer de manière grossière les modèles comme bons ou mauvais.

4.1.2 Graphique Quantile-Quantile

Le Q-Qplot est un graphique permettant de comparer les quantiles théoriques du modèle ajusté avec les quantiles empiriques.

On considère un échantillon (X_1, \dots, X_n) de variables aléatoires suivant la même loi qu'une certaine variable aléatoire X . On note la fonction de répartition de X :

$$F_X(t) = P(X \leq t)$$

Nous définissons l'inverse généralisé $F^-(t)$ comme ci-dessous :

$$F^-(t) = \inf \{x \in \mathbb{R}, F(x) \geq t\}, 0 \leq t \leq 1$$

Nous appelons échantillon ordonné ou statistique(s) d'ordre associé à $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ le vecteur obtenu en ordonnant dans l'ordre croissant l'échantillon.

Nous appelons QQ-plot de (X_1, \dots, X_n) le graphe suivant :

$$\left\{ \left(F^-\left(\frac{k}{n+1}\right), x_{(k)} \right), k = 1, \dots, n \right\}$$

avec $x_{(k)}$ la k -ème valeur de l'échantillon ordonné, et F^- l'inverse généralisé de la fonction de distribution de la loi ajustée.

Si les données ont été générées selon la loi de X , le QQ-plot devrait avoir une allure linéaire. L'alignement des points sur une droite indique que les quantiles empiriques correspondent aux quantiles du modèle, ce qui signifie que l'ajustement du modèle est correct. Par conséquent, nous pouvons accepter l'hypothèse que les échantillons sont tirés de la même loi statistique. En utilisant le QQ-plot, nous pouvons également identifier les valeurs aberrantes dans les données, qui sont représentées par les points éloignés de la droite.

4.2 Tests statistiques

Une fois les paramètres estimés, on peut effectuer des tests afin de savoir quel ajustement choisir. Pour tester l'adéquation à des lois continues, on a souvent recours aux tests de Kolmogorov-Smirnov et d'Anderson-Darling. Ces tests sont construits à partir de la fonction de répartition empirique. Le test d'Anderson-Darling est particulièrement intéressant car il accorde plus de poids aux queues de distribution que Kolmogorov-Smirnov.

4.2.1 Test de Kolmogorov-Smirnov

Soit X_1, \dots, X_n , un échantillon de loi F_X et soit F_0 une loi continue. On souhaite tester :

$$\begin{cases} H_0 : F_X = F_0 \\ H_1 : F_X \neq F_0 \end{cases}$$

Le test de Kolmogorov-Smirnov consiste à mesurer, pour une variable aléatoire continue, la plus grande distance entre la distribution théorique F_0 et la distribution empirique F_n définie comme suit :

$$F_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{\{x_i \leq x\}}$$

avec n le nombre total d'observations et x_i la $i^{\text{ème}}$ observation La statistique de Kolmogorov-Smirnov est définie par :

$$D_n = \sup_x |F_n(x) - F_0(x)|$$

Autrement :

$$D_n = \max(D_n^+, D_n^-)$$

avec $D_n^+ = \max(\frac{i}{n} - F_0(x_i), 0)$ et $D_n^- = \max(F_0(x_i) - \frac{i-1}{n}, 0)$

Le test au seuil α associé à cette statistique est défini par la région critique de la forme :

$$\{D_n \geq c_\alpha\}$$

où c_α est le quantile $(1 - \alpha)$ de la table de Kolmogorov-Smirnov. Si $D_n \geq c_\alpha$, nous sommes dans la région critique et le test est rejeté.

4.2.2 Test d'Anderson-Darling

Ce test est également basé sur un calcul de distance entre la fonction de répartition empirique et la fonction de répartition théorique. On veut tester :

$$\begin{cases} H_0 : F_X = F_0 \\ H_1 : F_X \neq F_0 \end{cases}$$

La statistique d'Anderson-Darling est définie par :

$$A_n^2 = n \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(F_n(x) - F_0(x))^2}{F_0(x)(1 - F_0(x))} dF_0(x)$$

Cette statistique peut également s'écrire :

$$A_n^2 = -n - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [(2i-1) \ln(F_0(x_i)) + (2n+1-2i) \ln(1 - F_0(x_i))]$$

Le test au seuil α associé à cette statistique est défini par la région critique de la forme :

$$\{A_n^2 \geq c_\alpha\}$$

où c_α est le quantile $(1 - \alpha)$ de la table d'Anderson-Darling. On rejette L'hypothèse H_0 si $A_n^2 \geq c_\alpha$.

Le test d'Anderson-Darling donne une importance plus grande aux queues de distribution, nous le préférons donc au test de Kolmogorov-Smirnov en cas de conclusions divergentes entre les deux tests.

4.3 Critère AIC et BIC

Le critère AIC (Akaike Information Criterion) est une mesure statistique qui repose sur la vraisemblance du modèle. Cependant, ce critère ne peut pas être appliqué aux ajustements effectués par la méthode des moments. Sa formule est définie de la manière suivante :

$$AIC = -2\log(L(\theta)) + 2n_{par}$$

avec n_{par} le nombre de paramètres inconnus du modèle.

Le meilleur modèle ayant la vraisemblance la plus élevée, il faut donc choisir le modèle ayant l'AIC le plus faible. Le terme $2n_{par}$ permet de pénaliser la sur-paramétrisation du modèle.

Le critère BIC (en anglais Bayesian Information Criterion) fonctionne sur le même principe. Son expression est la suivante :

$$BIC = -2\log(L(\theta)) + \log(n) * n_{par}$$

avec n le nombre d'individus.

Tout comme pour le critère AIC, le choix du modèle optimal selon le critère BIC se fait en sélectionnant le modèle ayant la valeur de BIC la plus basse. Dans l'expression du critère BIC, le terme $\log(n) * n_{par}$ représente la pénalité pour la sur-paramétrisation du modèle. Lorsque $\log(n) > 2$, le critère BIC pénalise davantage la sur-paramétrisation que le critère AIC. Ainsi, le critère BIC tend à sélectionner des modèles avec moins de paramètres.

5 Détermination du seuil de sinistralité grave

La sinistralité issue de l'activité de réassurance non vie se caractérise par une nature complexe. Deux types de sinistralités sont généralement être distingués : d'une part la sinistralité attritionnelle, qui correspond à des sinistres de forte fréquence et de faible coût, d'autre part la sinistralité extrême, qui correspond à des sinistres de faible fréquence et de forte sévérité, c'est-à-dire des sinistres survenant rarement mais dont le coût est élevé. Afin d'éviter de sous-estimer le risque de survenance des événements extrêmes, nous devons déterminer un seuil au dessus duquel les sinistres seront considérés comme des sinistres extrêmes. Nous utiliserons alors les méthodes de la théorie des valeurs extrêmes pour déterminer le seuil de sinistralité grave .

Notation : Considérons un échantillon de variables aléatoires réelles strictement positives indépendantes et identiquement distribuées X_1, \dots, X_n . Nous désignerons par $X_{1,n} \leq \dots \leq X_n$, l'échantillon ordonné. Pour le seuil $u > 0$, la fonction de répartition de la loi de X , $F_X(x) = P(X \leq x)$ peut se décomposer de la façon suivante :

$$F_X(x) = P(X \leq x | X \leq u) \times F_X(u) + P(X \leq x | X > u) \times (1 - F_X(u))$$

Il faut que notre seuil soit suffisamment grand, de façon que nous ne captions pas de sinistres attritionnels parmi les sinistres graves. Cependant, quand le seuil devient très grand, le nombre d'observations au-delà du seuil se réduit et il devient très difficile de créer un modèle robuste sur la sinistralité grave. Il faut donc pouvoir trouver un compromis sur le nombre d'observations que nous écrivons. Afin de nous décider sur le seuil d'écriture, nous allons comparer les seuils au moyen de quatre méthodes graphiques : la fonction des excès moyens, l'estimateur de Hill, l'estimateur de Picklands et l'estimateur de Gertensgarbe.

5.1 Fonction des excès moyens (Mean Excess Function)

La méthode des excès au-delà d'un seuil repose sur le comportement des valeurs observées au-delà d'un seuil donné. La fonction des excès moyens $e(u)$ est l'espérance de tous les sinistres supérieurs à u après leur avoir retranché la valeur u . La fonction $e(u)$ est donc définie comme suit :

$$E(X - u | X > u), u > 0 \quad (3.25)$$

Nous évaluons la fonction $e(u)$ pour les valeurs $u = X_{n-k,n}$, $k = 1, \dots, n-1$. L'estimateur de la fonction des excès moyen quant à lui se définit par la formule suivante :

$$\hat{e}(X_{n-k,n}) = \frac{\sum_{i=1}^n \max(X_i - X_{n-k,n}, 0)}{\sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{X_i > X_{n-k,n}}} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^n (X_{n-i+1,n} - X_{n-k,n})$$

A partir d'un certain seuil, la fonction des excès moyens doit devenir linéaire. Nous avons ainsi une première idée concrète du niveau du seuil à partir duquel nos observations s'identifient à une loi des extrêmes.

5.2 Hill plot

Cette méthode graphique de détermination du seuil repose sur la propriété de stabilité de la loi de Pareto généralisée. En effet, si la variable $[X - u | X > u] \sim GPD(\xi, \sigma)$, alors $[X - u' | X > u'] \sim GPD(\xi, \sigma')$, c'est à dire que le paramètre de queue ξ est le même pour tout $u > 0$. Ainsi, la méthode présentée ici consiste à tracer le graphe des estimateurs $\hat{\xi}$ obtenus en fonction des seuils u ou, de façon équivalente, en fonction du nombre k d'excès considérés. On veut donc tracer le graphe des $\hat{\xi}_k$ pour tout k . En fonction du nombre d'excès k , l'estimateur de Hill s'écrit :

$$\hat{\xi}_k^{Hill} = \frac{1}{k} \left(\sum_{i=1}^k \ln(X_{n-i+1,n}) - \ln(X_{n-k,n}) \right)$$

L'estimateur de Hill converge vers une loi normale centrée sur l'indice de queue ξ . Plus k est petit, plus l'intervalle de confiance de ξ est large (plus il y a de volatilité). Cependant on veut que k soit le plus petit possible pour avoir le moins de biais. D'où l'idée de choisir le plus petit k pour lequel l'estimation $\hat{\xi}_k$ se stabilise.

En effet, plus k sera trop grand, moins l'approximation par une loi de Pareto sera mauvaise et l'estimateur de Hill aura un biais important. A l'inverse, si k est trop petit, nous disposerons de très peu d'observations pour le calcul de l'estimateur qui aura alors une variance importante.

5.3 Pickands plot

Cette méthode graphique repose sur le même principe que celui du Hill plot. Cependant l'estimation de l'indice de queue ξ se fait en utilisant l'estimateur de Pickands :

$$\hat{\xi}^{Pick} = \frac{1}{\ln(2)} \ln \left(\frac{X_{n-k,n} - X_{n-2k,n}}{X_{n-2k,n} - X_{n-4k,n}} \right)$$

On note l'estimateur de Pickands donne de moins bons résultats que l'estimateur de Hill car il est plus volatil .

5.4 Estimateur de Gertensgabe

Cette procédure a été proposée par Gerstengarbe et Werner en 1989 . Cette méthode permet, non seulement de déterminer le point de départ de la région extrême, mais aussi de fournir une estimation du seuil optimal. Soient X_1, \dots, X_n des charges de sinistres et $\delta_i = X_{i,n} - X_{i-1,n}, i = 2, \dots, n$ les termes d'une série de différence de l'échantillon ordonné. Le principe de la méthode de Gertensgabe est que, si nous entrons dans une zone extrême, nous pouvons nous attendre à un changement de comportement dans la série des différences. Nous cherchons donc à identifier un changement dans une série. Nous allons utiliser pour cela la version séquentielle du test de Mann-Kendall. Pour $i = 1, \dots, n-1$, nous calculons les termes U_i qui représentent l'écart entre U_i^* et $E(U_i^*)$ au moyen de la formule qui suit :

$$U_i = \frac{U_i^* - E(U_i^*)}{\sqrt{V(U_i^*)}} = \frac{U_i^* - \frac{i(i-1)}{4}}{\sqrt{\frac{i(i-1)(i+5)}{72}}}$$

avec $U_i^* = \sum_{k=2}^i n_k$ et $n_k = \sum_{k=2}^i \mathbb{1}_{\Delta_i \leq \Delta_k}$, le nombre de valeurs dans la série des différences inférieures à Δ_k . De la même manière, nous calculons les termes d'une autre série $(U^f)_{2 \leq i \leq n}$ pour la série décroissante des différences, $\Delta_n, \dots, \Delta_2$. Le point d'intersection de ces deux séries détermine le seuil d'entrée dans la zone extrême.

Troisième partie

Modélisation de l'EP Curve du portefeuille

Chapitre 1

Présentation des données

1 Présentation de la base

La base de données utilisée pour la modélisation est une base sinistres pour les affaires facultatives marocaines appartenant à la branche incendie que nous appellerons par la suite FAC Maroc Incendie. Elle extraite du système RMS de la SCR. Elle présente 2991 sinistres sur un horizon d'expérience de 15 ans allant de 2009 à 2023. Chaque ligne de la base de données représente un contrat lié à un risque spécifique.

Elle est constituée de 12 colonnes contenant les informations suivantes :

- INT _SPC : Cette colonne spécifie la branche d'activité considérée. Dans notre cas il s'agit de AM-FAC-DOMMAGES(Facultatives Maroc Dommages)
- INT _BRANCHE : Il s'agit de la sous-branche d'activité (INCENDIE dans notre cas).
- UNDERWRITING _YEAR : il s'agit de l'année de souscription du contrat.
- DATE _ACCEPTED :il s'agit de la date d'acceptation du contrat.
- PART _RETROCEDEE : c'est la part rétrocédée par la SCR dans un premier temps. En effet il existe un premier partage des risques avant la couverture Non Marine XL. Nous nous intéressons uniquement aux risques couverts par le Non Marine XL.
- CONTRACT _STATUS :il s'agit du statut du contrat c'est à dire s'il est toujours en cours d'acceptation ou non.On s'intéresse qu'aux contrats acceptés, confirmés ou fermés (Accepted, confirmed, closed)
- SHARE _SIGNED : il s'agit de la part retenue par la SCR.
- Engagement 100 :C'est la valeur du risque couvert.
- Engagement SCR : c'est l'engagement maximal de la SCR avant la première rétrocession.

- Engagement SCR Net c'est l'engagement maximal de la SCR après la première rétrocession.
- CS SCR : il s'agit de la charge des sinistres que doit payer la SCR avant la première rétrocession. Il se calcule en en sommant le montant déjà payé et les provisions pour sinistres à payer(SAP).
- CS SCR Net :il s'agit de la charge nette des sinistres que doit rembourser la SCR après la première rétrocession.

2 Retraitements effectués

Tout d'abord, on ne tient compte que des contrats dont le coût du sinistre est supérieur à **10000 MAD** pour exclure les montants trop faibles qui peuvent "bruiter" la distribution. En effet un nombre important de très petits sinistres peuvent influencer l'ajustement de la distribution et entraîner une sous-estimation de la probabilité d'occurrence des sinistres majeurs.

2.1 Normalisation de nombre de sinistres

Dans le cadre de l'analyse de la fréquence des sinistres, il est souvent nécessaire de mettre ces données à l'échelle pour les rendre plus significatives et comparables d'une année à l'autre. Une méthode couramment utilisée consiste à normaliser le nombre de sinistres en fonction du nombre maximum de contrats observés et du nombre de contrats dans chaque année.

$$N^{\text{Sinistres normalisés}} = \frac{N^{\text{Sinistres observés}}}{N^{\text{polices dans l'année}}} * N^{\text{maximal de polices dans l'année}}$$

En utilisant le nombre maximum de contrats, nous pouvons obtenir une référence commune qui représente l'intensité maximale d'activité dans la période d'observation, et en divisant le nombre de sinistres par le nombre de contrats dans chaque année, nous ajustons la fréquence en fonction du volume d'activité dans cette période spécifique. Cette approche prend en compte les variations dans le nombre de contrats et permet de mettre en évidence les variations de fréquence qui sont indépendantes du volume d'activité. Ainsi, nous obtenons une mesure de la fréquence relative des sinistres par contrat, ce qui nous permet de mieux évaluer le risque associé à chaque année.

2.2 Passage à la variable "taux de destruction"

Plutôt que de modéliser directement le coût des sinistres, on modélisera le **taux de destruction** $x\%$ qui correspond au rapport entre la charge nette du sinistre X et l'engagement maximal net de la SCR :

$$x\% = \frac{\text{charge nette du sinistre } X}{\text{Engagement net de la SCR}} * 100$$

Le taux de destruction représente la perte subie par un assuré sur la valeur de son bien (appelée somme assurée). Dans notre cas, le taux de destruction correspond à la perte subie par la SCR sur son engagement maximal.

La distribution des charges des sinistres est fortement influencé par la valeur des biens détruits, ce qui rend la modélisation délicate. De plus, le coût d'un sinistre est généralement très lié avec la valeur de l'engagement. C'est pourquoi pour étudier ce coût indépendamment de la valeur assurée, nous utiliserons le taux de destruction, qui modélise mieux l'exposition. Par ailleurs, il est possible que la distribution des coûts ne suit pas de loi de probabilité connue. Modéliser le taux de destruction puis multiplier le résultat par l'engagement maximal se révèle beaucoup plus efficace.

3 Analyse descriptive des données

3.1 La variable nombre de sinistres

On commence par présenter les statistiques descriptives de la variable nombre de sinistres comme résumé sur le tableau suivante :

Nb.Obs.	Min	Max	Moyenne	Ecart-type	Médiane	trimmed	skew	kurtosis
27	5	99	44,4	22,28	43	42,96	0,61	-0,09

TABLE 1.1 – Statistiques descriptives du nombre de sinistres

Ces statistiques fournissent des informations importantes sur la distribution et les caractéristiques des nombres de sinistres. Elles peuvent être utilisées pour évaluer la centralité, la dispersion, l'asymétrie et la forme de la distribution, ainsi que pour estimer la précision des mesures.

Notre échantillon contient un ensemble de 27 observations, avec un maximum égal à 99 et un minimum qui égal à 5. La moyenne des nombres de sinistres est de 44.4, l'écart-type (sd) est de 22.28, ce qui mesure la dispersion des données autour de la moyenne. Une valeur plus élevée indique une plus grande variabilité des sinistres.

La médiane des nombres de sinistres est de 43, ce qui représente la valeur centrale lorsque les données sont triées par ordre croissant. Elle est proche de la moyenne, ce qui suggère une distribution symétrique des sinistres. La valeur trimmed = 42.96 est une estimation de la moyenne qui exclut les valeurs extrêmes des données, elle est également proche de la moyenne, ce qui indique une distribution relativement homogène des sinistres.

L'asymétrie (skew) des nombres de sinistres est de 0.61, ce qui mesure l'asymétrie de la distribution, une valeur positive indique une asymétrie vers la droite, tandis qu'une valeur négative indique une asymétrie vers la gauche, dans notre cas, l'asymétrie est légèrement vers la droite. Le "kurtosis" des nombres de sinistres est de -0.09, ce qui mesure la forme de la distribution par rapport à une distribution normale. Une valeur négative indique une distribution moins pointue que la distribution normale.

3.2 La variable taux de destruction

Le tableau suivant résume les principales mesures résultant de l'analyse descriptive de notre variable :

Nb.Obs.	Moyenne	Ecart-type	Médiane	Min	Max	skew
466	0.71	2.73	0.08	0,002	31.06	7.9

TABLE 1.2 – Statistiques descriptives du taux de destruction

Notre échantillon contient un ensemble de 466 observations, avec un maximum égal à 31.06% et un minimum qui égal à 0,002%. La moyenne du taux de destruction est de 0.71% ce qui veut dire qu'en moyenne que le coût d'un sinistre (incendie) correspond à 0.71% de l'engagement maximal de la SCR pour ce risque. L'écart-type, qui mesure la dispersion des données autour de la moyenne, est de 2,73% . On a une valeur plus élevée que celle de la moyenne donc il y a une grande variabilité du taux de destruction.

La médiane est de 0.08%, ce qui représente la valeur centrale lorsque les données sont triées par ordre croissant. Elle est assez inférieure à la moyenne, ce qui suggère une distribution asymétrique des sinistres.

Le coefficient d'asymétrie (*skew*) des nombres de sinistres est de 7.9 , ce qui suggère une forte asymétrie vers la droite.

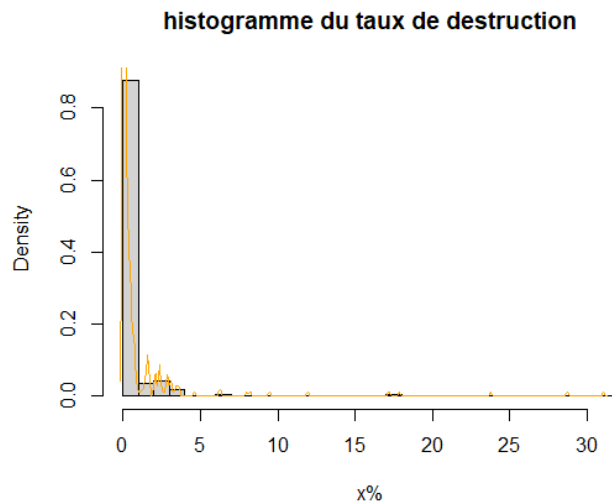


FIGURE 1.1 – Histogramme du taux de destruction

On remarque une forte concentration pour des taux de destruction à valeurs basses avec quelques observations montrant des taux de destruction élevés ce qui crée une queue de distribution allongée vers la droite. Cela confirme l'asymétrie de notre distribution.

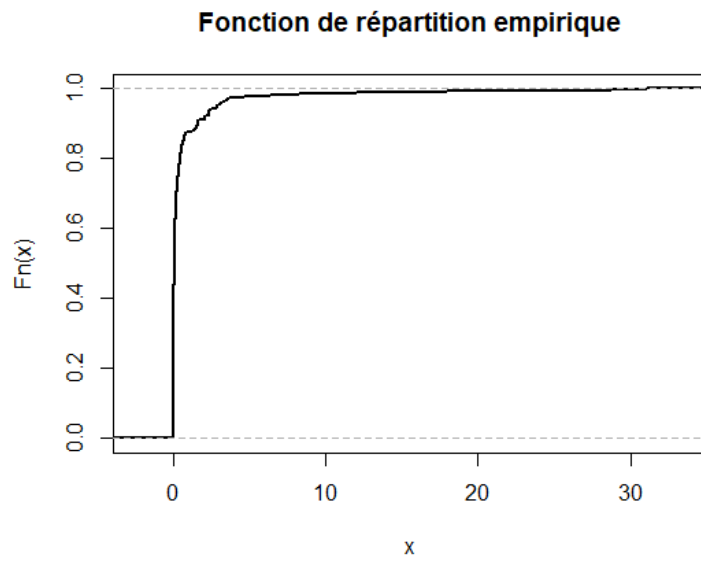


FIGURE 1.2 – Fonction de répartition empirique

La fonction de répartition empirique indique une forte probabilité d'avoir des taux de destruction faibles. En effet, on a au moins 80% de chance d'avoir un taux de destruction inférieur à 1%.

Chapitre 2

Résultats de la modélisation de la fréquence et de la sévérité

Dans ce chapitre, nous aborderons la modélisation de la fréquence des sinistres pour le portefeuille des affaires facultatives marocaines de la SCR appartenant à la branche incendie de la SCR, ainsi que la modélisation du taux de destruction en tant que mesure de la sévérité. L'objectif est de comprendre et d'estimer ces deux aspects essentiels de l'évaluation des risques en rétrocession.

Pour la modélisation de la fréquence des sinistres, nous examinerons trois distributions couramment utilisées : la loi binomiale négative, la loi de Poisson et la loi binomiale. Ces distributions permettent de décrire la probabilité de survenance des sinistres en fonction de paramètres spécifiques tels que le nombre moyen de sinistres et la dispersion. Nous explorerons leurs propriétés statistiques et utiliserons des méthodes d'estimation pour ajuster ces lois aux données observées.

En ce qui concerne la modélisation du taux de destruction, nous adopterons une approche à deux volets. D'abord nous ferons une modélisation globale du taux de destruction en utilisant les lois statistiques classiques présentées dans la deuxième partie ainsi que les distributions MBBEFD à deux et un paramètres. Ensuite nous déterminerons le seuil de sinistralité grave de notre portefeuille afin de modéliser séparément le taux de destruction des sinistres attritionnels et celui des sinistres graves. Ceci nous permettra d'avoir une meilleure modélisation de la sinistralité de notre portefeuille.

1 Estimation de la distribution de la fréquence

Nous proposons d'estimer le nombre de pertes avec les distributions binomiale négative, Poisson et binomiale.

Nous estimons les paramètres de chacune des trois distributions par la méthode du maximum de vraisemblance via la fonction "goodfit" de R, et ce, pour chacun des risques. Les données utilisées sont les nombres de pertes observées par semestre. Nous avons ainsi étudié 27 nombres de pertes.

1.1 La loi binomiale négative

Le graphe de densité montre une concordance entre la densité de la loi binomiale négative (en rouge) et celle de nos données. Cela suggère que la loi binomiale négative est un modèle approprié pour décrire la distribution de nos données. La proximité entre les deux densités indique que le modèle de la loi binomiale négative est bien ajusté aux caractéristiques de nos données.

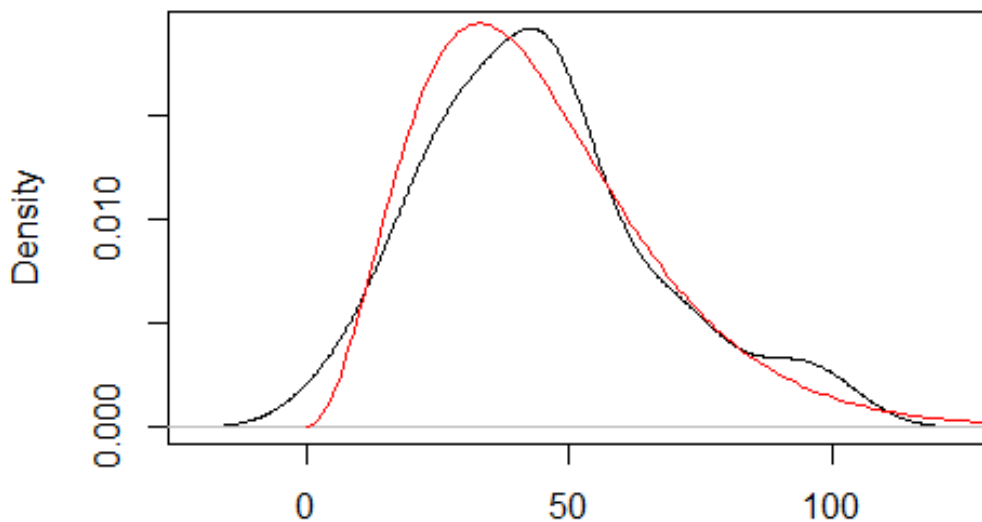


FIGURE 2.1 – La densité d'une loi Binomiale négative (rouge) superposée à celle du nos données

Le QQ-plot montre une bonne concordance globale entre la distribution de la loi binomiale négative et la distribution de nos données observées. La plupart des points sont alignés le long de la droite de référence, ce qui indique une similarité entre les quantiles théoriques et les quantiles empiriques.

Cependant, il est important de noter qu'il y a un point qui s'éloigne considérablement de la ligne de référence, en particulier le dernier point. Cela suggère qu'il y a une différence significative entre le quantile théorique de la loi binomiale négative correspondant à ce point et le quantile empirique observé dans nos données.

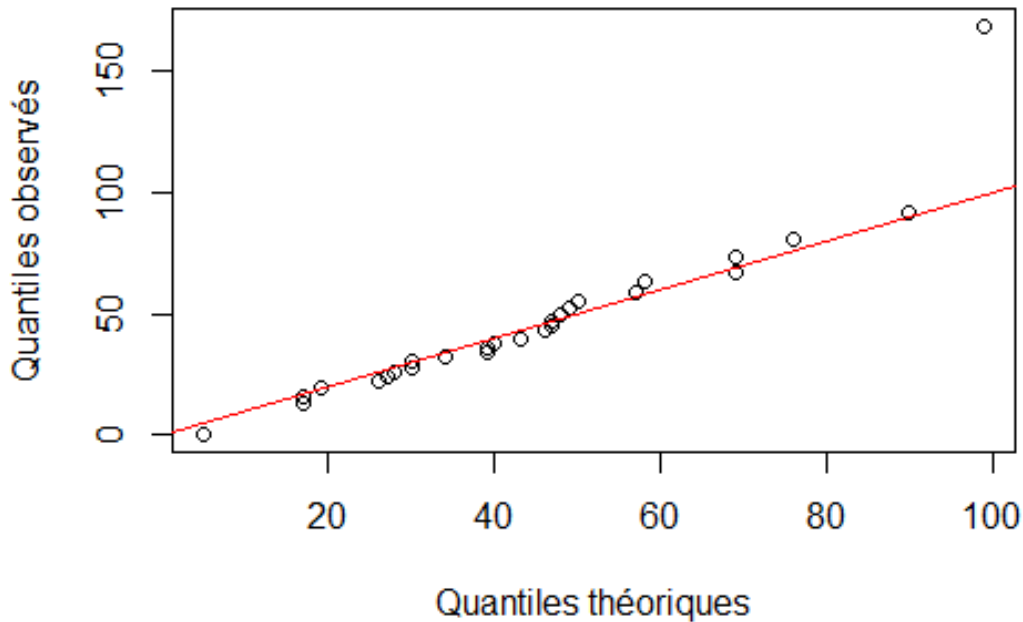
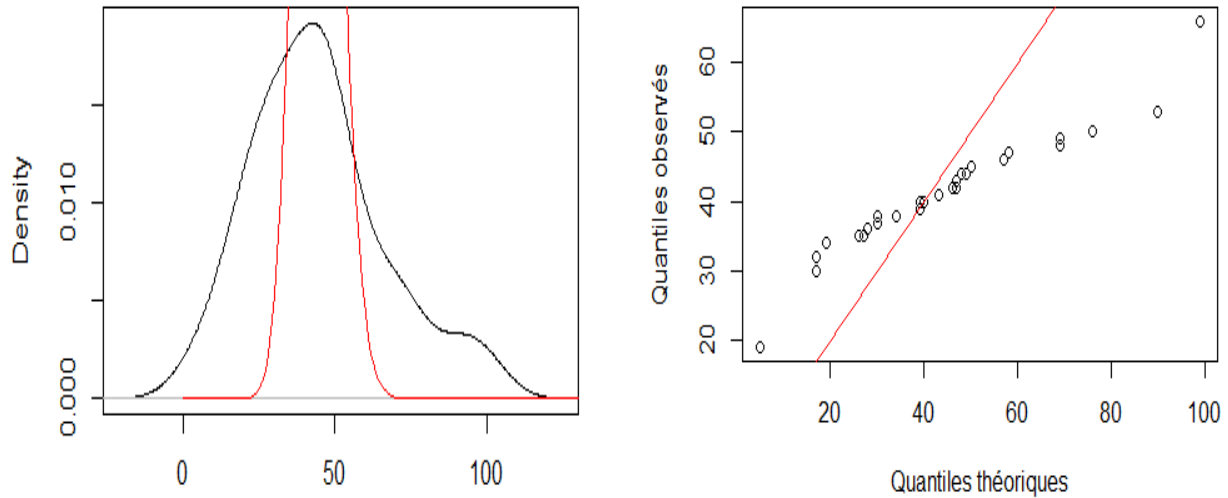


FIGURE 2.2 – QQ-plot de la loi Binomiale négative

1.2 Loi de Poisson

Nous pouvons voir que la loi de Poisson n'est pas adaptée, sa densité ne coïncide pas du tout avec celle de nos données. Tout comme la densité, le QQ-plot n'est pas correct : les points ne sont pas situés sur la droite.



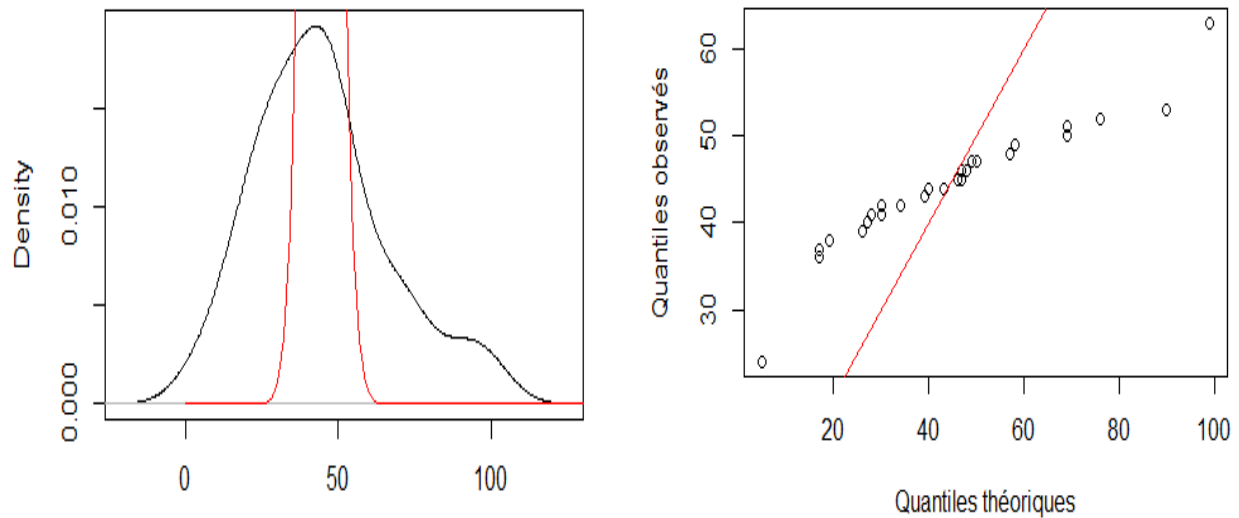
(a) La densité d'une loi de Poisson (rouge) superposée à celle du nos données

(b) QQ-plot de la loi de poisson

FIGURE 2.3 – La desité et le QQ-plot de la loi de poisson

1.3 Loi Binomiale

De même nous pouvons voir que la loi Binomiale n'est pas adaptée pour modéliser la fréquence de nos données.



(a) La densité de la loi binomiale (rouge) superposée à celle du nos données

(b) QQ-plot de la loi Binomial

FIGURE 2.4 – La densité et le QQ-plot de la loi Binomiale

1.4 Estimation des paramètres

Dans ce paragraphe, nous allons estimer les paramètres des lois en utilisant la méthode du maximum de vraisemblance. Cette méthode consiste à trouver les valeurs des paramètres qui maximisent la probabilité d'observer les données que nous avons recueillies. En ajustant les lois aux données par le maximum de vraisemblance, nous pourrions obtenir les estimations les plus précises des paramètres pour chaque distribution. Cela nous permettra d'analyser et de comparer les différentes lois ajustées afin de déterminer celle qui correspond le mieux à nos données observées.

Loi	Paramètres
Binomiale Négative	n = 4 p = 0.0834
Poisson	$\lambda = 44.407$
Binomiale	n = 99 p = 0.448

TABLE 2.1 – Paramètres des lois ajustées

1.5 Tests d'adéquation

Dans ce paragraphe, nous présenterons les résultats des tests statistiques que nous avons effectués pour sélectionner la meilleure distribution parmi les lois : binomiale négative, binomiale et Poisson.

En présentant les résultats de ces tests statistiques, nous pourrions évaluer la pertinence de chaque distribution (binomiale négative, binomiale et Poisson) pour modéliser la fréquence des sinistres. Nous pourrions ainsi choisir la distribution qui présente la meilleure adéquation avec nos données et qui fournit les estimations les plus fiables des paramètres.

Loi	test de Kolmogorov-Smirnov	AIC
Binomial Négative	p-value = 0.517	246,07
Poisson	p-value = 0.049	452,04
Binomial	p-value = 0.022	733,7

TABLE 2.2 – Résultats des tests d'adéquation

Les valeurs de p-value obtenues pour le test de Kolmogorov-Smirnov suggèrent que la loi binomiale négative semble être le meilleur ajustement parmi les trois distributions testées, avec une p-value élevée indiquant une meilleure adéquation aux données, et pour la loi binomial et loi de poisson la p-value est inférieure à 0.05, indiquant des divergences significatives entre la distribution théorique et les données observées. On remarque que la valeur la plus faible de l'AIC est obtenue pour la loi binomiale négative, suivie de près par la loi de Poisson, tandis que la loi binomiale obtient la valeur la plus élevée. Cela suggère que le modèle de loi binomiale négative offre un meilleur ajustement de données par rapport aux autres modèles.

NB : Dans cette modélisation, nous avons décidé de travailler avec des données semestrielles plutôt que des données annuelles. Cette décision a été prise en raison du faible nombre d'observations disponibles pour les données annuelles. En effet, pour les données annuelles les valeurs des p-values pour le test de Kolmogorov-Smirnov sont très faibles et ne permettent pas de choisir un ajustement approprié à nos données.

En utilisant des données semestrielles, nous avons pu augmenter le nombre d'observations disponibles, ce qui a permis d'obtenir des résultats plus robustes lors de l'application du test de Kolmogorov-Smirnov. En ayant un échantillon plus important, les valeurs de p obtenues sont plus fiables et offrent une meilleure évaluation de l'ajustement des données aux lois considérées.

2 Estimation de la distribution de la sévérité

2.1 Ajustement par les lois classiques

Dans cette partie, nous ajusterons la distribution du taux de destruction avec les lois Log-normale, Weibull et Pareto. Aussi nous utiliserons les deux méthodes d'estimation des paramètres définis dans la partie II à savoir la méthode du maximum de vraisemblance et la méthode des moments.

2.1.1 Estimation des paramètres

Les paramètres estimés par la méthode du maximum de vraisemblance (noté MLE) et par la méthode des moments (noté MME) pour chaque loi sont résumés dans le tableau suivant :

Distributions	Paramètres MLE	Paramètres MME
LogNormale	$\mu = -2,39$ $\sigma = 1,92$	$\mu = -1,71$ $\sigma = 1,65$
Weibull	$\alpha = 0,48$ $\beta = 0,24$	$\alpha = 0,58$ $\beta = 0,45$
Pareto	$a = 0,04$ $\theta = 0,72$	$a = 0,20$ $\theta = 1,45$

TABLE 2.3 – Paramètres estimés

2.1.2 Ajustement graphique

Dans cette partie on essaie de faire une comparaison graphique avec les différentes lois pour déduire lesquelles s'ajustent mieux à nos données.

2.1.2.1 Comparaison des fonctions de théoriques et empiriques : On compare ici graphiquement les fonctions empiriques et les fonctions des lois de probabilités.

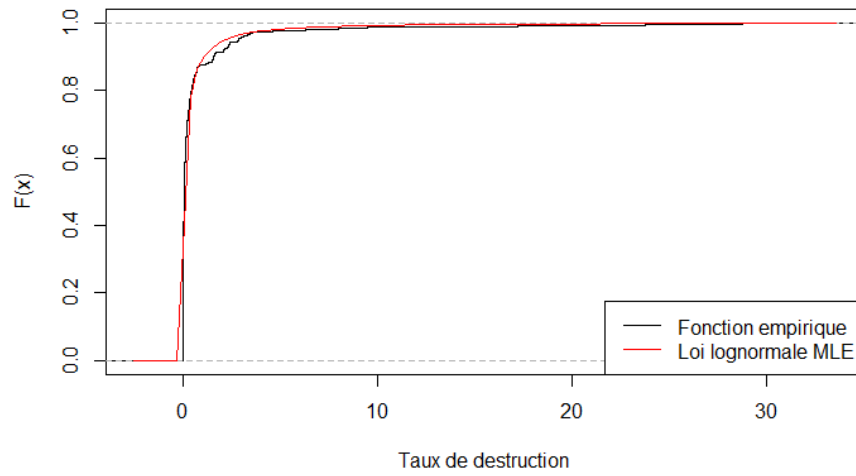


FIGURE 2.5 – Comparaison fonction de répartition empirique et fonction de répartition de la loi Lognormale de paramètres estimés par MLE

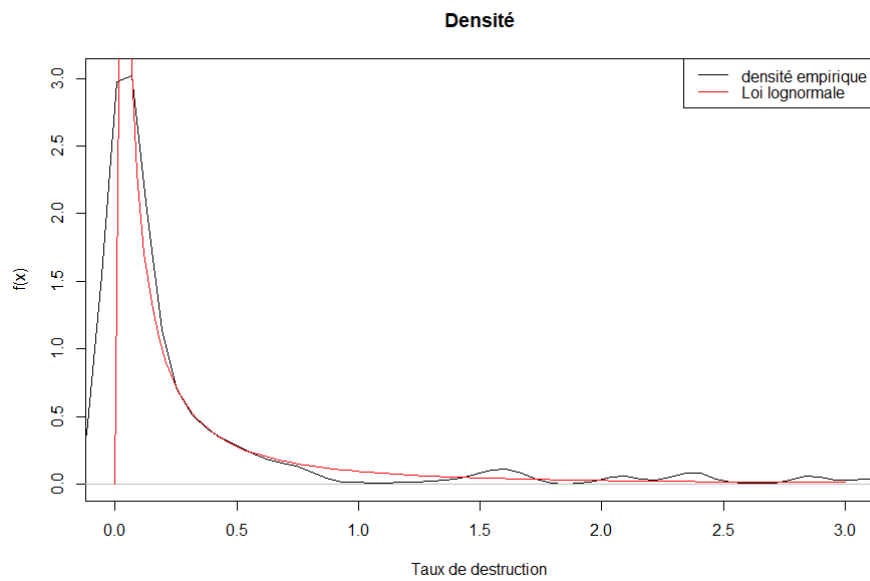


FIGURE 2.6 – Comparaison fonction de densité empirique et fonction de densité de la loi Lognormale de paramètres estimés par MLE

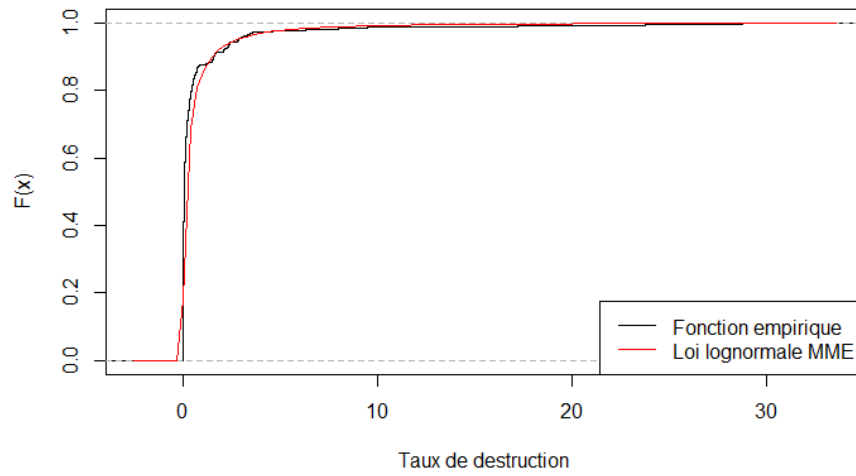


FIGURE 2.7 – Comparaison fonction de répartition empirique et fonction de répartition de la loi Lognormale de paramètres estimés par MME

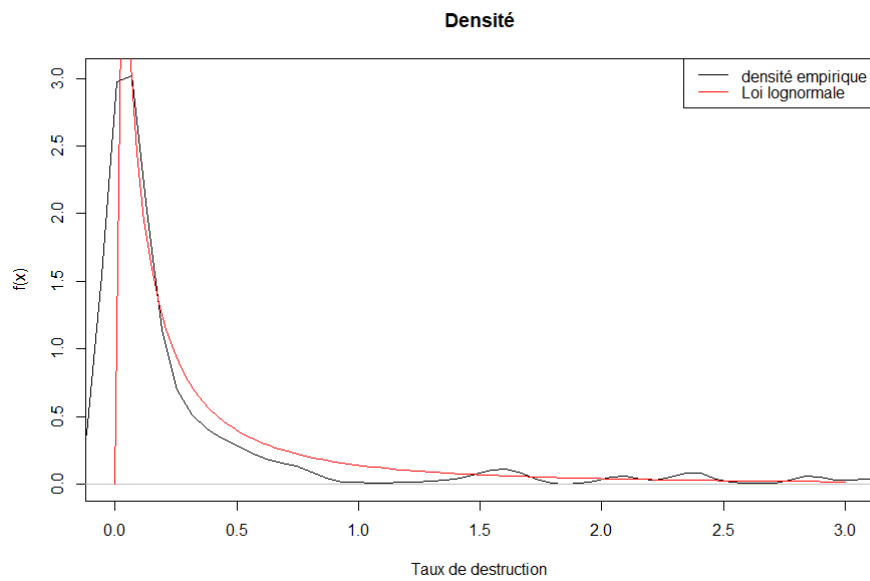


FIGURE 2.8 – Comparaison fonction de densité empirique et fonction de densité de la loi Lognormale de paramètres estimés par MME

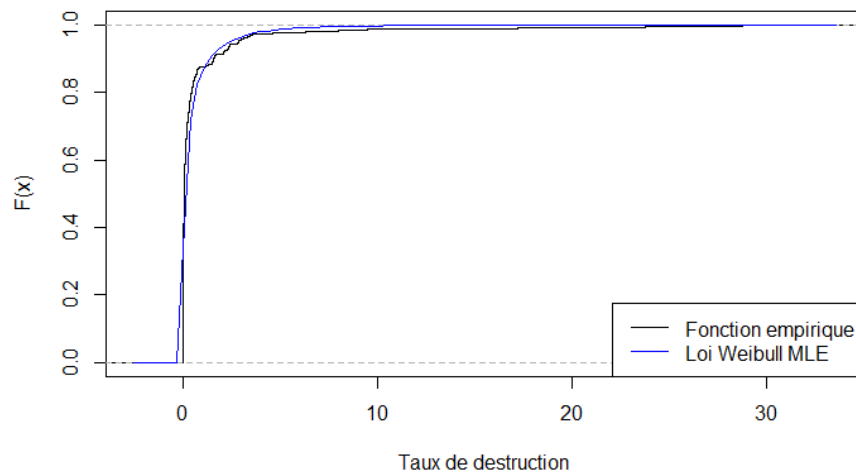


FIGURE 2.9 – Comparaison fonction de répartition empirique et fonction de répartition de la loi Lognormale de paramètres Weibull par MLE

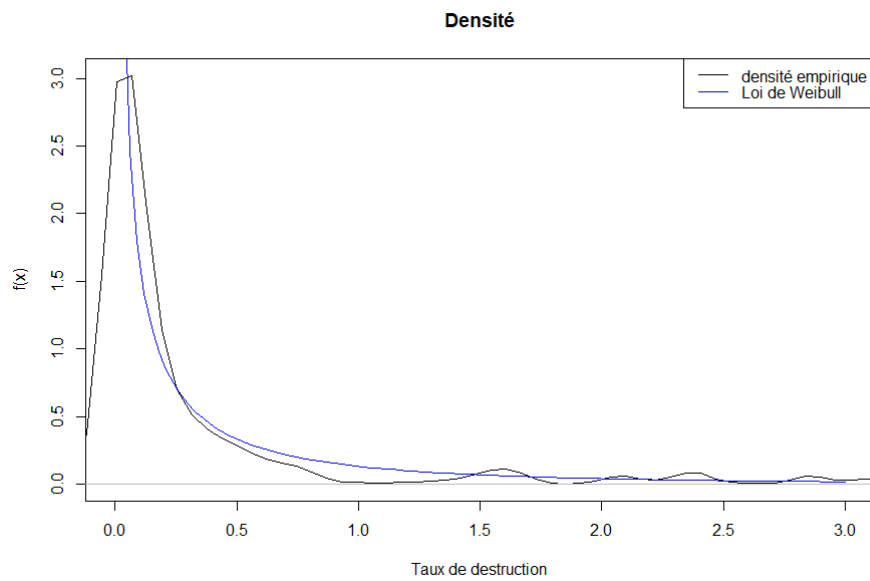


FIGURE 2.10 – Comparaison fonction de densité empirique et fonction de densité de la loi Weibull de paramètres estimés par MLE

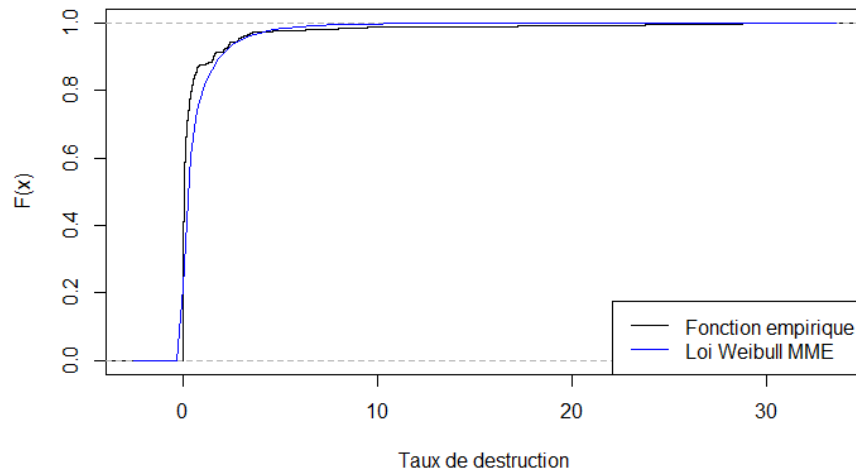


FIGURE 2.11 – Comparaison fonction de répartition empirique et fonction de répartition de la loi Weibull de paramètres estimés par MME

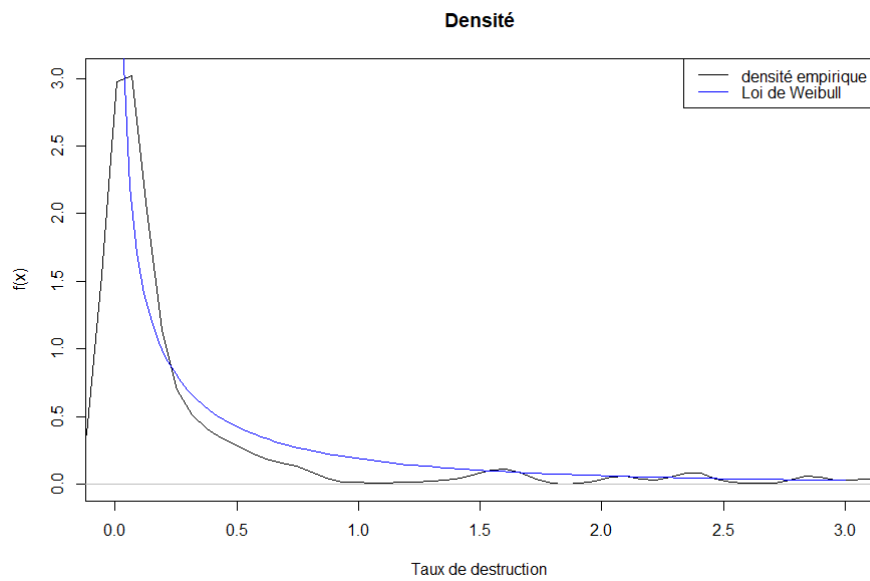


FIGURE 2.12 – Comparaison fonction de densité empirique et fonction de densité de la loi Weibull de paramètres estimés par MME

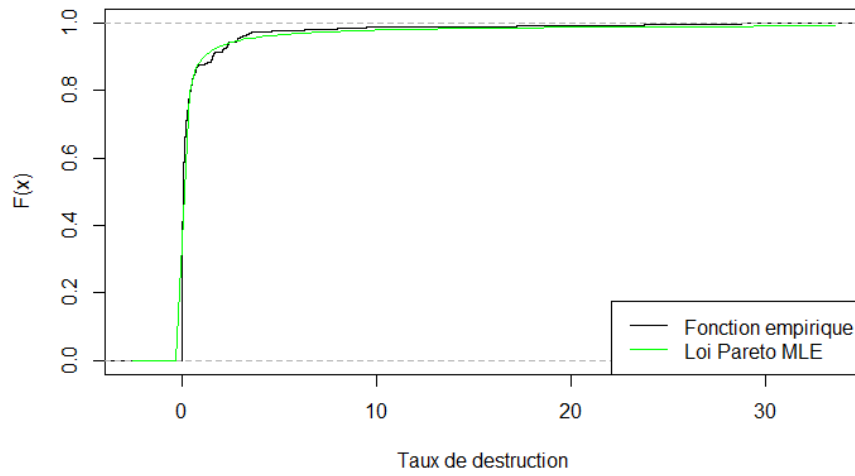


FIGURE 2.13 – Comparaison fonction de répartition empirique et fonction de répartition de la loi Pareto de paramètres estimés par MLE

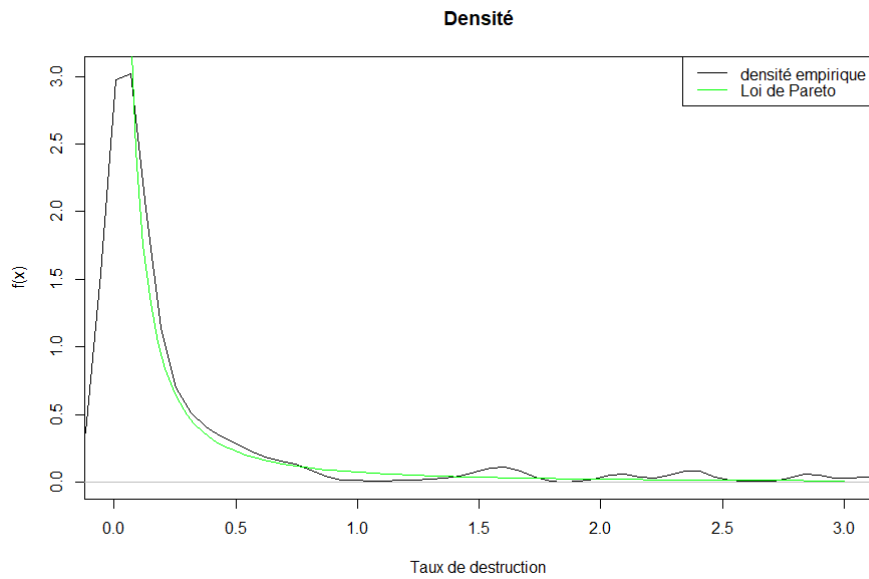


FIGURE 2.14 – Comparaison fonction de densité empirique et fonction de densité de la loi Pareto de paramètres estimés par MLE

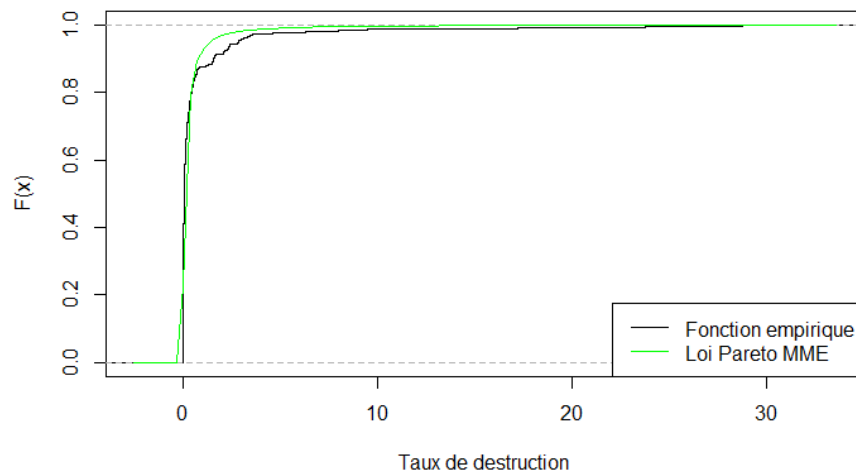


FIGURE 2.15 – Comparaison fonction de répartition empirique et fonction de répartition de la loi Pareto de paramètres estimés par MME

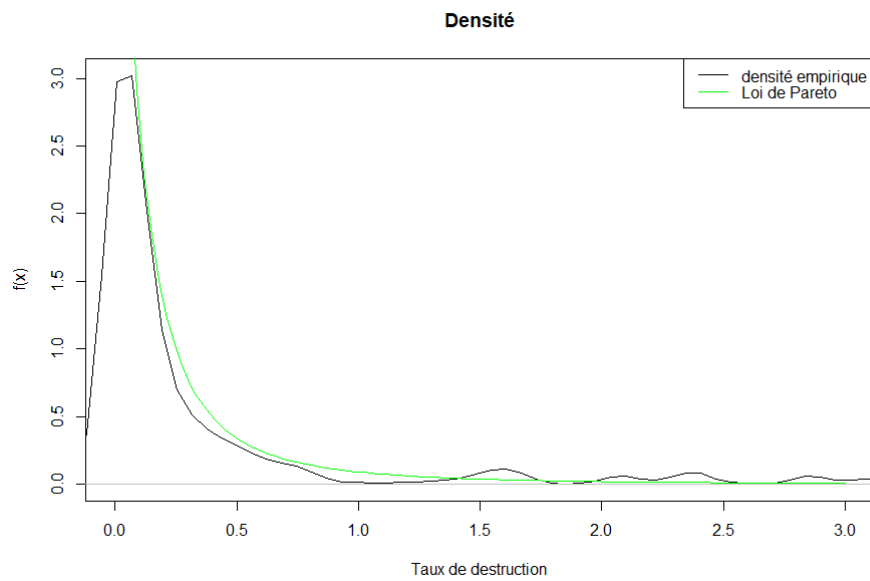


FIGURE 2.16 – Comparaison fonction de densité empirique et fonction de densité de la loi Pareto de paramètres estimés par MME

On remarque que la plupart des lois s'ajustent à nos données empiriques sauf la loi de Pareto et la loi de Weibull de paramètres estimés par la méthode des moments. Cette méthode ne permet pas de faire une bonne validation de nos ajustements. Nous allons donc passer à la méthode du Q-Q plot.

2.1.2.2 Comparaison des Q-Q plot Comme dans le paragraphe précédent, on compare le Q-Q plot entre nos données empiriques et les différentes lois retenues.

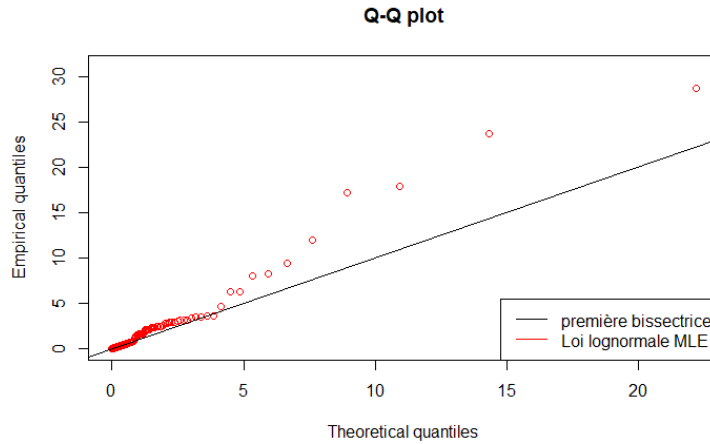


FIGURE 2.17 – Q-Qplot de la loi Lognormale de paramètres estimés par MLE

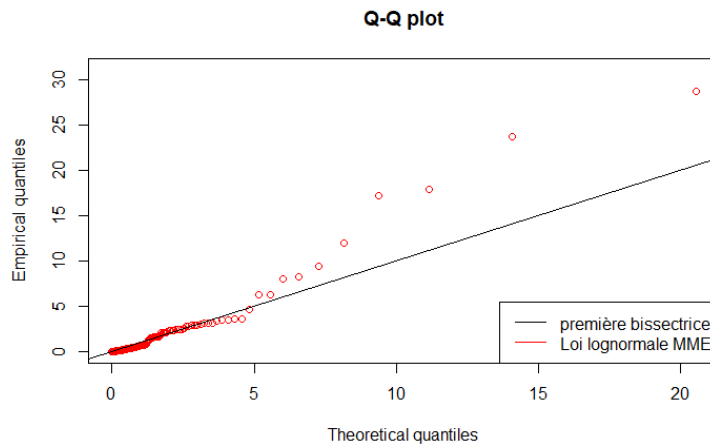


FIGURE 2.18 – Q-Qplot de la loi Lognormale de paramètres estimés par MME

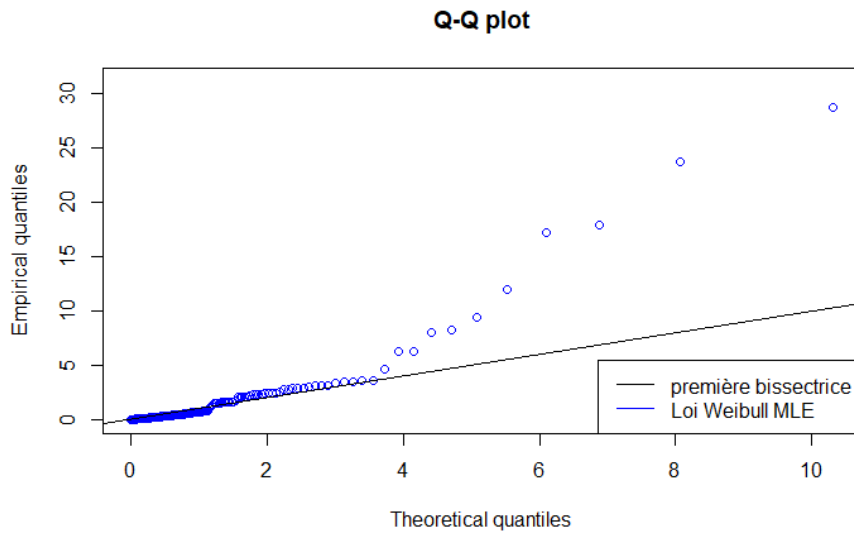


FIGURE 2.19 – Q-Qplot de la loi Weibull de paramètres estimés par MLE

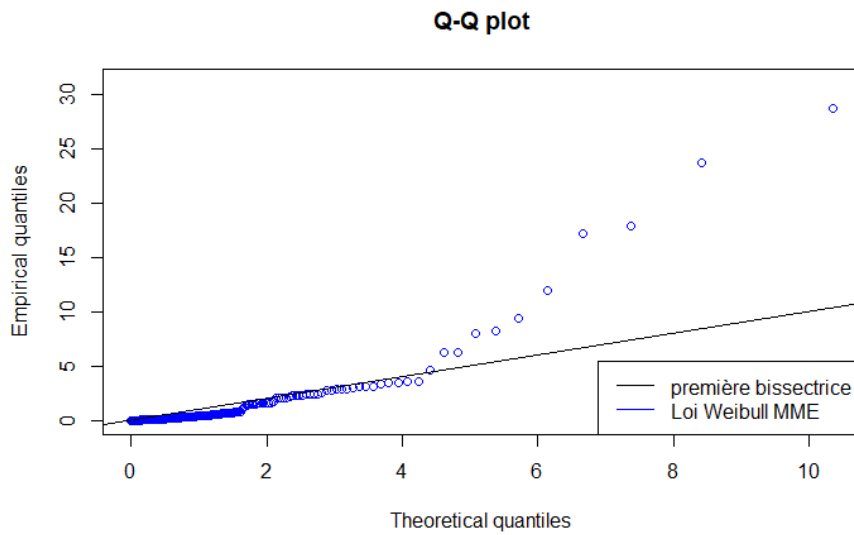


FIGURE 2.20 – Q-Qplot de la loi Weibull de paramètres estimés par MME

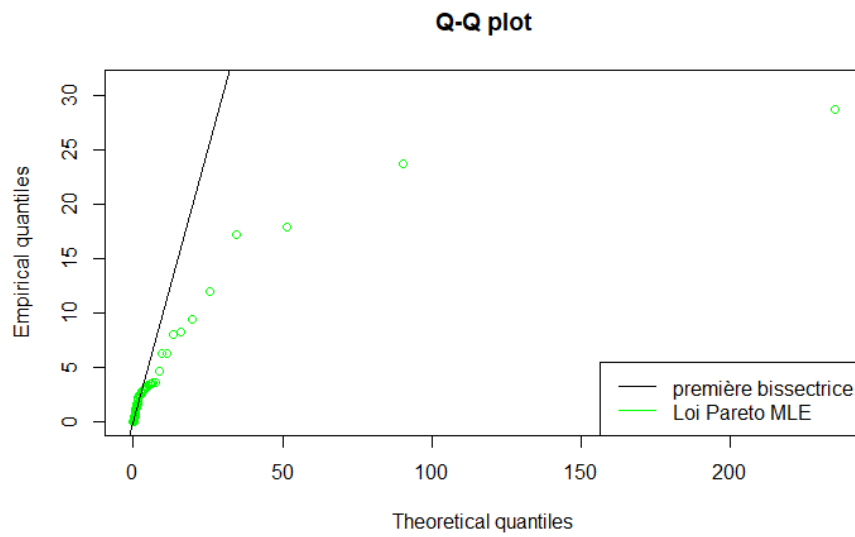


FIGURE 2.21 – Q-Qplot de la loi Pareto de paramètres estimés par MLE

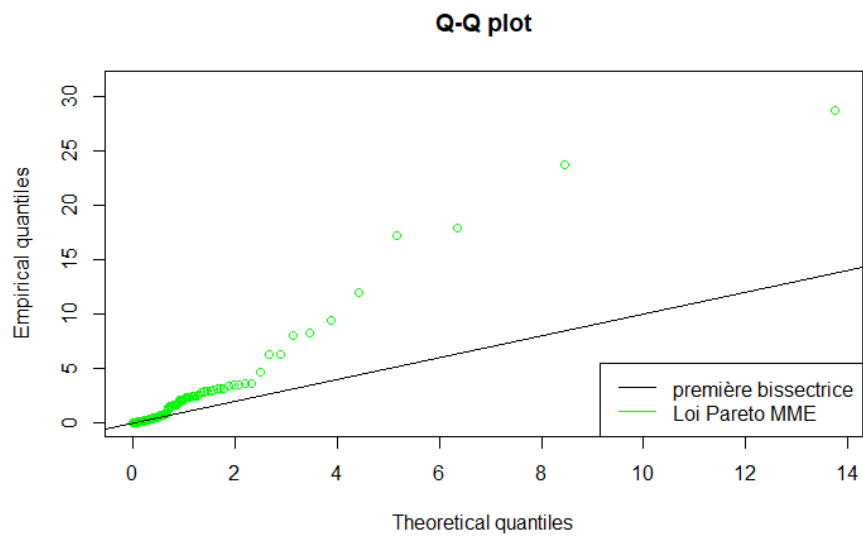


FIGURE 2.22 – Q-Qplot de la loi Pareto de paramètres estimés par MME

On constate que le Q-Q plot de la loi de Weibull s'éloigne énormément de la diagonale quelque soit la méthode d'estimation utilisée. Pour les lois LogNormale et Pareto, le Q-Q plot s'éloigne moins de la première bissectrice mais on constate néanmoins de grands écarts surtout pour les grands quantiles. Pour pouvoir conclure sans ambiguïté sur notre ajustement, nous allons utiliser les tests d'adéquation de Kolmogorov-Smirnov et d'Anderson Darling.

2.1.3 Tests d'adéquation

Comme expliqué précédemment, nous allons effectuer deux tests d'adéquation afin de conclure sur l'ajustement de données. Nous rejetons l'hypothèse H_0 si la p-value obtenue est inférieure au seuil de 5%. Les résultats des tests sont indiqués dans le tableau suivant : Après

Lois	Méthode d'estimation	p-value Kolmogorov-Smirnov	p-value Anderson Darling	Décision
Lognormale	MLE	0,2717	0,06308	Non-Rejet de H_0
Lognormale	MME	$< 2, 2.10^{-16}$	$1, 288.10^{-6}$	Rejet de H_0
Weibull	MLE	$1, 363.10^{-5}$	$1, 873.10^{-6}$	Rejet de H_0
Weibull	MME	$< 2, 2.10^{-16}$	$1, 288.10^{-6}$	Rejet de H_0
Pareto	MLE	0,2861	0,1581	Non-Rejet de H_0
Pareto	MME	$1, 923.10^{-9}$	$1, 288.10^{-6}$	Rejet de H_0

TABLE 2.4 – Résultats des tests d'adéquation

avoir examiné le tableau ci-dessus, il semble que les lois Lognormale et Pareto, de paramètres estimés à l'aide de la méthode du maximum de vraisemblance, soient les plus appropriées pour modéliser la distribution du taux de destruction du portefeuille FAC Maroc Incendie de la SCR.

Cependant, en observant le QQ-plot ci-dessous, nous remarquons un écart significatif entre les QQ-plots des lois ajustées et la première bissectrice, en particulier lorsque les quantiles sont relativement élevés. Cela indique que les lois Lognormale et Pareto pourraient ne pas être entièrement adéquates pour capturer la distribution des taux de destruction les plus élevés dans le portefeuille.

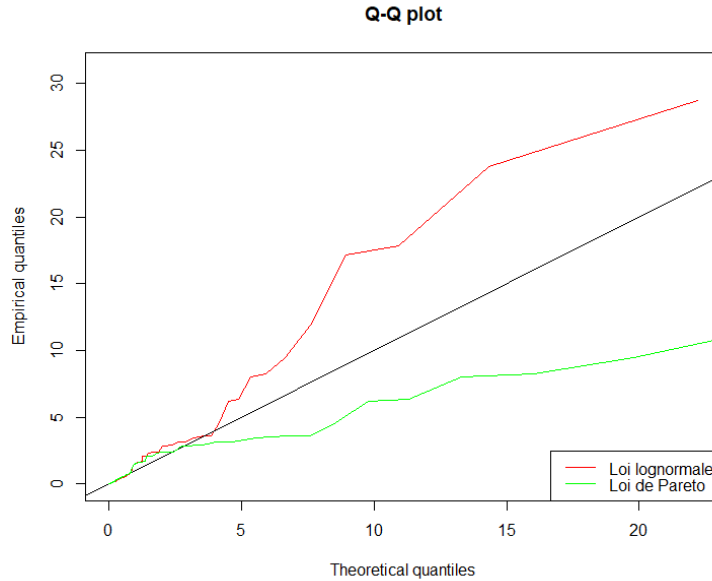


FIGURE 2.23 – QQplot LogNormale et Pareto

Il est donc nécessaire d'examiner plus en détail ces résultats et d'explorer d'autres options de modélisation pour mieux représenter ces extrêmes. Cela pourrait impliquer l'exploration de distributions alternatives ou l'ajustement de modèles plus complexes pour mieux correspondre aux caractéristiques spécifiques du portefeuille.

Dans la continuation de ce chapitre, nous allons effectuer une distinction entre les sinistres attritionnels et les sinistres graves. Nous commencerons par établir un seuil de gravité des sinistres pour pouvoir les différencier. Ensuite, nous procéderons à une modélisation distincte du taux de destruction des sinistres attritionnels et des sinistres graves.

2.1.4 Détermination du seuil de sinistralité grave

Pour déterminer le seuil de sinistralité grave de notre portefeuille, nous utilisons les quatre méthodes graphiques décrites dans la partie II de notre mémoire. Ce seuil est déterminé en se basant sur la charge nette des sinistres.

Cependant, pour pouvoir appliquer la théorie des valeurs extrêmes, il est nécessaire que la distribution de la charge nette suive une distribution à queue lourde. On peut vérifier cela rapidement en réalisant un Q-Q Plot Exponentiel. Si l'échantillon des observations provient d'une distribution exponentielle avec un paramètre λ , alors les points du graphique s'aligneront le long d'une droite avec une pente λ . Si le graphique présente une forme convexe, cela indique une queue plus épaisse de la distribution. En revanche, si le graphique présente une forme concave, cela suggère une queue plus fine de la distribution.

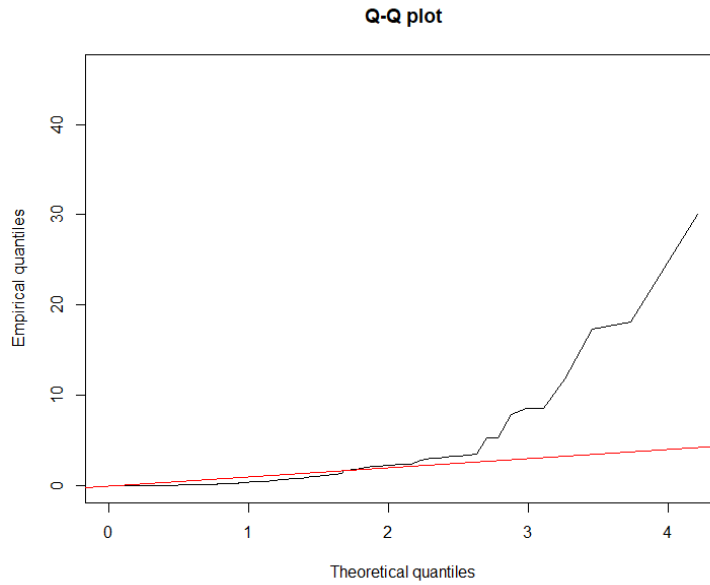


FIGURE 2.24 – Q-Q Plot Exponentiel

Nous constatons que le Q-Q Plot Exponentiel présente une tendance convexe dans notre cas, ce qui suggère une distribution avec une queue plus lourde que celle de l'exponentielle. Par conséquent, nous pouvons utiliser les méthodes de la théorie des valeurs extrêmes pour notre analyse.

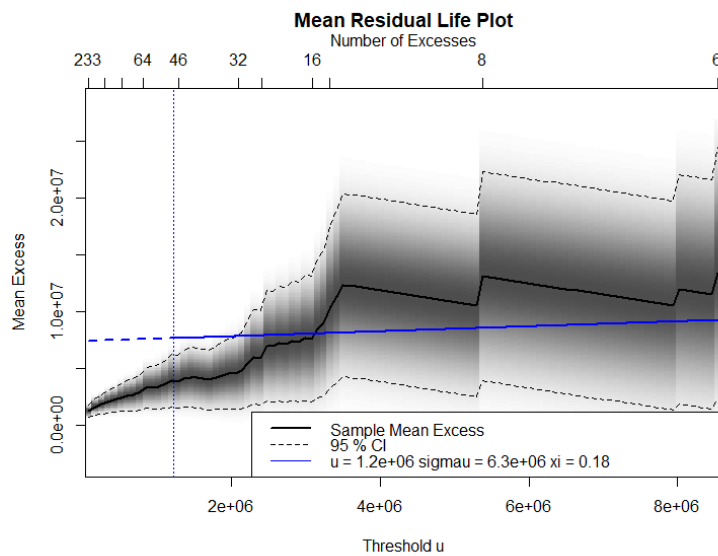


FIGURE 2.25 – Mean Excess plot

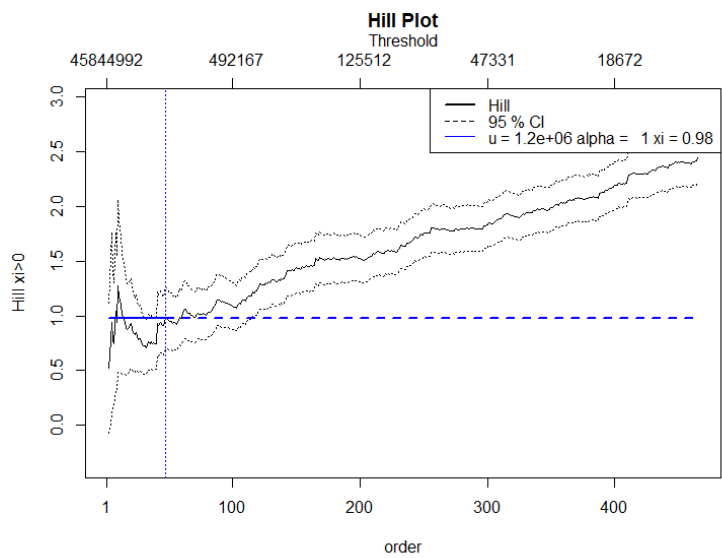


FIGURE 2.26 – Hill plot

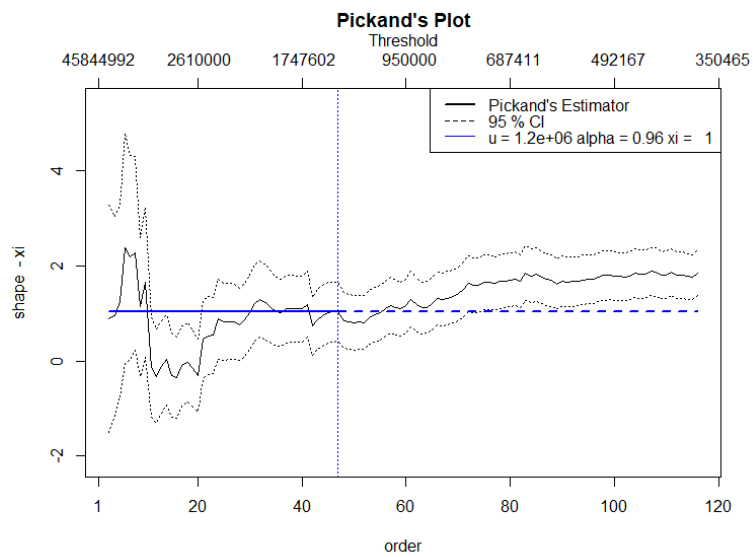


FIGURE 2.27 – Pickands plot

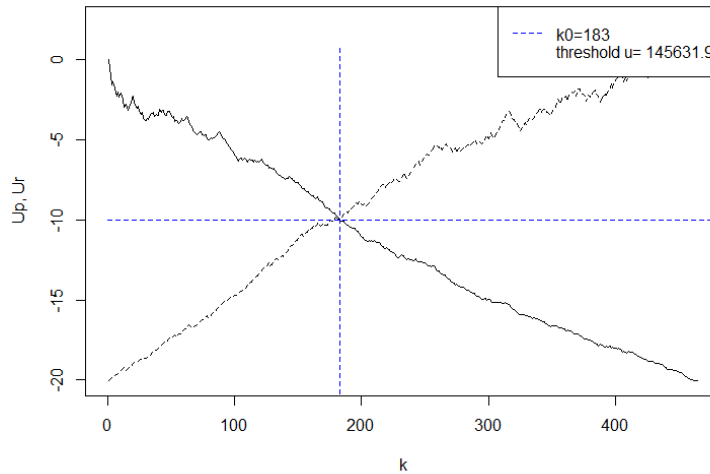


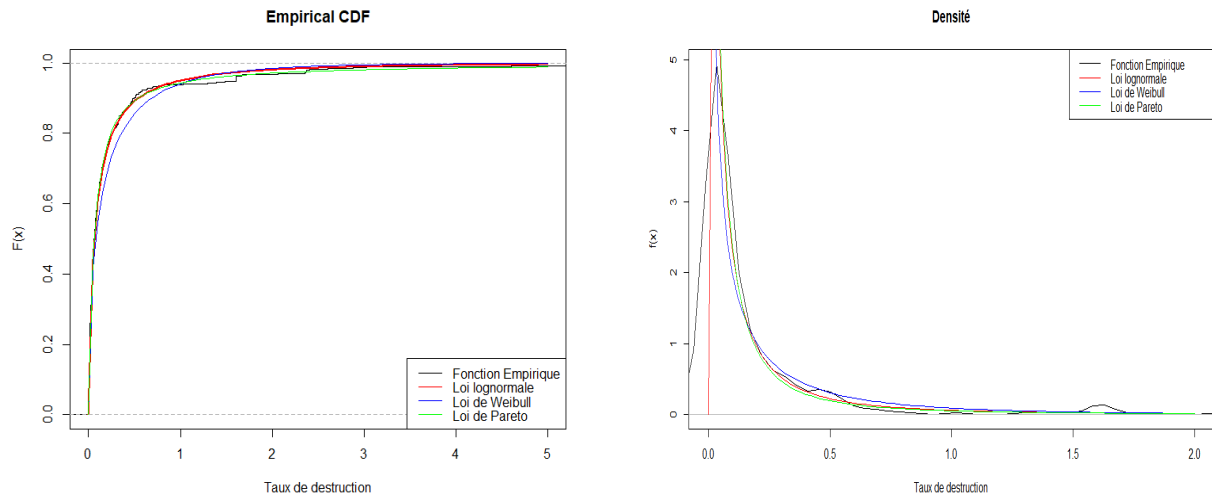
FIGURE 2.28 – Gertensgarbe plot

Les méthodes Mean Excess Function, Hill plot et Pickands plot ont toutes abouti au même seuil de $u = 1.200.000$ MAD. Cependant, le Gertengabe plot a donné un seuil plus bas de 145.631,9 MAD. Cette divergence peut être attribuée au fait que cette méthode ne repose pas strictement sur la théorie des valeurs extrêmes. Par conséquent, nous choisirons de conserver le seuil de 1.200.000 MAD, qui nous semble plus approprié.

2.1.4.1 Modélisation du taux de destruction des sinitres attritionnels : nous choisissons les sinistres dont le coût est inférieur à 1.200.000 MAD, puis nous calculons leur taux de destruction. Nous procédons ensuite à la modélisation de ce taux de destruction en utilisant les lois Weibull, Lognormale et Pareto.

Nb.Obs.	Moyenne	Ecart-type	Médiane	Min	Max	skew
419	0,33	1,43	0,06	0,002	23,76	11,95

TABLE 2.5 – Statistiques descriptives du taux de destruction



(a) Fonctions de répartition

(b) Fonctions de densité

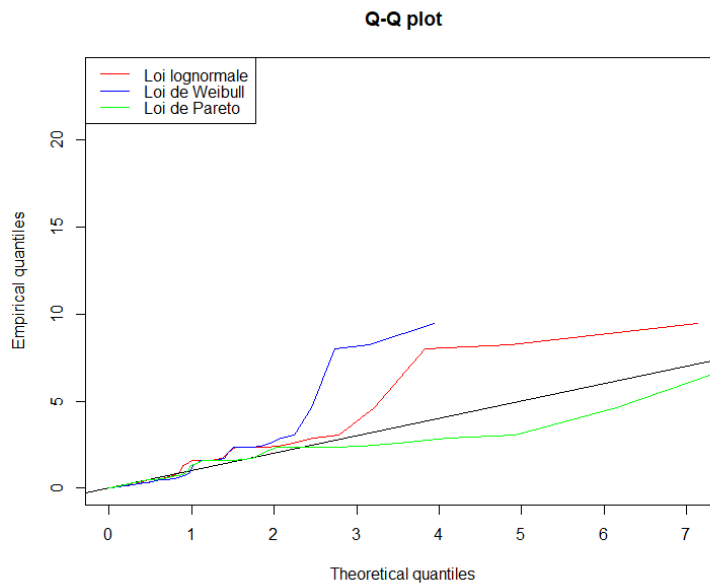


FIGURE 2.30 – QQ Plot

Nous remarquons une nette amélioration dans le Q-Q plot. En effet, pour les lois Log-normale et Pareto, les graphiques Q-Q sont plus proches de la diagonale, et celui de la loi de Pareto est quasi-linéaire.

Après avoir examiné le QQ-Plot et les résultats du tableau ci-dessus, nous constatons que la loi de Pareto s'ajuste mieux à nos données. Par conséquent, nous choisisons d'utiliser la loi de Pareto pour modéliser le taux de destruction des sinistres attritionnels.

Lois	Paramètres estimés (MLE)	p-value Kolmogorov-Smirnov	p-value Anderson Darling	Décision
Lognormale	$\mu = -2.74$ $\sigma = 1.66$	0.13	0.20	Non-Rejet de H_0
Weibull	$\alpha = 0.55$ $\beta = 0.15$	$6,557.10^{-5}$	$3,294.10^{-5}$	Rejet de H_0
Pareto	$a = 0.06$ $\theta = 1$	0.2346	0.1856	Non-Rejet de H_0

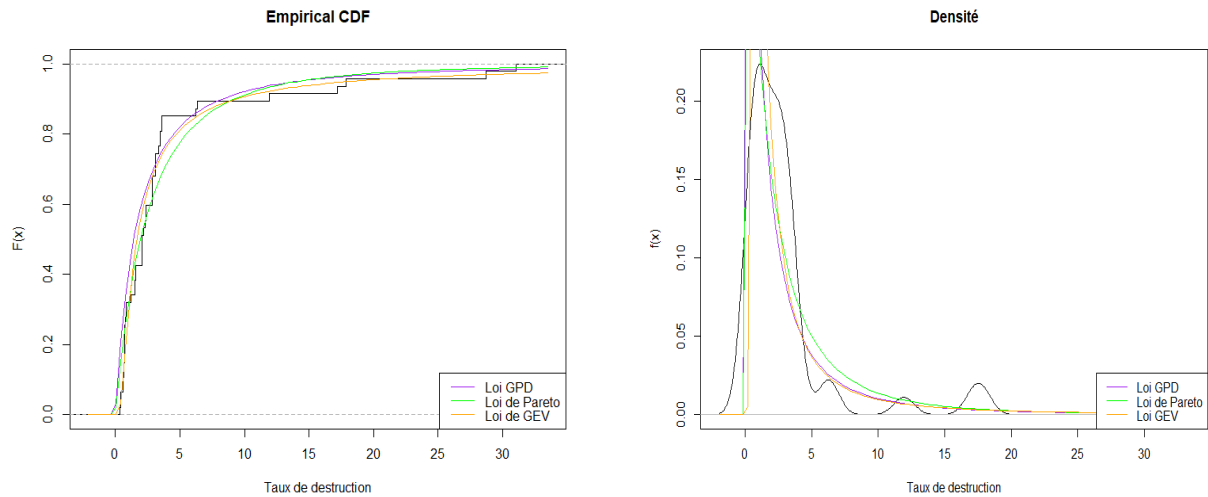
TABLE 2.6 – Résultats de la modélisation

2.1.4.2 Modélisation du taux de destruction des sinistres graves : nous sélectionnons les sinistres dont le coût est supérieur ou égal à 1.200.000 MAD, puis nous calculons leur taux de destruction.

Ensuite, nous procédons à la modélisation de ce taux de destruction en utilisant les lois Pareto, Pareto généralisée (GPD) et la loi des extrêmes généralisés ou Generalized Extreme Value (GEV).

Nb.Obs.	Moyenne	Ecart-type	Médiane	Min	Max	skew
47	4,08	6,63	2,07	0,37	31,06	2,86

TABLE 2.7 – Statistiques descriptives du taux de destruction



(a) Fonctions de répartition

(b) Fonctions de densité

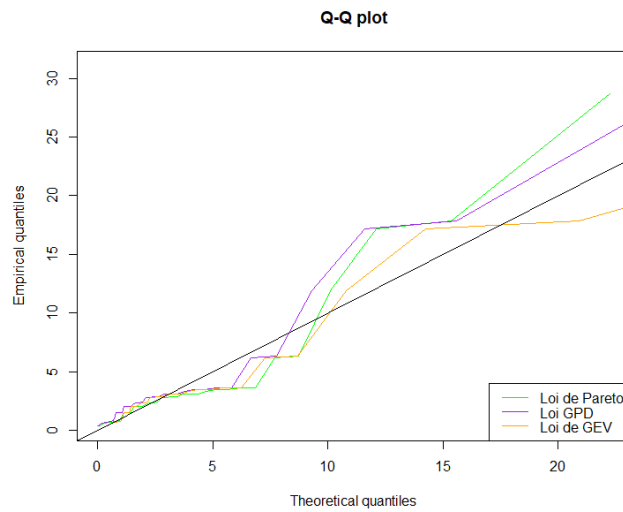


FIGURE 2.32 – QQPlot

D'après le QQPlot, les trois lois semblent convenir à nos données. Cependant, la loi qui est la plus proche de la diagonale est la loi GEV.

Lois	Paramètres estimés (MLE)	p-value Kolmogorov-Smirnov	p-value Anderson Darling	Décision
Pareto	$a = 5.99$ $\theta = 2.47$	0.14	0.17	Non-Rejet de H_0
GPD	$\xi = 0.60$ $\sigma = 1.64$	0.035	0.028	Rejet de H_0
GEV	$\mu = 0.19$ $\sigma = 0.23$ $\xi = 0.22$	0.2156	0.4693	Non-Rejet de H_0

TABLE 2.8 – Résultats de la modélisation

Les résultats contenus dans le tableau ci-dessus viennent confirmer ceux du QQ Plot sauf pour la loi GPD. La loi qui s'ajuste mieux à la distribution du taux de destruction des sinistres graves est la loi GEV car elle a la plus grande p-value pour les deux tests.

2.2 Ajustement par une distribution MBBEFD

Dans cette partie, on veut vérifier si l'ajustement avec les distributions MBBEFD est meilleur que celle avec les lois classiques de probabilité. Pour ce faire on utilise les trois méthodes d'estimation spécifiés dans la partie II.

2.2.1 distribution MBBEFD à deux paramètres

2.2.1.1 Estimation des paramètres : Les paramètres estimés pour chacune des méthodes résumés dans le tableau suivant : Pour la méthode des moments (MME), il n'est pas

Méthodes	Paramètres estimés	
LSE	$g = 1209.240$	$b = 1.074$
MLE	$g = 1198.179$	$b = 1.017$
MME	$g = 1256.275$	$b = 0.548$

TABLE 2.9 – Paramètres estimés pour MBBEFD à deux paramètres

possible de calculer directement la perte de probabilité totale à partir de nos données. Par conséquent, nous utilisons une méthode itérative proposée par S. Bernegger.

2.2.1.2 Ajustement graphique : Dans cette partie, nous procédons à une vérification de l'ajustement entre la distribution MBBEFD et la distribution empirique en utilisant des méthodes graphiques.

- **Comparaison des fonctions empiriques et théoriques**

Dans cette analyse, nous comparons visuellement les fonctions empiriques avec les fonctions théoriques.

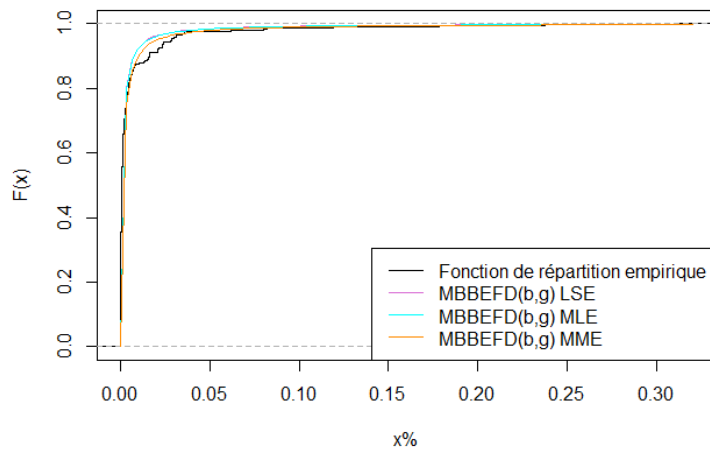


FIGURE 2.33 – Comparaison fonction de répartition empirique et fonction de répartition MBBEFD à deux paramètres

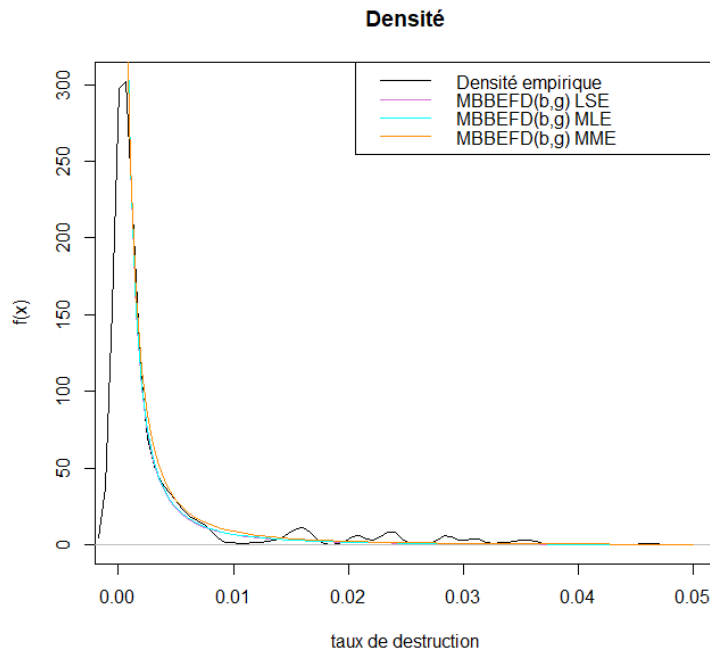


FIGURE 2.34 – Comparaison fonction de densité empirique et fonction de densité MBBEFD à deux paramètres

Une observation importante est que, pour les différentes méthodes utilisées, la distribution théorique s'ajuste plutôt bien à la distribution empirique, notamment dans le cas de la méthode des moments.

- **Comparaison des Q-Q plot**

On compare le Q-Q plot entre nos données empiriques et la distribution théorique pour les différentes méthodes.

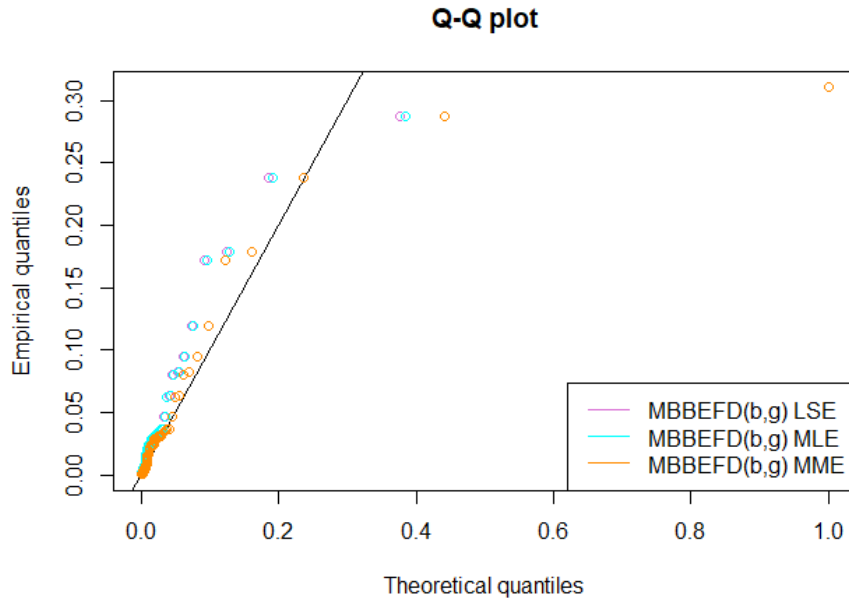


FIGURE 2.35 – Q-Qplot MBBEFD à deux paramètres

On constate que la plupart des points sont proches de la diagonale ce qui semble indiquer un bon ajustement. On remarque encore ici que la méthode des moments donne un meilleur ajustement.

Pour pouvoir conclure sans ambiguïté sur notre ajustement, nous allons utiliser les tests d'adéquation de Kolmogorov-Smirnov et d'Anderson Darling.

2.2.1.3 Tests d'adéquation :

Comme expliqué précédemment, nous allons effectuer deux tests d'adéquation afin de conclure sur l'ajustement de données. Nous rejetons l'hypothèse H_0 si la p-value obtenue est inférieure au seuil de 5%. Les résultats des tests sont indiquées dans le tableau suivant :

Méthode d'estimation	p-value Kolmogorov-Smirnov	p-value Anderson Darling	Décision
LSE	0.03997	0.003927	Rejet de H_0
MLE	0.03487	0.004272	Rejet de H_0
MME	$4,258.10^{-5}$	$6,131.10^{-6}$	Rejet de H_0

TABLE 2.10 – Résultats des tests d'adéquation

Au vu du tableau ci-dessus, La distribution MBBEFD à deux paramètres n'est pas adéquate pour modéliser la distribution du taux de destruction. Dans la suite de cette section, on teste l'ajustement pour la distribution MBBEFD à un paramètre.

2.2.2 distribution MBBEFD à un paramètre

Les paramètres estimés pour chacune des méthodes résumés dans le tableau suivant :

Méthodes	Paramètres estimés
LSE	$c = 6, 16$
MLE	$c = 6, 11$
MME	$c = 5, 61$

TABLE 2.11 – Paramètres estimés pour MBBEFD à un paramètre

2.2.2.1 Ajustement graphique :

Dans cette partie on vérifie l'ajustement entre la distribution MBBEFD et la distribution empirique par des méthodes graphiques.

- **Comparaison des fonctions de répartition**

On compare ici graphiquement la fonction de répartition empirique et les fonctions de répartition théorique.

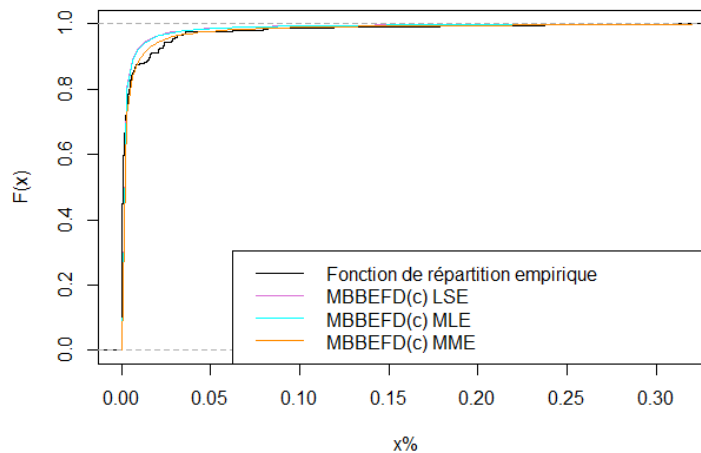


FIGURE 2.36 – Comparaison fonction de répartition empirique et fonction de répartition MBBEFD à un paramètre

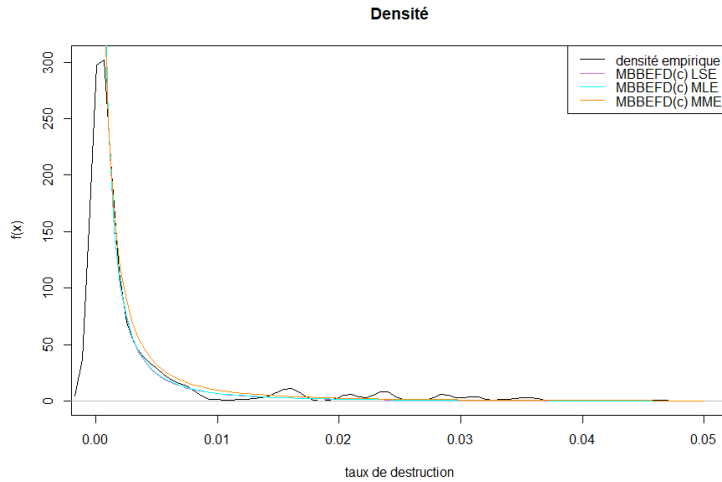


FIGURE 2.37 – Comparaison fonction de densité empirique et fonction de densité MBBEFD à un paramètre

On remarque que pour les différentes méthodes, la distribution théorique s’ajuste plutôt bien à celle empirique en particulier pour la méthode des moments.

- Comparaison des Q-Q plot

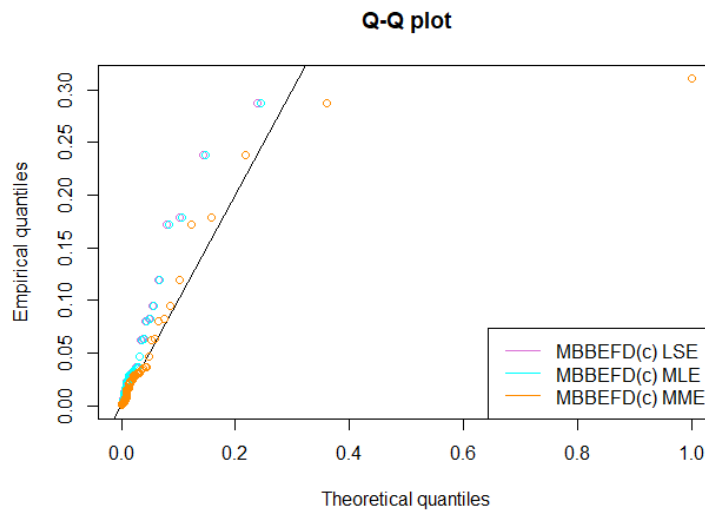


FIGURE 2.38 – Q-Qplot MBBEFD à un paramètre

On constate que la plupart des points sont proches de la diagonale ce qui semble indiquer un bon ajustement. On remarque encore ici que la méthode des moments donne un meilleur ajustement.

Pour pouvoir conclure sans ambiguïté sur notre ajustement, nous allons utiliser les tests d'adéquation de Kolmogorov-Smirnov et d'Anderson Darling.

2.2.2.2 Tests d'adéquation :

Comme expliqué précédemment, nous allons effectuer deux tests d'adéquation afin de conclure sur l'ajustement de données. Nous rejetons l'hypothèse H_0 si la p-value obtenue est inférieure au seuil de 5%. Les résultats des tests sont indiquées dans le tableau suivant :

Méthode d'estimation	p-value Kolmogorov-Smirnov	p-value Anderson Darling	Décision
LSE	0.03438	0.003126	Rejet de H_0
MLE	0.03438	0.003476	Rejet de H_0
MME	$5,61.10^{-8}$	$1,288.10^{-6}$	Rejet de H_0

TABLE 2.12 – Résultats des tests d'adéquation

Au vu du tableau ci-dessus, La distribution MBBEFD à un paramètre n'est pas adéquate pour modéliser la distribution du taux de destruction.

Ainsi, la distribution MBBEFD à deux ou un paramètre ne permet pas de modéliser notre distribution du taux de destruction. En effet, quelque soit la méthode d'estimation utilisée ou le type de test, la p-value reste inférieure à 5%. On rejette l'hypothèse nulle c'est à dire que la distribution du taux de destruction ne suit pas une distribution MBBEFD. On garde donc les résultats obtenus avec les lois classiques.

Chapitre 3

Résultats de la modélisation de l'EP Curve du portefeuille FAC Maroc incendie

Dans ce chapitre, nous présenterons notre outil de simulation stochastique qui permet d'effectuer des simulations stochastiques basées sur les paramètres de loi de fréquence et de sévérité, ainsi que sur les données spécifiques aux risques fournies par l'utilisateur. Il permet d'obtenir des résultats de pertes réalistes et de visualiser les "EP curves", qui est essentiel pour l'évaluation des risques et la prise de décisions en matière de gestion des risques. Nous ferons également une comparaison entre l'EP Curve obtenue par notre calibrage interne et celle obtenue en utilisant les hypothèses externes.

1 Présentation de l'outil de simulation

Afin de pouvoir construire l'EP Curve de notre portefeuille, nous devons réaliser plusieurs scénarios stochastiques. Pour ce faire, nous avons élaborer un outil sur Excel qui permet de générer l'EP Curve d'un portefeuille en utilisant différents inputs. Cet outil sera brièvement présenté dans les sections suivantes.

1.1 Inputs

1.1.1 Données

Le premier onglet de notre outil, intitulé "Données", est dédié à l'insertion des informations nécessaires sur notre portefeuille. Il permet à l'utilisateur d'entrer les données clés relatives à chaque contrat, telles que l'exposition et l'EPI, qui serviront de base pour les calculs ultérieurs.

0. **N.B** : Tous les montants obtenus dans ce chapitre sont en millions MAD.

LoB	N°RMS	Exposure 100%	SCR Exposure	EPI 100%	EPI SCR
NM_FCM_Fire	0000685503	1403	333	28	7,38
NM_FCM_Fire	0001302210	1100	280	2	0,45
NM_FCM_Fire	0001195467	1100	280	2	0,43
NM_FCM_Fire	0000685503	1403	365	6	1,45
NM_FCM_Fire	0001444534	1672	334	4	0,82
NM_FCM_Fire	0001518603	1000	250	2	0,51
NM_FCM_Fire	0002061963	1608	354	1	0,17
NM_FCM_Fire	0001902264	1242	435	1	0,36
NM_FCM_Fire	0002120118	1553	437	2	0,66
NM_FCM_Fire	0002135673	633	127	1	0,13
NM_FCM_Fire	0001613066	156	23	1	0,08
NM_FCM_Fire	0600002240	5000	26	179	0,34
NM_FCM_Fire	0001613376	668	200	1	0,33
NM_FCM_Fire	0002374554	1518	228	1	0,13
NM_FCM_Fire	0002383331	700	280	1	0,56
NM_FCM_Fire	0001663113	230	116	1	0,32
NM_FCM_Fire	000153831	743	37	2	0,10
NM_FCM_Fire	0001813175	142	71	0	0,14
NM_FCM_Fire	0001906305	173	3	0	0,02
NM_FCM_Fire	0001608425	146	15	0	0,02
NM_FCM_Fire	0001520883	378	235	3	0,72
NM_FCM_Fire	0001615705	1328	338	1	0,32
NM_FCM_Fire	0001722266	638	36	1	0,13
NM_FCM_Fire	0001618162	541	108	1	0,12
NM_FCM_Fire	0002374827	415	42	1	0,06
NM_FCM_Fire	0001431521	5571	175	7	0,23
NM_FCM_Fire	0002267538	12254	43	27	0,09
NM_FCM_Fire	0001900717	622	75	1	0,07
NM_FCM_Fire	0002103920	437	218	1	0,48
NM_FCM_Fire	0001788878	381	76	0	0,05
NM_FCM_Fire	0002150785	2621	262	0	0,02
NM_FCM_Fire	0001726361	774	74	1	0,10
NM_FCM_Fire	0001554826	6263	313	32	1,60
NM_FCM_Fire	0001937723	6688	334	55	2,73
NM_FCM_Fire	0002138865	5721	286	32	1,62
NM_FCM_Fire	0001717534	1556	311	1	0,23
NM_FCM_Fire	0001988077	2000	400	8	1,63
NM_FCM_Fire	0002375464	301	30	0	0,03
NM_FCM_Fire	0002375737	268	27	0	0,03
NM_FCM_Fire	0002375828	263	26	0	0,02
NM_FCM_Fire	0000838838	461	115	2	0,43

FIGURE 3.1 – Onglet "Données"

1.1.2 Bandes

Une fois que l'onglet "Données" est rempli avec les données de portefeuille, notre outil construit le profil de risque du portefeuille. Cette opération s'effectue dans l'onglet "Bandes". Les bandes créées doivent être cohérentes avec la structure du programme de rétrocession.

Le profil de risque contient les colonnes suivantes :

- La colonne "SCR Exposure" représente l'exposition de la SCR aux risques, c'est-à-dire la somme assurée totale pour chaque bande du profil. Cette valeur est calculée en agrégeant les données de l'exposition saisies par l'utilisateur.
- La colonne "Nombre de risques" indique le nombre de risques pour chaque bande du profil.
- La colonne "Average liability" représente l'engagement maximal moyen de l'organisme pour chaque bande du profil. Cette valeur est calculée en utilisant les données sur les montants assurés pour chaque bande de risque et en les divisant par le nombre de risques correspondant.
- Enfin, la colonne "SCR EPI" est calculée comme la somme des SCR EPI (les primes) pour chaque bande du profil.



	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	 Capital Protection Retrocession		Domestic Non Marine Risk profile 2021 - Facultative Fire busines All figures are in Millions MAD						
2									
3									
4									
5									
6									
7									
8									
9	LoB	N' band	N' Layer	band min (>)	band max (=)	Σ SCR Exposure	Number of Risk	Average liability	Σ SCREPI
10	NM_FCM_Fire	1	Ret	0	15	140	17	8	12
11	NM_FCM_Fire	2	Ret	15	25	432	22	20	0,8
12	NM_FCM_Fire	3	L1	25	50	1261	35	36	5,3
13	NM_FCM_Fire	4	L1	50	75	1506	22	68	10,0
14	NM_FCM_Fire	5	L2	75	100	1686	19	89	2,9
15	NM_FCM_Fire	6	L2	100	125	1276	11	116	1,6
16	NM_FCM_Fire	7	L2	125	150	1916	14	137	2,7
17	NM_FCM_Fire	8	L3	150	200	4 178	24	174	4,4
18	NM_FCM_Fire	9	L3	200	250	2 654	12	221	4,6
19	NM_FCM_Fire	10	L3	250	300	4 209	15	281	6,8
20	NM_FCM_Fire	11	L3	300	350	4 285	13	330	15,1
21	NM_FCM_Fire	12	L4	350	450	8 533	22	391	20,3
22	NM_FCM_Fire	13	L4	450	550	1 368	3	456	1,4
23	NM_FCM_Fire	14	L4	550	650	2 372	4	593	1,6
24									
25									
26									

FIGURE 3.2 – Onglet "Bandes"

1.1.3 Hypothèses Internes



Capital Protection
Retrocession

Choix des lois de fréquence

LoB	Loi	Binomiale négative		Poisson
		n	p	λ
NM_FCM_Fire	Binomiale Négative	4	0,0834	

Choix des lois de sévérité

LoB	Loi	Pareto		Courbe Swiss Re
		α	θ	c
NM_FCM_Fire	Pareto	0,04	0,72	

Paramétrage

Nombre simul	10 000
Nb Normatif	248

FIGURE 3.3 – Hypothèses Internes

L'utilisateur est chargé de remplir cet onglet en fonction des hypothèses internes sur les lois de fréquence et de sévérité basées sur une modélisation interne du portefeuille de la SCR.

Dans la section sur les lois de fréquence, l'utilisateur doit spécifier la distribution probabiliste qui représente le mieux la fréquence avec les paramètres pertinents de la loi choisie. De même, dans la section sur les lois de sévérité, l'utilisateur spécifie la distribution de la sévérité avec les paramètres de la loi sélectionnée.

Dans le cas spécifique des FAC Maroc Incendie que nous avons déjà modélisés, nous avons identifié que la distribution de la fréquence des sinistres suit une loi binomiale négative. Quant à la sévérité des sinistres, nous avons déterminé que la loi de Pareto fournit un ajustement approprié.

En plus des hypothèses sur les lois de fréquence et de sévérité, l'utilisateur doit également entrer le nombre de simulations souhaité. Ce paramètre détermine le nombre de fois que l'outil effectuera le processus de simulation stochastique pour générer des valeurs aléatoires de fréquence et de sévérité, et calculer les pertes correspondantes. Pour notre étude nous avons réalisé 10000 simulations.

En utilisant ces informations, l'outil peut générer des simulations stochastiques en accord avec les hypothèses de l'utilisateur, fournissant ainsi une estimation globale des pertes pour différents scénarios.

1.1.4 Hypothèses Externes

Dans cet onglet, nous saisissons les hypothèses externes utilisées actuellement par la SCR. Parmi ces hypothèses, nous incluons le Loss Ratio utilisé pour calculer le paramètre de la loi de Poisson pour chaque bande de risque. Le loss ratio des FAC Maroc incendie est de 21,18%. De plus, nous saisissons le paramètre "c" de la courbe Swiss Ré, utilisée pour modéliser la sévérité des sinistres. Pour les FAC Maroc incendie, la valeur du paramètre c fixé par les experts est 4. On utilise donc la courbe Swiss Re 4 qui est généralement utilisée pour les risques industriels et les grands commerces.

En utilisant ces hypothèses, notre outil générera des simulations basées sur la loi de Poisson pour la fréquence des sinistres et la courbe de Swiss Ré pour la sévérité.

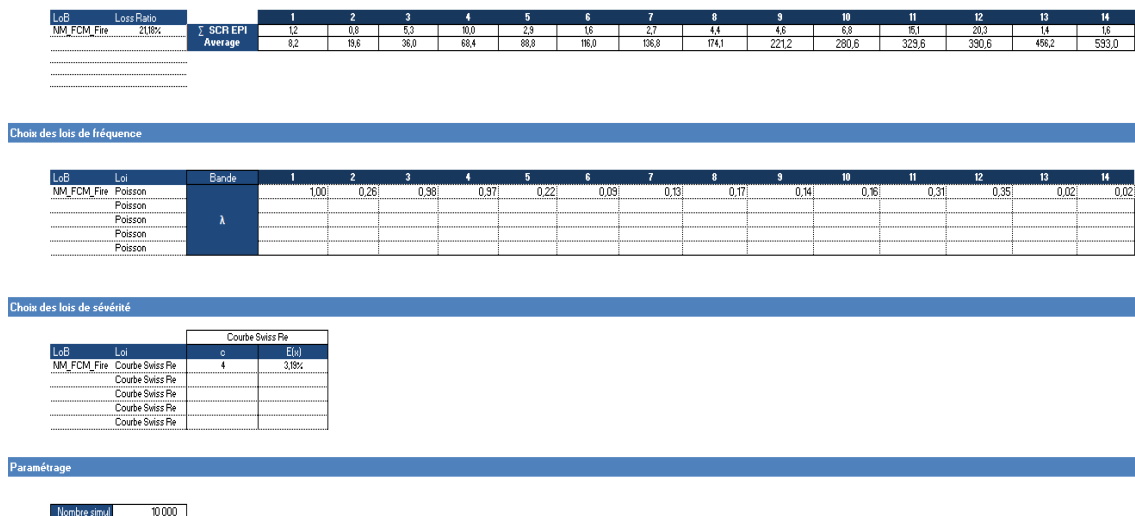


FIGURE 3.4 – Hypothèses Externes

1.2 Calculs

1.2.1 Hypothèses internes

Dans le cas des hypothèses internes, l'outil génère d'abord des valeurs de fréquence pour les différents scénarios en utilisant la loi binomiale négative dont les paramètres ont été déjà saisis comme inputs.

Afin de tenir compte du nombre de risques contenus dans chaque bande du profil, on génère d'abord un nombre aléatoire suivant la loi binomiale négative qu'on divise ensuite par le nombre normatif utilisé dans le retraitement du nombre de sinistres (le maximum de contrats annuels). Le résultat est ensuite multiplié par le nombre de risques contenus dans la bande identifiée :

$$N^{simulés} = \frac{N^{génééré}}{N^{normatif}} * N^{risques \text{ dans la bande}}$$

Pour chaque nombre de sinistre simulé, l'outil calcule la sinistralité totale en utilisant le modèle collectif et la loi de Pareto pour la sévérité, et ce pour chaque bande du profil.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R
1																		
2																		
3																		
4																		
5																		
6																		
7																		
8																		
9																		
10																		
11																		
12																		
13																		
14																		
15																		
16																		
17																		
18																		
19																		
20																		
21																		
22																		
23																		
24																		
25																		
26																		
27																		
28																		
29																		
30																		
31																		
32																		
33																		
34																		
35																		
36																		

FIGURE 3.5 – Simulations (cas des hypothèses internes)

1.2.2 Hypothèses externes

Dans le cas des hypothèses externes , notre outil utilise la loi de Poisson pour générer des valeurs du nombre de sinistres pour les différentes scenarios. En utilisant ces valeurs de fréquence, il calcule ensuite la sinistralité totale pour chaque scénario simulé. Concernant la sévérité, l'outil utilise les courbes de Swiss Ré.

En combinant les valeurs de fréquence et de sévérité ainsi calculées, l'outil est en mesure de simuler les pertes totales pour chaque scénario et de fournir une estimation réaliste des pertes potentielles dans le cadre des hypothèses externes.

	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	
2	LeB NM,FCM,Fire																
3																	
4	Nombres de sinistres																
5	ID	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	Total
6	1	1	0	1	2	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	6
7	2	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	3
8	3	1	1	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	4
9	4	0	0	3	1	0	0	0	1	0	0	2	0	0	0	0	7
10	5	3	0	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	6
11	6	2	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	4
12	7	0	0	2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	4
13	8	0	0	2	0	0	0	1	1	0	0	1	0	0	0	0	5
14	9	1	0	1	5	1	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	11
15	10	2	0	3	1	2	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	10
16	11	0	0	2	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	4
17	12	0	0	1	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3
18	13	1	0	0	0	2	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	5
19	14	0	1	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	3
20	15	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	2	0	0	0	0	4
21	16	2	0	0	2	0	0	0	1	0	0	0	2	0	0	0	7
22	17	1	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	4
23	18	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
24	19	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	2	0	0	0	6
25	20	2	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	4
26	21	0	0	2	2	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	6
27	22	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	2
28	23	1	0	2	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	6
29	24	1	0	4	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	6
30	25	0	0	1	2	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	5
31	26	2	2	1	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	7

	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	
2	LeB																
3	Moyenne SA																
4	NB Risques																
5	ID	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	Total
6	1	0.0	0.0	0.0	2.0	0.7	0.0	1.2	0.0	0.0	0.0	2.0	0.3	0.0	0.0	0.0	6.8
7	2	0.2	0.0	0.0	0.3	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	2.0
8	3	0.0	0.2	0.0	0.0	0.0	0.0	0.3	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.1	0.0	0.6
9	4	0.0	0.0	0.0	0.4	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.4
10	5	0.1	0.0	3.2	0.5	0.0	0.3	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	2.3	0.0	0.0	7.3
11	6	0.0	0.0	0.0	7.6	2.0	0.0	0.0	0.3	0.0	0.0	0.0	0.0	0.7	0.0	0.0	10.6
12	7	0.1	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	3.1	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	3.1
13	8	0.0	0.0	0.0	0.0	0.5	0.0	0.0	0.0	0.0	0.2	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.9
14	9	0.2	0.0	2.0	0.4	0.0	0.0	1.3	0.0	0.0	0.2	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	5.5
15	10	0.4	0.0	2.5	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	5.6	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	9.4
16	11	0.0	3.4	0.2	0.0	0.0	0.0	0.0	6.5	0.0	0.0	2.4	0.0	0.0	0.0	0.0	12.2
17	12	1.5	0.0	4.1	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	5.8
18	13	0.4	0.7	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	1.1
19	14	0.0	0.0	2.1	0.1	0.0	0.0	0.2	0.0	1.2	1.6	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	6.0
20	15	0.0	0.1	0.0	6.9	0.0	0.0	0.4	0.0	0.0	7.2	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	20.3
21	16	0.0	0.0	0.0	3.4	0.0	1.6	0.0	0.0	0.0	0.0	4.3	0.0	0.0	0.0	0.0	9.3
22	17	0.2	0.2	0.0	0.0	0.0	0.0	5.1	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	390.0	0.0	0.0	396.1
23	18	1.0	0.0	0.0	0.4	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	2.3	3.7	0.0	0.0	0.0	0.0	11.3
24	19	0.0	0.1	2.2	0.1	0.0	0.6	0.0	1.8	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	4.9
25	20	1.1	0.0	0.0	1.7	0.0	0.0	2.3	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	1.8	0.0	0.0	7.4
26	21	0.0	0.0	1.6	1.4	0.0	1.6	0.0	0.4	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	5.2
27	22	0.4	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	1.3	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	2.3
28	23	0.1	0.0	0.1	0.0	0.0	0.0	0.0	0.4	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.6
29	24	0.0	0.0	0.2	1.4	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	2.0	0.0	0.0	4.6
30	25	0.0	0.0	1.5	16.4	32.3	0.0	0.0	0.1	0.0	0.0	0.0	0.0	4.1	0.0	0.0	127.0
31	26	0.2	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.2
32	27	0.0	0.0	0.0	70.7	0.0	0.0	0.6	0.0	0.0	0.0	5.0	0.0	0.0	0.0	0.0	74.4

(a)

(b)

FIGURE 3.6 – Simulations (cas des hypothèses externes)

1.2.3 EP Curve

Après avoir réalisés le nombre de simulations nécessaires, on peut passer à la construction de l'EP Curve.Ce travail sera réalisé dans l'onglet "EP Curve".

Tout d'abord l'utilisateur sélectionne l'approche qu'il veut utiliser (interne ou externe). Ensuite il doit utiliser le bouton "Classer les pertes" pour classer les pertes totales dans l'ordre. Enfin, le bouton "Générer EP Curve "permet d'avoir le tracé de la courbe de perte ainsi qu'un tableau résumant les pertes potentielles associés à leur période de retour.

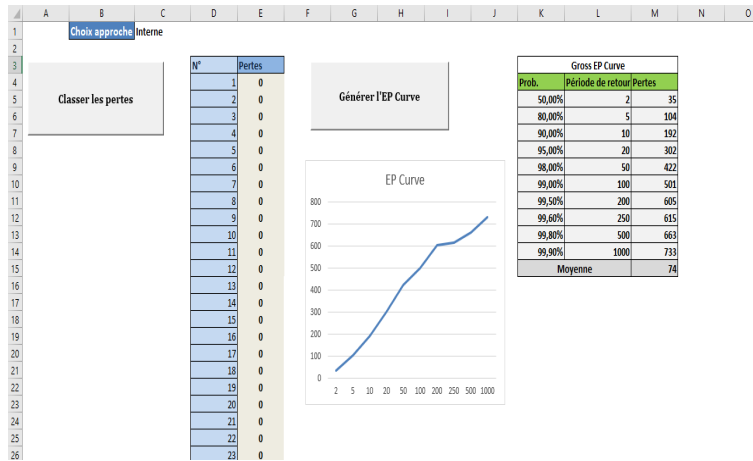
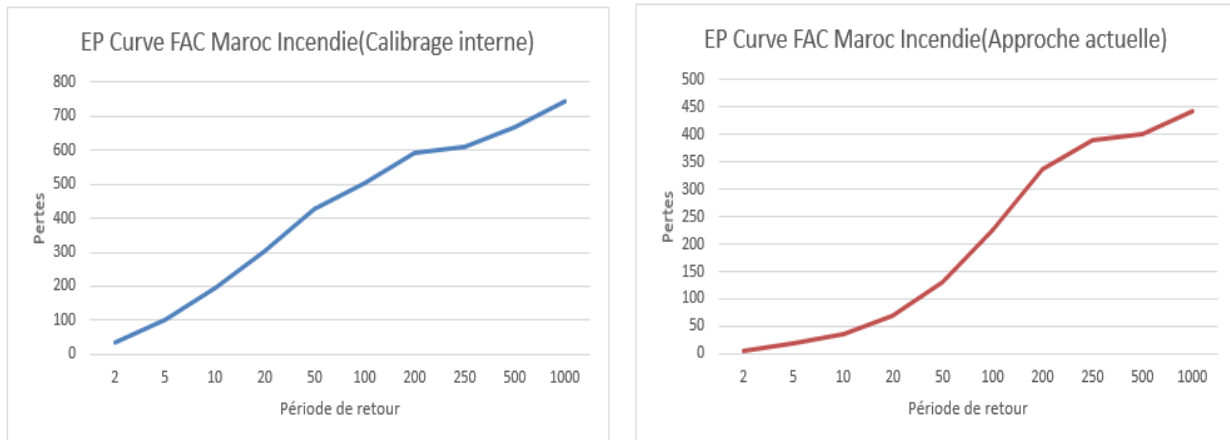


FIGURE 3.7 – Onglet "EP Curve"

2 Résultats obtenus



(a) Calibrage interne

(b) Calibrage Externe

FIGURE 3.8 – EP Curve FAC Maroc Incendie (Calibrage interne et Externe)

Pour les deux méthodes de calibrage, les pertes estimées augmentent de manière générale à mesure que la période de retour augmente. Cela s'explique par le fait que plus la période de retour est longue, plus les événements extrêmes et les scénarios de pertes importants sont pris en compte. Par conséquent, les pertes estimées augmentent pour refléter cette probabilité accrue d'événements catastrophiques.

Gross EP Curve			
Prob.	Période de retour	Externe	Interne
50,00%	2	5	34
80,00%	5	18	102
90,00%	10	36	196
95,00%	20	69	302
98,00%	50	130	426
99,00%	100	226	504
99,50%	200	338	594
99,60%	250	391	611
99,80%	500	402	668
99,90%	1000	442	744
Moyenne		17	74

FIGURE 3.9 – Comparaisons des EP Curves(Tableau)

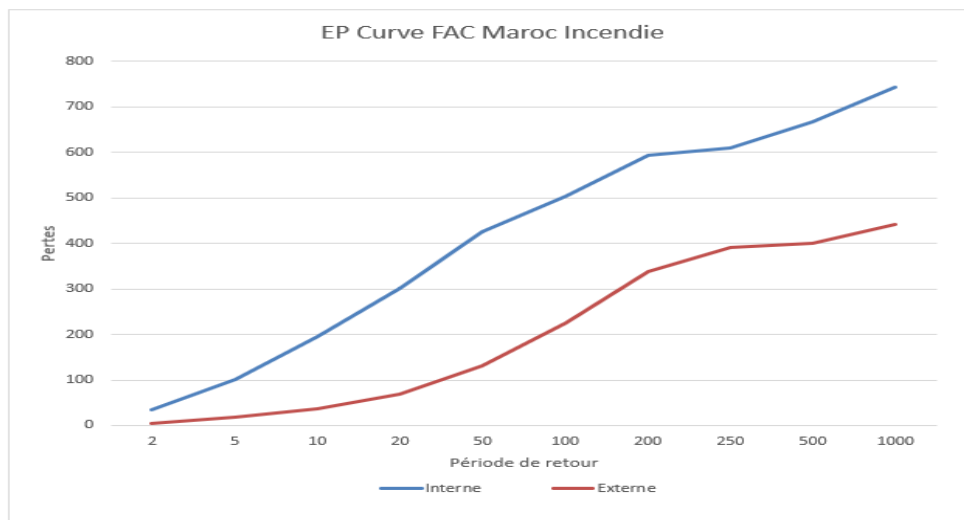


FIGURE 3.10 – Comparaisons des EP Curves (Courbe)

L'analyse comparative des « EP curves » entre le calibrage interne et le calibrage externe révèle des résultats significatifs en ce qui concerne les pertes estimées pour différentes périodes de retour. Dans l'approche du calibrage interne, les pertes estimées sont généralement supérieures à celles obtenues par le calibrage externe utilisé actuellement par la SCR, quel que soit le seuil de période de retour considéré.

Lorsque l'on examine les « EP curves » pour les deux méthodes de calibrage, il est clair que l'approche interne conduit à des pertes estimées plus élevées. Cela peut s'expliquer par le fait que notre calibrage interne tient compte des spécificités et des caractéristiques propres au portefeuille de la SCR, les hypothèses et les modèles utilisés sont basés sur des données

internes qui reflètent plus fidèlement la réalité de l'activité de la SCR.

Il semble que l'approche actuelle sous-estime considérablement la fréquence des sinistres et surestime la sévérité pour notre portefeuille FAC Maroc Incendie par rapport à notre calibrage. En utilisant l'approche actuelle, la fréquence moyenne des sinistres est estimée à 2%, alors que notre calibrage indique une fréquence moyenne de 17,71%, ce qui correspond à la fréquence historique moyenne du portefeuille FAC Maroc Incendie de la SCR.

La loi de Poisson, qui est souvent utilisée pour modéliser les événements rares, ne semble pas adaptée pour les affaires facultatives marocaines incendie de la SCR. Cette loi est plus appropriée pour les événements qui se produisent de manière sporadique. Cependant, dans notre cas, nous constatons que les incendies au Maroc sont plutôt fréquents, avec une moyenne annuelle d'environ 40 cas. Par conséquent, l'utilisation de la loi de Poisson peut conduire à une sous-estimation de la fréquence réelle des sinistres.

En ce qui concerne la sévérité des sinistres, le taux moyen de destruction de la courbe Swiss Re 4 est de 3,18%, tandis que le taux moyen de destruction dans notre calibrage est de 0,8%, ce qui se rapproche du taux moyen de destruction empirique de notre portefeuille, soit 0,7%. Cette différence peut s'expliquer par plusieurs facteurs.

Tout d'abord, il est important de noter que la courbe Swiss Re 4 n'est peut-être pas adaptée à la sinistralité des incendies au Maroc, car elle est basée sur des données anciennes et européennes. Les caractéristiques des risques peuvent varier d'une région à l'autre en fonction de nombreux facteurs, tels que le climat, les normes de construction, et les pratiques de prévention des incendies spécifiques à chaque pays. Par conséquent, il est possible que la courbe Swiss Re 4 ne reflète pas fidèlement la situation des incendies au Maroc.

De plus, dans le cas de notre portefeuille, il est important de noter que la SCR ne couvre qu'une partie du risque total. La cédante conserve une partie du risque, et en plus, le risque cédé est réassuré par plusieurs réassureurs, dont la SCR. Cette structure de réassurance contribue également à réduire la sévérité des sinistres du portefeuille FAC Maroc Incendie.

En résumé, la divergence entre la courbe Swiss Re 4 et les taux de destruction empiriques de notre portefeuille peut s'expliquer par l'inadéquation de la courbe aux caractéristiques spécifiques des incendies au Maroc, ainsi que par la structure de réassurance qui limite la part du risque couverte par la SCR.

Conclusion générale

En conclusion, notre mémoire a porté sur le calibrage de la courbe de perte avant rétrocession pour la Société Centrale de Réassurance (SCR) dans le but de tester l'adéquation de la rétrocession de ses risques. Nous avons souligné les limites de l'approche actuelle basée sur le modèle collectif et les hypothèses externes, qui peuvent ne pas refléter la réalité du portefeuille de la SCR et entraîner des risques de modélisation importants.

Pour pallier ces limites, nous avons proposé une approche de calibrage interne qui s'est concentrée sur les facultatives Maroc Incendie. En utilisant une base de données biaisée et un échantillon représentatif, nous avons développé des modèles de fréquence et de sévérité des sinistres, en incluant les distributions classiques ainsi que les distributions MBBEFD. Nous avons également présenté un outil de simulation pour construire la courbe de perte avant rétrocession.

Notre mémoire a mis en évidence les limitations de l'approche actuelle utilisée par la SCR pour la modélisation de la courbe de perte avant rétrocession. Nous avons constaté que cette approche sous-estime la fréquence des sinistres et surestime la sévérité, ce qui peut entraîner des distorsions dans l'évaluation des risques et des résultats financiers.

Les résultats obtenus grâce à notre calibrage interne permettront à la SCR de mieux évaluer l'adéquation de sa structure de rétrocession en termes de mesure du risque et de rentabilité. En utilisant des modèles plus adaptés à son portefeuille spécifique, la SCR pourra affiner sa gestion des risques et prendre des décisions éclairées concernant la rétrocession de ses activités.

Cependant, il est important de noter que notre mémoire présente quelques limitations, notamment en ce qui concerne la disponibilité des données pour les risques internationaux, les traités et la modélisation des risques CAT. Aussi, l'hypothèse d'indépendance entre le nombre de sinistres et leur sévérité n'a pas été discutée. De plus, les résultats obtenus reposent sur des données biaisées et un échantillon limité, ce qui nécessite une validation plus approfondie pour une utilisation pratique.

Il convient de souligner que notre mémoire n'a pas inclus la définition d'intervalles de confiance pour les résultats obtenus, ce qui constitue une lacune importante dans notre approche. Cependant, nous reconnaissons l'importance de cette considération et nous encourageons des études ultérieures à explorer la possibilité d'intégrer des intervalles de confiance dans l'évaluation de la courbe de perte. Cela permettrait d'obtenir une mesure plus robuste du risque et d'apporter une meilleure appréciation de l'incertitude associée aux résultats.

Malgré ces limitations, notre mémoire a ouvert la voie à une approche plus personnalisée et adaptée au portefeuille de la SCR pour la modélisation de la courbe de perte. Il offre des pistes pour améliorer la précision de la mesure du risque, la rentabilité et la gestion de la

rétrocession. Ces travaux peuvent servir de base pour des recherches futures visant à affiner davantage les modèles de sinistralité et à améliorer la compréhension des risques dans le domaine de la réassurance.

En conclusion, notre mémoire a apporté des contributions significatives à la SCR en termes de modélisation de la courbe de perte avant rétrocession. Il a ouvert de nouvelles perspectives pour une gestion plus précise et efficace des risques, renforçant ainsi la position concurrentielle de la SCR sur le marché de la réassurance.

Bibliographie

- [1] Rapport annuel de la Société Centrale de Réassurance 2021
- [2] Rapport de solvabilité de la Société Centrale de Réassurance 2021
- [3] AM BEST Annual Review Meeting, 2022
- [4] Mathieu POULIN, Analyse des solutions actuarielles en tarification des traités de réassurance non-proportionnels Non-Vie, Mémoire d'Actuariat - Promotion 2008
- [5] Laetitia LALOUM, Approche hybride au calcul de la provision IBNR : méthode de fréquence / coût pour l'estimation des sinistres tardifs, 11 avril 2021
- [6] Vincent GOURMELON, Modélisation des sinistres graves en assurance automobile responsabilité civile, 15 novembre 2014
- [7] Julien SAUNIER, Courbes d'exposition : Approximation par les distributions MB-BEFD et Pareto via maximum de vraisemblance et intervalles de confiance. Analyse en fonction du capital assuré
- [8] El Mahdi BELHOUI, Tarification des traités en excédent de sinistres de la branche Responsabilité Civile : Une approche entre expérience et exposition, 2013
- [9] Olga A. VASECHKO, Michel GRUN-RÉHOMME, Nouredine BENLAGHA, Modélisation de la fréquence des sinistres en assurance automobile
- [10] Stefan BERNEGGER, The Swiss Re Exposure Curves and MBBEFD Distribution Class, 1997
- [11] Pierre-Olivier GOFFARD, Modélisation Charge Sinistre M2 Actuariat, Chapitre III : Modèle Collectif, Université de Lyon 1 ISFA, 2019
- [12] Frédéric PLANCHET, ASSURANCE NON VIE : Le modèle collectif, ISFA, 2003
- [13] Jan HREVUS, Lubos MAREK, Exposure Modelling in property reinsurance, Prague Economic Papers, 2019, Pages 129–154

[14] Louis-Stéphane Lobe LOBAS, Tempête : Etude du taux de destruction sur la branche MRH, 2018

[15] Emilie DEPREY et Alexandre GODZINSKI, Problématique de seuil dans la modélisation de la sinistralité en Réassurance Non Vie, Mémoire d'Actuariat - Promotion 2007

[16] Yapi Arnaud CARMEL, Analyse de la sinistralité d'une base de données à l'aide de la théorie des valeurs extrêmes et d'un outil de simulation, 2021

[17] Charles SUQUET, Simulation, Université des Sciences et Technologies de Lille U.F.R. de Mathématiques Pures et Appliquées, 2007-2008

Annexe

Compléments sur la théorie des valeurs extrêmes

Dans cette annexe nous donnerons des compléments sur la théorie des valeurs extrêmes utilisée dans la Partie II.

La théorie des valeurs extrêmes est un champ de recherche en mathématiques qui s'intéresse aux comportements des valeurs extrêmes des distributions (ou queue de distribution). L'objectif est d'identifier la loi de distribution des sinistres X_1, \dots, X_n au-dessus d'un certain seuil.

Le théorème de Fisher et Tippett est un résultat général en théorie des valeurs extrêmes relatif à la distribution asymptotique des statistiques d'ordre extrêmes :

Soient $(X_i)_{i=1, \dots, n}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de fonction de répartition F et M_n le maximum de (X_1, \dots, X_n) . Il existe une suite a_n réelle, une suite b_n positive et une fonction de répartition H non dégénérée telles que :

$$\frac{M_n - a_n}{b_n} \xrightarrow{\text{loi}} H$$

avec H du même type que la loi de Fréchet, de Weibull ou de Gumbel. Le théorème de Pickands-Balkema-de Haan nous indique quelle loi les sinistres doivent suivre au-dessus d'un certain seuil u . Ce théorème énonce que si $F(x)$ appartient au max-domaine d'attraction d'une des trois lois citées précédemment (Fréchet, Weibull ou Gumbel), alors il existe une fonction positive $\sigma(u)$ et un réel ξ tels que :

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \sup_{0 < y < x_F} (|F_u(y) - G_{\xi, \sigma(u)}(y)|) = 0$$

où x_F est le point terminal de F et G la fonction de répartition d'une loi de Pareto généralisée (GPD) définie par :

$$G_{\xi, \sigma(u)}(y) = \begin{cases} 1 - (1 + \xi \frac{y}{\sigma(u)})^{-1/\xi} & \text{si } \xi \neq 0 \\ 1 - \exp(-\frac{y}{\sigma(u)}) & \text{si } \xi = 0 \end{cases}$$