



المندوبية السامية للتخطيط
HAUT-COMMISSARIAT AU PLAN

ROYAUME DU MAROC
*_*_*_*_*
HAUT COMMISSARIAT AU PLAN
*_*_*_*_*_*_*_*_*_*
INSTITUT NATIONAL
DE STATISTIQUE ET D'ECONOMIE APPLIQUEE



INSEA

Projet de Fin d'Etudes

Montage et tarification d'un Cat bond contre le risque de tremblement de terre au Maroc

Préparé par : *M. Mohamed Yacine RIDA*

Sous la direction de : *M. Pierre DEVOLDER (INSEA)*
M. Abderrahim OULIDI (FSEC)

Soutenu publiquement comme exigence partielle en vue de l'obtention du

Diplôme d'Ingénieur d'Etat

Filière : Actuariat-Finance

Devant le jury composé de :

- *M. Khalil SAID (INSEA)*
- *M. Pierre DEVOLDER (INSEA)*
- *M. Abderrahim OULIDI (FSEC)*

Dédicace

“

*À ma mère et mon père qui m'ont accompagné et soutenu
tout au long de mon parcours, je leur dédie ce modeste
travail pour leurs prières tout au long de ma construction
et pour leurs conseils qui continuent et continueront à me
guider,*

*À mes chers frères et soeurs qui m'ont toujours soutenu et
encouragé, Je vous souhaite le succès et le bonheur dans
votre vie,*

À tous les membres de ma grande famille,

À tous ceux qui me sont chers, à vous tous

À tous mes chers amis, Merci.

”

- Mohamed Yacine

Remerciements

Tout d'abord, je remercie Allah le tout puissant de m'avoir donné le courage et la patience nécessaires à mener ce travail à son terme.

Je tiens à remercier tout particulièrement mon encadrant **M. OULIDI Abderrahim**, pour son encadrement et l'aide compétente qu'elle m'a apportée, pour sa patience et son encouragement. Son œil critique m'a été très précieux pour structurer le travail et pour améliorer la qualité des différentes sections.

Je tiens à remercier également mon promoteur **M. DEVOLDER Pierre** pour son aide immense, la qualité de son suivi ainsi que pour tous les conseils et les informations qu'il m'a prodigués avec un degré de patience et de professionnalisme sans égal.

Je tiens aussi à adresser mes plus sincères remerciements à **M. CHAFFAI Abderrahim**, directeur du Fonds de Solidarité Contre les Événements Catastrophiques pour m'offrir l'opportunité d'intégrer son équipe et pour son soutien.

Je remercie également **M. ALAOUI Abdelhamid**, cadre géologue chez FSEC pour son aide précieuse afin d'avoir rendu mon stage une expérience très enrichissante.

Que **M. SAID Khalil** membre de jury trouve, ici, l'expression de mes sincères remerciements pour l'honneur qu'ils me fait en prenant le temps de lire et d'évaluer ce travail.

Je souhaite aussi remercier l'équipe pédagogique et administrative de l'INSEA pour leurs efforts dans le but de nous offrir une excellente formation.

Pour finir, je souhaite remercier toute personne ayant contribué de près ou de loin à la réalisation de ce travail. Merci à tous et à toutes.

Résumé

L'étude des modèles de catastrophes naturelles joue un rôle important dans la prévention et l'atténuation des catastrophes. Après l'occurrence d'une catastrophe naturelle, la reconstruction peut être financée par des obligations catastrophes ou par la réassurance. Ce mémoire se focalise sur le montage et la tarification d'une Cat bond paramétrique pour les tremblements de terre au Maroc. Les principaux objectifs sont d'analyser les données historiques des tremblements de terre et ensuite produire un modèle fiable pour la dynamique du risque sismique, et de discuter brièvement la théorie pertinente des marchés incomplets et fixer le prix des obligations pour catastrophes sismiques, en combinant le modèle trouvé pour le risque sismique et un modèle approprié pour la dynamique des taux d'intérêt dans un cadre de marché incomplet. Nous utilisons le modèle ainsi estimé et des courbes de taux courts obtenues par un modèle de Vasiček pour tarifier un cat bond paramétrique par des formules proposées par Zimbidis, Frangos et Pantelous (2007). Essentiellement, Essentiellement, la modélisation et la tarification des Cat bonds sont faites par des experts d'AIR Worlwide et de RMS qui sont trop coûteux, mais nous avons essayé d'approcher ce prix à l'aide de simulations du risque et du taux d'intérêt. Ce modèle permet de comprendre la tarification des obligations catastrophes émises sur le marché, aide aussi à comprendre et à expliquer les sensibilités de prix du cat bond paramétrique aux différents paramètres.

Mots clés : Obligation catastrophes, Titres liés à l'assurance, Titrisation, Théorie des Valeurs Extrêmes, Tremblement de terre

Abstract

The study of natural disaster patterns plays an important role in disaster prevention and mitigation. After the occurrence of a natural disaster, reconstruction can be financed by catastrophe bonds or reinsurance. This paper focuses on the design and pricing of a parametric Cat Bond for earthquakes in Morocco. The main objectives are to analyze historical earthquake data and then produce a reliable model for the dynamics of seismic risk, and to briefly discuss the relevant theory of incomplete markets and pricing of seismic catastrophe bonds, by combining the model found for seismic risk with an appropriate model for interest rate dynamics in an incomplete market setting. We use the estimated model and short rate curves obtained by a Vasiček model to price a parametric cat bond by formulas proposed by Zimbidis, Frangos and Pantelous (2007). Essentially, Cat bond modeling and pricing is done by AIR Worldwide and RMS experts which are too expensive, but we tried to approximate this pricing using risk and interest rate simulations. This model helps to understand the pricing of catastrophe bonds issued in the market, also helps to understand and explain the price sensitivities of the parametric cat bond to different parameters.

Keywords : Catastrophe bonds, Insurance-Linked Securities, Securitization, Extreme Value Theory, Earthquake

Table des matières

Dédicace	I
Remerciements	II
Résumé	III
Abstract	IV
Introduction générale	1
1 Contexte générale d'étude	3
1.1 FSEC	4
1.2 Titrisation du risque catastrophique	5
1.2.1 Apparition de la titrisation et ses principes	5
1.2.2 La titrisation en assurance et apparition des Cat Bonds	6
2 Les Cat Bonds	8
2.1 Qu'est ce qu'un Cat Bond et comment se structure?	9
2.2 Processus d'émission d'un Cat Bond	10
2.3 Types de catastrophe bonds	12
2.4 Principaux avantages des obligations catastrophes	13
2.5 Marché des Cat bonds	16
2.5.1 Aspects historique	16
2.5.2 Les acteurs du marché	17
2.5.3 Le marché après COVID-19	19
2.6 Les agences de notation	21
3 Modélisation du risque sismique	22
3.1 Tremblement de terre : Phénomène en question	23
3.1.1 Etude scientifique du phénomène	23
3.1.2 Aperçu historique sur la sismologie au Maroc	24
3.1.3 Activité sismique du Maroc	25
3.2 Programmes de la banque mondiale (exemple : MultiCat)	26
4 Evaluation d'un cat bond : partie théorique	28
4.1 Hypothèses générales	29
4.2 Modélisation du risque de tremblement de terre	30
4.2.1 Le couple (Magnitude, Profondeur) comme paramètre	30
4.2.2 Théorie des Valeurs Extrêmes (TVE)	31

4.2.3	Ajustement par loi	33
4.2.4	Estimation des paramètres	34
4.3	Simulation de la courbe des taux	35
4.3.1	Modèle de Vasíček	35
4.3.2	Discrétisation selon le schéma d'Euler	36
4.3.3	Estimation des paramètres du modèle	36
4.4	Tarification du Cat Bond	37
4.4.1	Méthodes de tarification : Lane et Wang	37
4.4.2	Modèle à une période	38
4.4.3	Modèle multi-périodes	39
4.5	Exemple de Cat bond : The Morgan Stanley Bond	41
5	Evaluation d'un cat bond : implémentation numérique	44
5.1	Analyse de données pour les tremblements de terre au Maroc	45
5.1.1	La magnitude	46
5.1.2	La profondeur	48
5.2	Modélisation du taux d'intérêt : modèle de Vasíček	51
5.3	Calcul du prix du Cat bond	54
5.3.1	Exemple numérique pour le modèle à une période	54
5.3.2	Simulation et fixation des prix pour le modèle multi-périodes	55
	Conclusion générale	58
	Annexes	59
A	Les principaux aspects de la loi 110-14	60
B	Schéma d'indemnisation	63
C	Distributions testées	65
D	Loi de Weibull	66
	Bibliographie	67

Table des figures

1.1	Processus de déroulement des différentes étapes pour le FSEC	5
1.2	Mécanisme de titrisation du risque des Cat Bonds	6
2.1	Exemple de programme d'assurance du CEA contre le risque sismique . . .	9
2.2	Exemple de découpage en tranches d'une transaction	11
2.3	Obligations catastrophiques en circulation par type de déclencheur	13
2.4	Performance des portefeuilles obligataires avec et sans Cat Bonds	14
2.5	Cat bonds émis et en circulation par année	17
2.6	Principaux sponsors dans le marché des Cat Bonds	17
2.7	Investisseurs dans le marché par type et par nationalité en 2021	18
2.8	Principaux modélisateurs dans le marché des Cat bonds	18
2.9	Les prix (en USD) et le nombre des Cat bonds négociés pendant le 1er semestre de 2020	19
2.10	Les prix des contrats d'obligations catastrophes négociées en 2020	20
2.11	Evolution de l'indice des Cat bonds et autres indices de marché en 2020 . .	20
2.12	L'échelle de notation selon S&P	21
3.1	Géologie de la Terre	23
3.2	Composition du Litosphère	23
3.3	Classification des différents tremblements de terre selon la magnitude . . .	24
3.4	Sismicité du Maroc pour la période 1901-2020 pour Magnitude 3,5	25
3.5	Détails du programme MultiCat	27
4.1	Nuage de points pour le couple (magnitude, profondeur)	31
4.2	Densités de la loi des valeurs extrêmes pour différentes valeurs de ξ	34
4.3	Le diagramme pour le modèle à une période	39
5.1	Présentation du base de données de l'activité sismique au Maroc pour la période 1905-2021	45
5.2	Statistiques descriptives de la base de données des séismes au Maroc pour la période 1905-2021	45
5.3	Statistiques descriptives de la variable magnitude	46
5.4	Boîte à moustaches de la magnitude	46
5.5	Fonction de densité de la magnitude	46
5.6	Nuage de points de la magnitude	47
5.7	Diagrammes de diagnostic pour l'ajustement de GEV au maximums annuels des tremblements de terre au Maroc	48
5.8	Statistiques descriptives de la variable magnitude	49
5.9	Boîte à moustaches de la profondeur	49

5.10	Fonction de densité et histogramme de la profondeur	49
5.11	Graphique des lois candidates pour l'ajustement de la profondeur	50
5.12	Les tests SSE, AIC et BIC pour l'ajustement	50
5.13	Distribution de weibull après estimation des paramètres	51
5.14	Base de données des taux d'intérêt	52
5.15	Variations du taux d'intérêt par année	52
5.16	Test augmenté de Dickey-Fuller (ADF)	52
5.17	Base de données des taux selon le modèle de Vasicek	54
5.18	Présentation graphique des taux selon le modèle de Vasicek selon la maturité	54
B.1	Processus d'indemnisation de A à Z	64

Liste des tableaux

2.1	Rendements, écart-type et ratio de Sharpe de différents portefeuilles obligataires	15
2.2	Corrélation des Cat Bonds avec d'autres classes d'actifs	15
4.1	Les taux de destruction selon chaque niveau	31

Liste des sigles et acronymes

FSEC	<i>Fonds de Solidarité Contre les Evénements Catastrophiques</i>
GEV	<i>Generalized Extreme Value</i>
ILS	<i>Insurance Linked Securities</i>
MCO	<i>Moindres Carrés Ordinaires</i>
SPV	<i>Special Purpose Vehicle</i>
QIB	<i>Qualified Institutionnal Buyers</i>
TVE	<i>Théoreme des Valeurs Extrêmes</i>
EDS	<i>Equation Différentielle Stochastique</i>
AR1	<i>Auto-Régressif d'ordre 1</i>
SSE	<i>Some of Squared Error</i>

Introduction générale

Contexte

"It is indeed most wonderful to witness such desolation produced in three minutes of time." - Charles Darwin commentant sur le tremblement de terre du 20 février 1835 qui a frappé le Chili.

Un tremblement de terre et ses risques cumulés affectent simultanément de nombreux bâtiments et infrastructures et causent d'énormes pertes sismiques aux villes et aux communautés locales. Les dommages sismiques encourus comprennent les pertes humaines, les pertes directes pour les propriétaires, et les pertes indirectes dues aux effets d'entraînement sur les économies régionales et nationales. L'amélioration de la résistance et de la résilience aux catastrophes naturelles doit être obtenue par une combinaison de mesures dures et douces. Les mesures dures comprennent des structures sûres avec des conceptions et des matériaux améliorés, des dispositifs d'atténuation (par exemple, des amortisseurs et des isolations), des systèmes d'alerte précoce, tandis que les mesures douces peuvent être prises par la diversification des risques financiers, la formation aux situations d'urgence, la planification communautaire des catastrophes, et la collaboration entre les différentes parties prenantes, y compris les gouvernements centraux et locaux, les forces militaires, les organisations étrangères, et les aides étrangères et internationales.

En outre, les catastrophes récentes ont révélé l'insuffisance des dispositifs conventionnels de gestion des risques financiers, tels que l'aide publique (par exemple, dons d'argent et prêts à taux d'intérêt faible ou nul pour une période fixe) et l'assurance contre les catastrophes naturelles (notamment les tremblements de terre). En particulier, l'impact financier sur les gouvernements et les municipalités ainsi que sur les assureurs et les ré-assureurs peut être important, entraînant potentiellement une énorme dette nationale, l'insolvabilité des assureurs, l'épuisement des fonds réservés aux catastrophes naturelles, une récupération prolongée après les catastrophes et des économies locales et nationales stagnantes. Il est donc très important que les organismes de gestion des risques disposent d'une capacité de financement suffisante pour faire face aux événements catastrophiques. En réponse à la demande croissante d'une meilleure gestion des risques financiers contre les catastrophes naturelles, les instruments dits de transfert de risques alternatifs sont devenus populaires.

Donc, cela a encouragé le secteur des Cat bonds à se développer, puisque ce type d'obligations reste l'un des moyens les plus importants pour le transfert de risque dans le cas des catastrophes naturelles. Cependant, les investisseurs institutionnels sont constamment à la recherche de nouvelles classes d'actifs susceptibles de contribuer à la diversification

d'un portefeuille et à l'amélioration des rendements. Les obligations catastrophes sont généralement émises par des compagnies d'assurance ou de réassurance qui regroupent des polices d'assurance de biens et de risques divers, qui peuvent être une classe d'actifs qui pourrait aider à diversifier les risques de taux d'intérêt, de crédit, d'actions et de devises d'un portefeuille en fournissant un risque d'événement naturel non corrélé. Elles versent des coupons à l'obligataire en utilisant les primes de police reçues. Lorsqu'un événement naturel comme une inondation, un ouragan ou un tremblement de terre se produit, une partie du principal d'une obligation catastrophe peut être utilisée pour payer les indemnités d'assurance sur le pool de polices. En d'autres termes, l'investisseur est payé pour assumer une partie du risque associé aux événements naturels.

Les obligations catastrophes présentent plusieurs avantages par rapport à l'assurance et la réassurance conventionnelle à savoir le transfert du risque sur le marché des capitaux qui a une capacité de prise de risque nettement supérieure ; et la configuration typique des Cat bonds qui fait appel à un réassureur à vocation unique pour promouvoir la sécurité et la liquidité des transactions. Pour les Cat bonds paramétriques, un événement déclencheur est souvent défini en termes de caractéristiques physiques d'un tremblement de terre (par exemple, la magnitude et la localisation) ; ces informations sont fournies par un organisme tiers fiable immédiatement après le tremblement de terre. Du point de vue du sponsor, les Cat bonds réduisent le risque de crédit concernant le défaut de paiement garanti, tandis que la publication instantanée des informations sur le tremblement de terre facilite la disponibilité rapide des fonds et accélère ainsi les activités de sauvetage et de récupération dans les zones touchées. Pour les investisseurs, les obligations catastrophes peuvent être attrayantes en raison d'un rendement financier plus élevé que les titres typiques (si les événements catastrophiques spécifiés ne se produisent pas) et d'une corrélation moindre avec d'autres produits financiers sur le marché.

En revanche, les obligations catastrophes sont soumises au risque de base, qui est défini comme étant la différence entre les pertes réelles subies par le sponsor et le paiement reçu par le sponsor. L'occurrence de scénarios sismiques particuliers n'est pas parfaitement corrélée à l'occurrence de pertes sismiques spécifiques (le risque de base est donc induit) car les effets sismiques sur les structures et leurs conséquences monétaires sont très incertains. Le risque de base est étroitement lié à la précision du déclencheur et au mécanisme de paiement conçu pour les obligations catastrophes paramétriques. Il se compose souvent de deux parties : les risques de modèle, c'est-à-dire la performance des modèles numériques de catastrophe utilisés pour concevoir la structure des Cat bonds par rapport aux pertes réelles ; et les erreurs de déclenchement, c'est-à-dire l'imprécision d'un mécanisme de déclenchement simpliste adopté. Dans une certaine mesure, le risque de base est inévitable, car le mécanisme de déclenchement paramétrique rend d'autres caractéristiques attrayantes des Cat bonds, comme le faible risque de crédit, la transparence et le faible risque moral.

Cette étude a pour but de monter et de tarifier des obligations catastrophes paramétriques pour les tremblements de terre au Maroc, selon certains paramètres de ce type de catastrophes naturelles tels que la magnitude, la profondeur, l'accélération maximale du sol (PGA) et l'intensité.

Chapitre 1

Contexte générale d'étude

1.1 FSEC

On entend par "Evènement Catastrophique" selon la loi, tout fait générateur de dommages directs survenus au Maroc, ayant pour origine déterminante l'action d'intensité anormale d'un agent naturel ou l'action violente de l'Homme, où on exclu l'utilisation d'agents ou armes chimiques, biologiques, bactériologiques, radioactifs ou nucléaires, ainsi que la guerre civile, guerre étrangère ou actes d'hostilité assimilables, et tout acte de cybercriminalité.

On distingue donc entre deux familles d'évènements : les faits naturels et l'action violente de l'homme. Les évènements considérés comme faits naturels sont tout fait générateur soudain ou imprévisible, et en cas de prévisibilité, on ne peut pas l'empêcher. Ainsi que l'action violente de l'homme peut être un acte de terrorisme ou une conséquence directe de la survenance d'émeutes ou de mouvements populaires d'une intensité grave pour la collectivité.

Pour faire face à ces évènements qui influent d'une façon grave le Maroc surtout économiquement, puisqu'il y avait mal gestion de la survenance de ces catastrophes. Dans ce cadre, le gouvernement a ainsi adopté la loi actuel (loi n° 110-14) qui régit la gestion des risques catastrophiques au Maroc, la loi mis en place deux régimes de couverture des risques catastrophique : une couverture assurantielle obligatoire (EVCAT), et un système allocataire au profit des personnes physiques ne disposant pas de couverture par la mise en place d'un Fonds de solidarité dédié en cas de catastrophes (FSEC : Fonds de solidarité contre les événements catastrophiques). L'article 17 de ladite loi stipule qu'un des objectifs assignés au FSEC est l'indemnisation des victimes d'évènements catastrophiques. En vertu de cette loi, les ménages pauvres, qui sont principalement non assurés sont en droit de recevoir une compensation financière auprès du fonds de solidarité (FSEC) pour les dommages corporels (y compris l'incapacité permanente et le décès) et la perte de la résidence principale et de son utilisation causée par des catastrophes.

Le projet repose sur la capacité financière du secteur national de l'assurance soutenue par le marché international de la réassurance, pour financer les pertes dues aux catastrophes par le biais de primes d'assurance supplémentaires (obligatoires). Afin de protéger le secteur de l'assurance contre les grands sinistres catastrophiques et que ces primes puissent être supportées par les assurés, la législation fixe un plafond global d'indemnisation et que l'indemnisation sera proportionnellement réduite en cas de dépassement de ce plafond. Cette approche propose de combiner une assurance privée contre les risques catastrophiques à travers la couverture obligatoire au sein des contrats d'assurance dommages, automobile et responsabilité civile...

La principale source de recettes du Fonds est le produit des taxes parafiscales, mais il y a aussi d'autres sources telles que la rémunération pour services rendus, une dotation initiale de l'Etat, les frais et honoraires payées par les entreprises d'assurance et de réassurance au titre des opérations d'expertise à leur profit, le montant des prêts remboursés par les compagnies d'assurance et de réassurance, ainsi que les subventions, les dons et les legs.

La figure suivante résume le processus de déroulement prévu pour le FSEC des différentes étapes (article 6 de la loi) depuis l'avènement de la catastrophe jusqu'à l'indemnisation

éventuelle des sinistrés :

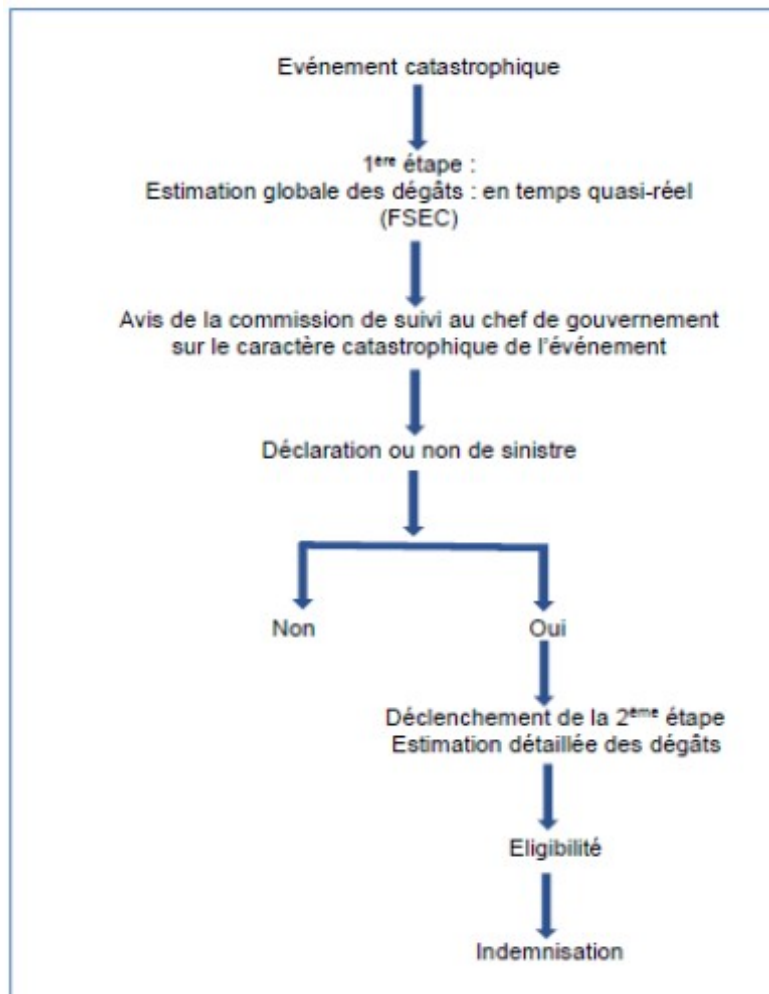


FIG. 1.1 : Processus de déroulement des différentes étapes pour le FSEC

L'Annexe A explique en détails les principaux aspects de la loi 110-14 sur le fonctionnement du Fonds ainsi que ses missions principales et d'autres détails importants sur la gestion des catastrophes naturelles au Maroc.

1.2 Titrisation du risque catastrophique

1.2.1 Apparition de la titrisation et ses principes

La titrisation est une technique financière qui est apparue aux États-Unis dans les années 60. L'opération consiste à transformer des éléments du passif d'une compagnie en titres financiers liquides revendus sur les marchés financiers via un OPCVM communément appelé Special Purpose Vehicle (SPV). Le mécanisme général se résume comme suit : la société émettrice cède ses actifs au SPV, celui-ci émet des titres qui après évaluation par une agence de notation seront placés auprès des investisseurs. Ce faisant, les investisseurs sont protégés contre le risque de défaut de la cédante si bien qu'en cas de faillite, ils sont

assurés de percevoir les coupons liés aux actifs titrisés. L'objectif premier est de transférer uniquement le risque de crédit inhérent au sous-jacent vers les marchés financiers.

1.2.2 La titrisation en assurance et apparition des Cat Bonds

A l'instar des banques et sociétés de crédit, les compagnies d'assurance se sont tournées vers les marchés financiers lorsque la réassurance traditionnelle a montré ses limites en matière de liquidités. L'avènement des *Insurance Linked Securities (ILS)* dans les années 90 est consécutif au cyclone Andrews et au Séisme Northridge, pour lesquels les réassureurs ne pouvaient honorer leurs engagements. En partant du principe que la capacité offerte par le marché traditionnel de la réassurance et le marché de la rétrocession aux assureurs allait se réduire, la recherche d'une forme alternative de transfert de risque a conduit les assureurs à se tourner vers les marchés financiers. La titrisation du risque de catastrophe est apparue peu après avec la première offre d'obligations catastrophes en 1994, il s'agissait du Cat Bond Kover émis par Hannover Re. Avec une capacité de \$85 m, il protégeait contre tout type de catastrophes naturelles supporté par le sponsor.

On présente dans la figure qui suit le mécanisme, d'une manière globale, de la titrisation dans le cas des obligations catastrophiques.

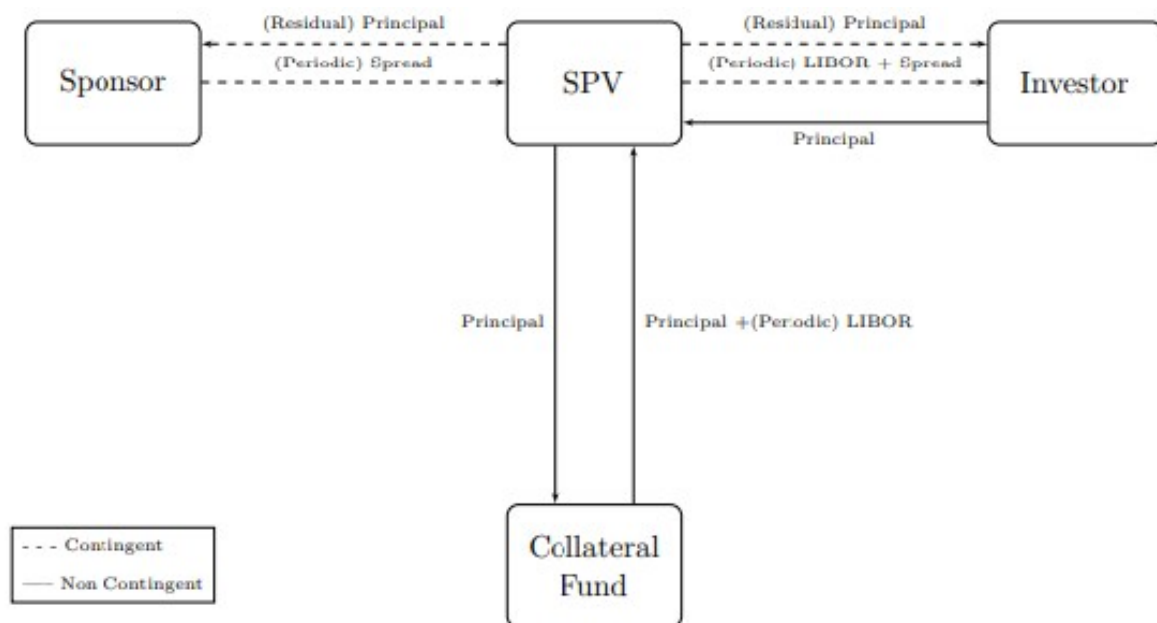


FIG. 1.2 : Mécanisme de titrisation du risque des Cat Bonds

Le marché des ILS s'est également diversifié, au-delà des structures traditionnelles des obligations catastrophes. Au fil des ans, les entreprises ont émis des obligations liées à d'autres déclencheurs comme ceux de mortalité ou de moteur et de crédit. Les structures alternatives de financement sont également de plus en plus populaires en tant qu'outils de financement des risques pour les compagnies d'assurance.

En 2021, le montant des obligations catastrophes émises dans le marché a atteint à peu près \$14 000 m, ainsi que celles en circulation ont atteint une valeur de \$35 886 m.

Aujourd'hui, il existe une multitude de formes d'ILS dont les plus connus sont les Cat Bonds et les Mortality et Longevity bonds.

Chapitre 2

Les Cat Bonds

2.1 Qu'est ce qu'un Cat Bond et comment se structure ?

Au milieu des années 1990, les obligations catastrophes (Cat bonds), également appelées "Act of God" ou "Insurance-linked bond", ont été développées pour faciliter le transfert du risque d'assurance lié aux catastrophes des assurances, réassurances et entreprises (sponsors) vers les investisseurs des marchés financiers. Les Cat bonds sont des obligations dont les coupons et le paiement du principal dépendent de la performance d'un indice de risques de catastrophes naturelles, ou de la présence de conditions de déclenchement spécifiques. Elles protègent les entreprises des pertes financières causées par de grandes catastrophes naturelles en offrant une alternative ou un complément à la réassurance traditionnelle.

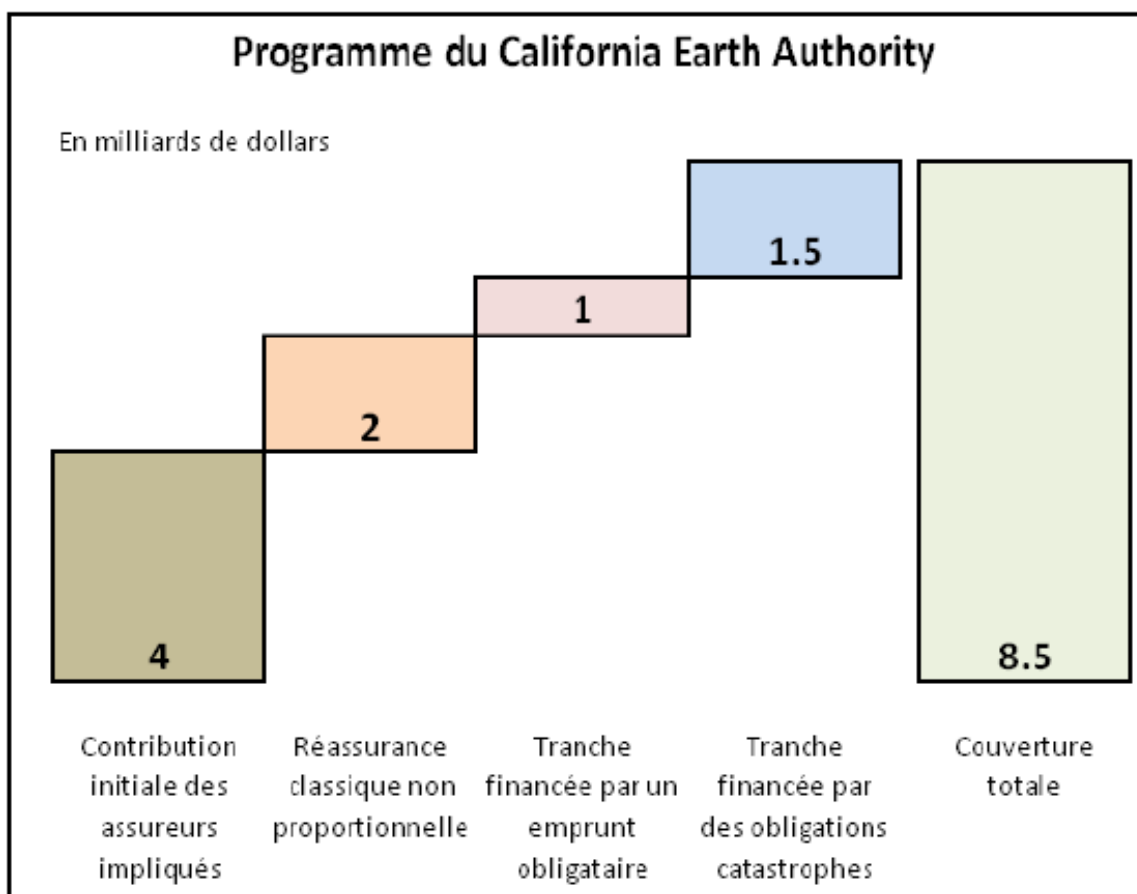


FIG. 2.1 : Exemple de programme d'assurance du CEA contre le risque sismique

La transaction implique quatre parties : le sponsor ou la cédante (agences gouvernementales, assureurs, réassureurs), le véhicule à usage spécial SPV (ou émetteur), la garantie et les investisseurs (investisseurs institutionnels, assureurs, réassureurs et fonds spéculatifs). Le sponsor crée une SPV en tant qu'émetteur de l'obligation et source de protection de réassurance. L'émetteur vend des obligations aux investisseurs du marché des capitaux et le produit de la vente est déposé sur un compte de garantie, sur lequel sont collectés les revenus des actifs. Le sponsor conclut un contrat de réassurance ou de produits dérivés avec l'émetteur et lui verse une prime. Le SPV verse généralement des

coupons trimestriels aux investisseurs. La prime et le produit des obligations d'investissement que la SPV a reçu de la garantie sont une source d'intérêts ou de coupons versés aux investisseurs. S'il n'y a pas d'événement déclencheur pendant la durée de vie des obligations, la SPV rend le principal aux investisseurs avec le dernier coupon ou les intérêts généreux, sinon la SPV paie la cédante selon les termes du contrat de réassurance et parfois ne paie rien ou partiellement le principal et les intérêts aux investisseurs.

Il existe une variété de mécanismes de déclenchement pour déterminer quand les pertes d'une catastrophe naturelle doivent être couvertes par le Cat bond. Il s'agit notamment de l'indemnité, de l'indice sectoriel, du paramétrique pur, de l'indice paramétrique, de la perte modélisée et du déclencheur hybride. Chacun de ces mécanismes présente une gamme de niveaux de base risques et de transparence pour les investisseurs.

Le déclenchement de l'indemnisation implique la perte réelle de la société cédante. La cédante reçoit le remboursement de ses pertes réelles liées à l'événement couvert, au-delà du niveau de pertes prédéterminé. Ce déclencheur reproduit fidèlement la réassurance traditionnelle, mais il est exposé au risque catastrophique et opérationnel de la cédante. Avec un déclencheur d'indice industriel, la cédante récupère une proportion des pertes totales de l'industrie dépassant un point prédéterminé jusqu'à concurrence du reste du capital. Les paiements de l'indice paramétrique pur sont déclenchés par la survenance d'un événement catastrophique avec certains paramètres physiques définis, par exemple la vitesse du vent et la localisation d'un ouragan ou la magnitude et la localisation d'un tremblement de terre. Le déclenchement de l'indice paramétrique utilise différentes cases pondérées pour refléter l'exposition de la cédante à des événements dans différentes zones. Dans un mécanisme de déclenchement par perte modélisée, après qu'une catastrophe se soit produite, les paramètres physiques de la catastrophe sont utilisés par une société de modélisation pour estimer les pertes attendues du portefeuille de la cédante. Au lieu de traiter les sinistres réels de la compagnie, la transaction est basée sur les estimations du modèle. Si les pertes modélisées sont supérieures à un seuil déterminé, l'obligation est déclenchée. Un déclencheur hybride utilise plus d'un type de déclencheur dans une seule transaction.

La tarification des obligations catastrophes présente certaines similitudes avec les obligations par défaut, mais ces obligations offrent des rendements plus élevés en raison de la nature stochastique non fixée du processus de catastrophe.

2.2 Processus d'émission d'un Cat Bond

Supposons que les principaux paramètres de la couverture soient définis par le structureur afin de coller au plus près aux besoins du sponsor. Le déductible (ou franchise) correspond au montant à partir duquel démarre la couverture des pertes. Toute perte en deçà de ce montant (noté d) n'est pas indemnisée par le Cat bond et ce montant est retenu sur les pertes qui lui sont supérieures. Si X est le montant brut de la perte subie par le sponsor et Y la perte subie par l'investisseur, on a $Y = \min(\max(X - d, 0), L)$ avec L c'est la limite de la couverture (montant maximal d'indemnisation du sponsor par l'investisseur).

Définissons la probabilité d'attachement comme la probabilité que la perte de l'invest-

tisseur soit strictement positive : $p_a = P(Y > 0)$. Définissons la probabilité d'exhaustion comme la probabilité que la perte de l'investisseur corresponde à sa perte maximale, c'est-à-dire la totalité de la limite de couverture L : $p_e = P(Y = L)$. Ces probabilités correspondent respectivement à celle de perdre le premier euro et le dernier euro investi. Lorsque la différence entre les deux est trop importante, il peut être intéressant de découper la couverture en plusieurs tranches ayant leur propre probabilité d'attachement et d'exhaustion sur lesquelles le sponsor peut servir des coupons différents. Ceci ressemble à la structuration en couches d'un programme de réassurance et peut faciliter le placement de la transaction sur le marché.

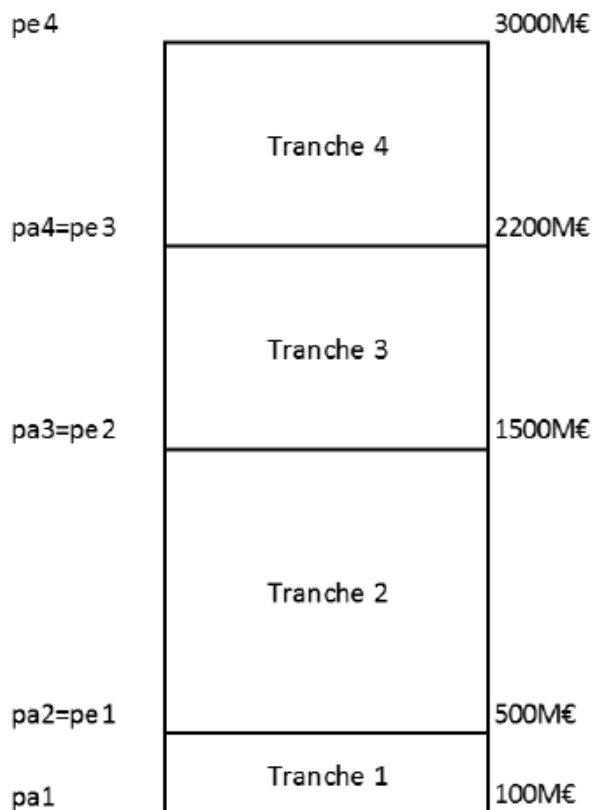


FIG. 2.2 : Exemple de découpage en tranches d'une transaction

Plusieurs tranches sont donc émises et chacune d'elle peut être notée individuellement par une agence de notation : ceci permet d'obtenir une meilleure note pour les tranches supérieures (notamment du fait que la probabilité d'attachement est très faible) que si la transaction était monolithique. Chaque tranche sert alors un spread différent à l'investisseur.

Le SPV est ensuite créé et un offering memorandum, c'est-à-dire une documentation spécifiant toutes les caractéristiques de la transaction, est envoyé par les brokers et certaines banques d'investissement à des investisseurs potentiellement intéressés. Le bookrunner est celui qui gère et coordonne le processus d'émission du Cat bond.

Les émetteurs de ces obligations distribuent le titre à des investisseurs initiaux (appelés souscripteurs), souvent un groupe de banques d'investissement. Les souscripteurs revendent ensuite les titres à des investisseurs sophistiqués (dits « QIBs : Qualified Institutional Buyers »). Les investisseurs qualifiés de QIB sont les compagnies d'assurance

et de réassurance, les asset managers, les banques, les fonds de pension et autres entités gérant plus de 100m\$ d'actifs ou les brokers-dealers gérant plus de 10m\$ de fonds de tierces parties. Un individu, qu'importe sa richesse ou son niveau de sophistication, ne peut pas être un QIB. Ces investisseurs sont supposés être sophistiqués et sont les seuls à pouvoir investir dans un *Cat bond Rule 144A*. Cette dernière est une indication du type de placement ou d'offre de titres qui s'applique à la revente de titres, et non à leur émission initiale. La grande majorité des transactions d'obligations catastrophes émises sont des obligations catastrophes "Rule 144A", qui sont généralement le type le plus liquide de transactions d'obligations catastrophes, par opposition aux transactions *Cat bond lite* et aux transactions d'obligations catastrophes placées à titre privé.

L'appétence des investisseurs est ensuite testée pour différents niveaux de spread : les investisseurs disent combien ils sont prêts à souscrire pour chaque niveau de spread. On appelle ratio de couverture le rapport demande/offre. Le spread est en général fixé de telle manière à ce que le ratio de couverture soit entre 1,3 et 2 pour assurer une certaine liquidité sur le marché secondaire. Un ratio inférieur à 1 signifie que le Cat bond n'a pas pu être placé et donc le notionnel est réduit ou la transaction annulée. Ce processus correspond à l'émission d'un Cat bond de type « Rule 144A ». Ainsi, l'autre type de Cat bond qui est le « Cat bond light » correspond simplement à un Cat bond émis avec une documentation plus légère, pas toujours de modélisation indépendante du risque et donc avec des coûts fixes d'émissions plus faibles. La liquidité de ce type de Cat bond est plus faible et les spreads sont donc en général plus importants.

2.3 Types de catastrophe bonds

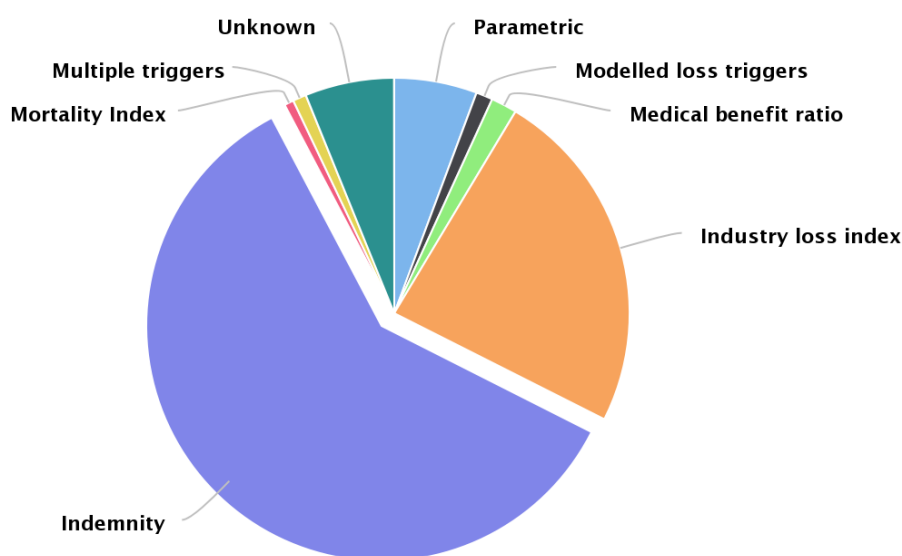
Un évènement prédéfini est l'élément déclencheur de l'érosion du capital d'un Cat bond et donc d'un paiement du sponsor par l'investisseur. Le choix de cet évènement déclencheur (ou trigger) est une étape cruciale de la structuration d'un Cat bond puisqu'il influe directement sur la capacité de placement du deal, sur le prix et sur le risque supporté par les différentes parties prenantes.

Le type des Cat bonds se définit à partir du type de déclencheur de cette obligation, il existe trois types principales à savoir :

- **Cat bonds indemnitaires** : Les déclencheurs d'indemnisation sont basés sur les pertes déclarées par le sponsor à la suite d'une catastrophe naturelle. La cédante est indemnisée sur ses pertes réelles lorsque le sinistre survient comme lors de la réassurance traditionnelle ;
- **Cat bonds paramétriques** : le seuil est indexé à une donnée décrivant un phénomène naturel. Il peut donc s'agir de la vitesse du vent pour une obligation sur ouragans, de l'intensité sismique sur l'échelle de Richter pour une obligation sur tremblement de terre ou de tout autre indicateur lié au risque couvert. Ce type de seuil, en plus d'offrir la meilleure transparence pour l'investisseur, permet un calcul quasi instantané de l'impact de la catastrophe et donc une mise à disposition plus rapide des fonds nécessaires.

- **Cat bonds-Perte de l'industrie** : Le déclencheur d'indemnisation est un indice traduisant les pertes subies par l'ensemble du marché lors du sinistre, il est basé sur les pertes industrielles estimées par un tiers indépendant à la suite d'une catastrophe naturelle. La cédante y applique des facteurs afin d'avoir une perte synthétique répliquant sa perte réelle.

Catastrophe bond & ILS risk capital outstanding by trigger type



Source: www.Artemis.bm Deal Directory

FIG. 2.3 : Obligations catastrophiques en circulation par type de déclencheur

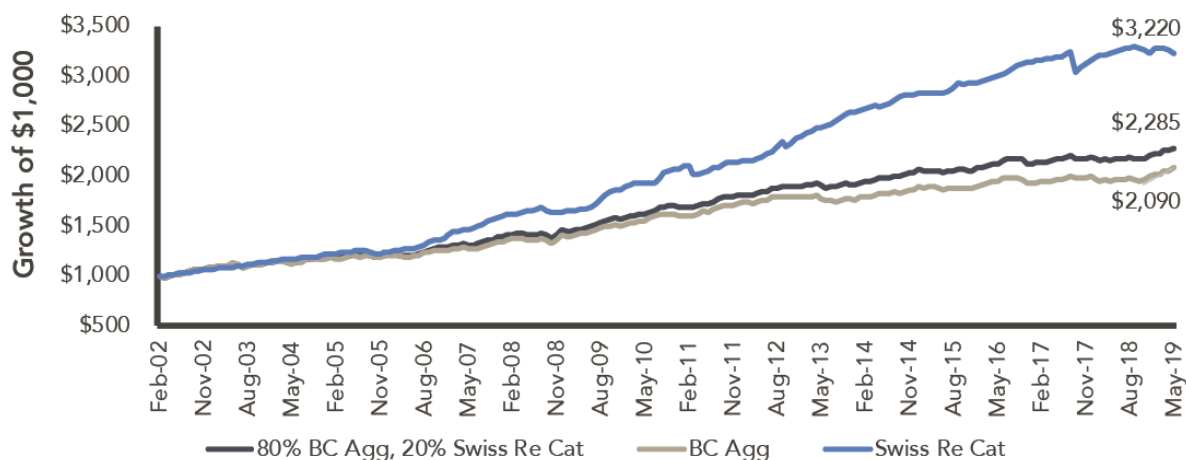
2.4 Principaux avantages des obligations catastrophes

Les Cat Bonds présente deux avantages principaux. Premièrement, leur corrélation présumée nulle ou très faible avec d'autres actifs financiers permet de diversifier davantage un portefeuille et, deuxièmement, leurs rendements historiques ajustés au risque sont attrayants pour les investisseurs. Les Cat Bonds sont considérés comme une classe d'actifs à revenu fixe à haut rendement dont les rendements sont indépendants des risques et des cycles macroéconomiques. En outre, les Cat Bonds présentent un niveau élevé de diversification intra-classe grâce à leur corrélation avec des facteurs de risque différents et indépendants survenant dans différentes parties de la planète (c'est-à-dire les tremblements de terre, les tsunamis, les ouragans, les inondations, etc). Par conséquent, les Cat Bonds, qui présentent une faible corrélation avec d'autres classes d'actifs traditionnelles (par exemple, les actions, les obligations et les matières premières), offrent aux investisseurs institutionnels une grande diversification de portefeuille avec un profil risque-rendement attrayant. Les investisseurs institutionnels (principalement les fonds de pension et les fonds spéculatifs) à la recherche d'une classe d'actifs exotique, stable et à rendement relativement élevé dans l'environnement actuel de taux d'intérêt bas, seraient

en train de rassembler des capitaux pour soutenir l'appétit croissant du marché ILS pour les Cat Bonds.

Bien que la diversification offerte par les Cat Bonds reste intéressante pour les investisseurs, ces derniers sont moins attrayants car la diversification s'accompagne d'un coût plus élevé. Il est important de noter que cet effet de diversification ne peut être reproduit en achetant des actions ou des obligations de certaines compagnies d'assurance ou de réassurance. Comme la plupart des actifs de ces sociétés sont investis dans des placements traditionnels, ils sont fortement corrélés aux marchés financiers. En effet, il a été prouvé que les Cat Bonds ne sont pas totalement immunisés contre les turbulences financières. Comme pour les autres actifs, les corrélations des Cat Bonds avec les autres investissements sont faibles en temps normal, mais en cas de crise, elles augmentent également, bien que dans une moindre mesure. À l'aide d'un modèle DCC (Dynamic Conditional Correlations), Clark et al. (2016) ont démontré l'existence d'une corrélation dynamique entre les Cat Bonds et les marchés financiers. Tout en augmentant pendant les crises financières, les corrélations augmentent également après une catastrophe majeure (par exemple, Katrina). En utilisant un modèle GARCH multivarié, Carayannopoulos et Perez (2015) constatent que l'hypothèse de corrélation nulle est valable en temps normal, mais pas en temps de crise. Néanmoins, les effets de diversification des Cat Bonds se manifestent quand on en a besoin. En effet, leurs rendements sont moins affectés par la crise financière de 2008 que ceux des actifs traditionnels.

Les Cat bonds peuvent contribuer à améliorer les rendements, à réduire la volatilité et à améliorer l'efficacité d'un portefeuille. La figure ci-dessous montre la croissance d'un portefeuille de février 2002 à mai 2019 détenant uniquement l'indice Barclays Aggregate par rapport à 80% de l'indice Agg et 20% de l'indice Swiss Re Cat Bond par rapport à l'indice Swiss Re Cat Bond. L'ajout d'une allocation de cat bonds peut contribuer à améliorer le rendement total du portefeuille à revenu fixe. Le graphique montre qu'un portefeuille détenant 80% de l'indice Agg et 20% de l'indice Swiss Re Cat Bond a surperformé un portefeuille de base composé uniquement d'obligations. un portefeuille de base composé uniquement d'obligations.



Source: eVestment, Swiss Re, February 2002 to May 2019

FIG. 2.4 : Performance des portefeuilles obligataires avec et sans Cat Bonds

Le tableau qui suit se concentre sur le rendement annualisé moyen réel ainsi que sur l'écart type comme mesure de la volatilité pour comparer l'efficacité à travers les ratios de Sharpe des deux portefeuilles. Il montre que les rendements annualisés moyens étaient de 4,9% pour le portefeuille avec cat bonds, plus élevés que les 4,4% pour le portefeuille sans cat bonds. L'écart-type était de 2,9% pour le portefeuille avec cat bonds, inférieur aux 3,4% du portefeuille sans cat bonds. Enfin, le ratio de Sharpe était de 1,3 pour le portefeuille avec cat bonds, meilleur que le 0,9 pour le portefeuille sans cat bonds. Ainsi, l'ajout de cat bonds à un portefeuille améliore les rendements, réduit la volatilité et améliore l'efficacité.

February 2002-May 2019	80% Barclays Agg./20% Swiss Re Cat Bond	Barclays Agg.
Average Annualized Return	4.9%	4.4%
Standard Deviation	2.9%	3.4%
Sharpe Ratio	1.3	0.9

Source : eVestment, Swiss Re, February 2002 to May 2019

TAB. 2.1 : Rendements, écart-type et ratio de Sharpe de différents portefeuilles obligataires

Le tableau suivant montre la raison de cette volatilité réduite. Les Cat bonds ne sont pas corrélés aux marchés des actions et des titres à revenu fixe, avec des corrélations quasi nulles avec les principaux indices. Comme la performance des cat bonds est liée à des événements naturels, elle n'est pas liée à l'économie, aux taux d'intérêt ou aux progrès technologiques. Elles ne dépendent pas non plus des bénéfices des entreprises, auxquels les marchés des actions et des titres à revenu fixe sont liés.

5-Year Correlation Martrix (May 2019)	Swiss Re Cat Bond Index
Bloomberg Barclays US Aggregate	0.03
Credit Suisse Leveraged Loan	0.12
Bloomberg Barclays US Corporate High Yield	0.06
Bloomberg Barclays US Municipals	0.03
JPM EMBI Global Diversified	0.08
S&P 500	0.08
Russell 1000 Growth	0.13
Russell 1000 Value	0.03
Russell 2000 Growth	-0.01
Russell 2000 Value	-0.05
MSCI EAFE	0.00

Source : eVestment, Swiss Re, February 2002 to May 2019

TAB. 2.2 : Corrélation des Cat Bonds avec d'autres classes d'actifs

2.5 Marché des Cat bonds

2.5.1 Aspects historique

- **les premiers pas du marché 1990-2004** : Après l'ouragan Andrew en 1992 et le tremblement de terre de Northridge en Californie en 1994, l'importance des sinistres a poussé de nombreux assureurs à la faillite et la capacité disponible pour couvrir de tels risques s'est énormément raréfiée. Malgré l'importante augmentation des RoL, les réassureurs sont peu enclins à couvrir les risques de pointe (c'est-à-dire au-delà de 500m\$). Les cédantes ont alors été amenées à rechercher une solution de transfert alternative de ces risques sur les marchés financiers : le premier Cat bond a été émis en 1994 et sponsorisé par *Nationwide Insurance Co. of Columbus*. S'en suit un développement progressif du marché à un rythme modéré (1000m\$ par an) jusqu'à l'occurrence des attentats du World Trade Center en 2001 qui ont créé un nouvel épisode de pression sur la capacité et donc un accroissement de la vitesse de croissance des émissions à environ (2000m\$ par an) ;
- **l'expansion rapide 2005-2008** : Après les ouragans Katrina, Rita et Wilma en 2005, une forte érosion de la capacité du marché conduit à une très forte et rapide augmentation du notional de Cat bonds en circulation d'environ 4000m\$ par an ;
- **léger ralentissement 2008-2011** : Suite à la crise financière en 2008, et spécialement à la faillite de Lehman Brothers qui était la banque qui gère le collatéral de quatre Cat bonds. Le marché primaire des obligations catastrophes a été interrompu, pour la période de septembre 2008 à février 2009. Les indices de Swiss Re (qui fournissent un indicateur de performance des Cat bonds) montrent tout de même que cette classe d'actifs à beaucoup moins souffert que les actions et les obligations. Le marché secondaire est tout de même resté actif sur cette période notamment grâce à certains investisseurs en recherche de liquidité ayant débouclé leurs positions ou bien à d'autres ayant cherché à rééquilibrer leurs portefeuilles en termes de risques couverts. Une amélioration des solutions de collatéralisation a permis la réouverture du marché en février 2009 et celui-ci a repris son développement à un rythme passablement soutenu ;
- **forte croissance depuis 2011** : Des injections significatives de capital dans le marché de la part d'investisseurs institutionnels à la recherche d'une diversification de leurs investissements (plus de 4000m\$ en 2011) et de rendements en cette période de taux bas. De plus, les faibles spreads rendent les Cat Bonds plus compétitifs sur le plan des coûts et donc plus attractifs pour les sponsors potentiels sur ce marché. Par ailleurs, l'implémentation de Solvabilité 2 conduit les cédantes d'une part à prendre en compte le risque de contrepartie lié au réassureur et à diversifier leurs modes de transferts de risques et d'autre part à céder certains risques retenus jusqu'alors. On voit donc une forte reprise de la croissance du marché des Cat bonds sur cette période.

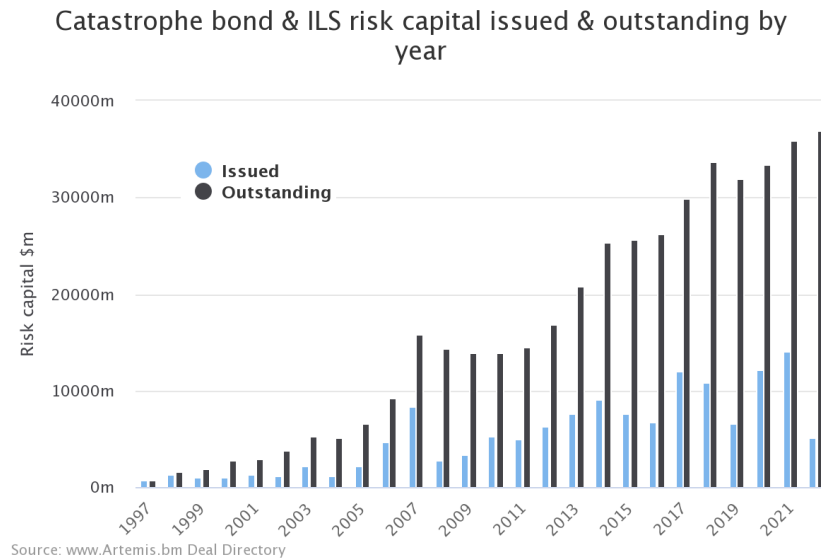


FIG. 2.5 : Cat bonds émis et en circulation par année

2.5.2 Les acteurs du marché

- **les sponsors** : ou la cédante correspond à la partie désirant transférer un risque aux investisseurs via le Cat bond. Il peut être un assureur, un réassureur (Munich Re, Swiss Re...) voulant rétrocéder certains risques, ou une entreprise voulant couvrir son activité des évènements climatiques extrêmes ou même un gouvernement voulant mettre en place un plan d'indemnisation des victimes ;

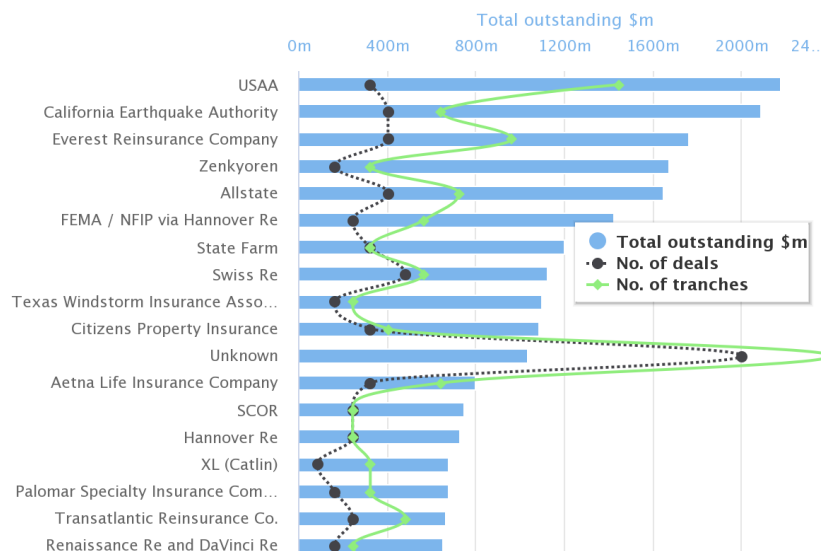


FIG. 2.6 : Principaux sponsors dans le marché des Cat Bonds

- **les investisseurs** : les investisseurs qualifiés de QIB (Qualified Institutional Buyers) sont supposés être sophistiqués et sont les seuls à pouvoir investir dans un Cat bond Rule 144A. Un individu ne peut être un QIB quelle que soit son niveau de sophistication. Ils sont principalement des ILS Funds, des investisseurs institutionnels tels que des caisses de retraite, des hedge funds, et des réassureurs ;

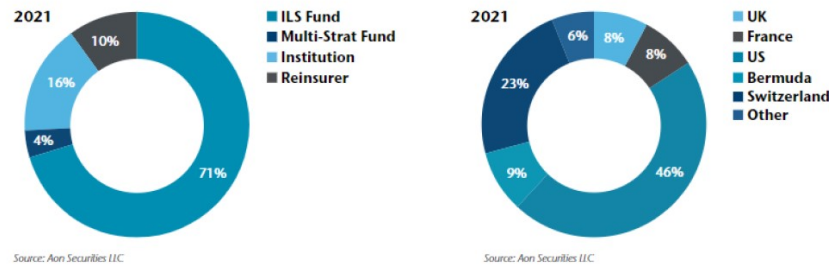
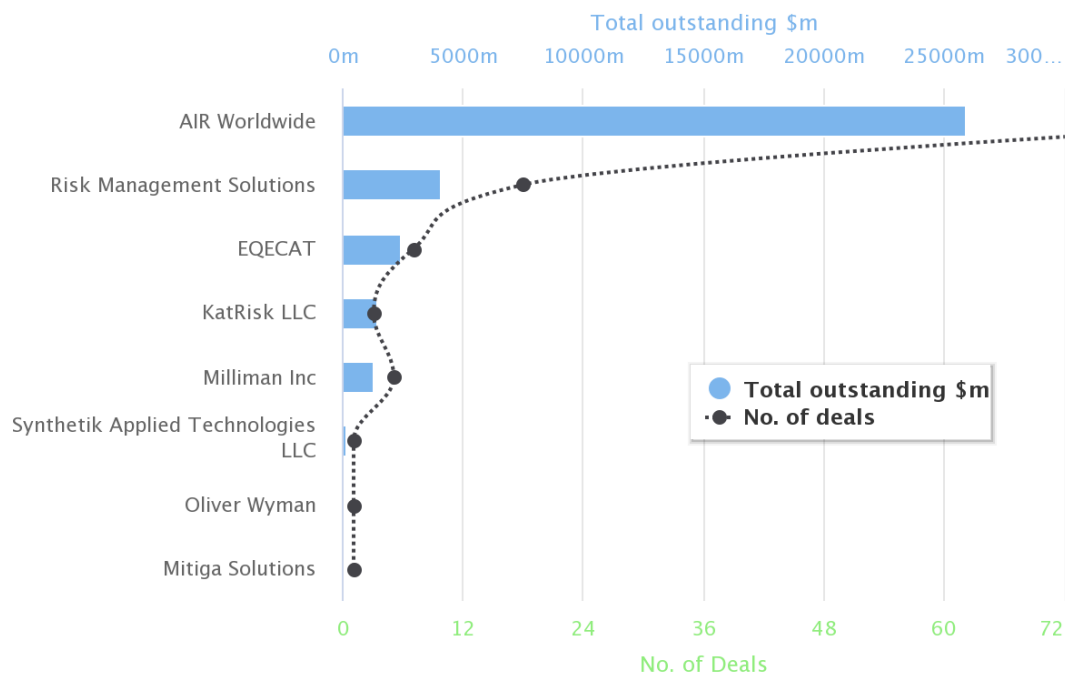


FIG. 2.7 : Investisseurs dans le marché par type et par nationalité en 2021

- les modélisateurs** : leur rôle est de modéliser le risque catastrophe couvert par le Cat bond (séisme, cyclone, inondation...) et d'évaluer une espérance de perte (*Expected Loss*) pour l'investisseur ainsi que certaines mesures de risque à partir de données sur le portefeuille du sponsor (exposition, composition...), de données historiques et de données géologiques, météorologiques... Ceci sert ensuite à déterminer le risque pris par l'investisseur et donc le coupon payé par le sponsor. Cette évaluation se réalise par une tierce partie indépendante ayant la confiance de tous les acteurs de la transaction. C'est pourquoi les sponsors disposant de capacités internes de modélisation catastrophe (comme Swiss Re ou Scor) utilisent tout de même un modélisateur externe lorsqu'ils décident de sponsoriser un Cat bond. En effet, trois sociétés de modélisation dominent le marché et emportent le consensus de ses participants : RMS, AIR et EQECAT. Cette modélisation comporte en général quatre modules : Le module de risque, le module de distribution de la valeur, le module de vulnérabilité, le module de perte financière.



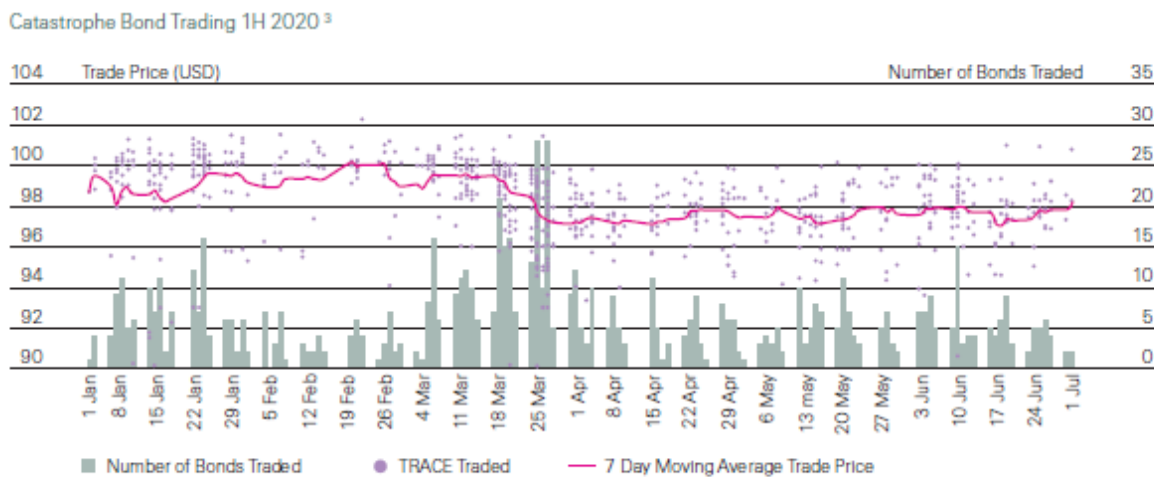
Source: www.Artemis.bm Deal Directory

FIG. 2.8 : Principaux modélisateurs dans le marché des Cat bonds

2.5.3 Le marché après COVID-19

Au début de l'année 2020, et avec l'arrivée du virus SARS-COV-2, la source de la pandémie COVID-19, qui a frappé les marchés financiers mondiaux et entraîné une grande incertitude vers le mois de mars, certains investisseurs ILS ont été confrontés à des problèmes de liquidité. Cependant, d'autres ont choisi de vendre des obligations pour les allouer à d'autres classes d'actifs où des opportunités de rendement plus élevées se présentaient. La pression de vente des investisseurs a entraîné une baisse des prix secondaires des obligations catastrophes.

Comme le montre la figure ci-dessous, les prix moyens négociés sur les obligations catastrophes sont passés d'environ 100USD à 97USD, ce qui a entraîné une période temporaire d'élargissement des écarts secondaires. En réponse à l'élargissement des écarts disponibles sur le marché secondaire, les nouvelles émissions ont été suspendues pendant une période d'environ 4 semaines en mars/avril.



Source: Trade Reporting and Compliance Engine (TRACE), as of December 31, 2020

³ Average trade price excludes impaired and zero-coupon bonds

FIG. 2.9 : Les prix (en USD) et le nombre des Cat bonds négociés pendant le 1er semestre de 2020

La figure qui suit montre l'impact des prix sur le marché secondaire des obligations catastrophes les plus activement négociées au cours de l'année. Selon TRACE, les baisses de prix ont été brutales et la reprise progressive, mais vers la fin de l'année 2020, les prix sont revenus aux niveaux antérieurs à la pandémie et, dans certains cas, se sont même améliorés.

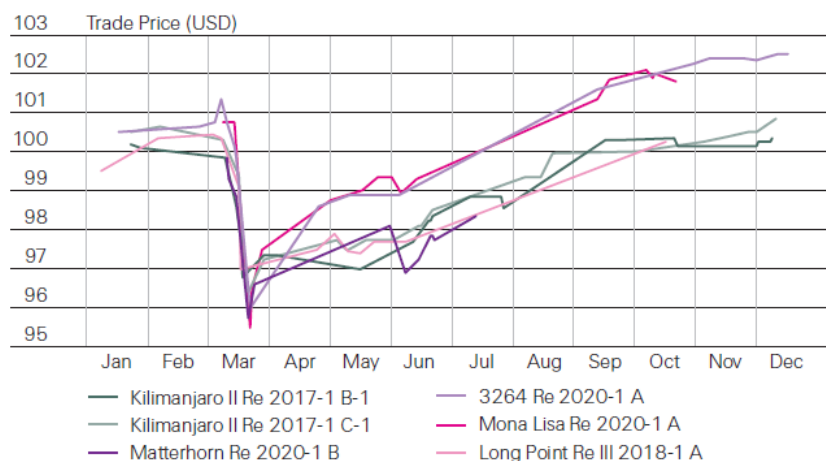


FIG. 2.10 : Les prix des contrats d'obligations catastrophes négociées en 2020

COVID-19 a créé de l'incertitude alors que les marchés financiers mondiaux essayaient de comprendre ce que les impacts d'une pandémie pourraient signifier pour l'industrie. Les marchés du crédit aux entreprises et des actions ont chuté pendant que le virus se propageait et que des mesures de confinement étaient appliquées dans le monde entier. Cependant, le marché des ILS a bien réagi aux conditions de marché volatiles et a une fois de plus démontré sa résilience dans les moments difficiles. Le rendement total de l'indice *Swiss Re Global Cat Bond Performance* (indice Cat Bond) a augmenté de 5,81% au cours de l'année 2020, contre 4,43% en 2019. Comme le montre la figure suivante, par rapport à d'autres indices mondiaux, l'indice Cat Bond n'a pas connu la même volatilité, ni subi de pertes au même degré que les autres marchés de titres à revenu fixe et d'actions.

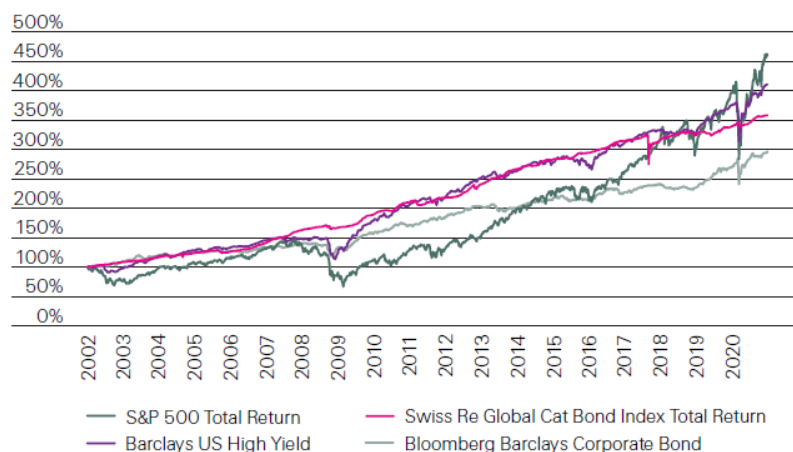


FIG. 2.11 : Evolution de l'indice des Cat bonds et autres indices de marché en 2020

Les marchés ILS ont bien résisté aux turbulences des mois de mars à mai 2020, démontrant une fois de plus la résilience de la classe d'actifs et sa faible corrélation avec les marchés financiers plus larges. Comme lors de la crise financière de 2008, cette faible corrélation suscitera un regain d'intérêt de la part des investisseurs finaux. À l'approche du deuxième trimestre 2020, les nouvelles émissions ont repris, les investisseurs restant néanmoins incertains quant à l'orientation des marchés financiers au sens large.

Tout au long des mois d'été, de nouveaux investissements ont été réalisés dans des fonds ILS et les spreads se sont resserrés tout au long d'un fort 3e et 4e trimestre d'émission. À la fin du 3e trimestre, le marché primaire a retrouvé l'élan qu'il avait connu au début de l'année civile. En septembre, California Earthquake Authority (CEA) a annoncé une nouvelle transaction, qui était sa deuxième transaction de l'année. Cette transaction a donné le coup d'envoi d'un 3e et d'un 4e trimestre très actifs, en augmentant trois fois la taille de l'émission pour devenir la plus grosse transaction de l'année (775 millions d'USD) avec deux catégories d'obligations. Une multitude de nouveaux sponsors sont entrés sur le marché et ont été bien soutenus par les investisseurs à des spreads beaucoup plus bas que pendant les mois de printemps et d'été.

2.6 Les agences de notation

Les obligations catastrophes sont souvent notées par des agences comme Standard & Poor's, Moody's ou Fitch Ratings. Une obligation d'entreprise type est notée en fonction de sa probabilité de défaut en raison de la faillite de l'émetteur. Une obligation catastrophe est notée en fonction de sa probabilité de défaut en raison d'une catastrophe admissible déclenchant une perte de capital. Cette probabilité est déterminée à l'aide de modèles de catastrophe. La plupart des obligations catastrophes sont notées en dessous de la catégorie investissement (notations des catégories BB et B), et les diverses agences de notation ont récemment adopté l'idée que les titres doivent nécessiter plusieurs événements avant la survenance d'une perte pour être notés investissement.

Catégorie	Notation	Commentaire
Investissement	AAA	Note la plus haute. Aptitude extrêmement forte à remplir les obligations financières
	AA	Aptitude très forte à remplir les obligations financières
	A	Forte aptitude à remplir les obligations financières. Une certaine sensibilité aux effets défavorables des changements des conditions économiques
	BBB	Aptitude suffisante à remplir les obligations financières. Une sensibilité plus grande aux effets défavorables des changements des conditions économiques
	BBB-	Considérée comme la note la plus basse de la catégorie investissement par les acteurs du marché
Spéculative	BB+	Considérée comme la note la plus haute de la catégorie spéculative par les acteurs du marché
	BB	Peu vulnérable à court terme mais confronté à des incertitudes majeures et persistantes du fait des conditions économiques et financières défavorables
	B	Vulnérabilité accrue aux conditions économiques et financières défavorables mais aptitude à faire face à ses engagements dans l'immédiat
	CCC	Vulnérabilité dans l'immédiat. Aptitude à faire face à ses engagements dépendant des conditions économiques et financières favorables
	CC	Très grande vulnérabilité dans l'immédiat
	C	Procédure de mise en faillite, mais sans interruption des engagements financiers
	D	Défaut de paiement des engagements financiers

FIG. 2.12 : L'échelle de notation selon S&P

Chapitre 3

Modélisation du risque sismique

3.1 Tremblement de terre : Phénomène en question

3.1.1 Etude scientifique du phénomène

Avant de pouvoir parler du mécanisme des tremblements de terre, nous faisons un petit rappel de géologie. La structure interne de la planète est présentée comme le suivant :

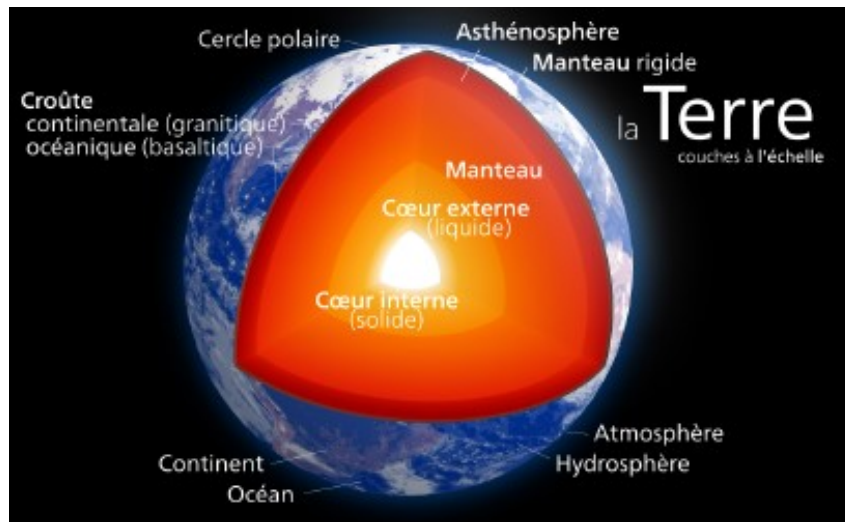


FIG. 3.1 : Géologie de la Terre

On s'intéresse à l'ensemble de la Croûte terrestre et le manteau rigide, plus connu sous le nom de : Lithosphère. En effet, les plaques tectoniques (ou lithosphériques) ne sont pas stables, mais se déplacent de quelques centimètres par an dans des directions différentes. Lors de ce déplacement, il se peut qu'il ait une collision entre deux plaques, dont résulte un niveau très intense d'énergie. Lorsque cela dépasse la limite de résistance des roches, il y a rupture et libération de l'énergie accumulée, et ainsi ce qu'on appelle séisme se produit.

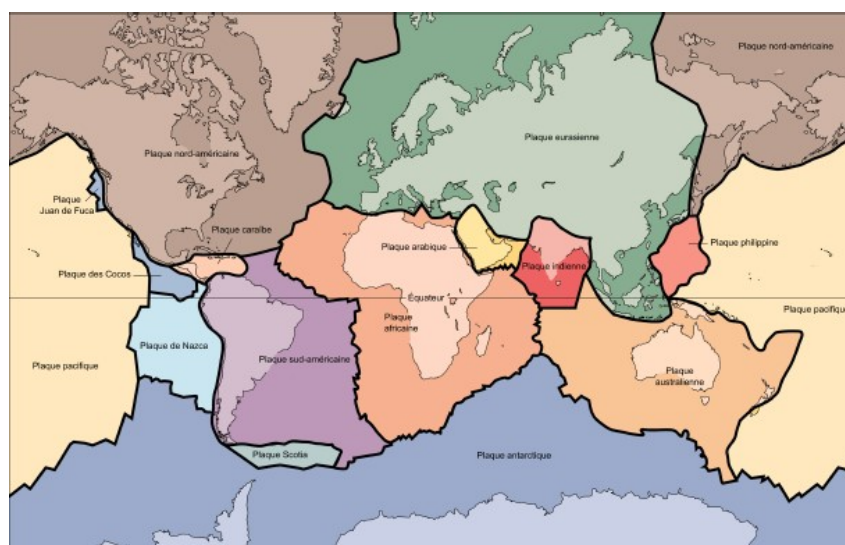


FIG. 3.2 : Composition du Lithosphère

La sévérité d'un séisme est caractérisée par deux concepts : l'intensité et la magnitude. L'amplitude correspond à l'énergie libérée pendant le tremblement de terre. En théorie, celle-ci peut être illimitée et se mesure de différentes manières. La plus fameuse est l'échelle de Richter qui est une échelle logarithmique à valeurs entre 0 et 10.

Quant à l'intensité, elle indique les conséquences du séisme en surface. Celle-ci est mesurée par l'échelle Macroséismique en Europe, l'échelle de Mercalli Modifié aux États-Unis. Ces échelles vont toutes de 1 à 12.

Séisme	Magnitude	Effets	Fréquence d'occurrence
Micro	< 2,0	Micro tremblement de terre, non ressenti.	8000 par jour
Très mineur	2,0-2,9	Généralement non ressenti mais enregistré par les sismomètres.	1000 par jour
Mineur	3,0-3,9	Souvent ressenti mais causant rarement des dommages.	49000 par an
Léger	4,0-4,9	Secousses d'objets à l'intérieur des maisons, bruits d'entrechoquement. Dommages légers.	6200 par an
Modéré	5,0-5,9	Peut causer des dommages majeurs à des édifices mal conçus dans des zones restreintes. Cause de légers dommages aux édifices bien construits.	800 par an
Fort	6,0-6,9	Peut être destructeur dans des zones allant jusqu'à 180 kilomètres à la ronde si elles sont peuplées.	120 par an
Majeur	7,0-7,9	Peut provoquer des dommages sévères dans des zones plus vastes.	18 par an
Important	8,0-8,9	Peut causer des dommages sérieux dans des zones à des centaines de kilomètres à la ronde.	1 par an
Exceptionnel	> 9,0	Dévaste des zones de plusieurs milliers de kilomètres à la ronde.	2 tous les 100 ans

FIG. 3.3 : Classification des différents tremblements de terre selon la magnitude

Les tremblements de terre sont considérés comme les plus intenses des catastrophes, que cela soit au niveau des pertes économiques ou humaines. On compte plus de 750000 morts, des millions de blessures durant la période 1995-2021.

Au niveau économique, les pertes sont souvent d'un échelle astronomique. Par exemple, le fameux Tremblement de terre qui s'est déclenché à Kobe le 17 janvier 1995 est estimé avoir causé des pertes qui dépassent les 100 milliards de dollars, ce qui le donne le titre de le plus couteux séisme enregistré.

3.1.2 Aperçu historique sur la sismologie au Maroc

Le Maroc a subi par le passé plusieurs tremblements de terre destructeurs. Quelques villes ont même été partiellement ou en grande partie détruites : Agadir (1731, 1761), Fès (1522, 1624, 1755), Marrakech (1719, 1755), Meknès (1624, 1755), Melillia (1821, 1848), Rabat-Salé (1755), Tanger (1755, 1773). Ce n'est qu'au début du vingtième siècle que l'on a commencé à avoir des renseignements scientifiques sur les séismes au Maroc ; où en 1904, les premières études scientifiques avaient signalé que le Maroc, comme les autres pays de l'Afrique du Nord et l'Espagne, était exposé aux séismes.

À partir de 1932, des enquêtes macrosismiques pour tout le Maroc ont été organisées

par le l'Institut Scientifique Chérifien (devenu Institut Scientifique) grâce au réseau d'observateurs météorologiques et aux enquêtes par questionnaires. Ce n'est qu'en 1937 que la première station sismologique fut installée au Maroc à l'observatoire Ibn Rochd (Averroès) de l'Institut Scientifique (Université Mohammed V-Agdal, Rabat); la deuxième station n'a vu le jour qu'en 1964 à l'observatoire d'Ifrane après le tremblement de terre d'Agadir (1960). Le développement assez important du réseau sismologique national à partir de 1979 a permis d'améliorer sensiblement la localisation instrumentale des épicentres des séismes.

3.1.3 Activité sismique du Maroc

Le Maroc est situé à l'extrémité nord-occidentale de l'Afrique, là où la plaque africaine rentre en collision avec la plaque européenne dont le taux de rapprochement est d'environ 0,4cm/an au niveau du détroit de Gibraltar. Cette position particulière du Maroc se traduit actuellement par une sismicité relativement importante qui reflète la poursuite de la convergence entre ces deux plaques lithosphériques.

La sismicité observée au Maroc pendant le siècle dernier a été relativement modérée, il n'y a pas eu de séismes de magnitude supérieure à 6, cependant, plusieurs séismes de magnitudes moyennes (5,2-5,9) ont provoqué la mort de nombreuses personnes et ont causé des dégâts importants (Agadir 1960; Rissani 1992; Al Hoceima 1994). En 2004, le Maroc a été frappé de nouveau par un violent séisme dans la province d'Al Hoceima (Magnitude = 6,3) provoquant la mort de 629 personnes et des dégâts considérables.

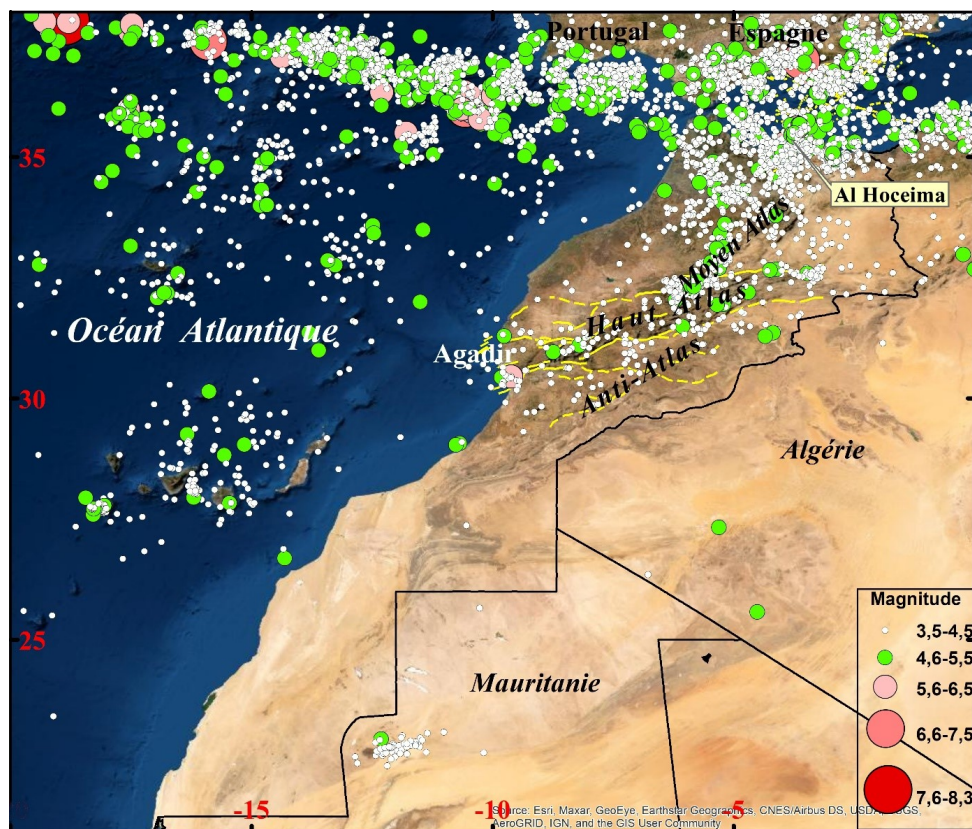


FIG. 3.4 : Sismicité du Maroc pour la période 1901-2020 pour Magnitude 3,5

La carte de sismicité du Maroc des régions limitrophes pour la période 1901-2010 montre que les épicentres sont répartis dans trois domaines :

- **domaine atlasique** : où l'activité sismique est principalement localisée dans le Moyen Atlas et le Haut Atlas central. Cette sismicité est due en grande partie à la présence d'un réseau complexe de failles tectoniquement actif. Dans le Haut Atlas, l'accident sud atlasique, qui part d'Agadir et passe à proximité de Figuig, est jalonné par des épicentres qui peuvent être violents comme celui d'Agadir ;
- **domaine bético-rifain** : c'est toute la région comprise entre le sud-est de l'Espagne au Nord et la chaîne rifaine au Sud. Il est le siège d'une activité sismique intense qui témoigne du rapprochement et la collision des deux plaques Afrique-Eurasie ;
- **domaine atlantique** : où on distingue clairement la limite entre les deux plaques, représentée par la ligne sismique Açores-Gibraltar-Sicile. Celle-ci est jalonnée par des séismes de magnitude pouvant atteindre ou dépasser le degré 7. Par ailleurs, ces séismes océaniques peuvent affecter le Maroc et la péninsule Ibérique comme se fut le cas lors du tremblement de terre de 1755 dit de Lisbonne.

3.2 Programmes de la banque mondiale (exemple : MultiCat)

La Banque mondiale a annoncé sa participation à MultiCat Mexique 2009 Ltd. La Banque internationale a contribué à la mise sur le marché de cette transaction qui était conçue pour offrir une plateforme qui permettra à d'autres gouvernements et entités publiques d'avoir une assurance contre les catastrophes naturelles par le biais des marchés des capitaux. C'est une innovation dans ce domaine que cette plateforme est mise à la disposition des gouvernements des pays en développement, alors que c'est une initiative passionnante qui pourrait annoncer une nouvelle ère dans le transfert de risque public-privé.

Grâce au programme MultiCat, les participants pourront obtenir une couverture pour de multiples périls, pays et régions en utilisant une documentation commune, un cadre juridique et opérationnel pour les futures émissions de cat bonds (qui porteront tous le nom de MultiCat). Le programme a été conçu pour être flexible afin de permettre la mise en commun des risques, ce qui peut accroître la diversification, une caractéristique clé pour attirer les investisseurs à la recherche d'actifs non corrélés. La Banque mondiale avait comme objectif que ce programme contribuera à élargir la communauté traditionnelle des investisseurs en obligations catastrophes et à attirer de nouveaux participants.

Kenneth Lay, vice-président et trésorier de la Banque mondiale, a déclaré : "Le programme MultiCat est une étape importante sur la voie de l'amélioration de la liquidité, de la réduction des coûts de transaction et de la diversification des pays et des risques pour les investisseurs en obligations catastrophes. Nous pensons que cela se traduira par un bien meilleur accès à la couverture à des conditions nettement plus avantageuses pour les gouvernements et autres organismes publics qui y ont recours pour gérer les risques de catastrophe, et ainsi réduire l'impact financier et économique des catastrophes naturelles."

Il est formidable de voir la Banque mondiale prendre des mesures pour aider les pays en développement à accéder aux marchés des capitaux et, dans le même temps, proposer une forme d'investissement nouvelle et diversifiée qui ne peut que contribuer à accroître l'intérêt pour les obligations catastrophes. L'accès à une plateforme offrant des conditions de transaction standardisées réduira considérablement les obstacles à l'entrée sur le marché pour tout pays souhaitant entrer dans le monde du transfert des risques de catastrophes. Il semble que MultiCat Mexico 2009 pourrait n'être que la première d'une série d'émissions d'obligations catastrophes MultiCat.

Profitant de ce programme, le gouvernement du Mexique a décidé d'émettre ses propres Cat-Bonds. Les détails de l'émission étaient comme suit :

MultiCat Mexico 2009 Ltd. – At a glance:

- **Issuer:** MultiCat Mexico 2009 Ltd.
- **Cedent / sponsor:** FONDEN (Fund for Natural Disasters)
- **Placement / structuring agent/s:** wiss Re are acting as counterparty to the deal. Swiss Re Capital Markets and Goldman Sachs are co-lead managers.
- **Risk modelling / calculation agents etc:** AIR Worldwide
- **Risks / perils covered:** Mexico hurricane, Mexico earthquake
- **Size:** \$290m
- **Trigger type:** Parametric
- **Ratings:** S&P: Class A - 'B', Class B - 'B', Class C - 'B', Class D - 'BB'
- **Date of issue:** Oct 2009

FIG. 3.5 : Détails du programme MultiCat

Chapitre 4

Evaluation d'un cat bond : partie théorique

4.1 Hypothèses générales

Bien que le problème général de l'évaluation d'un titre puisse être bien manipulé dans le cadre d'un marché complet en utilisant la théorie de l'absence d'arbitrage, les gains des titres d'assurance, dont les flux de trésorerie peuvent dépendre de tremblements de terre ou d'autres événements catastrophiques, ne peuvent pas être approchés de près par un portefeuille approprié d'actifs traditionnels déjà négociés sur le marché, tels que les actions et les obligations de sociétés. Par conséquent, l'évaluation d'une obligation catastrophes nécessite un cadre de marché incomplet.

Dans le cas des marchés incomplets, il n'existe pas à ce jour de théorie "universelle" qui aborde avec succès tous les aspects de la fixation des prix, tels que la spécification des stratégies de couverture et la robustesse des prix. C'est pourquoi divers mécanismes de tarification alternatifs ont été développés, liés à la nature spécifique de chaque marché.

Cox & Pedersen (2000) affirment que le fait que le risque de catastrophe ne soit pas corrélé aux mouvements des variables économiques sous-jacentes rend la théorie du marché incomplet un peu plus simple que dans le cas d'une corrélation significative. Dans ce cadre d'incomplétude du marché, il existe une multitude de prix possibles : il n'y a pas unicité de la probabilité risque neutre. Afin d'obtenir un prix unique pour le catastrophe bond étudié, il semble nécessaire de choisir une probabilité risque-neutre d'évaluation particulière et de préciser la distribution des variables aléatoires modélisant les catastrophes.

Soit T la maturité du catastrophe bond. Les variables des marchés financiers sont modélisées sur l'espace probabilisé $(\Omega^1, \mathcal{F}^1, P^1)$ avec une filtration $(\mathcal{F}_t^1)_{t \in [0:T]} \subset \mathcal{F}^1$ représentant l'évolution de l'information sur les marchés financiers. Les variables aléatoires modélisant le risque catastrophe sont définies sur l'espace probabilisé $(\Omega^2, \mathcal{F}^2, P^2)$ avec une filtration $(\mathcal{F}_t^2)_{t \in R_+} \subset \mathcal{F}^2$. L'espace probabilisé du modèle total est (Ω, \mathcal{F}, P) avec :

- $\Omega = \Omega^1 \times \Omega^2$: un événement de cet espace est noté $e = (e_1, e_2) \in \Omega^1 \times \Omega^2$ avec e_1 décrivant un état du monde pour les variables financières et e_2 décrivant un état du monde pour les variables liées au risque catastrophe.
- $\forall t \in [0 : T], \mathcal{F}_t = \mathcal{F}_t^1 \times \mathcal{F}_t^2$
- $\forall e \in \Omega, P(e) = P^1(e_1) P^2(e_2)$: ceci assure l'indépendance entre les variables aléatoires économiques et les variables aléatoires liées au risque catastrophe.

Pour pouvoir considérer des variables aléatoires du modèle total (Ω, \mathcal{F}, P) ne dépendant que des variables financières ou de celles liées au risque catastrophe, on définit deux nouvelles filtrations : $(\mathcal{A}_t^1)_{t \in R_+} := \mathcal{F}_t^1 \times \{\Omega, \emptyset\}$ et $(\mathcal{A}_t^2)_{t \in R_+} := \mathcal{F}_t^2 \times \{\Omega, \emptyset\}$. Les tribus \mathcal{A}_T^1 et \mathcal{A}_T^2 sont clairement indépendantes sous la mesure de probabilité P . Un processus stochastique \mathcal{A}_t^1 -adapté évolue en ne dépendant que des variables financières tandis qu'un processus \mathcal{A}_t^2 -adapté évolue en ne dépendant que des variables définissant le risque catastrophe.

Afin de choisir une probabilité risque-neutre Q sur (Ω, \mathcal{F}, P) , Cox et Pedersen utilisent un cadre théorique bien connu en économie financière : celui de l'agent représentatif. Ils définissent le prix d'un flux financier incertain comme étant la quantité rendant les agents indifférents entre l'achat de l'actif et la consommation de leur richesse. Ils supposent

notamment que l'économie globale et donc la consommation agrégée des agents ne sont pas affectés par la survenance d'une catastrophe naturelle.

Le risque catastrophique est modélisé par un processus modélisant les niveaux de risque pour le Maroc qui conserve sa distribution originale après passage de la mesure \mathbb{P} à la mesure \mathbb{Q} . On voit donc que l'étude dans le cadre de marché incomplet est simplifiée par l'hypothèse selon laquelle les variables liées à l'état des marchés financiers sont indépendantes de celles relatives au risque catastrophe.

4.2 Modélisation du risque de tremblement de terre

4.2.1 Le couple (Magnitude, Profondeur) comme paramètre

La modélisation du Cat bond paramétrique avec un seul paramètre du tremblement de terre comme la magnitude reste insuffisante. En effet, de nombreux séismes ont leur foyer dans la mer. Cela signifie que l'onde sismique, lorsqu'elle atteint le sol et plus précisément les zones habitées, s'est déjà atténuée. Par exemple, un tremblement de terre de magnitude 5 dans la mer peut être vu comme un tremblement de terre de magnitude 3 sur terre. En outre, une onde sismique de magnitude 5 avec une profondeur supérieure à 20 km ne cause pas les mêmes destructions qu'une autre avec la même magnitude mais une profondeur inférieure à 20 km. Alors, la profondeur et l'épicentre sont de première importance dans l'étude des séismes. De plus, de nombreux séismes ont leur foyer dans la mer, et donc pour bien expliquer le risque sismique, on doit ajouter une variable à la magnitude qui reste incontournable.

En effet, le couple qu'on a décidé à étudier est la magnitude et la profondeur. Ce choix se base sur le fait que pour une magnitude définie, le taux de destruction d'un tremblement de terre se varie avec la variation de la profondeur. On définit alors des niveaux qui sont associés à des valeurs de magnitudes et de profondeurs précis, et qui réfèrent à des taux de destruction du séisme. Les différents niveaux sont comme suit :

- **Niveau 0** : ($4.2 < m < 4.6$ et $p > 10$) ou ($4.6 < m < 5$ et $p > 20$) ou ($5 < m < 5.4$ et $p > 30$) ou ($5.4 < m < 5.8$ et $p > 40$) ou ($5.8 < m < 6.2$ et $p > 50$) ou ($m > 6.2$ et $p > 60$)
- **Niveau 1** : ($4.2 < m < 4.6$ et $p < 10$) ou ($4.6 < m < 5$ et $10 < p < 20$) ou ($5 < m < 5.4$ et $20 < p < 30$) ou ($5.4 < m < 5.8$ et $30 < p < 40$) ou ($5.8 < m < 6.2$ et $40 < p < 50$) ou ($m > 6.2$ et $50 < p < 60$)
- **Niveau 2** : ($4.6 < m < 5$ et $p < 10$) ou ($5 < m < 5.4$ et $10 < p < 20$) ou ($5.4 < m < 5.8$ et $20 < p < 30$) ou ($5.8 < m < 6.2$ et $30 < p < 40$) ou ($m > 6.2$ et $40 < p < 50$)
- **Niveau 3** : ($5 < m < 5.4$ et $p < 10$) ou ($5.4 < m < 5.8$ et $10 < p < 20$) ou ($5.8 < m < 6.2$ et $20 < p < 30$) ou ($m > 6.2$ et $30 < p < 40$)
- **Niveau 4** : ($5.4 < m < 5.8$ et $p < 10$) ou ($5.8 < m < 6.2$ et $10 < p < 20$) ou ($m > 6.2$ et $20 < p < 30$)

- **Niveau 5** : ($5.8 < m < 6.2$ et $p < 10$) ou ($m > 6.2$ et $10 < p < 20$)
- **Niveau 6** : ($m > 6.2$ et $p < 10$)

Avec : p = profondeur (en km) et m = la magnitude selon l'échelle de Richter

Par la suite, on définit la valeur estimative du taux de destruction correspondante à chaque niveau. Le tableau suivant récapitule ces données :

Niveaux	Taux de destruction
0	0-2%
1	2-10%
2	10-20%
3	20-25%
4	25-35%
5	35-40%
6	40-50%

TAB. 4.1 : Les taux de destruction selon chaque niveau

On trace par la suite, le graphique contenant le nuage de points de ces deux variables :

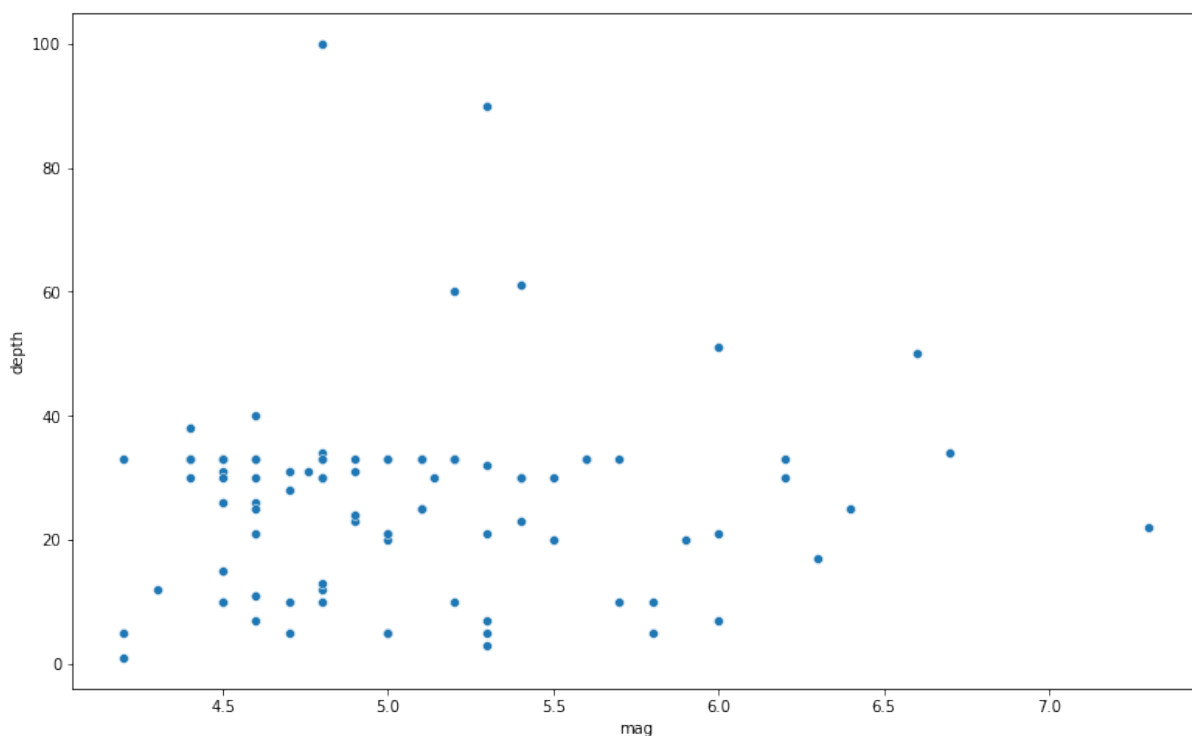


FIG. 4.1 : Nuage de points pour le couple (magnitude, profondeur)

4.2.2 Théorie des Valeurs Extrêmes (TVE)

Il s'agit dans l'étude des valeurs extrêmes d'analyser l'épaisseur des queues de distributions, ou encore d'étudier les plus grandes observations d'un échantillon pour caractériser

sa loi initiale. Ainsi, la théorie des extrêmes vient en complément de la théorie statistique classique où il est plus commun d'étudier le comportement d'une distribution autour de sa moyenne plutôt que dans le domaine des observations extrêmes souvent appelées événements rares. Nous allons voir que toute la théorie des extrêmes est fondée sur un équivalent au théorème central limite mais pour les queues de distribution.

L'étude des extrêmes d'un processus se base sur l'analyse du maximum d'un échantillon de taille n donnée $M_n = \max(X_1, X_2, \dots, X_n)$ où X_1, \dots, X_n sont des variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées ayant pour fonction de répartition F . En théorie, la distribution de M_n peut être obtenue en fonction de F . Soit $M_n = \max((X_i)_{i \geq 1})$:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(M_n \leq x) &= \mathbb{P}(X_1 \leq x, X_2 \leq x, \dots, X_n \leq x) \\ &= \overset{iid X_i}{\mathbb{P}(X_1 \leq x) \mathbb{P}(X_2 \leq x) \dots \mathbb{P}(X_n \leq x)} \\ &= \mathbb{P}(X_1 \leq x)^n \\ &= F(x)^n \end{aligned}$$

Cependant, cela n'est pas immédiatement utile dans la pratique, puisque la fonction de distribution F est toujours inconnue. Deux méthodes statistiques bien connues ont été développées pour surmonter ce problème. La première technique standard consiste à estimer F à partir des données observées, puis à substituer cette estimation dans la relation précédente. Une autre approche consiste à accepter que F est inconnu et à rechercher des familles approximatives de modèles pour F^n , qui peuvent être estimées sur la base des données extrêmes uniquement. En pratique, cette approche est assez similaire à l'approximation de la distribution de la moyenne de l'échantillon par la distribution normale, comme le justifie le Théorème Central Limite(TCL). Ainsi, les arguments sont essentiellement un analogue de la TCL pour les valeurs extrêmes.

Le premier théorème de la théorie des valeurs extrêmes précise les lois asymptotiques que peut suivre le maximum normalisé d'une suite de variables aléatoires iid.

Théorème (Fisher - Tippett - Gnedenko) : S'il existe des suites de réels a_n et b_n telles que, quand $n \rightarrow \infty$, $\mathbb{P}(M_n^* \leq x) = \mathbb{P}\left(\frac{M_n - a_n}{b_n} \leq x\right) \rightarrow G_\xi(x)$ pour une distribution non-dégénérée $G_\xi(x)$, alors cette dernière est une distribution de Fréchet, de Weibull ou de Gumbel :

- **Fréchet** ($\xi > 0$) : lorsque $\xi > 0$, de telles distributions possèdent des queues lourdes et la convergence de F^n vers la loi limite se fait très lentement.

$$\Phi_\xi(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \exp(-x^{-\xi}) & \text{sinon} \end{cases}$$

- **Weibull** ($\xi < 0$) : lorsque $\xi < 0$, dans ce cas la queue de la distribution sera très mince.

$$\Psi_\xi(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \exp(-(-x^{-\xi})) & \text{sinon} \end{cases}$$

- **Gumbel** ($\xi = 0$) : lorsque $\xi = 0$, la distribution G_0 est appelée distribution de Gumbel. Le support de cette loi est tout l'espace \mathbb{R} et dans ce cas les queues de

distribution sont légères et décroissent de manière exponentielle. Son expression est donnée par :

$$\Lambda_\xi(x) = \exp(-\exp(-x))$$

On dit que F appartient au domaine d'attraction de Fréchet (respectivement de Weibull ou de Gumbel) lorsque la loi limite des maximas suit une loi de Fréchet (respectivement de Weibull ou de Gumbel).

Ces trois lois caractérisent chacune un comportement spécifique des valeurs extrêmes. On les distingue à travers deux caractéristiques :

- la vitesse de décroissance de la probabilité des grandes valeurs. Si la décroissance est rapide, de type exponentielle, alors la loi des extrêmes est la loi de Gumbel. Si au contraire, elle est plus lente, de type puissance, on se réfère au second critère ;
- l'étendue de variation des données. Si celle-ci est bornée, alors la loi des extrêmes est la loi de Weibull, si ce n'est pas le cas, c'est la loi de Fréchet.

Ce théorème donne un résultat particulièrement intéressant puisqu'il permet, quelle que soit la loi de la variable parente, de déterminer la distribution du maximum sous certaines hypothèses généralement admises dans les modélisations actuarielles. Le comportement des queues de distribution de la plupart des lois usuelles peut donc s'expliquer par une seule loi définie ci-dessous dont un unique paramètre ξ en contrôle la lourdeur.

4.2.3 Ajustement par loi

Pour résoudre des problèmes statistiques, (Von Mises 1954) et (Jenkinson 1955) ont proposé la loi d'extremum généralisée (notée GEV pour Generalized Extreme Value) qui unifie les distributions de Fréchet, Weibull et Gumbel. On utilise cette loi GEV pour ajuster les distributions (par exemple : les magnitudes annuelles maximales).

Définition (loi d'extremum généralisée) : la loi GEV est définie par la fonction de répartition :

- pour $\xi \neq 0$:

$$G(z) = \exp \left(- \left(1 + \xi \left(\frac{z - \mu}{\sigma} \right) \right)^{-1/\xi} \right)$$

- pour $\xi = 0$:

$$G(z) = \exp \left(- \exp \left(- \frac{z - \mu}{\sigma} \right) \right)$$

Cette distribution possède trois paramètres :

- μ (le paramètre de localisation) : est un indicateur de la taille moyenne des extrêmes dans la distribution parente ;
- σ (le paramètre de dispersion) : il indique l'étalement des extrêmes ;

- ξ (l'indice de queue) : donne une indication de la forme ou le poids des queues de la distribution limite. Plus ce paramètre de queue diminue plus la distribution considérée est à queue épaisse.

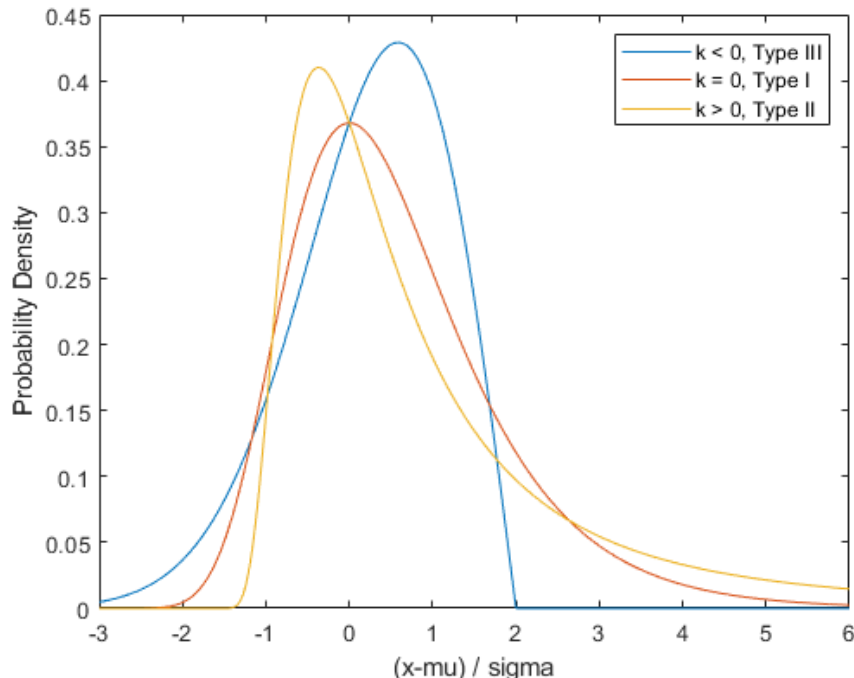


FIG. 4.2 : Densités de la loi des valeurs extrêmes pour différentes valeurs de ξ

Définition (Domaine d'attraction) : F appartient au domaine d'attraction de $G (F \in D(G))$ s'il existe deux suites (a_n) et (b_n) telles que la convergence précédente (Fisher-Tippett)) ait lieu.

En pratique un grand nombre de distributions vérifient le théorème. Les lois usuelles peuvent être classées selon leur domaine d'attraction :

- **Fréchet** ($\xi > 0$) : Cauchy, Student, Pareto
- **Weibull** ($\xi < 0$) : Uniforme, Bêta
- **Gumbel** ($\xi = 0$) : Normale, Gamma, Exponentielle

4.2.4 Estimation des paramètres

Il existe de nombreuses techniques considérables, comme les techniques graphiques qui sont basées sur des versions de diagrammes de probabilité, les techniques basées sur les moments dans lesquelles les paramètres sont estimés comme des fonctions spécifiées de statistiques d'ordre et la méthode classique basée sur la vraisemblance. Chaque technique a ses caractéristiques particulières, mais la valeur indiscutable et l'adaptabilité à la construction de modèles plus complexes de la méthode de vraisemblance la rendent particulièrement attrayante. L'estimation du maximum de vraisemblance pour les paramètres

(ξ, σ, μ) a été étudiée par un certain nombre d'auteurs dont Jenkinson (1969), Prescott et Walden (1980, 1983), Hosking (1985) et Macleod (1989). En outre, il convient de mentionner que les conditions de régularité sont satisfaites lorsque $\xi > -1/2$ et, dans ce cas, les variances et covariances asymptotiques des estimateurs du maximum de vraisemblance sont données par les éléments de la matrice d'information inverse de Fisher. Heureusement, l'expérience avec les données du monde réel, comme les données du maximum annuel de tremblements de terre, suggère que la condition ci-dessus pour ξ est presque toujours satisfaite.

Ainsi, nous supposons que M_1, \dots, M_n sont des variables indépendantes ayant la distribution GEV. Alors, la log-vraisemblance pour les paramètres GEV est donnée par :

- pour $\xi \neq 0$:

$$L(\xi, \sigma, \mu) = n \ln(\sigma) - \left(\frac{1 + \xi}{\xi}\right) \sum_{i=1}^k \ln \left(1 + \xi \left(\frac{m_i - \mu}{\sigma}\right)\right) - \sum_{i=1}^k \left(1 + \xi \left(\frac{m_i - \mu}{\sigma}\right)^{-1/\xi}\right)$$

- pour $\xi = 0$:

$$L(\xi, \sigma, \mu) = n \ln(\sigma) - \sum_{i=1}^k \left(\frac{m_i - \mu}{\sigma}\right) - \sum_{i=1}^k \exp\left(-\frac{m_i - \mu}{\sigma}\right)$$

La maximisation des équations précédentes par rapport au vecteur de paramètres (ξ, σ, μ) conduit à l'estimation du maximum de vraisemblance par rapport à la famille GEV entière. Aucune solution analytique aux équations annulant les dérivées n'existe, il faut donc avoir recours à une résolution numérique. Cependant, pour tout ensemble de données, la maximisation est obtenue de manière simple en utilisant des algorithmes numériques standard (par exemple, la méthode de Newton-Raphson), et le calcul du maximum de vraisemblance ne pose pas de difficultés ainsi que l'estimateur conserve les propriétés classiques de l'Estimateur du Maximum de Vraisemblance (EMV) tant que $\xi > -1/2$. Du point de vue de la programmation, on peut utiliser la fonction **GEV.FIT** de Coles (2004) pour trouver les estimateurs du maximum de vraisemblance du modèle GEV.

4.3 Simulation de la courbe des taux

4.3.1 Modèle de Vasiček

Soit $(r_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ le processus stochastique modélisant le taux d'intérêt. On suppose qu'il satisfait l'équation différentielle stochastique (EDS) suivante :

$$dr_t = \lambda(\mu - r_t) dt + \sigma dB_t$$

Où $(B_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ un mouvement Brownien standard, μ, λ et σ sont des constantes.

- μ représente la moyenne à long terme du taux court

- λ représente la vitesse d'ajustement du taux court actuel vers sa moyenne de long terme μ

Cette modélisation permet de prendre en compte l'effet de retour à la moyenne constatée sur les taux d'intérêts. Ce qui signifie que si le taux d'intérêt r_t est supérieur à la moyenne à long terme μ , le coefficient λ tire la tendance temporelle devenue négative dans la direction de μ . En effet, des valeurs élevées des taux ont tendance à être suivies plus fréquemment par des baisses que par des hausses. L'effet inverse est également constatée pour des niveaux de taux inhabituellement bas.

Ce modèle présente un intérêt particulier en finance car il existe également des arguments économiques convaincants en faveur du retour à la moyenne. Lorsque les taux sont élevés, l'économie a tendance à ralentir et les emprunteurs ont besoin de moins de fonds. Les taux retombent donc à leur valeur d'équilibre. Au contraire, lorsque les taux sont bas, la demande de fonds a tendance à être forte et les taux augmentent.

4.3.2 Discrétisation selon le schéma d'Euler

La solution de l'équation différentielle mentionnée dans la partie précédente est donnée par :

$$r_t = r_0 e^{-\lambda t} + \mu (1 - e^{-\lambda t}) + \sigma e^{-\lambda t} \int_0^t e^{\lambda s} dB_s.$$

La mise en oeuvre pratique des processus stochastiques, tels que le modèle de Vasicek nécessite de les discrétiser, que ce soit pour l'estimation des paramètres ou pour la simulation des trajectoires. On a, la solution du modèle de Vasicek pour r démarrant à l'instant t est donnée par

$$r_s = r_t e^{-\lambda(s-t)} + \mu (1 - e^{-\lambda(s-t)}) + \sigma e^{-\lambda s} \int_t^s e^{\lambda u} dB_u.$$

La méthode d'Euler permet de discrétiser l'équation précédente avec un pas $\delta t > 0$:

$$r_{t+\delta t} = r_t(1 - \lambda\delta t) + \lambda\mu\delta t + \sigma\sqrt{\delta t}U$$

Avec : $U \sim \mathcal{N}(0, 1)$

La relation entre des observations consécutives r_t et $r_{t+\delta t}$ est linéaire avec un terme d'erreur ε :

$$r_{t+\delta t} = ar_t + b + \varepsilon$$

Avec : ε iid et de loi $\mathcal{N}(0, \sigma^2\delta t)$, $a = 1 - \lambda\delta t$ et $b = \lambda\mu\delta t$

Cette équation indique que les taux courts s'ajustent suivant un processus autorégressif d'ordre 1 (AR1); hypothèse qu'elle faut vérifier pour les données utilisées dans l'estimation.

4.3.3 Estimation des paramètres du modèle

On cherche les estimateurs de a et b minimisant la valeur moyenne du carré de la différence entre valeurs observées et prédites par le modèle : ceci correspond aux estimateurs

des moindres carrés ordinaires (MCO). Les résidus sont donnés par :

$$R_i = r_{i+1} - (ar_i + b) \text{ pour } i = 1, \dots, n$$

Le programme d'optimisation s'écrit :

$$(\hat{a}, \hat{b}) = \operatorname{argmin}_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} S = \operatorname{argmin}_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \sum_{i=1}^n R_i^2$$

On trouve (\hat{a}, \hat{b}) en annulant les dérivées partielles :

$$\begin{cases} \frac{\partial S}{\partial a}(\hat{a}, \hat{b}) = 0 \\ \frac{\partial S}{\partial b}(\hat{a}, \hat{b}) = 0 \end{cases}$$

Ceci donne :

$$\begin{cases} \hat{a} = \frac{\sum_{i=1}^n r_{i+1} r_i - \frac{1}{n} (\sum_{i=1}^n r_{i+1} \sum_{i=1}^n r_i)}{\sum_{i=1}^n r_i^2 - \frac{1}{n} (\sum_{i=1}^n r_i)^2} \\ \hat{b} = \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n r_{i+1} - \frac{\sum_{i=1}^n r_{i+1} r_i - \frac{1}{n} (\sum_{i=1}^n r_{i+1} \sum_{i=1}^n r_i)}{\sum_{i=1}^n r_i^2 - \frac{1}{n} (\sum_{i=1}^n r_i)^2} \sum_{i=1}^n r_i \right) \end{cases}$$

On en déduit les estimateurs des paramètres du modèle initial :

$$\begin{cases} \hat{\lambda} = \frac{1-\hat{a}}{\delta t} \\ \hat{\mu} = \frac{\hat{b}}{1-\hat{a}} \\ \hat{\sigma} = \sqrt{\frac{\frac{1}{n} \sum_{i=0}^n (r_{i+1} - (\hat{a}r_i + \hat{b}))^2}{\delta t}} \end{cases}$$

4.4 Tarification du Cat Bond

4.4.1 Méthodes de tarification : Lane et Wang

A l'issue de la première opération des ILS en 1996, Plusieurs essais de tarification ont eu lieu. Lane(2000), en se basant sur des observations empiriques des opérations antécédentes propose un modèle économétrique à 3 paramètres permettant d'obtenir les prix "nettes" du Cat-Bond. Selon ce modèle, le prix du Cat-Bond comportera :

- le risque financier : Celui-ci est dû au taux Libor
- le risque assurantiel : caractérisé par le Spread qu'on accorde aux investisseurs

Selon ce modèle, le spread est divisé en deux parties, sa perte moyenne, et une partie est dédiée à la compensation d'avoir pris le risque. Lane l'appelle "EER"(Expected Excess Return).

Pour modéliser cet "EER", Lane propose d'adopter une fonction dite Cobb-Douglas, prenant comme variables :

- CEL (Conditional Expected Loss) : définie comme une sévérité, c'est-à-dire le montant moyen que l'investisseur peut perdre si on a catastrophe

- PFL (Probability of First loss) : probabilité de défaut, ou probabilité du premier dollar perdu

la forme de cette fonction est la suivante :

$$EER = \gamma(PFL)^\alpha(CEL)^\beta$$

Ainsi que $EL = PFL \times CEL$, avec EL : Expected Loss

En se basant sur les transactions précédentes, Lane a pu obtenir les valeurs suivantes : $\alpha = 0.495$, $\beta = 0.574$ et $\gamma = 0.55$.

Cependant, Wang (2004) propose une approche pour évaluer les cat bond par des spreads à l'aide de transformée de probabilités. Il introduit deux transformées de probabilités :

- la transformée de Wang à 1 paramètre associé à une fonction de répartition F . Cette transformée est de la forme $F^*(x) = g_k(F)(x) = \phi(\phi^{-1}(F(x)) + \lambda)$
- la transformée de Wang à deux paramètres est définie par $F^*(x) = g_{\lambda,k}(F)(x) = Q_k(\phi^{-1}(F(x)) + \lambda)$, où Q_k désigne la fonction de répartition de la loi de Student à k degrés de liberté.

Wang (2004) montre que pour des variables aléatoires X normale et lognormale, le coefficient λ de la transformée de Wang est le ratio de Sharpe pour passer de la probabilité risque historique à la probabilité risque neutre dans le modèle de Black & Scholes.

Ces méthodes citées ci-dessus reposent sur des obligations catastrophes qui sont indemnitaires ou dépendantes des pertes sectorielles. En effet, elles s'adressent au problème de l'évaluation d'un titre lié à une indemnité. Dans cette structure, les versements de coupons ou de capital sont liés au montant des pertes réelles assurées. Ainsi, notre étude se focalise sur les cat bonds paramétriques, et en particulier dans ce cas ceux qui dépendent des paramètres du séisme au Maroc. Dans le cadre de leur étude sur le risque de tremblement de terre pour la Grèce, *A.Zimbidis, N.Frangos et A.Pantelous* (2007) proposent une méthode d'évaluation du Cat bond.

4.4.2 Modèle à une période

Dans cette partie, nous procédons à la construction du modèle simple à une période où la dynamique des taux d'intérêt est restreinte à des valeurs constantes de différents taux. Tout d'abord, nous définissons les symboles nécessaires et la notation respective :

N : est la valeur nominale de l'obligation catastrophes

r : est le taux sans risque composé en continu (jusqu'à la date d'échéance)

e : est la prime supplémentaire pour supporter le risque de tremblement de terre (normalement, il s'agit d'une quantité positive reflétant l'aversion au risque respective des acheteurs d'un tel titre)

R : est l'élément de base pour la détermination du taux de paiement du coupon pour la période d'un an tant qu'un événement catastrophique spécifié ne se produit pas

P : est le prix de l'obligation catastrophes

C : est la valeur au comptant de l'obligation catastrophes à la date d'échéance en fonction de chaque niveau selon la structure décrite dans l'expression suivante :

$$C = \begin{cases} N(1 + 3R) & \text{Si Niveau 0} \\ N(1 + 2R) & \text{Si Niveau 1} \\ N(1 + R) & \text{Si Niveau 2} \\ N & \text{Si Niveau 3} \\ \frac{2}{3}N & \text{Si Niveau 4} \\ \frac{1}{3}N & \text{Si Niveau 5} \\ 0 & \text{Si Niveau 6} \end{cases}$$

En supposant que N , r , R et e sont des constantes. Selon le principe d'équivalence standard, le prix du Cat bond est obtenu comme suit :

$$P = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(e^{-(r+e)} \cdot C)$$

où \mathbb{Q} est la mesure de probabilité correspondant à la distribution de la magnitude et à la distribution de la profondeur obtenues dans le chapitre suivant.



FIG. 4.3 : Le diagramme pour le modèle à une période

4.4.3 Modèle multi-périodes

Nous présentons quelques détails techniques afin d'obtenir une base théorique concrète pour notre problème.

Nous modélisons le marché financier et par conséquent le processus pour le taux sans risque R_t , $t \in [0, T]$ dans un espace de probabilité complet $(\Omega_2, \mathcal{F}_2, \mathbb{Q}_2)$ qui est équipé de la filtration naturelle appropriée.

Le risque catastrophique est modélisé dans un autre espace de probabilité complet $(\Omega_1, \mathcal{F}_1, \mathbb{Q}_1)$ également équipé d'une filtration naturelle appropriée.

Par conséquent, l'espace de probabilité pour le modèle complet est $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{Q})$, où :

- L'espace d'échantillonnage de notre modèle est le produit suivant : $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$. Par conséquent, un élément typique de l'espace d'échantillonnage pour le modèle complet est de la forme :

$$w = (w_1, w_2) \text{ avec } w_1 \in \Omega_1, w_2 \in \Omega_2$$

- La filtration pour l'espace de mesure du produit est dénotée par le rectangulaire :

$$F = F_1 \times F_2$$

- La mesure de probabilité sur l'espace d'échantillonnage Ω est donnée par la structure de mesure du produit naturel. Par conséquent, la probabilité d'un état générique du monde, $w = (w_1, w_2)$, est la suivante : $Q(w) = Q_1(w_1) \cdot Q_2(w_2)$

Cette hypothèse implique l'indépendance entre les événements dépendant uniquement des variables de risque économique et ceux dépendant uniquement des variables de risque de catastrophe. Par conséquent, l'occurrence temporelle de la catastrophe est indépendante de la structure des taux.

Nous procédons maintenant à la formulation du modèle multi-périodes en définissant tous les symboles nécessaires et la notation respective, tout en gardant à l'esprit le cadre discret de notre analyse, à savoir :

N , r et e ont la même signification que dans le modèle à une période.

T : est la date d'échéance (la maturité) de l'obligation catastrophes

i_n : est le taux de rendement annuel d'un compte de dépôt bancaire type pour la $(n+1)$ -ième année (c'est-à-dire dans l'intervalle $[n, n+1]$). Nous supposons que i_n est une variable aléatoire distribuée de manière log-normale (cette hypothèse coïncide avec l'expérience pratique, voir pour plus de détails : Kellison, 1991 et Baxter & Rennie, 1999) avec les paramètres μ_1 et σ_1^2 pour tout $n = 1, 2, 3, \dots$

$$E(i_n) = e^{\mu_1 + \frac{1}{2}\sigma_1^2} = 2\% \ \& \ \text{Var}(i_n) = e^{2\mu_1 + \sigma_1^2}(e^{\sigma_1^2} - 1) = (0.5\%)^2$$

Ainsi :

$$i_n : \text{LogNormal}(-3.94, 0.061)$$

R_t : est le taux sans risque au temps t . Pour des raisons de popularité, nous supposons que $\{R_t, t \in [0, T]\}$ est un processus stochastique piloté par un mouvement brownien, décrit par le modèle de Vasicek précisé à la section précédente.

M_n : est le niveau de magnitude maximale annuelle du séisme dans la zone frontalière de la Grèce au cours de la n -ième année. Les M_n sont mesurés en échelle de magnitude locale (LM) et ont une distribution commune qu'on va détailler sur la partie suivante.

P : est le prix du Cat bond basé sur les séismes, au temps 0 (prix d'émission)

$f(R_l)$: est la valeur en espèces reçue par le détenteur du Cat bond au moment $l = 1, 2, \dots, T$

$$f(R_l) = \begin{cases} (3R_l) \cdot \mathbf{1}_{\{\text{Niveau } 0\}} + (2R_l) \cdot \mathbf{1}_{\{\text{Niveau } 1\}} + (R_l) \cdot \mathbf{1}_{\{\text{Niveau } 2\}} \\ \text{pour } l = 1, 2, 3, \dots, T-1 \\ (3R_l) \cdot \mathbf{1}_{\{\text{Niveau } 0\}} + (2R_l) \cdot \mathbf{1}_{\{\text{Niveau } 1\}} + (R_l) \cdot \mathbf{1}_{\{\text{Niveau } 2\}} + \\ + N \cdot \mathbf{1}_{\{\text{Niveau } 3\}} + \frac{2}{3}N \cdot \mathbf{1}_{\{\text{Niveau } 4\}} + \frac{1}{3}N \cdot \mathbf{1}_{\{\text{Niveau } 5\}} \\ \text{pour } l = T \end{cases}$$

Il est évident qu'une catastrophe peut ou pas se produire avant la date d'échéance prévue, à l'instant T . Comme nous pouvons le voir dans le flux de trésorerie des détenteurs

d'obligations, le Cat bond d'une valeur nominale de N doit verser des coupons de $N \cdot (3R)$, $N \cdot (2R)$, $N \cdot R$ à la fin de chaque période si on est sur les niveaux 0,1 et 2 respectivement ou un paiement de coupon nul si on dépasse le niveau 2. Alors que l'obligation catastrophes est prévue pour rembourser la totalité, les deux tiers, un tiers ou rien du capital le jour de l'échéance si on est sur les niveaux (0 ou 1 ou 2 ou 3), 4, 5, 6 respectivement, pendant cette période disons une période de T ans.

Maintenant, selon la théorie des prix d'équilibre, nous obtenons le prix P par :

$$P := E^Q \left\{ e^{-(r+e)T} \sum_{l=1}^T FV_T f(R_l) \right\}$$

Où :

$$FV_T f(R_l) = f(R_l) \cdot \prod_{k=0}^{T-l-1} (1 + i_{l+k})$$

4.5 Exemple de Cat bond : The Morgan Stanley Bond

Cette obligation verse des coupons à un taux c par période jusqu'à ce qu'une catastrophe se produise. Si aucune catastrophe ne se produit, l'obligation arrive à échéance avec un paiement final au temps T de $1 + c$. Nous définissons le temps τ de la première catastrophe comme suit :

$$\tau \equiv \min\{k \mid X(k) > 0\}$$

où $\tau = \infty$ si $X(k) = 0$ pour tout k . Si une catastrophe se produit, les détenteurs d'obligation reçoivent un paiement final de $g(X(\tau))$ où $g(x)$ est une fonction spécifiée dans le contrat d'obligation, qui dépend de nombreux paramètres. Les flux de trésorerie pour l'obligataire sont :

$$c(k) = \begin{cases} r \cdot 1_{\{\tau > k\}} + g(X(k)) \cdot 1_{\{\tau = k\}} & , k = 1, 2, \dots, T - 1 \\ (1 + c) \cdot 1_{\{\tau > T\}} + g(X(T)) \cdot 1_{\{\tau = T\}} & , k = T \end{cases}$$

où le coupon à taux fixe c et la valeur nominale 1 sont payés jusqu'à ce qu'une catastrophe se produise.

Un calcul direct montre que, puisque les coupons sont indépendants de $P^{(1)}$,

$$\begin{aligned} \check{c}(k) &= E^Q [c(k) \mid P^{(1)}] \\ &= \begin{cases} c \cdot E^Q [1_{\{\tau > k\}} + g(X(k))1_{\{\tau = k\}}] & , k = 1, 2, \dots, T - 1 \\ (1 + c)E^Q [1_{\{\tau > T\}} + g(X(T))1_{\{\tau = T\}}] & , k = T \end{cases} \end{aligned}$$

En utilisant $E^Q [1_{\{\tau > k\}}] = \theta_0^k$,

$$E^Q [g(X(k))1_{\{\tau = k\}}] = \theta_0^{k-1} (1 - \theta_0) E^Q [g(X(k) \mid X(k) > 0)]$$

Et on pose :

$$\begin{aligned} \mu &= E^Q [g(X(k)) \mid X(k) > 0] \\ &= g(x_1) \frac{\theta_1}{1 - \theta_0} + g(x_2) \frac{\theta_2}{1 - \theta_0} + \dots + g(x_n) \frac{\theta_n}{1 - \theta_0} \end{aligned}$$

Ensuite, nous avons le flux de trésorerie attendu (en moyenne sur la distribution des pertes) conditionnel aux états financiers :

$$\bar{c}(k) = \begin{cases} c\theta_0^k + \theta_0^{k-1} (1 - \theta_0) \mu & , k = 1, 2, \dots, T - 1 \\ (1 + c)\theta_0^T + \theta_0^{T-1} (1 - \theta_u) \mu & , k = T \end{cases}$$

Il s'est avéré pour cette obligation que les coupons attendus sont constants. Ensuite, en s'appuyant sur la relation d'indépendance pour simplifier l'espérance suivant $V(c) = E^Q \left[\sum_{k=1}^T \frac{1}{[1+r(0)][1+r(1)] \dots [1+r(k-1)]} c(k) \right]$ du flux de trésorerie élaboré ci-dessus, on constate que le prix de l'obligation à risque de catastrophe est donné par l'expression :

$$\begin{aligned} V &= E^{Q_1} \left[\sum_{k=1}^T \frac{1}{[1+r(0)][1+r(1)] \dots [1+r(k-1)]} \bar{c}(k) \right] \\ &= \sum_{k=1}^T E^{Q_1} \left[\frac{1}{[1+r(0)][1+r(1)] \dots [1+r(k-1)]} \bar{c}(k) \right] \\ &= \sum_{k=1}^T E^{Q_1} \left[\frac{1}{[1+r(0)][1+r(1)] \dots [1+r(k-1)]} \right] \bar{c}(k) \\ &= \sum_{k=1}^T P(k) \bar{c}(k) \\ &= \sum_{k=1}^T P(k) \theta_0^k + P(T) \theta_0^T + \mu \sum_{k=1}^T P(k) \theta_0^{k-1} (1 - \theta_0) \end{aligned}$$

L'examen de la relation précédente nous permet de tirer la conclusion suivante : Nous avons établi que l'évaluation par un agent représentatif est équivalente à la sélection d'un modèle de structure des termes indépendant de la structure du risque de catastrophe et à la combinaison de ce modèle de structure des termes avec les probabilités de survenance d'une catastrophe pour fixer le prix de l'obligation pour le risque de catastrophe naturelle. Les prix évolutifs des obligations pour risque de catastrophe (c'est-à-dire les prix à des moments autres que le temps 0) peuvent être obtenus en calculant les attentes conditionnelles.

La formule générale d'évaluation intertemporelle pour le prix de ce type d'obligation de risque de catastrophe au temps n , étant donné l'information de marché $P_k^{(1)}$ et en supposant qu'aucune catastrophe ne s'est produite au temps n , est donné par :

$$V_n = c \sum_{k=n+1}^T P(n, k) Q(\tau > k \mid \tau > n) + P(n, T) Q(\tau > T \mid \tau > n) + \mu \sum_{k=n+1}^T P(n, k) Q(\tau = k \mid \tau > n)$$

Où : $P(n, k)$ désigne le prix au temps n d'une obligation à coupon zéro arrivant à échéance pour 1 au temps k . Pour notre modèle stationnaire, les probabilités conditionnelles sont faciles à calculer.

Le modèle développé par Tilley dans son ouvrage "*The latest in financial engineering : Structuring catastrophe reinsurance as a high-yield bond. Technical report, Morgan Stanley, New York, October 1995.*", peut être considéré comme la sélection d'un processus

de taux court $\{r(k)\}$ sur l'espace filtré $(\Omega^{(1)}, P^{(1)})$ et d'une mesure de probabilité neutre vis-à-vis du risque $Q^{(l)}$ sur l'espace de probabilité $\Omega^{(1)}$ (c'est-à-dire un modèle de structure des taux défini par $\{r(k)\}$ et $\Omega^{(1)}$) croisé avec une structure de catastrophe binomiale conditionnelle. L'indépendance du risque de marché financier par rapport au risque de catastrophe nous a permis de combiner facilement ces deux structures de probabilité pour obtenir un modèle pratique et économiquement significatif. La formule binomiale est facile à appliquer car tout ce qui est nécessaire pour évaluer l'obligation du risque de catastrophe est une estimation de la probabilité qu'une catastrophe se produise au cours d'une période et une connaissance de la courbe de rendement actuelle. L'expression $V = \sum_{k=1}^T P(k)\theta_0^k + P(T)\theta_0^T + \mu \sum_{k=1}^T P(k)\theta_0^{k-1}(1 - \theta_0)$ est théoriquement équivalente à la formule de Tilley, sauf que nous sommes en mesure d'interpréter le paramètre θ_0 d'une manière actuarielle traditionnelle car nous avons fermé notre modèle en utilisant la théorie d'un agent représentatif qui implique naturellement les probabilités empiriques des différents risques dans le modèle. Le fait qu'un modèle de risque de catastrophe soit nécessairement incomplet signifie qu'il n'existe pas d'interprétation unique des prix que nous attribuons aux obligations de risque de catastrophe. Ce problème est inhérent à tout modèle utilisé pour fixer un prix aux obligations de risque de catastrophe. La fonction d'utilité de l'agent représentatif, que l'on pourrait appeler de façon générale l'aversion pour le risque du marché ou l'attitude du marché à l'égard du risque, fait partie de la structure supposée de la règle de tarification. Dans notre formulation équivalente du problème de tarification en termes d'évaluation neutre vis-à-vis du risque, l'incomplétude est intégrée dans la sélection du modèle de structure des taux plutôt que dans les probabilités de catastrophe. En d'autres termes, pour des variables économiques et catastrophiques qui varient, l'effet sur la dynamique du prix de l'obligation pour risque de catastrophe apparaît à travers la sélection implicite du modèle de structure des termes incorporé. Bien que la formule d'évaluation de l'obligation semble ne pas dépendre de l'aversion au risque incorporée, la dynamique des prix de l'obligation pour risque de catastrophe dépend du modèle de structure à terme complet et donc de l'aversion au risque incorporée. Le fait qu'il soit naturel de sélectionner un modèle de structure des termes pour les problèmes d'évaluation actuarielle cache la difficulté inhérente associée au fait que le marché du risque de catastrophe est incomplet.

L'obligation Morgan Stanley a été proposée comme moyen de financer une couche de risque dans le programme de la California Earthquake Authority pour fournir une couverture contre les tremblements de terre. À la dernière minute, Berkshire Hathway a proposé une réassurance traditionnelle pour couvrir une couche de 1,5 milliard de dollars pendant quatre ans pour une prime de 161 millions de dollars, soit un taux en ligne de $161/1500 = 10,73\%$. Selon un rapport de Institutional Investor, l'opération correspondante de Morgan Stanley aurait eu un taux sur ligne de 11-14.

Chapitre 5

Evaluation d'un cat bond : implémentation numérique

5.1 Analyse de données pour les tremblements de terre au Maroc

D'après ce qu'on a vu dans la partie précédente, on aura besoin de deux bases de données, la première pour modéliser la sismicité au Maroc, ainsi que la deuxième afin dans le but modéliser le taux d'intérêt selon un modèle de Vasíček.

Cette analyse est basée sur la série des séismes au Maroc, sur la période 1905-2021 avec un manque de quelques années, contenant les différents caractéristiques d'un tremblement de terre, telle que décrite dans le tableau suivant :

	date	annee	time	lat	lon	depth	mag	nst	rms	author	originID
0	1905-02-14	1905	0.166667	38.0000	-1.1000	33	4.20	NaN	NaN	NaN	NaN
1	1908-07-14	1908	0.288194	35.3000	-3.0000	33	5.20	NaN	NaN	NaN	NaN
2	1909-01-21	1909	0.000000	35.3600	-5.4000	33	6.20	NaN	NaN	NaN	NaN
3	1910-06-16	1910	0.178252	36.7000	-3.1000	17	6.30	NaN	NaN	NaN	NaN
4	1911-01-22	1911	0.009271	37.0000	-4.6000	33	5.00	NaN	NaN	NaN	NaN
...
90	2016-01-25	2016	0.181963	35.6710	-3.6520	25	6.40	NaN	NaN	NaN	NaN
91	2018-02-01	2018	0.874813	36.4657	2.1648	31	4.76	NaN	NaN	NaN	NaN
92	2019-11-17	2019	0.360509	32.6140	-4.1380	5	5.80	35.0	0.62	CNRST:elm	297863\par
93	2020-02-16	2020	0.914491	32.6010	-4.1610	3	5.30	34.0	0.66	CNRST:yah	310705
94	2021-04-26	2021	0.125799	36.2060	-11.2530	90	5.30	28.0	1.61	CNRST:out	375960

FIG. 5.1 : Présentation du base de données de l'activité sismique au Maroc pour la période 1905-2021

En effet, après on a travaillé seulement avec les séismes qui ont une magnitude supérieure à 4.2 sur l'échelle de Richter. Ainsi, On présente les différentes statistiques des vecteurs de notre base de données :

	annee	time	lat	lon	depth	mag	nst	rms
count	95.000000	95.000000	95.000000	95.000000	95.000000	95.000000	3.000000	3.000000
mean	1968.715789	0.472774	35.201207	-6.531981	26.663158	5.077895	32.333333	0.963333
std	32.452146	0.299200	2.454940	4.826983	15.651531	0.604863	3.785939	0.560387
min	1905.000000	0.000000	20.020000	-19.470000	1.000000	4.200000	28.000000	0.620000
25%	1942.000000	0.180108	35.220000	-10.065000	18.500000	4.600000	31.000000	0.640000
50%	1972.000000	0.477847	35.780000	-5.400000	30.000000	5.000000	34.000000	0.660000
75%	1995.500000	0.740628	36.490000	-3.250000	33.000000	5.350000	34.500000	1.135000
max	2021.000000	0.996713	38.580000	3.420000	100.000000	7.300000	35.000000	1.610000

FIG. 5.2 : Statistiques descriptives de la base de données des séismes au Maroc pour la période 1905-2021

Notre modélisation est basée sur deux caractéristiques du tremblement de terre, à savoir la magnitude ("mag") et la profondeur ("depth"). En premier lieu, nous définirons la distribution de chaque variable.

5.1.1 La magnitude

À cet égard, nous avons tenu compte des maximums annuels des magnitudes pour la période 1905-2021. Des statistiques descriptives pour cette variable sont fournies dans la figure suivante :

```
count    95.000000
mean     5.077895
std      0.604863
min      4.200000
25%     4.600000
50%     5.000000
75%     5.350000
max      7.300000
Name: mag, dtype: float64
```

FIG. 5.3 : Statistiques descriptives de la variable magnitude

Ainsi pour bien présenter la répartition des données, on trace la boîte à moustaches :

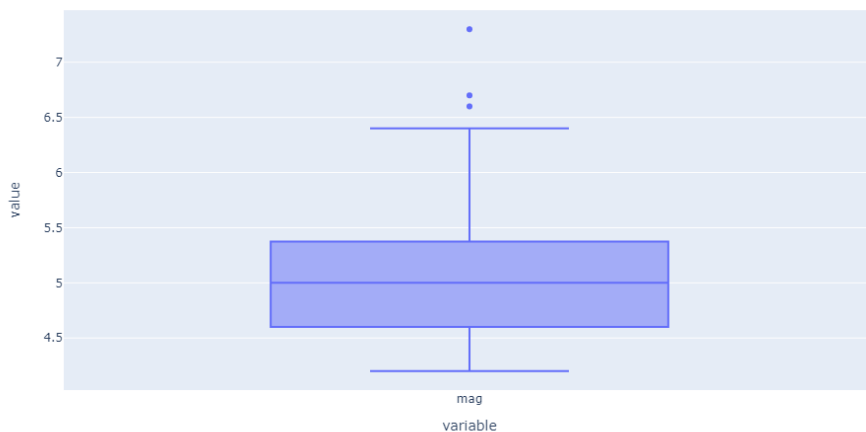


FIG. 5.4 : Boîte à moustaches de la magnitude

Ensuite, on trace la fonction de densité :

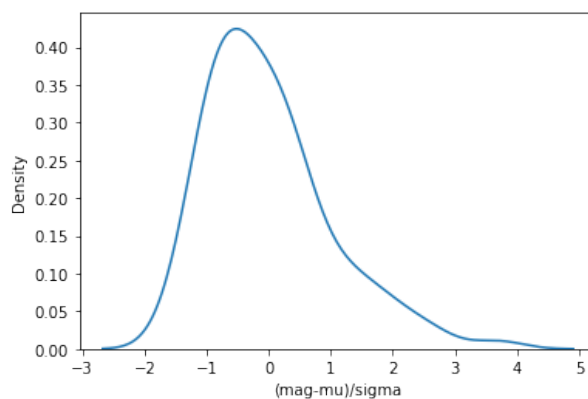


FIG. 5.5 : Fonction de densité de la magnitude

Afin d'avoir une idée de la distribution des magnitudes annuelles maximales, on trace le nuage de points :

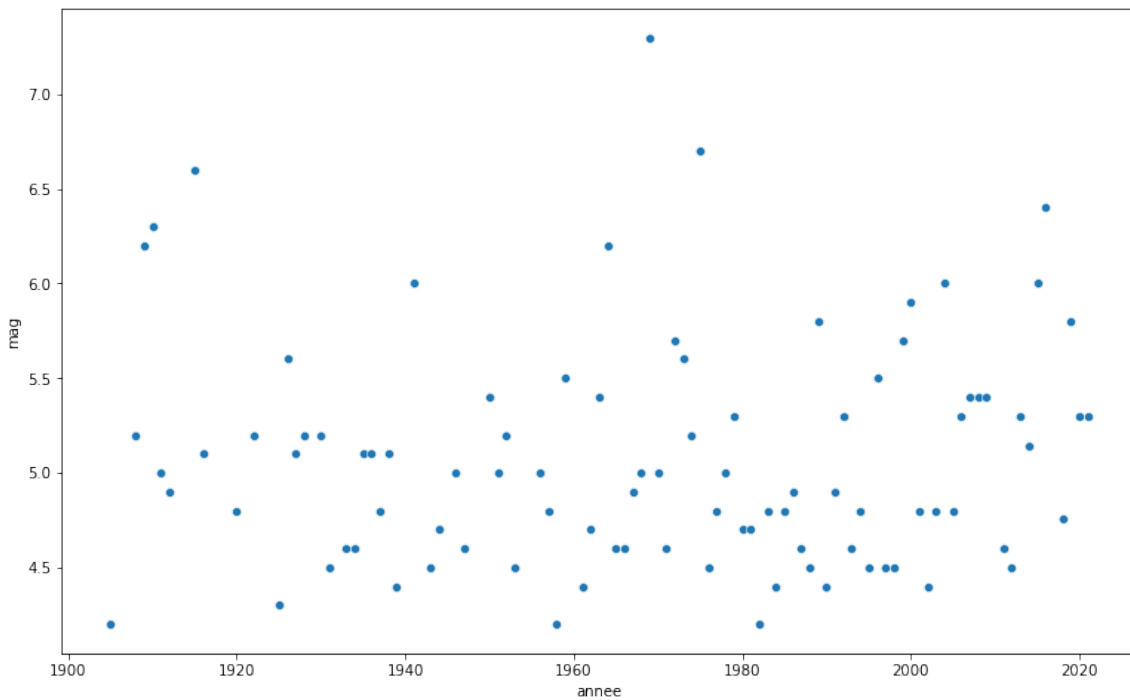


FIG. 5.6 : Nuage de points de la magnitude

D'après la figure ci-dessus, il semble raisonnable de supposer que le modèle de variation est resté constant au cours de la période d'observation, nous modélisons donc les données comme des observations indépendantes de la distribution GEV.

Alors, on estime les paramètres par la méthode de maximisation du log-vraisemblance de la GEV. En utilisant la fonction GEV.FIT de Coles (2004), on arrive aux résultats suivants :

$$\left(\hat{\mu}, \hat{\sigma}, \hat{\xi}\right) = (4.78898425, 0.42888596, 0.09042456)$$

Ces paramètres correspondent à une valeur du log-vraisemblance égale à : 74.65177. Ainsi, La matrice approximative de variance-covariance est la suivante :

$$V = \begin{pmatrix} 0.0025647508 & 0.0009681465 & -0.001712217 \\ 0.0009681465 & 0.0014854838 & -0.000910331 \\ -0.0017122169 & -0.0009103310 & 0.007999169 \end{pmatrix}$$

Les différents diagrammes de diagnostic permettant d'évaluer l'exactitude du modèle GEV ajusté aux données des maximums annuels de tremblements de terre au Maroc sont présentés à la figure suivante. Ni le diagramme de probabilité ni le diagramme de quantile ne permettent de douter de la validité du modèle ajusté : chaque ensemble de points tracés est quasi-linéaire. La courbe du niveau de retour est concave et n'a pas de limite finie en raison de l'estimation positive de ξ , bien que l'estimation soit proche de zéro et que la courbe estimée respective soit proche d'une ligne droite.

Enfin, l'estimation de la densité correspondante semble cohérente avec l'histogramme des données. Par conséquent, les quatre diagrammes de diagnostic soutiennent le modèle GEV ajusté.

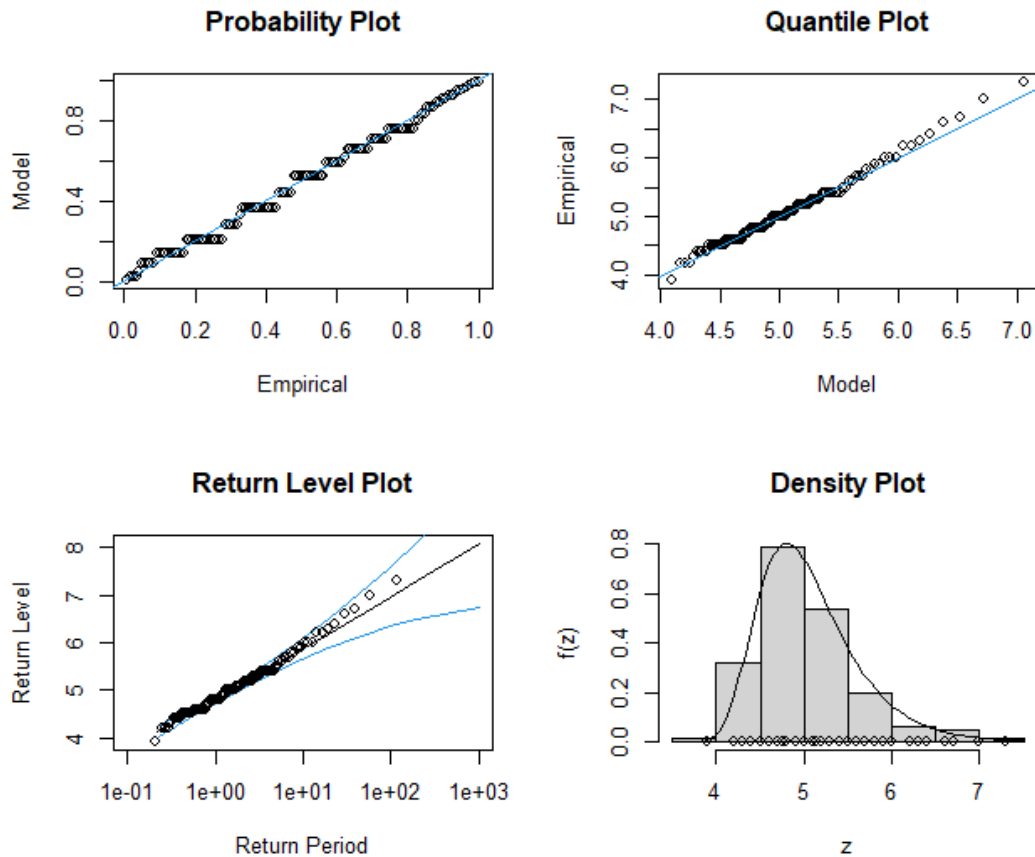


FIG. 5.7 : Diagrammes de diagnostic pour l'ajustement de GEV au maximums annuels des tremblements de terre au Maroc

Enfin, nous déterminons le type de la distribution limite pour les tremblements de terre maximums annuels du Maroc, qui est un type de Fréchet, puisque la valeur de ξ est positive ($\xi > 0$) ; Ce type a la forme suivante :

$$G(z) = \exp \left(- \left(1 + \xi \left(\frac{z - \mu}{\sigma} \right) \right)^{-1/\xi} \right)$$

5.1.2 La profondeur

Nous allons ensuite étudier la profondeur du tremblement de terre. En effet, nous avons pris les profondeurs qui correspondent à la magnitude maximale de chaque année. Tout comme la magnitude, il faut définir la loi qui ajuste bien notre répartition.

On présente quelques statistiques descriptives de cette variable, à savoir :

```
count    95.000000
mean     26.663158
std      15.651531
min      1.000000
25%     18.500000
50%     30.000000
75%     33.000000
max     100.000000
Name: depth, dtype: float64
```

FIG. 5.8 : Statistiques descriptives de la variable magnitude

Nous traçons le boxplot de notre distribution de la profondeur :

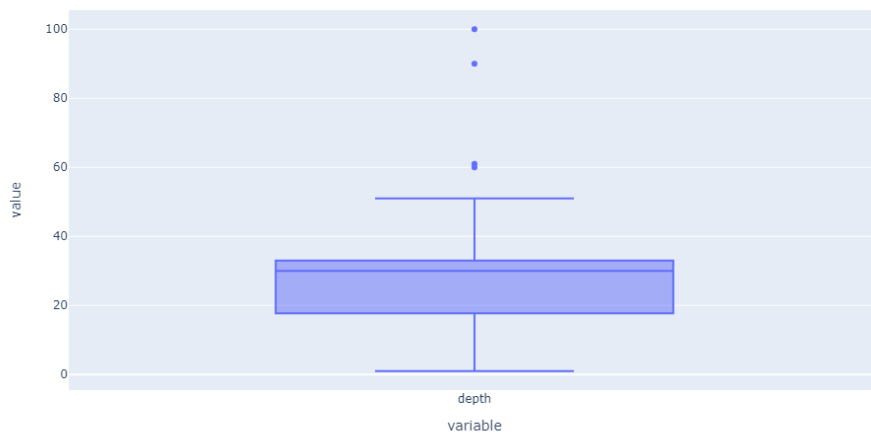


FIG. 5.9 : Boîte à moustaches de la profondeur

On trace par la suite sa fonction de densité et son histogramme :

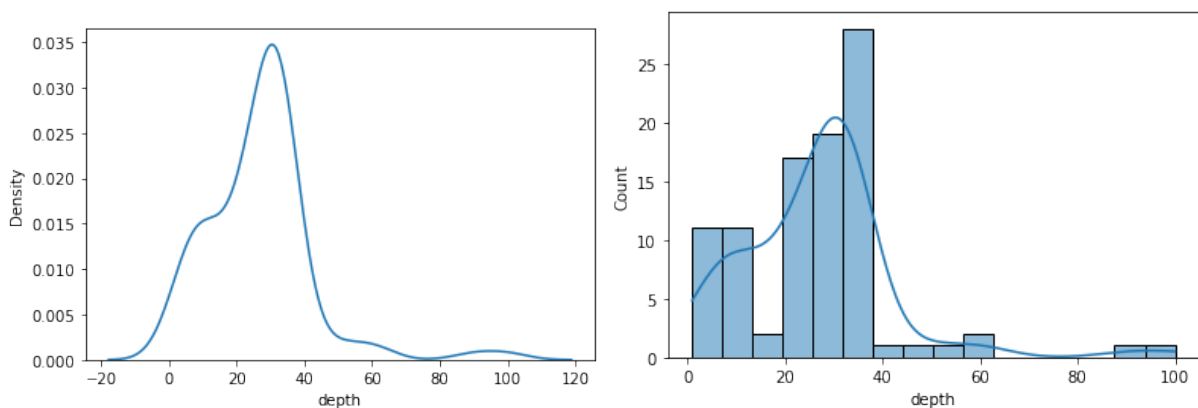


FIG. 5.10 : Fonction de densité et histogramme de la profondeur

D'après la fonction de densité, et afin d'ajuster la distribution de la profondeur par les lois usuelles, nous avons choisi certaines lois candidates qui peuvent bien ajuster notre distribution. Il s'agit des lois suivantes : "Cauchy", "Log-normal", "Student", "Pareto" et "Weibull".

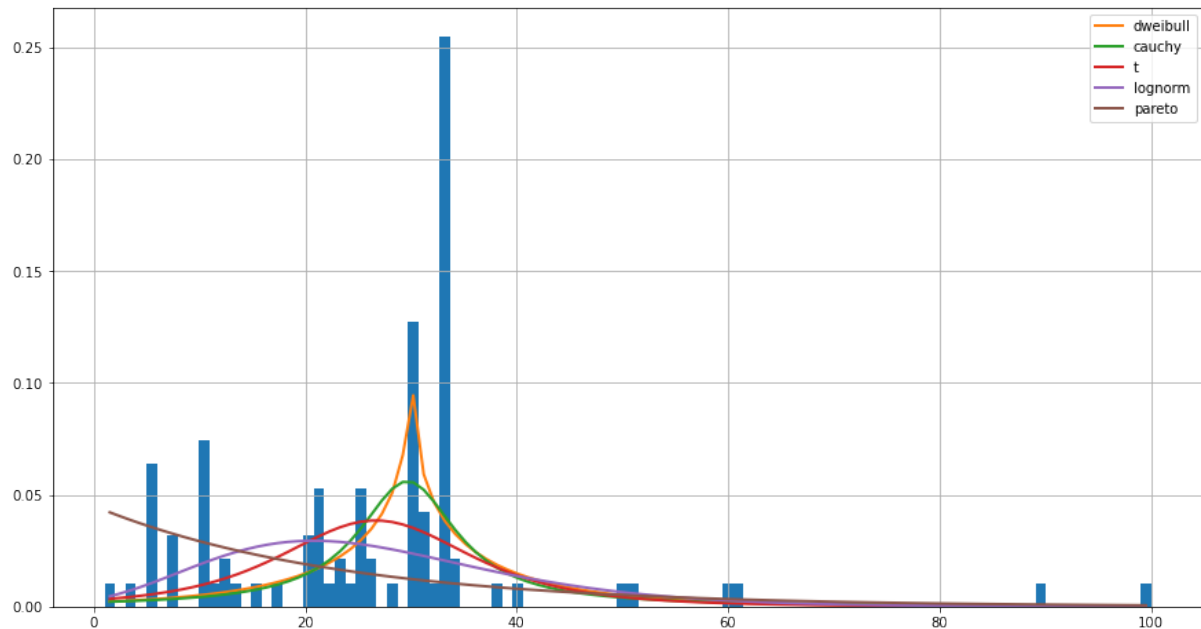


FIG. 5.11 : Graphique des lois candidates pour l'ajustement de la distribution de la profondeur

D'après ce graphique, nous constatons que les deux distributions les plus proches sont : "Weibull" et "Cauchy". Nous devons donc passer par d'autres tests pour connaître la loi appropriée. C'est la raison pour laquelle nous avons effectué les essais suivants :

	sumsquare_error	aic	bic	kl_div
dweibull	0.073940	1195.307209	-666.384272	inf
cauchy	0.076196	1152.025313	-668.082655	inf
t	0.079947	1194.089574	-658.964099	inf
lognorm	0.083480	1152.772533	-654.855872	inf
pareto	0.092218	1061.432999	-645.398744	inf

FIG. 5.12 : Les tests SSE, AIC et BIC pour l'ajustement

Ces 3 tests donnent 3 résultats différents, pour cela nous considérons le test de somme de carrés résiduels qui estime que la loi de "Weibull" est la plus adaptée. Ceci est vraiment confirmé par la fonction **DISTFIT()** sur python qui teste 89 distributions théoriques, et elle a également pris la distribution de "Weibull".

La loi standard de Weibull est définie par la fonction de répartition :

$$F(x; k, \lambda, \theta) = 1 - e^{-\left(\frac{x-\theta}{\lambda}\right)^k} \text{ pour } x > \theta$$

Par la suite on estime les paramètres de cette loi :

$$\left(\hat{k}, \hat{\lambda}, \hat{\theta}\right) = (0.8268871381183238, 7.81897691829813, 30.000000000000004)$$

Avec :

- $k (>0)$: paramètre de forme
- $\lambda (>0)$: paramètre d'échelle
- θ : paramètre de position de la distribution

On trace alors notre distribution :

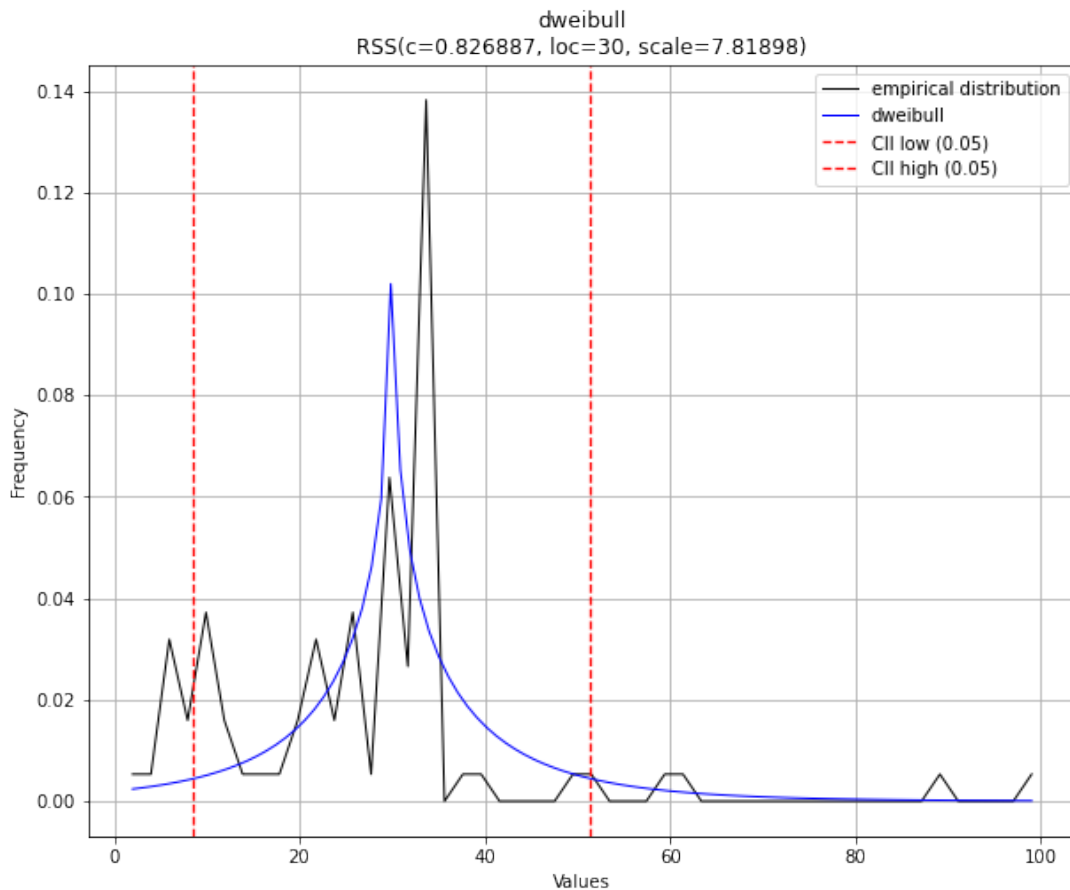


FIG. 5.13 : Distribution de weibull après estimation des paramètres

5.2 Modélisation du taux d'intérêt : modèle de Vasíček

Avant d'estimer les paramètres, il est nécessaire de vérifier l'hypothèse selon laquelle la série de taux est une série autorégressive d'ordre 1 (AR(1)).

Tout d'abord, nous présentons notre base de données, qui contient les taux sans risque tirés de Bank Al Maghrib.

	Date	Taux
0	2022-03-21	0.015335
1	2022-03-18	0.015324
2	2022-03-17	0.015324
3	2022-03-17	0.015324
4	2022-03-16	0.015324
...
3034	2010-01-07	0.034505
3035	2010-01-06	0.034683
3036	2010-01-05	0.034778
3037	2010-01-04	0.035198
3038	2009-12-31	0.036090

3039 rows × 2 columns

FIG. 5.14 : Base de données des taux d'intérêt

On présente notre base de données graphiquement :

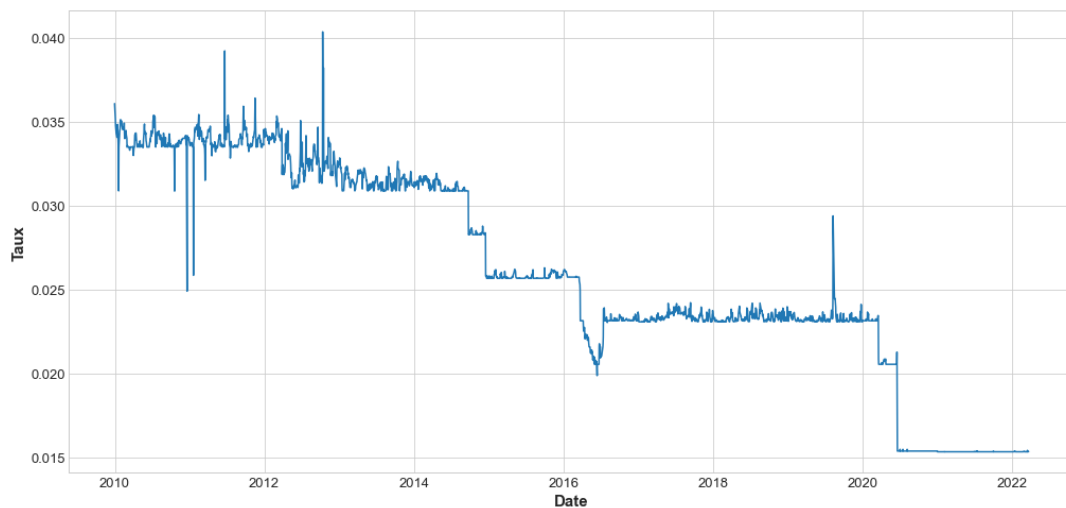


FIG. 5.15 : Variations du taux d'intérêt par année

En ce sens, nous vérifions notre hypothèse. À cette fin, nous utilisons le test augmenté Dickey-Fuller qui vérifie si la série est stationnaire ou non.

Augmented Dickey-Fuller Unit Root Test on TMP		
Null Hypothesis: TMP has a unit root		
Exogenous: Constant, Linear Trend		
Lag Length: 7 (Automatic - based on SIC, maxlag=30)		
	t-Statistic	Prob.*
Augmented Dickey-Fuller test statistic	-3.529114	0.0364
Test critical values:		
1% level	-3.960340	
5% level	-3.410932	
10% level	-3.127273	

FIG. 5.16 : Test augmenté de Dickey-Fuller (ADF)

Puisque la p-value (= 3.64%) est < 5%, la série des taux est stationnaire. Alors, nous pouvons l'approcher à une série AR(1), et donc on peut procéder par un modèle de Vasíček pour notre base de taux.

le modèle de Vasíček suppose que le taux court instantané r suit le processus autorégressif d'Ornstein-Uhlenbeck à coefficients constants et ceci se présente comme suit :

$$dr(t) = k(\theta - r(t))dt + \sigma dW_t, r(0) = r_0$$

La mise en œuvre pratique des processus stochastiques, tels que le modèle de taux court de Vasíček nécessite une discrétisation que ce soit pour l'estimation des paramètres ou pour la simulation des trajectoires (pour simplifier nous notons r_t le taux court à l'instant t au lieu de $r(t)$) :

$$r_t - r_{t-1} = \theta(1 - e^{-k}) + (e^{-k} - 1)r_{t-1} + \epsilon_t$$

Avec : $\epsilon_t \sim N(0, \frac{\sigma^2}{2k}(1 - e^{-2k}))$

Alors la relation des taux devient :

$$r_t = a + br_{t-1} + \epsilon_t$$

Avec : $a = \theta(1 - e^{-k})$ et $b = e^{-k}$

Ainsi, l'équation de l'évolution du taux court se présente dans ce sens comme étant un modèle auto-régressif d'ordre 1 (AR(1)) et le calibrage du modèle de Vasíček après vérification de cette caractéristique devient simple : il suffit d'appliquer une régression linéaire entre deux jeux de données historiques de taux courts pour aboutir aux estimations des paramètres \hat{a} et \hat{b} :

$$\begin{cases} \hat{a} = 0.00009694 \\ \hat{b} = 0.99654459 \end{cases}$$

Ce qui permet de remonter aux paramètres du processus d'Ornstein-Uhlenbeck comme suivants :

$$\begin{cases} \hat{k} = -\ln(\hat{b}) \\ \hat{\theta} = \frac{\hat{a}}{1-\hat{b}} \\ \hat{\sigma} = \hat{\sigma}_\epsilon \sqrt{\frac{2\hat{k}}{1-e^{-2\hat{k}}}} \end{cases}$$

Numériquement on arrive aux résultats suivants :

$$\begin{cases} \hat{k} = 0.0034613841 \\ \hat{\theta} = 0.0280556286 \\ \hat{\sigma} = 0.0014955193 \end{cases}$$

Donc on calcule le taux par le modèle de Vasicek, qui donne une base de données suivante :

	Maturité	Taux Vasicek
0	0.25	0.015182
1	0.50	0.015323
2	1.00	0.015603
3	2.00	0.016157
4	3.00	0.016703

FIG. 5.17 : Base de données des taux selon le modèle de Vasicek

Et graphiquement, cela donne la sortie suivante :

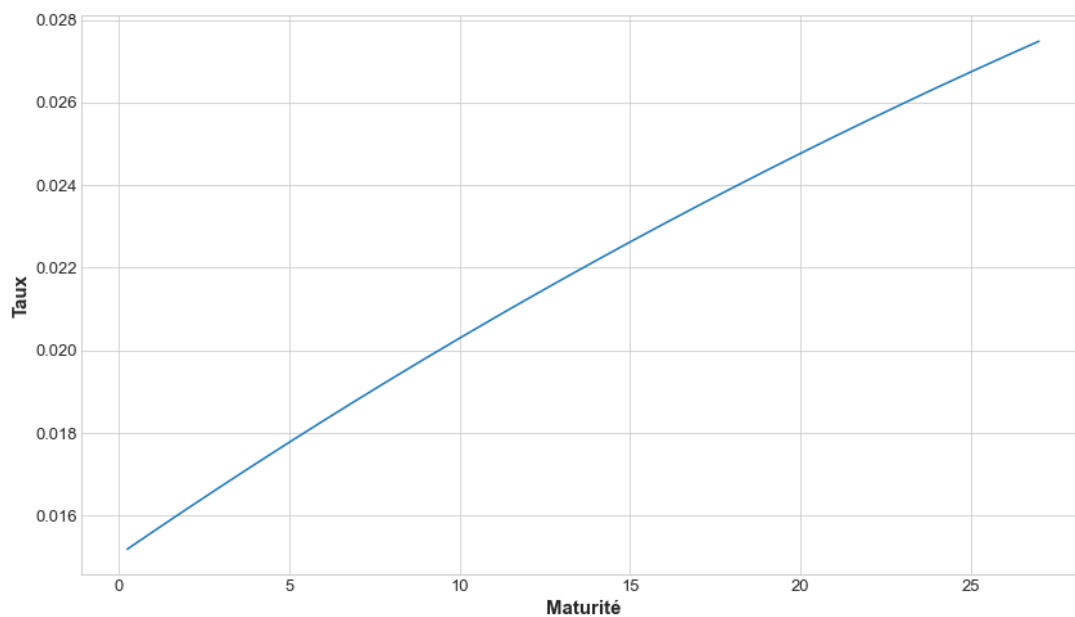


FIG. 5.18 : Présentation graphique des taux selon le modèle de Vasicek selon la maturité

5.3 Calcul du prix du Cat bond

5.3.1 Exemple numérique pour le modèle à une période

En supposant le modèle à une période et en définissant les variables $N = 1000\text{€}$, $r = 1,76\%$, comme pour l'obligation d'État marocaine à un an (juin 2022), $R = 2,08\%$ et $e = 4\%$, nous obtenons selon l'expression $P = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(e^{-(r+e)} \cdot C)$ le prix $P = X$.

5.3.2 Simulation et fixation des prix pour le modèle multi-périodes

Vu la complexité de travailler avec le couple (magnitude, profondeur) pour le cas du modèle multi-périodes, on va faire notre implémentation juste avec la magnitude.

On ne conserve les memes notations de la partie 4.4.3, et on travaille avec la fonction de flus suivante :

$$f(R_l, M_l) = \begin{cases} (3R_l) \cdot \mathbf{1}_{[4.2 < M_1 \leq 4.6]} + (2R_l) \cdot \mathbf{1}_{[4.6 < M_1 \leq 5]} + (R_l) \cdot \mathbf{1}_{[5 < M_1 \leq 5.4]} \\ l = 1, 2, 3, \dots, T-1 \\ (3R_l) \cdot \mathbf{1}_{[4.2 < M_1 \leq 4.6]} + (2R_l) \cdot \mathbf{1}_{[4.6 < M_1 \leq 5]} + (R_l) \cdot \mathbf{1}_{[5 < M_1 \leq 5.4]} + \\ + K \cdot \mathbf{1}_{[5.4 < \max(M_1) \leq 5.8]} + \frac{2}{3}K \cdot \mathbf{1}_{[5.8 < \max(M_l) \leq 6.2]} + \frac{1}{3}K \cdot \mathbf{1}_{[6.2 < \max(M_l) \leq 7.3]} \\ l = T \end{cases}$$

Avec :

M_n : est le niveau de magnitude maximale annuelle du séisme au Maroc au cours de la n-ième année. Les M_n sont mesurés dans l'échelle de magnitude locale et ont la distribution GEV décrite dans la section précédente.

P : est le prix du Cat bond, basée sur les tremblements de terre, au temps 0

$f(R_l, M_l)$: est la valeur reçue par le détenteur du Cat bond au moment $l = 1, 2, \dots, T$.

De même, selon la théorie des prix d'équilibre, le prix P est définie par :

$$P := E_Q \left\{ e^{-(r+e)T} \sum_{l=1}^T FV_T f(R_l, M_l) \right\}$$

Où :

$$FV_T f(R_l, M_l) = f(R_l, M_l) \cdot \prod_{k=0}^{T-l-1} (1 + i_{l+k})$$

En supposant que l'espérance ci-dessus existe, nous pouvons approximer le prix du Cat Bond comme suit :

$$P = \lim_{m \rightarrow \infty} P^{(m)}$$

Où :

$$P^{(m)} = e^{-(r+e)T} \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \sum_{l=1}^T FV_T \left(R_l^{(j)}, M_l^{(j)} \right)$$

Avec :

$R^{(j)}$: est le j-ème chemin (réalisation) du processus du taux sans risque $R_t, t \in [0, T]$.

$M^{(j)}$: est le j-ème chemin (réalisation) du processus $\{M_n, n = 1, 2, \dots\}$ pour la magnitude maximale annuelle du séisme.

On passe maintenant à décrire les étapes principales dans notre simulation. Comme étude de cas pratique, nous décrivons une obligation catastrophe d'une durée de 5 ans dont les paiements dépendent de la magnitude des tremblements de terre au Maroc. Nous construisons notre simulation en utilisant les cinq étapes suivantes :

- ÉTAPE 1 :

Tout d'abord, nous générons 50 000 séquences de cinq valeurs arithmétiques de la distribution GEV représentant la magnitude maximale du séisme pour la période de 5 ans jusqu'à la date d'échéance. Cette opération est relativement facile à réaliser car nous pouvons inverser la fonction de distribution cumulative :

$$G(z) = \exp \left(- \left(1 + \xi \left(\frac{z - \mu}{\sigma} \right) \right)^{-1/\xi} \right)$$

Avec les paramètres $(\hat{\mu}, \hat{\sigma}, \hat{\xi}) = (4.78898425, 0.42888596, 0.09042456)$

Ainsi, nous recevons l'expression : $z = \mu + [\sigma(1 - (-\ln G(z))^{-\xi})]$

Le nombre $G(z) \in [0, 1]$ peut être généré par le générateur de nombres (pseudo) aléatoires uniformes.

- ÉTAPE 2 :

Dans un deuxième temps, à l'aide de simulations de Monte Carlo, nous obtenons 50 000 trajectoires différentes pour le taux sans risque $Rt, t \in [0, 5]$. Pour implémenter le mouvement brownien géométrique et modéliser ses mouvements, nous utilisons, dans notre simulation, la méthodologie basée sur les équations stochastiques itératives (ISE).

Nous discrétisons $[0, T]$ en un ensemble de moments $t = t_0 = 0, t_1, \dots, t_n = T$, où n est le nombre de pas. Nous supposons que les distances entre les points de l'ensemble t sont constantes, dans notre simulation nous prenons le pas égal à un jour, $\Delta t = t_{i+1} - t_i = cste$ pour $i = 1, 2, \dots, n - 1$.

Maintenant, on discrétise notre taux sans risque selon le schéma d'Euler. Les nombres $\epsilon_0, \epsilon_1, \dots, \epsilon_n$ peuvent être générés par le générateur de nombres (pseudo) aléatoires normaux.

- ÉTAPE 3 :

La troisième étape importante consiste à générer des séquences pour le taux annuel d'un compte de dépôt bancaire typique. Rappelons que nous avons supposé que i_n est une variable aléatoire distribuée de façon lognormale avec les paramètres μ_1 et σ_1^2 pour tout $n = 1, 2, 3, \dots$, c'est-à-dire $i_n : LogNormale(-3.94, 0.061)$.

- ÉTAPE 4 :

La quatrième étape consiste à calculer les paiements (flux de trésorerie) du Cat bond sur une période de cinq ans pour l'ensemble des 50 000 simulations. On peut facilement conclure que cette procédure est assez complexe et nécessite des fonctions logiques et de nombreux sous-programmes. Il convient de mentionner qu'un événement catastrophique peut diminuer notre capital si et seulement si le niveau de magnitude maximal de la séquence de 5 séismes est supérieur à 6,6. En regardant attentivement notre base de données, la possibilité de perdre du capital est inférieure à 4.5%. Cela signifie que nous avons une obligation catastrophes avec une garantie de capital de 95.5%, ce qui la rend très attractive pour les investisseurs conservateurs. De plus, nous supposons une valeur pour la valeur nominale $N = 1000$ et une certaine prime de risque de valeur $e = 4\%$. Alors que le taux sans

risque composé en continu (jusqu'à la date d'échéance) est $r = 1,76\%$ comme pour l'obligation d'État marocaine (juin 2022).

- ÉTAPE 5 :

La dernière étape est le calcul des valeurs futures au temps $T = 5$ selon les équations évaluées précédemment, puis en faisant la moyenne de toutes les valeurs actualisées, on obtient le prix du Cat bond approximativement égal à $P = X$.

Conclusion générale

La plupart des recherches sont orientées vers le problème de l'évaluation d'un cat bond lié à une indemnité. Dans cet article, nous avons essayé de fournir une revue technique courte mais complète de la conception et de la mise en œuvre des cat bonds paramétriques. Cela peut être très utile pour les praticiens de l'assurance, les experts du secteur financier et les autorités gouvernementales du monde entier qui réalisent que les cat bonds représentent une solution innovante pour améliorer la diversification de plusieurs risques d'assurance différents.

Le titre proposé, a une structure non liée à l'indemnité. Il annule le paiement du coupon annuel et/ou réduit le remboursement du capital à la date d'échéance lorsque la variable de déclenchement dépasse certains niveaux. Le prix de ce type de produits s'étudie dans un cadre théorique de marché incomplet simplifié par l'hypothèse que l'économie globale n'est pas affectée par une catastrophe naturelle et que le risque catastrophe est indépendant du risque purement financier.

Il est profond que le prix des obligations catastrophes soit plus attiré par les investisseurs individuels, en raison des rendements plus élevés. L'investisseur de ces obligations ne doit pas négliger la durée, qui est plus longue que celle des obligations ordinaires similaires, en raison de l'existence d'un taux de prime supplémentaire pour supporter le risque de tremblement de terre. Ainsi, les obligations catastrophes sont plus sensibles aux mouvements des taux d'intérêt. De plus, une corrélation positive intensive entre le taux des obligations catastrophes et les rendements des marchés financiers est renforcée par l'existence de cette prime de risque supplémentaire.

Le risque sous-jacent d'un catastrophe bond est toutefois fondamentalement différent de celui lié à des produits de type actions car dépendant de phénomènes naturels nécessitant des techniques d'évaluation spécifiques.

Le capital alternatif disponible sur le marché pour ce type de produits a vu une forte croissance récente, notamment du fait des taux bas poussant des acteurs nouveaux en recherche de rendements à s'y intéresser. Si certains voient dans le capital alternatif un concurrent sérieux assombrissant l'avenir de la réassurance traditionnelle, d'autres y voient un produit complémentaire ou encore une tendance passagère dont l'importance en termes de parts de marché restera marginale.

Annexes

Annexe A

Les principaux aspects de la loi 110-14

Evènement catastrophique (article 3) :” tout fait générateur de dommages directs survenus au Maroc, ayant pour origine déterminante l’action d’intensité anormale d’un agent naturel ou l’action violente de l’Homme ”. Exclus :

- Utilisation d’agents ou armes chimiques, biologiques, bactériologiques, radioactifs ou nucléaires
- Guerre civile, guerre étrangère ou actes d’hostilité assimilables
- Acte de cybercriminalité

Faits naturels :

- Un fait générateur soudain ou imprévisible. En cas de prévisibilité, on ne peut pas l’empêcher ;
- Avoir des effets dévastateurs d’une intensité grave pour la collectivité ;

Action violente de l’homme :

- Un acte de terrorisme ;
- La conséquence directe de la survenance d’émeutes ou de mouvements populaires d’une intensité grave pour la collectivité ;

Les objectifs du fonds :

- Indemniser les victimes des évènements catastrophiques dans les conditions prévues
- Accorder aux entreprises d’assurance et de réassurance des prêts au titre des opérations d’assurance relatives à la garantie contre les conséquences des évènements catastrophiques et au titre des opérations d’acceptation en réassurance des risques couverts dans le cadre de la garantie contre les conséquences d’évènements catastrophiques

- Contribuer à la garantie accordée par l'Etat (article 229-1 de la loi n°17-99)
- Formuler des propositions et les communiquer à l'administration en vue d'améliorer le régime
- Etablir les données stat et fin relatives aux conséquences des évènements catastrophiques et les communiquer à l'admin à la demande de celle-ci
- Réaliser ou faire réaliser toute étude qu'il juge nécessaire à l'exercice de ses missions.

Recettes du fonds :

- Une dotation initiale de l'Etat.
- Le produit des taxes parafiscales
- La rémunération pour services rendus
- Les frais et honoraires payées par les entreprises d'assurance et de réassurance au titre des opérations d'expertise à leur profit
- Le montant des prêts remboursés par les compagnies d'assurance et de réassurance
- Les produits et les intérêts de placement des fonds
- Le montant des emprunts
- Le produit des recours exercés par FSEC
- Les subventions, les dons et les legs
- Toutes autres recettes

Dépenses du fonds :

- Les indemnités versées aux victimes des évènements catastrophiques
- Les prêts accordés aux entreprises d'assurance et de réassurance
- La contribution financière prévue
- Les dépenses de fonctionnement et d'investissement
- Les frais de fonctionnement et d'équipement de la commission de suivi et d'expertise
- Le remboursement des emprunts et les charges y afférentes
- Toutes autres dépenses

L'indemnité pour perte de la résidence principale comprend :

- Le montant de l'indemnité pour privation de jouissance de la résidence principale : est soit fixée à 3 (si location) ou 6 (si bien personnel, on estime la valeur de location) fois la valeur locative mensuelle déterminée par le comité d'expertise et doit être entre la valeur minima(1000DH) et maxima(4000DH) fixées par l'admin après avis de l'ACAPS.
- Le montant de l'indemnité pour la réhabilitation des locaux de la résidence principale. Calculé par : $I = \min (D, 70\% * A, B)$

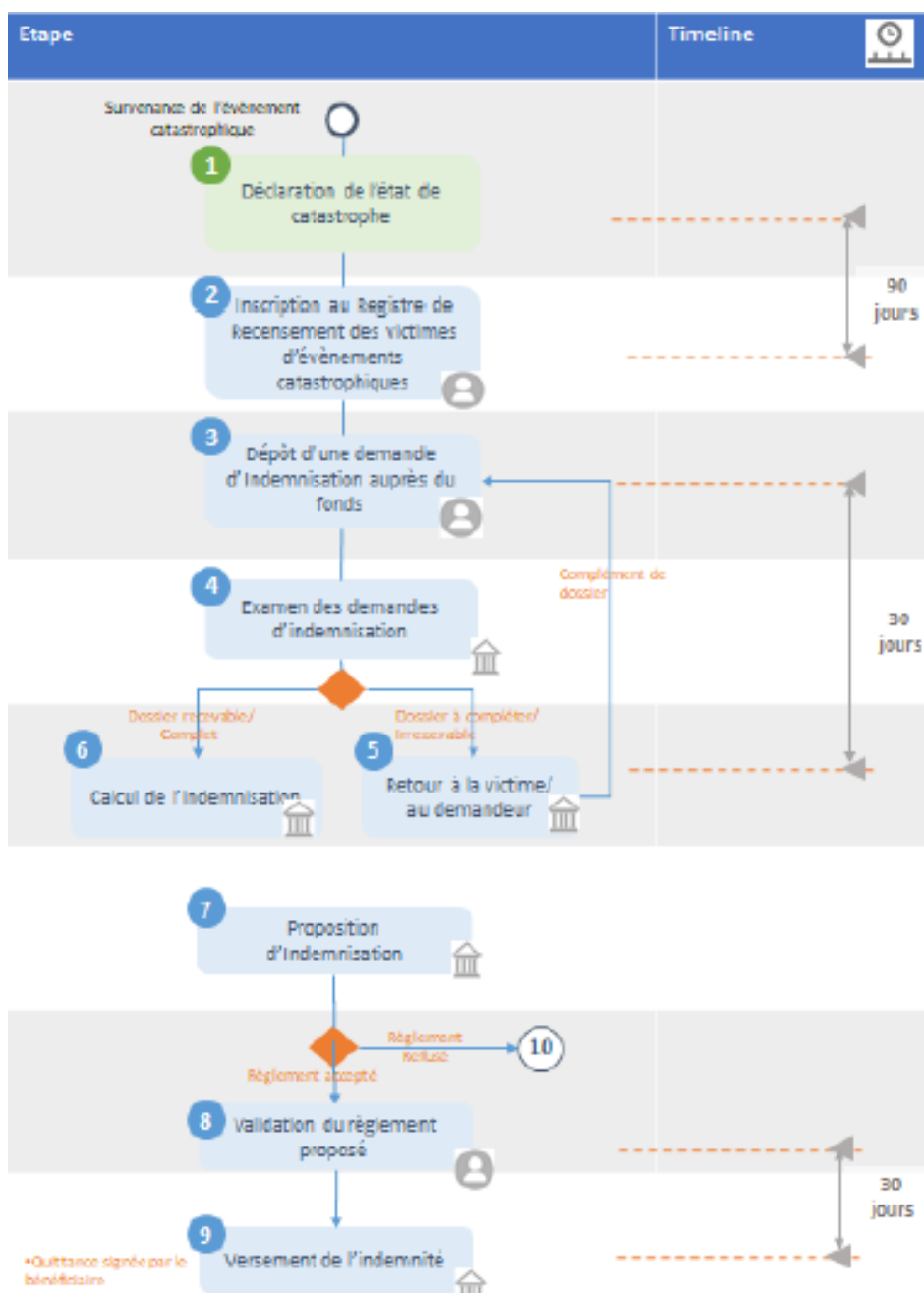
Avec :

- A : cout de reconstruction à neuf d'une partie ou de la totalité de la résidence principale rendue inhabitable.
- B : montant fixé par l'administration après avis de l'ACAPS, ce montant ne peut être inférieure à 250.000 DH

NB : ce montant de l'indemnité peut être réduit en appliquant un taux de réduction en tenant compte de la capacité financière du FSEC.

Annexe B

Schéma d'indemnisation



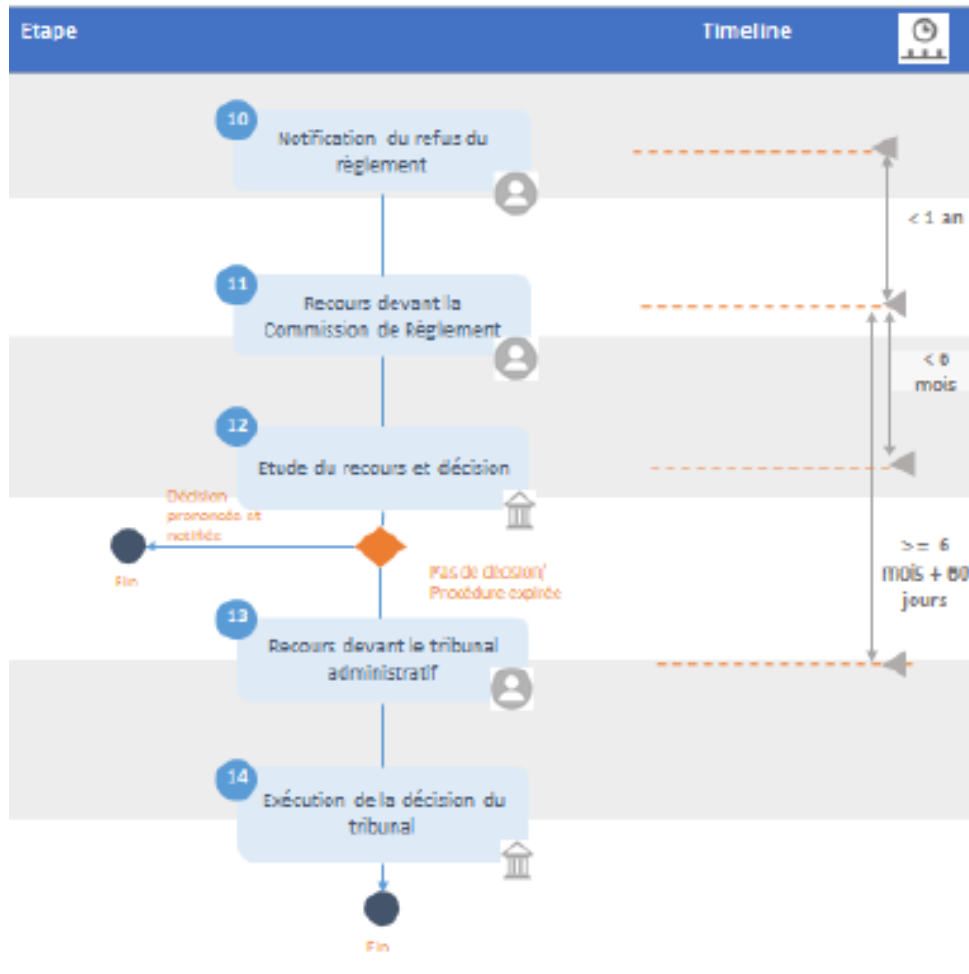


FIG. B.1 : Processus d'indemnisation de A à Z

Annexe C

Distributions testées

Le tableau suivant récapitule les distributions testées pour la profondeur ainsi que leur fonction de répartition.

Distribution	Fonction de répartition	Validité
Lognormale	$F(x) = \Phi\left(\frac{\ln x - \mu}{\sigma}\right) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma y} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln y - \mu}{\sigma}\right)^2} dy$	$x > 0, \sigma > 0, \mu \in \mathbb{R}$
Pareto	$F(x) = 1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda+x}\right)^\alpha$	$x > 0, \alpha > 0, \lambda > 0$
Cauchy	$F(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctan\left(\frac{x-x_0}{a}\right)$	$x \in \mathbb{R}, x_0 \in \mathbb{R}, a > 0$
Student	$F(x) = \frac{1}{2} + x\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right) \frac{{}_2F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{k+1}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{x^2}{k}\right)}{\sqrt{k\pi}\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}$ où ${}_2F_1$ est la fonction hypergéométrique	$x \in \mathbb{R}, k > 0$
Weibull	$F(x) = 1 - \exp\left(-\left(\frac{x}{\alpha}\right)^\tau\right)$	$x > 0, \alpha > 0, \tau > 0$

Annexe D

Loi de Weibull

Loi généralisée de Weibull, son domaine est $x > \theta$, sa densité de probabilité est :

$$\begin{cases} f(x; k, \lambda, \theta) = \frac{k}{\lambda} \left(\frac{x-\theta}{\lambda}\right)^{k-1} e^{-\left(\frac{x-\theta}{\lambda}\right)^k} & \text{pour } x \geq \theta \\ f(x; k, \lambda, \theta) = 0 & \text{pour } x < \theta, \end{cases}$$

où $k > 0$ est le paramètre de forme, $\lambda > 0$ est le paramètre d'échelle et θ est le paramètre de position de la distribution.

Sa fonction de répartition est définie par :

$$\begin{cases} F(x; k, \lambda, \theta) = 1 - e^{-\left(\frac{x-\theta}{\lambda}\right)^k} & \text{pour } x \geq \theta \\ F(x; k, \lambda, \theta) = 0 & \text{pour } x < \theta \end{cases}$$

Le coefficient d'asymétrie est donné par :

$$\gamma_1 = \frac{\lambda^3 \Gamma\left(1 + \frac{3}{k}\right) - 3\mu\sigma^2 - \mu^3}{\sigma^3}$$

Le kurtosis non normalisé est donné par :

$$\beta_2 = \frac{\lambda^4 \Gamma\left(1 + \frac{4}{k}\right) - 4\mu\sigma^3\gamma_1 - 6\mu^2\sigma^2 - \mu^4}{\sigma^4}$$

Le taux de panne h est donné par :

$$h(x; k, \lambda, \theta) = \frac{k}{\lambda} \left(\frac{x-\theta}{\lambda}\right)^{k-1}.$$

La loi d'extremum généralisée de type III est un retournement de la loi de Weibull. Son domaine est $x \leq \theta$. Sa fonction de répartition est définie par :

$$F(x; k, \lambda, \theta) = e^{-\left(\frac{\theta-x}{\lambda}\right)^k}.$$

Bibliographie

- [1] AON SECURITIES (2021). *ILS Annual Report 2021*.
- [2] SWISS RE (March 2021). *Insurance-Linked Securities Market Insights*. Volume XXXIV
- [3] KARL DEMERS-BELANGER & VAN SON LAI (2019). *Diversification Benefits of Cat Bonds : An In-Depth Examination*.
- [4] KRZYSZTOF BURNECKI, GRZEGORZ KUKLA, AND DAVID TAYLOR (2005). *Pricing of Catastrophe Bonds*.
- [5] LANE, MORTON N. (2000). *Pricing risk transfer transactions*. *Astin Bulletin*
- [6] ANTOINE CHOPINEAU (2011). *Comparaison de méthodes d'évaluation des obligations indexées sur les catastrophes naturelles*. ISFA
- [7] ALEXANDROS A. ZIMBIDIS, NICKOLAOS E. FRANGOS & ATHANASIOS A. PANTELOUS (2007). *Modeling earthquake risk via extreme value theory and pricing the respective catastrophe bonds*.
- [8] SAMUEL H. COX AND HAL W. PEDERSEN (1998). *Catastrophe Risk Bonds*. ACTUARIAL RESEARCH CLEARING HOUSE 1998 VOL. 1
- [9] MARQUETTE ASSOCIATES (2019). *Catastrophe bonds*.
- [10] ARTEMIS. URL : <https://www.artemis.bm/>.
- [11] SHAUN WANG (2004). *Cat Bond Pricing Using Probability Transforms*. Published in Geneva Papers. Casualty Reinsurance Seminar, June 7th, 2004, Boston
- [12] MADJER DEHAR (2019). *Modélisation du risque cyclonique côte Pacifique du Mexique et tarification d'un catastrophe bond paramétrique*. ENSAE ParisTech
- [13] ALBERTO RESIDORI (2019). *Pricing Catastrophe Bonds Using Extreme Value Theory*. University of Zurich. Master's Thesis.
- [14] TAJ-EDDINE CHERKAOUI. Sismicité et aléa sismique du Maroc. URL : <https://mt-cherkaoui.wixsite.com/site>.