



المندوبية السامية للتخطيط
HAUT-COMMISSARIAT AU PLAN

ROYAUME DU MAROC
*_*_*_*_*
HAUT COMMISSARIAT AU PLAN
*_*_*_*_*_*_*_*_*_*
INSTITUT NATIONAL
DE STATISTIQUE ET D'ECONOMIE APPLIQUEE



INSEA

Projet de Fin d'Etudes

Calibrage du facteur d'atténuation du sous-risque de primes par les programmes de rétrocession

Préparé par : *M. Anas HAFDI*

Sous la direction de : *M. Khalil SAID (INSEA)*
M. Ismail FAHEM (Atlantic Re)

Soutenu publiquement comme exigence partielle en vue de l'obtention du

Diplôme d'Ingénieur d'Etat

Filière : Actuariat-Finance

Devant le jury composé de :

- *M. Khalil SAID (INSEA)*
- *M. Mohamed EL JAMALI (INSEA)*
- *M. Ismail FAHEM (Atlantic Re)*

Dédicace

Je dédie ce travail à ceux qui m'ont toujours soutenu, guidé et inspiré tout au long de mon parcours, que ce soit sur le plan personnel ou académique.

Tout d'abord, je tiens à exprimer toute ma reconnaissance et mon amour à mes parents, ma mère et mon père, qui ont toujours été là pour moi, me soutenant inconditionnellement et m'offrant des conseils précieux à chaque étape de ma vie. Leur amour, leur sagesse et leur foi en moi ont été les moteurs de mon ambition. Cette réalisation est aussi la vôtre, et je vous en suis infiniment reconnaissant.

À mes deux chères sœurs, Sara et Fatima Ezzahraa, merci pour votre présence, votre soutien constant et votre encouragement sans faille. Vous êtes des piliers importants dans ma vie, et je vous dédie tout le succès que j'ai pu obtenir.

À mes chers amis, je vous remercie pour votre amitié sincère, vos encouragements et vos précieux moments partagés. Vous avez toujours été là pour me motiver, me faire sourire et me soutenir dans les moments difficiles. Je suis honoré de vous avoir à mes côtés.

Je souhaite également exprimer ma profonde gratitude à mes professeurs, dont l'expertise, la rigueur et la passion pour leur domaine m'ont permis d'évoluer et de grandir. Leur soutien constant et leur accompagnement tout au long de mon parcours académique ont été déterminants pour la réalisation de ce projet.

Enfin, je dédie cette œuvre à tout le personnel d'Atlantic Re. Leur accueil chaleureux, leur disponibilité et leur professionnalisme ont grandement contribué à cette expérience enrichissante. Merci à vous tous pour cette collaboration exceptionnelle et pour avoir rendu ce projet possible.

À tous, merci pour votre amour, votre soutien et votre présence, sans lesquels cette réalisation n'aurait pas été possible.

Remerciements

Je tiens à exprimer ma sincère gratitude à toutes les personnes qui ont contribué à la réalisation de ce projet de fin d'études.

Je remercie tout particulièrement l'équipe d'Atlantic Re pour leur accueil chaleureux et leur disponibilité tout au long de mon stage. Un remerciement spécial à l'équipe ERM, dont le soutien constant et les précieux conseils ont été essentiels à la bonne réalisation de ce travail.

Je souhaite également adresser mes plus vifs remerciements à Monsieur FAHEM Ismail, qui m'a accompagné tout au long de mon stage. Son encadrement, sa rigueur et ses retours constructifs ont été d'une grande aide pour mener à bien ce projet.

Je tiens à exprimer ma reconnaissance envers mon professeur, Monsieur SAID Khalil, pour son soutien et son encadrement exceptionnels tout au long de mon stage. Ses conseils avisés et son accompagnement m'ont permis d'approfondir mes connaissances et de progresser dans la réalisation de ce projet.

Enfin, je souhaite remercier tout le personnel d'Atlantic Re pour cette expérience extraordinaire. Leur collaboration et leur bienveillance ont largement contribué à enrichir mon parcours professionnel.

Encore une fois, merci à tous pour votre soutien et pour avoir fait de ce stage une étape aussi enrichissante de mon parcours.

Résumé

Dans le cadre du pilier 1 de du projet SBR, l'ACAPS a mis en place des ajustements à la formule standard pour mieux tenir compte des spécificités du marché marocain en matière de réassurance. L'un des ajustements majeurs concerne l'application d'un facteur d'atténuation lié à la réassurance non proportionnelle, spécifiquement pour les chocs liés au risque de primes. En effet, les risques de primes ont été calibrés par l'ACAPS sur des données nationales brutes de réassurance, ce qui suppose une volatilité constante lorsque les risques sont cédés dans des programmes proportionnels. Cependant, dans le cas de la réassurance non proportionnelle, la volatilité peut diminuer, en raison de la nature des couvertures, telles que les contrats d'excédent de sinistres ou de pertes, qui limitent l'impact des sinistres lourds sur le portefeuille de l'assureur.

L'ACAPS envisage ainsi de permettre aux entreprises d'assurances réassurances d'appliquer un facteur d'atténuation pouvant atteindre 20%, à condition qu'elles puissent démontrer un effet de réduction de la volatilité sur leur portefeuille, dû à la cession non proportionnelle des risques.

L'objectif de notre étude est de présenter les résultats des écarts de volatilité entre le brut et le net sur le portefeuille non-vie de Atlantic Re. Nous chercherons à quantifier l'impact de la réassurance non proportionnelle sur la volatilité du portefeuille et à évaluer la pertinence de ce facteur d'atténuation pour optimiser la gestion des risques et la solvabilité d'Atlantic Re.

Mots clés – SBR, CSR primes, Rétrocession non proportionnelle, Risque de primes et de réserves, Maximum de vraisemblance, Merz Wutrich

Abstract

As part of Pillar 1 of the SBR project, the ACAPS has made adjustments to the standard formula to better account for the specificities of the Moroccan reinsurance market. One of the major adjustments concerns the application of an attenuation factor related to non-proportional reinsurance, specifically for shocks related to premium risk. Indeed, the premium risks have been calibrated by the ACAPS using national raw reinsurance data, which assumes constant volatility when risks are ceded under proportional programs. However, in the case of non-proportional reinsurance, volatility can decrease due to the nature of the coverage, such as excess of loss or catastrophe covers, which limit the impact of large claims on the insurer's portfolio.

The ACAPS thus plans to allow insurance and reinsurance companies to apply an attenuation factor of up to 20%, provided they can demonstrate a reduction in volatility in their portfolio due to the non-proportional cession of risks.

The objective of our study is to present the results of the volatility differences between the gross and net values on the non-life portfolio of Atlantic Re. We aim to quantify the impact of non-proportional reinsurance on the portfolio's volatility and assess the relevance of this attenuation factor for optimizing risk management and solvency at Atlantic Re.

Keywords –SBR, CSR premiums, Non-proportional reinsurance, Premium and reserve risk, Maximum likelihood, Merz Wutrich.

Table des matières

Liste des abréviations	10
1 Présentation de l'organisme d'accueil	13
1.1 Atlantic Re	13
1.2 Enterprise Risk Management (ERM)	14
2 Contexte Réglementaire et Cadre SBR	15
2.1 Généralités sur la réassurance :	15
2.1.1 Types de réassurance	16
2.1.2 Traités de réassurance	17
2.2 Le cadre réglementaire de Solvabilité Basé sur les Risques (SBR)	18
2.3 Le bilan en valeur économique	20
2.3.1 Evaluation des actifs	21
2.3.2 Evaluation des passifs	21
2.4 Evaluation du CSR selon la formule standard	23
2.4.1 Risque de souscription en non vie	26
2.4.1.1 Sous risque de prime	27
2.5 Analyse de la sensibilité du CSR primes sur la solvabilité du portefeuille . .	30
2.5.1 Présentation du portefeuille d'Atlantic Re	30
2.5.2 Impact de l'atténuation de Volatilité de primes sur le ratio de Solvabilité d'Atlantic Re	34
3 Calibrage du sous-risque de primes sur les données brutes	36
3.1 Estimation de l'écart-type brute avec la méthode du maximum de vraisemblance	37
3.1.1 Vérification des hypothèses pour les différentes sous catégories SBR	38
3.1.2 Volatilités estimées sur les données brutes par maximum de vraisemblance	49
3.2 Estimation de l'écart-type avec la méthode des moindres carrées	50
4 Calibrage du facteur d'atténuation du sous-risque de primes par la rétrocession	53
4.1 La rétrocession dans le contexte d'Atlantic Re	53

0. TABLE DES MATIÈRES

4.2	Estimation de l'écart-type avec la méthode du maximum de vraisemblance	55
4.3	Synthèse et impact potentiel sur le ratio de solvabilité	60
4.4	Estimation de l'écart-type avec la méthode des moindres carrées	62
5	Calibrage du sous-risque de réserve	65
5.1	Provisionnement non-vie	65
5.1.1	La méthode de Chain-Ladder	68
5.1.2	Modèle de Mack	69
5.2	Méthode de Merz et Wüthrich	71
5.3	Méthode de Bootstrap à un an	81
	Annexes	92
	Annexes	104

Table des figures

2.2.1	Les trois piliers du projet SBR	19
2.3.1	Une vision sur les deux bilans comptables et économique	21
2.4.1	Agrégation de risque suivant le principe bottom-up SBR : Source ACAPS	25
2.4.2	Module de risque souscription non vie sous SBR	27
2.5.1	Sensibilité du ratio de solvabilité suite à l'atténuation de la volatilité	34
3.1.1	Régression de la charge ultime sur la prime acquise	38
3.1.2	Régression linéaire de la charge ultime sur la prime acquise	39
3.1.3	Régression log-log de la charge ultime sur la prime acquise	40
3.1.4	La normalité des résidus	41
3.1.5	Homoscédasticité des résidus	42
3.1.6	Résultats des test de log-normalité	42
3.1.7	QQ-Plot des données log-transformées	43
3.1.8	Régression linéaire de la charge ultime sur la prime acquise pour 2120	44
3.1.9	Régression de la charge ultime sur la prime acquise	44
3.1.10	QQ-Plot des données log-transformées	45
3.1.11	Résultats des test de log-normalité	45
3.1.12	Régression linéaire de la charge sur la prime	46
3.1.13	qq-plot et homoscédasticité des résidus	47
3.1.14	QQ-Plot des données log-transformées	47
3.1.15	Résultats des test de log-normalité	48
3.1.16	Régression linéaire de la charge ultime sur la prime acquise	48
3.1.17	qq-plot de la normalité et graphe d'homoscédasticité des résidus	49
3.1.18	QQ-Plot des données log-transformées	49
4.1.1	Ratio combiné par année comptable yc GEC	54
5.1.1	Triangle de liquidation	67
5.2.1	Test d'absence d'effet calendaire sur la catégorie Incendie	76
5.2.2	Test d'absence d'effet calendaire sur la catégorie Auto AT RC	76
5.2.3	Régression linéaire pour chaque paire de développement pour Incendie	77
5.2.4	Régression linéaire pour chaque paire de développement pour Auto AT RC	78
5.2.5	La tendance des résidus pour chaque année de développement pour l'Incendie	78

5.2.6 La tendance des résidus pour chaque année de développement pour Auto AT RC	79
5.2.7 Evolution des facteurs individuels pour l'Incendie	80
5.2.8 Evolution des facteurs individuels pour Auto AT RC	80
5.3.1 Schéma simplifié d'un bootstrap	86
5.3.2 La distribution du CDR pour le segment d'activité Incendie	86
5.3.3 La distribution du CDR pour le segment d'activité Auto AT RC	87
5.3.4 Vérification des hypothèses pour la catégorie Véhicules à usage de tourisme	94
5.3.5 Vérification des hypothèses pour la catégorie Garanties autres que la responsabilité civile	95
5.3.6 Vérification des hypothèses pour la catégorie Responsabilité civile générale	96
5.3.7 Vérification des hypothèses pour la catégorie Incendie	97
5.3.8 Vérification des hypothèses pour la catégorie Assurances des risques techniques	98
5.3.9 Vérification des hypothèses pour la catégorie Maritime	99
5.3.10 Vérification des hypothèses pour la catégorie Autres	100
5.3.11 Vérification des hypothèses pour la catégorie Crédit	101
5.3.12 Vérification des hypothèses pour la catégorie Grêle ou gelée	102
5.3.13 Vérification des hypothèses pour la catégorie Vol	103
5.3.14 Vérification des hypothèses pour la catégorie Aviation	104

Liste des tableaux

2.4.1	Matrice de corrélation entre les modules de risque	25
2.5.1	Résultat du calcul du capital de solvabilité requis	31
2.5.2	Calcul du capital de solvabilité requis de base	32
2.5.3	Matrice de corrélation entre sous-risques	32
2.5.4	Décomposition du risque de souscription non-vie	32
2.5.5	Volume de primes du portefeuille	33
3.1.1	Volatilités estimées sur les données brutes par maximum de vraisemblance	50
3.2.1	Estimation des volatilités avec la méthode des moindres carrées	51
4.2.1	Résultat de l'estimation max vraisemblance	56
4.2.2	Résultat de l'estimation max vraisemblance pour auto	57
4.2.3	Résultat de l'estimation max vraisemblance pour la RC	58
4.2.4	Résultat de l'estimation max vraisemblance pour l'incendie	59
4.2.5	Résultat de l'estimation max vraisemblance pour Risques techniques	59
4.2.6	Résultat de l'estimation max vraisemblance pour Transport	60
4.2.7	Volatilités brutes, nettes et atténuation par segment	60
4.3.1	Comparaison volatilités nettes vs formule standard	61
4.3.2	Formule standard avec atténuation et propositions	61
4.3.3	Impact de l'atténuation sur les indicateurs de solvabilité	62
4.4.1	Volatilités brutes et nettes estimées par la méthode des moindres carrés	63
4.4.2	Volatilités nettes et brutes estimées de l'ensemble du portefeuille de la SCR	63
5.2.1	Volatilité de risque réserve de la catégorie Incendie	80
5.2.2	Volatilité de risque de réserve de la catégorie Auto AT RC	81
5.3.1	Volatilités de risque de réserve estimées par la méthode bootstrap	87
5.3.2	Écart-type de primes relatif à chaque sous-catégorie SBR	93

Liste des abréviations

ACAPS Autorité de Contrôle des Assurances et de la Prévoyance Sociale

SBR Solvabilité basée sur les risques

CSR Capital de solvabilité requis

MSEP Mean Squared Error of Prediction

PSAP Provision pour Sinistres à Payer

BE Best Estimate

CDR Claims Development Result

RM Risk Margin

FAC Facultatifs

Introduction générale

Dans le cadre de la mise en œuvre de du projet SBR et en particulier de son pilier 1, l'ACAPS a mis en place des ajustements à la formule standard afin de mieux refléter les spécificités du marché marocain en matière de réassurance. L'un des points d'ajustement majeur concerne l'application d'un facteur d'atténuation lié à la réassurance non proportionnelle, particulièrement pour les chocs relatifs au risque de primes. Cette mesure s'inscrit dans une démarche d'amélioration de la gestion des risques et de la solvabilité des assureurs, notamment ceux ayant recours à des contrats de réassurance non proportionnels.

Le calcul de la volatilité des primes, tel qu'établi par l'ACAPS, repose sur des calibrages des sigmas de prime fondés sur des données nationales brutes. Lorsque les risques sont cédés à des programmes proportionnels, la volatilité est supposée constante. Cependant, dans le cadre de la réassurance non proportionnelle, notamment avec les contrats d'excédent de sinistres ou de pertes, la volatilité peut être atténuée, car ces programmes limitent l'impact des sinistres lourds sur le portefeuille de l'assureur.

L'ACAPS envisage ainsi de permettre aux entreprises d'assurances réassurances d'appliquer un facteur d'atténuation allant jusqu'à 20%, sous réserve qu'elles puissent démontrer un effet tangible de réduction de la volatilité sur leur portefeuille, suite à la cession non proportionnelle de risques. Ce mécanisme offre une opportunité pour les entreprises de mieux refléter la réduction effective du risque qu'elles subissent et de bénéficier d'une évaluation plus fine de leur solvabilité.

Le présent projet a pour objectif de proposer une analyse approfondie du calibrage du facteur d'atténuation appliqué au sous-risque de primes par la récession non proportionnelle, en mesurant les écarts de volatilité entre le brut et le net sur le portefeuille non vie de l'entreprise Atlantic Re. À travers cette étude, nous chercherons à quantifier les effets de la réassurance non proportionnelle sur la réduction de la volatilité, tout en explorant les implications de cette approche sur la gestion du risque et sur la solvabilité des assureurs.

Le présent projet s'articulera autour de plusieurs parties. La première partie sera dédiée à la présentation du contexte réglementaire du projet SBR, avec un accent particulier sur le calcul de la CSR (Capital de solvabilité requis) selon la formule standard. Cette

partie fournira une vue d'ensemble des exigences réglementaires auxquelles les entreprises d'assurances doivent se conformer, ainsi que des bases sur lesquelles le projet SBR repose pour déterminer le capital nécessaire pour couvrir les risques.

La deuxième partie sera consacrée au calcul de la volatilité du risque de primes à partir des données brutes de réassurance, dans le cadre des contrats non proportionnels. Nous analyserons comment ces données brutes influencent la détermination de la volatilité, et nous étudierons l'impact des différentes stratégies de réassurance sur la gestion de la volatilité des primes.

Dans la troisième partie, nous calculerons cette même volatilité en utilisant des données nettes de réassurance. Cette partie mettra en lumière l'impact de la rétrocession non proportionnelle sur la volatilité nette, permettant ainsi de quantifier l'atténuation de la volatilité obtenue grâce à la rétrocession non proportionnelle.

Enfin, la quatrième partie se concentrera sur les méthodologies de calcul de la volatilité du risque de réserves, adaptées spécifiquement au profil de risque d'Atlantic Re. Cette section sera dédiée à l'étude de approches permettant de modéliser et de calibrer le risque de réserves dans le contexte d'Atlantic Re, celle de Merz et la méthode de Bootstrap à un an.

Chapitre 1

Présentation de l'organisme d'accueil

1.1 Atlantic Re



Atlantic Re est une société de réassurance opérant sur le marché marocain et africain. Elle propose une large gamme de solutions de réassurance pour les compagnies d'assurances dans divers secteurs, incluant les risques non-vie, les risques vie et les risques spéciaux. Avec une expertise reconnue et un savoir-faire éprouvé, Atlantic Re se positionne comme un acteur clé dans le domaine de la gestion des risques, en offrant à ses clients des produits adaptés aux spécificités de chaque marché.

L'entreprise se distingue par sa capacité à fournir des solutions innovantes et sur mesure, en utilisant des techniques avancées de modélisation des risques et des outils actuariels de pointe. Grâce à sa solide expérience et à son réseau de partenaires internationaux, Atlantic Re met à disposition des assureurs des couvertures de réassurance efficaces, tout en optimisant la gestion des risques à travers des programmes adaptés.

Atlantic Re joue également un rôle essentiel dans le soutien de l'innovation et du développement de nouveaux produits d'assurance, tout en assurant une gestion prudente et

rigoureuse des fonds de réassurance, dans le respect des régulations locales et internationales. Grâce à ses stratégies de réassurance non proportionnelle et proportionnelle, l'entreprise participe activement à la stabilité du secteur de l'assurance, tout en contribuant à la croissance économique de la région.

1.2 Enterprise Risk Management (ERM)

L'Enterprise Risk Management (ERM) est un processus global et systématique de gestion des risques au sein d'une organisation. Son objectif principal est d'identifier, d'évaluer, de gérer et de surveiller les risques pouvant affecter la performance et la pérennité de l'entreprise. L'ERM va au-delà de la simple gestion des risques opérationnels ou financiers, et inclut toutes les catégories de risques, qu'ils soient stratégiques, financiers, humains, opérationnels, ou liés à la réputation. Il permet aux entreprises de mieux anticiper les événements incertains, de renforcer leur résilience face aux crises et de saisir de nouvelles opportunités en réduisant les risques inhérents à leurs activités.

L'ERM repose sur une approche intégrée, où les risques sont gérés de manière cohérente et en fonction des objectifs stratégiques de l'entreprise. Ce processus implique la mise en place de structures, de politiques et de pratiques visant à gérer les risques à tous les niveaux organisationnels. Il inclut également une communication efficace et la prise de décisions éclairées pour répondre aux risques identifiés, tout en optimisant les ressources et en assurant une conformité avec les exigences réglementaires.

Chez Atlantic Re, l'ERM est une composante essentielle de la stratégie de gestion des risques de l'entreprise. En tant que réassureur de premier plan, Atlantic Re adopte une approche proactive et systématique de la gestion des risques, afin de garantir la stabilité de son portefeuille et la résilience face aux événements imprévus. L'entreprise met en œuvre une politique de gestion des risques qui couvre l'ensemble des risques auxquels elle peut être exposée, qu'ils soient liés à ses opérations de réassurance, à ses relations avec les cédantes, ou aux fluctuations des marchés financiers et économiques.

Chapitre 2

Contexte Réglementaire et Cadre SBR

2.1 Généralités sur la réassurance :

La réassurance, souvent désignée comme l'« assurance des assureurs », est un élément crucial dans la gestion des risques et la stratégie de croissance des compagnies d'assurance. Elle permet aux assureurs, appelés *cédants*, de transférer une partie ou la totalité des risques qu'ils souscrivent à des *réassureurs*, en échange d'une prime de réassurance.

Ce mécanisme permet non seulement de partager le risque, mais aussi de renforcer la sécurité des fonds propres et d'assurer la solvabilité, particulièrement en cas de sinistres majeurs.

Rôle économique et stratégique de la réassurance

La réassurance joue un rôle stratégique à plusieurs niveaux dans le développement et la pérennité des compagnies d'assurance. Tout d'abord, elle contribue de manière significative à l'amélioration de la solvabilité et à la réduction de la probabilité de ruine. En mettant en place des programmes de réassurance adaptés, les assureurs se protègent contre les risques extrêmes, renforçant ainsi leur résilience face aux événements catastrophiques et assurant leur stabilité financière à long terme.

Par ailleurs, la réassurance permet une augmentation notable de la capacité de souscription. En transférant une partie du risque, les compagnies peuvent souscrire davantage de contrats que ne le permettrait leur seul capital. Ce levier est particulièrement avantageux pour les petites et moyennes compagnies d'assurance souhaitant élargir leur portefeuille ou s'imposer sur des marchés concurrentiels.

Au-delà de l'aspect financier, les réassureurs jouent également un rôle de partenaires techniques. Leur expertise permet aux assureurs de concevoir des programmes de réassurance sur mesure, de mieux tarifier les risques complexes, et d'accéder à des outils analytiques avancés. Leur contribution est d'autant plus précieuse dans le contexte actuel où les risques émergents, comme le cyber-risque ou le terrorisme, nécessitent une approche innovante.

Enfin, la réassurance favorise l'innovation en facilitant la diversification des produits et l'expansion vers de nouveaux marchés. Grâce à une mutualisation efficace des risques à l'échelle internationale, les assureurs peuvent prendre des initiatives commerciales audacieuses tout en maintenant une gestion rigoureuse des risques.

2.1.1 Types de réassurance

La réassurance se divise en deux grandes catégories qui structurent les modalités de partage des risques entre l'assureur cédant et le réassureur : la réassurance proportionnelle et la réassurance non-proportionnelle. Chacune de ces catégories comprend des types de traités spécifiques qui répondent à des objectifs de couverture différenciés.

La réassurance proportionnelle

Dans la réassurance proportionnelle, le réassureur partage avec l'assureur cédant les primes et les sinistres selon une proportion définie. Ce partage est équilibré : à la proportion des primes cédées correspond la proportion des charges de sinistres assumées.

1. **Traité en quote-part (quota share)** : Ce traité est la forme la plus élémentaire de réassurance proportionnelle. Le réassureur prend en charge une fraction fixe des sinistres en échange de la même fraction des primes.
2. **Traité en excédent de plein** : Dans ce type de traités, l'assureur cédant conserve un montant spécifique de risque, connu sous le nom de « plein de rétention ». Au-delà de ce montant, le réassureur couvre les sinistres, jusqu'à une limite prédéfinie. Les primes et les sinistres sont partagés sur la base d'un taux de cession calculé individuellement pour chaque police.

La réassurance non proportionnelle

La réassurance non-proportionnelle intervient uniquement lorsque les sinistres dépassent un seuil déterminé, appelé *priorité* ou *franchise*. Le réassureur ne participe qu'aux pertes excédant ce seuil.

- **Traité en excédent de sinistres** : Ce type de traité est structuré pour protéger l'assureur contre les sinistres individuels coûteux. Le réassureur couvre la part des sinistres qui dépasse la franchise jusqu'à une limite maximale fixée, connue sous le nom de *portée*.
- **Traité en excédent de pertes (Stop-Loss)** : Orienté vers la protection contre les mauvais résultats financiers globaux plutôt que contre des sinistres individuels, ce traité est utilisé pour limiter les pertes annuelles totales. Le réassureur s'engage à indemniser l'assureur pour les pertes qui excèdent un ratio sinistres/primes prédéterminé.

Volatilité des risques en réassurance

La volatilité des risques en réassurance joue un rôle crucial dans le choix des mécanismes de couverture, influençant directement la stabilité financière des assureurs et réassureurs. En réassurance proportionnelle, comme dans les contrats de *quota-part* ou de *surplus*, les primes et les sinistres sont partagés selon une clé prédéfinie entre le cédant et le réassureur, ce qui permet de mutualiser la volatilité et d'assurer une répartition équilibrée des pertes. Cette approche convient particulièrement aux risques homogènes et récurrents, offrant une stabilisation progressive des résultats financiers. En revanche, la réassurance non proportionnelle, telle que le stop-loss ou les couches d'excédent de sinistres XS, intervient uniquement lorsque les sinistres dépassent un seuil prédéterminé, offrant ainsi une protection ciblée contre les événements extrêmes et les pics de sinistralité. Ce type de couverture est privilégié pour les risques à forte volatilité, comme les catastrophes naturelles, où l'objectif est de limiter l'impact financier des pertes exceptionnelles. Ainsi, tandis que la réassurance proportionnelle lisse la volatilité par un partage systématique des risques, la réassurance non proportionnelle agit comme un filet de sécurité contre les chocs majeurs, permettant aux assureurs de mieux gérer l'incertitude et les aléas les plus graves.

2.1.2 Traités de réassurance

- **La Réassurance Facultative** : La réassurance facultative est un accord ponctuel et sélectif où chaque risque est négocié individuellement entre l'assureur cédant et le réassureur. Dans ce cadre, l'assureur choisit librement les risques qu'il souhaite transférer (par exemple, un contrat d'assurance spécifique ou un risque atypique), et le réassureur évalue chaque proposition avant d'accepter ou de refuser la couverture. Cette approche offre une flexibilité maximale, permettant de couvrir des risques complexes, de grande valeur ou peu courants (comme une infrastructure critique ou un événement exceptionnel). Cependant, elle est souvent coûteuse et chronophage en raison des analyses détaillées requises pour chaque dossier. De plus, le réassureur peut imposer des conditions strictes ou des primes élevées, et l'assureur cédant reste exposé si le réassureur refuse la cession. Elle est donc privilégiée pour les risques non standardisés ou lorsque le traité obligatoire ne suffit pas à couvrir l'exposition.
- **La Réassurance Obligatoire** : La réassurance obligatoire repose sur un contrat préétabli entre le cédant et le réassureur, qui s'engage à couvrir automatiquement un portefeuille de risques défini à l'avance (par exemple, tous les contrats d'assurance automobile d'une région). Les conditions (comme les plafonds de couverture, les primes et les exclusions) sont fixées pour une durée déterminée (souvent un an). Ce mécanisme garantit une stabilité opérationnelle et financière : l'assureur cédant transfère systématiquement une partie de ses risques, réduisant ainsi son exposition sans délai de négociation. Il est idéal pour les risques homogènes et récurrents (habitation, santé), où la mutualisation des risques permet une gestion efficiente.

Toutefois, le traité obligatoire limite la sélectivité : le réassureur ne peut pas refuser un risque individuel inclus dans le portefeuille, ce qui peut entraîner une accumulation de risques sous-jacents ou une inadéquation des primes en cas de sinistralité imprévue.

Volatilité des traités de réassurance

La volatilité des traités de réassurance, qu'ils soient facultatifs ou obligatoires, reflète leur capacité à gérer l'incertitude des sinistres, mais avec des dynamiques distinctes. Les traités facultatifs, négociés au cas par cas pour des risques spécifiques (comme une usine chimique ou un événement météorologique exceptionnel), présentent une volatilité intrinsèquement élevée : chaque risque couvert est unique, souvent de grande ampleur, et soumis à des aléas difficiles à modéliser (ex. catastrophes naturelles, sinistres industriels). Cette volatilité est exacerbée par la nature ponctuelle des accords, où le réassureur assume des expositions concentrées sans diversification immédiate, ce qui peut entraîner des fluctuations brutales de résultats en cas de sinistre majeur. À l'inverse, les traités obligatoires, qui couvrent automatiquement un portefeuille de risques homogènes (comme l'assurance automobile ou habitation), bénéficient d'une volatilité lissée grâce à la mutualisation statistique. La loi des grands nombres permet d'anticiper les pertes moyennes sur un grand nombre de risques similaires, réduisant ainsi les écarts extrêmes. Toutefois, une accumulation imprévue de sinistres dans le portefeuille (ex. pandémie affectant simultanément des milliers de contrats santé) peut générer une volatilité systémique, moins prévisible.

2.2 Le cadre réglementaire de Solvabilité Basé sur les Risques (SBR)

L'Autorité de Contrôle des Assurances et de la Prévoyance Sociale (ACAPS) a élaboré en avril 2017 le projet de circulaire « Solvabilité Basée sur les Risques (SBR) » qui décrit un nouveau référentiel réglementaire pour l'évaluation de la solvabilité, cette circulaire s'inspire de la réglementation européenne Solvabilité 2, mais n'a pas été transposée en l'état. Elle vise à combler les lacunes de la réglementation actuelle, elle aspire à intégrer les dimensions économiques et prudentielles en considérant l'ensemble des risques auxquels les entreprises du secteur sont exposées. Ainsi, elle incite les acteurs de l'assurance et de la réassurance à mieux appréhender leur environnement en identifiant les risques pertinents et en les intégrant dans l'évaluation de leur solvabilité.

La réforme est principalement portée par deux entités clés : l'Autorité de contrôle des assurances et de la prévoyance sociale (ACAPS) et la Fédération marocaine des sociétés d'assurance et de réassurance (FMSAR). cette réglementation repose sur trois piliers :

- **Pilier 1** : Exigences quantitatives relatives principalement au calcul des provisions techniques et les exigences en capital de solvabilité.

- **Pilier 2** : Exigences qualitatives et quantitatives relatives à la surveillance des risques.
- **Pilier 3** : Exigences en matière de communication et d'information.

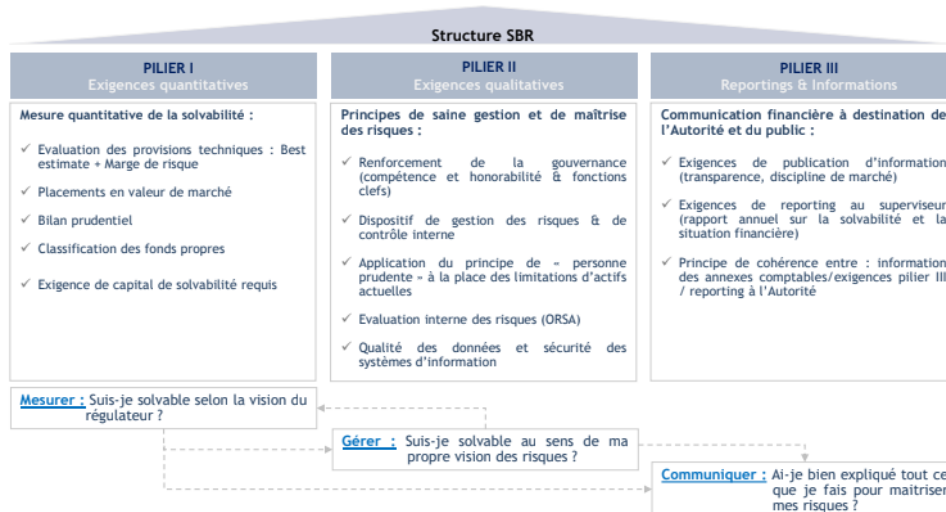


FIGURE 2.2.1 – Les trois piliers du projet SBR

— **Pilier 1 - Les exigences quantitatives :**

Le premier pilier concerne les règles de valorisation du bilan, ainsi que les exigences en capital et leur mode de calcul. L'objectif est de garantir à l'assureur un niveau de fonds propres suffisant pour honorer tous ses engagements dans 99,5% des cas. Autrement dit, il plafonne la probabilité de ruine théorique à 0,5%.

Parmi ces exigences, on trouve :

- Le capital de solvabilité requis : Le **CSR** correspond au montant de fonds propres nécessaires pour couvrir un scénario de crise majeure, garantissant avec une probabilité de 99,5 % que l'entreprise ne sera pas en faillite à horizon d'un an. Ce capital doit permettre à l'assureur d'absorber les pertes dues à des événements extrêmes, tels que ceux se produisant une fois tous les 200 ans.
- Le capital minimum requis : Le **MCR** représente le niveau minimal de capital en dessous duquel une compagnie d'assurance ne peut fonctionner. Il assure avec une probabilité de 80 % que l'assureur ne sera pas en faillite à horizon d'un an.

Les assureurs ont le choix entre utiliser une *formule standard*, développée par les régulateurs, ou développer un *modèle interne propre* pour calculer le SCR, capable de mieux refléter leur profil de risque spécifique. En pratique, pour mieux cerner ce caractère « solvable », les assureurs se basent sur deux ratios faisant intervenir fonds propres, capital de solvabilité et capital minimum requis :

— **Ratio de solvabilité :**

$$\text{Ratio de solvabilité} = \frac{FP}{SCR}$$

— **Ratio de couverture du MCR :**

$$\text{Ratio de couverture du MCR} = \frac{FP}{MCR}$$

— **Pilier 2 - Les exigences qualitatives :**

Les exigences qualitatives s'inscrivent dans la volonté de développer la culture *ERM* (Enterprise Risk Management) au sein des entreprises. Ce pilier renforce donc l'audit interne, le contrôle interne, la gouvernance et la gestion des risques, tout en instaurant un dispositif de fonction clé sous condition d'honorabilité et de compétence.

L'ensemble des nouvelles mesures s'articulent entre elles pour aboutir à la production du rapport **ORSA** (*Own Risk and Solvency Assessment*) qui est à destination de l'entreprise et non du régulateur. Son rôle est d'évaluer en profondeur la politique de l'entreprise, son profil de risque et d'en déduire des décisions de pilotage adaptées. L'enjeu de ce pilier réside donc dans la cohérence entre stratégie et caractéristiques de l'assureur.

— **Pilier 3 - Les exigences du reporting :**

Le dernier pilier concerne la communication financière au marché et aux autorités de contrôle. Il encadre les deux précédents en permettant au public de vérifier les informations clés utilisées dans les calculs de solvabilité.

Ce pilier est celui de la **transparence**.

2.3 Le bilan en valeur économique

Parmi les changements radicaux apportés par les normes SBR, on trouve la modification de l'approche d'élaboration du bilan économique.

Sous la réglementation actuelle, le bilan économique était basé sur une vision totalement comptable. En revanche, le bilan SBR adopte une vision purement économique. En effet, les actifs sont inscrits au bilan selon leurs valeurs de marché, et les provisions techniques sont déterminées selon une vision de Best Estimate, contrairement aux provisions techniques de la réglementation actuelle, qui étaient calculées à partir d'hypothèses prudentes.

La figure suivante illustre les différences entre les bilans comptables et économiques :

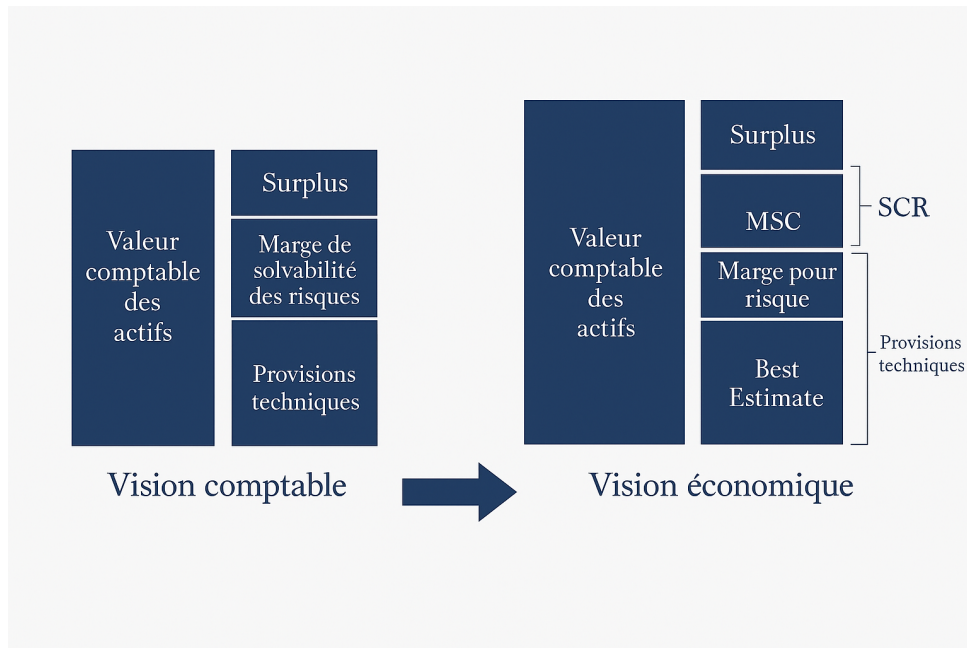


FIGURE 2.3.1 – Une vision sur les deux bilans comptables et économique

2.3.1 Evaluation des actifs

L'actif est principalement représenté par les placements financiers. En effet, l'assureur place les primes qu'il reçoit en instruments financiers, dans l'attente du paiement des sinistres et de rémunérer ainsi les passifs.

Contrairement au bilan comptable classique, les actifs sont inscrits au bilan à leur *valeur de marché (fair value)* plutôt qu'à leur valeur d'acquisition. La notion de juste valeur reflète les principes comptables anglo-saxons, offrant une image cohérente avec celle des marchés financiers de l'actif de l'entreprise.

Cela contraste avec la prudence comptable traditionnelle, où les plus-values ne sont comptabilisées qu'une fois réalisées, et les moins-values dès qu'elles sont constatées.

2.3.2 Evaluation des passifs

Au passif, les provisions techniques, qui sont définies comme étant le montant intégral des engagements de l'assureur, sont les plus représentées. Elles correspondent à la somme d'une estimation en vision *Best Estimated Liabilities* des engagements de l'assureur, complétée d'une *marge pour risque (Risk Margin)*.

Les **fonds propres économiques** appelés *Net Asset Value*, représentent ce qui reste de l'actif une fois que les provisions techniques ont été intégralement couvertes.

Le Best Estimated Liabilities

Le **BEL** est la meilleure estimation des obligations futures de l'assureur. Il correspond à la valeur actuelle nette des *cash-flows* probables futurs du passif (primes, prestations, frais...) des contrats en stock à la date de calcul, sous la probabilité risque neutre.

$$\text{BEL} = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\sum_{t \geq 1} \delta_t P_t \mid \mathcal{F}_t \right]$$

Avec :

- \mathbb{Q} : la probabilité risque neutre, i.e. les instruments financiers se comportent comme des actifs sans risque et leurs prix actualisés sont des martingales, ce qui implique qu'en moyenne, les processus de prix évoluent au taux sans risque.
- $\delta_t = e^{-\int_0^t r_s ds}$: facteur d'actualisation, où r_s est le taux sans risque entre $t = 0$ et la date t .
- \mathcal{F}_0 : filtration caractérisant l'information financière du marché disponible à la date $t = 0$.
- P_t : cash-flow du passif à la date t , qui est \mathcal{F}_t -mesurable. Aucun nouveau contrat n'est souscrit.

D'une manière simple, le cash-flow en date t est donné par :

$$P_t = \text{Primes}_t - \text{Sinistres}_t - \text{Frais}_t$$

Risk Margin

Risk Margin (RM) représente le coût d'immobilisation du capital nécessaire pour couvrir les risques assurantiels. Elle s'ajoute au *Best Estimate* des passifs, intégrant ainsi une marge de prudence dans le calcul des provisions techniques, liée au fait que les risques techniques ne sont pas échangeables sur un marché complet et liquide.

La formule du Risk Margin est donnée par :

$$\text{RM} = \text{CoC} \times \sum_{t=1}^T \frac{\text{SCR}_t}{(1 + r_t)^t}$$

Avec :

- r_t : taux zéro-coupon.
- $\text{CoC} = 6\%$: coût du capital, fixé par la réglementation.
- SCR_t : capital de solvabilité requis pour les risques actuariels à la date t .

La Net Asset Value (NAV) ou valeur nette des actifs est constituée par les fonds propres disponibles. Elle représente l'espérance des marges futures R_t sous la probabilité risque neutre. Elle peut être calculée comme :

$$\text{NAV}_t = \text{Actifs en valeur de marché} - P_t$$

où P_t est la provision technique à la date t .

Sinon, la NAV peut également être représentée comme l'actualisation des résultats d'assurance espérés durant la période de projection :

$$\text{NAV} = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\sum_{t=1}^T \delta_t R_t \mid \mathcal{F}_0 \right]$$

avec :

- R_t : résultat attendu à la date t , décomposé en :
 - **Résultat technique** : solde de souscription – commissions – frais généraux,
 - **Résultat financier** : produits des placements nets des frais de placements – participation aux bénéfices versée aux assurés.

2.4 Evaluation du CSR selon la formule standard

Que ce soit pour Solvabilité II ou bien Solvabilité Basée sur les Risques, la définition du capital de solvabilité requis (CSR) est la même : il sert à capturer les pertes inattendues que l'entreprise doit supporter en cas de scénario adverse pour les profils de risque, et ce, avec un niveau de confiance de 99,5%. Ainsi, la même métrique a été conservée : la Valut-at-Risk. Pour l'heure, aucune précision n'existe quant à la possible mise en place de modèles internes au sein d'entités marocaines. Cette possibilité restera probablement limitée du fait des coûts financiers, opérationnels, d'implémentation et de conservation d'un tel modèle au sein d'un organisme.

Le calcul du CSR s'effectue via deux approches distinctes. La première approche est celle par facteurs qui consiste à appliquer une formule mathématique à une assiette. La seconde approche est par scénario et réside dans l'application d'un choc aux hypothèses centrales. Le CSR correspond alors à la différence entre les actifs nets réévalués de l'organisme évalués selon des hypothèses centrales et ces mêmes actifs évalués selon des scénarios défavorables à l'entité. Le capital de solvabilité requis sous SBR est constitué de la somme des éléments suivants :

- Le capital de solvabilité requis de base correspondant à la somme agrégée des exigences de capitaux relatives aux modules de risques (marché, concentration, contrepartie, et souscriptions) après application de coefficients de corrélations pour le moment inconnu ;
- L'exigence de capital relative au risque opérationnel qui correspond à un pourcentage du capital de solvabilité requis de base ;

- L’ajustement qui vise à tenir compte de la capacité d’absorption des pertes par les assurés ou par les impôts différés.

Dans ce cadre le CSR se calcule en utilisant une approche modulaire qui consiste à agréger les “sous CSR ” pour chaque classe de risque.

Le CSR relatif à un risque A est défini comme l’écart observé entre un bilan central et un bilan sur lequel un stress test a été appliqué au niveau du risque A. Cette notion se matérialise par les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \text{NAV}_t &= \text{Actif}_t - \text{BEL}_t \\ \text{NAV}_{\text{Choc}} &= \text{Actif}_{\text{Choc}} - \text{BEL}_{\text{Choc}} \\ \text{SCR}_{\text{sous module}} &= \text{NAV}_0 - \text{NAV}_{\text{Choc}} \\ \text{SCR}_{\text{module } k} &= \sqrt{\sum_{i,j \in \text{module}} \rho_k^{i,j} \cdot \text{SCR}_i \cdot \text{SCR}_j} \end{aligned}$$

Où :

- $\text{SCR}_{\text{module } k}$ représente le capital réglementaire associé au module de risque k .
- SCR_l correspond au capital associé au sous-module l du module k .
- ρ_k désigne la matrice de corrélation des sous-modules du module de risque k .
- Le *Best Estimate of Liabilities (BEL)* est la moyenne des flux futurs pondérés par leur probabilité.

Tout comme sous Solvabilité II, le profil de risque est organisé en modules de risques, qui regroupent des risques selon leur nature. Le calcul du CSR repose alors sur le principe du « bottom-up », commençant ainsi par une agrégation intramodulaire pour finir par une agrégation intermodulaire, en s’aidant de matrices de corrélations.

Dans le contexte réglementaire marocain, le **CSR de base (BCSR)** se calcule selon la formule suivante :

$$\text{BCSR} = \sqrt{\sum_{i,j} \rho(i,j) \cdot \text{CSR}_i \cdot \text{CSR}_j}$$

Où :

- CSR_i et CSR_j sont les exigences en capital pour les modules de risque i et j .
- $\rho(i,j)$ est le coefficient de corrélation entre les modules de risque i et j .

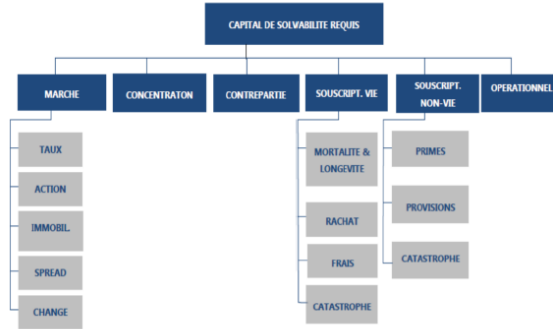


FIGURE 2.4.1 – Agrégation de risque suivant le principe bottom-up SBR : Source ACAPS

Et les risques sont agrégés selon la matrice de corrélation ci-dessous :

	Marché	Concentration	Contrepartie	Vie	Non vie
Marché	1	0	0.25	0.25	0.25
Concentration	0	1	0	0	0
Contrepartie	0.25	0	1	0.25	0.25
Vie	0.25	0	0.25	1	0
Non vie	0.25	0	0.25	0	1

TABLE 2.4.1 – Matrice de corrélation entre les modules de risque

La formule standard pour calculer le CSR est la suivante :

$$CSR = BSCR + Adj + CSR_{op}$$

Où :

- $BSCR$ est le capital de solvabilité requis de base,
- Adj représente l’ajustement visant à tenir compte de la capacité d’absorption de pertes des provisions techniques et des impôts différés,
- CSR_{op} est le capital exigé pour le risque opérationnel.

Le calcul de $BSCR$ repose sur une approche modulaire du risque et sur la segmentation des risques. Cette segmentation est effectuée par branche d’activité ou sous catégorie (*Line of Business, LoB SBR*) en fonction de la nature de l’activité et des engagements de l’organisme assureur.

L’idée sous-jacente à l’approche modulaire est que chaque module représente une exigence en capital, et que le CSR représente l’agrégation de ces différents capitaux. Ces modules sont eux-mêmes subdivisés en sous-modules, comme le montre le schéma précédent.

La formule standard prend en compte les 6 risques suivants :

- **Risque de marché** : est défini comme le module qui reflète le risque lié au niveau ou à la volatilité de la valeur de marché des instruments financiers ayant un impact sur la valeur des actifs et des passifs de l'entreprise concernée. Il reflète de manière adéquate toute inadéquation structurelle entre les actifs et les passifs, en particulier au regard de leur durée.
- **Risque de concentration** : il est défini comme étant l'accumulation des expositions sur une seule contrepartie, directes ou indirectes, traduisant un manque de diversification.
- **Risque de contrepartie** : correspond à la possibilité de défaillance de la contrepartie.
- **Risque de souscription vie** : est le risque de perte en fonds propres découlant des engagements d'assurance vie, compte tenu des périls couverts et des procédés appliqués dans l'exercice de cette activité.
- **Risque de souscription non-vie** : ce module reflète le risque découlant des engagements d'assurance non-vie. Il tient compte de l'incertitude pesant sur les résultats des entreprises d'assurance et de réassurance dans le cadre de leurs engagements existants, ainsi que du nouveau portefeuille dont la souscription est attendue dans les douze mois à venir.
- **Risque opérationnel** : provient de défaillances propres à l'entreprise dans la réalisation des procédures d'analyse ou de contrôle interne.

L'exigence de capital relative au risque opérationnel correspond au produit de 8 % par le capital de solvabilité requis de base (BSCR).

$$SCR_{\text{opérationnel}} = 8\% \times \text{BSCR}$$

Remarque

Notre mémoire s'attache au module de souscription non-vie, et principalement le risque de primes.

2.4.1 Risque de souscription en non vie

Ce module reflète le risque découlant des engagements d'assurance non-vie. Il tient compte de l'incertitude pesant sur les résultats des entreprises d'assurance et de réassurance dans le cadre de leurs engagements existants, ainsi que du nouveau portefeuille dont la souscription est attendue dans les douze mois à venir.

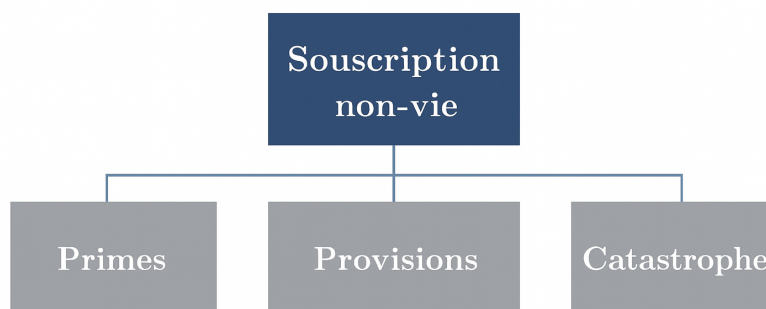


FIGURE 2.4.2 – Module de risque souscription non vie sous SBR

Définition

- Le risque de primes est lié à l’insuffisance de tarification (sinistres de l’année à venir).
- Le risque de réserve est lié à l’insuffisance de provisionnement (sinistres passés)
- Le risque catastrophe est lié aux événements extrêmes ou exceptionnels, qui ne sont pas correctement appréhendés par l’approche facteur utilisée pour la composante risque de primes et de provisions.

2.4.1.1 Sous risque de prime

L’exigence de capital relative au sous-risque de primes pour une *sous-catégorie* i , notée $CSR_{\text{prime},i}$, se calcule comme suit :

$$CSR_{\text{prime},i} = 3 \times \sigma_{\text{prime},i} \times V_{\text{prime},i}$$

Où :

- $\sigma_{\text{prime},i}$: Écart-type de primes relatif à la sous-catégorie i .
- $V_{\text{prime},i}$: Somme du montant des primes acquises et de la provision pour primes non acquises, de l’exercice inventorié et relative à la sous-catégorie i .

En effet, le modèle retenu suppose que le **ratio combiné** est une variable aléatoire X distribuée sur une période t (un an dans le cadre SBR), selon une loi *log-normale* de moyenne μ_x et d’écart type σ_x .

Dans un premier temps, on cherche à estimer le ratio des pertes aléatoires sur les primes et les réserves connues à $t = 0$:

$$\frac{L}{V} = \frac{Y + R_1 - (P + R_0)}{P + R_0}$$

avec :

- L : pertes aléatoires de la période, avec $L = S - P$
- P : prime du portefeuille sur la période
- S : variable aléatoire représentant les sinistres sur la période, avec $S = Y + \Delta R$
- Y : montant des sinistres réglés sur la période
- $\Delta R = R_1 - R_0$: variation des provisions entre $t = 0$ et $t = 1$
- R_t : provisions à la date t
- $V = P$: volume de primes connu à $t = 0$

En posant :

$$X = \frac{Y + R_1}{P + R_0} \quad \Rightarrow \quad \frac{L}{V} = X - 1$$

Dans un deuxième temps, on souhaite équilibrer le portefeuille, ce qui implique que $\mathbb{E}(L) = 0$, donc $\mathbb{E}(X) = 1$. Sous l'hypothèse que X suit une loi log-normale, on a :

$$X = \exp(\mu_x + \sigma_x N(0, 1)) \sim \text{LN}(1, \sigma)$$

Donc :

$$\mathbb{E}[X] = e^{\mu_x + \frac{1}{2}\sigma_x^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad \mu_x = -\frac{1}{2}\sigma_x^2$$

$$\text{Var}[X] = \sigma^2 = e^{\sigma_x^2} - 1 \quad \Rightarrow \quad \sigma_x^2 = \ln(1 + \sigma^2)$$

On souhaite maintenant déterminer le **capital économique** à partir d'une *VaR* à 99,5 % (ou α).

$$\text{EC}_\alpha[L] = \text{VaR}_\alpha[L] = \text{VaR}_\alpha\left(\frac{L}{V} \cdot V\right) = (\text{VaR}_\alpha[X] - 1) \cdot V$$

On a alors :

$$\text{VaR}_\alpha[X] = \exp\left(\sigma_x \cdot \Phi^{-1}(\alpha) - \frac{1}{2}\sigma_x^2\right)$$

Donc le capital économique s'écrit :

$$\text{EC}_\alpha[L] = \left(\exp\left(\Phi^{-1}(\alpha) \cdot \ln(\sigma^2 + 1)^{1/2} - \frac{1}{2}\ln(\sigma^2 + 1)\right) - 1\right) \cdot V$$

$$EC_{\alpha}[L] = \rho(\sigma) \cdot V$$

avec :

$$\rho_{\alpha}(\sigma) = \exp \left(\Phi^{-1}(\alpha) \cdot \ln(\sigma^2 + 1)^{1/2} - \frac{1}{2} \ln(\sigma^2 + 1) \right) - 1$$

où $\Phi^{-1}(\alpha)$ désigne le quantile de la loi normale standard au niveau de confiance α .

Donc :

$$\rho(\sigma) = \frac{\exp \left(N_{99,5\%} \sqrt{\log(1 + \sigma^2)} \right)}{\sqrt{1 + \sigma^2}} - 1 \quad (2.4.1)$$

En effectuant un développement limité de ρ , on obtient :

$$\rho(\sigma) \approx N_{99,5\%} \times \sigma$$

Le coefficient 3 présent dans la formule ci-dessus est un arrondi de 2,576, qui est le quantile à 99,5% d'une normale centrée réduite.

Conclusion :

Le chargement en capital au titre du risque de tarification résulte du produit entre le volume V et une fonction ρ de la volatilité σ .

NB

L'exigence de capital relative au sous-risque de provisions pour une *sous-catégorie* i , notée $CSR_{provisions,i}$, se calcule comme suit :

$$CSR_{provisions,i} = 3 \times \sigma_{provisions,i} \times V_{provisions,i}$$

Où :

- $\sigma_{provisions,i}$: l'écart-type des provisions relatives à la sous-catégorie i .
- $V_{provisions,i}$: le montant de la meilleure estimation des engagements pour sinistres, nette de réassurance, et relative à la sous-catégorie i .



Le $CSR_{provision}$ (ou CSR_{prime}) global est ainsi obtenu en utilisant les coefficients de corrélation présentés en Annexe.

Calcul du volume sous-risque de primes

Le calcul du volume sous-risque relatif au risque de prime est fondé sur les volumes de primes acquises sur l'année d'évaluation et prévus sur les années suivantes :

$$V_{\text{prem},s} = PA_s + PPNA_s$$

Avec :

- PA_s : La somme de la prime acquise de l'année en cours, pour le segment d'activité s .
- $PPNA_s$: Provision pour primes non acquises, pour le segment d'activité s .

Écart-type de primes relatif à chaque sous-catégorie

Les écart-types relatifs à chaque segment d'activité selon la réglementation SBR sont représentés dans l'Annexe.

2.5 Analyse de la sensibilité du CSR primes sur la solvabilité du portefeuille

2.5.1 Présentation du portefeuille d'Atlantic Re

NB

Les données ont été multipliés par un coefficient pour préserver la confidentialité de l'entreprise.

Atlantic Re (SCR) agit en tant que réassureur généraliste sur les marchés domestique et international. Elle offre une large gamme de couvertures en réassurance, aussi bien pour les branches vie que non-vie.

Les types de réassurance proposés par Atlantic Re incluent : les traités proportionnels, les traités non proportionnels, les facultatives proportionnelles, les facultatives non proportionnelles.

- Branches de Souscription : Atlantic Re souscrit principalement dans les branches dommages aux biens, engineering, responsabilité civile, automobile (responsabilité civile et dommages), accident de travail, risques agricoles, aviation, énergie (oil and gas), marine (corps et facultés), responsabilité civile décennale, violence politique, crédit caution, vie et individuelle accident.
- Expansion Internationale : Sur le plan international, Atlantic Re souscrit des affaires dans plusieurs régions, notamment en Afrique (hors Afrique du Sud), au Moyen-Orient et en Asie. Les principaux pays où Atlantic Re opère incluent : Turquie, Pakistan, Inde, Chine, Corée du Sud, Bangladesh, Indonésie, Sri Lanka.

- Diversification du Portefeuille : Atlantic Re mise sur une diversification de son portefeuille en termes de géographie, de branches et d'expositions pour minimiser la volatilité et assurer une rentabilité minimale. Les principaux axes de diversification mis en œuvre sont : ratio traités / facultatives, ratio non proportionnel / proportionnel, ratio Afrique / Moyen-Orient / Asie, diversification des branches.
- Performance Financière : En 2024, le chiffre d'affaires global d'Atlantic Re s'établit à 3,88 milliards de MAD. Le marché marocain représente une part significative de ce chiffre d'affaires avec 2,83 milliards de MAD, soit environ 73% du total. Les affaires étrangères contribuent à hauteur de 1 milliard de MAD, soit 26% du chiffre d'affaires total. La répartition entre les activités vie et non-vie montre une prédominance de l'activité non vie avec un chiffre d'affaires de 3,25 milliards de MAD. L'activité vie représente le reste du chiffre d'affaires. Enfin, en ce qui concerne la division entre traités et facultatives, le chiffre d'affaires est approximativement divisé en parts égales entre ces deux segments.

La stratégie d'Atlantic Re repose sur une diversification bien pensée qui lui permet de réduire les risques associés à la volatilité des marchés. En s'étendant à l'international et en diversifiant ses branches de souscription, Atlantic Re parvient à atténuer les impacts des fluctuations économiques et sectorielles. La répartition équilibrée entre les traités et les facultatives ainsi que l'accent mis sur des branches variées et des zones géographiques diversifiées témoignent d'une approche prudente et méthodique de gestion des risques. Les chiffres de performance de 2024 montrent une forte dépendance au marché domestique, mais également une contribution significative des affaires internationales, ce qui renforce la résilience d'Atlantic Re face aux risques spécifiques à une région ou un secteur particulier. La prédominance de l'activité non-vie est également notable, soulignant une expertise et une position forte dans ce segment. Dans l'ensemble, Atlantic Re démontre une gestion rigoureuse et diversifiée de son portefeuille, essentielle pour maintenir la solvabilité et la stabilité financière dans un environnement global de plus en plus concurrentiel.

Le profil de risque du portefeuille d'Atlantic Re est représenté dans ce tableau :

Capital de solvabilité requis	1 215 649 433
Capital de solvabilité requis de base	1 615 296 672
Ajustements	-529 256 227
Ajustements relatifs aux impôts différés	-529 256 227
Ajustements relatifs à l'absorption par les assurés	0
Risque opérationnel	129 297 306
Marge de solvabilité de Re-Takaful	730 157
Ratio de solvabilité	221%

TABLE 2.5.1 – Résultat du calcul du capital de solvabilité requis

Le capital de solvabilité requis de base se calcule en faisant l'agrégation entre les modules de risque en passant par la matrice de corrélation entre les risques, le calcul donne :

Capital de solvabilité requis de base	1 615 296 672
Risque de marché	862 351 165
Risque de concentration	0
Risque de contrepartie	290 146 233
Risque de souscription en vie	153 688 986
Risque de souscription en non-vie	988 893 548

TABLE 2.5.2 – Calcul du capital de solvabilité requis de base

Maintenant, on concentre notre étude sur le risque de souscription en non vie, rappelons que ce module de risque contient 3 sous-modules de risque, celui de primes, de réserves et de catastrophe.

Et le module de risque est donné comme une agrégation en les 3 sous risques selon la matrice de corrélation suivante :

Coefficient de corrélation	Primes	Provisions	Catastrophe en non-vie
Primes	1,00	0,50	0,25
Provisions	0,50	1,00	0,25
Catastrophe en non-vie	0,25	0,25	1,00

TABLE 2.5.3 – Matrice de corrélation entre sous-risques

Risque de souscription non-vie	988 893 548
Sous-risque de primes	564 701 365
Sous-risque de provisions	480 637 345
Sous-risque de catastrophe non-vie	210 659 328

TABLE 2.5.4 – Décomposition du risque de souscription non-vie

On passe maintenant au calcul du sous-risque de primes par la formule standard comme étant l'agrégation entre les sous-risques de primes de chaque segment d'activité.

Volume de primes de chaque segment d'activité SBR

NB : Les volumes de risque de primes ont été multipliés par un coefficient pour préserver la confidentialité de l'entreprise.

Sous-catégorie	Code sous-catégorie	Volume de primes
Individuelles accidents	2110	751 716
Invalidité	2120	-87
Maladie – maternité	2130	2 600
Personnes transportées en automobile	2140	0
Accidents du travail et maladies professionnelles	2200	-9 213
Véhicules à usage de tourisme	2311	-1 703 039
Véhicules à usage utilitaires de moins de 3,5 tonnes	2312	0

Sous-catégorie	Code sous-catégorie	Volume de primes
Véhicules à usage utilitaires de 3,5 tonnes et plus	2313	0
Véhicules affectés au transport public de voyageurs	2314	0
Véhicules à deux ou trois roues	2315	0
Autres véhicules	2318	0
Garanties autres que la responsabilité civile	2320	201 639 217
Responsabilité civile générale	24	99 602 616
Incendie et éléments naturels	25	709 576 132
Assurances des risques techniques	26	35 488 225
Maritime corps	2710	82 276 337
Maritimes facultés	2720	0
Marchandises transportées par voie terrestre	2730	0
Aviation corps	2740	31 888 727
Vol	2810	4 923 120
Grêle ou gelée	2820	1 581 354
Mortalité du bétail	2830	0
Assurance récolte	2840	0
Protection juridique	2850	0
Assurances pour pertes pécuniaires	2860	0
Autres	2880	83 041 932
GCEC	20	0
Crédit	2920	11 550 501
Caution	2930	0
Opérations d'acceptations en réassurance - Acceptations non-vie	3200	30 812 365

TABLE 2.5.5 – Volume de primes du portefeuille

Le sous-risque de primes est calculé selon la relation suivante :

$$CSR_{\text{prime},i} = 3 \times \sigma_{\text{prime},i} \times V_{\text{prime},i}$$

Et le sous-risque de prime global s'obtient :

CSR primes	564 701 365
Ratio de solvabilité	221%

2.5.2 Impact de l'atténuation de Volatilité de primes sur le ratio de Solvabilité d'Atlantic Re

Un indicateur plus approprié pour le pilotage de la solvabilité sous **SBR** est le **ratio de solvabilité**, défini comme le rapport des fonds propres au sens du bilan prudentiel et du **SCR** (formule standard) :

$$\text{Ratio de solvabilité} = \frac{\text{Fonds propres}}{\text{CSR}}$$

Un ratio de solvabilité élevé indique qu'une compagnie d'assurance est financièrement solide et capable de faire face à ses obligations. Cela rassure les régulateurs, les clients et les investisseurs sur la capacité de l'assureur à payer les sinistres et à rester solvable même en cas de pertes importantes. Une compagnie avec un ratio de solvabilité de 2 signifie qu'elle a 2 Dirhams de capital pour chaque Dirham d'exigence de capital, indiquant une position financière relativement solide. Maintenant on étudie la sensibilité du ratio de solvabilité suite aux variations de la volatilité du sous-risque de primes des différentes sous catégories, d'une autre manière on atténue les volatilité et on voit si est ce qu'il y'a une amélioration en terme de capital de solvabilité qui pourra être vu comme une amélioration dans le ratio de solvabilité.

De ce fait, on atténue la volatilité de différentes valeurs et on voit les nouvelles valeurs pour le ratio de solvabilité. Les différentes valeurs enregistrées sont représentées dans le figure suivante :

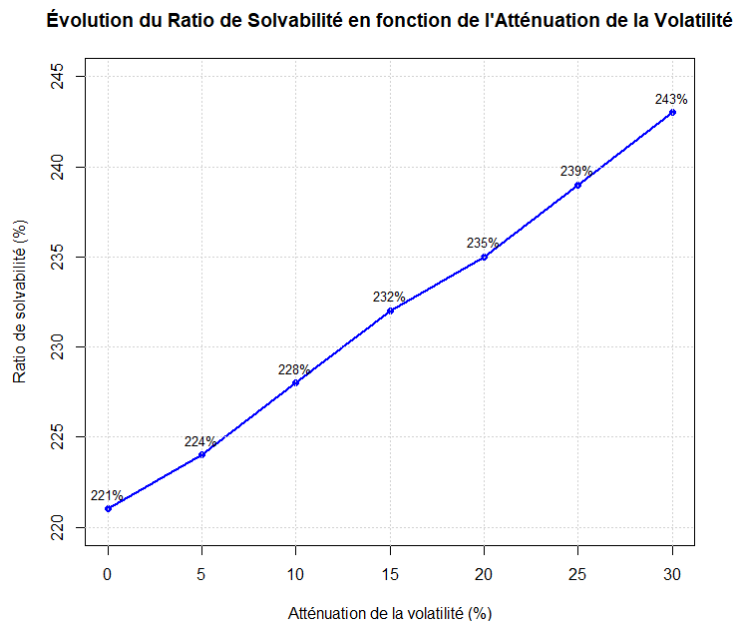


FIGURE 2.5.1 – Sensibilité du ratio de solvabilité suite à l'atténuation de la volatilité

NB

L'amélioration du ratio de solvabilité en fonction de l'atténuation de la volatilité du sous-risque de primes montre une relation positive : plus la volatilité du sous-risque de primes est réduite, plus le ratio de solvabilité augmente.

- Sans atténuation (0%), le ratio de solvabilité est de 221%. Cela représente le niveau de solvabilité initial, sans réduction de la volatilité du sous-risque de primes.
- Avec une atténuation progressive (5% à 30%), on observe une augmentation du ratio de solvabilité de 221% à 243%, soit une amélioration de 22 points de pourcentage.

Chapitre 3

Calibrage du sous-risque de primes sur les données brutes

Dans le cadre de la modélisation actuarielle des sous-risques, le calibrage de la volatilité des primes joue un rôle central pour quantifier les incertitudes associées aux flux de primes brutes avec la rétrocession. Ce chapitre se concentre sur l'estimation de la volatilité à partir des données brutes de rétrocession.

Nous disposons pour cela d'un historique de 20 années de données annuelles couvrant les montants de primes brutes et de charges afférentes, ventilés par sous-catégorie de risque. L'objectif est d'estimer, pour chaque sous-catégorie, l'écart-type des primes brutes, indicateur clé de leur volatilité, à partir des séries observées.

Deux approches d'estimation sont considérées dans ce chapitre :

- **La méthode du maximum de vraisemblance (MV)** : elle repose sur l'hypothèse que les charges suivent une distribution log normale, et permet d'obtenir un estimateur efficace de la variance en maximisant la vraisemblance jointe des données ;
- **La méthode des moindres carrés ordinaires (MCO)** : appliquée dans un cadre linéaire simple, elle vise à minimiser la somme des carrés des écarts entre les observations et leur moyenne, offrant ainsi une estimation intuitive et robuste de la dispersion.

3.1 Estimation de l'écart-type brute avec la méthode du maximum de vraisemblance

Pour toutes les entreprises, toutes les années de survenance et toutes les sous-catégories, nous considérons les hypothèses suivantes :

- L'espérance de la charge ultime est proportionnelle aux primes acquises.
- Le ratio de sinistralité pour une entreprise donnée est indépendant des années de survenance, mais peut varier d'une entreprise à une autre.
- La variance de la charge ultime est proportionnelle aux primes acquises.
- La distribution de la charge ultime suit une distribution log-normale.
- L'estimation par maximum de vraisemblance est jugée appropriée.

La fonction de log-vraisemblance est définie comme suit :

$$\text{LogL} = \sum_{i,k} \left(-\log(S_{i,k,e}) - \frac{(\log(U_{i,k,e}) - M_{i,k,e})^2}{2S_{i,k,e}^2} \right)$$

où :

$$S_{i,k,e} = \sqrt{\log \left(1 + \frac{\beta_i^2}{V_{i,k,e}\mu_{i,e}^2} \right)}$$

$$M_{i,k,e} = \log(V_{i,k,e}\mu_{i,e}) - \frac{1}{2}S_{i,k,e}^2$$

avec :

- $U_{i,k,e}$: La charge ultime par sous-catégorie i , année de survenance k et entreprise e ;
- $V_{i,k,e}$: Le montant des primes acquises par sous-catégorie i , année de survenance k et entreprise e ;
- $M_{i,k,e}$: La moyenne du logarithme de la variable $U_{i,k,e}$;
- $S_{i,k,e}$: L'écart-type du logarithme de la variable $U_{i,k,e}$;
- $\mu_{i,e}$: Le ratio de sinistralité par sous-catégorie i et entreprise e ;
- β_i^2 : La constante de proportionnalité de la variance des pertes.

Dans notre cas l'entreprise e est le réassureur.

Les valeurs $\mu_{i,e}$ et β_i sont calculées de telle façon qu'elles maximisent la fonction LogL.

3.1.1 Vérification des hypothèses pour les différentes sous catégories SBR

Individuelles accidents :

H1 : L'espérance de la charge ultime est proportionnelle aux primes acquises

Il s'agit de vérifier la proportionnalité entre les charges ultimes des sinistres et les primes acquises. Pour cela, nous réalisons une régression linéaire sur les données.

```

call:
lm(formula = data$charge ~ data$prime, data = data)

Residuals:
    Min       1Q   Median       3Q      Max
-1353704 -576271  -2365   580471 1618607

Coefficients:
            Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept) 1.931e+06  3.550e+05   5.440 4.41e-05 ***
data$prime  1.447e-01  2.292e-02   6.316 7.75e-06 ***
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 854200 on 17 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.7012,    Adjusted R-squared:  0.6836
F-statistic: 39.89 on 1 and 17 DF,  p-value: 7.75e-06

```

FIGURE 3.1.1 – Régression de la charge ultime sur la prime acquise

La p-value correspondante à la variable "prime" est inférieure à 5%, ce qui suggère que cette variable est significative dans le modèle. Ainsi, nous pouvons conclure que l'hypothèse de proportionnalité entre les charges ultimes et les primes acquises est acceptée.

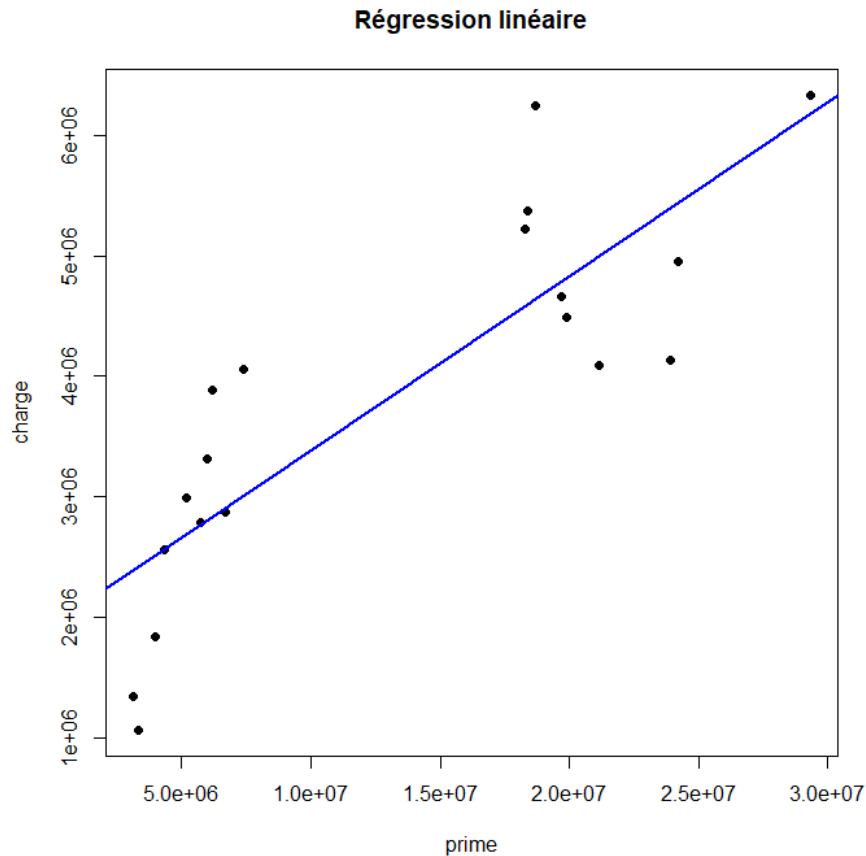


FIGURE 3.1.2 – Régression linéaire de la charge ultime sur la prime acquise

Remarque

En présence d'un point aberrant qui influence fortement la régression linéaire classique, le recours à une régression log-log permet d'améliorer la qualité de l'ajustement. En transformant les variables par le logarithme, on atténue l'effet disproportionné des valeurs extrêmes et on obtient une relation plus linéaire et plus stable. Cette approche permet ainsi de mieux représenter la tendance générale des données tout en limitant l'impact des outliers sur les résultats du modèle.

```

call:
lm(formula = log(data$charge) ~ log(data$prime), data = data)

Residuals:
    Min       1Q   Median       3Q      Max
-0.58414 -0.12691  0.03502  0.18389  0.37817

Coefficients:
            Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)   6.25950    1.24232   5.039 0.000101 ***
log(data$prime) 0.54586    0.07703   7.086 1.83e-06 ***
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 0.2547 on 17 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.7471,    Adjusted R-squared:  0.7322
F-statistic: 50.21 on 1 and 17 DF,  p-value: 1.827e-06

```

FIGURE 3.1.3 – Régression log-log de la charge ultime sur la prime acquise

La régression log-log améliore le coefficient de détermination R^2 , traduisant un meilleur ajustement du modèle. Les coefficients sont significatifs, ce qui confirme une relation stable entre la charge et la prime après transformation logarithmique.

H2 : La variance de la charge ultime est proportionnelle aux primes acquises

Pour vérifier la proportionnalité entre la variance de la charge et la prime une méthode classique est de faire une régression de la charge sur la prime.

Afin de vérifier de cette hypothèse, une régression log-log a été réalisée entre $\log(\text{charge})$ et $\log(\text{prime})$. Cette transformation permet de tester une relation entre les deux variables. En fait, si les résidus suivent une loi normale, et si le modèle de la régression linéaire entre $\log(\text{charge})$ et $\log(\text{prime})$ est significatif, la variance de la charge sera proportionnelle à la prime.

En fait, On suppose le modèle suivant :

$$\log(\text{Charge}^{\text{ultime}}) = \log(\text{Prime}) \cdot \beta + C + \varepsilon, \quad \text{où } \varepsilon \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$$

D'où :

$$\text{Charge}^{\text{ultime}} = e^\varepsilon \cdot e^C \cdot \text{Prime}^\beta$$

On note $C = \text{constante}$.

$$\text{Var}(\text{Charge}^{\text{ultime}}) = \text{Var}(e^C \cdot e^\varepsilon \cdot \text{Prime}^\beta) = e^{2C} \cdot \text{Prime}^{2\beta} \cdot \text{Var}(e^\varepsilon)$$

Comme $\varepsilon \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ alors :

$$\text{Var}(e^\varepsilon) = e^{2\mu + \sigma^2} (e^{\sigma^2} - 1)$$

D'ou :

$$\text{Var}(\text{Charge}^{\text{ultime}}) = e^{2C} \cdot \text{Prime}^{2\beta} \cdot e^{2\mu+2\sigma^2} (e^{\sigma^2} - 1)$$

ou, en notation simplifiée :

$$\text{Var}(\text{Charge}^{\text{ultime}}) = e^{C+\mu^2+2\sigma^2} \cdot (e^{\sigma^2} - 1) \cdot \text{Prime}^{2\beta}$$

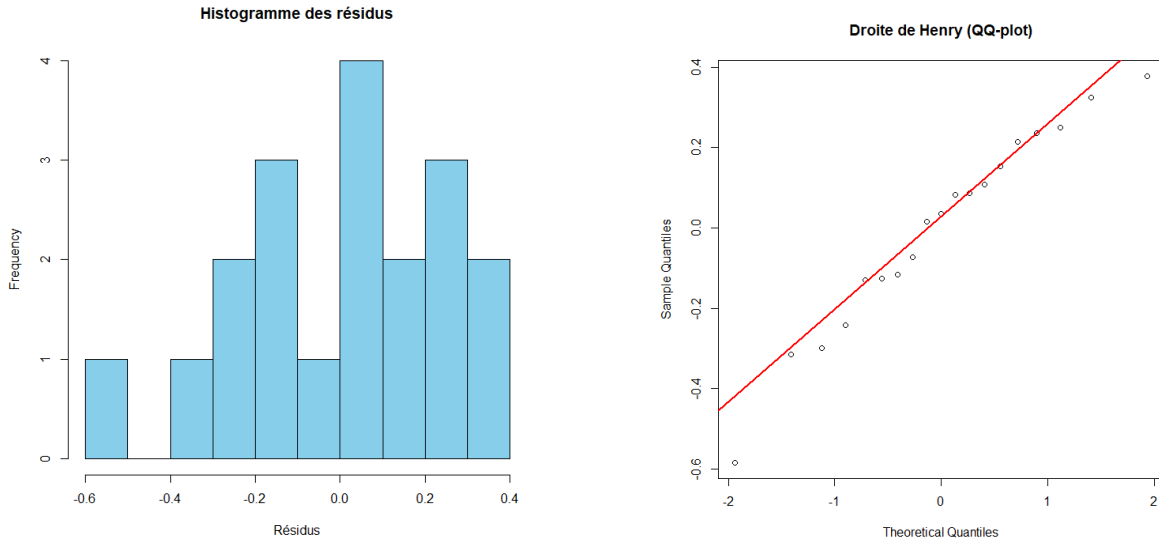


FIGURE 3.1.4 – La normalité des résidus

On vérifie ainsi l'homoscédasticité des résidus pour s'assurer de la significativité des paramètres du modèle log-log.

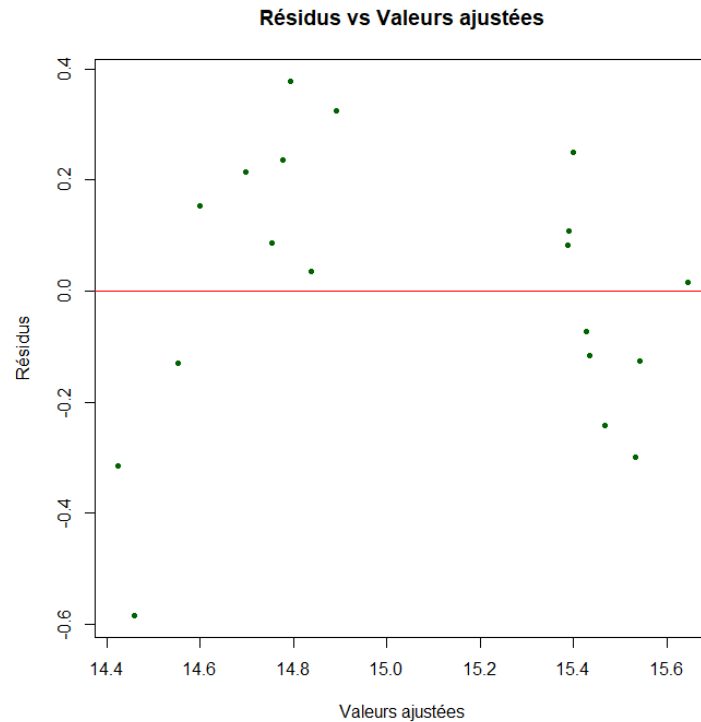


FIGURE 3.1.5 – Homoscédasticité des résidus

A partir du résultat de la régression, il existe une relation de proportionnalité entre la variance de la charge ultime et la prime acquise.

H3 : La distribution de la charge ultime suit une distribution log-normale

La dernière hypothèse à vérifier est l’hypothèse de la lognormalité des charges de sinistre. Nous appliquons les tests de normalité sur les données transformées et obtenons les résultats suivants :

```

Jarque Bera Test
data: log_charge
X-squared = 3.1641, df = 2, p-value = 0.2056

shapiro-francia normality test
data: log_charge
w = 0.90952, p-value = 0.06881
    
```

FIGURE 3.1.6 – Résultats des test de log-normalité

Les p-values des tests sont supérieures à 5%, ce qui ne permet pas de rejeter l’hypothèse nulle. La distribution des charges suit donc une loi lognormale.

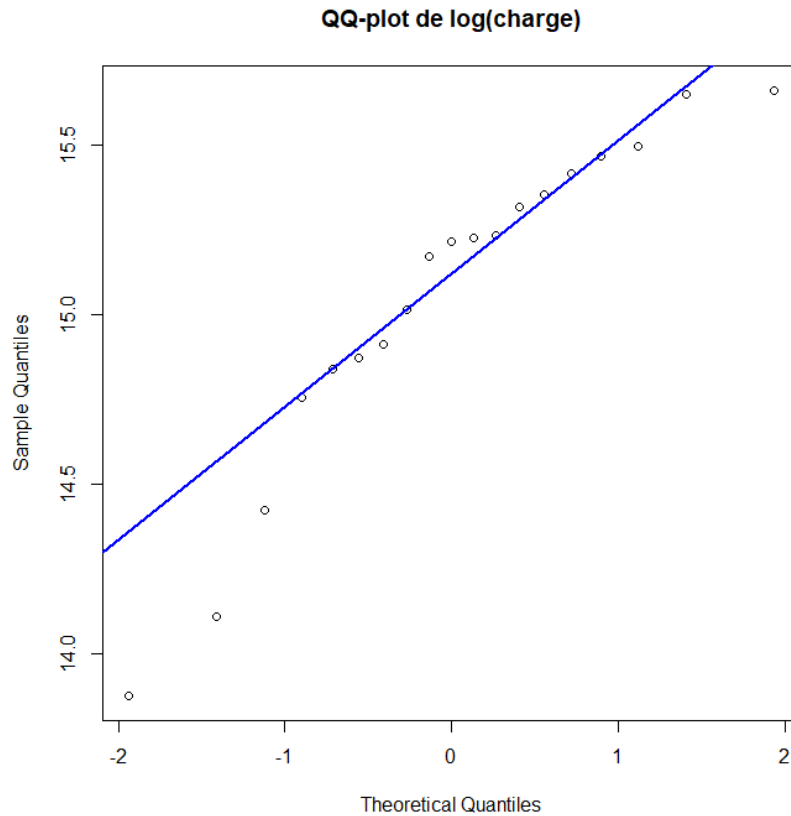


FIGURE 3.1.7 – QQ-Plot des données log-transformées

Donc en effet la distribution de la charge ultime suit une distribution log-normale.
On vérifie ces hypothèses pour toutes les sous-catégories :

Invalidité :

Les résultats pour la vérification des 3 hypothèses :

```
> summary(modél)

Call:
lm(formula = charge ~ prime, data = data)

Residuals:
    Min       1Q   Median       3Q      Max
-2333526 -863392 -135786  450524 3671065

Coefficients:
            Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept) 4.357e+06  9.185e+05  4.743 0.000142 ***
prime       3.493e-02  6.190e-02  0.564 0.579219
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 1499000 on 19 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.01648,    Adjusted R-squared:  -0.03529
F-statistic: 0.3183 on 1 and 19 DF,  p-value: 0.5792
```

FIGURE 3.1.8 – Régression linéaire de la charge ultime sur la prime acquise pour 2120

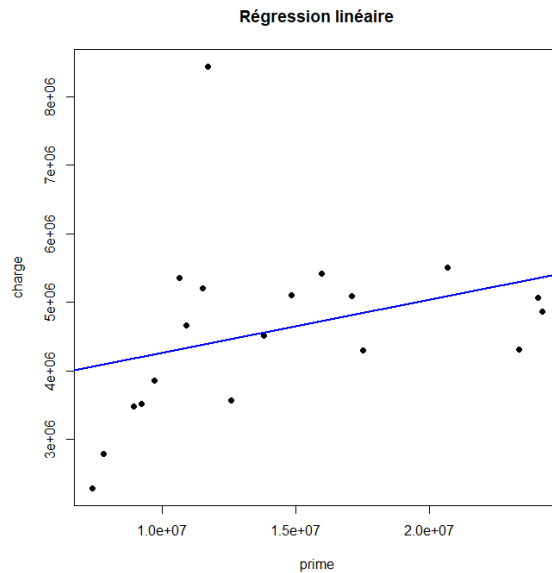


FIGURE 3.1.9 – Régression de la charge ultime sur la prime acquise

On voit que la première hypothèse n'est pas vérifiée pour cette sous catégorie, car en fait les charges sont plus dispersés loin de la droite linéaire diminuant ainsi la significativité modèle de la régression linéaire.

Ainsi, graphiquement plus on augmente la prime la variation esst aléatoire et n'a aucune tendance, donc la deuxième hypothèse est aussi n'est pas vérifiée.

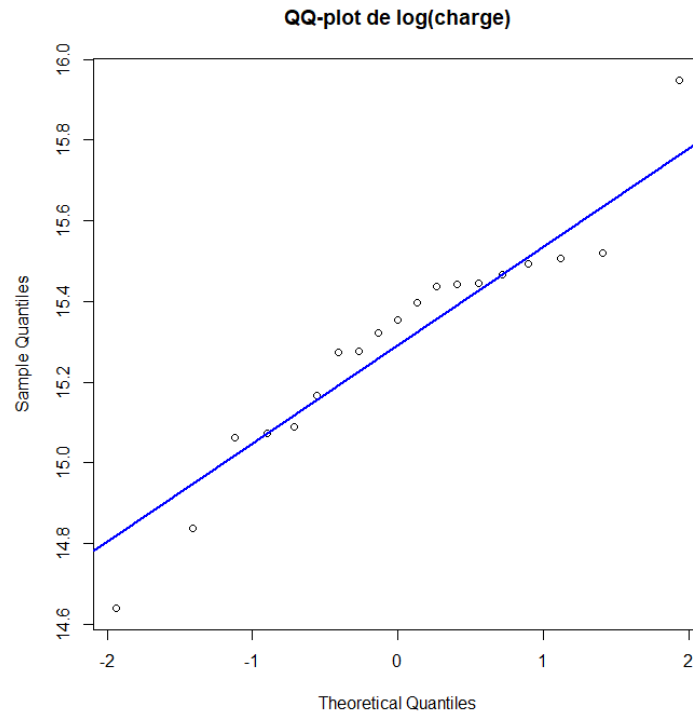


FIGURE 3.1.10 – QQ-Plot des données log-transformées

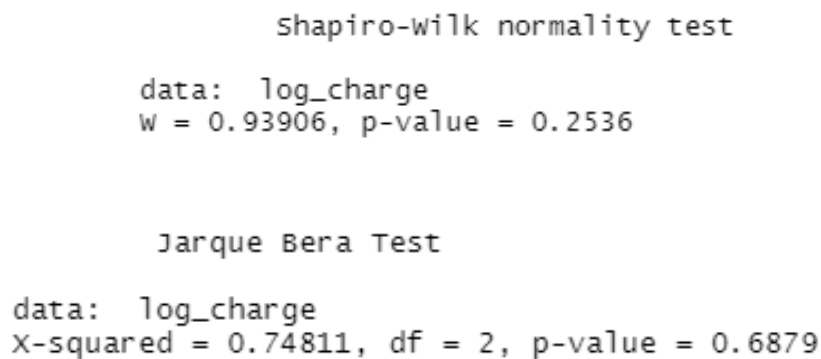


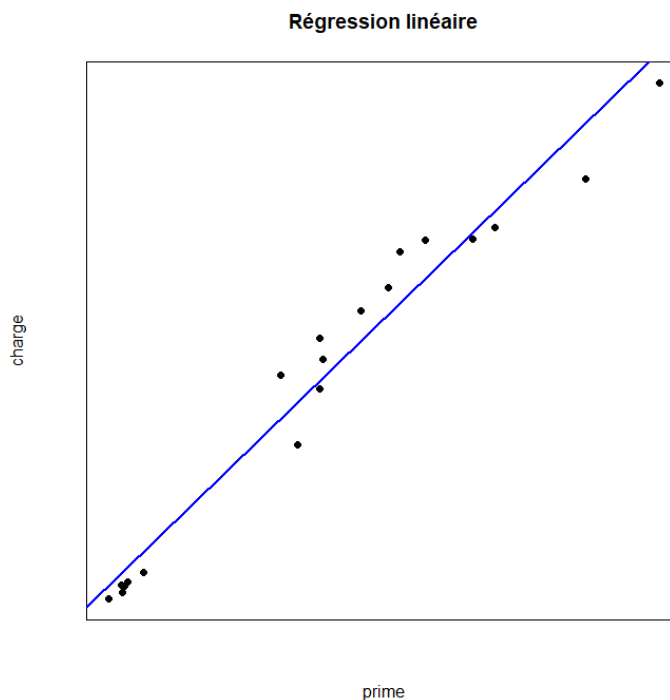
FIGURE 3.1.11 – Résultats des test de log-normalité

A partir des test de log normalité, la charge suit une loi lognormale.

Maladie-maternité :

Les résultats pour la vérification des 3 hypothèses :

H1 : L'espérance de la charge ultime est proportionnelle aux primes acquises



```

call:
lm(formula = data$charge ~ data$prime, data = data)

Residuals:
    Min       1Q   Median       3Q      Max
-15707354 -5177460 -3352287  8276228 14741731

Coefficients:
            Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept) 5.472e+06  3.578e+06   1.529   0.145
data$prime  9.367e-01  4.421e-02  21.187 1.16e-13 ***
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 9208000 on 17 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.9635,    Adjusted R-squared:  0.9614
F-statistic: 448.9 on 1 and 17 DF,  p-value: 1.164e-13
    
```

FIGURE 3.1.12 – Régression linéaire de la charge sur la prime

A partir des deux figures, on voit clairement que la charge est proportionnelle à la prime avec une p _value inférieur à 5%.

H2 : La variance de la charge ultime est proportionnelle aux primes acquises

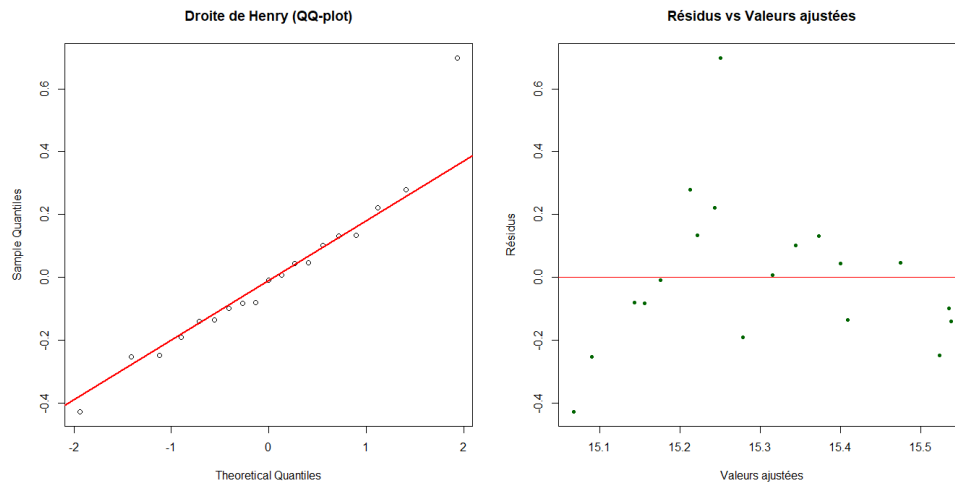


FIGURE 3.1.13 – qq-plot et homoscedasticité des résidus

A partir du graphe de qq-plot les résidus de la régression log-log suivent une loi normale et leur variance est déterministe, ainsi l'autre graphe montre l'homoscedasticité des résidus, donc le modèle de la régression log-log est significatif donc en revenant à l'équation de la page 41 on déduit que la variance de la charge est proportionnelle à la prime.

H3 : La distribution de la charge ultime suit une distribution log-normale

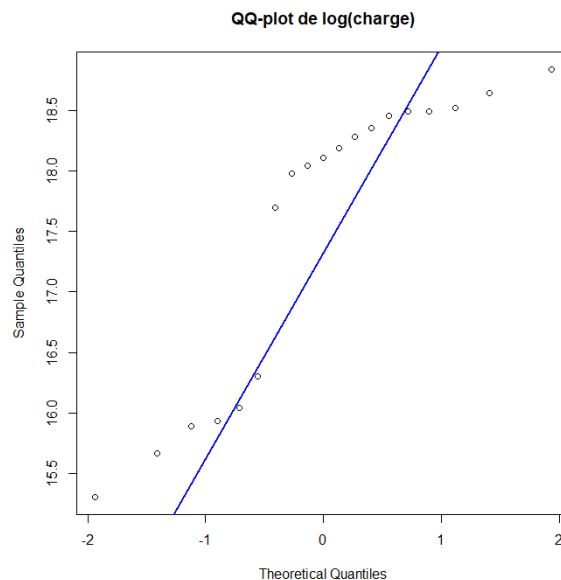


FIGURE 3.1.14 – QQ-Plot des données log-transformées

```
Jarque Bera Test

data: log_charge
X-squared = 2.7988, df = 2, p-value = 0.2467

shapiro-wilk normality test

data: log_charge
W = 0.8055, p-value = 0.001375
```

FIGURE 3.1.15 – Résultats des test de log-normalité

A partir des test de log normalité, on voit que la charge ne suit pas une loi log normale.

Accidents du travail et maladies professionnelles :

Les résultats pour la vérification des 3 hypothèses :

```
Call:
lm(formula = data$charge ~ data$prime, data = data)

Residuals:
    Min       1Q   Median       3Q      Max
-23372904 -7349899 -2137269  7902176 18019808

Coefficients:
            Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept) 2.339e+07  7.169e+06   3.263  0.00458 **
data$prime  6.444e-01  5.414e-02  11.902 1.14e-09 ***
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 11600000 on 17 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.8928,    Adjusted R-squared:  0.8865
F-statistic: 141.6 on 1 and 17 DF,  p-value: 1.141e-09
```

FIGURE 3.1.16 – Régression linéaire de la charge ultime sur la prime acquise

Pour cette sous-catégorie, on remarque que la relation de proportionnalité entre les charges et les primes, ce qui vérifie la première hypothèse.

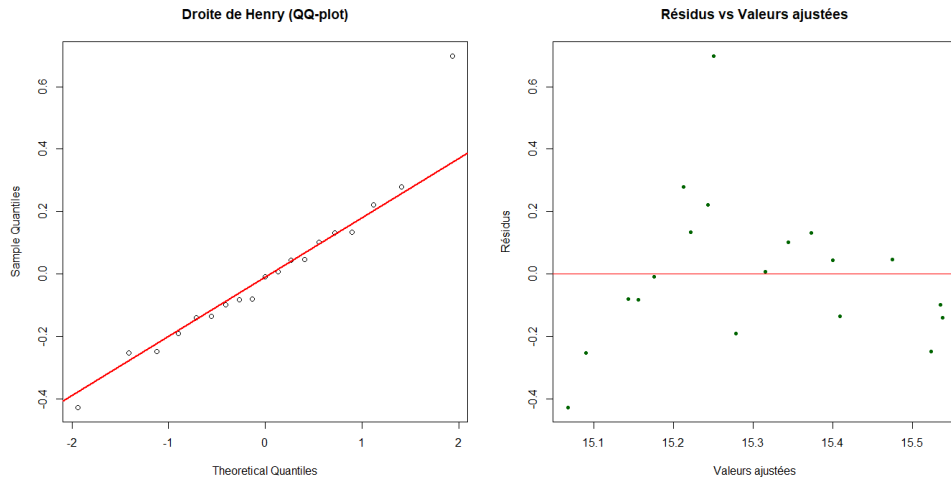


FIGURE 3.1.17 – qq-plot de la normalité et graphe d’homoscédasticité des résidus

On remarque que les résidus de la régression log-log sont normaux ce qui valide la relation de proportionnalité entre la variance de la charge et la prime.

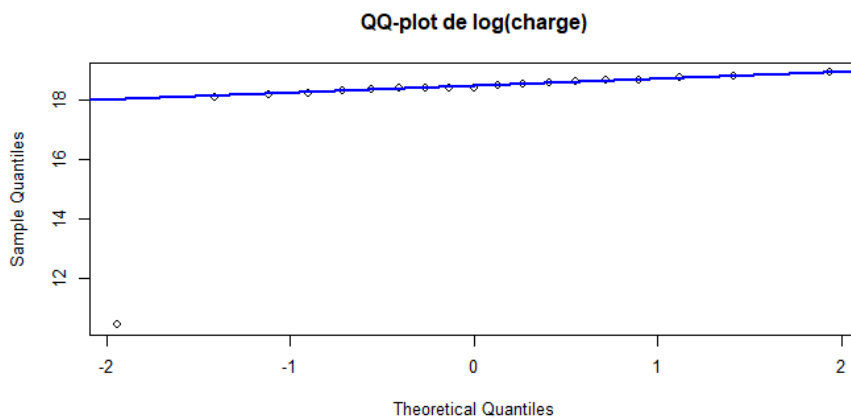


FIGURE 3.1.18 – QQ-Plot des données log-transformées

Certe, la troisième hypothèse n’est pas validée le qq-plot montre que la charge ne suit pas une distribution log normale.

NB

Les résultats des hypothèses trouvés pour les autres sous-catégories sont présentés dans l’annexe 3 de la partie Annexes.

3.1.2 Volatilités estimées sur les données brutes par maximum de vraisemblance

La figure qui suit représente les différents paramètres estimés et montre une comparaison entre les volatilités estimées et les volatilités SBR pour les différentes sous catégories.

A l'aide d'un code python nous obtenons les résultats ci-dessous :

	Volatilité	Volatilité SBR
Individuelles accidents	12%	10%
Invalidité	11%	6%
Maladie-maternité	13%	8%
Accidents du travail et maladies professionnelles	53%	12%
Véhicules à usage de tourisme	16%	7%
Garanties autres que la responsabilité civile	9%	9%
Responsabilité civile générale	31%	17%
Incendie et éléments naturels	27%	22%
Assurances des risques techniques	43%	22%
Maritime corps	14%	17%
Autres	16%	19%
Crédit	22%	25%
Grêle ou gelée	90%	19%
Vol	93%	19%
Aviation corps	73%	17%

TABLE 3.1.1 – Volatilités estimées sur les données brutes par maximum de vraisemblance

Le tableau présente les volatilités estimées sur les données brutes par la méthode du maximum de vraisemblance, comparées aux volatilités SBR.

On observe que, pour plusieurs sous-catégories, les volatilités calculées à partir des données brutes sont significativement plus élevées que celles du référentiel SBR. C'est notamment le cas pour les garanties à sinistralité très irrégulière comme *Grêle ou gelée* (90 % vs 19 %), *Vol* (93 % vs 19 %) ou *Aviation corps* (73 % vs 17 %), ce qui reflète une forte instabilité interannuelle des primes brutes dans ces branches.

À l'inverse, certaines branches comme *Invalidité* (11 % vs 6 %) ou *Garanties autres que la responsabilité civile* (9 % vs 9 %) montrent une volatilité brute plus modérée et proche du niveau de référence.

Cela met en évidence l'intérêt de calibrer les volatilités à partir des données propres à l'entité, afin de mieux refléter la réalité du portefeuille assuré, notamment pour les branches à forte variabilité.

3.2 Estimation de l'écart-type avec la méthode des moindres carrées

La distribution des charges est donnée par la dynamique ci-dessous :

$$U_{i,k,e} \sim V_{i,k,e} \cdot \mu_{i,e} + \sqrt{V_{i,k,e} \cdot \beta_i} \cdot \varepsilon_{i,k,e}$$

À partir de cette dynamique, nous pouvons obtenir un ensemble de variables aléatoires qui sont indépendantes et identiquement distribuées. Pour chaque entreprise, les paramètres suivants doivent être calculés :

$$\beta_i \cdot \varepsilon_{i,k,e} = \frac{U_{i,k,e} - V_{i,k,e} \cdot \mu_{i,e}}{V_{i,k,e}}$$

La méthode des moindres carrés nous permet de trouver un estimateur de β_i :

$$\beta_i^2 = \frac{1}{N_{i,e} - 1} \sum_k \frac{(U_{i,k,e} - V_{i,k,e} \cdot \mu_{i,e})^2}{V_{i,k,e}}$$

Le ratio de sinistralité est égal à :

$$\mu_{i,e} = \frac{\sum_k U_{i,k,e}}{\sum_k V_{i,k,e}}$$

Avec :

- $U_{i,k,e}$: La charge ultime par sous-catégorie i , année de survenance k et entreprise e ;
- $V_{i,k,e}$: Le montant des primes acquises par sous-catégorie i , année de survenance k et entreprise e ;
- $\sigma_{i,e}$: L'écart-type du ratio de sinistralité par sous-catégorie i et entreprise e ;
- $N_{i,e}$: La profondeur de l'historique par sous-catégorie i et entreprise e ;
- $V_{i,e}$: La moyenne des primes acquises ;
- $\mu_{i,e}$: Le ratio de sinistralité par sous-catégorie i et entreprise e ;
- β_i^2 : La constante de proportionnalité de la variance des pertes ;
- $\varepsilon_{i,k,e}$: Une distribution aléatoire centrée réduite.

Donc nous sommes amenés à calculer la constante β_i pour chaque sous catégorie, à l'aide d'un code R nous obtenons les résultats suivants :

	Volatilité	Volatilité SBR
Individuelles accidents	15%	10%
Invalidité	16%	6%
Maladie-maternité	14%	8%
Accidents du travail et maladies professionnelles	16%	12%
Véhicules à usage de tourisme	15%	7%
Garanties autres que la responsabilité civile	9%	9%
Responsabilité civile générale	27%	17%
Incendie et éléments naturels	50%	22%
Assurances des risques techniques	38%	22%
Maritime corps	13%	17%
Autres	20%	19%
Crédit	22%	25%
Grêle ou gelée	81%	25%
Vol	53%	19%
Aviation corps	57%	17%

TABLE 3.2.1 – Estimation des volatilités avec la méthode des moindres carrées

Le tableau présente les estimations des volatilités des primes brutes obtenues par la méthode des moindres carrés ordinaires, comparées aux volatilités SBR.

Globalement, les résultats confirment les tendances observées avec la méthode du maximum de vraisemblance. Certaines branches affichent une volatilité très élevée par rapport au référentiel, notamment *Grêle ou gelée* (81 % vs 25 %), *Vol* (53 % vs 19 %) et *Aviation corps* (57 % vs 17 %), ce qui témoigne d'une forte variabilité historique des primes brutes dans ces segments.

D'autres catégories comme *Invalidité* (16 % vs 6 %) ou *Assurances des risques techniques* (38 % vs 22 %) présentent également des écarts notables, suggérant une sous-estimation potentielle du risque si l'on se fie uniquement aux paramètres standards.

Enfin, pour certaines branches comme *Garanties autres que la responsabilité civile* (9 % vs 9 %) ou *Maritime corps* (13 % vs 17 %), les écarts sont faibles ou modérés, ce qui montre une relative cohérence entre les données internes et les hypothèses de marché.

Ces résultats soulignent à nouveau l'intérêt d'un calibrage basé sur les données réelles d'Atlantic Re pour une meilleure évaluation du risque.

Chapitre 4

Calibrage du facteur d'atténuation du sous-risque de primes par la rétrocession

Dans le cadre du pilier 1 du projet SBR, l'ACAPS envisage d'ajuster la formule standard sur certains points qui touchent à la réassurance. Un des ajustements consiste à appliquer un facteur d'atténuation par la réassurance non proportionnelle aux chocs liés au risque de primes. En effet, les sigmas de prime ont été calibré par l'ACAPS sur des données nationales brutes de réassurance. Lorsque les risques sont cédés en proportionnel, la volatilité est supposée rester constante. En revanche, quand les risques sont cédés suivant des programmes non proportionnels la volatilité peut diminuer du fait de la nature des couvertures d'excédent de sinistres ou de pertes.

L'ACAPS envisage de donner la possibilité aux entreprises d'assurance et de réassurance d'appliquer un facteur d'atténuation allant jusqu'à 20% à condition de démontrer un effet de réduction de la volatilité observé sur son portefeuille dû à la cession non proportionnelle.

L'objet de ce chapitre est de présenter les résultats d'écart de volatilité entre le brut et le net sur le portefeuille non vie d'Atlantic Re.

4.1 La rétrocession dans le contexte d'Atlantic Re

La rétrocession constitue le premier levier d'atténuation des risques acceptés par AtRe. Pour montrer l'importance de cette atténuation, nous avons comparé sur un historique de 15 ans le ratio combiné global de la SCR avant et après rétrocession :

4. CALIBRAGE DU FACTEUR D'ATTÉNUATION DU SOUS-RISQUE DE PRIMES PAR LA RÉTROCESSION

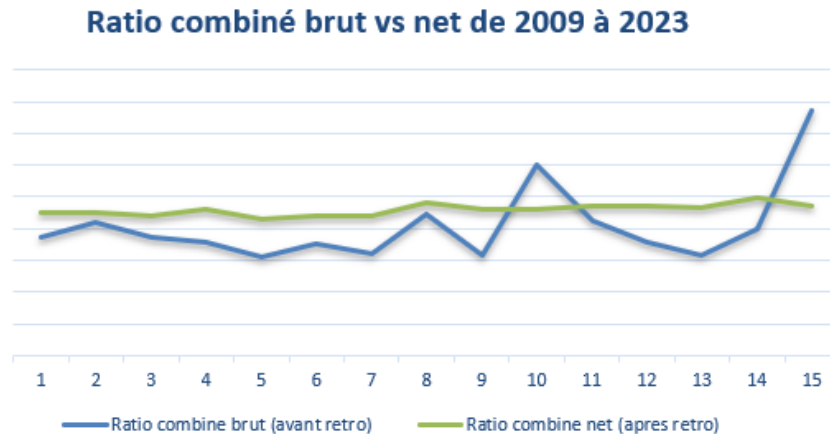


FIGURE 4.1.1 – Ratio combiné par année comptable yc GEC

Si on suppose que ces ratios suivent une loi log normal, le sigma brut serait de 29% vs 4% en net soit une atténuation de 86%. Il y a donc bien un écart de volatilité entre le brut et le net à démontrer en utilisant une approche statistique rigoureuse.

Rappel de l'approche de maximum vraisemblance :

Le facteur d'atténuation sera obtenu en rapportant la volatilité nette au brut observée sur notre portefeuille de contrats non vie.

L'approche retenue pour l'estimation du σ est basée sur la méthode du maximum du log-vraisemblance qui consiste à :

1. Vérifier les 4 hypothèses suivantes :
 - a) L'espérance de la charge ultime est proportionnelle aux primes acquises,
 - b) Le ratio s/p est indépendant des années de souscription,
 - c) La variance de la charge ultime est proportionnelle aux primes acquises,
 - d) La distribution de la charge ultime suit une loi log-normale.
2. Maximiser la fonction de log-vraisemblance (μ : ratio s/p par segment et β correspond à la constante de proportionnalité de la variance des pertes).
3. Calculer la volatilité = $\frac{\beta}{\sqrt{\text{prime moyenne acquise}}}$.

Données

L'approche décrite ci-dessus nécessite les données suivantes pour chaque segment :

- Un historique de charge de sinistres ultime brute ;
- Un historique de primes acquises brute ;
- Un historique de charge de sinistres ultime nette de rétrocession proportionnelle ;
- Un historique de primes acquises nette de rétrocession proportionnelle ;

- Un historique de charge de sinistres ultime nette de toute rétrocession ;
- Un historique de primes acquises nette de toute rétrocession.

Pour cette étude, les données brutes et nettes de rétrocession proportionnelle sont issues de la base du bilan technique par contrat arrêté au 31/12/2024. Pour les données de rétrocession non proportionnelle, on s'appuiera sur une extraction d'un historique de primes et sinistres rétrocedés en traité non proportionnel.

Pour l'historique, le choix est porté sur les années de souscription avec une profondeur de 21 ans (de l'année de souscription 2000 à 2020). Nous avons arrêté les observations à l'année de souscription 2020 afin de minimiser l'incertitude liée aux provisions de sinistre à payer qui rentrent dans le calcul de la charge ultime.

Compte tenu du choix porté sur les années de souscription (et non comptable), la charge ultime correspondra au total des sinistres réglés du début de la souscription jusqu'au 31/12/2024 (Last Claims) augmenté des provisions des sinistres à payer de la clôture 31/12/2024. La prime correspondra alors à la prime émise (Last GBP) et non acquise étant donné qu'on raisonne ici par année de souscription.

Les calculs nets de rétrocession proportionnelle se basent sur le taux de cession du bilan technique par contrat (Retro Rate).

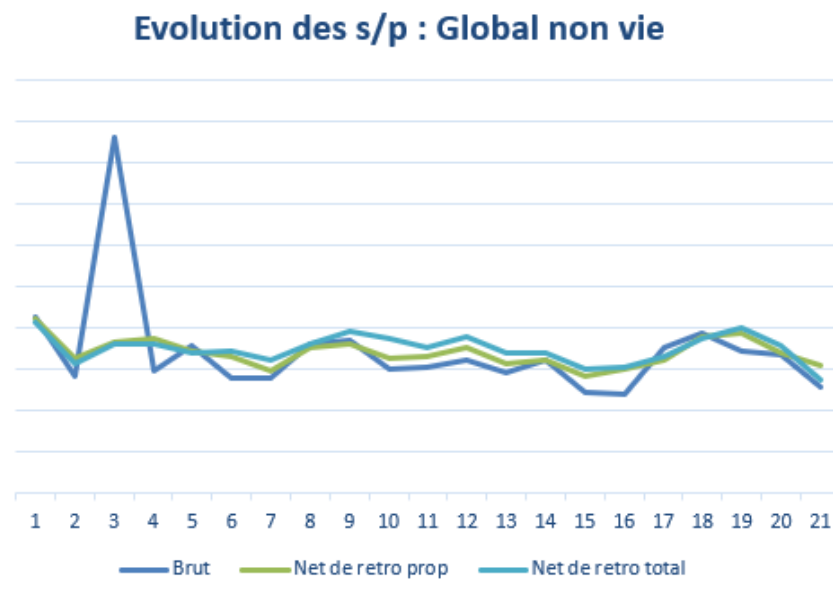
L'étude a été réalisée sur les segments suivants :

- Global Non vie (hors GEC) ;
- Catégorie 23 : Auto ;
- Catégorie 24 : Responsabilité civile ;
- Catégorie 25 : Incendie ;
- Catégorie 26 : Risques techniques (engineering) ;
- Catégorie 27 : Transport (Maritime et aviation) ;

4.2 Estimation de l'écart-type avec la méthode du maximum de vraisemblance

Dans cette partie, on obtient les résultats des volatilités de primes sur les données brutes et nettes en comparant les résultats pour différents segments d'activité. On étudie maintenant l'effet de la volatilité sur la branche non vie hors GEC.

Global non vie (hors GEC)



Série	Volatilité estimée
Brute	14,51%
Nette de rétrocession proportionnelle	5,94%
Nette de toute rétrocession	6,71%

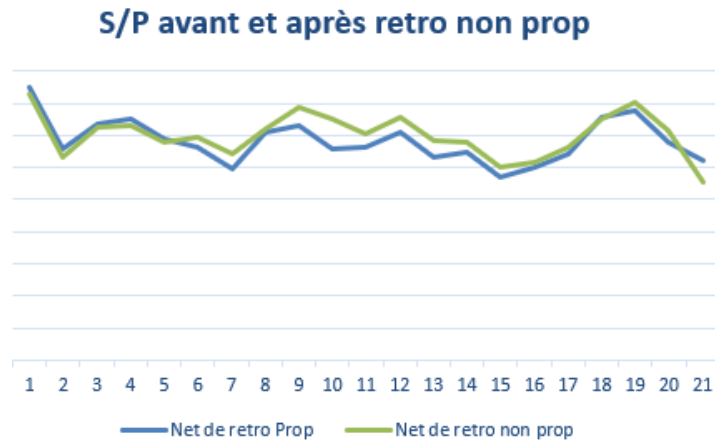
TABLE 4.2.1 – Résultat de l'estimation max vraisemblance

La réduction de la volatilité observée sur notre portefeuille non vie est due à la rétrocession proportionnelle.

Lorsqu'un groupe de portefeuille est composé de contrats ayant des caractéristiques différentes de rétrocession proportionnelle (des QP différentes par exemple), l'atténuation peut se faire par la cession proportionnelle, notamment dans notre cas où les contrats présentant une volatilité importante (les facultatifs) ont une QP de rétro élevée (90% en moyenne) et les contrats avec une volatilité faible (les traités) ont une QP de rétro marginale (proche de 0%) ce qui explique le passage de 14,51% à 5,94% soit une atténuation de -59%.

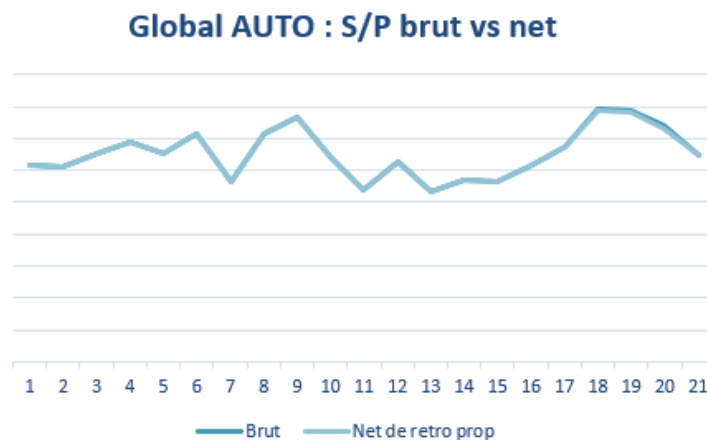
En revanche, les programmes de rétrocession non proportionnelle n'ont presque aucun effet d'atténuation sur la volatilité.

4. CALIBRAGE DU FACTEUR D'ATTÉNUATION DU SOUS-RISQUE DE PRIMES PAR LA RÉTROCESSION



Ce constat s'explique par le fait que la sinistralité instable qui crée de la volatilité (les contrats facultatifs) est presque intégralement rétrocedée en proportionnelle en premier lieu. Par conséquent la sinistralité après rétrocession proportionnelle est déjà bien atténuée (sigma 5,94%) laissant peu de marge à la rétrocession non proportionnelle. Pour la suite, l'analyse par segment sera restreinte à l'effet de la rétrocession proportionnelle.

Catégorie 23 : Auto



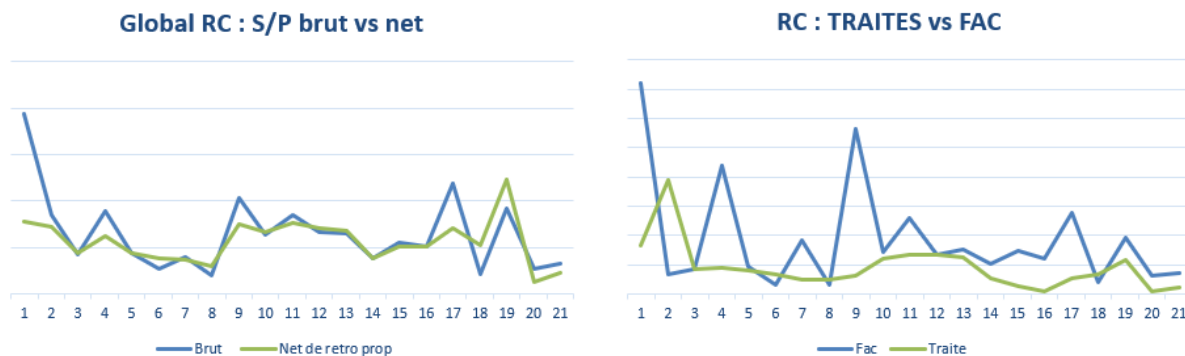
Série	Volatilité estimée
Brute	7,78%
Nette de rétrocession proportionnelle	7,52%

TABLE 4.2.2 – Résultat de l'estimation max vraisemblance pour auto

Le portefeuille de la catégorie SBR 23 est composé uniquement de contrats traités avec une rétrocession proportionnelle marginale. Aucun effet d'atténuation n'est constaté sur ce segment.

4. CALIBRAGE DU FACTEUR D'ATTÉNUATION DU SOUS-RISQUE DE PRIMES PAR LA RÉTROCESSION

Catégorie 24 : RC

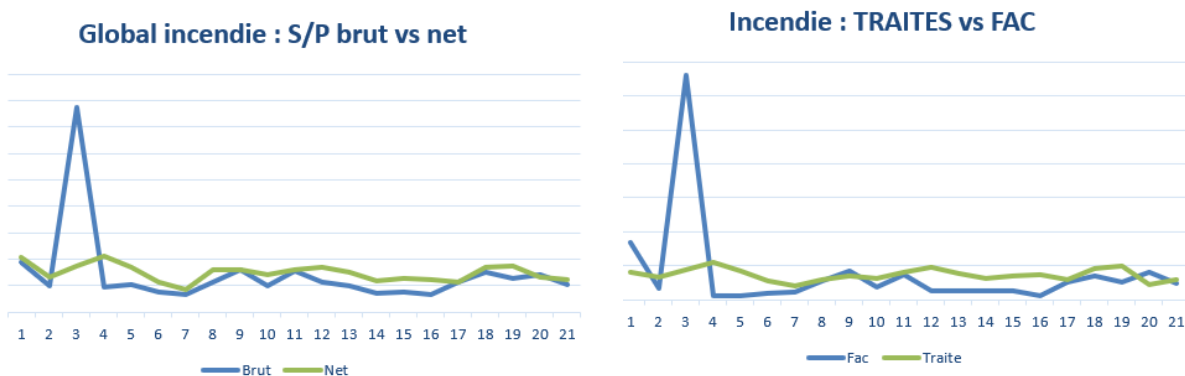


Série	Volatilité estimée
Brute	35,51%
Nette de rétrocession proportionnelle	24,46%
Contrats Traités	39,34%
Contrats Facultatifs	64,57%

TABLE 4.2.3 – Résultat de l'estimation max vraisemblance pour la RC

La volatilité passe de 35,5% en brut à 24,5% en net soit une atténuation de -31%. Cette atténuation s'explique par la prépondérance des contrats facultatifs dans la catégorie 24 (84% des facultatifs vs 16% des traités) ayant un taux de rétrocession important (92%) et une volatilité élevée (64% vs 39% pour les traités).

Catégorie 25 : Incendie



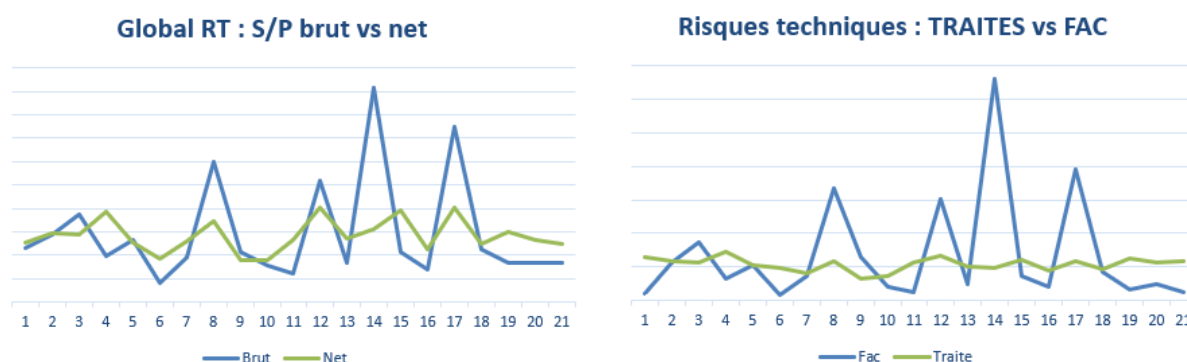
4. CALIBRAGE DU FACTEUR D'ATTÉNUATION DU SOUS-RISQUE DE PRIMES PAR LA RÉTROCESSION

Série	Volatilité estimée
Brute	26,15%
Nette de rétrocession proportionnelle	13,99%
Contrats Traités	17,56%
Contrats Facultatifs	45,44%

TABLE 4.2.4 – Résultat de l'estimation max vraisemblance pour l'incendie

La volatilité passe de 26,15% en brut à 14% en net soit une atténuation de -46%. Cette atténuation s'explique par la prépondérance des contrats facultatifs dans la catégorie 25 (71% des facultatifs contre 29% des traités) ayant un taux de rétrocession important (81%) et une volatilité élevée (45% contre 18% pour les contrats traités).

Catégorie 26 : Risques techniques



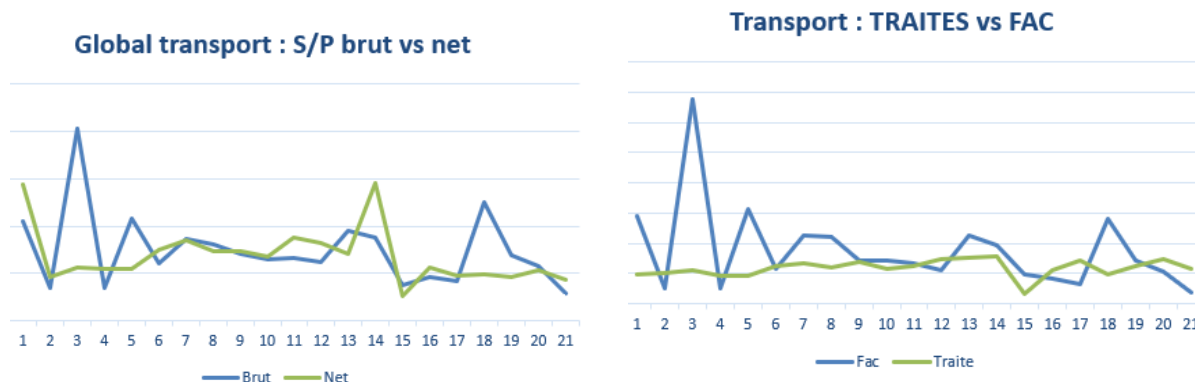
Série	Volatilité estimée
Brute	40,67%
Nette de rétrocession proportionnelle	15,46%
Contrats Traités	11,34%
Contrats Facultatifs	90,14%

TABLE 4.2.5 – Résultat de l'estimation max vraisemblance pour Risques techniques

La volatilité passe de 40,67% en brut à 15,46% en net soit une atténuation de -62%. Cette atténuation s'explique par les contrats facultatifs dans la catégorie 26 (58% des facultatifs contre 42% des traités) ayant un taux de rétrocession important (61%) et une volatilité élevée (90% contre 11% pour les traités).

4. CALIBRAGE DU FACTEUR D'ATTÉNUATION DU SOUS-RISQUE DE PRIMES PAR LA RÉTROCESSION

Catégorie 27 : Transport



Série	sigma hat
Brute	33,46%
Nette de rétrocession proportionnelle	22,45%
Contrats Traités	16,28%
Contrats Facultatifs	59,90%

TABLE 4.2.6 – Résultat de l'estimation max vraisemblance pour Transport

La volatilité passe de 33,46% en brut à 22,45% en net soit une atténuation de -33%. Cette atténuation s'explique par la prépondérance des contrats facultatifs dans la catégorie 27 (78% des facultatifs contre 22% des traités) ayant un taux de rétrocession important (70%) et une volatilité élevée (60% contre 16% pour les traités).

Synthèse

Segment SBR	Volatilité en brut	Volatilité en net	Atténuation
Auto	7,8%	7,5%	0%
RC	35,5%	24,5%	-31%
Incendie	26,1%	14,0%	-46%
Risques tech.	40,7%	15,5%	-62%
Transport	33,5%	22,5%	-33%

TABLE 4.2.7 – Volatilités brutes, nettes et atténuation par segment

4.3 Synthèse et impact potentiel sur le ratio de solvabilité

Dans cette partie, on étudie l'impact de l'atténuation de la volatilité de primes sur la solvabilité de la compagnie en analysant la variation du ratio de solvabilité on aura

4. CALIBRAGE DU FACTEUR D'ATTÉNUATION DU SOUS-RISQUE DE PRIMES PAR LA RÉTROCESSION

une idée sur l'impact de cet effet d'atténuation sur le capital de solvabilité.

Comparons maintenant les volatilités nettes de la compagnie et les volatilités SBR :

Segment SBR	Volatilité en net (AtRe)	Volatilité en Formule standard
Auto	7,5%	7% / 9%
RC	24,5%	16,50%
Incendie	14,0%	22%
Risques techniques	15,5%	22%
Transport	22,5%	17%

TABLE 4.3.1 – Comparaison volatilités nettes vs formule standard

Le tableau présente une comparaison des volatilités nettes estimées pour différents segments d'assurance (Auto, Responsabilité civile (RC), Incendie, Risques techniques, et Transport) entre les valeurs calculées spécifiquement pour AtRe (Sigma net) et celles de la formule standard. Pour le segment Auto, la volatilité nette estimée par AtRe est de 7,5%, légèrement plus élevée que la plage de 7% à 9% de la formule standard. Le segment RC montre une volatilité nette de 24,5%, nettement plus élevée que la valeur de 16,5% de la formule standard. Le segment Incendie présente une volatilité nette de 14,0%, inférieure à celle de la formule standard de 22%. Pour les Risques techniques, la volatilité nette estimée par AtRe est de 15,5%, également inférieure à la valeur standard de 22%. Enfin, pour le Transport, la volatilité nette est de 22,5%, plus élevée que la volatilité de 17% de la formule standard. Ce tableau illustre des écarts variés dans les volatilités nettes comparées aux valeurs standard, suggérant des différences significatives dans la gestion du risque entre les calculs spécifiques à AtRe et ceux de la norme SBR.

Proposition d'une règle d'application de l'atténuation par la rétrocession :

Segment SBR	Volatilité avec atténuation max de -20%	Proposition d'atténuation
Auto	7% / 9%	0%
RC	13,20%	0%
Incendie	17,60%	-20%
Risques techniques	17,60%	-20%
Transport	13,60%	0%

TABLE 4.3.2 – Formule standard avec atténuation et propositions

4. CALIBRAGE DU FACTEUR D'ATTÉNUATION DU SOUS-RISQUE DE PRIMES PAR LA RÉTROCESSION

On applique une atténuation maximale de -20% sur les segments pour lesquels le sigma après atténuation reste supérieur au sigma calibré. En appliquant cette règle, seuls les segments 25 et 26 seront concernés par l'atténuation et l'impact sur le ratio de solvabilité serait de 12 points :

	Avant atténuation	Après atténuation	Impact
Fonds propres prudentiels	2 684	2 684	
CSR	1 215	1 154	-61
<i>CSR souscription non vie</i>	988	910	-78
<i>CSR primes</i>	565	474	-91
Ratio de solvabilité	221%	233%	+12%

TABLE 4.3.3 – Impact de l'atténuation sur les indicateurs de solvabilité

Le tableau présente l'impact de l'atténuation sur les principaux indicateurs de solvabilité de l'entreprise. Les fonds propres prudentiels restent inchangés, à 2 684, avant et après l'atténuation. En revanche, le Capital de Solvabilité Requis (CSR) subit une réduction globale de 61, passant de 1 215 à 1 154. Cette diminution se décompose en une baisse de 78 dans le CSR souscription non vie, passant de 988 à 910, et une réduction de 91 dans le CSR primes, de 565 à 474. Malgré cette réduction du CSR, le ratio de solvabilité s'améliore de 12%, passant de 221% à 233%. Cela indique que l'atténuation des risques a permis à l'entreprise de mieux couvrir son capital de solvabilité requis, renforçant ainsi sa solvabilité globale tout en réduisant le besoin en capital de solvabilité.

4.4 Estimation de l'écart-type avec la méthode des moindres carrés

La distribution des charges est donnée par la dynamique ci-dessous :

$$U_{i,k,e} \sim V_{i,k,e} \cdot \mu_{i,e} + \sqrt{V_{i,k,e} \cdot \beta_i} \cdot \varepsilon_{i,k,e}$$

À partir de cette dynamique, nous pouvons obtenir un ensemble de variables aléatoires qui sont indépendantes et identiquement distribuées. Pour chaque entreprise, les paramètres suivants doivent être calculés :

$$\beta_i \cdot \varepsilon_{i,k,e} = \frac{U_{i,k,e} - V_{i,k,e} \cdot \mu_{i,e}}{V_{i,k,e}}$$

La méthode des moindres carrés nous permet de trouver un estimateur de β_i :

$$\beta_i^2 = \frac{1}{N_{i,e} - 1} \sum_k \frac{(U_{i,k,e} - V_{i,k,e} \cdot \mu_{i,e})^2}{V_{i,k,e}}$$

Le ratio de sinistralité est égal à :

4. CALIBRAGE DU FACTEUR D'ATTÉNUATION DU SOUS-RISQUE DE PRIMES PAR LA RÉTROCESSION

$$\mu_{i,e} = \frac{\sum_k U_{i,k,e}}{\sum_k V_{i,k,e}}$$

Avec :

- $U_{i,k,e}$: La charge ultime par sous-catégorie i , année de survenance k et entreprise e ;
- $V_{i,k,e}$: Le montant des primes acquises par sous-catégorie i , année de survenance k et entreprise e ;
- $\sigma_{i,e}$: L'écart-type du ratio de sinistralité par sous-catégorie i et entreprise e ;
- $N_{i,e}$: La profondeur de l'historique par sous-catégorie i et entreprise e ;
- $V_{i,e}$: La moyenne des primes acquises ;
- $\mu_{i,e}$: Le ratio de sinistralité par sous-catégorie i et entreprise e ;
- β_i^2 : La constante de proportionnalité de la variance des pertes ;
- $\varepsilon_{i,k,e}$: Une distribution aléatoire centrée réduite.

Donc nous sommes amenés à calculer la constante β_i pour chaque sous catégorie, à l'aide d'un code R nous obtenons les résultats suivants :

Branche	Volatilité en brute	Volatilité en nette
AUTO	8,01%	7,75%
RC	31,89%	19,19%
Incendie	53,21%	13,72%
Risques techniques	46,41%	15,17%
Transport	35,25%	24,24%

TABLE 4.4.1 – Volatilités brutes et nettes estimées par la méthode des moindres carrés

Ainsi, on applique la méthode sur le portefeuille global et on obtient le résultat suivant :

	Volatilité en brute	Volatilité en nette
Portefeuille globale de la SCR	20,24%	6,61%

TABLE 4.4.2 – Volatilités nettes et brutes estimées de l'ensemble du portefeuille de la SCR

Le tableau présente les volatilités brutes et nettes estimées par la méthode des moindres carrés pour différentes branches d'assurance. En général, les volatilités nettes sont plus faibles que les volatilités brutes, ce qui reflète l'effet d'atténuation des risques, probablement dû à la rétrocession ou à la diversification des risques. Pour la branche AUTO, la volatilité brute est de 8,01%, légèrement plus élevée que la volatilité nette de 7,75%. Dans le cas de la Responsabilité Civile (RC), la volatilité brute est de 31,89%, mais elle diminue considérablement à 19,19% après l'atténuation, montrant ainsi une réduction significative du risque. Pour l'Incendie, la volatilité brute atteint 53,21%, mais après atténuation, elle chute à 13,72%, illustrant une atténuation importante. Les Risques techniques présentent une volatilité brute de 46,41%, réduite à 15,17% après atténuation. Enfin, la branche

4. CALIBRAGE DU FACTEUR D'ATTÉNUATION DU SOUS-RISQUE DE PRIMES PAR LA RÉTROCESSION

Transport affiche une volatilité brute de 35,25%, qui diminue à 24,24% après l'atténuation. Ce tableau montre donc que l'atténuation des risques, via des mécanismes tels que la réassurance, a un impact significatif sur la réduction de la volatilité dans les différentes branches d'assurance.

Remarque

Globalement au niveau du portefeuille d'Atlantic Re (Ex SCR), la volatilité brute du risque de primes par la méthode des moindres carrées est estimée de 20,24%, après l'application des produits de rétrocession soit proportionnelles et non proportionnelles la volatilité devient de 6,61%, Cela représente une atténuation de 67,34% .

Chapitre 5

Calibrage du sous-risque de réserve

5.1 Provisionnement non-vie

En assurance non-vie l'évaluation des provisions techniques constitue un enjeu économique majeur, de telle sorte que le montant final résulte d'une démarche minutieuse suscitant de nombreuses réflexions et analyses. Dans ce mémoire, nous nous focaliserons sur les provisions BE pour sinistres en assurance non-vie, et sur le risque lié à leurs dérivées.

Pourquoi constituer des provisions pour sinistres ?

Considérons le cycle de production d'une entreprise vendant un bien, cette entreprise fixe le prix de ce qu'elle propose en fonction du bénéfice net qu'elle en tirera (c'est-à-dire le prix de vente net des charges, frais...). Ainsi, le prix de revient est connu à l'avance. Cependant, en assurance, le cycle de production est inversé. En début de période de couverture, l'assureur reçoit une prime en échange des garanties offertes par le contrat, mais le montant des prestations qui seront versées est aléatoire et inconnu à cette date. Il est donc possible que la prime reçue soit insuffisante pour indemniser l'assuré. Par ailleurs, si la prime est comptabilisée à l'actif, elle contribuera à augmenter le résultat. Dès lors, en cas de sinistralité future, l'assureur peut se retrouver dans l'incapacité d'honorer ses engagements. Ces aspects font que l'assureur se doit de constituer des provisions pour faire face à ses engagements futurs qui ont la spécificité d'être incertains.

Pour un contrat d'assurance IARD, l'assuré paye une prime en échange de la prise en charge, par l'assureur, d'une partie ou de la totalité de la sinistralité subie. Mais, entre la date de l'accident et la clôture du dossier, la « vie » du sinistre se caractérise par plusieurs étapes :

- Survenance du sinistre ;
- Déclaration du sinistre ;
- Estimation de la charge totale du sinistre ;

- Règlements qui peuvent s'étaler sur plusieurs années et révisions éventuelles de l'estimation de la charge totale à chaque arrêté ;
- Recours éventuels ;
- Clôture du dossier.

Nature des provisions pour sinistres en assurance non-vie

La provision dossier/dossier

Le paiement de la prime par l'assuré engage l'assureur, de par le contrat souscrit, à indemniser une éventuelle sinistralité subie. Cette indemnisation n'est pas toujours effectuée en un seul paiement et peut s'étaler dans le temps. L'assureur effectue plusieurs versements jusqu'à la clôture du sinistre. Le montant de la charge de sinistres est évalué soit en fonction de diverses caractéristiques du sinistre (les informations portées à la connaissance de l'assurance, les rapports d'expertise . . .), soit de manière forfaitaire. Cette première provision, appelée provision dossier/dossier, correspond donc au provisionnement des règlements futurs. Son estimation se base sur des éléments provisoires qui sont portés à la connaissance de l'assureur et peut donc faire l'objet d'une révision à la hausse ou à la baisse. La provision dossier/dossier est aussi appelée provision RBNS (Reported But Not Settled).

La provision dossier/dossier

La provision dossier/dossier étant estimée uniquement sur la base des sinistres portés à la connaissance de l'assureur, elle est complétée pour anticiper une dérive de la charge totale. Cette provision est appelée IBNR (Incurred But Not Reported) et se décompose de la manière suivante :

- La provision pour IBNYR (Incurred But not Yet Reported), ce sont les sinistres tardifs qui ne sont pas encore portés à la connaissance de l'assureur ;
- La provision pour IBNER (Incurred But Not Enough Reported), ce sont les sinistres connus pour lesquels l'évaluation de la charge pourrait évoluer.

La provision pour sinistre à payer

Dans le cadre de la réassurance, la **Provision pour Sinistres à Payer (PSAP)** est définie comme la part des engagements futurs de l'assureur cédant que le réassureur doit couvrir, au titre des sinistres déjà survenus mais non encore réglés, y compris :

- les sinistres déclarés mais non réglés ;
- les sinistres survenus mais non encore déclarés (IBNR) ;
- les frais internes ou externes de gestion des sinistres.

Elle concerne exclusivement les sinistres liés aux contrats réassurés.

La PSAP en réassurance permet :

- au réassureur d'évaluer sa part d'engagement sur les sinistres liés aux contrats du portefeuille cédé ;
- à l'assureur cédant de réduire son propre passif technique par la cession d'une partie du risque.

Risques liés à une mauvaise évaluation :

- **Sous-évaluation** : risque d'insuffisance de provisions pour le réassureur, impactant sa solvabilité ;
- **Sur-évaluation** : détérioration apparente de la rentabilité du réassureur et déséquilibre des ratios techniques.

Evaluation des provisions

Les provisions techniques sont inscrites au passif du bilan et représentent un pourcentage important de ce dernier. De par leur poids, l'évaluation des provisions constitue une des problématiques majeures pour un assureur. Ce paragraphe introduit les notations classiques utilisées en assurance. Les données relatives aux sinistres (règlements, charges, nombre de sinistres . . .) sont inscrites dans un triangle. Ceci permet de rendre compte de l'évolution du sinistre dans le temps. Ces triangles sont communément appelés **triangles de liquidation**. Ils permettent de suivre l'historique de la sinistralité.

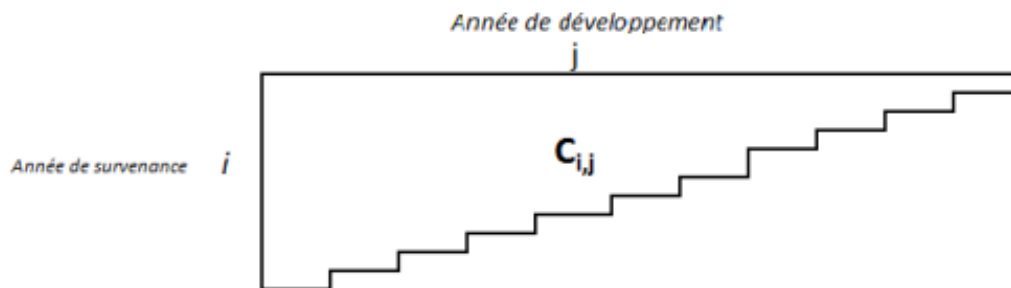


FIGURE 5.1.1 – Triangle de liquidation

La lecture du triangle de liquidation peut se faire selon plusieurs directions :

- Selon les lignes, appelées les années de survenance et correspondant aux années de rattachement des sinistres.
- Selon les colonnes, appelées les années de développement pendant lesquelles la charge s'écoule.
- Selon les diagonales, représentant les exercices comptables. Chaque année, une nouvelle diagonale est ajoutée au triangle de liquidation.

On notera dans la suite :

- i la $i^{\text{ème}}$ année de survenance avec $i \in \{1 \dots I\}$;
- j la $j^{\text{ème}}$ année de survenance $j \in \{1 \dots J\}$;
- $X_{i,j}$ l'incrément de charge de sinistre relatif à l'année de survenance i , et au développement de l'année j ;
- $C_{i,j}$ le montant de charge cumulée de sinistre relatif à l'année de survenance i , se développant jusqu'à l'année j .

Pour évaluer la charge ultime $C_{i,J}$, l'objectif est d'estimer les $C_{i,j}$ futurs (partie inférieure du triangle). Différentes méthodes statistiques peuvent être employées.

Les méthodes de provisionnement les plus classiques sont celles de Chain-Ladder (CL) et Bornhuetter-Ferguson (BF). Simples à manipuler et donnant des résultats très satisfaisants, ces techniques sont les plus utilisées en pratique. Néanmoins, elles ne permettent pas de déterminer l'erreur de prédiction associée aux réserves futures. Les modèles stochastiques le feront plus tard en se basant sur ces algorithmes déterministes.

Dans toute la suite, nous supposons que les dernières années de survenance et de développement seront notées I et J . Nous avons $\forall j > J, X_{i,j} = 0$, où $X_{i,j}$ est l'incrément des années de survenance i et de développement j . De plus, nous considérerons que $I = J$.

5.1.1 La méthode de Chain-Ladder

Il existe de nombreuses méthodes de provisionnement se basant sur la liquidation des triangles et visant à estimer la charge ultime. Dans le cadre de ce mémoire, nous utiliserons la méthode de Chain-Ladder, qui repose sur la projection à l'ultime des derniers montants connus (situés sur la diagonale).

Première hypothèse : (H1)

Les évolutions de charges observées dans le passé seront similaires dans le futur. Ceci se traduit par une relation de proportionnalité entre deux années de développement. Mathématiquement, il existe des paramètres f_k positifs appelés facteurs de développement tel que :

$$E(C_{i,k+1} | C_{i,1}, \dots, C_{i,k}) = C_{i,k} f_k, \quad 1 \leq i \leq I, \quad 1 \leq k \leq I - 1. \quad (5.1.1)$$

Deuxième hypothèse : (H2)

Les années de survenance des sinistres sont indépendantes. Mathématiquement, on a :

$$\{C_{i,1}, \dots, C_{i,I}\} \perp \{C_{j,1}, \dots, C_{j,I}\}, \quad \forall i \neq j. \quad (5.1.2)$$

Par ailleurs, la technique de Chain-Ladder suppose que tous les sinistres sont clos à l'année de développement I ce qui signifie que $\hat{C}_{I,I} = C_{I,I}$, où \hat{C} est l'estimateur de C .

Les facteurs de proportionnalité introduits dans l'hypothèse (H1) sont définis de la manière suivante :

$$f_k = \frac{E[C_{i,k+1}]}{E[C_{i,k}]}. \quad (5.1.3)$$

Dans la pratique, ils peuvent être estimés par la formule :

$$\hat{f}_k = \frac{\sum_{i=1}^{I-k} C_{i,k+1}}{\sum_{i=1}^{I-k} C_{i,k}}. \quad (5.1.4)$$

Les facteurs de développement \hat{f}_k permettent de projeter les montants de charge de la partie inférieure du triangle, et d'en déduire les montants de charges ultimes situés sur la dernière colonne. À ces montants de charges ultimes sont soustraits les montants de charges de la dernière diagonale pour obtenir les IBNR.

La provision pour IBNR par exercice de survenance est alors estimée par :

$$\hat{R}_i = \hat{C}_{i,I} - C_{i,I-i+1}. \quad (5.1.5)$$

La provision totale pour IBNR est déduite en sommant les provisions relatives à chaque année de survenance :

$$\text{IBNR} = \sum_{i=1}^I (\hat{C}_{i,I} - C_{i,I-i+1}). \quad (5.1.6)$$

De par sa définition la provision est une variable aléatoire et la méthode de Chain-Ladder ne fournit qu'une valeur moyenne de sa réalisation. Dès lors une incertitude peut être associée à cette estimation et il paraît nécessaire de pouvoir quantifier cette volatilité en utilisant une approche stochastique.

5.1.2 Modèle de Mack

Le modèle présenté dans (Mack, 1993) permet de mesurer l'incertitude associée à l'estimation de la provision par la méthode de Chain-Ladder. Pour quantifier l'erreur de prédiction à l'ultime dans l'estimation des provisions la Mean Square Error of Prediction (MSEP) est utilisée. Cette quantité correspond à la distance moyenne entre l'estimation d'un paramètre et sa valeur réelle, et est définie comme suit :

$$\text{MSEP}_{C_{i,j}|D_I}(\hat{C}_{i,I}) = E[(C_{i,I} - \hat{C}_{i,I})^2 | D_I], \quad (5.1.7)$$

avec $D_I = \{C_{i,j}, i + j \leq I + 1, 1 \leq i \leq I\}$ représentant l'ensemble des données observées jusqu'au temps $t = I$. Cette quantité correspond donc à l'erreur de prédiction sur le montant de charges ultime relatif à l'année de survenance i .

En utilisant la propriété mathématique, $E[(X - a)^2] = V(X) + (E(X) - a)^2$, la MSEP peut se décomposer en deux termes :

$$\text{MSEP}_{C_{i,j}|D_I}(\hat{C}_{i,I}) = V[C_{i,I}|D_I] + (E[C_{i,I}|D_I] - \hat{C}_{i,I})^2. \quad (5.1.8)$$

- Le premier terme représente l'erreur de processus liée à la variance intrinsèque du triangle de liquidation ;

- Le deuxième terme est l'erreur d'estimation liée à la projection de montants passés pour prédire le futur, il s'agit donc de l'erreur liée à l'utilisation de la méthode de Chain-Ladder pour le provisionnement.

De manière analogue, l'incertitude relative à l'estimation des provisions, pour une année de survenance, est définie par :

$$\text{MSEP}_{R_i|D_I}(\hat{R}_i) = E[(R_i - \hat{R}_i)^2|D_I]. \quad (5.1.9)$$

Pour rappel $R_i = C_{i,I} - C_{i,I-i+1}$, le développement de la MSEP permet d'obtenir l'égalité suivante :

$$\begin{aligned} \text{MSEP}_{R_i|D_I}(\hat{R}_i) &= E[(C_{i,I} - C_{i,I-i+1} - (\hat{C}_{i,I} - C_{i,I-i+1}))^2|D_I] \\ &= E[(C_{i,I} - \hat{C}_{i,I})^2|D_I] \\ &= \text{MSEP}_{C_{i,I}|D_I}(\hat{C}_{i,I}). \end{aligned} \quad (5.1.10)$$

Ceci montre que l'incertitude liée à l'estimation des provisions est la même que celle relative à l'estimation des montants de charges. Il faut alors estimer la quantité $\text{MSEP}(\hat{C}_{i,I})$ pour en déduire l'erreur d'estimation des provisions.

Cependant, seul le premier terme de l'équation 4.1.8 est connu de par (H1). Le deuxième terme de la $\text{MSEP}(\hat{C}_{i,I})$ s'exprime en fonction de la variance inconnue des $C_{i,I}$. C'est pourquoi le modèle de Mack rajoute une 3^{ème} hypothèse sur la variance de la charge :

$$\text{(H3)} \quad \text{Var}(C_{i,j+1}|C_{i,1}, \dots, C_{i,j}) = \sigma_j^2 C_{i,j}, \quad 1 < i < I, \quad 1 < j < I - 1.$$

L'estimateur de la volatilité σ est donné par :

$$\hat{\sigma}_j^2 = \frac{1}{J - j - 1} \sum_{i=1}^{I-j-1} C_{i,j} \left(\frac{C_{i,j+1} - \hat{f}_j C_{i,j}}{C_{i,j}} \right)^2, \quad \forall 1 \leq j \leq J - 2. \quad (5.1.11)$$

Sur les dernières années de développement, peu d'informations sont disponibles. Mack fournit alors un estimateur de σ_{J-1}^2 pour l'année de développement $J - 1$ qui s'exprime en fonction des années antérieures :

$$\hat{\sigma}_{J-1}^2 = \min \left(\frac{\hat{\sigma}_{J-2}^4}{\hat{\sigma}_{J-3}^2}; \min(\hat{\sigma}_{J-3}^2, \hat{\sigma}_{J-2}^2) \right). \quad (5.1.12)$$

Tous les éléments nécessaires à l'estimation de la MSEP sont à présent disponibles. Ainsi, toujours sous les hypothèses H1, H2 et H3, et en développant la décomposition 4.1.8 de la MSEP, Mack établit une formule fermée pour calculer l'erreur d'estimation de la provision.

Pour une année de survenance :

$$\text{MSEP}_{R_i|D_I}(\hat{R}_i) = (\hat{C}_{i,J})^2 \sum_{j=J-i+1}^{J-1} \frac{\hat{\sigma}_j^2}{\hat{f}_j^2} \left(\frac{1}{\sum_{k=1}^{I-j} C_{k,j}} + \frac{1}{\hat{C}_{i,j}} \right). \quad (5.1.13)$$

Pour la provision totale :

$$\text{MSEP}_{R|D_I}(\hat{R}) = \sum_{i=2}^I \left(\text{MSEP}_{R_i|D_I}(\hat{R}_i) + \hat{C}_{i,J} \left(\sum_{k=i+1}^I \hat{C}_{k,J} \right) \sum_{j=J+1-i}^{J-1} \frac{2\hat{\sigma}_j}{\hat{f}_j^2} \frac{1}{\sum_{i=1}^{J-j} C_{i,j}} \right). \quad (5.1.14)$$

Le modèle de Mack permet donc d'obtenir une mesure du risque de provisionnement à l'ultime.

5.2 Méthode de Merz et Wüthrich

Les assureurs doivent être en mesure de quantifier leur risque de provisionnement sur un horizon d'un an. Ce risque serait engendré par une variation de l'estimation de la charge ultime entre deux exercices successifs. La charge ultime prédite en I est alors comparée à la charge ultime prédite en $I+1$ (abstraction faite des sinistres survenus à une date postérieure à I).

$$\Delta = \text{provision BE}(I) - (\text{paiement en } (I+1) + \text{provision BE}(I+1)).$$

Si $\Delta > 0$ l'assureur réalise un boni, sinon il est en situation de mali. Afin de mesurer cette variation, l'article [15] (Merz et Wüthrich, 2008) introduit le Claims Development Result (CDR) qui est la traduction mathématique de Δ .

Définition théorique du CDR :

Sur l'année comptable $[I; I+1]$, le CDR_i théorique pour l'année de survenance i est donné par :

$$\text{CDR}_i(I+1) = E[R_i^I | D_I] - (C_{i,I-i+1} - C_{i,I-i} + E[R_i^{I+1} | D_{I+1}]) \quad (5.2.1)$$

$$= E[C_{i,I} | D_I] - E[C_{i,I} | D_{I+1}] \quad (5.2.2)$$

où $E[R_i^I | D_I]$ est la provision au temps I pour les sinistres de l'année de survenance i , $(C_{i,I-i+1} - C_{i,I-i})$ est le paiement intermédiaire pour l'année de survenance i entre deux exercices, et $E[R_i^{I+1} | D_{I+1}]$ est la provision au temps $I+1$ pour les sinistres de l'année de survenance i .

Pour l'ensemble des années de survenance le CDR total est donné par :

$$\text{CDR} = \sum_{i=1}^I \text{CDR}_i(I+1). \quad (5.2.3)$$

Définition du CDR estimé :

Pour être en mesure d'approximer le CDR, les quantités suivantes sont estimées telles que :

$$E[C_{i,I}|D_I] \approx \hat{C}_{i,I}^I \quad (5.2.4)$$

$$E[C_{i,I}|D_{I+1}] \approx \hat{C}_{i,I}^{I+1} \quad (5.2.5)$$

$$E[R_i^I|D_I] \approx \hat{R}_{i,I}^I \quad (5.2.6)$$

$$E[R_i^{I+1}|D_{I+1}] \approx \hat{R}_{i,I}^{I+1} \quad (5.2.7)$$

Où $\hat{C}_{i,I}^I$, $\hat{C}_{i,I}^{I+1}$, $\hat{R}_{i,I}^I$ et $\hat{R}_{i,I}^{I+1}$ sont estimés par le modèle de Chain-Ladder.

Pour une année de survénance i , le $\widehat{\text{CDR}}_i$ est alors approximé par :

$$\widehat{\text{CDR}}_i(I+1) = \hat{R}_i^I - (C_{i,I-i+1} - C_{i,I-i} + \hat{R}_i^{I+1}) \quad (5.2.8)$$

$$= \hat{C}_{i,I}^I - \hat{C}_{i,I}^{I+1}, \quad (5.2.9)$$

où $\hat{R}_i^I = \hat{C}_{i,I}^I - C_{i,I-i}$, $\forall i \in \{1 \dots I\}$, et $\hat{R}_i^{I+1} = \hat{C}_{i,I}^{I+1} - C_{i,I-i+1}$, $\forall i \in \{1 \dots I\}$.

L'estimateur du CDR total s'en déduit par l'agrégation sur l'ensemble des années de survénance :

$$\widehat{\text{CDR}} = \sum_{i=1}^I \widehat{\text{CDR}}_i(I+1). \quad (5.2.10)$$

C'est l'erreur de prédiction du *CDR observable* qui est mesurée par cette méthode, par l'approximation de l'écart-type de l'erreur de prédiction (Mean Squared Error of Prediction, notée **MSEP**) :

$$\text{MSEP} = \mathbb{E} \left[\left(\sum_{i=1}^I \widehat{\text{CDR}}_i(I+1) - 0 \right)^2 \middle| D_I \right]$$

La volatilité sans biais est donnée par :

$$\forall j \in [0; J-2], \quad \sigma_j^2 = \frac{1}{I-j-1} \sum_{i=0}^{I-j-1} C_{i,j} \times \left(\frac{C_{i,j+1}}{C_{i,j}} - \hat{f}_j \right)^2$$

Pour $j = J-1$, une méthode approchée a été développée par Mack pour pouvoir garder l'absence de biais :

$$\hat{\sigma}_{J-1}^2 = \min \left(\sigma_{J-2}^2, \sigma_{J-3}^2, \frac{\sigma_{J-2}^4}{\sigma_{J-3}^2} \right)$$

Si J est la dernière année de développement et que le développement est terminé, alors σ_{J-1}^2 peut être nulle. Pour $j = J$, le Back-Testing n'étant plus possible, $\hat{\sigma}_J^2 = 0$.

L'incertitude de prédiction du *CDR observable* autour de zéro est estimée par :

$$\text{MSEP} = \mathbb{E} \left[\left(\sum_{i=1}^I \widehat{\text{CDR}}_i(I+1) - 0 \right)^2 \middle| D_I \right]$$

On peut décomposer cette erreur de prédiction entre :

- Un terme $(u - \text{bias})^2$ qui est le résultat du biais attendu entre l'observable CDR et son estimation (0), qui peut s'interpréter comme l'erreur d'estimation.
- Un deuxième terme appelé *variance process*, qui représente l'incertitude liée au caractère aléatoire des variables à prédire.

$$\text{MSEP} = (u - \text{bias})^2 + \text{Var} \left(\sum_{i=1}^I \widehat{\text{CDR}}_i(I+1) \middle| D_I \right)$$

avec :

$$(u - \text{bias})^2 = \mathbb{E}_{b|D_I} \left[\left(\mathbb{E} \left[\sum_{i=1}^I \widehat{\text{CDR}}_i(I+1) \middle| D_I \right] - 0 \right)^2 \right]$$

Chaque élément est calculé indépendamment :

$$(u - \text{bias})^2 = \sum_{i=1}^I (\widehat{C}_{i,J}^I)^2 \times \widehat{\Delta}_{i,j} + 2 \sum_{i>k>0} \widehat{C}_{i,J}^I \times \widehat{C}_{k,J}^I \times \widehat{\Lambda}_{k,J}^I$$

où :

$$\widehat{\Lambda}_{k,J}^I = \frac{C_{k,I-k}}{S_{I+1,I+1-k}} \times \widehat{\sigma}_{I-k}^2 (\widehat{f}_{I-k})^2 + \sum_{j=I+k+1}^{J-X} \frac{C_{I-j,j}}{S_{I,I-j+1}} \times \left(\frac{\widehat{\sigma}_j^2}{(\widehat{f}_j)^2} \right)^2$$

$$\widehat{\Delta}_{i,j} = \frac{(\widehat{\sigma}_{I-i})^2}{(\widehat{f}_{I-i})^2} S_{I,I-i} + \sum_{j=1}^{J-i+1} \frac{C_{I-j,j}}{S_{I+1,j+1}} \left(\frac{\widehat{\sigma}_j^2}{(\widehat{f}_j)^2} \right)^2$$

On a :

$$\text{Var} \left(\sum_{i=1}^I \widehat{\text{CDR}}_i(I+1) \middle| D_I \right) = \sum_{i=1}^I \widehat{\Gamma}_{i,j}^I + 2 \sum_{i>k>0} \widehat{\Upsilon}_{i,k}^I$$

où :

$$\widehat{\Gamma}_{i,j}^I = \text{Var} \left(\widehat{\text{CDR}}_i(I+1) \middle| D_I \right) \tag{5.2.11}$$

$$= (\widehat{C}_{i,J}^I)^2 \left(\left[1 + \widehat{\sigma}_{I-i}^2 (\widehat{f}_{I-i})^2 \times \frac{C_{i,I-i}}{S_{I,I-i}} \right] \cdot \prod_{l=I-i+1}^{J-1} \left[1 + \widehat{\sigma}_l^2 (\widehat{f}_l)^2 \times \frac{C_{I,l}}{S_{I+1,l+1}} \right] - 1 \right) \tag{5.2.12}$$

et, pour tout $i \geq 1$:

$$\widehat{Y}_{i,k}^I = \text{Cov} \left(\widehat{\text{CDR}}_i(I+1), \widehat{\text{CDR}}_k(I+1) \mid D_I \right) \quad (5.2.13)$$

$$= \widehat{C}_{i,J}^I \widehat{C}_{k,J}^I \left(\left[1 + \widehat{\sigma}_{I-k}^2 \left(\widehat{f}_{I-k} \right)^2 \times \frac{C_{k,I-k}}{S_{I+1,I+1-k}} \right] \cdot \prod_{l=I-k+1}^{J-1} \left[1 + \widehat{\sigma}_l^2 \left(\widehat{f}_l \right)^2 \times \frac{C_{I,l}}{S_{I+1,l+1}} \right] - 1 \right) \quad (5.2.14)$$

pour $i > k > 0$.

Pour approximer les expressions précédentes, le lemme suivant sera utilisé :

Lemme : Si les x_j sont des constantes positives telles que $x_j \ll 1$, alors :

$$\prod_{j=1}^J (1 + x_j) \approx 1 + \sum_{j=1}^J x_j$$

En supposant que

$$\left(\frac{\widehat{\sigma}_l^2}{(\widehat{f}_l)^2} \right)^2 \frac{C_{I,l}}{S_{I,l+1}} \ll 1,$$

nous avons l'approximation de $\widehat{\Gamma}_{i,j}^I$ et $\widehat{Y}_{i,k}^I$:

$$\widehat{\Gamma}_{i,j}^I \approx (\widehat{C}_{i,J}^I)^2 \left[\left(\frac{\widehat{\sigma}_{I-i}^2}{(\widehat{f}_{I-i})^2} \right)^2 \times \frac{C_{i,I-i}}{S_{I,I-i}} + \sum_{l=I-i+1}^{J-1} \left(\frac{\widehat{\sigma}_l^2}{(\widehat{f}_l)^2} \right)^2 \times \frac{C_{I,l}}{S_{I+1,l+1}} \right]$$

$$\widehat{Y}_{i,k}^I \approx \widehat{C}_{i,J}^I \widehat{C}_{k,J}^I \left[\left(\frac{\widehat{\sigma}_{I-k}^2}{(\widehat{f}_{I-k})^2} \right)^2 \times \frac{C_{k,I-k}}{S_{I+1,I+1-k}} + \sum_{l=I-k+1}^{J-1} \left(\frac{\widehat{\sigma}_l^2}{(\widehat{f}_l)^2} \right)^2 \times \frac{C_{I,l}}{S_{I+1,l+1}} \right]$$

En remplaçant dans l'équation de la MSEP, nous obtenons alors l'approximation de la MSEP :

$$\begin{aligned} \text{MSEP} &= (u - \text{bias})^2 + \text{Var} \left(\sum_{i=1}^I \widehat{\text{CDR}}_i(I+1) \mid D_I \right) \\ &= \sum_{i=1}^I (\widehat{C}_{i,J}^I)^2 \times \widehat{\Delta}_{i,j} + \widehat{\Gamma}_{i,j}^I + 2 \sum_{i>k>0} \widehat{C}_{i,J}^I \times \widehat{C}_{k,J}^I \times \widehat{\Lambda}_{k,J}^I \\ &\approx \sum_{i=1}^I (\widehat{C}_{i,J}^I)^2 \left(\sum_{j=1}^{J-1} \frac{C_{I-j,j}}{S_{I+1,I+1-j}} \widehat{\sigma}_j^2 \frac{1}{(\widehat{f}_j)^2} \right) + 2 \sum_{i>k>0} \widehat{C}_{i,J}^I \times \widehat{C}_{k,J}^I \left(\sum_{j=1}^{J-1} \frac{C_{I-j,j}}{S_{I+1,I+1-j}} \widehat{\sigma}_j^2 \frac{1}{(\widehat{f}_j)^2} \right) \end{aligned}$$

avec :

$$\widehat{Q}_j = \frac{\widehat{\sigma}_j^2}{\widehat{f}_j^2}$$

Il est possible de simplifier l'expression obtenue en remarquant que :

$$\forall j \in [0; J - 1], \quad S_{j+1}^I = S_j^I + C_j^I$$

Ainsi, nous avons :

$$\sum_{j=1}^{J-1} \frac{C_{I-j,j}}{S_{I+1,I+1-j}} \widehat{\sigma}_j^2 \frac{1}{(\widehat{f}_j)^2} + \sum_{j=1}^{J-1} \frac{C_{I-j,j}}{S_{I+1,I+1-j}} \widehat{\sigma}_j^2 \frac{1}{(\widehat{f}_j)^2} = \sum_{j=1}^{J-1} \frac{C_{I-j,j}}{S_{I+1,I+1-j}} \widehat{\sigma}_j^2 \frac{1}{(\widehat{f}_j)^2} \times \sum_{j=1}^{J-1} \left(\frac{C_{I-j,j}}{S_{I+1,j}} \widehat{\sigma}_j^2 \frac{1}{(\widehat{f}_j)^2} \right)$$

Finalement, l'expression de la MSEP est :

$$\text{MSEP} = \sum_{i=1}^I (\widehat{C}_{i,J}^I)^2 \left(\widehat{Q}_{I-i} \frac{C_{I-i}}{S_{I-i}} + \sum_{j=1}^{J-1} \frac{C_{I-j,j}}{S_{I+1,j}} \widehat{\sigma}_j^2 \frac{1}{(\widehat{f}_j)^2} \right) + 2 \sum_{i>k>0} \widehat{C}_{i,J}^I \widehat{C}_{k,J}^I \left(\sum_{j=1}^{J-1} \frac{C_{I-j,j}}{S_{I+1,I+1-j}} \widehat{\sigma}_j^2 \frac{1}{(\widehat{f}_j)^2} \right)$$

La valeur de la variance du risque de réserve est donnée par :

$$\widehat{\sigma}_{\text{réserve}} = \sqrt{\text{MSEP}} / \text{PSAP}$$

où PSAP représente le montant de la Provision Pour Sinistres à Payer, calculée à partir des facteurs de développement donnés par la méthode de Chain-Ladder :

$$\text{PSAP} = \sum_{i=0}^I \left(\widehat{C}_{i,J} - C_{i,J-i} \right)$$

Application de la méthode de Merz

Vérification des hypothèses

H1 : les années de survenances sont indépendantes les unes des autres.

5. CALIBRAGE DU SOUS-RISQUE DE RÉSERVE

```

Call:
lm(formula = value ~ factor(CalendarYear), data = df)

Residuals:
    Min       1Q   Median       3Q      Max
-296746845 -95012733 -17790871 123460121 261695843

Coefficients:
            Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)   36290010  135491351  0.268  0.7898
factor(CalendarYear)2  18881240  165942337  0.114  0.9098
factor(CalendarYear)3   73359627  156451936  0.469  0.6410
factor(CalendarYear)4  124318412  151483936  0.821  0.4154
factor(CalendarYear)5  145967353  148423339  0.983  0.3297
factor(CalendarYear)6  167497493  146347386  1.145  0.2574
factor(CalendarYear)7  194316308  144846347  1.342  0.1853
factor(CalendarYear)8  202472691  143710280  1.409  0.1645
factor(CalendarYear)9  225411176  142820424  1.578  0.1202
factor(CalendarYear)10 258624385  142104528  1.820  0.0742 .
factor(CalendarYear)11 266205530  141516101  1.881  0.0653 .
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 135500000 on 55 degrees of freedom
(55 observations effacées parce que manquantes)
Multiple R-squared:  0.2206, Adjusted R-squared:  0.07884
F-statistic: 1.556 on 10 and 55 DF, p-value: 0.1448

```

FIGURE 5.2.1 – Test d’absence d’effet calendaire sur la catégorie Incendie

L’analyse de la régression linéaire, qui modélise la variable d’intérêt en fonction de l’année calendaire considérée comme facteur catégoriel, révèle l’absence d’effet significatif de l’année sur cette variable. En effet, le test global de l’effet des années (test F) conduit à une statistique de 1,556 avec une p-value associée de 0,1448, bien supérieure au seuil usuel de 5%. Cette p-value indique que l’hypothèse nulle d’absence d’effet calendaire — c’est-à-dire l’égalité des moyennes annuelles — ne peut être rejetée. Par ailleurs, l’examen des coefficients estimés pour chaque année met en évidence que toutes les différences par rapport à l’année de référence ne sont pas statistiquement significatives. Le faible coefficient de détermination ajusté (R^2 ajusté = 0,0788) confirme également que la variabilité de la variable étudiée n’est que très faiblement expliquée par l’année calendaire.

```

Call:
lm(formula = value ~ factor(CalendarYear), data = df)

Residuals:
    Min       1Q   Median       3Q      Max
-311929339 -138646749 -19448129 184257425 314207197

Coefficients:
            Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)  115846983  192503157  0.602  0.550
factor(CalendarYear)2   86687885  235767254  0.368  0.715
factor(CalendarYear)3  141187560  222283499  0.635  0.528
factor(CalendarYear)4  190651358  215225072  0.886  0.380
factor(CalendarYear)5  219402717  210876643  1.040  0.303
factor(CalendarYear)6  229647868  207927174  1.104  0.274
factor(CalendarYear)7  234180387  205794531  1.138  0.260
factor(CalendarYear)8  230372068  204180432  1.128  0.264
factor(CalendarYear)9  233650841  202916144  1.151  0.255
factor(CalendarYear)10 243550057  201899014  1.206  0.233
factor(CalendarYear)11 220069242  201062990  1.095  0.278

Residual standard error: 192500000 on 55 degrees of freedom
(55 observations effacées parce que manquantes)
Multiple R-squared:  0.05349, Adjusted R-squared: -0.1186
F-statistic: 0.3108 on 10 and 55 DF, p-value: 0.9752

```

FIGURE 5.2.2 – Test d’absence d’effet calendaire sur la catégorie Auto AT RC

L'analyse de la régression linéaire portant sur l'effet de l'année calendaire (CalendarYear) sur la variable Value montre une absence d'effet significatif. En effet, les coefficients estimés pour chaque année présentent des p-values élevées, bien supérieures au seuil usuel de 0,05, indiquant que les différences observées entre les années ne sont pas statistiquement significatives.

H2 : Les $C_{i,j+1}$ en fonction des $C_{i,j}$ pour un j donné. Si cette hypothèse est vérifiée, les points doivent être alignés suivant une droite passant par l'origine.

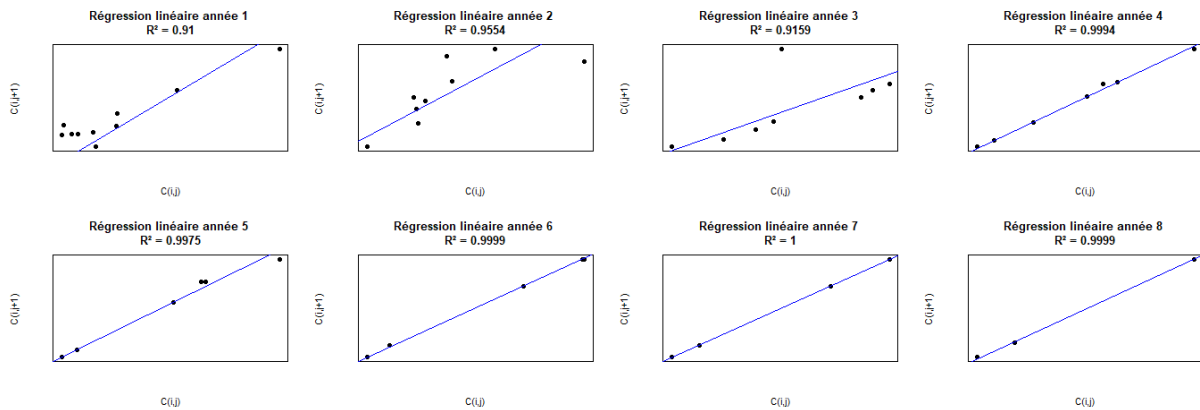


FIGURE 5.2.3 – Régression linéaire pour chaque paire de développement pour Incendie

Ces graphiques de régression linéaire révèlent une excellente adéquation du modèle *Chain Ladder* pour ce triangle de liquidation, avec des coefficients de détermination (R^2) variant de 0.91 à 1.00 selon les années de développement. On observe une amélioration progressive de la qualité d'ajustement : les premières années (1–4) présentent une variabilité modérée avec des R^2 autour de 0.91–0.99, reflétant la volatilité naturelle des règlements en début de développement, tandis que les années tardives (5–8) atteignent une quasi-perfection statistique ($R^2 \geq 0.9975$) avec des relations linéaires très stables. Cette convergence vers la stabilité est typique des triangles de bonne qualité et valide l'hypothèse fondamentale de proportionnalité du modèle *Chain Ladder*. L'absence d'intercept et la linéarité forte confirment que les montants futurs sont effectivement proportionnels aux montants cumulés actuels, justifiant pleinement l'utilisation de cette méthode déterministe pour la projection des provisions.

5. CALIBRAGE DU SOUS-RISQUE DE RÉSERVE

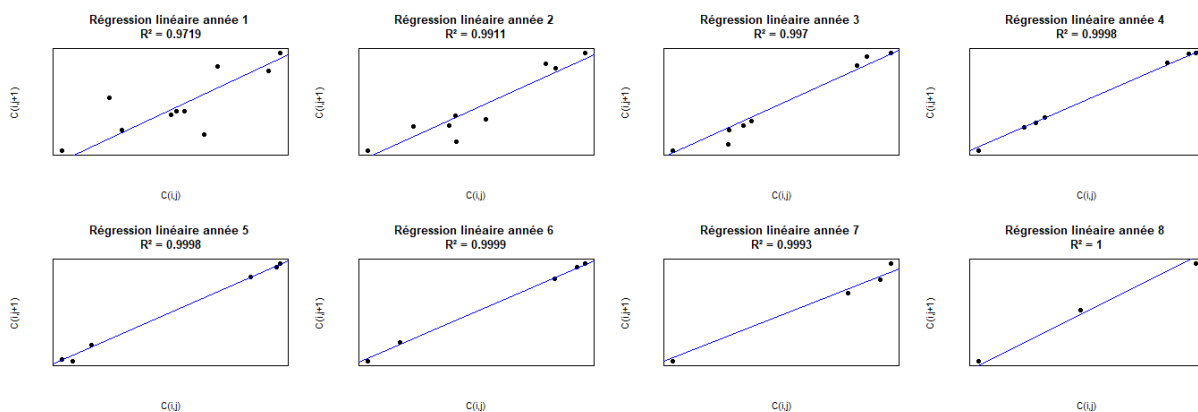


FIGURE 5.2.4 – Régression linéaire pour chaque paire de développement pour Auto AT RC

H3 : Pour la dernière hypothèse, on peut étudier les résidus standardisés

$$r_{i,j} = \frac{C_{i,j+1} - \hat{\lambda}_j C_{i,j}}{\sqrt{C_{i,j}}}$$

un nuage de points pourra être construit avec les résidus pour vérifier qu'aucune structure n'apparaît d'une année à l'autre.

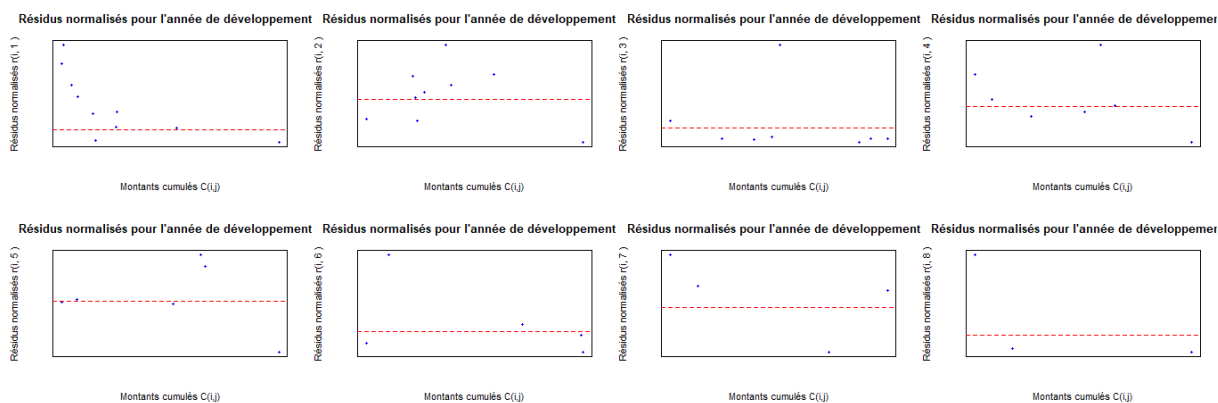


FIGURE 5.2.5 – La tendance des résidus pour chaque année de développement pour l'Incendie

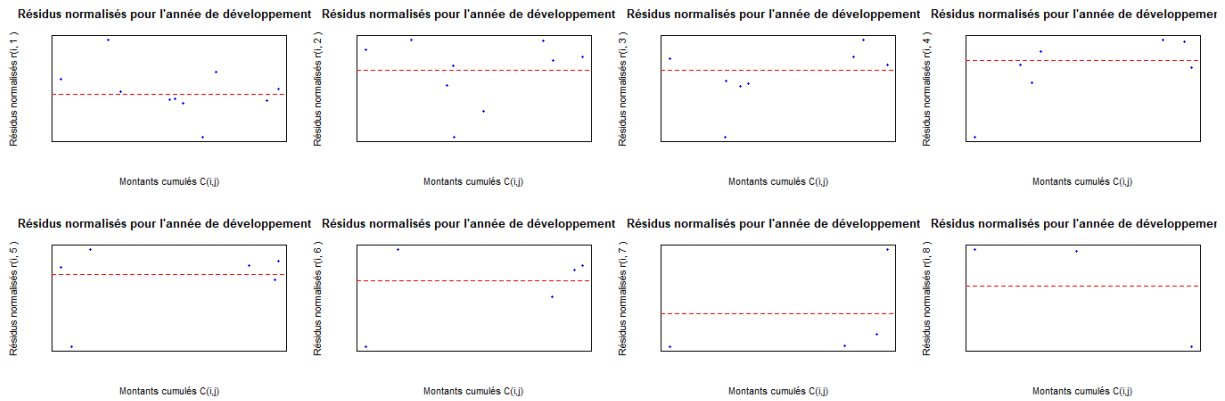


FIGURE 5.2.6 – La tendance des résidus pour chaque année de développement pour Auto AT RC

Dans les figures présentées, les résidus normalisés sont tracés en fonction des réglemets cumulés $C(i, j)$ pour différentes années de développement. On remarque que les points semblent dispersés de manière quasi aléatoire autour de la ligne de référence (en rouge), sans former de tendance claire ni de structure particulière.

Cette observation est importante car elle indique que le modèle utilisé pour ajuster les données ne présente pas de biais systématique lié aux montants cumulés. En effet, une tendance identifiable dans la dispersion des résidus (par exemple, une courbe, une pente ou un regroupement particulier) suggérerait que le modèle sous-estime ou surestime systématiquement certaines valeurs selon le niveau des montants cumulés. Cela remettrait en question la validité du modèle et son adéquation aux données.

Le fait que les résidus soient distribués de manière aléatoire autour de zéro, sans structure apparente, est un signe que le modèle est bien spécifié. Il capture correctement la relation entre les variables, et les erreurs sont essentiellement dues au hasard ou à des fluctuations naturelles non expliquées par le modèle.

Résultats de la méthode de Merz

5. CALIBRAGE DU SOUS-RISQUE DE RÉSERVE

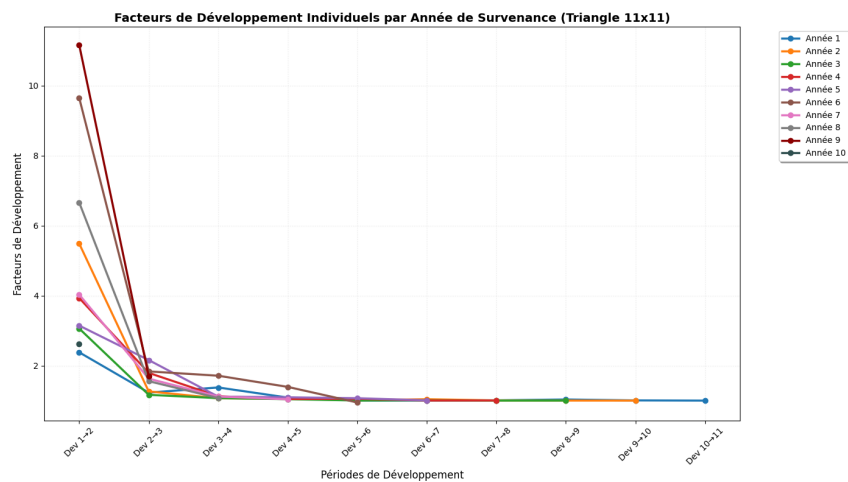


FIGURE 5.2.7 – Evolution des facteurs individuels pour l’Incendie

Statistique	Valeur
Volatilité de risque de réserve	24.89 %

TABLE 5.2.1 – Volatilité de risque réserve de la catégorie Incendie

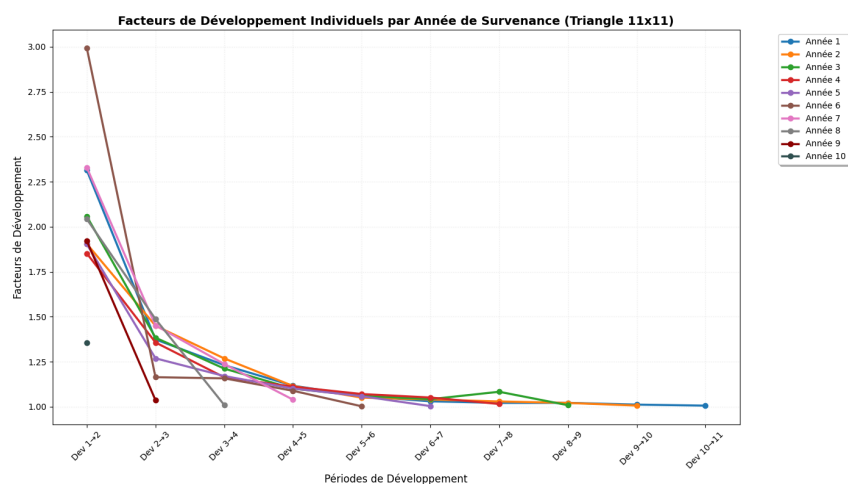


FIGURE 5.2.8 – Evolution des facteurs individuels pour Auto AT RC

Statistique	Valeur
Volatilité de risque de réserve	11.58 %

TABLE 5.2.2 – Volatilité de risque de réserve de la catégorie Auto AT RC

Les volatilités estimées par la méthode de Merz pour les deux segments d'activité ("Incendie" et "Auto AT RC") sont des indicateurs importants qui permettent de mieux comprendre l'incertitude liée aux risques de réserves dans chaque segment.

Segment "Incendie"

La volatilité estimée pour le segment "Incendie" est de 18,07%. Cela signifie que les réserves nécessaires pour couvrir les risques liés aux incendies sont soumises à une plus grande incertitude. Cette volatilité élevée peut être expliquée par la nature des risques associés aux incendies, qui peuvent être influencés par des facteurs externes difficiles à prédire, comme des catastrophes naturelles ou des conditions climatiques extrêmes. Par conséquent, le gestionnaire des réserves pour ce segment devra mettre en place des stratégies de provisionnement plus importantes pour tenir compte de ces fluctuations.

Segment "Auto AT RC"

Le segment "Auto AT RC" présente une volatilité plus faible, estimée à 11,76%. Cela suggère que les risques associés aux accidents de voiture et à la responsabilité civile sont relativement plus stables et mieux maîtrisés. La volatilité plus faible indique que les fluctuations imprévues sont moins fréquentes ou moins extrêmes, permettant une gestion des réserves plus prévisible et, peut-être, plus maîtrisée.

L'analyse de ces deux volatilités met en évidence des différences fondamentales entre les segments. Le segment "Incendie" nécessite un niveau de provisionnement plus important, car il est soumis à une plus grande incertitude. En revanche, le segment "Auto AT RC" semble être plus stable, ce qui permet une gestion des réserves plus prévisible et moins coûteuse.

Les stratégies de gestion du risque de réserves devront être ajustées en fonction de ces différences. Pour le segment "Incendie", un niveau de couverture plus élevé devra être envisagé, et les provisions devront être ajustées régulièrement pour s'adapter aux changements potentiels du risque. Pour le segment "Auto AT RC", une gestion plus conservatrice, mais moins dynamique, pourrait suffire, étant donné la volatilité plus faible.

5.3 Méthode de Bootstrap à un an

Principe général :

Le *bootstrap* est une théorie assez récente. La méthode consiste à fabriquer de l'information à partir de rien. Elle permet de fournir des réponses là où d'autres méthodes ne sont pas applicables (manque d'informations, calculs impossibles, etc.). Elle se base sur le principe du **ré-échantillonnage**.

Soit $X = (X_1, \dots, X_n)$ un échantillon initial de variables aléatoires réelles indépendantes et identiquement distribuées. On note θ la variable aléatoire dont on veut déterminer un intervalle de confiance, et $\hat{\theta} = f(X_1, \dots, X_n)$ l'estimation de θ à partir de l'échantillon initial.

À partir de cet échantillon initial, on construit un *échantillon bootstrap*. On effectue un tirage au sort **avec remise** de n éléments parmi les n variables de l'échantillon initial, où chaque réalisation a la même probabilité de tirage, qui est donc $\frac{1}{n}$. Cet échantillon bootstrap généré est noté :

$$X^* = (X_1^*, \dots, X_n^*)$$

On peut alors estimer une nouvelle fois θ , mais cette fois à partir de l'échantillon bootstrap :

$$\hat{\theta}^* = f(X_1^*, \dots, X_n^*)$$

On renouvelle cette procédure B fois afin d'obtenir B échantillons bootstrap,

$$X^{*(k)} = (X_1^{*(k)}, \dots, X_n^{*(k)}) \quad \text{pour } k \in \{1, \dots, B\}$$

à partir desquels on estime B fois la variable θ :

$$\hat{\theta}^{*(k)} = f(X_1^{*(k)}, \dots, X_n^{*(k)}) \quad \text{pour } k \in \{1, \dots, B\}$$

À partir de ces B observations, pour B suffisamment grand, on est en mesure d'estimer la distribution empirique suivie par la variable aléatoire θ , ainsi que sa moyenne empirique et son écart-type empirique.

Moyenne empirique :

$$\bar{\theta}^* = \frac{1}{B} \sum_{k=1}^B \hat{\theta}^{*(k)}$$

Écart-type empirique :

$$\sigma_{\theta}^* = \sqrt{\frac{1}{B-1} \sum_{k=1}^B \left(\hat{\theta}^{*(k)} - \bar{\theta}^* \right)^2}$$

Si la distribution empirique peut être approximée grâce à une loi connue, on peut fournir un **intervalle de confiance** pour la variable θ à un certain niveau de confiance $1 - \alpha$.

Bootstrap récursif de Mack :

La méthode bootstrap présentée dans cette section fournit une distribution empirique du CDR dont la variance réplique l'erreur de prédiction de Wüthrich et al. (2008). En particulier, cette méthode permet d'inclure un facteur de queue simulé dans chaque itération bootstrap. Cette méthodologie bootstrap d'un an est motivée par la nécessité de répliquer les résultats analytiques de Wüthrich et al. (2008) utilisés par le CEIOPS pour la calibration du risque de réserve et proposés à ce jour comme une méthode possible pour la calibration « spécifique à l'entreprise ». En effet, la méthodologie bootstrap proposée dans cette section réplique les expressions en forme fermée existantes, tout en surmontant les limites d'une telle approche. En fait, il n'est pas possible de dériver une distribution empirique complète à partir de la mesure des deux premiers moments proposée par Wüthrich et al. (2008) ou de diviser la distribution du CDR en paiements d'un an et en calcul de la meilleure estimation en un an sans hypothèse supplémentaire.

L'application de ce *Bootstrap* repose sur les hypothèses du modèle de Mack ; les facteurs de développement seront donc estimés par la méthode de *Chain-Ladder*.

Considérons l'échantillon $x = (x_1, \dots, x_n)$ où chaque x_i représente une réalisation de la variable aléatoire X . La technique du *Bootstrap* exige que les x_i soient indépendants et identiquement distribués (i.i.d).

Or, si les x_i représentent des montants de charges, ils seront dépendants les uns des autres au cours des années de développement pour chaque année de survenance. Ils ne seront donc pas indépendants et identiquement distribués.

Ainsi, pour les modèles récursifs, il est d'usage d'utiliser les résidus des facteurs de développement individuels (définis ci-dessous) comme variable d'étude. Ce sont ces résidus qui seront ré-échantillonnés afin de simuler de multiples scénarios.

Dans cet algorithme, la variable X représentera une variable simulée. Considérons un triangle de liquidation quelconque auquel les étapes suivantes sont appliquées :

Étape 1 :

1. Estimation des facteurs de développement individuels \hat{f}_j pour $0 \leq j \leq I - 1$ et $\hat{\sigma}_j$ pour $0 \leq j \leq I - 1$ sur le triangle original des paiements cumulatifs $(C_{i,j})_{0 \leq i+j \leq I-1}$.
2. Calcul de la meilleure estimation BEI au temps I par :

$$BE_I = \sum_{i=0}^I \left(\hat{C}_{i,\text{ult}} - C_{i,I-i} \right),$$

avec

$$\forall i \in \{1, \dots, I\}, \hat{C}_{i,\text{ult}} = \left(\prod_{j=I-i}^{I-1} \hat{f}_j \right) C_{i,I-i}.$$

3. Calcul des résidus des facteurs de développement individuels par :

$$\forall i, j : 0 \leq i + j \leq I - 1, r_{i,j} = \frac{\sqrt{C_{i,j}(f_{i,j} - \hat{f}_j)}}{\hat{\sigma}_j}.$$

Les résidus sont ensuite ajustés par

$$\forall i, j : 0 \leq i + j \leq I - 1, r_{i,j}^A = \sqrt{\frac{I - j}{I - j - 1}} \frac{\sqrt{C_{i,j}(f_{i,j} - \hat{f}_j)}}{\hat{\sigma}_j}.$$

Enfin, ces résidus sont centrés. L'ajustement par le facteur $\sqrt{\frac{I-j}{I-j-1}}$ permet de corriger le biais lié au calcul de la variance bootstrap, afin de faire correspondre l'expression analytique de la variance et la dispersion de la distribution simulée. Le Bootstrap suppose que les résidus sont i.i.d.

Ensuite, la méthode consiste à répéter nb fois les étapes suivantes :

Itération b

Étape 2 :

- Resampling avec remplacement des résidus dans le triangle supérieur et obtention d'un triangle supérieur de pseudo-facteurs de développement observés au temps I :

$$\forall i, j : 0 \leq i + j \leq I - 1, f_{i,j}^{b,I} = r_{i,j}^{b,I} \sqrt{\frac{\hat{\sigma}_j^2}{C_{i,j}}} + \hat{f}_j.$$

Étape 3 :

- Ré-estimation des facteurs Chain Ladder observés au temps I par

$$\forall j \in \{0, \dots, I - 1\}, \hat{f}_j^{b,I} = \frac{\sum_{i=0}^{I-j-1} C_{i,j} f_{i,j}^{b,I}}{\sum_{i=0}^{I-j-1} C_{i,j}}.$$

Cela équivaut à calculer les facteurs Chain Ladder par la moyenne pondérée des facteurs de développement individuels, avec des poids égaux aux paiements cumulatifs du triangle original.

Étape 4 :

- Simulation des paiements sur un an afin de prendre en compte l'erreur de processus. Pour tout $i \in \{1, \dots, I\}$, calcul de $C_{i,I+1-i}^b$ en simulant une distribution log-normale avec une moyenne $C_{i,I-i} f_{I-i}^{b,I}$ et une variance $C_{i,I-i} (\sigma_{I-i}^I)^2$. On en déduit les paiements futurs pour l'exercice comptable suivant $(I, I + 1)$ par

$$P_{I+1}^b = \sum_{i=1}^I (C_{i,I+1-i}^b - C_{i,I-i}).$$

Étape 5 :

- Calcul de nouveaux facteurs de développement individuels $(f_{b,I+1,i,j})_{0 \leq i+j \leq I-1}$ sur la sous-diagonale simulée, et calcul de nouveaux facteurs Chain Ladder en fin d'année $(I, I + 1)$. Ces nouveaux facteurs Chain Ladder sont estimés par les paiements cumulatifs du triangle (information D_I) et les nouveaux facteurs de développement individuels de la manière suivante :

$$\forall j \in \{0, \dots, I - 1\}, \hat{f}_j^{b,I+1} = \frac{\sum_{i=0}^{I-j-1} C_{i,j} f_{i,j}^{b,I+1} + C_{I-j,j} f_{I-j,j}^{b,I+1}}{\sum_{i=0}^{I-j} C_{i,j}}.$$

Étape 6 :

- Calcul de la meilleure estimation BE_{I+1}^b , observée au temps $I + 1$, à partir de la sous-diagonale simulée $(C_{i,I+1-i}^b)_{1 \leq i \leq I}$, les pseudo-facteurs $(\hat{f}_j^{b,I+1})_{1 \leq j \leq I-1}$:

$$BE_{I+1}^b = \sum_{i=0}^I (\hat{C}_{i,\text{ult}} - C_{i,I+1-i}^b),$$

avec

$$\forall i \in \{2, \dots, I\}, C_{i,\text{ult}}^b = \left(\prod_{j=I-i+1}^{I-1} \hat{f}_j^{b,I+1} \right) C_{i,I-i+1}.$$

Étape 7 :

- Calcul du CDR de l'itération Nb :

$$CDR^b = BE_I - P_{I+1}^b - BE_{I+1}^b.$$

Fin Itération b

Les étapes 3 à 7 sont alors répétées un grand nombre de fois afin d'obtenir une distribution empirique des provisions et des CDR. La MSEP (Mean Square Error of Prediction) correspond à la variance empirique des CDR obtenus.

La procédure Bootstrap consiste à simuler la diagonale en $I + 1$ à partir d'une distribution calibrée par la méthode des moments. Le choix de cette distribution peut être justifié par des études statistiques, bien que celui-ci relève généralement d'un *a priori* intégrant un degré de prudence (la loi log-normale est souvent préférée à la loi normale).

Dans le cadre de ce mémoire, nous avons retenu l'hypothèse d'une loi normale. Nous n'étudierons pas cette hypothèse plus en détail, bien que celle-ci puisse avoir un impact sur la distribution des CDR.

Ce procédé permet de disposer d'une distribution empirique de la charge ultime et des CDR associés, et, *a fortiori*, de déterminer une mesure du risque de réserve à un an en utilisant la *Value at Risk* (VaR). À l'instar des modèles précédents, cette technique repose sur le modèle de *Chain-Ladder*.

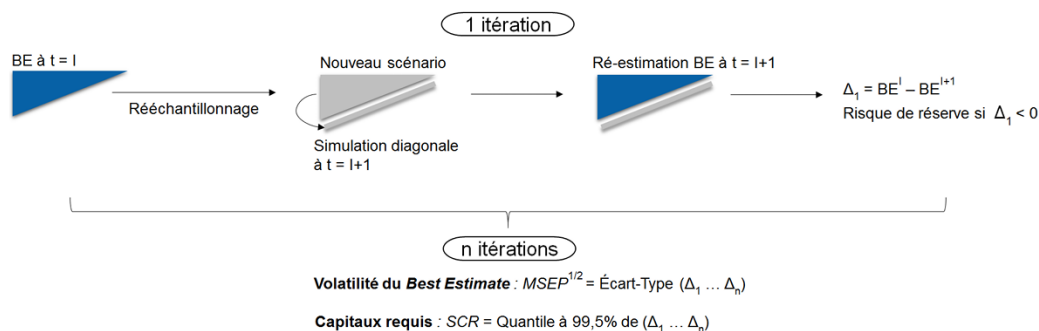


FIGURE 5.3.1 – Schéma simplifié d'un bootstrap

Application de la méthode Bootstrap

Pour cette méthode, nous utiliserons à nouveau les mêmes triangles que précédemment et lancerons la simulation pour chaque triangle sur 50 000 itérations afin de mieux converger les résultats. La méthode Bootstrap a été utilisée pour recalibrer les paramètres et vérifier la fiabilité des résultats obtenus par la méthode Merz-Wüthrich.

Commentaire Le graphique montre que les CDR pour le risque d'incendie sont centrés

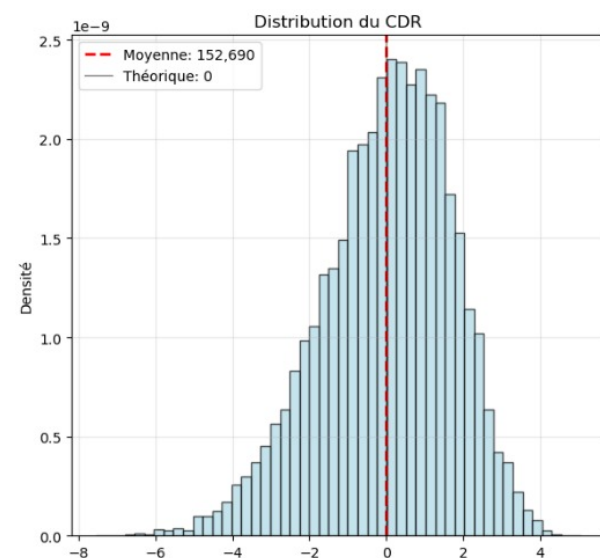


FIGURE 5.3.2 – La distribution du CDR pour le segment d'activité Incendie

autour d'une valeur élevée et que la variabilité est significative, ce qui rend important le calcul de la volatilité et de l'incertitude des réserves à travers la méthode bootstrap.

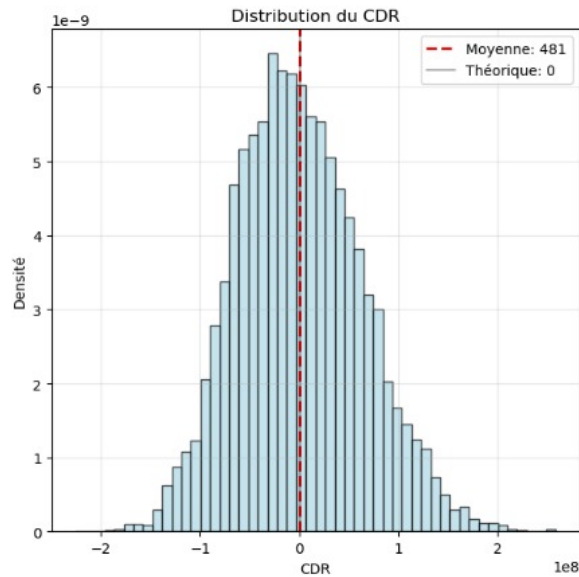


FIGURE 5.3.3 – La distribution du CDR pour le segment d’activité Auto AT RC

Les volatilités estimées pour le risque de réserves pour les deux segments d’activité :

Catégorie	Volatilité de risque de réserve estimée
Incendie	18,07%
Auto AT RC	11,76%

TABLE 5.3.1 – Volatilités de risque de réserve estimées par la méthode bootstrap

Les volatilités estimées pour le risque de réserves pour les deux segments d’activité, à savoir “Incendie” et “Auto AT RC”, ont été calculées à l’aide de la méthode bootstrap. Le segment “Incendie” présente une volatilité estimée de 18,07%, tandis que le segment “Auto AT RC” affiche une volatilité plus faible de 11,76%.

Ces résultats indiquent que le segment “Incendie” est le plus volatile des deux. Cette volatilité plus élevée pourrait être attribuée à la nature plus incertaine des événements liés aux incendies, qui sont souvent influencés par des facteurs externes et difficiles à prédire, tels que les conditions climatiques extrêmes ou les catastrophes naturelles. En comparaison, le segment “Auto AT RC” montre une volatilité relativement plus faible, suggérant que les risques associés à ce segment sont mieux maîtrisés ou moins sensibles aux fluctuations imprévues.

L’analyse des volatilités met en évidence l’importance de prendre en compte ces différences pour la gestion du risque de réserves, notamment en ajustant les stratégies de provisionnement pour le segment “Incendie”, qui nécessite une plus grande capacité de couverture face aux incertitudes plus marquées.

Conclusion générale

Ce projet a pour objectif de proposer une analyse approfondie du calibrage du facteur d'atténuation appliqué au sous-risque de primes par la rétrocession non proportionnelle, dans le cadre du projet SBR et de son pilier 1. À travers l'examen des pratiques de l'ACAPS, nous avons étudié l'impact de la rétrocession non proportionnelle et proportionnelle sur la gestion des risques et la solvabilité des entreprises d'assurances, en particulier sur la volatilité des primes dans le portefeuille non vie d'Atlantic Re.

Au fur et à mesure de notre analyse, nous avons pu démontrer que l'application du facteur d'atténuation lié à la rétrocession permet, dans certains cas, de réduire de manière tangible la volatilité des primes. La capacité des entreprises à quantifier cette réduction de volatilité, en s'appuyant sur des données brutes et nettes de réassurance, représente un levier important pour une gestion plus précise du risque et une évaluation plus fine de la solvabilité.

Dans ce contexte, la rétrocession se révèle être un outil essentiel qui permet non seulement d'atténuer l'impact des sinistres lourds mais également de respecter les exigences réglementaires de solvabilité imposées par l'ACAPS. La possibilité d'appliquer un facteur d'atténuation pouvant atteindre 20%, sous réserve de démonstration d'un effet tangible, constitue une avancée significative dans l'optimisation de la gestion des risques en réassurance.

La démarche méthodologique adoptée repose sur le choix d'une maille pertinente conforme au référentiel SBR, et la construction d'un historique structuré des données de sinistres (S) et de primes (P), ainsi que l'application de deux méthodes statistiques d'estimation de la volatilité : le maximum de vraisemblance et les moindres carrés. Un historique de 20 années a été utilisé pour garantir la robustesse des estimations.

Les résultats montrent que la réassurance non proportionnelle d'Atlantic RE n'a pas un effet significatif de réduction de la volatilité, principalement en raison de volumes limités. En revanche, la réassurance proportionnelle, et en particulier la part importante de traités par rapport à la facultative, contribue à une atténuation marquée de la volatilité nette.

Toutefois, cette réduction est principalement attribuable à la rétrocession proportionnelle. Elle ne peut donc, à ce stade, justifier l'octroi d'une autorisation réglementaire d'utilisation d'un facteur d'atténuation. Néanmoins, les écarts-types nets calibrés dans cette étude offrent à Atlantic RE une base pertinente pour affiner son évaluation interne des risques et renforcer son pilotage actuariel.

Ainsi, et toujours dans le cadre de la quantification des risques, l'analyse a été étendue au risque de réserve, en adoptant une méthodologie spécifique basée sur les triangles de développement. L'étude s'est concentrée sur deux branches à développement long : Incendie et Auto AT RC, reconnues pour leur forte incertitude dans la constitution des provisions. Deux approches ont été retenues pour l'estimation de la volatilité des engagements futurs : la méthode de Merz & Wüthrich, permettant une modélisation analytique du risque de réserve sous hypothèses stochastiques, et la méthode bootstrap, utilisée comme référence standard pour produire des distributions empiriques à partir des triangles historiques.

Dans la continuité de l'analyse menée sur le risque de primes, une perspective intéressante consiste à étudier l'effet atténuant de la réassurance sur le risque de réserve, en tenant compte des modalités contractuelles des couvertures en place. Une telle évaluation permettrait d'objectiver l'impact de la rétrocession sur la volatilité des provisions techniques, et pourrait à terme justifier une demande d'autorisation auprès de l'ACAPS pour intégrer un facteur d'atténuation spécifique au risque de réserve dans le cadre du calcul de capital réglementaire.

Bibliographie

- [1] ACAPS (2022), Document de calibrage, *solvabilité basée sur les risques*.
- [2] ACAPS (2022), Présentation du dispositif SBR, *Calibration et mesures transitoires*.
- [3] M.BOUAYAD ,M. CHERIF (2021), Modélisation de la formule standard Solvabilité II pour challenger les résultats SBR, Mémoire PFE, INSEA.
- [4] Société Centrale de Réassurance, Société Centrale de Réassurance Website.
- [5] CEIOPS (2010), Solvency II Calibration Paper.
- [6] Guillaume BARRUEL - Nathalie BOUGNON (2016), Pilotage du risque de souscription non vie sous Solvabilité II, Mémoire de l'institut des actuaires, CEA.
- [7] Simon CARNOT, « Actuary-in-the-box » : Modélisation et inclusion du jugement d'expert dans le risque de réserve à 1 an, Mémoire de l'institut des actuaires, Université Paris Dauphine.
- [8] GBONGUE, Florent, PLANCHET, Frédéric. Analyse comparative des modèles de construction d'une courbe des taux sans risque dans la zone CIPRES. Université de Lyon- Université Claude Bernard Lyon 1 / ISFA.
- [9] Selma JAZIRI, Méthodes de provisionnement non-vie et risque de réserve à un an, Mémoire de l'institut des actuaires, ISFA.
- [10] TRAORÉ Abdoulaye, Méthodes d'évaluation du risque de « Reserves » sous Solvabilité II, Mémoire de l'institut des actuaires, ISUP.
- [11] Alexandre Boumezoued, Yoboua Angoua, Laurent Devineau, Laurent Devineau, One-year reserve risk including a tail factor : closed formula and bootstrap approaches, Milliman Research, Milliman Paris, Paris, France, 2023.
- [12] Wüthrich M. V., Bühlmann H. [2009] «The One-Year Runoff Uncertainty for Discounted Claims Reserves», ETH Zurich, Department of Mathematics.

Annexes

Sous-catégorie	Code sous-catégorie	Coefficient de choc
Individuelles accidents	2110	9,5%
Invalidité	2120	5,5%
Maladie – maternité	2130	8,0%
Personnes transportées en automobile	2140	9,5%
Accidents du travail et maladies professionnelles	2200	11,5%
Véhicules à usage de tourisme	2311	7,0%
Véhicules à usage utilitaires de moins de 3,5 tonnes	2312	7,0%
Véhicules à usage utilitaires de 3,5 tonnes et plus	2313	7,0%
Véhicules affectés au transport public de voyageurs	2314	17,0%
Véhicules à deux ou trois roues	2315	7,0%
Autres véhicules	2318	7,0%
Garanties autres que la responsabilité civile	2320	9,0%
Responsabilité civile générale	24	16,5%
Incendie et éléments naturels	25	22,0%
Assurances des risques techniques	26	22,0%
Maritime corps	2710	17,0%
Maritimes facultés	2720	17,0%
Marchandises transportées par voie terrestre	2730	17,0%
Aviation corps	2740	17,0%
Vol	2810	19,0%
Grêle ou gelée	2820	25,0%
Mortalité du bétail	2830	25,0%
Assurance récolte	2840	25,0%
Protection juridique	2850	19,0%
Assurances pour pertes pécuniaires	2860	19,0%
Autres	2880	19,0%
GCEC	20	0,0%
Crédit	2920	25,0%
Caution	2930	25,0%
Opérations d'acceptations en réassurance - Acceptations non-vie	3200	20,0%

TABLE 5.3.2 – Écart-type de primes relatif à chaque sous-catégorie SBR

Annexe 3 : Vérification des hypothèses de la méthode de maximum vraisemblance pour les catégories restants

Véhicules à usage de tourisme :

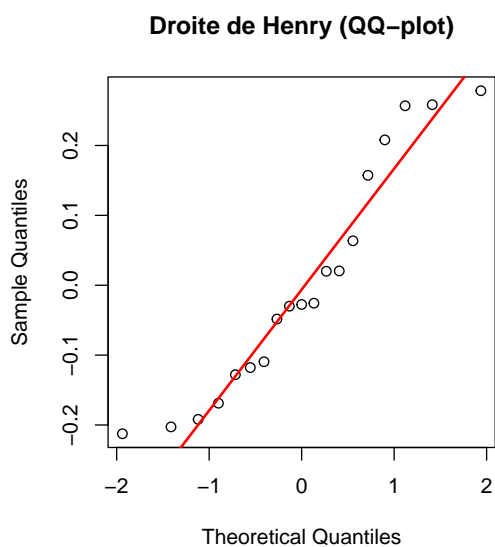
```
Call:
lm(formula = charge ~ prime, data = data)

Residuals:
    Min       1Q   Median       3Q      Max
-9884533 -4304845 -128783  4977033  8549804

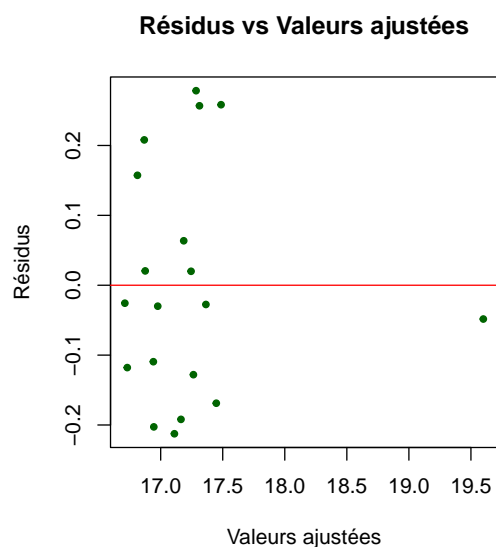
Coefficients:
            Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept) -3.641e+06  4.657e+06  -0.782    0.444
prime        9.231e-01  1.332e-01   6.931 1.77e-06 ***
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 5436000 on 18 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.7274,    Adjusted R-squared:  0.7123
F-statistic: 48.04 on 1 and 18 DF,  p-value: 1.773e-06
```

(a) Régression linéaire de la charge ultime sur la prime acquise



(b) QQ-plot des résidus



(c) Homoscédasticité des résidus

shapiro-wilk normality test

```
data: log_charge
w = 0.70506, p-value = 6.391e-05
```

(d) Test de log-normalité de la charge

FIGURE 5.3.4 – Vérification des hypothèses pour la catégorie Véhicules à usage de tourisme

Garanties autres que la responsabilité civile :

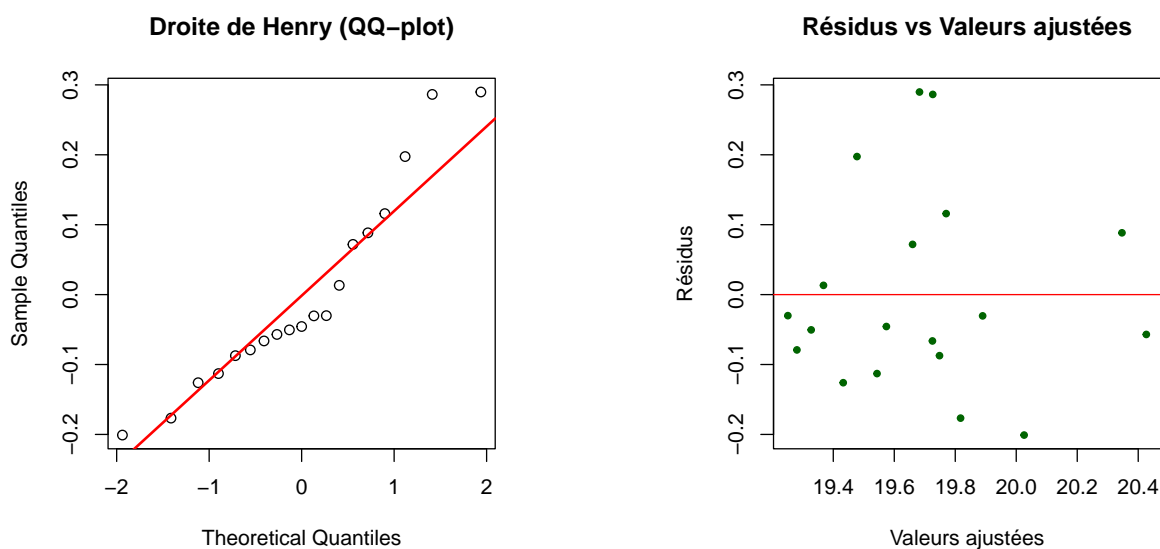
```
Call:
lm(formula = data$charge ~ data$prime, data = data)

Residuals:
    Min       1Q   Median       3Q      Max
-93827373 -34722023 -17671585  31327503 117079151

Coefficients:
            Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept) -3.155e+07  4.350e+07  -0.725    0.478
data$prime   6.902e-01  6.970e-02   9.902 1.79e-08 ***
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 58480000 on 17 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.8522,    Adjusted R-squared:  0.8435
F-statistic: 98.05 on 1 and 17 DF,  p-value: 1.788e-08
```

(a) Régression linéaire de la charge ultime sur la prime acquise (2320)



(b) QQ-plot des résidus (2320)

(c) Homoscédasticité des résidus (2320)

(d) Test de log-normalité de la charge (2320)

FIGURE 5.3.5 – Vérification des hypothèses pour la catégorie Garanties autres que la responsabilité civile

La sous catégorie Responsabilité civile générale :

Les résultats pour la vérification des 3 hypothèses :

```

Call:
lm(formula = charge ~ prime, data = data)

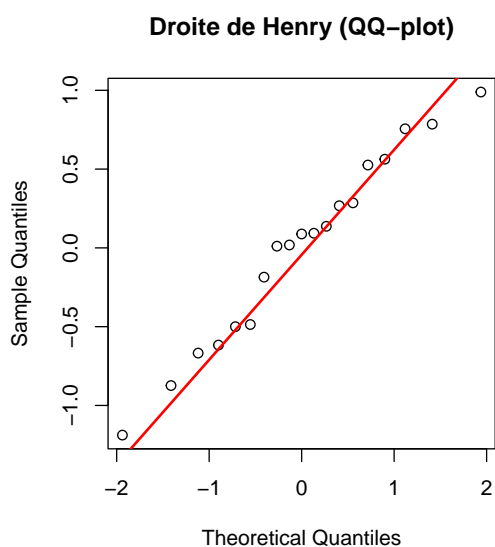
Residuals:
    Min       1Q   Median       3Q      Max
-38030309 -11495845  -5505393  11270941  68405797

Coefficients:
            Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept) -4.510e+06  1.286e+07  -0.351  0.729600
prime         5.474e-01  1.171e-01   4.674  0.000166 ***
---
signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

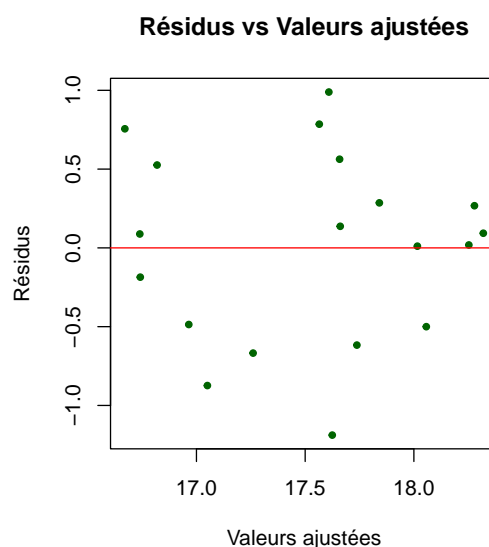
Residual standard error: 26380000 on 19 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.5348,    Adjusted R-squared:  0.5103
F-statistic: 21.84 on 1 and 19 DF,  p-value: 0.0001655

```

(a) Régression linéaire de la charge ultime sur la prime acquise (24)



(b) QQ-plot des résidus (24)



(c) Homoscédasticité des résidus (24)

shapiro-wilk normality test

```

data: log_charge
w = 0.91364, p-value = 0.08637

```

(d) Test de log-normalité de la charge (24)

FIGURE 5.3.6 – Vérification des hypothèses pour la catégorie Responsabilité civile générale

La sous catégorie Incendie :

```

Call:
lm(formula = data$charge ~ data$prime, data = data)

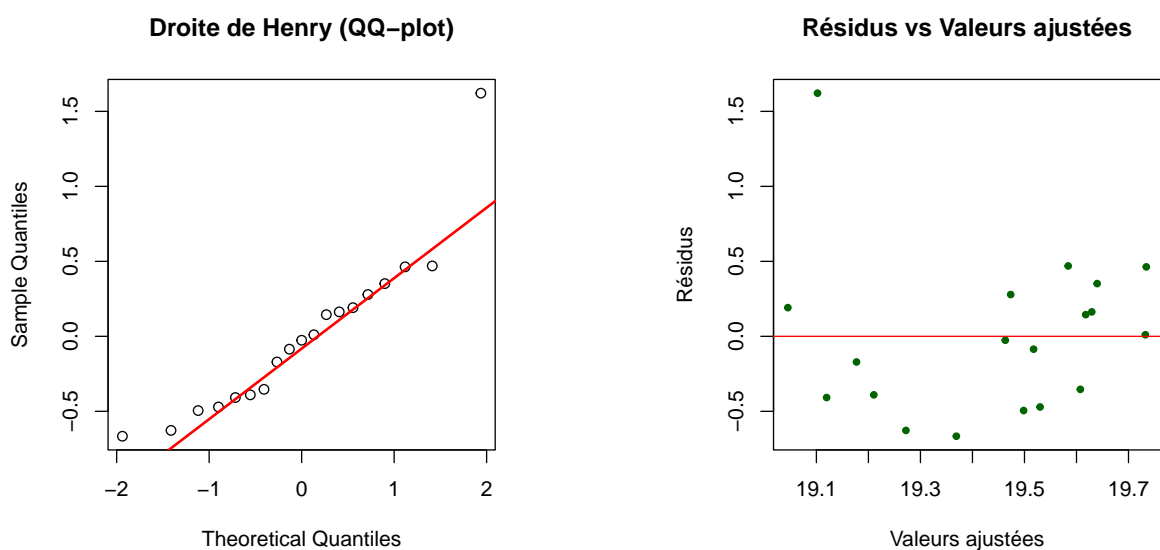
Residuals:
    Min       1Q   Median       3Q      Max
-172457487 -131393668 -48351354  39234706 737082128

Coefficients:
            Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept) 1.859e+08  1.635e+08  1.137   0.271
data$prime  2.570e-01  2.840e-01  0.905   0.378

Residual standard error: 215600000 on 17 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.04597, Adjusted R-squared:  -0.01015
F-statistic: 0.8191 on 1 and 17 DF, p-value: 0.3781

```

(a) Régression linéaire de la charge ultime sur la prime acquise (25)



(b) QQ-plot des résidus (25)

(c) Homoscédasticité des résidus (25)

shapiro-wilk normality test

```

data: log_charge
w = 0.95361, p-value = 0.4541

```

(d) Test de log-normalité de la charge (25)

FIGURE 5.3.7 – Vérification des hypothèses pour la catégorie Incendie

La sous catégorie Assurances des risques techniques :

```

Call:
lm(formula = data$charge ~ data$prime, data = data)

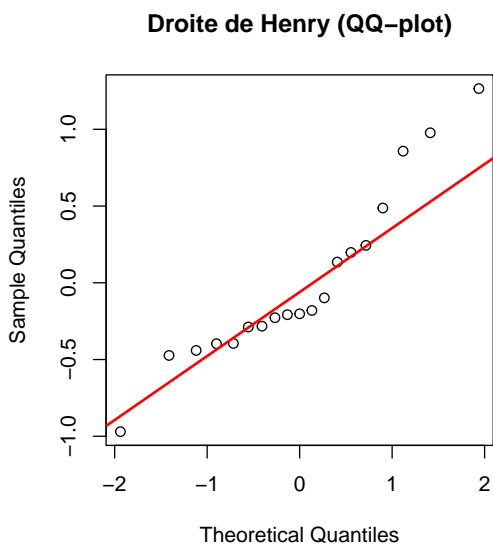
Residuals:
    Min       1Q   Median       3Q      Max
-55603483 -34884710 -21015088  -8572874 154289907

Coefficients:
            Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept) 2.046e+07  2.886e+07   0.709  0.4880
data$prime  3.893e-01  1.700e-01   2.290  0.0351 *
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

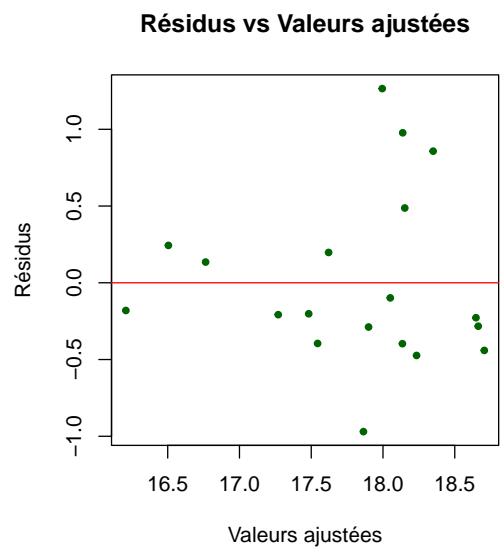
Residual standard error: 62470000 on 17 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.2357,    Adjusted R-squared:  0.1907
F-statistic: 5.242 on 1 and 17 DF,  p-value: 0.03511

```

(a) Régression linéaire de la charge ultime sur la prime acquise (26)



(b) QQ-plot des résidus (26)



(c) Homoscédasticité des résidus (26)

shapiro-wilk normality test

```

data: log_charge
w = 0.96915, p-value = 0.7594

```

(d) Test de log-normalité de la charge (26)

FIGURE 5.3.8 – Vérification des hypothèses pour la catégorie Assurances des risques techniques

La sous catégorie Maritime corps :

```

Call:
lm(formula = data$charge ~ data$prime, data = data)

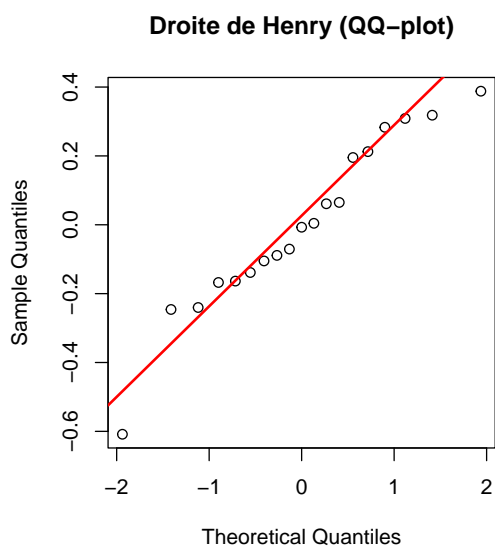
Residuals:
    Min       1Q   Median       3Q      Max
-43536665 -20940363  343236 21107126 68382616

Coefficients:
            Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept) -1.141e+07 1.899e+07  -0.601   0.556
data$prime   6.466e-01  8.902e-02   7.264 1.32e-06 ***
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

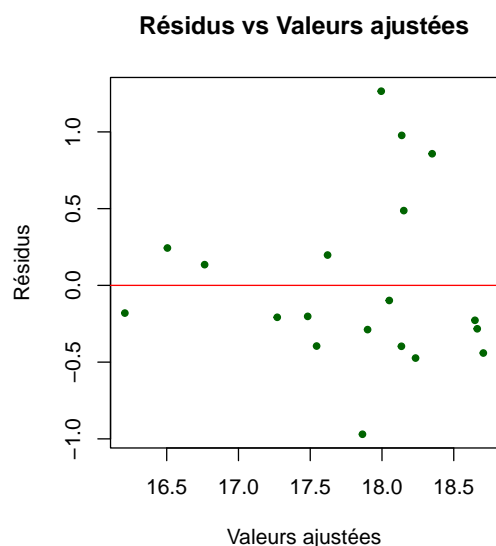
Residual standard error: 28870000 on 17 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.7563,    Adjusted R-squared:  0.742
F-statistic: 52.76 on 1 and 17 DF,  p-value: 1.324e-06

```

(a) Régression linéaire de la charge ultime sur la prime acquise (2710)



(b) QQ-plot des résidus (2710)



(c) Homoscédasticité des résidus (2710)

shapiro-wilk normality test

```

data: log_charge
w = 0.95881, p-value = 0.5492

```

(d) Test de log-normalité de la charge (2710)

FIGURE 5.3.9 – Vérification des hypothèses pour la catégorie Maritime

La sous catégorie Autres :

```

Call:
lm(formula = data$charge ~ data$prime, data = data)

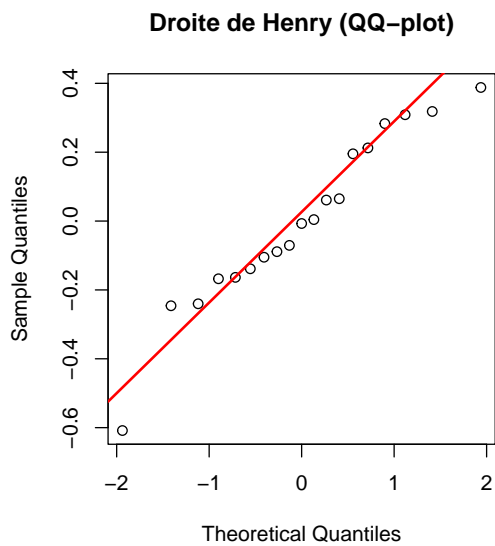
Residuals:
    Min       1Q   Median       3Q      Max
-10879955 -6073308 -645994  2938003 28137458

Coefficients:
            Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept) 2.704e+06  4.196e+06  0.644  0.528
data$prime  5.259e-01  7.486e-02  7.025 2.04e-06 ***
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

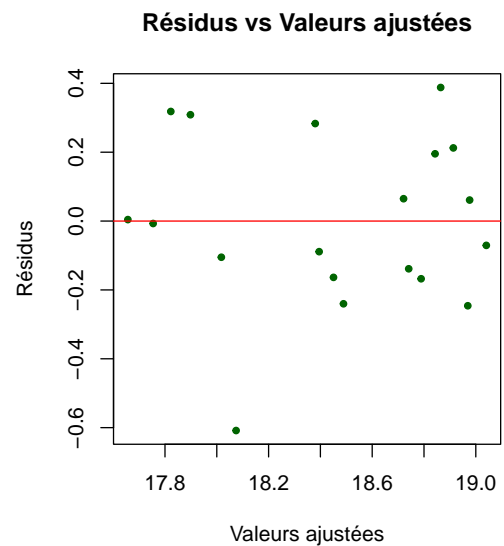
Residual standard error: 8975000 on 17 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.7438,    Adjusted R-squared:  0.7287
F-statistic: 49.35 on 1 and 17 DF,  p-value: 2.043e-06

```

(a) Régression linéaire de la charge ultime sur la prime acquise (2880)



(b) QQ-plot des résidus (2880)



(c) Homoscédasticité des résidus (2880)

```

Shapiro-wilk normality test

data:  log_charge
w = 0.94608, p-value = 0.3382

```

(d) Test de log-normalité de la charge (2880)

FIGURE 5.3.10 – Vérification des hypothèses pour la catégorie Autres

La sous catégorie Crédit :

```

Call:
lm(formula = charge ~ prime, data = data)

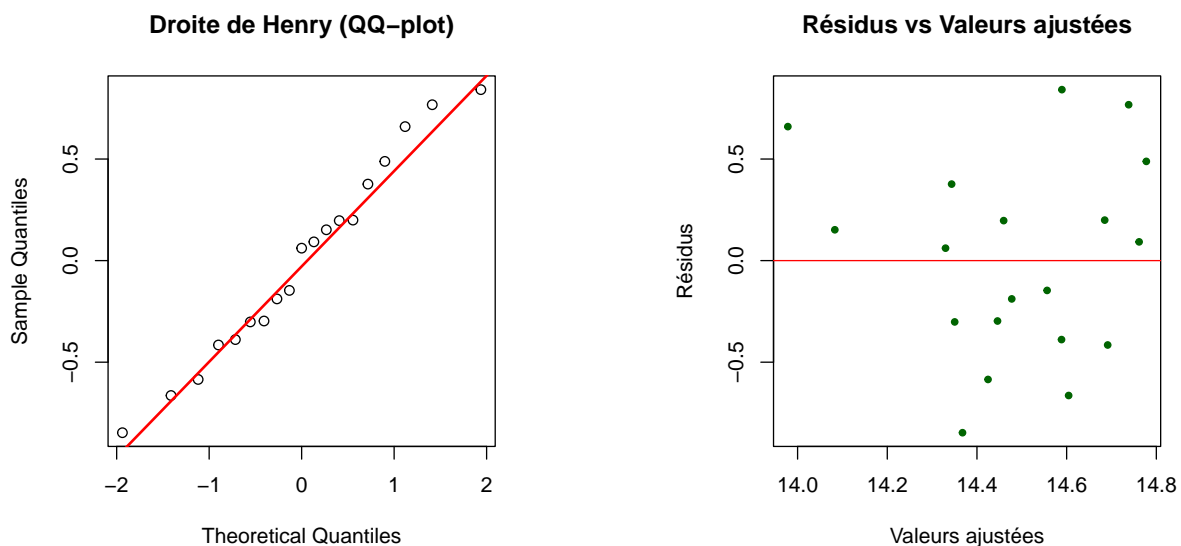
Residuals:
    Min       1Q   Median       3Q      Max
-1422701 -795343 -388175  470281 2540486

Coefficients:
            Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept) 6.223e+04 7.733e+05  0.080  0.93671
prime       4.224e-01 1.466e-01  2.882  0.00954 **
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 1118000 on 19 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.3042,    Adjusted R-squared:  0.2676
F-statistic: 8.308 on 1 and 19 DF,  p-value: 0.009541

```

(a) Régression linéaire de la charge ultime sur la prime acquise (2920)



(b) QQ-plot des résidus (2920)

(c) Homoscédasticité des résidus (2920)

shapiro-wilk normality test

```

data: log_charge
w = 0.9655, p-value = 0.6843

```

(d) Test de log-normalité de la charge (2920)

FIGURE 5.3.11 – Vérification des hypothèses pour la catégorie Crédit

La sous catégorie Grêle ou gelée :

```

Call:
lm(formula = charge ~ prime, data = data)

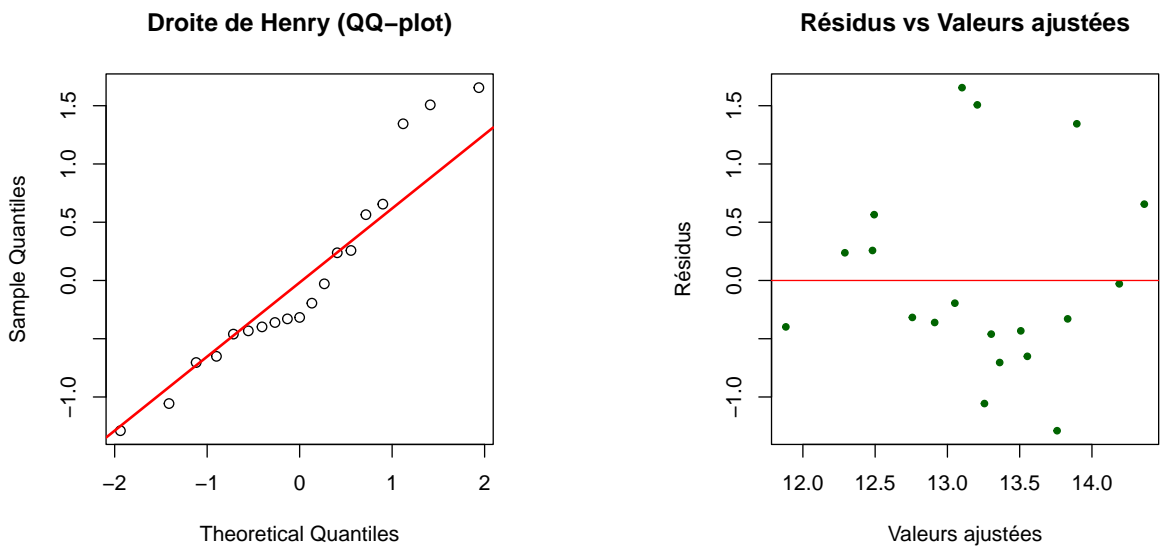
Residuals:
    Min       1Q   Median       3Q      Max
-1224125 -672660 -286766  176331  2461570

Coefficients:
            Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept) -4.500e+05  5.270e+05  -0.854  0.40381
prime        1.275e+00  4.247e-01   3.003  0.00732 **
---
signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 980700 on 19 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.3218,    Adjusted R-squared:  0.2861
F-statistic: 9.017 on 1 and 19 DF,  p-value: 0.007316

```

(a) Régression linéaire de la charge ultime sur la prime acquise (2820)



(b) QQ-plot des résidus (2820)

(c) Homoscédasticité des résidus (2820)

shapiro-wilk normality test

```

data: log_charge
w = 0.89107, p-value = 0.03364

```

(d) Test de log-normalité de la charge (2820)

FIGURE 5.3.12 – Vérification des hypothèses pour la catégorie Grêle ou gelée

La sous catégorie vol :

```

Call:
lm(formula = charge ~ prime, data = data)

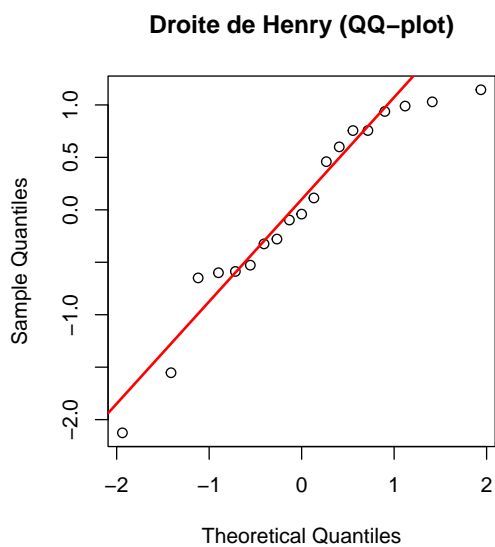
Residuals:
    Min       1Q   Median       3Q      Max
-10037716 -4487257 -2669208  5601322 14025436

Coefficients:
            Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept) 2.254e+06  4.877e+06   0.462   0.649
prime       5.587e-01  3.711e-01   1.505   0.149

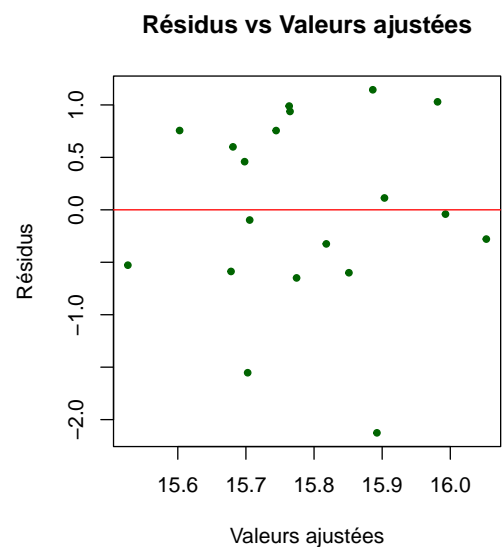
Residual standard error: 7100000 on 19 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.1065,    Adjusted R-squared:  0.05952
F-statistic: 2.266 on 1 and 19 DF,  p-value: 0.1487

```

(a) Régression linéaire de la charge ultime sur la prime acquise (2810)



(b) QQ-plot des résidus (2810)



(c) Homoscédasticité des résidus (2810)

shapiro-wilk normality test

```

data: log_charge
w = 0.95178, p-value = 0.4234

```

(d) Test de log-normalité de la charge (2810)

FIGURE 5.3.13 – Vérification des hypothèses pour la catégorie Vol

La sous catégorie Aviation :

```

Call:
lm(formula = charge ~ prime, data = data)

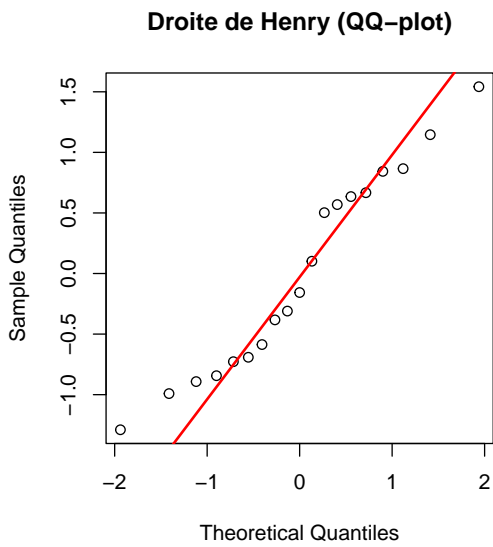
Residuals:
    Min       1Q   Median       3Q      Max
-64755022 -46055508 -23342473  29776402 201981289

Coefficients:
            Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept) 5.764e+07  3.683e+07   1.565   0.134
prime       1.607e-01  2.820e-01   0.570   0.575

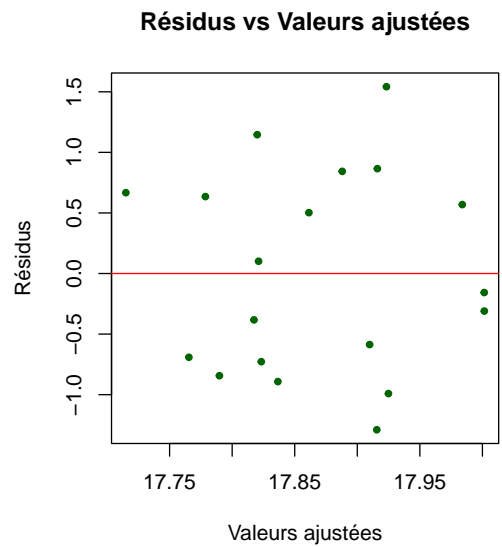
Residual standard error: 67220000 on 19 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.01681, Adjusted R-squared: -0.03494
F-statistic: 0.3248 on 1 and 19 DF, p-value: 0.5754
>

```

(a) Régression linéaire de la charge ultime sur la prime acquise (2740)



(b) QQ-plot des résidus (2740)



(c) Homoscédasticité des résidus (2740)

shapiro-wilk normality test

```

data: log_charge
w = 0.94431, p-value = 0.3148

```

(d) Test de log-normalité de la charge (2740)

FIGURE 5.3.14 – Vérification des hypothèses pour la catégorie Aviation