



المندوبية السامية للتخطيط
HAUT-COMMISSARIAT AU PLAN

ROYAUME DU MAROC
*_*_*_*_*
HAUT COMMISSARIAT AU PLAN
*_*_*_*_*_*_*_*_*_*
INSTITUT NATIONAL
DE STATISTIQUE ET D'ECONOMIE APPLIQUEE



INSEA

Projet de Fin d'Etudes

**Modélisation interne du profil de risque de prime et
réserve de la SCR :
Application à l'allocation de capital**

Préparé par : *M. Abdelhak MANSOUR*
M. Yassine ROUAD

Sous la direction de : *M. Fouad MARRI (INSEA)*
M. Ismail FAHEM (SCR)

Soutenu publiquement comme exigence partielle en vue de l'obtention du

Diplôme d'Ingénieur d'Etat

Filière : Actuariat-Finance

Devant le jury composé de :

- *M. Fouad MARRI (INSEA)*
- *M. Hicham JANATI (INSEA)*
- *M. Ismail FAHEM (SCR)*

Juin 2024 / PFE N° 20

Remerciements

Nous tenons à exprimer notre plus sincère gratitude envers toutes les personnes ayant joué un rôle essentiel dans notre parcours lors de notre stage de PFE, rendant cette période non seulement instructive mais également extrêmement enrichissante. Ces quelques mois ont été l'occasion de transformer la théorie en pratique, fortifiés par un environnement stimulant et bienveillant.

Nos remerciements vont tout particulièrement à l'équipe de la **Société Centrale de Réassurance (SCR)**, dont l'accueil chaleureux nous a profondément touchés. Nous sommes également reconnaissants envers les membres de la Direction de l'organisation pour leur soutien constant et les leçons précieuses qu'ils nous ont imparties tout au long de notre stage. Un remerciement spécial est réservé à nos encadrants, Monsieur **FAHEM Ismail** et Monsieur **HOMMADA Outman**, ainsi qu'à notre encadrant interne, Monsieur **MARRI Fouad**, dont les orientations avisées et l'attention délicate ont été pour nous d'une aide inestimable. Nous souhaitons aussi adresser une mention spéciale à Monsieur **BOUZINAB Faris** et à tous les collègues de **l'équipe ERM**, qui nous ont intégrés dans leur structure avec une grande sollicitude, assurant ainsi une transition fluide et agréable au sein de leur équipe.

Nous vous sommes tous infiniment reconnaissants pour cette expérience marquante et pour toutes les opportunités que vous nous avez offertes.

Merci du fond du cœur.

Dédicace Abdelhak

Je dédie ce travail à ma mère, pilier inébranlable de mon existence, qui, malgré les affres de la maladie, s'apprête à affronter une nouvelle épreuve avec une foi inébranlable en la providence divine, espérant qu'elle trouve en elle la force et la guérison. À mon père, dont le souvenir persistant éclaire encore mes pas, même douze années après son départ. À mes deux sœurs, exemples de résilience, ayant bravé l'adversité pour conquérir leur liberté, et dont je suis immensément fier. À mes trois frères, qui luttent chaque jour pour mener une vie de dignité, la tête haute face aux défis de l'existence. À mon ami de Rabat, complice indéfectible, dont l'amitié et le soutien sont des constances précieuses, et dont la présence restera toujours essentielle. Aux trois amis de France, compagnons de route dans ma quête de sens, dont l'accompagnement est inestimable. À mon ami d'Espagne, toujours présent, fidèle au-delà des frontières. Aux deux amis de l'INSEA, dont l'admiration est réciproque, et que j'attends de revoir avec impatience dans un avenir lointain. À tous ceux qui, par un sourire, ont su alléger mes moments de peine et d'incertitude. Puissions-nous tous trouver la force et la lumière pour continuer nos chemins respectifs.

Abdelhak

Dédicace Yassine

Je dédie ce travail solennellement à :

L'Être Suprême, qui m'a insufflé la force et la clairvoyance tout au long de ce parcours.

Mes parents illustres, pour leurs sacrifices incessants, leur loyauté inébranlable et leur amour sans limites.

*Mes chères sœurs, **Hind et Houda**, en leur souhaitant une vie remplie de bonheur.*

À mes amis fidèles, pour leur soutien indéfectible, les précieux moments partagés et leurs encouragements constants.

*À mon encadrant et à l'équipe dévouée de la **direction ERM**, qui ont façonné ce travail, reflet de quatre mois riche en découvertes et en immersion professionnelle.*

À mes professeurs respectés, pour leur sagesse et leur guidance.

Votre amour et soutien sont des trésors précieux. Ma gratitude est éternelle.

Yassine

Résumé

Dans un secteur crucial comme la réassurance, une gestion des risques précise et efficace est indispensable pour garantir la durabilité et la stabilité des entreprises. La Société Centrale de Réassurance (SCR), un acteur clé de l'industrie, doit constamment relever des défis complexes nécessitant des méthodes innovantes pour rester compétitive. Avec l'implémentation de la directive Solvabilité II, des normes de solvabilité plus rigoureuses ont été instaurées pour augmenter la protection des assurés et la résilience des assureurs face aux crises économiques.

Cette directive offre la possibilité d'utiliser une formule standard ou calibrer des paramètres propres à l'entreprise pour calculer l'Exigence en Capital de Solvabilité. Si la formule standard est populaire pour sa simplicité, elle pourrait ne pas saisir pleinement les risques spécifiques liés à chaque entreprise, en raison de la diversité des portefeuilles, des politiques de souscription et de la gestion des sinistres.

L'adoption des Paramètres Spécifiques à l'Entreprise (USP) permet une calibration plus ajustée des risques selon les données propres à l'entreprise, essentielle pour des secteurs comme celui de l'assurance non-vie, caractérisé par une grande variabilité des sinistres et des primes. Cette approche permet de mieux comprendre les risques spécifiques auxquels SCR est exposée, d'améliorer l'allocation du capital en ciblant avec précision les segments les plus risqués, et de renforcer la gestion des ressources, augmentant ainsi la résilience et la capacité de l'entreprise à gérer les imprévus.

Notre projet vise à appliquer les USP pour affiner l'évaluation des risques de primes et de réserves à la SCR. Cette stratégie devrait optimiser l'utilisation du capital et renforcer la compétitivité à long terme de la SCR, en lui permettant de mieux répondre aux exigences de Solvabilité II tout en offrant une évaluation des risques plus adaptée à sa réalité opérationnelle.

Mots clés : Solvabilité 2, Undertaking Specific Parameters (USP), Solvency Capital Requirement (SCR), Calibrage des risques, Allocation de capital, Risque de prime et de réserve, Bootstrap 1 an, Merz Wuthrich.

Abstract

In a critical sector like reinsurance, precise and efficient risk management is essential to ensure the sustainability and stability of companies. The Société Centrale de Réassurance (SCR), a key player in the industry, must continually face complex challenges requiring innovative methods to stay competitive. With the implementation of the Solvency II directive, stricter solvency standards have been established to enhance the protection of policyholders and the resilience of insurers against economic crises.

This directive allows the use of either a standard formula or undertaking specific parameters to calculate the Solvency Capital Requirement. While the standard formula is popular for its simplicity, it may not fully capture the specific risks associated with each company, due to the diversity of portfolios, underwriting policies, and claims management.

The adoption of Undertaking-Specific Parameters (USP) allows for a more tailored calibration of risks based on a company's own data, which is essential for sectors like non-life insurance, characterized by a high variability in claims and premiums. This approach helps to better understand the specific risks SCR faces, improve capital allocation by precisely targeting the most risky segments, and strengthen resource management, thereby increasing the resilience and capacity of the company to handle unforeseen events.

Our project aims to use the USPs to refine the evaluation of premium and reserve risks at SCR. This strategy should optimize capital utilization and enhance the long-term competitiveness of SCR, allowing it to better meet the requirements of Solvency II while providing a risk assessment more suited to its operational reality.

Keywords : Solvency 2, Undertaking Specific Parameters (USP), Solvency Capital Requirement (SCR), Risk Calibration, Capital Allocation, Premium and Reserve Risk, Bootstrap 1 an, Merz Wuthrich.

Table des matières

Remerciements	2
Dédicace Abdelhak	3
Dédicace Yassine	4
Résumé	5
Abstract	6
Introduction Générale	14
1 Présentation de l'organisme d'accueil	16
1.1 La société Centrale de Réassurance (SCR)	16
1.2 Principaux Indicateurs Financiers	17
1.3 Entreprise Risk Management (ERM)	17
2 Contexte réglementaire de l'étude	18
2.1 Généralités sur la réassurance	18
2.1.1 Types de réassurance	19
2.1.2 Les traités de réassurance	20
2.2 Cadre réglementaire : Solvabilité II	21
2.3 Le bilan en valeur économique	24
2.3.1 Évaluation des actifs	24
2.3.2 Évaluation des passifs	25
2.4 Capital de Solvabilité Requis	26
2.4.1 Le calcul du capital économique	26
2.4.2 Présentation de la formule standard	27
2.4.3 Calcul du SCR de prime et réserve	30
2.5 Analyse de sensibilité du portefeuille	35
2.5.1 Présentation et Diversification du Portefeuille	35
2.5.2 Impact des Variations de Volatilité sur la Solvabilité de l'Activité Non-Vie	36
2.5.3 Impact sur le ratio de solvabilité	38

3 Undertake specific parameters - USP	41
3.1 Calibrage du risque de prime $\sigma_{prem,s}$	44
3.2 Calibrage du risque de réserve $\sigma_{res,s}$	47
3.2.1 Méthode du maximum de vraisemblance	48
3.2.2 Méthode de Merz-Wüthrich :	50
3.2.3 Bootstrap à un an	56
3.3 Application au portefeuille de SCR	59
3.3.1 Résultats du calibrage du choc risque de prime	60
3.3.2 Résultats du calibrage du choc risque de réserve	65
4 Allocation de capital	82
4.1 Définition et objectifs	82
4.2 Mesure de risque	83
4.2.1 Ecart-type et Variance	84
4.2.2 Value-at-Risk (VaR)	85
4.2.3 Tail-Value-at-Risk (TVaR)	86
4.3 Cohérence d'une méthode d'allocation	87
4.3.1 Méthode proportionnelle	88
4.3.2 Méthode marginale	89
4.3.3 Méthode de Shapley	89
4.3.4 Méthode d'Euler	91
4.4 Application des méthodes d'allocation	92
4.4.1 Calcul de la matrice de corrélation	93
4.4.2 Résultats des méthodes	93
Conclusion Générale	99
Annexes	i

Table des figures

2.1	Les trois piliers de la Directive Solvabilité II	22
2.2	Les bilans Solvabilité I et Solvabilité II	24
2.3	Cartographie des risques	28
2.4	Comparaison de $\rho(\sigma)$ et $3 \cdot \sigma$	32
2.5	Répartition du portefeuille de la SCR selon l'activité de 2023	36
2.6	Sensibilité du SCR suivant la variation de CoV Prem Net de chaque segment d'activité	37
2.7	Sensibilité du SCR suivant la variation de CoV Res Net de chaque segment d'activité	38
2.8	Impact d'une Variation de 10% de la Volatilité sur le Ratio de Solvabilité par LOB	39
2.9	Variation du ratio de solvabilité pour différentes variations des coefficients de volatilité	40
3.1	Périmètre d'application des USP	42
3.2	Calcul du Best Estimate pour chaque année	49
3.3	Calcul des prestations incrémentaux	49
3.4	Illustration de la méthode Bootstrap à un an	59
3.5	Résultats des régressions linéaires entre Y_t et X_t	60
3.6	Sortie R des régressions linéaires de Y_t en fonction de X_t	61
3.7	Relation quadratique entre les primes acquises et les pertes	62
3.8	Sortie R du test des relations quadratiques entre Y_t et X_t	62
3.9	Sortie R des résultats du test Shapiro Wilk	63
3.10	Sortie R des regressions lineaires de Y_y en fonction de X_t	65
3.11	Relation quadratique entre X_t et Y_t	66
3.12	Sortie R du test des relations quadratiques entre Y_t et X_t	67
3.13	Sortie R des résultats du test Shapiro-Wilk sur $\log(Y_t)$	67
3.14	Résultat du test d'effet calendaire	70
3.15	Régressions Linéaires pour chaque paire de developpement	71
3.16	Nuage de points des triangles par Lob S2	73
3.17	les volatilités de risque de réserve recalibrés par segment	79
3.18	Variation de ratio de solvabilité après recalibration de chaque paramètre	80
3.19	Variation de ratio de solvabilité après recalibration de tous les paramètres	80

3.20	Volatilité pour la maille la plus fine	81
4.1	Allocation vs agrégation de capital	83
4.2	Matrice de corrélation de la maille étudiée	93

Liste des tableaux

1.1	Principaux Indicateurs Financiers (en milliers USD)	17
2.1	Les coefficients de variation par type de risque et par segment d'activité	34
3.1	Facteur de crédibilité en fonction de la profondeur historique	43
3.2	Facteur de crédibilité en fonction de la profondeur historique pour les autres branches	44
3.3	Résumé des résultats des tests des hypothèses par ligne de business	63
3.4	Calibrage du risque de prime selon la méthode du maximum de vraisemblance	64
3.5	Impact des Sigmas sur le SCR_{NL} et le Ratio de Solvabilité	64
3.6	Variation de SCR_{NL} et du Ratio de Solvabilité	64
3.7	Résumé des résultats des tests des hypothèses par ligne de business	68
3.8	Calibrage du risque de réserve selon la méthode du maximum de vraisemblance	68
3.9	Impact des Sigmas sur le SCR_{NL} et le Ratio de Solvabilité	69
3.10	SCR et Variation du Ratio de Solvabilité	69
3.11	P-values des régressions linéaire entre deux années successives (C_j, C_{j+1})	72
3.12	Calibrage du risque de réserve selon la méthode de Merz Wütrich	73
3.13	Impact des Sigmas sur le SCR_{NL} et le Ratio de Solvabilité	74
3.14	SCR et Variation du Ratio de Solvabilité	74
3.15	Volatilité des segments d'activité par type de réassurance	75
3.16	Volatilité des segments d'activité par nature des affaires et type de réassurance	76
3.17	Calibrage du risque de réserve selon la méthode Bootstrap	76
3.18	Impact des Sigmas sur le SCR_{NL} et le Ratio de Solvabilité avec la méthode Bootstrap	77
3.19	SCR et Variation du Ratio de Solvabilité avec la méthode Bootstrap	77
3.20	Volatilité des segments d'activité par type de réassurance	77
3.21	Volatilité des segments d'activité par nature des affaires et type de réassurance	78
4.1	Résumé des volumes et des chocs de prime et de réserve pour chaque segment	92
4.2	Calcul du $\sigma_{p\&r}$ et du $BSCR_{NL}$ pour chaque segment	94
4.3	Proportions d'allocation proportionnelle par segment	94
4.4	Le BSCR en excluant chaque segment	95
4.5	Proportions d'allocation marginale par segment	95

4.6	Impact Marginal du Segment AE_FAC_PR_REINS_FIRE_OTH sur différents sous-ensembles	96
4.7	Proportions d'allocation de Shapley par segment	97
4.8	Proportion d'allocation d'Euler par segment	97
4.9	Comparaison des allocations des méthodes pour chaque segment	98
4.10	Types de réassurance et leurs codes correspondants	i
4.11	Le facteur de diversification géographique relatif à chaque segment d'activité . .	iv
4.12	Matrice de corrélation entre Lob S2	v

Liste des abréviations

AE	Affaire Étrangère
AM	Affaire Marocaine
BE	Best Estimate
CDR	Claims Development Result
EIOPA	Autorité Européenne des Assurances et des Pensions Professionnelles
FAC	Facultatif
FS	Formule Standard
LOB	Line of Business
MSEP	Mean Squared Error of Prediction
NL	Non Life
P&R	Prime et Réserve
PSAP	Provision pour Sinistres à Payer
RM	Risk Margin
S2	Solvabilité 2
SCR	Solvency Capital Requirement
USP	Undertaking Specific Parameters

Introduction Générale

La Société Centrale de Réassurance est un acteur clé sur le marché de la réassurance, s'efforçant d'innover continuellement pour rester compétitive. Cette dynamique d'innovation permet à la société de renforcer sa position sur le marché local tout en explorant de nouvelles opportunités sur les marchés africains, européens et asiatiques. La conformité aux exigences de solvabilité de la directive européenne Solvabilité II est essentielle pour garantir la fiabilité et la pérennité de l'entreprise.

La directive Solvabilité II offre aux entreprises la possibilité de choisir entre une formule standard ou appliquer les USP pour calculer l'Exigence de Capital de Solvabilité. Cette flexibilité permet aux entreprises de mieux représenter leurs profils de risque uniques. En adoptant des Paramètres Spécifiques à l'Entreprise (USP), la SCR peut équilibrer la simplicité de la formule standard avec la complexité des modèles internes, optimisant ainsi ses évaluations des risques.

Dans le cadre de notre étude, nous nous concentrons particulièrement sur le risque de souscription non-vie, en particulier les risques de primes et de réserves. La mise en place de l'approche USP est au cœur de notre projet, permettant une évaluation plus fine et plus précise des risques de primes et de réserves. Cette démarche vise à améliorer la compréhension des différents segments de l'activité de la SCR et à optimiser l'allocation de capital en conséquence. Une fois le SCR global calculé, nous procéderons à une allocation de ce capital sur une nouvelle maille de calcul, distinguant clairement les contrats traités et facultatifs des simples segments d'activités.

Pour mieux contextualiser notre étude, nous commencerons par une présentation détaillée de la réassurance, de ses types et de ses traités, afin de fournir un cadre clair et compréhensible. Ensuite, nous réaliserons une étude de sensibilité en utilisant la formule standard de calcul du SCR, telle que définie par la directive Solvabilité II, pour détecter les segments d'activité les plus sensibles aux risques de primes et de réserves. Cette analyse se focalisera sur le secteur non-vie, principal secteur d'activité de la SCR.

Par la suite, nous calibrerons les volatilités de prime et de réserve pour les segments les plus sensibles, en utilisant des méthodes spécifiques pour chaque type de risque. Pour le risque de prime, nous utiliserons une méthode de calibrage basée sur le maximum de vraisemblance. Pour le risque de réserve, nous appliquerons trois méthodes différentes : la méthode de maximum

de vraisemblance, la méthode Merz-Wüthrich, et la méthode de Bootstrap à un an. Nous analyserons la variation du ratio de solvabilité après calibration, segment par segment et pour l'ensemble des segments.

Ensuite, nous étendrons cette calibration à une maille plus fine, incluant le type de réassurance (facultative ou obligatoire) et la nature des affaires (étrangères ou marocaines). Nous calculerons également les corrélations entre les segments de cette nouvelle maille fine, dans le but d'allouer le capital de manière précise et optimisée, en utilisant quatre méthodes d'allocation : la méthode proportionnelle, la méthode marginale, la méthode de Shapley et la méthode d'Euler.

En résumé, notre projet vise à adopter progressivement les USP au sein de la SCR pour une évaluation précise des risques de primes et de réserves, tout en optimisant l'allocation de capital.

Chapitre 1

Présentation de l'organisme d'accueil

Ce premier chapitre détaille l'environnement dans lequel cette étude a été réalisée, en présentant la Société Centrale de Réassurance (SCR). Une compréhension de l'organisme d'accueil et de ses indicateurs financiers établit la fondation de l'analyse rigoureuse qui suivra dans les chapitres suivants.

1.1 La société Centrale de Réassurance (SCR)



La Société Centrale de Réassurance (SCR) a été fondée en 1960 par une convention entre l'État et la Caisse de Dépôt et de Gestion, le premier groupe financier qui détient plus de 94% du capital. La SCR propose une gamme variée de produits de réassurance dans les branches d'assurance vie et non-vie pour les compagnies d'assurance au Maroc et à l'étranger. Au niveau national, la mission de la SCR est de conserver, réguler et sécuriser le marché de la réassurance.

Aujourd'hui, la SCR est reconnue comme un partenaire privilégié par diverses institutions financières grâce à son excellente réputation. Elle est le premier réassureur arabe et le troisième réassureur africain, avec des notations de crédit de :

- AM.Best (B++ Good)
- Standard & Poor's (BBB-/Stable)
- Fitch (AAA/Stable)

1.2 Principaux Indicateurs Financiers

Les principaux indicateurs financiers de la SCR pour les années 2020, 2021, et 2022 sont :

Indicateur	2020	2021	2022
Chiffre d'affaires	295,737	281,770	329,680
Fonds propres	290,930	287,050	261,700
Résultat net	35,684	33,460	27,010

TABLE 1.1 – Principaux Indicateurs Financiers (en milliers USD)

1.3 Entreprise Risk Management (ERM)

L'Enterprise Risk Management (ERM) est une méthodologie stratégique qui considère la gestion des risques sous l'angle de l'ensemble de l'entreprise ou de l'organisation. Il s'agit d'une approche descendante visant à identifier, évaluer et se préparer aux pertes, dangers, risques et autres dommages potentiels susceptibles d'interférer avec les opérations et les objectifs d'une organisation, entraînant ainsi des pertes.

L'ERM est essentiel pour instaurer de nouvelles normes de solvabilité, qui associent la régulation du capital requis à la notion de risque. Dans ce contexte, la SCR s'est dotée d'un système de management centralisé, le pôle ERM, en réponse aux nouvelles règles prudentielles qui entrent en vigueur. Ce pôle est composé de deux départements : le Département Actuariat & Solvabilité et le Département ALM et Gestion des Risques.

Le système ERM de la SCR a pour objectif de gérer tous les risques de manière distincte et conjointe à l'aide du processus d'évaluation interne des risques et de la solvabilité (ORSA). Ce processus englobe le contrôle des limites d'appétence et le pilotage de la rentabilité et de la solvabilité conformément à la stratégie de risque adoptée. Sur le plan opérationnel, la politique de souscription est appliquée selon des procédures spécifiques basées sur la sélection et la tarification des risques. Elle s'appuie sur une comitologie dédiée pour mettre en œuvre et suivre cette politique.

Ainsi, la SCR adopte une approche intégrée et systématique de la gestion des risques, assurant la robustesse et la résilience de ses opérations face aux défis et aux exigences du marché.

Chapitre 2

Contexte réglementaire de l'étude

Avant d'entamer notre analyse détaillée, il est essentiel de contextualiser le cadre de cette étude. Le contexte réglementaire, notamment celui de la réassurance sous Solvabilité II, est crucial pour comprendre les implications de nos découvertes et le cadre de la gestion des risques qui sera discuté. Ce chapitre explore en profondeur les fondements de la réassurance et les modalités de Solvabilité II qui influencent directement notre sujet d'étude.

2.1 Généralités sur la réassurance

La réassurance, souvent désignée comme l'« assurance des assureurs », est un élément crucial dans la gestion des risques et la stratégie de croissance des compagnies d'assurance. Elle permet aux assureurs, appelés cédants, de transférer une partie ou la totalité des risques qu'ils souscrivent à des réassureurs, en échange d'une prime de réassurance. Ce mécanisme permet non seulement de partager le risque, mais aussi de renforcer la sécurité des fonds propres et d'assurer la solvabilité, particulièrement en cas de sinistres majeurs.

Rôle économique et stratégique de la réassurance

- Amélioration de la solvabilité et réduction de la probabilité de ruine : Les assureurs, dans leur quête constante d'amélioration de la solvabilité, adoptent des programmes de réassurance qui leur permettent de mieux gérer les risques potentiels extrêmes. Ce processus renforce leur capacité à résister à des événements catastrophiques, sécurisant ainsi leur position financière.
- Augmentation de la capacité de souscription : La réassurance offre aux assureurs la possibilité d'augmenter le volume de leurs affaires bien au-delà de ce que leur capital seul leur permettrait. Cela est particulièrement bénéfique pour les petites et moyennes entreprises d'assurance qui cherchent à étendre leur présence sur un marché compétitif.
- Expertise et conseil : Les réassureurs apportent une valeur ajoutée significative en tant que conseillers. Leur expertise dans la définition de plans de réassurance optimaux et dans la tarification de risques complexes est essentielle. Ils jouent un rôle crucial dans le développement de produits innovants et dans la gestion de risques émergents comme le

terrorisme.

- Favorisation de l'innovation : Par leur capacité à mutualiser et à disperser les risques à une échelle plus large, les réassureurs permettent aux assureurs de développer de nouveaux produits et de pénétrer de nouveaux marchés, tout en maintenant une gestion du risque prudente.

Dans le cadre de ce projet de fin d'études, nous nous concentrerons sur le point de vue du réassureur. Lorsqu'il est question d'évaluer les contrats et de déterminer quels types sont plus risqués, notre analyse sera centrée sur les implications pour le réassureur plutôt que pour l'assureur.

La distinction et l'analyse des types de réassurance et des traités sont cruciales pour adapter notre gestion des risques à une structure spécifique, distincte de la classification standard de Solvabilité II (S2). Cette démarche nous permettra d'appliquer de manière plus précise les Paramètres Spécifiques à l'Entreprise (USP), offrant ainsi une estimation plus ajustée du capital de solvabilité nécessaire, en fonction des risques spécifiques et des stratégies de couverture choisies.

2.1.1 Types de réassurance

La réassurance se divise en deux grandes catégories qui structurent les modalités de partage des risques entre l'assureur cédant et le réassureur : la réassurance proportionnelle et la réassurance non-proportionnelle. Chacune de ces catégories comprend des types de traités spécifiques qui répondent à des objectifs de couverture différenciés.

2.1.1.1 La réassurance proportionnelle

Dans la réassurance proportionnelle, le réassureur partage avec l'assureur cédant les primes et les sinistres selon une proportion définie. Ce partage est équilibré : à la proportion des primes cédées correspond la proportion des charges de sinistres assumées.

1. **Traité en quote-part (quota share)** : Ce traité est la forme la plus élémentaire de réassurance proportionnelle. Le réassureur prend en charge une fraction fixe des sinistres en échange de la même fraction des primes.
2. **Traité en excédent de plein** : Dans ce type de traités, l'assureur cédant conserve un montant spécifique de risque, connu sous le nom de "plein de rétention". Au-delà de ce montant, le réassureur couvre les sinistres, jusqu'à une limite prédéfinie. Les primes et les sinistres sont partagés sur la base d'un taux de cession calculé individuellement pour chaque police.

2.1.1.2 La réassurance non proportionnelle

La réassurance non-proportionnelle intervient uniquement lorsque les sinistres dépassent un seuil déterminé, appelé priorité ou franchise. Le réassureur ne participe qu'aux pertes excédant

ce seuil.

- **Traité en excédent de sinistres** : Ce type de traité est structuré pour protéger l'assureur contre les sinistres individuels coûteux. Le réassureur couvre la part des sinistres qui dépasse la franchise jusqu'à une limite maximale fixée, connue sous le nom de portée.
- **Traité en excédent de pertes (Stop-Loss)** : Orienté vers la protection contre les mauvais résultats financiers globaux plutôt que des sinistres individuels, ce traité est utilisé pour limiter les pertes annuelles totales. Le réassureur s'engage à indemniser l'assureur pour les pertes qui excèdent un ratio sinistres/primes prédéterminé.

Volatilité des types de réassurance Les types de réassurance diffèrent en termes de volatilité des risques qu'ils couvrent. Généralement, les traités de réassurance non-proportionnelle, comme les traités en excédent de sinistres et en excédent de pertes, sont plus volatiles. La raison principale est que ces traités couvrent les risques à haute valeur ou les sinistres qui surviennent moins fréquemment mais avec des conséquences financières potentiellement énormes. Par conséquent, ils sont susceptibles de subir des variations importantes dans les paiements d'indemnités, en fonction de la survenance ou non de sinistres majeurs.

À l'inverse, la réassurance proportionnelle, comme les traités en quote-part, tend à être moins volatile car les risques et les primes sont répartis de manière régulière et prévisible, ce qui fournit une couverture plus stable et continue pour l'assureur.

Ces distinctions sont cruciales pour les réassureurs qui doivent choisir le type de traités adaptés à leur profil de risque et à leurs stratégies de gestion de portefeuille, tout en considérant l'équilibre entre risque pris et rentabilité potentiellement accrue.

2.1.2 Les traités de réassurance

- **La réassurance facultative** : Elle est caractérisée par sa simplicité et sa flexibilité de souscription, tant pour l'assureur que pour le réassureur. Dans ce type de réassurance, l'assureur a la liberté de décider quels risques il souhaite céder au réassureur, et le réassureur peut choisir d'accepter ou de refuser ces risques. Ce type de réassurance est particulièrement utilisé pour couvrir des risques importants qui dépassent largement la capacité de souscription de la compagnie d'assurance, comme les risques industriels majeurs ou les risques exclus des traités de réassurance traditionnels, tels que les tremblements de terre.
- **La réassurance obligatoire** : Aussi connue sous le nom de traités, elle est le mode de réassurance le plus couramment utilisé en raison de son caractère de double obligation sur l'assureur et le réassureur. Dans ce type de réassurance, l'assureur (appelé cédante) s'engage à céder les risques d'un portefeuille donné au réassureur pendant une période déterminée, et le réassureur est obligé de les accepter. Ces traités peuvent être proportionnels ou non proportionnels, selon les modalités définies dans le contrat.

Volatilité des traités facultatifs et obligatoires La volatilité des risques couverts par les traités de réassurance facultative et obligatoire diffère sensiblement. Les traités facultatifs sont généralement plus volatiles car ils sont souvent utilisés pour des risques exceptionnels ou très spécifiques qui peuvent varier considérablement en termes de fréquence et de gravité. Par exemple, les risques industriels majeurs ou les catastrophes naturelles, souvent couverts par la réassurance facultative, peuvent entraîner des sinistres extrêmement coûteux et imprévisibles. En revanche, les traités de réassurance obligatoire tendent à être moins volatiles, car ils couvrent généralement des portefeuilles de risques plus diversifiés et plus prévisibles. Cette diversité permet de lisser les fluctuations des sinistres, rendant les pertes potentielles plus stables et plus prévisibles pour le réassureur.

Compte tenu de cette différence de volatilité, il est crucial de séparer les traités facultatifs des traités obligatoires dans l'évaluation des risques et la gestion des portefeuilles de réassurance. Les traités facultatifs, étant plus volatiles, nécessitent des approches de gestion des risques plus sophistiquées et des niveaux de capital plus élevés pour couvrir les éventuelles pertes. En comparaison, les traités obligatoires permettent une gestion plus stable et prédictive des risques, ce qui peut améliorer l'efficacité de la réassurance.

Ainsi, dans le cadre de notre projet, nous analyserons séparément les contrats traités et facultatifs afin de mieux évaluer les exigences de capital de solvabilité (ECS) et d'allouer le capital de manière plus précise et efficace. Cette distinction permettra de mieux représenter les profils de risque spécifiques et d'optimiser la gestion des capitaux de la Société Centrale de Réassurance (SCR).

Cette compréhension approfondie des mécanismes de la réassurance nous prépare à aborder la directive Solvabilité II, qui constitue un cadre réglementaire fondamental pour assurer la solvabilité et la pérennité des entreprises d'assurance et de réassurance. Dans la prochaine partie de ce rapport, nous examinerons en détail les objectifs, l'importance et les composantes de la directive Solvabilité II

2.2 Cadre réglementaire : Solvabilité II

Afin d'éviter un défaut d'indemnisation de l'assureur, les autorités de contrôle surveillent rigoureusement l'ensemble des sociétés d'assurance et de réassurance et peuvent les sanctionner en cas de non-conformité. L'activité d'assurance est donc soumise à des obligations réglementaires strictes en matière de maîtrise des risques et de solvabilité. À l'échelle européenne, l'EIOPA (European Insurance and Occupational Pensions Authority) est l'organe de supervision principal. Elle travaille conjointement avec la Commission Européenne et d'autres acteurs institutionnels et économiques pour élaborer et mettre en œuvre la réglementation nécessaire.

L'activité d'une compagnie d'assurance est singulière, notamment en raison de son cycle inversé. Contrairement aux activités classiques où le bien ou service est livré avant ou au moment de

son paiement, l'assureur collecte les primes, les investit dans les marchés financiers sous forme d'actifs, parfois pendant plusieurs années, avant de devoir éventuellement payer un sinistre. Ainsi, l'assureur fixe son prix de vente sur la base d'une estimation du coût de revient, dont il ignore le montant exact et la date de règlement. Cette caractéristique rend la gestion des risques particulièrement complexe, surtout pour les contrats de longue durée, comme en assurance vie, où le délai avant le paiement des sinistres probables est beaucoup plus long, amplifiant ainsi le risque de solvabilité.

Face à la présence permanente et quotidienne de risques variés, la gestion du risque est au cœur du métier des assureurs et des réassureurs. Les normes de Solvabilité II ont été développées pour s'assurer de la maîtrise du risque au niveau de tous les assureurs, imposant des règles strictes de gestion et de capitalisation. Ces normes visent à renforcer la stabilité financière du secteur et à protéger les assurés en garantissant que les compagnies d'assurance disposent des fonds nécessaires pour faire face à des événements imprévus.

Depuis le 1er janvier 2016, les organismes européens d'assurance et de réassurance sont soumis à la directive européenne Solvabilité II. Ce nouveau régime prudentiel, initié par la Commission européenne sous les recommandations de l'EIOPA, vise à mieux garantir la solvabilité des sociétés afin qu'elles puissent tenir leurs engagements envers leurs assurés. La directive impose aux assureurs de constituer un capital économique suffisant pour couvrir les risques de chocs conjoncturels. Le calcul de ce capital réglementaire peut être effectué par différentes méthodes, basées sur un exercice d'agrégation des risques et nécessitant un choix de mesure de risque.

Il s'organise alors autour de trois piliers : un pilier quantitatif, un pilier qualitatif, et un pilier de transparence et reporting.

PILIER I	PILIER II	PILIER III
Exigences quantitatives	Pilotage des risques	Communication financière
Bilan en vision économique	Gestion des risques-ORSA	Informations à destination du public
Fonds propres éligibles	Contrôle interne	Informations à destination du régulateur, aux fins du contrôle
Capital de Solvabilité Requis	Gouvernance des risques	
Minimum de Capital Requis	Autres exigences (sous-straitance...)	
← Je mesure →	← Je pilote →	← Je communique →

FIGURE 2.1 – Les trois piliers de la Directive Solvabilité II

Pilier 1 : Exigences quantitatives

Les exigences quantitatives concernent l'évaluation des passifs, du capital cible de solvabilité, des actifs et la gestion interne du risque. Ce pilier vise à établir des outils pour mesurer la suffisance des passifs et déterminer les seuils de fonds propres, garantissant ainsi la solvabilité

des assureurs. Cela inclut l'allocation de capital réglementaire pour permettre aux assureurs de faire face à leurs engagements. Parmi ces exigences, on trouve :

- **Minimum Capital Requirement** : Le MCR représente le niveau minimal de capital en dessous duquel une compagnie d'assurance ne peut fonctionner. Il assure avec une probabilité de 80 % que l'assureur ne sera pas en faillite à horizon d'un an. En cas de non-respect de ce seuil, l'Autorité de Contrôle Prudentiel et de Résolution (ACPR) intervient pour restaurer la solvabilité de l'assureur. Le MCR est conçu pour être simple à calculer et uniforme pour toutes les compagnies d'assurance, garantissant ainsi une surveillance efficace et cohérente.
- **Solvency Capital Requirement** : Le SCR correspond au montant de fonds propres nécessaires pour couvrir un scénario de crise majeure, garantissant avec une probabilité de 99,5 % que l'entreprise ne sera pas en faillite à horizon d'un an. Ce capital doit permettre à l'assureur d'absorber les pertes dues à des événements extrêmes, tels que ceux se produisant une fois tous les 200 ans. Les assureurs ont le choix entre utiliser une formule standard, développée par les régulateurs, ou développer un modèle interne propre pour calculer le SCR, capable de mieux refléter leur profil de risque spécifique.

Le Pilier 1 harmonise les méthodes d'évaluation des provisions techniques et des exigences de capital à travers l'Europe. En définissant des règles quantitatives précises, ce pilier vise à protéger les assurés et les bénéficiaires en garantissant que les compagnies d'assurance disposent toujours d'un niveau minimal de solvabilité suffisant pour faire face aux risques de ruine.

Pilier 2 : Exigences qualitatives

Ce pilier porte sur l'établissement d'une politique interne de suivi des risques via le dispositif Own Risk and Solvency Assessment (ORSA). Il impose aux assureurs de mettre en place une gestion intégrée des risques, incluant l'évaluation continue de la solvabilité, la gestion des risques et le contrôle interne. L'objectif est de fournir aux autorités de contrôle les outils nécessaires pour identifier les entreprises présentant des risques financiers ou organisationnels significatifs. Il vise alors à renforcer et harmoniser les activités de contrôle et de gouvernance interne et facilite le travail des autorités de contrôle en leur offrant une vision globale et instantanée de l'état des risques au sein de chaque assureur et réassureur.

Pilier 3 : Communication transparente

Ce pilier concerne la transparence publique, stipulant que les assureurs européens doivent publier des informations de manière uniforme. L'objectif est d'améliorer la transparence et de promouvoir une meilleure discipline de marché en diffusant des informations telles que les performances financières, les mesures de risque ou les politiques à appliquer en période de stress.

Le cadre réglementaire de Solvabilité II représente une avancée majeure dans la régulation des assureurs, en mettant l'accent sur une évaluation plus complète et rigoureuse des risques, une

gestion intégrée des risques et une transparence accrue envers les parties prenantes.

2.3 Le bilan en valeur économique

Parmi les changements radicaux apportés par les normes Solvabilité II, on trouve la modification de l'approche d'élaboration du bilan économique. Sous Solvabilité I, le bilan économique était basé sur une vision totalement comptable. En revanche, le bilan de Solvabilité II adopte une vision purement économique. En effet, les actifs sont inscrits au bilan selon leurs valeurs de marché, et les provisions techniques sont déterminées selon une vision de Best Estimate, contrairement aux provisions techniques de Solvabilité I, qui étaient calculées à partir d'hypothèses prudentes.

La figure suivante illustre les différences entre les bilans Solvabilité I et Solvabilité II :

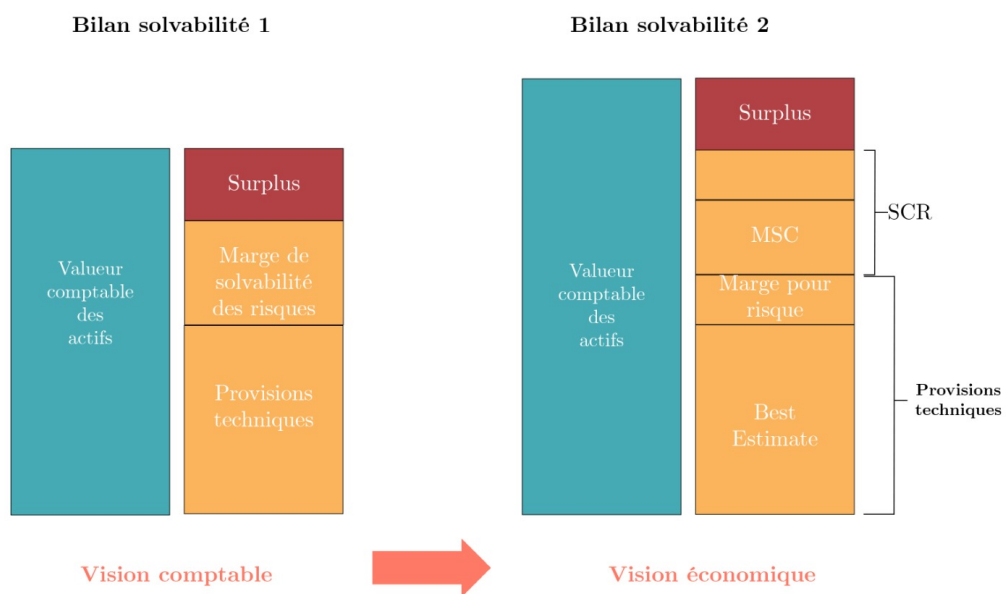


FIGURE 2.2 – Les bilans Solvabilité I et Solvabilité II

2.3.1 Évaluation des actifs

L'actif est principalement représenté par les placements financiers. En effet, l'assureur place les primes qu'il reçoit en instruments financiers, dans l'attente du paiement des sinistres et de rémunérer ainsi les passifs. Contrairement à Solvabilité I, les actifs sont inscrits au bilan à leur valeur de marché (fair value) plutôt qu'à leur valeur d'acquisition. La notion de juste valeur reflète les principes comptables anglo-saxons, offrant une image cohérente avec celle des marchés financiers de l'actif de l'entreprise. Cela contraste avec la prudence comptable traditionnelle,

où les plus-values ne sont comptabilisées qu'une fois réalisées, et les moins-values dès qu'elles sont constatées.

2.3.2 Évaluation des passifs

Au passif, les Provisions Techniques qui sont définies comme étant le montant intégral des engagements de l'assureur sont les plus représentées. Elles représentent la somme d'une estimation en vision Best Estimated Liabilities des engagements de l'assureur complétée d'une marge pour risque (Risk Margin). Les fonds propres économiques ou fonds propres Solvabilité II appelés Net Asset Value sont ce qui reste de l'actif après que les provisions techniques sont couvertes.

2.3.2.1 Le Best Estimated Liabilities

BEL est la meilleure estimation des obligations futures de l'assureur. Il correspond à la valeur actuelle nette des cash-flows probables futurs du passif (primes, prestations, frais...) des contrats en stock à la date de calcul sous la probabilité risque neutre.

$$BEL = \mathbb{E}^Q \left[\sum_{t \geq 1} \delta_t P_t | \mathcal{F}_t \right]$$

Avec :

- Q la probabilité risque neutre, i.e. que les instruments financiers se comportent comme des actifs sans risque et leurs prix actualisés sont des martingales impliquant qu'en moyenne, les processus de prix évoluent au taux sans risque.
- $\delta_t = e^{-\int_0^t r_s ds}$; r_s est le taux sans risque facteur d'actualisation des flux entre $t = 0$ et la date t .
- \mathcal{F}_0 la filtration caractérisant l'information financière du marché disponible à la date $t = 0$.
- P_t le cash-flow du passif à la date t et est \mathcal{F}_t -mesurable. Aucun nouveau contrat n'est souscrit.

D'une manière simple, le cash-flow en date t est donné par : $P_t = \text{Primes}_t - \text{Sinistres}_t - \text{Frais}_t$.

2.3.2.2 Le Risk Margin

RM représente le coût d'immobilisation du capital nécessaire pour couvrir les risques assurantiels. Elle s'ajoute au Best Estimate des passifs, intégrant ainsi une marge de prudence dans le calcul des provisions techniques, liée au fait que les risques techniques ne sont pas échangeables sur un marché complet et liquide. Sa formule est donnée par :

$$RM = \text{CoC} \sum_{t \geq 0} \frac{\text{SCR}_t}{(1 + r_t)^t}$$

Où :

- r_t représente le taux zéro-coupon.

- $\text{CoC} = 6\%$ est le coût du capital. Sa valeur est définie par la réglementation.
- SCR_t représente le capital de solvabilité requis pour les risques actuariels à la date t .

La Net Asset Value ou la NAV : constituée par les fonds propres disponibles, la *NAV* représente l'espérance des marges futures R_t sous la probabilité risque neutre. Elle est représentée par la différence entre la valeur de marché des actifs et les provisions techniques quand elles sont déterminées.

$$\text{NAV}_t = \text{Actifs}_{\text{en valeur de marché}} - P_t$$

Sinon, la *NAV* est l'actualisation des résultats R_t (gain ou pertes) d'assurance espérés durant la projection.

$$\text{NAV} = \mathbb{E}^Q \left[\sum_{t=1}^T \delta_t R_t | \mathcal{F}_0 \right]$$

R_t peut être décomposé en une somme de :

- résultat technique = solde de souscription – commissions – frais généraux
- et résultat financier = produits des placements nets des frais de placements – la participation aux bénéfices versée aux assurés.

2.4 Capital de Solvabilité Requis

2.4.1 Le calcul du capital économique

Le cœur de la réforme solvabilité 2 peut être considéré son pilier 1, notamment avec son introduction des capitaux réglementaires MCR et SCR qui estiment les besoins de solvabilités des assureurs.

La réglementation Solvabilité II impose aux institutions assurantielles de disposer d'une marge suffisante de fonds propres pour se couvrir d'éventuels chocs provoqués par des événements de fluctuations importantes imprévues dans les marchés financiers. Cette marge doit lui permettre de se couvrir d'une ruine économique à l'horizon d'un an avec un niveau de confiance de 99,5%. En d'autres termes, la compagnie d'assurance doit détenir un niveau de fonds propres économiques suffisamment supérieur au MCR. Ce niveau de fonds propres correspond au SCR. Détenir un SCR réglementaire signifie que l'actif couvre le passif et la *NAV* est suffisamment positive pour éviter une ruine.

Dans la suite de ce mémoire, nous appellerons indifféremment capital économique ce capital cible SCR.

La mesure de risque retenue par la réglementation Solvabilité II est la $\text{VaR}_{99,5\%}$, ce qui se traduit mathématiquement si on considère FP_1 le montant de fonds propres dans un an par :

$$P[FP_1 \geq 0] \geq 99.5\%$$

De plus, si on considère :

- FP_0 le montant de fonds propres économiques à $t = 0$,
- $Z(0, 1)$ le facteur d'actualisation des cash-flows entre la date $t = 0$ et $t = 1$ représentant le prix d'un zéro-coupon de maturité 1 en $t = 0$,
- $q_{0.5\%}$ le quantile à 0.5% de la distribution des fonds propres à un an

Alors, le capital économique K à l'horizon un an se déduit par :

$$K = FP_0 - Z(0, 1) \cdot q_{0.5\%} \cdot FP_1$$

Pour le calcul du SCR l'autorité européenne des assurances et des pensions professionnelles (EIOPA) , propose :

- **Formule Standard** : méthodologie de calcul du SCR dont les principales techniques de calcul ainsi que les paramètres sont encadrés par la réglementation. Les paramètres sont calibrés sur les acteurs du marché européen.
- **Formule Standard simplifiée** : approche Formule Standard dans laquelle certaines simplifications de calculs pré définies par la réglementation, sont réalisées sur certains modules ou sous-modules de risques définies.
- **USP (Undertaking Specific Parameters)** : possibilité de calibrer de manière propre au portefeuille spécifique de l'entreprise, certains paramètres prédéfinis dans la Formule Standard. Les paramètres doivent être calibrés selon les méthodologies de calibrage fixées dans la réglementation.
- **Modèle Interne** : application de méthodologies et de paramètres de calculs du SCR propre à l'entreprise. Les paramètres sont calibrés à partir des données spécifiques à l'entreprise.
 - **Modèle Interne partiel** : application de méthodologies et de paramètres Modèle Interne sur une partie des modules de risques et application de la Formule Standard sur les autres modules de risques.
 - **Modèle Interne total** : application de méthodologies et de paramètres Modèle Interne l'ensemble des modules de risque.

2.4.2 Présentation de la formule standard

Définie par l'EIOPA (European Insurance and Occupational Pensions Authority), la formule standard est basée sur un paramétrage des chocs avec des données moyennes des organismes d'assurances d'Europe. Le calcul du capital économique basé sur la formule standard consiste à évaluer le bilan central, puis de réévaluer ce même bilan après application d'un choc instantané pour chaque risque.

$$K_i = FP_{\text{central}} - FP_i^{\text{choc}}$$

- K_i le capital associé au risque élémentaire i
- FP_{central} les fonds propres du bilan économique à $t = 0$
- FP_i^{choc} les fonds propres obtenus après application de choc instantané correspondant au quantile à 0.5% de la distribution du risque élémentaire i

Les risques sont organisés en modules regroupant chacun plusieurs risques élémentaires i . Basée sur une approche « Bottom-up », le capital de chaque risque élémentaire K_i est évalué, puis agrégé à l'aide des matrices de corrélations définies par la formule au sein de chaque module de risques p (on parle d'agrégation intra-modulaire), et enfin entre chaque module de risque (agrégation inter-modulaire). Ci-dessous la cartographie des risques dans le cadre de la formule standard :

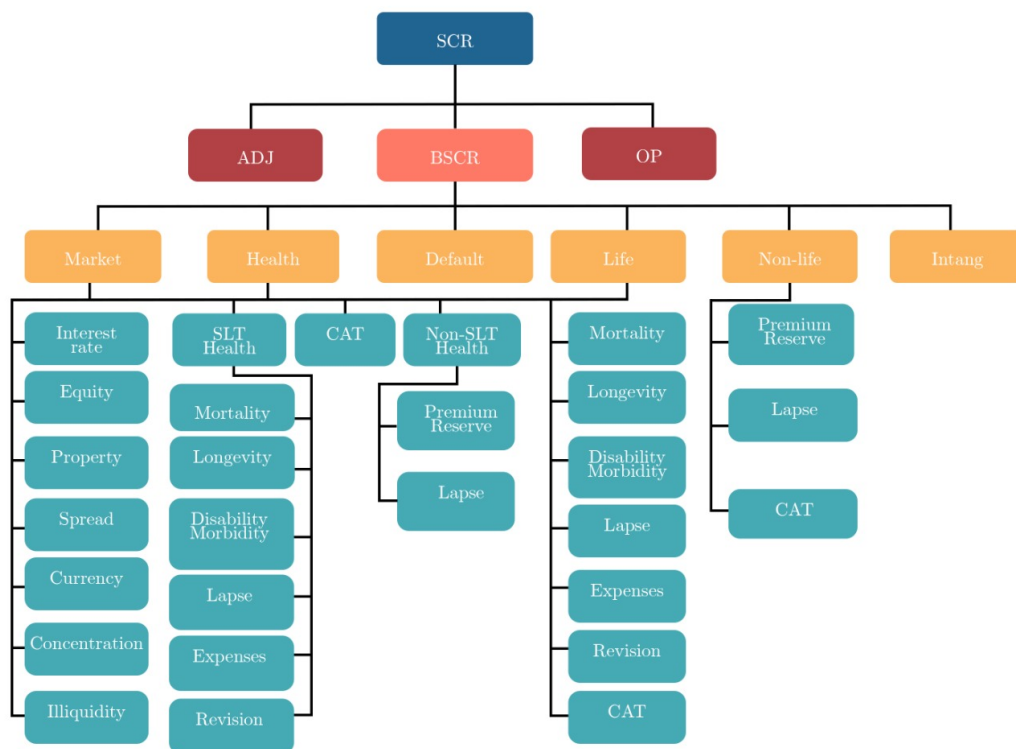


FIGURE 2.3 – Cartographie des risques

La formule standard pour calculer le SCR est la suivante :

$$SCR = BSCR + Adj + SCR_{op}$$

Où :

- $BSCR$ est le capital de solvabilité requis de base,
- Adj représente l'ajustement visant à tenir compte de la capacité d'absorption de pertes des provisions techniques et des impôts différés,
- SCR_{op} est le capital exigé pour risque opérationnel.

Le calcul de $BSCR$ repose sur une approche modulaire du risque et sur la segmentation des risques. Cette segmentation des risques est effectuée par branche d'activité (Line of Business(LoB)) en fonction de la nature de l'activité et des engagements de l'organisme assureur. L'idée sous-jacente à l'approche modulaire est que chaque module représente une exigence en capital, et le SCR représente l'agrégation de ces différents capitaux. Ces modules sont eux-mêmes subdivisés en sous-modules, comme le montre le schéma précédent.

La formule standard prend 7 risques en compte :

- Risque de marché
- Risque de souscription non-vie
- Risque de souscription vie
- Risque de santé
- Risque d'intangibilité des actifs incorporels
- Risque de défaut
- Risque opérationnel

La formule de l'agrégation inter-modulaire est donnée par :

$$BSCR = \sqrt{\sum_{(i,j) \in P^2} \rho_{i,j}^P \cdot SCR_i SCR_j}$$

Avec :

- $\rho_{i,j}^P$ le coefficient de corrélation entre les modules i et j du module
- P l'ensemble de tous les modules, $\dim(P) = 6$

La formule de l'agrégation intra-modulaire est donnée par :

$$SCR_p = \sqrt{\sum_{(i,j) \in R_p^2} \rho_{i,j}^{RP} \cdot K_i K_j}$$

Avec :

- $\rho_{i,j}^{RP}$ le coefficient de corrélation entre les risques i et j du module p
- R_p l'ensemble de tous les risques du module p

Ce mémoire s'attache au module de **souscription non-vie**, et principalement **les risques de réserves et de primes**.

2.4.2.1 Le risque de souscription non-vie

Le risque de souscription regroupe l'ensemble des risques pris par un assureur lors de la distribution de contrats d'assurance. Dans les spécifications techniques du QIS 5, le risque de souscription non-vie se décompose en trois sous-modules :

- Le risque de rachat : Ce risque concerne les contrats d'assurance non-vie qui incluent des options pour les assurés influençant significativement les obligations découlant de ces contrats. Lorsque de telles options sont incluses, le calcul des provisions de primes

repose sur des hypothèses concernant les taux d'exercice de ces options. Le risque de rachat correspond à la possibilité que ces hypothèses soient incorrectes ou nécessitent des ajustements

- Le risque de catastrophe : Ce risque correspond à la perte ou au changement défavorable de la valeur des engagements d'assurance, résultant d'une incertitude significative des hypothèses de tarification et de provisionnement liées à des événements extrêmes ou exceptionnels.
- **Le risque de réserve et de prime :**
 - **Le risque de prime** est un risque de sous tarification, c'est à dire le risque que les montants des sinistres et des frais liés aux sinistres soient supérieurs à ceux prévus dans la tarification.
 - **Le risque de réserve** mesure l'incertitude dans l'estimation des engagements d'une compagnie d'assurance envers ses assurés. Les montants restant à payer des sinistres déjà survenus ne sont pas connus au moment du calcul des provisions, il réside donc un risque lié à la sous-évaluation des réserves.

2.4.3 Calcul du SCR de prime et réserve

Notre étude concerne l'application des USP juste pour les sous modules du risque de primes et de réserve du module de Non vie.

Le Capital de Solvabilité Requis pour les risques de prime et réserve est évalué par la formule :

$$NL_{pr} = 3 \cdot \sigma \cdot V$$

où σ représente le coefficient de variation relatif aux risques de primes et de réserve combinés et V est la mesure de volume du risque.

En effet :

Le modèle retenu suppose que le ratio combiné est une variable aléatoire (X) distribuée sur une période t (un an dans le cadre S2) selon une loi log-normale de moyenne μ_x et d'écart type σ_x . Dans un premier temps, on cherche à estimer le ratio des pertes aléatoires sur les primes et les réserves connues en $t = 0$.

$$\frac{L}{V} = \frac{Y + R_1 - (P + R_0)}{P + R_0}$$

où

- L : les pertes aléatoires de la période avec $L = S - P$
- P : la prime du portefeuille sur la période
- S : variable aléatoire des sinistres sur la période avec $S = Y + \Delta R$
- Y : le montant de sinistre réglé sur la période
- ΔR : delta des provisions avec $\Delta R = R_1 - R_0$ où R_t désigne les provisions à la période t
- V : volume connu des primes et des réserves en $t = 0$, tel que $V = P + R_0$

En posant $X = \frac{Y+R_1}{P+R_0}$, ratio combiné du portefeuille sur la période, on a :

$$\frac{L}{V} = X - 1$$

Dans un deuxième temps, on souhaite équilibrer le portefeuille, ce qui implique que $E(L) = 0$, ou équivalent à $E(X) = 1$.

Sous l'hypothèse que X est distribué selon une loi log-normale, on a :

$$X = \exp(\mu_x + \sigma_x N(0, 1)) \sim LN(1, \sigma)$$

d'où

- $E[X] = e^{\mu_x + \frac{1}{2}\sigma_x^2} = 1 \implies \mu_x = -\frac{1}{2}\sigma_x^2$, X distribué selon une loi log-normale de moyenne 1 et de variance σ
- $\sigma^2 = \text{Var}[X] = e^{\sigma_x^2} - 1 \implies \sigma_x^2 = \ln(1 + \sigma^2)$

Il reste par la suite à déterminer le capital économique selon une $VaR_{99.5\%}$.

En respectant le principe de la mesure du risque sous Solvabilité 2, on peut aboutir au capital économique en utilisant la VaR au risque α .

$$\begin{aligned} EC_\alpha[L] &= VaR_\alpha[L] = VaR_\alpha\left[\frac{L}{V}\right] \cdot V \\ &= (VaR_\alpha[X] - 1) \cdot V \text{ car } \frac{L}{V} = X - 1 \\ &= \left(\exp\left\{\sigma_x \phi^{-1}(\alpha) - \frac{1}{2}\sigma_x^2\right\} - 1\right) \cdot V \\ EC_\alpha[L] &= \rho(\sigma) \cdot V \end{aligned}$$

où $\rho_\alpha(\sigma) = \exp\left(\phi^{-1}(\alpha) \cdot \sqrt{\ln(\sigma^2 + 1)}\right) - 1$, avec $\phi^{-1}(\alpha)$ l'inverse de la distribution de la loi normale standard au quantile α .

Au final, le chargement en capital au titre du risque de tarification et de provisionnement résulte du produit entre le volume V et une fonction ρ de la volatilité σ .

Comme précisé, l'exigence de capital pour le risque de réserve et de prime est le produit de la fonction de volatilité et d'un volume d'exposition.

$$SCR_{NL,pr} = \rho(\sigma) \cdot V$$

En outre, comme on peut le constater sur le graphique suivant, la fonction $\rho(\sigma)$ peut être approximée par 3σ , cela est d'autant plus valable que les valeurs de σ sont inférieures à 19%.

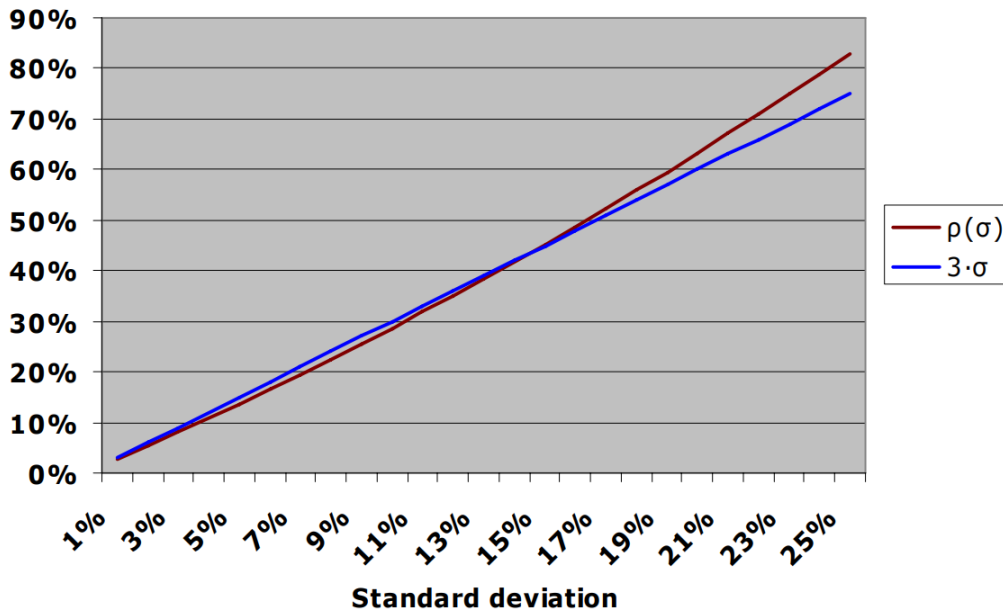


FIGURE 2.4 – Comparaison de $\rho(\sigma)$ et $3 \cdot \sigma$

2.4.3.1 Calcul du volume sous-risque

Le volume sous-risque V , net de réassurance, se calcule de la manière suivante :

Étape 1 : Calcul du volume relatif à chaque type de risque (prime ou réserve) pour chaque segment d'activité

- Le calcul du volume sous-risque relatif au risque de prime est fondé sur les volumes de primes acquises sur l'année d'évaluation et prévus sur les années suivantes :

$$V_{\text{prem},s} = \max(P_s, P_{\text{last},s}) + FP_{\text{existing},s} + FP_{\text{future},s}$$

- Le volume sous-risque relatif au risque de réserve correspond au montant Best Estimate des provisions pour sinistres à la date d'évaluation :

$$V_{\text{res},s} = PCO_s$$

Avec :

- $P_{\text{last},s}$: Volume de primes acquises, nettes de réassurance, durant les 12 derniers mois (année d'évaluation), pour le segment d'activité s
- P_s : Estimation du volume de primes acquises, nettes de réassurance, attendues sur les 12 mois suivant la date d'évaluation, pour le segment d'activité s
- $FP_{\text{existing},s}$: Valeur actuelle du montant prévisionnel de primes, nettes de réassurance, acquises au-delà des 12 mois et venant à relais aux contrats en portefeuille à la date

d'évaluation, pour le segment d'activité s

- $FP_{\text{future},s}$: Valeur actuelle du montant prévisionnel de primes, nettes de réassurance, acquises au-delà des 12 mois et venant à relais aux nouveaux contrats dans les 12 mois suivant la date d'évaluation, pour le segment d'activité s
- PCO_s : Valeur du montant Best Estimate des provisions pour sinistres à la date d'évaluation, nettes de réassurance pour le segment d'activité s

Étape 2 : Déduction du volume sous risque global (prime & réserve) relatif à chaque segment d'activité Le volume global sous risque relatif à un segment d'activité donné est évalué par agrégation des volumes relatifs à chaque type de risque, en déduisant les effets de diversification géographique existant au sein de chaque module :

$$V_s = (V_{\text{prem},s} + V_{\text{res},s}) \cdot (0.75 + 0.25 \cdot DIV_s)$$

Étape 3 : Déduction du volume sous risque global sur l'ensemble des segments d'activités

Le volume global sous risque sur l'ensemble des segments d'activité est évalué en sommant les volumes relatifs à chaque segment :

$$V = \sum_s V_s$$

Avec : Avec :

- $V_{\text{prem},s}$: Volume sous-risque relatif au risque de prime pour le segment d'activité s
- $V_{\text{res},s}$: Volume sous-risque relatif au risque de réserve pour le segment d'activité s
- DIV_s : Facteur de diversification géographique pour le segment s

Le calcul du facteur de diversification géographique relatif à chaque segment d'activité est présenté en Annexe C.

2.4.3.2 Calcul du coefficient de variation σ

Le coefficient de variation(σ), net de réassurance, se calcule de la manière suivante :

Étape 1 : Coefficient de variation relatif à chaque type de risque (prime ou réserve) pour chaque segment d'activité.

Les coefficients de variation par type de risque et par segment d'activité ont été calibrés sur le marché européen et sont définis dans le tableau suivant :

Segment Solvabilité II (s)	Risque de prime ($\sigma_{\text{prem},s}$)	Risque de réserve ($\sigma_{\text{res},s}$)
1 - Responsabilité Civile (RC) Automobile	10%	9%
2 - Dommages Automobile	8%	8%
3 - Marine, aviation, transport (MAT)	15%	11%
4 - Incendies & autres dommages aux biens (DAB)	8%	10%
5 - Responsabilité Civile (RC) Générale	14%	11%
6 - Crédits et cautions	12%	19%
7 - Protection juridique	7%	12%
8 - Assistance	9%	20%
9 - Pertes pécuniaires diverses (miscellaneous)	13%	20%
10 - Réassurance accidents non-proportionnelle	17%	20%
11 - Réassurance non-proportionnelle MAT	17%	20%
12 - Réassurance dommages non-proportionnelle	17%	20%

TABLE 2.1 – Les coefficients de variation par type de risque et par segment d'activité

Étape 2 : Calcul du coefficient de variation global pour chaque segment d'activité

Le **coefficient de variation global, net de réassurance**, par segment d'activités, est évalué comme le ratio de l'agrégation des écarts-types par sous-module de risque (prime et réserve) en considérant un niveau de corrélation de 50%, sur le volume global sous-risque :

$$\sigma_s = \frac{\sqrt{(\sigma_{\text{prem},s} \cdot V_{\text{prem},s})^2 + (\sigma_{\text{res},s} \cdot V_{\text{res},s})^2 + (\sigma_{\text{prem},s} \cdot V_{\text{prem},s}) \cdot (\sigma_{\text{res},s} \cdot V_{\text{res},s})}{V_{\text{prem},s} + V_{\text{res},s}}$$

Étape 3 : Calcul du coefficient de variation global Le **coefficient de variation global** (tous segments confondus) est évalué par agrégation des écarts-types des segments d'activité et par division par le volume global sous-risque :

$$\sigma = \frac{1}{V} \sqrt{\sum_{i,j} \text{Corr}S_{(i,j)} \cdot \sigma_i \cdot v_i \cdot \sigma_j \cdot v_j}$$

La matrice de corrélation donnée par la réglementation est présentée en **annexe D**.

2.5 Analyse de sensibilité du portefeuille

NB : Tous les données ont subi une transformation quasi-linéaire pour préserver la confidentialité de l'entreprise. Elles ne seront présentées et utilisées dans tous ce qui suit qu'à titre illustratif.

2.5.1 Présentation et Diversification du Portefeuille

La Société Centrale de Réassurance (SCR) agit en tant que réassureur généraliste sur les marchés domestique et international. Elle offre une large gamme de couvertures en réassurance, aussi bien pour les branches vie que non-vie. Les types de réassurance proposés par la SCR incluent : traités proportionnels et non proportionnels, facultatives proportionnelles et non proportionnelles.

- Branches de Souscription : La SCR souscrit principalement dans les branches dommages aux biens, engineering, responsabilité civile, automobile (responsabilité civile et dommages), accident de travail, risques agricoles, aviation, énergie (oil and gas), marine (corps et facultés), responsabilité civile décennale, violence politique, crédit caution, vie et individuelle accident.
- Expansion Internationale : Sur le plan international, la SCR souscrit des affaires dans plusieurs régions, notamment en Afrique (hors Afrique du Sud), au Moyen-Orient et en Asie. Les principaux pays où la SCR opère incluent : Turquie, Pakistan, Inde, Chine, Corée du Sud, Bangladesh, Indonésie, Sri Lanka.
- Diversification du Portefeuille : La SCR mise sur une diversification de son portefeuille en termes de géographie, de branches et d'expositions pour minimiser la volatilité et assurer une rentabilité minimale. Les principaux axes de diversification mis en œuvre sont : ratio traités / facultatives, ratio non proportionnel / proportionnel, ratio Afrique / Moyen-Orient / Asie, diversification des branches.
- Performance Financière : En 2022, le chiffre d'affaires global de la SCR s'établit à 3,44 milliards de MAD. Le marché marocain représente une part significative de ce chiffre d'affaires avec 2,55 milliards de MAD, soit environ 73% du total. Les affaires étrangères contribuent à hauteur de 891,5 millions de MAD, soit 26% du chiffre d'affaires total. La répartition entre les activités vie et non-vie montre une prédominance de l'activité non-vie avec un chiffre d'affaires de 3,25 milliards de MAD. L'activité vie représente le reste du chiffre d'affaires. Enfin, en ce qui concerne la division entre traités et facultatives, le chiffre d'affaires est approximativement divisé en parts égales entre ces deux segments.

La stratégie de la SCR repose sur une diversification bien pensée qui lui permet de réduire les risques associés à la volatilité des marchés. En s'étendant à l'international et en diversifiant ses branches de souscription, la SCR parvient à atténuer les impacts des fluctuations économiques et sectorielles. La répartition équilibrée entre les traités et les facultatives ainsi que l'accent mis sur des branches variées et des zones géographiques diversifiées témoignent d'une approche prudente et méthodique de gestion des risques.

Les chiffres de performance de 2022 montrent une forte dépendance au marché domestique, mais également une contribution significative des affaires internationales, ce qui renforce la résilience de la SCR face aux risques spécifiques à une région ou un secteur particulier. La prédominance de l'activité non-vie est également notable, soulignant une expertise et une position forte dans ce segment.

Dans l'ensemble, la SCR démontre une gestion rigoureuse et diversifiée de son portefeuille, essentielle pour maintenir la solvabilité et la stabilité financière dans un environnement global de plus en plus concurrentiel.

2.5.2 Impact des Variations de Volatilité sur la Solvabilité de l'Activité Non-Vie

Puisque l'activité non-vie prédomine sur le portefeuille de la SCR, notre étude se concentre sur celle-ci.

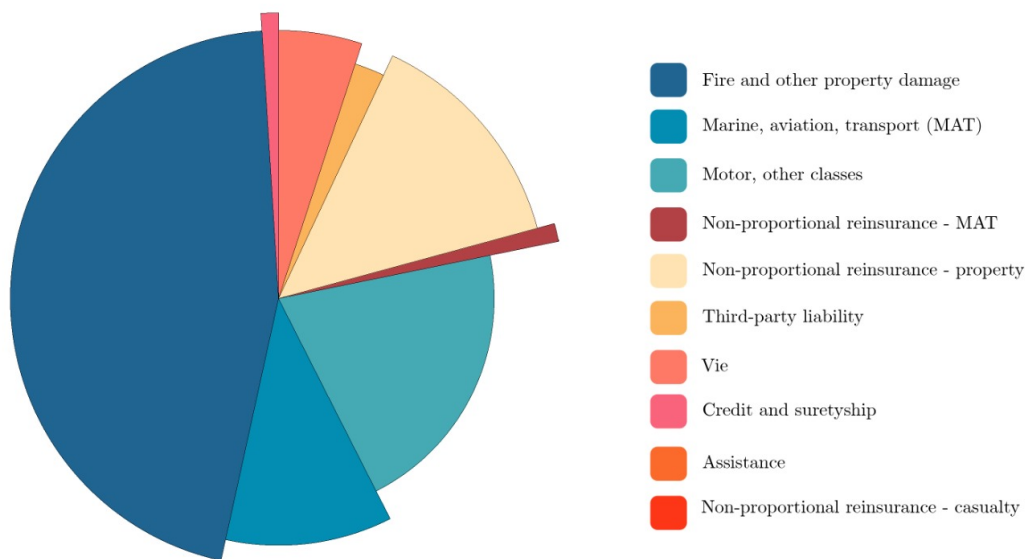


FIGURE 2.5 – Répartition du portefeuille de la SCR selon l'activité de 2023

Pour analyser la sensibilité du Solvency Capital Requirement (SCR) aux variations des coefficients de volatilité, nous avons tracé deux graphiques. Le premier illustre la sensibilité du SCR en fonction de la variation du CoV Prem Net pour chaque segment d'activité. Pour ce faire, nous avons varié le coefficient de volatilité des primes dans une plage de [sa valeur standard

-8%, sa valeur standard +8%] pour chaque segment et observé la courbe de variation du SCR pour chaque segment d'activité.

Cette sensibilité est déterminée par la pente des courbes : plus la pente est raide, plus le segment est sensible aux variations des coefficients de volatilité. En d'autres termes, une légère variation du CoV Prem Net ou du CoV Res Net entraîne une variation significative du SCR pour ces segments.

Par exemple, le segment Incendies et DAB (4) montre une forte sensibilité avec une pente prononcée, indiquant une grande réactivité du SCR aux changements du CoV Prem Net.

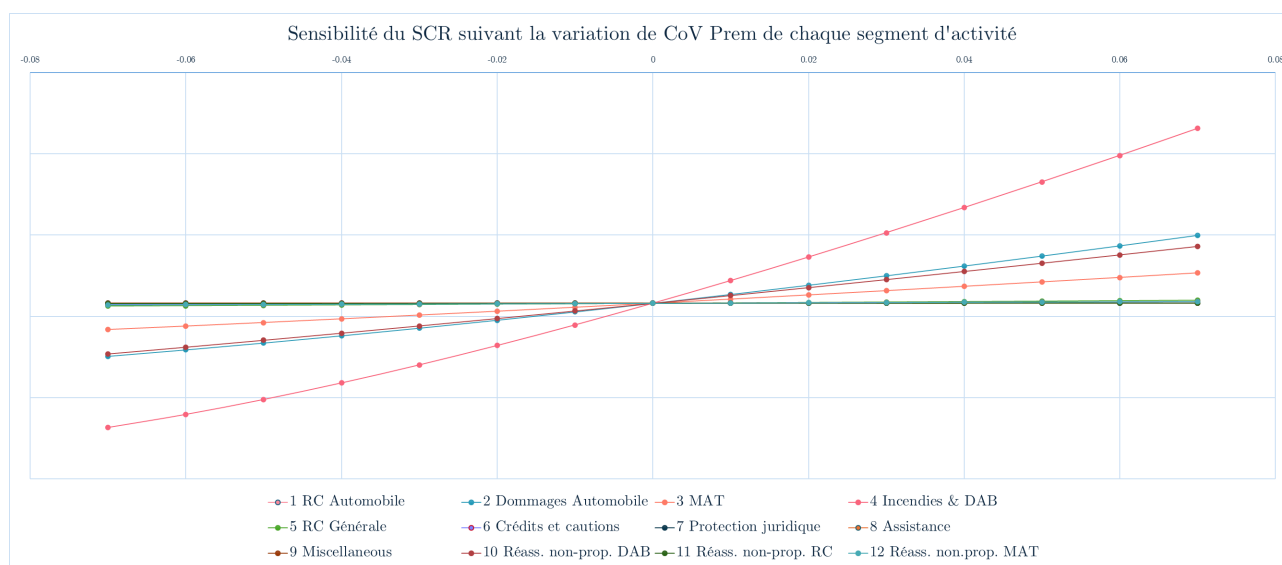


FIGURE 2.6 – Sensibilité du SCR suivant la variation de CoV Prem Net de chaque segment d'activité

Le second graphique présente la sensibilité du SCR suivant la variation du CoV Res Net. Dans ce cas, nous avons varié tous les coefficients de volatilité des réserves dans la plage [2%, 20%] et tracé la courbe correspondante du SCR pour chaque segment d'activité.

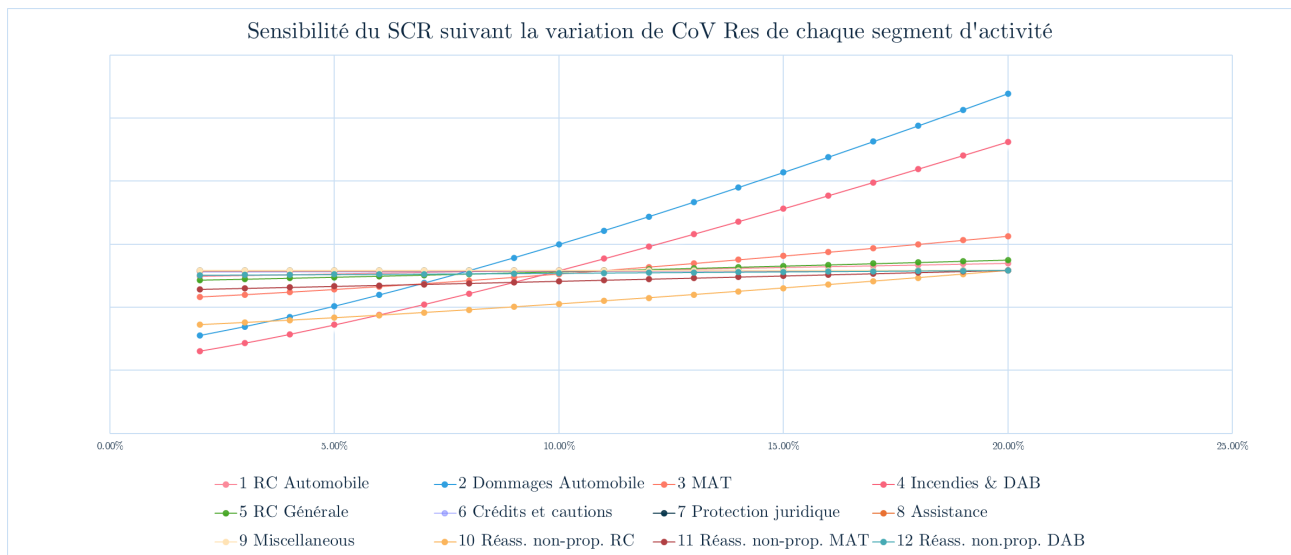


FIGURE 2.7 – Sensibilité du SCR suivant la variation de CoV Res Net de chaque segment d'activité

Les segments d'activité les plus sensibles, Dommages Automobile (2), MAT (3), Incendies et DAB (4), et Réassurance non-proportionnelle DAB (10), montrent des pentes plus raides dans les graphiques de sensibilité du SCR, tant pour la variation du CoV Prem Net que pour celle du CoV Res Net. Cela indique une plus grande réactivité aux variations des coefficients de volatilité, nécessitant une attention particulière dans la gestion des risques et l'allocation de capital.

2.5.3 Impact sur le ratio de solvabilité

Un indicateur plus approprié pour le pilotage de la solvabilité sous Solvabilité II est le ratio de solvabilité, défini comme le rapport des fonds propres au sens du bilan prudentiel et du SCR (formule standard) :

$$\frac{\text{fonds propres}}{\text{SCR}}$$

Un ratio de solvabilité élevé indique qu'une compagnie d'assurance est financièrement solide et capable de faire face à ses obligations. Cela rassure les régulateurs, les clients et les investisseurs sur la capacité de l'assureur à payer les sinistres et à rester solvable même en cas de pertes importantes.

Une compagnie avec un ratio de solvabilité de 2 signifie qu'elle a 2 Dirham de capital pour chaque dirham d'exigence de capital, indiquant une position financière relativement solide.

Le graphique suivant illustre l'effet sur le ratio de solvabilité pour une variation de 10% de la volatilité de chaque LOB, confirmant les observations précédentes sur les segments les plus sensibles.

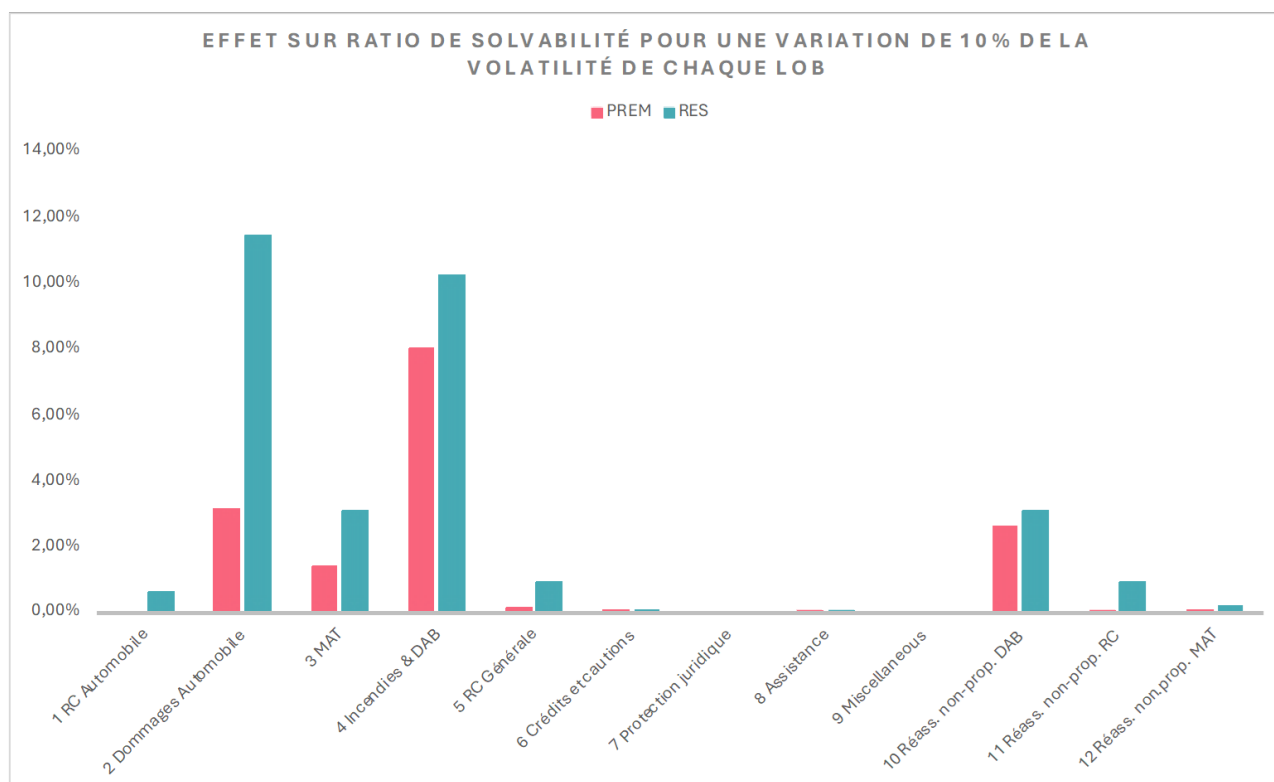


FIGURE 2.8 – Impact d’une Variation de 10% de la Volatilité sur le Ratio de Solvabilité par LOB

Ce graphique montre l’impact distinct des variations de volatilité des primes (en vert) et des réserves (en violet) sur le ratio de solvabilité. Pour les segments Dommages Automobile (2), MAT (3), Incendies et DAB (4), et Réassurance non-proportionnelle DAB (10), les barres sont significativement plus élevées, indiquant une sensibilité accrue à la variation de la volatilité. Toute modification de la volatilité dans ces segments entraîne un changement substantiel du ratio de solvabilité global de l’entreprise.

Les segments Incendies et DAB (4) et Réassurance non-proportionnelle DAB (10) montrent des impacts particulièrement élevés, confirmant leur sensibilité critique déjà observée dans les graphiques de sensibilité du SCR. La hauteur des barres pour ces segments souligne la nécessité de mesures de gestion des risques plus rigoureuses pour atténuer l’impact de la volatilité sur le ratio de solvabilité.

Le graphique suivant met en évidence l’importance cruciale de recalibrer les volatilités pour les primes et les réserves, en soulignant qu’une variation de 10% dans les volatilités des segments principaux identifiés entraîne une variation de l’ordre de 35% du ratio de solvabilité, ce qui est très significatif et nécessite une attention particulière dans la gestion des risques de la SCR.

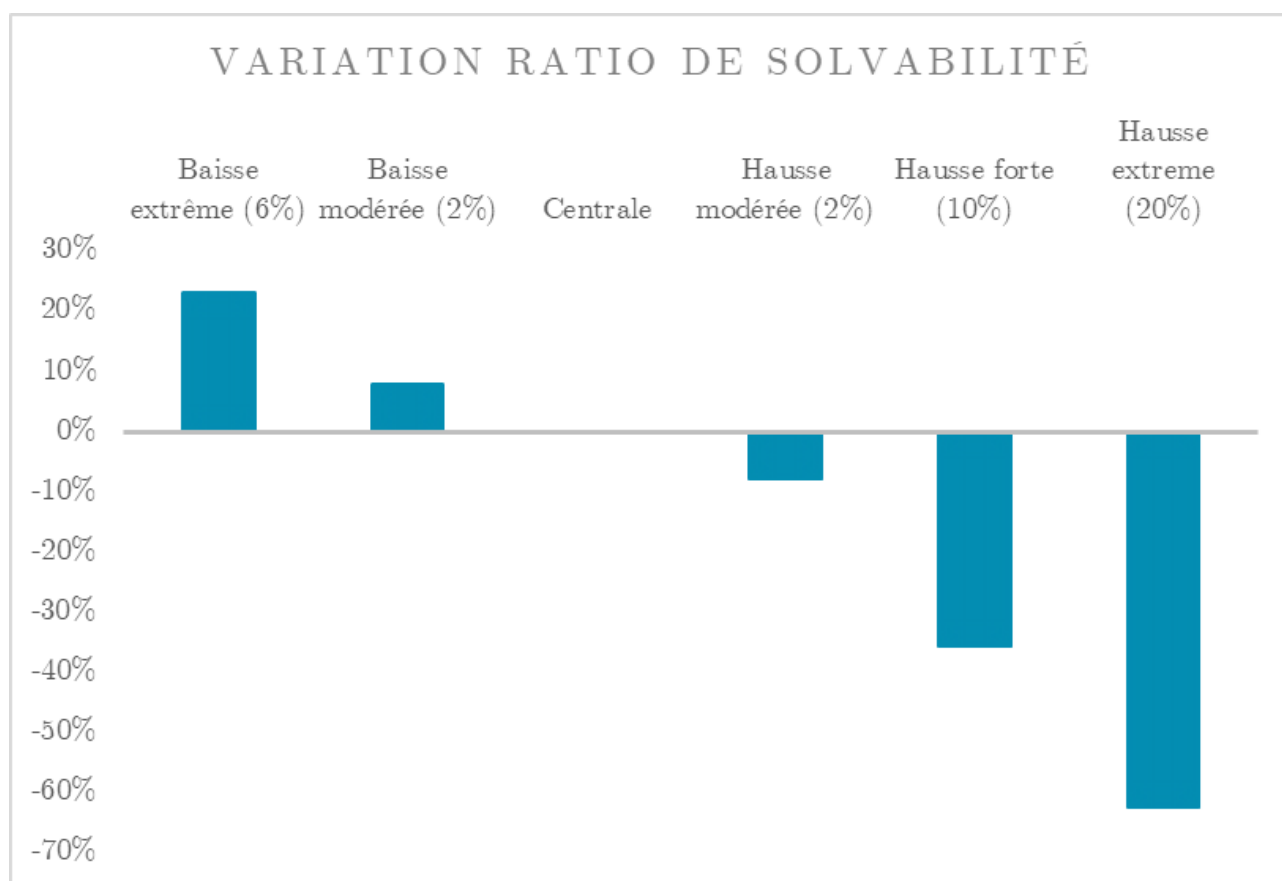


FIGURE 2.9 – Variation du ratio de solvabilité pour différentes variations des coefficients de volatilité

Pour tracer ce graphe, nous avons varié les coefficients de volatilité des quatre segments d'activité les plus sensibles : Dommages Automobile (2), MAT (3), Incendies et DAB (4), et Réassurance non-proportionnelle DAB (10). Nous avons appliqué différentes variations, allant de baisses extrêmes à des hausses extrêmes, et recalculé le ratio de solvabilité pour chaque cas. Les résultats montrent une diminution progressive du ratio de solvabilité avec l'augmentation de la volatilité. Une baisse extrême de 6% entraîne un ratio de solvabilité d'environ 210%, tandis qu'une hausse extrême de 20% le réduit à environ 120%, représentant une variation de l'ordre de 35%.

Cette analyse souligne l'importance de maintenir des coefficients de volatilité bien calibrés pour les segments les plus sensibles. Une gestion rigoureuse de ces paramètres est essentielle pour assurer la stabilité financière et la solvabilité de l'entreprise. Des variations importantes dans les coefficients de volatilité peuvent avoir un impact dramatique sur le ratio de solvabilité, mettant en péril la solidité financière de la SCR. Il est donc crucial de procéder à des ajustements précis et continus des coefficients de volatilité pour garantir un ratio de solvabilité robuste et résilient face aux fluctuations du marché et aux risques inhérents à ces segments d'activité critiques.

Chapitre 3

Undertake specific parameters - USP

Dans ce troisième chapitre, nous allons approfondir les aspects techniques des risques de prime et de réserve, essentiels pour calibrer notre modèle de risque. Les méthodes appliquées ici permettent de quantifier avec précision le niveau de risque associé à chaque catégorie de réassurance, impactant directement le calcul du Capital de Solvabilité Requis (SCR).

Les Undertaking Specific Parameters (USP) sont des paramètres que les entreprises d'assurance et de réassurance peuvent calibrer en interne pour remplacer certains paramètres standards de la formule de calcul du capital de solvabilité requis (SCR) dans le cadre de Solvabilité II. Cette possibilité est offerte pour mieux refléter le profil de risque spécifique de l'entreprise, plutôt que d'utiliser des paramètres génériques appliqués à toutes les entreprises.

Avantages :

1. La formule standard est calibrée sur un panel de portefeuilles européens et peut ne pas bien refléter le profil de risque spécifique de chaque entreprise. Les USP permettent de prendre en compte des aspects spécifiques et propres à chaque entreprise, offrant une estimation plus précise des besoins en capital.
2. L'utilisation des USP permet d'optimiser le capital de solvabilité requis sans recourir à des modèles internes ou partiels, qui sont plus coûteux et complexes à mettre en place. Les USP offrent une solution intermédiaire entre la formule standard et les modèles internes, permettant ainsi une meilleure gestion du capital et du risque.

Cadre d'utilisation : L'utilisation des USP n'est possible que dans les modules de risque Non vie, Vie et Santé. Ils sont plus précisément exploités dans les sous modules du risque de primes et de réserve, présents dans les modules de risque Santé non-SLT et Non vie, et dans le sous module du risque de révision présent dans les modules de risques Santé Similar to Life Techniques (SLT) et Vie. Ceci est dû à la décision de CEIOPS qui a trouvé que ce sont les risques qui varient le plus significativement d'une entreprise à l'autre.

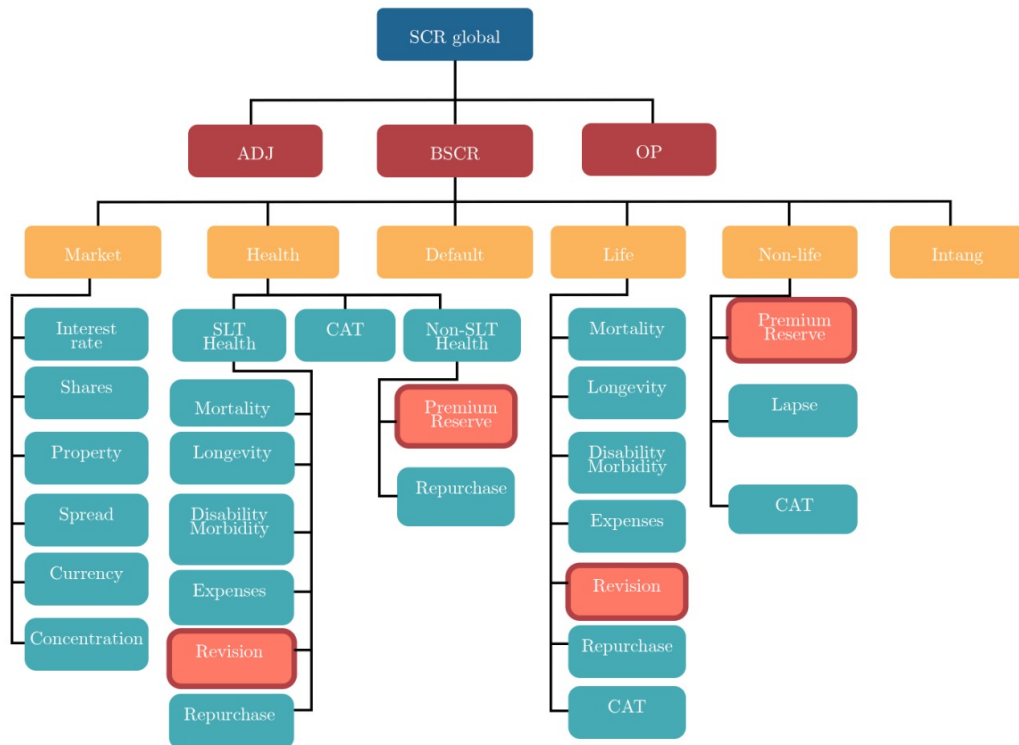


FIGURE 3.1 – Périmètre d’application des USP

Conditions d’applications : L’utilisation des USP est strictement encadrée par la réglementation. Les méthodes de calcul et les exigences sur les données doivent suivre des directives précises, et un processus d’autorisation est nécessaire auprès de l’Autorité de Contrôle Prudenciel et de Résolution (ACPR).

1. Utilisation de données fiables et appropriées
 - Les données doivent être complètes, fiables et appropriées, couvrant au moins un cycle complet (minimum 5 ans).
 - Les données peuvent être internes ou externes, doivent refléter les risques couverts pour l’année à venir, être nettes de réassurance et ajustées pour les catastrophes.
 - Les ajustements doivent améliorer la représentativité des données pour l’année à venir, sans augmenter l’erreur d’estimation.
 - L’assureur doit prouver que les données sont régulièrement étudiées et évaluées.
2. Obtention de l’approbation du régulateur
 - Il est impératif d’obtenir l’approbation de l’Autorité de Contrôle Prudenciel et de Résolution (ACPR) pour utiliser les USP.
 - Une fois approuvés, les USP ne peuvent être remplacés par la formule standard à moins que les conditions initiales ne soient plus valables
 - Les méthodes de calcul doivent être conservées chaque année et appliquées de manière complète sur toutes les branches.

3. Évaluation par l'autorité de contrôle

- L'autorité de contrôle vérifie la complétude du dossier dans les 30 jours et demande des compléments si nécessaire.
- L'évaluation de la demande peut prendre jusqu'à 6 mois, avec une décision écrite de l'autorité de contrôle.
- En cas de non-approbation, les motifs sont communiqués à l'entreprise concernée.
- L'autorité peut approuver un sous-ensemble de paramètres ou de segments.

4. Révocation de l'approbation :

L'autorité de contrôle peut révoquer l'approbation si l'entreprise ne respecte plus les spécifications de Solvabilité II ou souhaite revenir aux paramètres standards.

Facteur de crédibilité : Afin de mesurer la confiance que les données apportent, l'EIOPA a mis en place un facteur de crédibilité dans le cadre des USP : en fonction du nombre d'années d'historique de l'assureur, l'impact du paramètre de volatilité calibré sur l'historique peut être diminué. La formule appliquée est :

$$X_{s,(USP)} = c \cdot X_{s,(y)} + (1 - c) \cdot X_s$$

où $X_{s,(USP)}$ est le paramètre USP final, c est le facteur de crédibilité, $X_{s,(y)}$ est le paramètre intermédiaire calibré, et X_s est le paramètre selon la Formule Standard.

La valeur de l'USP calibré est ajustée d'un facteur dit de crédibilité afin de prendre en compte le caractère crédible h de reestimation, au regard de la profondeur d'historique des données qui ont permis de l'évaluer. Il est fixé par l'EIOPA et dépend de la branche considérée.

Pour les branches RC générale, RC Automobile et Crédit/Caution :

Profondeur d'historique (années)	Facteur de crédibilité (c)
5	34%
6	43%
7	51%
8	59%
9	67%
10	74%
11	81%
12	87%
13	92%
14	96%
≥15	100%

TABLE 3.1 – Facteur de crédibilité en fonction de la profondeur historique

Pour les autres branches :

Profondeur d'historique (années)	Facteur de crédibilité (c)
5	34%
6	51%
7	67%
8	81%
9	92%
≥ 10	100%

TABLE 3.2 – Facteur de crédibilité en fonction de la profondeur historique pour les autres branches

Notre étude concerne l'application des USP juste pour les sous modules du risque de primes et de réserve du module de Non vie.

3.1 Calibrage du risque de prime $\sigma_{prem,s}$

L'EIOPA ne propose qu'une seule méthode pour évaluer la volatilité du risque de prime. Elle consiste à mesurer la volatilité du risque de primes en supposant que les pertes suivent une loi log normale et en estimant par maximum de vraisemblance l'écart-type du ratio de sinistres sur primes par survenance en se basant sur l'historique.

Méthode du maximum de vraisemblance

Données d'entrée

Les données servant à l'estimation de l'écart type propre à l'entreprise dans le segment s sont les suivantes :

- **Les paiements effectués et les meilleures estimations de la provision pour sinistres à payer** dans le segment s après la première année de développement suivant l'année d'accident de ces sinistres (pertes agrégées).
- **Les primes acquises** dans le segment s.

Ces pertes agrégées et primes acquises sont disponibles séparément pour chaque année d'accident des sinistres d'assurance et de réassurance dans le segment s.

Exigences relatives aux données propres à la méthode

- Les données doivent être représentatives du risque de primes auquel l'entreprise d'assurance ou de réassurance est exposée pendant les douze mois à venir.
- Les données doivent être disponibles pour **cinq années** d'accident consécutives au moins.
- les pertes agrégées doivent être retraitées des sinistres catastrophiques (le risque de sinistre catastrophique étant déjà pris en compte dans le sous-modules « risque de catastrophe en non-vie » et « risque de catastrophe en santé »)

- les pertes agrégées doivent inclure les frais de gestion des engagements d'assurance et de réassurance.

Notations

Seront utilisées dans cette démonstration les notations suivantes :

- T est le nombre d'années d'historique,
- les années de souscription sont représentées par t , avec $t \in \{1, \dots, T\}$,
- x_t est la somme des primes acquises pendant l'année de souscription t , la variable aléatoire représentant x_t sera notée X_t ,
- y_t est la charge de sinistre après la première année de développement pour l'année de souscription t , la variable aléatoire représentant y_t sera notée Y_t ,
- $X_{i,j}$ est la somme des paiements incrémentaux pour l'année de souscription i et l'année de développement j ,
- $\text{Prov}_{i,j}$ est la somme des provisions pour sinistres à payer et des provisions pour sinistres inconnus pour l'année de souscription i et l'année de développement j ,
- β est le ratio sinistres sur primes attendu,
- σ est l'écart type du risque de primes,
- δ est le paramètre de mélange.

La charge de sinistre après la première année de développement pour l'année de souscription t est donnée pour $t \in \{1, \dots, T\}$ par :

$$y_t = X_{t,1} + \text{Prov}_{t,1}$$

Hypothèses de la méthode

Pour chaque segment, les données doivent vérifier les quatre hypothèses suivantes :

- pour une année de survenance donnée, la charge de sinistre attendue $\mathbb{E}[Y_t]$ est en relation proportionnelle avec les primes acquises X_t , ce qui se traduit par :

$$\mathbb{E}[Y_t] = \beta X_t$$

- pour une année de survenance donnée, la variance de la charge de sinistre Y_t est en relation quadratique avec les primes acquises X_t :

$$\text{Var}(Y_t) = \sigma^2[(1 - \delta)\bar{X}X_t + \delta X_t^2] \quad \text{avec} \quad \bar{X} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T X_t$$

Quand $\delta = 0$, la variance est proportionnelle à l'exposition et quand $\delta = 1$, la variance est proportionnelle au carré de l'exposition.

- la charge de sinistre Y_t suit une loi log-normale,
- l'estimation par maximum de vraisemblance est adéquate.

Pour rappel, l'expression de la fonction de densité d'une variable aléatoire Y suivant une loi log-normale de paramètres $\mu \in \mathbb{R}$ et $\omega > 0$ est :

$$f(y; \mu, \omega) = \frac{1}{y\omega\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln(y)-\mu)^2}{2\omega^2}}, \quad \text{avec } y \in]0; +\infty[$$

De plus :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[Y] &= e^{\mu + \frac{\omega^2}{2}}, \\ V(Y) &= (e^{\omega^2} - 1)e^{2\mu + \omega^2}. \end{aligned}$$

Les paramètres μ_t et ω_t de la distribution de Y_t peuvent donc être exprimés de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \mu_t &= \ln(\mathbb{E}[Y_t]) - \frac{\omega_t^2}{2} = \ln(\beta X_t) - \frac{\omega_t^2}{2} \\ \omega_t^2 &= \ln\left(\frac{V(Y_t)}{(\mathbb{E}[Y_t])^2} + 1\right) = \ln\left(\frac{V(Y_t)}{(\beta X_t)^2} + 1\right) \end{aligned}$$

Méthode

Afin d'adopter les mêmes notations que celles utilisées dans les Actes Délégués, on pose $\gamma = \ln\left(\frac{\sigma}{\beta}\right)$ et $\pi_t(\delta, \gamma)$ avec :

$$\begin{aligned} \pi_t(\delta, \gamma) &= \frac{1}{\omega_t^2} \\ &= \frac{1}{\ln\left(\frac{V(Y_t)}{(\beta X_t)^2} + 1\right)} \\ &= \frac{1}{\ln\left(\frac{\sigma^2[(1-\delta)\bar{X}X_t + \delta X_t^2]}{(\beta X_t)^2} + 1\right)} \\ &= \frac{1}{\ln\left(e^{2\gamma}\left((1-\delta)\frac{\bar{X}}{X_t} + \delta\right) + 1\right)} \end{aligned}$$

Le coefficient $\gamma = \ln\left(\frac{\sigma}{\beta}\right)$ aide à mesurer l'élasticité de la variance des sinistres par rapport à la valeur moyenne des sinistres normalisée par les primes. Ce coefficient joue un rôle fondamental dans le calcul de ω_t^2 (la variance log-transformée de Y_t).

Avec f la fonction de densité de la loi log-normale, la fonction de vraisemblance du modèle est :

$$L(y_1, \dots, y_T; \beta, \delta, \sigma) = \prod_{t=1}^T f(y_t; \beta, \delta, \sigma) = \prod_{t=1}^T \frac{1}{y_t \omega_t \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(\ln(y_t) - \mu_t)^2}{2\omega_t^2}\right)$$

$$\begin{aligned}
\ln[L(y_1, \dots, y_T; \beta, \delta, \sigma)] &= \sum_{t=1}^T \left[-\ln(\omega_t) - \ln(y_t \sqrt{2\pi}) - \frac{(\ln(y_t) - \mu_t)^2}{2\omega_t^2} \right] \\
&= \sum_{t=1}^T \left[-\ln(\omega_t) - \ln(y_t \sqrt{2\pi}) - \frac{1}{2\omega_t^2} \left(\ln(y_t) - \ln(\beta x_t) + \frac{\omega_t^2}{2} \right)^2 \right] \\
&= \sum_{t=1}^T \left[\frac{\ln(\pi_t(\delta, \gamma))}{2} - \ln(y_t \sqrt{2\pi}) - \frac{\pi_t(\delta, \gamma)}{2} \left(\ln \left(\frac{y_t}{x_t} \right) - \ln(\beta) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \ln(\sigma(\delta, \gamma)) - \ln(\sigma(\delta, \gamma)) + \frac{1}{2\pi_t(\delta, \gamma)} \right)^2 \right] \\
&= \sum_{t=1}^T \left[\frac{\ln(\pi_t(\delta, \gamma))}{2} - \ln(y_t \sqrt{2\pi}) - \frac{\pi_t(\delta, \gamma)}{2} \left(\ln \left(\frac{y_t}{x_t} \right) + \gamma - \ln(\sigma(\delta, \gamma)) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{1}{2\pi_t(\delta, \gamma)} \right)^2 \right] \\
&= \sum_{t=1}^T \left[-\frac{\pi_t(\delta, \gamma)}{2} \left(\ln \left(\frac{y_t}{x_t} \right) + \frac{1}{2\pi_t(\delta, \gamma)} + \gamma - \ln(\sigma(\delta, \gamma)) \right)^2 \right] \\
&\quad + \sum_{t=1}^T \frac{\ln(\pi_t(\delta, \gamma))}{2} - \sum_{t=1}^T -\ln(y_t \sqrt{2\pi})
\end{aligned}$$

Résoudre l'équation $\frac{\partial \ln[L(y_1, \dots, y_T, \beta, \delta, \sigma)]}{\partial \sigma} = 0$ permet d'obtenir l'expression de $\hat{\sigma}(\delta, \gamma)$:

$$\hat{\sigma}(\hat{\delta}, \hat{\gamma}) = \exp \left(\hat{\gamma} + \frac{\frac{1}{2}T + \sum_{t=1}^T \pi_t(\hat{\delta}, \hat{\gamma}) \cdot \ln \left(\frac{y_t}{x_t} \right)}{\sum_{t=1}^T \pi_t(\hat{\delta}, \hat{\gamma})} \right)$$

Les valeurs des paramètres $\hat{\delta}$ et $\hat{\gamma}$ étant celles qui maximisent la fonction de log-vraisemblance du modèle, ce qui revient à minimiser le terme :

$$\sum_{t=1}^T \pi_t(\hat{\delta}, \hat{\gamma}) \left(\ln \left(\frac{y_t}{x_t} \right) + \frac{1}{2\pi_t(\hat{\delta}, \hat{\gamma})} + \hat{\gamma} - \ln(\hat{\sigma}(\hat{\delta}, \hat{\gamma})) \right)^2 - \sum_{t=1}^T \ln(\pi_t(\hat{\delta}, \hat{\gamma})).$$

Il est encore nécessaire de corriger le biais de l'estimateur $\hat{\sigma}(\hat{\delta}, \hat{\gamma})$. L'écart type du risque de primes pour le segment concerné est alors donné par :

$$\sigma_{\text{primes, USP}} = \hat{\sigma}(\hat{\delta}, \hat{\gamma}) \cdot \sqrt{\frac{T+1}{T-1}}$$

3.2 Calibrage du risque de réserve $\sigma_{res,s}$

Pour le risque de réserve, l'entreprise a le choix entre deux méthodes permettant de calibrer la valeur de l'USP associé : une méthode Log-Normale semblable à celle utilisée pour le risque de primes ou une méthode s'appuyant sur une formule fermée développée par Mario V. Wütrich et

Michael Merz. On va de plus ajouter une troisième méthode de Bootstrap qui va servir comme référence de comparaison.

3.2.1 Méthode du maximum de vraisemblance

Cette méthode s'agit de la même méthode que celle développée pour le risque de prime avec une redéfinition et une interprétation des différents symboles. Dans le cas du risque de réserve, elle se base sur la volatilité du boni-mali de provisions par exercice.

3.2.1.1 Données d'entrée

Les données servant à l'estimation de l'écart type propre à l'entreprise pour le risque de réserve en non-vie dans le segment s sont :

- la somme de **la meilleure estimation de la provision établie à la fin de l'exercice** pour les sinistres qui étaient à payer en début d'exercice dans le segment s et des **paiements effectués durant l'exercice** pour les sinistres qui étaient à payer en début d'exercice dans le segment s ;
- **la meilleure estimation de la provision pour sinistres à payer** dans le segment s au **début de l'exercice**.

Ces pertes agrégées et primes acquises sont disponibles séparément pour chaque année d'accident des sinistres d'assurance et de réassurance dans le segment s .

3.2.1.2 Exigences sur les données

Les données utilisées doivent être disponibles par segment et répondre aux exigences suivantes

- elles doivent couvrir au minimum cinq années consécutives d'historique,
- elles doivent être représentatives du risque de réserve de l'entreprise pour les douze mois à venir,
- les pertes agrégées doivent inclure les frais de gestion des engagements d'assurance et de réassurance.

Notations

Seront utilisées dans cette méthode les notations suivantes :

- T est le nombre d'années d'historique,
- les années d'exercice sont représentées par t , avec $t \in 1, \dots, T$
- X_t est la meilleure estimation de la provision pour sinistres au début de l'exercice t , la variable aléatoire représentant x_t sera notée X_t ,
- Y_t est la somme de la meilleure estimation de la provision établie en fin d'exercice t pour les sinistres qui étaient à payer en début d'exercice t et des paiements effectués durant l'exercice t pour les sinistres qui étaient à payer durant l'exercice t , la variable aléatoire représentant y_t sera notée Y_t ,

- $D_{i,j}$ sont les paiements incrémentaux pour l'année de survenance i et l'année de développement j ,
- $PCO_{i,j}$ est la Best Estimate des réserves pour l'année de souscription i et l'année de développement j ,
- σ est l'écart type du risque de réserve,
- δ est le paramètre de mélange.

Pour un exercice donné t , les montants x_t et y_t peuvent donc s'écrire :

$$X_t = \sum_{i+j=t+1} PCO_{i,j}$$

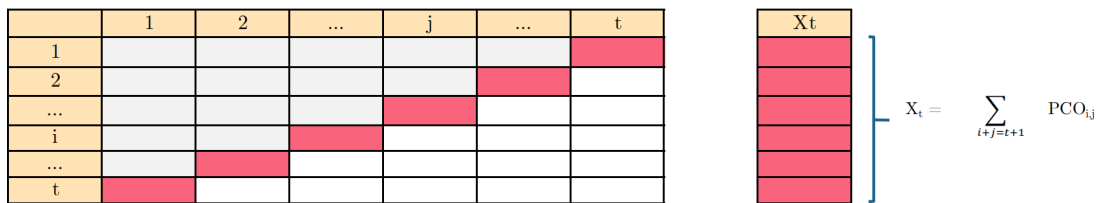


FIGURE 3.2 – Calcul du Best Estimate pour chaque année

$$Y_t = \sum_{\substack{i+j=t+2 \\ i < t+1}} D_{i,j} + \sum_{\substack{i+j=t+2 \\ i < t+1}} PCO_{i,j}$$

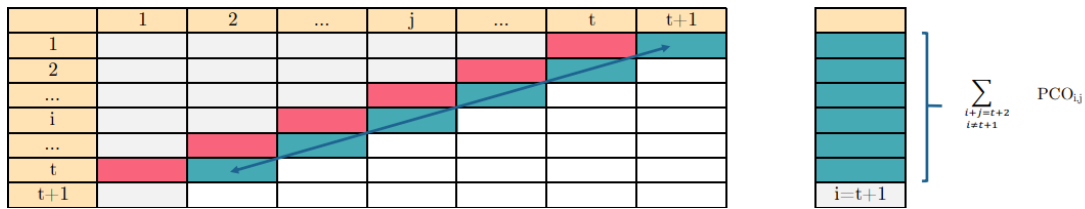


FIGURE 3.3 – Calcul des prestations incrémentaux

Pour un exercice donné t , on note les montants X_t et Y_t :

3.2.1.3 Hypothèses

Les hypothèses sont similaires à celles posées pour le risque de primes :

- $\mathbb{E}[Y_t]$ est en relation proportionnelle avec les X_t ,
- la variance de Y_t est en relation quadratique avec X_t ,
- Y_t suit une loi log-normale,
- l'estimation par maximum de vraisemblance est adéquate.

3.2.1.4 Méthode

La méthode étant identique à celle du risque de primes, ne seront données ici que les expressions nécessaires à l'implémentation du modèle.

L'estimateur $\hat{\sigma}(\hat{\delta}, \hat{\gamma})$ est donné par :

$$\hat{\sigma}(\hat{\delta}, \hat{\gamma}) = \exp \left(\hat{\gamma} + \frac{\frac{1}{2}T + \sum_{t=1}^T \pi_t(\hat{\delta}, \hat{\gamma}) \cdot \ln \left(\frac{y_t}{x_t} \right)}{\sum_{t=1}^T \pi_t(\hat{\delta}, \hat{\gamma})} \right)$$

Les valeurs des paramètres $\hat{\delta}$ et $\hat{\gamma}$ étant celles qui minimisent le terme :

$$\sum_{t=1}^T \pi_t(\hat{\delta}, \hat{\gamma}) \left(\ln \left(\frac{y_t}{x_t} \right) + \frac{1}{2\pi_t(\hat{\delta}, \hat{\gamma})} + \hat{\gamma} - \ln(\hat{\sigma}(\hat{\delta}, \hat{\gamma})) \right)^2 - \sum_{t=1}^T \ln(\pi_t(\hat{\delta}, \hat{\gamma})).$$

L'écart type du risque de réserve pour le segment concerné est donné par :

$$\sigma_{\text{reserve, USP}} = \hat{\sigma}(\hat{\delta}, \hat{\gamma}) \cdot \sqrt{\frac{T+1}{T-1}}$$

3.2.2 Méthode de Merz-Wüthrich :

La méthode de Merz-Wüthrich, introduite par Michael Merz et Mario Wüthrich en 2008, est une extension du modèle de Mack appliquée à un horizon d'un an. Contrairement au modèle de Mack qui calcule l'erreur de prédiction à l'ultime, la méthode Merz-Wüthrich se concentre sur l'erreur de prédiction du CDR (Claims Development Result) à un an. Cette méthode repose sur une formule fermée pour mesurer l'erreur de prédiction du CDR, qui est la différence entre l'estimation du Best Estimate à l'année I et l'estimation du Best Estimate de l'année I+1 ajoutée aux paiements en I+1 pour l'année I.

Le CDR vise à évaluer le risque associé à la réévaluation annuelle des provisions Best Estimate. La méthode utilise l'erreur moyenne quadratique de prédiction (MSEP) du CDR pour quantifier cette incertitude. La méthode Merz-Wüthrich offre alors une vision à un an du modèle de Mack, fournissant une mesure précise du risque de réévaluation des provisions d'assurance chaque année.

3.2.2.1 Données d'entrée

Les données servant à l'estimation de l'écart type propre à l'entreprise pour le risque de réserve en non-vie dans le segment s consistent en montants de paiements cumulés relatifs aux sinistres d'assurance ou de réassurance dans le segment s (montants de sinistres cumulés), indiqués séparément pour chaque année d'accident et chaque année de développement des paiements.

3.2.2.2 Exigences sur les données

Les données utilisées doivent être disponibles par segment et répondre aux exigences suivantes

- Elles doivent couvrir au minimum cinq années consécutives d'historique

- Elles doivent être représentatives du risque de réserve de l'entreprise pour les douze mois à venir.
- Pour la première année d'accident, le montant de paiements cumulé de la dernière année de développement pour laquelle des données sont disponibles inclut tous les paiements de l'année d'accident à quelque différence non significative près.
- Le nombre d'années d'accident consécutives pour lesquelles des données sont disponibles n'est pas inférieur au nombre d'années de développement consécutives de la première année d'accident pour laquelle des données sont disponibles
- Les pertes agrégées doivent inclure les frais de gestion des engagements d'assurance et de réassurance.

3.2.2.3 Notations

Seront utilisées dans cette démonstration les notations suivantes :

- i Année de survenance allant de 0 à I .
- j Année de développement allant de 0 à J .
- $C_{i,j}$ Montant des sinistres cumulés pour l'année de survenance i et d'année de développement j .
- D_I l'information des paiements cumulés connue l'année $t = I : \{C_{i,j}, i + j \leq I \text{ et } i \leq I\}$.
- R_i^I Réserves vues en I pour l'année de survenance i .
- f_j Facteurs de développement des sinistres.

3.2.2.4 Hypothèses de la méthode :

- Les paiements cumulés $C_{i,j}$ des différentes années de survenances sont indépendants.
- Les paiements cumulés $(C_{i,j})_{1 \leq j \leq J}$ dans la même année de survenance sont des processus de Markov, et il existe $f_j > 0$ et $\sigma_j > 0$ pour $1 \leq j \leq J$ et $1 \leq i \leq I$ de telle sorte que :
 - $\forall i, \mathbb{E}[C_{i,j} | C_{i,j-1}] = f_{j-1} \times C_{i,j-1}$
 - $\forall i, \text{Var}[C_{i,j} | C_{i,j-1}] = \sigma_{j-1}^2 \times C_{i,j-1}$

Nous remarquerons que les hypothèses sont les mêmes que pour la méthode de Mack, mais avec une condition plus forte sur les montants des sinistres cumulés avec l'ajout d'une clause "Markovienne".

3.2.2.5 Méthode

La volatilité des règlements est établie en effectuant un Back-Testing entre les règlements effectués entre deux années consécutives et ceux qui auraient été simulés avec le facteur de développement calculé par la méthode de Mack.

Les facteurs de développement vues à l'année I sont estimés par la méthode de Mack par :

$$f_j^I = \frac{\sum_{i=0}^{I-j-1} C_{i,j+1}}{S_j^I} \text{ avec } S_j^I = \sum_{i=0}^{I-j-1} C_{i,j}$$

Ces facteurs sont sans biais et non corrélés, comme l'a démontré Mack.

On obtient alors une estimation $\hat{C}_{i,I}$ sans biais des $C_{i,I}$ aux années I et $I + 1$, respectivement :

$$\hat{C}_{i,I}^I = \mathbb{E}[C_{i,I}|D_n] = C_{i,I-i} \prod_{j=I-i}^{I-1} f_j^I$$

$$\hat{C}_{i,I}^{I+1} = \mathbb{E}[C_{i,I}|D_{I+1}] = C_{i,I-i+1} \prod_{j=I-i+1}^{I-1} f_j^{I+1}$$

On définit alors le claims development result $CDR_i(I + 1)$ sur l'année comptable $[I, I + 1]$ et l'année de survenance i la différence entre deux estimations successives des paiements de sinistres à l'ultime. C'est-à-dire :

$$CDR_i(I + 1) = \mathbb{E}[C_{i,I}|D_I] - \mathbb{E}[C_{i,I}|D_{I+1}]$$

Au cours de l'année $[I, I + 1]$, les paiements incrémentaux $X_{i,I-i+1}$ pour chaque année de survenance i deviennent connus :

$$X_{i,I-i+1} = C_{i,I-i+1} - C_{i,I-i}$$

Le *Claim Development Result* s'exprime donc aussi en fonction de $X_{i,I-i+1}$:

$$CDR_i(I + 1) = \mathbb{E}[C_{i,I}|D_I] - (X_{i,I-i+1} + \mathbb{E}[C_{i,I+1}|D_{I+1}])$$

La méthode de Merz et Wüthrich n'ambitionne pas d'avoir une vision de l'erreur sur l'estimation de la charge ultime, mais plutôt de l'erreur de prédiction à 1 an. Ils considèrent la différence entre l'estimation de la charge ultime calculée en $t = I$ et la prédiction de la charge ultime calculée en $t = I + 1$. Cette différence est appelée Claims Development Result, notée CDR_i pour l'année de survenance i .

Le CDR réel est la somme des CDR par année de survenance :

$$CDR = \sum_{i=1}^I CDR_i$$

Ce CDR est appelé « *true CDR* » car les facteurs de développement de Chain-Ladder ne sont pas connus à l'instant I . Cependant, on possède une estimation \hat{f}_j de ces coefficients. On peut alors obtenir un CDR , dit *observable CDR*, comme suit :

$$C\hat{D}R_i(I + 1) = \hat{C}_{i,I}^I - \hat{C}_{i,I}^{I+1}$$

Le CDR observable est la somme des CDR observables par année de survenance :

$$C\hat{D}R = \sum_{i=1}^I C\hat{D}R_i$$

C'est l'erreur de prédiction du CDR observable qui est mesurée par cette méthode, par l'approximation de l'écart-type de l'erreur de prédiction (*Mean Squared Error of Prediction*, notée MSEP) :

$$MSEP = \mathbb{E} \left[\left(\sum_{i=1}^I C\hat{D}R_i(I+1) - 0 \right)^2 \mid D_I \right]$$

La volatilité sans biais est donnée par :

$$\forall j \in [0; J-2], \sigma_j^2 = \frac{1}{I-j-1} \sum_{i=0}^{I-j-1} C_{i,j} \times \left(\frac{C_{i,j+1}}{C_{i,j}} - \hat{f}_j \right)^2$$

Pour $j = J-1$, une méthode approchée a été développée par Mack pour pouvoir garder l'absence de biais :

$$\hat{\sigma}_{J-1}^2 = \min(\sigma_{J-2}^2, \sigma_{J-3}^2, \sigma_{J-2}^4 / \sigma_{J-3}^2)$$

Si J est la dernière année de développement et que le développement est terminé, alors σ_{J-1}^2 peut être nulle. Pour $j = J$, le Back-Testing n'étant plus possible, $\hat{\sigma}_J^2 = 0$. L'incertitude de prédiction du CDR observable autour de zéro est estimée par :

$$MSEP = \mathbb{E} \left[\left(\sum_{i=1}^I C\hat{D}R_i(I+1) - 0 \right)^2 \mid D_I \right]$$

On peut décomposer cette erreur de prédiction entre :

- Un terme

$$(u - \text{bias})^2$$

qui est le résultat du biais attendu entre l'observable CDR et son estimation (0), qui peut s'interpréter comme l'erreur d'estimation.

- Un deuxième terme appelé variance process, qui représente l'incertitude liée au caractère aléatoire des variables à prédire.

$$MSEP = (u - \text{bias})^2 + \widehat{\text{Var}} \left(\sum_{i=1}^I C\hat{D}R_i(I+1) \mid D_I \right)$$

avec :

$$(u - \text{bias})^2 = \widehat{\mathbb{E}}_{D_I} \left[\left(\mathbb{E} \left[\sum_{i=1}^I C\hat{D}R_i(I+1) \mid D_I \right] - 0 \right)^2 \right]$$

Chaque élément est calculé indépendamment :

$$(u - \text{bias})^2 = \sum_{i=1}^I (\hat{C}_{i,J}^I)^2 \times \hat{\Delta}_{i,j} + 2 \sum_{i>k>0} \hat{C}_{i,J}^I \times \hat{C}_{k,J}^I \times \hat{\Lambda}_{k,J}^I$$

où :

$$\begin{aligned} \hat{\Lambda}_{k,J} &= \frac{C_{k,I-k}}{S_{I+1-k}^{I+1}} \times \left(\frac{\hat{\sigma}_{I-k}^2}{(\hat{f}_{I-k})^2} \right)^2 + \sum_{j=1}^{J-I+k+1} \left(\frac{C_{I-j,j}}{S_{I-j+1}^I} \times (\hat{\sigma}_j^2 / (\hat{f}_j)^2) \right)^2 \\ \hat{\Delta}_{i,j} &= \frac{(\hat{\sigma}_{I-i})^2 / (\hat{f}_{I-i})^2}{S_{I-i}^I} + \sum_{j=1}^{J-i+1} \left(\frac{C_{I-j,j}}{S_{j+1}^{I+1}} (\hat{\sigma}_j^2 / (\hat{f}_j)^2) \right)^2 \end{aligned}$$

On a :

$$\widehat{\text{Var}} \left(\sum_{i=1}^I C \hat{D} R_i(I+1) \mid D_I \right) = \sum_{i=1}^I \hat{\Gamma}_{i,j}^I + 2 \sum_{i>k>0} \hat{\Upsilon}_{i,k}^I$$

où :

$$\begin{aligned} \hat{\Gamma}_{i,j}^I &= \widehat{\text{Var}}(C \hat{D} R_i(I+1) \mid D_I) \\ &= (\hat{C}_{i,J}^I)^2 \left(\left[1 + \left(\frac{\hat{\sigma}_{I-i}^2}{(\hat{f}_{I-i})^2} \right)^2 \times \frac{C_{i,I-i}}{S_{I-i}^I} \right] \times \prod_{l=I-i+1}^{J-1} \left(1 + \left(\frac{\hat{\sigma}_l^2}{(\hat{f}_l)^2} \right)^2 \times \frac{C_{I,l}}{S_{l+1}^{I+1}} \right) - 1 \right) \end{aligned}$$

Et $\forall i \geq 1$:

$$\begin{aligned} \Upsilon_{i,k}^I &= \widehat{\text{Cov}}(C \hat{D} R_i(I+1), C \hat{D} R_k(I+1) \mid D_I) \\ &= \hat{C}_{i,J}^I \hat{C}_{k,J}^I \left(\left[1 + \left(\frac{\hat{\sigma}_{I-k}^2}{(\hat{f}_{I-k})^2} \right)^2 \times \frac{C_{k,I-k}}{S_{I+1-k}^{I+1}} \right] \times \prod_{l=I-k+1}^{J-1} \left(1 + \left(\frac{\hat{\sigma}_l^2}{(\hat{f}_l)^2} \right)^2 \times \frac{C_{I,l}}{S_{l+1}^{I+1}} \right) - 1 \right) \end{aligned}$$

pour $i > k > 0$.

Pour approximer les expressions précédentes, le lemme suivant sera utilisé :

Lemme Si les x_j sont des constantes positives telles que $x_j \ll 1$, alors :

$$\prod_{j=1}^J (1 + x_j) \approx 1 + \sum_{j=1}^J x_j$$

En supposant que $\left(\frac{\hat{\sigma}_l^2}{(\hat{f}_l)^2} \right)^2 \frac{C_{I,l}}{S_{l+1}^{I+1}} \ll 1$, nous avons l'approximation de $\hat{\Gamma}_{i,j}^I$ et $\Upsilon_{i,k}^I$:

$$\begin{aligned} - \hat{\Gamma}_{i,j}^I &\approx (\hat{C}_{i,J}^I)^2 \left(\left(\frac{\hat{\sigma}_{I-i}^2}{(\hat{f}_{I-i})^2} \right)^2 \times \frac{C_{i,I-i}}{S_{I-i}^I} + \sum_{l=I-i+1}^{J-1} \left(\frac{\hat{\sigma}_l^2}{(\hat{f}_l)^2} \right)^2 \times \frac{C_{I,l}}{S_{l+1}^{I+1}} \right), 8 \\ - \Upsilon_{i,k}^I &\approx \hat{C}_{i,J}^I \hat{C}_{k,J}^I \left(\left(\frac{\hat{\sigma}_{I-k}^2}{(\hat{f}_{I-k})^2} \right)^2 \times \frac{C_{k,I-k}}{S_{I+1-k}^{I+1}} + \sum_{l=I-k+1}^{J-1} \left(\frac{\hat{\sigma}_l^2}{(\hat{f}_l)^2} \right)^2 \times \frac{C_{I,l}}{S_{l+1}^{I+1}} \right). \end{aligned}$$

En remplaçant dans l'équation de la *MSEP*, nous obtenons alors l'approximation de la *MSEP* :

$$\begin{aligned}
MSEP &= (u - \text{bias})^2 + \widehat{\text{Var}} \left(\sum_{i=1}^I C \hat{D} R_i(I+1) \mid D_I \right) \\
&= \sum_{i=1}^I (\hat{C}_{i,J}^I)^2 \times \hat{\Delta}_{i,j} + \hat{\Gamma}_{i,j}^I + 2 \sum_{i>k>0} \hat{C}_{i,J}^I \times \hat{C}_{k,J}^I \times \hat{\Lambda}_{k,J}^I \\
&\approx \sum_{i=1}^I (\hat{C}_{i,J}^I)^2 \left(\sum_{j=1}^{J-1} \frac{C_{I-j,j}}{S_{I+1-j}^{I+1}} \left(\frac{\hat{\sigma}_j^2}{(\hat{f}_j)^2} \right)^2 \right) + 2 \sum_{i>k>0} \hat{C}_{i,J}^I \times \hat{C}_{k,J}^I \left(\sum_{j=1}^{J-1} \frac{C_{I-j,j}}{S_{I+1-j}^{I+1}} \left(\frac{\hat{\sigma}_j^2}{(\hat{f}_j)^2} \right)^2 \right)
\end{aligned}$$

avec :

$$\hat{Q}_j = \frac{\hat{\sigma}_j^2}{\hat{f}_j^2}$$

Il est possible de simplifier l'expression obtenue en remarquant que :

$$\forall j \in [0; J-1], S_{j+1}^I = S_j^I + C_{I,j}$$

Ainsi, nous avons que :

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{J-1} \frac{C_{I-j,j}}{S_{I+1-j}^{I+1}} \left(\frac{\hat{\sigma}_j^2}{(\hat{f}_j)^2} \right)^2 + \sum_{j=1}^{J-1} \frac{C_{I-j,j}}{S_{I+1-j}^{I+1}} \left(\frac{\hat{\sigma}_j^2}{(\hat{f}_j)^2} \right)^2 &= \sum_{j=1}^{J-1} \frac{C_{I-j,j}}{S_{I+1-j}^{I+1}} \left(\frac{\hat{\sigma}_j^2}{(\hat{f}_j)^2} \right)^2 \\
\sum_{j=1}^{J-1} \left(\frac{C_{I-j,j}}{S_j^{I+1}} \left(\frac{\hat{\sigma}_j^2}{(\hat{f}_j)^2} \right)^2 \right) + \sum_{j=1}^{J-1} \left(\frac{C_{I-j,j}}{S_{I+1-j}^{I+1}} \left(\frac{\hat{\sigma}_j^2}{(\hat{f}_j)^2} \right)^2 \right) &
\end{aligned}$$

Finalement, l'expression de la *MSEP* est :

$$\begin{aligned}
MSEP &= \sum_{i=1}^I (\hat{C}_{i,J}^I)^2 \left(\hat{Q}_{I-i} \frac{C_{I-i}}{S_{I-i}} + \sum_{j=1}^{J-1} \frac{C_{I-j,j}}{S_j^{I+1}} \left(\frac{\hat{\sigma}_j^2}{(\hat{f}_j)^2} \right)^2 \right) \\
&\quad + 2 \sum_{i>k>0} \hat{C}_{i,J}^I \hat{C}_{k,J}^I \left(\sum_{j=1}^{J-1} \frac{C_{I-j,j}}{S_{I+1-j}^{I+1}} \left(\frac{\hat{\sigma}_j^2}{(\hat{f}_j)^2} \right)^2 \right)
\end{aligned}$$

La valeur de la variance du risque de réserve est donnée par :

$$\hat{\sigma}_{\text{réserve}} = \frac{\sqrt{MSEP}}{\text{PSAP}}$$

où PSAP représente le montant de la Provision Pour Sinistres à Payer, calculée à partir des

facteurs de développement donnés par la méthode de Chain-Ladder :

$$\text{PSAP} = \sum_{i=0}^I (\hat{C}_{i,J} - C_{i,J-i})$$

3.2.3 Bootstrap à un an

La méthode bootstrap présentée dans cette section fournit une distribution empirique du CDR dont la variance réplique l'erreur de prédiction de Wüthrich *et al.* (2008). En particulier, cette méthode permet d'inclure un facteur de queue simulé dans chaque itération bootstrap.

Cette méthodologie bootstrap d'un an est motivée par la nécessité de répliquer les résultats analytiques de Wüthrich *et al.* (2008) utilisés par le CEIOPS pour la calibration du risque de réserve et proposés à ce jour comme une méthode possible pour la calibration « spécifique à l'entreprise ». En effet, la méthodologie bootstrap proposée dans cette section réplique les expressions en forme fermée existantes, tout en surmontant les limites d'une telle approche. En fait, il n'est pas possible de dériver une distribution empirique complète à partir de la mesure des deux premiers moments proposée par Wüthrich *et al.* (2008) ou de diviser la distribution du CDR en paiements d'un an et en calcul de la meilleure estimation en un an sans hypothèse supplémentaire.

Avantages apportés :

- Cette méthode fournit une distribution empirique complète du CDR et n'est donc pas limitée au calcul des deux premiers moments. Elle mesure également le risque de réserve sans hypothèse sur la distribution du CDR et fournit une séparation entre les paiements d'un an et le calcul de la meilleure estimation en un an. Par conséquent, l'inclusion de cette méthode dans un modèle interne prenant en compte d'autres risques est directe.
- Le calcul de la distribution empirique du CDR permet également de prendre en compte toute la structure de dépendance entre les lignes d'affaires, celle-ci étant modélisée par exemple au moyen de copules.
- Cette méthode peut être étendue pour mesurer la variabilité du CDR en n années, ce qui est particulièrement utile dans le cadre de l'**ORSA** (Own Risk and Solvency Assessment). Ici aussi, on pourra obtenir les paiements de l'année $t + n$, $t + n + 1$ d'une part, et la meilleure estimation au temps $t + n + 1$ d'autre part.
- Enfin, cette méthode permet de prendre en compte les « règles de gestion », c'est-à-dire les normes internes de la compagnie d'assurance en matière de politique de provisionnement. Cela peut se traduire, par exemple, par l'exclusion de facteurs de développement individuels atypiques ou l'utilisation de la méthode **Bornhuetter-Ferguson** pour calculer la réclamation ultime pour les années d'accidents les plus récentes.

Présentation de l'algorithme

Afin de s'adapter à la contrainte temporelle de Solvabilité 2, on va appliquer la méthode de **Laurent Devineau** développée dans l'article 2 de la bibliographie.

Pour cette méthode, on travaille avec les triangles de règlements cumulés. Nous noterons dans la suite que la diagonale correspondant aux paiements effectués entre T_0 et $T_0 + 1$ sera appelée " diagonale $T_0 + 1$ ".

— Étape 1 :

1. Estimation des facteurs de développement individuels $(\hat{f}_j)_{0 \leq j \leq I-1}$ et $(\hat{\sigma}_j)_{0 \leq j \leq I-1}$ sur le triangle original des paiements cumulatifs $(C_{i,j})_{0 \leq i+j \leq I-1}$.
2. Calcul de la meilleure estimation BE_I au temps I par :

$$BE_I = \sum_{i=0}^I (\hat{C}_{i,\text{ult}} - C_{i,I-i}),$$

avec

$$\forall i \in \{1, \dots, I\}, \hat{C}_{i,\text{ult}} = \left(\prod_{j=I-i}^{I-1} \hat{f}_j \right) C_{i,I-i}.$$

3. Calcul des résidus des facteurs de développement individuels par :

$$\forall i, j : 0 \leq i + j \leq I - 1, \quad r_{i,j} = \frac{\sqrt{C_{i,j}}(f_{i,j} - \hat{f}_j)}{\hat{\sigma}_j}.$$

Les résidus sont ensuite ajustés par

$$\forall i, j : 0 \leq i + j \leq I - 1, \quad r_{i,j}^A = \sqrt{\frac{I-j}{I-j-1}} \frac{\sqrt{C_{i,j}}(f_{i,j} - \hat{f}_j)}{\hat{\sigma}_j}.$$

Enfin, ces résidus sont centrés. L'ajustement par le facteur $\sqrt{\frac{I-j}{I-j-1}}$ permet de corriger le biais lié au calcul de la variance bootstrap, afin de faire correspondre l'expression analytique de la variance et la dispersion de la distribution simulée.

Le Bootstrap suppose que les résidus sont i.i.d.

Ensuite, la méthode consiste à répéter **nb fois** les étapes suivantes :

Itération b

— Étape 2 :

Resampling avec remplacement des résidus dans le triangle supérieur et obtention d'un

triangle supérieur de pseudo-facteurs de développement observés au temps I :

$$\forall i, j : 0 \leq i + j \leq I - 1, \quad f_{i,j}^{b,I} = r_{i,j}^b \sqrt{\frac{\hat{\sigma}_j^2}{C_{i,j}}} + \hat{f}_j.$$

— **Étape 3 :**

Ré-estimation des facteurs Chain Ladder observés au temps I par

$$\forall j \in \{0, \dots, I - 1\}, \quad \hat{f}_j^{b,I} = \frac{\sum_{i=0}^{I-j-1} C_{i,j} f_{i,j}^{b,I}}{\sum_{i=0}^{I-j-1} C_{i,j}}.$$

Cela équivaut à calculer les facteurs Chain Ladder par la moyenne pondérée des facteurs de développement individuels, avec des poids égaux aux paiements cumulatifs du triangle original.

— **Étape 4 :**

Simulation des paiements sur un an afin de prendre en compte l'erreur de processus. Pour tout $i \in \{1, \dots, I\}$, calcul de $C_{i,I+1-i}^b$ en simulant une distribution log normale avec une moyenne $C_{i,I-i} f_{I-i}^{b,I}$ et une variance $C_{i,I-i} (\hat{\sigma}_{I-i}^I)^2$. On en déduit les paiements futurs pour l'exercice comptable suivant $(I, I + 1)$ par

$$P_{I+1}^b = \sum_{i=1}^I (C_{i,I+1-i}^b - C_{i,I-i}).$$

— **Étape 5 :**

Calcul de nouveaux facteurs de développement individuels $(f_{i,j}^{b,I+1})_{0 \leq i+j \leq I-1}$ sur la sous-diagonale simulée, et calcul de nouveaux facteurs Chain Ladder en fin d'année $(I, I + 1)$. Ces nouveaux facteurs Chain Ladder sont estimés par les paiements cumulatifs du triangle (information D_I) et les nouveaux facteurs de développement individuels de la manière suivante :

$$\forall j \in \{0, \dots, I - 1\}, \quad \hat{f}_j^{b,I+1} = \frac{\sum_{i=0}^{I-j-1} C_{i,j} f_{i,j}^{b,I+1} + C_{I-j,j} f_{I-j,j}^{b,I+1}}{\sum_{i=0}^{I-j-1} C_{i,j}}.$$

— **Étape 6 :**

Calcul de la meilleure estimation BE_{I+1}^b observée au temps $I + 1$, à partir de la sous-diagonale simulée $(C_{i,I+1-i}^b)_{1 \leq i \leq I}$, les pseudo-facteurs $(\hat{f}_j^{b,I+1})_{1 \leq j \leq I-1}$:

$$BE_{I+1}^b = \sum_{i=0}^I (\hat{C}_{i,\text{ult}} - C_{i,I+1-i}^b),$$

avec

$$\forall i \in \{2, \dots, I\}, \quad C_{i,\text{ult}}^b = \left(\prod_{j=I-i+1}^{I-1} \hat{f}_j^{b,I+1} \right) C_{i,I-i+1}.$$

— **Étape 7 :**Calcul du CDR de l'itération Nb :

$$CDR^b = BE_I - P_{I+1}^b - BE_{I+1}^b.$$

Fin Itération b

Le schéma suivant synthétise la méthode Bootstrap :

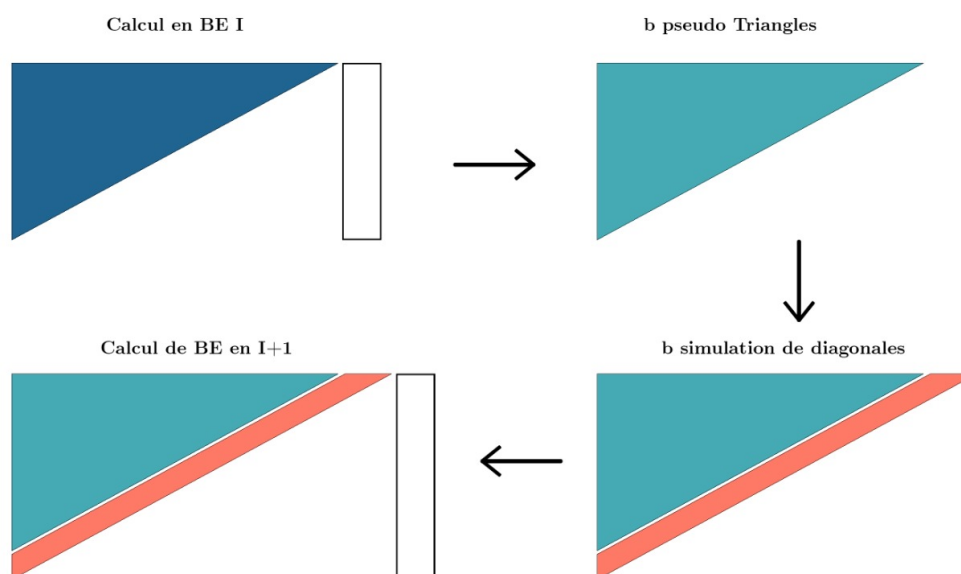


FIGURE 3.4 – Illustration de la méthode Bootstrap à un an

3.3 Application au portefeuille de SCR

D'après la partie 2.5 Analyse de sensibilité du portefeuille, nous avons conclu que les segments d'activité les plus sensibles sont : Dommages Automobile (2), MAT (3), Incendies et DAB (4), et Réassurance non-proportionnelle DAB (10). Notre recalibration des paramètres sera effectuée juste sur ces quatre segments.

Nous allons calculer les valeurs des variances pour le risque de primes et le risque de réserve pour les différents segments. Nous comparerons ensuite le SCR calculé selon la formule standard avec les variances fournies par l'EIOPA, ainsi qu'avec celui calculé à partir des variances issues des modèles, en analysant également les gains de points du ratio de solvabilité.

3.3.1 Résultats du calibrage du choc risque de prime

Avant d'appliquer les modèles à nos données, nous devons d'abord vérifié que les hypothèses relatives à ces derniers soient respectées afin que les valeurs obtenues soient significatives.

3.3.1.1 Vérification des hypothèses

- **H1** : pour une année de survenance donnée, la charge de sinistre attendue $\mathbb{E}[Y_t]$ est en relation proportionnelle avec les primes acquises X_t ,

Pour valider cette hypothèse, on peut procéder par utiliser des modèles de régression linéaire et examiner les coefficients et les p-values pour chaque LOB.

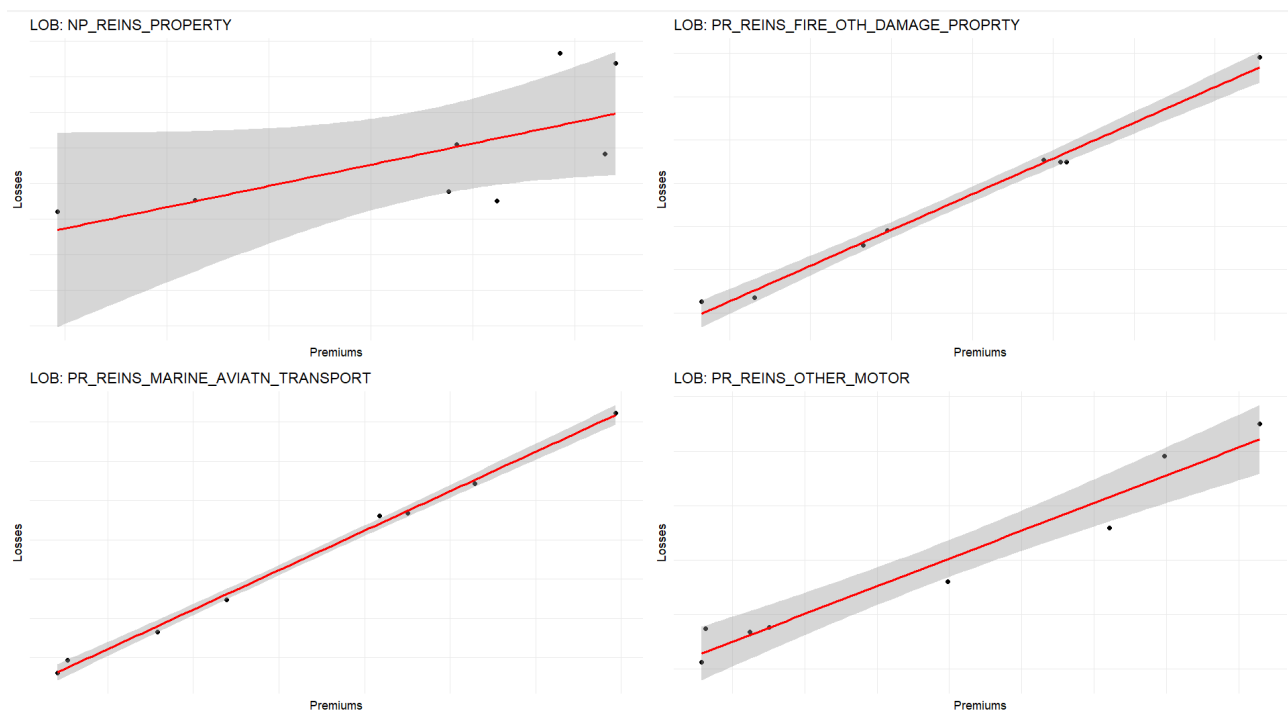


FIGURE 3.5 – Résultats des régressions linéaires entre Y_t et X_t

Les régressions linéaires montrent généralement une relation proportionnelle entre les primes acquises et les sinistres pour la majorité des lignes d'activité. Cependant, la faible quantité de données disponibles limite la robustesse des conclusions. Peu de points de données réduisent la précision des estimations des coefficients et augmentent la variabilité, ce qui peut conduire à une moindre fiabilité des résultats.

Examinons les p-values de ces régressions :

```

Regression for NP_REINS_PROPERTY :
Call:
lm(formula = y_values ~ x_values)

Residuals:
    Min       1Q   Median       3Q      Max
-88276017 -55387320  2001661  37295118 101310786

Coefficients:
            Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept) -1.420e+08  1.332e+08  -1.067  0.3271
x_values      5.968e-01  2.731e-01  2.185  0.0716
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 71100000 on 6 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.4431, Adjusted R-squared:  0.3503
F-statistic: 4.775 on 1 and 6 DF, p-value: 0.07155

Regression for FR_REINS_FIRE_OTH_DAMAGE_PROPERTY :
Call:
lm(formula = y_values ~ x_values)

Residuals:
    Min       1Q   Median       3Q      Max
-27914027 -19890609 -2574081  13715010  35496812

Coefficients:
            Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept) -9.348e+08  6.624e+07  -14.11  7.9e-06 ***
x_values      1.033e+00  4.159e-02  24.84  2.8e-07 ***
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 25260000 on 6 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.9904, Adjusted R-squared:  0.9888
F-statistic: 617.2 on 1 and 6 DF, p-value: 2.799e-07

Regression for PR_REINS_MARINE_AVIATN_TRANSPORT :
Call:
lm(formula = y_values ~ x_values)

Residuals:
    Min       1Q   Median       3Q      Max
-3612143 -2559948 -915100  2212343  4953493

Coefficients:
            Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept) -1.210e+08  7.294e+06  -16.59  3.05e-06 ***
x_values      1.006e+00  2.348e-02  42.83  1.08e-08 ***
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 3670000 on 6 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.9967, Adjusted R-squared:  0.9962
F-statistic: 1834 on 1 and 6 DF, p-value: 1.085e-08

Regression for PR_REINS_OTHER_MOTOR :
Call:
lm(formula = y_values ~ x_values)

Residuals:
    Min       1Q   Median       3Q      Max
-14161358 -5502251  707418  7612790 10695707

Coefficients:
            Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept) -2.713e+08  5.040e+07  -5.383  3.261e-06 **
x_values      1.018e+00  9.425e-02  10.799  3.73e-05 ***
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 9731000 on 6 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.9511, Adjusted R-squared:  0.9429
F-statistic: 116.6 on 1 and 6 DF, p-value: 3.731e-05

```

FIGURE 3.6 – Sortie R des régressions linéaires de Y_t en fonction de X_t

Les résultats des régressions linéaires montrent que, pour la majorité des lignes d'activité, il existe une forte relation proportionnelle entre les primes acquises et les sinistres. Les coefficients sont proches de 1 et les p-values sont très faibles pour plusieurs LOBs, ce qui valide l'hypothèse H1 pour ces cas. Cependant, pour **NP Property**, la preuve n'est pas aussi solide, ce qui peut être attribué à la quantité réduite de données disponibles, entraînant une variabilité accrue et une moindre précision des estimations.

- **H2** : pour une année de survenance donnée, la variance de la charge de sinistre Y_t est en relation quadratique avec les primes acquises X_t ,

Pour valider cette hypothèse, nous utilisons une approche de modélisation statistique. Le modèle est construit en ajustant une régression linéaire où la variable dépendante est Y_t^2 et les variables indépendantes sont X_t et X_t^2 . Cette méthode permet d'évaluer l'intensité et la signification de la relation quadratique entre ces deux variables.

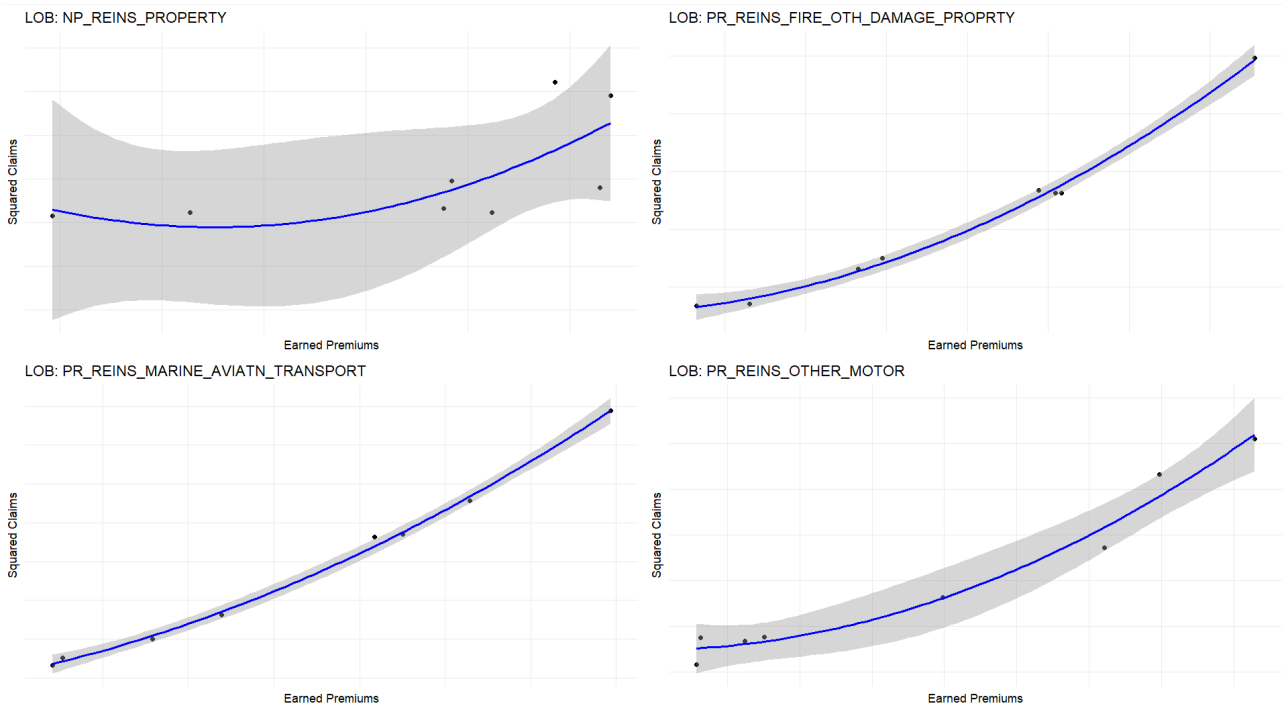


FIGURE 3.7 – Relation quadratique entre les primes acquises et les pertes

On observe que pour tous les LOB, la courbe de régression quadratique ajuste bien les données, indiquant une tendance croissante des charges de sinistre au carré avec l’augmentation des primes. Cela suggère une relation quadratique significative entre ces variables, validant ainsi l’hypothèse posée pour ces LOBs.

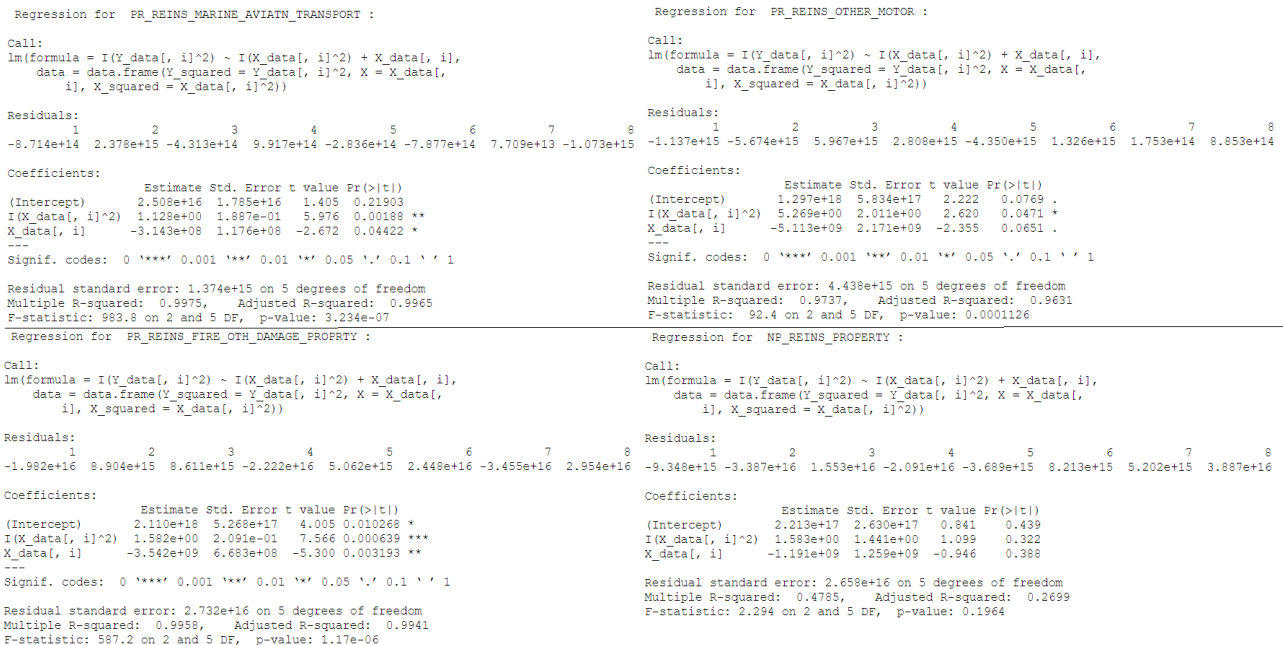


FIGURE 3.8 – Sortie R du test des relations quadratiques entre Y_t et X_t

Les résultats varient significativement entre les différentes lignes de business. Alors que pour les LOBs comme Fire and other property damage, MAT, et Motor other classes, la relation quadratique explique bien la variance des charges de sinistres par rapport aux primes ac-

quises, ce n'est pas le cas pour NP Property.

— **H3** : la charge de sinistre Y_t suit une loi log-normale,

Pour tester l'hypothèse H3, On peut utiliser le **test de Shapiro-Wilk**. C'est une approche appropriée car le test de Shapiro-Wilk est utilisé pour vérifier la normalité des données, et en testant la normalité des logarithmes des valeurs, on vérifie si les données suivent une distribution log-normale.

```
[1] "PR_REINS_FIRE_OTH_DAMAGE_PROPERTY" [1] "PR_REINS_MARINE_AVIATN_TRANSPORT"
[[1]]$Shapiro_Result                    [[2]]$Shapiro_Result
      Shapiro-Wilk normality test          Shapiro-Wilk normality test
data: log(y_positive)                    data: log(y_positive)
W = 0.92547, p-value = 0.4758             W = 0.93213, p-value = 0.5357
-----
[1] "NP_REINS_PROPERTY"                  [1] "PR_REINS_OTHER_MOTOR"
[[1]]$Shapiro_Result                    [[4]]$Shapiro_Result
      Shapiro-Wilk normality test          Shapiro-Wilk normality test
data: log(y_positive)                    data: log(y_positive)
W = 0.89741, p-value = 0.2738             W = 0.89114, p-value = 0.2398
```

FIGURE 3.9 – Sortie R des résultats du test Shapiro Wilk

Les résultats des tests de Shapiro-Wilk montrent que pour toutes les lignes de business testées, les valeurs p sont supérieures à 0.05, suggérant que les charges de sinistre suivent une distribution log-normale, **en accord avec l'hypothèse H3**.

Tableau Récapitulatif : Le tableau ci-dessous présente les résultats des tests :

Segment d'activité	H1	H2	H3
Motor, other classes	Validée	Validée	Validée
Marine, aviation, transport (MAT)	Validée	Validée	Validée
Fire and other property damage	Validée	Validée	Validée
Non-proportional reinsurance - property	Non validée	Non validée	Validée

TABLE 3.3 – Résumé des résultats des tests des hypothèses par ligne de business

Après avoir validé les hypothèses de notre approche, on procède maintenant au calibrage des chocs.

3.3.1.2 Présentation des résultats

Résultats pour la maille S2

Nous disposons d'un historique de **8 années** pour le calcul des volatilités pour le risque de prime. On commence par calibrer les σ_{inter} intermédiaires spécifiques à chaque segment d'activité. Ensuite, le sigma final pour chaque LoB est déduit en appliquant le facteur de crédibilité correspondant à 8 ans d'historique.

On obtient les résultats :

Segment d'activité	σ_{inter}	σ_{FS}	σ_{Prem}
Motor, other classes	8.40%	8%	8.24%
Marine, aviation, transport (MAT)	12.31%	15%	12.83%
Fire and other property damage	11.65%	8%	10.96%
Non-proportional reinsurance - property	15.20%	17%	15.54%

TABLE 3.4 – Calibrage du risque de prime selon la méthode du maximum de vraisemblance

Globalement, les résultats montrent que la méthode du maximum de vraisemblance produit des volatilités σ_{Prem} qui sont relativement proches des volatilités standard σ_{FS} mais avec quelques ajustements notables. La méthode semble corriger certaines surestimations ou sous-estimations de la formule standard, offrant ainsi une évaluation plus précise et spécifique à l'entreprise.

Segment d'activité	var SCR_{NL}	var Ratio de solva
Motor, other classes	+0.14%	-0.07%
Marine, aviation, transport (MAT)	-0.60%	+0.27%
Fire and other property damage	+3.72%	-1.74%
Non-proportional reinsurance - property	-0.77%	+0.35%

TABLE 3.5 – Impact des Sigmas sur le SCR_{NL} et le Ratio de Solvabilité

Les ajustements apportés par la méthode du maximum de vraisemblance affectent le ratio de solvabilité de manière variée, avec des augmentations ou des diminutions modestes selon les segments d'activité.

Variation	
SCR_{NL}	+2.55%
Ratio de solvabilité	-1.18%

TABLE 3.6 – Variation de SCR_{NL} et du Ratio de Solvabilité

l'effet global des recalibrations se traduit par une diminution du ratio de solvabilité de 1.18%. En effet, certains segments augmentent le ratio de solvabilité et d'autres le diminuent, ainsi

la diminution globale du ratio de solvabilité après la modification totale des paramètres est modérée.

Les variations observées indiquent une amélioration de la gestion des risques et de la solvabilité globale de l'entreprise.

3.3.2 Résultats du calibrage du choc risque de réserve

Dans cette partie, nous présenterons les résultats obtenus pour chaque méthode après avoir validé les hypothèses correspondantes. Concernant la méthode du maximum de vraisemblance, les σ_{USP} seront calculés uniquement au niveau de la maille S2 (par ligne d'affaires). Pour les autres méthodes, et en fonction des données disponibles, nous calculerons les sigmas spécifiques à chaque maille définie par l'entreprise, conformément à leur stratégie.

3.3.2.1 Méthode de maximum vraisemblance

Vérification des hypothèses

Avant d'appliquer les modèles à nos données, nous devons d'abord vérifier que les hypothèses relatives à ces derniers soient respectées afin que les valeurs obtenues soient significatives.

— Validation de H1 :

De la même manière qu'au risque de prime, on la vérifie en effectuant des régressions linéaires de Y_t sur X_t .

```

Regression for PR_REINS_FIRE_OTH_DAMAGE_PROPRTY :
Call:
lm(formula = y_values ~ x_values)
Residuals:
 1      2      3      4      5      6
3568786 23400000 5936457 14459843 -40221072 -7144013
Coefficients:
      Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept) 7.687e+08 1.550e+08  4.959  0.00771 **
x_values    3.786e-01  5.580e-02  6.785  0.00246 **
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 24870000 on 4 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.9201, Adjusted R-squared:  0.9001
F-statistic: 46.03 on 1 and 4 DF, p-value: 0.002464

Regression for NP_REINS_PROPERTY :
Call:
lm(formula = y_values ~ x_values)
Residuals:
 1      2      3      4      5      6
-1256707 318812  7077  413144  818855 -301182
Coefficients:
      Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept) 1.232e+08 2.549e+06  48.33  1.1e-06 ***
x_values    3.382e-01  9.358e-03  36.14  3.5e-06 ***
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 808200 on 4 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.9969, Adjusted R-squared:  0.9962
F-statistic: 1306 on 1 and 4 DF, p-value: 3.5e-06

Regression for PR_REINS_MARINE_AVIATN_TRANSPORT :
Call:
lm(formula = y_values ~ x_values)
Residuals:
 1      2      3      4      5      6
764631 -385292 -354736 -118155 -766865  860417
Coefficients:
      Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept) 1.518e+08 9.793e+05 155.03 1.04e-08 ***
x_values   -3.794e-02  1.275e-03 -29.76 7.59e-06 ***
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 741800 on 4 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.9955, Adjusted R-squared:  0.9944
F-statistic: 885.5 on 1 and 4 DF, p-value: 7.594e-06

Regression for PR_REINS_OTHER_MOTOR :
Call:
lm(formula = y_values ~ x_values)
Residuals:
 1      2      3      4      5      6
-38584232 10437340 -1439310 32035820 9472015 -11921633
Coefficients:
      Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept) 8.989e+08 7.714e+07 11.653 0.00031 ***
x_values   -3.780e-01  6.155e-02 -6.141 0.00356 **
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 26730000 on 4 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.9041, Adjusted R-squared:  0.8801
F-statistic: 37.72 on 1 and 4 DF, p-value: 0.003564
    
```

FIGURE 3.10 – Sortie R des regressions lineaires de Y_y en fonction de X_t

Les résultats des régressions linéaires montrent qu'il existe une forte relation proportionnelle entre X_t et Y_t . Les p-values sont très faibles ($p < 0.05$) pour l'ensemble des LOBs, ce qui **valide l'hypothèse H1** pour ces cas.

— **Validation de H2 :**

Encore une fois, on teste cette hypothèse en effectuant une régression sur Y_t^2 en fonction de X_t^2 et X_t afin de conclure sur la relation quadratique entre les deux variables.

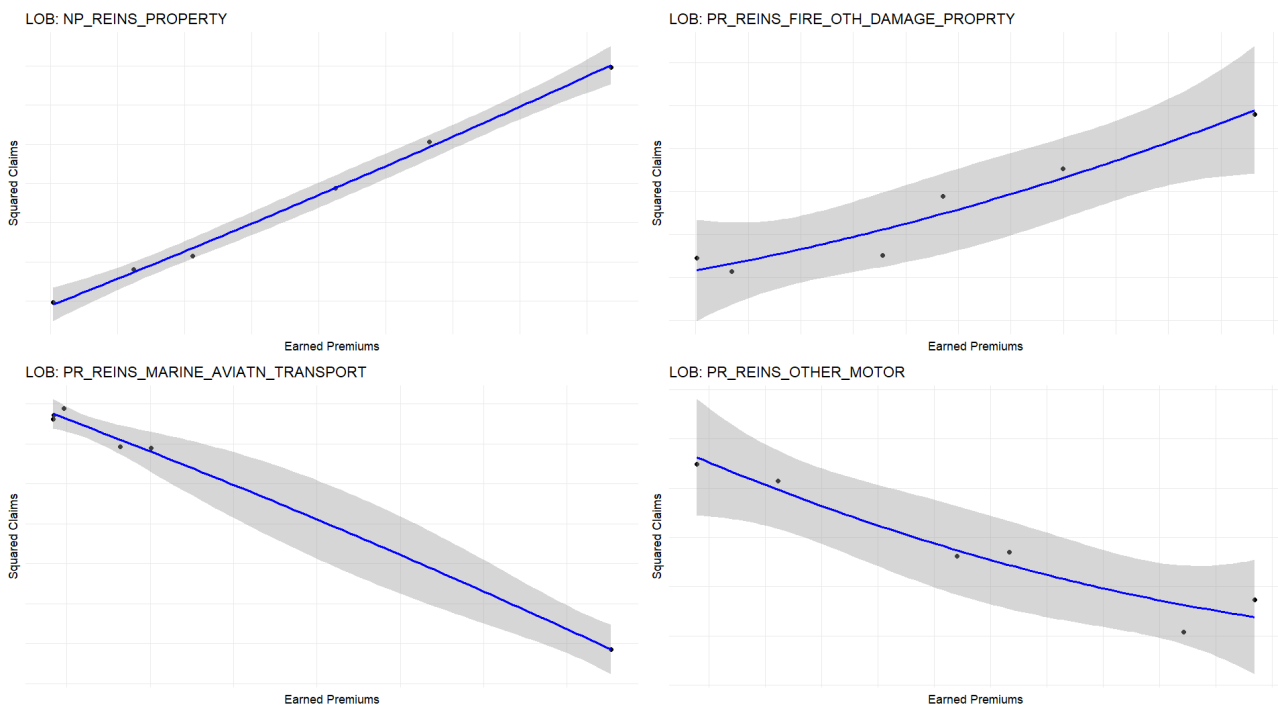


FIGURE 3.11 – Relation quadratique entre X_t et Y_t

On observe que pour tous les LOB, la courbe de régression quadratique ajuste bien les données, cela suggère une relation quadratique significative entre ces variables, **validant H2**. Examinons les p-value de ces relations :

```

Regression for NP_REINS_PROPERTY :
Call:
lm(formula = I(Y_data[, i]^2) ~ I(X_data[, i]^2) + X_data[, i],
    data = data.frame(Y_squared = Y_data[, i]^2, X = X_data[,
    i], X_squared = X_data[, i]^2))

Residuals:
    1         2         3         4         5         6
-5.261e+14  1.353e+14 -5.294e+12  1.691e+14  3.599e+14 -1.328e+14

Coefficients:
            Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)  1.472e+16  1.140e+16   1.290   0.287
I(X_data[, i]^2) 1.082e-01  1.501e-01   0.721   0.523
X_data[, i]      8.673e+07  8.332e+07   1.041   0.374

Residual standard error: 3.962e+14 on 3 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.9971,    Adjusted R-squared:  0.9951
F-statistic: 511.8 on 2 and 3 DF,  p-value: 0.000158

Regression for PR_REINS_FIRE_OTH_DAMAGE_PROPRTY :
Call:
lm(formula = I(Y_data[, i]^2) ~ I(X_data[, i]^2) + X_data[, i],
    data = data.frame(Y_squared = Y_data[, i]^2, X = X_data[,
    i], X_squared = X_data[, i]^2))

Residuals:
    1         2         3         4         5         6
-2.002e+16  5.690e+16  4.210e+16  7.951e+16 -1.212e+17 -3.727e+16

Coefficients:
            Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)  6.842e+18  1.021e+19   0.670   0.551
I(X_data[, i]^2) 9.406e-01  1.298e+00   0.725   0.521
X_data[, i]    -3.893e+09  7.292e+09  -0.534   0.630

Residual standard error: 9.629e+16 on 3 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.9333,    Adjusted R-squared:  0.8888
F-statistic: 20.98 on 2 and 3 DF,  p-value: 0.01723

Regression for PR_REINS_MARINE_AVIATN_TRANSPORT :
Call:
lm(formula = I(Y_data[, i]^2) ~ I(X_data[, i]^2) + X_data[, i],
    data = data.frame(Y_squared = Y_data[, i]^2, X = X_data[,
    i], X_squared = X_data[, i]^2))

Residuals:
    1         2         3         4         5         6
 2.387e+14 -1.696e+14 -2.857e+13 -5.048e+11 -1.341e+14  9.417e+13

Coefficients:
            Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)  2.092e+16  2.383e+15   8.777  0.00312 **
I(X_data[, i]^2) -1.340e-03  3.098e-03  -0.432  0.69458
X_data[, i]     -6.356e+06  5.755e+06  -1.104  0.35004
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 1.944e+14 on 3 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.9957,    Adjusted R-squared:  0.9929
F-statistic: 350.1 on 2 and 3 DF,  p-value: 0.0002787

Regression for PR_REINS_OTHER_MOTOR :
Call:
lm(formula = I(Y_data[, i]^2) ~ I(X_data[, i]^2) + X_data[, i],
    data = data.frame(Y_squared = Y_data[, i]^2, X = X_data[,
    i], X_squared = X_data[, i]^2))

Residuals:
    1         2         3         4         5         6
-2.715e+16  1.343e+16 -7.098e+15  1.754e+16  8.966e+15 -5.685e+15

Coefficients:
            Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)  1.055e+18  5.350e+17   1.972   0.143
I(X_data[, i]^2) 3.066e-01  3.543e-01   0.865   0.450
X_data[, i]    -1.086e+09  8.782e+08  -1.236   0.304

Residual standard error: 2.151e+16 on 3 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.9365,    Adjusted R-squared:  0.8942
F-statistic: 22.12 on 2 and 3 DF,  p-value: 0.016
    
```

FIGURE 3.12 – Sortie R du test des relations quadratiques entre Y_t et X_t

Dans tous les cas examinés, les relations quadratiques testées ne sont pas statistiquement significatives. Cela suggère que pour ces segments de réassurance, la variance des sinistres n'est pas suffisamment expliquée par une relation quadratique avec les primes acquises, selon les modèles testés.

— Validation de H3 :

De la même manière, on test H3 en utilisant le test de **Shapiro-Wilk** sur la variable $\log(Y_t)$.

```

[1] "NP_REINS_PROPERTY"
[[1]]$Shapiro_Result
      Shapiro-Wilk normality test
data:  log(y_positive)
W = 0.95167, p-value = 0.7538

[1] "PR_REINS_FIRE_OTH_DAMAGE_PROPRTY"
[[2]]$Shapiro_Result
      Shapiro-Wilk normality test
data:  log(y_positive)
W = 0.90314, p-value = 0.3929

[1] "PR_REINS_OTHER_MOTOR"
[[4]]$Shapiro_Result
      Shapiro-Wilk normality test
data:  log(y_positive)
W = 0.94445, p-value = 0.6952

[1] "PR_REINS_MARINE_AVIATN_TRANSPORT"
[[3]]$Shapiro_Result
      Shapiro-Wilk normality test
data:  log(y_positive)
W = 0.62744, p-value = 0.0009702
    
```

FIGURE 3.13 – Sortie R des résultats du test Shapiro-Wilk sur $\log(Y_t)$

Les résultats suggèrent que $\log(Y_t)$ de "NP Property" , "Fire and other property damage",

et "Motor,other classes" suivent une distribution normale, car les p-valeurs sont supérieures à 0.05, indiquant une non-rejection de l'hypothèse de normalité. Toutefois, pour le Lob "MAT", la p-valeur très basse indique une violation de cette hypothèse, suggérant une distribution non normale des données.

Tableau récapitulatif : En somme, voici les résultats trouvés pour chaque hypothèse :

Segment d'activité	H1	H2	H3
Motor, other classes	Validée	Non validée	Validée
Marine, aviation, transport (MAT)	Validée	Non validée	Non validée
Fire and other property damage	Validée	Non validée	Validée
Non-proportional reinsurance - property	Validée	Non validée	Validée

TABLE 3.7 – Résumé des résultats des tests des hypothèses par ligne de business

Même si les hypothèses ne sont pas toutes validées, nous allons poursuivre l'estimation de notre modèle.

Résultats pour la maille S2

Pour le calcul des sigmas selon cette méthode, nous disposons d'un historique de **6 années**. Nous calculons d'abord les sigmas intermédiaires spécifiques à chaque ligne d'affaires (LoB). Ensuite, le sigma final pour chaque LoB est déterminé en appliquant le facteur de crédibilité qui lui est propre.

Ci-dessous, nous présentons les sigmas obtenus pour chaque ligne d'affaires :

Segment d'activité	Valeur Intermédiaire	σ_{FS}	σ_{USP}
Motor, other classes	15.3%	8.0%	11.76%
Marine, aviation, transport (MAT)	8.9%	11.0%	9.96%
Fire and other property damage	13.4%	10.0%	11.76%
Non-proportional reinsurance - property	17.7%	20.0%	19.03%

TABLE 3.8 – Calibrage du risque de réserve selon la méthode du maximum de vraisemblance

La comparaison des résultats de volatilités issues des calibrations selon l'approche USP σ_{USP} et la formule standard σ_{FS} montre une certaine variabilité entre les segments d'activité. Pour les segments "Motor, other classes" et "Fire and other property damage", la méthode USP génère une volatilité significativement plus élevée, suggérant que cette approche pourrait capturer des risques spécifiques non reflétés par la méthode standard.

Inversement, dans le segment "Marine, aviation, transport (MAT)", l'écart entre les deux méthodes est réduit, indiquant une certaine concordance entre les deux approches pour ce type

de risques. Pour le segment "Non-proportional reinsurance - property", bien que les deux approches offrent des estimations relativement proches, la méthode standard semble surévaluer légèrement la volatilité comparée à l'approche USP.

En appliquant chacun de ces sigmas, nous avons constaté les variations suivantes dans les valeurs de SCR de souscription non vie et de Ratio de Solvabilité :

TABLE 3.9 – Impact des Sigmas sur le SCR_{NL} et le Ratio de Solvabilité

Segment d'activité	var SCR_{NL}	var Ratio de solva
Motor, other classes	+8.60%	-4.09%
Marine, aviation, transport (MAT)	-0.64%	+0.29%
Fire and other property damage	+3.68%	-1.71%
Non-proportional reinsurance - property	-0.62%	+0.28%

On constate un impact variable des sigmas sur le SCR_{NL} et le ratio de solvabilité : les secteurs "Motor, other classes" et "Fire and other property damage" connaissent des variations notables de SCR_{NL} , influençant négativement le ratio de solvabilité. En revanche, les changements sont minimes pour "Marine, aviation, transport (MAT)" et "Non-proportional reinsurance - property", suggérant une stabilité relative dans ces secteurs.

En effet, une hausse des σ_{USP} implique une estimation plus prudente des besoins en capital de solvabilité, reflétant une exposition accrue aux risques potentiellement sous-estimés par les modèles standard.

Après avoir appliqué tous les sigma USP pour le calcul du SCR, nous obtenons les résultats suivants :

	Variation
SCR_{NL}	+10.75%
Ratio de solvabilité	-5.18%

TABLE 3.10 – SCR et Variation du Ratio de Solvabilité

Bien que cette augmentation du SCR puisse initialement paraître comme un désavantage en réduisant les points du ratio de solvabilité, elle présente un avantage sous-jacent significatif pour la gestion des risques au sein de l'entreprise. L'adaptation des σ_{USP} permet d'accroître la résilience de l'entreprise face à des risques inattendus, offrant ainsi **une meilleure protection** contre les événements défavorables qui pourraient autrement menacer sa stabilité financière.

Cependant, du point de vue de la gestion d'entreprise, il existe un équilibre délicat à trouver. La stratégie de solvabilité tend traditionnellement à maximiser le ratio de solvabilité, car un ratio plus élevé est souvent perçu comme un indicateur de santé financière supérieure et peut influencer favorablement la perception des investisseurs et des régulateurs.

3.3.2.2 Méthode de Merz wütrich

Pour cette méthode, grâce à sa flexibilité, nous appliquerons d'abord les résultats au niveau de la maille LOB S2. Ensuite, nous adapterons la méthode pour calculer les volatilités par maille (LOB x type de contrat) et par (LOB x type de contrat x canton réglementaire) , tout en fonction de la disponibilité des données.

Résultats de la maille S2

Présentation des données

Nous disposons de triangles de règlements pour chaque LOB S2, couvrant un **historique de 18 ans**. Ces données serviront de base à notre analyse, permettant une évaluation précise des tendances historiques et de la volatilité des règlements au fil du temps. L'application de la méthode de Merz-Wüthrich à ce riche ensemble de données historiques nous permettra de déduire des insights pertinents sur la dynamique des risques associés à chaque segment.

Vérification des hypothèses

- **H1** : les années de survenances sont indépendantes les unes des autres.

La première hypothèse d'indépendance des années de survenance peut être mise en défaut en cas de changement dans l'organisation de l'équipe de gestion des sinistres, ou en cas de facteur d'inflation.

Le test permettant de vérifier cette hypothèse est le **test d'absence d'effet calendaire**. En résumé, ce test consiste à étudier les facteurs de développement individuel et à détecter d'éventuelles tendances sur chaque diagonale du triangle de paiements. On utilise une fonction prédéfinie en librairie. *ChainLadder*.

Test for PR_REINS_FIRE_OTH : Calendar Year Effect	Test for PR_REINS_MARINE_A : Calendar Year Effect
Z = 52	Z = 51
95%-Range = (46.046 ; 60.05947)	95%-Range = (46.07214 ; 60.25891)
Calendar Year Effect: FALSE	Calendar Year Effect: FALSE
Test for NP_REINS_PROPERTY : Calendar Year Effect	Test for PR_REINS_OTHER_MO : Calendar Year Effect
Z = 59	Z = 25
95%-Range = (45.95712 ; 59.97159)	95%-Range = (19.30762 ; 29.583)
Calendar Year Effect: FALSE	Calendar Year Effect: FALSE

FIGURE 3.14 – Résultat du test d'effet calendaire

Dans l'output ci-dessus qui présente les résultats de la Z_stat et des intervalles de confiance pour différents segments d'assurance, on note que toutes les valeurs de Z_stat tombent bien à l'intérieur de leurs intervalles respectifs. On peut supposer qu'il n'y a pas d'effet de l'année calendaire significatif, ce qui **soutient l'hypothèse H1** selon laquelle les années d'accident sont indépendantes les unes des autres.

- **H2** : Les $C_{i,j+1}$ en fonction des $C_{i,j}$ pour j donné. Si cette hypothèse est vérifiée, les points doivent être alignés suivant une droite passant par l'origine.

Pour vérifier l'hypothèse H2, nous avons effectué une série de régressions linéaires entre les paiements de développement des années consécutives $C_{i,j}$ et $C_{i,j+1}$ pour chaque segment sélectionné. L'hypothèse H2 stipule que les $C_{i,j+1}$ devraient être proportionnels aux $C_{i,j}$, ce qui implique que les points devraient s'aligner selon une droite passant par l'origine.

Pour chaque paire d'années de développement, nous avons effectué une régression linéaire sans terme constant, forçant la droite à passer par l'origine. Comme on peut constater ci-dessous, pour la branche Other-motor, la combinaison de deux paiements successives pour chaque deux années successives vérifie visuellement l'hypothèse :

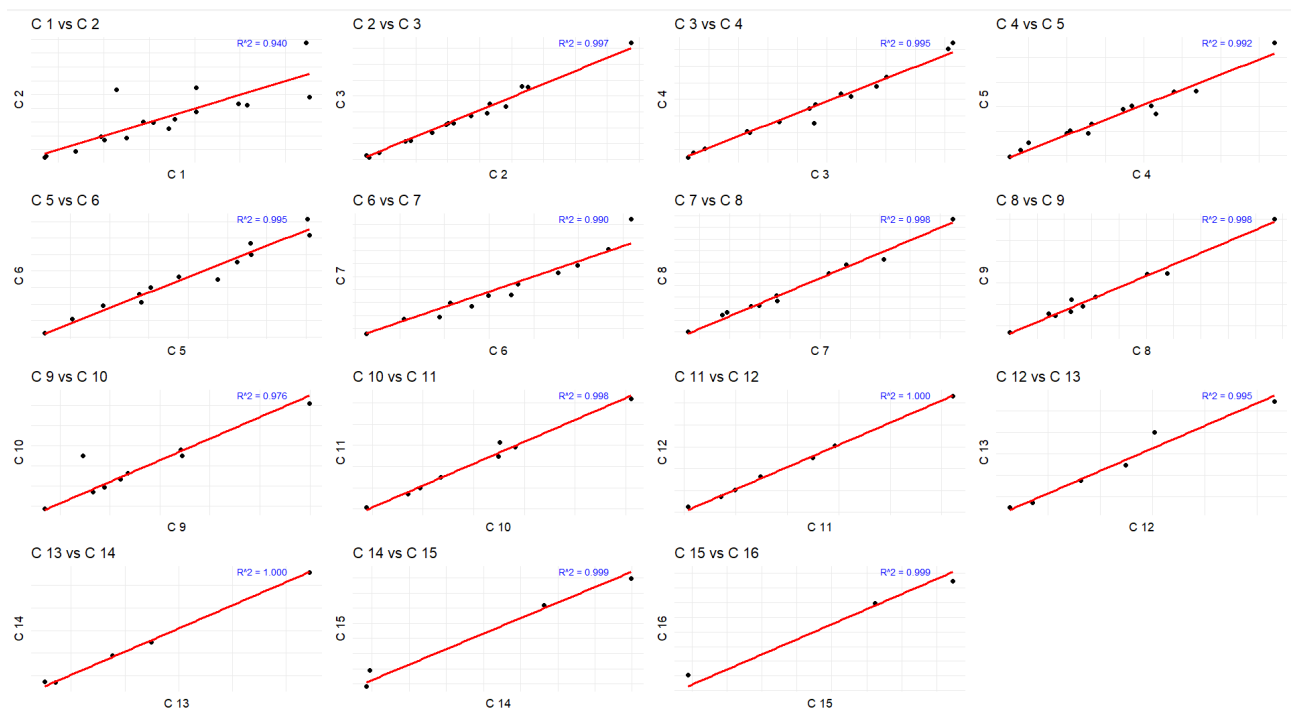


FIGURE 3.15 – Régressions Linéaires pour chaque paire de developpement

Les p-values obtenues des tests de student sur la significativité des coefficients de la régression linéaire nous permettent de déterminer la significativité de cette relation linéaire.

	Other Motor	MAT	NP Property	Fire and Other Property Damage
C_1 vs C_2	3.49×10^{-11}	4.57×10^{-11}	4.38×10^{-10}	1.44×10^{-15}
C_2 vs C_3	4.26×10^{-20}	2.06×10^{-16}	2.16×10^{-14}	8.64×10^{-12}
C_3 vs C_4	7.98×10^{-18}	1.40×10^{-21}	8.45×10^{-8}	6.75×10^{-13}
C_4 vs C_5	3.85×10^{-15}	6.52×10^{-23}	2.69×10^{-9}	2.01×10^{-11}
C_5 vs C_6	1.97×10^{-15}	1.42×10^{-20}	2.26×10^{-14}	2.86×10^{-10}
C_6 vs C_7	3.04×10^{-12}	1.86×10^{-19}	3.08×10^{-12}	2.94×10^{-9}
C_7 vs C_8	6.57×10^{-15}	6.03×10^{-18}	1.54×10^{-14}	1.20×10^{-16}
C_8 vs C_9	4.41×10^{-13}	1.11×10^{-14}	2.98×10^{-14}	1.06×10^{-8}
C_9 vs C_{10}	9.02×10^{-8}	5.55×10^{-13}	8.62×10^{-16}	5.87×10^{-7}
C_{10} vs C_{11}	1.05×10^{-10}	2.14×10^{-12}	1.25×10^{-14}	1.24×10^{-3}
C_{11} vs C_{12}	8.29×10^{-12}	4.13×10^{-10}	4.53×10^{-13}	NA
C_{12} vs C_{13}	5.51×10^{-7}	4.56×10^{-9}	1.50×10^{-5}	NA
C_{13} vs C_{14}	8.63×10^{-8}	5.77×10^{-7}	1.79×10^{-8}	NA
C_{14} vs C_{15}	1.14×10^{-5}	2.20×10^{-5}	1.38×10^{-6}	NA
C_{15} vs C_{16}	4.23×10^{-4}	2.93×10^{-4}	5.15×10^{-5}	NA

TABLE 3.11 – P-values des régressions linéaire entre deux années successives (C_j, C_{j+1})

L'analyse des résultats obtenus à partir des régressions linéaires entre les paiements de développement successifs ($C_{i,j}$ et $C_{i,j+1}$) montre des valeurs de p très faibles pour la majorité des couples de développement étudiés. Ces résultats statistiquement significatifs suggèrent une forte dépendance linéaire entre les montants de paiements des années de développement successives, ce qui **confirme l'hypothèse H2**.

- **H3** : Pour la dernière hypothèse, on peut étudier les résidus standardisés $r_{i,j} = \frac{C_{i,j+1} - \hat{\lambda}_j C_{i,j}}{\sqrt{C_{i,j}}}$, un nuage de point pourra être construit avec les résidus pour vérifier qu'aucune structure n'apparaît d'une année à l'autre

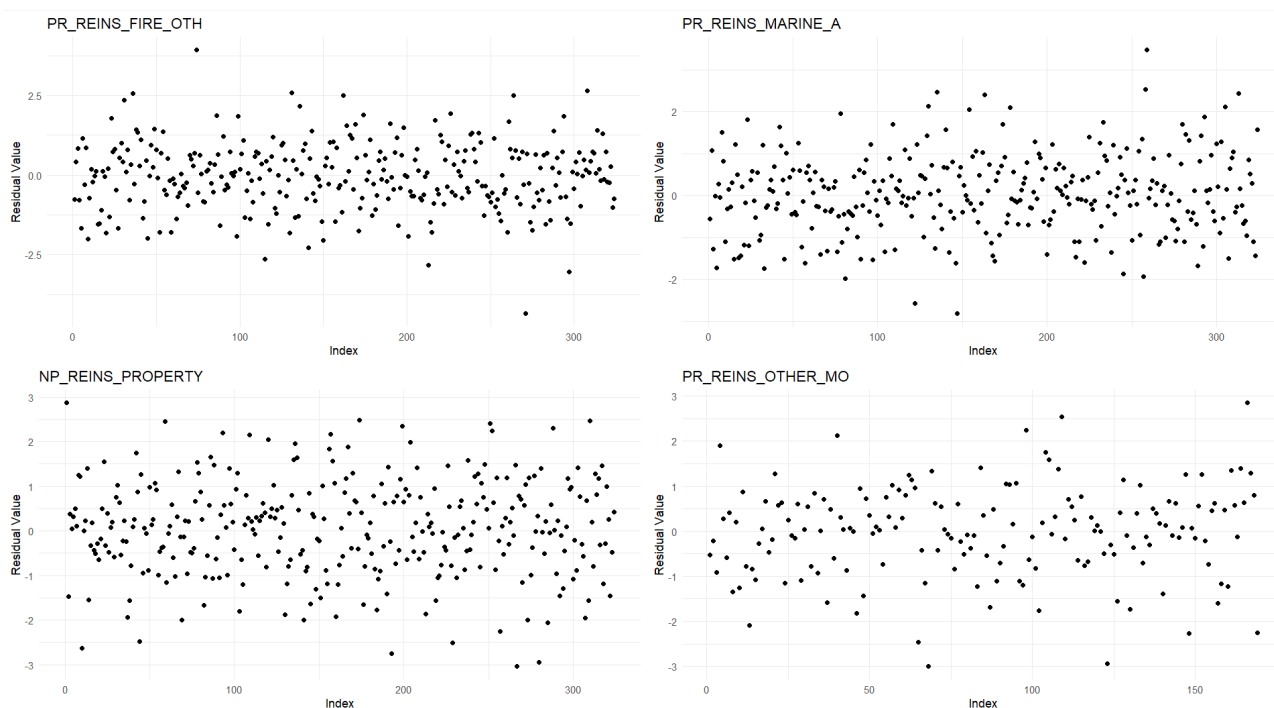


FIGURE 3.16 – Nuage de points des triangles par Lob S2

Conclusion Générale L'analyse des graphiques de résidus standardisés pour chaque Lob montre que les résidus sont répartis de manière aléatoire autour de zéro, sans structure ou motif apparent.

Les résultats **soutiennent l'hypothèse H3**, ce qui indique que les modèles de régression utilisés sont appropriés pour ces données et que les erreurs (résidus) sont correctement capturées par les modèles. Il n'y a pas de tendance ou de structure discernable d'une année à l'autre, ce qui est souhaité pour une bonne modélisation statistique.

Cette validation visuelle montre que le modèle ne laisse pas de structure significative dans les résidus, renforçant ainsi la confiance dans l'ajustement du modèle pour ces séries de données.

Après avoir validé nos hypothèses, on procède maintenant à l'application des modèles pour chaque maille.

Présentation des résultats

Segment d'activité	σ_{FS}	σ_{Merz}
Motor, other classes	8.0%	14.21%
Marine, aviation, transport (MAT)	11.0%	7.82%
Fire and other property damage	10.0%	9.17%
Non-proportional reinsurance - property	20.0%	13.33%

TABLE 3.12 – Calibrage du risque de réserve selon la méthode de Merz Wütrich

Les volatilités recalibrées σ_{Merz} montrent des variations significatives par rapport aux volatilités de la formule standard σ_{FS} . Globalement, nous observons que certains segments comme "Motor, other classes" présentent une augmentation notable de la volatilité recalibrée, reflétant une plus grande incertitude et variabilité propre à l'entreprise. Les autres segments montrent une réduction de la volatilité, suggérant une meilleure gestion des risques ou des caractéristiques spécifiques du portefeuille. Ces ajustements permettent de capturer plus précisément les risques spécifiques à l'entreprise, contrairement aux valeurs standard basées sur le marché européen.

Segment d'activité	var SCR_{NL}	var Ratio de solva
Motor, other classes	+14.23%	-6.92%
Marine, aviation, transport (MAT)	-1.89%	+0.86%
Fire and other property damage	-1.73%	+0.79%
Non-proportional reinsurance - property	-4.15%	+1.87%

TABLE 3.13 – Impact des Sigmas sur le SCR_{NL} et le Ratio de Solvabilité

Le tableau illustre l'impact des volatilités recalibrées sur le Solvency Capital Requirement non vie et le ratio de solvabilité. Globalement, une augmentation des volatilités entraîne une hausse du SCR_{NL} qui se traduit par une diminution du ratio de solvabilité indiquant une plus grande nécessité de capital pour couvrir les risques identifiés, comme observé pour le segment "Motor, other classes", tandis qu'une diminution des volatilités pour les autres segments conduit à une réduction des exigences de capital reflétant une position de solvabilité plus favorable.

	Variation
SCR_{NL}	+7.82%
Ratio de solvabilité	-3.71%

TABLE 3.14 – SCR et Variation du Ratio de Solvabilité

Le tableau résume l'impact global des variations de toutes les volatilités recalibrées sur le SCR_{NL} et le ratio de solvabilité. L'application des volatilités spécifiques à l'entreprise entraîne une augmentation globale du SCR_{NL} de 7.82%, ce qui met en évidence une évaluation plus précise et stricte des risques non vie. Cette augmentation des exigences de capital traduit une approche plus conservatrice et prudente de la gestion des risques. En conséquence, le ratio de solvabilité de la société diminue de 3.71%, indiquant que bien que l'entreprise soit mieux préparée à couvrir ses risques, elle doit également maintenir un capital plus élevé pour garantir sa solvabilité à long terme. Cela souligne l'importance de l'adoption de paramètres spécifiques à l'entreprise pour une gestion efficace et personnalisée des risques.

Résultats pour des mailles plus fines

1. **Traité X LoB S2** : L'objectif de cette analyse est de comparer la volatilité des segments d'activités en fonction du type de réassurance, facultative (FAC) ou obligatoire (TREATY). L'hypothèse sous-jacente est que les réassurances facultatives sont plus volatiles que les réassurances obligatoires, et l'utilisation d'une maille plus fine permet une meilleure allocation de capital en identifiant précisément les segments les plus volatiles.

Segment d'activité	Type de réassurance	Volatilité (%)
Motor, other classes	TREATY	14.21
Marine, aviation, transport (MAT)	FAC	12.12
Marine, aviation, transport (MAT)	TREATY	4.71
Fire and other property damage	FAC	11.31
Fire and other property damage	TREATY	10.84
Non-proportional reinsurance - property	TREATY	13.33

TABLE 3.15 – Volatilité des segments d'activité par type de réassurance

Les résultats montrent que, globalement, les segments d'activité réassurés de manière facultative présentent une volatilité plus élevée par rapport à ceux réassurés de manière obligatoire. Par exemple, pour le segment "Marine, aviation, transport (MAT)", la volatilité est significativement plus élevée pour la réassurance facultative (12.12%) que pour la réassurance obligatoire (4.71%). Cela indique que les segments couverts par des réassurances facultatives sont associés à une plus grande incertitude et variabilité des résultats, ce qui peut s'expliquer par la nature non standardisée et plus spécifique de ces réassurances.

Cette granularité plus fine permet de mieux capturer les spécificités et les risques propres à chaque segment d'activité, facilitant ainsi une allocation de capital plus précise et efficace améliorant ainsi sa rentabilité et sa solvabilité à long terme.

2. **Canton X Traité X LoB S2** : Cette analyse utilise une maille encore plus fine en comparant la volatilité des segments d'activité selon la nature des affaires (marocaines ou étrangères) et le type de réassurance (facultative ou obligatoire). L'hypothèse sous-jacente est que les réassurances facultatives sont plus volatiles que les réassurances obligatoires et que les affaires étrangères sont plus volatiles que les affaires marocaines.

Segment d'activité	Canton	Type de réassurance	Volatilité (%)
Motor, other classes	AM	TREATY	8.80
Motor, other classes	AE	TREATY	9.51
Marine, aviation, transport (MAT)	AM	TREATY	12.09
Marine, aviation, transport (MAT)	AE	TREATY	14.11
Marine, aviation, transport (MAT)	AM	FAC	12.93
Marine, aviation, transport (MAT)	AE	FAC	15.17
Fire and other property damage	AM	TREATY	10.93
Fire and other property damage	AE	TREATY	11.64
Fire and other property damage	AM	FAC	12.25
Fire and other property damage	AE	FAC	14.97
Non-proportional reinsurance - property	AE	TREATY	22.27
Non-proportional reinsurance - property	AM	TREATY	23.97

TABLE 3.16 – Volatilité des segments d'activité par nature des affaires et type de réassurance

Pour la majorité des segments d'activité, les affaires étrangères (AE) présentent une volatilité plus élevée que les affaires marocaines (AM) et la réassurance facultative (FAC) tend à être plus volatile que la réassurance obligatoire (TREATY), ce qui est cohérent avec les attentes. Ainsi, Une gestion stratégique et différenciée du capital, en tenant compte de la nature des affaires et du type de réassurance, permettra à l'entreprise de mieux couvrir les risques spécifiques et de maintenir une position financière robuste.

3.3.2.3 Méthode de Bootstrap

Pour cette méthode, nous utiliserons à nouveau les mêmes triangles que précédemment et lancerons la simulation pour chaque triangle sur **50 000 itérations** afin de mieux converger les résultats. La méthode Bootstrap a été utilisée pour recalibrer les paramètres et vérifier la fiabilité des résultats obtenus par la méthode Merz-Wüthrich obligée par la réglementation S2.

Résultats de la maille S2

Présentation des résultats

Segment d'activité	σ_{FS}	σ_{Boot}
Motor, other classes	8.0%	12.88%
Marine, aviation, transport (MAT)	11.0%	7.13%
Fire and other property damage	10.0%	9.55%
Non-proportional reinsurance - property	20.0%	13.21%

TABLE 3.17 – Calibrage du risque de réserve selon la méthode Bootstrap

Pour "Motor, other classes", la volatilité recalibrée est significativement plus élevée (12.88% contre 8.0%), indiquant une plus grande incertitude par rapport aux standards initiaux. En revanche, pour les autres segments, la volatilité recalibrée est inférieure, suggérant une meilleure gestion des risques.

Segment d'activité	var SCR_{NL}	var Ratio de solva
Motor, other classes	+11.18%	-5.37%
Marine, aviation, transport (MAT)	-2.28%	+1.04%
Fire and other property damage	-0.94%	+0.43%
Non-proportional reinsurance - property	-4.22%	+1.90%

TABLE 3.18 – Impact des Sigmas sur le SCR_{NL} et le Ratio de Solvabilité avec la méthode Bootstrap

Les variations des volatilités recalibrées par la méthode Bootstrap affectent le SCR_{NL} et le ratio de solvabilité de manière significative. "Motor, other classes" montre une augmentation notable du SCR_{NL} , ce qui correspond à une diminution du ratio de solvabilité. En revanche, les autres segments ont montré l'inverse.

	Variation
SCR_{NL}	+4.75%
Ratio de solvabilité	-2.22%

TABLE 3.19 – SCR et Variation du Ratio de Solvabilité avec la méthode Bootstrap

L'effet global des volatilités recalibrées par la méthode Bootstrap montre une augmentation du SCR_{NL} de 4.75% et une diminution du ratio de solvabilité de 2.22%. Ces résultats indiquent une nécessité accrue de capital pour couvrir les risques et une diminution de la solvabilité globale.

Résultats pour d'autres mailles

1. **Traité X LoB S2** : L'hypothèse sous-jacente est que les réassurances facultatives sont plus volatiles que les réassurances obligatoires.

Segment d'activité	Type de réassurance	Volatilité (%)
Motor, other classes	TREATY	12.93
Marine, aviation, transport (MAT)	FAC	10.57
Marine, aviation, transport (MAT)	TREATY	4.72
Fire and other property damage	FAC	11.88
Fire and other property damage	TREATY	11.56
Non-proportional reinsurance - property	TREATY	13.15

TABLE 3.20 – Volatilité des segments d'activité par type de réassurance

Les résultats confirment que les réassurances facultatives présentent une plus grande incertitude que les réassurances obligatoires.

2. **Canton X Traité X LoB S2** : L'hypothèse sous-jacente est que les réassurances facultatives sont plus volatiles que les réassurances obligatoires et que les affaires étrangères sont plus volatiles que les affaires marocaines.

Segment d'activité	Canton	Type de réassurance	Volatilité (%)
Motor, other classes	AM	TREATY	12.05
Motor, other classes	AE	TREATY	10.64
Marine, aviation, transport (MAT)	AM	TREATY	12.00
Marine, aviation, transport (MAT)	AE	TREATY	12.60
Marine, aviation, transport (MAT)	AM	FAC	11.22
Marine, aviation, transport (MAT)	AE	FAC	14.17
Fire and other property damage	AM	TREATY	11.60
Fire and other property damage	AE	TREATY	13.81
Fire and other property damage	AM	FAC	11.34
Fire and other property damage	AE	FAC	12.97
Non-proportional reinsurance - property	AE	TREATY	20.67
Non-proportional reinsurance - property	AM	TREATY	25.61

TABLE 3.21 – Volatilité des segments d'activité par nature des affaires et type de réassurance

L'analyse fine par nature des affaires et type de réassurance vérifie que les affaires étrangères (AE) sont généralement plus volatiles que les affaires marocaines (AM)

3.3.2.4 Comparaison des résultats

— Volatilité par segment d'activité

Commençons par comparer les volatilités de risque de réserve recalibrées pour les segments d'activité selon les méthodes Merz-Wüthrich, Bootstrap, Maximum de Vraisemblance, et la formule standard (FS).

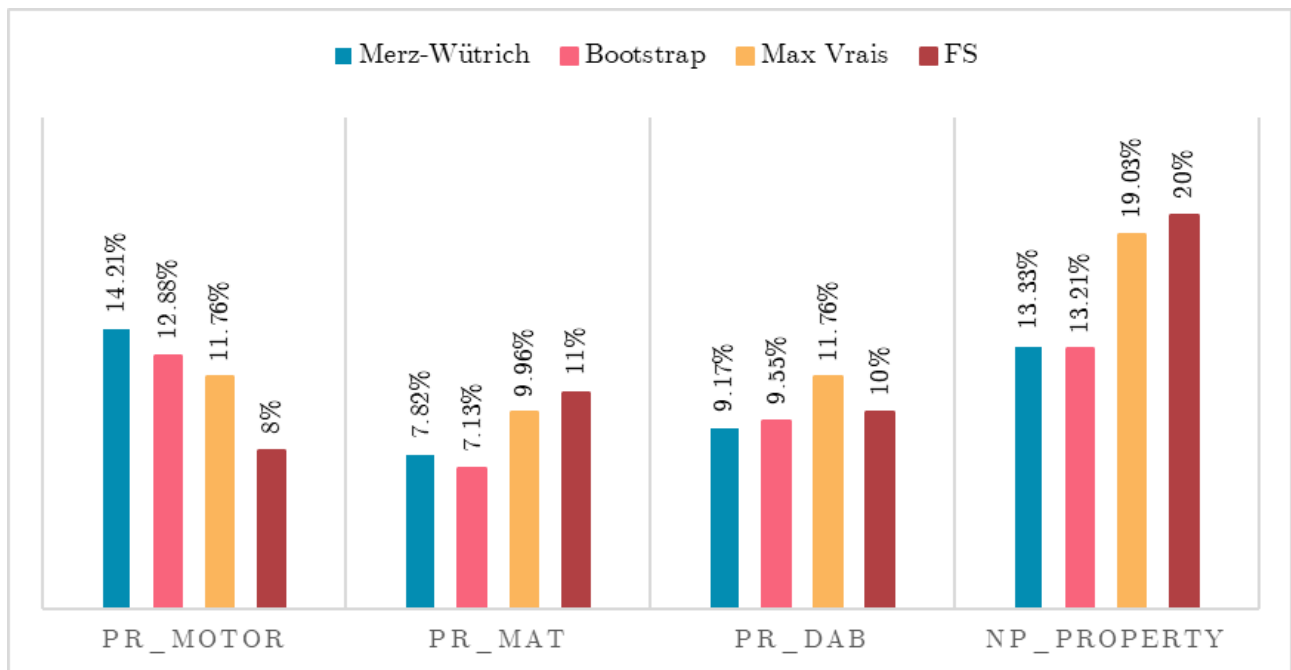


FIGURE 3.17 – les volatilités de risque de réserve recalibrés par segment

Les résultats montrent une tendance commune entre les méthodes recalibrées par rapport à la formule standard. Par exemple, pour le segment "Other motor", toutes les méthodes de recalibration montrent des volatilités supérieures à celle de la FS, indiquant que la formule standard sous-estime la volatilité pour ce segment.

À l'inverse, pour "MAT", toutes les méthodes montrent des volatilités inférieures à celle de la FS, suggérant une surestimation par la FS.

De plus, la méthode du Maximum de Vraisemblance se démarque légèrement des autres, avec des valeurs généralement plus extrêmes. Cette divergence peut être due au nombre limité d'années d'historique de données utilisées (**seulement 6 ans**) par rapport aux 18 années utilisées par les autres méthodes.

— **Effet de recalibration de la volatilité par segment sur le ratio de solvabilité**

Ensuite, nous observons l'impact des volatilités recalibrées sur le ratio de solvabilité par segment d'activité.

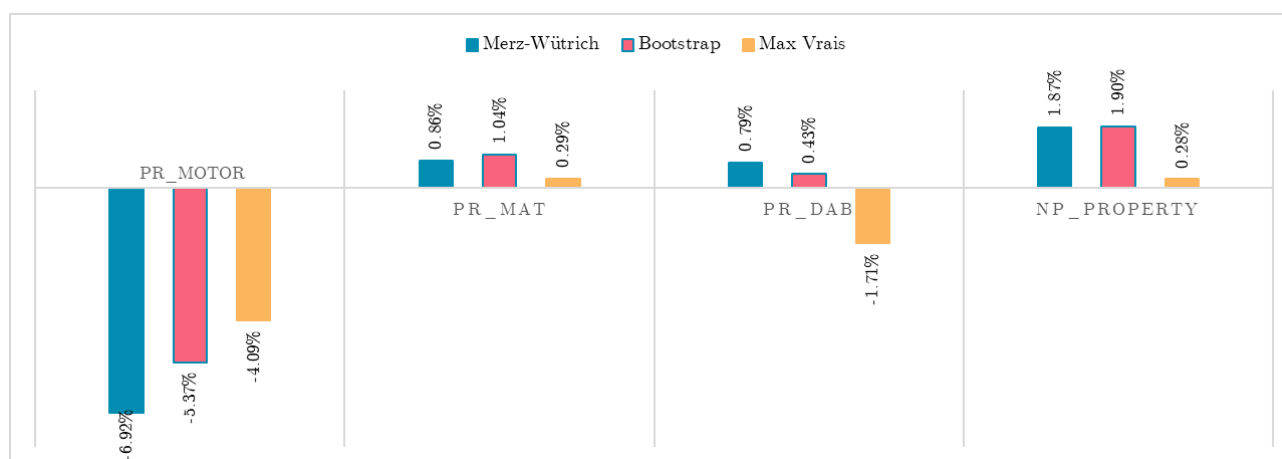


FIGURE 3.18 – Variation de ratio de solvabilité après recalibration de chaque paramètre

Encore une fois, les méthodes Merz-Wütrich, Bootstrap, et Maximum de Vraisemblance montrent des tendances cohérentes en termes de direction (augmentation ou diminution du ratio de solvabilité) par rapport à la FS. Par exemple, pour "Other motor", toutes les méthodes indiquent une diminution du ratio de solvabilité, confirmant que ce segment nécessite plus de capital pour couvrir les risques.

Cependant, la méthode du Maximum de Vraisemblance présente des variations plus prononcées, en particulier pour le segment "Fire and other property damage", où elle montre une diminution plus marquée du ratio de solvabilité. Cette divergence souligne les limitations de la méthode du Maximum de Vraisemblance en raison du faible historique de données.

— **Effet de recalibration de la volatilité de tous les segments sur le ratio de solvabilité**

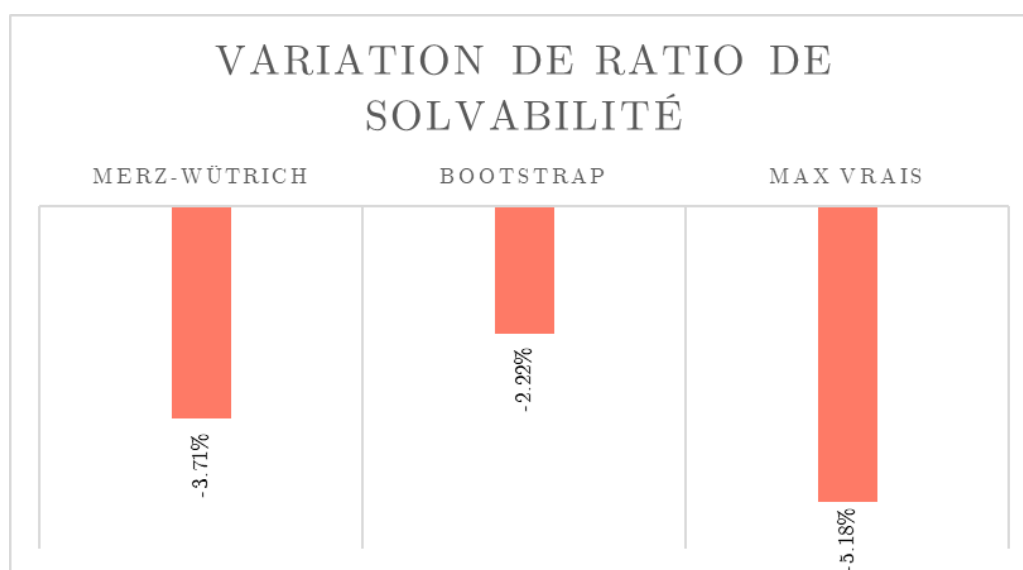


FIGURE 3.19 – Variation de ratio de solvabilité après recalibration de tous les paramètres

Les résultats montrent que toutes les méthodes (Merz-Wütrich, Bootstrap, Maximum de Vraisemblance) indiquent une diminution du ratio de solvabilité par rapport à la FS. La méthode

du Maximum de Vraisemblance montre la plus grande diminution, suivie par Merz-Wüthrich et Bootstrap.

Ces résultats confirment que la FS a tendance à sous-estimer les risques, nécessitant une augmentation du capital pour maintenir la solvabilité. La divergence plus marquée de la méthode du Maximum de Vraisemblance est probablement due à l'utilisation d'un historique de données plus court, ce qui peut entraîner des estimations moins stables et plus volatiles.

Ainsi, bien que toutes les méthodes montrent des tendances similaires, la méthode du Maximum de Vraisemblance se distingue par des variations plus extrêmes, soulignant l'importance d'un historique de données adéquat pour des estimations fiables.

- **La volatilité des segments d'activité par la nature des affaires (marocaines ou étrangères) et par type de réassurance (facultative ou obligatoire)**

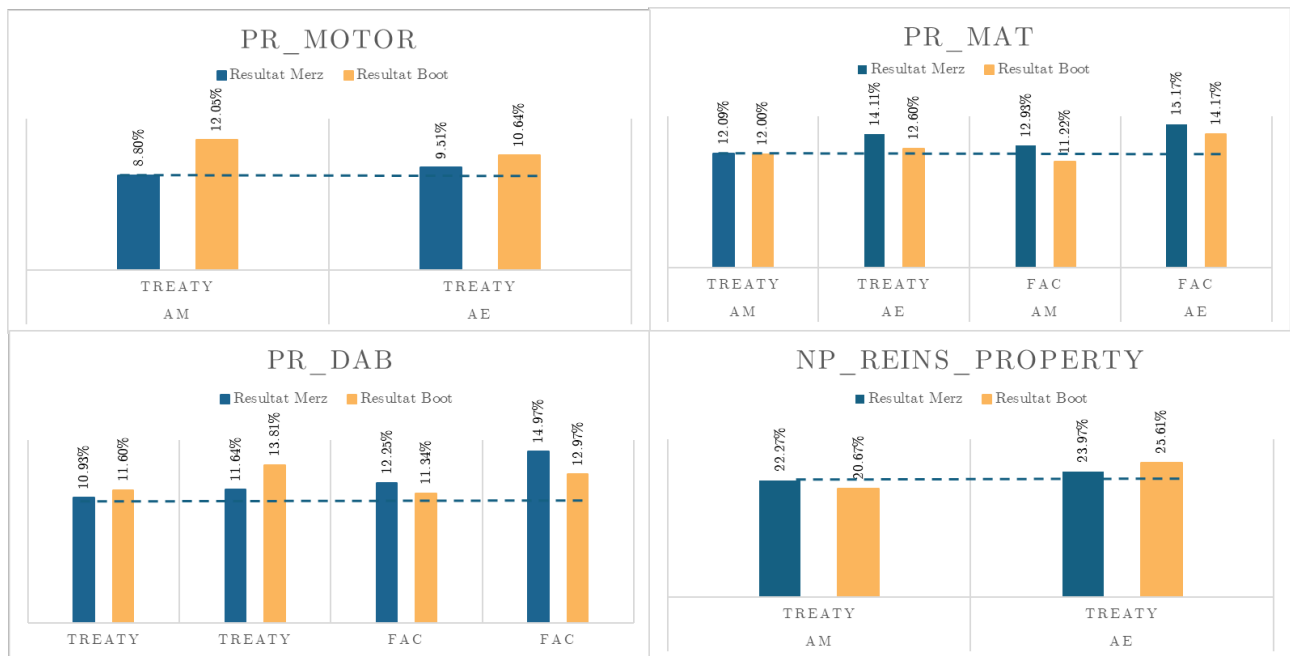


FIGURE 3.20 – Volatilité pour la maille la plus fine

Les graphiques montrent que les différences entre les méthodes Merz-Wüthrich et Bootstrap sont plus prononcées pour les affaires étrangères (AE) et les réassurances facultatives (FAC) par rapport aux affaires marocaines (AM) et aux réassurances obligatoires (TREATY). En effet, les volatilités calculées par la méthode Bootstrap sont souvent plus élevées, suggérant une sous-estimation de la volatilité par Merz-Wüthrich pour ces segments. Cette divergence est particulièrement marquée dans les segments "MAT" et "Fire and other property damage" pour les réassurances facultatives, ainsi que pour les affaires étrangères en général, indiquant une plus grande incertitude et variabilité des résultats pour ces catégories.

Chapitre 4

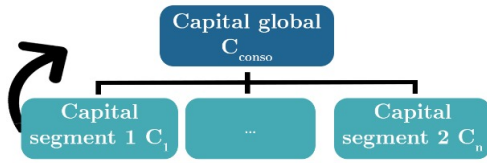
Allocation de capital

Après avoir rigoureusement évalué les chocs de risque de prime et de réserve pour nos différents segments, nous abordons désormais une phase cruciale de notre analyse. Cette étape consistera à utiliser ces chocs pour estimer le risque associé à chaque LOB. Cette estimation est fondamentale pour déterminer le pourcentage d'allocation de capital approprié pour chaque segment. L'objectif est de garantir une gestion du risque optimale et une répartition efficace du capital, alignées sur les objectifs stratégiques de l'entreprise et les exigences réglementaires.

4.1 Définition et objectifs

Le processus d'agrégation permet de disposer d'un capital consolidé pour l'ensemble des risques auxquels la compagnie est exposée. Ce processus permet notamment, par des phénomènes de dépendance entre les différents segments, de faire apparaître des bénéfices de diversification qui devront être pris en compte dans l'allocation. En effet, lorsque les risques se diversifient, le capital est inférieur à la somme des capitaux élémentaires. On parle alors de bénéfices de diversification. Disposant d'un capital consolidé, l'objectif est d'allouer les bénéfices de diversification et ainsi d'obtenir des capitaux individuels dont la somme est égale au capital économique global (principe de « full allocation »). Ainsi, il sera possible de déterminer la consommation réelle des différents segments et de calculer des indicateurs de rentabilité. Le capital alloué est alors un bon indicateur de risque et présente un intérêt certain comme outil de pilotage de l'activité.

ÉTAPE 1 : Agrégation des risques



ÉTAPE 2: Allocation du capital consolidé

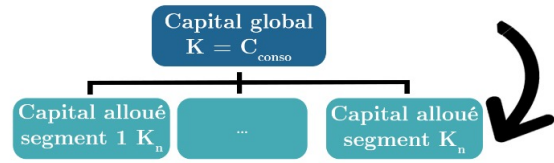


FIGURE 4.1 – Allocation vs agrégation de capital

Le processus d'allocation nécessite de calculer la contribution au risque global de chaque segment qui sera définie à partir d'une mesure de risque et d'une méthode d'allocation. Afin de formaliser la problématique de l'allocation du capital, qui représente finalement l'opération complémentaire de l'agrégation des risques, on considère un portefeuille de n risques, qui représentent les coûts ou les pertes d'une compagnie d'assurance. Ces risques peuvent représenter les pertes des différentes lignes d'affaires ou branches. La même modélisation peut être généralisée pour une problématique d'allocation de fonds pour un portefeuille financier ou portefeuille de contrats. Nous représentons ces risques à l'aide d'un vecteur de variables aléatoires (X_1, \dots, X_d) .

Le calcul du capital économique nécessite une agrégation des risques après avoir déterminé leur structure de dépendance. Le risque global peut être représenté par la somme

$$S = \sum_{i=1}^n X_i.$$

Pour une mesure de risque ρ choisie, le capital économique est calculé par $\rho(S)$. L'allocation du capital est l'opération qui consiste à distribuer ce montant $\rho(S) = \rho(\sum_{i=1}^n X_i)$ entre les différents risques X_i ($i = 1, \dots, n$), et donc la détermination de la participation de chaque ligne d'affaire dans l'immobilisation des capitaux propres de solvabilité.

4.2 Mesure de risque

Pour pouvoir comparer deux risques, il faut être capable de les mesurer. C'est l'objectif des mesures de risques. On appelle mesure de risque toute application ρ associant un risque X à un réel $\rho(X) \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, où X est une variable aléatoire. La comparaison entre deux variables aléatoires étant souvent compliquée, la mesure de risque va permettre de comparer deux réels. Une mesure de risque doit satisfaire certains critères afin de répondre de manière pertinente à cette définition. On parle alors de mesure de risque « cohérente ».

- **Monotone** : $\forall X_1, X_2 \in \Gamma, X_1 \leq X_2 p.s \Rightarrow \rho(X_1) \leq \rho(X_2)$
- **Positivement homogène** : $\forall X \in \Gamma, \forall \alpha > 0, \rho(\alpha X) = \alpha \rho(X)$
- **Invariante par translation** : $\forall X \in \Gamma, \forall h \in \mathbb{R}, \rho(X + h) = \rho(X) + h$

— **Sous-additive** : $\forall X_1, X_2 \in \Gamma, \rho(X_1 + X_2) \leq \rho(X_1) + \rho(X_2)$

Avec Γ l'ensemble des variables aléatoires réelles définies sur l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{R})$, et $\rho : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$ une mesure de risque.

D'un point de vue assurantiel, ces propriétés trouvent une interprétation pratique puisque la mesure de risque doit permettre de définir un capital de solvabilité. Ainsi, la sous-additivité représente l'effet de diversification : le capital requis après agrégation de deux risques est inférieur à la somme des besoins en capital de chaque risque pris séparément. L'invariance par translation traduit le fait que le besoin en capital d'un risque auquel on a ajouté un montant c est égal au besoin en capital de ce risque seulement augmenté de la quantité c .

L'homogénéité permet, dans le cas d'un taux d'intérêt constant, de ne pas affecter la structure du risque par un changement de numéraire. Par exemple, un risque exprimé en euros pourra être comparé à un risque en dollars par simple conversion de devises. Enfin, la monotonie met en évidence le fait que si les pertes engendrées par un risque X sont toujours plus faibles que celles engendrées par un risque Y , alors le besoin en capital associé au risque X est moins important que pour le risque Y . Ainsi, il faudra veiller dans l'allocation de capital à ne pas allouer au risque X un montant supérieur à celui de Y .

Principe d'allocation : L'allocation du capital suppose la présence d'un effet de diversification positif. Dans ce cas, il faut choisir un principe d'allocation et une mesure de risque pour allouer le capital économique.

On définit par C_i la part de la contribution au risque allouée au risque X_i . L'allocation doit vérifier quelques propriétés souhaitables pour être exploitable, comme l'additivité (Full allocation)

$$CE = \sum_{i=1}^n C_i$$

, avec CE le capital économique alloué. Ces propriétés seront présentées dans la définition de *l'allocation cohérente* dans la partie suivante de ce chapitre.

En pratique, trois règles d'allocation sont les plus utilisées par les compagnies d'assurance. Elles se basent sur les mesures de risques usuelles (Covariance, VaR et TVaR), elles sont simples à implémenter, et prennent en compte la structure de dépendance et vérifient la propriété de Full Allocation :

4.2.1 Ecart-type et Variance

L'écart type mesure la dispersion d'une variable autour de sa moyenne. Il correspond à la racine carrée de la variance. En d'autres termes, il s'agit de la volatilité d'une variable et mesure donc le risque. L'écart type est bien plus utilisé que la variance par les différents investisseurs et

les gérants de portefeuille. Cependant, ce critère n'est pas bien adapté à l'activité d'assurance, notamment parce qu'il est symétrique et pénalise autant les pertes que les profits.

Ainsi, son expression mathématique est la suivante :

$$\sigma_X = \sqrt{\mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2]} = \sqrt{\mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2}$$

L'écart-type est une mesure sous-additive et positivement homogène, cependant elle n'est pas cohérente car elle est ni monotone ni invariante par translation.

4.2.2 Value-at-Risk (VaR)

Nous rappelons tout d'abord la définition de la Value at Risk qui représente la mesure de risque la plus utilisée en pratique, notamment pour la facilité de son calcul et ses estimations, et aussi pour la performance de ses procédures de backtesting. On appelle la VaR au niveau α , le quantile d'ordre α de la distribution de X :

$$VaR_\alpha(X) = \inf\{x \in \mathbb{R} : \mathbb{P}(X \leq x) \geq \alpha\} = \inf\{x \in \mathbb{R} : F(x) \geq \alpha\}.$$

Si la distribution de X est continue alors $VaR_\alpha(X) = F^{-1}(\alpha)$.

La VaR a l'avantage d'être facile à expliquer car elle correspond au montant nécessaire pour faire face à un risque X avec une probabilité α .

On a :

$$C_i = \frac{\mathbb{E}[X_i | S = VaR_\alpha(S)]}{VaR_\alpha(S)} CE$$

Cette méthode vérifie la propriété de l'additivité :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n C_i &= \sum_{i=1}^n \frac{\mathbb{E}[X_i | S = VaR_\alpha(S)]}{VaR_\alpha(S)} CE \\ &= \frac{\mathbb{E}[\sum_{i=1}^n X_i | S = VaR_\alpha(S)]}{VaR_\alpha(S)} CE \\ &= \frac{\mathbb{E}[S | S = VaR_\alpha(S)]}{VaR_\alpha(S)} CE \\ &= CE. \end{aligned}$$

La règle basée sur la VaR prend bien en compte la structure de dépendance du vecteur aléatoire (X_1, \dots, X_n) . Elle est très utilisée en pratique, notamment dans le contexte d'un portefeuille avec un grand nombre de risques. Elle permet aussi d'obtenir des expressions analytiques dans plusieurs cas.

La VaR prend bien en compte la structure de dépendance entre les variables aléatoires. Ainsi, par sa simplicité d'application, la VaR est utilisée par la majorité des régulateurs et organismes d'assurance.

4.2.3 Tail-Value-at-Risk (TVaR)

La mesure VaR ne donne pas d'information sur le comportement de la distribution d'une variable aléatoire X au-delà de la VaR, et donc elle n'est pas suffisante pour préciser l'ampleur de la valeur que peut prendre X si elle excède la VaR. Comme alternative qui répond à ce besoin, la mesure Tail Value at Risk (TVaR) avec un niveau de confiance α est définie comme la moyenne des VaR dépassant la $VaR_\alpha(X)$:

La Tail-Value-at-Risk de niveau α associé au risque X est définie par :

$$TVaR_\alpha(X) = \mathbb{E}(X \mid X > VaR_\alpha(X))$$

La caractérisation intégrale de la TVaR est la suivante :

$$TVaR_\alpha(X) = \frac{1}{1-\alpha} \int_{VaR_\alpha(X)}^{+\infty} x dF_X(x) = \frac{1}{1-\alpha} \int_\alpha^1 F_X^{-1}(p) dp = \frac{1}{1-\alpha} \int_\alpha^1 VaR_p(X) dp$$

On peut décomposer la TVaR en la somme de la VaR de même niveau α et la moyenne des pertes supérieures à cette VaR :

$$TVaR_\alpha(X) = VaR_\alpha(X) + \frac{1}{1-\alpha} \mathbb{E}[(X - VaR_\alpha(X))^+]$$

Ainsi, la TVaR est sensible à la structure de la queue de distribution de la variable de risque.

On a :

$$C_i = \frac{\mathbb{E}[X_i \times \mathbb{1}_{S > VaR_\alpha(S)}] + \mathbb{E}[X_i \times \mathbb{1}_{S = VaR_\alpha(S)}] \beta}{(1-\alpha)TVaR_\alpha(S)} CE$$

avec

$$\beta = \begin{cases} \frac{(\mathbb{P}(S \leq VaR_\alpha(S)) - \alpha)}{\mathbb{P}(S = VaR_\alpha(S))}, & \text{si } \mathbb{P}(S = VaR_\alpha(S)) > 0 \quad (S \text{ a une distribution discrète}) \\ 0, & \text{si } \mathbb{P}(S = VaR_\alpha(S)) = 0 \quad (S \text{ a une distribution continue}) \end{cases}$$

On vérifie facilement que la relation $CE = \sum_{i=1}^n C_i$ est satisfaite :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n C_i &= \sum_{i=1}^n \frac{\mathbb{E}[X_i \times \mathbf{1}_{S > VaR_\alpha(S)}] + \mathbb{E}[X_i \times \mathbf{1}_{S = VaR_\alpha(S)}] \beta}{(1-\alpha)TVaR_\alpha(S)} CE \\ &= \frac{\mathbb{E}[S \times \mathbf{1}_{S > VaR_\alpha(S)}] + \mathbb{E}[S \times \mathbf{1}_{S = VaR_\alpha(S)}] \beta}{(1-\alpha)TVaR_\alpha(S)} CE \\ &= \frac{\mathbb{E}[S \times \mathbf{1}_{S > VaR_\alpha(S)}] + \mathbb{E}[S \times \mathbf{1}_{S = VaR_\alpha(S)}] \beta}{(1-\alpha)TVaR_\alpha(S)} CE \\ &= \frac{\mathbb{E}[S \times \mathbf{1}_{S > VaR_\alpha(S)}] + VaR_\alpha(S) \mathbb{P}(S = VaR_\alpha(S)) \beta}{(1-\alpha)TVaR_\alpha(S)} CE \\ &= \frac{TVaR_\alpha(S)}{TVaR_\alpha(S)} CE \\ &= CE. \end{aligned}$$

Comme la règle basée sur la VaR, la règle basée sur la TVaR, est très présente en pratique, grâce à la simplicité de son application, et la cohérence de la TVaR comme mesure de risque.

Après avoir identifié un cadre général pour la construction d'une allocation de capital cohérente et économiquement pertinente, nous allons essayer d'exposer les différentes méthodes présentes dans la littérature et utilisées en pratique par les assureurs pour allouer leurs capitaux économiques. Des approches simplifiées constituent la base du développement des méthodes proportionnelle et marginale. Cependant, ces méthodes négligent des aspects importants liés à la structure de dépendance entre les composantes du groupe.

La méthode de Shapley est issue de la théorie des jeux coopératifs, avec une utilisation de la valeur de Shapley pour déterminer la participation de chaque risque dans le risque global. Les risques sont vus comme des joueurs qui partagent les gains réalisés dans les différentes coalitions possibles.

De plus, la méthode d'Euler représente une généralisation continue de la méthode marginale. Elle est basée sur la notion de l'impact marginal infinitésimal de chaque risque. Cette méthode est la plus utilisée en pratique, grâce à ses propriétés de cohérence et sa vérification dans plusieurs cas de choix de mesure de risque de la propriété RORAC compatibilité.

4.3 Cohérence d'une méthode d'allocation

Il existe différentes méthodes d'allocation présentant chacune une approche particulière. Ces méthodes, comme pour les mesures de risques, doivent répondre à certains critères de cohérence.

Dans le reste de ce chapitre, on va considérer les notations suivantes :

- $\rho(X)$ le risque global calculé avec la mesure de risque ρ ,
- $\rho(X_i)$ le risque associé au segment i calculé avec la mesure de risque ρ ,
- $\rho^\lambda(X_i | X)$ la contribution au risque global du segment i , calculée avec la méthode d'allocation λ et la mesure de risque ρ ,
- N l'ensemble des n segments sur lesquels le capital est alloué

Une méthode d'allocation de capital est une fonction $\Lambda_{\rho,\lambda} : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ qui à chaque mesure de risque ρ associe un unique jeu de contributions au risque de tous les segments X_i :

$$(\rho^\lambda(X_1 | X), \rho^\lambda(X_2 | X), \dots)$$

Cependant, cette définition doit répondre à certaines propriétés afin d'être exploitable. Ainsi, on définit la notion de méthode d'allocation cohérente.

Une méthode d'allocation de capital est dite « cohérente » si elle satisfait les caractéristiques suivantes :

- **Full allocation** : $\sum_{i \in N} \rho^\lambda(X_i | X) = \rho(X)$ Cela garantit une allocation totale du risque global entre les différents segments.
- **Symétrie** : soient deux segments i et j tels que $I_{M_i}(h, S) = I_{M_j}(h, S)$ pour tout $S \in$

$D_i \cap D_j$, alors $\rho^\lambda(X_i | X) = \rho^\lambda(X_j | X)$, où $I_{M_i}(h, S)$ est l'impact marginal du segment i sur le risque associé à S il correspond au taux d'accroissement mesurant la baisse obtenue sur le risque relatif S , après cession d'une fraction h du segment i et D_i l'ensemble des combinaisons de risque dans lesquelles est inclus le segment de risque i

- **No undercut** : $\forall S \subseteq N, \sum_{i \in S} \rho^\lambda(X_i | X) \leq \rho(\sum_{i \in S} X_i)$ Elle traduit le fait que pour tout sous-ensemble, la somme des capitaux allouée à un segment de risque est inférieure ou égale au montant du risque global supporté par ce segment. Le bénéfice de diversification est donc pris en compte
- **Riskless allocation** : Si X_i non risqué, alors $\rho^\lambda(X_i | X) = 0$ Elle stipule que l'allocation sur un segment non risqué est nulle

Parfois, des propriétés supplémentaires peuvent être exigées comme la RORAC-compatibilité. Cette dernière fait intervenir l'indicateur Return On Risk Adjusted Capital (RORAC) qui permet de mesurer la rentabilité. Il est défini ainsi :

$$\text{RORAC} = \frac{\text{Résultat net}}{\text{Capital alloué}}$$

RORAC-compatibilité : Les contributions au risque $\rho^A(X_i | X)$ fournies par la méthode d'allocation sont RORAC-compatibles, s'il existe des réels ϵ_i tels que, pour tout segment i :

$$\text{RORAC}(X_i | X) > \text{RORAC}(X) \Rightarrow \text{RORAC}(X + hX_i | X) > \text{RORAC}(X)$$

pour tout h tel que $0 < h < \epsilon$.

Si la méthode d'allocation est RORAC-compatible, quel que soit le segment de risque E considéré, lorsque la rentabilité post-allocation de ce segment est plus élevée que la rentabilité globale, il est possible d'améliorer la rentabilité globale en ajoutant une quantité h suffisamment petite du segment i . La négation de l'implication permet de conclure que si l'ajout d'une quantité h de X_i à la composition du portefeuille diminue la rentabilité globale, alors il ne faut pas développer cette ligne d'affaires. De ce fait, dans le cadre d'une allocation RORAC-compatible, l'indicateur RORAC est crucial dans l'aide au pilotage de l'activité et la prise de décisions stratégiques.

4.3.1 Méthode proportionnelle

Nous commençons par l'idée la plus simple pour allouer un capital économique. La méthode proportionnelle permet d'allouer au segment i , la proportion du risque global auquel il contribue. Ainsi pour allouer le capital économique, il suffit de choisir la mesure de risque pour l'allocation. Ainsi, La contribution au risque du segment i associée à la mesure de risque ρ calculée avec la méthode proportionnelle est la suivante :

$$\rho^{prop}(X_i | X) = \frac{\rho(X_i)}{\sum_{j \in N} \rho(X_j)} \rho(X)$$

L'inconvénient de cette méthode est qu'elle ne tient pas compte de la structure de dépendance des risques. Ce désavantage sera évité partiellement dans la méthode marginale.

4.3.2 Méthode marginale

Elle permet d'allouer le risque global selon l'impact marginal de chacun des segments.

$$\rho^{marg}(X_i | X) = \frac{\rho(X_N) - \rho(X_{N \setminus \{i\}})}{\sum_{j \in N} (\rho(X_N) - \rho(X_{N \setminus \{j\}}))} \rho(X)$$

où $\rho(X_{N \setminus \{i\}})$ désigne le besoin en capital de l'ensemble auquel on a soustrait le segment de risque i . elle présente des désavantages d'avoir négligé les structures de dépendance qui peuvent exister entre les sous-groupes de risques et d'avoir considéré un impact marginal total en mesurant la différence de risque entre N et $N \setminus \{i\}$. La méthode de Shapley constitue une réponse au premier point, car elle traite les différentes possibilités de coalitions entre les joueurs et donc toutes les structures de dépendance qui peuvent exister entre les sous-groupes et avoir un impact sur le risque global. La méthode d'Euler considère l'impact marginal infinitésimal, et constitue par suite une version continue de la méthode marginale et une réponse à la deuxième critique.

4.3.3 Méthode de Shapley

L'approche de Shapley est une méthode discrète inspirée de la théorie des jeux coopératifs. Dans un jeu coopératif, les joueurs qui y participent ont la possibilité de se concerter et de s'engager à coopérer avant de définir la stratégie à adopter. On appelle coalition quand une coopération se forme. C'est donc une méthode qui va s'intéresser non seulement à la contribution marginale de chaque segment à l'ensemble mais aussi à tous les modules de risques possibles.

Cette méthode, initialement utilisée pour allouer le coût total entre joueurs, s'adapte aisément à la résolution d'un problème d'allocation du risque global entre segments.

4.3.3.1 Fondement et principe de la méthode

Dans un jeu coopératif, il est essentiel de déterminer une répartition équitable des gains résultant de la coopération. La valeur de Shapley, proposée dans la littérature de la théorie des jeux, est une méthode permettant de garantir cette équité. Cette méthode s'applique dans le cadre des utilités transférables. Par exemple si plusieurs entreprises décident de former une coopérative dans l'objectif de maximiser la production et le profit, et ensuite répartir ce profit entre ses membres, on peut parler de solution avec utilité transférable.

Un jeu coopératif est généralement défini par sa fonction caractéristique, qui attribue les gains à chaque coalition. Cette fonction, notée ϕ , décrit entièrement le jeu. Par exemple, si la coalition formée des joueurs 2 et 4 obtient un gain de 50, alors la valeur de ϕ pour cette coalition est $\phi(\{2, 4\}) = 50$. Le jeu est souvent appelé jeu ϕ , et toutes les coalitions possibles ont une valeur,

y compris les coalitions composées d'un seul joueur. Par définition, la valeur de ϕ pour une coalition vide est égale à 0.

Dans un jeu coopératif de n joueurs, le nombre de coalitions non vides possibles est $2^n - 1$. La fonction caractéristique doit en principe vérifier la super-additivité pour les unions de coalitions disjointes. Mathématiquement, pour deux coalitions disjointes $C1$ et $C2$, cela se traduit par :

$$(C1 \cap C2 = \emptyset) \Rightarrow \phi(C1 \cup C2) \geq \phi(C1) + \phi(C2).$$

Dans le cas d'un jeu à utilité transférable, Shapley a développé un ensemble d'axiomes qui engendre une solution unique, appelée la valeur de Shapley dans la littérature. On note $N = \{1, \dots, n\}$, l'ensemble des joueurs, et $\varphi_i(\phi)$ la valeur de Shapley dans un jeu coopératif de n joueurs et de fonction caractéristique ϕ . Les axiomes utilisés par Shapley sont les suivants :

1. **Symétrie** : Pour que le jeu soit équitable, la permutation des joueurs ne doit pas changer leurs valeurs de Shapley. C'est-à-dire, si le joueur i devient le joueur j , alors leurs valeurs de Shapley sont aussi permutées. Mathématiquement, pour toute permutation π , et pour tout joueur $i \in N$,

$$\varphi_{\pi(i)}(\pi\phi) = \varphi_i(\phi);$$

2. **Optimalité de Pareto** : La valeur des gains d'une coalition doit forcément être égale à la somme des valeurs de Shapley de ses membres :

$$\sum_{i \in N} \varphi_i(\phi) = \phi(N);$$

3. **Additivité** : Dans le cas d'un joueur qui participe parallèlement à deux jeux coopératifs, de fonctions caractéristiques ϕ_1 et ϕ_2 , et si on considère ces deux jeux comme un seul jeu, donc de fonction caractéristique $\phi = \phi_1 + \phi_2$, alors la valeur de Shapley du joueur i est tout simplement la somme de ses valeurs dans ces deux jeux :

$$\varphi_i(\phi) \equiv \varphi_i(\phi_1 + \phi_2) = \varphi_i(\phi_1) + \varphi_i(\phi_2).$$

Shapley a montré que l'unique valeur du jeu φ qui vérifie ces axiomes, est la valeur de Shapley, donnée pour chaque joueur i par l'expression suivante :

$$\varphi_i(\phi) = \sum_{\substack{Z \subseteq N \\ i \in Z}} \frac{(n - |Z|)! (|Z| - 1)!}{n!} [\phi(Z) - \phi(Z \setminus \{i\})]$$

où $|Z|$ est le nombre de joueurs de la coalition Z . La solution de Shapley représente donc une valeur moyenne d'impacts marginaux du joueur i dans les différentes coalitions possibles. En effet, si on considère que chaque joueur entre aléatoirement dans une coalition, son impact sera mesuré par l'accroissement réalisé au niveau du gain de la coalition suite à son entrée.

4.3.3.2 Application à l'allocation de capital

La méthode de Shapley peut être appliquée à un problème d'allocation du capital dans le cadre suivant :

- Les segments de risque représentent les joueurs du jeu évoqué précédemment.
- La mesure de risque ρ est identifiée à la fonction caractéristique.

ϕ est alors définie, pour toute coalition Z incluse dans N , par :

$$\phi(Z) = \rho \left(\sum_{i \in Z} X_i \right).$$

Cette méthode permet d'améliorer la méthode marginale en se dotant d'une vision marginale par rapport à tous les sous-ensembles contenant le segment i , comme mis en évidence par la forme des contributions au risque donnée ci-dessous.

$$\rho^{Sh}(X_i | X) = \sum_{Z \in \mathcal{D}_i} \frac{(z-1)!(n-z)!}{n!} (\rho(Z) - \rho(Z \setminus \{i\})) = \sum_{Z \in \mathcal{D}_i} \frac{(z-1)!(n-z)!}{n!} IM_i(1, Z).$$

Où z est le cardinal de Z et \mathcal{D}_i l'ensemble des coalitions de N contenant i .

L'allocation par la méthode de Shapley vérifie la propriété « full allocation » suivante :

$$\sum_{i \in N} \rho^{Sh}(X_i | X) = \rho(X).$$

Nous démontrons cette propriété en **Annexe B**.

4.3.4 Méthode d'Euler

Contrairement aux méthodes discrètes explicitées ci-dessus, la méthode d'Euler est continue. En effet, la méthode d'Euler permet d'allouer le risque global selon l'impact marginal infinitésimal de chaque segment. La différence avec la méthode marginale est que les segments sont à présent fractionnables. De ce fait, la méthode d'Euler est continue.

La méthode permet donc d'allouer à chaque segment son impact infinitésimal, soit la limite de $IM_i(h, S)$ quand h tend vers 0.

La contribution au risque calculée avec la méthode d'Euler est :

$$\rho^{Euler}(X_i | X) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\rho(X) - \rho(X - hX_i)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} IM_i(h, N)$$

La méthode d'Euler vérifie tous les critères de cohérence.

On peut expliciter la contribution au risque de cette méthode en fonction des différentes mesures de risque vues précédemment.

Mesure de risque	Contribution au risque
Écart-type	$\sigma^{Euler}(X_i X) = \theta \frac{\text{cov}(X_i, X)}{\text{var}(X)}$
Value-at-Risk (VaR)	$VaR^{Euler}(X_i X) = \mathbb{E}(X_i X = VaR_\alpha(X))$
Tail-Value-at-Risk (TVaR)	$TVaR^{Euler}(X_i X) = \mathbb{E}(X_i X > VaR_\alpha(X))$

Figure 2-8 - Méthode d'Euler selon les mesures de risque

La méthode d'Euler couplée à la mesure de risque VaR a été retenue par l'EIOPA pour l'allocation du SCR sous Solvabilité 2. C'est également cette méthode que nous utiliserons lors de notre application pratique afin de rester dans l'environnement réglementaire Solvabilité II.

La démonstration des contributions selon la mesure est présentée dans l'article de *Dirk Tasche* (10).

4.4 Application des méthodes d'allocation

Pour appliquer ces méthodes d'allocation de capital à la maille la plus fine de notre portefeuille (Lob S2 x Type de réassurance x Canton réglementaire), nous devons disposer des volumes de risque et des réserves pour chaque segment, ainsi que des résultats résumés des méthodes d'estimation du choc de prime et de réserve :

- Pour le risque de réserve, nous utiliserons les chocs calculés par la méthode Merz, conformément à l'acte délégué.
- Pour le risque de prime, nous utiliserons les chocs calculés par la méthode de maximum de vraisemblance pour la maille LOB S2, en supposant que le même choc s'applique à chaque sous-segment de chaque LOB.

Le tableau ci-dessous résume les données nécessaires :

Segment	σ_{prem} (%)	σ_{res} (%)	V_{prem}	V_{res}
AE_FAC_PR_REINS_FIRE_OTH	10.96	14.97	6,084,863	181,402
AE_FAC_PR_REINS_MARINE_A	12.83	15.17	6,478,788	98,743
AE_TREATY_NP_REINS_PROPERTY	15.54	23.97	5,972,443	176,734
AE_TREATY_PR_REINS_FIRE_OTH	10.96	11.64	29,824,092	259,922
AE_TREATY_PR_REINS_MARINE_A	12.83	14.11	9,179,855	87,452
AE_TREATY_PR_REINS_OTHER_MO	8.24	9.51	1,819,193	39,421
AM_FAC_PR_REINS_FIRE_OTH	10.96	12.25	87,508,839	1,285,488
AM_FAC_PR_REINS_MARINE_A	12.83	12.93	43,283,569	552,639
AM_TREATY_NP_REINS_PROPERTY	15.54	22.27	13,421,749	51,361
AM_TREATY_PR_REINS_FIRE_OTH	10.96	10.93	18,796,066	99,960
AM_TREATY_PR_REINS_MARINE_A	12.83	12.09	9,170,012	22,100
AM_TREATY_PR_REINS_OTHER_MO	8.24	8.80	31,021,606	687,699

TABLE 4.1 – Résumé des volumes et des chocs de prime et de réserve pour chaque segment

NB : Les volumes de risque et de réserve ont été multipliés par un coefficient pour préserver la confidentialité de l'entreprise et sont présentés et utilisés ci-après à titre purement illustratif.

Pour l'application de nos méthodes, il est nécessaire de disposer d'une matrice de corrélation entre les segments de la maille avec laquelle nous travaillons. Ainsi, le calcul de cette matrice est primordial et sera effectué en premier dans la section suivante.

4.4.1 Calcul de la matrice de corrélation

Dans l'analyse actuarielle, évaluer les corrélations entre les paiements des triangles de liquidation de différents segments d'assurance est essentiel pour comprendre les relations sous-jacentes et pour la modélisation des risques. La corrélation de Spearman est particulièrement utile dans ce contexte car elle mesure la force et la direction de l'association monotone entre deux variables continues ou ordinales.

Pour notre étude, les corrélations sont calculées entre les paiements annuels des triangles de liquidation pour diverses lignes de business (LoB). Chaque triangle est lu, et une préparation des données est réalisée pour s'assurer que les comparaisons de corrélations sont valides à travers des années de souscription et des années de développement communes.

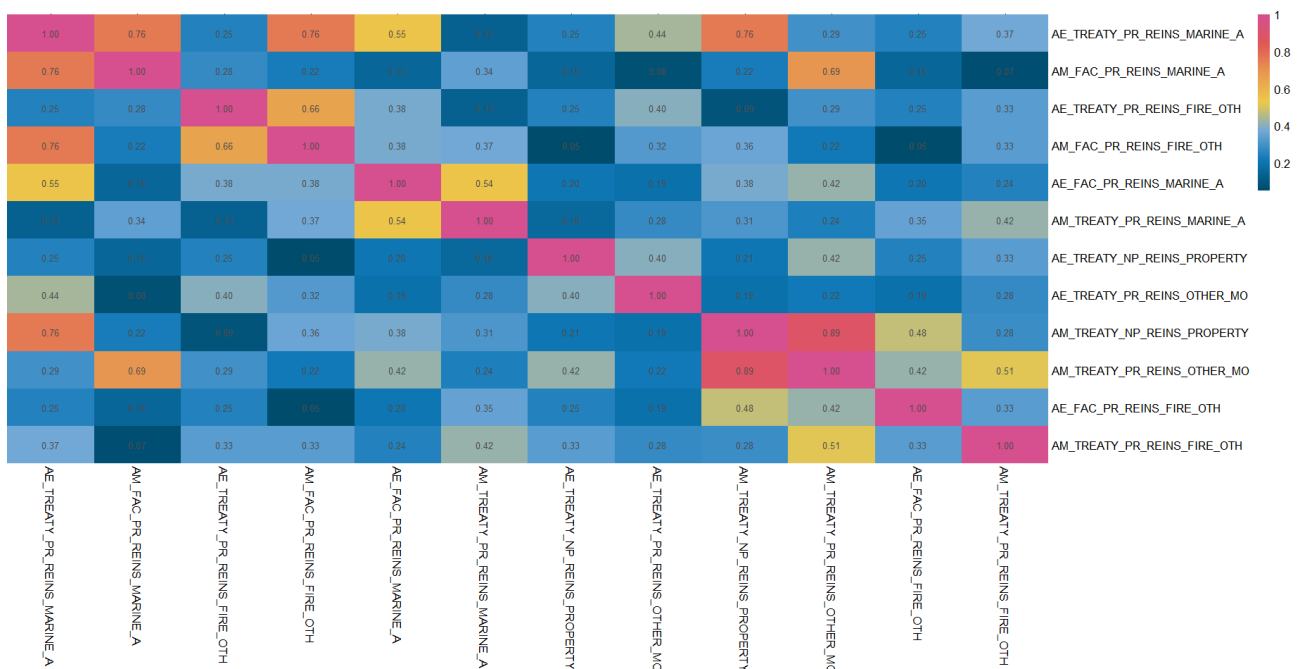


FIGURE 4.2 – Matrice de corrélation de la maille étudiée

4.4.2 Résultats des méthodes

4.4.2.1 Résultats de l'allocation proportionnelle

Nous commençons par calculer pour chaque segment de notre maille le σ_{pr} correspondant, en utilisant la formule présentée dans la partie 2.4.3 (voir Partie 2.4.3). Par la suite, nous procé-

dans au calcul du $BSCR_{NL}$ pour chaque segment, on trouve :

Segment	$\sigma_{p\&r}$ (%)	$BSCR_{NL}$
AE_FAC_PR_REINS_FIRE_OTH	10.87	2,042,667
AE_FAC_PR_REINS_MARINE_A	12.75	2,516,462
AE_TREATY_NP_REINS_PROPERTY	15.45	2,850,020
AE_TREATY_PR_REINS_FIRE_OTH	10.92	9,851,845
AE_TREATY_PR_REINS_MARINE_A	12.78	3,551,983
AE_TREATY_PR_REINS_OTHER_MO	8.17	455,432
AM_FAC_PR_REINS_FIRE_OTH	10.89	29,012,086
AM_FAC_PR_REINS_MARINE_A	12.75	16,768,080
AM_TREATY_NP_REINS_PROPERTY	15.52	6,274,443
AM_TREATY_PR_REINS_FIRE_OTH	10.93	6,196,597
AM_TREATY_PR_REINS_MARINE_A	12.81	3,533,551
AM_TREATY_PR_REINS_OTHER_MO	8.16	7,760,886

TABLE 4.2 – Calcul du $\sigma_{p\&r}$ et du $BSCR_{NL}$ pour chaque segment

Pour aborder la méthode d'allocation de capital proportionnelle, nous nous appuyons sur la mesure de risque choisie, en l'occurrence la Value at Risk (le Capital de Solvabilité Requis). On trouve :

Segment	Proportion (%)
AE_FAC_PR_REINS_FIRE_OTH	2.25
AE_FAC_PR_REINS_MARINE_A	2.77
AE_TREATY_NP_REINS_PROPERTY	3.14
AE_TREATY_PR_REINS_FIRE_OTH	10.85
AE_TREATY_PR_REINS_MARINE_A	3.91
AE_TREATY_PR_REINS_OTHER_MO	0.50
AM_FAC_PR_REINS_FIRE_OTH	31.95
AM_FAC_PR_REINS_MARINE_A	18.46
AM_TREATY_NP_REINS_PROPERTY	6.91
AM_TREATY_PR_REINS_FIRE_OTH	6.82
AM_TREATY_PR_REINS_MARINE_A	3.89
AM_TREATY_PR_REINS_OTHER_MO	8.55

TABLE 4.3 – Proportions d'allocation proportionnelle par segment

4.4.2.2 Résultats de l'allocation marginale

Pour cette méthode on commence par calculer le $BSCR_{NL}$ en excluant chaque segment de notre maille, on trouve :

Segment	BSCR Excluding
AE_FAC_PR_REINS_FIRE_OTH	60,684,779
AE_FAC_PR_REINS_MARINE_A	60,058,754
AE_TREATY_NP_REINS_PROPERTY	60,524,574
AE_TREATY_PR_REINS_FIRE_OTH	55,026,622
AE_TREATY_PR_REINS_MARINE_A	58,267,135
AE_TREATY_PR_REINS_OTHER_MO	61,152,058
AM_FAC_PR_REINS_FIRE_OTH	40,812,842
AM_FAC_PR_REINS_MARINE_A	52,538,651
AM_TREATY_NP_REINS_PROPERTY	57,835,717
AM_TREATY_PR_REINS_FIRE_OTH	58,414,265
AM_TREATY_PR_REINS_MARINE_A	59,626,443
AM_TREATY_PR_REINS_OTHER_MO	56,241,345

TABLE 4.4 – Le BSCR en excluant chaque segment

Ainsi, en appliquant le principe présenté dans la partie théorique de la méthode, on trouve les pourcentage d'allocation pour chaque segment de notre maille :

Segment	Proportion (%)
AE_FAC_PR_REINS_FIRE_OTH	1.18
AE_FAC_PR_REINS_MARINE_A	2.32
AE_TREATY_NP_REINS_PROPERTY	1.47
AE_TREATY_PR_REINS_FIRE_OTH	11.51
AE_TREATY_PR_REINS_MARINE_A	5.59
AE_TREATY_PR_REINS_OTHER_MO	0.33
AM_FAC_PR_REINS_FIRE_OTH	37.45
AM_FAC_PR_REINS_MARINE_A	16.05
AM_TREATY_NP_REINS_PROPERTY	6.38
AM_TREATY_PR_REINS_FIRE_OTH	5.32
AM_TREATY_PR_REINS_MARINE_A	3.11
AM_TREATY_PR_REINS_OTHER_MO	9.29

TABLE 4.5 – Proportions d'allocation marginale par segment

4.4.2.3 Résultats de l'allocation par Shapley

Dans le cadre théorique exposé, la méthode de Shapley représente une amélioration significative de la méthode marginale. Contrairement à cette dernière, qui se base uniquement sur l'impact marginal d'un segment par rapport au SCR global pour les allocations, la méthode de Shapley détermine la contribution de chaque segment en examinant son impact lorsqu'il est ajouté à tous les sous-ensembles possibles de segments. Cette approche intègre toutes les combinaisons potentielles où le segment peut influencer le résultat et pondère ces contributions selon la probabilité de chaque combinaison, qui est basée sur le nombre de manières de former chaque sous-ensemble.

La valeur de Shapley de chaque segment est donc obtenue en calculant la moyenne pondérée de ses contributions marginales à tous les sous-ensembles possibles qui incluent ce segment. Dans notre analyse, où nous considérons 12 segments, le SCR pour chaque segment est recalculé $2^{12} - 1 = 4095$ fois pour évaluer toutes les contributions marginales envisageables selon la méthode de Shapley.

Pour illustrer le calcul des contributions marginales à travers la méthode de Shapley, nous allons examiner les impacts marginaux du segment "AE_FAC_PR_REINS_FIRE_OTH" sur divers sous-ensembles de risques. Voici un échantillon des résultats obtenus pour ce segment en intégrant différents ensembles de risques :

Sous-ensemble	Impact Marginal
AE_FAC_PR_REINS_FIRE_OTH seul	2,042,667.4
AE_FAC_PR_REINS_FIRE_OTH, AE_FAC_PR_REINS_MARINE_A	1,034,644.0
AE_FAC_PR_REINS_FIRE_OTH, AE_TREATY_NP_REINS_PROPERTY	1,049,457.5
AE_FAC_PR_REINS_FIRE_OTH, AE_FAC_PR_REINS_MARINE_A, AE_TREATY_NP_REINS_PROPERTY	985,252.2
AE_FAC_PR_REINS_FIRE_OTH, AE_TREATY_PR_REINS_FIRE_OTH	697,721.9
AE_FAC_PR_REINS_FIRE_OTH, AE_FAC_PR_REINS_MARINE_A, AE_TREATY_PR_REINS_FIRE_OTH	715,604.8

TABLE 4.6 – Impact Marginal du Segment AE_FAC_PR_REINS_FIRE_OTH sur différents sous-ensembles

On trouve les résultats résumés dans le tableau ci-dessous :

Segment	Proportion (%)
AE_FAC_PR_REINS_FIRE_OTH	1.34
AE_FAC_PR_REINS_MARINE_A	2.20
AE_TREATY_NP_REINS_PROPERTY	1.77
AE_TREATY_PR_REINS_FIRE_OTH	10.72
AE_TREATY_PR_REINS_MARINE_A	4.56
AE_TREATY_PR_REINS_OTHER_MO	0.30
AM_FAC_PR_REINS_FIRE_OTH	37.47
AM_FAC_PR_REINS_MARINE_A	17.83
AM_TREATY_NP_REINS_PROPERTY	6.29
AM_TREATY_PR_REINS_FIRE_OTH	5.54
AM_TREATY_PR_REINS_MARINE_A	3.01
AM_TREATY_PR_REINS_OTHER_MO	8.91

TABLE 4.7 – Proportions d'allocation de Shapley par segment

4.4.2.4 Résultats de l'allocation par Euler

En appliquant la méthode décrite dans la partie théorique, on trouve directement :

Segment	Proportion (%)
AE_FAC_PR_REINS_FIRE_OTH	1.76
AE_FAC_PR_REINS_MARINE_A	2.45
AE_TREATY_NP_REINS_PROPERTY	2.98
AE_TREATY_PR_REINS_FIRE_OTH	8.90
AE_TREATY_PR_REINS_MARINE_A	5.02
AE_TREATY_PR_REINS_OTHER_MO	0.45
AM_FAC_PR_REINS_FIRE_OTH	30.95
AM_FAC_PR_REINS_MARINE_A	16.70
AM_TREATY_NP_REINS_PROPERTY	7.53
AM_TREATY_PR_REINS_FIRE_OTH	9.55
AM_TREATY_PR_REINS_MARINE_A	3.19
AM_TREATY_PR_REINS_OTHER_MO	10.53

TABLE 4.8 – Proportion d'allocation d'Euler par segment

4.4.2.5 Comparaison des résultats d'allocation

Résumons les résultats trouvés des méthodes :

Segment	Prop (%)	Marginale (%)	Shapley (%)	Euler (%)
AE_FAC_PR_REINS_FIRE_OTH	2.25	1.18	1.34	1.76
AE_FAC_PR_REINS_MARINE_A	2.77	2.32	2.21	2.45
AE_TREATY_NP_REINS_PROPERTY	3.14	1.47	1.77	2.98
AE_TREATY_PR_REINS_FIRE_OTH	10.85	11.51	10.73	8.90
AE_TREATY_PR_REINS_MARINE_A	3.91	5.59	4.57	5.02
AE_TREATY_PR_REINS_OTHER_MO	0.50	0.33	0.31	0.45
AM_FAC_PR_REINS_FIRE_OTH	31.95	37.45	37.48	30.95
AM_FAC_PR_REINS_MARINE_A	18.46	16.05	17.83	16.70
AM_TREATY_NP_REINS_PROPERTY	6.91	6.38	6.29	7.53
AM_TREATY_PR_REINS_FIRE_OTH	6.82	5.32	5.54	9.55
AM_TREATY_PR_REINS_MARINE_A	3.89	3.11	3.01	3.19
AM_TREATY_PR_REINS_OTHER_MO	8.55	9.29	8.92	10.53

TABLE 4.9 – Comparaison des allocations des méthodes pour chaque segment

L'analyse des différentes méthodes d'allocation pour divers segments montre des variations notables entre les méthodes Prop, Marg, Shapley, et Euler, reflétant leurs approches distinctes dans l'évaluation des contributions ou des risques. Par exemple, la méthode Euler tend à modérer les allocations extrêmes, réduisant les pourcentages les plus élevés et augmentant les plus bas, suggérant une distribution qui prend en compte les interdépendances entre les segments. Cette méthode pourrait être vue comme procurant une répartition plus équilibrée. À l'inverse, les méthodes Marg et Shapley, bien que similaires, montrent des légères différences qui peuvent être attribuées à leur calcul basé sur l'impact marginal ou la valeur moyenne des contributions marginales, indiquant des variations dans l'évaluation de l'importance relative de chaque segment. Ces résultats soulignent l'importance de choisir une méthode d'allocation adaptée aux objectifs spécifiques de l'analyse de risque ou de répartition des ressources.

Conclusion Générale

L'application des USP pour la Société Centrale de Réassurance représente une avancée significative dans l'évaluation précise des risques de primes et de réserves. Cette démarche répond non seulement aux exigences de la directive Solvabilité II, mais permet également d'optimiser l'allocation du capital, renforçant ainsi la compétitivité et la résilience de la SCR.

En adoptant les USP, la SCR peut calibrer ses risques en fonction de données spécifiques à son portefeuille, offrant une évaluation des risques plus fidèle à sa réalité opérationnelle. Cela permet de mieux capter les particularités des risques auxquels elle est exposée, d'améliorer la gestion des ressources et de renforcer la stabilité financière de l'entreprise.

Les méthodes de calibrage avancées, telles que la méthode de maximum de vraisemblance, la méthode Merz-Wüthrich et le Bootstrap à un an, offrent une granularité et une précision accrues dans l'évaluation des risques. De plus, les différentes techniques d'allocation de capital, y compris les méthodes proportionnelle, marginale, de Shapley et d'Euler, permettent une répartition optimale des ressources, assurant ainsi une gestion efficace des risques.

En somme, ce projet démontre l'importance de calibrer les risques en utilisant des données propres à l'entreprise pour répondre aux exigences réglementaires tout en optimisant les performances financières. Cela permet à la SCR de renforcer sa position sur le marché de la réassurance, en assurant une évaluation des risques plus précise et une allocation de capital plus efficace. Cette approche stratégique est essentielle pour maintenir la compétitivité et la pérennité de la SCR dans un environnement de plus en plus complexe et réglementé.

Bibliographie

- [1] European Union, *Actes Délégués 2015*, Official Journal of the European Union, L 12/1, January 2015.
- [2] Alexandre Boumezoued, Yoboua Angoua, Laurent Devineau, and Jean-Philippe Boisseau, *One-year reserve risk including a tail factor : closed formula and bootstrap approaches*, Milliman Research, Milliman Paris, Paris, France, 2023.
- [3] Committee of European Insurance and Occupational Pensions Supervisors, *CEIOPS' Advice for Level 2 Implementing Measures on Solvency II : SCR Standard Formula – Article 111, j, k Undertaking-Specific Parameters*, Technical Report 71/10, CEIOPS, Frankfurt, Germany, January 2010.
- [4] Committee of European Insurance and Occupational Pensions Supervisors, *Calibration Paper on Solvency II*, Technical Report 69/10, CEIOPS, Frankfurt, Germany, December 2010.
- [5] Committee of European Insurance and Occupational Pensions Supervisors, *CEIOPS Report on Catastrophe Risk in Solvency II*, Technical Report 78/10, CEIOPS, Frankfurt, Germany, November 2010.
- [6] Paolo De Angelis and Ivan Granito, *Capital allocation and risk appetite under Solvency II framework*, Journal of Risk Management, doi : 10.13140/RG.2.1.1136.8404, 2015.
- [7] Société Centrale de Réassurance, *Société Centrale de Réassurance Website*, Available online at <http://www.scrmaroc.com>, 2006.
- [8] European Union, *Standard Formula & Undertaking Specific Parameters*, Guidance Manual, European Commission, Brussels, Belgium, 2023.
- [9] M. Denault, *Coherent allocation of risk capital*, Journal of Risk, 4 :1–34, January 2001.
- [10] D. Tasche, *Euler allocation : theory and practice*, Technical Report arXiv :0708.2542, August 2007.
- [11] Merz M. and Wüthrich M. V., *Modelling The Claims Development Result For Solvency Purposes*, Conference Paper, ASTIN Colloquium, July 2008.

-
- [12] Merz M., Lysenko N. and Wüthrich M. V., *Uncertainty in the claim development result in the chain-ladder method*, *Cand. Actuar. J.*, 109(1), 63—84, 2009.
- [13] Hürlimann W., *Optimization of the Non-Life Insurance Risk Diversification in Solvency II*, FRSGlobal Switzerland.
- [14] T. Mack, *Distribution-free Calculation of the Standard Error of Chain Ladder Reserve Estimates*, *ASTIN Bulletin*, Vol. 23, No. 2, 1993.
-

Annexe A

Type de couverture	Database Id
Fire and other property damage	PR_REINS_FIRE_OTH_DAMAGE_PROPRTY
Marine, aviation, transport (MAT)	PR_REINS_MARINE_AVIATN_TRANSPORT
Motor, other classes	PR_REINS_OTHER_MOTOR
Non-proportional reinsurance - property	NP_REINS_PROPERTY

TABLE 4.10 – Types de réassurance et leurs codes correspondants

Annexe B

Les contributions au risque global vérifient,

$$\sum_{i=1}^n \rho^{Sh}(X_i | X) = \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{Z \subseteq N \\ i \in Z}} \frac{(n-z)!(z-1)!}{n!} \left[\rho \left(\sum_{j \in Z} X_j \right) - \rho \left(\sum_{j \in Z \setminus \{i\}} X_j \right) \right].$$

On peut écrire cette équation de la façon suivante :

$$\sum_{i=1}^n \rho^{Sh}(X_i | X) = \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{Z \subseteq N \\ i \in Z}} \frac{(n-z)!(z-1)!}{n!} \left(\rho \left(\sum_{j \in Z} X_j \right) - \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{Z \subseteq N \\ i \in Z}} \frac{(n-z)!(z-1)!}{n!} \rho \left(\sum_{j \in Z \setminus \{i\}} X_j \right) \right),$$

où $z = |Z|$. Toute coalition Z contient donc z éléments, et par permutation de ces éléments (axiome de la symétrie), on déduit que le terme $\frac{(n-z)!(z-1)!}{n!} \rho \left(\sum_{j \in Z} X_j \right)$ apparaît z fois dans l'expression $\sum_{i=1}^n \sum_{\substack{Z \subseteq N \\ i \in Z}} \frac{(n-z)!(z-1)!}{n!} \rho \left(\sum_{j \in Z} X_j \right)$. Cette dernière peut donc être écrite sous la forme :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{Z \subseteq N \\ i \in Z}} \frac{(n-z)!(z-1)!}{n!} \rho \left(\sum_{j \in Z} X_j \right) &= \sum_{\substack{Z \subseteq N \\ 1 \leq z \leq n}} \frac{z(n-z)!(z-1)!}{n!} \rho \left(\sum_{j \in Z} X_j \right) \\ &= \sum_{\substack{Z \subseteq N \\ 1 \leq z \leq n}} \frac{(n-z)!z!}{n!} \rho \left(\sum_{j \in Z} X_j \right), \end{aligned}$$

D'un autre côté, les ensembles $Z^{-i} = Z \setminus \{i\}$, sont aussi des coalitions de cardinal $z-1$. Un ensemble $Z \setminus \{i\}$ peut être formé par l'élimination d'un élément $\{j\} \notin Z \setminus \{i\}$ de l'ensemble $\{Z \setminus \{i\}\} \cup \{j\}$, donc le terme $\frac{(n-z)!(z-1)!}{n!} \rho \left(\sum_{j \in Z} X_j \right)$ apparaît $(n-z+1)$ fois dans l'expression $\sum_{i=1}^n \sum_{\substack{Z \subseteq N \\ i \in Z}} \frac{(n-z)!(z-1)!}{n!} \rho \left(\sum_{j \in Z \setminus \{i\}} X_j \right)$, on peut donc réécrire cette dernière de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{Z \subseteq N \\ i \in Z}} \frac{(n-z)!(z-1)!}{n!} \rho \left(\sum_{j \in Z \setminus \{i\}} X_j \right) &= \sum_{\substack{Z \subseteq N \\ 1 \leq z \leq n}} \frac{(n-z+1)!(z-1)!}{n!} \rho \left(\sum_{j \in Z} X_j \right) \\ &= \sum_{\substack{Z \subseteq N \\ 1 \leq z \leq n}} \frac{(n-z+1)!(z-1)!}{n!} \rho \left(\sum_{j \in Z} X_j \right), \end{aligned}$$

Il suffit donc d'effectuer un changement de variable dans la dernière expression, $t = z-1$ et $T = Z \setminus \{i\} = Z \setminus \{i\}$, pour pouvoir l'écrire sous la forme :

$$\sum_{i=1}^n \sum_{\substack{Z \subseteq N \\ i \in Z}} \frac{(n-z)!(z-1)!}{n!} \rho \left(\sum_{j \in Z \setminus \{i\}} X_j \right) = \sum_{\substack{Z \subseteq N \\ 1 \leq t \leq n-1}} \frac{(n-t)!t!}{n!} \rho \left(\sum_{j \in T} X_j \right).$$

Ces réécritures nous permettent de simplifier l'expression (2.1) :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \rho^{Sh}(X_i | X) &= \sum_{\substack{Z \subseteq N \\ 1 \leq t \leq n-1}} \frac{(n-z)!z!}{n!} \rho \left(\sum_{j \in Z} X_j \right) - \sum_{\substack{Z \subseteq N \\ 1 \leq t \leq n-1}} \frac{(n-t)!t!}{n!} \rho \left(\sum_{j \in T} X_j \right), \\ &= \frac{(n-n)!n!}{n!} \rho \left(\sum_{j \in N} X_j \right) = \rho(S). \end{aligned}$$

Nous obtenons donc le résultat recherché.

Annexe C

Le facteur de diversification géographique relatif à chaque segment d'activité fait l'objet d'un calcul spécifique à l'entreprise, excepté pour les segments 6, 10, 11 et 12.

Segment Solvabilité II (s)	DIV_s
1 - Responsabilité Civile (RC) Automobile	$\sqrt{\frac{\sum_j [(V_{\text{prem},js} + V_{\text{res},js})^2]}{(\sum_j (V_{\text{prem},js} + V_{\text{res},js}))^2}}$ Ou j correspond à une zone géographique
2 - Dommages Automobile	
3 - Marine, aviation, transport (MAT)	
4 - Incendies & autres dommages aux biens (DAB)	
5 - Responsabilité Civile (RC) Générale	
6 - Crédits et cautions	100%
7 - Protection juridique	$\sqrt{\frac{\sum_j [(V_{\text{prem},js} + V_{\text{res},js})^2]}{(\sum_j (V_{\text{prem},js} + V_{\text{res},js}))^2}}$ Ou j correspond à une zone géographique
8 - Assistance	
9 - Pertes pécuniaires diverses (miscellaneous)	
10 - Réassurance accidents non-proportionnelle	100%
11 - Réassurance non-proportionnelle MAT	100%
12 - Réassurance dommages non-proportionnelle	100%

TABLE 4.11 – Le facteur de diversification géographique relatif à chaque segment d'activité

Annexe D

Niveau de corrélation	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1 - RC Automobile	1	0.5	0.5	0.25	0.5	0.25	0.5	0.25	0.5	0.25	0.25	0.25
2 - Dommages Automobile	0.5	1	0.25	0.25	0.25	0.25	0.25	0.5	0.5	0.25	0.25	0.25
3 - MAT	0.5	0.25	1	0.25	0.25	0.25	0.25	0.5	0.5	0.25	0.25	0.5
4 - Incendies & DAB	0.25	0.25	0.25	1	0.25	0.25	0.25	0.5	0.5	0.5	0.25	0.5
5 - RC Générale	0.5	0.25	0.25	0.25	1	0.5	0.5	0.25	0.5	0.25	0.5	0.25
6 - Crédits et cautions	0.25	0.25	0.25	0.25	0.5	1	0.5	0.5	0.5	0.25	0.5	0.25
7 - Protection juridique	0.5	0.25	0.25	0.25	0.5	0.5	1	0.25	0.5	0.25	0.5	0.25
8 - Assistance	0.25	0.5	0.5	0.5	0.25	0.5	0.25	1	0.5	0.5	0.25	0.25
9 - Miscellaneous	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	1	0.25	0.25	0.5
10 - Réass. non-prop. DAB	0.25	0.25	0.25	0.5	0.25	0.25	0.25	0.5	0.25	1	0.25	0.25
11 - Réass. non-prop. RC	0.25	0.25	0.25	0.25	0.5	0.5	0.5	0.25	0.25	0.25	1	0.25
12 - Réass. non-prop. MAT	0.25	0.25	0.5	0.5	0.25	0.25	0.25	0.25	0.5	0.25	0.25	1

TABLE 4.12 – Matrice de corrélation entre Lob S2

Annexe E

Nous analysons les corrélations entre les variations des spreads en utilisant la corrélation de Pearson, la corrélation de Spearman et la corrélation de Kendall. Ces méthodes permettent de comprendre la relation linéaire et monotone entre les variables.

Corrélation de Pearson

La corrélation de Pearson mesure la force et la direction de la relation linéaire entre deux variables. Elle est définie comme le rapport de la covariance des deux variables à la racine carrée du produit de leurs variances :

$$\rho_{X,Y} = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$$

où $\text{cov}(X, Y)$ est la covariance entre les variables X et Y , et σ_X et σ_Y sont les écarts-types de X et Y , respectivement.

Corrélation de Spearman

La corrélation de Spearman est une mesure non paramétrique de l'association monotone entre deux variables. Contrairement à la corrélation de Pearson, la corrélation de Spearman évalue comment bien la relation entre deux variables peut être décrite par une fonction monotone. Elle est calculée comme la corrélation de Pearson sur les rangs des données :

$$\rho_S = \frac{\text{cov}(\text{rg}(X), \text{rg}(Y))}{\sigma_{\text{rg}(X)} \sigma_{\text{rg}(Y)}}$$

où $\text{rg}(X)$ et $\text{rg}(Y)$ sont les rangs des variables X et Y .

Corrélation de Kendall

La corrélation de Kendall est également une mesure non paramétrique de l'association entre deux variables, basée sur les concordances et discordances de paires de données. Elle est définie comme la différence entre la probabilité que les observations soient dans le même ordre versus dans l'ordre inverse :

$$\tau_K = \frac{(\text{nombre de concordances}) - (\text{nombre de discordances})}{\binom{n}{2}}$$

où :

- $\binom{n}{2}$ est le nombre de paires possibles parmi n observations.
- Concordances : (x_i, y_i) et (x_j, y_j) telles que si $x_i < x_j$, alors $y_i < y_j$ ou si $x_i > x_j$, alors $y_i > y_j$
- Discordances : (x_i, y_i) et (x_j, y_j) telles que si $x_i < x_j$, alors $y_i > y_j$ ou si $x_i > x_j$, alors $y_i < y_j$.

Annexe F

Cette annexe décrit en détail quatre tests statistiques couramment utilisés : le test de Shapiro-Wilk, le test de Kolmogorov-Smirnov, le test d'absence d'effet calendaire, et le test de Student.

Test de Shapiro-Wilk

Le test de Shapiro-Wilk est un test de normalité utilisé pour déterminer si un ensemble de données suit une distribution normale.

La statistique du test de Shapiro-Wilk est définie comme suit :

$$W = \frac{\left(\sum_{i=1}^n a_i x_{(i)}\right)^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$$

où :

- $x_{(i)}$ sont les données ordonnées,
- \bar{x} est la moyenne des données,
- a_i sont des coefficients calculés à partir des moyennes et covariances d'un échantillon normal ordonné.

Les coefficients a_i sont définis de manière à maximiser la puissance du test contre une large gamme d'alternatives non normales.

- H_0 : Les données sont normalement distribuées.
- H_1 : Les données ne sont pas normalement distribuées.

Le test rejette l'hypothèse nulle de normalité si la statistique W est significativement petite. Un petit W indique une déviation de la normalité. La valeur p associée permet de déterminer la signification statistique. Si $p \leq \alpha$ (niveau de signification), on rejette H_0 .

Test de Kolmogorov-Smirnov

Le test de Kolmogorov-Smirnov (K-S) est un test non paramétrique utilisé pour comparer une distribution empirique avec une distribution théorique ou pour comparer deux distributions empiriques.

Pour un échantillon comparé à une distribution théorique, la statistique du test est :

$$D = \sup_x |F_n(x) - F(x)|$$

où :

- $F_n(x)$ est la fonction de distribution empirique de l'échantillon,
- $F(x)$ est la fonction de distribution théorique.
- H_0 : Les données suivent la distribution $F(x)$.
- H_1 : Les données ne suivent pas la distribution $F(x)$.

Test de Student

Le test de Student, ou test t, est utilisé pour comparer les moyennes de deux échantillons. Il est particulièrement utile pour comparer les moyennes de différents groupes de données, tels que les sinistres avant et après une intervention spécifique.

Pour deux échantillons indépendants, la statistique du test est :

$$t = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}}$$

où :

- \bar{x}_1 et \bar{x}_2 sont les moyennes des échantillons,
- s_1^2 et s_2^2 sont les variances,
- n_1 et n_2 sont les tailles des échantillons.

Pour un test à un échantillon :

$$t = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$$

où :

- \bar{x} est la moyenne de l'échantillon,
- μ est la moyenne hypothétique,
- s est l'écart type de l'échantillon,
- n est la taille de l'échantillon.
- H_0 : Les moyennes des deux échantillons sont égales (ou l'échantillon a une moyenne égale à μ).
- H_1 : Les moyennes des deux échantillons ne sont pas égales (ou l'échantillon n'a pas une moyenne égale à μ).

Test d'effet calendaire

L'objectif du test d'effet calendaire est de vérifier l'indépendance des années d'accident dans le cadre de la méthode Chain Ladder. Cela permet de s'assurer que les réclamations pour une année donnée ne sont pas influencées par des effets spécifiques à certaines années calendaires, comme des changements majeurs dans la gestion des sinistres ou des influences externes.

La procédure retourne une statistique résumée Z qui est supposée suivre une distribution normale. Il est donc possible de définir un seuil d'intervalle de confiance pour évaluer le résultat du test.

Les hypothèses pour le test d'effet calendaire peuvent être formulées comme suit :

- Hypothèse nulle (H_0) : Il n'y a pas d'effet calendaire, c'est-à-dire que les années d'accident sont indépendantes.
- Hypothèse alternative (H_1) : Il existe un effet calendaire, c'est-à-dire que les années d'accident ne sont pas indépendantes.

Définitions et Explications

- Une diagonale D_j dans le triangle cumulatif des réclamations représente les réclamations survenant dans une année calendaire spécifique.
- Les facteurs de développement A_j sont des ratios qui mesurent l'évolution des réclamations d'une période de développement à la suivante. Ils sont calculés à partir des éléments de la diagonale D_j .
- Chaque facteur de développement est comparé à la médiane des facteurs de développement pour une certaine année calendaire. Si un facteur est supérieur à la médiane, il est classé dans le set des grands facteurs L et si un facteur est inférieur à la médiane, il est classé dans le set des petits facteurs S .
- L_j est le nombre de grands facteurs dans la diagonale D_j .
- S_j est le nombre de petits facteurs dans la diagonale D_j .

La statistique Z_j est définie comme le plus petit nombre entre L_j et S_j .

$$Z_j = \min(L_j, S_j)$$

Pour éviter une accumulation des probabilités d'erreur, on considère la somme $Z = Z_2 + Z_3 + \dots + Z_{I-1}$. Sous l'hypothèse nulle (pas d'effet calendaire), Z suit une distribution normale. On rejette l'hypothèse nulle si Z ne se trouve pas dans l'intervalle de confiance :

$$E(Z) - 2\sqrt{\text{Var}(Z)} \leq Z \leq E(Z) + 2\sqrt{\text{Var}(Z)}$$

. Avec les notations $L_j = m$ et $S_j = n - m$ On a :

- $E(Z_j) = \frac{n}{2} - \binom{n-1}{m} \cdot \frac{n}{2^n}$
- $\text{Var}(Z_j) = \frac{n(n-1)}{4} - \binom{n-1}{m} \cdot \frac{n(n-1)}{2^n} + E(Z_j) - (E(Z_j))^2$

