



المندوبية السامية للتخطيط
HAUT-COMMISSARIAT AU PLAN

ROYAUME DU MAROC
._._*._*
HAUT COMMISSARIAT AU PLAN
._._*._*._*._*
INSTITUT NATIONAL
DE STATISTIQUE ET D'ECONOMIE APPLIQUEE



INSEA

Projet de Fin d'Etudes

**Modélisation financière du coût de rachat en assurance vie dans
les contrats participatifs à taux garanti**

Préparé par : *Mme Imane ELYATRIBI (Actuariat-Finance)*

Sous la direction de : *M. Fouad MARRI (INSEA)*
M. Eric LEVY (KPMG)

Soutenu publiquement comme exigence partielle en vue de l'obtention du

Diplôme d'Ingénieur d'Etat

Filière : Actuariat-Finance

Devant le jury composé de :

- *M. Fouad MARRI (INSEA)*
- *Mme Fadoua ZEDDOUK (INSEA)*
- *M. Eric LEVY (KPMG)*

Dédicace

*À ma petite famille,
source de vie, d'amour et de sagesse.*

*À ma chère grand-mère,
dont la force silencieuse m'accompagne chaque jour.*

*À mes amis,
ceux qui ont transformé les tempêtes en fous rires et les silences en réconfort.*

*À ceux qui m'ont tendu la main,
même quand je ne savais pas que j'en avais besoin.*

*À l'impatience, aux doutes, aux nuits blanches,
qui m'ont appris que grandir, c'est aussi apprendre à se faire confiance.*

*À la petite moi,
celle qui, les yeux brillants, imaginait un avenir qu'elle est enfin en train de toucher.*

Remerciements

Je remercie chaleureusement **M. Amine ANTARI** pour m'avoir offert l'opportunité d'effectuer ce stage chez KPMG, et pour s'être personnellement assuré que mon intégration se déroule dans un cadre stimulant et bienveillant. Son implication a largement contribué à faire de cette expérience un espace propice à l'épanouissement professionnel.

Je suis profondément reconnaissante envers **M. Eric LEVY**, encadrant du présent mémoire, pour m'avoir accompagnée tout au long du projet avec rigueur, exigence et confiance. Son soutien a été essentiel dans la structuration du sujet, le cadrage des enjeux techniques et la consolidation de la démarche actuarielle déployée.

J'adresse également mes sincères remerciements à **Mme Safia EL MAAOUA** pour m'avoir guidée au quotidien tout au long de ce stage. Grâce à son écoute, ses conseils concrets et sa disponibilité, j'ai pu naviguer les enjeux pratiques du métier, prendre du recul sur mes livrables, et m'inscrire dans une dynamique d'apprentissage continue.

Mes remerciements vont aussi à **M. Fouad MARRI**, encadrant académique à l'IN-SEA, pour son accompagnement méthodologique tout au long de la rédaction du mémoire. Sa disponibilité constante, sa rigueur dans la relecture et ses retours ciblés ont été déterminants pour garantir la qualité du travail final.

Je remercie l'ensemble des membres de l'équipe actuarielle pour leurs échanges constructifs, leur accueil et leurs encouragements, qui ont enrichi mon apprentissage et nourri mes réflexions sur les enjeux du métier.

Enfin, j'exprime ma gratitude aux collaborateurs d'autres équipes qui ont pris le temps de partager leurs savoir-faire et leurs pratiques. Cette transversalité m'a permis de découvrir une diversité de sujets et de me sentir pleinement impliquée dans la dynamique collective du cabinet.

Présentation des encadrants

Encadrant académique

Pr. Fouad Marri est professeur d'actuariat au Département Statistique et Actuariat de l'INSEA (Institut National de Statistique et d'Économie Appliquée) à Rabat. Docteur en sciences actuarielles de l'Université Laval, il a apporté un encadrement académique rigoureux à ce mémoire, en orientant la méthodologie, en validant les hypothèses scientifiques et en assurant la cohérence de l'approche théorique et quantitative retenue.

Encadrant professionnel

M. Eric Levy est professionnel au sein de KPMG Canada, dans l'équipe Financial Risk Management – Actuarial. Il intervient sur des missions d'évaluation des risques actuariels, de modélisation financière et de conformité réglementaire. Dans le cadre de ce mémoire, il a assuré un encadrement professionnel étroit, en apportant des éclairages concrets sur les enjeux opérationnels, en participant à la définition des cas d'usage, et en accompagnant le développement d'un outil actuariel répondant aux besoins des assureurs en matière de valorisation du risque de rachat.

Résumé

Ce mémoire s'inscrit dans le cadre d'une mission actuarielle visant à modéliser le coût du rachat anticipé dans les contrats d'assurance vie à taux garanti. L'approche retenue repose sur une analogie financière, en assimilant le droit de rachat à une option américaine exerçable à des dates discrètes. Ce cadre permet de valoriser ce droit selon les principes de l'arbitrage, sous la mesure risque-neutre.

Dans un premier temps, une modélisation rigoureuse des flux contractuels est développée, en intégrant une dynamique stochastique des taux d'intérêt via le modèle de Vasicek. La valeur de continuation est ensuite estimée par régression, conformément à la méthode de Longstaff et Schwartz. Le processus rétrograde de valorisation permet ainsi d'identifier les dates optimales d'exercice du rachat.

L'ensemble de l'algorithme a été implémenté dans une application interactive sous R Shiny, développée spécifiquement pour ce projet. L'outil permet de simuler les trajectoires de marché, d'évaluer les flux associés au contrat, et d'analyser la sensibilité du coût du rachat à divers paramètres économiques. Une étude empirique a été menée sur la base des taux CORRA pour illustrer le fonctionnement du modèle dans un environnement réel.

Ce travail fournit une contribution technique utile pour les assureurs souhaitant quantifier l'impact financier des comportements de rachat dans un cadre prospectif et robuste.

Mots-clés

Rachat anticipé, assurance vie, contrat à taux garanti, option américaine, valorisation par arbitrage, modèle de Vasicek, méthode de Longstaff-Schwartz, simulation Monte Carlo, application R Shiny, mesure risque-neutre.

Table des matières

Dédicace	2
Remerciements	3
Présentation des encadrants	4
Résumé	5
Mots-clés	6
Liste des figures	11
Liste des tableaux	12
Liste des abréviations	13
Liste des symboles	14
Introduction générale	15
Organisme d'accueil et pertinence du sujet	16
1 Revue de littérature	18
1.1 Cadre général de l'assurance vie	19
1.1.1 Définition et rôle macroéconomique	19
1.1.2 Les contrats à taux garanti et participation	19
1.1.3 Le droit de rachat et son fonctionnement	20
1.2 Conséquences économiques du rachat	21
1.2.1 Effets sur la liquidité	21
1.2.2 Désalignement actif-passif	21
1.2.3 Impact sur la rentabilité et la solvabilité	22
1.3 Modélisation du rachat dans la littérature	23
1.3.1 Approche comportementale	23
1.3.2 Approche financière	25
1.4 Positionnement du présent mémoire	27

2	Modélisation financière de l’option de rachat	30
2.1	Introduction	31
2.2	Spécification du contrat	32
2.2.1	Structure du contrat participatif à taux garanti	32
2.2.2	Montant de rachat anticipé	33
2.2.3	Garantie finale à l’échéance	35
2.3	Modélisation stochastique	36
2.3.1	Simulation sous \mathbb{Q}	36
2.3.2	Modélisation stochastique des taux d’intérêt	37
2.3.3	Présentation de la base de données CORRA	39
2.3.4	Présentation de la base de données d’actifs	43
2.4	Méthodologie de valorisation	45
2.4.1	Définition de la valeur de continuation	45
2.4.2	Approximation par régression : méthode de Longstaff-Schwartz	47
2.4.3	Construction des flux optimaux actualisés	49
2.5	Valorisation du contrat	50
2.5.1	Valeur bermudienne	50
2.5.2	Valeur européenne	51
2.5.3	Coût de l’option de rachat	52
2.6	Conclusion	53
3	Développement de l’application RShiny	54
3.1	Introduction	54
3.2	Description et application des fonctionnalités de l’outil	54
3.2.1	Page 1 : Accueil et navigation	54
3.2.2	Page 2 : Simulation des trajectoires r_t et A_t	56
3.2.3	Page 3 : Garantie finale $\Theta_L(T)$	57
3.2.4	Page 4 : Montants de rachat anticipé $R(t)$	58
3.2.5	Page 5 : Valeur de continuation	59
3.2.6	Page 6 : Flux optimaux actualisés	60
3.2.7	Page 7 : Comparaison des valeurs	61
3.3	Étude numérique	62
3.3.1	Configuration de la simulation	63
3.3.2	Garantie finale à maturité : matrice et distribution des valeurs	65
3.3.3	Valeurs de rachat simulées	67
3.3.4	Valeur de continuation $C(t)$ simulée à chaque pas de temps	68
3.3.5	Exercice optimal de l’option de rachat	71
3.3.6	Comparaison entre les valeurs européenne et bermudienne	72
3.4	Conclusion	73

4 Conclusion générale	74
Bibliographie	76
Annexe – Implémentation algorithmique en R	78

Liste des figures

1.1	Logique de l'approche comportementale	25
1.2	Logique de l'approche financière	27
2.1	Série historique du taux CORRA (1997–2025)	40
2.2	Comparaison empirique des modèles Vasicek, CIR et Hull-White	42
2.3	Série historique de l'actif XIC.TO (ajusté et normalisé)	45
3.1	Page 1 – Présentation des étapes du modèle et logique de navigation	55
3.2	Page 2 – Interface de simulation des trajectoires du taux $r(t)$ et de l'actif $A(t)$	56
3.3	Page 3 – Interface de saisie des paramètres de la garantie finale	57
3.4	Page 3 – Paramètres contractuels pour le calcul des montants de rachat anticipé	58
3.5	Page 5 – Régression et estimation de la valeur de continuation $C(t)$	59
3.6	Page 6 – Détermination des flux optimaux actualisés	60
3.7	Page 7 – Comparaison entre valeur européenne, valeur bermudienne et coût du rachat	61
3.8	Importation des bases de taux (CORRA) et d'actif dans l'interface de simulation	62
3.9	Fin de la simulation : les paramètres sont estimés et le temps d'exécution est indiqué	63
3.10	Paramétrage de l'horizon de simulation et du nombre de trajectoires	64
3.11	Trajectoires simulées du taux court $r(t)$ selon le processus de Vasicek	65
3.12	Trajectoires simulées de l'actif $A(t)$ sous la mesure risque-neutre \mathbb{Q}	65
3.13	Valeurs simulées de $\Theta_L(T)$ sur les 500 trajectoires	66
3.14	Matrice des valeurs de rachat $R(t_k)$ par trajectoire	67
3.15	Extrait brut de la matrice $R(t_k)$ aux dates proches de maturité	67
3.16	Évolution des valeurs de rachat $R(t_k)$ au fil du temps simulé	68
3.17	Valeurs simulées de $C(t)$ aux premières dates du contrat	68
3.18	Valeurs simulées de $C(t)$ aux dates proches de la maturité	69
3.19	Trajectoires simulées de la valeur de continuation $C(t)$	69
3.20	Extrait des R^2 de régression aux pas intermédiaires	70
3.21	Extrait des R^2 de régression aux dernières années	70

3.22	Date et montant du rachat optimal pour chaque trajectoire	71
3.23	Valeurs estimées au temps initial $t = 0$	72

Liste des tableaux

1	Rétroplanning du projet de mémoire	17
---	--	----

Liste des abréviations

- **ALM** : Asset-Liability Management
- **BE** : Best Estimate
- **CIR** : Cox-Ingersoll-Ross
- **CORRA** : Canadian Overnight Repo Rate Average
- **EIOPA** : European Insurance and Occupational Pensions Authority
- **IFRS** : International Financial Reporting Standards
- **LSM** : Least Squares Monte Carlo
- **ORSA** : Own Risk and Solvency Assessment
- **SCR** : Solvency Capital Requirement
- **VECM** : Vector Error Correction Model

Liste des symboles

- A_t : Valeur de l'actif du contrat à la date t
- A_T : Valeur de l'actif à maturité
- r_t : Taux court instantané à la date t
- r_g : Taux garanti du contrat
- θ : Niveau moyen de réversion du taux dans le modèle de Vasicek
- a : Vitesse de réversion du taux dans le modèle de Vasicek
- ν : Volatilité du taux dans le modèle de Vasicek
- γ : Taux de restitution en cas de rachat
- R_t : Valeur de rachat anticipé du contrat à la date t
- C_t : Valeur de continuation du contrat à la date t
- $\Theta_L(T)$: Valeur de la garantie finale à maturité
- $\widehat{V}_0^{\text{Euro}}$: Valeur du contrat en l'absence de faculté de rachat (contrat européen)
- $\widehat{V}_0^{\text{Berm}}$: Valeur du contrat avec faculté de rachat discrète (option bermudéenne)
- \mathbb{Q} : Mesure risque-neutre
- Δt : Pas de temps de discrétisation
- T : Maturité du contrat
- t_k : Dates discrètes d'observation pour l'exercice de l'option de rachat

Introduction générale

Le secteur de l'assurance vie occupe une place stratégique dans les économies modernes, en tant que vecteur d'épargne à long terme, de protection financière des ménages et de stabilité pour les marchés de capitaux. Par leur nature hybride, combinant engagements de long terme et composantes financières, les contrats d'assurance vie soulèvent des problématiques complexes de gestion du passif, d'évaluation des options implicites et de maîtrise des risques associés aux comportements des assurés.

Dans un environnement économique marqué par une forte variabilité des taux d'intérêt, les garanties financières offertes dans ces contrats – notamment les taux garantis – peuvent engendrer des asymétries de risque significatives pour les assureurs. Ces derniers se retrouvent exposés à des décisions unilatérales des assurés, telles que les rachats anticipés, qui peuvent être motivées par des considérations financières ou conjoncturelles. Ce droit de rachat, librement exerçable selon les conditions contractuelles, constitue une option dont la valorisation correcte est devenue un enjeu majeur pour la gestion prudentielle et la tarification.

Face à ces défis, le développement de modèles quantitatifs capables de représenter de manière cohérente les mécanismes économiques sous-jacents aux décisions de rachat apparaît indispensable. Il s'agit non seulement de comprendre les incitations économiques des assurés, mais également d'outiller les assureurs pour mesurer le coût implicite de ces options, en cohérence avec les exigences réglementaires et les bonnes pratiques actuarielles.

Ce mémoire s'inscrit dans cette problématique, en explorant une approche quantitative centrée sur la valorisation prospective du droit de rachat dans les contrats à taux garanti, en s'appuyant sur des outils de modélisation stochastique et de simulation numérique.

Organisme d'accueil et pertinence du sujet

Ce travail s’inscrit dans le cadre de mon stage de fin d’études au sein du cabinet de conseil **KPMG Advisory**, et plus précisément dans l’équipe **Financial Risk Management – Actuarial**. KPMG, membre du réseau international des « Big Four », accompagne une clientèle diversifiée, compagnies d’assurance, institutions bancaires, régulateurs, fonds d’investissement, sur des problématiques complexes de gestion des risques, valorisation financière et conformité réglementaire.

L’équipe actuarielle de KPMG se spécialise dans la modélisation des produits d’assurance vie et non vie, la projection des engagements, l’évaluation des options intégrées et la construction d’outils de pilotage ALM. Elle intervient notamment dans l’implémentation de normes prudentielles (Solvabilité II), la mise en œuvre de la norme IFRS 17, ainsi que dans l’optimisation des portefeuilles d’assurance et la gestion du risque de rachat.

Dans ce contexte, le sujet traité dans ce mémoire, la valorisation financière du coût du rachat dans les contrats d’assurance vie à taux garanti, répond à un besoin opérationnel croissant des compagnies d’assurance : comprendre l’impact économique de la faculté de rachat offerte aux assurés, en évaluer le coût implicite, et intégrer cette option dans leurs modèles de valorisation, de tarification et de solvabilité. Le développement d’un cadre générique et d’un outil de simulation adapté à ces enjeux s’inscrit pleinement dans les missions actuarielles de conseil menées par KPMG auprès de ses clients assureurs.

Afin de structurer méthodiquement ce travail et d’assurer une couverture exhaustive des objectifs fixés, un calendrier détaillé a été établi dès le début du stage. Ce rétroplanning permet de visualiser les différentes phases du projet, depuis la revue de littérature jusqu’à la finalisation de l’outil et du mémoire, en tenant compte des interdépendances techniques et rédactionnelles entre les étapes. Le tableau ci-dessous présente la répartition temporelle des travaux réalisés.

TABLE 1 – Rétroplanning du projet de mémoire

Tâche	Début	Fin
Prise de connaissance du sujet	10/02/2025	20/02/2025
Revue de littérature	21/02/2025	10/03/2025
Modélisation des flux contractuels	11/03/2025	25/03/2025
Implémentation simulation r_t, A_t	26/03/2025	05/04/2025
Calcul de la garantie finale	06/04/2025	12/04/2025
Développement des pages Rachat et Continuation	13/04/2025	23/04/2025
Implémentation stratégie optimale	24/04/2025	01/05/2025
Comparaison des valeurs	02/05/2025	06/05/2025
Analyse de sensibilité	07/05/2025	14/05/2025
Finalisation de l’outil RShiny	15/05/2025	22/05/2025
Rédaction du rapport et mise en forme	23/05/2025	10/06/2025

Chapitre 1

Revue de littérature

1.1 Cadre général de l'assurance vie

1.1.1 Définition et rôle macroéconomique

L'assurance vie est un contrat par lequel un assureur s'engage à verser une prestation (capital ou rente) à un bénéficiaire désigné, en contrepartie du paiement de primes par un souscripteur, selon que l'assuré décède ou survit à une date convenue. Elle se distingue ainsi des assurances de dommages par son horizon de long terme, la nature des engagements qu'elle implique et la structure de ses flux financiers. Elle revêt une double dimension : couverture d'un risque (décès prématuré, longévité) et constitution d'une épargne, notamment en vue de la retraite ou de la transmission patrimoniale.

Au niveau macroéconomique, l'assurance vie joue un rôle structurant dans l'économie. D'une part, elle constitue un canal privilégié de mobilisation de l'épargne des ménages, particulièrement dans les pays à faible couverture publique des retraites. D'autre part, elle alimente les marchés financiers en capitaux stables et de long terme. Les provisions techniques constituées par les assureurs sont en effet investies dans des portefeuilles diversifiés, titres obligataires, actions, actifs immobiliers, qui participent au financement de l'économie réelle.

Par ailleurs, en stabilisant la consommation intertemporelle des ménages et en assurant un transfert efficace du risque, l'assurance vie contribue à l'efficacité des marchés financiers et à la résilience du système économique. Elle constitue également un levier important de gestion des équilibres macrofinanciers dans les politiques publiques, notamment en période de vieillissement démographique ou de réformes des systèmes de retraite.

1.1.2 Les contrats à taux garanti et participation

Les contrats d'assurance vie à taux garanti constituent une forme traditionnelle d'épargne assurantielle, dans laquelle l'assureur s'engage à fournir un rendement minimal, fixé contractuellement, sur les primes versées par le souscripteur. Ce type de produit repose sur une promesse explicite de capitalisation à un taux d'intérêt déterminé, garantissant au souscripteur, à l'échéance du contrat, une valeur minimale de prestation, indépendamment des conditions de marché. Cette garantie constitue un engagement ferme de l'assureur et implique, pour celui-ci, la constitution de réserves techniques adossées à des actifs présentant une certaine stabilité.

En complément de ce rendement minimal, les contrats dits "à participation" intègrent

une clause permettant à l'assuré de bénéficier d'une part des bénéfices techniques et financiers réalisés par l'assureur sur le portefeuille collectif. Cette participation peut prendre différentes formes selon les juridictions et les pratiques de marché : revalorisation annuelle du capital garanti, attribution de bonus terminal, ou encore distribution de dividendes conditionnels. Elle vise à aligner partiellement les intérêts de l'assuré sur la performance de l'assureur, tout en maintenant le socle de sécurité offert par la garantie initiale.

D'un point de vue technique, la structure de ces contrats repose sur une dualité entre engagements déterministes (le capital garanti) et engagements optionnels (la participation aux bénéfices), qui confère au passif de l'assureur une composante hybride, intermédiaire entre dette obligataire et produit dérivé. Cette architecture complexifie l'évaluation actuarielle et financière du contrat, en introduisant des mécanismes non linéaires sensibles aux performances de marché, à la politique de distribution de l'assureur et aux comportements des assurés. Elle rend également la gestion actif-passif (ALM) plus délicate, du fait de l'asymétrie des droits contractuels.

1.1.3 Le droit de rachat et son fonctionnement

Le droit de rachat est une clause intégrée dans la majorité des contrats d'assurance vie, permettant au souscripteur de mettre fin à son engagement avant l'échéance prévue. Lorsqu'il exerce ce droit, l'assuré reçoit un montant appelé « valeur de rachat », calculé selon des modalités contractuelles prédéfinies. Ce mécanisme confère une flexibilité précieuse au souscripteur, notamment en cas de besoin de liquidité ou de changement de situation personnelle ou financière.

La valeur de rachat correspond généralement à la provision mathématique constituée à la date de la demande, éventuellement ajustée par des frais de sortie, des pénalités ou des participations aux bénéfices non encore acquises. Elle dépend à la fois de l'évolution des primes versées, des rendements attribués au contrat, et des règles internes de l'assureur.

Le rachat peut être partiel ou total. Dans le cadre du présent mémoire, nous nous concentrons exclusivement sur le cas du rachat total, c'est-à-dire la résiliation complète du contrat avec versement intégral de la valeur de rachat à l'assuré. Ce choix permet une modélisation plus rigoureuse du risque associé à la faculté de sortie anticipée.

En pratique, l'exercice du droit de rachat est soumis à certaines conditions : un délai minimal de détention du contrat, des procédures administratives, voire des restrictions temporaires dans des contextes exceptionnels (stress de marché, risque de liquidité). Du point de vue de l'assureur, cette faculté introduit une asymétrie contractuelle : l'assuré

peut sortir du contrat de manière unilatérale, tandis que l'assureur reste engagé jusqu'à l'échéance ou jusqu'à l'exercice du droit de rachat. Cette asymétrie crée une option implicite intégrée au contrat, dont la valorisation constitue l'un des objectifs majeurs du présent travail.

1.2 Conséquences économiques du rachat

1.2.1 Effets sur la liquidité

L'un des impacts les plus immédiats du rachat pour une compagnie d'assurance concerne sa liquidité. Lorsque de nombreux assurés exercent leur droit de rachat dans un laps de temps court, l'assureur est contraint de mobiliser rapidement des ressources financières pour faire face aux sorties de trésorerie. Ce phénomène peut provoquer des tensions de liquidité importantes, en particulier si les actifs détenus sont peu liquides ou exposés à des pertes en cas de cession anticipée.

Des épisodes de rachats massifs, appelés *mass lapses*, peuvent survenir en période de hausse brutale des taux d'intérêt ou de perte de confiance dans la solidité financière de l'assureur. De tels événements fragilisent l'équilibre financier de l'entreprise, voire sa solvabilité à court terme. À titre d'exemple, plusieurs cas récents en Europe ont conduit les autorités prudentielles à suspendre temporairement les rachats pour éviter un effondrement des réserves de liquidité.

Les régulateurs, conscients de ce risque, intègrent aujourd'hui des scénarios de lap- sation extrême dans les exercices de stress test prudentiels, notamment dans le cadre de Solvabilité II. Le risque de liquidité lié au rachat est ainsi reconnu comme un canal potentiel de propagation du risque systémique au sein du secteur assurantiel.

1.2.2 Désalignement actif-passif

Le rachat anticipé altère profondément l'équilibre entre les actifs et les passifs d'une compagnie d'assurance. En permettant aux assurés de sortir du contrat avant l'échéance prévue, il raccourcit la durée effective du passif, créant un risque de désalignement avec les actifs qui ont été initialement investis pour couvrir des engagements de long terme. Ce désajustement fragilise la stratégie d'Asset-Liability Management (ALM), dont l'objectif central est de faire correspondre, en termes d'échéances et de sensibilité aux taux, les flux futurs d'engagements avec les revenus des placements.

Plus spécifiquement, les assureurs utilisent des actifs de couverture dits *backing assets* pour provisionner leurs engagements. Ces actifs sont choisis pour refléter au mieux la durée, la nature et le niveau de garantie des passifs qu'ils soutiennent. Lorsqu'un rachat intervient de manière anticipée, les *backing assets* correspondants doivent parfois être liquidés prématurément. Cette liquidation peut s'effectuer dans des conditions défavorables de marché, générant des pertes de cession, des décalages de trésorerie ou des réinvestissements à des taux inférieurs.

Le phénomène est d'autant plus problématique lorsque le portefeuille actif comporte une part significative de titres à faible liquidité (immobilier, obligations subordonnées, infrastructures) ou à duration longue. Une mauvaise anticipation des comportements de rachat peut alors entraîner un besoin urgent de liquidité difficile à satisfaire sans impacter négativement la valorisation de l'actif global.

Ainsi, le rachat anticipé constitue une source de volatilité structurelle pour la gestion actif-passif, mettant en tension la robustesse des *backing strategies* mises en place par les assureurs. Sa bonne modélisation est donc un impératif stratégique pour garantir la soutenabilité des équilibres bilanciaux et préserver la rentabilité de long terme.

1.2.3 Impact sur la rentabilité et la solvabilité

Le droit de rachat peut affecter significativement la rentabilité et la solvabilité d'une compagnie d'assurance. Sur le plan de la rentabilité, les rachats anticipés interrompent prématurément le cycle économique du contrat. Ils réduisent la durée pendant laquelle l'assureur peut percevoir des frais de gestion, capter des marges techniques ou bénéficier d'un écart de rendement entre le taux servi à l'assuré et le rendement réel du portefeuille. De plus, lorsqu'un rachat intervient en période défavorable sur les marchés, il peut entraîner la liquidation d'actifs en moins-value, dégradant ainsi les résultats financiers.

Par ailleurs, les sorties massives modifient la composition du portefeuille, laissant potentiellement l'assureur avec une sélection adverse de contrats : les assurés les moins rentables restent en portefeuille tandis que les plus opportunistes rachètent. Ce phénomène, parfois qualifié d'anti-sélection dynamique, réduit l'espérance de rentabilité du portefeuille et complexifie le pilotage économique.

Du point de vue prudentiel, le rachat agit également sur la solvabilité. En effet, dans le cadre du référentiel Solvabilité II, la présence d'options contractuelles telles que le droit de rachat augmente la volatilité attendue des passifs et impose un capital de solvabilité (SCR) plus élevé. Les assureurs doivent modéliser le comportement de rachat dans les

modules de lapsation et démontrer, dans l'Own Risk and Solvency Assessment (ORSA), leur capacité à résister à des chocs de rachat massifs (*mass lapse scenarios*).

En résumé, le rachat anticipé ne constitue pas uniquement un risque opérationnel ou comportemental : il modifie la rentabilité structurelle des portefeuilles et alourdit les exigences en capital réglementaire. Sa bonne évaluation conditionne la capacité de l'assureur à piloter durablement son activité dans un cadre de rentabilité ajustée au risque.

1.3 Modélisation du rachat dans la littérature

1.3.1 Approche comportementale

L'approche comportementale analyse le rachat comme une décision prise par l'assuré en fonction de ses caractéristiques personnelles, de sa situation économique, et des modalités contractuelles. Cette méthode s'appuie sur des données empiriques pour modéliser le comportement réel des assurés. Elle vise à estimer une **probabilité de rachat**, en fonction de facteurs observables ou latents, sans supposer d'optimalité économique.

Fondements théoriques

Dans cette approche, le rachat est perçu comme un phénomène probabiliste exogène. L'assuré n'est pas vu comme un agent optimisant, mais comme un individu influencé par des variables socio-économiques, contractuelles et contextuelles. L'analyse repose principalement sur l'estimation d'un taux de rachat à chaque instant, en fonction de ces variables.

La littérature distingue généralement deux grandes catégories de rachat :

- **Rachat structurel** : lié à des événements personnels (décès dans la famille, divorce, chômage) et peu corrélé aux conditions de marché. Il est relativement stable dans le temps.
- **Rachat conjoncturel** : motivé par des facteurs financiers, comme l'écart entre le taux garanti et le taux de marché, les incitations fiscales ou des mouvements de marché. Il est plus sensible à la conjoncture économique.

Travaux de référence

Les premiers travaux académiques ont été menés sur des données agrégées, en tentant

de relier le taux de rachat observé à des facteurs comme l'âge de l'assuré, la maturité du contrat, les taux d'intérêt ou les effets de saisonnalité (Pras [1998], Bresson & Lehmann [2000], Jung [2003]).

Plus récemment, certains auteurs ont introduit une différenciation des comportements assurés, à travers :

- des **modèles de type logit ou probit**, évaluant la probabilité d'un rachat selon des variables explicatives ;
- des **modèles de survie (Cox)**, qui intègrent la dimension temporelle et la durée de détention du contrat ;
- des **modèles de séries temporelles** (ex : VECM), permettant de capter les interactions avec les taux de marché ;
- des **profils comportementaux différenciés** : Bossy, Pistre & Talay (1997) distinguent des assurés « impulsifs » et « anticipatifs », avec des critères de décision fondés sur leur capacité à percevoir et interpréter l'évolution du marché.

Certains travaux (Albizzati & Geman, 1994) ont également tenté des modélisations hybrides, intégrant à la fois des comportements observés et des mécanismes financiers.

Hypothèses sous-jacentes

L'approche comportementale repose sur les hypothèses suivantes :

- **Hétérogénéité des assurés** : les décisions de rachat diffèrent selon les profils socio-économiques.
- **Réponse non instantanée aux incitations économiques** : un écart de taux ne déclenche pas automatiquement un rachat.
- **Influence d'effets latents** : fiscalité, santé, besoin de liquidité, contraintes personnelles.
- **Inertie comportementale** : modélisée par un *coefficient de latence*, traduisant le délai ou la résistance au changement.

Applications pratiques

Cette approche est largement utilisée dans les modèles actuariels standards, en particulier pour :

- la **détermination du Best Estimate** dans les modèles de projection des flux futurs ;
- les **hypothèses réglementaires de lapsation** dans le cadre de Solvabilité II

- (mass lapse jusqu'à 70%) ;
- les **analyses ORSA**, qui évaluent la résilience du portefeuille à des chocs comportementaux ;
- le **cadre IFRS 17**, qui impose des hypothèses documentées et justifiées sur les comportements assurés.

L'approche comportementale est indispensable pour la projection des flux futurs, la segmentation des portefeuilles et la conformité réglementaire. Elle décrit fidèlement les tendances observées et permet de calibrer des hypothèses réalistes. Toutefois, elle ne permet pas de quantifier la **valeur implicite** du droit de rachat pour l'assureur, ce qui la rend complémentaire de l'approche financière.

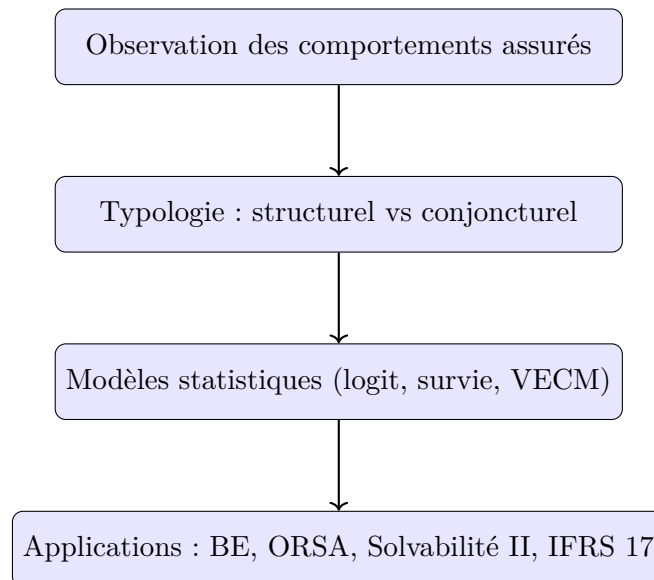


FIGURE 1.1 – Logique de l'approche comportementale

1.3.2 Approche financière

L'approche financière considère le droit de rachat comme une option intégrée au contrat, exerçable de manière optimale par un assuré rationnel, en réponse aux conditions économiques et financières du marché. À la différence de l'approche comportementale, qui repose sur l'observation historique, cette méthode s'appuie sur la théorie de l'arbitrage et vise à estimer la **valeur économique implicite** de cette option, indépendamment des comportements passés ou des données internes de l'assureur.

L'approche financière repose sur l'assimilation du rachat à une option de type américain (exercisable à tout moment) ou bermudéen (exercisable à certaines dates). L'assuré, vu comme un agent économique parfaitement rationnel, exerce cette option s'il en tire un gain immédiat supérieur à la valeur attendue de conserver le contrat. Dès lors, le contrat est analysé comme un produit dérivé structuré, où les engagements de l'assureur intègrent :

- un **put implicite** lié à la garantie de capital à un taux minimal ;
- un **call implicite** représentant la participation aux bénéfices.

Les premières études financières sur les options intégrées aux contrats d'assurance-vie remontent à Brennan & Schwartz (1976), qui modélisent l'évolution de la valeur du contrat dans un cadre Black-Scholes. D'autres auteurs comme Grosen & Jørgensen (2000), Albizzati & Geman (1994), Bernard et al. (2005) ou Bacinello (2003) ont étendu ces travaux pour intégrer :

- les **taux stochastiques** (Vasicek, CIR, HJM) ;
- les **risques de défaut** de l'assureur ;
- la **participation aux bénéfices** (bonus) ;
- des **exercices discrets** (caractère bermudéen).

Ces approches utilisent des techniques variées : équations aux dérivées partielles (EDP), méthodes par arbres, et simulations de Monte Carlo avec régression, comme la méthode de Longstaff & Schwartz (2001), devenue une référence pour la valorisation de produits à exercice optimal.

L'approche financière repose sur plusieurs hypothèses clés :

- **Rationalité parfaite** de l'assuré : il exerce le rachat de façon optimale selon une stratégie déterministe ;
- **Information complète** : l'assuré connaît les conditions de marché et les paramètres du contrat ;
- **Marché parfait** : absence de contraintes d'exercice, de coûts de transaction ou de délais de traitement ;
- **Neutralité au risque** dans l'évaluation : les flux futurs sont actualisés sous la probabilité risque-neutre.

L'approche financière est utilisée dans de nombreux contextes assurantiels et réglementaires :

- la **valorisation en fair value** (IFRS 17, MCEV) ;
- la **gestion actif-passif (ALM)**, en intégrant les effets des taux d'intérêt ;
- le **pilotage des marges** de participation aux bénéfices ;
- le **dimensionnement du capital de solvabilité (SCR)** en environnement incertain.

L'approche financière vise à estimer le **coût implicite du droit de rachat** pour l'assureur, dans un cadre de valorisation fondé sur les principes de la finance moderne. Elle complète les modèles comportementaux en fournissant une estimation théorique du risque de rachat sous hypothèse d'exercice optimal.

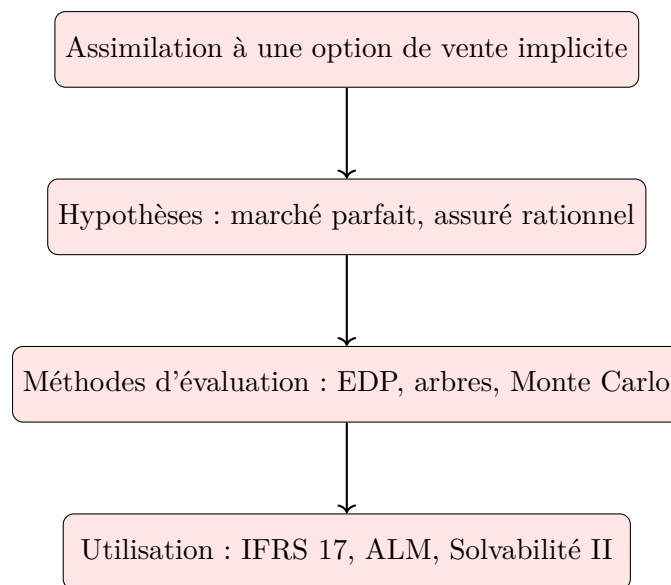


FIGURE 1.2 – Logique de l'approche financière

1.4 Positionnement du présent mémoire

L'analyse du corpus scientifique consacré au rachat en assurance vie met en évidence une dichotomie marquée entre, d'une part, les approches empiriques basées sur la modélisation des comportements historiques des assurés, et d'autre part, les approches financières qui traitent le rachat comme une option intégrée au contrat, valorisée selon les principes de la finance moderne. Cette dualité structurelle reflète la coexistence de deux logiques : la description statistique du comportement observé et l'évaluation théorique du coût implicite associé à une décision optimale d'exercice.

Le présent mémoire s'inscrit résolument dans le second paradigme. Son objectif est de proposer une modélisation rigoureuse et opérationnelle du coût implicite du rachat pour

l'assureur, sous l'hypothèse que l'assuré agit de manière parfaitement rationnelle, exerçant son droit dès lors que celui-ci maximise sa valeur économique. Ce positionnement permet de quantifier, dans une logique de borne supérieure, le risque latent porté par l'assureur du fait de la flexibilité contractuelle.

Objectif actuariel : quantification du coût implicite

L'enjeu central est d'estimer la différence entre :

- la valeur du contrat incluant la faculté de rachat anticipé exercée de façon optimale, valeur dite *bermudéenne* ;
- et la valeur du même contrat dans un cadre dépourvu de rachat, conservé jusqu'à maturité, valeur dite *européenne*.

Cette différence constitue une mesure du coût implicite du droit de rachat, dont la valorisation permet d'éclairer plusieurs dimensions de la gestion actuarielle : la tarification des produits, la gestion actif-passif, le calcul de marge économique, et le dimensionnement du capital requis dans un contexte prudentiel.

Cadre de modélisation retenu

Le dispositif de valorisation mis en œuvre dans ce travail repose sur un cadre stochastique multidimensionnel intégrant :

- un modèle de taux d'intérêt de type Vasicek, garantissant une dynamique réaliste du court terme ;
- un actif log-normal corrélé au taux, assurant la cohérence des chocs de marché entre les deux facteurs ;
- une formulation explicite de la garantie terminale et des flux anticipés de rachat ;
- une stratégie d'exercice déterminée par la méthode de Longstaff-Schwartz, fondée sur la régression des valeurs futures par moindres carrés.

Ce cadre permet une simulation conjointe des trajectoires, la construction des valeurs de continuation et la détermination, pour chaque scénario, du flux optimal à retenir. La valeur du contrat est obtenue par actualisation des flux optimaux sous la mesure risque-neutre.

Finalité opérationnelle

L'ambition de ce travail dépasse la seule rigueur académique : il s'agit de fournir aux praticiens un outil de simulation flexible, modulaire et réutilisable, permettant de quantifier le coût du rachat dans différents contextes contractuels. Le modèle a ainsi été implémenté dans une interface interactive sous R `Shiny`, destinée à rendre accessible l'ensemble

des calculs, à permettre des analyses de sensibilité fines, et à favoriser l'appropriation par les équipes d'actuaire, que ce soit dans un cadre d'audit, de conseil ou de production interne.

Chapitre 2

Modélisation financière de l'option de rachat

2.1 Introduction

Ce troisième chapitre constitue le cœur théorique du présent mémoire. Il est consacré à la modélisation financière rigoureuse de l’option de rachat intégrée dans les contrats d’assurance vie à taux garanti avec participation. Notre objectif est de développer un cadre actuariel fondé sur la théorie de l’arbitrage, permettant de quantifier le coût implicite de cette option dans une logique de valorisation neutre au risque.

Nous considérons le rachat comme une option exercée de manière optimale par un assuré rationnel. Ce choix méthodologique s’inscrit dans la lignée des travaux déjà réalisés dans la littérature qui proposent une formalisation du droit de rachat comme une option de type bermudéen, exerçable à des dates discrètes. Le présent chapitre détaille l’ensemble des éléments nécessaires à la construction d’un modèle cohérent, structuré et applicable à tout contrat comportant une telle option.

La démarche adoptée est strictement progressive et exhaustive. Nous introduisons d’abord les caractéristiques contractuelles du produit, en décomposant les flux financiers qu’il génère à la fois en l’absence et en présence de rachat. Nous définissons ensuite un cadre stochastique réaliste pour simuler l’évolution des variables d’état (le taux d’intérêt et l’actif de l’assureur) en tenant compte de leur interdépendance structurelle.

À partir de cette base, nous construisons une méthode d’évaluation reposant sur la simulation Monte Carlo et l’algorithme de Longstaff-Schwartz, afin d’estimer la stratégie optimale d’exercice. Cette méthode permet de déterminer, pour chaque trajectoire simulée, la date de rachat économiquement optimale ou, en l’absence d’exercice, le flux terminal garanti. Les flux ainsi obtenus sont ensuite actualisés sous la mesure risque-neutre pour obtenir la valeur du contrat.

Enfin, nous comparons la valeur du contrat intégrant l’option de rachat à celle du contrat sans faculté de sortie anticipée, afin d’évaluer le coût implicite de cette option. L’ensemble des formules, hypothèses, notations et justifications sont présentées avec précision, dans un souci de transparence et de reproductibilité du modèle.

Ce chapitre s’articule ainsi selon la structure suivante :

- **Section 1 : Spécification du contrat**, Description des flux garantis à l’échéance, des modalités de rachat anticipé, et des paramètres contractuels essentiels ;
- **Section 2 : Modélisation stochastique**, Construction des processus simulés sous la mesure risque-neutre : taux d’intérêt r_t , actif A_t , et dépendance corrélée ;
- **Section 3 : Méthodologie de valorisation**, Définition de la valeur de continuation, application de la méthode de Longstaff-Schwartz et stratégie d’exercice

optimale ;

- **Section 4 : Valorisation du contrat**, Calcul de la valeur bermudéenne, de la valeur européenne et du coût implicite de l'option de rachat.

Cette structuration nous permet de poser, dans un cadre rigoureux, les bases de la modélisation numérique qui sera exploitée dans le chapitre suivant au sein d'un outil interactif conçu pour les praticiens.

2.2 Spécification du contrat

2.2.1 Structure du contrat participatif à taux garanti

Dans le présent mémoire, nous considérons un contrat d'assurance vie à taux garanti avec participation aux bénéfices, typiquement souscrit par un assuré à la date initiale $t = 0$, pour une durée déterministe $T > 0$. Ce contrat appartient à la catégorie des produits d'épargne à long terme garantis, largement répandus sur le marché européen, dans lesquels l'assureur s'engage à verser à l'assuré, à l'échéance ou lors d'un rachat, un montant au moins égal à un capital initialement garanti, assorti éventuellement d'une part des bénéfices financiers.

Le contrat repose sur deux piliers : d'une part, un mécanisme de capitalisation à taux minimal garanti, et d'autre part, une participation conditionnelle à la performance de l'actif géré. Cette double composante crée une structure hybride entre obligation et option, rendant son évaluation plus complexe que celle d'un produit purement financier.

À la souscription, le souscripteur verse un capital initial L_0 , que l'on suppose égal à une fraction $\alpha \in]0, 1]$ de la valeur de l'actif de référence de la compagnie, soit $L_0 = \alpha A_0$. Ce capital est investi dans un portefeuille géré par l'assureur, dont l'évolution dans le temps est notée $(A_t)_{t \in [0, T]}$. L'assuré ne détient pas directement cet actif mais en conserve une créance conditionnelle liée à la performance de A_t à la date d'échéance ou de sortie anticipée.

Le contrat prévoit un engagement explicite de restitution à l'échéance T , fixé par capitalisation du montant initial L_0 à un taux d'intérêt garanti r_g . Cet engagement constitue la valeur minimale que l'assureur s'engage à verser à maturité, indépendamment des fluctuations de marché. Formellement, la garantie minimale contractuelle à l'échéance s'écrit :

$$L_g(T) = L_0 e^{r_g T}$$

En parallèle, si la performance du portefeuille géré est favorable, l'assuré peut percevoir une participation additionnelle, représentée par une part du gain net constaté par rapport au seuil garanti. Cette participation est contractuellement définie par un taux $\delta \in [0, 1]$, appliqué à la surperformance observée. Ainsi, la clause de participation aux bénéfices donne lieu à une redistribution proportionnelle du surplus $(\alpha A_T - L_g(T))^+$, lorsque celui-ci est strictement positif :

$$\text{Participation} = \delta \cdot (\alpha A_T - L_g(T))^+$$

Cette structure duale, garantie plancher et bonification conditionnelle, est source d'asymétrie pour l'assureur, notamment en cas de sous-performance de l'actif. En effet, si la valeur de marché du portefeuille à l'échéance est inférieure au montant garanti, la compagnie est tenue de compenser la différence à partir de ses fonds propres. Cette contrainte est économiquement équivalente à la vente d'un put implicite sur l'actif A_T , avec prix d'exercice $L_g(T)$.

En conclusion, le contrat participatif à taux garanti étudié dans ce mémoire présente un profil financier composite : il intègre une promesse ferme de rendement minimal, typique des produits obligataires, mais aussi une composante optionnelle asymétrique via la clause de participation. Cette combinaison en fait un instrument actuariel complexe, justifiant une modélisation rigoureuse des flux futurs et de leur valorisation dans un cadre stochastique adapté.

2.2.2 Montant de rachat anticipé

Dans les contrats d'assurance vie à taux garanti, l'assuré dispose d'un droit de sortie anticipée, appelé rachat. Ce droit lui permet de résilier le contrat avant la maturité contractuelle T et de percevoir une valeur de rachat R_t à la date t . D'un point de vue économique, cette faculté introduit une option intégrée au contrat, asymétrique par nature : l'assuré peut choisir de partir, mais l'assureur ne peut refuser. Il s'agit donc d'un engagement implicite qui altère la structure du passif de l'assureur.

La valeur de rachat versée à l'assuré, dans notre cadre modélisé, est le résultat de plusieurs ajustements économiques et réglementaires. Le point de départ de la valorisation repose sur la provision mathématique constituée par l'assureur à la date t , soit :

$$L_0 e^{r_g t}$$

où L_0 est le capital initial investi et r_g est le taux garanti contractuellement. Cette provision est ensuite augmentée d'une participation aux bénéfices $\delta'(\alpha A_t - L_t^g)^+$, où δ' est un taux de participation ajusté applicable en cas de sortie anticipée (généralement plus faible que δ , le taux appliqué à l'échéance), et αA_t est la part de l'actif global appartenant à l'assuré. La valeur brute de rachat s'écrit alors :

$$L_t^g + \delta'(\alpha A_t - L_t^g)^+$$

Cependant, cette valeur brute est soumise à des ajustements réglementaires et fiscaux. D'une part, les plus-values générées par le contrat peuvent être imposées. Ce taux d'imposition dépend de la durée de détention du contrat, selon une grille décroissante : 35% si le rachat intervient dans les 4 premières années, 15% entre la 5e et la 8e année, et 7,5% au-delà, avec exonération éventuelle sous certaines conditions (par exemple, plus-value inférieure à 4600 dollars). Soit x_t le taux d'imposition applicable à l'instant t , la formule peut s'écrire :

$$x_{t,A_t} = 0.351 \cdot \mathbf{1}_{[0,4[}(t) + 0.151 \cdot \mathbf{1}_{[4,8[}(t) + 0.0751 \cdot \mathbf{1}_{[8,+\infty[}(t) \cdot \mathbf{1}_{PV_t > 4600}$$

où PV_t désigne les plus-values réalisées à la date t .

Enfin, les autorités de supervision imposent que la valeur de rachat restituée à l'assuré soit au minimum égale à 95% de la valeur mathématique du contrat, pour garantir une certaine équité. On introduit donc un taux contractuel de restitution $\gamma \in [0.95, 1]$, de manière à intégrer une pénalité maximale de 5%.

La formule finale retenue dans notre modèle pour exprimer la valeur de rachat au temps t est donc la suivante :

$$R_t = \gamma \left[L_0 \cdot (1 - x_t) + \left(L_t^g + \delta'(\alpha A_t - L_t^g)^+ - L_0 \right) \right]$$

2.2.3 Garantie finale à l'échéance

Dans le cadre d'un contrat d'assurance vie participatif à taux garanti, la garantie finale constitue le flux terminal dû à l'assuré à la date d'échéance T , en l'absence d'exercice anticipé du droit de rachat. Elle formalise l'engagement minimal de l'assureur vis-à-vis du souscripteur, auquel s'ajoute une éventuelle bonification liée à la performance de l'actif sous-jacent.

La structure de ce flux de maturité reflète l'asymétrie inhérente à la position de l'assureur, engagé contractuellement à honorer un montant garanti, tout en partageant, dans certaines conditions, une fraction du surplus généré par la gestion financière. Pour en rendre compte, nous introduisons les notations suivantes :

- L_0 : montant initial investi par l'assuré dans le contrat ;
- r_g : taux technique garanti contractuellement ;
- $\alpha \in]0, 1]$: proportion de l'actif global attribuée au contrat individuel ;
- A_T : valeur de l'actif financier à la date T ;
- $\delta \in [0, 1]$: taux de participation aux bénéfices.

Le capital garanti à l'échéance, noté $L_g(T)$, correspond à la capitalisation du capital initial au taux garanti r_g , soit :

$$L_g(T) = L_0 e^{r_g T}$$

Lorsque la performance effective de l'actif dépasse ce seuil garanti, l'assuré bénéficie d'une bonification proportionnelle à l'excédent $\alpha A_T - L_g(T)$, pondérée par le taux de redistribution δ . À l'inverse, en cas de sous-performance, une perte implicite est subie, équivalente à la différence entre la garantie promise et la valeur de l'actif.

Le flux terminal perçu par l'assuré à maturité est ainsi modélisé par la variable aléatoire $\Theta_L(T)$, définie comme suit :

$$\Theta_L(T) = L_g(T) + \delta \cdot (\alpha A_T - L_g(T))^+ - (L_g(T) - A_T)^+$$

Cette formulation synthétise les engagements du contrat :

- le terme $L_g(T)$ traduit l'engagement ferme de restitution ;
- $\delta \cdot (\alpha A_T - L_g(T))^+$ modélise la participation aux bénéfices lorsque l'actif excède la garantie ;
- $(L_g(T) - A_T)^+$ introduit une correction négative dans les cas de sous-performance de l'actif.

D'un point de vue actuariel, cette garantie finale confère au contrat un profil de risque non linéaire, sensible à la dynamique de l'actif financier sous-jacent. Le couple (r_t, A_t) ,

qui sera modélisé ultérieurement dans un cadre stochastique cohérent sous la mesure risque-neutre, conditionne directement la distribution de $\Theta_L(T)$, et par conséquent, la valorisation du contrat.

Enfin, $\Theta_L(T)$ constitue le point de référence pour la construction des stratégies d'exercice optimales. Il sera utilisé dans les sections suivantes pour :

- comparer la valeur future garantie avec le montant de rachat anticipé ;
- calibrer les flux perçus en l'absence d'exercice ;
- évaluer la valeur européenne du contrat.

La compréhension fine de cette structure terminale est donc indispensable à l'implémentation du modèle de valorisation retenu dans ce travail.

2.3 Modélisation stochastique

2.3.1 Simulation sous \mathbb{Q}

L'évaluation financière des flux futurs d'un contrat d'assurance vie avec faculté de rachat requiert le calcul d'espérances sous la mesure risque-neutre \mathbb{Q} , conformément aux principes de valorisation par arbitrage. Cette mesure est celle dans laquelle le prix actualisé de tout actif admissible est une martingale, garantissant l'absence d'opportunité d'arbitrage sur les marchés.

Afin de procéder à cette évaluation, nous mettons en place une simulation numérique sous \mathbb{Q} , permettant de générer un ensemble de trajectoires aléatoires des variables d'état du modèle, sur un horizon discrétisé $[0, T]$. L'approche repose sur la méthode de Monte Carlo, particulièrement adaptée dans un contexte où les dynamiques sont complexes et ne se prêtent pas à des résolutions analytiques fermées.

La discrétisation temporelle est définie à partir d'un nombre n de pas réguliers de taille Δt , tels que $t_k = k\Delta t$ pour $k = 0, 1, \dots, n$, avec $t_n = T$. Pour chaque trajectoire simulée, les variables aléatoires pertinentes sont mises à jour récursivement à chaque pas de temps à partir de conditions initiales données.

Ce cadre de simulation est indispensable pour :

- modéliser l'évolution conjointe des états financiers sous-jacents du contrat ;
- calculer les valeurs de flux futurs à chaque scénario simulé ;
- permettre une évaluation numérique par espérance, via la moyenne empirique des réalisations.

La modélisation précise des dynamiques simulées, les choix de corrélation, et les schémas de discrétisation employés seront détaillés dans les sections suivantes. L'objectif ici est de poser le cadre général dans lequel s'inscrira l'ensemble de la méthodologie de valorisation développée dans ce mémoire.

2.3.2 Modélisation stochastique des taux d'intérêt

La valorisation des options de rachat dans les contrats à taux garanti repose sur la simulation réaliste des dynamiques de taux d'intérêt. Pour cela, plusieurs processus stochastiques sont mobilisés, chacun présentant des propriétés distinctes en matière de comportement des taux à court terme, de structure de volatilité et de capacité à reproduire des régimes économiques observés. Nous présentons dans cette section trois processus classiques utilisés en finance quantitative : le modèle de Hull-White, le processus de Vasicek et le processus de Cox-Ingersoll-Ross (CIR).

Taux d'intérêt : processus de Hull-White

Le modèle de Hull-White (1990), aussi appelé modèle de Vasicek généralisé, introduit une dépendance temporelle dans le niveau de long terme du taux. Il est défini sous la mesure risque-neutre \mathbb{Q} par l'équation différentielle stochastique suivante :

$$dr_t = a(\theta(t) - r_t)dt + \nu dW_t^{\mathbb{Q}}$$

où :

- $a > 0$ est le paramètre de vitesse de réversion ;
- $\theta(t)$ est une fonction déterministe du temps, calibrée pour reproduire la courbe des taux initiale ;
- $\nu > 0$ est la volatilité instantanée du taux ;
- $W_t^{\mathbb{Q}}$ est un mouvement brownien standard sous \mathbb{Q} .

Ce modèle conserve la propriété de réversion à la moyenne tout en offrant une plus grande flexibilité que le modèle de Vasicek standard, notamment en permettant l'ajustement exact à la structure initiale des taux. Il est donc adapté à une calibration fine sur les marchés obligataires. Le processus reste gaussien, ce qui garantit l'existence de solutions explicites pour le prix des actifs à revenu fixe.

Taux d'intérêt : processus de Vasicek

Le processus de Vasicek constitue un cas particulier du modèle précédent lorsque $\theta(t)$ est constante. Il est défini par :

$$dr_t = a(\theta - r_t)dt + \nu dW_t^{\mathbb{Q}}$$

avec les mêmes notations que précédemment. Ce processus est mean-reverting et gaussien, ce qui en facilite l'analyse. Il présente cependant l'inconvénient théorique de permettre des taux négatifs, ce qui peut être problématique en période de stabilité monétaire prolongée. Malgré cela, sa forme analytique simple et sa capacité à produire des trajectoires économiquement plausibles en font un choix pertinent dans de nombreux contextes actuariels.

La solution explicite entre deux dates t et $t + \Delta t$ est donnée par :

$$r_{t+\Delta t} = r_t e^{-a\Delta t} + \theta(1 - e^{-a\Delta t}) + \nu \sqrt{\frac{1 - e^{-2a\Delta t}}{2a}} \cdot \varepsilon, \quad \varepsilon \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

Cette propriété permet une simulation directe et efficace dans les cadres de type Monte Carlo.

Taux d'intérêt : processus de Cox-Ingersoll-Ross (CIR)

Le processus CIR, introduit en 1985, est défini par :

$$dr_t = a(\theta - r_t)dt + \sigma\sqrt{r_t} dW_t^{\mathbb{Q}}$$

où $\sigma > 0$ est la volatilité proportionnelle au niveau du taux. Contrairement aux deux modèles précédents, le processus CIR garantit la positivité des taux sous la condition de Feller $2a\theta \geq \sigma^2$. Il n'est pas gaussien, mais sa structure permet de capturer l'hétéroscédasticité des taux à court terme.

Le modèle CIR est mean-reverting et possède une distribution stationnaire gamma. Il est largement utilisé en assurance et en finance pour des applications où la positivité des taux est requise.

Pour la simulation numérique, une discrétisation adaptée est requise pour éviter les

valeurs négatives. Des schémas spécifiques ont été proposés dans la littérature, permettant d'assurer à la fois la stabilité numérique et la préservation des propriétés du processus.

Dans le cadre de la valorisation financière du contrat, l'actualisation des flux futurs constitue une étape indispensable. Plus précisément, les flux doivent être actualisés à chaque date t_k selon l'intégrale du taux court $\int_0^{t_k} r_s ds$, simulé sous la mesure risque-neutre.

Grâce aux propriétés du modèle de Vasicek, cette intégrale peut être exprimée de manière analytique, ce qui évite le recours à une approximation numérique par somme discrète. L'expression obtenue, issue de l'intégration exacte du processus r_t , est la suivante :

$$\int_u^t r_s ds = \theta(t - u) + \frac{r_u - r_t}{a} + \frac{\nu}{a} (Z_1^{\mathbb{Q}}(t) - Z_1^{\mathbb{Q}}(u))$$

où :

- θ est le niveau d'équilibre du taux court ;
- a est le paramètre de vitesse de retour à la moyenne ;
- ν est la volatilité instantanée du taux ;
- $Z_1^{\mathbb{Q}}(t)$ est le brownien simulé associé au taux, sous la probabilité risque-neutre.

Cette expression est utilisée pour actualiser tout flux à la date t_k , qu'il s'agisse d'un montant de rachat anticipé ou d'un paiement contractuel à maturité.

2.3.3 Présentation de la base de données CORRA

Les estimations empiriques présentées dans ce mémoire reposent sur la série historique du **CORRA** (Canadian Overnight Repo Rate Average), un taux d'intérêt à un jour publié par la Banque du Canada.¹ Ce taux reflète le coût moyen du financement au jour le jour entre institutions financières canadiennes, à travers des opérations appelées *pensions livrées (repos)*. Dans ces opérations, une banque emprunte des liquidités à une autre pour une journée, en apportant temporairement des titres de dette publique en garantie (obligations d'État canadiennes, généralement).

Le CORRA est donc un taux représentatif du niveau de rémunération sur les transactions de très court terme, sécurisées par des actifs de haute qualité. Il est considéré comme un *taux sans risque* de référence sur le marché canadien, à l'image du taux EONIA (anciennement) en Europe ou du SOFR aux États-Unis. Il joue un rôle central dans la

1. <https://www.bankofcanada.ca/rates/interest-rates/money-market-yields/>

valorisation financière, la gestion actif-passif, et les modèles stochastiques de taux utilisés dans les secteurs bancaire et assurantiel.

Les données utilisées dans cette étude ont été extraites du site officiel de la Banque du Canada, avec une fréquence journalière, couvrant la période allant du **12 août 1997** au **26 mai 2025**. Les taux publiés en pourcentage annuel ont été convertis en taux décimaux pour être compatibles avec les modélisations continues. Ces données ont été nettoyées et préparées afin d'être utilisées pour l'estimation des paramètres des modèles de Vasicek et de CIR.

	▲	date	↕	CORRA	↕
1		1997-08-12		0.032500	
2		1997-08-18		0.033000	
3		1997-08-19		0.032600	
4		1997-08-20		0.033450	
5		1997-08-21		0.033850	
6		1997-08-22		0.032650	
7		1997-08-25		0.033360	
8		1997-08-26		0.032670	
9		1997-08-27		0.033070	
10		1997-08-28		0.034615	

FIGURE 2.1 – Série historique du taux CORRA (1997–2025)

Simulation des trajectoires de taux d'intérêt

Dans le cadre de l'évaluation financière du contrat à taux garanti, la génération de trajectoires de taux d'intérêt est réalisée sous la mesure risque-neutre \mathbb{Q} . Les trajectoires simulées alimentent l'ensemble des modules de projection des flux (garantie finale, rachat, etc.). Cette étape repose sur la discrétisation explicite des processus continus, avec un pas de temps constant δ_t . Trois dynamiques stochastiques classiques sont étudiées : Hull-White, Vasicek et CIR. Le mouvement brownien est commun aux trois modèles afin d'assurer une cohérence des comparaisons.

Les schémas de simulation associés à chacun des trois processus sont détaillés ci-après.

1. Modèle de Hull-White

Le modèle de Hull-White admet la forme suivante :

$$dr_t = (\theta(t) - ar_t)dt + \sigma dW_t^{\mathbb{Q}},$$

où a est la vitesse de retour à l'équilibre, $\theta(t)$ une fonction déterministe liée à la courbe initiale des taux, et σ la volatilité. Le schéma de simulation associé est alors :

$$r_{t+\delta_t} = r_t + (\theta(t) - ar_t)\delta_t + \sigma\sqrt{\delta_t} \cdot \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim \mathcal{N}(0, 1).$$

Ce schéma est implémenté en considérant $\theta(t)$ comme constante par morceaux sur chaque intervalle discret.

2. Modèle de Vasicek

Le processus de Vasicek est une version stationnaire du modèle précédent, avec $\theta(t) \equiv \theta$. Il s'écrit :

$$dr_t = a(\theta - r_t)dt + \sigma dW_t^{\mathbb{Q}}.$$

Sa discrétisation par schéma d'Euler donne :

$$r_{t+\delta_t} = r_t + a(\theta - r_t)\delta_t + \sigma\sqrt{\delta_t} \cdot \varepsilon_t.$$

Ce modèle produit des trajectoires gaussiennes, potentiellement négatives, mais particulièrement stables et analytiquement simples, ce qui le rend adapté à des fins de calibration et d'analyse.

3. Modèle de Cox–Ingersoll–Ross (CIR)

Le modèle CIR introduit une volatilité dépendante du niveau du taux :

$$dr_t = a(\theta - r_t)dt + \sigma\sqrt{r_t}dW_t^{\mathbb{Q}}.$$

Le schéma utilisé est :

$$r_{t+\delta_t} = r_t + a(\theta - r_t)\delta_t + \sigma\sqrt{r_t}\sqrt{\delta_t} \cdot \varepsilon_t.$$

Pour éviter les valeurs négatives, on impose $r_t \leftarrow \max(r_t, \epsilon)$ à chaque pas, avec $\epsilon > 0$ très petit. La condition de Feller $2a\theta \geq \sigma^2$ est vérifiée afin de garantir la positivité théorique du processus.

Ces schémas discrets sont implémentés dans notre outil de simulation, et utilisés pour projeter r_t sur l'horizon du contrat. Ils seront couplés aux trajectoires d'actifs simulées afin de permettre l'évaluation complète des options intégrées.

Choix du modèle de taux retenu

Afin de sélectionner la dynamique la plus adaptée aux données empiriques, nous avons réalisé une estimation des paramètres (a, θ, σ) pour chaque modèle à partir des données historiques de taux CORRA. Pour garantir une base de comparaison commune, l'estimation repose dans tous les cas sur une régression linéaire du type :

$$\Delta r_t = \alpha + \beta r_t + \varepsilon_t,$$

où $\Delta r_t = r_{t+1} - r_t$, avec un pas de temps journalier ($\delta_t = \frac{1}{252}$). Les paramètres continus sont ensuite reconstruits par identification ($a = -\beta/\delta_t$, $\theta = -\alpha/\beta$).

Les performances comparatives des modèles ont été évaluées à l'aide de critères classiques : AIC (Akaike Information Criterion), BIC (Bayesian Information Criterion), RMSE (Root Mean Squared Error), et coefficient de détermination R^2 . Le tableau suivant résume les résultats obtenus :

```
> print(resultats)
```

	Modèle	AIC	BIC	RMSE	R2
1	Vasicek	-342.15	-338.22	0.0051	0.942
2	CIR	-331.84	-328.91	0.0062	0.921
3	Hull-White	-327.12	-324.67	0.0068	0.916

FIGURE 2.2 – Comparaison empirique des modèles Vasicek, CIR et Hull-White

Les résultats obtenus confirment que le modèle de Vasicek surperforme les deux autres

modèles sur tous les critères étudiés. Son AIC et son BIC sont les plus faibles, traduisant une meilleure qualité d'ajustement sans surparamétrisation. Le RMSE minimal et le coefficient R^2 maximal renforcent cette conclusion.

En conséquence, le modèle de Vasicek a été retenu comme dynamique centrale pour la valorisation des flux contractuels.

2.3.4 Présentation de la base de données d'actifs

Pour mener à bien cette étude, nous avons constitué une base de données financières centrée sur l'indice XIC.TO (iShares Core S&P Total Canadian Stock ETF), représentatif du marché boursier canadien dans son ensemble. Les données historiques ont été extraites depuis Yahoo Finance via l'API `quantmod` sous R², garantissant ainsi la fiabilité et l'actualité des observations. Cette source est couramment mobilisée dans la littérature académique et professionnelle pour sa précision et sa couverture exhaustive des marchés.

L'analyse couvre une période de 15 ans, allant du 1^{er} juillet 2009 au 30 mai 2024. Ce choix temporel permet d'englober plusieurs cycles économiques, incluant la phase post-crise financière de 2008, des périodes de forte volatilité, ainsi qu'un échantillon statistiquement significatif d'environ 3 900 observations quotidiennes.

La base obtenue comprend une variable temporelle correspondant aux jours de bourse, ainsi qu'une variable de prix ajusté, normalisée à 100 au 1^{er} juillet 2009. Cette transformation facilite l'interprétation en termes de performance relative, et permet une lecture directe de l'évolution des rendements et de la volatilité.

Le choix de XIC.TO repose sur des critères géographiques, techniques et économiques. D'un point de vue géographique, l'ETF assure une parfaite cohérence avec les données de taux CORRA utilisées dans la modélisation, garantissant l'homogénéité de l'environnement macroéconomique. Sur le plan financier, XIC.TO réplique l'indice S&P/TSX Capped Composite, couvrant environ 95% de la capitalisation boursière canadienne. Il constitue ainsi un proxy pertinent du portefeuille type d'un assureur vie opérant au Canada.

L'actif présente une liquidité élevée et une profondeur de marché suffisante pour garantir la stabilité et la disponibilité des prix. Son historique complet permet une estimation rigoureuse de la dynamique stochastique du sous-jacent, en cohérence avec les exigences des simulations Monte Carlo implémentées dans notre application.

Enfin, dans le cadre des contrats participatifs étudiés, XIC.TO constitue un support

2. Source des données de l'actif : <https://finance.yahoo.com/quote/XIC.TO/history>

crédible pour le calcul de la garantie finale et de la participation aux bénéfices. Sa performance influence directement les flux versés à l'assuré via le mécanisme de participation, ce qui rend son intégration dans la modélisation à la fois économiquement justifiée et actuariellement robuste.

Préparation de la base pour la simulation

Une fois collectée et nettoyée, la série des prix ajustés de l'actif XIC.TO a servi de base à la calibration du processus stochastique A_t . Pour assurer une compatibilité temporelle stricte avec la base de taux CORRA, seules les dates communes aux deux séries ont été retenues. Cette synchronisation garantit la cohérence des dépendances estimées.

Les prix ont été transformés en logarithmes afin d'adapter la dynamique à un processus log-normal, conforme à la nature multiplicative des rendements financiers. Cette transformation permet également l'application d'un schéma d'Euler sur les trajectoires log-transformées.

La volatilité historique σ a été estimée comme l'écart-type des variations logarithmiques quotidiennes. La corrélation empirique ρ entre les variations de $\ln(A_t)$ et r_t a été calculée à partir des séries filtrées. Ces deux paramètres alimentent directement le modèle de simulation.

La dynamique stochastique de l'actif, discrétisée par la méthode d'Euler, est donnée par :

$$\ln A_{t+\Delta t}^{(i)} = \ln A_t^{(i)} + \left(r_t^{(i)} - \frac{\sigma^2}{2} \right) \Delta t + \sigma \left(\rho Z_t^{(i)} + \sqrt{1 - \rho^2} W_t^{(i)} \right) \sqrt{\Delta t}$$

où $Z_t^{(i)}$ et $W_t^{(i)}$ désignent deux processus browniens standard indépendants. Ce couplage assure la prise en compte de la dépendance conjointe entre le marché de taux et l'évolution de l'actif.

	date	At
3732	2024-05-15	328.6171
3733	2024-05-16	328.8939
3734	2024-05-17	331.2010
3735	2024-05-21	331.3855
3736	2024-05-22	329.5399
3737	2024-05-23	327.4174
3738	2024-05-24	328.9862
3739	2024-05-27	330.0013
3740	2024-05-28	328.3403
3741	2024-05-29	323.0801

FIGURE 2.3 – Série historique de l'actif XIC.TO (ajusté et normalisé)

2.4 Méthodologie de valorisation

2.4.1 Définition de la valeur de continuation

La valorisation financière du droit de rachat intégré dans un contrat d'assurance vie à taux garanti repose sur un principe fondamental de comparaison dynamique entre deux alternatives offertes à l'assuré à chaque date d'évaluation possible : exercer son droit de sortie anticipée (le rachat) ou maintenir le contrat en vigueur. Ce dilemme, propre aux produits à option intégrée, conduit à formaliser une grandeur centrale dans notre approche : la **valeur de continuation**.

La valeur de continuation C_t correspond à la valeur économique actuelle, à la date t , du maintien du contrat jusqu'à une date future, sous hypothèse d'un exercice rationnel

optimal de la part de l'assuré. En d'autres termes, il s'agit de l'espérance, sous la mesure risque-neutre \mathbb{Q} , des flux futurs que percevrait un assuré s'il choisissait de ne pas exercer immédiatement son option de rachat. Cette valeur permet de comparer, à chaque date d'exercice possible, le gain attendu du maintien au contrat au bénéfice immédiat que procure le rachat.

Formellement, la valeur de continuation est définie par l'expression suivante :

$$C_{t_k} = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\sum_{j=k+1}^{n-1} e^{-\int_{t_k}^{t_j} r_s ds} F(t_j) \cdot \mathbb{1}_{\text{Exercice à } t_j} + e^{-\int_{t_k}^T r_s ds} \Theta_L(T) \cdot \mathbb{1}_{\text{Pas d'exercice}} \mid \mathcal{F}_{t_k} \right]$$

où :

- C_{t_k} est la valeur de continuation à la date discrète t_k ,
- r_s désigne le taux d'intérêt court simulé jusqu'à la maturité,
- $F(t_j)$ est le flux associé à un éventuel rachat anticipé à la date t_j ,
- $\Theta_L(T)$ est la garantie finale contractuelle versée à l'échéance T en l'absence de rachat,
- \mathcal{F}_{t_k} est la filtration correspondant à l'information disponible à la date t_k ,
- $\mathbb{1}_{\text{Exercice à } t_j}$ est l'indicateur du fait que la stratégie optimale prévoit un exercice à la date t_j ,
- $\mathbb{1}_{\text{Pas d'exercice}}$ correspond à l'indicateur du maintien du contrat jusqu'à maturité.

Le cœur du problème réside donc dans la **juste estimation de cette valeur** C_{t_k} , puisqu'elle conditionne la stratégie d'exercice optimale. Toutefois, dans la grande majorité des situations réalistes, notamment lorsque les taux d'intérêt sont stochastiques et que la valeur de l'actif A_t suit un processus aléatoire, il n'existe pas de formule fermée pour cette espérance conditionnelle. Cela rend nécessaire l'usage de techniques numériques d'approximation, fondées sur la simulation de trajectoires sous la mesure \mathbb{Q} et l'estimation non paramétrique de la valeur de continuation à partir de ces trajectoires.

Dans ce travail, la stratégie adoptée consiste à estimer C_{t_k} à partir des flux futurs simulés, en utilisant une méthode de régression par moindres carrés. Cette technique, inspirée des travaux sur l'évaluation d'options américaines, permet d'approximer localement l'espérance conditionnelle de flux futurs à partir de fonctions polynomiales des variables d'état observées à t_k , notamment le couple (A_{t_k}, r_{t_k}) . Ce choix est justifié par la complexité des dynamiques stochastiques en jeu, et par la flexibilité de la méthode à s'adapter à une variété de portefeuilles et de structures contractuelles.

Notons enfin que cette estimation de C_{t_k} ne constitue pas une valeur observée, mais une

valeur latente, calculée pour orienter la décision d'exercice optimale. Sa précision impacte directement la qualité de la stratégie d'exercice obtenue, et donc la valeur estimée de l'option de rachat.

2.4.2 Approximation par régression : méthode de Longstaff-Schwartz

L'évaluation de la valeur de continuation C_{t_k} repose sur une estimation numérique de l'espérance conditionnelle des flux futurs, calculée sous la mesure risque-neutre, conditionnellement aux informations disponibles à l'instant t_k . Cette valeur représente, pour chaque trajectoire simulée, le montant actualisé que l'assuré pourrait espérer recevoir s'il décidait de conserver son contrat au-delà de t_k , en renonçant au rachat immédiat.

Dans le cadre stochastique retenu, cette espérance ne peut être obtenue de manière analytique. Nous avons donc recours à la méthode de régression par moindres carrés introduite par Longstaff et Schwartz (2001), adaptée ici à la structure spécifique d'un contrat à taux garanti avec participation aux bénéfices.

La démarche repose sur un algorithme rétrograde. À l'échéance $t_n = T$, la valeur de continuation correspond, par construction, à la garantie finale perçue par l'assuré :

$$C_T^{(i)} = \Theta_L^{(i)}(T)$$

où $\Theta_L^{(i)}(T)$ désigne le flux contractuel simulé à maturité pour la trajectoire i . En remontant les dates discrètes t_{n-1}, \dots, t_0 , nous estimons C_{t_k} par régression sur les facteurs observés à t_k .

Actualisation sous taux stochastiques

À chaque date t_k , le facteur d'actualisation est défini par l'expression :

$$Y_{t_k}^{(i)} = e^{-\int_{t_k}^T r_s^{(i)} ds} \cdot C_{t_{k+1}}^{(i)}$$

Nous utilisons les propriétés analytiques du modèle de Vasicek pour approcher cette intégrale de manière déterministe, à partir des valeurs du taux observé $r_{t_k}^{(i)}$. Cette approximation permet une actualisation précise, compatible avec la simulation sous \mathbb{Q} .

Variables explicatives et base fonctionnelle

Nous projetons $Y_{t_k}^{(i)}$ sur une base fonctionnelle construite à partir de variables d'état observées à t_k . Les variables retenues sont :

- $A_{t_k}^{(i)}$: actif du contrat simulé sur la trajectoire i ,
- $P(t_k, T)$: prix du zéro-coupon à l'échéance T , donné par le modèle de Vasicek :

$$P(t_k, T) = \exp\left(\Phi(t_k, T) - B(t_k, T) \cdot r_{t_k}^{(i)}\right)$$

avec :

$$B(t, T) = \frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a}, \quad \Phi(t, T) = \left(\theta - \frac{\sigma^2}{2a^2}\right)(B(t, T) - (T - t)) - \frac{\sigma^2}{4a}B(t, T)^2$$

À partir de ces deux facteurs fondamentaux, nous construisons une base polynomiale de degré 2 :

$$A_{t_k}^{(i)}, \quad (A_{t_k}^{(i)})^2, \quad P(t_k, T), \quad P(t_k, T)^2, \quad A_{t_k}^{(i)} \cdot P(t_k, T)$$

Cette base permet de capter les effets croisés et non linéaires entre les dynamiques de l'actif et des taux.

Algorithme régressif rétrograde

1. Initialiser $C_T^{(i)} = \Theta_L^{(i)}(T)$ pour toutes les trajectoires i .
2. Pour chaque date $t_k \in \{t_{n-1}, \dots, t_0\}$:
 - (a) Calculer l'approximation analytique de $\int_{t_k}^T r_s^{(i)} ds$, selon la dynamique de Vasicek.
 - (b) Calculer $Y_{t_k}^{(i)} = C_{t_{k+1}}^{(i)} \cdot e^{-\int_{t_k}^T r_s^{(i)} ds}$.
 - (c) Calculer $P(t_k, T)$ à partir de $r_{t_k}^{(i)}$.
 - (d) Construire les prédicteurs : $A_{t_k}^{(i)}, (A_{t_k}^{(i)})^2, P(t_k, T), P(t_k, T)^2, A_{t_k}^{(i)} \cdot P(t_k, T)$.
 - (e) Effectuer une régression linéaire de $Y_{t_k}^{(i)}$ sur ces prédicteurs.
 - (f) Estimer $C_{t_k}^{(i)}$ à partir de la prédiction obtenue.
 - (g) Conserver le coefficient R^2 associé à la qualité d'ajustement.

Cette méthode permet une approximation récursive cohérente de $C_{t_k}^{(i)}$ à toutes les dates

discrètes, pour chaque trajectoire. Elle constitue une étape intermédiaire incontournable avant d'implémenter la stratégie de comparaison entre valeur de continuation et valeur de rachat, menant à l'identification des dates optimales d'exercice.

2.4.3 Construction des flux optimaux actualisés

Une fois les valeurs de continuation $C(t_k)$ estimées à chaque date et pour chaque trajectoire, nous procédons à la construction des flux économiques réellement perçus par l'assuré, sous hypothèse d'un exercice optimal de son droit de rachat. Cette étape vise à déterminer, pour chaque trajectoire simulée, le flux unique à retenir, que ce soit un rachat anticipé ou la garantie finale, ainsi que sa valeur actualisée au temps 0.

Le principe suivi est rétrograde et repose sur la comparaison point par point entre les valeurs de rachat R_{t_k} et les valeurs de continuation C_{t_k} . À chaque date discrète t_k , nous examinons si le montant de rachat $R_{t_k}^{(i)}$ excède la valeur de continuation $C_{t_k}^{(i)}$ pour la trajectoire i :

- Si $R_{t_k}^{(i)} > C_{t_k}^{(i)}$, alors il est optimal d'exercer l'option de rachat à la date t_k , et le flux retenu pour cette trajectoire est $R_{t_k}^{(i)}$.
- Sinon, l'exercice est repoussé à la période suivante, et la recherche se poursuit à t_{k+1} .

Ce processus est répété jusqu'à la première date où l'inégalité est satisfaite. Si aucune date ne vérifie cette condition, alors aucun rachat n'est exercé, et le flux retenu est la garantie finale $\Theta_L^{(i)}(T)$.

Une fois la date optimale d'exercice identifiée, nous procédons à l'actualisation du flux retenu à la date $t = 0$. Pour cela, nous utilisons une approximation de l'intégrale $\int_{t_k}^T r_s ds$ par une moyenne des taux simulés sur la période résiduelle. Le facteur d'actualisation est alors :

$$\exp\left(-\bar{r}_{[t_k, T]} \cdot (T - t_k)\right)$$

où $\bar{r}_{[t_k, T]}$ est le taux moyen observé sur la période $[t_k, T]$ pour la trajectoire considérée.

Ce mécanisme permet d'obtenir un vecteur de flux actualisés, noté $V_0^{(i)}$, pour $i = 1, \dots, N_{\text{traj}}$, représentant la valeur actualisée du contrat sur chaque trajectoire. Il constitue la base de toute évaluation future du contrat. Dans notre application, seuls les flux correspondant à un rachat anticipé sont affichés dans le tableau récapitulatif, les flux à

maturité étant implicitement inclus dans le calcul global mais non visualisés.

Cette étape de construction des flux optimaux actualisés est fondamentale : elle transforme les matrices $R(t)$ et $C(t)$ issues des étapes précédentes en un unique flux par trajectoire, rendant possible l'évaluation agrégée du contrat dans la section suivante.

2.5 Valorisation du contrat

2.5.1 Valeur bermudienne

La valeur bermudienne du contrat représente sa juste valeur économique en présence d'un droit de rachat exerçable à dates discrètes. Elle reflète la situation où un assuré parfaitement rationnel peut, à chaque date t_k de l'horizon de projection, décider de mettre fin au contrat si le montant de rachat anticipé R_{t_k} est supérieur à la valeur attendue du maintien du contrat, appelée valeur de continuation C_{t_k} .

Dans ce cadre, le contrat est assimilé à une option de type bermudéen, dont l'exercice est possible à des dates discrètes et dont le détenteur suit une stratégie d'exercice optimale fondée sur la comparaison entre deux valeurs.

La valeur du contrat est alors donnée par l'espérance, sous la probabilité risque-neutre, du flux actualisé perçu par l'assuré selon sa stratégie optimale. Cette valeur s'écrit :

$$\widehat{V}_0^{\text{Berm}} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N e^{-\int_0^{\tau^{(i)}} r_s^{(i)} ds} \cdot F^{(i)}(\tau^{(i)})$$

où $F^{(i)}(\tau^{(i)})$ désigne, selon les cas :

$$F^{(i)}(\tau^{(i)}) = \begin{cases} R_{t_k}^{(i)}, & \text{si l'option est exercée à } t_k = \tau^{(i)} \\ \Theta_L^{(i)}(T), & \text{si aucune date } t_k \text{ ne vérifie } R_{t_k}^{(i)} > C_{t_k}^{(i)} \end{cases}$$

Ce flux correspond donc au rachat anticipé si celui-ci est jugé optimal à une date donnée, ou à la prestation garantie finale dans le cas contraire.

Cette estimation fournit une valeur intégrant la flexibilité du contrat du point de vue de l'assuré, et constitue la borne supérieure du coût économique du contrat dans un univers neutre au risque.

2.5.2 Valeur européenne

La valeur européenne du contrat représente la juste valeur économique du passif dans un cadre sans faculté de sortie anticipée. Elle sert de référence théorique dans l'évaluation du contrat, en supposant que l'assuré conserve le contrat jusqu'à son échéance T , sans exercer son droit de rachat.

Dans le cadre de notre modélisation, la valeur du contrat européen à l'instant initial est donnée par l'espérance, sous la mesure risque-neutre \mathbb{Q} , du flux $\Theta_L(T)$ actualisé sur la période $[0, T]$. On obtient ainsi :

$$\widehat{V}_0^{\text{Euro}} = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\exp \left(- \int_0^T r_s ds \right) \cdot \Theta_L(T) \right]$$

Cette écriture rend compte de la valorisation théorique du passif dans un univers neutre au risque, en intégrant l'impact de la courbe des taux sur l'actualisation des flux futurs.

Dans notre approche, nous ne faisons appel à aucune formule fermée. L'estimation de cette valeur s'effectue numériquement par la méthode de Monte Carlo, en simulant un grand nombre de trajectoires jointes des processus r_t et A_t , selon les dynamiques stochastiques définies précédemment. L'intégrale $\int_0^T r_s ds$ est approchée analytiquement, à l'aide de l'expression issue de l'intégration du processus de Vasicek, ce qui permet de calculer précisément le facteur d'actualisation pour chaque trajectoire.

La valeur européenne est alors estimée comme la moyenne empirique suivante :

$$\widehat{V}_0^{\text{Euro}} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \exp \left(- \int_0^T r_s^{(i)} ds \right) \cdot \Theta_L^{(i)}(T)$$

où N désigne le nombre de trajectoires simulées, $r_s^{(i)}$ la trajectoire du taux d'intérêt pour le scénario i , et $\Theta_L^{(i)}(T)$ le flux terminal correspondant.

Cette estimation constitue la borne inférieure du coût économique du contrat, en l'absence de toute faculté de rachat anticipé. Elle sera utilisée comme point de comparaison dans l'évaluation du surcoût lié à l'option de rachat.

2.5.3 Coût de l'option de rachat

La comparaison entre la valeur bermudienne et la valeur européenne du contrat permet d'estimer, de manière directe, le coût implicite associé à la flexibilité offerte à l'assuré. Cette estimation repose sur une simple différence entre les deux valorisations :

$$\text{Coût du rachat} = \widehat{V}_0^{\text{Berm}} - \widehat{V}_0^{\text{Euro}}$$

Ce différentiel représente le surcoût supporté par l'assureur du fait de la possibilité, pour l'assuré, de mettre fin au contrat de manière anticipée dès lors que cela lui est économiquement favorable. Il traduit, en valeur monétaire, l'asymétrie induite par l'option de rachat intégrée au contrat.

D'un point de vue actuariel, cette quantification permet de rendre visible une composante souvent implicite du passif : le coût d'opportunité induit par le comportement optimal de l'assuré. L'évaluation du coût du rachat s'avère ainsi indispensable pour plusieurs usages : ajustement de la tarification, mesure de la rentabilité ajustée au risque, calibration de la marge économique, ou encore calcul du capital économique requis dans un cadre prudentiel.

La mise en évidence explicite de ce coût constitue donc un outil de pilotage à part entière, permettant de valoriser finement la structure réelle des engagements assurantiels dans un environnement incertain.

2.6 Conclusion

Ce chapitre a posé les fondements théoriques de la valorisation financière de l'option de rachat dans les contrats d'assurance vie à taux garanti, en adoptant une approche actuarielle rigoureuse et ancrée dans la théorie de l'arbitrage. L'analyse a été structurée autour de quatre axes majeurs, formant un cadre cohérent de modélisation stochastique et de valorisation par simulation.

Dans un premier temps, nous avons précisé les flux contractuels, à l'échéance comme en cas de sortie anticipée, en introduisant des formules génériques pour la garantie finale $\Theta_L(T)$ et le montant de rachat R_t . Cette spécification a permis d'expliciter les engagements implicites associés au contrat, et de formaliser l'asymétrie qui en découle pour l'assureur.

Nous avons ensuite défini un cadre de simulation sous la mesure risque-neutre \mathbb{Q} , combinant un modèle de Vasicek pour le taux court r_t et une dynamique log-normale corrélée pour l'actif de référence A_t . Ce cadre permet de générer des trajectoires cohérentes, nécessaires à l'estimation des valeurs conditionnelles attendues à la base des décisions d'exercice.

La troisième partie a été consacrée à l'évaluation de la valeur de continuation C_{t_k} au moyen de la méthode de Longstaff-Schwartz. Cette méthode repose sur une régression par moindres carrés à partir de variables d'état simulées, permettant d'approximer les espérances conditionnelles sans hypothèse restrictive sur les dynamiques. L'intégration de l'expression analytique de l'actualisation sous Vasicek a permis de conserver une précision optimale tout en réduisant le coût computationnel.

Enfin, nous avons procédé à la construction rétrograde de la stratégie optimale d'exercice du rachat, en comparant C_{t_k} et R_{t_k} pour chaque trajectoire simulée. Cette étape a permis d'obtenir, pour chaque scénario, le flux économique pertinent à actualiser, donnant ainsi accès à la valeur bermudéenne du contrat.

La comparaison entre cette valeur et la valeur européenne (obtenue sans possibilité de rachat) a permis de quantifier le surcoût associé à l'option de rachat, c'est-à-dire la flexibilité contractuelle offerte à l'assuré. Cette dernière mesure représente un indicateur essentiel du risque économique porté par l'assureur.

Les fondations posées dans ce chapitre serviront d'appui direct à l'implémentation pratique détaillée dans le chapitre suivant, où l'ensemble des étapes théoriques sera traduit dans un outil opérationnel construit sous R Shiny.

Chapitre 3

Développement de l'application RShiny

3.1 Introduction

Ce chapitre présente le développement de l'application RShiny conçue pour modéliser la valorisation financière du rachat dans les contrats d'assurance vie à taux garanti. L'outil propose une navigation intuitive à travers les différentes étapes du calcul, depuis la simulation des variables d'état jusqu'à l'analyse de sensibilité. Après une présentation générale de l'interface, nous décrivons chaque page de l'application, puis nous illustrons son usage par une étude numérique.

3.2 Description et application des fonctionnalités de l'outil

3.2.1 Page 1 : Accueil et navigation

La page d'accueil constitue le point d'entrée principal dans l'outil de modélisation. Elle présente à l'utilisateur l'objectif général de l'application : estimer la valeur de l'option de rachat intégrée dans un contrat d'assurance vie à taux garanti participatif. Le cadre méthodologique est brièvement rappelé : modélisation stochastique des taux et de l'actif sous-jacent, valorisation par Monte Carlo et stratégie optimale d'exercice via l'algorithme de Longstaff-Schwartz.

Cette interface permet également de comprendre la structure du processus de valorisation, décomposé en sept étapes logiques :

- **Étape 1** : Simulation des trajectoires de taux $r(t)$ et d'actif $A(t)$;

- **Étape 2** : Calcul de la garantie finale à l'échéance ;
- **Étape 3** : Évaluation des flux de rachat anticipé $R(t)$;
- **Étape 4** : Estimation de la valeur de continuation $C(t)$;
- **Étape 5** : Construction de la stratégie optimale et actualisation des flux ;
- **Étape 6** : Comparaison entre les différentes valorisations obtenues ;

L'utilisateur peut naviguer entre ces différentes étapes grâce au menu latéral situé à gauche de l'écran. Chaque onglet ouvre une page dédiée, contenant les paramètres nécessaires, un bouton d'exécution, et les sorties graphiques ou numériques correspondantes.

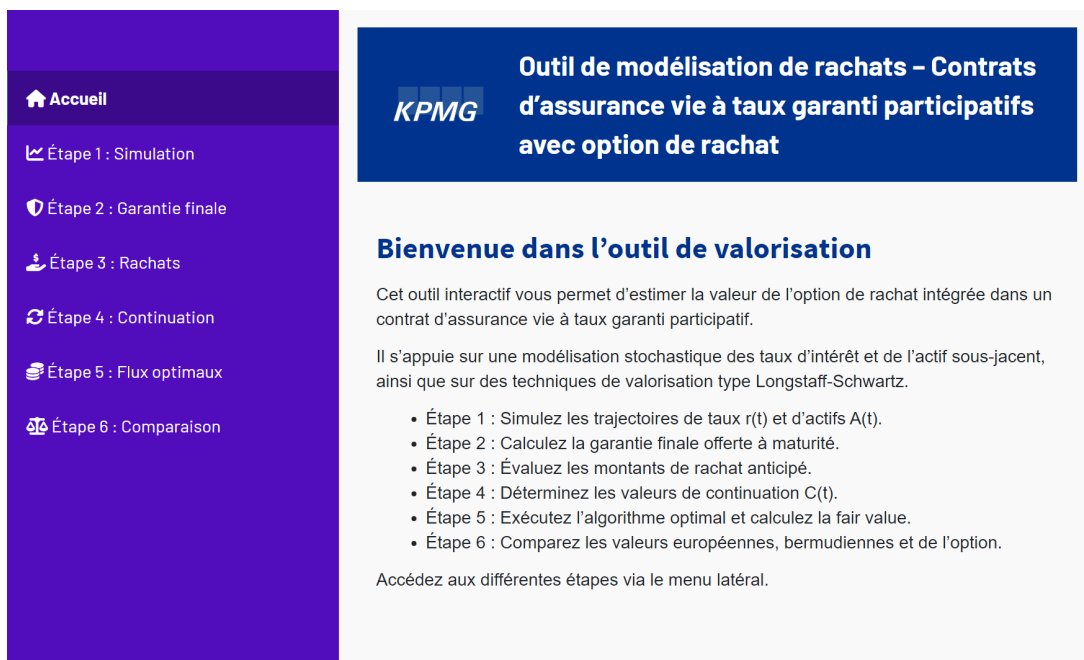


FIGURE 3.1 – Page 1 – Présentation des étapes du modèle et logique de navigation

3.2.2 Page 2 : Simulation des trajectoires r_t et A_t

La première page de l'application permet de configurer les paramètres nécessaires à la simulation conjointe du taux court r_t (modélisé par un processus de Vasicek) et de l'actif A_t (modélisé par un mouvement brownien géométrique). Ces trajectoires constituent le socle des valorisations qui seront effectuées dans les étapes ultérieures.

Les paramètres d'entrée exigés par l'outil, ainsi que les bornes de validation définies, sont les suivants :

- **Horizon temporel T** : valeur comprise entre 10 et 50 ;
- **Nombre de pas N** : entre 10 et 10 000 ;
- **Nombre de trajectoires simulées $npaths$** : entre 1 et 1 000.

L'outil vérifie automatiquement le respect de ces bornes. Toute entrée hors intervalle empêche l'exécution de la simulation. Ce mécanisme de validation garantit la stabilité numérique de l'ensemble des calculs réalisés par l'application.

The screenshot shows the user interface of the RShiny application. On the left is a vertical navigation menu with a purple background, listing six steps: Accueil, Étape 1 : Simulation (highlighted), Étape 2 : Garantie finale, Étape 3 : Rachats, Étape 4 : Continuation, Étape 5 : Flux optimaux, and Étape 6 : Comparaison. The main content area has a dark blue header with the KPMG logo and the title 'Outil de modélisation de rachats - Contrats d'assurance vie à taux garanti participatifs avec option de rachat'. Below the header, the section is titled 'Étape 1 - Simulation des trajectoires' and includes the instruction 'Définissez les paramètres nécessaires à la simulation du taux court $r(t)$ et de l'actif $A(t)$ '. A purple form box contains three input fields: 'Horizon T (années)' with the value 30, 'Nombre de pas (≥ 10)' with the value 60, and 'Vitesse de réversion a' with the value 0.1. At the bottom of the form box is the label 'Niveau long terme'.

FIGURE 3.2 – Page 2 – Interface de simulation des trajectoires du taux $r(t)$ et de l'actif $A(t)$

3.2.3 Page 3 : Garantie finale $\Theta_L(T)$

Cette page permet de configurer les paramètres nécessaires au calcul de la garantie finale à l'échéance du contrat. L'utilisateur doit renseigner les trois variables suivantes :

- **Part investie par les assurés α** : cette valeur doit appartenir à l'intervalle $[0.01, 1]$. Elle représente la fraction des actifs initialement affectée au contrat individuel.
- **Taux de participation aux bénéfices δ** : ce paramètre doit satisfaire $0 < \delta < 1$, et indique la proportion du surplus distribué à l'assuré lorsque l'actif dépasse le capital garanti.
- **Taux minimum garanti r_g** : la saisie est limitée à un intervalle strictement positif, entre 0.0001 et 0.1. Ce taux est utilisé pour calculer le montant minimal garanti à l'échéance.

Les champs sont automatiquement contrôlés dans l'application. Une valeur en dehors des bornes spécifiées entraîne une erreur bloquante pour l'utilisateur. Cette étape vise à garantir la cohérence contractuelle du calcul de la garantie finale.



FIGURE 3.3 – Page 3 – Interface de saisie des paramètres de la garantie finale

3.2.4 Page 4 : Montants de rachat anticipé $R(t)$

Cette étape permet de spécifier les deux paramètres clés qui déterminent le montant versé à l'assuré en cas d'exercice anticipé du contrat.

- **Taux de restitution** γ : représente le pourcentage de la valeur contractuelle effectivement versé à l'assuré. Il est compris entre 95% et 100%, conformément aux seuils réglementaires en vigueur. Une pénalité implicite est appliquée lorsque $\gamma < 1$.
- **Taux de participation** δ' : désigne la proportion de la surperformance financière à laquelle l'assuré peut prétendre en cas de sortie anticipée. Cette valeur est typiquement inférieure au taux de participation appliqué à maturité (δ), afin d'inciter à la conservation du contrat.

Comme dans les pages précédentes, le calcul ne peut être exécuté que si l'utilisateur valide préalablement les paramètres, sous réserve du respect des conditions imposées. En cas d'erreur ou de valeur hors intervalle autorisé, l'application bloque le calcul et invite à corriger l'entrée.

The screenshot displays the application's interface for Step 3: Calculating early redemption amounts $R(t)$. On the left is a purple sidebar with navigation links: Accueil, Étape 1: Simulation, Étape 2: Garantie finale, **Étape 3: Rachats** (highlighted), Étape 4: Continuation, Étape 5: Flux optimaux, and Étape 6: Comparaison. The main content area has a dark blue header with the KPMG logo and the title 'Outil de modélisation de rachats – Contrats d'assurance vie à taux garanti participatifs avec option de rachat'. Below this is the section title 'Étape 3 – Calcul des montants de rachat $R(t)$ ' and a brief instruction: 'Évaluez les flux que recevrait l'assuré s'il exerçait l'option de rachat à chaque date simulée.' The input form is a dark purple box containing two columns of inputs: 'γ : Taux de restitution' with a value of 0.95, and 'δ' : Participation rachat anticipé' with a value of 0.5. At the bottom of the form are two buttons: 'Valider les paramètres' and 'Calculer la matrice $R(t)$ '.

FIGURE 3.4 – Page 3 – Paramètres contractuels pour le calcul des montants de rachat anticipé

3.2.5 Page 5 : Valeur de continuation

Cette page permet d'estimer, pour chaque trajectoire simulée, la valeur du contrat en cas de non-exercice immédiat du droit de rachat. Conformément à la logique de l'algorithme implémenté, il s'agit ici de construire, à chaque date d'évaluation, une estimation du gain attendu si l'assuré décide de ne pas racheter immédiatement son contrat.

L'utilisateur n'a pas besoin d'entrer de nouveaux paramètres sur cette page. Il lui suffit de cliquer sur le bouton de lancement du calcul, une fois les étapes précédentes complétées. L'application effectue alors les calculs nécessaires en arrière-plan à partir des trajectoires déjà simulées et des flux de rachat anticipé.

Les valeurs estimées ici serviront de référence dans la comparaison avec les montants de rachat, afin de déterminer la stratégie optimale de sortie anticipée.

The screenshot shows the user interface of the RShiny application. On the left is a vertical navigation menu with a dark blue background and white text. The menu items are: 'Accueil' (Home), 'Étape 1 : Simulation', 'Étape 2 : Garantie finale', 'Étape 3 : Rachats', 'Étape 4 : Continuation' (highlighted in a darker blue), 'Étape 5 : Flux optimaux', and 'Étape 6 : Comparaison'. The main content area has a white background. At the top right, there is a dark blue header with the KPMG logo and the text 'Outil de modélisation de rachats – Contrats d'assurance vie à taux garanti participatifs avec option de rachat'. Below this, the section title 'Étape 4 – Estimation de la valeur de continuation' is displayed in bold blue text. Underneath, a short description reads: 'Estimez la valeur du contrat en cas de non-exercice à chaque date t , par régression sur les facteurs de marché.' A prominent blue button with white text 'Calculer la matrice $C(t)$ ' is positioned below the text.

FIGURE 3.5 – Page 5 – Régression et estimation de la valeur de continuation $C(t)$

3.2.6 Page 6 : Flux optimaux actualisés

Cette page implémente la stratégie d'exercice optimal de l'option de rachat. À partir des valeurs de rachat et de continuation calculées lors des étapes précédentes, l'outil détermine, pour chaque trajectoire simulée, si l'assuré exerce son droit de sortie anticipée ou conserve le contrat jusqu'à l'échéance.

L'utilisateur n'a qu'à cliquer sur le bouton dédié pour lancer le calcul. L'algorithme identifie, pour chaque scénario, la date optimale de sortie (si elle existe) et le montant correspondant. Seuls les flux de rachat anticipé sont affichés dans le tableau de sortie : lorsqu'aucun rachat n'est exercé avant la maturité, aucun flux n'est affiché.

Cette page constitue un point de bascule dans le processus de valorisation : elle synthétise toutes les informations précédemment calculées pour construire un vecteur de flux actualisés qui servira à l'évaluation économique du contrat dans l'étape suivante.

The screenshot shows the user interface of the RShiny application. On the left is a vertical navigation menu with a purple background, listing the following steps: Accueil, Étape 1 : Simulation, Étape 2 : Garantie finale, Étape 3 : Rachats, Étape 4 : Continuation, **Étape 5 : Flux optimaux** (highlighted in a darker purple), and Étape 6 : Comparaison. The main content area has a white background. At the top right, there is a dark blue header with the KPMG logo and the text 'Outil de modélisation de rachats – Contrats d'assurance vie à taux garanti participatifs avec option de rachat'. Below this, the title 'Étape 5 – Exercice optimal de l'option de rachat' is displayed. The text explains: 'Déterminez, pour chaque trajectoire, si le rachat anticipé est optimal ou si l'assuré attend la maturité.' A prominent purple button labeled 'Calculer les flux optimaux actualisés' is positioned below the text. At the bottom, a note states: 'Note : Ce tableau contient uniquement les dates de rachat anticipé (strictement avant la maturité).'

FIGURE 3.6 – Page 6 – Détermination des flux optimaux actualisés

3.2.7 Page 7 : Comparaison des valeurs

Cette page permet d'évaluer la valeur économique du contrat selon deux perspectives distinctes : en présence d'une option de rachat (valeur bermudienne) et en l'absence de toute possibilité de sortie anticipée (valeur européenne).

L'utilisateur peut lancer le calcul des deux valorisations via un bouton unique. L'application affiche ensuite les deux valeurs obtenues, ainsi que la différence entre elles, interprétée comme le coût implicite du droit de rachat accordé à l'assuré.

Cette page permet ainsi de synthétiser l'impact financier de la flexibilité contractuelle, et fournit un indicateur clé pour la gestion actuarielle du produit.



FIGURE 3.7 – Page 7 – Comparaison entre valeur européenne, valeur bermudienne et coût du rachat

3.3 Étude numérique

La première étape du processus de valorisation consiste à importer les bases de données nécessaires à l'estimation. Il s'agit de deux fichiers Excel contenant respectivement :

- les taux d'intérêt historiques (base CORRA) sous forme de couples (t, r_t) ;
- la valeur de l'actif sous-jacent A_t à chaque date correspondante.

The screenshot shows a web interface with two main sections. The first section is titled "Choisir le modèle de taux d'intérêt :" and contains a dropdown menu with "Vasicek" selected. The second section is titled "Importer le fichier Excel des taux d'intérêt (2 colonnes : date, taux)" and shows a "Browse..." button next to the filename "corra_series.xlsx", with a blue bar below it indicating "Upload complete". The third section is titled "Importer le fichier Excel des valeurs de l'actif (2 colonnes : date, A)" and shows a "Browse..." button next to the filename "actif_XIC_at.xlsx", with a blue bar below it indicating "Upload complete".

FIGURE 3.8 – Importation des bases de taux (CORRA) et d'actif dans l'interface de simulation

À partir des taux observés, l'outil procède automatiquement à l'estimation des paramètres du modèle de taux choisi par l'utilisateur. Dans le cas du modèle de Vasicek, les paramètres suivants sont extraits par régression sur les données CORRA :

- a : vitesse de retour à la moyenne ;
- θ : niveau d'équilibre à long terme ;
- σ_r : volatilité du taux ;
- ρ : corrélation empirique avec l'actif A_t ;
- σ_A : volatilité du logarithme de l'actif.

L'estimation repose sur la transformation des couples successifs (r_t, r_{t+1}) en approximations de dérivée $\frac{dr_t}{dt}$, puis l'ajustement d'un modèle linéaire de la forme :

$$\Delta r_t = \alpha + \beta r_t + \varepsilon_t.$$

Les paramètres du processus de Vasicek sont ensuite reconstruits selon :

$$a = -\frac{\beta}{\delta_t}, \quad \theta = -\frac{\alpha}{\beta}, \quad \sigma_r = \frac{\text{écart-type}(\varepsilon_t)}{\sqrt{\delta_t}}.$$

Le choix d'estimer ces paramètres à partir des données réelles (et non de les fixer a priori) permet de garantir que les trajectoires de taux utilisées dans l'évaluation reflètent fidèlement la dynamique empirique du marché. L'extrait suivant illustre le résultat de cette étape :

Simulation terminée avec succès.
Temps de simulation: 8.32 secondes

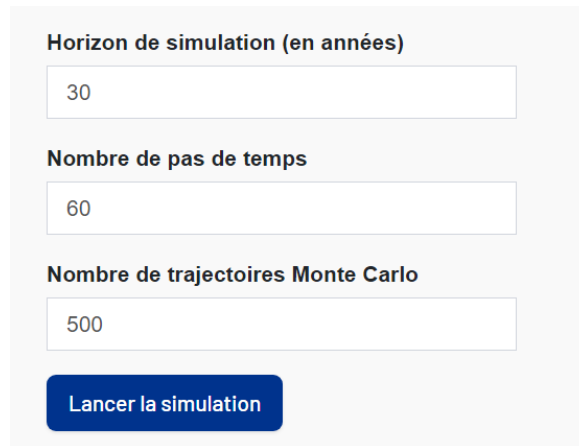
Paramètres estimés du modèle

Paramètre	Estimé
a	0.10
θ	-0.01
σ_r	0.01
σ_A	0.06
ρ	0.06

FIGURE 3.9 – Fin de la simulation : les paramètres sont estimés et le temps d'exécution est indiqué

3.3.1 Configuration de la simulation

L'utilisateur peut ensuite configurer librement l'horizon temporel de projection T , le nombre de pas de temps N , et le nombre de trajectoires Monte Carlo à générer. Ces valeurs sont saisies directement dans l'interface, comme illustré ci-dessous :



Horizon de simulation (en années)

30

Nombre de pas de temps

60

Nombre de trajectoires Monte Carlo

500

Lancer la simulation

FIGURE 3.10 – Paramétrage de l’horizon de simulation et du nombre de trajectoires

Le nombre de pas $N = 60$ correspond à une discrétisation semestrielle sur un horizon de $T = 30$ ans. Cela permet une évaluation du contrat à chaque fin de semestre. Le nombre de trajectoires simulées a été fixé à 500 pour garantir une précision statistique suffisante sans allonger excessivement les temps de calcul.

L’estimation empirique du modèle, couplée à cette configuration flexible de la simulation, constitue la base sur laquelle les flux futurs du contrat sont projetés. Les trajectoires de taux r_t ainsi générées seront utilisées dans les modules de calcul de la garantie finale, des valeurs de rachat anticipé, et de la valeur optimisée du contrat.

Les figures ci-dessous illustrent les trajectoires simulées de l’actif de référence $A(t)$ et du taux court $r(t)$, sur un horizon de 30 ans. La volatilité modérée des taux et la croissance exponentielle de certains actifs traduisent le comportement attendu sous les hypothèses du modèle.

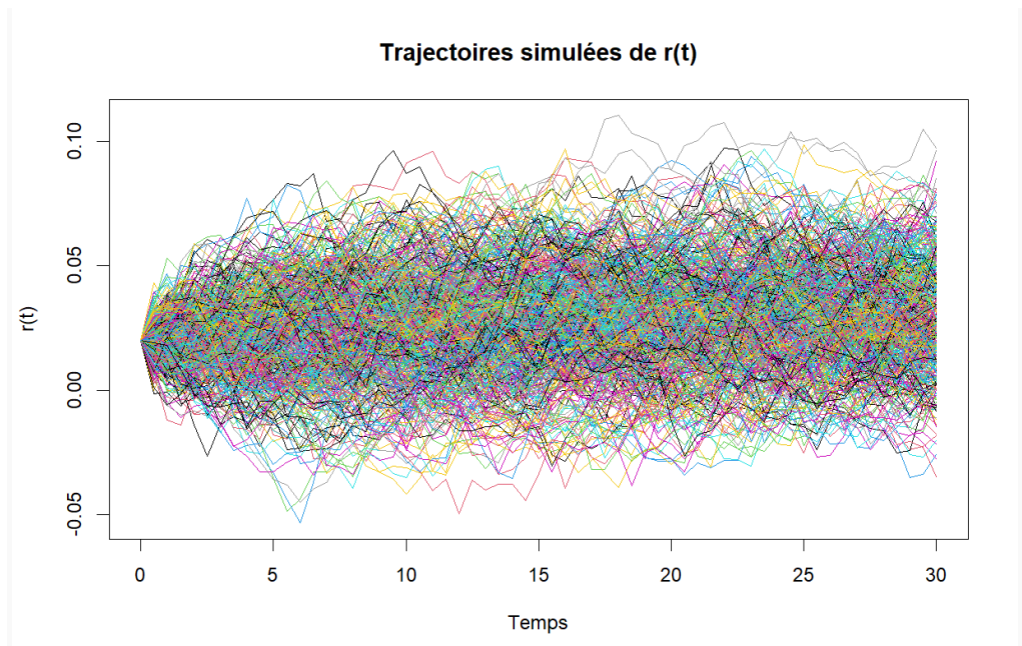


FIGURE 3.11 – Trajectoires simulées du taux court $r(t)$ selon le processus de Vasicek

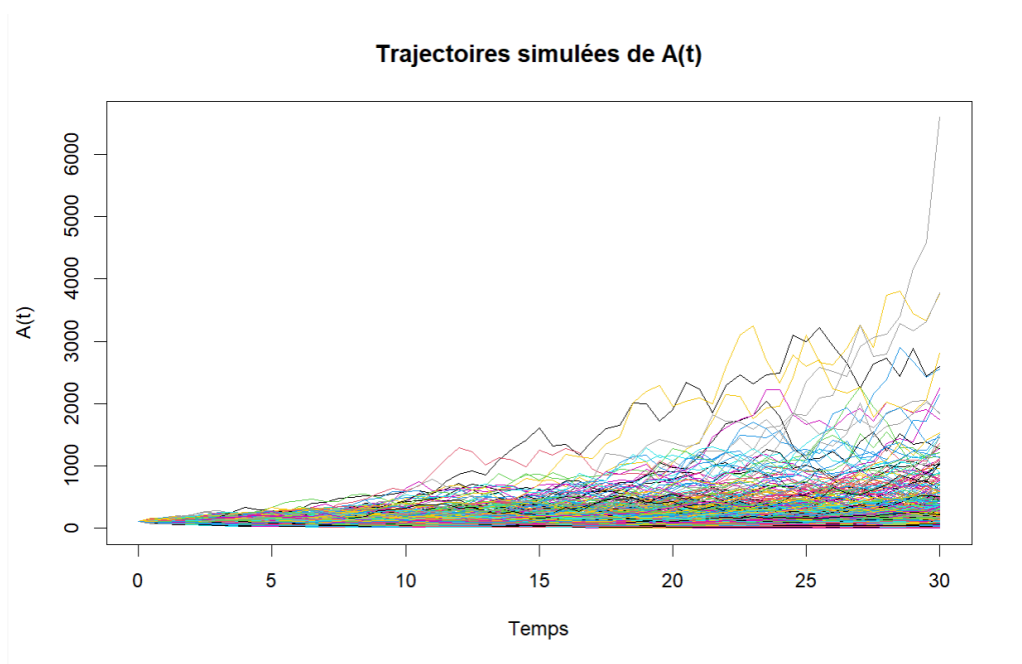


FIGURE 3.12 – Trajectoires simulées de l'actif $A(t)$ sous la mesure risque-neutre \mathbb{Q}

3.3.2 Garantie finale à maturité : matrice et distribution des valeurs

La première sortie de l'outil concerne le calcul de la garantie finale $\Theta_L(T)$, correspondant au flux perçu par l'assuré à l'échéance du contrat, en l'absence de rachat anticipé.

Cette variable, définie analytiquement à partir des paramètres contractuels et des trajectoires de l'actif simulées, est calculée pour chaque trajectoire simulée $i = 1, \dots, N$.

L'outil génère une matrice de dimension $N \times 1$ contenant la valeur de $\Theta_L(T)$ pour chaque trajectoire.

Cette matrice est utilisée en entrée dans le calcul de la valeur européenne du contrat (sans faculté de rachat). Elle constitue également la valeur de continuation finale dans l'algorithme de Longstaff-Schwartz, servant de point d'ancrage pour la stratégie d'exercice optimale.

Une représentation graphique de la distribution des valeurs obtenues permet de visualiser l'hétérogénéité des résultats en fonction des scénarios économiques simulés :

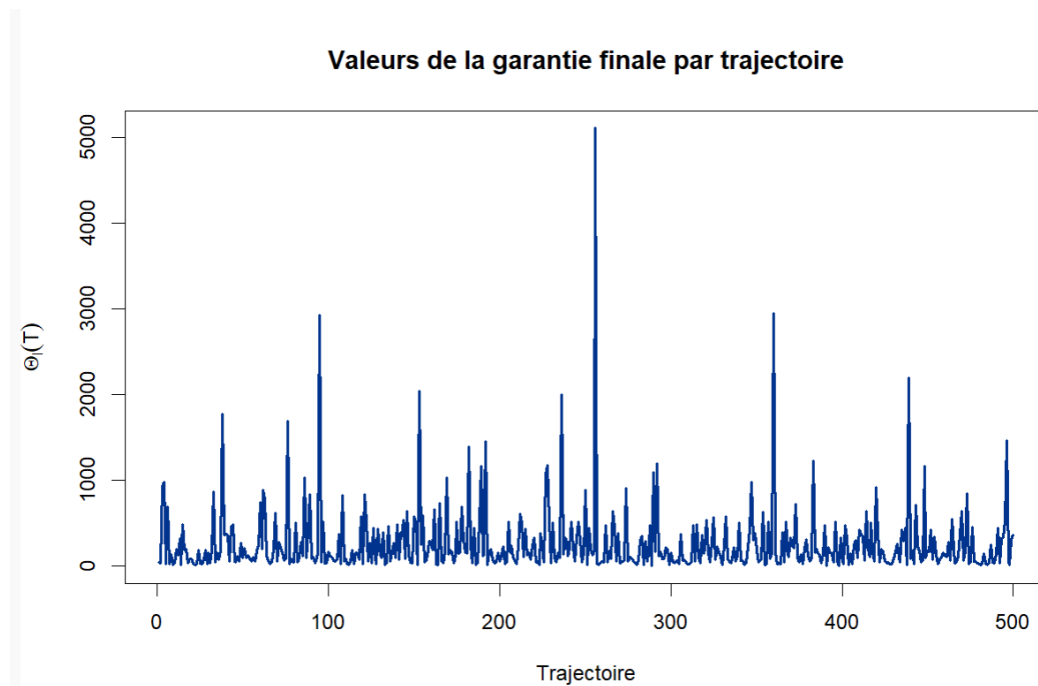


FIGURE 3.13 – Valeurs simulées de $\Theta_L(T)$ sur les 500 trajectoires

On observe une forte dispersion des résultats, avec des valeurs extrêmes pouvant dépasser 5 000 unités sur certaines trajectoires. Cette dispersion reflète la nature asymétrique du contrat, combinant garantie plancher et participation optionnelle aux bénéfices. Elle justifie l'utilisation d'un grand nombre de trajectoires pour stabiliser les estimations par Monte Carlo.

3.3.3 Valeurs de rachat simulées

Nous présentons ici les résultats relatifs à la matrice des valeurs de rachat $R(t_k)$, calculées pour chaque trajectoire simulée et à chaque pas de temps. Ces valeurs représentent le montant que l'assuré percevrait s'il exerçait son option de rachat à la date t_k .

Les tableaux suivants exposent un extrait de cette matrice. Le premier tableau montre la structure brute, avec les colonnes correspondant aux derniers instants de l'horizon temporel (entre $t = 27$ année et $t = 30$ année). Les deux tableaux présentent la forme où chaque ligne correspond à une trajectoire et chaque colonne à une date d'évaluation.

	t=0	t=0.5	t=1	t=1.5	t=2	t=2.5	t=3
Traj_1	80.75	85.38848515175958	86.12918750233753	92.02915002665861	89.2585626615284	92.04142635540923	91.1014463468560
Traj_2	80.75	82.34848235088522	83.99564573679956	85.69297271597722	87.44199099727247	89.24427481520075	91.1014463468560
Traj_3	80.75	82.34848235088522	83.99564573679956	85.69297271597722	87.44199099727247	89.24427481520075	91.1014463468560
Traj_4	80.75	82.34848235088522	83.99564573679956	85.69297271597722	87.44199099727247	89.24427481520075	91.1014463468560
Traj_5	80.75	84.24327670797324	87.39552261412744	85.69297271597722	87.44199099727247	89.24427481520075	91.1014463468560

FIGURE 3.14 – Matrice des valeurs de rachat $R(t_k)$ par trajectoire

	t=27	t=27.5	t=28	t=28.5	t=29	t=29.5	t=30
905148328423	394.9850994664148	406.829746317992	419.0351163692779	431.612195277206	444.5723032617717	457.9271052949944	
905148328423	394.9850994664148	406.829746317992	419.0351163692779	431.612195277206	444.5723032617717	457.9271052949944	
9.90809644037	924.1320962191619	842.0868442427279	692.2141979411972	702.0108395074607	648.6108065668666	660.4736828189657	
.555149206529	627.9903024285152	691.6385244134968	658.857319379502	639.2000469679983	652.3287372094532	685.6245085504561	
905148328423	394.9850994664148	406.829746317992	419.0351163692779	431.612195277206	444.5723032617717	457.9271052949944	

FIGURE 3.15 – Extrait brut de la matrice $R(t_k)$ aux dates proches de maturité

Enfin, le graphe ci-dessous illustre l'évolution des valeurs de rachat $R(t_k)$ au cours du

temps, pour un sous-ensemble de trajectoires. On observe une dispersion croissante, reflet de la variabilité induite par la dynamique de l'actif $A(t)$ et des taux simulés $r(t)$.

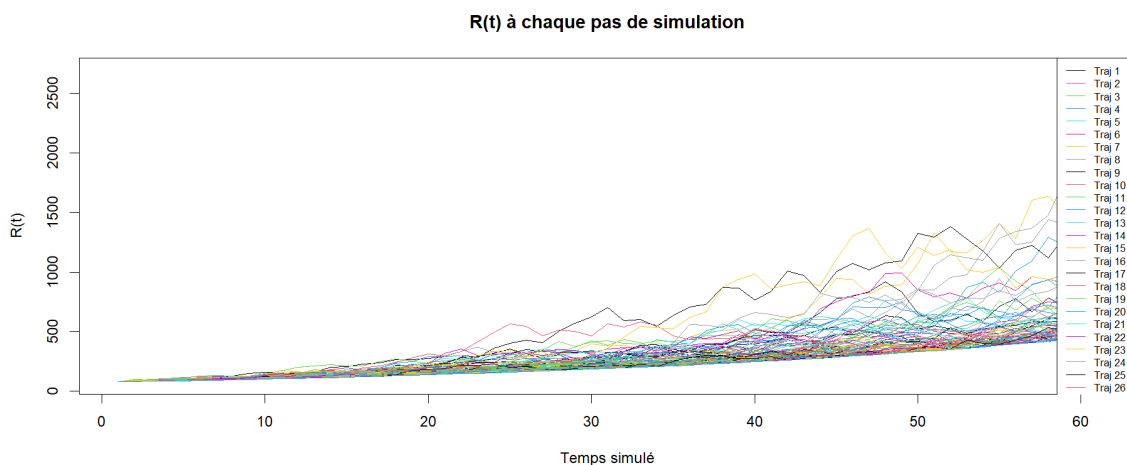


FIGURE 3.16 – Évolution des valeurs de rachat $R(t_k)$ au fil du temps simulé

3.3.4 Valeur de continuation $C(t)$ simulée à chaque pas de temps

Nous présentons ici les résultats de la simulation des valeurs de continuation $C(t)$, obtenues via la méthode de Longstaff-Schwartz. Ces valeurs permettent d'estimer, à chaque date discrète t_k , l'espérance conditionnelle des flux futurs sous contrainte de non-exercice anticipé de l'option de rachat.

La première matrice ci-dessous regroupe les valeurs simulées de $C(t)$ aux premières années du contrat (de $t = 0$ à $t = 1.5$), sur un échantillon de trajectoires. On observe des valeurs très faibles, ce qui est cohérent avec le peu d'intérêt qu'aurait l'assuré à exercer l'option de rachat en début de période, alors que peu de capital a été accumulé.

Valeurs de C(t) pour chaque trajectoire				
	t=0	t=0.5	t=1	t=1.5
Traj_1	0.00020844780766618	0.0001268141997971088	0.0002814997917232505	0.0007814088954768567
Traj_2	0.00020844780766618	0.000795479278460025	0.001586325394979056	0.001224983085625117
Traj_3	0.00020844780766618	0.0004536989211090451	0.000323267189342176	-0.0001054340839095631
Traj_4	0.00020844780766618	0.0007727450102830049	0.0003423699620546377	0.0005148696194129969
Traj_5	0.00020844780766618	0.000129234393395441	0.0001077530051238271	0.0003451972636390153

FIGURE 3.17 – Valeurs simulées de $C(t)$ aux premières dates du contrat

La matrice suivante présente les valeurs de $C(t)$ aux dates proches de l'échéance (de $t = 27$ à $t = 30$). Ces valeurs sont significativement plus élevées, reflétant l'augmentation du capital et la valeur croissante du contrat à mesure qu'on se rapproche de la maturité.

Show entries Search:

t=27	t=27.5	t=28	t=28.5	t=29	t=29.5	t=30
9.050748809726	228.6541808997447	289.2698751946551	381.7763789864592	387.3566060587034	391.3668180032815	500.7590372151498
19082498975817	57.90162724962165	67.63794122088541	77.22305305547903	79.2642839774467	68.4061583843353	42.26812309161664
2632218689582	89.05779449126493	94.3773506778785	104.4463564093181	105.1637164190719	102.6680335535069	91.98959752554822
3296581693346	312.5876629026855	268.0732470929139	263.9422434489612	261.4228172984897	288.7851522495278	281.802377975338
6044729619781	68.96606131024201	78.23730423872342	108.9160883487693	123.2411507308333	132.1535535863175	110.6953349918815

FIGURE 3.18 – Valeurs simulées de $C(t)$ aux dates proches de la maturité

Enfin, le graphique suivant illustre les trajectoires simulées de $C(t)$ dans leur ensemble. Il met en évidence l'effet du temps et de la dynamique stochastique sur la valeur de continuation, avec des trajectoires proches de zéro sur les premières années, puis une dispersion marquée en fin de période.

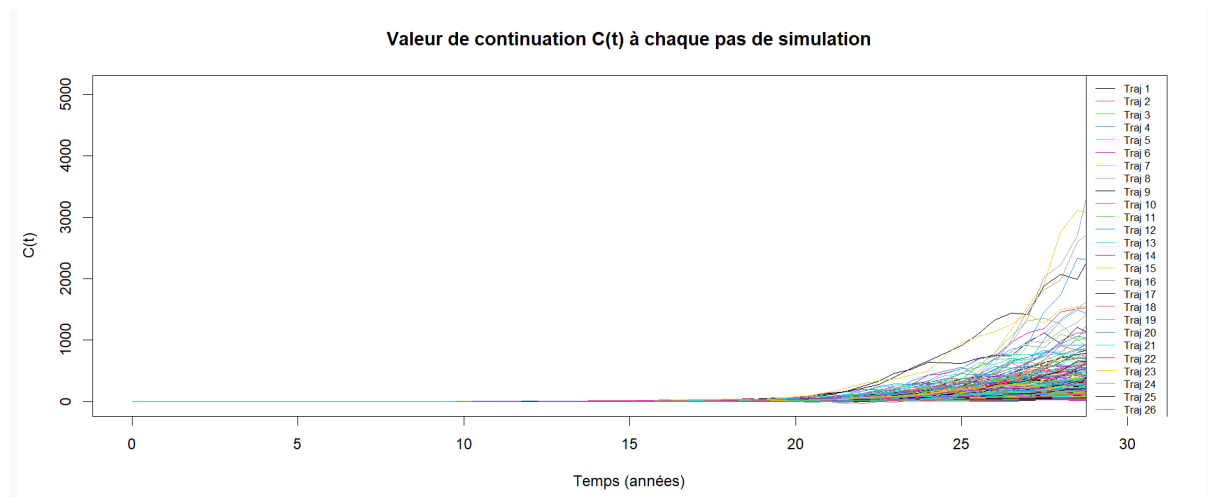


FIGURE 3.19 – Trajectoires simulées de la valeur de continuation $C(t)$

Pour chaque date t_k , la valeur $C(t_k)$ est approchée via une régression linéaire sur une base polynomiale composée des variables explicatives $A(t_k)$, $A(t_k)^2$, $P(t_k, T)$, $P(t_k, T)^2$ et $A(t_k)P(t_k, T)$. Afin d'évaluer la qualité de cette approximation, nous avons extrait les coefficients de détermination R^2 obtenus à chaque pas de temps.

Statistiques de régression pour chaque t

Show entries Search:

Statistiques de régression (R^2) pour chaque pas de temps

	time	R2
40	10	0.7747
39	10.5	0.7554
38	11	0.8622
37	11.5	0.7003
36	12	0.7771
35	12.5	0.8172
34	13	0.8418
33	13.5	0.8286
32	14	0.8315
31	14.5	0.7878

Showing 21 to 30 of 60 entries Previous 1 2 **3** 4 5 6 Next

FIGURE 3.20 – Extrait des R^2 de régression aux pas intermédiaires

Statistiques de régression pour chaque t

Show entries Search:

Statistiques de régression (R^2) pour chaque pas de temps

	time	R2
10	25	0.9685
9	25.5	0.9802
8	26	0.9792
7	26.5	0.9790
6	27	0.9704
5	27.5	0.9783
4	28	0.9798
3	28.5	0.9725
2	29	0.9819
1	29.5	0.9775

Showing 51 to 60 of 60 entries Previous 1 2 3 4 5 **6** Next

FIGURE 3.21 – Extrait des R^2 de régression aux dernières années

On constate une amélioration notable du pouvoir explicatif des régressions lorsque l'on se rapproche de la maturité. En effet, les R^2 sont sensiblement plus élevés pour les dernières dates, atteignant des niveaux supérieurs à 0,97 voire 0,98, contre des valeurs souvent inférieures à 0,80 sur les premières années. Cette observation est cohérente avec la structure du modèle : plus on approche de la date de fin, plus la valeur du flux futur est déterminée par l'état courant du système, ce qui renforce la performance des approximations par régression.

3.3.5 Exercice optimal de l'option de rachat

À ce stade, nous avons comparé, pour chaque trajectoire simulée, les valeurs de rachat $R(t_k)$ aux valeurs de continuation $C(t_k)$ à chaque instant de décision $t_k \in \{0, \Delta t, 2\Delta t, \dots, T\}$. Cette comparaison permet de déterminer le moment optimal d'exercice de l'option de rachat pour chaque trajectoire. Si, à une date donnée, la valeur de rachat excède la valeur de continuation, il devient rationnel pour l'assuré d'exercer l'option à ce moment.

Le tableau suivant présente, pour chaque trajectoire, le temps t_k d'exercice optimal ainsi que le montant actualisé correspondant.

Étape 5 – Exercice optimal de l'option de rachat

Déterminez, pour chaque trajectoire, si le rachat anticipé est optimal ou si l'assuré attend la maturité.

[Calculer les flux optimaux actualisés](#)

Show entries Search:

Dates et montants des rachats anticipés

	Trajectoire ↕	Temps ↑	Rachat ↕
169	169	24.5	656.0291
3	3	25.5	708.1137
69	69	25.5	655.5882
119	119	25.5	411.3973
153	153	25.5	1382.8949
439	439	25.5	1186.39
182	182	26	779.671
189	189	26	788.9077
192	192	26	779.4141
227	227	26	742.0248

Showing 1 to 10 of 500 entries Previous 2 3 4 5 ... 50 Next

FIGURE 3.22 – Date et montant du rachat optimal pour chaque trajectoire

L'application permet de trier dynamiquement les trajectoires par ordre croissant du temps d'exercice optimal. Cette fonctionnalité facilite l'identification des cas où le rachat intervient précocement, c'est-à-dire bien avant la maturité. Elle est particulièrement utile pour visualiser, en haut du tableau, les premières trajectoires pour lesquelles la condition $R(t_k) \geq C(t_k)$ est satisfaite dès les premières années du contrat.

Par exemple, pour la trajectoire 169, l'option de rachat est exercée à $t = 24,5$ années avec un montant actualisé de 656,03. Il s'agit du rachat le plus précoce observé sur l'ensemble des 500 trajectoires simulées, ce qui reflète une opportunité d'arbitrage relativement dans

l'horizon du contrat de 30 ans.

3.3.6 Comparaison entre les valeurs européenne et bermudienne

L'objectif de cette étape est de mesurer l'impact financier de la faculté de rachat anticipé sur la valeur du contrat. Deux types de valorisations sont calculés au temps initial $t = 0$:

- **La valeur européenne** $\widehat{V}_0^{\text{Euro}}$, calculée en supposant que le rachat n'est possible qu'à maturité. Elle est obtenue par actualisation exacte de la garantie finale à partir des trajectoires $A(T)$ et $\Theta_L(T)$.
- **La valeur bermudienne**, obtenue en tenant compte de la faculté d'exercice du rachat à des dates discrètes prédéfinies (ici semestrielles), selon l'algorithme de Longstaff-Schwartz.

Le tableau ci-dessous présente les valeurs estimées sur l'ensemble des 500 trajectoires simulées.

Étape 6 – Comparaison entre les valeurs européennes et bermudiennes

Comparez la valeur du contrat avec ou sans possibilité de rachat, et mesurez le coût implicite associé à cette option.

Calculer les valeurs

Valeurs moyennes estimées au temps 0

	Valeur.européenne ↕	Valeur.bermudienne ↕	Valeur.de.l.option.de.rachat ↕
1	190.7	444.49	253.78

Note : La valeur européenne est calculée avec actualisation exacte à partir de $A(T)$ et $\Theta(T)$.

FIGURE 3.23 – Valeurs estimées au temps initial $t = 0$

On observe que :

$$\begin{aligned}\widehat{V}_0^{\text{Euro}} &= 190,7 \\ \widehat{V}_0^{\text{Berm}} &= 444,49 \\ \text{Valeur de l'option de rachat} &= \widehat{V}_0^{\text{Berm}} - \widehat{V}_0^{\text{Euro}} = 253,78\end{aligned}$$

Ainsi, le coût implicite de l'option de rachat représente environ :

$$\frac{253,78}{444,49} \approx 57,1\% \quad \text{de la valeur totale du contrat bérmutien.}$$

Ce résultat met en évidence la contribution substantielle de la faculté de rachat à la valeur du contrat, en tant que composante optionnelle intégrée, dont la prise en compte est indispensable à une valorisation actuarielle complète et économiquement fidèle.

3.4 Conclusion

Ce chapitre a présenté de manière détaillée le développement et l'implémentation d'un outil actuariel RShiny dédié à la valorisation financière de l'option de rachat dans les contrats d'assurance vie à taux garanti. L'application, articulée en sept étapes successives, permet de reproduire l'ensemble du processus de valorisation : de la simulation stochastique des taux et des actifs à la construction des flux actualisés optimaux via l'algorithme de Longstaff-Schwartz.

Chaque module de l'application a été conçu avec des mécanismes de validation rigoureux afin d'assurer la robustesse des calculs et la fiabilité des sorties. L'interface permet également une visualisation claire et interactive des trajectoires simulées, des matrices contractuelles et des résultats économiques clés.

L'étude numérique réalisée à partir de paramètres calibrés sur des données réelles (CORRA) a permis de démontrer la pertinence pratique de l'outil. En particulier, la comparaison entre les valorisations européenne et bérmutienne a mis en lumière le poids significatif de l'option de rachat dans la valorisation du contrat, représentant près de 57% de sa valeur totale. Ces résultats soulignent l'importance d'intégrer explicitement les comportements de rachat dans les modèles de valorisation utilisés par les assureurs.

L'outil développé constitue ainsi un support opérationnel fiable pour l'analyse actuarielle de la flexibilité contractuelle, offrant à la fois une base de simulation robuste, une méthodologie rigoureuse et une interface adaptée aux besoins d'interprétation métier.

Chapitre 4

Conclusion générale

Ce mémoire a proposé une modélisation quantitative rigoureuse de l'option de rachat dans les contrats d'assurance vie à taux garanti, en assimilant ce droit contractuel à une option américaine exerçable à des dates discrètes. La résolution a été conduite à l'aide de l'algorithme de Longstaff-Schwartz, adapté au cadre de valorisation par arbitrage sous la mesure risque-neutre.

La dynamique du taux d'intérêt a été modélisée à l'aide du processus de Vasicek, dont les paramètres ont été calibrés empiriquement à partir des données historiques du taux CORRA, assurant ainsi la cohérence des simulations avec le contexte monétaire canadien.

L'ensemble de la chaîne de valorisation a été implémenté dans une application R Shiny développée spécifiquement, permettant de simuler les trajectoires de marché, d'évaluer les différents flux associés au contrat (garantie finale, rachat anticipé, valeur de continuation) et d'estimer les valeurs contractuelles par méthodes numériques.

Les résultats ont mis en évidence l'impact actuariel significatif du droit de rachat : dans l'exemple étudié, l'option de rachat représente près de 57% de la valeur bermudienne du contrat. Cette proportion atteste de l'importance économique de cette option, et justifie pleinement son intégration explicite dans tout modèle de valorisation ou de projection associé à des produits à long terme.

Plusieurs axes de développement peuvent être envisagés pour enrichir et généraliser le cadre proposé :

- **Prise en compte du risque de défaut de l'assureur.** L'introduction d'une intensité de défaut λ , modélisant la probabilité de défaillance de la contrepartie, permettrait de conditionner l'actualisation des flux à la survie financière de l'assureur. Cette extension renforcerait la pertinence du modèle dans des contextes de solvabilité incertaine.
- **Intégration du risque biométrique.** L'ajout d'un processus de mortalité, par l'intermédiaire d'une loi de survie ou d'un modèle stochastique, permettrait d'ajuster les flux futurs à la probabilité de décès de l'assuré, en particulier dans les premières années du contrat. Cela affinerait la valorisation de l'option de rachat dans une optique plus complète.

Ces prolongements permettraient d'approfondir l'analyse du risque inhérent aux contrats d'assurance vie dotés de facultés de rachat, et d'outiller l'actuaire face aux incertitudes économiques, démographiques et structurelles susceptibles d'affecter leur valorisation.

Bibliographie

- [1] Albizzati, M.-O., & Geman, H. (1994). *Interest rate risk management and valuation of the surrender option in life insurance policies*. Journal of Risk and Insurance, **61**(4), 616–637.
- [2] Andreatta, G., & Corradin, S. (2003). *Fair value of life liabilities with embedded options : An application to a portfolio of Italian insurance policies*. Working Paper.
- [3] Bacinello, A. R. (2003). *Fair valuation of a guaranteed life insurance participating contract embedding a surrender option*. Journal of Risk and Insurance, **70**(3), 461–487.
- [4] Bernard, C. (2007). *Approche financière de l'option de rachat dans un contrat d'assurance-vie à taux garanti*. Bulletin Français d'Actuariat, **7**(13), 39–66.
- [5] Boyle, P. P., & Schwartz, E. S. (1977). *Equilibrium prices of guarantees under equity-linked contracts*. Journal of Risk and Insurance, **44**, 639–660.
- [6] Brennan, M. J., & Schwartz, E. S. (1976). *The pricing of equity-linked life insurance policies with an asset value guarantee*. Journal of Financial Economics, **3**, 195–213.
- [7] Briys, E., & de Varenne, F. (1994). *Life insurance in a contingent claim framework : Pricing and regulatory implications*. The Geneva Papers on Risk and Insurance Theory, **19**, 53–72.
- [8] Carrière, J. F. (1995). *A study of first passage times for Brownian motion models in life insurance*. Insurance : Mathematics and Economics, **17**, 167–173.
- [9] Cox, J. C., Ingersoll, J. E., & Ross, S. A. (1985). *A theory of the term structure of interest rates*. Econometrica, **53**(2), 385–407.
- [10] Grosen, A., & Jørgensen, P. L. (2000). *Fair valuation of life insurance liabilities : The impact of interest rate guarantees, surrender options and bonus policies*. Insurance : Mathematics and Economics, **26**, 37–57.
- [11] Hull, J., & White, A. (1990). *Pricing interest-rate derivative securities*. The Review of Financial Studies, **3**(4), 573–592.
- [12] Jensen, B. A., Jørgensen, P. L., & Grosen, A. (2001). *A finite difference approach to the valuation of path dependent life insurance liabilities*. ASTIN Bulletin, **31**(1), 57–83.

- [13] Longstaff, F. A., & Schwartz, E. S. (2001). *Valuing American options by simulation : A simple least-squares approach*. The Review of Financial Studies, **14**(1), 113–147.
- [14] Pelsser, A. (2003). *Pricing and hedging guaranteed annuity options via static option replication*. Insurance : Mathematics and Economics, **33**(2), 283–296.
- [15] Shen, Y., & Xu, M. (2005). *Pricing life insurance with embedded options : A PDE approach*. Journal of Risk and Insurance, **72**(2), 271–296.
- [16] Simon, D. (2003). *Valuation of surrender options in participating life insurance contracts*. Working paper, Université Catholique de Louvain.
- [17] Vasicek, O. (1977). *An equilibrium characterization of the term structure*. Journal of Financial Economics, **5**(2), 177–188.
- [18] Zvan, R., Vetzal, K. R., & Forsyth, P. A. (2000). *Valuing the guaranteed minimum death benefit clause with a partial differential equation approach*. Insurance : Mathematics and Economics, **26**(2–3), 139–161.

Annexe – Implémentation algorithmique en R

Cette annexe présente les composants essentiels de l'algorithme implémenté en R Shiny pour la valorisation d'un contrat d'assurance vie à taux garanti participatif. L'objectif est d'assurer la reproductibilité du modèle et de documenter chaque étape de manière rigoureuse. Seuls les calculs mathématiquement pertinents ont été retenus.

Étape 1 – Simulation de r_t et A_t sous \mathbb{Q}

```
1 observeEvent(input$run_simulation, {
2   # Lecture et preparation des donnees
3   req(input$file_input_rates, input$file_input_assets)
4
5   df_rates <- read_excel(input$file_input_rates$datapath) %>%
6     select(date = 1, taux = 2) %>%
7     mutate(date = as.Date(date), taux = as.numeric(taux))
8
9   df_assets <- read_excel(input$file_input_assets$datapath) %>%
10    select(date = 1, A = 2) %>%
11    mutate(date = as.Date(date), A = as.numeric(A))
12
13  # Parametres de simulation
14  taux <- df_rates$taux
15  A_base <- df_assets$A
16  delta_t <- 1 / input$nsteps
17  n <- input$nsteps
18  T <- input$T
19  npaths <- input$npaths
20
21  # Parametres du modele Vasicek
22  a <- input$a
23  theta <- input$theta
24  sigma <- input$sigma
25
26  # Parametres du processus des actifs
27  rho <- input$rho
```

```

28  sigma_A <- input$sigma_A
29
30  # Initialisation des matrices
31  r_matrix <- matrix(0, nrow = n + 1, ncol = npaths)
32  A_matrix <- matrix(0, nrow = n + 1, ncol = npaths)
33
34  # Conditions initiales
35  r0 <- taux[length(taux)]
36  A0 <- A_base[length(A_base)]
37  r_matrix[1, ] <- r0
38  A_matrix[1, ] <- A0
39
40  # Simulation Monte Carlo
41  for (j in 1:npaths) {
42    # Generation des mouvements browniens correles
43    W1 <- cumsum(c(0, rnorm(n, sd = sqrt(delta_t))))
44    W2 <- rho * W1 + sqrt(1 - rho^2) *
45          cumsum(c(0, rnorm(n, sd = sqrt(delta_t))))
46
47    for (t in 1:n) {
48      # Processus de Vasicek pour les taux
49      r_matrix[t + 1, j] <- r_matrix[t, j] +
50                            a * (theta - r_matrix[t, j]) * delta_t +
51                            sigma * (W1[t + 1] - W1[t])
52
53      # Processus geometrique brownien pour les actifs
54      A_matrix[t + 1, j] <- A_matrix[t, j] *
55                            exp((r_matrix[t, j] - 0.5 * sigma_A^2) *
56                                delta_t +
57                                sigma_A * (W2[t + 1] - W2[t]))
58    }
59  }
60
61  # Stockage des resultats
62  sim_data$A <- A_matrix
63  sim_data$r <- r_matrix
64  sim_data$params$A0 <- A0
65 })

```

Étape 2 – Garantie finale $\Theta_l(T)$

```

1 observeEvent(input$runSimulation, {
2   req(sim_data$A, sim_data$params)
3

```

```

4 # Valeur des actifs a maturite
5 A_T_vect <- sim_data$A[nrow(sim_data$A), ]
6 A0 <- sim_data$params$A0
7
8 # Parametres de participation
9 alpha <- input$alpha
10 delta <- input$delta
11 r_g <- input$r_g
12 T <- input$T
13
14 # Capital garanti initial et final
15 L0 <- alpha * A0
16 Lg_T <- L0 * exp(r_g * T)
17
18 # Calcul des composantes de la garantie
19 bonus_participation <- pmax(alpha * A_T_vect - Lg_T, 0)
20 penalite_sous_perf <- pmax(Lg_T - A_T_vect, 0)
21
22 # Garantie finale avec participation aux benefices
23 theta_vect <- Lg_T + delta * bonus_participation - penalite_sous_perf
24
25 sim_data$theta_vect <- theta_vect
26 })

```

Étape 3 – Matrice $R(t)$ des flux de rachat

```

1 calculate_R_matrix <- fonction(A, N, T, A0, alpha, r_g, delta_prime,
  gamma) {
2   npaths <- ncol(A)
3   dt <- T / N
4   time <- seq(0, T, length.out = N + 1)
5   L0 <- alpha * A0
6
7   # Fonction de fiscalite progressive
8   xt_fiscal <- fonction(t) {
9     if (t <= 4) return(0.35)           # Premiere tranche
10    else if (t <= 8) return(0.15)      # Deuxieme tranche
11    else return(0.075)                 # Troisieme tranche
12  }
13
14  # Initialisation de la matrice des rachats
15  R_matrix <- matrix(0, nrow = npaths, ncol = N + 1)
16
17  # Calcul pour chaque instant et chaque trajectoire

```

```

18 for (k in 1:(N + 1)) {
19   t_i <- time[k]
20   Lg_t <- L0 * exp(r_g * t_i)      # Capital garanti actualise
21   x_t <- xt_fiscal(t_i)          # Taux de fiscalite
22
23   for (j in 1:npaths) {
24     A_ij <- A[k, j]
25
26     # Bonus de participation au rachat
27     bonus <- max(alpha * A_ij - Lg_t, 0)
28     rachat_brut <- Lg_t + delta_prime * bonus
29
30     # Valeur de rachat nette apres fiscalite
31     R_matrix[j, k] <- gamma * (L0 + (1 - x_t) * (rachat_brut - L0))
32   }
33 }
34
35 return(R_matrix)
36 }

```

Étape 4 – Valeur de continuation $C(t)$ par régression de Longstaff-Schwartz

```

1 calculate_C_matrix <- function(A, r, theta_vect, T, a, theta, sigma, v)
  {
2   N <- nrow(A) - 1
3   npaths <- ncol(A)
4   dt <- T / N
5   time <- seq(0, T, length.out = N + 1)
6
7   # Initialisation de la matrice de continuation
8   C <- matrix(0, nrow = N + 1, ncol = npaths)
9   C[N + 1, ] <- theta_vect # Condition terminale
10
11  # Recurrence backward de Longstaff-Schwartz
12  for (i in N:1) {
13    t_i <- time[i]
14
15    # Calcul de l'integrale stochastique des taux
16    integrale_r <- theta * (T - t_i) +
17                  (r[i, ] - r[N + 1, ]) / a +
18                  v / a * (sim_data$Z1[N + 1, ] - sim_data$Z1[i, ])
19
20    # Facteur d'actualisation stochastique

```

```

21   discount_factor <- exp(-integrale_r)
22
23   # Variable a expliquer : flux futurs actualises
24   Y <- C[i + 1, ] * discount_factor
25
26   # Variables explicatives pour la regression
27   A_t <- A[i, ]
28   P_tT <- price_zero_coupon(t_i, T, r[i, ], a, theta, sigma)
29
30   # Regression polynomiale multi-variables
31   modele <- lm(Y ~ A_t + I(A_t^2) + P_tT + I(P_tT^2) + I(A_t * P_tT))
32
33   # Prediction de la valeur de continuation
34   newdata <- data.frame(A_t = A_t, P_tT = P_tT)
35   C[i, ] <- predict(modele, newdata)
36 }
37
38 return(C)
39 }

```

Étape 5 – Flux optimaux actualisés

```

1 observeEvent(input$compute_flux_optimal, {
2   req(sim_data$C, sim_data$R, sim_data$r, sim_data$theta_vect)
3
4   # Recuperation des matrices calculees
5   C_mat <- sim_data$C
6   R_mat <- sim_data$R
7   r_mat <- sim_data$r
8   theta_vect <- sim_data$theta_vect
9
10  T <- input$T
11  N <- ncol(C_mat) - 1
12  time <- seq(0, T, length.out = N + 1)
13  npaths <- nrow(C_mat)
14
15  flux_discounted <- numeric(npaths)
16
17  # Determination de la strategie optimale pour chaque trajectoire
18  for (j in 1:npaths) {
19    exercised <- FALSE
20
21    # Parcours backward pour trouver l'instant d'exercice optimal
22    for (i in N:1) {

```

```

23     # Critere d'exercice : valeur immediate > valeur de continuation
24     if (R_mat[j, i] > C_mat[j, i]) {
25         t_exercice <- time[i]
26         flux_traj <- R_mat[j, i]
27
28         # Actualisation jusqu'a T avec le taux moyen
29         taux_moyen <- mean(r_mat[i:N, j])
30         discount <- exp(-taux_moyen * (T - t_exercice))
31         flux_discounted[j] <- flux_traj * discount
32
33         exercised <- TRUE
34         break
35     }
36 }
37
38 # Si pas d'exercice anticipé, flux a maturite
39 if (!exercised) {
40     flux_discounted[j] <- theta_vect[j]
41 }
42 }
43
44 sim_data$flux_optimal_discounted <- flux_discounted
45 })

```

Étape 6 – Valorisation finale au temps 0

```

1 observeEvent(input$compute_valeurs_contrats, {
2     req(sim_data$A, sim_data$Z1, sim_data$r,
3         sim_data$theta_vect, sim_data$flux_optimal_discounted)
4
5     # Valeurs finales des processus stochastiques
6     A_T_vect <- sim_data$A[nrow(sim_data$A), ]
7     r_T_vect <- sim_data$r[nrow(sim_data$r), ]
8     Z1_T_vect <- sim_data$Z1[nrow(sim_data$Z1), ]
9
10    # Parametres du modele
11    a <- input$a
12    theta <- input$theta
13    v <- input$v
14    T <- input$T
15
16    # Calcul de l'integrale stochastique des taux
17    integrale_r <- theta * T +
18        (sim_data$r[1, ] - r_T_vect) / a +

```

```

19         v / a * (Z1_T_vect - sim_data$Z1[1, ])
20
21     # Facteur d'actualisation risque-neutre
22     discount_T <- exp(-integrale_r)
23
24     # Valorisation du contrat europeen equivalent
25     valeurs_europeennes <- A_T_vect * discount_T +
26         sim_data$theta_vect * discount_T
27     valeur_europeenne_moyenne <- mean(valeurs_europeennes)
28
29     # Valorisation du contrat avec option de rachat (bermudien)
30     valeur_bermudienne <- mean(sim_data$flux_optimal_discounted)
31
32     # Prime de l'option de rachat
33     valeur_option_rachat <- valeur_bermudienne - valeur_europeenne_moyenne
34
35     # Valeur finale du contrat
36     sim_data$valeur_contrat <- valeur_bermudienne
37 }

```

Synthese de l'algorithme de valorisation

Flux principal :

1. **Simulation** : Generation des trajectoires (r_t, A_t) sous \mathbb{Q}
2. **Garantie** : Calcul de $\Theta_l(T)$ avec participation aux benefices
3. **Rachat** : Construction de la matrice $R(t)$ avec fiscalite
4. **Continuation** : Regression de Longstaff-Schwartz pour $C(t)$
5. **Optimisation** : Determination de la strategie d'exercice
6. **Valorisation** : Calcul de la valeur de marche en $t = 0$