



المندوبية السامية للتخطيط
HAUT-COMMISSARIAT AU PLAN

ROYAUME DU MAROC
*_*_*_*_*
HAUT COMMISSARIAT AU PLAN
*_*_*_*_*_*_*_*_*_*_*
INSTITUT NATIONAL
DE STATISTIQUE ET D'ECONOMIE APPLIQUEE



INSEA

Projet de Fin d'Etudes

Allocation stratégique des actifs dans le cadre du référentiel SBR.

Préparé par : *Mme ES-SABBAR Mariam*

Sous la direction de : *M. KHALIL Said (INSEA)*
M. ABOULOFAFA Marouane (Wafa assurance)

Soutenu publiquement comme exigence partielle en vue de l'obtention du

Diplôme d'Ingénieur d'Etat

Filière : Actuariat et Finance

Devant le jury composé de :

- *M. KHALIL Said (INSEA)*
- *M. MARRI Fouad (INSEA)*
- *M. ABOULOFAFA Marouane (Wafa assurance)*

Dédicace

Je dédie ce travail à mon père, pour tous ses sacrifices incommensurables qui ont façonné mon parcours. Sa détermination et son travail acharné m'ont toujours inspiré à poursuivre mes rêves, et je lui suis profondément reconnaissant pour tout ce qu'il a fait pour notre famille.

À ma mère, pour son amour inconditionnel et sa patience sans limite. Elle a été mon refuge, m'encourageant et me soutenant dans les moments difficiles. Son sourire et ses paroles réconfortantes m'ont toujours motivé tout au long de mon parcours.

À mes frères, pour leur camaraderie et leur soutien inestimable. Votre présence constante, vos encouragements et les moments partagés ont enrichi ma vie et m'ont donné la force de persévérer.

Enfin, à mes amis, pour leur complicité et leur soutien inconditionnel. Vos encouragements et les moments de joie partagés ont rendu cette aventure inoubliable. Merci d'avoir été là pour célébrer mes succès et m'épauler dans les moments de doute.

Avec toute ma reconnaissance,

Remerciement

Ce travail de recherche et de stage n'aurait pas pu être mené à bien sans le soutien et l'accompagnement précieux de plusieurs personnes, à qui je tiens à exprimer toute ma gratitude.

Je souhaite exprimer ma sincère gratitude à M. Said Khalil, mon encadrant à l'INSEA, pour sa disponibilité et ses précieux conseils tout au long de ce travail. Son soutien constant m'a permis de progresser dans mes recherches et d'affiner mes compétences.

Je remercie également M. Marouane Aboulouafa, mon encadrant chez Wafa Assurance, pour son accueil chaleureux et ses orientations qui ont enrichi mon expérience professionnelle. Son expertise et ses conseils pratiques ont été d'une grande aide durant mon stage.

Un grand merci à Siham Khalil et Zineb chalaouane pour leur bienveillance et leur assistance précieuse au sein de l'équipe Actuariat chez Wafa Assurance. Leur soutien a été essentiel pour m'aider à m'intégrer et à progresser dans mon stage.

Enfin, je tiens à remercier M. Fouad Marri pour l'honneur qu'il m'a fait en acceptant d'évaluer mon travail. Sa présence en tant qu'évaluateur représente une reconnaissance importante pour moi.

Merci à tous pour votre soutien et votre encouragement.

Résumé

Le projet Solvabilité Basée sur les Risques (SBR) a été initié, au Maroc, afin de définir un nouveau cadre réglementaire adapté au monde économique actuel et aux profils de risque des compagnies d'assurance et protéger les assureurs ainsi que les assurés. En effet, la SBR prend une part importante dans le travail des actuaires, notamment au niveau des exigences quantitatives que constitue son premier pilier.

Dans ce sens. Nous étudions la mesure de risque SCR marché, calculée selon la formule standard, et identifions une problématique liée à l'allocation stratégique d'actif qui prend en compte le coût en capital induit par la SBR et ce dans le cadre des modèles mono-périodiques issus de la théorie moderne du portefeuille.

Mots-clés : allocation stratégique d'actifs, assurance vie, Markowitz, Sharpe et Tint, Solvabilité basée sur les risques (SBR), SCR marché.

Abstract

The Risk-Based Solvency (“Solvabilité Basée sur les Risques” (SBR)) project was initiated in Morocco to establish a new regulatory framework suited to the current economic landscape and the risk profiles of insurance companies, protecting both insurers and policyholders. Indeed, SBR plays a significant role in the work of actuaries, particularly regarding the quantitative requirements that constitute its first pillar.

In this context, we study the market SCR risk measure, calculated according to the standard formula, and identify an issue related to strategic asset allocation that takes into account the capital cost induced by SBR, within the framework of single-period models derived from modern portfolio theory.

Keywords : strategic asset allocation, life insurance, Markowitz, Sharpe and Tint, Risk-Based Solvency (SBR), Solvency Capital Requirement (SCR) for market risk.

Table des figures

5.1	Les trois piliers de la SBR	15
6.1	Les risques retenus pour le calcul du SCR	16
6.2	Matrice de corrélation des risques	17
7.1	Matrice de corrélation entre les sous risque de marché	17
7.2	Chocs réglementaires sur la courbe des taux	19
7.3	Chocs réglementaires sur les actions	19
1.1	Frontière efficiente en présence et en absence d'actif sans risque	28
1.1	Portefeuille de placement au 31/12/2023	37
1.2	Évolution du cours MASI	40
1.3	Évolution du rendement annuel MASI	40
1.4	Test de normalité des rendements MASI	41
1.5	QQ-Plot des rendements MASI	41
1.6	1000 simulations de l'indice MASI pour $S(0)= 12092.88$	42
1.7	L'évolution du rendement annuel de l'indice MASI	43
1.8	Évolution du cours de l'immobilier	44
1.9	Évolution du rendement annuel du cours de l'immobilier	44
1.10	Test de normalité des rendements	44
1.11	QQ-Plot des rendements du cours de l'immobilier	44
1.12	1000 simulations de l'indice IPAI pour $S(0)= 103.37239$	45
1.13	Evolution du rendement annuel de l'indice IPAI	46
1.14	Les transactions sur les bons de trésor au 29/12/2023. Source : https://www.bkam.ma/	47
1.15	Taux actuariels	47
1.16	Courbe des taux zero-coupons extrapolée par SW	51
1.17	Courbe des taux « choquée »	52
2.1	sommes de réserves finales en MAD pour chaque catégorie de contrat de notre portefeuille a la date du 31 décembre 2023	55
2.2	Indicateur d'épargne.	58

TABLE DES FIGURES

2.3	Indicateur d'éducation.	58
2.4	Indicateur de retraite.	59
2.5	Évolution des engagements de l'assureur à partir de 2023 sur 10 années . .	61
1.1	Correlation entre passif et les actifs	64
4.1	intabilité du portefeuille par type de perturbation	69
5.1	Portefeuille efficient rééchantillonné vs original	72
5.2	Composition des portefeuilles efficients rééchantionnées vs originaux	73
5.3	Niveau d'instabilité du portefeuille rééchantionné vs original pour $k=20$. .	74

Table des matières

1	Contexte et cadre réglementaire	9
1	La gestion du portefeuille en assurance vie	10
2	L'allocation d'actifs des assureurs vie	11
3	Les modèles ALM classiques en assurance	11
4	Vers un nouveau référentiel : SBR	13
5	Piliers de la SBR	14
6	Capital de solvabilité requis	14
7	Focus sur le risque de marché	17
2	Théorie moderne du portefeuille appliquée à l'assurance vie	23
1	Modèle de Markowitz	24
2	Limite du modèle de Markowitz	29
3	Optimisation de l'allocation des actifs sous contrainte de SCR marché	30
4	Prise en compte du passif : Le modèle de Sharpe et Tint	31
3	Hypothèses sur l'actif et projection du passif	36
1	Hypothèses sur les rendements des actifs	37
2	Projection des engagements d'assureur	54
4	Application du modèle aux données de Wafa assurance	62
1	Calcul des paramètres de Sharpe et Tint	63
2	Analyse des résultats des portefeuilles optimaux	65
3	Portefeuille optimal avec contraintes combinées	66
4	Sensibilité du modèle aux perturbations des inputs	68
5	Optimisation robuste face aux erreurs d'estimation des paramètres	71

Annexe A78

Introduction générale

En raison des insuffisances de la Solvabilité I, notamment son incapacité à prendre en compte les risques inhérents à l'activité d'assurance (où le besoin de solvabilité est déterminé en pourcentage des provisions mathématiques), le Maroc s'apprête à adopter la nouvelle réforme SBR. Cette réforme, inspirée de Solvabilité II européenne, permettra une évaluation plus précise de la solvabilité des assureurs. Elle introduit des normes harmonisées qui renforcent la gestion des risques et ajustent les exigences de fonds propres en fonction du profil de risque spécifique de chaque assureur.

Cette réforme n'est pas sans conséquence sur l'investissement des assureurs puisqu'ils sont désormais amenés à disposer d'un certain montant de fonds propres pour chaque actif en portefeuille. Ce niveau de capital requis est censé leur permettre de faire face aux pertes extrêmes potentielles à horizon un an avec 99,5% de chance que ce montant ne soit pas dépassé. Certains assureurs ont mis en place des modèles internes leurs permettant d'évaluer ce montant de fonds propres en tenant compte de la spécificité de leurs activités. D'autres, plus modestes, ont été amenés à adopter une approche plus standard à partir de formules définies par la réglementation. Notre mémoire s'intéresse à ce dernier cas.

L'investissement des assureurs est directement lié à cette réglementation car il prévoit un niveau de capital requis associé aux risques de pertes extrêmes résultant de l'évolution des prix sur les marchés financiers. Dès lors, le processus de gestion de portefeuille des assureurs doit être adapté à ce montant de capital requis.

Or, la quête de générer des rendements supplémentaires incite souvent les investisseurs à opter pour des catégories d'actifs plus risquées, qui entraînent une augmentation du SCR marché. Notre problématique est donc de mettre en évidence les impacts de la réglementation SBR sur la composition optimale du portefeuille des assureurs.

Chapitre 1

Contexte et cadre réglementaire

Contents

1	La gestion du portefeuille en assurance vie	10
2	L'allocation d'actifs des assureurs vie	11
3	Les modèles ALM classiques en assurance	11
3.1	Modèle d'adossement et d'immunisation	12
3.2	Modèle dynamique : déterministe ou stochastique	12
4	Vers un nouveau référentiel : SBR	13
5	Piliers de la SBR	14
6	Capital de solvabilité requis	14
7	Focus sur le risque de marché	17
7.1	Risque taux	18
7.2	Risque Action	19
7.3	Risque immobilier	20
7.4	Risque spread	20

Ce premier chapitre a pour objectif de présenter les objectifs de la gestion de portefeuille en assurance, le processus généralement suivi par les assureurs, ainsi qu'un rappel des modèles ALM couramment utilisés. Enfin, nous aborderons le capital réglementaire nécessaire pour couvrir le risque de marché dans le cadre de la directive Solvabilité basée sur les risques.

1 La gestion du portefeuille en assurance vie

Le secteur de l'assurance se caractérise essentiellement par **l'inversion du cycle de production** : les assureurs reçoivent les primes avant d'avoir à payer les prestations. Durant cet intervalle, ils investissent ces fonds pour en tirer un rendement. Toutefois, les assureurs n'investissent pas leur propre capital, mais agissent pour le compte des souscripteurs, ce qui rend la gestion d'actifs strictement encadrée par la réglementation de l'État.

Les assureurs, en plus de sécuriser les capitaux qui leurs sont confiés, ont pour objectif en général de fournir **un rendement minimum garanti** et **une participation aux bénéfices** financiers versée aux souscripteurs de contrat. La gestion d'actifs doit donc répondre à des impératifs de sécurité, de rendement et de liquidité.

Les actionnaires, en tant qu'investisseurs de capitaux, affrontent les risques de solvabilité des sociétés d'assurance et attendent une prime, souvent sous forme de dividendes, pour compenser ces risques. L'État joue un rôle crucial en imposant des contraintes réglementaires que les assureurs doivent respecter, notamment à travers la réglementation Solvabilité basée sur les risques, qui introduit le capital réglementaire requis, influençant ainsi les décisions d'investissement.

Un des principaux défis pour les investisseurs institutionnels en gestion d'actifs est de concilier l'horizon d'investissement avec l'incertitude des flux. En raison de la structure de leurs passifs, ils doivent gérer des actifs sur le long terme tout en atteignant un niveau de performance annuelle minimal.

2 L'allocation d'actifs des assureurs vie

L'allocation d'actifs est définie comme le processus qui vise à déterminer la répartition optimale des placements entre les différentes catégories d'actifs (actions, obligations, immobiliers, monétaire, etc. . .) dans le portefeuille. Ce processus est effectué en fonction de l'horizon d'investissement, des différentes contraintes et de la tolérance au risque de l'investisseur. Un portefeuille est dit "optimal" lorsqu'il maximise le rapport rendement-risque tout en respectant les contraintes définies par l'investisseur, avec différentes manières de mesurer le risque.

Le choix de l'horizon d'investissement influence fortement la gestion d'actifs. Merton (1970) a montré que le portefeuille optimal varie selon cet horizon, car les fluctuations des rendements des classes d'actifs poussent les investisseurs à se protéger contre les pertes à court et moyen terme. Le modèle mono-périodique de Markowitz (1952) se limite aux risques entre l'investissement et l'horizon de placement, mais dans la pratique, les rendements des actifs varient, rendant ce modèle moins applicable.

Les investisseurs à long terme adoptent une approche en deux étapes : l'allocation stratégique et l'allocation tactique. **L'allocation stratégique** fixe les poids des classes d'actifs sur la base d'anticipations de rendements à long terme, tandis que **l'allocation tactique** permet d'ajuster ces poids en fonction des conditions du marché. L'allocation stratégique est essentielle, représentant jusqu'à 91,5 % du succès des investissements à long terme, selon Brinson et al. (1991). Pour évaluer l'impact de SBR sur la gestion d'actifs des assureurs, il est donc crucial de se concentrer sur cette allocation stratégique.

La section suivante du rapport abordera les méthodes ALM utilisées par les assureurs pour établir leur allocation stratégique.

3 Les modèles ALM classiques en assurance

Dans la littérature, les modèles ALM utilisés par les assureurs se divisent en trois catégories :

- Les modèles statiques d'adossement et d'immunisation par la duration ;
- Les modèles statiques basés sur la notion de surplus ;

— Les modèles dynamiques, qu'ils soient déterministes ou stochastiques.

L'étude menée dans notre rapport se concentrera uniquement sur les modèles statiques de type Markowitz, basés sur la notion de surplus. Néanmoins, nous présenterons brièvement dans cette section les autres méthodes couramment employées en assurance.

3.1 Modèle d'adossement et d'immunisation

Le modèle d'adossement consiste à investir dans des actifs, souvent des obligations zéro-coupon, afin de générer des flux qui correspondent exactement, en échéance et en valeur, aux obligations de l'assureur. Lorsque les flux entrants couvrent parfaitement les flux sortants, l'actif est considéré comme adossé au passif. Toutefois, ce modèle présente des limites : il n'est valable qu'à court terme, car les échéanciers de passif évoluent avec le temps en fonction des nouvelles souscriptions et des sorties, telles que les décès ou départs en retraite. Il nécessite donc un réajustement régulier de l'allocation d'actifs. De plus, une sous-estimation des obligations futures, comme la mortalité, peut entraîner des pertes si les flux d'actifs ne suffisent pas à couvrir les prestations.

Le modèle d'immunisation, quant à lui, vise à construire un portefeuille d'actifs dont les variations, en cas de déplacement parallèle de la courbe des taux d'intérêt, seront égales à celles des passifs. Pour y parvenir, les valeurs actuelles et les durations de l'actif et du passif doivent être égales, et la convexité de l'actif doit être supérieure à celle du passif. Cependant, ce modèle se heurte à plusieurs difficultés : les déplacements de la courbe des taux ne sont pas toujours parallèles, et la mesure de la durée de passifs complexes, comme ceux comportant des options de rachat, dépend fortement des taux de marché. En pratique, les durations des actifs et passifs varient constamment avec le temps et les taux d'intérêt, nécessitant ainsi des ajustements réguliers du portefeuille pour maintenir l'immunisation.

Afin d'intégrer les nouvelles souscriptions dans la modélisation, différents modèles dynamiques ont été conçus par les assureurs.

3.2 Modèle dynamique : déterministe ou stochastique

Les modèles dynamiques en gestion actif-passif (ALM) permettent de projeter l'évolution des actifs et des passifs d'un assureur en fonction de différentes hypothèses.

Leur objectif est de vérifier que la stratégie d'allocation d'actifs, les cotisations, et le taux de couverture des passifs sont suffisants pour garantir la solvabilité de l'assureur ainsi que sa capacité à couvrir les prestations futures. Pour cela, il est nécessaire de formuler des hypothèses sur l'évolution des actifs et des passifs, comme la croissance des rentes, la mortalité, les nouvelles souscriptions, et les rendements attendus des classes d'actifs.

Les modèles déterministes offrent l'avantage de fournir des indicateurs clés pour la prise de décision, tels que le ratio de couverture ou le niveau de solvabilité. Toutefois, leur principale limite réside dans leur rigidité : ils ne permettent de modifier qu'une hypothèse à la fois, ce qui complique les analyses d'impact. Par conséquent, ils ne permettent pas de prendre en compte simultanément plusieurs facteurs qui pourraient influencer les résultats.

Pour dépasser cette limite, des modèles dynamiques stochastiques ont été développés. Ces modèles s'appuient sur des générateurs de scénarios économiques pour simuler différentes évolutions possibles de l'inflation, des taux d'intérêt, des rendements financiers des actifs, ainsi que des scénarios d'évolution des passifs. Grâce à cette approche, il est possible d'analyser simultanément plusieurs hypothèses et de mieux appréhender l'incertitude. Cependant, ces modèles sont plus complexes à implémenter et exigent des outils mathématiques sophistiqués, ce qui allonge considérablement les temps de calcul.

4 Vers un nouveau référentiel : SBR

En avril 2017, l'ACAPS a annoncé le projet de circulaire "Solvabilité Basée sur les Risques" (SBR), influencée par la directive Solvabilité II et alignée sur les principes de l'association internationale des superviseurs d'assurance (IAIS). Ce nouveau référentiel réglementaire vise à mieux adapter le cadre marocain aux risques auxquels les assureurs sont exposés, avec un objectif central : protéger les assurés et garantir la stabilité financière des entreprises d'assurance.

La SBR a été introduite pour combler les lacunes du cadre prudentiel actuel (solvabilité I) et rapprocher le Maroc des normes européennes en matière de régulation et de supervision. L'approche adoptée repose sur trois principes clés :

- Un dialogue constant avec les sociétés d'assurance.
- Une mise en œuvre flexible et progressive des nouvelles règles.

- Le principe de proportionnalité, ajustant les exigences en fonction de la complexité des risques propres à chaque compagnie.

Cette nouvelle réglementation vise à renforcer la fiabilité du marché assurantiel tout en préservant la santé financière des entreprises.

5 Piliers de la SBR

La SBR s'articule ainsi autour de trois piliers. Le premier englobe toutes les exigences quantitatives, le deuxième fixe les normes qualitatives et le troisième décrit l'ensemble des critères en matière de communication et d'information :

- **Premier pilier quantitatif** : La surveillance prudentielle, à travers le pilier 1, permet au régulateur d'évaluer le niveau de solvabilité de l'assureur et sa capacité à résister aux chocs. Ce pilier sera le focus de notre rapport.
- **Deuxième pilier** : Ce pilier étoffe le dispositif actuel concernant le processus de suivi des risques des compagnies, la gouvernance et la partie audit interne dont l'objectif est d'établir une gouvernance globale appropriée et d'inciter les entreprises à identifier leur exposition face aux différents types de risque et à connaître leur capacité à les gérer.
- **Troisième pilier** : Le principe de ce troisième pilier est d'obliger les compagnies d'assurance à communiquer de façon transparente et périodique des informations précises et détaillées sur leurs activités et leur situation solvable avec l'Autorité de contrôle et avec le public. Ceci se réalise à travers la publication des états prudentiels et statistiques ainsi que des rapports narratifs.

6 Capital de solvabilité requis

Le capital de solvabilité requis (SCR) représente le niveau minimum de capital que l'assureur doit détenir pour faire face à ses engagements. En effet, il mesure la perte inattendue à supporter dans le cas d'un scénario de stress. Le SCR fournit à la fois le niveau de capital nécessaire pour absorber les pertes et une marge de risque pour limiter le risque sur une période donnée.

Bien entendu, le SCR doit être supérieur au niveau de fonds propres, qui doivent

6. CAPITAL DE SOLVABILITÉ REQUIS

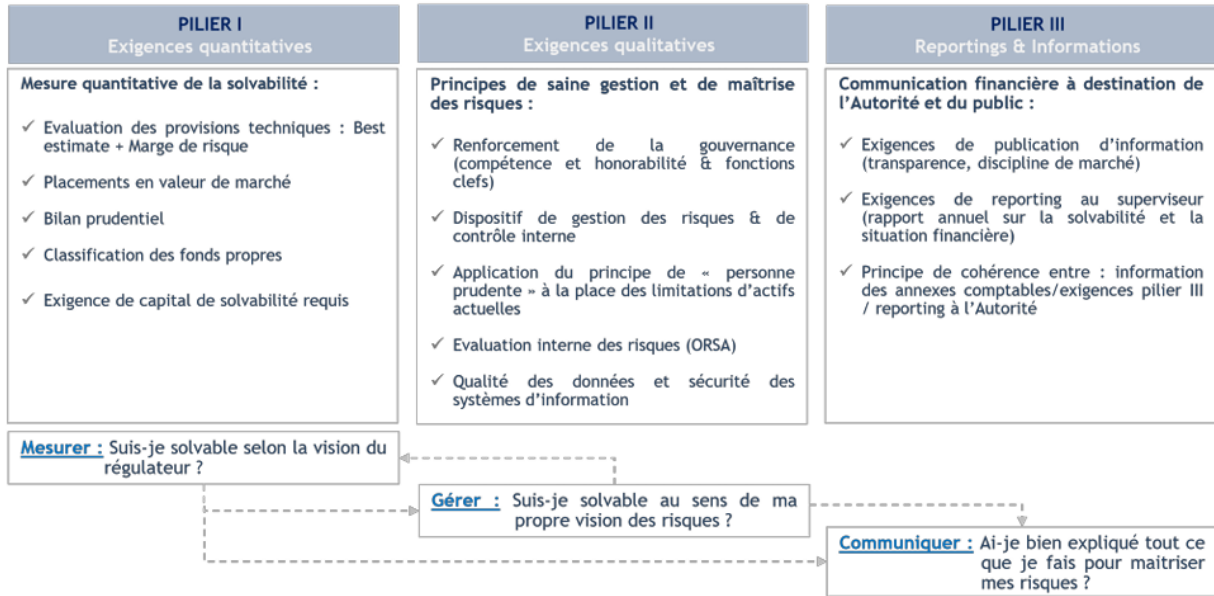


FIGURE 5.1 – Les trois piliers de la SBR

représenter 70% du SCR, et doit ainsi tenir compte de tous les risques. C'est dans cette perspective que vient la SBR pour remplacer le cadre réglementaire actuel qui ne prend en considération que le risque de souscription.

Le calcul du **Capital de Solvabilité Requis (SCR)** intègre les divers risques susceptibles d'affecter une compagnie d'assurance ou de réassurance. Il définit comme la somme des exigences de capital pour chaque type de risque :

- Risque de marché : Ce risque concerne les pertes potentielles ou les changements défavorables de la situation financière résultant de fluctuations affectant la valeur des actifs ou des passifs.
- Risque de contrepartie : Provenant du non-paiement par une contrepartie ou de la détérioration de sa solvabilité.
- Risque de concentration : Ce risque se rapporte aux pertes de fonds propres qui pourraient survenir à cause de la dévalorisation d'actifs liés à un groupe d'émetteurs concentrés, calculé à l'aide d'un coefficient basé sur des seuils de concentration spécifiques.
- Risques de souscription en assurance vie : Associés aux pertes potentielles ou aux changements défavorables de la situation financière dues à des prévisions inadéquates concernant les sinistres, la tarification et les provisions. Ces exigences incluent les risques liés à la mortalité, à la longévité, aux rachats, aux frais de

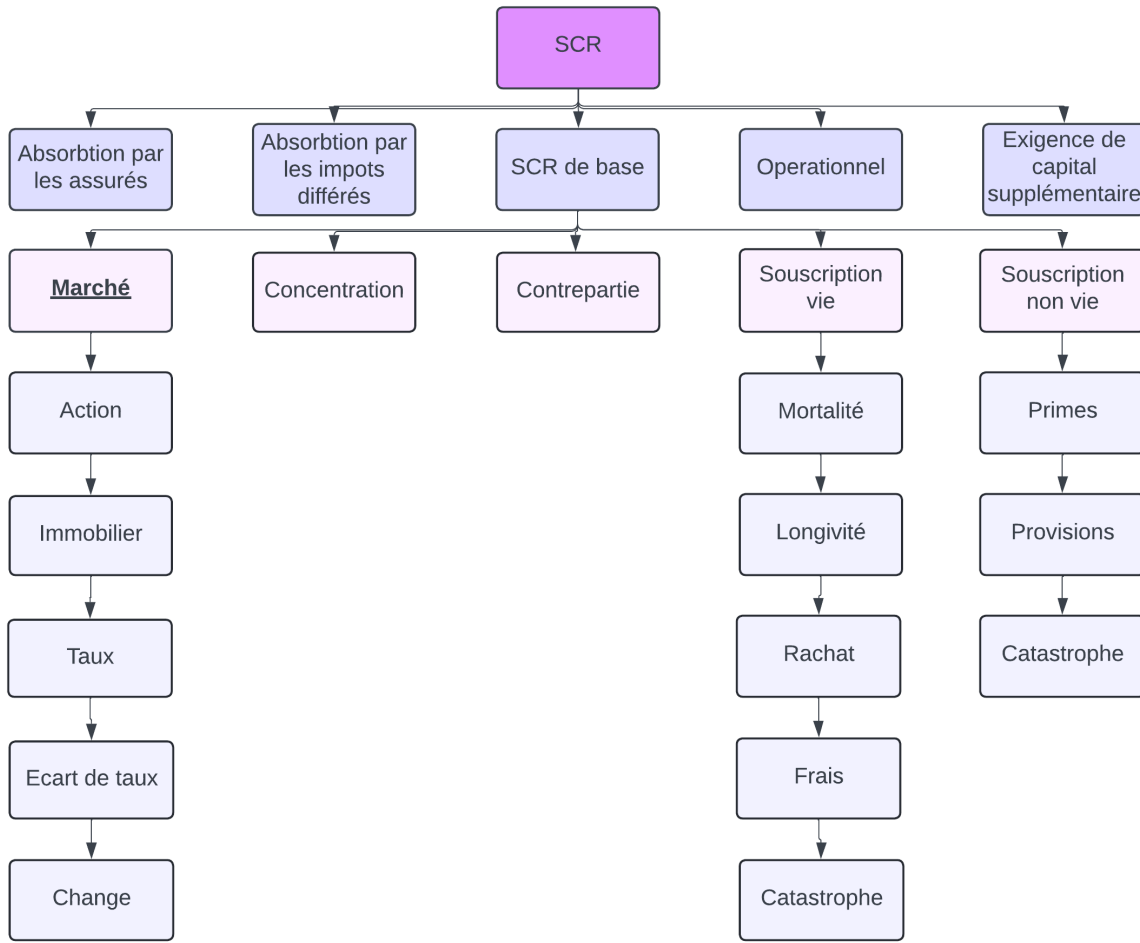


FIGURE 6.1 – Les risques retenus pour le calcul du SCR

gestion et aux catastrophes.

- Risques de souscription en assurance non-vie : Calculés en fonction des risques liés aux primes, aux provisions et aux catastrophes.
- Risque opérationnel : Découlant de défaillances ou de lacunes dans les procédures internes, les compétences du personnel, ou les systèmes. Ce risque est quantifié comme un pourcentage des primes émises durant l'exercice considéré.

$$BSCR = \sqrt{\sum_{i,j} Corr_{i,j} \cdot SCR_i \cdot SCR_j}$$

Coefficient de corrélation	Marché	Concentration	Contrepartie	Souscription en vie	Souscription en non-vie
Marché	100%	0%	25%	25%	25%
Concentration	0%	100%	0%	0%	0%
Contrepartie	25%	0%	100%	25%	25%
Souscription en vie	25%	0%	25%	100%	0%
Souscription en non-vie	25%	0%	25%	0%	100%

FIGURE 6.2 – Matrice de corrélation des risques

7 Focus sur le risque de marché

Dans cette partie, nous détaillons la méthodologie adoptée par l'ACAPS pour le calcul de la SCR marché. La directive SBR définit la SCR marché comme étant le risque de perte lié aux fluctuations de la valeur de marché des différents placements constituant le portefeuille.

Comme illustré précédemment dans la figure 2, le SCR marché est subdivisé en plusieurs sous-modules de risque suivants :

- les actions sont soumises au module « *action* » ;
- les actifs immobiliers sont soumis au module « *immobilier* » ;
- les obligations sont soumises aux modules « *spread* » et « *taux* » ;
- le monétaire est soumis au module « *change* ».

Ces modules de risque seront agrégés par la matrice de corrélation établie par l'ACAPS :

Coefficient de corrélation	Action	Immobilier	Taux	Ecart de taux	Change
Action	100%	25%	25%	25%	25%
Immobilier	25%	100%	25%	0%	25%
Taux	25%	25%	100%	0%	25%
Ecart de taux	25%	0%	0%	100%	25%
Change	25%	25%	25%	25%	100%

FIGURE 7.1 – Matrice de corrélation entre les sous risques de marché

La détermination du montant de SCR défini par la directive se fait par une approche par choc. Le montant de l'exigence de capital pour un actif est équivalent à la perte de fonds propres de base au bilan économique en cas de choc brutal sur cette catégorie d'actif.

Pour chaque type de risque qui compose le SCR marché, un besoin en capital est calculé à partir de scénarios qui viennent choquer une classe d'actifs particulière.

7.1 Risque taux

Ce risque s'applique à tous les actifs et passifs dont la net asset value est sensible à des changements sur la structure des taux,

Le besoin en capital pour le module Taux se divise en deux parties ¹ :

$$SCR_{Up} = \Delta NAV_{up}$$

et

$$SCR_{Down} = \Delta NAV_{down}$$

Avec ΔNAV_{up} et ΔNAV_{down} les variations de net asset value causées par **un stress instantané à la hausse ou à la baisse des courbes de taux**.

Les courbes de taux stressées sont obtenues en multipliant la courbe de taux initiale par $(1 + r_{up})$ ou $(1 + r_{down})$ avec $r_{up}(t)$ et $r_{down}(t)$ le montant des chocs à appliquer en fonction de la maturité t .

Le besoin en capital pour le module de Taux est associé au choc qui aboutit au besoin en capital le plus élevé ² pour le risque Taux en incluant la capacité d'absorption des pertes des provisions techniques, c'est à dire :

$$SCR_{R_{taux}} = \max(SCR_{Up}, SCR_{Down}) - BE$$

1. Vue la fluctuation des taux d'intérêt, cela peut apparaître nocif dans les deux sens. Parce que leur rendement est inférieur au rendement des nouvelles obligations, une augmentation des taux d'intérêt entraîne une baisse de la valeur des obligations existantes dans le portefeuille. Cependant, lorsque les titres à taux fixes doivent être réinvestis, une baisse des taux d'intérêt se traduit par une perte de rendement réelle par rapport à la performance des nouveaux entrants.

2. Correspond au scénario le plus désavantageux

Maturités	Choc à la hausse	Choc à la baisse
1	28%	-34%
2	30%	-37%
3	31%	-38%
4	31%	-39%
5	32%	-39%
6	32%	-39%
7	32%	-39%
8	31%	-39%
9	30%	-39%
10	29%	-39%
11	29%	-39%
12	28%	-39%
13	28%	-39%
14	28%	-38%
15	28%	-37%
16	27%	-37%
17	27%	-36%
18	26%	-36%
19	26%	-36%
>=20	25%	-36%

FIGURE 7.2 – Chocs réglementaires sur la courbe des taux

7.2 Risque Action

L'exigence de capital relative au sous-risque action correspond à la perte de fonds propres résultant des baisses simultanées des valeurs des actions selon les catégories suivantes :

- Actions cotées (à long terme) ;
- Actions cotées (autres) ;
- Actions non cotées (à long terme) ;
- Actions non cotées (autres) ;
- Actions de sociétés d'infrastructures ou part de fonds d'infrastructure.

Action	choc
Actions cotées (à long terme)	20%
Actions non cotées (à long terme)	25%
Actions non cotées (autres)	30%
Actions cotées (autres)	38%
Actions de sociétés d'infrastructures ou part de fonds	20%

FIGURE 7.3 – Chocs réglementaires sur les actions

La base de données utilisée pour le calibrage de ces chocs du sous-risque action comprend les rendements relatifs glissants de l'indice MASI avec une profondeur de 16 ans. L'application d'un choc se fait simplement pour chaque catégorie d'action selon la formule suivante :

$$SCR_{action_i} = Choc \cdot \omega_i \cdot VM_{action}$$

où

- VM est le montant à investir en actions ;
- ω_i est le poids de chaque catégorie d'action dans la poche action.

7.3 Risque immobilier

L'exigence de capital relative au sous-risque immobilier correspond à la perte des fonds propres qui résulterait d'une baisse soudaine de la valeur des actifs immobiliers.

le capital à détenir au regard de ce risque est égal au choc défini par la SBR. Ce choc a été calibré en se basant sur le calcul de la Value-at-Risk paramétrique à 99,5% des rendements annuels glissants de l'indice des prix des actifs immobiliers (IPAI) de la ville de Casablanca. C'est un choc de 15% qui a été retenu. L'exigence de capital se calcule donc de la manière suivante :

$$SCR_{imm} = 25\% \cdot \omega_i \cdot VM$$

où

- VM est le montant à investir sur les marchés financiers ;
- ω_i est le poids des actifs immobiliers.

7.4 Risque spread

Le SCR Spread permet de bénéficier d'un capital réglementaire permettant de faire face aux variations de valeur du portefeuille en cas de mouvements sur les spreads de taux associés aux émetteurs. Le spread est l'écart entre le taux actuariel d'un produit à taux fixe de taux et le taux sans risque.

7. FOCUS SUR LE RISQUE DE MARCHÉ

Le calcul du SCR_{spread} s'aide de la somme de trois termes distincts :

$$SCR_{\text{spread}} = SCR_{\text{bonds}} + SCR_{\text{titrisation}} + SCR_{\text{crédit dérivé}}$$

où :

- SCR_{bonds} : le risque contenu dans les obligations et les prêts.
- $SCR_{\text{titrisation}}$: concerne les titres issus de la titrisation.
- $SCR_{\text{crédit dérivé}}$: les produits dérivés de crédit (Credit Default Swap par exemple).

SCR Spread pour les obligations

L'idée est d'utiliser un choc forfaitaire et d'attribuer le choc en fonction de la notation du titre (qualité de crédit) et sa durée. Cette attribution se fait en utilisant une interpolation linéaire, en associant chaque tranche de 5 ans de durée à une fonction affine de cette même durée. Le tableau ci-dessous présente les valeurs réglementaires du SCR Spread (en pourcentage de valeur marchée) associées aux obligations d'entreprises et aux créances non-immobilières. En fonction de la durée de l'obligation et du notation.

Dur min	Dur max	<50		100		150		200	
		a1	b1	a1	b1	a1	b1	a1	b1
0	5	0.0%	1.1%	0.0%	1.4%	0.0%	2.5%	0.0%	4.5%
5	10	5.5%	0.6%	7.0%	1%	12.5%	2.5%	22.5%	3.7%
10	999	8.5%	0.5%	10.5%	0.5%	20%	1%	35%	2%

TABLE 7.7 – Chocs spread selon la primes de risque et la duration

La formule pour le *choc spread* est donnée par :

$$\text{Choc spread} = a_1 + b_1 \times (\text{dur} - \text{dur_min})$$

Avec :

Prime de risque	< 50	100	150	200	250	> 250
Notation Moody's	AAA	AA	A	BBB	BB	< BB

TABLE 7.8 – Primes de risque selon la notation de l'obligation

Ce chapitre a présenté le cadre réglementaire de cette étude. La directive SBR impose une analyse approfondie des risques pour les compagnies d'assurance. notamment le module SCR marché qui évalue les risques d'un portefeuille d'actifs pour calculer les capitaux réglementaires requis. Le prochain chapitre se dressera à la théorie moderne des portefeuilles et aux différentes modifications permettant d'aboutir au modèle d'optimisation sous contrainte de SCR marché. En particulier, les limites des modèles seront expliquées et les différentes solutions utilisées pour leur mise en pratique seront détaillées.

Chapitre 2

Théorie moderne du portefeuille appliquée à l'assurance vie

Contents

1	Modèle de Markowitz	24
2	Limite du modèle de Markowitz	29
3	Optimisation de l'allocation des actifs sous contrainte de SCR marché	30
4	Prise en compte du passif : Le modèle de Sharpe et Tint	31
4.1	Présentation du modèle	31
4.2	Sharpe-Tint et SCR marché comme mesure de risque :	34
4.3	Limites du modèle d'allocation sous contrainte de SCR marché	35

Harry Markowitz¹ a réalisé les premiers travaux de théorie moderne du portefeuille (1952, 1959). Ces recherches reposent sur la théorie de la sélection optimale de portefeuille en établissant un équilibre entre les rendements attendus des actifs et leurs risques mesurés par leurs fluctuations. La méthode repose sur l'idée de variété des risques.

Il s'agit de sélectionner les alliances d'actifs qui permettent de diminuer le risque global du portefeuille. Selon Sharpe et Tint (1990), les investisseurs institutionnels ont exprimé leur hésitation à inclure clairement leur passif dans l'élaboration de leur allocation d'actifs. Effectivement, étant donné qu'ils n'étaient pas prêts à se défaire du modèle de Markowitz à l'époque, Sharpe et Tint ont élargi ce modèle pour s'adapter aux besoins d'un investisseur de se protéger contre les variations de son passif.

Avant d'aborder l'étude sur l'allocation d'actifs propres au secteur de l'assurance vie, qui s'inspirent du cadre établi par la théorie moderne du portefeuille, il est primordial de présenter le modèle de Markowitz. Celui-ci représente la base sur laquelle repose de nombreux modèles d'allocation d'actif. Dans la prochaine partie, nous exposerons en détail les modifications de ce modèle traditionnel pour répondre aux particularités de l'assurance vie, telles que la gestion simultanée des actifs et des passifs. Cela donnera une meilleure compréhension de la manière dont les principes du modèle de Markowitz sont mis en œuvre et ajustés afin de prendre en considération les exigences spécifiques de la gestion des portefeuilles concernant l'assurance.

1 Modèle de Markowitz

Le modèle de Markowitz a été développé en 1952 et il a constitué le fondement de **la théorie moderne de portefeuille**. Markowitz a été le premier qui a distingué le risque du rendement et a donné des mesures : espérance et variance. Son approche « moyenne-variance » consiste à optimiser les poids des actifs du portefeuille en fonction de leurs rendements espérés, leurs variances et leurs covariances. Une fois les rendements, les variances et les covariances sont estimés, l'approche consiste en la résolution du programme qui minimise la variance du portefeuille sous contrainte d'un rendement minimum ou l'inverse. La résolution de ce programme fournit la composition du portefeuille « efficient » et guide l'investisseur dans sa politique de diversification.

1. Harry MARKOWITZ est un économiste américain (né en 1927), auteur du modèle de « diversification efficiente » des portefeuilles d'actifs financiers en 1952.

Le marché est composé de J actifs risqués S_i , $i = 1, \dots, J$ et d'un actif sans risque S_0 . Les actifs sont divisibles et exemptés de coûts de transaction et de taxes. Le prix de l'actif i au temps t est noté P_t^i . Le rendement d'un actif S_i entre $t - 1$ et t est défini par :

$$R_t^i = \frac{P_t^i - P_{t-1}^i + C_t^i}{P_{t-1}^i}$$

où C_t^i représente les dividendes ou coupons attachés à l'actif S_i .

Pour simplifier les calculs, on peut utiliser le log-rendement :

$$r_t^i = \ln(P_t^i + C_t^i) - \ln(P_{t-1}^i)$$

Ces rendements sont traités comme des variables aléatoires.

L'investisseur effectue des anticipations concernant le futur à partir de l'information disponible à la date t , définissant ainsi l'espérance et la variance-covariance des rendements futurs comme :

$$\mu_{t+T|t} = \mathbb{E}(r_{t+T})$$

$$\Sigma_{t+T|t} = \text{Cov}(r_{t+T})$$

Le modèle ne prend pas en compte le temps écoulé pour l'allocation des actifs, ce qui simplifie l'expression du vecteur d'espérance et de la matrice de variance-covariance, respectivement notés μ et Σ .

L'objectif est de déterminer les poids x_i investis dans chaque actif i qui maximisent l'espérance de rendement du portefeuille tout en minimisant le risque, mesuré par la variance. On définit l'espérance μ_P et la variance σ_P^2 du rendement du portefeuille comme suit :

$$\mu_P = X' \mu$$

$$\sigma_P^2 = X' \Sigma X$$

où X est le vecteur des poids des actifs, μ le vecteur des espérances de rendement et Σ la matrice de variance-covariance des rendements des actifs.

Définition

Un portefeuille p , vérifiant la contrainte budgétaire, est dit efficient lorsque son couple rendement-risque (μ_p, σ_p) n'est pas dominé, c'est-à-dire qu'il n'existe aucun autre portefeuille p' tel que :

$$\mu_{p'} > \mu_p \text{ avec } \sigma_{p'} \leq \sigma_p$$

Ou

$$\sigma_{p'} < \sigma_p \text{ avec } \mu_{p'} \geq \mu_p$$

En absence d'actif sans risque, sous les hypothèses précédentes, l'ensemble des portefeuilles efficients s'obtient en maximisant le rendement espéré du portefeuille pour un niveau de volatilité donné ou de manière équivalente en minimisant la volatilité pour un niveau de rendement cible.

$$\max_{(x_i)} \mu_p$$

Sous les contraintes :

$$\sigma_p^2 \leq \sigma_0^2 \text{ et } \sum x_i = 1$$

Ou de manière équivalente :

$$\min_{(x_i)} \sigma_p^2$$

Sous les contraintes :

$$\mu_p \geq \mu_0 \text{ et } \sum x_i = 1$$

Ce problème peut être résolu analytiquement par des méthodes classiques d'optimisation sous contraintes comme la méthode de KKT (1951). La résolution du problème est disponible en annexe 1. Cette méthode fournit une relation entre l'écart-type du portefeuille et son espérance permettant de tracer la frontière des portefeuilles efficients.

$$\sigma_p = \frac{1}{D} [(C\mu_0^2 - 2A\mu_0 + B)]^{1/2}$$

Avec A, B, C et D des coefficients définis en annexe A.

La frontière efficiente obtenue est la partie supérieure d'une hyperbole dans le plan

« Espérance – Écart-type ». Lorsque le rendement cible est connu, le portefeuille optimal de l'investisseur s'écrit :

$$X^* = \frac{\Sigma^{-1}}{D} [(B1 - A\mu) + (C\mu^* - A1)\mu_0^*]$$

Avec Σ la matrice de variance-covariance, et μ la matrice des rendements espérés des actifs.

Cas de la présence d'actif sans risque : Un investisseur possède en général une certaine quantité d'actif sans risque. Par définition, un actif sans risque est un titre dont les flux sont certains et dont le rendement possède un écart-type nul. Les obligations d'État d'échéance inférieure à un an, en particulier émises par un pays dont le gouvernement est stable économiquement et politiquement, peuvent être considérées comme des actifs sans risque.

En présence d'actif sans risque, la frontière efficiente devient la demi-droite tangente à l'hyperbole précédente et passant par le point R_f , défini comme étant le rendement de l'actif sans risque. La résolution du problème est disponible en annexe 2. Cette équation s'écrit de la façon suivante :

$$\mu_p = r_f + \frac{\mu_t - r_f}{\sigma_T} \sigma_P$$

avec μ_t le rendement du portefeuille tangent et σ_T son écart-type.

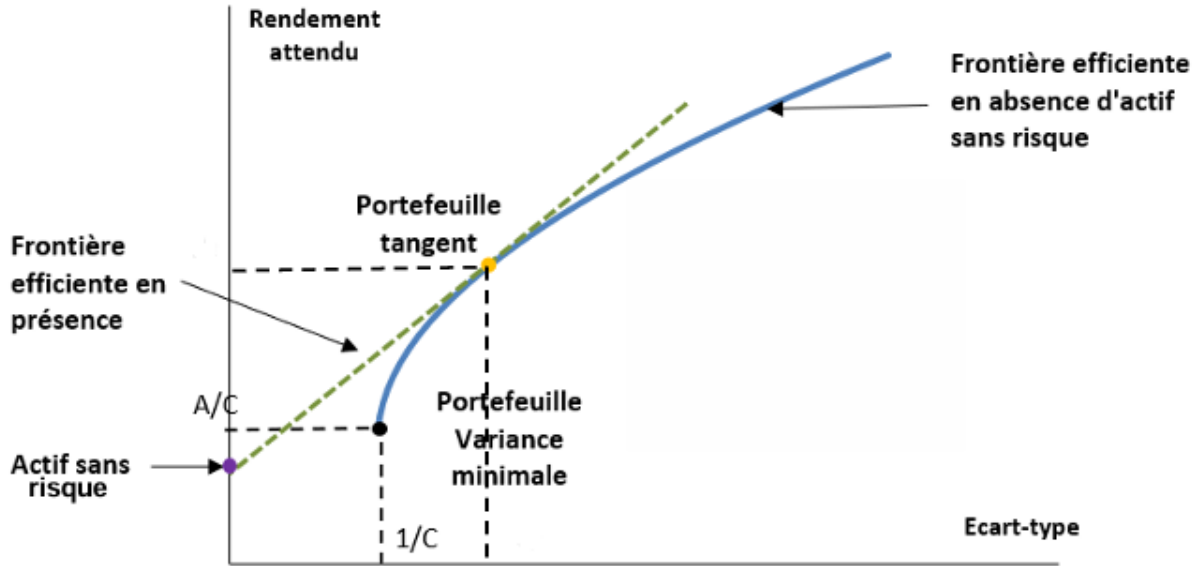


FIGURE 1.1 – Frontière efficiente en présence et en absence d'actif sans risque

Ainsi, ces résultats permettent d'obtenir les combinaisons d'actifs optimales pour des niveaux de risques (ou de rendement cible) donnés. Néanmoins, le modèle ne prend pas en compte les préférences de l'investisseur : c'est-à-dire le portefeuille efficient qui maximise son « utilité ». Nous étendons alors ce modèle à un cadre plus large de la maximisation de l'utilité espérée. Ce dernier se base sur l'idée qu'un investisseur rationnel disposant d'une richesse initiale W_0 choisit son portefeuille de sorte à maximiser son espérance d'utilité sur la période d'investissement tel que :

$$\max_X \mathbb{E}(u(W_0 \cdot (1 + X' \cdot r)))$$

s.c. $X' \cdot 1 = 1$

Afin de résoudre ce problème, il est nécessaire de choisir une fonction d'utilité. En choisissant la fonction d'utilité quadratique u , il est possible de se ramener au cadre espérance-variance sans effectuer d'hypothèse sur la distribution des rendements. En effet, notons u la fonction d'utilité quadratique telle que :

$$u(x) = x - \frac{b}{2}x^2$$

Avec $b > 0$

Ainsi, Markowitz définit les choix optimaux de portefeuille en ne considérant que l'espérance et la variance de ces derniers. Cette méthode est relativement simple à appréhender et à implémenter. Malheureusement, le passage de la théorie à la pratique se confronte à certaines limites que nous allons présenter dans la partie suivante.

2 Limite du modèle de Markowitz

Le modèle de Markowitz présente des limitations à savoir :

Mono-périodicité et contraintes intermédiaires : Le modèle de Markowitz, en tant que modèle mono-périodique, ne permet pas de répondre aux obligations spécifiques des assureurs vie, qui doivent gérer un horizon de placement à long terme avec des contraintes intermédiaires. Ces contraintes incluent le maintien d'un rendement réel assez élevé pour éviter la constitution de provisions et la limitation des fonds propres requis, ce qui ne peut pas être couvert efficacement par un modèle mono-périodique.

Allocation stratégique et tactique : En pratique, pour atténuer la mono-périodicité, les assureurs adoptent une approche en deux étapes : l'allocation stratégique, basée sur les rendements à long terme attendus, et l'allocation tactique, qui permet d'ajuster le portefeuille aux variations des rendements à court terme tout en restant fidèle à la stratégie initiale. Cette approche répond ainsi aux évolutions des opportunités d'investissement.

Difficulté d'estimation des rendements espérés : La prévision des rendements à long terme est essentielle, mais repose souvent sur des moyennes historiques, qui peuvent être déconnectées des conditions de marché actuelles. Pour contrer cette limite, les assureurs réévaluent leurs hypothèses en fonction de variables économiques contemporaines et ajustent l'allocation stratégique périodiquement, évitant ainsi un décalage par rapport au contexte de marché.

Limites de la variance comme mesure de risque : Utiliser la variance pour évaluer le risque peut s'avérer insuffisant dans le contexte assurantiel, car elle ne prend pas en compte l'asymétrie des rendements ni les risques extrêmes (queues épaisses). Des mesures alternatives, telles que la Value-at-Risk (VaR) ou la Conditional Value-at-Risk (CVaR), offrent une évaluation plus précise des risques encourus en cas de marchés extrêmes.

Risque d'estimation des paramètres : Les modèles de Markowitz nécessitent des estimations précises des espérances de rendement, des variances et des corrélations des actifs, mais des erreurs d'estimation peuvent rendre les portefeuilles instables et concentrés. Pour atténuer cet effet, les assureurs appliquent des contraintes de diversification et utilisent des modèles de robustesse, réduisant ainsi les biais d'estimation et les concentrations excessives d'actifs.

3 Optimisation de l'allocation des actifs sous contrainte de SCR marché

Afin de saisir l'idée fondamentale qui sous-tend le choix du SCR marché comme mesure de risque, nous allons explorer le programme de maximisation développé par Arzac et Bawa (1977) en se basant sur les travaux de Roy (1952), qui a développé l'idée que les investisseurs perçoivent le risque en fonction des pertes plutôt que des gains. Il suggère donc de prendre en compte la possibilité que la richesse de l'investisseur ne diminue pas en dessous d'un seuil connu sous le nom de « niveau de subsistance ».

$$\begin{aligned} & \max \mathbb{E}(R_e) \\ \text{s.c. } & \begin{cases} P(R_e \leq A) \leq \alpha \\ 1 \cdot \theta \leq R_e \end{cases} \end{aligned}$$

Avec \mathbf{R}_e est la richesse finale de l'investisseur, \mathbf{e} portefeuille choisi par l'investisseur et \mathbf{A} son niveau de subsistance.

La première contrainte se traduit par le risque que l'investisseur est prêt à supporter lors de la recherche de son allocation optimale. L'objectif est donc d'éviter les pertes avant de maximiser la richesse finale. Cela correspond avec la notion du **Value-At-Risk** qui représente le montant permettant de couvrir le montant de perte engendré par le risque X avec une probabilité α .

$$\text{VaR}_t(X, \alpha) = -\inf_x \{x \mid P(X \geq x) \geq \alpha\}$$

Le SCR marché étant défini comme le montant des fonds propres réglementaire exigé par le régulateur pour couvrir le risque de marché, il représente donc le risque de pertes extrêmes à horizon 1 an lié aux aléas des marchés financiers.

4 Prise en compte du passif : Le modèle de Sharpe et Tint

4.1 Présentation du modèle

Le modèle de **Sharpe et Tint** (1990) permet de prendre en compte le passif de l'assureur dans son processus d'allocation stratégique.

Le modèle suppose que l'assureur détermine la part de passif prise en compte dans l'élaboration de son allocation d'actifs. On introduit la notion de *surplus* définie comme la différence entre l'actif et la part de passif prise en compte dans l'élaboration de l'allocation stratégique telle que :

$$S = A - k \cdot P$$

Avec :

- k : un coefficient mesurant l'importance de la couverture de ses engagements pour l'investisseur
- A : la valeur de marché de l'actif
- P : les provisions techniques.

Dans le cadre de l'assurance vie, nous supposons que l'investisseur souhaite en priorité **honorer ses engagements** et prend donc en compte la totalité de ses engagements lors de l'élaboration de son allocation stratégique d'actifs. Cela nous amène à faire le choix de $k = 1$.

La valeur du surplus est connue à la date initiale $t = 0$ et inconnue à $t = 1$. La variation du surplus entre ces deux dates s'écrit :

$$S_1 - S_0 = [A_0 \cdot (1 + r_A) - P_0 \cdot (1 + r_P)] - (A_0 - P_0)$$

Avec r_A le rendement de l'actif entre les deux périodes et r_P , le taux de croissance du passif issu de la variation de la courbe des taux sans risque.

Il est à noter qu'étant donné que la modélisation est effectuée sous le référentiel SBR, les flux de trésorerie futurs sont modélisés en *run-off* et ne tiennent donc pas compte des affaires nouvelles. Par ailleurs, le calcul de la valeur finale de l'actif et du passif exclut les encaissements et décaissements sur affaires existantes de sorte que r_A et r_P ne soient liés qu'à l'évolution des marchés financiers.

Afin de se rapprocher du cas où l'investissement est effectué sans contrainte de passif, nous définissons le rendement du surplus en $t = 1$ en divisant la variation du surplus par le montant initial de l'actif tel que :

$$r_S = r_A - \frac{1}{f_0} \cdot r_P$$

Où f_0 correspond au ratio de financement initial des provisions techniques.

En notant λ la tolérance au risque de l'investisseur, l'objectif se résume à maximiser l'utilité définie par :

$$U = E(r_S) - \frac{1}{\lambda} \text{Var}(r_S)$$

Avec :

- $E(r_S) = E(r_A) - \frac{1}{f_0} E(r_P)$, où seule la première partie est affectée par les décisions d'allocation d'actifs.
- $\text{Var}(r_S) = \text{Var}(r_A) - \frac{2}{f_0} \text{Cov}(r_A, r_P) + \frac{1}{f_0^2} \text{Var}(r_P)$, où le dernier terme n'est pas affecté par les décisions d'allocation d'actifs.

Étant donné que les termes qui ne sont pas affectés par les décisions d'allocation d'actifs peuvent être négligés sans effet sur les résultats, le problème revient à trouver le portefeuille optimal tel que :

$$\max_x E(r_A) - \frac{1}{\lambda} \text{Var}(r_A) + \frac{2}{f_0 \lambda} \text{Cov}(r_A, r_P)$$

Les deux premiers termes constituent les éléments de l'allocation d'actifs sans contrainte de passif tandis que le dernier correspond à un terme additionnel provenant de l'investissement dans des actifs permettant de se couvrir contre les variations du passif.

L'utilité s'écrit :

$U = \text{Rendement espéré de l'actif} - \text{Pénalité due au risque pris} + \text{Liability Hedging Credit}$

De plus, si l'on considère $i = 1, \dots, J$ actifs risqués :

$$\text{Cov}(r_A, r_P) = \sum_{i=1}^J X_i \text{Cov}(r_i, r_P)$$

La covariance de chaque actif s'écrit :

$$\text{Cov}(r_i, r_P) = \rho_{i,P} \sigma_i \sigma_P$$

Avec :

- $\rho_{i,P}$: la corrélation entre r_i et r_P ,
- σ_i : l'écart-type de i ,
- σ_L : l'écart-type du taux de croissance du passif.

On peut remarquer facilement que l'actif qui est corrélé positivement avec le passif permet d'avoir une meilleure couverture contre les variations des engagements et inversement. En plus, plus l'actif sera risqué plus il permettra une meilleure couverture contre les risques de variation des engagements.

4.2 Sharpe-Tint et SCR marché comme mesure de risque :

L'objectif est donc de maximiser le rendement du surplus sous la contrainte de ne pas dépasser un certain niveau de SCR marché. En suivant Kouwenberg² (2017).

le problème d'optimisation de Sharpe et Tint se transforme comme suit :

$$\begin{aligned} \max_{\mathbf{X}} r_p &= r_f X_0 + \sum_{i=1}^J (\mu_i^a - r_f) X_i - \sum_{n=1}^N H_n^r P_n \\ &= r_f + \sum_{i=1}^J (\mu_i^a - r_f) X_i - \sum_{n=1}^N H_n^r P_n \end{aligned}$$

Sous la contrainte :

$$SCR_{\text{marché}}(X, P) \leq SCR_{\text{marché}}^{\max}$$

Avec r_f le rendement de l'actif sans risque, μ_i^A le rendement espéré de l'actif i , μ_n^P le taux de croissance espéré du passif n , X_i le poids de l'actif i dans l'allocation et P_n le poids du passif n en pourcentage de l'actif totale.

En notant X le vecteur des poids des actifs risqués, $r_A^{\text{excès}}$ le vecteur des excès de rendements espérés des actifs par rapport au rendement de l'actif sans risque, et r_L le vecteur des taux de croissance espérés des éléments du passif.

le problème précédent se réécrit comme suit :

$$\max_{\mathbf{X}} R_s = r_f + r_{\text{excès}} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{X} - r_L \cdot \mathbf{P}$$

Sous la contrainte :

$$SCR_{\text{marché}}(X, P) \leq SCR_{\text{marché}}^{\max}$$

2. Kouwenberg propose une méthodologie pour ajuster les allocations d'actifs de manière à maximiser le rendement du surplus tout en respectant les contraintes de capital réglementaire.

Notons que le SCR marché peut s'écrire comme suivant :

$$SCR_{\text{marché}} = \sqrt{(choc_{\text{global}})^t \times \Omega_{\text{marché}} \times choc_{\text{global}}}$$

Avec :

$$choc_{\text{global}} = \begin{pmatrix} SCR_{\text{taux}} \\ SCR_{\text{Action}} \\ SCR_{\text{immobilier}} \\ SCR_{\text{SPREAD}} \end{pmatrix}$$

Et $\Omega_{\text{marché}}$ est la matrice de corrélation définie par la réglementation.

4.3 Limites du modèle d'allocation sous contrainte de SCR marché

La contrainte de l'usage d'un tel modèle réside dans sa tendance à créer un portefeuille très peu risqué, principalement axé sur la minimisation des risques de pertes majeures à horizon d'un an. Ce type de stratégie pourrait compromettre la durabilité à long terme de l'assureur, dans la mesure où il pourrait devenir incapable d'offrir des taux de participation aux bénéficiaires attractifs. Cela pourrait, à son tour, entraîner un risque accru de rachats ainsi qu'une réduction des nouvelles souscriptions.

Chapitre 3

Hypothèses sur l'actif et projection du passif

Contents

1	Hypothèses sur les rendements des actifs	37
1.1	Action	37
1.2	Immobilier	43
1.3	Taux	46
1.4	Non coté	53
1.5	Résultats des rendements	53
2	Projection des engagements d'assureur	54
2.1	Description du portefeuille vie	54
2.2	Hypothèses du passif	57
2.3	Résultat de projection	60

Ce chapitre aborde dans un premier temps les modèles retenus pour modéliser les différents actifs avant de présenter dans un second temps les différentes séries de données historiques utilisées pour calibrer les paramètres de chaque classe ainsi que leurs résultats de calibration. Enfin, la projection à horizon un an des différents indices financiers permettra d'estimer le rendement espéré de chaque actif.

1 Hypothèses sur les rendements des actifs

La composition de notre portefeuille optimale à 31/12/2023 est représentée comme suit :

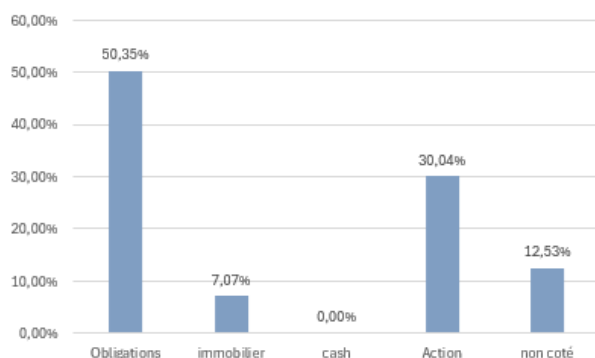


FIGURE 1.1 – Portefeuille de placement au 31/12/2023

Dans la suite de notre étude on retient que les actifs suivants : Actions, Obligations, Immobiliers et Non coté.

1.1 Action

Pour la projection du court des actions, nous nous appuyons sur le modèle de Black-Scholes, que nous allons présenter en détail dans cette section. puis nous passerons à la présentation des données nécessaires au calibrage de ce modèle afin d'estimer le rendement à un an.

1.1.1 Le modèle de Black-Scholes

Développé par Black, scholes et Merton, ce modèle est largement utilisé pour modéliser les actifs financiers risqués et c'est celui retenu pour modéliser les actions et

l'immobilier¹.

Ce modèle à l'avantage de donner une formule explicite des prix des actifs et présente des hypothèses simples :

- L'achat et la vente de titres s'effectuent de manière continue dans le temps ;
- L'action modélisée ne produit pas de dividende ;
- il n'existe pas de frais relatifs à l'achat et à la vente de titres sur le marché ;
- il n'existe pas d'opportunités d'arbitrage.

Dans le modèle de Black and Scholes, les cours des actions S_t évoluent selon un processus stochastique de mouvement brownien géométrique :

$$dS_t = S_t \mu dt + S_t \sigma dW_t$$

où

- μ représente le rendement moyen constant (ou *drift*) ;
- σ correspond à la volatilité constante ;
- W_t est un processus de Wiener.

En appliquant le lemme d'Itô à $Y_t = \ln S_t$ et la condition à l'origine $S(0) = S_0$, nous obtenons une solution explicite de l'équation différentielle stochastique :

$$S_t = S_0 \exp \left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma W_t \right)$$

De ces deux formules, nous déduisons la discrétisation exacte :

$$S_{t+1} = S_t \exp \left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma (W_{t+1} - W_t) \right)$$

Comme W_t est un mouvement brownien, l'accroissement $W_{t+1} - W_t$ suit une loi

1. Bien qu'il n'y ait aucune similarité directe entre les marchés des actions et de l'immobilier, les indices immobiliers sont évalués en utilisant des techniques semblables à celles des actions, toutefois avec une volatilité faible.

normale centrée réduite.

Ainsi le rendement des actions entre les deux dates successives et, donné par l'équation ci-dessous, suit une loi normale de moyenne $\mu - \frac{\sigma^2}{2}$ et de variance σ^2 :

$$r_t = \ln \left(\frac{S_t}{S_{t-1}} \right) = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) + \sigma(W_t - W_{t-1})$$

Intuitivement, le rendement $\frac{dS_t}{S_t}$ est alors à peu près constant égal à μ à une perturbation aléatoire près dW_t .

Les rendements, notés Y_t , suivent donc une distribution log-normale et sont indépendants sur des intervalles de temps discrets qui ne se chevauchent pas :

$$Y_t^2 = \log \frac{S_{t+\delta}}{S_t} \sim N(\mu\delta, \sigma^2\delta)$$

Finalement, pour un mouvement brownien géométrique et en choisissant comme pas de discrétisation Δt , nous obtenons le schéma récursif exact suivant :

$$S_{t+\Delta t} = S_t \exp \left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) \Delta t + \sigma \sqrt{\Delta t} \varepsilon \right)$$

où ε représente la réalisation d'une variable aléatoire gaussienne centrée réduite.

Lorsque nous prenons en considération la corrélation entre les taux de rendement des actions et les taux d'intérêt, la relation devient :

$$S_{t+\Delta t} = S_t \exp \left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) \Delta t + \sigma \rho \Delta B_t + \sigma \sqrt{1 - \rho^2} \Delta W_t \right)$$

où W_t et B_t sont deux mouvements browniens indépendants, et ρ est le coefficient de corrélation.

2. La forme discrétisée des rendements est donnée par : $Y_t = \mu + \sigma \varepsilon_t$ où $\varepsilon_t \sim N(0, 1)$.

1.1.2 Présentation des données

Les données utilisées pour calibrer le modèle Black and scholes correspondent à l'évolution mensuelle de l'indice MASI entre les mois de janvier 2005 et décembre 2023.

Nous montrons ci-dessous les deux courbes représentant l'évolution du cours du MASI et ses rendements annuels durant la période d'étude :



FIGURE 1.2 – Évolution du cours MASI



FIGURE 1.3 – Évolution du rendement annuel MASI

Avant de procéder à la modélisation, nous devons vérifier l'hypothèse de normalité des rendements logarithmiques du cours de l'indice. Pour tester cette hypothèse nous allons utiliser le test de **Shapiro-Wilk** qui prend comme hypothèse nulle le fait que **l'échantillon suit une loi normale**. Le résultat du test sous R est le suivant :

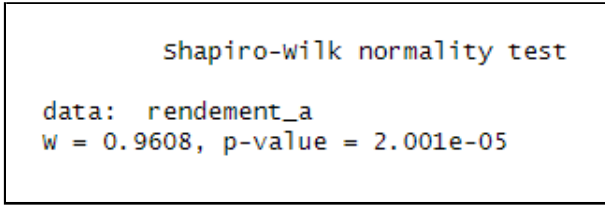


FIGURE 1.4 – Test de normalité des rendements MASI

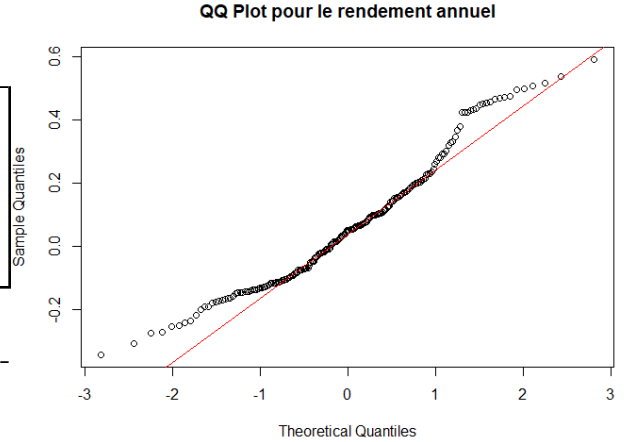


FIGURE 1.5 – QQ-Plot des rendements MASI

Nous remarquons que la p-value est très élevée, donc l’hypothèse nulle ne doit pas être rejetée. Ainsi, la normalité des rendements logarithmiques est vérifiée, ce qui est également confirmée par le QQ-plot ci-dessus. Nous pouvons donc envisager de modéliser le cours de l’indice MASI à l’aide du modèle de Black-Scholes.

1.1.3 Calibration du modèle

Pour générer des scénarios sur un horizon bien défini de l’indice de MASI, nous commencerons par estimer les paramètres μ et σ à partir des données historiques retenues. En effet, Le drift de la formule de Black-Scholes correspond à la moyenne arithmétique calculée sur la série de données des rendements historiques de l’indice MASI. La volatilité est supposée constante égale à la volatilité historique des rendements de l’indice. Les paramètres retenus par la suite sont donc les suivants :

$$\begin{cases} \hat{\mu} = 6,93\% \\ \hat{\sigma} = 19,51\% \end{cases}$$

Une fois le modèle est calibré, on procède à 1000 simulations su cours MASI pour calculer ensuite le rendement annuel projeté an se basant sur la moyenne des cours simulés pour chaque année.

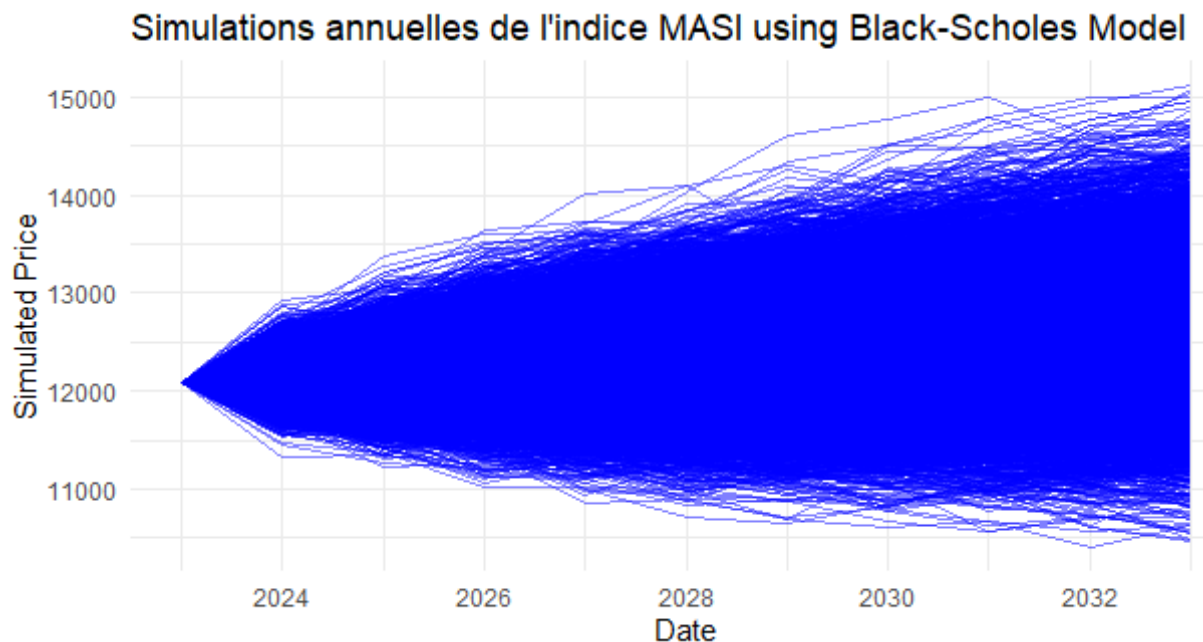


FIGURE 1.6 – 1000 simulations de l'indice MASI pour $S(0)= 12092.88$

Une représentation graphique de ces moyennes nous permettra de voir en mieux l'allure générale de la performance annuelle de l'indice boursier

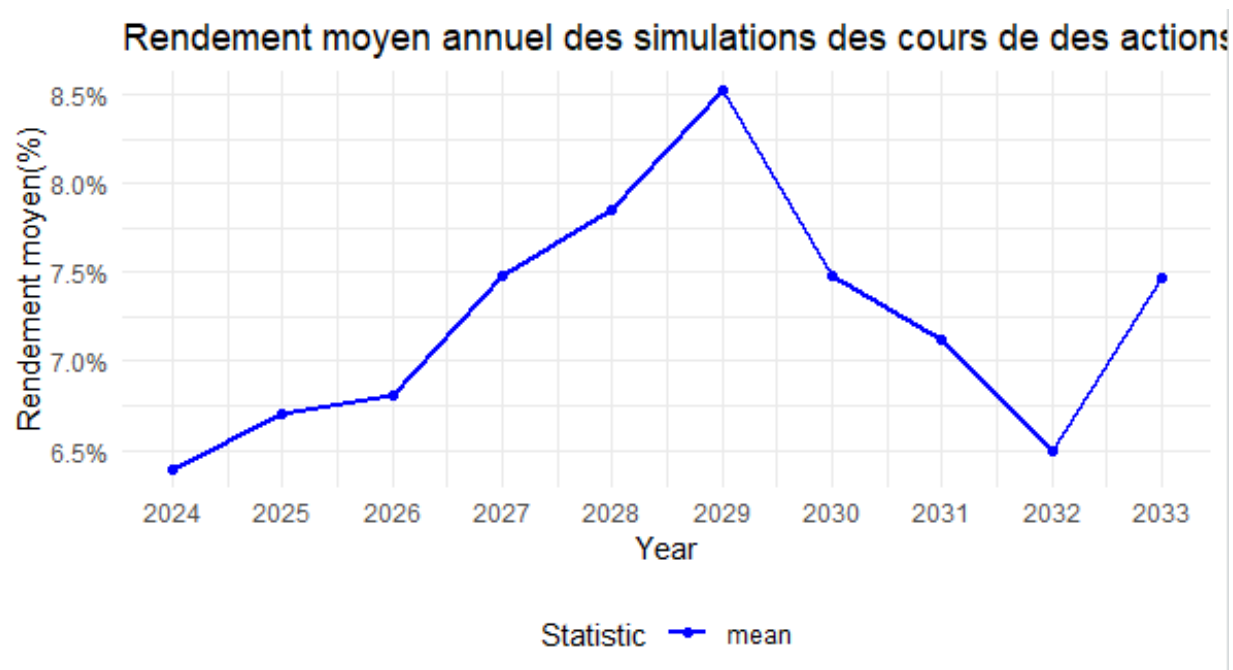


FIGURE 1.7 – L'évolution du rendement annuel de l'indice MASI

Nos prévisions montrent que le rendement de l'indice MASI va fluctuer entre 6,3% et 8,5%.

1.2 Immobilier

À l'image de la projection du court des actions, nous nous appuyons sur le modèle de Black-Scholes pour la projection du court de l'immobilier, que nous avons présenté en détail dans la section précédente. Nous commencerons donc par exposer les données nécessaires au calibrage de ce modèle afin d'estimer le rendement à un an.

1.2.1 Présentation des données

L'indice retenu pour déterminer le rendement des actifs immobiliers est l'indice des prix des actifs immobiliers (IPAI). L'historique est disponible sur le site de Bank Almaghrib, il représente l'évolution trimestrielle de l'indice entre le premier trimestre de 2008 et le dernier trimestre de 2023.

La normalité est testée de la même façon que pour les actions, en utilisant le test de **Shapiro-Wilk**. Les résultats du test confirment que les rendements suivent une distribution normale.

1. HYPOTHÈSES SUR LES RENDEMENTS DES ACTIFS

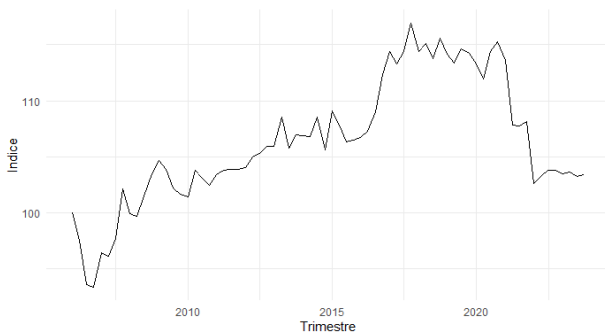


FIGURE 1.8 – Évolution du cours de l'immo-
bilier

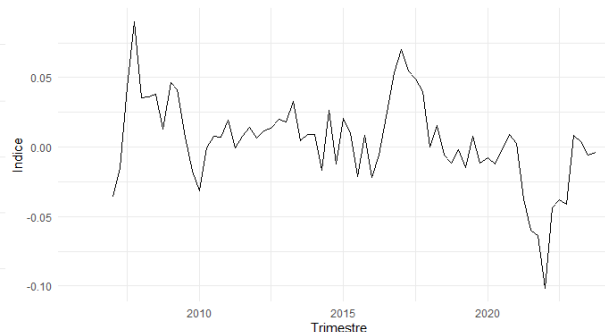


FIGURE 1.9 – Évolution du rendement an-
nuel du cours de l'immobilier

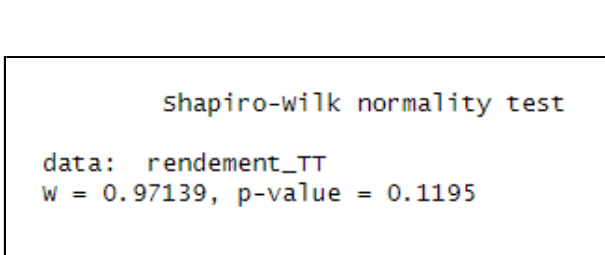


FIGURE 1.10 – Test de normalité des rende-
ments

QQ Plot pour le rendement annuel de l'immobilier

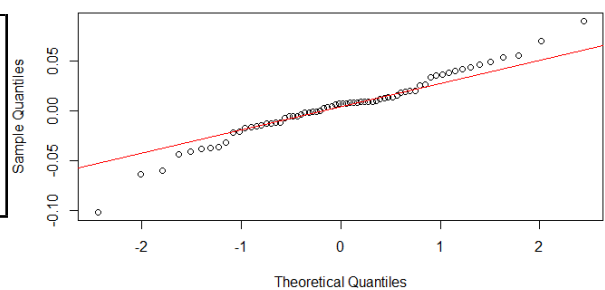


FIGURE 1.11 – QQ-Plot des rendements du
cours de l'immobilier

1.2.2 Calibration du modèle

Le modèle de Black and scholes pour l'immobilier est calibré de la meme manière que pour les actions. Les paramètres retenus sont donc les suivants :

$$\begin{cases} \hat{\mu} = 0,48\% \\ \hat{\sigma} = 3,15\% \end{cases}$$

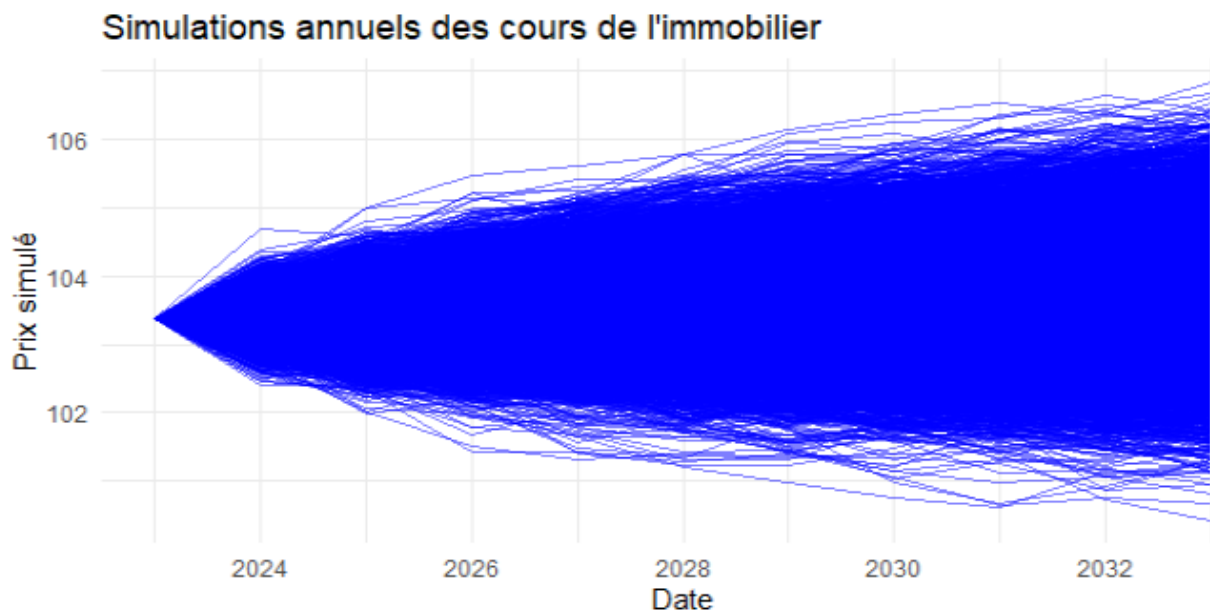


FIGURE 1.12 – 1000 simulations de l'indice IPAI pour $S(0)= 103.37239$

Voici l'évolution du rendement annuel de l'indice des prix des actifs immobiliers (IPAI) :

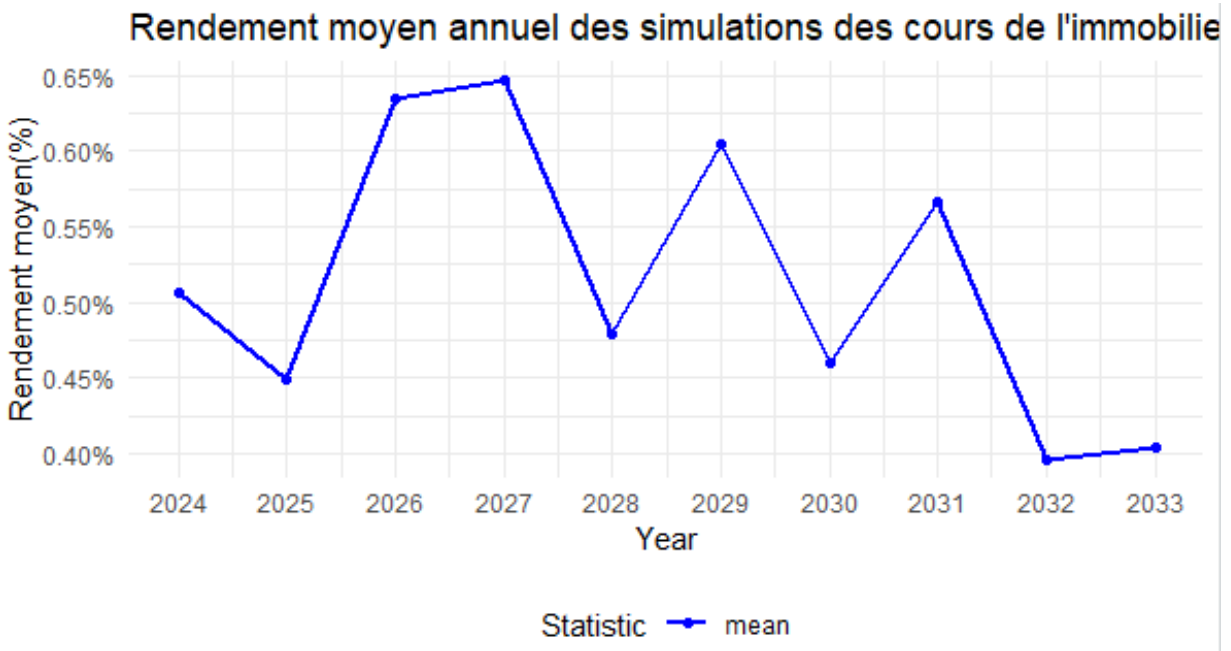


FIGURE 1.13 – Evolution du rendement annuel de l'indice IPAI

1.3 Taux

Pour établir le rendement des produits de taux, en particulier les obligations, nous nous appuyerons sur le taux sans risque de maturité 10 ans. Ce choix s'explique par la maturité moyenne de 15 ans de notre portefeuille obligataire, garantissant une meilleure cohérence entre la modélisation et l'horizon temporel des obligations. La volatilité est quant à elle calibrée sur l'historique des taux sans risque à 15 ans.

1.3.1 Construction de la courbe des taux sans risque

Construction par extrapolation de Smith et Wilson

La courbe des taux utilisée pour les calculs SBR est la courbe des taux zéro-coupon construite en suivant minutieusement les étapes décrites dans le projet de circulaire SBR qui basée sur l'interpolation linéaire et sur l'extrapolation de Smith et Wilson de données observées sur le marché.

Les données utilisées sont des données de taux moyen pondéré (TMP) observées le 29/12/2023, qui est un taux au jour le jour du marché monétaire. C'est un taux moyen pondéré par les montants des transactions déclarées pour un échantillon représentatif d'établissements admis au marché interbancaire.

1. HYPOTHÈSES SUR LES RENDEMENTS DES ACTIFS

Date d'échéance	Transaction	Taux moyen pondéré	Date de valeur
19/02/2024	-	2,92%	29/12/2023
20/05/2024	-	2,98%	29/12/2023
15/07/2024	-	3,00%	29/12/2023
18/08/2025	-	3,23%	29/12/2023
17/05/2027	-	3,41%	29/12/2023
17/06/2030	-	3,65%	29/12/2023
18/09/2034	-	3,91%	29/12/2023
19/07/2038	-	4,17%	29/12/2023
16/04/2040	-	4,35%	29/12/2023
20/02/2051	-	4,99%	29/12/2023

FIGURE 1.14 – Les transactions sur les bons de trésor au 29/12/2023. Source : <https://www.bkam.ma/>

Le passage du taux monétaire au taux actuariel se fait suivant la relation suivante :

$$T_a = \left(1 + \frac{n}{360} T_m\right)^{\frac{365}{n}} - 1$$

où :

- T_m : le taux monétaire ;
- T_a : le taux actuariel ;
- n : le nombre de jours de placement.

Maturité	taux actuariel
0,142	3,00%
0,392	3,05%
0,545	3,06%
1,638	3,23%
3,384	3,41%
6,471	3,65%
10,729	3,91%
14,564	4,17%
16,310	4,35%
27,164	4,99%

FIGURE 1.15 – Taux actuariels

Maintenant que la courbe des taux actuariels de référence est bien définie nous passerons à l'interpolation linéaire de ces taux.

Interpolation de la courbe des taux actuariels

Les taux actuariels pour les maturités pleines peuvent être obtenus à partir de la courbe des taux actuariels des maturités non entières par la formule suivante :

$$R(t) = \frac{(t_i - t)R(t_j) + (t - t_j)R(t_i)}{t_i - t_j}$$

Cette formule d'interpolation linéaire permet de calculer le taux actuariel à un point de maturité entière t en utilisant les taux connus à deux points t_j et t_i , où t_j et t_i encadrent t . L'interpolation assure que le taux estimé se positionne de manière linéaire entre les deux taux connus, fournissant une estimation précise et cohérente avec la tendance observée de la courbe des taux.

Transformation en courbe des taux zéro-coupons

Les taux actuariels interpolés obtenus à l'étape précédente sont transformés en taux zéro-coupon en supposant que les prix des obligations des bons du trésor sont « au pair »³ à travers la méthode de Bootstrap basée sur le fait que le prix théorique d'une obligation est la somme de ses flux actualisés aux taux zéro-coupon de l'échéance de chaque flux.

Pour la maturité un an, le taux zéro coupon 1 an correspond au taux actuariel de rendement 1 an puisqu'aucun coupon n'est versé entre le moment de calcul du taux zéro coupon et l'échéance .

Pour les maturités supérieures à un an , le taux zéro-coupon est calculé avec la formule suivante :

$$ZC_j = \left(\frac{1 + R_j}{1 - R_j \sum_{i=1}^{j-1} \frac{1}{1+ZC(i)}} \right)^{\frac{1}{j}} - 1 \quad ; 1 \leq j \leq n$$

où :

- ZC_j : le taux zéro-coupon de maturité j .
- R_j : le taux actuariel de maturité j .

3. La valeur nominale est égale à 100% de la valeur d'émission

Extrapolation de la courbe des taux zéro-coupon par la méthode de Smith-Wilson :

La méthode de Smith-Wilson est employée pour extrapoler les courbes de taux zéro-coupon pour toutes les maturités $t > 0$. Cette méthode repose sur une fonction de prix qui possède les propriétés suivantes :

- La fonction est positive.
- Elle est strictement décroissante en fonction de la maturité.
- À maturité nulle, la fonction vaut 1, et elle tend vers 0 quand la maturité tend vers l'infini.

La fonction de prix proposée est définie pour tout $t > 0$ de la manière suivante :

$$P(t) = e^{-\tau_{TFU}t} + \sum_{j=1}^N \xi_j K_j(t)$$

où τ représente la maturité, et les ξ_j sont des coefficients à déterminer en fonction de la courbe des taux zéro-coupon existante avant extrapolation. Le comportement asymptotique est régi par un terme $e^{-\tau_{TFU}t}$, où τ_{TFU} est le Taux Forward Ultime. Les fonctions $K_j(t)$ sont des fonctions noyau qui prennent en compte les données de marché, le TFU, et la vitesse de convergence α vers le TFU.

Les fonctions noyau $K_j(t)$ sont définies comme suit :

$$K_j(t) = e^{-\tau(t+u_j)\alpha \min(t,u_j) - 0.5e^{-\alpha \max(t,u_j)}(e^{\alpha \min(t,u_j)} - e^{-\alpha \max(t,u_j)})}$$

Les coefficients ξ_j sont ajustés pour que les prix de marché des zéro-coupons, notés m_i , correspondent aux valeurs calculées par la fonction de prix, conduisant à un système d'équations linéaires pour leur détermination.

$$\begin{aligned}
 m_1 &= P(u_1) = e^{-\tau_{\text{TFU}} \times u_1} + \sum_{j=1}^N \xi_j K_j(u_1) \\
 &\vdots \\
 m_i &= P(u_i) = e^{-\tau_{\text{TFU}} \times u_i} + \sum_{j=1}^N \xi_j K_j(u_i) \\
 &\vdots \\
 m_N &= P(u_N) = e^{-\tau_{\text{TFU}} \times u_N} + \sum_{j=1}^N \xi_j K_j(u_N)
 \end{aligned}$$

Ce système peut être représenté sous forme matricielle et les paramètres ξ_j sont alors déduits par inversion matricielle. Les valeurs des taux zéro-coupon pour les maturités au-delà de la dernière maturité disponible sont obtenues en injectant ces paramètres dans la fonction de prix de Smith-Wilson pour estimer les prix des zéro-coupons. Les taux zéro-coupon R_t pour $t > N$ sont ensuite déduits en utilisant la relation suivante :

$$R_t = \frac{1}{t} \left(\frac{1}{P(t)} - 1 \right)$$

Les paramètres à estimer afin d'appliquer la méthode de Smith-Wilson sont : τ_{TFU} et α .

Le Taux Forward Ultime TFU correspond à la somme des éléments suivants :

- La moyenne des taux réels à un an (correspondant aux taux zéro coupon 1 an au 31/12 ajustés de l'inflation annuelle) sur l'historique disponible.
- Le taux d'inflation cible fixé calibré sur l'historique d'inflation disponible et selon une moyenne géométrique pondérée de la façon suivante :

$$\text{Taux d'inflation cible} = \exp \left(\frac{\sum_{i=0}^n w_i \times \ln(1 + T_{\text{aux},i,\text{inflation}})}{\sum_{i=0}^n w_i} \right) - 1$$

Où :

- n est le nombre d'années d'historique d'inflation disponible.
- w_i est le poids associé à la i -ème année d'inflation avec $w_i = \beta^{n-i}$ et $\beta = 0.99$.

1. HYPOTHÈSES SUR LES RENDEMENTS DES ACTIFS

Nous avons obtenu un $TFU = 2,9\%$.

La **vitesse de convergence** α est calibrée de façon à ce que la différence entre les taux forward 1 an projetés et le TFU converge vers zéro à horizon 60 ans à un seuil de 0.00001.

$$|F(t, t + 1) - TFU| < 10^{-4} \quad \text{pour } t \geq DPL + 1$$

La formule liant les taux zéro-coupon et forward est donnée par :

$$F(t, t + 1) = \left(\frac{1 + R(t + 1)}{1 + R(t)} \right)^{t+1} - 1$$

Nous avons obtenu une vitesse de convergence : $\alpha = 4,362$.

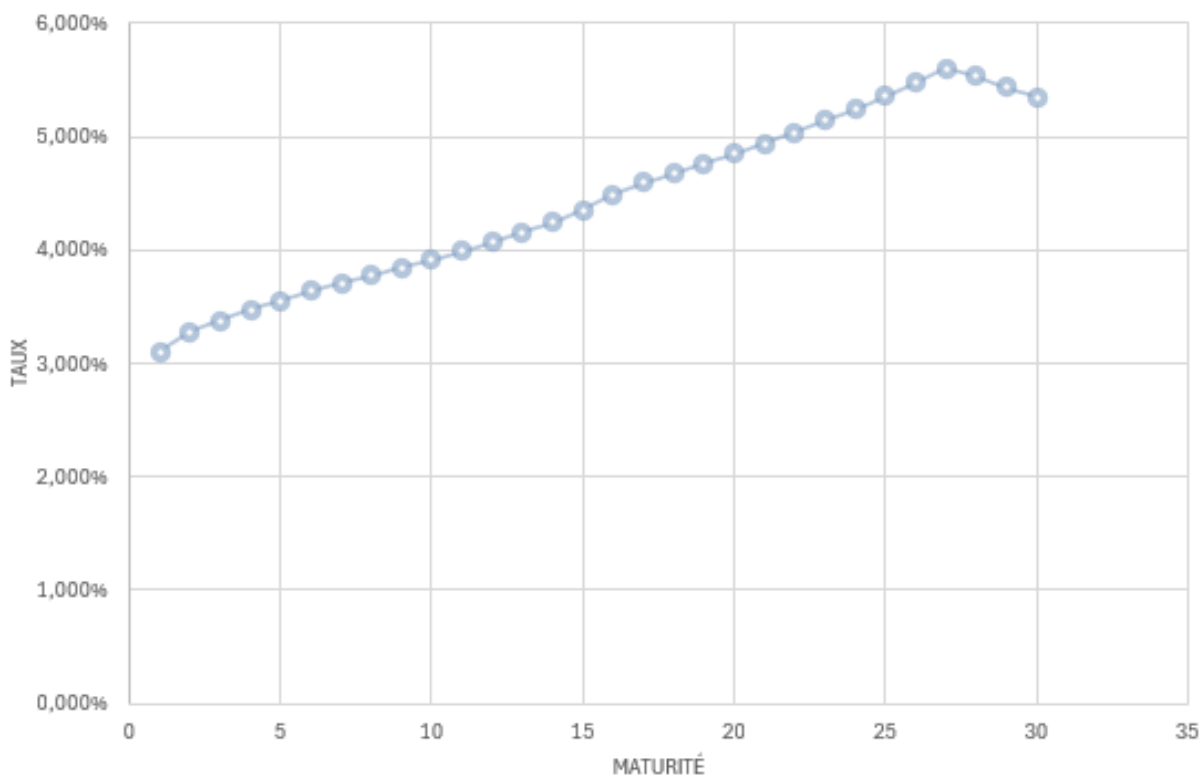


FIGURE 1.16 – Courbe des taux zero-coupons extrapolée par SW

1. HYPOTHÈSES SUR LES RENDEMENTS DES ACTIFS

En appliquant des chocs à la hausse et à la baisse à notre courbe extrapolée, nous obtenons les courbes choquées. Nous représentons ces courbes, à titre illustratif, dans le graphique suivant :

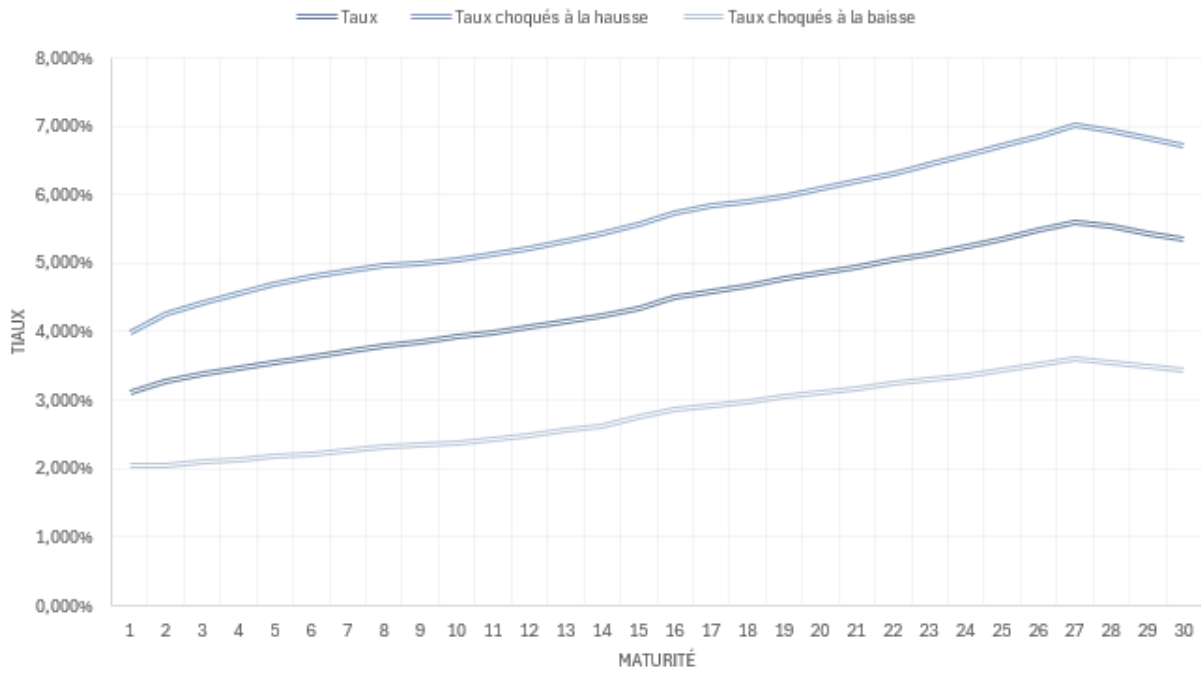


FIGURE 1.17 – Courbe des taux « choquée »

1.4 Non coté

Le rendement des actifs non cotés est calibré en fonction des rendements historiques de la compagnie, en raison de la pénurie de données de marché disponibles pour évaluer la performance de ces actifs. À partir du calcul du rendement et de la volatilité du fonds actions non cotés dans lequel la compagnie investit, nous retenons un rendement de 15% et une volatilité de 25%.

1.5 Résultats des rendements

Rappelons que notre objectif étant de chercher l'allocation optimale entre les différentes classes d'actifs en se basant sur l'évolution de ces actifs dans le marché financier, le procédé de modélisation d'actifs se basera donc sur des indices globaux permettant de mesurer la performance du marché que chacun représente.

Pour les actions et l'immobilier, nous avons projeté les rendements annuels des indices MASI et IPAI, représentant respectivement l'évolution de ces deux classes d'actifs. Cependant, ces indices mesurent uniquement l'évolution des prix (gain en capital) et non pas réellement la performance globale de ces classes d'actifs, car ils n'intègrent pas les dividendes pour les actions et les loyers pour l'immobilier. En raison du manque d'indices mesurant ces performances au Maroc, nous supposons un taux de dividende de 5,5 % pour les actions et considérons que l'entreprise investit exclusivement dans des biens immobiliers générant un taux de loyer de 7 %.

Les rendements espérés retenus pour chaque actif correspondent aux valeurs à un an de leurs projections respectives. Les rendements espérés utilisés dans la suite sont :

Taux	Action	Immobilier	Non coté
4,5%	11,5%	7,3%	15%

TABLE 1.1 – Hypothèses de rendements à un an

2 Projection des engagements d'assureur

2.1 Description du portefeuille vie

Notre portefeuillen est un portefeuille de capitalisation, il est diversifié et adapté pour accompagner les clients dans leurs objectifs financiers à long terme à travers trois types de contrats :

Contrat Retraite

Le contrat retraite est conçu pour préparer sereinement l'avenir financier des souscripteurs. Il leur permet de constituer un capital destiné à compléter leur pension de retraite, grâce à des versements programmés et réguliers.

Elle est souvent exprimée par la formule suivante :

$$E_j = (1 - f_e)E_{j-1}(1 + i_a) + (1 - f_c) \sum_{k=1}^m C_{jk}(1 + i_a)^{m-k+1} + PB_j + VRP_j$$

où E_j représente l'épargne accumulée après j années, f_e les frais sur encours, f_c les frais sur cotisations, i_a le taux d'intérêt annuel, C_{jk} les cotisations, PB_j les primes bonifiées, et VRP_j la valeur de rachat partielle.

Contrat Éducation

Le contrat éducation assure l'avenir des enfants des souscripteurs en constituant un capital destiné à financer leur parcours éducatif supérieur ou leur insertion professionnelle. Ce plan représente un engagement dans la durée pour la réussite des bénéficiaires.

Contrat d'Épargne

Ce contrat est un investissement à terme qui vise la croissance du capital investi avec un rendement potentiellement garanti et une part dans les bénéfices de la compagnie. Il s'agit d'une solution d'épargne flexible adaptée à divers horizons d'investissement.

2. PROJECTION DES ENGAGEMENTS D'ASSUREUR

La figure ci-dessous montre la répartition des sommes de réserves finales en MAD pour chaque catégorie de contrat de notre portefeuille a la date du 31 décembre 2023.

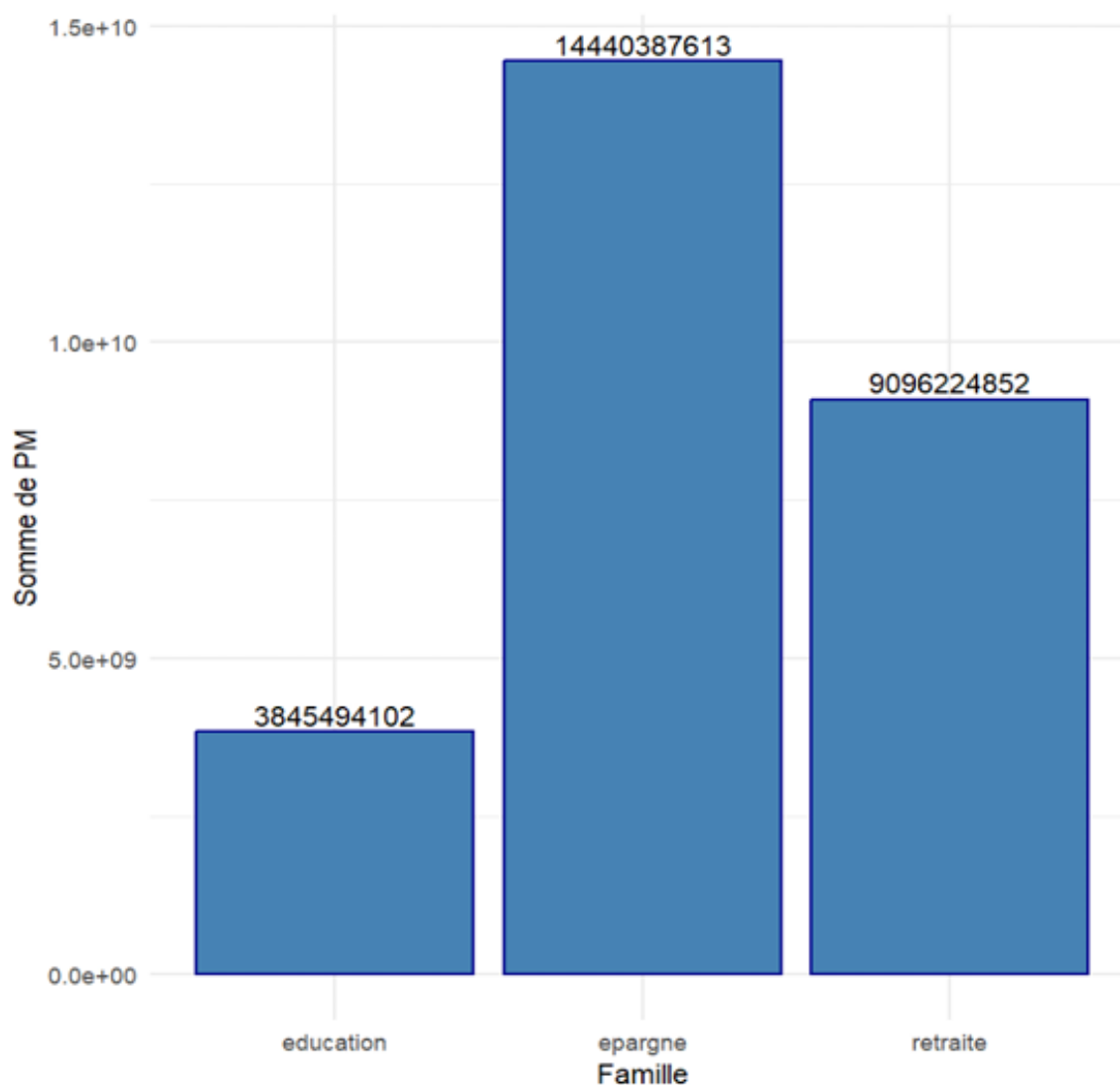


FIGURE 2.1 – sommes de réserves finales en MAD pour chaque catégorie de contrat de notre portefeuille a la date du 31 décembre 2023

Le graphique montre que les contrats d'épargne occupent la plus grande part de la provision mathématique, suivis par les contrats de retraite. En comparaison, les contrats d'éducation, bien qu'importants dans notre portefeuille, présentent une réserve finale relativement plus modeste.

2. PROJECTION DES ENGAGEMENTS D'ASSUREUR

Le passif d'une compagnie d'assurance est composé essentiellement des provisions techniques regroupées dans le tableau ci-dessous :

Type de Provision	Définition
Provision mathématique (PM)	C'est la différence entre les valeurs actualisées des engagements respectivement pris par l'assureur et les assurés.
Provision de gestion	Provision destinée à couvrir les charges de gestion futures des contrats non couverts par ailleurs.
Provision pour capitaux et rentes à payer	C'est la valeur des capitaux et rentes échus et restant à payer à la date de l'inventaire.
Provision pour participation aux bénéfices (PPB)	C'est le montant des participations aux bénéfices techniques et financiers attribués ou à attribuer aux bénéficiaires de contrats.
Provision pour fluctuations de sinistralité	Provision destinée à faire face aux fluctuations de sinistralité afférentes aux opérations d'assurances de groupe en cas de décès.
Provision de capitalisation	Provision destinée à parer à la dépréciation des valeurs comprises dans l'actif de l'entreprise et à la diminution de leur revenu.
Provision pour aléas financiers	Provision destinée à compenser la dépréciation des valeurs financières.
Provision pour risque d'exigibilité	Provision destinée à faire face aux exigences de rendement de l'actif à court terme et la montée des taux d'intérêt à long terme.

Cependant, les provisions mathématiques constituent l'élément le plus important

dans le passif d'une assurance vie et leur modélisation nécessite une meilleure connaissance de l'ensemble des produits gérés par le portefeuille, ainsi que le comportement des assurés en terme des rachats et des primes.

2.2 Hypothèses du passif

La projection constitue une étape essentielle dans la gestion des engagements d'une compagnie d'assurance. Cette procédure nécessite l'utilisation de tables de mortalité fiables et de modèles de comportement des assurés, comme les taux de rachat, afin d'estimer de manière précise les obligations futures.

Table de mortalité : Nous avons utilisé la table de mortalité TD88-90, qui fournit les probabilités de décès nécessaires à l'estimation de la mortalité et à la projection démographique.

Lois de sortie : Les lois de sortie décrivent le comportement des assurés en ce qui concerne la résiliation de leurs contrats d'assurance et sont cruciales pour la modélisation des flux de trésorerie. Les lois suivantes ont été adoptées :

- Les taux de rachat en nombre représentent la probabilité qu'un assuré résilie son contrat à un moment donné.
- Les primes moyennes périodiques estiment le montant moyen des primes versées régulièrement par l'assuré.
- Les taux de rachat en montants indiquent la proportion des engagements financiers qui ont été rachetés.
- Les primes moyennes non périodiques reflètent les primes versées de manière irrégulière, comme les versements uniques ou les primes d'exercice.
- Dans cette projection, les frais liés à la gestion des contrats ne seront pas pris en compte. Cette exclusion vise à simplifier le modèle et à se concentrer sur l'estimation des engagements principaux de la compagnie d'assurance.

Les graphiques ci-dessous illustrent les distributions et tendances observées à partir de l'analyse des données historiques de Wafa Assurance.

2. PROJECTION DES ENGAGEMENTS D'ASSUREUR

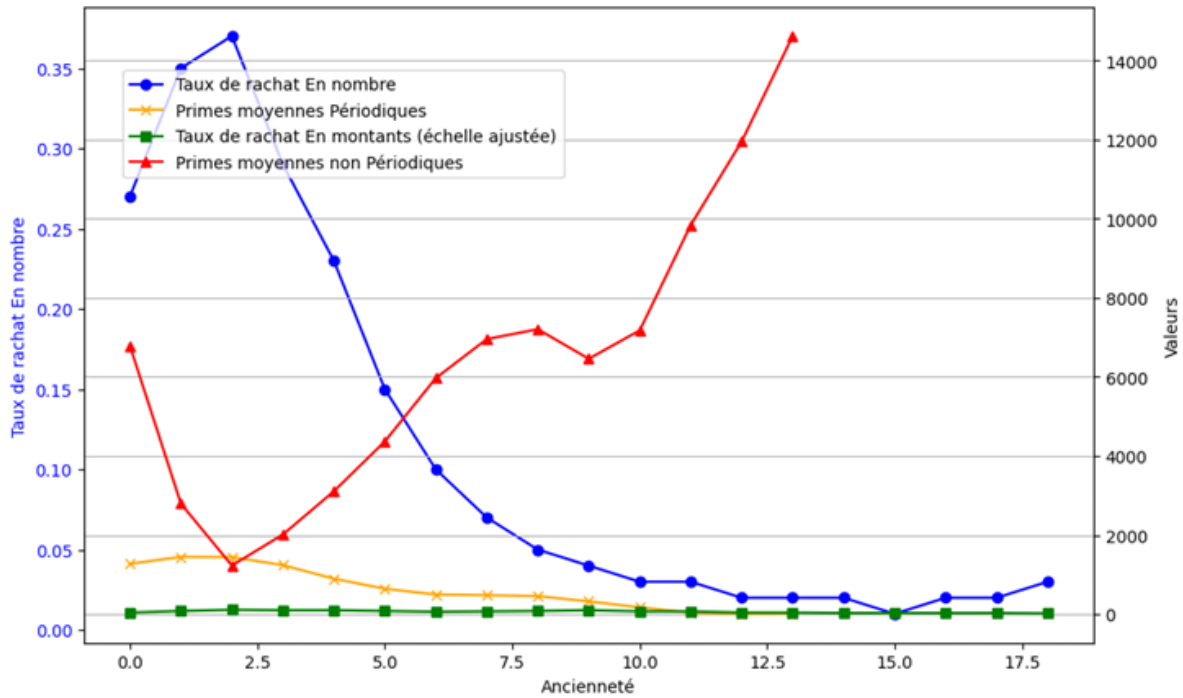


FIGURE 2.2 – Indicateur d'épargne.

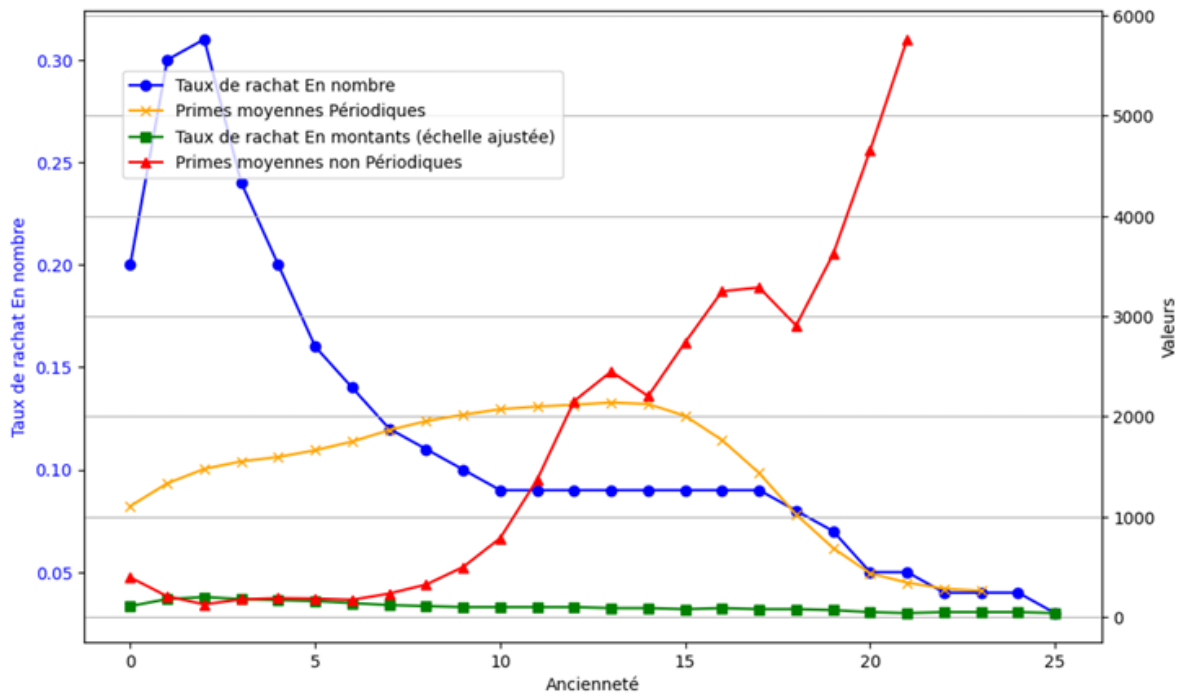


FIGURE 2.3 – Indicateur d'éducation.

2. PROJECTION DES ENGAGEMENTS D'ASSUREUR

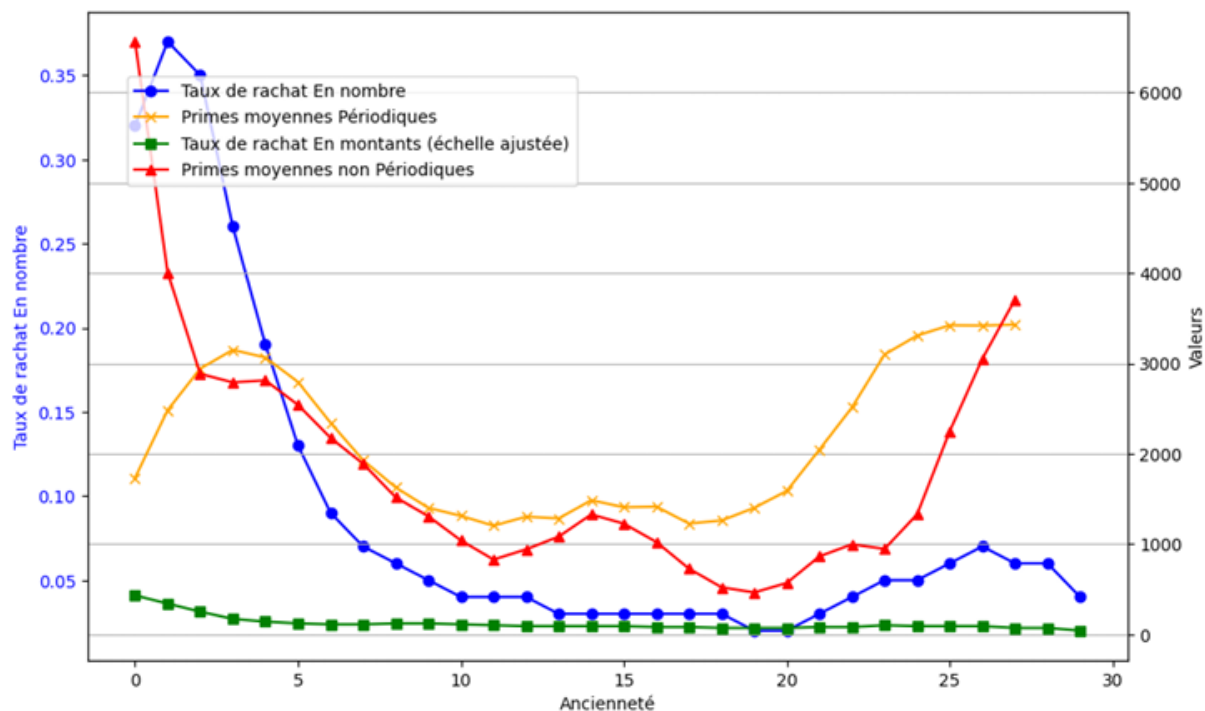


FIGURE 2.4 – Indicateur de retraite.

En effet, à la fin de chaque année de projection les engagements de l'assureur de clôture est calculée de la manière suivante :

$$PM_t = PM_{t-1} + \text{Primes Encaissées} - \text{Prestations} - \text{Rachats} + \text{Intérêts Techniques}$$

où :

- PM_{t-1} représente la provision mathématique à l'ouverture de l'année, ou à la fin de l'année précédente.
- Primes Encaissées inclut les primes périodiques et non périodiques versées par les assurés.
- Prestations désigne les paiements dus aux assurés, calculés comme le produit de la provision initiale et du taux de mortalité.
- Rachats représente la valeur des contrats rachetés par les assurés, évaluée par le produit de la provision initiale et du taux de rachat en montants.
- Intérêts Techniques sont les intérêts crédités sur la PM, ici fixés à un Taux Minimum Garanti (TMG) de 5%, plus la Participation aux Bénéfices (PB) reflétant la performance attendue des investissements.

Cette méthode récursive assure une revalorisation annuelle des contrats en accord

avec les mouvements du portefeuille et les conditions économiques, garantissant que la PM reflète fidèlement les engagements futurs de l'assureur.

2.3 Résultat de projection

La projection de la PM suit les étapes suivantes, présentées dans le tableau ci-dessous :

Type de Provision	Définition
Montant sinistre	Montant sinistre = $PM_{t-1} \times q_x$
Primes encaissées	Prime encaissée = primes périodiques + primes non périodiques
Montant racheté	Montant racheté = taux de rachat en montants $\times PM_{t-1}$
Flux financiers	Flux = $PM_{t-1} -$ Montant sinistre - Montant racheté + Prime encaissée
PM à la clôture	$PM_t =$ Flux \times Taux servi

où :

- **Montant sinistre** : Représente la valeur de la PM associée aux assurés décédés, calculée en multipliant la PM initiale par le taux de mortalité (q_x).
- **Primes encaissées** : La somme des primes périodiques et non périodiques payées par les assurés durant la période.
- **Montant racheté** : La valeur des contrats rachetés, calculée en multipliant le taux de rachat en montants par la PM initiale.
- **Flux financiers** : La variation de la PM après avoir pris en compte les sinistres, les rachats et les primes encaissées.
- **PM à la clôture** : La PM à la fin de la période, ajustée pour inclure les intérêts techniques.

Résultat de la projection de la PM :

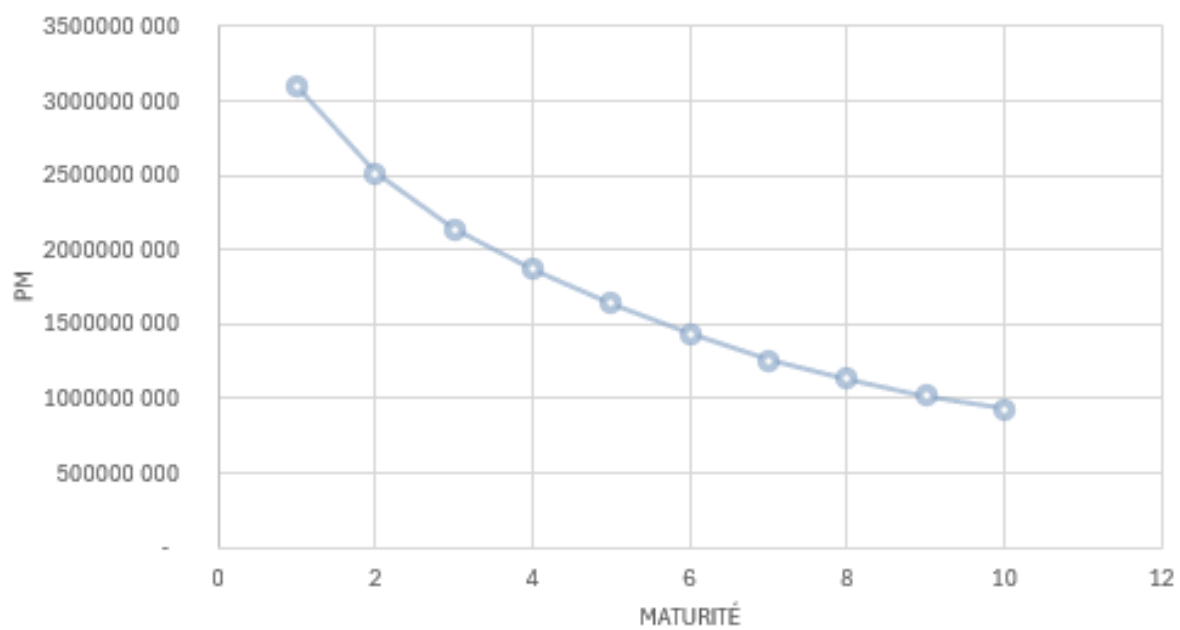


FIGURE 2.5 – Évolution des engagements de l'assureur à partir de 2023 sur 10 années

Chapitre 4

Application du modèle aux données de Wafa assurance

Contents

1	Calcul des paramètres de Sharpe et Tint	63
2	Analyse des résultats des portefeuilles optimaux	65
3	Portefeuille optimal avec contraintes combinées	66
4	Sensibilité du modèle aux perturbations des inputs	68
4.1	Méthodologie	68
4.2	Résultats	69
5	Optimisation robuste face aux erreurs d'estimation des paramètres . .	71
5.1	Méthodologie	71
5.2	Résultats	72

Dans ce chapitre, nous passerons à l'application pratique du Modèle d'allocation détaillé précédemment, Non seulement pour élaborer le portefeuille optimal mais aussi pour examiner l'impact du SCR marché, qui constitue un élément central de notre analyse.

1 Calcul des paramètres de Sharpe et Tint

Avant de commencer notre analyse, Rappelons les données nécessaires pour l'application du modèle.

Le taux de croissance des engagements

Le taux de croissance des engagements dans le modèle de Sharpe et Tint correspond à la variation des engagements d'une année à une autre. Ce taux a été calibré sur la base des projections du passif, -12,2% a été obtenu comme taux de croissance des engagements avec une volatilité de 3%.

Le taux de croissance moyen du passif est calculé comme suit :

$$\text{moyenne}_{t=1}^i \left(\frac{PM_t - PM_{t-i}}{PM_{t-i}} \right)$$

où PM_t représente l'engagement de l'assureur à l'instant t .

Ratio de Financement Initial

Par ailleurs, le poids du passif a été fixé à $m = 100\%$ et le ratio de financement initial, noté f_0 , a été retenu à :

$$f_0 = \frac{V_{M_0}}{P_{M_0}} = 130\%$$

où V_{M_0} et P_{M_0} représentent respectivement la valeur de marché des actifs et les engagements de l'assureur à $t=0$.

Nous avons aussi calibré la covariance entre les classes d'actif et le passif et l'application numérique suivant a donné le résultat suivant :

1. CALCUL DES PARAMÈTRES DE SHARPE ET TINT

$$\begin{bmatrix} \text{Cov}(r_{\text{Non coté}}, r_L) \\ \text{Cov}(r_{\text{Action}}, r_L) \\ \text{Cov}(r_{\text{immobilier}}, r_L) \\ \text{Cov}(r_{\text{taux}}, r_L) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.153\% \\ -0.478\% \\ 0.034\% \\ 0.046\% \end{bmatrix}$$

En effet, les obligations constituent la meilleure classe d'actifs de couverture contre les variations des engagements vue sa forte et positive corrélation avec le passif (95%).

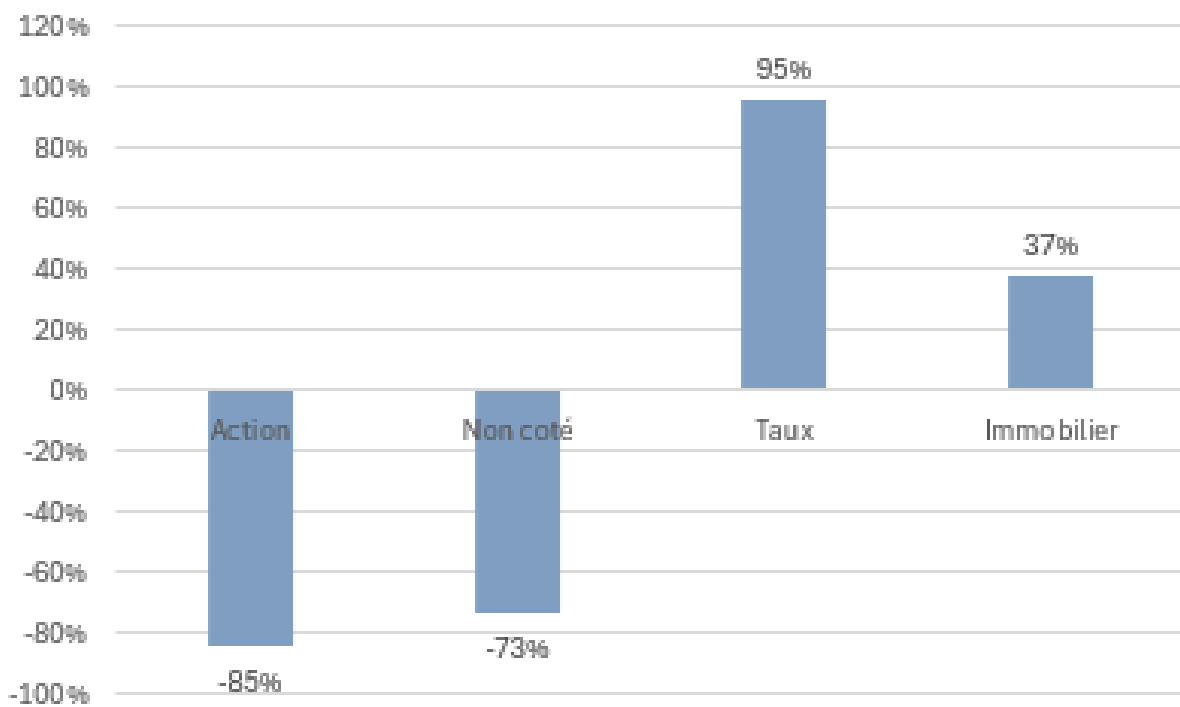


FIGURE 1.1 – Corrélation entre passif et les actifs

2 Analyse des résultats des portefeuilles optimaux

Après avoir calibrer les paramètres du modèle, nous allons examiner les résultats de nos allocations initiales . Cela pour pouvoir faire des constats dans les étapes ultérieures. En utilisant un algorithme d'optimisation non linéaire, disponible sur le logiciel R qui permet de résoudre les problèmes d'optimisation sous contraintes., nous obtenons les résultats suivants :

Classe d'actif	Sharpe-Tint / Volatilité	Sharpe-Tint / SCR marché	Écart
Non coté	9%	13%	-4%
Action	50%	39%	11%
Immobilier	0%	0%	0%
Taux	41%	48%	-7%
Rendement espéré	13,61%	11,12%	2,49%
Volatilité de surplus	21,89%	15,54%	6,35%
SCR marché	28,77%	14,29%	14,48%

TABLE 2.1 – Comparaison des portefeuilles optimaux pour les niveaux de SCR marché et volatilité du surplus du portefeuille actuel

Notre comparaison se basera sur les critères suivantes : **performances des actifs**, **rendement** et **volatilité** et comportement de **SCR marché**.

Pour les actifs **non cotés**, on remarque une différence importante entre les deux stratégies : 9 % pour la volatilité contre 13 % pour le SCR marché. Cet écart négatif de 4 % suggère que ces actifs sont mal adaptés aux exigences de SCR, probablement en raison de leur faible liquidité ou de leur profil de risque plus élevé.

Du côté des **actions**, les résultats sont assez intéressants. Elles affichent une volatilité de 50 % contre 39 % pour le SCR marché, ce qui indique que même si les actions sont plus volatiles, elles restent efficaces dans une stratégie ajustée pour le SCR, en optimisant le ratio de Sharpe tout en gérant bien le risque.

Pour **l'immobilier**, il n'y a aucun changement entre les deux approches : 0 % pour la volatilité comme pour le SCR marché. Cela pourrait signifier que l'immobilier est peu

affecté par ces critères, soit à cause de sa faible liquidité, soit parce que son rendement a été sous-estimé dans les deux scénarios.

Les produits de **taux** se montrent plus adaptés à la stratégie SCR marché, avec un score de 48 % contre 41 % pour la volatilité. Ce résultat montre que les produits de taux, souvent utilisés comme couverture, sont bien alignés avec les exigences du SCR tout en étant des actifs relativement sûrs dans les deux approches.

En termes de rendement global, on observe un léger avantage pour la stratégie basée sur la volatilité, avec un rendement espéré de 13,61 % contre 11,12 % pour le SCR marché. La différence n'est pas énorme, mais elle montre que la stratégie volatilité vise à maximiser les gains.

Cependant, en ce qui concerne la volatilité de surplus, la stratégie SCR marché montre une baisse significative, passant de 21,89 % à 15,54 %. Cette stratégie pénalise les actifs plus risqués pour mieux satisfaire les exigences réglementaires, ce qui confirme son efficacité pour réduire le risque.

Enfin, le SCR marché total est plus élevé dans la stratégie basée sur la volatilité. La stratégie SCR marché, plus prudente, permet de mieux contenir le capital requis pour couvrir les risques de marché.

En résumé, bien que la stratégie de volatilité génère un rendement légèrement supérieur, la stratégie SCR marché se distingue par une meilleure gestion du risque, en particulier dans un cadre réglementaire strict.

3 Portefeuille optimal avec contraintes combinées

Le problème suivant permet d'intégrer simultanément la contrainte de Solvabilité des Capitaux Requis (SCR) pour le marché et la contrainte relative à la volatilité du surplus, de la manière suivante :

3. PORTEFEUILLE OPTIMAL AVEC CONTRAINTES COMBINÉES

$$\max_{\mathbf{X}} r_A$$

Sous les contraintes :

$$k \cdot \text{Var}(r_s) + (1 - k) \cdot \text{SCR}_{march}^2 \leq \text{risque}_{cible}$$

$$\mathbf{X}' \cdot \mathbf{1} = 1$$

$$\forall i, \quad x_i^{min} \leq x_i \leq x_i^{max}$$

où le risque cible est défini par :

$$\text{risque}_{cible} = k \cdot \text{Var}(r_s)_{cible} + (1 - k) \cdot \text{SCR}_{march,cible}^2$$

Ici, k est un coefficient continu compris entre 0 et 1, permettant de pondérer les méthodes utilisées dans la création de l'allocation stratégique des actifs. Ce problème revient à résoudre le problème de Sharpe et Tint, où :

si $k = 1 \Rightarrow$ optimisation sous la contrainte de SCR du marché

si $k = 0 \Rightarrow$ approche sans contrainte de SCR

Pour analyser l'impact du choix entre ces deux méthodes, nous calculons le portefeuille optimal pour différentes valeurs de k .

Classe d'actifs	0%	20%	40%	60%	80%	100%
Non coté	13%	13%	11%	11%	9%	9%
Action	39%	42%	43%	45%	48%	50%
Immobilier	0%	0%	0%	0%	0%	0%
Taux	48%	47%	46%	44%	43%	41%
Rendement espéré	11,12%	11,9%	12,41%	12,81%	13,12%	13,61%
Volatilité du surplus	15,24%	15,41%	15,75%	15,86%	16,39%	21,89%
SCR marché	14,29%	14,23%	14,30%	16,67%	16,61%	28,77%

TABLE 3.1 – Portefeuille optimal en fonction de k

Ce tableau confirme les observations faites précédemment. En effet, dans le cadre de l'espérance-volatilité, la part des actions cotées et non cotées augmente, au détriment des obligations qui étaient davantage privilégiées dans ce même cadre. Par ailleurs, l'immobilier reste absent de nos allocations optimales.

4 Sensibilité du modèle aux perturbations des inputs

Dans cette partie, nous analyserons la sensibilité du portefeuille optimal face à de légères perturbations des paramètres d'entrée : espérances, variances et covariances des rendements des différentes classes d'actifs. L'objectif est, d'une part, de vérifier si de petites modifications de ces paramètres conduisent à un portefeuille complètement différent, ce qui révélerait une instabilité élevée. D'autre part, nous cherchons à identifier les classes d'actifs dont les poids sont les plus sensibles aux hypothèses initiales.

4.1 Méthodologie

Pour évaluer la stabilité du portefeuille optimal, nous avons appliqué des perturbations aux paramètres d'entrée du modèle, à savoir les rendements espérés, les volatilités et les covariances des différentes classes d'actifs. L'objectif est de recalculer le portefeuille optimal à chaque fois et ainsi quantifier son instabilité. Afin de mesurer l'impact de chaque paramètre, nous procédons à des calculs distincts selon les scénarios suivants :

- Perturbation des rendements espérés uniquement
- Perturbation des volatilités des classes d'actifs et du passif uniquement
- Perturbation des covariances uniquement
- Perturbation des trois paramètres combinés

Pour chaque scénario, nous définissons les paramètres modifiés comme suit :

$$\mu'_i = \mu_i \cdot (1 + k \cdot q)$$

$$\sigma'_i = \sigma_i \cdot (1 + k \cdot q)$$

$$\sigma'_{ij} = \sigma_{ij} \cdot (1 + k \cdot q) \quad \text{pour } i \neq j$$

$$\text{Avec } q \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

Par exemple, dans l'étude de l'impact des erreurs sur les estimations des espérances de rendement, nous perturbons ce paramètre pour chaque classe d'actifs avant de recalculer le portefeuille optimal. Ce processus génère des portefeuilles optimaux variés selon les combinaisons de paramètres. Nous utilisons l'approche de Sharma (2015) pour définir l'instabilité du poids de chaque classe d'actifs i comme suit :

$$\text{Instabilité classe d'actifs}_i = \sigma(X_i)$$

Nous en déduisons l'instabilité globale du portefeuille :

$$\text{Instabilité du portefeuille} = \sum_{i=1}^n \sigma(X_i)$$

4.2 Résultats

La figure ci-dessous présente les résultats d'instabilité pour divers niveaux d'erreurs dans l'estimation des paramètres.

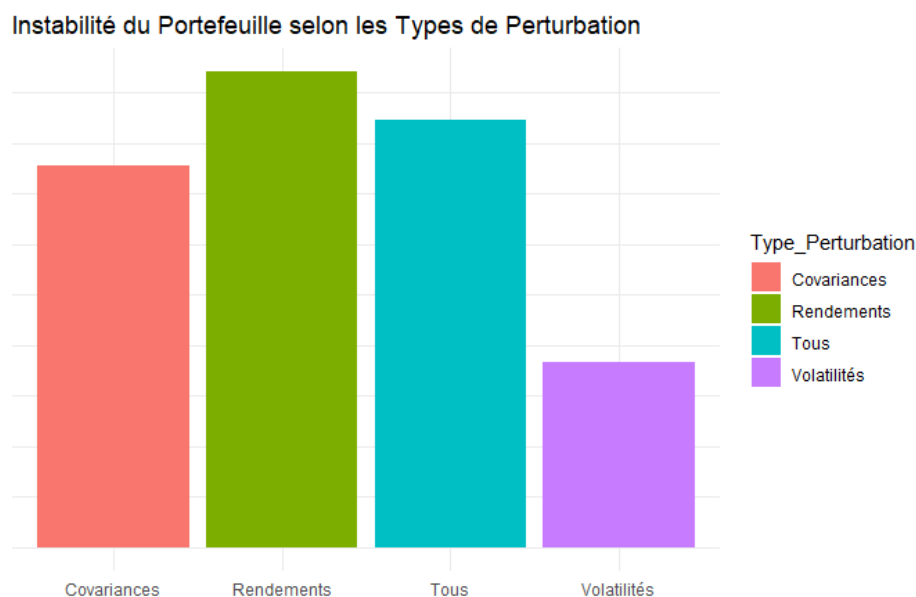


FIGURE 4.1 – instabilité du portefeuille par type de perturbation

Les résultats obtenus montrent que les erreurs d'estimation des rendements espérés ont un impact plus important que celles sur les volatilités celles induites par les covariances sur l'instabilité du portefeuille.

4. SENSIBILITÉ DU MODÈLE AUX PERTURBATIONS DES INPUTS

Enfin, en analysant l'instabilité par classe d'actifs, nous constatons que les classes avec les poids les plus faibles sont les plus sensibles aux perturbations.

Classe d'actif.	Instabilité
Non coté	4.62%
Action	1.80%
Immobilier	2.76%
Taux	0.55%

TABLE 4.1 – Instabilité par classe d'actifs

5 Optimisation robuste face aux erreurs d'estimation des paramètres

5.1 Méthodologie

Dans cette partie, nous allons adopter la méthode de rééchantillonnage de Michaud, qui s'appuie sur les simulations de Monte Carlo pour intégrer les erreurs d'estimation des paramètres dans le processus d'allocation d'actifs. Cette méthode consiste à générer plusieurs combinaisons de paramètres à partir des hypothèses initiales, permettant ainsi d'obtenir différents portefeuilles optimaux. Le portefeuille rééchantillonné sera ensuite déterminé en prenant la moyenne des poids des actifs des différents portefeuilles optimaux générés.

La procédure se présente comme suivant :

Soit B , le nombre de répétitions nécessaires à la convergence, la méthode de rééchantillonnage suit les étapes suivantes pour chaque itération i allant de 1 à B :

1. **Simulation des rendements** : Générer T vecteurs de rendements pour les classes d'actifs selon une loi multi-normale \hat{R} .
2. **Calcul des paramètres** : Calculer les espérances de rendements μ_i et la matrice de variance-covariance Σ_i associées aux rendements simulés.
3. **Optimisation** : Utiliser μ_i et Σ_i dans l'optimiseur pour déterminer le portefeuille optimal w_i .

Le portefeuille rééchantillonné w_r est obtenu en prenant la moyenne des portefeuilles optimaux sur les B répétitions :

$$w_r = \frac{1}{B} \sum_{i=1}^B w_i$$

Le portefeuille obtenu avec cette méthode est conçu pour être plus stable et moins vulnérable aux erreurs d'estimation des paramètres, car la méthode de Michaud intègre divers scénarios possibles dans le processus d'allocation d'actifs.

5.2 Résultats

Le graphique suivant présente les frontières efficaces calculées dans le plan rendement espéré-risque, le risque étant défini par

$$\text{Risque} = k \cdot \text{Var}(r_s) + (1 - k) \cdot \text{SCR}_m^2$$

avec k égal à 20%. Nous avons tracé la frontière efficace pour $T = 500$.

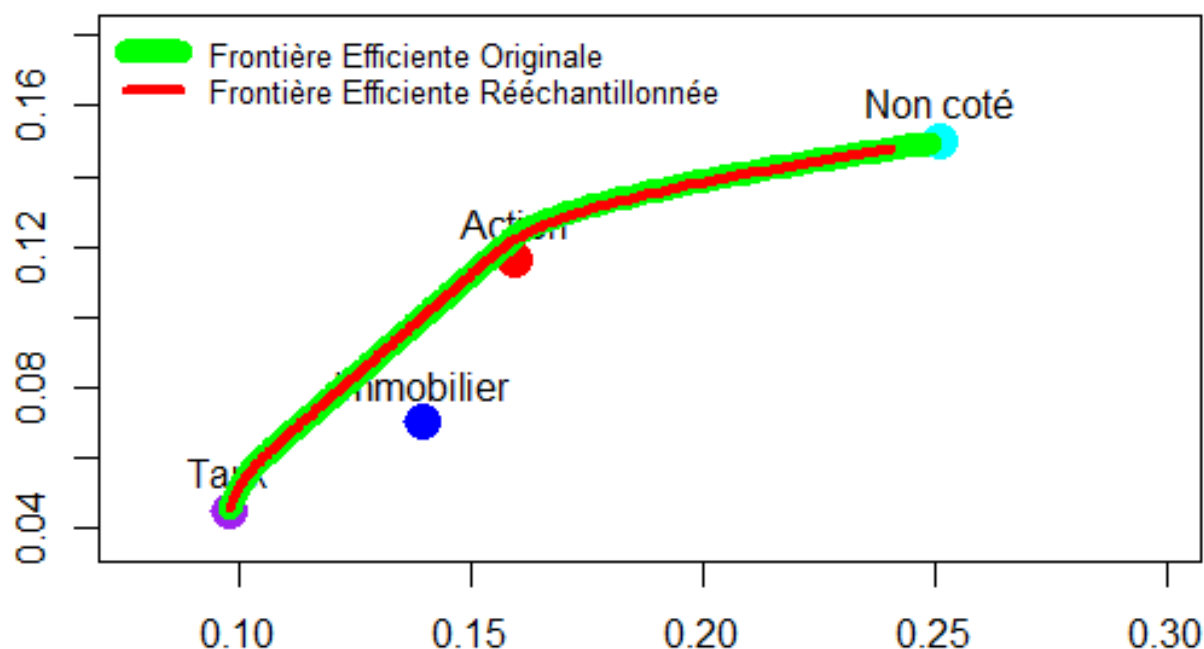


FIGURE 5.1 – Portefeuille efficace rééchantillonné vs original

Ce graphique montre que la frontière rééchantillonnée est légèrement plus lisse et moins volatile, ce qui démontre que le rééchantillonnage stabilise les choix d'allocation en réduisant la sensibilité aux variations aléatoires dans les estimations de rendement et de risque. Bien que les deux frontières soient proches, la version rééchantillonnée tend à être plus conservatrice, particulièrement pour les portefeuilles à risque élevé, un effet de diversification qui favorise des allocations plus robustes en évitant les portefeuilles trop extrêmes.

Pour approfondir l'analyse, il est pertinent de visualiser la composition en classes d'actifs des portefeuilles le long de chaque frontière efficace.

5. OPTIMISATION ROBUSTE FACE AUX ERREURS D'ESTIMATION DES PARAMÈTRES

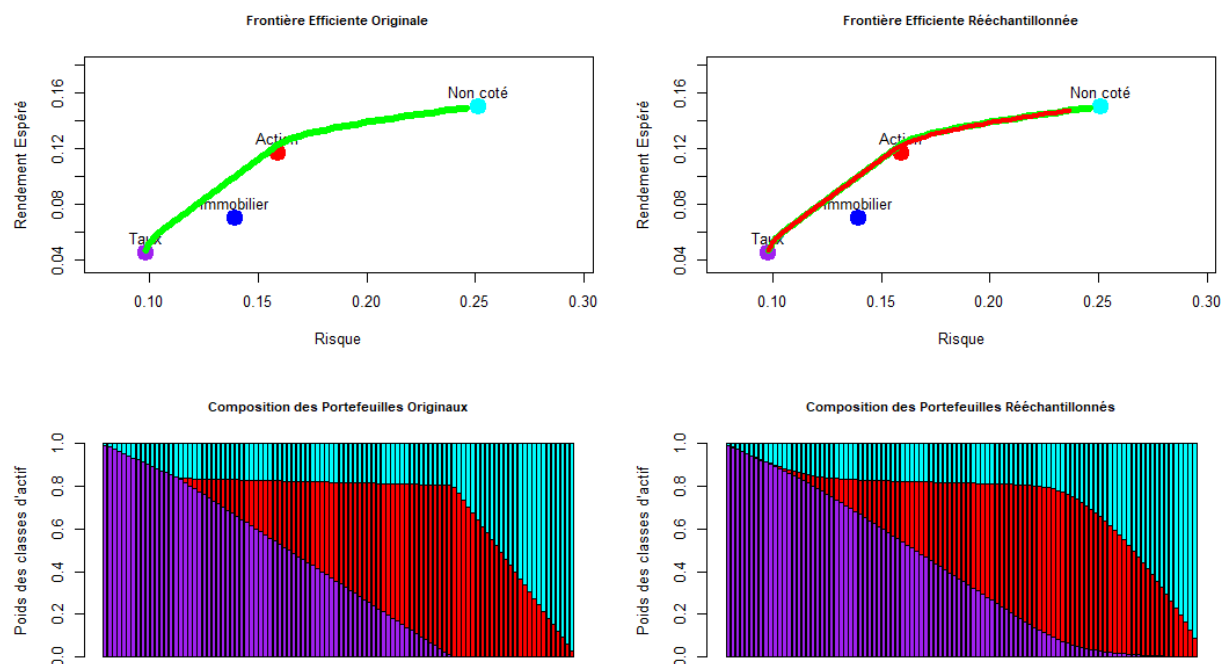


FIGURE 5.2 – Composition des portefeuilles efficaces rééchantionnées vs originaux

Dans le cas de la frontière originale, on constate des variations plus abruptes dans la répartition des actifs. Cela reflète une sensibilité plus élevée aux estimations initiales de rendement et de risque, ce qui peut entraîner des allocations plus extrêmes, privilégiant certains actifs pour maximiser le rendement ou minimiser le risque.

En revanche, la composition des portefeuilles rééchantionnés apparaît plus équilibrée. Le rééchantillonnage introduit un effet de diversification, répartissant les poids des actifs de manière plus homogène et favorisant des choix d'allocation plus stables. Cela se traduit par une transition plus progressive entre les classes d'actifs le long de la frontière rééchantionnée, particulièrement pour les portefeuilles de risque moyen à élevé. Ainsi, l'approche rééchantionnée peut être interprétée comme une stratégie visant à réduire la volatilité de l'allocation en répondant mieux aux incertitudes liées aux prévisions de rendement et de risque, au détriment de la maximisation stricte du rendement.

Il reste à vérifier que ce modèle est effectivement plus stable et moins sensible aux erreurs d'estimation des paramètres. Pour cela, nous introduisons des perturbations dans les paramètres d'entrée du modèle puis nous utilisons la technique du Resampling pour chaque scénario de paramètre modifié afin d'en déduire le portefeuille rééchantionné. Les

5. OPTIMISATION ROBUSTE FACE AUX ERREURS D'ESTIMATION DES PARAMÈTRES

résultats des différents scénarios nous permettront de calculer l'instabilité de chaque classe d'actifs et celle du portefeuille.

Le graphique suivant présente l'instabilité du portefeuille selon la méthode classique et celle du Resampling.

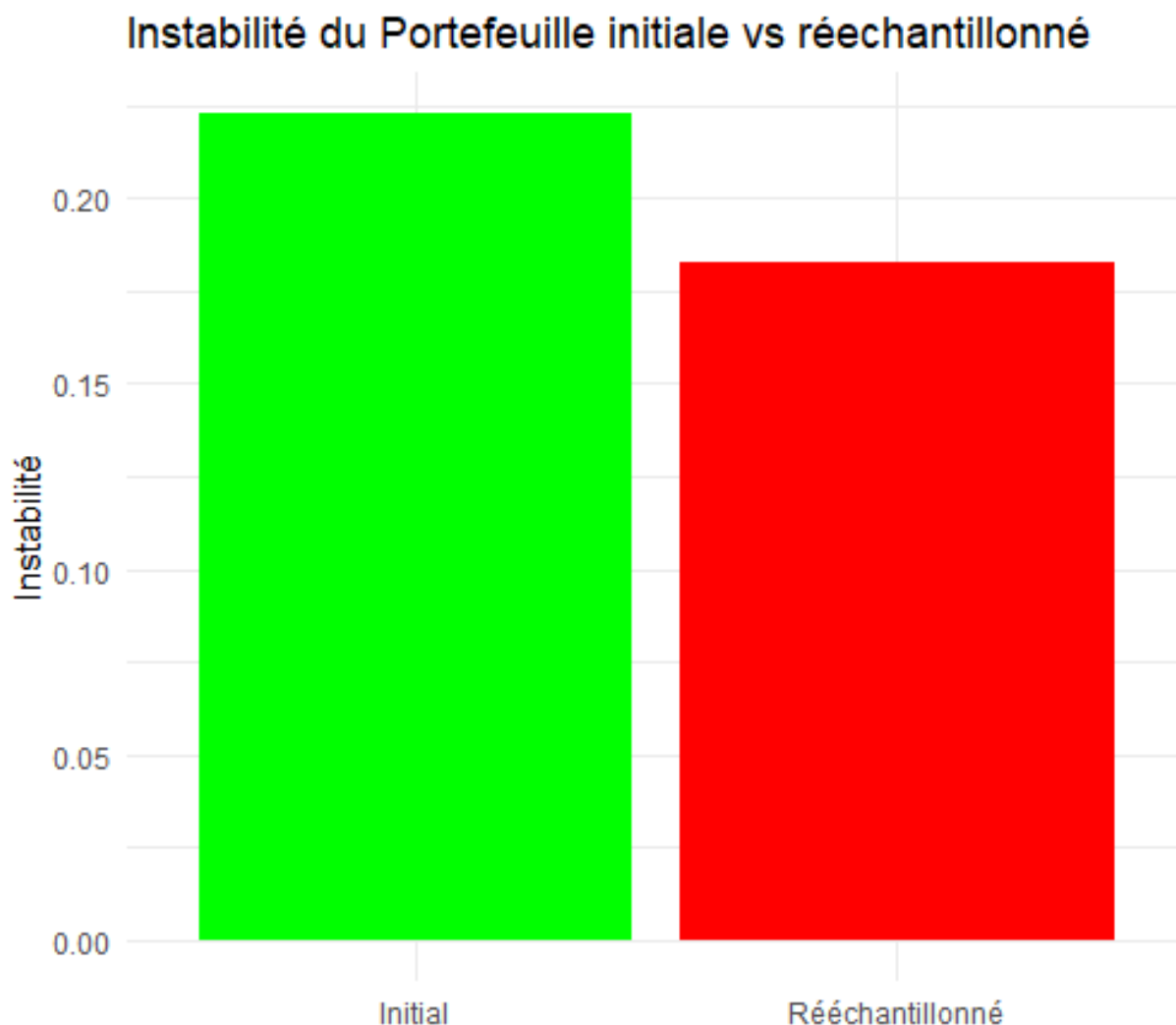


FIGURE 5.3 – Niveau d'instabilité du portefeuille rééchantionné vs original pour $k=20$

Ce graphique montre que l'instabilité de notre portefeuille baisse lorsqu'on utilise la méthode de Michaud.

Ce résultat montre que l'utilisation de **la méthode Michaud améliore la stabilité du modèle et réduit l'impact des erreurs d'estimation des paramètres**. Toutefois, son application doit être précédée d'une estimation rigoureuse, en particulier

5. OPTIMISATION ROBUSTE FACE AUX ERREURS D'ESTIMATION DES PARAMÈTRES

des rendements espérés. Les portefeuilles générés sont plus diversifiés.

Cependant, cette approche présente également des limites. En effet, aucune théorie ne démontre qu'elle permet d'obtenir un portefeuille supérieur à celui obtenu par une méthode classique. De plus, étant donné que le portefeuille final est une moyenne des différents portefeuilles issus de chaque simulation, il est possible que ce portefeuille ne respecte pas toutes les contraintes initiales.

Conclusion générale

L'objectif de ce rapport était d'analyser l'impact de la prise en compte du paramètre SBR sur l'allocation stratégique d'actifs en assurance vie. Nous avons examiné les différentes exigences de l'assureur vie pour l'allocation d'actifs et introduit une séparation en deux étapes, « stratégique » et « tactique », permettant une gestion adaptative des investissements. Après avoir comparé le modèle classique de Sharpe et Tint avec une version sous contrainte de SCR marché, nous avons conclu que cette contrainte incite à investir moins dans des actifs risqués sur le court terme, favorisant la prudence.

Les tests réalisés montrent que, sous l'approche SCR marché, les portefeuilles sont plus stables et moins exposés aux pertes extrêmes, bien que présentant des rendements potentiellement plus bas et une volatilité moins contrôlée. Pour pallier cette prudence excessive, nous avons proposé un modèle hybride combinant les deux approches, permettant ainsi une flexibilité selon la tolérance aux risques et l'objectif de rendement de l'assureur. En effectuant des tests de sensibilité, nous avons constaté que l'utilisation de la technique de Resampling de Michaud réduisent significativement l'instabilité liée aux erreurs d'estimation des paramètres, renforçant ainsi la robustesse du portefeuille.

En somme, la contrainte de coût en capital sous SBR doit être intégrée dans l'allocation stratégique d'actifs pour éviter des capitaux réglementaires trop élevés. Cependant, elle n'exclut pas complètement l'utilisation de mesures de risque alternatives, permettant aux assureurs d'atteindre des objectifs de rendement ajustés aux exigences réglementaires et aux perspectives de marché.

Bibliographie

- [1] AYOLA, *Etude comparative de la nouvelle réforme marocaine solvabilité basée sur les risques (SBR) et la norme solvabilité 2*, 2020, Mémoire d'actuaire, ISFA, 10 p.
- [2] AQR, *First quarter 2015 Capital Market Assumptions for Major Asset Classes*, 2015. Disponible sur <http://www.aqr.com/>, 10 p.
- [3] AQR, *First quarter 2018 Capital Market Assumptions for Major Asset Classes*, 2018. Disponible sur <http://www.aqr.com/>, 13 p.
- [4] Berrada, S., *Allocation stratégique dans le cadre de l'épargne-retraite*, Mémoire d'actuaire, Ensaie ParisTech, 2015, 134 p.
- [5] Black, F. et Litterman, R., *Global Portfolio Optimization*, Financial Analysts Journal, Vol. 48, 1992, 28 p.
- [6] Braun, A., Schmeiser, H. et Schreiber, F., *Portfolio Optimization Under Solvency II : Implicit Constraints Imposed By The Market Risk Standard Formula*, The Journal of Risk and Insurance, Vol. 84 n°1, 2017, p. 177-207.
- [7] Duarte, T.B., Valladao, D.M. et Veiga, A., *Asset Liability management for open pension schemes using multistage stochastic programming under solvency-II-based regulatory constraints*, Insurance : Mathematics and Economics, 2017, 77 : 177-188.
- [8] Hellgren, E. et Ugglå, F., *Asset allocation under Solvency 2 – Adjusting investments for capital efficiency*, Master of Science Thesis, 2015.
- [9] Kouwenberg, R., *Strategic asset allocation for insurers under Solvency II*, Journal of Asset Management, Vol. 19, 2018, p. 447-459.
- [10] Gordon, M. et Shapiro, E., *Capital Equipment Analysis : The Required Rate of Profit*, Management Science, Vol. 3 n°1, Part 1, 1956, p. 102-110.
- [11] Chopra, V. et Ziemba, W., *The Effect of Errors in Means, Variances, and Covariances on Optimal Portfolio Choice*, Journal of Portfolio Management, Vol. 19, 1993, p. 6-10.

Annexe A : Résolution du problème de Markowitz en absence d'actif sans risque

Résolution du problème d'optimisation de Markowitz en absence d'actif sans risque (ventes à découvert autorisées).

$$\min_{\{x_i\}_{i=1}^n} \sigma_x^2$$

Sous les contraintes : $E(R_x) \geq R_{\text{obj}}$ et $\sum_{i=1}^n x_i = 1$

Ce problème peut se réécrire de façon matricielle comme suit :

$$\min_{\mathbf{X}} \frac{1}{2} \mathbf{X}^\top \Sigma \mathbf{X}$$

Sous les contraintes : $\mu^\top \mathbf{X} \geq R_{\text{obj}}$ et $\mathbf{1}^\top \mathbf{X} = 1$

Avec μ le vecteur des rendements espérés et Σ sa matrice de variance-covariance.

Le coefficient t est introduit pour éviter le coefficient 2 qui apparaît lors de la dérivation du Lagrangien. Ce dernier ne modifie pas le portefeuille optimal.

Le Lagrangien associé à ce problème s'écrit :

$$\mathcal{L}(\mathbf{X}, \lambda_1, \lambda_2) = \frac{1}{2} \mathbf{X}^\top \Sigma \mathbf{X} + \lambda_1 (R_{\text{obj}} - \mu^\top \mathbf{X}) + \lambda_2 (1 - \mathbf{1}^\top \mathbf{X})$$

Avec λ_1 et λ_2 , les coefficients multiplicateurs (positifs) de Lagrange associés aux contraintes.

Les conditions nécessaires du premier ordre s'écrivent :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{X}} = 0 \Rightarrow \Sigma \mathbf{X} - \lambda_1 \mu - \lambda_2 \mathbf{1} = 0$$

$$\mu^\top \mathbf{X} = R_{\text{obj}}$$

$$\mathbf{1}^\top \mathbf{X} = 1$$

En notant :

$$A = \mu^\top \Sigma^{-1} \mu, \quad B = \mu^\top \Sigma^{-1} \mathbf{1}, \quad C = \mathbf{1}^\top \Sigma^{-1} \mathbf{1}$$

$$D = AC - B^2, \quad \mathbf{X}^* = \Sigma^{-1}(\lambda_1 \mu + \lambda_2 \mathbf{1})$$

Les équations précédentes se réécrivent :

$$\begin{cases} \lambda_1 B + \lambda_2 C = R_{\text{obj}} \\ \lambda_1 A + \lambda_2 B = 1 \end{cases}$$

En en déduit que

$$\lambda_1 = \frac{CR_{\text{obj}} - A}{D} \quad \text{et} \quad \lambda_2 = \frac{B - AR_{\text{obj}}}{D}$$

Avec $D = BC - A^2$

Les coefficients A , B et C sont positifs car la matrice de variance covariance Σ ainsi que son inverse sont définies positives. En effet, si V est un vecteur colonne appartenant à \mathbb{R}^d alors $V^\top \Sigma V = \text{Var}(x_1 + \dots + x_d) \geq 0$.

En conséquence, le coefficient D est positif car en effet il suffit de considérer que d'une part

$$BC = A^\top B = (BC) - (AB) = BD = D \quad \text{et que d'autre part} \quad BC = (BA - (A)^\top + BBB^\top + A^\top$$